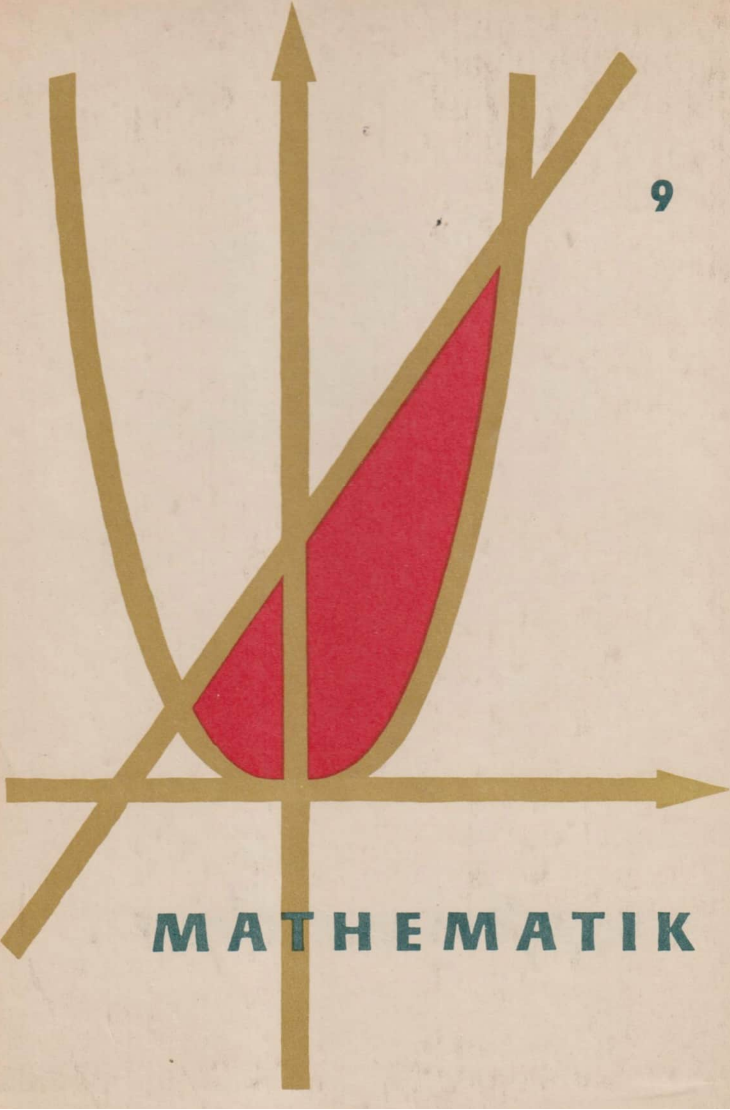


9

MATHEMATIK

MATHEMATIK

LEHRBUCH FÜR DIE NEUNTE KLASSE
DER OBERSCHULE

Ausgabe 1959

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1961

Den Teil A und den Teil B, mit Ausnahme der Abschnitte B, II und B, III, verfaßte Harald Stenzschell. Die Abschnitte B, II und B, III wurden von Hans Simon und der Teil C von Oskar Mader verfaßt.

Gemäß der Verordnung vom 14. 8. 1958 über die physikalisch-technischen Einheiten sind alle Angaben in Verbindung mit der Einheit Doppelzentner (dz) als Dezitonnen (dt) aufzufassen.

Zeichnungen: Kurt Dornbusch und Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung: Heinz Unzner
Redaktionsschluß: 1. April 1959

ES 11 G · Bestell-Nr. 00919-3 · 2,85 DM · Lizenz 203 · 1000/60 (DN)
Satz: Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg (IV/1/8)
Druck: Karl-Marx-Werk, Pößneck, V 15/30

A. Arithmetik

I. Das Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole

1. Zur Wiederholung

1) In den folgenden Aufgaben sollen die untereinanderstehenden Monome oder Polynome addiert werden. Die Aufgaben sollen dazu statt in zwei oder mehr Zeilen auch in einer Zeile mit und ohne Verwendung von Klammern geschrieben werden.

1. a) $\begin{array}{r} +12 \\ \underline{+\;\;7} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} -3 \\ \underline{-5} \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} +11 \\ \underline{-\;\;7} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} -8 \\ \underline{+3} \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} -\;\;5 \\ \underline{+13} \end{array}$

f) $\begin{array}{r} +2c \\ \underline{+7c} \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} -5d \\ \underline{-3d} \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} +8f \\ \underline{-3f} \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} -\;\;2h \\ \underline{+12h} \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} -18w \\ \underline{+\quad w} \end{array}$

l) $\begin{array}{r} +\frac{1}{3}b \\ \underline{+\frac{1}{4}b} \end{array}$ **m)** $\begin{array}{r} -\frac{e}{5} \\ \underline{+\frac{e}{6}} \end{array}$ **n)** $\begin{array}{r} -\frac{m}{10} \\ \underline{-\frac{3}{5}m} \end{array}$ **o)** $\begin{array}{r} +\frac{n}{12} \\ \underline{-\frac{4}{3}p} \end{array}$ **p)** $\begin{array}{r} -p \\ \underline{+\frac{3}{4}p} \end{array}$

2. a) $\begin{array}{r} m \\ \underline{+2} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} m \\ \underline{-2} \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} m+1 \\ \underline{-1} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} m-a \\ \underline{+m} \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} m+a \\ \underline{-m} \end{array}$

f) $\begin{array}{r} +3 \\ \underline{h+1} \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} -4 \\ \underline{f-2} \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} 2 \\ \underline{g+1} \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} 7-m \\ \underline{-m} \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} m+3 \\ \underline{-4} \end{array}$

l) $\begin{array}{r} x \\ \underline{x-y} \end{array}$ **m)** $\begin{array}{r} -x \\ \underline{x+y} \end{array}$ **n)** $\begin{array}{r} -x \\ \underline{y-x} \end{array}$ **o)** $\begin{array}{r} x-y \\ \underline{-y} \end{array}$ **p)** $\begin{array}{r} y-x \\ \underline{-x} \end{array}$

3. a) $\begin{array}{l} 2b \\ \underline{3-5b} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} 5b-1 \\ \underline{17b\quad\;} \end{array}$ **c)** $\begin{array}{l} 15b-3 \\ \underline{-2b\quad\;} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} b \\ \underline{2-3b} \end{array}$ **e)** $\begin{array}{l} 3b \\ \underline{-b+3} \end{array}$

f) $\begin{array}{l} m+2 \\ \underline{m-2} \end{array}$ **g)** $\begin{array}{l} n+4 \\ \underline{4-n} \end{array}$ **h)** $\begin{array}{l} 3m+2 \\ \underline{\;\;1-4m} \end{array}$ **i)** $\begin{array}{l} n+3 \\ \underline{4-n} \end{array}$ **k)** $\begin{array}{l} a\;-x \\ \underline{2x+a} \end{array}$

4. a) $\begin{array}{l} 3a-x \\ \underline{2\;\;-a} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} a-b \\ \underline{4-a} \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} m-2n \\ \underline{3m+4n} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} n+6m \\ \underline{-3m-2n} \end{array}$

e) $\begin{array}{l} 2x\;-y \\ \underline{-y+x} \end{array}$ **f)** $\begin{array}{l} 3x+2y \\ \underline{2x-3y} \end{array}$ **g)** $\begin{array}{l} 15x-2y+\;\;3z \\ \underline{-3z-2y+15x} \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} a+\frac{b}{3}-\frac{5}{6}c \\ \underline{-\frac{a}{2}+b+3c} \end{array}$

5. a) $\begin{array}{r} +5b \\ -3b \\ -2b \\ +4b \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} +6c \\ -2c \\ -5c \\ -18c \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} -9x \\ +3x \\ -12x \\ +4x \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} -21m \\ +9m \\ +m \\ +4m \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} -3m \\ -4m \\ -10m \\ +m \\ \hline \end{array}$

6. a) $\begin{array}{l} 3a-4b+9c-5d \\ 7a+b-3c-7d \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} a+2b+3c+d \\ -3a+b-4c+6d \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{l} \frac{3}{2}a+\frac{b}{3}-\frac{2}{5}c+\frac{3}{10}d \\ \frac{5}{2}a-\frac{5}{6}b-\frac{c}{10}+\frac{7}{4}d \\ \hline \end{array}$

7. a) $\begin{array}{r} 5a-2b+3c-d \\ -a+3b-5c-2d \\ +3a-8b+c+4d \\ -5a-7b+9c+14d \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x-7y+3z-u \\ -5x+3y+4z+2u \\ +3x-6y-9z+8u \\ +2x+3y-5z+3u \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 2{,}35m+3{,}7n-2{,}31p-2{,}52q \\ -1{,}63m-5{,}8n+1{,}95p+4{,}60q \\ +4{,}65m-1{,}9n+0{,}36p-0{,}08q \\ \hline \end{array}$

2) In den folgenden Aufgaben sollen die an erster Stelle stehenden Monome oder Polynome als Minuend, die an zweiter Stelle stehenden als Subtrahend betrachtet werden. Die Aufgaben sollen auch mit und ohne Verwendung von Klammern in einer Zeile geschrieben werden.

1. a) $\begin{array}{r} +13 \\ +6 \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} -10 \\ -3 \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} +15 \\ -8 \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} -13 \\ +6 \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} +9 \\ -4 \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{r} +10x \\ +5x \\ \hline \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} +12x \\ -2x \\ \hline \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} -5b \\ -2b \\ \hline \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} -7m \\ +m \\ \hline \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} -5z \\ +4z \\ \hline \end{array}$

l) $\begin{array}{r} +\frac{1}{2}b \\ +\frac{1}{4}b \\ \hline \end{array}$ **m)** $\begin{array}{r} -\frac{d}{3} \\ +\frac{d}{6} \\ \hline \end{array}$ **n)** $\begin{array}{r} -\frac{3}{4}x \\ -\frac{x}{8} \\ \hline \end{array}$ **o)** $\begin{array}{r} +\frac{7}{5}z \\ -\frac{3}{10}z \\ \hline \end{array}$ **p)** $\begin{array}{r} -\frac{2}{5}m \\ +\frac{3}{10}m \\ \hline \end{array}$

q) $\begin{array}{r} -\frac{3}{7}n \\ -\frac{n}{2} \\ \hline \end{array}$ **r)** $\begin{array}{r} -\frac{25}{12}p \\ -\frac{2}{3}p \\ \hline \end{array}$ **s)** $\begin{array}{r} -2{,}5s \\ +1{,}7s \\ \hline \end{array}$ **t)** $\begin{array}{r} +1{,}73v \\ -0{,}27v \\ \hline \end{array}$ **u)** $\begin{array}{r} -0{,}04f \\ -0{,}04f \\ \hline \end{array}$

2. a) $\begin{array}{l} m-2 \\ 2 \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} m+5 \\ 5 \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} m-1 \\ -1 \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} m+a \\ m \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} z-b \\ -b \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{r} +3 \\ n+2 \\ \hline \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} -5 \\ g-6 \\ \hline \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} +4 \\ y+1 \\ \hline \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} 4-n \\ -n \\ \hline \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} 21-b \\ +5b \\ \hline \end{array}$

l) $\begin{array}{l} x \\ x-y \\ \hline \end{array}$ **m)** $\begin{array}{r} -z \\ y+2z \\ \hline \end{array}$ **n)** $\begin{array}{l} -a+b \\ -b \\ \hline \end{array}$ **o)** $\begin{array}{r} c-3d \\ -3c \\ \hline \end{array}$ **p)** $\begin{array}{r} z-x \\ -3z \\ \hline \end{array}$

3. a) $\begin{array}{r} 3z \\ x-z \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 7y \\ 2x-5y \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} 4a \\ 2b-a \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} 9x \\ y+3x \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} z \\ a-z \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{r} -5x \\ x-y \\ \hline \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} -3b \\ 2a-5b \\ \hline \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} -9c \\ a-c \\ \hline \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} 6c \\ -a-3c \\ \hline \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} -15m \\ -3n-13m \\ \hline \end{array}$

4. a) $\begin{array}{r} n+1 \\ n-1 \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} n-1 \\ 1-n \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} n-1 \\ n-1 \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} 1-n \\ n-1 \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} 1-n \\ 1+n \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{r} n+x \\ -x+2 \\ \hline \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} n-x \\ -5-x \\ \hline \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} a+x \\ -a-1 \\ \hline \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} x+y \\ -y+a \\ \hline \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} x-y \\ a-2y \\ \hline \end{array}$

l) $\begin{array}{r} 3n+5m \\ 5m+2n \\ \hline \end{array}$ **m)** $\begin{array}{r} 4x-5y \\ 3x+2y \\ \hline \end{array}$ **n)** $\begin{array}{r} -5a-3b \\ a+5b \\ \hline \end{array}$ **o)** $\begin{array}{r} -u-3v \\ 3v-5u \\ \hline \end{array}$ **p)** $\begin{array}{r} 6x-y \\ -x+y \\ \hline \end{array}$

5. a) $\begin{array}{r} 3a-2b+6c-7d \\ 2a-5b-3c+9d \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 10a-3b+5c-7d \\ b-3c+5d-a \\ \hline \end{array}$

3) In den folgenden Aufgaben sind die Polynome mit den Monomen zu multiplizieren. Durch nachfolgende Division des Produktes durch das Monom ist die Richtigkeit der Ergebnisse zu prüfen. Bei Aufgabe 3 und 4 sind vorher mit Hilfe der binomischen Formeln Polynome herzustellen.

1. a) $(5a-3b+2c)(+3)$ **b)** $(-3x+5y+2z)(-4)$ **c)** $(14m+7n+2p)(-5)$

2. a) $(+3x-4y+5z)(+3x)$ **b)** $(4z+5a-7b)(-5a)$ **c)** $(-12m-16n+10p)\left(-\frac{n}{2}\right)$

3. a) $(x+y)^2(+x)$ **b)** $(x-y)^2(-y)$ **c)** $(x+y)(x-y)(-xy)$

4. a) $(2m-4n)^2(3a)$ **b)** $\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right)^2(-c)$ **c)** $(4a+3b)(4a-3b)\left(-\frac{1}{2}\right)$

d) $(0{,}2f+0{,}3g)^2(-0{,}5)$ **e)** $(0{,}4m-1{,}1n)^2(+0{,}2)$

5. Welchen Wert haben die einzelnen Faktoren in der Aufgabe 2, wenn
in Aufgabe 2a $x=-2;\ y=3;\ z=-\frac{1}{2}$,
in Aufgabe 2b $z=0{,}5;\ a=0{,}2;\ b=10$,
in Aufgabe 2c $m=-0{,}5;\ n=-1;\ p=2{,}4$
gesetzt wird? Vergleichen Sie mit dem Produkt! Bilden Sie selbst ähnliche Beispiele aus den Aufgaben 1, 3 und 4!

4) Führen Sie folgende Divisionen aus! Beachten Sie dabei die Möglichkeit, den Dividenden zu vereinfachen!

1. a) $(15x+10y):(-5)$ **b)** $(3a-4b):(+6)$ **c)** $(34m+102n):(-17)$

2. a) $(mx+my):(-m)$ **b)** $(-a^2+20ab):(-4a)$ **c)** $(12x^2y-4xy^2):(+8xy)$

3. a) $\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}xy\right):\left(-\frac{2}{3}x\right)$ **b)** $\left(\frac{5}{8}y^2+\frac{3}{4}xy\right):\left(+\frac{y}{8}\right)$

c) $(2{,}5axy-3{,}5axz):(-0{,}5a^2x)$ **d)** $(-0{,}03mn^2-0{,}003m^2n):(-3mn)$

2. Multiplikation von Polynomen

Bisher ist die Multiplikation von zwei Binomen folgendermaßen erklärt worden:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

$(a + b)(c + d)$

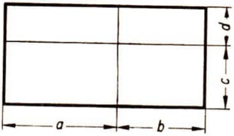


Abb. 1a

Drücken Sie den Rechenweg in Worten aus!

Geometrisch kann die Multiplikation zweier Binome als Bestimmung des Flächeninhaltes eines Rechteckes gedeutet werden (Abb. 1).

Veranschaulichen Sie auf die gleiche Weise

$(a + b)(c - d)$ und $(a - b)(c + d)$!

$(a - b)(c - d)$

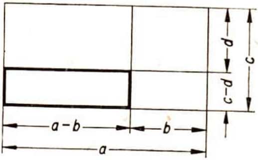


Abb. 1b

Zuweilen ist die Bildung der verschiedenen Einzelprodukte nicht notwendig, wenn man besondere Multiplikationsformeln, die sogenannten binomischen Formeln, benutzt.

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Veranschaulichen Sie die drei binomischen Formeln geometrisch!

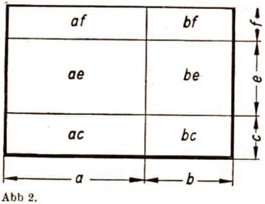


Abb 2.

Wir setzen nun in dem Ausdruck $(a + b)(c + d)$ statt d die Summe $(e + f)$. Damit erhalten wir das Produkt eines Binoms und eines Trinoms, einer dreigliedrigen algebraischen Summe:

$$(a + b)\,[c + (e + f)] = (a + b)(c + e + f)$$
$$= ac + ae + af + bc + be + bf.$$

Auch in diesem Falle multiplizieren wir jedes Glied des ersten Faktors mit jedem Glied des zweiten Faktors. Geometrisch können wir auch dieses Produkt aus zwei Faktoren als Flächeninhalt eines Rechteckes deuten (Abb. 2).

Setzen wir weiterhin anstatt a die Summe $(x + y)$, so erhalten wir ein Produkt au zwei Trinomen:

$$[(x + y) + b](c + e + f) = (x + y + b)(c + e + f)$$
$$= cx + ex + fx + cy + ey + fy + bc + be + bf$$

Ein Produkt aus drei Binomen wird wie folgt ausmultipliziert:

$$(a+b)(c+d)(e+f) = (ac+ad+bc+bd)(e+f)$$
$$= ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf.$$

Wir bilden also zunächst das Produkt aus den ersten beiden Faktoren und multiplizieren es mit dem dritten Faktor.

Auf diese Weise läßt sich jede Multiplikation von mehr als zwei Polynomen auf eine Multiplikation von zwei Polynomen zurückführen.

Wir können verallgemeinern:

Zwei Polynome werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit allen Gliedern des anderen Polynoms multipliziert.

Eine Erweiterung der binomischen Formeln erhalten wir durch

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Bei der überschlägigen Berechnung von Kubikzahlen ergeben sich folgende Anwendungsmöglichkeiten für diese binomische Formel:

a) Die Seitenlänge eines Würfels beträgt 4,2 cm.
Wie groß ist sein Volumen?

$$V = (4{,}2\text{ cm})^3 = (4\text{ cm} + 0{,}2\text{ cm})^3$$
$$V = (4\text{ cm})^3 + 3\cdot(4\text{ cm})^2\cdot 0{,}2\text{ cm} + 3\cdot 4\text{ cm}\cdot(0{,}2\text{ cm})^2 + (0{,}2\text{ cm})^3$$
$$V = 64\text{ cm}^3 + 9{,}6\text{ cm}^3 + 0{,}48\text{ cm}^3 + 0{,}008\text{ cm}^3$$
$$V = 74{,}088\text{ cm}^3$$
$$V \approx 74\text{ cm}^3.$$

Die Glieder $0{,}48\text{ cm}^3$ und besonders $0{,}008\text{ cm}^3$ beeinflussen das Ergebnis nur geringfügig. Wenn b in dem Ausdruck $(a+b)^3$ gegenüber a sehr klein ist (Symbol: $b \ll a$), wird auch der Fehler sehr klein, der entsteht, wenn wir die Glieder $3ab^2$ und b^3 vernachlässigen. Das zeigen wir an folgendem Beispiel:

b) Die Seitenlänge eines Würfels beträgt 5,9 cm. Wie groß sind überschlägiger und genauer Wert, absoluter und relativer Fehler?

$$V = (5{,}9\text{ cm})^3 = (6\text{ cm} - 0{,}1\text{ cm})^3$$

Überschlag:

$$V \approx (6\text{ cm})^3 - 3\,(6\text{ cm})^2\cdot 0{,}1\text{ cm}$$
$$V \approx 216\text{ cm}^3 - 10{,}8\text{ cm}^3$$
$$V \approx 205\text{ cm}^3.$$

Genaue Berechnung:

$$V = (6\text{ cm})^3 - 3\,(6\text{ cm})^2\cdot 0{,}1\text{ cm} + 3\cdot 6\text{ cm}\;(0{,}1\text{ cm})^2 - (0{,}1\text{ cm})^3$$
$$V = 216\text{ cm}^3 - 10{,}8\text{ cm}^3 + 0{,}18\text{ cm}^3 - 0{,}001\text{ cm}^3$$
$$V = 205{,}379\text{ cm}^3.$$

Der absolute Fehler ΔV ist die Differenz von Näherungswert und genauem Wert:

$$\Delta V = 205\ \text{cm}^3 - 205{,}379\ \text{cm}^3$$
$$\Delta V = -0{,}379\ \text{cm}^3$$

Der relative Fehler ist das Verhältnis vom absoluten Fehler und dem genauen Wert:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-0{,}379\ \text{cm}^3}{205{,}379\ \text{cm}^3} \approx -0{,}0018 = -\ 0{,}18\,\% = -\ 1{,}8\,‰.$$

‰ wird „Promille" gelesen und bedeutet „Tausendstel".

Aufgaben

1. a) $(x+3)(x+2)$ **b)** $(x+3)(x-2)$ **c)** $(x-3)(x+2)$ **d)** $(x-3)(x-2)$

Setzen Sie $x = 5, 4, \ldots 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ und bestätigen Sie die Richtigkeit des Ergebnisses!

2. a) $(m+5)(m+6)$ **b)** $(m+5)(m-6)$ **c)** $(m-5)(m+6)$ **d)** $(m-5)(m-6)$
e) $(2r+3t)(3r+4t)$ **f)** $(2r+3t)(3r-4t)$ **g)** $(2r-3t)(3r+4t)$ **h)** $(2r-3t)(3r-4t)$

Bestätigen Sie die Richtigkeit der Ergebnisse, indem $m = -2$; $r = -5$; $t = 3$ gesetzt wird!

3. a) $(a+4)^2$ **b)** $(a-5)^2$ **c)** $(2+a)^2$ **d)** $(7-a)^2$

4. a) $(2m+3)^2$ **b)** $(4m-5)^2$ **c)** $(3{,}5+0{,}5m)^2$ **d)** $(1{,}6-1{,}2m)^2$

5. a) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}y\right)^2$ **b)** $\left(\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}y\right)^2$ **c)** $(0{,}3x+0{,}03y)^2$ **d)** $(0{,}04x-2{,}1y)^2$

6. a) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)$ **b)** $(0{,}3u+0{,}7v)(0{,}3u-0{,}7v)$ **c)** $\left(\frac{2u}{5}+\frac{3v}{10}\right)\left(\frac{2u}{5}-\frac{3v}{10}\right)$

Bestätigen Sie die Richtigkeit des Ergebnisses in den Aufgaben 3 bis 6, indem $a = 3$; $m = -2{,}5$; $x = 12$; $y = 30$; $u = 0{,}5$ und $v = 1{,}5$ gesetzt wird!

7. Um wieviel ist $(x+y)^2$ größer als x^2+y^2?

8. Wodurch unterscheidet sich $(x-y)^2$ von x^2-y^2?

9. a) $(3x+5y-2z)(2a+3b)$ **b)** $(5x-6y+3z)(7a-b)$
c) $(3a-5b)(2x+4y-9z)$ **d)** $(7m-2n)(q+4r+7s)$

10. a) $(3{,}5a+3{,}75b-2{,}6c)(4{,}5a+2{,}5b+1{,}2c)$
b) $(4{,}2x-2{,}6y+1{,}8z)(2{,}5x+0{,}2y-0{,}1z)$
c) $(-2{,}5m+4{,}6n-2{,}1q)(7{,}2m+2{,}5n+0{,}8q)$
d) $(4{,}6a-0{,}2b+0{,}01c)(3{,}4a-b+2c)$

11. $(10xy-15xz+ay-3az)(5xy+15xz-ay-3az)$

12. $(18mo+6mp-4np-12no)(18mo-6mp-4np+12no)$

13. $(a+b)(a+b)(a+b)$ **14.** $(a-b)(a-b)(a-b)$

15. **a)** $(a+y)^3$ **b)** $(x-y)^3$

16. **a)** $(a+2)^3$ **b)** $(a-2)^3$

17. **a)** $(m+1)(m-3)(m+5)$ **b)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right)$

18. **a)** $(2x-3)(3x-5)(x+2)$ **b)** $(4x+3)(2x-7)(3x+11)$

19. **a)** $(2{,}5x+3{,}2y)(4z+2{,}2x)-(1{,}5x+y)(x-1{,}5z)+(5{,}5x+2y)(2x-z)$

b) $(0{,}4m+0{,}5n)(2{,}5n+0{,}5m)-(n-2{,}6m)(3m-1{,}2n)$

c) $(2{,}5x+3{,}5y)^2-(x-1{,}5y)^2+(x+0{,}4y)(x-0{,}4y)$

d) $(1{,}2a+0{,}3b)^2-(a+2b)^3$

20. Addieren Sie zu jedem Faktor des Produktes $42 \cdot 25$ **a)** 1; **b)** 10; **c)** 100; **d)** 1000! Um wieviel ändert sich jeweils das Produkt?

21. Subtrahieren Sie von jedem Faktor des Produktes $65 \cdot 81$ **a)** 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 5; **e)** 10! Wie ändert sich jeweils das Produkt?

22. In dem Produkt $25 \cdot 52$ soll der erste Faktor **a)** um 1; **b)** um 2; **c)** um 5; **d)** um 10 vermehrt, der zweite Faktor um dieselben Zahlen vermindert werden. Um wieviel hat sich das Produkt jedesmal geändert?

23. Addieren Sie in dem Produkt $p = 2x \cdot 5y$ zu x die Zahl a und subtrahieren Sie von y die Zahl b! Wie groß ist die Änderung von p

a) für $x = 2$; $y = 1$, **b)** für $x = 10$; $y = 7$, **c)** für $x = 8$; $y = 2$?

24. Um wieviel ändert sich die Größe eines Rechteckes mit den Seiten x und y, wenn man jede Seite **a)** um 2 vergrößert, **b)** um 2 verkleinert; **c)** wenn man x um 2 vergrößert, y um 2 verkleinert; **d)** wenn man x um 2 verkleinert, y um 2 vergrößert?

25. Wie groß ist die Fläche des Querschnitts **a)** Abb. 3a, **b)** Abb. 3b?

26. Wie viele Teilprodukte besitzt eine algebraische Summe, die durch Ausmultiplizieren

a) von zwei Binomen,
b) von drei Binomen,
c) von zwei Trinomen entstanden ist?

27. Berechnen Sie die folgenden Kubikzahlen durch Überschlag und genau durch Ausmultiplizieren! Bestimmen Sie jeweils den relativen Fehler!

a) $V = (8{,}9\ \text{cm})^3$
b) $V = (7{,}95\ \text{dm})^3$
c) $V = (6{,}75\ \text{m})^3$

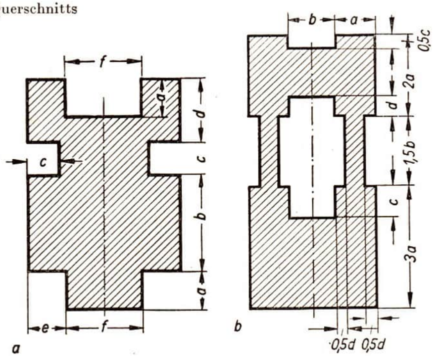


Abb. 3

3. Umformen von Brüchen; Erweitern und Kürzen

Das Erweitern und Kürzen von Brüchen, deren Zähler und Nenner bestimmte Zahlen sind, kennen wir bereits.

Wir wollen diese Erkenntnisse jetzt auf Brüche übertragen, deren Zähler und Nenner allgemeine Zahlsymbole sind.

1. Multiplizieren Sie den Zähler der Brüche

$$\text{a) } \frac{3}{4}; \quad \text{b) } \frac{a}{2}; \quad \text{c) } \frac{y}{x} \quad \text{mit } 2, 3, 4, \ldots, x!$$

Multiplizieren Sie den Nenner dieser Brüche mit 2, 3, 4, . . ., x!

Multiplizieren Sie Zähler und Nenner dieser Brüche mit 2, 3, 4, . . ., x!

Geben Sie an, welche Veränderung der Wert des Bruches jedesmal erfährt!

2. Dividieren Sie den Zähler des Bruches $\frac{24}{48}$ durch 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24!

Dividieren Sie den Nenner des Bruches $\frac{24}{48}$ durch 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24!

Dividieren Sie Zähler und Nenner des Bruches $\frac{24}{48}$ durch 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24!

Geben Sie an, welche Veränderung der Wert des Bruches jedesmal erfährt!

Ergebnis: Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert (den Bruch erweitert) oder durch die gleiche Zahl dividiert (den Bruch kürzt).

Mit allgemeinen Zahlsymbolen:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot x}{n \cdot x} \qquad \frac{m}{n} = \frac{m : x}{n : x} = \frac{\frac{m}{x}}{\frac{n}{x}}$$

Aufgaben

1. Erweitern Sie die Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ mit den Zahlen 2, 4, 7, 11!

2. Bringen Sie die Brüche von Aufgabe 1 auf die Nenner 60, 90, 270!

3. Erweitern Sie den Bruch $\frac{x}{y}$ mit 2, a, $3a$, $10b$, $17x$, $3x^3$!

4. Bringen Sie den Bruch $\frac{m}{n}$ auf den Nenner

a) $5n$, **b)** $21n$, **c)** n^2, **d)** mn, **e)** $3an$, **f)** $4n^3$, **g)** $17nx$, **h)** nxy, **i)** $24mnp$!

5. Bringen Sie den Bruch $\frac{2f}{3g}$ auf den Nenner

a) $12g$, **b)** $15g^2$, **c)** $42g^3$, **d)** $21fg$, **e)** $27f^2g^2$, **f)** $120g^2m^3$, **g)** $300\,abgx$!

6. Bringen Sie den Bruch $\frac{4m}{5p}$ auf den Nenner

a) $15p$, **b)** $35pq$, **c)** $45p^2q^2$, **d)** $100p^3r$ **e)** $75p^2s^3$!

7. Der Bruch $\frac{7z}{x}$ ist unter Beibehaltung seines Wertes so umzuformen, daß er den Zähler

a) $14z$, **b)** $21az$, **c)** $63xyz$, **d)** $49xy^2z^3$, **e)** $119yz$, **f)** $154a^2bz$ erhält.

8. Was versteht man unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen?

9. Bringen Sie folgende Brüche jeweils auf den Hauptnenner!

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}x, \frac{3}{5}y, \frac{4}{9}z$ **c)** $\frac{3x}{10}, \frac{2}{3m}, \frac{4}{15}$ **d)** $\frac{3}{5}x, \frac{8x^2}{5a}, \frac{10}{9}z$

e) $\frac{3x}{4a}, \frac{5y}{6a^2}, \frac{8xy}{9ab^2}$ **f)** $\frac{7a}{2x}, \frac{5a^2}{3x^2y}, \frac{2}{5xy^2}$ **g)** $\frac{2{,}5m}{3n}, \frac{7{,}5m^2}{8n^2}, \frac{5}{6}n, \frac{9m^3}{4nx}$

10. Erweitern Sie die folgenden Brüche mit (-1)! **a)** $\frac{m}{-n}$ **b)** $\frac{-a}{-b}$ **c)** $\frac{a-b}{a+b}$ **d)** $\frac{4n+3p}{4p-2n}$

11. Erweitern Sie die folgenden Brüche mit $(-m)$! **a)** $\frac{-x}{y}$ **b)** $\frac{5x}{3z}$ **c)** $\frac{a-b}{b-a}$ **d)** $\frac{3x-2}{1-x}$

12. Bringen Sie den Bruch

a) $\frac{8x}{-3y}$ auf den Nenner $24xy$, **b)** $\frac{3a}{-5x^2}$ auf den Nenner $20x^3$,

c) $\frac{-9a}{-7m}$ auf den Nenner $49mn$, **d)** $\frac{r}{s}$ auf den Nenner $2st$,

e) $\frac{-2p}{15q}$ auf den Nenner $30pq$, **f)** $\frac{x-y}{-3}$ auf den Nenner 3,

g) $\frac{3x-4y}{-4y}$ auf den Nenner $28xyz$, **h)** $\frac{(a-b)^2}{a+b}$ auf den Nenner $(a+b)^2$!

13. Welche Beziehungen bestehen zwischen folgenden Brüchen?

a) $\frac{x}{2}$ und $\frac{x}{4}$ $(x > 0)$ **b)** $\frac{3y}{x}$ und $\frac{3y}{4x}$ $(y, x < 0)$

c) $\frac{a}{x-y}$ und $\frac{a}{(x-y)^2}$ $(x > y;\ x, y > 0)$

14. Was versteht man unter dem größten gemeinsamen Teiler mehrerer Zahlen?

15. Kürzen Sie folgende Brüche!

$\frac{6}{12}, \frac{7}{21}, \frac{12}{48}, \frac{13}{78}, \frac{18}{90}, \frac{28}{63}, \frac{51}{119}, \frac{76}{171}$

16. Kürzen Sie folgende Brüche!

a) $\frac{26xy}{65x}$ **b)** $\frac{27mz}{99m}$ **c)** $\frac{14xyz}{21abc}$ **d)** $\frac{38mno}{57mn^2}$

e) $\frac{57m^2n}{76mno}$ **f)** $\frac{52pqr}{78pqs}$ **g)** $\frac{-119st^2}{49s^2t}$ **h)** $\frac{33ab^2c^3}{-110a^3b^2c}$

i) $\frac{-3{,}1xy}{9{,}3xz}$ **k)** $\frac{0{,}04a^2b}{-0{,}4ab^2}$ **l)** $\frac{-2{,}2x}{11y}$ **m)** $\frac{-1{,}85a}{-0{,}74y}$

17. Schreiben Sie als Brüche und kürzen Sie!

a) $m(3p-q) : n(3p-q)$ **b)** $c(x-2) : c^2(x-2)$

c) $(mn+mo) : z(n+o)$ **d)** $(3ab-3ac) : 12(b-c)$

18. Kürzen Sie!

a) $(65mn-39no) : (25mx-15ox)$ **b)** $(81nv+45vw) : (18nt+10wt)$

c) $(63x^2-81xz) : (49xy-63yz)$ **d)** $(56uv+49uw) : (32v^2+28vw)$

e) $\frac{1-x}{-2x+2}$ **f)** $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ **g)** $\frac{x-1}{-(x-1)}$ **h)** $\frac{-(x+y)^2}{x+y}$

4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche

Die Regel für die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche lautet:

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Mit allgemeinen Zahlsymbolen geschrieben:

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$$

Ungleichnamige Brüche

Auch die Regel für die Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche ist uns bekannt:

Ungleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man sie gleichnamig macht (d. h., indem man sie durch Erweiterung mit dem Erweiterungsfaktor auf den Hauptnenner bringt) und sie dann wie gleichnamige Brüche behandelt.

Beispiel 1: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Der Hauptnenner von a und b ist ab. Der erste Summand wird mit b, der zweite mit a erweitert.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1 \cdot b}{a \cdot b} + \frac{1 \cdot a}{b \cdot a} = \frac{b + a}{ab} = \frac{a + b}{ab}.$$

Beispiel 2:

$$\frac{1}{2a - 2b} - \frac{1}{2(a + b)} - \frac{b}{a^2 - b^2}$$

Wir bestimmen zunächst den Hauptnenner durch Zerlegung in Primfaktoren:

	Erweiterungsfaktor
$2a - 2b = 2 \qquad (a - b)$	$a + b$
$2(a + b) = 2(a + b)$	$a - b$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	2
$2(a + b)(a - b)$	
$= 2(a^2 - b^2)$	

Nun werden die Brüche gleichnamig gemacht.

$$\frac{1(a + b)}{(2a - 2b)(a + b)} - \frac{1(a - b)}{2(a + b)(a - b)} - \frac{b \cdot 2}{(a^2 - b^2)2}$$

$$= \frac{a + b - a + b - 2b}{2(a^2 - b^2)}$$

$$= \frac{0}{2(a^2 - b^2)} = 0$$

Aufgaben

1. a) $\frac{3}{20}+\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{40}+\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{3}{8}-\frac{65}{72}$ **d)** $\frac{7}{15}+\frac{1}{60}$

2. a) $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}$ **b)** $\frac{1}{25}-\frac{3}{40}$ **c)** $\frac{3}{16}+\frac{5}{24}$ **d)** $\frac{22}{9}-\frac{7}{15}$

3. a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}-\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{9}-\frac{5}{12}+\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{4}{7}-\frac{2}{5}-\frac{1}{12}$

4. a) $\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}x$ **b)** $\frac{7}{3}b-\frac{4}{3}b$ **c)** $\frac{4a}{x}-\frac{a}{x}$ **d)** $\frac{2z}{5x}-\frac{7z}{5x}$

5. a) $\frac{4x}{y}+\frac{9x}{y}-\frac{3x}{y}$ **b)** $\frac{5m^2}{n}+\frac{3}{n}-\frac{2m}{n}$ **c)** $\frac{7d}{4x}-\frac{3}{4x}+\frac{2d^2}{4x}$

6. a) $\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}x$ **b)** $\frac{5}{4}a-\frac{3}{8}a$ **c)** $\frac{5}{14}e-\frac{8}{21}e$ **d)** $\frac{5}{12}y+\frac{8}{16}y$

7. a) $\frac{3}{4}a-\frac{7}{6}b+\frac{9}{8}a$ **b)** $\frac{c}{3}-\frac{4}{9}c+\frac{5}{12}c$ **c)** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{15}-\frac{2y^2}{20}$

8. a) $\frac{5}{6}x-\frac{3}{7}y+\frac{9}{14}x+\frac{7}{3}y+\frac{y}{21}$ **b)** $\frac{7m^2}{8}-\frac{5n^2}{72}-\frac{29m^2}{36}+\frac{8n^2}{9}+\frac{m^2}{3}$

9. Bilden Sie selbst weitere Aufgaben ähnlicher Art!

10. Welchen Wert erhalten die algebraischen Summen in den Aufgaben

a) 4 *a* **b)** 5 *a* **c)** 6 *a* **d)** 7 *c* **e)** 8 *a*, wenn $x = -0{,}5$ und $y = 2{,}5$ ist?

11. Welchen Wert erhalten die algebraischen Summen in den Aufgaben

a) 5 *b* **b)** 8 *b*, wenn $m = -2$ und $n = 1{,}5$ ist?

12. a) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ **b)** $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$

13. a) $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$ **b)** $\frac{7a}{x}-\frac{5b}{y}$ **c)** $\frac{4}{3m}-\frac{7}{4n}$ **d)** $\frac{4b}{3a}+\frac{5b}{4b}$

14. a) $\frac{a}{5x}-\frac{b}{7x}$ **b)** $\frac{m}{bz}-\frac{n}{mz}$ **c)** $\frac{4}{an}+\frac{5}{bn}$ **d)** $\frac{8c}{4a}-\frac{21c}{3m}$

15. a) $\frac{3a}{5x^2}+\frac{b}{2x}$ **b)** $\frac{a}{x}-\frac{7b}{4y}$ **c)** $\frac{3b}{y^2}+\frac{9}{x^2}$ **d)** $\frac{14a}{9x}+\frac{b}{4y^2}$

16. Welchen Wert erhalten die algebraischen Summen der Aufgabe 15, wenn $a = 2$, $b = -1$, $x = -5$, $y = 2{,}5$ ist?

17. a) $\frac{a}{b}+2$ **b)** $m+\frac{n}{5}$ **c)** $7-\frac{d}{2}$ **d)** $1+\frac{1}{n}$

18. a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ **b)** $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}-\frac{7}{z}$ **c)** $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

19. a) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}$ **b)** $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}$ **c)** $\frac{ab}{cde}-\frac{ac}{bde}+\frac{bc}{ade}$

20. a) $\frac{3x}{7mn}-\frac{5xy}{14mn}+\frac{4y}{mn}$ **b)** $\frac{2a}{3x^2}-\frac{9a}{5x^2}+\frac{4a}{7x^2}$ **c)** $\frac{2}{3ab}+\frac{1}{ab}+\frac{11}{14ab}$

21. a) $\frac{m-3n}{x-y}+\frac{m+2n}{x-y}$ b) $\frac{x-y}{a+b}+\frac{y-x}{a+b}$ c) $\frac{1}{m+n}+\frac{a-b}{m+n}$

22. a) $\frac{1}{x}+\frac{3a}{4x}-\frac{7b}{15x}$ b) $\frac{5}{2m}+\frac{1}{m}-\frac{3b}{7m}$ c) $\frac{2x}{5b}-\frac{1}{8b}+\frac{x}{b}$

23. a) $\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}$ b) $\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3}$ c) $\frac{t}{2x}+\frac{t^3}{4x}+\frac{t^3}{8x}$

24. a) $\frac{2x+3y}{2}+\frac{3x-y}{4}+\frac{y-4x}{8}$ b) $\frac{2x-3y}{5}+\frac{4x+5y}{10}-\frac{y+3x}{20}$

25. a) $\frac{4m+5n}{3}-\frac{2m-4n}{5}+\frac{m-3n}{4}$ b) $\frac{b-c}{2}+\frac{b+c}{3}-\frac{c-b}{4}$

26. a) $\frac{5x}{3y}-\frac{2}{9xy}+\frac{5y}{6x}$ b) $\frac{3x+2y}{x}+\frac{2x^2-2y^2}{xy}-\frac{2x+3y}{y}$

27. a) $\frac{2m}{3n}+\frac{5}{9mn}-\frac{7n}{12m}$ b) $\frac{2a-3b}{a}-\frac{3a^2-4b^2}{ab}+\frac{8a-5b}{b}$

28. a) $\frac{4a}{(a+b)^2}+\frac{2}{a+b}$ b) $\frac{7y}{(x-y)^2}-\frac{6}{x-y}$

29. a) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$ b) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$

30. a) $\frac{m}{m+n}-\frac{n}{m-n}+\frac{2mn}{m^2-n^2}$ b) $\frac{3a}{b-a}+\frac{2b}{a+b}-\frac{5ab}{b^2-a^2}$

31. a) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$ b) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$

32. a) $\frac{5x-6y}{x-y}-\frac{3y-2x}{x+y}$ b) $\frac{3a+4b}{a+b}+\frac{5a-2b}{a-b}$

33. a) $1-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ b) $1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

34. a) $a-\frac{a^2}{x-1}-\frac{a}{x+1}$ b) $\frac{m}{m-1}+m-\frac{m^2}{m+1}$

35. a) $\frac{2}{3(a-b)}-\frac{2}{3(a+b)}+\frac{1}{a^2-b^2}$ b) $\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{3(a-b)}{a+b}+\frac{1}{a^2-b^2}$

36. a) $\frac{2}{1+m}+\frac{4}{1-m^2}+\frac{6}{(1+m)^2}$ b) $\frac{16}{x^2-y^2}+\frac{13}{(x-y)^2}$

37. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{4}{x^2-1}-\frac{4}{(x^2-1)^2}$

38. a) $\frac{x-4}{2x+1}-\frac{3x-5}{x+2}+\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}$ b) $\frac{8}{2x-3}+\frac{3}{3-2x}-\frac{3x-4}{2x^2-x-3}$

39. a) $\frac{2}{x-a}+\frac{4}{x-b}+\frac{6}{x-c}$ b) $\frac{2}{2x-1}-\frac{7}{3x-1}+\frac{3}{2x-3}$

40. $\frac{4}{(m-1)^3}+\frac{2}{(m-1)^2}+\frac{4}{m-1}-\frac{2}{m}$

41. a) $\frac{3}{a}+\frac{5}{a+b}$ b) $\frac{7}{m}+\frac{8}{m-n}$ c) $\frac{26}{a+b}-\frac{2}{b}$

42. a) $\frac{1}{xy}-\frac{5x}{x+y}$ b) $\frac{-3x^2}{mn}-\frac{x-y}{m+n}$ c) $\frac{9x}{a-b}-\frac{5x}{ab}$

43. a) $\frac{2x}{x+y}-\frac{1}{xy}$ b) $\frac{5}{ab}+\frac{9ab}{b-a}$ c) $\frac{2}{mn}+\frac{mn}{m+n}$

44. a) $\frac{p}{p+q}-\frac{p+q}{p}$ b) $\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a+b}$ c) $\frac{m+n}{mn}-\frac{mn}{m-n}$

45. a) $\frac{x}{y}-z+\frac{y}{xz}$ b) $\frac{p(p+q)}{p-q}-1$ c) $4+\frac{(m-n)^2}{mn}$

46. Zeigen Sie, daß a) $\frac{m}{n}=p+\frac{m-np}{n}$, b) $\frac{x}{y}=\frac{x+yz}{y}-z$ ist!

5. Multiplikation von Brüchen

Die Regel für die Multiplikation von Brüchen lautet:

Brüche werden multipliziert, indem man ihre Zähler miteinander und ihre Nenner miteinander multipliziert.

Für zwei Brüche mit allgemeinen Zahlsymbolen geschrieben:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad (1).$$

Dabei sind die Brüche vor der Multiplikation möglichst zu kürzen.

Ist einer der Faktoren eine ganze Zahl, also ein Bruch mit dem Nenner 1, so vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}. \qquad (2)$$

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{5}\cdot 5$ b) $\frac{2}{3}\cdot 3$ c) $\frac{2}{5}\cdot 10$ d) $\frac{3}{2}\cdot 2$ e) $\frac{4}{7}\cdot 14$

2. a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}$ d) $\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}$ e) $\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}$

3. a) $\frac{6}{5}\cdot 5$ b) $\frac{ab}{3}\cdot 3$ c) $\frac{2}{9}m\cdot 3$ d) $\frac{4}{15}z\cdot 10$ e) $\frac{21}{22}x\cdot 11$

4. a) $306\cdot\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}\cdot 10x$ c) $12m\cdot\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{5}\cdot 20f$ e) $\frac{3}{7}\cdot 28x$

5. a) $\frac{4}{m}\cdot 3$ b) $\frac{b}{10}\cdot 5$ c) $\frac{x}{7y}\cdot 14$ d) $\frac{m}{12y}\cdot 8y$ e) $\frac{3m}{10y}\cdot 15y$

6. a) $a\cdot\frac{b}{a}$ b) $5x\cdot\frac{a}{7a}$ c) $a\cdot\frac{1}{ax}$ d) $\frac{5}{bz}\cdot b^2z$ e) $m^2\cdot\frac{1}{m^3}$

7. a) $z\cdot\frac{2x}{7yz}$ b) $3m\cdot\frac{5xy}{6mn}$ c) $7pq\cdot\frac{3m}{21p^2q^2}$ d) $5x\cdot\frac{1}{10x^2}$ e) $13\cdot\frac{n}{26y}$

8. a) $\frac{5ax}{6by} \cdot \frac{2bx}{15ax}$ **b)** $\frac{20mn}{7bz} \cdot \frac{21b}{5nx}$ **c)** $\frac{2ab}{7cd} \cdot \frac{5cx}{6by}$ **d)** $\frac{8ax}{5by} \cdot \frac{3ay}{4bx}$ **e)** $\frac{9z^2}{6xy} \cdot \frac{4x}{18mz}$

9. a) $\frac{5cd}{18mn} \cdot \frac{24no}{35de} \cdot \frac{42ef}{11op}$ **b)** $\frac{12xy}{13ab} \cdot \frac{26bc}{18yz} \cdot \frac{3az}{52cd}$

10. a) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{c}{m+n} \cdot \frac{d}{m-n}$ **c)** $\frac{g+h}{g-h} \cdot \frac{g-h}{g+h}$ **d)** $\frac{s+t}{s-t} \cdot \frac{s^2t^2}{2}$

11. a) $(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{x}$ **b)** $(4x^3 + 12x^2 + 16x - 2) \cdot \frac{x}{4}$

12. a) $\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x} + 6\right) \cdot \frac{x^2}{2}$ **b)** $\left(\frac{3}{x^3} + \frac{15}{x^2} - \frac{27}{x} - 9\right) \cdot \frac{x^3}{3}$

13. a) $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{o} + \frac{o}{m}\right) \cdot \frac{mn}{o}$ **b)** $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc$

14. a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c\right) \cdot \frac{3}{4}x$ **b)** $\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{c}{5}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)$

15. a) $\left(\frac{3}{5}a - \frac{2}{7}b + \frac{3}{10}c\right) \cdot \frac{70}{3}x$ **b)** $\left(\frac{7}{2}m - \frac{5}{4}n + \frac{3}{5}o\right)\left(-\frac{40x}{mn}\right)$

16. a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ **b)** $\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{w}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{w}{z}\right)$ **c)** $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c} - \frac{a}{d}\right)$

17. a) $\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ **b)** $(x - y)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ **c)** $(x + y)\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right)$

18. a) $\left(\frac{x}{y} - \frac{2a}{3b}\right)(2x - 3y)$ **b)** $\left(\frac{5x}{3y} - \frac{2y}{13x}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$ **c)** $\left(\frac{3m}{4n} - \frac{2a}{5b}\right)\left(\frac{5x}{6y} - \frac{2}{3}\right)$

19. a) $\left(\frac{6a^2}{b} - \frac{5b^3}{c} + \frac{4c^4}{a}\right)\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)$ **b)** $\left(\frac{4}{3}x + \frac{20ax}{17bz}\right)\left(\frac{6y}{x} - \frac{30a}{y} + 2\right)$

20. a) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2$ **b)** $\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$ **c)** $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right)$

21. a) $\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{5}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{3}{4}x - \frac{a}{3}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}x\right)$

22. a) $\frac{a^2 + b^2}{a + b}(a^2 - b^2)$ **b)** $\frac{3x - 5b}{3x + 5b}(9x^2 - 25b^2)$

23. a) $\left(\frac{4{,}5x^2}{5a^2} + \frac{7{,}5y^2}{6b^2} - \frac{3{,}5z^2}{3c^2}\right) 90xyz$ **b)** $\left(\frac{5x^3}{3{,}5y^3} + \frac{7x^2}{17{,}5y^2} - \frac{13x}{0{,}7y} + \frac{2}{7}\right)\frac{70}{x^2}$

24. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a - b) + (a + b) + (a + b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

25. $\left(\frac{3}{5} - \frac{x}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{y}\right) - \left(\frac{3}{5x} + \frac{1}{y}\right)\left(3 - \frac{5x}{y}\right)$

26. Vergleichen Sie $\frac{2}{3 \cdot x}$ und $\frac{2}{3} \cdot x$, wenn

a) $x = 4$, **b)** $x = -5$, **c)** $x = 1$, **d)** $x \neq 1$ ist!

6. Division durch Brüche

Wie uns bekannt ist, gilt für die Division durch einen Bruch folgende Regel:

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem reziproken Wert des Bruches multipliziert.

Mit allgemeinen Zahlsymbolen geschrieben:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Welche Vereinfachungen ergeben sich für den Fall, daß

a) der Divisor ganzzahlig ist,

b) der Divisor ganzzahlig und Teiler des Zählers des Dividenden ist,

c) der Dividend ganzzahlig ist?

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \frac{a-b}{a+b} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} \\ &= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von bestimmten Zahlen kann man die Richtigkeit des Ergebnisses nachprüfen. Wir setzen beispielsweise $a = -2$, $b = 3$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} & \frac{-2-3}{-2+3} : \frac{4+12+9}{4-9} \\ &= \frac{-5}{1} : \frac{25}{-5} \\ &= (-5) : (-5) = 1 \end{aligned}$$

Bei vielen Aufgaben, in denen algebraische Summen durcheinander dividiert werden müssen, kommt man mit den bisher angegebenen Verfahren nicht zum Ziel. Man muß dann ein Verfahren verwenden, das man sich an Hand der Division mehrstelliger bestimmter Zahlen veranschaulichen kann.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 672 : 21 \\ 672 : 21 = 32 \\ \underline{63} \\ \;\;42 \end{array}$$

Dieses Verfahren ist nur eine vereinfachte Form des nachfolgend angegebenen, bei dem Dividend und Divisor als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen geschrieben werden.

$$\begin{aligned} 672 &= 600 + 70 + 2 \\ 21 &= 20 + 1 \end{aligned}$$

Dann lautet die Aufgabe: $(600 + 70 + 2) : (20 + 1)$

Man teilt hierzu das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors und multipliziert mit dem erhaltenen Quotienten den gesamten Divisor. Dieses Produkt subtrahiert man vom Dividenden und wiederholt das gesamte Verfahren mit dem sich ergebenden Rest.

$$\begin{array}{l}
(600 + 70 + 2) : (20 + 1) = (30 + 2) = 32 \\
-\underline{(600 + 30)} \\
40 + 2 \\
-\underline{(40 + 2)}
\end{array}
\qquad
\text{Probe:}\quad
\begin{array}{l}
\underline{32 \cdot 21} \\
\underline{64} \\
672
\end{array}$$

In gleicher Weise dividieren wir algebraische Summen, deren Glieder allgemeine Zahlsymbole enthalten.

1. Beispiel:

$$\begin{array}{l}
(45a^2 + 23ab - 56b^2) : (5a + 7b) = 9a - 8b \\
-\underline{(45a^2 + 63ab)} \\
-40ab - 56b^2 \\
-\underline{(-40ab - 56b^2)}
\end{array}$$

Probe: $(9a - 8b)(5a + 7b) = 45a^2 + 63ab - 40ab - 56b^2$
$= 45a^2 + 23ab - 56b^2$

2. Beispiel: $(48xw + 77yz + 66yw + 56xz) : (8x + 11y)$

Ordnen:

$$\begin{array}{l}
(48xw + 56xz + 66yw + 77yz) : (8x + 11y) = 6w + 7z \\
-\underline{(48xw \qquad\quad + 66yw)} \\
56xz \qquad\quad + 77yz \\
-\underline{(56xz \qquad\quad + 77yz)}
\end{array}$$

Probe: $(6w + 7z)(8x + 11y) = 48xw + 66yw + 56xz + 77yz$

3. Beispiel: $(6a^3y + 4y^4 - a^4 - 9a^2y^2) : (a^2 + 2y^2 - 3ay)$

Zunächst ordnen wir nach Potenzen von y. Da im Dividenden die 3. Potenz von y fehlt, wird hier eine Stelle frei gelassen.

$$\begin{array}{l}
(4y^4 \qquad\qquad - 9a^2y^2 + 6a^3y - a^4) : (2y^2 - 3ay + a^2) = 2y^2 + 3ay - a^2 \\
-\underline{(4y^4 - 6ay^3 + 2a^2y^2)} \\
6ay^3 - 11a^2y^2 + 6a^3y \\
-\underline{(6ay^3 - 9a^2y^2 + 3a^3y)} \\
-2a^2y^2 + 3a^3y - a^4 \\
\underline{-(-2a^2y^2 + 3a^3y - a^4)}
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
&(2y^2 + 3ay - a^2)(2y^2 - 3ay + a^2) \\
&= 4y^4 - 6ay^3 + 2a^2y^2 + 6ay^3 - 9a^2y^2 + 3a^3y - 2a^2y^2 + 3a^3y - a^4 \\
&= 4y^4 - 9a^2y^2 + 6a^3y - a^4.
\end{aligned}$$

4. **Beispiel:** $(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(a^5 - a^4 b)} \\
\qquad a^4 b - b^5 \\
\qquad \underline{-(a^4 b - a^3 b^2)} \\
\qquad\qquad a^3 b^2 - b^5 \\
\qquad\qquad \underline{-(a^3 b^2 - a^2 b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad a^2 b^3 - b^5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(a^2 b^3 - a b^4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a b^4 - b^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-(a b^4 - b^5)}
\end{array}$$

Probe: $(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4)(a - b)$

$$= a^5 - a^4 b + a^4 b - a^3 b^2 + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a^2 b^3 - a b^4 + a b^4 - b^5$$

$$= a^5 - b^5.$$

Aufgaben

1. a) $8 : \frac{4}{5}$ **b)** $4 : \frac{1}{2}$ **c)** $15 : \frac{10}{13}$ **d)** $18 : \frac{9}{16}$ **e)** $48 : \frac{9}{10}$

2. a) $32 : \frac{24}{25}$ **b)** $72 : \frac{18}{19}$ **c)** $12 : \frac{9}{2}$ **d)** $30 : \frac{25}{2}$ **e)** $28 : \frac{46}{9}$

3. Was können Sie bei der Division durch einen Bruch über den Quotienten aussagen, wenn

a) der Divisor < 1, aber > 0 ist, **b)** der Divisor $= 1$ ist, **c)** der Divisor > 1 ist?

4. Wie heißt der reziproke Wert von

a) $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{5}{7}$, **c)** $\frac{9}{11}$, **d)** $\frac{11}{24}$, **e)** $\frac{3}{2}$, **f)** $\frac{7}{4}$, **g)** $\frac{9}{5}$, **h)** $\frac{27}{23}$?

5. Was für eine Zahl ist der reziproke Wert

a) eines unechten Bruches, **b)** eines echten Bruches, **c)** von 1?

6. a) $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$; welche Beziehung gilt für die reziproken Brüche?

b) $\frac{7}{4} > \frac{5}{3}$; welche Beziehung gilt für die reziproken Brüche?

c) Welche Beziehung besteht zwischen $\left(-\frac{3}{2}\right)$ und $\left(-\frac{9}{4}\right)$ und ihren Kehrwerten?

d) Bilden Sie selbst ähnliche Aufgaben!

7. a) $15b : \frac{3}{4}$ **b)** $20c : \frac{4}{5}$ **c)** $36x : \frac{4}{9}$ **d)** $72y : \frac{8}{3}$ **e)** $50z : \frac{25}{26}$

8. a) $5a : \frac{3}{10a}$ **b)** $30x : \frac{15x}{16y}$ **c)** $20x : \frac{8x}{3y}$ **d)** $24z : \frac{8b}{15z}$ **e)** $70m : \frac{28}{29m}$

9. a) $12m : \frac{8m}{3b}$ **b)** $0{,}5n : \frac{2n}{3p}$ **c)** $2{,}4s : \frac{1{,}2s}{1{,}3t}$ **d)** $-0{,}8r : \frac{0{,}2r^2}{0{,}5v}$ **e)** $3{,}8m : \frac{1{,}9}{m}$

10. a) $52x^2 : \frac{13xy}{14z}$ **b)** $54m^3 : \frac{18m^2n}{24p}$ **c)** $2{,}8b^4 : \frac{0{,}7b^4c^2}{0{,}8d}$

11. a) $60ab^2 : \frac{12b}{13a}$ b) $-48xy^2z^3 : \frac{16yz^2}{25x}$ c) $-0{,}96m^3n^2o : \frac{-4{,}8m^2n}{2{,}5\,o}$

12. a) $\frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{5}{2}$ c) $\frac{4}{7} : \frac{5}{7}$ d) $\left(-\frac{1}{8}\right) : \frac{2}{3}$

13. a) $\frac{c}{n} : \frac{d}{n}$ b) $\frac{x}{c} : \frac{x}{d}$ c) $\frac{z}{a} : \frac{1}{a}$ d) $\frac{5{,}2}{x^2} : \frac{1{,}3}{x^2}$

14. a) $\frac{35x^2}{17y^2} : \frac{105m}{51n}$ b) $\frac{52ab}{35c} : \frac{26c}{105n}$ c) $\frac{38m^2n}{27x} : \frac{57m^2n}{81x^2}$ d) $\frac{64f^2}{27ab} : \frac{3{,}2f}{9{,}9a}$

15. a) $\frac{8{,}7gh}{6{,}3m} : \frac{5{,}8g}{2{,}1m^2}$ b) $\frac{0{,}77a^2}{0{,}03x^2} : \frac{2{,}2a^3b}{0{,}9x}$ c) $\frac{0{,}25b}{2{,}6c} : \frac{7{,}5b^2}{0{,}39}$ d) $\frac{36m^2n}{1{,}3d} : \frac{0{,}18n}{52df}$

16. a) $\frac{1{,}25p}{6{,}4r} : \frac{5{,}5r^3}{2{,}4p^2}$ b) $\frac{34mn}{1{,}44s^2} : \frac{1{,}53n}{24m}$ c) $\frac{82z}{32x} : \frac{0{,}9y^2}{64x}$ d) $\frac{0{,}35ab}{0{,}36cd} : \frac{14ef}{27g}$

17. a) $\frac{h}{a+b} : \frac{2h}{3(a+b)}$ b) $\frac{m}{x-y} : \frac{n}{x+y}$ c) $\frac{ab}{a^2-b^2} : \frac{a}{a+b}$

18. a) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c-d}{c+d}$ b) $\frac{m^2}{m^2-x^2} : \frac{m+x}{m-x}$ c) $\frac{r}{r+s} : \frac{(r+s)^2}{r^2}$

19. a) $\frac{4(a+b)}{3(m-n)} : \frac{10(a+b)^2}{7c(m-n)}$ b) $\frac{m^2-n^2}{3(a-b)} : \frac{3(m+n)}{a+b}$ c) $\frac{x+y}{a-b} : \frac{x+y}{a^2-b^2}$

20. a) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} : \frac{a-b}{a+b}$ b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} : \frac{x+y}{x-y}$

21. a) $\left(\frac{x^2yz}{mno} - \frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right) : \frac{xy}{mn}$ b) $\left(\frac{m^2n}{ab} + \frac{m}{b} - \frac{n}{c}\right) : \frac{mn}{ab}$

22. a) $\left(\frac{xyz}{abc} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) : \left(\frac{-xy}{ab}\right)$ b) $\left(\frac{5a}{3bc} - \frac{3b}{2ac} + \frac{4c}{3ab}\right) : \left(-\frac{12}{abc}\right)$

23. a) $\dfrac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$ b) $\dfrac{\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ c) $\dfrac{\frac{h+1}{k} + \frac{1+k}{h}}{\frac{1}{h} + \frac{1}{hk} + \frac{1}{k}}$

24. a) $\dfrac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{m} + \frac{2}{n}}{\frac{2}{m^2} - \frac{2}{n^2}}$ c) $\dfrac{\frac{y^2}{a} - \frac{x^2}{a}}{\frac{a}{x^2} - \frac{a}{y^2}}$

25. a) $\dfrac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

26. a) $(15ac + 24bc + 10ad + 16bd) : (5a + 8b)$ b) $(9mo + 21no - 12mp - 28np) : (3m + 7n)$
c) $(0{,}4xy - 2{,}4xz + 1{,}8bz - 0{,}3by) : (y - 6z)$

27. a) $(15x + 15y) : (x + y)$ **b)** $(32a - 24b) : (4a - 3b)$

28. a) $(72m + 16n) : (18m + 4n)$ **b)** $(40x - 48y) : (10x - 12y)$

29. a) $(cm - cn - dm + dn) : (m - n)$

b) $(30ax - 20bx + 8by - 12ay) : (+10x - 4y)$

30. a) $(45ac + 60bc + 54ad + 72bd) : (3a + 4b)$

b) $(56xz + 77yz + 48xw + 66yw) : (11y + 8x)$

31. a) $(56m^2 + 11mn - 15n^2) : (7m - 3n)$ **b)** $(60f^2 - 37fg - 42g^2) : (12f + 7g)$

c) $(-15x^2 + 2x + 24) : (6 + 5x)$

32. a) $\left(3a^2 - \frac{9}{2}ab + \frac{5}{3}b^2\right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)$

b) $\left(\frac{20}{9}ax + \frac{25}{12}bx - \frac{20}{3}ay - \frac{25}{4}by\right) : \left(\frac{10}{3}a + \frac{25}{8}b\right)$

c) $\left(\frac{32}{27}m^2 + \frac{5}{6}mn - \frac{9}{16}n^2\right) : \left(\frac{4}{3}m + \frac{3}{2}n\right)$

33. a) $\left(4x^2 - \frac{122}{15}x + 4\right) : (6x - 5)$ **b)** $(x^2 + 11x + 24) : (x + 8)$

c) $\left(4x^2 - \frac{22}{15}x - 4\right) : (6x + 5)$

34. a) $(2x^2 + 3{,}3xy + y^2) : (4x + 5y)$ **b)** $(a^3 - b^3) : (a - b)$

c) $(m^2 + 4{,}6mn - 2n^2) : (5m - 2n)$ **d)** $(h^3 - 27b^3) : (h - 3b)$

35. a) $\left(2x^4 - \frac{53}{45}x^3 + \frac{41}{20}x^2 - \frac{19}{10}x + \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(\frac{9}{10}x^4 - \frac{1291}{360}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{9}{2}\right) : \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 6\right)$

36. a) $(1 - x - 3x^2 + x^3 + 2x^4) : (1 + 2x + x^2)$ **b)** $(x^6 - 2x^3 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$

Das Rechnen mit der Zahl 0

Die Zahl 0 besitzt unter den bisher bekannten Zahlen eine besondere Stellung. Man kann zwar zu jeder Zahl x die Zahl 0 addieren:

$$x + 0 = 0 + x = x; \quad \text{für } x = 0 \text{ heißt das } 0 + 0 = 0 \tag{1}$$

und von jeder Zahl x die Zahl Null oder von der Zahl 0 jede Zahl x subtrahieren:

$$x - 0 = x; \quad 0 - x = -x; \quad \text{für } x = 0 \text{ heißt das } 0 - 0 = 0. \tag{2}$$

Man kann auch jede Zahl x mit der Zahl 0 multiplizieren:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0; \quad \text{für } x = 0 \text{ heißt das } 0 \cdot 0 = 0, \tag{3}$$

und auch die Zahl 0 durch jede von 0 verschiedene Zahl x dividieren:

$$0 : x = 0 \quad \text{für } x \neq 0. \tag{4}$$

Was ergibt aber die Division $x:0$?

Hierzu betrachten wir den Quotienten $\frac{x}{n}$. Für x setzen wir z. B. 5; für n der Reihe nach die Zahlen 100; 50; 10; 5; 1; 0,1; 0,05; 0,01 ...

Es ergibt sich:

$$\frac{5}{100} = \frac{1}{20} \qquad \frac{5}{1} = 5$$
$$\frac{5}{50} = \frac{1}{10} \qquad \frac{5}{0{,}1} = 50$$
$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \frac{5}{0{,}05} = 100$$
$$\frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{5}{0{,}01} = 500$$
$$\vdots$$

Wir stellen folgendes fest:

Je kleiner der Nenner n wird, desto größer wird der Quotient $\frac{x}{n}$. Wenn n beliebig nahe an 0 herankommt, so wird der Quotient $\frac{x}{n}$ größer als jede noch so große Zahl.

Läßt sich demnach die Division $y = \frac{5}{0}$ ausführen?

Wenn die Division ausführbar wäre, dann müßte die Gleichung $y = \frac{5}{0}$ durch Multiplikation mit 0 umzuformen sein in

$$0 \cdot y = 5. \tag{5}$$

Gleichung (5) widerspricht aber Gleichung (3).

Wählt man statt 5 eine beliebige Zahl $x \neq 0$, ergibt sich das gleiche Resultat.

Folgerung:

Eine von Null verschiedene Zahl x kann man nicht durch 0 dividieren.

Was ergibt aber die Division $\frac{0}{0}$?

Uns ist bekannt, daß Brüche mit gleichem Zähler und Nenner den Wert 1 besitzen:

$$\frac{10}{10} = 1; \quad \frac{3}{3} = 1; \quad \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1; \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1; \quad \text{allgemein } \frac{a}{a} = 1.$$

Man sollte also annehmen, es wäre auch $\frac{0}{0} = 1$. Das ist jedoch nicht der Fall. Wir geben dafür folgende Erklärung:

$$5 \cdot 0 = 11 \cdot 0.$$

Angenommen, $\frac{0}{0}$ wäre 1, so dürfte man beide Seiten der Gleichung durch 0 dividieren und man erhielte

$$5 \cdot \frac{0}{0} = 11 \cdot \frac{0}{0} \tag{6}$$

$$5 \cdot 1 = 11 \cdot 1$$

$$5 = 11$$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich unsinnig.

Setzen wir $\frac{0}{0} = x$, so folgt durch Multiplikation mit 0

$$0 = 0 \cdot x = x \cdot 0. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) wird aber von jeder beliebigen Zahl x erfüllt. Also ist $\frac{0}{0}$ nicht etwa nur 1, sondern auch 3, 9, $\frac{1}{2}$, 0,4 ...

Folgerung: $\frac{0}{0}$ ist unbestimmt.

Ergebnis: Durch 0 kann nicht dividiert werden!

Man muß also vor jeder Division prüfen, ob etwa der Divisor gleich 0 ist beziehungsweise unter welchen Bedingungen er 0 wird. In diesen Fällen ist die Division nicht ausführbar.

Aufgaben

1. Unter welcher Bedingung sind die Aufgaben **a)** 31 c, **b)** 33 des vorangegangenen Kapitels lösbar?

2. Welchen Wert haben die Ausdrücke

a) $\frac{(2x+3)^2}{x+3}$ **b)** $\frac{(x-a)^2}{2ax}$ **c)** $\frac{x^2-1}{x-1}$ für $x = 0$?

3.[1]

$$(x+1)^2 - (x+2)(x+3) = (x+4)(x+5) - (x+6)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 - 5x - 6 = x^2 + 9x + 20 - x^2 - 12x - 36$$

$$-3x - 5 = -3x - 16$$

$$5 = 16$$

Wo steckt der Fehler?

4.[1]

$$6x + 25 = 10x + 15$$

$$3(2x - 5) = 5(2x - 5)$$

$$3 = 5$$

Wo steckt der Fehler?

[1] Die Aufgaben sind entnommen aus W. Lietzmann: Wo steckt der Fehler? Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, 1950.

B. Algebra und Analysis

II. Die lineare Funktion

7. Vorbereitende Übungen

1. Überlegen Sie, welche der folgenden Begriffe so voneinander abhängig sind, daß einem bestimmten Wert des einen stets ein bestimmter Wert des anderen zugeordnet ist! Formulieren Sie das Ergebnis unter Verwendung des Begriffs „Funktion"! Stellen Sie, wo es möglich ist, Wertetafeln auf und geben Sie die zugrunde liegenden analytischen Ausdrücke an! Können diese Forderungen bei einem Beispiel nicht erfüllt werden, so muß die Begründung angegeben werden.

a) Menge und Preis von Zucker, Obst, Kleiderstoff . . .
b) Alter und durchschnittliche Größe von Kindern.
c) Geschwindigkeit eines Kraftwagens und Fahrzeit für 100 km.
d) Geschwindigkeit eines Kraftwagens und Größe der Windschutzscheibe.
e) Stromstärke und Leistungsaufnahme verschiedener Geräte bei 220 V Spannung.
f) Stromstärke und Betriebsdauer verschiedener Geräte bei 220 V Spannung.

2. Die folgenden analytischen Ausdrücke von Funktionen sind in impliziter Form gegeben. Sie sind jeweils in die beiden möglichen expliziten Formen umzuwandeln. Geben Sie nach der Umwandlung jedesmal an, welches die abhängige und welches die unabhängige Veränderliche ist!

a) $5x - 4y - 9 = 0$ **b)** $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x = 7$

c) $\frac{x-y}{5} = 2 - x$ **d)** $3(0{,}5x - 0{,}2y) = 0{,}1(2y - 3y)$

e) $\frac{3x - 2y}{5} = 0{,}2 + 3y$ **f)** $(2x - 3)(4y + 7) = (0{,}8y - 1)(10x - 2)$

g) $(x - 2) : \left(y + \frac{1}{2}\right) = 2 : 5$ **h)** $x - y = 0$

3. Nennen Sie je zwei analytische Ausdrücke von Funktionen **1., 2. und 3.** Grades!

4. a) Welche Bedeutung haben beim analytischen Ausdruck der linearen Funktion $y = mx + n$ die Größen m und n?

b) Vergleichen Sie $y = 2x + 1$ mit $y = 3x + 1$ und mit $y = 2x + 2$!

5. Stellen Sie die folgenden linearen Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar!

a) $y = +x$ und $y = -x$ **b)** $y = +\frac{3}{2}x$; $y = +\frac{2}{3}x$ und $y = -\frac{2}{3}x$

c) $y = \frac{1}{3}x + 3$ und $y = -\frac{1}{3}x - 3$ **d)** $2x + 4y - 10 = 0$ **e)** $\frac{1}{3}y - \frac{5}{6}x + \frac{3}{2} = 0$

8. Definitionsbereich und Wertevorrat einer Funktion

1) Wir kennen bereits zwei Arten von Funktionen:

a) Funktionen, denen ein analytischer Ausdruck zwischen den Veränderlichen zugrunde liegt:

Beispiele:

(1) Die lineare Funktion: $y = mx + n$ (Veränderliche: x und y)

(2) Warenpreis P und Warenmenge M: $P = k \cdot M$ (Veränderliche: P und M)
k bedeutet dabei den Preis für die Mengeneinheit.

(3) Stromstärke I und Widerstand R: $I = \frac{U}{R}$ (Veränderliche: I und R).
U bedeutet die angelegte konstante Spannung.

b) Funktionen, für die kein analytischer Ausdruck angegeben werden kann.

Beispiele:

(4) Tageszeit und Lufttemperatur

(5) Lebensalter und Körpergewicht eines Kindes

(6) Viele statistische Angaben.

Die einander zugeordneten Werte können wir bei den Funktionen beider Arten jeweils in einer Wertetafel niederschreiben oder als Koordinaten von Punkten in einem Koordinatensystem grafisch darstellen. Doch besteht dabei ein wichtiger Unterschied.

Für Funktionen der Art a) können wir die Wertetafel mit Hilfe des analytischen Ausdrucks berechnen, und dabei die Wertepaare durch Zwischenschaltung (Interpolation) beliebig verdichten.

Für das Beispiel (3) erhalten wir mit $U = 220$ Volt:

R (in Ohm)	50	100	150	200	250
I (in Ampere) gerundet	4,4	2,2	1,5	1,1	0,9

Bei der grafischen Darstellung (Abb. 4) dürfen wir infolgedessen die einzelnen Punkte durch einen Kurvenzug verbinden. (Auch die Gerade wird in diesem Zusammenhang als Kurve bezeichnet). Beliebige Punkte dieser Kurve können zum Ablesen weiterer Wertepaare benutzt werden.

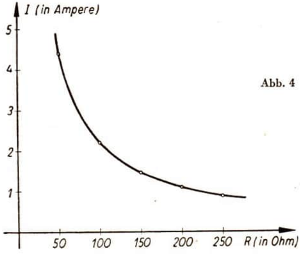


Abb. 4

Die Wertetafeln von Funktionen der Art b) können aber nur empirisch, d. h. durch Beobachtung oder Erfahrung erhalten werden. Für das Beispiel (6) entnehmen wir zum Beispiel dem Statistischen Jahrbuch der DDR eine statistische Aufstellung der Zahl der Polikliniken in der DDR jeweils zum 31. Dezember des betreffenden Jahres:

Jahr	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
Anzahl der Polikliniken in der DDR	184	229	269	327	354	369	373

Solche Wertetafeln können nicht durch Interpolieren verdichtet werden; sie sind auf die wenigen empirisch ermittelten Wertepaare beschränkt. Die grafische Darstellung besteht infolgedessen hier nur aus den zugehörigen einzelnen („diskreten") Punkten (Abb. 5). Diese dürfen nicht durch eine Kurve, sondern höchstens durch Strecken verbunden werden. Zwischenpunkte auf diesen Strecken können niemals zum Bestimmen weiterer Wertepaare der Funktion benutzt werden.

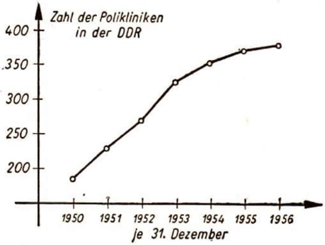


Abb. 5

Wenn zwischen zwei Mengen verschiedener Größen ein solcher Zusammenhang besteht, daß bestimmten Werten x der einen Menge stets bestimmte Werte y der anderen Menge zugeordnet sind, so stellt diese Zuordnung von x und y eine Funktion dar. Diese Beziehung ist wechselseitig: x ist eine Funktion von y und y ist eine Funktion von x. Die beiden Größen x und y heißen die Veränderlichen der Funktion.

2) Die Menge der Werte, die die **unabhängige Veränderliche** annehmen kann, nennt man den **Definitionsbereich** der Funktion. Demgegenüber bezeichnet man die Menge der Werte, die die **abhängige Veränderliche** annehmen kann, als **Wertevorrat.**

Die Angabe des Definitionsbereiches und des Wertevorrats ist vor allem bei solchen Funktionen wichtig, denen sachliche Zuordnungsvorschriften oder Naturgesetze zugrunde liegen. Denn bei ihnen umfassen beide meist nicht die unbegrenzte Folge aller rationalen bzw. irrationalen Zahlen, wie es z. B. bei der formalen linearen Funktion $y = mx + n$ der Fall ist.

Beispiele:

(1) Der von einem Kraftwagen zurückgelegte Weg y ist bei 80 km/h Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit x mit dem analytischen Ausdruck $y = 80 \cdot x$. Definitionsbereich: $x > 0$; Wertevorrat: $y > 0$.

(2) Die Körpertemperatur t eines Fieberkranken ist eine Funktion der Tageszeit. Wertevorrat (infolge biologischer Bedingungen): $34° < t < 42°$.

(3) Die Schnittgeschwindigkeit v einer Drehmaschine ist eine Funktion der Drehzahl n. Liegt kein stufenlos regelbarer Antrieb vor, so umfaßt der Definitionsbereich nur eine gewisse Anzahl von Drehzahlstufen, z. B. 18; 29; 46; 74; 118; 188 . . .

Definitionsbereich und Wertevorrat können also einseitig begrenzt sein (Beispiel 1), zweiseitig begrenzt sein (Beispiel 2) oder nur aus einzelnen Werten bestehen (Beispiel 3).

Definitionsbereich und Wertevorrat müssen wir auch bei der grafischen Darstellung beachten. Im Beispiel (1) ist deshalb wegen $x > 0$ und $y > 0$ nur die Halbgerade im I. Quadranten gerechtfertigt (Abb. 6).

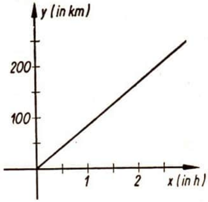


Abb. 6

Zusammenfassung:

1. **Zwei Mengen verschiedener Größen, die wechselseitig einander zugeordnet sind, bilden eine Funktion.**
2. **Kann man einer Funktion einen analytischen Ausdruck zugrunde legen, so lassen sich die Wertepaare berechnen.**
3. **Läßt sich kein analytischer Ausdruck angeben, so können die Wertepaare nicht berechnet werden.**
4. **Die Mengen der Werte der unabhängigen Veränderlichen (Definitionsbereich) sowie der abhängigen Veränderlichen (Wertevorrat) werden häufig durch den Sachverhalt beschränkt. Das ist auch bei der grafischen Darstellung zu beachten.**

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben sind jeweils nachstehende Fragen zu beantworten:

a) Welche Größe soll als unabhängige, welche als abhängige Veränderliche betrachtet werden?
b) Wie groß sind Definitionsbereich und Wertevorrat?
c) Wie heißt der analytische Ausdruck, falls ein solcher angegeben werden kann?
d) Wie sieht die grafische Darstellung unter Beachtung von Definitionsbereich und Wertevorrat aus?

1. Das Körpergewicht P eines Kindes wurde in verschiedenem Lebensalter L bestimmt:

L (in Jahren)	0	1	2	3	4	5	6
P (in kp)	3,2	9,6	12,0	14,2	16,0	17,6	19,0

Welche Bedeutung hat die Angabe $L = 0$?

2. Die barometrische Höhenmessung beruht auf der Ermittlung der Luftdruckabnahme mit zunehmender Entfernung des Meßortes von der Erdoberfläche. Verschiedenen Höhen (h, in Kilometern) sind die folgenden Luftdrücke (p, in Torr) zugeordnet:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	760	674	598	530	470	417	370	328	291	258	229

3. a) Um den Nullpunkt eines Koordinatensystems ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ beschrieben. Eine Parallele zur y-Achse wird von der Stelle $x = -4$ bis zur Stelle $x = +4$ verschoben. Die Zahl der gemeinsamen Punkte dieser Geraden mit dem Kreis ist eine Funktion des Geradenabstandes von der y-Achse.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ und für eine Parallele zur x-Achse!

4. Ordnen Sie Gewicht und Volumen verschiedener Werkstücke einander zu
a) aus Flußstahl ($\gamma = 7{,}85\ \text{kp/dm}^3$);
b) aus Aluminiumgußlegierung G Al Si 13 ($\gamma = 2{,}65\ \text{kp/dm}^3$)!

5. Durch Einsatz von Arbeitsinstrukteuren im Bergbau eines Steinkohlengebietes wurden u. a. die Schichtleistungen dreier Häuer in einer Woche folgendermaßen gesteigert:

Häuer	Schichtnorm in m^3	Schichtleistung in m^3					
		4. 12.	6. 12.	7. 12.	8. 12.	9. 12.	10. 12.
A	6,5	5,3	6,5	6,4	7,8	12,1	8,9
B	6,5	5,0	6,2	7,3	8,7	7,5	8,5
C	6,5	6,3	4,2	7,0	10,5	8,5	8,5

6. Das Volumen des Quecksilbers im Thermometer ist eine lineare Funktion der Temperatur. Es vergrößert sich durchschnittlich bei Erwärmung um 1° C um 0,018% seines Volumens bei 18°. Quecksilber erstarrt bei — 39° C und siedet bei + 357° C.

7. Das Ziehen der Winterfurche auf einem Feld erfordert bei Einsatz eines Dreischarpfluges 18 Arbeitsstunden.

8. Eine Schraubenfeder beginnt sich bei 80 p Belastung auszudehnen, und zwar bei je weiteren 50 p Belastung um jeweils 15% ihrer ursprünglichen Länge. Bei Verlängerung auf das 2,5fache der ursprünglichen Länge ändert sich ihre Elastizität merklich.

9. Der elektrische Widerstand eines Kupferdrahtes von 1 m Länge und 1 mm Durchmesser beträgt 0,022 Ω. Widerstand und Leiterquerschnitt sind produktgleiche Größen.

9. Die Nullstelle der linearen Funktion

1) Wir wissen bereits, daß die grafische Darstellung einer linearen Funktion in einem rechtwinkligen Koordinatensystem stets eine Gerade ergibt. Zur Untersuchung benutzten wir die explizite Form des analytischen Ausdrucks:

$$y = mx + n.$$

In dieser Form ist x die unabhängige und y die abhängige Veränderliche. Dabei bedeutet m den Richtungsfaktor oder Anstieg und n den Abschnitt auf der y-Achse. In der Abbildung 7 stellt die Gerade g_1 die Funktion $y = -\frac{3}{2}x + 2$ dar. Zu ihr ist durch den Koordinatenursprung die Parallele g_2 gezogen. Diese schneidet die im Abstand $+1$ zur y-Achse gezogene Parallele g_3 im Punkte $\left(+1; -\frac{3}{2}\right)$. Auf dieser Parallelen läßt sich also $m = -\frac{3}{2}$ ablesen. Der Abschnitt auf der y-Achse beträgt dann $n = 2$.

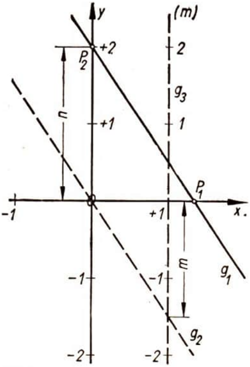


Abb. 7

Oft ist der analytische Ausdruck einer linearen Funktion in der impliziten Form gegeben: $3x + 2y - 4 = 0$, allgemein: $Ax + By + C = 0$ (A, B und C sind von 0 verschiedene beliebige, vorerst rationale Zahlen).

Wir stellen beide Formen gegenüber:

Explizite Form einer Funktion	Implizite Form einer Funktion
Zahlenbeispiel:	
$y = \boxed{-\frac{3}{2}}\, x + \boxed{2}$	$\boxed{3}\, x + \boxed{2}\, y - \boxed{4} = 0$
allgemein:	
$y = \boxed{m}\, x + \boxed{n}$	$\boxed{A}\, x + \boxed{B}\, y + \boxed{C} = 0$

Durch Umformung kann man leicht aus einer Form die andere gewinnen. Für das Aufstellen der Wertetafel und für die grafische Darstellung wird die implizite Form in die explizite umgewandelt:

$3x + 2y - 4 = 0$	$Ax + By + C = 0$
$2y = -3x + 4$	$By = -Ax - C$
$y = -\frac{3}{2}x + 2$	$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

2) Die Gerade in Abbildung 8 entspricht dem analytischen Ausdruck $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Sie schneidet die x-Achse in P_1 und die y-Achse in P_2. Wir erkennen:

P_1 (Schnittpunkt mit der x-Achse) hat die Ordinate $y_1 = 0$.

P_2 (Schnittpunkt mit der y-Achse) hat die Abszisse $x_2 = 0$.

Die anderen Koordinaten dieser Schnittpunkte (Abszisse x_1 und Ordinate y_2; vgl. Abb. 8) können wir mit Hilfe des analytischen Ausdrucks $y = -\frac{3}{2}x + 2$ wie folgt berechnen:

Schnittpunkt:	P_1 (mit der x-Achse)	P_2 (mit der y-Achse)
Bedingung:	$y_1 = 0$	$x_2 = 0$
Bestimmungs-gleichung	für x_1:	für y_2:
	$0 = -\frac{3}{2}x_1 + 2$	$y_2 = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 2$
Ergebnis:	$x_1 = \frac{4}{3}$	$y_2 = 2$
	$P_1\left(\frac{4}{3}; 0\right)$	$P_2(0; 2)$

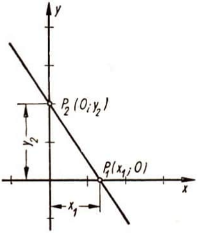


Abb. 8

$y_2 = 2$ ist uns schon als Abschnitt auf der y-Achse bekannt. Entsprechend bedeutet $x_1 = \frac{4}{3}$ den Abschnitt auf der x-Achse (Abb. 8), $x_1 = \frac{4}{3}$ ist rechnerisch derjenige Wert der unabhängigen Veränderlichen x, für den der Wert der Funktion

$y = -\frac{3}{2}x + 2$ gleich 0 wird. Aus diesem Grunde nennt man den Wert $x_1 = \frac{4}{3}$ die **Nullstelle** der Funktion $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

Die Nullstelle der Funktion ist also gleich der Abszisse des Schnittpunktes der entsprechenden Geraden mit der x-Achse. Die Nullstelle ist demnach ein Zahlenwert (im Zahlenbeispiel $x_1 = \frac{4}{3}$). Dieser Wert ist im Diagramm geometrisch durch eine Strecke, den Abschnitt auf der x-Achse vom Ursprung bis zum Schnittpunkt mit der Geraden, dargestellt. Verwechseln Sie diese Begriffe nicht!

3) Nicht alle Geraden schneiden beide Achsen des Koordinatensystems (Abb. 9).

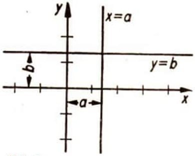


Abb. 9

Die Parallelen zur y-Achse schneiden nur die x-Achse; sie entsprechen dem analytischen Ausdruck $x = a$. Nullstelle: $x_1 = a$. Die Parallelen zur x-Achse schneiden nur die y-Achse; sie entsprechen dem analytischen Ausdruck $y = b$.

Die Funktion $y = b$ hat keine Nullstelle; denn y ist für jeden Wert für x gleich b und niemals gleich 0. (a und b können dabei beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen sein.)

Wenn wir von dem Fall $y = b$ absehen, können wir sagen, daß jede lineare Funktion $y = mx + n$ mit $m \neq 0$ genau eine Nullstelle x_1 besitzt. Ihre Berechnung führt auf die lineare Bestimmungsgleichung $0 = mx_1 + n$. Da aber jede Bestimmungsgleichung 1. Grades auf die Form $mx_1 + n = 0$ gebracht werden kann, folgt daraus, daß jede Bestimmungsgleichung 1. Grades genau eine Lösung haben muß.

4) Der Begriff der Nullstelle gilt nicht nur für lineare Funktionen, sondern auch für Funktionen höheren Grades.

Wenn wir die Zuordnung zweier Größen x und y feststellen, über die Art der Funktion (ob linear, quadratisch usw.) aber nichts aussagen wollen, so wollen wir künftig $y = f(x)$ schreiben. Gelesen: „y gleich f von x". Das soll bedeuten: y ist irgendeine Funktion von x, und zwar ist der analytische Ausdruck, falls überhaupt einer existiert, in der expliziten Form gegeben. Ist der analytische Ausdruck in der impliziten Form gegeben, wollen wir $F(x, y) = 0$ schreiben. Statt f bzw. F können auch andere Symbole wie g, h, L, f_1 usw. verwendet werden. Allgemein können wir demnach sagen: Setzt man in einer Funktion $y = f(x)$ die Größe $y = 0$, so heißt der zugehörige Wert x_1 der Veränderlichen x die Nullstelle der Funktion: $0 = f(x_1)$. Durch diese Bestimmungsgleichung kann x_1 ermittelt werden. Im Diagramm ist die Nullstelle die Abszisse des Schnittpunktes der zu $y = f(x)$ gehörenden Kurve mit der x-Achse.

Zusammenfassung:

1. **Der Zahlenwert x_1, für den $y = mx + n$ gleich 0 wird, heißt die Nullstelle der linearen Funktion. Sie ist gleich der Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse. Jede lineare Funktion (mit Ausnahme von $y = b$) hat genau eine Nullstelle.**

2. **Die Bestimmung der Nullstelle erfolgt mit Hilfe der zugehörigen linearen Bestimmungsgleichung $mx_1 + n = 0$, $m \neq 0$. Jede lineare Bestimmungsgleichung hat infolgedessen genau eine Lösung.**

3. **Zur Symbolisierung einer beliebigen Funktion verwendet man $y = f(x)$ (explizite Form) oder $F(x, y) = 0$ (implizite Form).**

Aufgaben

1. Stellen Sie zu folgenden impliziten Formen die expliziten erst nach y, dann nach x aufgelöst her!

a) $x + y = 4$ **b)** $x - y = 5$

c) $3{,}5x - 2{,}0y - 1{,}6 = 0$ **d)** $3(4y - 1) + 16(5x - 12y) - 10 = 0$

e) $5(9x + 7) + 1{,}4(5x - 3y) + 2 = 0$ **f)** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

2. Wie groß sind bei den Aufgaben 1a) bis 1f) jeweils Richtungsfaktor und Abschnitt auf der y-Achse?

3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen, die durch die analytischen Ausdrücke der Aufgaben 1a) bis 1f) gegeben sind!

4. Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen auf grafischem Wege!

a) $y = \frac{1}{2}x - 4$ **b)** $y = 0{,}3x + 1{,}5$ **c)** $y = x + 2$

d) $2x - y = 6$ **e)** $x - 2y - 1 = 0$ **f)** $6x - 5y - 9 = 0$

5. Wie könnte man die Lösungen folgender Bestimmungsgleichungen grafisch ermitteln?

a) $0{,}5x - 2 = 0$ **b)** $3x + 6 = 0$ **c)** $1{,}8x - 4{,}5 = 0$

Warum hat das Verfahren keinen praktischen Wert?

10. Verschiedene Verfahren zur grafischen Darstellung linearer Funktionen

1) Bei der grafischen Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem wählt man auf den Achsen zweckmäßig solche Maßeinheiten und legt die Nullpunkte der Maßteilungen so, daß die darzustellenden Wertepaare gut wiedergegeben werden. Das ist vor allem bei Funktionen wichtig, denen irgendwelche Sachverhalte aus der Praxis zugrunde liegen. Ein typisches Beispiel dafür ist die Abbildung 5. Bei Funktionen, denen analytische Ausdrücke zugrunde liegen, muß man aber beachten, daß eine Änderung der Maßeinheiten oder der Lage der Nullpunkte der Maßteilungen die Gestalt und Lage der Kurven beeinflußt. Das wollen wir an Hand der linearen Funktion $y = 3x + 2$ genauer untersuchen. Abbildung 10 zeigt das Diagramm bei gleichen Maßeinheiten auf beiden Achsen, wenn die Nullpunkte beider Maßteilungen im Koordinatenursprung liegen.

In Abbildung 11 wurde der Nullpunkt der Teilung auf der y-Achse um 2 Einheiten weiter nach unten verlegt. Das bewirkt, daß die Gerade parallel zu sich verschoben wird

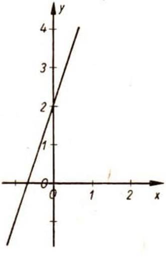


Abb. 10

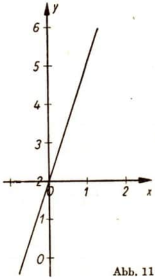


Abb. 11

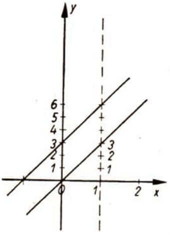


Abb. 12

und jetzt durch den Koordinatenursprung verläuft, obwohl ihr immer noch der analytische Ausdruck $y = 3x + 2$ zugrunde liegt. Wir erkennen, daß die Verschiebung des Nullpunktes der Achsenteilung keine Änderung der Neigung der Geraden zur Folge hat.

In Abbildung 12 ist gegenüber der Abbildung 10 die Maßeinheit auf der y-Achse (e_y) auf $\frac{1}{3}$ der Maßeinheit auf der x-Achse (e_x) verkleinert worden $\left(e_y = \frac{1}{3}\, e_x\right)$. Das Ergebnis ist, daß die Neigung der Geraden zur x-Achse sich geändert hat. Sie halbiert jetzt den I. und III. Quadranten, obwohl noch immer $y = 3x + 2$ der zugrunde liegende analytische Ausdruck, also der Richtungsfaktor 3 ist. Diesen können wir aber nach wie vor auf der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $(+1; 0)$ ablesen, wenn wir auf dieser ebenfalls eine Maßteilung mit e_y anbringen und zum Ablesen die Parallele zur Geraden durch den Koordinatenursprung verwenden. Eine Änderung der Maßeinheit auf einer der beiden Achsen bewirkt also eine Änderung der Neigung der Geraden.

2) Die grafische Darstellung einer Funktion durch eine Kurve oder durch einzelne Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist nicht die einzig mögliche. Wir wollen jetzt noch zwei andere Arten kennenlernen, nämlich die Darstellung durch **Doppelleitern** und die durch **Leiterpaare**.

Die technische Ausführung eines Doppelleiter-Diagramms einer linearen Funktion finden wir bei Zimmerthermometern, die zugleich eine Celsius- und eine Reaumurskala tragen. Die zugrunde liegende lineare Funktion ist $5R = 4C$. In der Zeichnung tritt an Stelle des Thermometerröhrchens eine Gerade, die zu beiden Seiten je eine Skala trägt. Diese Skalen nennt man **Leitern**, die Gerade den **Träger** der Leitern. Die beiden Skalen sind so konstruiert und angeordnet, daß die Werte von R und C, die nach der Funktion einander zugeordnet sind, am Träger einander gegenüberstehen. (z. B. $+5°C\,/+4°R$; $0°C\,/\,0°R$; $-10°C\,/-8°R$). Diese Art der grafischen Darstellung nennt man eine **Doppelleiter**.

Die Doppelleiter entsteht wie folgt aus der grafischen Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 13). Zunächst wird die Funktion $C = \frac{5}{4}\,R$ als gerade Linie dargestellt, wobei auf beiden Achsen gleiche Maßeinheiten verwendet werden und die Nullpunkte beider Skalen im Ursprung zusammenfallen. Jetzt projizieren wir senkrecht auf eine Parallele zur C-Achse

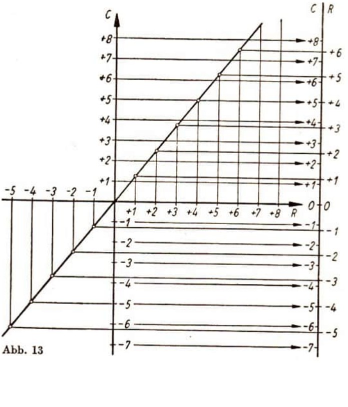


Abb. 13

a) die Maßskala der C-Achse und beschriften sie mit den C-Werten,

b) die Punkte der schräg ansteigenden Geraden, die ganzzahlige Abszissen haben, und beschriften sie mit diesen Abszissen, also mit den R-Werten.

So entsteht die Doppelleiter.

3) Mitunter ist es übersichtlicher, jede der beiden Leitern der Doppelleiter für sich auf eine von zwei parallelen Geraden zu zeichnen (Abb. 14). Ein solches Diagramm nennt man ein **Leiterpaar.** Zu ihm gehören parallele Hilfsgeraden, die angeben, welche Punkte der beiden Leitern einander zugeordnet sind. Sie heißen **Zuordnungsgeraden.** In der Praxis werden zwar nicht immer, aber doch vorwiegend Leiterpaare mit parallelen Trägern und parallelen Zuordnungsgeraden verwendet.

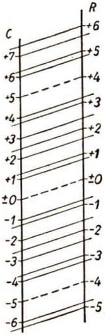


Abb. 14

Zusammenfassung:

1. Wird im rechtwinkligen Koordinatensystem der Nullpunkt einer Achsenskala verschoben, so verschiebt sich die Gerade einer linearen Funktion parallel zu sich.

2. Wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Maßeinheit auf einer der Achsen geändert, so ändert sich die Neigung der Geraden einer linearen Funktion.

3. Neben der grafischen Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gibt es noch die durch Doppelleitern oder die durch Leiterpaare.

Aufgaben

1. Stellen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichen Maßeinheiten auf den Achsen die folgenden Funktionen grafisch dar!
Verlagern Sie dann in einem zweiten Diagramm die Skala der jeweiligen Achse so, daß der angegebene Punkt in den Ursprung zu liegen kommt!

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$ **α)** $P_1\,(0;\,-3)$ **β)** $P_2\,(0;\,+1)$

b) $x + y + 2 = 0$ **α)** $P_1\,(-2;\,0)$ **β)** $P_2\,(+2;\,0)$

2. Stellen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichen Maßeinheiten auf den Achsen die folgenden Funktionen grafisch dar und ändern Sie dann in einem zweiten Diagramm die Maßeinheiten auf das angegebene Verhältnis!

a) $x - y + 1 = 0$ **α)** $e_x : e_y = 2:1$ **β)** $e_x : e_y = 1:2$

b) $10x - y + 2 = 0$ **α)** $e_x : e_y = 10:1$ **β)** $e_x : e_y = 5:2$

3. Stellen Sie folgende Funktionen grafisch durch Doppelleitern dar!

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{1}{3}x$ **c)** $y = x + 2$ **d)** $2x + 3y - 12 = 0$

4. Stellen Sie folgende Funktionen durch Leiterpaare dar!

a) $K = C + 273$ **b)** $z = 0{,}03 \cdot b$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$ **d)** $x = 3y + 1$

5. Entwerfen Sie Doppelleitern für folgende proportionale Zusammenhänge!

a) Für 1 AE zahlt eine LPG 9,80 DM Vergütung.

b) Luftdruckmaße: 1000 mb entsprechen 750 Torr.

c) Leistung: 1 kW entspricht 1,36 PS.

d) Geschwindigkeit: 3,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entsprechen 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

e) 3 t Rohbraunkohle entsprechen 1 t Steinkohle.

f) 1 Zoll entspricht 25,4 mm.

g) 1 Seemeile (sm) entspricht 1,852 km.

h) 1 Morgen entspricht 25,53 a.

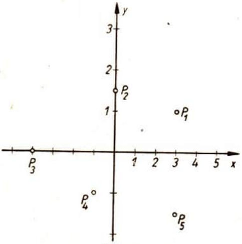


Abb. 15

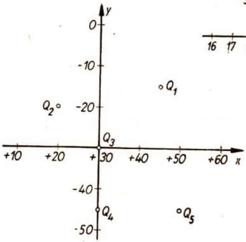


Abb. 16

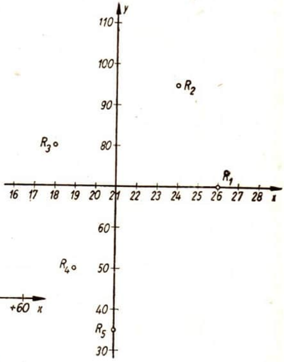


Abb. 17

6. Lesen Sie in den Diagrammen der Abbildungen 15, 16 und 17 die Koordinaten der markierten Punkte ab!

7. a) Zeichnen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die zur Funktion $x - 2y = 0$-gehörende Gerade!

b) Wählen Sie auf beiden Achsen doppelt so große Maßeinheiten und zeichnen Sie die Gerade erneut! Was stellen Sie fest?

c) Verfahren Sie genauso mit der Geraden $x - 2y + 3 = 0$! Was stellen Sie diesmal fest?

III. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten

11. Bestimmungsgleichungen 1. Grades mit 1 Unbekannten (Erweiterung)

Enthalten Bestimmungsgleichungen mehrere Brüche, so multipliziert man alle Glieder mit dem aus allen vorkommenden Nennern gebildeten Hauptnenner.

1. Beispiel: $\frac{7}{x} + 1 = \frac{23 - x}{3x} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4x}$

Hauptnenner: $12x$

$$12x \cdot \frac{7}{x} + 12x \cdot 1 = 12x \cdot \frac{23 - x}{3x} + 12x \cdot \frac{5}{4} - 12x \cdot \frac{1}{4x}$$

Jetzt werden die einzelnen Glieder gekürzt und zusammengefaßt:

$$84 + 12x = 92 - 4x + 15x - 3$$

$$x = 5$$

Probe: Linke Seite: $\frac{7}{5} + 1 = \frac{12}{5}$

Rechte Seite: $\frac{23-5}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{18}{15} + \frac{5}{4} - \frac{1}{20}$

$$= \frac{24}{20} + \frac{25}{20} - \frac{1}{20} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$$

Vergleich: $\frac{12}{5} = \frac{12}{5}$

2. Beispiel: $\frac{3x-5}{3x-3} - \frac{2x-7}{2x+2} = \frac{19x-3}{6x^2-6}$

Hauptnennerbestimmung:

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= 3\,(x-1) \\ 2x + 2 &= 2\,(x+1) \\ 6x^2 - 6 &= 2 \cdot 3 \cdot (x+1)(x-1) \\ \hline \text{HN:}\quad & 2 \cdot 3 \cdot (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Beim Multiplizieren werden diesmal sofort die einzelnen Glieder gekürzt. Dann ergibt sich:

$$2(x+1)(3x-5) - 3(x-1)(2x-7) = 19x - 3$$

$$6x^2 - 10x + 6x - 10 - 6x^2 + 21x + 6x - 21 = 19x - 3$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

Probe: Linke Seite: $\frac{3 \cdot 7 - 5}{3 \cdot 7 - 3} - \frac{2 \cdot 7 - 7}{2 \cdot 7 + 2} = \frac{8}{9} - \frac{7}{16} = \frac{65}{144}$

Rechte Seite: $\frac{19 \cdot 7 - 3}{6 \cdot 49 - 6} = \frac{130}{288} = \frac{65}{144}$

Vergleich: $\frac{65}{144} = \frac{65}{144}$

Aufgaben

1. a) $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}$ **b)** $\frac{7}{3} + \frac{13}{5x} = \frac{13x-24}{3x} - \frac{37}{20} + \frac{10}{x}$

c) $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31-7x}{6x}$

2. a) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$ **b)** $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-2}$

c) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{7x+7} = \frac{2}{x+9}$

3. a) $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x-4}{x-5}$ **b)** $\frac{2x-1}{2(x-3)} = \frac{3(x-2)}{3x-1}$

c) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-5}{x-3}$ **d)** $\frac{x}{x-5} = \frac{x-2}{x-6}$

4. a) $1 = \frac{2x+1}{3x-15} - \frac{x-11}{2x-10}$ **b)** $\frac{5x-7}{4x+4} + \frac{x+3}{3x+3} = 1$

c) $\frac{23-7x}{4-2x} - \frac{4(8-5x)}{6-3x} = 4$ **d)** $\frac{4(2x-17)}{5x-55} + \frac{9}{10} = \frac{7x-49}{2x-22}$

5. a) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{20}{4x-7}$ **b)** $\frac{9}{x-5} - \frac{5}{x-9} + \frac{28}{45-7x} = 0$

c) $\frac{13}{x-8} - \frac{15}{3x-26} = \frac{8}{x-13}$ **d)** $\frac{2}{2x-5} - \frac{9}{3x-5} + \frac{4}{2x-15} = 0$

6. a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$ **b)** $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{8-x} = \frac{1}{7-x} + \frac{1}{5+x}$

c) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-11}$ **d)** $\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-5}$

7. a) $\frac{a}{mx} + \frac{b}{mx} = c$ **b)** $\frac{a}{b+x} - m = \frac{c}{b+x} - n$

c) $\frac{a-x}{b-x} = \frac{a+x}{b+x}$ **d)** $\frac{ax-2a}{ax-2b} = \frac{ax-2b}{ax+2a}$

e) $\frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ **f)** $\frac{a(2x+1)}{3b} - \frac{5ax-4b}{5b} = \frac{4}{5}$

12. Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten; Einführung und grafische Lösung

1. Beispiel: Zum Abernten eines größeren Getreidefeldes werden ein Mähdrescher und ein Mähbinder eingesetzt. Am ersten Tag arbeiten beide gemeinsam 5 Std. und ernten 8 ha ab. Am zweiten Tag kann der Mähdrescher nur 3 Std. eingesetzt werden, der Binder arbeitet dafür 6 Std. Dadurch schaffen sie 6 ha. Wie groß ist die stündliche Leistung jeder Maschine?

Wir wollen die Stundenleistungen der Maschinen mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen ermitteln. Dabei kommen aber diesmal 2 Unbekannte vor. Ihre Zahlenwerte wollen wir mit x und mit y bezeichnen, also:

Die stündliche Leistung des Mähdreschers sei $x \frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$, die des Binders $y \frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$. Am ersten Tag schafft der

Mähdrescher 5 Std. lang je x ha, also $5x$ ha,
der Binder 5 Std. lang je y ha, also $5y$ ha.
Zusammen sind das $(5x + 5y)$ ha, oder nach den Angaben der Aufgabe gerade 8 ha.

Daraus erhalten wir in Zahlenwerten die Gleichung

$$\text{(I)}\quad 5x + 5y = 8 \text{ oder } y = -x + 1{,}6.$$

Diese Gleichung hat die Form des analytischen Ausdrucks einer Funktion 1. Grades, wenn wir x und y als Veränderliche annehmen. Dann erhalten wir folgende Wertetafel:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	**1,2**	1,4
y	1,4	1,2	1,0	0,8	0,6	**0,4**	0,2

Wir erkennen: Das Ernteergebnis von 8 ha am 1. Tag kann bei 5stündiger Arbeitszeit beider Maschinen auf ganz verschiedene Weise zustande gekommen sein, d. h. die Leistungen der beiden Maschinen lassen sich daraus nicht eindeutig bestimmen. Wir erkennen nur, daß die Leistung jeder Maschine kleiner als 1,6 $\frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$ sein muß. In Abbildung 18 zeigt die Gerade g_1 die möglichen einander zugeordneten Werte von x und y. Der wegen der Beschränkung auf $x < 1{,}6$ und $y < 1{,}6$ in Frage kommende Teil der Geraden ist ausgezogen, der andere gestrichelt gekennzeichnet.

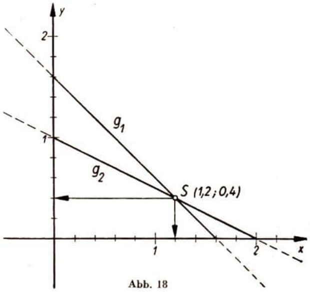


Abb. 18

Das Ergebnis des zweiten Arbeitstages wird entsprechend durch den analytischen Ausdruck einer anderen Funktion wiedergegeben:

$$\text{(II)}\quad 3x + 6y = 6 \qquad \text{oder} \qquad y = -0{,}5x + 1.$$

Die zugehörige Wertetafel ist hier

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	**1,2**	1,4	1,6	1,8
y	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	**0,4**	0,3	0,2	0,1

Die Werte von x und y sind hierdurch offenbar beschränkt auf $x < 2$; $y < 1$; eine eindeutige Angabe der Leistungen der beiden Maschinen ist aber auch durch diese zweite Feststellung allein nicht möglich. In Abbildung 18 ist als grafische Darstellung die Gerade g_2 eingezeichnet.

Für diese Rechnung muß eine gleichbleibende Arbeitsleistung (Durchschnittsleistung) angenommen werden. Die Werte von x bzw. y müssen demzufolge in beiden Gleichungen dieselben sein. Sie stellen die Durchschnittsleistungen der beiden Maschinen dar. Wir müssen daher diejenigen Werte von x und y suchen, die beiden Gleichungen (I) und (II) zugleich genügen. In der grafischen Darstellung (Abb. 18) sind das die Koordinaten des Punktes, der zugleich auf beiden Geraden liegt, d.h. des Schnittpunktes S (1,2; 0,4). In den zwei Wertetafeln ist es dasjenige Wertepaar, das in beiden zugleich vorkommt: $x = 1{,}2$; $y = 0{,}4$. Das sind offenbar die gesuchten Stundenleistungen der beiden Maschinen.

Das bestätigt auch die Probe am Text:

	1. Tag			2. Tag		
	Leistung in $\frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$	Arbeitszeit in Std.	Bearbeitete Fläche in ha	Leistung in $\frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$	Arbeitszeit in Std.	Bearbeitete Fläche in ha
Mähdrescher . .	1,2	5	6,0	1,2	3	3,6
Mähbinder . . .	0,4	5	2,0	0,4	6	2,4
Zusammen . . .			8,0			6,0

Ergebnis: Der Mähdrescher hat eine Leistung von $1{,}2\ \frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$, der Mähbinder von $0{,}4\ \frac{\text{ha}}{\text{Std.}}$.

2. Beispiel: (abgekürzte Form):

In Leonhard Eulers berühmtem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra"[1] findet sich folgende Aufgabe:

Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel: Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal soviel wie du. Darauf antwortet der Maulesel: Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal soviel wie du.

Wieviel Pud hat jeder getragen?

Der Maulesel möge y Pud, der Esel x Pud tragen.

Der Esel stellt fest:

(I) $x + 1 = 2(y - 1)$ oder $x - 2y + 3 = 0$

Der Maulesel sagt:

(II) $y + 1 = 3(x - 1)$ oder $3x - y - 4 = 0$

Die Abbildung 19 zeigt die grafische Darstellung der beiden Funktionen mit der erforderlichen Beschränkung auf $x > 0$ und $y > 0$. Der gemeinsame Punkt S hat die Koordinaten $x = 2\frac{1}{5}$; $y = 2\frac{3}{5}$.

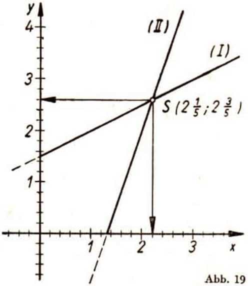


Abb. 19

Probe:

(I) Linke Seite: $2\frac{1}{5} + 1 = 3\frac{1}{5}$ Rechte Seite: $2\left(2\frac{3}{5} - 1\right) = 2 \cdot 1\frac{3}{5} = 3\frac{1}{5}$

Vergleich: $3\frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}$

---

[1] Leonhard Euler, geboren in Basel 1707, gestorben in Petersburg 1782, einer der größten Mathematiker aller Zeiten, erblindete 1766 und diktierte als erste Veröffentlichung nach dieser Erkrankung dieses hervorragende Lehrbuch seinem Diener in die Feder.

(II) Linke Seite: $2\frac{3}{5} + 1 = 3\frac{3}{5}$ Rechte Seite: $3\left(2\frac{1}{5} - 1\right) = 3 \cdot 1\frac{1}{5} = 3\frac{3}{5}$

Vergleich: $3\frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$

Ergebnis: Der Esel trug $2\frac{1}{5}$ Pud, der Maulesel $2\frac{3}{5}$ Pud.

Zusammenfassung:

1. **Enthält eine Anwendungsaufgabe zwei Unbekannte, so sind zur Lösung zwei Gleichungen erforderlich.**
2. **Jede für sich kann als analytischer Ausdruck einer Funktion aufgefaßt und grafisch dargestellt werden. Sie bestimmt die Werte x und y demzufolge nicht eindeutig; x und y sind in diesem Falle Veränderliche.**
3. **Die beiden Gleichungen zusammen bestimmen aber eindeutig ein Wertepaar x und y; nämlich dasjenige, das beiden Gleichungen zugleich genügt, sofern es genau ein solches Wertepaar gibt. Die beiden Gleichungen zusammen sind also Bestimmungsgleichungen, x und y die Unbekannten. Man spricht von einem System von zwei Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten.**
4. **Stellt man die beiden Gleichungen eines solchen Systems grafisch als Geraden dar, so stellen die Koordinaten ihres Schnittpunktes die Lösung des Gleichungssystems dar (grafische Lösung des Gleichungssystems). Die grafische Lösung ist wegen der Zeichenungenauigkeit nur eine Näherungslösung und muß daher stets überprüft werden.**

Aufgaben

Die folgenden Gleichungssysteme sind grafisch zu lösen. Die Richtigkeit der Lösungen ist durch die Probe zu bestätigen.

1. a) $y = -x + 1$, $y = -2x - 1$ **b)** $y = 4x - 2$, $y = 2x + 4$ **c)** $y = -2x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$

d) $x - y = 1$, $x + 4y = 6$ **e)** $x - 2y = -4$, $3x - y = 3$ **f)** $5x + 3y = 21$, $7x - 8y = 5$

g) $5x + 3y = 21$, $3x + 5y = 19$ **h)** $4x + 6y = 5$, $6x + 4y = 5$ **i)** $x = 3y - 2$, $x = 5y - 12$

2. Wenn die gegebenen Gleichungen Klammern oder Brüche enthalten, so daß es schwierig ist, die grafische Darstellung durchzuführen, bringt man sie erst auf die Form $y = mx + n$. Verfahren Sie bei den folgenden Aufgaben in dieser Weise!

a) $3x + 4 = 2(3y + 5)$, $4x + 3 = 3(3y + 2)$ **b)** $5(x - 2) - 3(y - 1) = 0$, $2(x - 2) - 7(y - 1) = 0$ **c)** $5x - 7y - 1 = 0$, $\frac{3x - 4y + 3}{4x - 5y + 2} = 1$

d) $\frac{3x + 2}{5} = \frac{5y + 4}{6}$, $\frac{5y - 2x}{4} = \frac{5x - 2y}{11}$ **e)** $(2x - 3y) : (3x - 4y) = 3 : 5$, $(x - 2) : (y + 2) = 1 : 3$ **f)** $(x + 2) : (y - 1) = 3 : 1$, $(3x + 4) : (y + 1) = 4 : 1$

13. Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit

Ein Gleichungssystem kann offenbar nur dann eine eindeutige Lösung besitzen, wenn sich in der grafischen Darstellung die beiden Geraden schneiden. Es ist aber auch möglich, daß sie zueinander parallel liegen oder zusammenfallen. Dann können wir keine Lösung des Gleichungssystems ermitteln. Wir fragen uns, wie das System in diesen Fällen aussieht.

1) Parallele Geraden g_1 und g_2 (Abb. 20).

Die analytischen Ausdrücke $y = m_1 x + n_1$ und $y = m_2 x + n_2$, die g_1 bzw. g_2 entsprechen, müssen dann denselben Richtungsfaktor ($m_1 = m_2$) haben, n_1 und n_2 müssen dagegen verschieden sein. In Abbildung 20 ist $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$; $n_1 = -1$ und $n_2 = -2$.

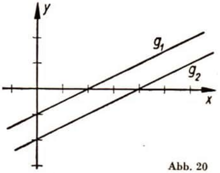


Abb. 20

Die analytischen Ausdrücke heißen also

für g_1: $y = \frac{1}{2} x - 1$; für g_2: $y = \frac{1}{2} x - 2$.

Das entsprechende Gleichungssystem

$$\text{(I)}\quad x - 2y = 2$$
$$\text{(II)}\quad x - 2y = 4$$

kann demnach keine Lösung besitzen. Das ist auch folgendermaßen leicht einzusehen: Es gibt keine Zahlenwerte x und $2y$, deren Differenz $x - 2y$ einmal 2 (nach I) und einmal 4 (nach II) ist. Denn entweder ist nur das eine oder nur das andere möglich. Man sagt, daß zwei solche Gleichungen einander **widersprechen**. Es kann vorkommen, daß wir bei komplizierten Gleichungsformen den Widerspruch nicht sofort erkennen können.

Beispiel:

$$\text{(I)}\quad x : (y + 1) = 3 : 1$$
$$\text{(II)}\quad 5 \cdot (x - y) + 2(y - 1) = 4x$$

Formen wir aber jede Gleichung so um, daß nur ein Glied mit x, eins mit y und ein Glied ohne jede Unbekannte vorkommt, so wird der Widerspruch offensichtlich. Es ergibt sich nämlich

$$\text{(I)}\quad x - 3y = 3$$
$$\text{(II)}\quad x - 3y = 2.$$

Im 1. Beispiel aus Kapitel 12 hätte sich ein solcher Fall ergeben, wenn am zweiten Tage beide Maschinen nur 3 Std. gearbeitet hätten und dabei ein Ernteergebnis von 6 ha festgestellt worden wäre:

$$\text{(I)}\quad 5x + 5y = 8 \quad \text{oder} \quad x + y = 1{,}6$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 6 \quad \text{oder} \quad x + y = 2$$

Dann wäre es unmöglich gewesen, feste Stundenleistungen der beiden Maschinen zu ermitteln.

2) Aufeinanderfallende Geraden g_1 und g_2 (Abb. 21).

In diesem Fall muß $m_1 = m_2$ und außerdem noch $n_1 = n_2$ sein. In Abbildung 21 ist $m_1 = m_2 = -2$; $n_1 = n_2 = 8$. Die analytischen Ausdrücke heißen also

$$\text{für } g_1: \quad y = -2x + 8$$

$$\text{für } g_2: \quad y = -2x + 8$$

Das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad 2x + y = 8$$

$$\text{(II)} \quad 2x + y = 8$$

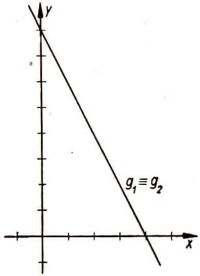


Abb. 21

kann keine eindeutige Lösung haben, weil beide Gleichungen gleich sind, also nur eine einzige Bedingung für x und y vorliegt. Das reicht nicht aus, um x und y eindeutig zu bestimmen, sondern alle (beliebig viele) Wertepaare der entsprechenden Wertetafel können als „Lösungen" angesprochen werden. (Geometrisch: Die beiden aufeinanderliegenden Geraden haben sämtliche Geradenpunkte gemeinsam.) Zwei solche Gleichungen nennt man „nicht unabhängig voneinander" oder „voneinander abhängig". Auch hier kann die Form der Gleichungen mitunter Unabhängigkeit vortäuschen.

Beispiel:

$$\text{(I)} \quad 2x + y = 6$$

$$\text{(II)} \quad 3(2x + y + 3) - 2(2x + y + 4) = 7$$

Erst nach dem Ausmultiplizieren, Ordnen und Zusammenfassen in Gleichung (II) erkennt man, daß (II) dieselbe Gleichung wie (I) ist.

Im 1. Beispiel aus Kapitel 12 hätte sich dieser Fall ergeben, wenn beide Maschinen am zweiten Tag gleichlange, z. B. 3 Std., gearbeitet hätten und dabei insgesamt 4,8 ha abgeerntet worden wären:

$$\text{(I)} \quad x + y = 1{,}6$$

$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 4{,}8 \quad \text{oder} \quad x + y = 1{,}6.$$

Das Ergebnis des zweiten Tages wäre zwar möglich gewesen, die Stundenleistungen der beiden Maschinen hätten aber damit nicht eindeutig bestimmt werden können.

Zusammenfassung:

1. **Die beiden Gleichungen eines Gleichungssystems müssen, wenn dieses eindeutig lösbar sein soll, unabhängig voneinander sein und dürfen einander nicht widersprechen.**
2. **Liegt Abhängigkeit vor, so fallen die beiden Geraden in der grafischen Darstellung aufeinander. Alle ihre Punkte sind gemeinsame Punkte. Die Koordinaten aller Punkte sind Lösungen des Systems.**
3. **Liegt ein Widerspruch vor, so verlaufen die beiden Geraden in der grafischen Darstellung zueinander parallel. Sie haben keinen gemeinsamen Punkt, das Gleichungssystem hat demnach keine Lösung.**

Aufgaben

1. Untersuchen Sie grafisch, welche der folgenden Gleichungspaare einander widersprechen, welche voneinander abhängig sind und welche widerspruchsfrei und unabhängig voneinander sind!

a) $2x - y + 1 = 0$
$2x - y - 1 = 0$

b) $6x - 2y + 5 = 0$
$3x - y + 2 = 0$

c) $6x - 3y + 9 = 0$
$2x - y + 3 = 0$

d) $5x + 7y - 17 = 0$
$8x - 7y - 9 = 0$

e) $2x + 5 = 6y - 9$
$3x + 1 = 9y - 20$

f) $x - 3y = 0$
$8x - 7y + 85 = 0$

g) $x + y = 3$
$y = -x$

h) $3x = y + 5$
$6x - 2y - 10 = 0$

i) $-4x + 2y - 3 = 0$
$-6x + 3y - 4{,}5 = 0$

2. a) Begründen Sie den Satz:
Ein Gleichungssystem, dessen Gleichungen voneinander abhängig sind, hat unzählig viele Lösungen!

b) Bestimmen Sie bei den entsprechenden Beispielen aus Aufgabe 1 einige dieser Lösungen!

14. Rechnerische Lösung

Ein Gleichungssystem läßt sich nicht nur grafisch, sondern auch rechnerisch lösen. Dazu ist es zweckmäßig, die Gleichungen so umzuformen, daß links nur je ein Glied mit x und mit y und rechts das absolute Glied steht.

(I) $6x - 15y = 21$ allgemein: (I) $a_1x + b_1y = c_1$

(II) $8x + 5y = 63$ (II) $a_2x + b_2y = c_2$

Diese Form nennt man die **Normalform** des linearen Gleichungssystems.

Da x und y in beiden Gleichungen denselben Zahlenwert bedeuten, dürfen wir die Glieder mit x ebenso wie die Glieder mit y aus beiden Gleichungen zu je einem einzigen Glied vereinigen. Dadurch entsteht eine neue Gleichung. Das Ziel ist, auf diese Weise eine Gleichung zu erhalten, die nur noch eine der beiden Unbekannten enthält, während die andere bei dieser Vereinigung in Wegfall kommt. Man sagt dafür: Diese Unbekannte wird entfernt oder **eliminiert** (Eliminationsmethode). Um das zu erreichen, gibt es verschiedene Verfahren.

1) Additions- oder Subtraktionsverfahren

1. Beispiel: Die eine Unbekannte hat in beiden Gleichungen Koeffizienten vom gleichen Betrag.

$$\begin{array}{r|l|}
\text{I} & 2x + 3y = 20 \\
\text{II} & 2x - 5y = 12
\end{array}$$

Ziel: Elimination von x

Weg: Subtraktion der beiden linken und der beiden rechten Seiten (I – II).

$$\begin{aligned}(2x+3y)-(2x-5y)&=20-12\\ 2x+3y-2x+5y&=20-12\\ 8y&=8\\ y&=1\end{aligned}$$

Um auch den Wert der anderen Unbekannten zu finden, können wir in Gleichung I oder in Gleichung II für y die Lösung 1 einsetzen und dann x errechnen:

in I $\quad 2x+3\cdot 1=20$

$$2x=20-3$$

$$x=\frac{17}{2}$$

in II: $\quad 2x-5\cdot 1=12$

$$2x=12+5$$

$$x=\frac{17}{2}$$

Die Probe muß an beiden Ausgangsgleichungen vorgenommen werden.

Probe I: Linke Seite: $2\cdot\frac{17}{2}+3\cdot 1=17+3=20$ Rechte Seite: 20

Vergleich: $20=20$

Probe II: Linke Seite: $2\cdot\frac{17}{2}-5\cdot 1=17-5=12$ Rechte Seite: 12

Vergleich: $12=12$

Hätten die Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Vorzeichen gehabt (z. B. $+2x$ und $-2x$), so hätten wir die Gleichungen durch Addieren vereinigen müssen, um x zu eliminieren.

2. **Beispiel:** Keine der Unbekannten hat in den beiden Gleichungen Koeffizienten vom gleichen Betrag.

$$\begin{array}{l|l|}\text{I} & 6x-15y=21\\ \text{II} & 8x+5y=63\end{array}$$

In diesem Fall müssen wir zunächst die Glieder durch Multiplizieren mit demselben Faktor bei einer oder auch bei beiden Gleichungen so verändern, daß bei der zu eliminierenden Unbekannten Koeffizienten vom gleichen Betrag entstehen.

1. Ziel: Elimination von y

Weg: Multiplikation aller Glieder der Gleichung II mit 3 und Addition (I + II).

$$\begin{array}{l|r|}\text{I} & 6x-15y=21\\ \text{II} & 24x+15y=189\end{array}$$

$$30x=210$$

$$x=7$$

Um y zu bestimmen, können wir in Gleichung I oder II für x die Lösung 7 einsetzen, wie wir es beim 1. Beispiel getan haben. Wir können aber auch das Additions- oder Subtraktionsverfahren ein zweites Mal anwenden.

2. Ziel: Elimination von x

Weg: Multiplikation aller Glieder der Gleichung I mit 4, aller Glieder der Gleichung II mit 3 und Subtraktion (II − I).

$$\left|\begin{array}{rl} 24x & -60y = 84 \\ 24x & +15y = 189 \end{array}\right|$$

$$+15y - (-60y) = 189 - 84$$

$$75y = 105$$

$$y = \frac{7}{5}$$

Probe I: Linke Seite: $6 \cdot 7 - 15 \cdot \frac{7}{5} = 42 - 21 = 21$ Rechte Seite: 21

Vergleich: $21 = 21$

Probe II: Linke Seite: $8 \cdot 7 + 5 \cdot \frac{7}{5} = 56 + 7 = 63$ Rechte Seite: 63

Vergleich: $63 = 63$

2) Einsetzungs- oder Substitutionsverfahren

Ein anderes Verfahren zur Elimination einer Unbekannten besteht darin, daß eine der beiden Gleichungen nach der zu eliminierenden Unbekannten aufgelöst und der errechnete Ausdruck in der anderen Gleichung für diese Unbekannte eingesetzt, **substituiert** wird.

Beispiel:

$$\begin{array}{r|l|} \mathrm{I} & 7x + 3y = 100 \\ \mathrm{II} & 3x - y = 20 \end{array}$$

Ziel: Elimination von y.

Weg: Substitution aus II in I.

aus II: $y = 3x - 20$

in I: $7x + 3(3x - 20) = 100$

$$7x + 9x - 60 = 100$$

$$16x = 160$$

$$x = 10$$

Um die zweite Unbekannte zu bestimmen, setzt man bei diesem Verfahren am besten den eben errechneten Wert (hier $x = 10$) in die Gleichung ein, die bei der Substitution bereits nach der zu eliminierenden Unbekannten aufgelöst wurde (hier Gleichung II).

In II: $y = 3 \cdot 10 - 20$

$y = 10$

Probe (I): Linke Seite: $7 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 70 + 30 = 100$ Rechte Seite: 100

Vergleich: $100 = 100$

Probe (II): Linke Seite: $3 \cdot 10 - 10 = 30 - 10 = 20$ Rechte Seite: 20

Vergleich: $20 = 20$

Zusammenfassung:

1. **Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten werden rechnerisch dadurch gelöst, daß man die beiden Gleichungen zu einer einzigen vereinigt, die nur noch eine der Unbekannten enthält. Die andere wird dabei eliminiert (Eliminationsmethode).**
2. **Wir lernten dafür das Additions- oder Subtraktionsverfahren und das Substitutionsverfahren kennen. Grundsätzlich kann jedes dieser Verfahren bei jedem Gleichungssystem angewendet werden. Vorher bringt man dazu das Gleichungssystem auf die Normalform.**
3. **Die Probe muß stets an der Ausgangsform und an beiden Gleichungen des Systems durchgeführt werden.**

Aufgaben

Beachten Sie bei der Bearbeitung der nachstehenden Aufgaben folgende Schritte!

a) Wenn das System nicht in der Normalform gegeben ist, stellen Sie erst diese Form her!

b) Wenn die Koeffizienten nicht zu groß sind, entwerfen Sie erst das Diagramm! Oft genügt dazu eine Skizze, aus der Sie erkennen, ob die x- und y-Werte der Lösung positiv oder negativ, klein oder groß sind (Überschlag!).

c) Verwenden Sie dasjenige Verfahren zur Elimination, das die schnellste und sicherste Ermittlung der Lösung verspricht! (Rationelles Arbeiten!) Geben Sie jeweils den gewählten Weg in Stichworten an!

d) Machen Sie stets eine ordnungsgemäße Probe!

1. a) $4x + y = 40$; $x - y = 5$ **b)** $x + 2y - 13 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$ **c)** $2x + 7y - 41 = 0$; $4x - y - 7 = 0$

d) $4x - 9y + 47 = 0$; $4x = -3y + 85$ **e)** $5x + 3y - 42 = 0$; $5x + 8y - 57 = 0$ **f)** $4x + 3y = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{7}{8}$

2. a) $3x + 5y = 95$; $3x - 5y = 25$ **b)** $7x + 3y = 127$; $4x + 3y = 97$ **c)** $5x + 7y = 176$; $5x - 3y = 46$

d) $3x + 2y = 22$; $2x + 5y = 33$ **e)** $4x + 15y = 99$; $6x - 17y = -49$ **f)** $15x - 32y + 81 = 0$; $35x - 20y - 16 = 0$

3. a) $4y \cdot (10x - 3) - 5x \cdot (8y + 7) + 165 = 0$
$9x \cdot (4y - 7) + 3y \cdot (5 - 12x) + 114 = 0$

b) $16 \cdot (4y - 1) + 3 \cdot (5x - 12y) - 259 = 0$
$-5 \cdot (9x + 7) + 14 \cdot (5x - 3y) + 20 = 0$

c) $10x \cdot (2y + 3) - 3 \cdot (4y + 5) - 4y \cdot (5x + 2) = 0$
$(3x + 5) \cdot (2y - 3) - 3x \cdot (2y - 1) = 0$

d) $10y(x - 1) - 2{,}5x(4y + 3) - 2{,}5 = 0$
$6x(5 - 3y) + 2y(22 + 9x) + 2 = 0$

4. a) $\frac{x + y + 1}{x + y - 1} = \frac{3}{2}$; $\frac{x - y + 1}{x + y + 1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{3y - 7x}{70} = \frac{y - x - 2}{14} - \frac{2 \cdot (y - 2)}{35}$; $\frac{5y - 9}{15} = \frac{2x + 1}{24} + \frac{x + 3y}{40}$

c) $\frac{2y - x}{6} + \frac{4x + 7y + 6}{27} = \frac{5x + 2}{54}$; $\frac{6y + x}{18} - \frac{3x - 16}{14} = \frac{30y - x}{63}$

5. a) $(x+1):(y+1):(x+y) = 3:4:5$

b) $(x+1):(y+1):(x+y-2) = 2:3:4$

c) $(x-2):(y+1):(x+y-3) = 3:4:5$

Anleitung: Aus jeder fortlaufenden Proportion können Sie mehrere Einzelproportionen bilden. Wählen Sie jeweils zwei davon aus und stellen Sie sie zu einem Gleichungssystem zusammen!

6. a) $x + y = 2a$
$x - y = 2b$

b) $4x + 6y = 10a - 2b$
$6x - 4y = 2a + 10b$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $(a+b)\,x - (a-b)\,y = 4ab$
$(a-b)\,x - (a+b)\,y = 0$

e) $ax + by = a^2 + b^2$
$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 2$

f) $ax + by = 2a$
$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a}$

15. Anwendungsaufgaben

1. Die Summe des Fünffachen einer Zahl und des Sechsfachen einer anderen beträgt 59. Die Differenz zwischen dem Sechsfachen der ersten Zahl und dem Fünffachen der zweiten ist 22.

2. a) Die Summe zweier Zahlen beträgt a, ihr Quotient aber b.

b) Die Differenz zweier Zahlen beträgt a, ihr Quotient aber b.

3. 6.30 Uhr sollen zwei Straßenbahnen der gleichen Linie mit gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit von den beiden Endpunkten abfahren. Da der eine Wagen eines Tages erst 6.34 Uhr abfährt, sind sie um 6.54 Uhr (der Treffzeit) noch 1 km voneinander entfernt. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit v und die Strecke s!

4. a) Von F fährt ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach H. Zu gleicher Zeit fährt ein zweiter Kraftwagen mit 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von H nach F. Die Entfernung FH beträgt 90 km. Nach wieviel Minuten Fahrzeit und wieviel Kilometer von F entfernt treffen sie sich? (Zeichnerische Lösung: 10 mm $\mathrel{\widehat{=}}$ 20 Min.; 10 mm $\mathrel{\widehat{=}}$ 20 km.)

b) Der zweite Kraftwagen fährt 10 Min. später ab.

c) Der erste Kraftwagen fährt 20 Min. später ab.

5. Bei einem Motorradrennen über 200 km hat der Spitzenfahrer eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach 150 km Fahrt merkt er hinter sich den Verfolger in einem Abstand von 2 km. Mit welcher Geschwindigkeit vermag dieser den ersten gerade am Ziel einzuholen, wenn der Spitzenfahrer seine Durchschnittsgeschwindigkeit nicht erhöhen kann?

6. Für ein Wannenbad werden 210 l Wasser von 32 °C gebraucht. Die Temperatur des kalten Wassers ist 10 °C, die des heißen Wassers 82 °C. Welche Heißwassermenge wird für das Bad gebraucht?

7. Ein Wasserbecken kann durch zwei Pumpen gefüllt werden. Arbeitet die erste Pumpe 2 Std. und die zweite 9 Std., so werden $\frac{4}{5}$ des Beckens gefüllt. Arbeitet aber die erste Pumpe 5 Std. und die zweite 6 Std., so fehlt noch $\frac{1}{10}$ an der Füllung des Beckens. In welcher Zeit kann das Becken **a)** durch jede Pumpe allein, **b)** durch beide Pumpen gleichzeitig gefüllt werden?

8. Bei einer Lohnzahlung erhielten 15 Facharbeiter und 4 Lehrlinge zusammen 996 DM Wochenlohn. Wieviel verdienen ein Arbeiter und ein Lehrling durchschnittlich wöchentlich, wenn unter gleichen Verhältnissen 10 Arbeiter und 3 Lehrlinge 672 DM Wochenlohn erhalten?

9. Auf die Frage, wie groß die Anzahl ihrer Schwestern und die ihrer Brüder sei, antwortete ein Mädchen: „Ich habe soviel Schwestern wie Brüder." Ihr Bruder meinte: „Ich habe doppelt soviel Schwestern wie Brüder."

10. Schachten zwei Arbeiter gemeinsam 4 Tage lang, so wird ein Fünftel des Fundamentgrabens ausgehoben. Arbeitet der erste 6 Tage und der zweite 15 Tage, so wird die Hälfte des Grabens fertig. Wieviel Zeit brauchten **a)** jeder Arbeiter allein, **b)** beide Arbeiter zusammen, um den Graben auszuheben?

11. Um eine gewisse Last auszuhalten, hätte eine Unterstützungsfläche von 100 cm · 47,5 cm genügt. Da die Last um 4750 kp erhöht werden sollte, errechnete man die neue Unterstützungsfläche mit 96 cm · 75 cm. Wie hoch war die ursprünglich geplante Last und welche zulässige Belastung $\left(\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}\right)$ ist angenommen?

12. 3 Stäbe Rundeisen und 10 Stäbe Quadrateisen von je 1 m Länge wiegen zusammen 240,3 kp. 2 Stäbe Rundeisen und 3 Stäbe Quadrateisen haben ein Gewicht von 88,9 kp. Berechnen Sie aus diesen Angaben den Durchmesser der Rundeisen, wenn die Wichte 7,78 $\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$ beträgt!

13. Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 5 : 11 werden durch 2 andere Zahnräder ersetzt, die je 5 Zähne mehr haben. Das Übersetzungsverhältnis ist nun 1 : 2. Wieviel Zähne hat jedes Zahnrad?

14. Für ein kleines Reibungsgetriebe steht die Breite $a = 40$ mm zur Verfügung. Das Übersetzungsverhältnis soll 1 : 5 betragen. Berechnen Sie den Durchmesser der größeren Scheibe (Abb. 22)!

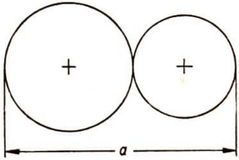


Abb. 22

15. Ist der Ikarus 55 voll belastet, so kommt auf 187,5 kp seines Leergewichts eine Person (Nutzungsverhältnis). Fehlen an der vollen Besetzung 18 Personen, so beträgt das Nutzungsverhältnis 322,5 kp/Person. Berechnen Sie die Personenzahl bei der vollen Besetzung und das Leergewicht des Ikarus 55!

16. Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

Gleichungssysteme mit drei Unbekannten lassen sich nicht grafisch lösen, da grafische Darstellungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem nur bei zwei Veränderlichen möglich sind.

Für die Lösung benötigt man drei voneinander unabhängige Gleichungen. Bei der rechnerischen Lösung werden mit Hilfe der Eliminationsmethode zunächst die drei Gleichungen mit drei Unbekannten in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten umgewandelt. Dann verläuft die Rechnung weiter wie bei einem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

Beispiel:

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{(I)} & x + 2y + 3z &=& 32 \\ \text{(II)} & 2x + 3y + z &=& 42 \\ \text{(III)} & 3x + y + 2z &=& 40 \end{array}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen können wir z. B. x eliminieren, wenn wir I mit 2 multiplizieren und beide Gleichungen subtrahieren:

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{(I)} & x + 2y + 3z &=& 32 \\ \text{(II)} & 2x + 3y + z &=& 42 \\ \text{(A)} & y + 5z &=& 22 \end{array}$$

Das Ergebnis ist eine Gleichung (A) mit zwei Unbekannten y und z. Wir eliminieren jetzt aus der noch nicht verwendeten Gleichung (III) und einer der Gleichungen (I) oder (II) ebenfalls x, indem wir z. B. (I) mit 3 multiplizieren und subtrahieren:

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{(I)} & x + 2y + 3z &=& 32 \\ \text{(III)} & 3x + y + 2z &=& 40 \\ \text{(B)} & 5y + 7z &=& 56 \end{array}$$

(B) stellen wir jetzt mit (A) zu einem System mit den zwei Unbekannten y und z zusammen und berechnen daraus z durch Multiplikation von (A) mit 5 und Subtraktion.

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{(A)} & y + 5z &=& 22 \\ \text{(B)} & 5y + 7z &=& 56 \\ & 18z &=& 54 \\ & z &=& 3 \end{array}$$

y bzw. x erhalten wir durch Einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{in (A)} & y + 5 \cdot 3 &=& 22 \\ & y &=& 7 \\ \text{in (I)} & x + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 &=& 32 \\ & x &=& 9 \end{array}$$

Probe: (I) Linke Seite: $9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 32$ Rechte Seite: 32
Vergleich: $32 = 32$
(II) Linke Seite: $2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 3 = 42$ Rechte Seite: 42
Vergleich: $42 = 42$
(III) Linke Seite: $3 \cdot 9 + 7 + 2 \cdot 3 = 40$ Rechte Seite: 40
Vergleich: $40 = 40$

Zusammenfassung:

1. **Gleichungssysteme mit drei Unbekannten müssen aus drei voneinander unabhängigen und einander nicht widersprechenden Gleichungen bestehen, wenn sie eindeutig lösbar sein sollen.**

2. **Sie werden durch schrittweises Eliminieren der Unbekannten gelöst. Bei der Elimination der ersten Unbekannten entsteht dabei zunächst ein Gleichungssystem, das noch die beiden anderen Unbekannten enthält.**

3. **Vorher wird auch hier die Normalform hergestellt.**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1 x + b_1 y + c_1 z} &= \boldsymbol{d_1} \\ \boldsymbol{a_2 x + b_2 y + c_2 z} &= \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{a_3 x + b_3 y + c_3 z} &= \boldsymbol{d_3} \end{aligned}$$

4. Die Probe muß an der Ausgangsform bei allen drei Gleichungen durchgeführt werden.

5. Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten werden entsprechend gelöst.

Aufgaben

1. a) $\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 2y + 4z &= 15 \\ x + 3y + 9z &= 23 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 14 \\ 3x - 2y - z &= 12 \\ 5x + 4y + 3z &= 14 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 3x - 5y - 6z &= 27 \\ 2x + 4y - 9z &= 3 \\ x + 13y + 3z &= 24 \end{aligned}$

2. Oft enthalten nicht alle drei Gleichungen jeweils sämtliche drei Unbekannten x, y und z. Dann ist die Herstellung des Gleichungssystems mit zwei Unbekannten auf kürzerem Wege möglich. Beachten Sie das bei den folgenden Aufgaben!

a) $\begin{aligned} 4x - 8y + 9z &= 5 \\ 6x + 12y - 5z &= 37 \\ 24x - z &= 71 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 3x - 2y &= 0 \\ 6x - 3z &= 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 5x - 6y &= 8 \\ 5x + 4z &= 4 \\ 6y + 4z &= 36 \end{aligned}$

3. a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4u &= -2 \\ x - 3y + 5z - 6u &= -4 \\ x - 4y + 6z - 8u &= -9 \\ x - 7y + 10z - 10u &= -13 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 21 \\ 3x + 2y + 4u &= 23 \\ 2x + 2z + 3u &= 33 \\ 2y + 3z + 2u &= 35 \end{aligned}$

4. Es gibt drei Zahlen, die sich wie $2 : 3 : 4$ verhalten und deren Summe 999 ist.

5. Wenn man von drei Zahlen je zwei herausgreift, ihre Summe bildet und dazu die doppelte dritte addiert, so erhält man 60 bzw. 54 bzw. 50.

6. In einem Dreieck verhalten sich die Winkel wie **a)** $5 : 6 : 7$, **b)** $1 : 2 : 2$.

7. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Summen von je zweien 97 mm bzw. 83 mm bzw. 78 mm betragen?

8. Ein Erwachsener soll täglich etwa 120 g Eiweiß, 50 g Fett und 450 g Kohlehydrate aufnehmen. Durch welche Mengen an Butter (1% Eiweiß, 90% Fett), Käse (43% Eiweiß, 7% Fett) und Brot (8% Eiweiß, 45% Kohlehydrate) kann dieser Bedarf gedeckt werden?

IV. Die quadratische Funktion

17. Zur Wiederholung

1. Nennen Sie aus Physik und Technik einige Ihnen bekannte funktionale Beziehungen zwischen zwei Größen und erläutern Sie diese!

Beispiel:
Die Länge eines Metallstabes ist eine Funktion der Temperatur T (in °C). Länge des Metallstabes und Temperatur sind variabel. Jeder Temperatur T ist eine bestimmte Länge l_T des Metallstabes (in cm) so zugeordnet, daß

$$l_T = l_0 + l_0 a t$$
$$l_T = l_0 (1 + a t) \quad \text{ist.}$$

Dabei bedeuten l_0: Länge des Metallstabes bei 0 °C;
a: Ausdehnungskoeffizient des Metalles in $\frac{\text{cm}}{°\text{C}}$;
t: Temperaturänderung in °C.

2. a) Wie lauten die allgemeinen analytischen Ausdrücke für alle von Ihnen genannten funktionalen Beziehungen?

b) Was können Sie über das Bild dieser analytischen Ausdrücke aussagen?

3. Betrachten Sie die Funktion $y = f(x) = mx + n$!

Wie ändert sich y, wenn

a) x auf das Doppelte anwächst,
b) x auf das Dreifache anwächst,
c) x auf die Hälfte verkleinert wird,
d) x auf ein Zehntel verkleinert wird,
e) x auf das p-fache anwächst,
f) x auf den p-ten Teil verkleinert wird,
g) m verändert wird,
h) n verändert wird?

4. Geben Sie mit eigenen Worten eine genaue Definition des mathematischen Funktionsbegriffes!

18. Der Begriff der quadratischen Funktion

Zur Einführung wollen wir untersuchen, in welchen funktionalen Beziehungen Durchmesser und Gewicht von Rundstählen stehen.

Das Gewicht eines Rundstahls von der Länge 1 ist $P = \gamma \frac{\pi}{4} d^2$, wenn γ die Wichte des Stahles und d den Durchmesser bedeuten.

Zur Vereinfachung verzichten wir zunächst auf die Angabe der Maßeinheiten; sie werden erst am Schluß der Rechnung zugefügt.

Damit erhalten wir den analytischen Ausdruck

$$P = \gamma \frac{\pi}{4} d^2. \tag{1}$$

In dieser Gleichung sind γ und $\frac{\pi}{4}$ konstante Größen, deren Produkt also auch eine Konstante ist.

Die Variablen sind P und d; es ist jedem Element aus der Menge aller Durchmesser ein bestimmtes Element aus der Menge aller Gewichte zugeordnet. P ist damit eine Funktion von d

$$P = f(d) = \gamma \frac{\pi}{4} d^2 \tag{2}$$

oder, da $\gamma \frac{\pi}{4}$ eine Konstante ist,

$$P = f(d) = a d^2. \tag{2'}$$

Dabei ist d die unabhängige, P die abhängige Variable.

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten analytischen Ausdrücken tritt die unabhängige Variable d in der 2. Potenz auf. Bekanntlich ist der Grad einer Funktion gleich dem höchsten Exponenten der unabhängigen Variablen. Die Funktion $P = f(d) = \gamma \frac{\pi}{4} d^2$ ist demnach eine **Funktion 2. Grades** oder eine **quadratische Funktion.**

Die Konstante $a = \gamma \frac{\pi}{4}$ besitzt mit $\gamma = 7{,}8$ den Wert $a = 7{,}8 \cdot 0{,}786 \approx 6{,}13$. Mithin lautet der analytische Ausdruck

$$P = 6{,}13 d^2, \tag{3}$$

wenn P in p und d in mm, oder $\quad P = 0{,}00613 d^2$,

wenn P in kp und d in mm angegeben werden.

Die Wertetafel der Funktion $P = f(d) = 0{,}00613\ d^2$ zeigt folgendes Aussehen:

d (in mm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
P (in kp)	0	0,613	2,450	5,520	9,810	15,330	22,070	30,040	39,230	49,650	61,300

Wir erkennen aus der Wertetafel:

Verdoppelt sich der Durchmesser, so vervierfacht sich das Gewicht, verdreifacht sich der Durchmesser, so verneunfacht sich das Gewicht usw.

Das Bild der Funktion wird in Abb. 23 dargestellt.

Es ergibt sich eine gekrümmte Linie. Im folgenden werden wir uns mit derartigen nichtlinearen Funktionen beschäftigen.

Die grafische Darstellung von Funktionen stellt ein Verfahren dar, das in der industriellen Produktion sehr häufig angewandt wird. Wie bei der Benutzung von Tabellen wird auch bei der grafischen Darstellung die jedesmalige und oft nicht ganz einfache Berechnung des Funktionswertes überflüssig. Vielmehr kann der jeweils benötigte Funktionswert aus dem Diagramm abgelesen werden. Das bedeutet in vielen Fällen eine erhebliche Einsparung an Arbeitszeit.

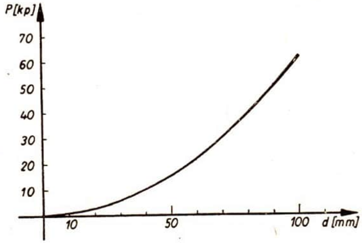


Abb. 23

19. Die quadratische Funktion $y = f(x) = x^2$

Wir betrachten die quadratische Funktion $y = x^2$.

Eine Wertetafel der Funktion $y = x^2$ ist:

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$	$+1{,}5$	$+2$	$+2{,}5$	$+3$
y	$+9$	$+6{,}25$	$+4$	$+2{,}25$	$+1$	$+0{,}25$	0	$+0{,}25$	$+1$	$+2{,}25$	$+4$	$+6{,}25$	$+9$

Die Wertetafel könnte auch einen größeren Bereich der x-Werte enthalten, beispielsweise $-15 < x < +15$. Weiterhin könnte sie eine größere Anzahl von Zwischenwerten enthalten, indem etwa $x = -3; -2{,}9; -2{,}8; -2{,}7; \ldots$ gesetzt würde. In diesem Falle würde man eine größere Anzahl von Wertepaaren erhalten; damit ließe sich das Funktionsbild genauer zeichnen. Das gilt besonders für die Konstruktion derjenigen Abschnitte der Kurve, in denen sie stark gekrümmt ist.

Das nach der oben stehenden Wertetafel gezeichnete Funktionsbild ist in Abbildung 24 dargestellt.

Das Bild der Funktion hat eine Gestalt, die als Parabel bezeichnet wird, als sogenannte **Normal- oder Einheitsparabel**.

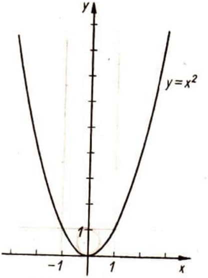


Abb. 24

Die Kurve ist axialsymmetrisch. Die Ordinatenachse ist gleichzeitig die Symmetrieachse, weil $x^2 = (-x)^2$. Die Kurve verläuft im I. und II. Quadranten und öffnet sich in Richtung des positiven Teils der Ordinatenachse. Der Schnittpunkt der Kurve mit ihrer Symmetrieachse ist der **Scheitel**. In diesem Falle liegt der Scheitel im Koordinatenanfangspunkt. Im Scheitel besitzt die Kurve die stärkste **Krümmung**. Im Scheitel liegt die Tangente an die Kurve parallel zur Abszissenachse; in diesem Falle fallen Scheiteltangente und Abszissenachse zusammen.

An einer sauber gezeichneten Normalparabel lassen sich näherungsweise die Quadratzahlen der x-Werte ablesen.

Für den weiteren Unterricht ist es empfehlenswert, von der sorgfältig gezeichneten Normalparabel eine Schablone aus durchsichtigem Papier herzustellen, auf der auch die Symmetrieachse der Parabel eingezeichnet ist.

Für die praktische Anwendung betrachten wir folgendes

Beispiel:

Es sollen quadratische Bleche geschnitten werden. Sie besitzen die Seitenlänge a und den Flächeninhalt F.

Dann stellt $F = f(a) = a^2$ die funktionale Beziehung zwischen der Seitenlänge und dem Flächeninhalt des Bleches dar. Den Bedingungen der Aufgabe entsprechend hat die Funktion jedoch nur für $a \geqq 0$ einen Sinn. Jedem $a \geqq 0$ ist ein bestimmtes F eindeutig zugeordnet. Das Bild dieser Funktion besteht demnach nur aus einem Parabelteil.

20. Die Funktion $y = f(x) = x^2 + e$

Wenn man die Normalparabel beispielsweise um drei Einheiten in Richtung des positiven Teils der Ordinatenachse verschiebt, so vergrößern sich die Ordinaten aller ihrer Punkte um drei. Dabei bleibt die Form der Parabel unverändert, ihre Gleichung lautet jetzt $y = x^2 + 3$ bzw. $y - 3 = x^2$. Der Scheitel besitzt demnach die Koordinaten (0; 3) (Abb. 25).

Verschiebt man dagegen die Normalparabel beispielsweise um vier Einheiten in Richtung des negativen Teils der Ordinatenachse, so verringern sich die Ordinaten aller ihrer Punkte um vier. Die Form der Parabel bleibt dabei ebenfalls unverändert; die Gleichung der Parabel lautet jetzt $y = x^2 - 4$ bzw. $y + 4 = x^2$. Der Scheitel besitzt demnach die Koordinaten $(0; -4)$ (Abb. 25).

Wir verallgemeinern die gewonnenen Erkenntnisse:

Das Bild der Funktion

$$y = x^2 + e \qquad \left(e \gtrless 0\right)$$

ist eine Normalparabel, die auf der Ordinatenachse um e Einheiten verschoben ist. Ihr Scheitel besitzt die Koordinaten $(0; e)$.

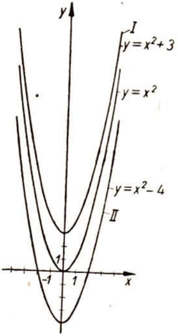


Abb. 25

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = x^2 + 1$ b) $y = f(x) = x^2 - 3$ c) $g = g(h) = h^2 + 4$
d) $F = F(a) = a^2 - 2{,}5$ e) $y = f(x) = x^2 + 0{,}7$ f) $I = I(a) = a^2$

Anleitung: Zeichnen Sie die Bilder zunächst durch Scheitelbestimmung und Parallelverschiebung der Normalparabel im Achsenkreuz! Benutzen Sie dazu Ihre Schablone der Normalparabel! Danach zeichnen Sie die Bilder punktweise nach der Wertetafel! Vergleichen Sie beide Zeichenarten in bezug auf ihren Schwierigkeitsgrad und auf ihre Genauigkeit!

2. Die Scheitel von Normalparabeln sind:

a) $S(0; -2)$ b) $S(0; 0{,}21)$ c) $S(0; 7{,}3)$ d) $S(0; -3{,}2)$ e) $S(0; 0)$ f) $S(0; -1{,}92)$

Wie lauten die analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen?

21. Die Funktion $y = f(x) = (x + d)^2$

Wenn man die Normalparabel $y = x^2$ in Richtung des positiven Teils der Abszissenachse beispielsweise um zwei Einheiten verschiebt, so vergrößern sich die Abszissen aller ihrer Punkte um zwei. Der Scheitelpunkt der Parabel erhält die Koordinaten $(2; 0)$; der Punkt $(1; 1)$ der ursprünglichen Kurve erhält die Koordinaten $(3; 1)$ usw. Dabei bleibt die Form der Parabel wiederum unverändert. Ihre Gleichung lautet jetzt

$$y = (x - 2)^2.$$

Die Gleichung besagt, daß man die Normalparabel in der ursprünglichen Lage erhält, wenn man die Abszissen aller ihrer Punkte um zwei verringert (Abb. 26).

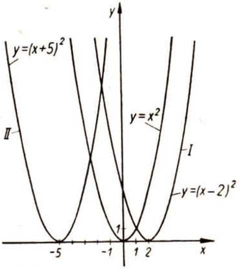


Abb. 26

Verschiebt man dagegen die Normalparabel beispielsweise um 5 Einheiten in Richtung des negativen Teils der Abszissenachse, so verringern sich die Abszissen aller ihrer Punkte um 5. Der Scheitelpunkt erhält die Koordinaten $(-5; 0)$ der Punkt $(1; 1)$ erhält die Koordinaten $(-4; 1)$ usf. Auch in diesem Falle bleibt die Form der Parabel unverändert. Ihre Gleichung lautet

$$y = (x + 5)^2.$$

Die Gleichung besagt, daß man die Normalparabel in der ursprünglichen Lage erhält, wenn man die Abszissen aller ihrer Punkte um fünf vergrößert (Abb. 26).

Wir verallgemeinern und fassen zusammen:

Das Bild der Funktion $y = (x + d)^2$ $\left(d \gtrless 0\right)$ ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $S(-d; 0)$, deren Symmetrieachse parallel zur Ordinatenachse verläuft.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = (x - 1)^2$ b) $y = f(x) = (x + 1{,}6)^2$ c) $y = f(x) = (x - 0{,}9)^2$
d) $s = s(t) = (t + 2{,}7)^2$ e) $g = g(h) = (h - 4{,}25)^2$ f) $F = F(b) = (b - 3)^2$

Anleitung: Zeichnen Sie die Bilder zunächst durch Scheitelbestimmung und Parallelverschiebung der Normalparabel im Achsenkreuz!
Benutzen Sie dazu Ihre Schablone der Normalparabel!
Danach zeichnen Sie die Bilder punktweise nach der Wertetafel! Vergleichen Sie beide Zeichenarten in bezug auf ihren Schwierigkeitsgrad und auf ihre Genauigkeit!

2. Die Scheitel von Normalparabeln lauten:

a) S (3; 0) **b)** S (– 2,5; 0) **c)** S (1,75; 0)
d) S (–6,31; 0) **e)** S (4; 0) **f)** S (– 0,7; 0)

Wie lauten die analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen?

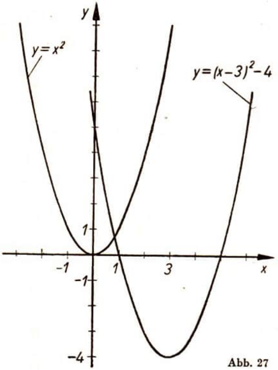


Abb. 27

22. Die Funktion $y = f(x) = (x + d)^2 + e$

Erfolgt die Schiebung der Normalparabel beispielsweise um 4 Einheiten in Richtung des negativen Teils der Ordinatenachse und um 3 Einheiten in Richtung des positiven Teils der Abszissenachse, so ergibt sich als analytischer Ausdruck

$$y = (x - 3)^2 - 4.$$

Der Scheitel besitzt die Koordinaten (3; –4) (Abb. 27).

Wir können unsere Betrachtungen verallgemeinern und zusammenfassen:

Das Bild der Funktion $y = f(x) = (x + d)^2 + e$ ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $(-d; e)$; die Symmetrieachse dieser Normalparabel ist eine Parallele zur Ordinatenachse.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = (x - 2)^2 + 3$
b) $y = f(x) = (x + 0,5)^2 - 2,5$
c) $y = f(x) = (x - 5,1)^2$
d) $y = f(x) = (x + 3,7)^2$
e) $s = s(t) = (t + 0,9)^2 + 4,2$
f) $w = w(z) = z^2 + 5,1$
g) $g = g(h) = (h - 6)^2 - 1,7$
h) $y = y(x) = x^2 - 2,9$

2. Die Koordinaten des Scheitels einer Normalparabel lauten:

a) (3; 5) **b)** (– 1; 0) **c)** (– 4,5; – 2,7) **d)** (0; – 2,1)
e) (6,1; – 2) **f)** (– 0,2; 3) **g)** (0; 12) **h)** (4; 0)

Wie lauten die analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen?

3. In welchen Fällen **a)** schneidet, **b)** berührt, **c)** meidet das Bild der Funktion $y = f(x) = (x + d)^2 + e$ die Abszissenachse?

4. Welche Lage haben die Schnittpunkte einer verschobenen Normalparabel mit der Abszissenachse in bezug auf die Symmetrieachse der Parabel?

23. Die quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$

Zur Wiederholung:

1. Wie lauten die binomischen Formeln?

2. Ergänzen Sie die fehlenden Summanden!

a) $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 + 4x \ldots\ldots$ **b)** $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 - 2x \ldots\ldots$
c) $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 + 12x \ldots\ldots$ **d)** $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 - 3x \ldots\ldots$
e) $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 + 7x \ldots\ldots$ **f)** $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 + mx \ldots\ldots$
g) $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 - nx \ldots\ldots$ **h)** $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 + px \ldots\ldots$
i) $(x \ldots\ldots)^2 = x^2 - px \ldots\ldots$

Die quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e$ läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$y = (x + d)^2 + e \tag{1}$$

$$y = x^2 + 2dx + d^2 + e \tag{1'}$$

Wir setzen nun
$$2d = p \tag{2}$$

und
$$d^2 + e = q. \tag{3}$$

Damit geht (1′) über in
$$y = x^2 + px + q. \tag{4}$$

Die Darstellung (4) wird als **Normalform des analytischen Ausdrucks der quadratischen Funktion** bezeichnet. In ihr nennt man

x^2 das quadratische Glied,
px das lineare Glied und
q das absolute Glied.

Es sollen die Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = x^2 + px + q$ bestimmt werden.

Wir betrachten dazu als Beispiel die quadratische Funktion $y = x^2 + 6x + 10$.

Man erhält dann

mit bestimmten Zahlen	mit allgemeinen Zahlsymbolen
$y = x^2 + 6x + 10$	$y = x^2 + px + q$
$y = x^2 + 6x + 3^2 - 9 + 10$	$y = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$
$y = (x + 3)^2 - (9 - 10)$	$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$
$y = (x + 3)^2 + 1$	

Der Scheitel der Parabel besitzt also die Koordinaten

$(-3; +1)$ $\qquad$ $\left[-\frac{p}{2};\ -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right].$

Damit können wir zusammenfassen:

Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ ist eine Normalparabel, deren Scheitel die Koordinaten $\left[-\frac{p}{2};\ -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right]$ besitzt und deren Symmetrieachse eine Parallele zur Ordinatenachse ist.

Weitere Beispiele:

1. $y = x^2 + 3x - 4 \qquad p = 3; \qquad -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}; q = -4; \quad -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\frac{25}{4}$

   $S\left(-\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right)$

2. $y = x^2 - 5x - 2 \qquad p = -5; \quad -\frac{p}{2} = \frac{5}{2}; \quad q = -2; \quad -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\frac{33}{4}$

   $S\left(\frac{5}{2}; -\frac{33}{4}\right)$

3. $y = x^2 + 6x + 6 \qquad p = 6; \qquad -\frac{p}{2} = -3; \; q = 6; \qquad -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -3$

   $S\ (-3;\ -3)$

4. $y = x^2 - 8x + 32 \quad p = -8; \quad -\frac{p}{2} = 4; \quad q = 32; \qquad -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 16$

   $S\ (4;\ 16)$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$
c) $y = f(x) = x^2 + 6x + 9$ **d)** $y = f(x) = x^2 - 6x + 9$
e) $y = f(x) = x^2 + 2x + 6$ **f)** $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$
g) $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$ **h)** $y = f(x) = x^2 - 7x - 3$
i) $s = s(t) = t^2 + 0{,}3t - 5{,}5$ **k)** $g = g(h) = h^2 - 1{,}2h$
l) $m = f(w) = w^2 - 1{,}5w + 4{,}2$ **m)** $I = I(l) = l^2 + 0{,}6l + 2{,}4$

2. Die Koordinaten des Scheitels einer Normalparabel lauten:

a) $(3;\ 0{,}5)$ **b)** $(-6;\ 0)$ **c)** $\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{2}\right)$ **d)** $(0;\ -5)$
e) $(2{,}5;\ -1)$ **f)** $(2{,}9;\ 0)$ **g)** $(0;\ 3{,}1)$ **h)** $(-2{,}6;\ +4{,}5)$

Wie lauten die Normalformen der analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen?

24. Die Funktion $y = f(x) = ax^2$

Wir wollen nun untersuchen, welche Veränderungen das Bild der Funktion $y = ax^2$ (a beliebig) gegenüber dem Bild der Funktion $y = x^2$ aufweist.

Dabei müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

1. Fall: $a = 1$

Ist $a = 1$, lautet also die Gleichung $y = x^2$, so ist das Bild dieser Funktion die Normalparabel (Abb. 28)

2. Fall: $a > 1$

Ist $a > 1$, beispielsweise $a = 2$, so wird jede Ordinate y der Normalparabel auf das doppelte vergrößert. Das bedeutet, daß die Normalparabel senkrecht zur Abszissenachse gedehnt wird (Abb. 28).

3. Fall: $a < 1$, aber > 0

Ist $a < 1$, aber > 0, beispielsweise $a = \frac{1}{2}$, so wird jede Ordinate y der Normalparabel auf die Hälfte verkleinert. Das bedeutet, daß die Normalparabel senkrecht zur Abszissenachse gestaucht wird (Abb. 28).

4. Fall: $a < 0$

Ein Vergleich der Bilder der Funktionen $y = 2x^2$ und $y = -2x^2$ zeigt, daß das Bild der Funktion $y = -2x^2$ entsteht, wenn das Bild der Funktion $y = +2x^2$ an der Abszissenachse gespiegelt wird (Abb. 28).

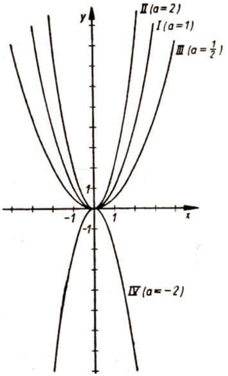


Abb. 28

Zusammenfassend können wir sagen:

Tritt zu dem quadratischen Glied einer Funktion ein Koeffizient $a \neq 1$, so ergibt sich als Bild ebenfalls eine Parabel, die aber eine andere Form als die Normalparabel hat.

Ist $a > 1$, so erfolgt eine Dehnung der Normalparabel; ist $a < 1$, aber > 0, so erfolgt eine Stauchung der Normalparabel.

Ist $a < 0$, so ist das entstehende Bild eine Spiegelung des Bildes der Funktion $y = ax^2$ mit $a > 0$ an der Abszissenachse.

25. Die Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

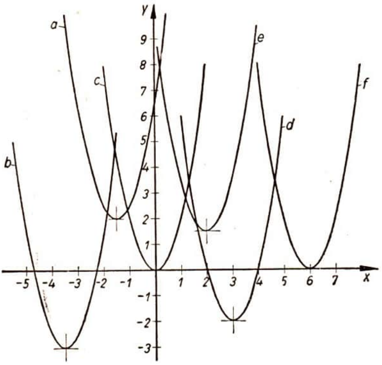


Abb. 29

Abbildung 29 zeigt verschiedene Parallelverschiebungen der Funktion $y = 2x^2$.

Nach den bereits erkannten Gesetzmäßigkeiten kann man aus der Lage des Scheitels den analytischen Ausdruck der zugehörigen Funktion ablesen.

a) $y = 2(x + 1{,}5)^2 + 2$
b) $y = 2(x + 3{,}5)^2 - 3$
c) $y = 2x^2$
d) $y = 2(x - 3)^2 - 2$
e) $y = 2(x - 2)^2 + 1{,}5$
f) $y = 2(x - 6)^2$

Wenn man in diesen Beispielen die Klammern ausmultipliziert, so erhält man stets Ausdrücke der Form

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Die unter a) stehende Gleichung ergibt beispielsweise:

$$\begin{aligned} y &= 2(x + 1{,}5)^2 + 2 \\ &= 2x^2 + 6x + 4{,}5 + 2 \\ &= 2x^2 + 6x + 6{,}5 \end{aligned}$$

Man nennt eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ die **allgemeine Form des analytischen Ausdrucks der quadratischen Funktion.**

Aufgaben

1. Stellen Sie in einem Koordinatensystem grafisch dar

   $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 0{,}5x^2$!

   Wie verhalten sich die zu $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1$; $x_5 = -2$ gehörenden Ordinaten bei den drei Parabeln?

   Durch welche geometrischen Veränderungen entstehen die Bilder der Funktionen $y = 2x^2$ und $y = 0{,}5x^2$ aus der Normalparabel?

2. Führen Sie die gleichen Überlegungen durch für

   a) $y = x^2$; $y = 2{,}5x^2$; $y = 0{,}1x^2$ **b)** $y = x^2$; $y = 1{,}2x^2$; $y = 0{,}9x^2$!

3. Stellen Sie je in einem Koordinatensystem grafisch dar

   a) $y = x^2$ und $y = -x^2$ **b)** $y = 2x^2$ und $y = -2x^2$

   c) $y = 3{,}2x^2$ und $y = -3{,}2x^2$ **d)** $y = (x-2)^2$ und $y = -(x-2)^2$

   e) $y = (x - 1{,}5)^2$ und $y = -(x - 1{,}5)^2$ **f)** $y = (x-2)^2+1$ und $y = -(x-2)^2-1$!

   Wodurch lassen sich die Bilder jedes Paares von Funktionen ineinander überführen und wie liegen sie zur Abszissenachse?

4. Die quadratischen Funktionen $y = 2x^2$; $y = 2(x-2)^2$; $y = 2(x-2)^2 + 3$ sind

   a) durch Aufstellen einer Wertetafel und Zeichnen der Kurve aus Kurvenpunkten,

   b) durch Scheitelbestimmung und Verschiebung der Kurve $y = 2x^2$ geometrisch darzustellen.

   Anleitung: Benutzen Sie zum Verschieben der Parabel $y = 2x^2$ eine Pappschablone mit Kennzeichnung des Scheitels und der Symmetrieachse!

5. Die Funktionen $y = 2(x-1)^2 + 2$ und $y = 2(x-1)^2 - 2$ sind

   a) durch Wertetafel und Zeichnen der Kurven aus Punkten,

   b) durch Scheitelbestimmung und Verschiebung der Parabel $y = 2x^2$ geometrisch darzustellen.

6. Stellen Sie die Funktion $y = 3x^2 + 15x + 18$ (allgemeine Form) und die Funktion $y = x^2 + 5x + 6$ (Normalform) in einem Koordinatensystem dar!

   In welchen Punkten stimmen die Bilder der allgemeinen und der Normalform überein?

V. Die quadratische Gleichung

26. Funktion und Bestimmungsgleichung

Zur Wiederholung:

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen analytischem Ausdruck einer Funktion und Bestimmungsgleichung am Beispiel der linearen Funktion bzw. der linearen Gleichung!

2. Erläutern Sie, wie aus einem linearen analytischen Ausdruck einer Funktion eine Bestimmungsgleichung entsteht!

3. Was stellt die Lösung einer linearen Gleichung geometrisch dar?

4. Wieviel Lösungen hat eine Gleichung 1. Grades?

Wir betrachten die Bilder der in Abbildung 30 dargestellten Funktionen. Sie sind durch Verschiebungen parallel zur Abszissen- oder Ordinatenachse bzw. parallel zu beiden Achsen entstanden. Aus den Koordinaten ihrer Scheitel kann man die analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen bestimmen:

Scheitel

a) $(-4;\ -4)$
b) $(2;\ -1)$
c) $(4;\ 0)$
d) $(3;\ 1)$
e) $(0;\ 2)$

Analytischer Ausdruck

a) $y = (x + 4)^2 - 4$
b) $y = (x - 2)^2 - 1$
c) $y = (x - 4)^2$
d) $y = (x - 3)^2 + 1$
e) $y = x^2 + 2$

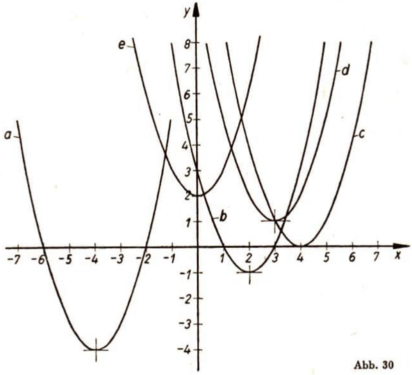


Abb. 30

Ebenso wie bei den linearen Funktionen geht auch der analytische Ausdruck einer quadratischen Funktion in eine quadratische Bestimmungsgleichung über, wenn $y = 0$ gesetzt wird.

Demnach sind auch in diesem Falle die Abszissen der Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der Abszissenachse, also die Nullstellen der Funktion, die Lösungen der quadratischen Bestimmungsgleichung.

Für die in Abb. 30 dargestellten Parabeln ergibt sich:

Analytischer Ausdruck	Bestimmungsgleichung	Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse
a) $y = (x + 4)^2 - 4$ $y = x^2 + 8x + 12$	$x^2 + 8x + 12 = 0$	$x_1 = -2;\ x_2 = -6$

b) $y = (x-2)^2 - 1$		
$y = x^2 - 4x + 3$	$x^2 - 4x + 3 = 0$	$x_1 = 1;\ x_2 = 3$
c) $y = (x-4)^2$		
$y = x^2 - 8x + 16$	$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x_1 = 4$
d) $y = (x-3)^2 + 1$		
$y = x^2 - 6x + 10$	$x^2 - 6x + 10 = 0$	keine
e) $y = x^2 + 2$	$x^2 + 2 = 0$	keine

Die Übersicht zeigt, daß sich in zwei Fällen zwei Lösungen, in einem Falle eine einzige Lösung und in zwei Fällen keine Lösungen ergeben.

Eine Probe bestätigt, daß die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse tatsächlich die Lösungen der quadratischen Gleichung darstellen. Zu diesem Zwecke setzen wir die Abszissen in die Bestimmungsgleichung ein. Für die unter a) angegebene Bestimmungsgleichung

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

ergibt sich: $x_1 = -2$:

Linke Seite: $(-2)^2 + 8\ (-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$ Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

$x_2 = -6$:

Linke Seite: $(-6)^2 + 8\ (-6) + 12 = 36 - 48 + 12 = 0$ Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

In ähnlicher Weise verlaufen auch die Proben für die unter b) und c) angegebenen Gleichungen.

27. Die zeichnerische Lösung der quadratischen Gleichung

Man kann jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 + px + q = 0$ zeichnerisch lösen.

Dazu bestimmt man aus dem analytischen Ausdruck der zugehörigen Funktion die Koordinaten des Scheitels der Normalparabel und legt die Schablone der Normalparabel in die durch die Scheitelkoordinaten bestimmte Lage. Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der Abszissenachse sind die Lösungen der Gleichung.

1. Beispiel:

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Es ist $p = -3;\ q = -4$.

Die Koordinaten des Scheitels der Normalparabel sind $\left[-\frac{p}{2};\ -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right]$, also in diesem Falle $\left(\frac{3}{2};\ -\frac{25}{4}\right)$. Bringt man die Schablone der Normalparabel in die Lage, daß der Scheitel auf den Punkt $\left(\frac{3}{2};\ -\frac{25}{4}\right)$ und die Symmetrieachse parallel zur Ordinatenachse zu liegen kommt, so liest man als Lösungen ab:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Machen Sie die Probe!

2. Beispiel:

Für die Gleichung $x^2 - 3{,}2x + 2{,}56 = 0$ erhält man als Koordinaten des Scheitels $(1{,}6;\ 0)$. Die Normalparabel berührt die Abszissenachse; die Gleichung hat die Lösungen $x_1 = x_2 = 1{,}6$.

3. Beispiel:

Für die Gleichung $x^2 - 2{,}5x + 20 = 0$ erhält man als Koordinaten des Scheitels $(1{,}25;\ 18{,}44)$. Daraus ist ersichtlich, daß die Normalparabel keine Schnittpunkte mit der Abszissenachse besitzt. Die Gleichung hat keine Lösungen.

4. Beispiel:

Für die Gleichung $x^2 + 3{,}6x - 4{,}5 = 0$ erhält man als Koordinaten des Scheitels $(-1{,}8;\ 7{,}74)$ und als Lösungen

$$x_1 \approx 1,\ x_2 \approx -4{,}6.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die grafische Lösung nicht immer genaue Werte ergibt. Diese können aber stets durch die rechnerische Lösung erhalten werden, die im folgenden Abschnitt besprochen wird.

Aufgaben

1. Lösen Sie grafisch unter Benutzung einer Schablone der Normalparabel und prüfen Sie Ihr Ergebnis!

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $x^2 + 6x + 8 = 0$

c) $x^2 + 5x + 6{,}25 = 0$ **d)** $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$

e) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{2} = 0$ **f)** $x^2 + 2{,}5x - 1{,}2 = 0$

g) $x^2 - 0{,}6x + 4{,}2 = 0$ **h)** $x^2 - 9{,}2x - 2{,}1 = 0$

i) $x^2 + 0{,}17x - 0{,}3 = 0$ **k)** $x^2 + 3x - 0{,}75 = 0$

l) $x^2 - 7x + 12 = 0$ **m)** $x^2 + 0{,}3x - 0{,}18 = 0$

28. Die rechnerische Lösung der quadratischen Gleichung

Zur Wiederholung:

1. a) $(+5)(+5)$ $(-5)(-5)$ **b)** $(+2{,}5)(+2{,}5)$ $(-2{,}5)(-2{,}5)$

c) $(+0{,}6)(+0{,}6)$ $(-0{,}6)(-0{,}6)$

2. a) $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{6{,}25}$ **c)** $\sqrt{0{,}36}$

3. a) Nennen Sie Beispiele für positive ganze Zahlen!
b) Nennen Sie Beispiele für positive und negative ganze Zahlen!
c) Nennen Sie Beispiele für positive und negative gebrochene Zahlen!
d) Unter welchem Begriff faßt man ganze und gebrochene Zahlen zusammen?
e) Nennen Sie Beispiele für irrationale Zahlen!

Merke: Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die reellen Zahlen.

Aus der Normalform des analytischen Ausdrucks der quadratischen Funktion

$$y = x^2 + px + q$$

erhält man durch Nullsetzen der abhängigen Variablen die **Normalform der quadratischen Gleichung**

$$x^2 + px + q = 0.$$

In dieser Bestimmungsgleichung bezeichnet man x^2 als das quadratische, px als das lineare und q als das absolute Glied.

Das quadratische Glied ist charakteristisch für die quadratische Gleichung; fehlt es, so liegt keine quadratische Gleichung vor. Hingegen können sowohl das lineare als auch das absolute Glied fehlen. Dadurch ergeben sich verschiedene Formen der quadratischen Gleichung.

29. Die rein-quadratische Gleichung $x^2 + q = 0$

Ist in der Normalform der quadratischen Gleichung der Koeffizient des linearen Gliedes $p = 0$, so erhält man die **rein quadratische Gleichung**

$$\boldsymbol{x^2 + q = 0.}$$

1. Beispiel:

$$x^2 - 64 = 0 \qquad q = -64$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \pm\sqrt{64}$$
$$x_{1,2} = \pm 8 \qquad \text{(gelesen: } x \text{ eins – zwei gleich plus oder minus 8)}$$
$$x_1 = +8$$
$$x_2 = -8$$

Probe: $x_1 = +8$:

Linke Seite: $(+8)^2 - 64 = 64 - 64 = 0$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$

$x_2 = -8$:

Linke Seite: $(-8)^2 - 64 = 64 - 64 = 0$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$

Jeder Lösungsgang einer quadratischen Gleichung führt auf eine Quadratwurzel. Wegen der Doppeldeutigkeit jeder Quadratwurzel (es ist $(-a)(-a) = (+a)(+a) = +a^2$) muß demnach jede quadratische Gleichung zwei Lösungen besitzen, die zuweilen gleich sein können.

2. Beispiel:

$$x^2 + 16 = 0 \qquad q = +16$$
$$x^2 = -16$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-16}$$

Diese Gleichung besitzt ebenfalls zwei Lösungen, die aber in den bisher bekannten Zahlenbereichen nicht enthalten sind. Zu ihrer Lösung muß ein neuer Zahlenbereich eingeführt werden.

Wir fassen zusammen:

Die rein-quadratische Gleichung $x^2 + q = 0 \quad (q \leqq 0)$ hat die Lösungen $x_1 = +\sqrt{q}$ und $x_2 = -\sqrt{q}$.

3. Beispiel: $5x^2 - 101{,}25 = 0$

Wenn das quadratische Glied einen Koeffizienten besitzt, der verschieden von 1 ist, so muß die Gleichung zunächst durch den Koeffizienten, also in diesem Falle durch 5, dividiert werden.

$$x^2 - 20{,}25 = 0$$
$$x^2 = 20{,}25$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{20{,}25} \qquad x_1 = +4{,}5;\ x_2 = -4{,}5$$

Probe: $x_1 = +4{,}5$

Linke Seite: $5(+4{,}5)^2 - 101{,}25 = 101{,}25 - 101{,}25 = 0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

$x_2 = -4{,}5$

Linke Seite: $5(-4{,}5)^2 - 101{,}25 = 101{,}25 - 101{,}25 = 0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

4. Beispiel:

Aus einem Rundholz von 200 mm Durchmesser soll ein Zapfen mit quadratischem Querschnitt hergestellt werden. Wie groß wird die Quadratseite?

Lösung:

Wir bezeichnen die Quadratseite mit a, den Durchmesser mit d.

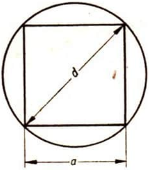


Abb. 31

$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$2a^2 = d^2$$
$$a^2 = \frac{d^2}{2}$$
$$a_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{d^2}{2}} \qquad d = 200$$
$$a_{1.2} = \pm\sqrt{20000}$$
$$a_1 = +\sqrt{20000} \approx 141{,}4$$
$$a_2 = -\sqrt{20000} \approx -141{,}4$$

Der Wert a_2 kommt nach den Bedingungen der Aufgabe nicht in Frage. Die Quadratseite wird ungefähr 141 mm lang.

5. Beispiel:

Nicht immer ist eine Gleichung von Anfang an als rein-quadratische Gleichung gegeben oder erkennbar. Oft müssen erst Umformungen durchgeführt werden, ehe man sie erhält:

$$(x-3)(x+5) = 2(x+17)$$
$$x^2 + 2x - 15 = 2x + 34$$
$$x^2 + 2x - 2x = 49$$
$$x^2 = 49$$
$$x_{1.2} = \pm\sqrt{49} \quad x_1 = +7;\ x_2 = -7$$

Probe:

$x_1 = +7$

Linke Seite: $(+7-3)(+7+5)$
$= 4 \cdot 12 = 48$

Rechte Seite: $2(+7+17) = 48$

Vergleich: $48 = 48$

$x_2 = -7$

Linke Seite: $(-7-3)(-7+5)$
$= (-10)\ (-2) = 20$

Rechte Seite: $2(-7+17) = 20$

Vergleich: $20 = 20$

Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Gleichungen rechnerisch! Machen Sie stets die Probe!

1. a) $x^2 = 256$ **b)** $x^2 = 36$ **c)** $x^2 - 49 = 0$ **d)** $x^2 - 169 = 0$

2. a) $7x^2 = 2527$ **b)** $19x^2 = 31\,939$ **c)** $\frac{x^2}{9} = 576$ **d)** $\frac{x^2}{17} - 272 = 0$

3. a) $\frac{3}{4}x^2 = \frac{27}{64}$ **b)** $\frac{8}{9}x^2 = \frac{288}{676}$ **c)** $x^2 - a = 0$ **d)** $ax^2 - c = 0$

4. Unter welchen Bedingungen sind Aufgabe 3c) und d) im Bereich der reellen Zahlen lösbar?

5. a) $(x+2)(x-2)+3=0$ **b)** $(x+7)(x-9)+(x-7)(x+9)+76=0$

c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=0$ **d)** $\frac{25+x}{9+x} = \frac{13+x}{47-x}$

6. a) $\frac{x^2}{a} = ab^2$ **b)** $x^2 - a^2 = b^2$ **c)** $x^2 - m^2 = n(n-2m)$

7. a) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^2+1)}{1-a^2}$ **b)** $\frac{x^2}{2(u-v)} = 2(u-v)$

30. Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$

Ist in der Normalform der quadratischen Gleichung das absolute Glied $q = 0$, so erhält man die **gemischt-quadratische Gleichung**

$$x^2 + px = 0.$$

1. Beispiel:

$$x^2 - 8x = 0 \qquad p = -8$$

Zur Lösung der Gleichung wird die linke Seite durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors als Produkt dargestellt.

$$x(x-8) = 0$$

Ein Produkt ist aber nur dann gleich 0, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich 0 ist. Das heißt, die Gleichung kann nur dann befriedigt werden, wenn

$$x = 0$$

oder

$$x - 8 = 0 \text{ ist.}$$

Weil beides möglich ist, zerfällt die quadratische Gleichung in zwei lineare Gleichungen, nämlich in

$$x = 0 \tag{1}$$

und

$$x - 8 = 0. \tag{2}$$

Daraus erhält man die beiden Lösungen $x_1 = 0$; $x_2 = 8$.

Probe:

$x_1 = 0$:	$x_2 = 8$:
Linke Seite: $0^2 - 8 \cdot 0 = 0$	Linke Seite: $8^2 - 8 \cdot 8 = 0$
Rechte Seite: 0	Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$	Vergleich: $0 = 0$

Wir verallgemeinern die gewonnenen Erkenntnisse:
Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$ hat stets zwei Lösungen:

$$x_1 = 0; \; x_2 = -p$$

Aufgaben

1. a) $x^2 + 3x = 0$ **b)** $x^2 - 6x = 0$ **c)** $x^2 - 2{,}5x = 0$

d) $x^2 - \frac{2}{3}x = 0$ **e)** $x^2 - 0{,}04x = 0$ **f)** $x^2 + \frac{15}{16}x = 0$

2. a) $5x^2 - 12x = 0$ **b)** $4x^2 + 7{,}5x = 0$ **c)** $3{,}5x^2 + 140x = 0$

3. a) $ax^2 - bx = 0$ **b)** $\frac{m}{n}x^2 + \frac{r}{s}x = 0$

4. Sind Aufgabe 3a) und b) stets lösbar, wenn Sie a, b bzw. m, n, r, s beliebig wählen?

5. Darf man die Gleichung $x^2 + px = 0$ durch x dividieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

31. Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$

1) Zur Wiederholung: Wie lauten die binomischen Formeln?

1. Beispiel:

Der Ausdruck $x^2 + 6x$ soll zu einem vollständigen Quadrat ergänzt werden.
Das vollständige Quadrat muß die Form $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ besitzen.
Deshalb muß $2ax = 6x$ und $a = 3$ sein.
Man muß also zu $x^2 + 6x$ noch $a^2 = 3^2 = 9$ addieren und erhält

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

2. Beispiel:

Der Ausdruck $x^2 - 7x$ soll zu einem vollständigen Quadrat ergänzt werden.
Das vollständige Quadrat muß die Form $(x - m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$ besitzen.

Deshalb muß $2mx = 7x$ und $m = \frac{7}{2}$ sein.

Man muß also zu $x^2 - 7x$ noch $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ addieren und erhält

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

Man nennt das jeweils zu addierende Glied die **quadratische Ergänzung.** Die quadratische Ergänzung ist gleich dem Quadrat des halben Koeffizienten des linearen Gliedes.

Ergänzen Sie in gleicher Weise die folgenden Ausdrücke zu vollständigen Quadraten! Wie groß ist in jedem Falle die quadratische Ergänzung?

a) $x^2 + 8x$ **b)** $x^2 - 10x$ **c)** $x^2 + x$

d) $x^2 - 0{,}4x$ **e)** $x^2 - 0{,}5x$ **f)** $x^2 + \frac{1}{2}x$

g) $x^2 + 0{,}0012x$ **h)** $x^2 - 15{,}8x$ **i)** $x^2 + 2ax$

k) $x^2 - 2ax$ **l)** $x^2 + 2px$ **m)** $x^2 - 2px$

2) Wir können nun zum Lösen der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, also der Normalform der quadratischen Gleichung, übergehen. Wir betrachten dafür zwei Beispiele, von denen eines mit bestimmten Zahlen, das andere mit allgemeinen Zahlsymbolen durchgerechnet wird.

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \qquad\qquad x^2 + px + q = 0$$

Geänderte Schreibweisen

$$x^2 + 7x = -12 \qquad\qquad x^2 + px = -q$$

Addition der quadratischen Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - 12 \qquad x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Wurzelziehen

$$x + \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \qquad\qquad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \qquad\qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = -3 \qquad\qquad x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -4 \qquad\qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Probe

$x_1 = -3$	$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Linke Seite:	Linke Seite:
$(-3)^2 + 7(-3) + 12$	$\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + q$
$= 9 \quad - 21 \quad + 12$	$= \frac{p^2}{4} - p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q$
$= 0$	$= 0$
Rechte Seite: 0	Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$	Vergleich: $0 = 0$
$x_2 = -4$	$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Linke Seite:	Linke Seite:
$(-4)^2 + 7(-4) + 12$	$\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + q$
$= 16 \quad - 28 \quad + 12$	$= \frac{p^2}{4} + p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} - p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q$
$= 0$	$= 0$
Rechte Seite: 0	Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$	Vergleich: $0 = 0$

Der Ausdruck $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

stellt eine Lösungsformel für alle quadratischen Gleichungen in Normalform dar.

Weitere Beispiele zur Lösung quadratischer Gleichungen:

3. Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 1 &= 0 \\
x^2 - 3x &= -1 \\
x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} - 1 \\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
x - \frac{3}{2} &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
x_1 &\approx 2{,}62 \\
x_2 &\approx 0{,}38.
\end{aligned}$$

Man kann die Gleichung auch nach der Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ lösen; denn die Lösung mittels der quadratischen Ergänzung ist verhältnismäßig umständlich.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad p = -3; \quad -\frac{p}{2} = +\frac{3}{2}; \quad q = +1$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1}$$

$$x_1 \approx 2{,}62$$

$$x_2 \approx 0{,}38.$$

4. Beispiel:

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0 \qquad p = +\frac{4}{3}; \quad -\frac{p}{2} = -\frac{2}{3}; \quad q = +\frac{4}{9}$$

Die Lösungsformel ergibt

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$$

In diesem Falle stimmen die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung überein. Es liegt eine **Doppellösung** vor.

Ob man $\frac{p}{2}$ und $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ als gemeinen Bruch oder Dezimalzahl schreibt, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Man wählt die Ausdrucksform, die das bequemere Rechnen und die größere Genauigkeit ermöglicht.

5. Beispiel: $x^2 + 2{,}5x + 16 = 0 \qquad p = +2{,}5; \; -\frac{p}{2} = -1{,}25; \; q = +16$

Die Lösungsformel ergibt: $x_{1,2} = -1{,}25 \pm \sqrt{1{,}25^2 - 16}$

In diesem Falle ist der Radikand negativ. Da es uns noch nicht möglich ist, die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen, ist die Gleichung für uns noch nicht lösbar. Sie hat keine reellen Lösungen.

Tritt zum quadratischen Glied ein von $(+1)$ verschiedener Koeffizient, so dividiert man alle Glieder der Gleichung zunächst durch diesen und löst nun die in der Normalform befindliche Gleichung in der gleichen Weise wie bisher.

Beispiel:	Beispiel:
$10x^2 - 47x = -42$	$ax^2 + bx + c = 0$
Division durch 10	Division durch a
$x^2 - 4{,}7 = -4{,}2$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 - 4{,}7x + 4{,}2 = 0$	$\frac{b}{a} = p; \; \frac{c}{a} = q$
	$x^2 + px + q = 0$

Lösen Sie selbständig!

Zusammenfassend können wir sagen:
Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat zwei reelle Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q\right)$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Jede nicht in der Normalform vorliegende quadratische Gleichung muß vor ihrer Lösung auf die Normalform gebracht werden.

Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen rechnerisch! Machen Sie stets die Probe!

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 - 12x + 35 = 0$ c) $x^2 - 2x - 63 = 0$
d) $x^2 + 18x - 40 = 0$ e) $x^2 + 6x - 16 = 0$ f) $x^2 - 10x = -24$
g) $x^2 + 14x = 15$ h) $x^2 + 12x = -27$ i) $x^2 - x - 2 = 0$
k) $x^2 + x - 6 = 0$ l) $x^2 - 5x - 36 = 0$ m) $x^2 + 15x + 56 = 0$

2. a) $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ b) $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$ c) $x^2 - \frac{5}{2}x - 9 = 0$
d) $x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0$ e) $x^2 - \frac{20x}{3} + 4 = 0$ f) $x^2 + \frac{22x}{5} - 3 = 0$!

3. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 17x - 6 = 0$
d) $3x^2 + 26x - 9 = 0$ e) $2x^2 - 5x - 18 = 0$ f) $3x^2 - x - 30 = 0$
g) $4x^2 - x - 5 = 0$ h) $12x^2 - x - 20 = 0$ i) $10x^2 - 3x = 1$
$5x^2 - 12x = 9$ l) $3x^2 - 14x = 49$ m) $4x^2 - 17x = -15$

4. a) $(x - 2)(x - 4) + (x - 3)(x - 1) = 11$
b) $(2x - 3)(3x - 2) - (x + 1)(3x - 7) = 13$
c) $(3x + 2)(2x - 3) - (4x - 3)(x - 1) - 3 = 0$
d) $(3x - 4)(4x - 1) - (5x - 6)(2x - 1) - 2 = 0$
e) $(x + 2)(x - 3) + (x + 1)(x - 2) - (x - 1)(x + 3) = 0$
f) $(x + 4)(x - 3) - (x + 3)(x + 4) - (x - 5)(x + 6) - 12 = 0$

5. a) $(x + 3)^2 + (x + 5)^2 - (x + 7)^2 = 0$ b) $(x - 2)^2 - (x - 4)^2 = (x - 3)^2$
c) $(x + 3)^2 + (3x - 1)^2 = (3x + 1)^2$ d) $(4x + 1)^2 - (3x + 1)^2 = (2x + 1)^2$
e) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = (3x - 2)^2$ f) $(3a + 1)^2 + (a + 2)^2 = (2a + 3)^2$
g) $(3a - 5)^2 - (a + 1)^2 - (a + 3)^2 = 0$
h) $(3a - 4)^2 - (3a + 2)^2 = (a - 1)(a + 11) - (2a + 1)^2 - 48$

6. a) $12x^2 - 10ax + 2a^2 = 0$ b) $12x^2 - 2ax - 2a^2 = 0$
c) $12x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$ d) $12x^2 - ax - 6a^2 = 0$
e) $4x^2 - 16ax + 15a^2 = 0$ f) $4x^2 - 4ax - 15a^2 = 0$

7. a) $\frac{5x - 2}{3x + 1} = \frac{3x + 10}{4x - 5}$ b) $\frac{2x + 5}{x - 2} = \frac{7x - 15}{2x - 6}$ c) $\frac{2x^2 - 4x + 5}{4x^2 - 6x - 3} = \frac{3x^2 - 6x + 5}{6x^2 - 9x - 5}$

8. a) $\frac{x+3}{2x+2} - \frac{2x-7}{3x-6} - \frac{1}{3} = 0$ b) $\frac{x-1}{2x-6} - \frac{x-4}{3x-15} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{4x-3}{5x-10} + \frac{7}{10} = 0$ d) $\frac{2x-3}{2x+4} - \frac{x+5}{3x+9} = -\frac{2}{3}$

9. a) $\frac{3x-2}{6x+9} = \frac{16x^2+10x+5}{24x^2-54} - \frac{x+2}{4x-6}$ b) $\frac{3x+5}{6x-9} - \frac{2x^2+5x-1}{4x^2-9} = \frac{10}{27}$

c) $\frac{4x-3}{6x+4} = \frac{40x^2+20x+5}{54x^2-24} - \frac{2x+3}{9x-6}$ d) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{2}{15x} - \frac{1}{x^2+x}$

10. a) $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-3} = 0$ b) $\frac{5}{x+1} + \frac{6}{x+2} - \frac{14}{x+3} = 0$

c) $\frac{7}{x+1} + \frac{8}{x-2} - \frac{27}{x+3} = 0$ d) $\frac{6}{m-1} + \frac{5}{m+3} - \frac{6}{m-3} = 0$

e) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{4}{3a}$ f) $\frac{1}{m-a} + \frac{1}{m+a} = \frac{5}{12a}$

g) $\frac{z+a}{z-a} + \frac{z-a}{z+a} = \frac{10}{3}$

11. Warum darf man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch a dividieren, wenn man sie auf die Normalform bringen will?

12. Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach unten geworfen. Nach welcher Zeit hat der Stein eine Strecke von 200 m zurückgelegt?

32. Über die Beschaffenheit der Lösungen einer quadratischen Gleichung

Es soll grafisch untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ gegebene Gleichung

a) zwei verschiedene reelle Lösungen,
b) zwei gleiche reelle Lösungen,
c) keine reellen Lösungen besitzt.

Dazu sind gegeben die Gleichungen

$x^2 - x - 2 = 0$ (1); $x^2 - x + 0{,}25 = 0$ (2); $x^2 - x + 2{,}25 = 0$ (3).

Für die grafische Lösung bildet man die analytischen Ausdrücke der zugehörigen Funktionen

$$y = f_1(x) = x^2 - x - 2 \tag{1'}$$

$$y = f_2(x) = x^2 - x + 0{,}25 \tag{2'}$$

$$y = f_3(x) = x^2 - x + 2{,}25 \tag{3'}$$

Danach bestimmt man die Koordinaten der Scheitelpunkte der Parabeln

$$S_{1'}\left(\frac{1}{2};\ -\frac{9}{4}\right);\quad S_{2'}\left(\frac{1}{2};\ 0\right);\quad S_{3'}\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$$

und zeichnet die Kurven in das Koordinatensystem ein (Abb. 32).

Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabeln mit der x-Achse sind dann die Lösungen der jeweiligen Gleichung. Der Scheitel der ersten Parabel liegt unterhalb der Abszissenachse. Es existieren zwei Schnittpunkte mit der Abszissenachse. Die Gleichung (1′) besitzt also zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

Bei einer Verschiebung der Kurve nach dem positiven Teil der y-Achse müssen sich die Schnittpunkte mit der Abszissenachse immer mehr nähern, bis sie schließlich mit dem Scheitel der Kurve zusammenfallen. Die Gleichung (2′) besitzt zwei gleiche reelle Lösungen, eine Doppellösung.

Es ist $x_1 = x_2 = 0{,}5$.

Setzt man schließlich die Schiebung der Kurve weiter in der gleichen Richtung fort, so liegt der Scheitel über der Abszissenachse. Es existieren keine Schnittpunkte mit der Abszissenachse. Die Gleichung (3′) besitzt keine reellen Lösungen.

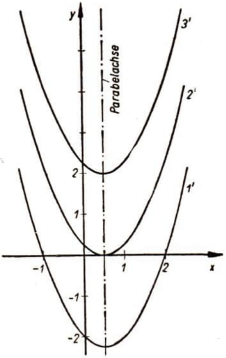


Abb. 32

Wir fassen zusammen:

Wenn die Parabel die Abszissenachse

schneidet, so besitzt die Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen,
berührt, so besitzt die Gleichung zwei gleiche reelle Lösungen,
meidet, so besitzt die Gleichung keine reellen Lösungen.

Die Richtigkeit der zeichnerischen Lösung wird durch die Rechnung bestätigt. Im einzelnen ergibt sich:

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad\qquad x^2 - x + 0{,}25 = 0 \qquad\qquad x^2 - x + 2{,}25 = 0$$

$$x^2 - x = 2 \qquad\qquad x^2 - x = -\ 0{,}25 \qquad\qquad x^2 - x = -\ 2{,}25$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 \ \Bigg|\ x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 0{,}25 \ \Bigg|\ x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2{,}25$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \qquad\qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \qquad\qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\ 2$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\,\frac{3}{2} \qquad\qquad x - \frac{1}{2} = 0 \qquad\qquad x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \qquad\qquad x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

Im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar!

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

Aus Abb. 32 erkennt man deutlich, daß die Ordinaten des Scheitels der in Normalform gegebenen Funktion für die Art der Lösungen ausschlaggebend sind. Die Ordinate des Scheitels ist aber bekanntlich $y_s = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$.

Für die drei Parabeln der Funktionen (1′), (2′) und (3′) ergeben sich

$$y_s = -2{,}25 \quad (1'); \qquad y_s = 0 \quad (2'); \qquad y_s = 2 \quad (3').$$

Sie bestimmen die oben gekennzeichnete Lage der Parabel zur Abszissenachse.

Der Ausdruck $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ tritt aber auch in der Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der quadratischen Gleichung auf. Es muß also möglich sein, daraus auch ohne die grafische Darstellung die Art der Lösungen zu bestimmen.

Es existieren folgende Möglichkeiten:

a) $\frac{p^2}{4} - q > 0$, bzw. $\frac{p^2}{4} > q$: Der Radikand der Quadratwurzel ist eine positive Zahl. Die Quadratwurzel ist eine reelle Zahl. Die Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen.

b) $\frac{p^2}{4} - q = 0$, bzw. $\frac{p^2}{4} = q$: Die Quadratwurzel ist gleich Null. Die Gleichung hat eine Doppellösung (2 gleiche reelle Lösungen).

c) $\frac{p^2}{4} - q < 0$, bzw. $\frac{p^2}{4} < q$: Der Radikand der Quadratwurzel ist eine negative Zahl. Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ist.
Die Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Der Radikand der Quadratwurzel wird auch als **Diskriminante**[1] bezeichnet:

$$\boldsymbol{D = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)}.$$

Man nennt eine derartige kritische Erörterung über die Art der Lösungen einer quadratischen Gleichung eine **Lösungsdiskussion**[2] der quadratischen Gleichung.

Beispiel:
Diskutieren Sie die Art der Lösungen der Gleichung:

$$5x^2 - 7x + 22 = 0$$

Lösung:
Man bringt die Gleichung auf die Normalform, indem man alle Glieder durch den Koeffizienten des quadratischen Gliedes, also durch 5, dividiert. Dann ermittelt man den Wert der Diskriminante.

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{22}{5} = 0$$

$$p = -\frac{7}{5}; \; q = \frac{22}{5}$$

$$\frac{p^2}{4} = \frac{49}{100}; \; q = \frac{22}{5} = \frac{440}{100}$$

$$\frac{p^2}{4} < q, \text{ also } D < 0.$$

Die Gleichung hat keine reellen Lösungen.

---

[1] lat. discriminare, entscheiden; Diskriminante, die Entscheidende.
[2] lat. discussio, kritische Erörterung.

Aufgaben

1. Untersuchen Sie die Art der Lösungen folgender Gleichungen:
Seite 69, Aufgaben 1, 2, 3 und 6.

33. Beziehungen zwischen den Lösungen und den Koeffizienten der quadratischen Gleichung

Der französische Mathematiker Francois Viëta (1540—1603, Paris) fand, daß zwischen den Lösungen und den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung eine Reihe allgemein gültiger Beziehungen bestehen.

Die Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Die Addition beider Lösungen ergibt

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \hline x_1 + x_2 &= -p. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Multiplikation beider Lösungen ergibt

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ist von der Form $(a + b)(a - b)$. Wegen

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

wird

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned} \tag{2}$$

Zwischen den beiden Lösungen x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung bestehen demnach folgende Beziehungen:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p,} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q.} \tag{2}$$

In Worten:

Die Summe der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist gleich dem negativen Koeffizienten des linearen Gliedes in der Normalform; das Produkt der Lösungen ist gleich dem absoluten Glied (Viëtascher Wurzelsatz).

Der Viëtasche Wurzelsatz kann angewandt werden
a) zur Probe,
b) zur Bildung von quadratischen Gleichungen, deren Lösungen bekannt sind, und
c) zur Lösung von Gleichungen.

a) **Beispiel:** $x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \qquad p = -\frac{11}{4}; \quad q = +\frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{11}{8} \pm \sqrt{\frac{121}{64} - \frac{96}{64}}$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}}$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{8} \pm \frac{5}{8}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

Probe:

$$x_1 \cdot x_2 \qquad\qquad x_1 + x_2$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \qquad\qquad = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$q = \frac{3}{2} \qquad\qquad -p = \frac{11}{4}$$

b) 1. **Beispiel:** Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, die die Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = 1{,}5$ besitzt?

$$x_1 + x_2 = -p \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$-5 + 1{,}5 = -3{,}5 \qquad\qquad (-5) \cdot 1{,}5 = -7{,}5$$

$$p = 3{,}5 \qquad\qquad q = -7{,}5.$$

Die Normalform $x^2 + px + q = 0$ lautet für diesen Fall:

$$x^2 + 3{,}5x - 7{,}5 = 0.$$

2. **Beispiel:** Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, die die Lösungen $x_1 = x_2 = +2{,}5$ besitzt?

$$x_1 + x_2 = -p \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$2{,}5 + 2{,}5 = 5 \qquad\qquad 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$$

$$p = -5 \qquad\qquad q = 6{,}25.$$

Die Normalform $x^2 + px + q = 0$ lautet für diesen Fall

$$x^2 - 5x + 6{,}25 = 0.$$

c) Unter Anwendung der Beziehungen

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

gilt:
$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1) \\ x^2 + px + q &= (x - x_1)\,(x - x_2). \end{aligned}$$

Man kann also eine quadratische Gleichung in ein Produkt aus zwei Linearfaktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ zerlegen, in denen x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind.

Obwohl eine solche Zerlegung bei jeder quadratischen Gleichung möglich ist, hat sie bei den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn die Lösungen ganzzahlig sind.

Beispiel: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Die Zerlegung in Linearfaktoren liefert

$$(x - 3)\,(x - 4) = 0$$
$$x_1 = 3; \quad x_2 = 4.$$

Aufgaben

1. Machen Sie mit Hilfe des Viëtaschen Wurzelsatzes die Probe auf die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen:

a) Seite 69, Aufgabe 1 **b)** Seite 69, Aufgabe 2.

2. Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, die die Lösungen

a) $x_1 = 16$; $x_2 = 3$ **b)** $x_1 = -4$; $x_2 = 5$

c) $x_1 = 6$; $x_2 = \frac{4}{5}$ **d)** $x_1 = -2$; $x_2 = -3{,}5$

e) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{8}{5}$ **f)** $t_1 = 0{,}4$; $t_2 = 0{,}03$

g) $z_1 = -2{,}1$; $z_2 = 4{,}8$ **h)** $s_1 = 0$; $s_2 = -1{,}6$

i) $v_1 = 7$; $v_2 = 7$ **k)** $m_1 = -1$; $m_2 = -6{,}2$ besitzt?

3. Zerlegen Sie in Linearfaktoren!

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 + 8x + 16 = 0$ **e)** $x^2 + 8x + 15 = 0$

c) $x^2 - 2x - 24 = 0$ **f)** $x^2 - 5x + 6 = 0$.

34. Ein weiteres zeichnerisches Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Zur Wiederholung:

1. Was für ein Bild besitzt die Funktion $y = f(x) = mx + n$?
2. Wie ändert sich das Funktionsbild, wenn sich m ändert?
3. Wie ändert sich das Funktionsbild, wenn sich n ändert?
4. Was für ein Bild besitzt die Funktion $y = f(x) = x^2$?

In Kapitel 27 haben wir ein zeichnerisches Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen kennengelernt, das sich auf Schiebungen der Normalparabel parallel zu den Achsen gründete. Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse gaben die Lösungen an.

Man kann die in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ gegebene quadratische Gleichung aber noch auf eine andere Weise zeichnerisch lösen. Wir betrachten wieder zwei Beispiele, von denen eins mit bestimmten Zahlen, das andere mit allgemeinen Zahlsymbolen durchgerechnet wird:

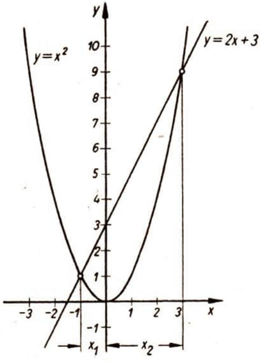


Abb. 33

$x^2 - 2x - 3 = 0$	(1)	$x^2 + px + q = 0$	(1)
Wir setzen $x^2 = y$	(2)	$x^2 = y.$	(2)

Einsetzen von (2) in (1):

$y - 2x - 3 = 0$	(3)	$y + px + q = 0$	(3)
$y = 2x + 3$	(3′)	$y = -px - q$	(3′)

Aus der Bestimmungsgleichung (1) haben wir die analytischen Ausdrücke von den zwei Funktionen (2) und (3′) erhalten, die wir uns geometrisch veranschaulichen wollen.

Das Bild der Funktion (2) $y = x^2$ ist die Normalparabel. Das Bild der Funktion (3′) $y = -px - q$, in dem Zahlenbeispiel $y = 2x + 3$, ist eine Gerade. In Abbildung 33 sind beide Funktionsbilder in einem Koordinatensystem eingezeichnet.

Die Lösungen der Gleichung sind die Abszissen derjenigen Punkte, die sowohl auf der Normalparabel als auch auf der Geraden liegen.

Man liest ab: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

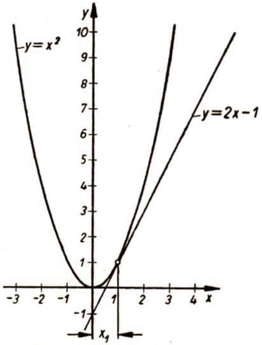


Abb. 34

Löst man in gleicher Weise die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ auf, so ergibt sich

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (4)$$
$$x^2 = y. \qquad (5)$$

Einsetzen von (5) in (4):

$$y - 2x + 1 = 0 \qquad (6)$$
$$y = 2x - 1. \qquad (6')$$

Das Bild der Funktion (5) ist wieder die Normalparabel, das Bild der Funktion (6′) ist eine Gerade, die den Anstieg 2 besitzt und die Ordinatenachse bei -1 schneidet (Abb. 34).

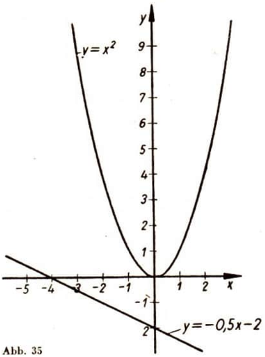


Abb. 35

Die Gerade berührt die Normalparabel. Die Abszisse $x_1 = 1$ des Berührungspunktes ist eine Doppellösung der Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Löst man schließlich in gleicher Weise die Gleichung $x^2 + 0{,}5x + 2 = 0$, so ergibt sich

$$x^2 + 0{,}5x + 2 = 0 \qquad (7)$$

$$x^2 = y. \qquad (8)$$

Einsetzen von (8) in (7):

$$y + 0{,}5x + 2 = 0 \qquad (9)$$

$$y = -0{,}5x - 2. \qquad (9')$$

In diesem Falle läuft die Gerade an der Normalparabel vorbei. Parabel und Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt; die Gleichung besitzt keine reellen Lösungen (Abb. 35).

Wir können die Ergebnisse aus diesen drei Beispielen zusammenfassen:

Wenn die Gerade die Parabel

schneidet, so hat die quadratische Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen,

berührt, so hat die quadratische Gleichung zwei gleiche reelle Lösungen,

meidet, so hat die quadratische Gleichung keine reellen Lösungen.

Es empfiehlt sich, die in allen drei Fällen vorkommende Normalparabel genau auf Millimeterpapier zu zeichnen. Die Gerade sollte auf einen Streifen durchsichtigen Papiers gezeichnet werden, der über der Parabel in die jeweils erforderliche Lage gebracht wird. Die Abszissen der Schnitt- bzw. Berührungspunkte lassen sich dann leicht ablesen. Damit kann dieselbe Zeichnung der Parabel zur zeichnerischen Lösung verschiedener Gleichungen benutzt werden.

Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen auf die angegebene Weise!

a) Seite 69, Aufgabe 1.

35. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Das Produkt aus dem vierten und dem fünften Teil einer Zahl ist 405. Wie heißt die Zahl?
2. Von einer gewissen Zahl und der Zahl 1 bildet man die Summe und die Differenz. Das Produkt aus Summe und Differenz ist 224. Wie heißt die Zahl?
3. Zerlegen Sie 384 in zwei Faktoren, deren Differenz 8 ist!
4. Zerlegen Sie 2268 in zwei Faktoren, deren Summe 99 ist!

5. Die Summe zweier Zahlen ist 313; die Summe ihrer positiven Quadratwurzeln ist 25. Wie heißen die Zahlen?

6. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Umfang **a)** 100 cm, **b)** 70 cm, **c)** n cm ist?

7. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, wenn die Diagonale **a)** 100 cm, **b)** 70 cm, **c)** m cm ist?

8. In einem Quadrat beträgt die Summe der Seite und der Diagonale 12 cm. Wie groß ist die Quadratfläche?

9. Ein Quadrat mit der Seite p wird **a)** auf das Doppelte, **b)** auf das Dreifache, **c)** auf das n-fache vergrößert. Wie groß wird die Seite des Quadrates?

10. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie $1 : \sqrt{2}$. Wie lang sind sie, wenn die Hypotenuse 225 m mißt?

11. Das Papierformat DIN A 0 ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $f = 1\ \text{m}^2$, dessen Seiten sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten. Das nächstkleinere Format DIN A 1 entsteht durch Halbierung der größeren Seite des Formates DIN A 0 usf.
Berechnen Sie **a)** die Formatgröße DIN A 0;
b) die Formatgrößen DIN A 1 ··· A 6!
Anleitung: Formatgrößen auf volle mm abrunden!

12. Aus einem Stück Rundstahl von 35 mm Durchmesser soll ein quadratischer Zapfen von möglichst großem Querschnitt hergestellt werden. Wie lang ist die Quadratseite?

13. Um einen oben offenen Wasserbehälter mit quadratischer Grundfläche und einem Fassungsvermögen von 450 l herzustellen, werden aus einem quadratischen Stahlblech an den vier Ecken Quadrate von 20 cm Kantenlänge ausgeschnitten. Die überstehenden Rechtecke werden rechtwinklig zur Grundfläche umgebogen und die aneinanderstoßenden Rechteckkanten verschweißt. Wie groß muß die Kante des quadratischen Blechs gewählt werden?

14. Die Klemmenspannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Gleichstromkreises beträgt 220 Volt. Verkleinert man den Widerstand zwischen den beiden Punkten der Leitung um 100 Ohm, so steigt die Stromstärke um 0,11 Ampere an. Wie groß war der ursprüngliche Widerstand?

15. Die Klemmenspannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Gleichstromkreises beträgt 12 Volt. Vergrößert man den Widerstand zwischen den beiden Punkten der Leitung um 5 Ohm, so sinkt die Stromstärke um 0,2 Ampere. Wie groß war der ursprüngliche Widerstand?

16. In einer Montagehalle bewegt sich der Laufkran mit einer Geschwindigkeit $v_{kr} = 0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Seine Laufkatze bewegt sich rechtwinklig dazu mit einer Geschwindigkeit $v_k = 0{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Wie groß ist die Geschwindigkeit der Last?

17. Welche Fallgeschwindigkeit v muß ein Hammer mit dem Gewicht $P = 40$ kp besitzen, damit seine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 200$ kpm beträgt?
Anleitung: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\, v^2$; $m = \frac{G}{g}$ entsprechend dem Newtonschen Grundgesetz $P = mb$.

18. Ein Baumstamm mit einem Durchmesser $d = 35$ cm soll zu Bauholz geschnitten werden. Es wird ein Balken mit rechteckigem Querschnitt benötigt, bei dem aus Gründen der Festigkeit die Höhe das $\sqrt{2}$-fache der Breite sein soll.
a) Bestimmen Sie die Maße des Balkenquerschnittes!
b) Wieviel Prozent des Materials fallen ab?

19. Das Gewölbe einer Brücke besitzt einen Radius $r = 15$ m und eine Spannweite $s = 12$ m (vgl. Abb. 36). Wie groß ist die Stichhöhe x?

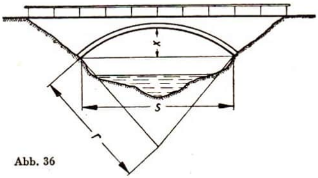


Abb. 36

20. Die Dampfleitung vom Kraftwerk zur Brikettfabrik eines Braunkohlenwerkes ist rund 1,5 km lang und besitzt kreisförmigen Querschnitt.

Es sollen stündlich 60 t Dampf $\left(\gamma = 6{,}32\ \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}\right)$ mit einer Geschwindigkeit $v = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ durch die Leitung strömen.
Wie groß muß der innere Durchmesser der Leitung mindestens sein?

21. Die Förderanlage eines Schachtes hat 1350 m Tiefe. Das Anfahren des Förderkorbes soll mit gleichmäßiger Beschleunigung g von $0{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ stattfinden, die gleichförmige Fahrt mit einer Geschwindigkeit von $18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, das Auslaufen mit einer Verzögerung von $0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Bestimmen Sie

a) die Zeitdauer der beschleunigten Fahrt,
b) die Zeitdauer der verzögerten Fahrt,
c) die während jedes Bewegungsabschnittes zurückgelegten Förderhöhen in Metern und
d) in Prozenten der Gesamthöhe,
e) die Gesamtdauer eines Hubes,
f) das Weg-Zeit- und das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm!

22. Ein Futtersilo für eine LPG hat einen kreisförmigen Querschnitt und wird aus 10 cm dicken Betonrohren angefertigt, die einen inneren Durchmesser $d = 2{,}50$ m und eine Höhe $h = 1{,}00$ m haben. Ein Silo ist $H = 3{,}00$ m tief. Die LPG baut vier dieser Silos.
Bestimmen Sie

a) den Betonverbrauch für ein Rohr,
b) das Gewicht eines Rohres $\left(\gamma = 2{,}4\ \frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}\right)$,
c) den Zementverbrauch für alle 4 Silos (für 1 m³ Beton werden 0,3 t Zement benötigt)!

23. Bei einem Kuhstallumbau für ein VEG muß eine Wand durch einen Stahlunterzug, der auf 2 Stahlsäulen ruht, abgefangen werden.

Wie groß muß das rechteckige Betonfundament einer Säule werden, wenn $2{,}5\ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ vom Baugrund aufgenommen werden können (Bodenpressung) und die Last einschließlich des Fundamenteigengewichtes 35 t beträgt. Aus konstruktiven Gründen muß die eine Seitenlänge des Fundamentes 50 cm größer als die andere sein.
Berechnen Sie die Seitenlängen des Fundamentes!

24. Ein Gärfuttersilo soll höchstens 10 m hoch beschickt werden.
Welche lichten Durchmesser müssen Rundsilos haben, die bei 8 m Schichthöhe **a)** 1880 dz Rübenblatt, **b)** 3350 dz Rübenblatt, **c)** 5240 dz Rübenblatt enthalten sollen? (Ein Doppelzentner Rübenblatt nimmt 0,12 m³ ein.)

25. Eine Dungplatte mit verrottetem Stallmist hat eine rechteckige Grundfläche und eine Höhe von 2 m. Ihre Länge ist 4 m größer als ihre Breite. Bestimmen Sie ihre Maße, wenn in ihr 325 t Mist lagern (0,850 t Stalldung je m³)!

VI. Die Potenzfunktion und ihre Umkehrung

VI.1 Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten

36. Der Begriff der Potenz

Erklärung: Eine Potenz[1] ist ein Ausdruck der Form a^n und bedeutet ein Produkt von n gleichen Faktoren $\boldsymbol{a}$.

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$.

Ist $a^n = b$,

so heißt

a die Grundzahl oder **Basis**[2],

n die Hochzahl oder der **Exponent**[3],

b der **Wert** der Potenz.

Nach dieser Erklärung hat die Potenz a^1 keinen Sinn, da ein Produkt mindestens zwei Faktoren besitzen muß.

Man definiert: $\boldsymbol{a^1 = a}$.

Man muß zwischen dem Vorzeichen des Potenzwertes und dem Vorzeichen der Basis einer Potenz unterscheiden.

Jede Potenz, deren Basis eine positive Zahl ist, ist selbst eine positive Zahl

$$(+a)^n = +a^n.$$

Jede Potenz, deren Basis eine negative Zahl ist, ist eine positive Zahl, wenn der Exponent geradzahlig, ist eine negative Zahl, wenn der Exponent ungeradzahlig ist.

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Der Wert jeder Potenz einer Zahl, die größer als 1 ist, ist auch größer als 1.

Der Wert jeder Potenz von 1 ist gleich 1.

Der Wert jeder Potenz einer positiven Zahl, die kleiner als 1 ist, ist auch kleiner als 1.

Der Wert jeder Potenz von 0 ist gleich 0.

Aufgaben

1. Nennen Sie die Ihnen bekannten Grundrechenarten!

2. Was stellt eine Summe aus gleichen Summanden dar?

[1] potentia (lat.) Macht, Fähigkeit. [2] Basis (gr.) Grundlage. [3] exponere (lat.) heraussetzen.

3. In welcher kürzeren Form kann man die folgenden Summen schreiben?

a) $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ **b)** $0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6$

c) $(-1{,}2) + (-1{,}2) + (-1{,}2)$ **d)** $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$

e) $m + m + m + m + m + m$

4. In welcher kürzeren Form kann man die folgenden Produkte schreiben?

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$ **c)** $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$

5. Wie unterscheiden sich

a) $(+5)^2$ von $(-5)^2$, **b)** $(+3)^4$ von $(-3)^4$, **c)** $(+2)^6$ von $(-2)^6$,

d) $(+4)^{2n}$ von $(-4)^{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, **e)** $(+m)^{2n}$ von $(-m)^{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$?

6. Wie unterscheiden sich

a) $(+5)^3$ von $(-5)^3$, **b)** $(+3)^5$ von $(-3)^5$, **c)** $(+2)^7$ von $(-2)^7$,

d) $(+4)^{2n+1}$ von $(-4)^{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$,

e) $(+m)^{2n+1}$ von $(-m)^{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$?

7. Begründen Sie

a) $(+2)^4 = (-2)^4$, **b)** $(+3)^2 = (-3)^2$, **c)** $(+a)^{2n} = (-a)^{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$!

8. Begründen Sie

a) $(+2)^5 \neq (-2)^5$, **b)** $(+3)^3 \neq (-3)^3$,

c) $(+a)^{2n+1} \neq (-a)^{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$!

In den Aufgaben 9 bis 13 sind die Potenzwerte zu bestimmen!

9. a) $(+1)^2$ **b)** $(+1)^3$ **c)** $(+1)^{12}$ **d)** $(+1)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

10. a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^4$ **c)** $(-1)^6$ **d)** $(-1)^{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

11. a) $(-1)^1$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^{11}$ **d)** $(-1)^{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

12. a) $-(+2)^3$ **b)** $-(-2)^4$ **c)** $+(-3)^3$ **d)** $-(+4)^3$ **e)** $-(-5)^3$
f) $-(-4)^3$ **g)** $+(-2)^7$ **h)** $-(-3)^4$ **i)** $-(-5)^1$ **k)** $+(+6)^3$

13. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{3}{2}\right)^4, \left(\frac{3}{2}\right)^5, \left(\frac{3}{2}\right)^6$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{2}{3}\right)^5, \left(\frac{2}{3}\right)^6$

b) $1^1, 1^2, 1^3, 1^4, 1^5, 1^6$ **d)** $0^1, 0^2, 0^3$

14. Berechnen Sie

a) $(2a)^4, (3x)^3, (ab)^3, (xy)^5, (2ab)^4$

b) $\left(\frac{a}{2}\right)^4, \left(\frac{x}{3}\right)^3, \left(\frac{2a}{3}\right)^2, \left(\frac{3x}{2}\right)^3$

c) $(a-2)^2, (a+b)^2, (a-b)^2, (x+y)^2, (2x-3)^2, (3x-2)^2, (3x-4)^2, (3x-2y)^2,$
$(3x-4y)^2, (4x+3y)^2, (1-x)^2, (x-1)^2$!

15. Wie heißt die größte Zahl, die man mit

a) 2 Zweien, **b)** 3 Zweien, **c)** 4 Zweien, **d)** 3 Dreien, **e)** 3 Fünfen schreiben kann?

16. Berechnen Sie

a) 0^2, 0^3, 0^4, 0^n, 1^2, 1^3, 1^4, 1^n, $(+1)^4$, $(+1)^5$, $(+x)^3$, $(+a)^4$, $(+2x)^2$, $(+3a)^3$

b) $(-1)^{12}$, $(-1)^{14}$, $(-2)^4$, $(-3)^2$, $(-x)^4$, $(-2a)^4$, $(-3x)^4$

c) $(-1)^9$, $(-1)^{15}$, $(-2)^3$, $(-2)^5$, $(-a)^3$, $(-x)^5$, $(-ab)^3$, $(-2x)^5$

d) $-(+1)^2$, $-(+1)^3$, $-(-1)^2$, $-(-1)^3$, $-(-1)^4$, $-(-1)^5$,
$-(-2)^3$, $-(-2)^4$, $+(-a)^5$, $-(-a)^5$, $+(-a)^6$, $-(-a)^6$!

37. Die Potenzschreibweise

Beim Schreiben großer Zahlen findet die sogenannte Potenzschreibweise häufig Anwendung.

In den Naturwissenschaften, besonders in der Physik und Astronomie, werden große Zahlen oft als Produkt einer zwischen 0 und 10 gelegenen Zahl und einer Zehnerpotenz geschrieben.

Beispiel:

Bekanntlich beträgt die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Wegen $100\,000 = 10^5$ kann die Lichtgeschwindigkeit auch folgendermaßen geschrieben werden: $c \approx 3 \cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzschreibweise

a) die Anzahl der Moleküle in 1 cm³ eines Gases bei 273° K und 760 Torr (Avogadrosche Zahl): 27 000 000 000 000 000 000 (Lesen Sie die Zahl!);

b) die Erdoberfläche $O \approx 510\,000\,000$ km²;

c) das Volumen der Erde $V \approx 1\,083\,000\,000\,000$ km³;

d) die Bahngeschwindigkeit der Erde $v = 29\,500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

e) die Entfernung Erde—Sonne e $\approx 150\,000\,000$ km;

f) die Entfernung Erde—Mond e $\approx 384\,000$ km!

2. Berechnen Sie und schreiben Sie in Potenzschreibweise!

a) Welche Strecke legt das Licht in einem Jahr zurück (Lichtjahr)?

b) Die Entfernung Erde—Sirius beträgt 8,8 Lichtjahre. Wieviel Kilometer sind das?

c) Welchen Weg hat Sputnik III nach 1000 Erdumkreisungen zurückgelegt, wenn seine durchschnittliche Geschwindigkeit rund $8000\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und seine durchschnittliche Flughöhe rund $\frac{R}{4}$ beträgt? (Erdradius $R = 6370$ km)

3. Schreiben Sie die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ in Potenzschreibweise und in den Maßeinheiten $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$!

4. Im dekadischen Zahlensystem wird jede Zahl als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt. Beispielsweise ist $270 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0$.

Für eine Reihe technischer Anwendungen, so z. B. für das Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken.

Im Dualsystem ist z. B.

$270 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0.$

Die Zahl 270 lautet im Dualsystem [100001110].

a) Wieviel Ziffern hat das Dualsystem?

b) Drücken Sie folgende Zahlen im Dualsystem aus: 26; 84; 128; 413; 1000; 12560!

38. Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$

Die Funktionen $y = f(x) = x^n$ nennt man **Potenzfunktionen.** Ihre Bilder heißen **Parabeln.**

Ist der Exponent n der Potenzfunktionen eine gerade Zahl, so spricht man von geraden Potenzfunktionen; ist er eine ungerade Zahl, so spricht man von ungeraden Potenzfunktionen.

1) Die Schar der (geraden) Potenzfunktionen $y = f(x) = x^{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Für $n=1$ erhält man die quadratische Funktion $y=x^2$. Das Bild ist die bekannte quadratische Normalparabel.

Für $n=2$ erhält man die Potenzfunktion $y=x^4$. Ihr Bild ist eine Parabel 4. Grades.

In Abbildung 37 ist die Schar der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^4$ und $y = x^6$ zeichnerisch dargestellt. Sämtliche Bildkurven gehen durch den Nullpunkt $(0;0)$ als Scheitel und durch die Punkte $(1;1)$ und $(-1;\ 1)$. Sie verlaufen im I. und II. Quadranten und liegen symmetrisch zur Ordinatenachse.

2) Die Schar der (ungeraden) Potenzfunktionen $y = f(x) = x^{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Für $n = 1$ erhält man die Potenzfunktion $y = x^3$. Das Bild ist eine Parabel 3. Grades oder kubische Parabel.

Für $n = 2$ erhält man die Potenzfunktion $y = x^5$. Das Bild ist eine Parabel 5. Grades.

Die Bildkurve der Funktion $y = x^1 = x$, eine Gerade, wird sinngemäß als (ausgeartete) Parabel angesehen.

In Abb. 38 ist die Schar der Potenzfunktionen $y = x$; $y = x^3$; $y = x^5$ und $y = x^7$ zeichnerisch dargestellt.

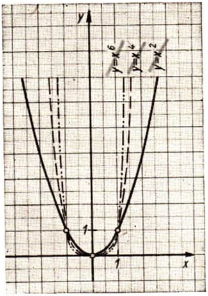


Abb. 37

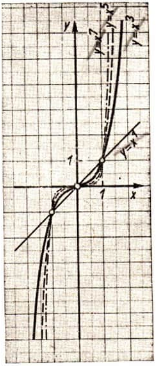


Abb. 38

Sämtliche Bildkurven gehen durch die Punkte $(0; 0)$, $(1; 1)$ und $(-1; -1)$. Sie verlaufen im I. und III. Quadranten und liegen symmetrisch zum Nullpunkt $(0; 0)$ als Symmetriezentrum. Bei den Bildern der Funktionen $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ ist der Nullpunkt gleichzeitig Wendepunkt; d. h. ein Punkt, in dem der Krümmungssinn der Bildkurve wechselt.

Aufgaben

1. Stellen Sie tabellarisch und in einem Koordinatensystem zeichnerisch dar!

a) $y = x^3$ **b)** $y = -x^3$ $(-3 < x < +3)$

Wie entsteht das Bild der Funktion $y = -x^3$ aus dem Bild der Funktion $y = x^3$?

Anleitung: Wählen Sie auf der Ordinatenachse eine geeignete Maßeinheit, etwa 1 cm $\widehat{=}$ 2 Einheiten.

2. Stellen Sie tabellarisch und in einem Koordinatensystem zeichnerisch dar!

a) $y = 2x^3$ **b)** $y = x^3$ **c)** $y = 0{,}5x^3$ $(-3 < x < +3)$

Wie wirkt sich eine Veränderung des Koeffizienten auf das Funktionsbild aus?

Anleitung: Wählen Sie auf der Ordinatenachse 0,2 cm als Einheit!

3. Welche Symmetrieverhältnisse besitzen die Kurven von $y = -x^2$, $y = -x^3$, $y = -x^4$ und $y = -x^5$? Wie liegen sie zu den Kurven von $y = +x^2$, $y = +x^3$, $y = +x^4$ und $y = +x^5$?

4. Zeigen Sie an den Kurven von $y = x^2$; $y = x^4$; $y = -x^2$; $y = -x^4$ und $y = x$; $y = x^3$ $y = -x$, $y = -x^3$,

a) daß bei Achsensymmetrie Umklappen der Kurve um die Symmetrieachse,

b) daß bei zentrischer Symmetrie Drehen der Kurve um das Symmetriezentrum um 180° die Funktionskurve mit sich selbst zur Deckung bringt!

5. Zeigen Sie an den Kurven von $y = x^4$ und $y = x^2$, daß bei Achsensymmetrie auch Spiegelung der Kurve an der y-Achse die Funktionskurve mit sich selbst zur Deckung bringt!

6. Welche Punkte **a)** der Kurve von $y = x^2$, **b)** der Kurve von $y = x^4$ liegen symmetrisch zur y-Achse und werden durch diese ineinander gespiegelt? Welche analytischen Beziehungen bestehen zwischen den Abszissen x_1 und x_2 und den Ordinaten y_1 und y_2 zweier zur y-Achse symmetrischer Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ dieser Kurven (gerade Funktionen)? Welche Eigenschaft hat der Scheitel $(0; 0)$ beider Parabeln?

7. Lösen Sie die Aufgabe 6 für die Kurven von **a)** $y = -x^2$ und **b)** $y = -x^4$!

8. Welche Punkte der Kurve von $y = x^3$ liegen symmetrisch zum Zentrum $(0; 0)$? In welchen Richtungen liegen diese Kurvenpunkte zum Nullpunkt? Welche analytischen Beziehungen bestehen zwischen den Abszissen x_1 und x_2 und den Ordinaten y_1 und y_2 zweier zum Nullpunkt symmetrischer Punkte dieser Kurve (ungerade Funktion)? Welche Eigenschaft hat der Punkt $(0; 0)$?

9. Lösen Sie die Aufgabe 8 für die Kurve von $y = -x^3$!

39. Die vier Grundrechenarten mit Potenzen

1) Addition und Subtraktion von Potenzen

Uns ist bekannt, daß durch Addition und Subtraktion nur gleichartige Größen zusammengefaßt werden können.

So ist z. B. $$x + x + x + x + x = 5x,$$

$$3m + 5m = m + m + m + m + m + m + m + m = 8m.$$

Es lassen sich aber $3x + 4y - 2z$ nicht weiter zusammenfassen.
Ebenso können nur gleichartige Potenzen addiert oder subtrahiert werden.

Beispiele: $$m^2 + 2n^2 + 4m^2 - 6n^2 = 5m^2 - 4n^2$$

$$3g^2 + h^3 - 2g^2 + 4g^3 = g^2 + 4g^3 + h^3$$

$$5z^m - 4a^n + 2z^m + 3a^n = 7z^m - a^n$$

Potenzen können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie sowohl in den Basen als auch in den Exponenten übereinstimmen.

2) Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen

$$2^4 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 2^{4+5}.$$

Es ist also $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5}$

$$m^4 \cdot m^3 = (m \cdot m \cdot m \cdot m) \cdot (m \cdot m \cdot m) = m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m = m^7 = m^{4+3}.$$

Es ist also $m^4 \cdot m^3 = m^{4+3}$.

Wir verallgemeinern die eben gewonnene Erkenntnis:

a^m ist das Produkt aus m Faktoren a; a^n ist das Produkt aus n Faktoren a.

$a^m \cdot a^n$ ist demnach das Produkt aus $(m + n)$ Faktoren a; d. h.

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}. \tag{1}$$

Potenzen mit gleichen Basen werden miteinander multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Durch Vertauschen beider Seiten der Gleichung (1) erhält man

$$\boldsymbol{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}. \tag{2}$$

Die eben für zwei Faktoren hergeleitete Regel gilt auch für beliebig viele Faktoren:

Wegen (2) ist $$a^c \cdot a^d \cdot a^e = a^c \cdot a^{d+e}$$

und nochmals wegen (2) ist $a^c \cdot a^{d+e} = a^{c+d+e}$ usw.

Beispiele:

1. $1000 \cdot 10000 = 10^3 \cdot 10^4 = 10^7 = 10000000$
2. $b^5 \cdot b^7 \cdot b^2 = b^{5+7+2} = b^{14}$
3. $0{,}5\,x^3 \cdot 2{,}5\,x^4 = 1{,}25\,x^{3+4} = 1{,}25\,x^7$.
4. $5\,x^4 = 2\,x^3 \cdot 2{,}5\,x = 0{,}5\,x^2 \cdot 10\,x^2 = \ldots$

3) Division von Potenzen mit gleichen Basen

Beispiel 1: $\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

Man kann in diesem Bruch vier Faktoren 2 kürzen und erhält als Ergebnis 2^3. Wegen $3 = 7 - 4$ ist also $\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4}$.

$$\frac{k^5}{k^3} = \frac{k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k}{k \cdot k \cdot k}$$

Man kann auch hier wieder drei Faktoren k kürzen und erhält als Ergebnis k^2. Wegen $2 = 5 - 3$ ist also $\frac{k^5}{k^3} = k^{5-3}$.

Beispiel 2: $\frac{2^3}{2^7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

Man kann in diesem Bruch drei Faktoren 2 kürzen und erhält als Ergebnis $\frac{1}{2^4}$. Wegen $4 = 7 - 3$ ist also $\frac{2^3}{2^7} = \frac{1}{2^{7-3}}$.

$$\frac{k^2}{k^9} = \frac{k \cdot k}{k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k}$$

Man kann auch hier wieder zwei Faktoren k kürzen und erhält als Ergebnis $\frac{1}{k^7}$. Wegen $7 = 9 - 2$ ist also $\frac{k^2}{k^9} = \frac{1}{k^{9-2}}$.

Wir verallgemeinern die eben gewonnenen Erkenntnisse:

a^m ist das Produkt aus m Faktoren a; a^n ist das Produkt aus n Faktoren a.

$m > n$:[1]

$\frac{a^m}{a^n}$ ist das Produkt aus $(m - n)$ Faktoren a, d. h.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (m > n). \tag{1}$$

$m < n$:[1]

$\frac{a^m}{a^n}$ ist ein Bruch, dessen Zähler gleich 1 und dessen Nenner das Produkt aus $(n - m)$ Faktoren a ist, d. h.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad (m < n). \tag{1'}$$

Gleichung (1) in Worten:

Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

[1] Vorläufig ist eine Fallunterscheidung $m > n$ und $m < n$ noch nötig, da das Ergebnis im letzten Falle nach der bisherigen Definition des Potenzbegriffes keinen Sinn hätte.

Durch Vertauschen beider Seiten der Gleichung (1) erhält man

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}. \tag{2}$$

Beispiele:

1. $\frac{x^9}{x^6} = x^9 : x^6 = x^{9-6} = x^3$
2. $\frac{p^8}{p} = p^8 : p^1 = p^{8-1} = p^7$
3. $\frac{a^d}{a^{d-2}} = a^d : a^{d-2} = a^{d-(d-2)} = a^{d-d+2} = a^2$
4. $\frac{m^{3p}}{m^{p-2}} = m^{3p} : m^{p-2} = m^{3p-(p-2)} = m^{3p-p+2} = m^{2p+2}$
5. $b^5 = b^{7-2} = \frac{b^7}{b^2}$
6. $x^{3m-n} = \frac{x^{3m}}{x^n}$
7. $\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^{5-3}} = \frac{1}{x^2}$

Aufgaben

1. a) $2a^4 + 3a^4 + 5a^4$ **b)** $9c^2 - 2c^2 + (-3c)^2$ **c)** $6m^2 + 3m^2 - 4m^2$

2. a) $5f^4 + 9g^4 - 2g^4 - 3f^4$ **b)** $2a^4 - 7b^3 + 8a^4 - 5b^3$ **c)** $27u^7 - 22v^5 + 14v^5 - 3u^7$

3. a) $\frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^3 - \frac{x^3}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}y^5 + \frac{1}{6}y^5 - \frac{y^5}{2}$ **c)** $\frac{2}{5}z^4 - \frac{7}{10}z^4 - \frac{7}{15}z^4$

d) $0{,}3a^2 - (-0{,}7b)^3 + 0{,}7a^2$ **e)** $0{,}04m^2 - 0{,}12n^3 + 0{,}84n^3$

f) $4{,}2r^4 + 2{,}1s^3 - 5{,}6r^4$

4. a) $\frac{x^3}{12} - \frac{3x^4}{8} + \frac{7x^3}{6} + \frac{5x^4}{12} - 2$ **b)** $\frac{7y^4}{15} - 4{,}1 + \frac{9y^3}{16} - \frac{13y^4}{24} + \frac{21y^4}{25}$

5. a) $4x^{m+n} + 2{,}5y^{r+s} - 6x^{m+n} - 1{,}3y^{r+s}$

b) $0{,}2a^{x+y} - 0{,}7b^{3x-y} + 4{,}8a^{x+y} - 2{,}3b^{3x+y}$

c) $(a+b)^{x+y} + (a-b)^{x-y} + 5(a+b)^{x+y} - 4(a-b)^{x-y} - 1{,}5(a-b)^{x-y}$

6. a) $x^4 \cdot x^3$ **b)** $b^3 \cdot b^5$ **c)** $m^4 \cdot m^2$ **d)** $p^3 \cdot p^7$

7. a) $n^9 \cdot n^2$ **b)** $r^{11} \cdot r^{15}$ **c)** $g^7 \cdot g^{39}$ **d)** $f^{16} \cdot f^{19}$

8. a) $(-p)^3 \cdot p$ **b)** $q \cdot (-q)^{17}$ **c)** $(-a)^8 \cdot a^{72}$ **d)** $e^{30}(-e)^4$

9. a) $a^4 \cdot a^7 \cdot a$ **b)** $x^3 \cdot x \cdot x^4$ **c)** $u^3 \cdot u^5 \cdot u^2$ **d)** $v^6 \cdot v^3 \cdot v$

10. a) $2b^{3x} \cdot 3b^x$ **b)** $1{,}5m^y \cdot 4m^{4y}$ **c)** $0{,}3f^{2a} \cdot 1{,}5f^{3a}$ **d)** $3u^{6w} \cdot 0{,}6u^w$

11. a) $b^{m+1} \cdot b \cdot b^{m-2}$ **b)** $x \cdot x^{n-1} \cdot x^4 \cdot x^{n-7}$ **c)** $y^{3n-2} \cdot y \cdot y^{4n+3}$ **d)** $z^{a+2} \cdot z^{3a} \cdot z^4$

12. a) $x^{3a-2} \cdot y^m \cdot x \cdot y^{m+4} \cdot x^{4a} \cdot y^2$ **b)** $4m^{a+2} \cdot n^b \cdot 2{,}5m^{4a-1} \cdot 3{,}5n^{3b+2}$

13. a) $(4x-1)^2(4x-1)(4x-1)^3$ **b)** $(x-y)^4(x-y)(x-y)^4$

14. a) $0{,}4ab^2 \cdot (-c)^3 \cdot 2a^3b \cdot (-c)^2 \cdot 2{,}5a^3b^2c^2$

b) $0{,}8x^{m-4} \cdot (-y) \cdot 4x^{4m-2} \cdot y^2 \cdot 0{,}1x^{m+2} \cdot y^{4n-3}$

15. a) $a^2(x-y)^2 \cdot a^3(x-y)^3$ b) $m^3(m+n) \cdot m^2(m+n)^2$ c) $x(x+y)^2 \cdot y(x+y)^3$

16. a) $3m(4m^3 + 2mn + 3n^2)$ b) $5r(4r^2 - 2rs + 6s^2)$

c) $\frac{40}{3} x^5 \left(\frac{5}{8} x^3 - \frac{9}{4} x^2 y^2 + \frac{15}{2} y^3\right)$ d) $16{,}25 x^2 y^2 (12x^2 - 28xy + 32y^2)$

17. a) $(2x^2 - 5y^2)(4x^2 + 9y^2)$ b) $(12a^2 - 7b^2)(3a^2 + 11b^2)$

18. a) $(2a^2 - 5b^2)(3a^2 - 4a^2b^2 - 5b^2)$ b) $(10x^2 - 7xy + 4y^2)(2x^2 - 8y^2)$

19. a) $a^8 : a^5$ b) $a^5 : a^4$ c) $a^5 : a$ d) $a^{15} : a^{12}$

20. a) $x^4 : x$ b) $x^5 : x^2$ c) $x^{12} : x^9$ d) $x^7 : x^3$

21. a) $(-w)^6 : w^6$ b) $w^{11} : (-w)^7$ c) $w^4 : (-w)$ d) $(-w)^{14} : w^6$

22. a) $+4y^8 : (-2y)^6$ b) $-3{,}2y^7 : 0{,}8y^5$ c) $4{,}9y^{11} : 7y^7$ d) $12{,}8y^9 : (-3{,}2y)$

23. a) $0{,}6z^8 : 0{,}06z^5$ b) $15z^7 : 3z^4$ c) $0{,}6z^{13} : 2{,}4z^{12}$ d) $7{,}6z^{17} : 3{,}8z^{14}$

24. a) $m^{4a-1} : m^{2a+2}$ b) $m^{12-3x} : m^{5+y}$ c) $m^{4-y} : m^{3y-5}$ d) $m^{6-3z} : m^{1-z}$

25. a) $1{,}6n^{2x-1} : 0{,}8n^{x+1}$ b) $4{,}5n^{7x+3} : 1{,}5n^{6x-1}$

c) $0{,}25n^{x+1} : 0{,}5n^{x+1}$ d) $2{,}7n^{x-3} : 0{,}9n^{x-4}$

26. a) $4{,}2a^5b^3c^4 : 2a^3bc$ b) $6{,}3a^7b^9c^{11} : 2{,}1a^5b^7c$ c) $0{,}4a^5b^{12}c : 0{,}08a^4b^{11}$

27. a) $x^3 : x^4$ b) $x^4 : x^7$ c) $x^9 : x^{13}$ d) $x^2 : x^5$

28. a) $a^3 : a^{10}$ b) $a^5 : a^{12}$ c) $a^7 : a^{20}$ d) $a^{15} : a^{19}$

29. a) $y : y^7$ b) $y^6 : y^{12}$ c) $y^{10} : y^{23}$ d) $y^2 : y^7$

30. a) $m^x : m^{x+2}$ b) $m^{3x} : m^{5x}$ c) $m^{3x} : m^{3x+5}$

31. a) $z^{5n-7} : z^{5n+3}$ b) $x^{2n-3} : x^{2n+9}$ c) $y^{4n-5} : y^{4n}$

32. a) $0{,}5a^{3x} : 2{,}5a^{3x+4}$ b) $2{,}4b^{5x-1} : 0{,}6b^{5x+1}$ c) $-7{,}2c^{x-4} : (-3{,}6c^{x+12})$

33. a) $-1{,}5a^2b^3c : 6ab^4c^2$ b) $5{,}2x^3y^4z^2 : 0{,}02xyz^5$ c) $3{,}5m^3np^2 : (-0{,}7m^4np^2)$

34. a) $4ab^5c^4 : 0{,}2a^3b^5c^5$ b) $0{,}04x^2y^3z : 1{,}6x^3y^4z^2$ c) $-13{,}6mn^2p^3 : 0{,}34m^2n^4p^8$

35. a) $\frac{6ab^2}{8x^2y} : \frac{16a^2b}{18xy^2}$ b) $\frac{3a^4b^3}{2{,}5x^2y^4} : \left(-\frac{2{,}5ab^2}{4{,}5x^2y}\right)$ c) $\frac{x^{3a-b}}{y^{2a-3b}} : \frac{x^{2a-3b}}{y^{3a-2b}}$

36. a) $\frac{36a^{2a-3y}}{73{,}5x^{3a-2b}} : \frac{18a^{x-3y}}{-35x^{3a-2b}}$ b) $\frac{-10a^{5x-2y}}{7{,}5x^{5a-2b}} : \frac{10a^{3x-4y}}{12{,}5x^{6a+5b}}$

37. $(1{,}05x^{5m+3} + 1{,}47x^{4m+2} - 1{,}89x^{3m+1}) : 0{,}105x^{2m+3}$

38. $(0{,}225m + 1{,}75mn + 4{,}5n) : 0{,}5m^5n^5$

39. $(10a^5 + 23a^4 + 18a^3 + 9a^2) : (2a^2 + 3a)$

40. $(27v^9 - 54v^6w^3 + 36v^3w^6 - 8w^9) : (3v^3 - 2w^3)$

41. a) $(a^6 - 1) : (a^2 - 1)$ b) $(x^8 - y^8) : (x^2 - y^2)$

42. a) $(x^{2n} - y^{2n}) : (x - y)$ b) $(a^3 + b^3) : (a^2 - ab + b^2)$

4) Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten

$$4^5 \cdot 2{,}5^5 = 1024 \cdot 97{,}65625.$$

Wir können uns oft viel Rechenarbeit ersparen, wenn wir das Produkt aus zwei Potenzen mit gleichen Exponenten umformen:

Es ist beispielsweise

$$4^5 \cdot 2{,}5^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5. \tag{1}$$

Unter Anwendung des Kommutativgesetzes der Multiplikation erhalten wir aus Gleichung (1):

$$(4 \cdot 2{,}5) \cdot (4 \cdot 2{,}5) \cdot (4 \cdot 2{,}5) \cdot (4 \cdot 2{,}5) \cdot (4 \cdot 2{,}5) = (4 \cdot 2{,}5)^5 = 10^5 = 100000. \tag{2}$$

Anstatt $1024 \cdot 97{,}65625$ braucht man nur 10^5 auszurechnen.
In gleicher Weise ergibt sich:

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 = (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) = (a \cdot b \cdot c)^4.$$

Wir verallgemeinern die eben gewonnene Erkenntnis:

$$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \tag{3}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit diesem Exponenten potenziert.

Durch Vertauschen beider Seiten der Gleichung (3) erhält man

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.} \tag{4}$$

Beispiele:

1. $8^3 \cdot 0{,}5^3 = (8 \cdot 0{,}5)^3 = 4^3 = 64$ 2. $\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 = \left(\frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^7 = 1^7 = 1$

3. $450^2 = (45 \cdot 10)^2 = 45^2 \cdot 10^2 = 2025 \cdot 100 = 202500$

5) Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

Die Potenzen 4^4 und 5^4 besitzen gleiche Exponenten.

Wir bilden den Quotienten $\frac{4^4}{5^4}$: $\frac{4^4}{5^4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4.$

Ebenso ergibt sich: $\frac{x^5}{y^5} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^5.$

Wir verallgemeinern die eben gewonnene Erkenntnis:

$$\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.} \tag{1}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Durch Vertauschung beider Seiten der Gleichung (1) erhält man

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.} \tag{2}$$

Beispiele:

1. $\dfrac{51^4}{(-17^4)} = \left(\dfrac{51}{-17}\right)^4 = (-3)^4 = 81$

2. $\dfrac{56^2}{63^2} = \left(\dfrac{56}{63}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = \dfrac{64}{81}$

3. $\left(\dfrac{14}{15}\right)^2 : \left(\dfrac{7}{20}\right)^2 = \left(\dfrac{\frac{14}{15}}{\frac{7}{20}}\right)^2 = \left(\dfrac{14 \cdot 20}{15 \cdot 7}\right)^2 = \left(\dfrac{2 \cdot 4}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 = \dfrac{64}{9}$

4. $(mx - my)^a : (nx - ny)^a = \dfrac{(mx - my)^a}{(nx - ny)^a} = \left(\dfrac{mx - my}{nx - ny}\right)^a = \left(\dfrac{m(x-y)}{n(x-y)}\right)^a = \left(\dfrac{m}{n}\right)^a$

5. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$

6. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{4^2}{7^2} \cdot \dfrac{1^2}{2^2} = \dfrac{2^2}{7^2} = \dfrac{4}{49}$

Aufgaben

1. a) $3^2 \cdot 5^2$ **b)** $(-2)^7 \cdot 50^7$ **c)** $16^2 \cdot 62{,}5^2$ **d)** $0{,}4^6 \cdot 2{,}5^6$

2. a) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{14}{9}\right)^3$ **b)** $\left(\dfrac{8}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{9}{8}\right)^4$ **c)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot 6^3 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3$ **d)** $0{,}8^6 \cdot 0{,}25^6 \cdot 10^6$

3. a) $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$ **b)** $\left(\dfrac{m-n}{x+y}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{x^2-y^2}{m^2-n^2}\right)^4$

4. a) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^m \cdot \left(\dfrac{xy}{x^2-y^2}\right)^m \cdot \left(\dfrac{x-y}{y}\right)^m$ **b)** $\left(\dfrac{m-n}{a+b}\right)^p \cdot \left(\dfrac{m^2-n^2}{a^2-b^2}\right)^p \cdot \left(\dfrac{m+n}{a-b}\right)^p$

5. a) $3a^3 \cdot 5b^3 \cdot 2c^3$ **b)** $0{,}4x^4 \cdot 0{,}4y^4 \cdot 0{,}4z^4$ **c)** $12(v+w)^5 \cdot \dfrac{7}{6}\,(v-w)^5$

6. a) $\left(\dfrac{12}{5}\right)^2$ **b)** $\left(\dfrac{3}{z}\right)^2$ **c)** $\left(-\dfrac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\left(-\dfrac{y}{4}\right)^4$

7. a) $\left(\dfrac{12}{5}x\right)^2$ **b)** $(3z)^2$ **c)** $(3x)^3$ **d)** $(4y)^4$

8. a) $\left(\dfrac{2x}{3y}\right)^3$ **b)** $\left(\dfrac{-11x}{15y}\right)^2$ **c)** $\left(\dfrac{2{,}25u}{4{,}5v}\right)^2$ **d)** $\left(\dfrac{5{,}5m}{4{,}75n}\right)^2$

9. a) $\left(\dfrac{5a}{6b}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3b}{10a}\right)^3$ **b)** $\left(\dfrac{15a}{13b}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{13b}{5a}\right)^3$ **c)** $\left(-\dfrac{2a}{3b}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{3b}{a}\right)^5$

10. a) $\dfrac{(mn + np - n^2)^x}{(p^2 - np + mp)^x}$ **b)** $\dfrac{(u + uv + uv^2)^y}{(v^3 + v^2 + v)^y}$

40. Potenzieren von Potenzen

Gemäß der Definition der Potenz als ein Produkt gleicher Faktoren ist die 4. Potenz der Potenz 2^3

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$$
$$= 2^{3+3+3+3} = 2^{4 \cdot 3} = 2^{3 \cdot 4}$$
$$(2^3)^4 = 2^{3\;4} = 2^{12}.$$

Ebenso ergibt sich:

$(x^3)^m$ ist das Produkt aus m Faktoren x^3.

x^3 ist wiederum das Produkt aus 3 Faktoren x.

Folglich ist $(x^3)^m$ das Produkt aus $(3 \cdot m)$ Faktoren x:

$$(x^3)^m = x^{3m}.$$

Wir verallgemeinern die eben gewonnene Erkenntnis:

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1}$$

und wegen der Gültigkeit des kommutativen Gesetzes der Multiplikation

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}.} \tag{1'}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Durch Vertauschen beider Seiten der Gleichungen (1) bzw. (1') erhält man

$$\boldsymbol{a^{mn} = a^{nm} = (a^m)^n = (a^n)^m.} \tag{2}$$

Die in (1) und (2) ausgesprochenen Gesetze gelten auch, wenn eine Zahl mit mehreren Exponenten zu potenzieren ist. Mit $6 = 2 \cdot 3$ wird

$$(2^4)^6 = (2^4)^{2 \cdot 3}. \tag{3}$$

Wegen (1) ist $\quad (2^4)^6 = 2^{4 \cdot 6} = 2^{4 \cdot 2 \cdot 3}$ und

wegen (2) ist $\quad (2^4)^6 = (2^4)^{2 \cdot 3} = [(2^4)^2]^3$.

Also ist $$[(2^4)^2]^3 = 2^{4 \cdot 2 \cdot 3}. \tag{4}$$

Beispiele:

1. $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$
2. $(-2^3)^2 = (-2^3)(-2^3) = 2^6 = 64$
3. $(-2^2)^3 = (-2^2)(-2^2)(-2^2) = -2^6 = -64$
4. $(x^{2+n})^3 = x^{3n+6}$
5. $a^{3xy} = [(a^3)^x]^y = [(a^x)^y]^3 = [(a^y)^3]^x = [(a^3)^y]^x = [(a^x)^3]^y = [(a^y)^x]^3$

Aufgaben

1. a) $(x^2)^3$ **b)** $(x^3)^2$ **c)** $(-x^2)^3$ **d)** $(-x^3)^2$

2. a) $(a^{2n})^4$ **b)** $(y^n)^m$ **c)** $(z^n)^n$ **d)** $(-a^2)^2$

3. a) $(a^m)^8$ **b)** $(-x^{2y})^5$ **c)** $(-x^{2y})^4$ **d)** $[(p+q)^{3m}]^2$

4. a) $(c^{x-1})^7$ **b)** $(c^7)^{x-1}$ **c)** $\dfrac{a^{2x} - b^{2y}}{a^x - b^y}$ **d)** $\dfrac{a^{2x} - b^{2y}}{a^x + b^y}$

41. Potenzen eines Binoms

Die 2. Potenzen eines Binoms sind uns bereits bekannt:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Bilden wir die 3. Potenzen von $(a+b)$ bzw. $(a-b)$, so erhalten wir

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ein Vergleich der Ergebnisse läßt Gesetzmäßigkeiten bei den Polynomen vermuten:

1. Mit fallenden Potenzen von a steigen die Potenzen von b.

2. Die Summe der Exponenten jedes Gliedes ist gleich dem Exponenten des Binoms.

3. Ist das Binom eine Differenz, so wechseln die Vorzeichen der Glieder, beginnend mit $+$.

Der französische Philosoph und Mathematiker Blaise Pascal (1623 bis 1662) verdeutlichte die Gesetzmäßigkeit der Koeffizienten durch das nach ihm genannte **Pascalsche Koeffizientendreieck.**

Exponent des Binoms								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Man erkennt leicht das Bildungsgesetz des Koeffizientendreiecks: Die Zahlen einer Zeile sind stets gleich der Summe der benachbarten Zahlen in der vorhergehenden Zeile.

Auf diese Weise und unter Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten 1., 2. und 3. kann man auch hohe (positive ganzzahlige) Potenzen eines Binoms verhältnismäßig leicht berechnen.

1. Beispiel:

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= 1x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + 1y^6 \\ &= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$(m-n)^5 = m^5 - 5m^4n + 10m^3n^2 - 10m^2n^3 + 5mn^4 - m^5$$

3. Beispiel:

$$(y-0{,}2)^4 = y^4 - 4y^3\cdot 0{,}2 + 6y^2\cdot 0{,}2^2 - 4y\cdot 0{,}2^3 + 0{,}2^4$$
$$= y^4 - 0{,}8y^3 + 0{,}24y^2 - 0{,}032y + 0{,}0016$$

Aufgaben

1. a) $(a+3b)^4$ **b)** $(0{,}3-5x)^5$ **2. a)** $(2{,}5m-3n)^4$ **b)** $(5m+0{,}2n)^5$

3. a) $\left(\frac{2}{3}p-\frac{3}{2}q\right)^3$ **b)** $(0{,}1r+0{,}01s)^4$ **c)** $\left(3-\frac{u}{3}\right)^6$

4. a) $(2g+2^2h^2)^5$ **b)** $(0{,}2l-0{,}3m)^4$ **c)** $(3+0{,}3)^3$

5. a) $(r+0{,}2s)^5+(r-0{,}2s)^5$ **b)** $\left(y+\frac{z}{3}\right)^4-\left(y-\frac{z}{3}\right)^4$

VI.2 Potenzen mit dem Exponenten 0 und mit negativen ganzzahligen Exponenten

42. Der Exponent 0; negative Exponenten

Entsprechend der bisher verwandten Definition des Potenzbegriffes verstanden wir unter der Potenz a^n ein Produkt aus n Faktoren a. Dabei bedeutete der Exponent n bisher stets eine positive ganze Zahl.

Stellt man die Funktion $y=f(n)=3^n$ tabellarisch dar, so erhält man für $n=4, 3, 2, 1$:

n	4	3	2	1
y	81	27	9	3

Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt deutlich: Man erhält jeden folgenden Potenzwert aus dem vorhergehenden durch Division durch 3.

Wenn man dieses Bildungsgesetz für y fortsetzt, so erhält man:

n	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}=\frac{1}{3^1}$	$\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{81}=\frac{1}{3^4}$

Es würde also:

$$3^0=1;\quad 3^{-1}=\frac{1}{3};\quad 3^{-2}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2};\quad 3^{-3}=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}\text{ usw.}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man das Gesetz für die Division von Potenzen mit gleichen Basen

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

auch auf die Fälle anwendet, für die $m=n$ bzw. $m<n$ ist.

Danach wäre

$$\frac{3^4}{3^1} = 3^3; \quad \frac{3^4}{3^2} = 3^2; \quad \frac{3^4}{3^3} = 3^1; \quad \frac{3^4}{3^4} = 3^0;$$

$$\frac{3^4}{3^5} = 3^{-1}; \quad \frac{3^4}{3^6} = 3^{-2}; \quad \frac{3^4}{3^7} = 3^{-3}; \quad \frac{3^4}{3^8} = 3^{-4}.$$

Eine Zusammenstellung beider Ergebnisreihen ergibt folgendes Bild:

$$\frac{3^4}{3^1} = 3^3 = 27$$

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^2 = 9 \qquad \text{mit allgemeinen Zahlsymbolen:}$$

$$\frac{3^4}{3^3} = 3^1 = 3$$

$$\frac{3^4}{3^4} = 3^0 = 1 \qquad a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$\frac{3^4}{3^5} = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \qquad a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a} \qquad (a \neq 0)$$

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad (a \neq 0)$$

$$\frac{3^4}{3^7} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \qquad (a \neq 0)$$

Man definiert:

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad (a \neq 0),}$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0).}$$

Damit erfährt der bisher benutzte Potenzbegriff, der nur für Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten erklärt war, eine Erweiterung. Auch die Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten erhalten eine ganz bestimmte Bedeutung. Sie ist so festgesetzt, daß die für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten geltenden Gesetze auch für das Rechnen mit Potenzen gelten, deren Exponenten Null oder negative ganze Zahlen sind (Permanenzprinzip[1]). Selbstverständlich muß eine solche Festsetzung in der Weise erfolgen, daß sie jeder Überprüfung durch die Praxis standhält, daß sie also sinnvoll ist.

Beispiele:

1. $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ 2. $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$ 3. $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

4. $4^0 = 1$ 5. $(x + y)^0 = 1$ (x und y nicht zugleich 0)

6. $(-b)^{-2} = \frac{1}{(-b)^2} = \frac{1}{b^2}$ $(b \neq 0)$ 7. $(-c)^{-7} = \frac{1}{(-c)^7} = \frac{1}{-c^7} = -\frac{1}{c^7}$ $(c \neq 0)$

[1] permanere (lat.), erhalten bleiben.

Aufgaben

1. Wie lauten die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen, deren Exponenten negativ ganzzahlig sind?

Anleitung und Beispiel:
Die Beweise ergeben sich, indem man auf die Definition zurückgeht.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^n}} = a^{-n} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$

2. Wie lauten die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen, deren Exponenten gleich Null sind?

3. a) 2^{-3} **b)** 3^{-2} **c)** -5^{-4} **d)** $(-4)^{-3}$ **e)** $(-3)^{-5}$

4. a) a^{-6} **b)** b^{-9} **c)** $(-c)^{-3}$ **d)** $-d^{-10}$ **e)** c^{-8}

5. a) 3^0 **b)** 5^0 **c)** $(x+y)^0$ **d)** z^0 **e)** 0^0

6. a) $3 \cdot 4^0$ **b)** $x^0 \cdot 6$ **c)** $\frac{5x^0}{10y^0}$ **d)** $\frac{10x^0}{y^0 z^0}$ **e)** $\frac{12u^0}{7w^0}$

7. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ **c)** $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2}$ **d)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$ **e)** $-\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

Beseitigen Sie in den Aufgaben 8 und 9 die Brüche!

8. a) $\frac{1}{2^{-3}}$ **b)** $\frac{1}{a^{-6}}$ **c)** $\frac{3}{x^{-m}}$ **d)** $\frac{-5}{v^{-x}}$ **e)** $\frac{4x}{x^{-y}}$

9. a) $\frac{27}{3^{-3}}$ **b)** $\frac{24}{2^{-3}}$ **c)** $\frac{3^5}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-5}}$ **d)** $\frac{a^2}{a^{-3}}$ **e)** $\frac{5x^3}{10x^{-7}}$

10. a) $(m^{-3})^2$ **b)** $(a^{-2})^3$ **c)** $(-a^3)^2$ **d)** $(-a^2)^3$ **e)** $(-a)^{-2}$
f) $(-a^3)^5$ **g)** $(-a)^{-3}$ **h)** $(-a^{-2})^{-3}$ **i)** $(-a^{-2})^3$ **k)** $(a^{-3})^{-2}$

11. a) $3^{-2} \cdot 3^{-3}$ **b)** $2^{-2} \cdot 2^{-4} \cdot 2^3$ **c)** $x^{-u} \cdot x^v \cdot x^{-w}$
d) $(-3)^{-2} \cdot (-4)^{-3}$ **e)** $x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot x^4 \cdot y^{-4}$

12. a) $\frac{(a+b)^{-3}}{(a+b)^2}$ **b)** $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^{-3}}$ **c)** $\frac{(a-b)^2\,(a-b)^{-4}}{(a-b)^{-5}}$

13. a) $\frac{x^{m-1}}{x^{2m-5}}$ **b)** $\frac{a^{n-2}}{a^{3n-1}}$ **c)** $\frac{7a^{-5}}{3a^{-3}}$ **d)** $\frac{2^{-4}x^{-a}}{-2^{-4}x^{-3a}}$ **e)** $\frac{-12b^{-7}c}{16b^{-4}c^{-3}}$

14. a) $(4a^{-3} + 6a^{-2} - 3a^5)\,a^4$ **b)** $(3m^{-5} - 4m^{-3} + 7m^2)\,m^{-5}$
c) $(x^3 - 0{,}5x^4 + 1{,}5x^{-5})\,(x^2+1)$ **d)** $\left(\frac{x^{-2}}{2} - \frac{5}{3}x^{-3} + \frac{7}{10}x^{-4}\right)(2x^3+2)$
e) $(m^3 - 2{,}5x^{-2} - 5x^{-1})\,(0{,}5x - x^{-4} - 2)$

15. a) $(a^2 + b^{-2})^{-2}$ **b)** $(x^3 - y^{-3})^{-2}$ **c)** $(m^{-1} - n^{-1})^{-2}$

16. Schreiben Sie als Produkte!

a) $x^{-4} + x^{-3}$ **b)** $x^{-2} + x^{-1}$ **c)** $x^{-m} + x^{1-m}$

17. Schreiben Sie als Produkte!

a) $\frac{x^4 y^2}{x^3 y^5}$ **b)** $\frac{a^4 b^5}{a^5 b^2}$ **c)** $\frac{a^{n-1}}{a^{m+n}}$ **d)** $\frac{x^{1-2m}}{x^{m-3m}}$

18. Schreiben Sie nur mit positiven Exponenten!

a) $4x^{-3}$ **b)** $5x^{-6}$ **c)** x^{-12} **d)** y^{-3} **e)** $6m^{-3}$

f) $a^{-2}b^{-6}$ **g)** $m^{x+1} \cdot c^{-n}$ **h)** $a^{-p} \cdot q^{-r}$ **i)** $x^2 y^{-4m}$ **k)** $a^{-2p} \cdot m$

19. Schreiben Sie als Summe von Vielfachen von Potenzen von 10!

a) 0,005 **b)** 2,017 **c)** 437,2943 **d)** 100 423,0673

20. Schreiben Sie in Potenzschreibweise!

a) 0,1 **b)** 0,01 **c)** $\frac{1}{1000}$ **d)** $\frac{2}{100\,000}$ **e)** $\frac{7}{1\,000\,000}$

f) $\frac{72}{100\,000}$ **g)** $\frac{3}{100\,000\,000\,000\,000}$ **h)** $\frac{51}{10\,000\,000}$ **i)** $\frac{4}{1\,000\,000\,000}$ **k)** $\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$

21. In der Physik werden folgende Längeneinheiten benutzt:

$\frac{1}{1000}$ mm = 1 Mikrometer (1 μm[1]),

$\frac{1}{1\,000\,000}$ mm = 1 Nanometer (1 nm).

a) Schreiben Sie die Maßeinheiten in Potenzschreibweise!

b) Drücken Sie 1 μm und 1 nm in cm aus!

22. a) Die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes liegen zwischen 0,0008 mm und 0,0004 mm. Schreiben Sie die Maßangaben in Potenzschreibweise!

b) Die Masse eines H-Atoms beträgt etwa

$$m_H = \frac{1{,}67}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \text{ g};$$

die Masse eines Elektrons

$$m_{El} = \frac{9{,}1}{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \text{ g}.$$

Schreiben Sie die Massen in Potenzschreibweise! Vergleichen Sie beide Massen miteinander!

43. Die Funktion $y = x^0$

Wegen $x^0 = 1$ hat die Funktion $y = x^0$ für jedes $x \neq 0$ den Wert 1.

Für $x = 0$ ist $y = 0^0$; ein Ausdruck, der sinnlos ist. Die Funktion $y = x^0$ ist für $x = 0$ nicht erklärt; an dieser Stelle existiert sie nicht. Man sagt dafür auch: sie hat an dieser Stelle eine Lücke (vgl. Abb. 39).

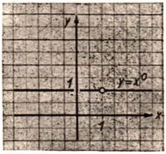


Abb. 39

[1] μ ist Buchstabe des kleinen griechischen Alphabets (gesprochen „mü“).

44. Die Funktion $y = x^{-n}$

In eine Stahlflasche mit dem Inhalt $V_2 = 10$ l wird Sauerstoff unter einem Druck von $p_2 = 150$ at hineingepreßt. Welchen Raum V_1 würde das Gas bei einem Druck von p_1 füllen?

Durch das Gesetz von Boyle-Mariotte wird die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases angegeben:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const.}$$

Gesucht ist

$$V_1 = f(p_1) = \frac{p_2 V_2}{p_1} = \frac{\text{const.}}{p_1}$$

Die Funktion $V_1 = f(p_1) = \frac{\text{const.}}{p_1}$ stellt eine Zuordnung zwischen Druck und Volumen eines Gases dar: Jedem Wert der Variablen p_1 wird ein bestimmter Wert der Variablen V_1 zugeordnet und umgekehrt. Man sieht leicht, daß zwischen Druck und Volumen eine indirekte Proportionalität besteht.

Für $p_2 = 150$ at und $V_2 = 10$ l lautet die Funktion

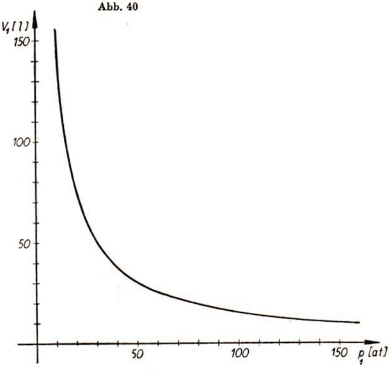
$$V_1 = f(p_1) = \frac{1500}{p_1} = 1500\, p_1^{-1} \qquad (p_1 > 0)$$

Ihre Wertetafel ergibt:

p_1	10	20	30	40	50	60	...	100	...	125	...
V_1	150	75	50	37,5	30	25	...	15	...	12	...

Das Bild der Funktion ist ein Teil einer Kurve, die als **Hyperbel** bezeichnet wird (Abb. 40).

Abb. 40



Alle Funktionen $y = a x^{-n} = \frac{a}{x^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ haben Hyperbeln als Bilder.

Die Bilder der Funktionen $y = x^{-(2n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, also $y = x^{-1}$; $y = x^{-3}$; $y = x^{-5}$; ..., sind Hyperbeln, die je aus zwei kongruenten Ästen bestehen, die im I. und III. Quadranten verlaufen. Sie liegen symmetrisch zum Koordinatenanfangspunkt (0; 0) und gehen sämtlich durch die Punkte (1; 1) und (−1; −1). Wegen ihrer ungeraden Exponenten werden sie als ungerade Potenzfunktionen bezeichnet.

In Abbildung 41 sind die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^{-1}$ und $y = x^{-3}$ dargestellt.

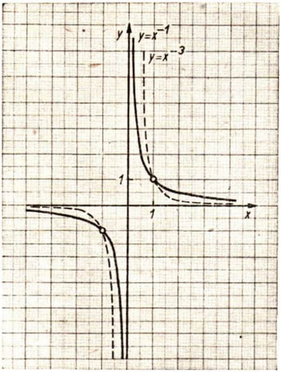


Abb. 41

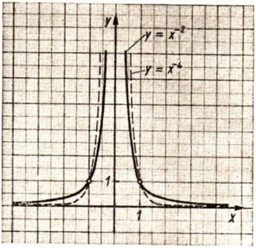
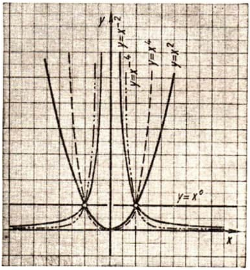


Abb. 42

Abb. 43



Die Bilder der Funktionen $y = x^{-2n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), also $y = x^{-2}$; $y = x^{-4}$; $y = x^{-6} \ldots$; sind Hyperbeln, die je aus zwei kongruenten Ästen bestehen, die im I. und II. Quadranten verlaufen. Sie liegen symmetrisch zur Ordinatenachse und gehen sämtlich durch die Punkte (1; 1) und (−1; +1). Die Funktionen sind gerade Potenzfunktionen. Das Bild der Funktion $y = x^0$ ordnet sich der Schar der Funktionen $y = x^{-2n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) für $n = 0$ ein.

In Abbildung 42 sind die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^{-2}$ und $y = x^{-4}$ dargestellt.

Alle Potenzfunktionen $y = x^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sind an der Stelle $x = 0$ nicht erklärt.

Die Abbildung 43 zeigt die Bilder der geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$ ($n = -2; -1; \pm 0; 1; 2$).

Die Abbildung 44 zeigt die Bilder der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$ ($n = -2; -1; 0; 1$).

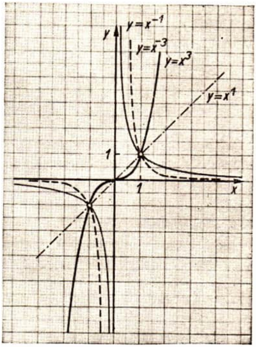


Abb. 44

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Kurve von $y = x^{-1}$ und beschreiben Sie Verlauf und Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Anleitung (Abb. 41): Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ und für $x = \pm \frac{5}{10}, \pm \frac{4}{10}, \pm \frac{3}{10}, \pm \frac{2}{10}, \pm \frac{1}{10}$ aufstellen!

a) Aus wieviel kongruenten Ästen besteht die Hyperbel? In welchen Quadranten liegen die Äste der Hyperbel?

b) Wie ändern sich die Ordinaten, wenn man auf der x-Achse von $x = -5$ bis $-0{,}1$ und von $x = +0{,}1$ bis $+5$ fortschreitet?

Schreitet man auf der x-Achse von $x = +5$ weiter nach $x = +6, +7, \ldots$, so nähert sich der positive Ast der Hyperbel beständig der x-Achse, ohne jedoch mit dieser zusammenzufallen. Das gleiche gilt für den Hyperbelast für Werte $x = -5, -6, -7, \ldots$ Die Kurve nähert sich asymptotisch der x-Achse, oder die Hyperbel hat die x-Achse zur **Asymptote**[1].

c) Für $x = 0$ ist die Funktion nicht erklärt, an dieser Stelle existiert die Kurve nicht. Wie ist der Verlauf der Kurve bei Annäherung an die Stelle $x = 0$? Dazu stellen wir eine Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1; \pm 0{,}1; \pm 0{,}01; \pm 0{,}001; \ldots$ auf.

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	0	$+0{,}0001$	$+0{,}001$	$+0{,}01$	$+0{,}1$	$+1$
y	-1	-10	-100	-1000	-10000		$+10000$	$+1000$	$+100$	$+10$	$+1$

Die Wertetafel zeigt, daß y über alle Grenzen wächst, wenn x sich dem Wert 0 nähert. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat für $x = 0$ eine Ausnahmestelle, die Funktion $y = \frac{1}{x}$ existiert an der Stelle $x = 0$ nicht.

d) Nähert man sich von der negativen Seite der x-Achse her dem Nullpunkt, z. B. von $x = -1; -0{,}1; -0{,}01; \ldots$, so sind die Ordinaten negativ; nähert man sich von der positiven Seite der x-Achse her dem Nullpunkt, z. B. von $x = +1; +0{,}1; +0{,}01; \ldots$, so sind die Ordinaten positiv. Schreitet man von $x = -5$ aus allmählich zu $x = -4, -3, -2, -1$ fort, so ändern sich die Ordinaten auch allmählich. Das gleiche geschieht, wenn man von $x = +5$ allmählich zu Werten $x = +4, +3, +2, +1$ zurückschreitet. Von einem zum anderen Kurvenpunkt dieser Bereiche ist ein ständiger Zusammenhang der Kurve vorhanden. An der Stelle $x = 0$ reißt dieser Zusammenhang ab, an der Stelle $x = 0$ existiert die Kurve nicht.

e) Symmetrieeigenschaften:
Zentrische Symmetrie: Welcher Punkt ist das Symmetriezentrum?
Achsensymmetrie: Zu welcher Geraden liegen beide Äste der Kurve symmetrisch? Zu welcher Geraden liegt jeder Kurvenast symmetrisch?

Die Kurve von $y = x^{-1}$ oder $y = \frac{1}{x}$ heißt gleichseitige Hyperbel.

2. Durch welche Gleichungen zwischen x und y können die Funktionen $y = x^{-1}$; $y = x^{-2}$; $y = x^{-3}$; ... in unentwickelter Form gegeben sein?

3. Zeichnen Sie die Kurve von $y = x^{-2}$ und beschreiben Sie ihren Verlauf und ihre Symmetrieeigenschaften!

Anleitung (Abb. 42): Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ und für $x = \pm \frac{8}{10}, \pm \frac{7}{10}, \pm \frac{6}{10}, \pm \frac{5}{10}, \pm \frac{4}{10}, \pm \frac{3}{10}, \pm \frac{2}{10}, \pm \frac{1}{10}$ aufstellen!

Kurvenverlauf: Aus wieviel kongruenten Ästen besteht die Kurve? In welchen Quadranten liegen diese? Wie ändert sich die Kurve mit wachsendem x? An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht erklärt; an der Stelle $x = 0$ existiert die Kurve nicht.
Symmetrieeigenschaften: Achsensymmetrie, Umklappen der Kurve um die y-Achse.

4. Bei gleicher Spannung U ist im Gleichstromkreis die Stromstärke I dem Widerstand R in der Leitung umgekehrt proportional. Welche funktionale Beziehung besteht zwischen U, I und R?

---

[1] asymptotos (gr.), nicht zusammenfallend.

5. Bei derselben Lichtquelle ist die Beleuchtungsstärke i einer Fläche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r der Lichtquelle von der Fläche.
Welche funktionale Beziehung besteht zwischen i und r?

6. Drücken Sie die Umdrehungszahl n eines Zahnrades als Funktion der Zähnezahl z aus!

7. Die Kraft P, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird, ist direkt proportional der Masse m und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r des Körpers vom Erdmittelpunkt. Welche funktionale Beziehung besteht zwischen P, m und r?

VI.3 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Zur Wiederholung

1. Nennen Sie die Grundrechenoperationen der ersten Stufe!
In welcher Beziehung stehen sie zueinander?

2. Nennen Sie die Grundrechenoperationen der zweiten Stufe!
In welcher Beziehung stehen sie zueinander?

3. Welche Grundrechenoperationen der dritten Stufe kennen Sie?

4. Wie werden in der Gleichung $a^n = b$ die Größen a, n, b bezeichnet?

45. Der Begriff der Wurzel; das Radizieren als 1. Umkehrung des Potenzierens

1) Beispiel: Ein quadratisches Feldstück besitzt einen Flächeninhalt $F = 22\,500\ \mathrm{m}^2$. Wie lang ist die Seite a?

Als Ansatz erhält man die Bestimmungsgleichung

$$a^2 = 22\,500. \tag{1}$$

Die Lösungen der Gleichung (1) sind

$$a_1 = 150; \quad a_2 = -150. \tag{2}$$

Beide Lösungen genügen zwar dem Ansatz; den Bedingungen der Aufgabe genügt aber nur die positive Lösung a_1.

Die Seite des quadratischen Feldstückes beträgt $a = 150$ m.

Wir knüpfen an dieses Beispiel noch einige Überlegungen an:

Beim Potenzieren wird zu einer gegebenen Basis a und einem gegebenen Exponenten n der Wert der Potenz $b = a^n$ gesucht. Beispielsweise wäre also zu gegebener Quadratseite $a = 150$ und gegebenem Exponenten $n = 2$ der Wert der Potenz $b \mathrel{\widehat{=}} F = 22\,500$ zu bestimmen.

In diesem Beispiel liegen andere Verhältnisse vor. Gegeben sind jetzt der Wert der Potenz $b \mathrel{\widehat{=}} F = 22\,500$ und der Exponent $n = 2$. Gesucht ist die Basis $a = 150$. Das heißt, wir müssen eine Zahl a suchen, deren 2. Potenz gleich 22 500 ist. Wir kommen damit zu einer — der ersten — Umkehrung des Potenzierens. Sie wird **Radizieren**[1] oder **Wurzelziehen** genannt.[2]

---

[1] radix (lat.), die Wurzel.

[2] Wegen der Nichtvertauschbarkeit von Basis und Exponent existiert noch eine zweite Umkehrung des Potenzierens. Bei ihr wird zu gegebenem Wert der Potenz und gegebener Basis der Exponent gesucht. Diese 2. Umkehrung des Potenzierens wird später behandelt.

Aus $150^2 = 22500$ folgt (3)

$$150 = \sqrt{22500}; \quad \text{denn} \quad \left(\sqrt{22500}\right)^2 = 22500. \tag{4}$$

Oder mit allgemeinen Zahlsymbolen:

Aus
$$a^2 = b \tag{3'}$$
folgt
$$a = \sqrt{b}; \tag{4'}$$
denn
$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Ebenso folgt aus
$$6^3 = 216 \tag{5}$$
$$6 = \sqrt[3]{216} \tag{6}$$

(gelesen: 3. Wurzel oder Kubikwurzel aus 216);

denn
$$\left(\sqrt[3]{216}\right)^3 = 216$$

Oder mit allgemeinen Zahlsymbolen:

Aus
$$a^3 = b \tag{5'}$$
folgt
$$a = \sqrt[3]{b}; \tag{6'}$$
denn
$$\left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = b.$$

Allgemein:

Aus $a^n = b$ (7) folgt $a = \sqrt[n]{b}.$ (8)

(gelesen: n-te Wurzel aus b);

denn
$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

In Gleichung (8) wird a als **Wurzelwert**, b als **Radikand** und n als **Wurzelexponent**[1] bezeichnet.

Die n-te Wurzel aus einer Zahl a heißt jede Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist. Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten heben einander auf.

Beispiel:

$$\left(\sqrt{49}\right)^2 = \left(\sqrt[2]{49}\right)^2 = 49$$

[1] Er wird für $n = 2$ im allgemeinen weggelassen.

Aufgaben

1. $(\sqrt{23})^2$; $\left(\sqrt[3]{129}\right)^3$; $(\sqrt{7{,}1})^2$; $\left(\sqrt[4]{0{,}043}\right)^4$; $\left(\sqrt[3]{453}\right)^3$
2. $(\sqrt{xy})^2$; $\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^3$; $\left(\sqrt[t]{a+b}\right)^t$; $(\sqrt{x^2-y^2})^2$; $\left(\sqrt[5]{3u^2-5v^2}\right)^5$
3. $\left(\sqrt[4]{a^4}\right)$; $\sqrt[5]{3^5}$; $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$; $\sqrt{\left(\frac{3x}{5y}\right)^2}$; $\left(\sqrt{\frac{2c}{x}}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{x(1-y)}\right)^3$

2) Wurzel aus der Zahl 0

Es ist

$$\sqrt{0} = 0;\ \text{denn}\ 0^2 = 0$$

$$\sqrt[3]{0} = 0;\ \text{denn}\ 0^3 = 0.$$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{0} = 0,\ \text{denn}\ 0^n = 0.$$

Die n-te Wurzel aus Null ist gleich Null $(n \neq 0)$.

3) Das Vorzeichen der Wurzel

Der Wurzelexponent ist eine gerade Zahl (gerade Wurzel).

$5^2 = 25$ $\qquad$ $3^4 = 81$

$(-5)^2 = 25$ $\qquad$ $(-3)^4 = 81$

Aus $5^2 = 25$ folgt $\sqrt{25} = 5$; $\qquad$ Aus $3^4 = 81$ folgt $\sqrt[4]{81} = 3$;

aus $(-5)^2 = 25$ folgt $\sqrt{25} = -5$. $\qquad$ aus $(-3)^4 = 81$ folgt $\sqrt[4]{81} = -3$.

Wir erkennen:

Wurzeln mit geradzahligen Wurzelexponenten und positiven Radikanden sind doppeldeutig. Die beiden Wurzelwerte unterscheiden sich durch das Vorzeichen.

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm b, \quad \text{wenn } b^{2n} = a \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Aus negativen Zahlen lassen sich bekanntlich keine geradzahligen Wurzeln ziehen, sofern man nur die uns bisher bekannten Zahlen benutzt.

Der Wurzelexponent ist eine ungerade Zahl (ungerade Wurzel).

$5^3 = 125$ $\qquad$ $2^5 = 32$

$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$ $\qquad$ $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

Aus $5^3 = 125$ folgt $\sqrt[3]{125} = 5$; $\qquad$ Aus $2^5 = 32$ folgt $\sqrt[5]{32} = 2$;

aus $(-5^3) = -125$ folgt $\sqrt[3]{-125} = -5$. $\qquad$ aus $(-2)^5 = -32$ folgt $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Wir erkennen:

Wurzeln mit ungeradzahligen Wurzelexponenten sind eindeutig. Ihr Wert ist positiv, wenn der Radikand positiv ist, und negativ, wenn der Radikand negativ ist.

$$\sqrt[2n+1]{+a} = b$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -b, \qquad \text{wenn } b^{2n+1} = a \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

4) Hauptwert einer geraden Wurzel

Um den geraden Wurzeln die Doppeldeutigkeit zu nehmen, bezeichnet man mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$; n geradzahlig) nur die positive Zahl, die in die n-te Potenz erhoben den Wert a ergibt. Man nennt diesen Wert den **Hauptwert** der Wurzel.

Beispiel:

Der Hauptwert von $\sqrt[4]{16}$ ist gleich 2.

Bei ungeraden Wurzeln gibt es im Bereich der reellen Zahlen keine Doppeldeutigkeit der Lösung, also keinen Hauptwert.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Hauptwerte der Wurzeln!

$\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{361}$; $\sqrt{256}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{289}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{324}$;

$\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{2{,}56}$; $\sqrt{0{,}0169}$; $\sqrt{0{,}0121}$; $\sqrt{0{,}4225}$; $\sqrt[4]{2560000}$; $\sqrt[4]{0{,}0081}$; $\sqrt[6]{64}$;

$\sqrt[3]{0{,}000064}$

2. $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{+64}$; $\sqrt[3]{-216}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[5]{+243}$; $\sqrt[5]{-243}$;

$\sqrt[5]{-100000}$; $\sqrt[3]{-0{,}125}$; $\sqrt[7]{+128}$; $\sqrt[7]{-0{,}0000128}$

3. Beispiel: $\sqrt{+m^2} = \pm m$; $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

Schreiben Sie in ähnlicher Weise (m, x sind positive Zahlen):

$\sqrt[3]{-m^3}$; $\sqrt[3]{(-m)^3}$; $\sqrt[3]{-mx}$; $\sqrt[7]{-x^5}$; $\sqrt[5]{-m^2x^3}$; $\sqrt[2n]{+x}$; $\sqrt[2n-1]{-m}$; $\sqrt[2n+1]{-m^2}$;

$\sqrt{+m^2x^2}$!

4. In welchen Fällen kann kein Wurzelwert angegeben werden?

$\sqrt{+4}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{+1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{-2}$; $\sqrt[3]{-2}$; $\sqrt[4]{-2}$; $\sqrt{-64}$; $\sqrt[3]{-64}$;

$\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{-0{,}9}$; $\sqrt[3]{-0{,}9}$

46. Über den Zahlencharakter der Wurzelwerte

Nennen Sie Beispiele für ganze Zahlen!

Nennen Sie Beispiele für gebrochene Zahlen!

Wie bezeichnet man die Menge aller ganzen und gebrochenen Zahlen?

Ganze und gebrochene Zahlen lassen sich als Quotient $\frac{p}{q}$ zweier teilerfremder ganzer Zahlen mit $q \neq 0$ darstellen.

Beispiele:

$$5 = \frac{5}{1};\ 0{,}3 = \frac{3}{10};\ -0{,}25 = -\frac{1}{4};\ 0{,}3\overline{3} = \frac{1}{3}.$$

Die Mengen der ganzen und der gebrochenen Zahlen bilden die Menge der rationalen Zahlen.

Die meisten Wurzeln lassen sich aber nicht in der Form eines Quotienten $\frac{p}{q}$ zweier teilerfremder ganzer Zahlen darstellen. Sie gehören also nicht zu den rationalen Zahlen.

Beispiel:

Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, d.h., läßt sie sich durch einen Quotienten $\frac{p}{q}$ zweier teilerfremder ganzer Zahlen darstellen?

Lösung:

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei eine gebrochene Zahl in der Form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$; $q \neq 1$; p und q ganzzahlig und teilerfremd).

Dann ist $$\frac{p}{q} = \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Durch Quadrieren erhält man $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad (2)$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \qquad (2')$$

Aus (2') würde folgen, daß p^2 durch q^2 teilbar wäre. Damit wäre auch p durch q teilbar. Wegen $q \neq 1$ müßte sich q gegen p kürzen lassen.
Die getroffene Annahme „p und q sind teilerfremd" wird zu einem Widerspruch geführt.

$\sqrt{2}$ kann also nicht gleich einem gemeinen Bruch $\frac{p}{q}$ sein.

$\sqrt{2}$ ergibt keine rationale Zahl, $\sqrt{2}$ ergibt damit keine endliche oder periodische Dezimalzahl. $\sqrt{2}$ ergibt eine unperiodische unendliche Dezimalzahl. $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Quadratwurzel, ihr Wurzelwert ist eine Irrationalzahl.

Zum Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ haben wir den sogenannten Widerspruchsbeweis verwendet, der in der Mathematik sehr häufig benutzt wird.

Berechnung des Wertes von $\sqrt{2}$ durch Einschachteln

Der Wert einer irrationalen Quadratwurzel läßt sich durch planvolles Einschachteln zwischen rationale Zahlen mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen.

Als Beispiel werde $y = \sqrt{2}$ bestimmt.

Der Radikand 2 liegt zwischen den Quadratzahlen	Also liegt der Wert von $\sqrt{2}$ zwischen den rationalen Zahlen
1^2 und 2^2 oder 1 und 4; es ist $1 < 2 < 4$.	1 und 2; $1 < \sqrt{2} < 2$.
$1{,}4^2$ und $1{,}5^2$ oder 1,96 und 2,25; es ist $1{,}96 < 2 < 2{,}25$.	1,4 und 1,5; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
$1{,}41^2$ und $1{,}42^2$ oder 1,9881 und 2,0164; es ist $1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$.	1,41 und 1,42; $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
$1{,}414^2$ und $1{,}415^2$ oder 1,999 396 und 2,002 225; es ist $1{,}999\,396 < 2 < 2{,}002\,225$.	1,414 und 1,415; $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Dieses Verfahren kann man beliebig weit fortsetzen; jede neue Stelle des Wurzelwertes läßt sich aus den vorangegangenen Quadratzahlen durch Interpolieren abschätzen.

Ergebnis: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Quadratwurzel. Ihr Wurzelwert ist eine Irrationalzahl und läßt sich mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ Für das praktische Rechnen stellt man ihren Wurzelwert je nach der geforderten Genauigkeit durch ihre rationalen Näherungswerte dar; auf 3 Stellen genau ist $\sqrt{2} = 1{,}41$, auf 4 Stellen $\sqrt{2} = 1{,}414$.

In gleicher Weise kann man zeigen:

Die Quadratwurzel aus jeder ganzen positiven Zahl, die keine Quadratzahl ist, ist irrational.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für Kubikwurzeln anstellen:

Die Kubikwurzel aus jeder ganzen positiven oder negativen Zahl, die keine Kubikzahl ist, ist irrational. Der Wert einer irrationalen Kubikwurzel läßt sich durch Einschachteln zwischen rationale Zahlen mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen. Für das Rechnen mit Kubikwurzeln gilt sinngemäß das gleiche wie für das Rechnen mit Quadratwurzeln.

Man kann dann die Ergebnisse für Quadratwurzeln auf sämtliche geraden Wurzeln, die Ergebnisse für Kubikwurzeln auf sämtliche ungeraden Wurzeln übertragen.

Die reellen Zahlen

Auf der Zahlengeraden liegen alle positiven und negativen ganzen Zahlen, gemeinen Brüche, endlichen und periodisch-unendlichen Dezimalzahlen und die Zahl Null, das heißt alle rationalen Zahlen; außerdem alle positiven und negativen unperiodisch-unendlichen Dezimalzahlen, das heißt alle irrationalen Zahlen. Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen.

Mit Hilfe der Zahlengeraden wird die Menge der reellen Zahlen veranschaulicht. Die Zahlengerade heißt daher auch die reelle Zahlengerade.

47. Die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten

Der Begriff der Potenz war ursprünglich nur erklärt für positive ganze Zahlen als Exponenten. Nach der ersten Erweiterung des Potenzbegriffes können alle positiven und negativen ganzen Zahlen und die Zahl 0 als Exponenten auftreten.

Es erhebt sich die Frage, ob auch unter Potenzen mit gebrochenen Exponenten Zahlen verstanden werden können, für die sämtliche Rechengesetze gültig bleiben.

Zu diesem Zwecke definiert man:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (n \text{ eine positive ganze Zahl})$$

Beispiele:

1. $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ 2. $\sqrt[5]{9} = 9^{\frac{1}{5}}$ 3. $\sqrt{16^3} = 16^{\frac{3}{2}}$ 4. $\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}}$

5. $\sqrt[n]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{n}}$ 6. $\sqrt[6]{x^7} = x^{\frac{7}{6}}$ 7. $\sqrt[3]{5^{-4}} = 5^{-\frac{4}{3}}$ 8. $\sqrt[x]{z^{-4}} = z^{-\frac{4}{x}}$

9. $\sqrt[m]{(a+b)^{-n}} = (a+b)^{-\frac{n}{m}}$ 10. $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ 11. $4^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{4}$ 12. $17^{\frac{3}{2}} = \sqrt{17^3}$

Die Einführung gebrochener Potenzexponenten stellt die zweite Erweiterung des Potenzbegriffes dar. Die Definition der Wurzeln als sogenannte Bruchpotenzen entspricht den Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen. So gilt die Formel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (vgl. S. 85) auch für gebrochene Exponenten. Z. B. ist

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3,$$

weil $\quad 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3 \quad$ ist.

Das Prinzip der Permanenz der Rechengesetze bleibt bei Bruchpotenzen gewahrt.

Aufgaben

1. Schreiben Sie als Bruchpotenzen!

$\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[7]{z}$; $\sqrt[a]{n}$; $\sqrt[n]{a+b}$; $\sqrt{x^2+y^2}$; $\sqrt{x-y^t}$

2. Schreiben Sie als Wurzeln!

$3^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $9^{\frac{1}{4}}$; $0{,}8^{\frac{1}{5}}$; $x^{\frac{1}{3}}$; $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}$; $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$; $4^{0,5}$; $49^{0,5}$; $16^{-0,5}$; $81^{0,25}$; $(-x)^{\frac{1}{2}}$; $(x+y)^{\frac{1}{2}}$; $(m-n)^{\frac{1}{3}}$;

$(xy)^{\frac{1}{3}}$; $(a^5-1)^{\frac{1}{2}}$; $b^{\frac{1}{n}}$; $(a-b^z)^{\frac{y}{z}}$; $\left(\frac{x^{\frac{4}{5}}}{y}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{m}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{4}}$

3. Berechnen Sie!

$\sqrt[4]{a^4}$; $\sqrt{(x-y)^2}$; $\sqrt[6]{z^6}$; $\sqrt[n]{(1+n)^n}$; $(a^3)^{\frac{1}{3}}$; $(m^2+2mn+n^2)^{\frac{1}{2}}$

4. Schreiben Sie als Bruchpotenzen!

$\sqrt[6]{2^5}$; $\sqrt[3]{4^8}$; $\sqrt[5]{(-3)^2}$; $\sqrt[4]{a^7}$; $\sqrt[3]{(-9)^5}$; $\sqrt[5]{g^q}$; $\sqrt[4]{(x+y)^3}$; $\sqrt[x+y]{z^c}$; $\sqrt[a-b]{m^{a+b}}$

48. Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$

In Kapitel 18 haben wir eine funktionale Beziehung zwischen dem Gewicht eines Rundstahles und seinem Durchmesser derart aufgestellt, daß wir das Gewicht G als Funktion des Durchmessers d betrachtet haben:

$$G = f(d) = 0{,}00613\,d^2 \tag{1}$$

Es ist aber ebenso gut möglich, den Durchmesser als Funktion des Gewichtes aufzufassen:

$$d = h(G). \tag{2}$$

Dazu müssen wir die Gleichung (1) nach d auflösen:

$$0{,}00613\,d^2 = G$$

$$d^2 = \frac{G}{0{,}00613}$$

$$d = \sqrt{\frac{G}{0{,}00613}} \tag{3}$$

Eine Wertetafel der Funktion (3) ergibt:

G	0	0,613	2,450	5,520	9,810	15,330
d	0	10	20	30	40	50

Das ist dieselbe Wertetafel, die sich auch für die Funktion $G = 0{,}00613\,d^2$ ergibt. Beide sind also gleich, folglich sind auch ihre Diagramme dieselben (vgl. Abb. 45).

Stammfunktion und Umkehrfunktion

Wenn man einen Punkt $P_1\,(x_1; y_1)$ an der Geraden $y = x$, der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, spiegelt, so entsteht ein neuer Punkt $P_2\,(x_2\,;\,y_2)$. Seine Koordinaten hängen mit denen des ersten Punktes durch die Beziehung $x_2 = y_1$; $y_2 = x_1$ zusammen. Es vertauschen sich also die Zahlenwerte der beiden Koordinaten (Abb. 46).

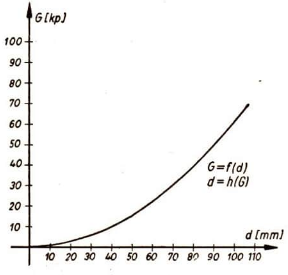


Abb. 45

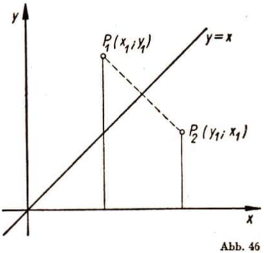


Abb. 46

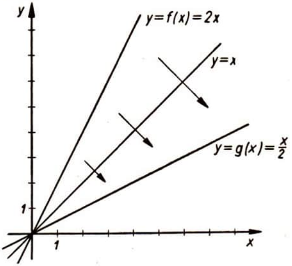


Abb. 47

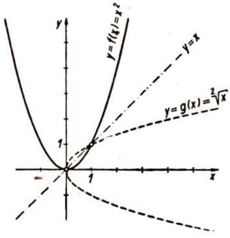


Abb. 48

Dasselbe geschieht mit allen Punkten einer Kurve, wenn man sie an der Geraden $y = x$ spiegelt. So wird beispielsweise aus der Geraden mit dem analytischen Ausdruck $y = f(x) = 2x$ eine andere Gerade, der auf Grund dieser Überlegung der analytische Ausdruck $2y = x$ oder $y = g(x) = \frac{x}{2}$ zugehören muß (Abb. 47). Man nennt $y = g(x) = \frac{x}{2}$ die **Umkehrfunktion** zu $y = f(x) = 2x$ und diese die zugehörige **Stammfunktion.**

In gleicher Weise erhält man aus der Stammfunktion

$$y = f(x) = x^2$$

die Umkehrfunktion $y = g(x) = \pm\sqrt{x} = \pm\, x^{\frac{1}{2}}$ (vgl. Abb. 48).

Eine Wertetafel der Funktion $y = g(x) = \pm\sqrt{x}$ ergibt:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}75$	1	2	3	4	5
y	nicht vorhanden					0	$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}71$	$\pm 0{,}87$	± 1	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}73$	± 2	$\pm 2{,}24$

Zu negativen x-Werten gibt es keine reellen y-Werte. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ ist nur für positive x-Werte und für $x = 0$ erklärt; ihr Definitionsbereich ist $x \geqq 0$. Zu jedem positiven x-Wert gehören zwei Werte der Quadratwurzel, die Funktion ist im Bereich $x > 0$ doppeldeutig. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ ist eine mehrdeutige Funktion; ihr Wertevorrat ist unbeschränkt.

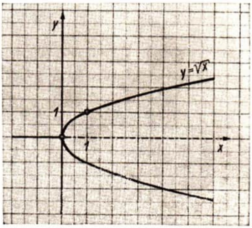


Abb. 49

Die Bildkurve $y = \pm\sqrt{x}$ ist in Abbildung 49 dargestellt. Sie besteht im erklärten Bereich aus zwei Zweigen. Zu demselben x-Wert gehört ein Funktionswert $y > 0$ für den positiven Zweig $y = +\sqrt{x}$ der Kurve (I. Quadrant) und ein Funktionswert $y < 0$ für den negativen Zweig $y = -\sqrt{x}$ der Kurve (IV. Quadrant). Beide

Zweige der Kurve hängen im Nullpunkt zusammen. Die Funktionswerte y des positiven Zweiges der Kurve heißen die Hauptwerte der Funktion.

Die Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ ist eine quadratische Parabel, die symmetrisch zur x-Achse liegt. Ihr Scheitel ist der Nullpunkt $(0; 0)$. Der positive Zweig der Kurve geht durch den Punkt $(1; 1)$.

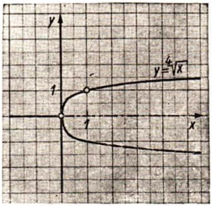


Abb. 50

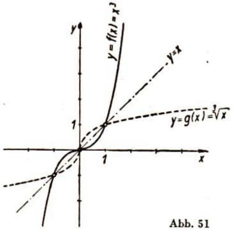


Abb. 51

Das Verhalten und der Verlauf der geraden Wurzelfunktionen $y = \pm\sqrt[2n]{x}$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$ entsprechen dem der Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ (siehe Abb. 50).

Die Abbildung 51 zeigt die Bilder der Stammfunktion $y = f(x) = x^3$ und ihrer Umkehrfunktion $y = g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Eine Wertetafel der Funktion $y = g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ergibt:

x	-5	$-4{,}5$	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}75$
y	$-1{,}71$	$-1{,}65$	$-1{,}59$	$-1{,}52$	$-1{,}44$	$-1{,}36$	$-1{,}26$	$-1{,}20$

x	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0
y	$-1{,}14$	$-1{,}08$	-1	$-0{,}91$	$-0{,}79$	$-0{,}63$	0

x	$+0{,}25$	$+0{,}5$	$+0{,}75$	$+1$	$+1{,}25$	$+1{,}5$	$+1{,}75$
y	$+0{,}63$	$+0{,}79$	$+0{,}91$	$+1$	$+1{,}08$	$+1{,}14$	$+1{,}20$

Zu jedem x-Wert gehört nur ein y-Wert. Die Funktion $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ist eine eindeutige Funktion und für den ganzen x-Bereich erklärt. Ihr Definitionsbereich und ihr Wertevorrat sind unbeschränkt.

Die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb. 52) liegt im III. und I. Quadranten, symmetrisch zum Nullpunkt als Symmetriezentrum. Sie ist für wachsendes x beständig steigend.

Kurvenverlauf und Eigenschaften der ungeraden Wurzelfunktionen $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $(n = 2, 3, \ldots)$, entsprechen dem der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb. 52).

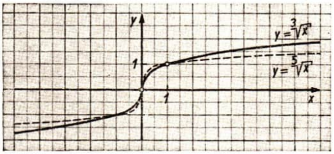


Abb. 52

Wir fassen zusammen:

Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen:

Stammfunktion	Umkehrfunktion
$y = f(x) = x^n$	$y = g(x) = \sqrt[n]{x}.$

Das Bild der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung des Bildes der Stammfunktion an der Geraden $y = x$.

Aufgaben

1. Wie lauten die Umkehrfunktionen folgender Funktionen?

a) $y = f_1(x) = 2x^2$

b) $y = f_2(x) = +\sqrt{\frac{x}{2}}$

2. Stellen Sie die Seitenlänge a eines Quadrates als Funktion seines Flächeninhaltes F dar!

3. Stellen Sie die Kantenlänge a eines Würfels als Funktion seines Volumens V dar!

49. Die vier Grundrechenarten mit Wurzeln

Zur Wiederholung:

1. Was versteht man unter
   a) der Quadratwurzel aus der Zahl x,
   b) der Kubikwurzel aus der Zahl y,
   c) der n-ten Wurzel aus der Zahl b?

2. Was wissen Sie über das Vorzeichen der Wurzeln?

3. Welche Gesetze gelten für das Rechnen mit Potenzen? (Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Basen oder gleichen Exponenten, Potenzierung.)

4. Wie läßt sich jede Wurzel als Potenz ausdrücken?

5. Schreiben Sie als Wurzeln!

a) $2 \cdot 3^{\frac{1}{2}};\ 6^{\frac{1}{2}}$ **b)** $4 \cdot 7^{\frac{1}{2}};\ 28^{\frac{1}{2}}$ **c)** $5 \cdot 9^{\frac{1}{4}};\ 45^{\frac{1}{4}}$ **d)** $2{,}5 \cdot 3^{\frac{2}{5}};\ 7{,}5^{\frac{2}{5}}$

e) $0{,}4 \cdot 8^{\frac{2}{3}};\ 3{,}2^{\frac{2}{3}}$ **f)** $4 \cdot 0{,}6^{\frac{3}{2}};\ 2{,}4^{\frac{3}{2}}$ **g)** $1{,}5 \cdot 2{,}4^{\frac{3}{4}};\ 3{,}6^{\frac{3}{4}}$ **h)** $0{,}1 \cdot 3{,}5^{\frac{7}{8}};\ 0{,}35^{\frac{7}{8}}$

1) Addition und Subtraktion von Wurzeln

Ebenso wie Potenzen können auch Wurzeln durch Addition oder Subtraktion nur dann zusammengefaßt werden, wenn sie gleiche Radikanden und gleiche Wurzelexponenten besitzen.

Beispiele:

1. $\sqrt{53} + 4\sqrt{53} = 5\sqrt{53}; \quad 53^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 53^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 53^{\frac{1}{2}}$

2. $3\sqrt{7} - 5\sqrt{2} - \sqrt{11} + 3\sqrt{2} - \sqrt{7} + \sqrt{11} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{7};$

$3 \cdot 7^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 11^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}}$

Aufgaben

Die folgenden Polynome sind soweit wie möglich zu vereinfachen!

Es ist wie im 2. Beispiel zu verfahren!

1. a) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$; $\quad 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$; $\quad 2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{3} - 7\sqrt[4]{3}$;
$2\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[4]{3}$

b) $2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a}$; $\quad 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x}$
$2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{x} + 4\sqrt[4]{x}$; $\quad 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a}$

c) $2\sqrt{2x} + 3\sqrt{2x} + 4\sqrt{2x}$; $\quad 2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x}$; $\quad 2\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} + 4\sqrt{3x}$

2. a) $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a}$

b) $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2} - 6\sqrt{b}$

c) $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a} - \sqrt{a^2} - 3\sqrt[3]{a} - 6\sqrt{a}$

d) $\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{4x} - \sqrt{8x} + \sqrt{12x}$

3. a) $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

b) $5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

c) $\sqrt{a-b} + 3\sqrt{a+b} - 6\sqrt{a-b} - 5\sqrt{a+b}$

d) $a\sqrt{x} - b\sqrt{x} + 2a\sqrt{x} - 5b\sqrt{x}$

2) Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Es soll berechnet werden: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{98}$.

Sowohl für $\sqrt{2}$ als auch für $\sqrt{98}$ sind wegen der Irrationalität der Wurzelwerte nur Näherungswerte angebbar. Die Berechnung des Produktes dieser beiden Näherungswerte wäre sehr umständlich und würde wiederum nur einen Näherungswert ergeben.

Nun ist

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{98})^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{98})^2 = 2 \cdot 98. \tag{1}$$

Also ist

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 98}. \tag{2}$$

Allgemein ist

$$(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b. \tag{3}$$

Also wird

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}. \tag{4}$$

Wir erhalten also die Formeln

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}} \tag{6}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten kann man multiplizieren, indem man die Radikanden multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem gleichen Wurzelexponenten radiziert.

Durch Vertauschen beider Seiten der Gleichungen (6) ergibt sich

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

Ein Produkt kann man radizieren, indem jeder Faktor radiziert wird und die Wurzelwerte miteinander multipliziert werden.

Beispiele:

1. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = \sqrt{x \cdot x^3} = \sqrt{x^4} = x^2;\ x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$

2. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

   Ist die Zerlegung $\sqrt{72} = \sqrt{24 \cdot 3}$ sinnvoll?

3. $7\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{-192} + 2\sqrt[3]{-375} - \sqrt[3]{1029}$
   $= 7\sqrt[3]{8 \cdot 3} + 5\sqrt[3]{27 \cdot 3} + 4\sqrt[3]{-64 \cdot 3} + 2\sqrt[3]{-125 \cdot 3} - \sqrt[3]{343 \cdot 3}$
   $= 7 \cdot 2\sqrt[3]{3} + 5 \cdot 3\sqrt[3]{3} + 4 \cdot (-4)\sqrt[3]{3} + 2 \cdot (-5)\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$
   $= 14\sqrt[3]{3} + 15\sqrt[3]{3} - 16\sqrt[3]{3} - 10\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$
   $= -4\sqrt[3]{3}$

Aufgaben

1. Mit welchem Faktor muß

a) $\sqrt{6}$; **b)** $\sqrt{10}$; **c)** $\sqrt{15}$; **d)** $\sqrt{x}$ multipliziert werden, damit
a) 6; **b)** 10; **c)** 15; **d)** x als Ergebnis erscheint?

2. Welche Operation wandelt

a) $\sqrt[3]{x}$; **b)** $\sqrt[4]{x}$; **c)** $\sqrt[7]{x}$; **d)** $\sqrt[n]{x}$ in x um?

Die Aufgaben 3 bis 10 sollen auch als Potenzen mit gebrochenen Exponenten geschrieben werden.

3. a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$; **c)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; **d)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

4. a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$; **b)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; **c)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3}$; **d)** $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2}$

5. a) $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^4}$; **b)** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^9}$; **c)** $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a^3}$; **d)** $\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[5]{x^6}$

6. a) $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{18}$; **b)** $4\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 0{,}5\sqrt{2} \cdot \frac{7}{16}\sqrt{2}$; **c)** $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot 3\sqrt{2}$

7. a) $(3 + 2\sqrt{3})(9 - 3\sqrt{3})$; **b)** $(4 - 3\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$;
c) $(15 - 12\sqrt{7})(12 - 10\sqrt{7})$; **d)** $(9 + 8\sqrt{3})(6 - 11\sqrt{3})$

8. a) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$; **b)** $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$; **c)** $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$

9. a) $(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$; **b)** $(\sqrt{a} + \sqrt{b-c})(\sqrt{a} - \sqrt{b-c})$

10. a) $(\sqrt{x} + \sqrt{x+y})^2$; **b)** $(2\sqrt{a+b} \pm \sqrt{c})^2$

11. Zerlegen Sie den Radikanden so, daß eine Vereinfachung möglich ist!

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{24}$ **c)** $\sqrt{27}$ **d)** $\sqrt{32}$ **e)** $\sqrt{300}$

f) $\sqrt[3]{24}$ **g)** $\sqrt[3]{108}$ **h)** $\sqrt[3]{128}$ **i)** $\sqrt[4]{32}$ **k)** $\sqrt[5]{64}$

12. a) $5\sqrt{72} - 3\sqrt{98} + 6\sqrt{162}$ **b)** $4\sqrt{27} + 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$

c) $7\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + \sqrt{80}$ **d)** $\sqrt{48} - 12\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$

13. a) $5\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{-54} - 2\sqrt[3]{-128} + 7\sqrt[3]{-250} + 4\sqrt[3]{432}$

b) $\sqrt{(a+b)^2 x} + \sqrt{(a-b)^2 x} - \sqrt{a^2 x} + \sqrt{(1-a)^2 x} - \sqrt{x}$

c) $\sqrt{a-b} + \sqrt{25a - 25b} + \sqrt{ax^2 - bx^2} - \sqrt{9(a-b)}$

Bringen Sie in den folgenden Aufgaben den vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktor unter das Wurzelzeichen!

14. a) $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ **b)** $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ **c)** $7\sqrt{\frac{3}{7}}$ **d)** $11\sqrt{\frac{1}{11}}$

e) $4\sqrt{\frac{5}{16}}$ **f)** $8\sqrt{\frac{5}{64}}$ **g)** $9\sqrt{\frac{14}{27}}$ **h)** $10\sqrt{\frac{3}{4}}$

i) $2\sqrt[3]{\frac{11}{4}}$ **k)** $5\sqrt[3]{\frac{18}{125}}$ **l)** $5\sqrt[3]{\frac{7}{25}}$ **m)** $6\sqrt[3]{\frac{5}{108}}$

15. a) $b\sqrt{\frac{x}{b}}$ **b)** $3x\sqrt{\frac{4}{27x}}$ **c)** $4m\sqrt{\frac{n}{8m}}$ **d)** $20y\sqrt{\frac{5z}{8y}}$

e) $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ **f)** $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ **g)** $(x+y)\sqrt{\frac{2x}{x^2-y^2}}$

h) $(u+v)\sqrt[3]{\frac{2u}{(u+v)^2}}$ **i)** $m\sqrt{\frac{1}{m^2} - 4n}$ **k)** $x\sqrt{2b - \frac{1}{x^2}}$

l) $3\sqrt{a^2 + \frac{9b^2}{4}}$ **m)** $(x-y)\sqrt{\frac{xy}{x^2 - 2xy + y^2}}$

16. a) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{5}}$ **b)** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$ **c)** $\frac{7}{10}\sqrt{\frac{20x}{7}}$ **d)** $\frac{1}{12}\sqrt{\frac{36a}{5}}$

e) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ **f)** $\frac{1}{x^3}\sqrt[3]{2}$ **g)** $\frac{2}{5}\sqrt[4]{3}$ **h)** $\frac{1}{2}\sqrt[5]{32}$

3) Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Es soll berechnet werden: $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

Da

$$\left(\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{80})^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{80}{5} \tag{1}$$

ist, ergibt sich

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} \tag{2}$$

Allgemein:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{3}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten kann man durcheinander dividieren, indem man die Radikanden dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Durch Vertauschung beider Seiten der Gleichungen (3) ergibt sich:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \tag{4}$$

Einen Bruch kann man radizieren, indem man Zähler und Nenner radiziert und die erhaltenen Wurzelwerte dividiert.

Beispiele:

1. $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{175}} = \sqrt{\frac{63}{175}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 9}{7 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

2. $\frac{\sqrt{108\,x^7\,y}}{\sqrt{27\,x^3\,y^3}} = \sqrt{\frac{108\,x^7\,y}{27\,x^3\,y^3}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 4\,x^7\,y}{27\,x^3\,y^3}} = \sqrt{\frac{4\,x^4}{y^2}} = \frac{2\,x^2}{y}$

3. $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

4. $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{\sqrt[3]{(x+y)^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{x+y}$

Es sei ausdrücklich betont, daß Summen und Differenzen nicht gliedweise radiziert werden dürfen.

Aufgaben

Mit Ausnahme der Aufgabe 5 sollen die Aufgaben auch als Potenzen mit gebrochenen Exponenten geschrieben werden!

1. a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ **b)** $\sqrt{\frac{49}{64}}$ **c)** $\sqrt{\frac{81}{169}}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{8}{343}}$

f) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ **g)** $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ **h)** $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ **i)** $\sqrt{5\frac{19}{25}}$ **k)** $\sqrt{2\frac{7}{9}}$

2. a) $\sqrt{\frac{9\,x^2}{16}}$ **b)** $\sqrt{\frac{81}{64\,m^2}}$ **c)** $\sqrt{\frac{49\,a^2\,b^2}{169\,x^2}}$ **d)** $\sqrt{\frac{9\,a}{16}}$ **e)** $\sqrt{\frac{49\,x\,y^2}{324}}$

f) $\sqrt{\frac{25\,a^2\,b}{225}}$ **g)** $\sqrt{\frac{64\,a^2\,b^2\,x}{169\,b}}$ **h)** $\sqrt{\frac{9\,(a-b)^2}{16\,(x+y)^2}}$ **i)** $\sqrt{\frac{81\,(u+v)^4}{144\,(w+t)^4}}$ **k)** $\sqrt[3]{\frac{64\,(x-y)^3}{216\,(y-z)^6}}$

3. a) $\sqrt{\frac{27}{32}}$ **b)** $\sqrt{\frac{128}{81}}$ **c)** $\sqrt{\frac{125}{98}}$ **d)** $\sqrt{\frac{36}{75}}$ **e)** $\sqrt{\frac{54}{150}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{81}{250}}$ **g)** $\sqrt[3]{\frac{128}{81}}$ **h)** $\sqrt[3]{\frac{48}{875}}$ **i)** $\sqrt[3]{\frac{32}{243}}$ **k)** $\sqrt[3]{\frac{500}{1029}}$

4. a) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}$ b) $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{z^2}}$ c) $\sqrt{\frac{x^2y^2-y^2z^2}{x^2}}$ d) $\sqrt{\frac{m^2n^2-n^2p^2}{4q^2}}$

5. a) $\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{25}}$ b) $\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{4m^2}{9}-\frac{9n^2}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{16a^2}{81}+\frac{25b^2}{9}}$

6. a) $\frac{\sqrt{512}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}}$ d) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{648}}{\sqrt{8}}$

7. a) $\frac{\sqrt[3]{10000}}{\sqrt[3]{10}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{270}}{\sqrt[3]{10}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{6}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{15}}$

8. a) $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^7}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{m^5}}{\sqrt[3]{m^2}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{x^5b}}{\sqrt[3]{x^2b}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{m^5n^4}}{\sqrt[3]{m^3n^7}}$

9. a) $\frac{\sqrt{8a}}{\sqrt{2a^3}}$ b) $\frac{\sqrt{128x^2y^3}}{\sqrt{2y}}$ c) $\frac{\sqrt{250a^3b}}{\sqrt{10ab}}$ d) $\frac{\sqrt{0{,}08x^3y}}{\sqrt{0{,}09xy^3}}$ e) $\frac{\sqrt{3{,}38a^2}}{\sqrt{5{,}12a}}$

4) Rationalmachen des Nenners

Stehen einzelne irrationale Wurzeln im Nenner eines Bruches, so können sie beseitigt werden, indem man den Bruch mit der betreffenden Wurzel oder einer Potenz der Wurzel erweitert, so daß der Nenner rational wird.

Beispiele:

1. $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$

2. $\frac{5}{\sqrt[3]{9}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}{\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{9^3}}=\frac{5\sqrt[3]{9^2}}{9}=\frac{5\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3}}{9}=\frac{5\cdot 3\sqrt[3]{3}}{9}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{3}$

Ist der Nenner ein irrationales Binom mit Quadratwurzeln, so können die Wurzeln im Nenner beseitigt werden durch Erweitern mit einem solchen irrationalen Binom, so daß die Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ angewendet werden kann.

Beispiel: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{8}-\sqrt{x})}{(\sqrt{8}+\sqrt{x})(\sqrt{8}-\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{8}-\sqrt{x})}{8-x}=\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{5x}}{8-x}$

Aufgaben

Machen Sie in den folgenden Aufgaben die Nenner rational!

10. a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{15}{3\sqrt{5}}$ d) $\frac{48}{5\sqrt{32}}$ e) $\frac{16}{3\sqrt{8}}$

f) $\frac{5a}{\sqrt{b}}$ g) $\frac{7x^2}{5\sqrt{y}}$ h) $\frac{10m}{\sqrt{n}}$ i) $\frac{2x}{\sqrt{5y}}$ k) $\frac{7z}{3\sqrt{2z}}$

11. a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

f) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ g) $\sqrt{\frac{m}{n}}$ h) $\sqrt{\frac{3\,m}{4\,n}}$ i) $\sqrt{\frac{5\,x}{7\,y}}$ k) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

12. a) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{7}-3}$

e) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$ f) $\frac{5}{1+\sqrt{2}}$ g) $\frac{0{,}5}{0{,}3-\sqrt{0{,}1}}$ h) $\frac{2{,}4}{3\sqrt{21}-5}$

13. a) $\frac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{10}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}}$ c) $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{2+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$ d) $\frac{3-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}}$

e) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{x}{x+\sqrt{x}}$ h) $\frac{1}{m-\sqrt{n}}$

i) $\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{7}}$ k) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ l) $\frac{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{5\sqrt{5}-4\sqrt{3}}$ m) $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{c\sqrt{x}-d\sqrt{y}}$

50. Das Potenzieren von Wurzeln

Es soll $\sqrt{7}$ in die 4. Potenz erhoben werden: $(\sqrt{7})^4$.
Man erhält entsprechend der Definition des Potenzbegriffes:

$$(\sqrt{7})^4 = \sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}. \tag{1}$$

Es soll die Quadratwurzel aus der 4. Potenz von 7 gezogen werden: $\sqrt{7^4}$
Man erhält

$$\sqrt{7^4} = \sqrt{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7} \tag{2}$$

und gemäß dem Gesetz über das Radizieren eines Produktes

$$\sqrt{7^4} = \sqrt{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7} = \sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}. \tag{3}$$

Stellen wir die Gleichungen (1) und (3) zusammen, so ergibt sich:

$$(\sqrt{7})^4 = \sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}$$
$$\sqrt{7^4} = \sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}\,\sqrt{7}.$$

Daraus folgt

$$(\sqrt{7})^4 = \sqrt{7^4}. \tag{4}$$

Allgemein:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \tag{5}$$

Eine Wurzel kann man potenzieren, indem man den Radikanden potenziert.

Durch Vertauschung beider Seiten der Gleichung (5) ergibt sich:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \tag{6}$$

Eine Potenz kann man radizieren, indem man die Basis der Potenz radiziert und die erhaltene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert.

Beispiele:

1. $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$
2. $(\sqrt[3]{-3})^5 = \sqrt[3]{(-3)^5} = \sqrt[3]{-243} = -3\sqrt[3]{9}$
3. $\sqrt[3]{125^2} = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$
4. $\sqrt[5]{-243^2} = (\sqrt[5]{-243})^2 = (-3)^2 = 9.$

Multipliziert man in $\sqrt[2]{3^2}$ den Wurzel- und den Potenzexponenten der Reihe nach mit 2, 3, 4 . . ., so erhält man $\sqrt[2\cdot 2]{3^{2\cdot 2}}$; $\sqrt[2\cdot 3]{3^{2\cdot 3}}$; $\sqrt[2\cdot 4]{3^{2\cdot 4}}$...; in Potenzschreibweise $3^{\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}}$; $3^{\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}}$; $3^{\frac{2\cdot 4}{2\cdot 4}}$ . . .

Wie man sieht, ist $\sqrt[2]{3^2} = \sqrt[2\cdot 2]{3^{2\cdot 2}} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{2\cdot 3}} = \sqrt[2\cdot 4]{3^{2\cdot 4}} = \ldots = 3$; in Potenzschreibweise $3^{\frac{2}{2}} = 3^{\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}} = 3^{\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}} = 3^{\frac{2\cdot 4}{2\cdot 4}} = \ldots = 3.$

Dividiert man in $\sqrt[24]{3^{24}}$ den Wurzel- und den Potenzexponenten der Reihe nach durch 2, 3, 4, 6, so erhält man $\sqrt[24:2]{3^{24:2}}$; $\sqrt[24:3]{3^{24:3}}$; $\sqrt[24:4]{3^{24:4}}$; $\sqrt[24:6]{3^{24:6}}$; . . .; in Potenzschreibweise $3^{\frac{24:2}{24:2}}$; $3^{\frac{24:3}{24:3}}$; $3^{\frac{24:4}{24:4}}$; $3^{\frac{24:6}{24:6}}$; . . .

Wie man sieht, ist $\sqrt[24]{3^{24}} = \sqrt[24:2]{3^{24:2}} = \sqrt[24:3]{3^{24:3}} = \sqrt[24:4]{3^{24:4}} = \cdots = 3$; in Potenzschreibweise $3^{\frac{24}{24}} = 3^{\frac{24:2}{24:2}}$; $3^{\frac{24:3}{24:3}}$; $3^{\frac{24:4}{24:4}} = \cdots = 3.$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:q}{n:q}}$$

Der Wert einer Wurzel bleibt erhalten, wenn man Wurzel- und Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiele:

1. $\sqrt[6]{100} = 100^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{2}{6}} = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
2. $\sqrt[4]{121} = 121^{\frac{1}{4}} = 11^{\frac{2}{4}} = 11^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$
3. $\sqrt[2n]{a^{5n}} = a^{\frac{5n}{2n}} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$
4. $\sqrt{7}\,\sqrt[5]{7} = \sqrt[2\cdot 5]{7^5} \cdot \sqrt[5\cdot 2]{7^2} = \sqrt[10]{7^7}$ oder $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = 7^{\frac{5}{10}+\frac{2}{10}} = 7^{\frac{7}{10}}$

Aufgaben

Die Aufgaben sollen auch als Potenzen mit gebrochenen Exponenten geschrieben werden. Rechnen Sie möglichst auf verschiedene Arten!

1. a) $\sqrt{9^3}$ b) $\sqrt[3]{27^4}$ c) $\sqrt{169^2}$ d) $\sqrt{100^7}$ e) $\sqrt[3]{1000^6}$
f) $\sqrt[3]{27^5}$ g) $\sqrt[4]{16^2}$ h) $\sqrt[3]{512^2}$ i) $\sqrt[5]{1024^3}$ k) $\sqrt[4]{625^2}$

2. a) $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[8]{b^2}\right)^2$ c) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{16}\right)^2$ e) $\left(\sqrt[4]{36}\right)^2$
f) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ g) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ h) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^2$ i) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^3$ k) $\left(\sqrt[5]{81}\right)^4$

3. a) $\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{x^4}$ c) $\sqrt{m^{16}}$ d) $\sqrt{n^{12}}$ e) $\sqrt{p^8}$
f) $\sqrt[3]{a^9}$ g) $\sqrt[4]{a^{12}}$ h) $\sqrt[5]{m^{15}}$ i) $\sqrt[3]{p^{12}}$ k) $\sqrt[7]{s^{21}}$

4. a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt{a^7}$ c) $\sqrt{a^5}$ d) $\sqrt[5]{x^6}$ e) $\sqrt{a^{11}}$
f) $\sqrt{2x^7}$ g) $\sqrt[3]{9y^{11}}$ h) $\sqrt[4]{8z^7}$ i) $\sqrt[3]{16a^4}$ k) $\sqrt{81x^5}$

5. a) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt[5]{7}$ c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[7]{6}$ e) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}$
f) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{36}$ g) $\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{7}$ h) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}$ i) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{5}$ k) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}$

6. a) $\sqrt{15}\cdot\sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ d) $4\sqrt[3]{5}\cdot 5\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{7}$

7. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$ b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{m}{x}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$

8. a) $\sqrt[2n]{x^a}\cdot\sqrt[3]{x^{2a-c}}$; b) $\sqrt[3x]{x^{5+2n}}\cdot\sqrt[4x]{x^{2n-1}}$; c) $\sqrt[n]{x^2}\cdot\sqrt[m]{x^5}$

51. Das Radizieren von Wurzeln

Es ist die Quadratwurzel aus der dritten Wurzel von 64 zu ziehen: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = x.$

Es ist $\sqrt[3]{64} = x^2$, also $64 = (x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6.$

Also ist
$$x = \sqrt[6]{64}. \tag{1}$$

Ferner ist wegen $x^{2\cdot 3} = (x^3)^2 = 64$ $\qquad x^3 = \sqrt{64},$

also
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{64}}. \tag{2}$$

Stellen wir die Gleichungen (1) und (2) zusammen, so ergibt sich:

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}.$$

Allgemein:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p}; \quad \left(a^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{mn}}.$$

In einer Doppelwurzel kann man die Wurzelexponenten miteinander vertauschen. Man kann auch anstatt der Doppelwurzel eine einfache Wurzel setzen, deren Wurzelexponent gleich dem Produkt der beiden Wurzelexponenten ist.

Beispiele:

1. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[3]{4}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[5]{5}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[2n]{(x+y)^{4m}}} = \sqrt[2n]{\sqrt[m]{(x+y)^{4m}}} = \sqrt[2n]{(x+y)^4} = \sqrt[n]{(x+y)^2}.$

Aufgaben

Die Aufgaben sollen auch als Potenzen mit gebrochenen Exponenten geschrieben werden.

1. a) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{m}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[z]{m}}$
 e) $\sqrt[4]{\sqrt{x^4}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ h) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^{12}}}$

2. a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{81}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[8]{36}}$
 e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{216}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$ h) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$

3. a) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$ b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ c) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ d) $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y\sqrt[p]{z}}}$

VII. Das Rechnen mit Logarithmen

Zur Wiederholung:

1. a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $x^4 \cdot x^3$ c) $a^m \cdot a^n$
2. a) $4^4 : 4^3$ b) $y^6 : y^4$ c) $a^m : a^n$
3. a) $(2^4)^3$ b) $(x^3)^c$ c) $(a^m)^n$
4. a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $x^{\frac{3}{5}}$ c) $a^{\frac{m}{n}}$
5. a) 3^{-2} b) a^{-2} c) a^{-n}
6. a) 5^0 b) $(x+y)^0$ c) a^0
7. Formulieren Sie die unter c) der Aufgaben 1 bis 6 angegebenen Gesetze bzw. Definitionen für das Rechnen mit Potenzen mit Ihren Worten!

 Beispiel: 1c): Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert; jede Potenz a^x läßt sich als Produkt aus zwei Faktoren $a^m \cdot a^n$ darstellen, wobei $m + n = x$ ist.

8. Worin besteht der Vorteil der Gesetze bzw. Definitionen, die auf Grund der Aufgaben 1c bis 6c ausgesprochen wurden?

52. Der Begriff des Logarithmus

Bei einer Reihe von Werkzeugmaschinen muß durch Getriebe eine Stufung der Drehzahl vorgenommen werden. An der Drehmaschine ist sie z. B. deshalb notwendig, weil die Schnittgeschwindigkeit je nach dem Material verschiedene Werte besitzt. Die Schnittgeschwindigkeit v ist eine Funktion des Werkstückdurchmessers d und der Drehzahl n. Die Formel für die Schnittgeschwindigkeit v lautet $v = \pi d n$. Für eine bestimmte Bearbeitung muß sich die Schnittgeschwindigkeit in gewissen Grenzen bewegen; da auch der Werkstückdurchmesser d festliegt, muß die Drehzahl n entsprechend festgelegt werden.

Die Stufung der Drehzahlen wird aber auch so vorgenommen, daß die prozentuale Steigerung der Drehzahl von Stufe zu Stufe etwa gleich ist. Dadurch werden sowohl die Motoren der Maschine geschont als auch eine gleichmäßige Unterteilung innerhalb des Drehzahlbereiches hergestellt.

Beispiel: Eine Drehmaschine hat einen Drehzahlbereich von 100 bis 1000 U/min. Die Stufung soll derart vorgenommen werden, daß die Drehzahl von Stufe zu Stufe um ungefähr 25% steigt. Wieviel Stufen müssen dazwischengeschaltet werden?

Lösung:

Wir bezeichnen die unterste Drehzahl mit

$$d_0 = 100 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}};$$

die nächste dann mit

$$d_1 = 100 \cdot 1{,}25 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}};$$

die dritte ist dann

$$d_2 = (100 \cdot 1{,}25)\, 1{,}25 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} = 100 \cdot 1{,}25^2 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}};$$

die vierte ist schließlich

$$d_3 = (100 \cdot 1{,}25^2)\, 1{,}25 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} = 100 \cdot 1{,}25^3 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}};$$

$$\vdots$$

die letzte Drehzahl ist damit $d_n = 100 \cdot 1{,}25^n \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} = 1000 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$.

Die Lösung der Aufgabe ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung von n aus der Gleichung

$$100 \cdot 1{,}25^n = 1000 \tag{1}$$

bzw.

$$1{,}25^n = 10. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist aber mit den uns bisher bekannten mathematischen Mitteln nicht lösbar. Die Lösung führt auf eine neue Rechenoperation, die im folgenden behandelt werden soll. Dazu verlassen wir jetzt die eingangs gestellte Aufgabe und wenden uns einigen allgemeinen Erörterungen zu.

Gleichung (2) ist von der Form

$$a^n = b. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) gibt den Zusammenhang zwischen den Größen a, n und b an. Wenn zwei dieser Größen gegeben sind, so ist die dritte durch die Gleichung (3) bestimmt.

Je nachdem, welche Größen gegeben sind, sind für ihre Berechnung drei Fälle möglich.

1. Gegeben a, n; gesucht b.

Durch **Potenzieren** ergibt sich

$$b = a^n. \tag{4}$$

Beispiel: $a = 3; \quad n = 4$

$b = 3^4 = 81.$

2. Gegeben n; b; gesucht a.

Durch **Radizieren** ergibt sich

$$a = \sqrt[n]{b}. \tag{5}$$

Die Probe für die Richtigkeit erhält man sofort, wenn man (5) in die n-te Potenz erhebt:

$$a^n = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Beispiel: $n = 4; \quad b = 81$

$a = \sqrt[4]{81} = \pm 3.$

3. Gegeben $a = 3$, $b = 81$; gesucht n.

Aus den beiden vorangegangenen Zahlenbeispielen ist ohne weiteres zu erkennen, daß in der Gleichung

$$3^n = 81$$

$n = 4$ sein muß, denn $3^4 = 81$.

Zur Auflösung einer Gleichung $a^n = b$ nach dem Exponenten n muß eine neue Rechenoperation eingeführt werden; sie wird **Logarithmieren** genannt.

Aus (3) $a^n = b$ folgt

(6) $n = {}^a\log b$ (gelesen: n ist gleich dem Logarithmus der Zahl b zur Basis a).

Mit bestimmten Zahlen geschrieben:

Aus $3^4 = 81$ folgt

$4 = {}^3\log 81$ (gelesen: 4 ist gleich dem Logarithmus der Zahl 81 zur Basis 3).

Aus dem Mathematikunterricht der vorangegangenen Klassen ist uns bekannt, daß die Umkehroperation der Addition die Subtraktion ist. Aus

$$a + b = c \tag{7}$$

folgt

$$a = c - b \tag{8}$$

und

$$b = c - a. \tag{9}$$

Ebenso ist bekannt, daß die Division die Umkehroperation der Multiplikation ist. Aus

$$a \cdot b = c \tag{10}$$

folgt

$$a = \frac{c}{b} \tag{11}$$

und

$$b = \frac{c}{a}. \tag{12}$$

Addition und Multiplikation besitzen nur je eine einzige Umkehroperation. Der Grund dafür liegt in der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. der Faktoren (Kommutatives Gesetz der Addition und der Multiplikation).

In der Potenz $a^n = b$ mit der Basis a und dem Exponenten n ist aber a^n im allgemeinen verschieden von n^a. So ist beispielsweise $3^4 = 81$, 4^3 aber 64; also $3^4 \neq 4^3$. Daraus ergibt sich, daß das Potenzieren zwei Umkehroperationen besitzen muß.

Die Auflösung der Gleichung

$$a^n = b \tag{3}$$

nach a lieferte

$$a = \sqrt[n]{b}. \tag{5}$$

Das Radizieren wird deshalb als die 1. Umkehrung des Potenzierens bezeichnet. Die Auflösung der Gleichung

$$a^n = b \tag{3}$$

nach n liefert aber

$$n = {}^a\log b. \tag{6}$$

Das Logarithmieren wird als die 2. Umkehrung des Potenzierens bezeichnet.

In der Gleichung (6) wird a als **Basis**[1], b als **Numerus**[2] und n als **Logarithmus**[3] bezeichnet:

$$\underset{\text{Logarithmus}}{\underset{\downarrow}{n}} = \underset{\text{Basis}}{\underset{\downarrow}{{}^a\log}} \; \underset{\text{Numerus}}{\underset{\downarrow}{b}}$$

Zur besseren Übersicht fassen wir die Ergebnisse nochmals in einer Tabelle zusammen:

	1. Umkehrung des Potenzierens:	2. Umkehrung des Potenzierens:
Potenzieren	Radizieren	Logarithmieren
$b = a^n$	$a = \sqrt[n]{b}$	$n = {}^a\log b$
$81 = 3^4$	$3 = \sqrt[4]{81}$	$4 = {}^3\log 81$
b: Potenzwert	a: Wurzelwert	n: Logarithmus
a: Basis	b: Radikand	a: Basis
n: Exponent	n: Wurzelexponent	b: Numerus

Wir erkennen:

$n = {}^a\log b$ ist gleichbedeutend mit $a^n = b$. **Der Logarithmus ist die Zahl, mit der man die Basis a potenzieren muß, um den Numerus b zu erhalten. Der Logarithmus ist stets ein Exponent.**

Beispiele:

a) Die Basis ist 2.

Dann ist z. B. der Logarithmus von $32: {}^2\log 32 = 5$; denn $2^5 = 32$; bzw. aus $2^5 = 32$ folgt ${}^2\log 32 = 5$.

---

[1] Basis: Grundlage, hier Grundzahl.

[2] numerus (lat.), die Zahl.

[3] logos (griech.), das Wort; arithmos, die Zahl.

Desgleichen folgt aus

$$2^4 = 16 \qquad {}^2\log 16 = 4,$$
$$2^2 = 4 \qquad {}^2\log 4 = 2,$$
$$2^1 = 2 \qquad {}^2\log 2 = 1,$$
$$2^0 = 1 \qquad {}^2\log 1 = 0.$$

b) Die Basis ist 3.

Dann ist z. B. der Logarithmus von 243: ${}^3\log 243 = 5$; denn $3^5 = 243$; bzw. aus $3^5 = 243$ folgt ${}^3\log 243 = 5$.

Desgleichen folgt aus

$$3^3 = 27 \qquad {}^3\log 27 = 3,$$
$$3^2 = 9 \qquad {}^3\log 9 = 2,$$
$$3^1 = 3 \qquad {}^3\log 3 = 1,$$
$$3^0 = 1 \qquad {}^3\log 1 = 0.$$

c) Die Basis ist 7.

Dann ist z. B. der Logarithmus von 343 : ${}^7\log 343 = 3$; denn $7^3 = 343$; bzw. aus $7^3 = 343$ folgt ${}^7\log 343 = 3$.

Desgleichen folgt aus

$$7^2 = 49 \qquad {}^7\log 49 = 2,$$
$$7^1 = 7 \qquad {}^7\log 7 = 1,$$
$$7^0 = 1 \qquad {}^7\log 1 = 0.$$

d) Die Basis ist 10.

Dann ist z. B. der Logarithmus von 1000000 : ${}^{10}\log 1000000 = 6$; denn $10^6 = 1000000$; bzw. aus $10^6 = 1000000$ folgt ${}^{10}\log 1000000 = 6$.

Desgleichen folgt aus

$$10^5 = 100000 \qquad {}^{10}\log 100000 = 5,$$
$$10^4 = 10000 \qquad {}^{10}\log 10000 = 4,$$
$$10^3 = 1000 \qquad {}^{10}\log 1000 = 3,$$
$$10^2 = 100 \qquad {}^{10}\log 100 = 2,$$
$$10^1 = 10 \qquad {}^{10}\log 10 = 1,$$
$$10^0 = 1 \qquad {}^{10}\log 1 = 0.$$

53. Logarithmensysteme

Ein Logarithmensystem ist die Menge aller Logarithmen, die zu derselben Basis gehören.

Man kann als Basis eines Logarithmensystems jede positive Zahl wählen, die von 1 verschieden ist. Die Wahl der Zahl 1 als Basis eines Logarithmensystems verbietet sich aus dem Grunde, weil jede Potenz der Zahl 1 wieder 1 ergibt.

Aus den Beispielen a) bis d) des vorangegangenen Kapitels kann man die Gültigkeit folgender Gesetze vermuten:

Der Logarithmus von 1 ist in jedem Logarithmensystem gleich 0.
Beweis: Aus $a^0 = 1$ folgt ${}^a\log 1 = 0$ für jede positive Zahl a.

Der Logarithmus der Basis ist in jedem Logarithmensystem gleich 1.
Beweis: Aus $a^1 = a$ folgt ${}^a\log a = 1$ für jede positive Zahl a.

Obwohl es möglich ist, als Basis eines Logarithmensystems jede von 1 verschiedene positive Zahl zu wählen und damit beliebig viele Logarithmensysteme zu schaffen, sind im wesentlichen nur zwei Logarithmensysteme im Gebrauch:

1. das **System der natürlichen Logarithmen.** Es hat die in der Mathematik sehr wichtige Zahl $e = 2{,}718\ldots$ zur Basis.
2. das **System der dekadischen[1] Logarithmen.** Es hat die Zahl 10 zur Basis.

Wir werden uns nur mit dem dekadischen Logarithmensystem befassen. Zur Kennzeichnung gegenüber den Logarithmen anderer Systeme werden die dekadischen Logarithmen nach DIN 1302 mit lg bezeichnet:

$$\lg x = {}^{10}\log x.$$

Aufgaben

Lösen Sie, wie im Beispiel angegeben, folgende Aufgaben!

Beispiel: ${}^{5}\log 25 = 2$; denn $5^2 = 25$.

1. a) ${}^{2}\log 16$	**b)** ${}^{2}\log 64$	**c)** ${}^{2}\log 128$	**d)** ${}^{2}\log 1$
2. a) ${}^{3}\log 9$	**b)** ${}^{3}\log 81$	**c)** ${}^{4}\log 16$	**d)** ${}^{4}\log 64$
3. a) ${}^{2}\log \frac{1}{4}$	**b)** ${}^{2}\log \frac{1}{16}$	**c)** ${}^{3}\log \frac{1}{9}$	**d)** ${}^{3}\log \frac{1}{27}$
4. a) ${}^{10}\log 100$	**b)** ${}^{10}\log 10\,000$	**c)** ${}^{10}\log 1\,000\,000$	**d)** ${}^{10}\log 1$
5. a) ${}^{10}\log \frac{1}{100}$	**b)** ${}^{10}\log \frac{1}{10\,000}$	**c)** ${}^{10}\log \frac{1}{100\,000}$	**d)** ${}^{10}\log \frac{1}{10}$
6. a) ${}^{10}\log 0{,}01$	**b)** ${}^{10}\log 0{,}0001$	**c)** ${}^{10}\log 0{,}00001$	**d)** ${}^{10}\log 0{,}1$
7. a) ${}^{2}\log \sqrt[3]{2}$	**b)** ${}^{2}\log \sqrt[7]{2}$	**c)** ${}^{3}\log \sqrt[4]{3}$	**d)** ${}^{3}\log \sqrt{3}$
e) ${}^{10}\log \sqrt[3]{10}$	**f)** ${}^{10}\log \sqrt[5]{10}$	**g)** ${}^{10}\log \sqrt{10}$	**h)** ${}^{10}\log \sqrt[7]{10}$
8. a) ${}^{2}\log \sqrt[3]{4}$	**b)** ${}^{3}\log \sqrt[4]{9}$	**c)** ${}^{2}\log \sqrt[5]{16}$	**d)** ${}^{3}\log \sqrt[7]{27}$

54. Die grafische Bestimmung des Logarithmus

Zur Wiederholung:

1. Wie bestimmt man die Umkehrfunktion zur Funktion
a) $y = f(x) = 2x$, **b)** $y = f(x) = x^2$?

2. Was können Sie über die Bilder von Stammfunktion und Umkehrfunktion aussagen?

1) Die Exponentialfunktion

Setzt man in der Potenz $y = a^x$ für die Basis a einen bestimmten Wert, z. B. 1, 2 oder 10, und behandelt den Exponenten x als variabel, so erhält man eine Funktion der Art

$$y = f(x) = a^x \qquad (a > 0). \tag{1}$$

Alle diese Funktionen heißen **Exponentialfunktionen** zur Basis 1, 2, 10, a. Diese Funktionen haben nur dann einen Sinn, wenn $a > 0$ ist. Der Exponent x kann sämtliche reellen Zahlenwerte annehmen; für $x_1 = -1$ wird z. B. $y_1 = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

---

[1] decem (lat.), zehn.

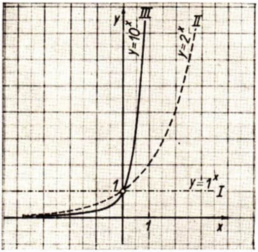


Abb. 53

Für irrationale Werte von x stellt man den Exponenten mit der geforderten Genauigkeit durch seinen rationalen Näherungswert dar und nähert dadurch die Werte von a^x durch rationale Werte an.

Die Bilder einiger Exponentialfunktionen sind in Abbildung 53 für I) $a=1$; II) $a=2$; III) $a=10$ dargestellt. Die Kurve $y = 1^x$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1. Die Exponentialkurven $y = a^x$ $(a > 0)$ verlaufen im II. und I. Quadranten. Sie schneiden die y-Achse im Punkt $(0;1)$; denn es ist $1^0 = 1$, $2^0 = 1$, $10^0 = 1$, $a^0 = 1$. Die Exponentialfunktionen $y = a^x$ $(a > 1)$ sind im ganzen x-Bereich erklärt, sie sind eindeutige Funktionen, ihre Kurven sind beständig steigend. Schreitet man vom Nullpunkt aus auf der x-Achse zu Werten $-1, -2, -3, \ldots$ zurück, so nähern sich diese Exponentialkurven asymptotisch der x-Achse. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist also unbeschränkt, der Wertevorrat aber beschränkt auf $y > 0$.

2) Die Logarithmusfunktion[1]

Nimmt der Exponent x in der Funktion

$$y = f(x) = 10^x \tag{2}$$

verschiedene Werte an, so kann man mit Hilfe des Funktionsbildes (Abb. 54) die zugehörigen y-Werte, also die x-ten Potenzen der Zahl 10, grafisch bestimmen.

Diese Bestimmung ist von geringem praktischem Wert; viel wichtiger ist die Lösung der umgekehrten Aufgabe, bei gegebenem y-Wert den zugehörigen x-Wert zu bestimmen.

Mit anderen Worten:

Es ist der Exponent zu bestimmen, mit dem man 10 zu potenzieren hat, um eine gegebene Zahl zu erhalten. Man sucht also den Logarithmus zu einer gegebenen Zahl.

Aus
$$y = f(x) = 10^x \tag{2}$$
folgt durch Auflösen nach x:
$$x = g(y) = \lg y \tag{3}$$
und durch Vertauschen der Variablen
$$y = g(x) = \lg x. \tag{4}$$

Diese Funktion heißt **Logarithmusfunktion**.

Die Funktion (4) stellt also eine Zuordnung zwischen einer beliebigen positiven reellen Zahl und ihrem dekadischen Logarithmus her.

Sie ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = f(x) = 10^x$. Ihr Bild entsteht durch Spiegelung des Bildes von (1) an der Geraden $y = x$ (vgl. Abb. 54).

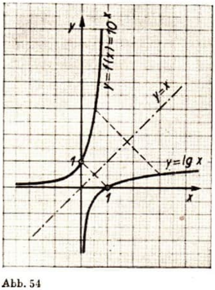


Abb. 54

[1] In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf die Basis $a = 10$.

Mit den bisher erworbenen Kenntnissen ist es möglich, eine Reihe von Wertepaaren x_i, y_i dieser Funktion zu bestimmen.

x	$\frac{1}{1\,000\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000	100000
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Das Berechnen der zwischen diesen Werten liegenden Funktionswerte erfordert höhere Hilfsmittel. Ausschnitte aus dem Funktionsbild zeigen die Abbildungen 55 und 56.

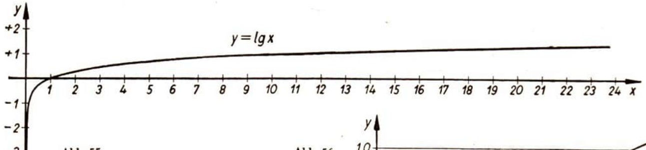
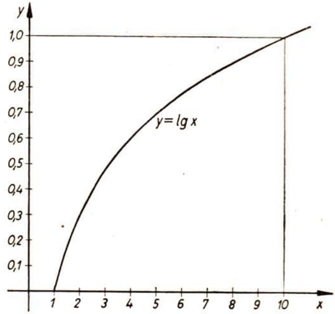


Abb. 55

Abb. 56



Mittels der grafischen Darstellung der Logarithmusfunktion ist es möglich, die Logarithmen gegebener Zahlen, in diesem Falle mit der Basis 10, grafisch annähernd zu bestimmen. Wie man sieht, ist die Genauigkeit der Abbildung verhältnismäßig gering, auch dann, wenn man die Darstellung der Funktion in einem kleineren Bereich (Abb. 56) vornimmt und auf den Koordinatenachsen verschiedene Maßstäbe benutzt. Die grafische Darstellung hat aber den Vorteil, daß man mittels des Funktionsbildes den Verlauf der Funktion klar erkennen kann.

Für den praktischen Gebrauch werden die Logarithmen berechnet und in **Logarithmentafeln** zusammengefaßt. Die Logarithmen sind im allgemeinen irrationale Zahlen und werden auf eine bestimmte Stellenzahl gerundet, die sich aus den Forderungen der Praxis ergibt. Für die Bedürfnisse der Schule genügt es, die Logarithmen auf 4 Stellen nach dem Komma zu runden; in der Industrie werden häufig auch siebenstellige Logarithmen benutzt. Die Berechnung der Logarithmen ist mit den mathematischen Mitteln, die die Oberschule bereitstellen kann, im allgemeinen nicht möglich.

Aufgaben

1. Lesen Sie aus dem Diagramm der Abbildung 56 folgende Werte ab!
a) lg 1,6 **b)** lg 2,4 **c)** lg 5,5 **d)** lg 7,5 **e)** lg 9 **f)** lg 9,5

2. Welche Zuordnung stellt die Logarithmusfunktion $y = {}^{10}\log x = \lg x$ dar?

3. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort:
Wie groß sind die Logarithmen aller **a)** positiven Zahlen > 1, **b)** positiven Zahlen < 1?

4. Wie groß vermuten Sie ${}^{10}\log 0$?

55. Die dekadischen Logarithmen

Wie bereits ausgeführt wurde, heißen Logarithmen mit der Basis 10 dekadische Logarithmen, Zehnerlogarithmen oder auch Briggs'sche Logarithmen[1].

Das System der dekadischen Logarithmen hat für die elementare Mathematik eine Reihe von Vorteilen, insbesondere die der leichten Handhabung und großen Übersichtlichkeit.

Aus den Beziehungen

$$\begin{array}{llll}
10^0 = 1 & \text{folgt} & \lg 1 & = 0, \\
10^1 = 10 & \text{folgt} & \lg 10 & = 1, \\
10^2 = 100 & \text{folgt} & \lg 100 & = 2, \\
10^3 = 1000 & \text{folgt} & \lg 1000 & = 3, \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
10^{-1} = 0{,}1 & \text{folgt} & \lg 0{,}1 & = -1, \\
10^{-2} = 0{,}01 & \text{folgt} & \lg 0{,}01 & = -2, \\
10^{-3} = 0{,}001 & \text{folgt} & \lg 0{,}001 & = -3, \\
10^{-4} = 0{,}0001 & \text{folgt} & \lg 0{,}0001 & = -4.
\end{array}$$

Die Logarithmen der Zehnerpotenzen 10^n (n positiv oder negativ ganzzahlig) können ohne Schwierigkeiten angegeben werden; die Logarithmen aller anderen Zahlen müssen berechnet werden. Wie bereits erwähnt wurde, sind dazu im allgemeinen umfangreichere mathematische Voraussetzungen notwendig, als sie in der Oberschule geschaffen werden können.

Man kann die Größe der Logarithmen anderer Zahlen aber eingrenzen. So liegt z. B. lg 35 zwischen 1 und 2; denn $10^1 = 10$; $10^{1,\cdots} = 35$; $10^2 = 100$.

Wir erkennen auf diese Weise:

$$\begin{array}{lrl}
\lg 10000 = 4; & \text{denn } 10^4 & = 10000, \\
\lg 3731 = 3,\ldots; & \text{denn } 10^{3,\cdots} & = 3731, \\
\lg 1000 = 3; & \text{denn } 10^3 & = 1000, \\
\lg 871 = 2,\ldots; & \text{denn } 10^{2,\cdots} & = 871, \\
\lg 100 = 2; & \text{denn } 10^2 & = 100, \\
\lg 42 = 1,\ldots; & \text{denn } 10^{1,\cdots} & = 42, \\
\lg 10 = 1; & \text{denn } 10^1 & = 10, \\
\lg 6 = 0,\ldots; & \text{denn } 10^{0,\cdots} & = 6, \\
\lg 1 = 0; & \text{denn } 10^0 & = 1, \\
\lg 0{,}1 = -1; & \text{denn } 10^{-1} & = 0{,}1.
\end{array}$$

lg 0,4 beispielsweise liegt dann zwischen 0 und -1, er müßte also die Form $-0,\ldots$ besitzen. Diese Schreibweise ist aber ungebräuchlich.

Die negative Dezimalzahl $-0{,}6324$ beispielsweise läßt sich auch in der Form $(0{,}3676 - 1)$ darstellen, denn $0{,}3676 - 1$ ist ja gleich $-0{,}6324$.

Die negative Dezimalzahl $-1{,}0121$ kann z. B. auch in der Form $0{,}9879 - 2$ dargestellt werden; denn $0{,}9879 - 2$ ist ja gleich $-1{,}0121$ usw.

---

[1] Der Engländer Henry Briggs (Oxford, 1556—1630) berechnete die erste Wertetafel für dekadische Logarithmen.

Damit ergibt sich weiter:

$$
\begin{array}{lll}
\lg 1 = 0; & \text{denn} & 10^{0} = 1, \\
\lg 0{,}4 = 0, \ldots - 1; & \text{denn} & 10^{0,\ldots-1} = 0{,}4, \\
\lg 0{,}1 = -1; & \text{denn} & 10^{-1} = 0{,}1, \\
\lg 0{,}06 = 0, \ldots - 2; & \text{denn} & 10^{0,\ldots-2} = 0{,}06, \\
\lg 0{,}01 = -2; & \text{denn} & 10^{-2} = 0{,}01, \\
\lg 0{,}007 = 0, \ldots - 3; & \text{denn} & 10^{0,\ldots-3} = 0{,}007, \\
\lg 0{,}001 = -3; & \text{denn} & 10^{-3} = 0{,}001, \\
\lg 0{,}0002 = 0, \ldots - 4; & \text{denn} & 10^{0,\ldots-4} = 0{,}0002, \\
\lg 0{,}0001 = -4; & \text{denn} & 10^{-4} = 0{,}0001.
\end{array}
$$

Damit erhalten wir folgende Ergebnisse:

a) Ist der Numerus **ein**stellig, beginnt der Logarithmus mit **0**, . . ;
ist der Numerus **zwei**stellig, beginnt der Logarithmus mit **1**, . . .;
ist der Numerus **drei**stellig, beginnt der Logarithmus mit **2**, . . .;
ist der Numerus **vier**stellig, beginnt der Logarithmus mit **3**, . . . usw.

Beginnen die geltenden Ziffern des Numerus mit der ersten Stelle nach dem Komma, so hat der Logarithmus die Form 0, . . . − 1.
Beginnen die geltenden Ziffern des Numerus mit der zweiten Stelle nach dem Komma, so hat der Logarithmus die Form 0, . . . − 2.
Beginnen die geltenden Ziffern des Numerus mit der dritten Stelle nach dem Komma, so hat der Logarithmus die Form 0, . . . − 3.
Beginnen die geltenden Ziffern des Numerus mit der vierten Stelle nach dem Komma, so hat der Logarithmus die Form 0, . . . − 4 usw.

b) Beginnt der Logarithmus mit 0, . . ., so ist der Numerus einstellig.

.
.
.

Ist der Logarithmus 0, . . . − 1; so beginnen die geltenden Ziffern des Numerus mit der ersten Stelle nach dem Komma.

.
.
.

Man bezeichnet die Ziffernfolge nach dem Komma als **Mantisse** und die (positive oder negative) Zahl vor dem Komma als **Kennzahl**.
Nach DIN 1302 werden Kennzahl und Mantisse durch einen Punkt getrennt. Beim Numerus wird jedoch das Komma beibehalten. Diese Schreibweise verwenden wir von jetzt an.

Beispiele:

a) $\lg 20 = \underset{\text{Kennzahl}}{\underset{\downarrow}{1}}.\ \underbrace{3010}_{\text{Mantisse}}$

b) $\lg 0{,}02 = 0.\underbrace{3010}_{\text{Mantisse}} - \underset{\text{Kennzahl}}{\underset{\downarrow}{2}}$

Aufgaben

1. Vervollständigen Sie das unter b) Gesagte!
2. Wiederholen Sie die wesentlichen Gedanken des Kapitels mit eigenen Worten!

56. Die Logarithmentafel

Die Logarithmentafel ist eine Zahlentafel, in der die Mantissen der Logarithmen zu einer bestimmten Basis enthalten sind.

Die im Mathematikunterricht in der Oberschule benutzte **Logarithmentafel** enthält die Mantissen der dekadischen Logarithmen auf vier Stellen gerundet.

Die Logarithmentafel hat einen zweifachen Zweck. Man kann mit ihrer Hilfe zu einem gegebenen Numerus die Mantisse des zugehörigen dekadischen Logarithmus bestimmen und andererseits zu einem gegebenen dekadischen Logarithmus die Ziffernfolge des zugehörigen Numerus. Bei logarithmischen Rechnungen treten in der Regel beide Verwendungsarten nebeneinander auf.

Die vierstellige Logarithmentafel enthält die Mantissen **aller dreistelligen** Numeri, also der Zahlen von 1 bis 999. Der Vorteil dieser Tafel besteht darin, daß sie ohne Schwierigkeit auf zwei Seiten unterzubringen ist; dadurch werden weitgehend Fehler vermieden, die durch das Aufschlagen falscher Seiten entstehen können.

1) Aufsuchen des Logarithmus zu gegebenem Numerus

1. Beispiel:

Gesucht ist lg 52.

Beim Aufsuchen des Logarithmus einer gegebenen Zahl **wird** zunächst die Kennzahl festgelegt. Sie ist in diesem Falle 1. In der ersten (senkrechten) Spalte „Zahl" wird der Numerus 52 aufgesucht. Die zur Ziffernfolge des Numerus gehörige Mantisse liest man in der (waagerechten) Zeile ab, an deren Anfang die aus den ersten beiden Numerusziffern gebildete Zahl steht. Die Mantisse steht dort in der Spalte, die mit 0 überschrieben ist.

Als Mantisse liest man 7160 ab. Mithin ist

$$\lg 52 = 1.7160.$$

2. Beispiel: lg 734

Kennzahl ist 2 (warum?).

Als Mantisse findet man in der mit 73 beginnenden Zeile **und in der mit 4** überschriebenen Spalte 8657.

$$\lg 734 = 2.8657.$$

3. Beispiel: lg 0,4

Kennzahl ist -1 (warum?),
Mantisse ist 6021,

$$\lg 0{,}4 = 0.6021 - 1.$$

4. Beispiel: lg 0,000342

Kennzahl ist -4,
Mantisse ist 5340,

$$\lg 0{,}000342 = 0.5340 - 4.$$

Aufgaben

1. a) lg 25	**b)** lg 83	**c)** lg 92	**d)** lg 14	**e)** lg 55	**f)** lg 98
2. a) lg 3	**b)** lg 7	**c)** lg 5	**d)** lg 2	**e)** lg 9	**f)** lg 4
3. a) lg 237	**b)** lg 341	**c)** lg 988	**d)** lg 429	**e)** lg 777	**f)** lg 870

4. Vergleichen Sie **a)** lg 2 mit lg 4, **b)** lg 3 mit lg 9, **c)** lg a mit lg a^2!
Was erkennen Sie? Begründen Sie ihre Erkenntnis!

5. a) lg 0,3 **b)** lg 0,7 **c)** lg 0,5 **d)** lg 0,2 **e)** lg 0,9 **f)** lg 0,4

6. a) lg 0,03 **b)** lg 0,34 **c)** lg 0,728 **d)** lg 0,0028 **e)** lg 0,000729

7. a) lg 0,00449 **b)** lg 0,872 **c)** lg 0,000045 **d)** lg 0,0037400 **e)** lg 0,00792000

8. a) lg 2,3 **b)** lg 3,5 **c)** lg 37,1 **d)** lg 82,7 **e)** lg 9,51 **f)** lg 6,36

9. a) lg 0,0042 **b)** lg 132,0 **c)** lg 4,72 **d)** lg 69,2 **e)** lg 91,3 **f)** lg 8,77

10. a) lg 327 **b)** lg 32,7 **c)** lg 3,27 **d)** lg 0,327 **e)** lg 0,0327 **f)** lg 0,00327
g) Was erkennen Sie?

5. Beispiel: Gesucht lg 5723. Die Kennzahl ist 3.

In diesem Falle hat die Ziffernfolge des Numerus vier Ziffern. Es können aus der Logarithmentafel unmittelbar nur die Logarithmen solcher Numeri abgelesen werden, deren Ziffernfolge nicht mehr als 3 Ziffern enthält. Im vorliegenden Falle muß die Mantisse durch **Interpolieren** bestimmt werden. Sie liegt zwischen den Mantissen der durch die ersten drei Ziffern gebildeten vollen Zehnerzahl und der um 10 größeren Zahl:

Ziffernfolge des Numerus 5720; zugehörige Mantisse 7574.
Ziffernfolge des Numerus 5723; zugehörige Mantisse 75..
Ziffernfolge des Numerus 5730; zugehörige Mantisse 7582.

Dem Anwachsen des Numerus von 5720 auf 5730, also um 10 Einheiten der letzten Stelle, entspricht ein Anwachsen der Mantisse um D = 8 Einheiten der letzten Stelle, von 7574 auf 7582.

Daraus ergibt sich folgende Proportion:
Mantissenzuwachs d: Mantissenzuwachs D = Numeruszuwachs 3: Numeruszuwachs 10

$$d : D = 3 : 10$$
$$10d = 3D$$
$$d = \frac{3}{10} D$$
$$d = \frac{3}{10} \cdot 8 = 2{,}4 \approx 2$$

Es müssen also 2 Einheiten zur letzten Stelle der Mantisse addiert werden. Zur Ziffernfolge 5723 gehört damit die Mantisse 7576.

$$\lg 5723 = 3.7576$$

6. Beispiel: Gesucht lg 529,71. Kennzahl ist 2.

In diesem Fall wird der Numerus zunächst auf vier geltende Ziffern gerundet: 529,71 $\approx$ 529,7. Jetzt verfahren wir wie beim 5. Beispiel.

Die Ziffernfolge 5290 besitzt die Mantisse 7235.

Aus D = 8 folgt:

$$d : D = 7 : 10$$
$$10d = 7D$$
$$d = \frac{7}{10} D$$
$$d = \frac{7}{10} \cdot 8 = 5{,}6 \approx 6$$

Es müssen also 6 Einheiten zur letzten Stelle der Mantisse addiert werden. Zum Numerus 5297 gehört damit die Mantisse 7241.

$$\lg 529{,}71 = 2.7241$$

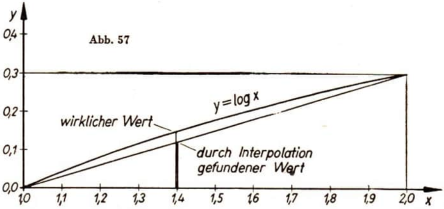


Abb. 57

In diesem Zusammenhang sind noch einige Bemerkungen zur Interpolation nötig. Bei dem eben geschilderten Verfahren der Interpolation nehmen wir an, daß die Änderung des Logarithmus proportional der Änderung des Numerus sei. Das ist aber nicht der Fall; denn eine Proportionalität zwischen Logarithmus und Numerus hätte zur Folge, daß die Logarithmusfunktion durch eine Gerade dargestellt würde. Das Bild der Logarithmusfunktion $y = \lg x$ ist keine Gerade, wie besonders der in Abbildung 57 dargestellte Ausschnitt aus dem Bilde der Logarithmusfunktion für $1 \leqq x \leqq 2$ erkennen läßt.

Die Interpolation kann also nur angenäherte Werte liefern. Sie ist in der Praxis aber bis auf wenige Ausnahmen durchaus brauchbar, weil die Abweichung der Logarithmusfunktion von der Geraden in dem betrachteten Intervall sehr gering ist und weil die Logarithmen selbst auch Näherungswerte sind.

Aufgaben

Suchen Sie mit Hilfe der Logarithmentafel folgende Logarithmen auf!

11.	a) lg 2750	b) lg 3180	c) lg 9270	d) lg 5830	e) lg 1960
12.	a) lg 4941	b) lg 7825	c) lg 3982	d) lg 9889	e) lg 6673
	f) lg 8744	g) lg 3892	h) lg 5007	i) lg 3477	k) lg 2378
13.	a) lg 7953	b) lg 7095	c) lg 6135	d) lg 2409	e) lg 1119
	f) lg 2796	g) lg 1589	h) lg 1009	i) lg 9976	k) lg 3579
14.	a) lg 93 296	b) lg 93 297	c) lg 93 298	d) lg 93 299	e) lg 93 300
15.	a) lg 24,61	b) lg 247,3	c) lg 1,729	d) lg 34,57	e) lg 2,999
16.	a) lg 0,2471	b) lg 0,4848	c) lg 0,2358	d) lg 0,004455	e) lg 0,0002799
17.	a) lg 45 321	b) lg 23 759	c) lg 43 889	d) lg 37 968	e) lg 77 637
18.	a) lg 472,21	b) lg 2,9937	c) lg 9972,3	d) lg 76,482	e) lg 0,73944
19.	a) lg 200,79	b) lg 1,0004	c) lg 0,00043257	d) lg 61 913	e) lg 5,0904
20.	a) lg 234 768	b) lg 1,06007	c) lg 0,000007	d) lg 20,0004	e) lg 1000,09

21. Begründen Sie, warum es sich empfiehlt, in der Logarithmentafel die 5stelligen Logarithmen der Zahlen von 1000 bis 1099 aufzunehmen!

2) Aufsuchen des Numerus zu gegebenem Logarithmus

Zum Aufsuchen des Numerus wird die Logarithmentafel in umgekehrter Richtung verwendet.

1. **Beispiel:** $\lg x = 1.7202$

Die Kennzahl 1 besagt, daß der Numerus zwischen 10 und 100 liegt, also zweistellig ist. (Begründung!)

Die Mantisse findet man im Schnittpunkt der zur Ziffernfolge 52 gehörigen Zeile und der zur Ziffer 5 gehörigen Spalte.

Damit ist $x = 52{,}5.$

Wir prüfen das Ergebnis, indem wir lg 52,5 aufsuchen.

2. **Beispiel:** $\lg x = 0.2068$

Die Kennzahl 0 besagt, daß der Numerus zwischen 1 und 10 liegt, also einstellig ist. Zur Mantisse 2068 gehört die Ziffernfolge 161.

$$x = 1{,}61$$

3. **Beispiel:** $\lg x = 0.7917 - 3$

Die Kennzahl -3 besagt, daß der Numerus zwischen 0,001 und 0,0001 liegt, also die Form 0,00... besitzt.

Zur Mantisse 7917 gehört die Ziffernfolge 619.

$$x = 0{,}00619$$

Nur in den seltensten Fällen wird die Mantisse unmittelbar in der Tafel stehen.

4. **Beispiel:** $\lg x = 2.5384$

Die Kennzahl 2 besagt, daß der Numerus zwischen 100 und 1000 liegt. Die Mantisse 5384 liegt zwischen den beiden in der Tafel aufeinanderfolgenden Mantissen 5378 und 5391.

Zur Mantisse 5378 gehört die Ziffernfolge 3450 ⎤
zur Mantisse 5384 gehört die Ziffernfolge 345. ⎦ n
zur Mantisse 5391 gehört die Ziffernfolge 3460.

Einem Zuwachs der Mantisse um 13 Einheiten der letzten Stelle entspricht ein Zuwachs des Numerus um 10 Einheiten; einem Zuwachs der Mantisse um 6 Einheiten entspricht ein Zuwachs des Numerus um n Einheiten.

Damit ergibt sich die Proportion:

Numeruszuwachs n: Numeruszuwachs 10 = Mantissenzuwachs 6: Mantissenzuwachs 13.

$$n : 10 = 6 : 13$$
$$13n = 60$$
$$n = \frac{60}{13} \approx 4{,}62 \approx 4{,}6 \approx 5.$$

Die vierte Stelle der gesuchten Ziffernfolge des Numerus ist 5; die Ziffernfolge lautet also 3455.

Damit wird $x = 345{,}5.$

Wir prüfen das Ergebnis, indem wir lg 345,5 aufsuchen.

Bei einer Reihe von logarithmischen Rechnungen wird es — wie wir im folgenden sehen werden — nötig sein, die Form der Schreibung von Logarithmen abzuändern.

a) So kann man beispielsweise statt $\lg x = 0.2132 - 1$
auch schreiben: $\lg x = 1.2132 - 2$
oder $\lg x = 2.2132 - 3$
oder $\lg x = 3.2132 - 4.$

b) Statt $\lg x = 3.2532$
kann man auch schreiben:
$\lg x = 4.2532 - 1$
oder $\lg x = 5.2532 - 2$

Aufgaben

22. a) $\lg x = 2.8062$	**b)** $\lg x = 4.5763$	**c)** $\lg x = 0.7520$
23. a) $\lg x = 0.8904-1$	**b)** $\lg x = 0.5353-2$	**c)** $\lg x = 0.0170-3$
24. a) $\lg x = 0.9069-2$	**b)** $\lg x = 0.6454-1$	**c)** $\lg x = 0.4048-5$
25. a) $\lg x = 0.5647$	**b)** $\lg x = 0.8463-4$	**c)** $\lg x = 3.2201$
26. a) $\lg x = 1.7307$	**b)** $\lg x = 3.0119$	**c)** $\lg x = 2.4222$
27. a) $\lg x = 0.6317-1$	**b)** $\lg x = 0.4141-3$	**c)** $\lg x = 0.3333-5$
28. a) $\lg x = 0.1791-4$	**b)** $\lg x = 0.3000-2$	**c)** $\lg x = 0.9240-2$
29. a) $\lg x = 2.7330$	**b)** $\lg x = 3.1421$	**c)** $\lg x = 0.8235-1$
30. a) $\lg x = 1.5051$	**b)** $\lg x = 0.4891-2$	**c)** $\lg x = 4.1392$

57. Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen

Die Grundlage für das Rechnen mit Logarithmen bilden die sogenannten Logarithmengesetze. Sie geben an, wie der Logarithmus eines Produktes, eines Quotienten, einer Potenz und einer Wurzel zu bilden ist. Sie gelten zwar für Logarithmen beliebiger Basis, werden jedoch im vorliegenden Falle nur für die dekadischen Logarithmen hergeleitet. Da die Logarithmen bekanntlich Exponenten zur Basis 10 darstellen, weisen die Logarithmengesetze weitgehende Übereinstimmung mit den Gesetzen auf, die für das Rechnen mit Potenzen gleicher Basis gelten.

1) Der Logarithmus eines Produktes

Für $100 \cdot 1000$ ergibt sich als Produkt 100000.

Aus $100 = 10^2$ folgt $\lg 100 = 2$;
und aus $1000 = 10^3$ folgt $\lg 1000 = 3$.

Der Logarithmus des Produktes, also $\lg (100 \cdot 1000)$, soll bestimmt werden.

Da
$$100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5,$$
folgt
$$\lg(100 \cdot 1000) = 2 + 3 = 5; \text{ denn } 10^5 = 100000.$$

Wegen $2 = \lg 100$ und
$3 = \lg 1000$
ist
$$\lg(100 \cdot 1000) = \lg 100 + \lg 1000.$$

In allgemeiner Form:
u und v seien die Faktoren eines Produktes

$$\begin{aligned} u &= 10^x & x &= \lg u \\ v &= 10^y & y &= \lg v \\ uv &= 10^x \cdot 10^y & \lg uv &= x + y \\ uv &= 10^{x+y} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\lg uv = \lg u + \lg v}$$

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren.

Beispiel:

Gesucht ist $x = 302{,}7 \cdot 47{,}9$

Vor Beginn jeder Rechnung ist ein Überschlag im Kopf durchzuführen.

Überschlag: $300 \cdot 50 = 15000$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 302{,}7 + \lg 47{,}9 \\ \lg 302{,}7 &= 2.4810 \\ \lg 47{,}9 &= 1.6803 \\ \hline \lg x &= 4.1613 \\ x &= 14500 \end{aligned}$$

Aufgaben

Berechnen Sie logarithmisch!

1. a) $47 \cdot 53$ **b)** $219 \cdot 153$ **c)** $472 \cdot 902$ **d)** $201 \cdot 43$ **e)** $998 \cdot 732$

2. a) $0{,}72 \cdot 0{,}54$ **b)** $3{,}75 \cdot 42{,}9$ **c)** $7{,}03 \cdot 0{,}0042$ **d)** $0{,}804 \cdot 0{,}032$ **e)** $0{,}43 \cdot 0{,}907$

3. a) $32{,}75 \cdot 0{,}4837 \cdot 2{,}2350$ **b)** $0{,}0732 \cdot 43{,}87 \cdot 132{,}42$

4. a) $0{,}0032 \cdot 0{,}000047 \cdot 0{,}000091$ **b)** $37{,}37 \cdot 21{,}52 \cdot 9{,}13$

5. a) Berechnen Sie das Volumen der in Abbildung 58 a und b durch eine technische Zeichnung gegebenen Körper (Maße in mm!)

b) Berechnen Sie die Gewichte, wenn die Körper

1. aus Eisen $\left(\gamma = 7{,}8 \dfrac{p}{\text{cm}^3}\right)$;

2. aus Holz $\left(\gamma = 0{,}6 \dfrac{p}{\text{cm}^3}\right)$ bestehen!

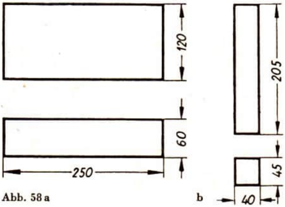


Abb. 58 a b

6. Stellen Sie als Summe zweier Logarithmen auf mehrere Arten dar und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des entsprechenden Logarithmengesetzes!

a) lg 5 **b)** lg 24 **c)** lg 0,03 **d)** lg 2,64 **e)** lg 0,0046
f) lg 2325 **g)** lg 0,000001 **h)** lg 56,25 **i)** lg 3125 **k)** lg 4,41

7. Stellen Sie als Summe dreier Logarithmen auf mehrere Arten dar und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des entsprechenden Logarithmengesetzes!

a) lg 8 **b)** lg 27 **c)** lg 100 **d)** lg 300 **e)** lg 5200
f) lg 3,6 **g)** lg 496 **h)** lg 0,24 **i)** lg 0,002 **k)** lg 0,012

8. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

a) lg 360 = lg 180 + ... **b)** lg 4,82 = lg 0,5 + ... + ...
c) .... = lg 2 + lg 0,3 **d)** .... = lg 0,04 + lg 3,52
e) lg 275 = ... + lg 1100 **f)** lg 0,04 = ... + ... + lg 20

2) Der Logarithmus eines Quotienten

Für 20000 : 40 ergibt sich als Quotient 500.

Aus $20000 = 10^{4.3010}$ folgt $\lg 20000 = 4.3010$;

und aus $40 = 10^{1.6021}$ folgt $\lg 40 = 1.6021$.

Der Logarithmus des Quotienten, also $\lg\left(\frac{20000}{40}\right)$, soll bestimmt werden:

$$20000 : 40 = 10^{4.3010} : 10^{1.6021} = 10^{4.3010-1.6021} = 10^{2.6989}.$$

Daraus folgt

$$\lg\left(\frac{20000}{40}\right) = 4.3010 - 1.6021 = 2.6989.$$

Wegen $4.3010 = \lg 20000$ und
$1.6021 = \lg 40$ ist

$$\lg\left(\frac{20000}{40}\right) = \lg 20000 - \lg 40;$$

2.6989 ist aber lg 500[1].

In allgemeiner Form:

u sei der Dividend, v der Divisor eines Bruches:

$$\begin{aligned} u &= 10^x & x &= \lg u \\ v &= 10^y & y &= \lg v \\ \frac{u}{v} &= \frac{10^x}{10^y} & & \\ \frac{u}{v} &= 10^{x-y} & \lg\frac{u}{v} &= x - y \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\lg \frac{u}{v} = \lg u - \lg v}$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

1. Beispiel:

Gesucht ist $x = 24{,}72 : 2{,}35$

Überschlag: $25 : 2{,}5 = 250 : 25 = 10$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 24{,}72 - \lg 2{,}35 \\ \lg 24{,}72 &= 1.3931 \\ -\lg 2{,}35 &= 0.3711 \\ \hline \lg x &= 1.0220 \\ x &= 10{,}52 \end{aligned}$$

2. Beispiel:

Gesucht ist $x = 0{,}8522 : 0{,}0671$

Überschlag: $0{,}8 : 0{,}08 = 80 : 8 = 10$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 0{,}8522 - \lg 0{,}0671 \\ \lg 0{,}8522 &= 0.9305 - 1 \\ -\lg 0{,}0671 &= 0.8267 - 2 \\ \hline \lg x &= 0.1038 + 1 \\ \lg x &= 1.1038 \\ x &= 12{,}7 \end{aligned}$$

[1] Aus der Logarithmentafel bestimmt man lg 500 zu 2.6990. Die auftretende Differenz beider Werte ist durch die Rundung der Logarithmen auf vier Stellen bedingt.

3. Beispiel:

Gesucht ist $x = 12{,}72 : 450{,}25$

Überschlag: $12 : 480 = 0{,}025$.

$$\lg x = \lg 12{,}72 - \lg 450{,}25$$

Lösung:

$$\begin{array}{rl} \lg\ 12{,}72 = & 11.1045 - 10 \\ -\ \lg 450{,}25 = & 2.6535 \\ \hline \lg x \quad = & 8.4510 - 10 \\ \lg x \quad = & 0.4510 - 2 \\ x = & 0{,}0283 \end{array}$$

Aufgaben

Berechnen Sie logarithmisch!

1. a) 25,7 : 13,1 b) 325,3 : 92,53 c) 1014,2 : 763,1 d) 64,82 : 13,05
2. a) 1300000 : 245000 b) 742,8 : 13,97 c) 6,483 : 2,093 d) 456,9 : 357,2
3. a) 19,35 : 0,0127 b) 948,3 : 0,725 c) 43,25 : 0,371 d) 875,2 : 0,0042
4. a) 0,732 : 0,0419 b) 0,0253 : 0,00071 c) 0,634 : 0,152 d) 0,7152 : 0,003
5. a) 15,73 : 229,3 b) 37,1 : 852,9 c) 17,256 : 211,3 d) 9,64 : 11,32
6. a) 0,347 : 0,0852 b) 0,0425 : 0,00729 c) 0,998 : 0,0889 d) 0,372 : 0,0415
7. Stellen Sie als Differenz zweier Logarithmen auf mehrere Arten dar und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des entsprechenden Logarithmengesetzes!

   a) lg 400 b) lg 160 c) lg 48 d) lg 360 e) lg 8
   f) lg 12 g) lg 9 h) lg 3,125 i) lg 0,5 k) lg 0,00421
   l) lg 0,03 m) lg 0,007 n) lg 0,00012 o) lg 0,7 p) lg 0,0214
8. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

   a) lg 400 = ... − lg 20 b) lg 65 = lg 1300 ...... c) lg 0,3 = lg 0,15 − ....
   d) ...... = lg 19 − lg 0,5 e) ...... = lg 0,5 − lg 0,25 f) lg 7,2 = lg 216 ....

3) Der Logarithmus einer Potenz

Wir betrachten dazu als Zahlenbeispiel die Gleichung

$$\text{(I)} \quad 200 = 10^{2.3010}.$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$\text{(II)} \quad 200^2 = 10^{2 \cdot 2.3010} = 10^{4.6020}.$$

In logarithmischer Schreibweise lauten die Gleichungen (I) und (II):

$$\text{(I}^+\text{)} \quad \lg 200 = 2.3010,$$
$$\text{(II}^+\text{)} \quad \lg 200^2 = 2 \cdot 2.3010.$$

Setzt man (I⁺) in (II⁺) ein, so erhält man

$$\text{(III)} \quad \lg 200^2 = 2 \cdot \lg 200.$$

In allgemeiner Form:

$$\text{(IV)} \qquad x = 10^n.$$

Wir erheben beide Seiten der Gleichung in die m-te Potenz und erhalten

$$\text{(V)} \qquad x^m = (10^n)^m = 10^{n \cdot m}.$$

In logarithmischer Schreibweise:

$$\text{(IV}^+\text{)} \qquad \lg x = n,$$
$$\text{(V}^+\text{)} \qquad \lg x^m = n \cdot m.$$

Setzt man (IV⁺) in (V⁺) ein, so erhält man

$$\mathbf{\lg x^m = m \lg x.}$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Potenzexponenten.

1. Beispiel:

Gesucht ist $x = 3^8$.

Überschlag: $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81 \approx 80 \cdot 80 = 6400$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= 8 \lg 3 \\ 8 \cdot \lg 3 &= 8 \cdot 0.4771 \\ \lg x &= 3.8168 \\ x &= 6559 \end{aligned}$$

Da fast jeder Logarithmus ein Näherungswert und daher fehlerhaft ist, ist auch das Produkt von Logarithmen fehlerhaft. In diesem Falle verachtfacht sich der Fehler des Logarithmus.

Der wirkliche Wert ist 6561.

2. Beispiel:

Gesucht ist $x = 0{,}032^3$

Überschlag: $0{,}03 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}03 = 0{,}000027$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= 3 \lg 0{,}032 \\ \lg 0{,}032 &= 0.5051 - 2 \\ 3 \cdot \lg 0{,}032 &= 1.5153 - 6 \\ \lg x &= 0.5153 - 5 \\ x &= 0{,}00003276 \end{aligned}$$

Aufgaben

Berechnen Sie logarithmisch!

1. a) 2^5 **b)** 2^8 **c)** 3^9 **d)** $0{,}6^4$ **e)** $2{,}5^6$
f) 372^3 **g)** 49^2 **h)** $2{,}79^4$ **i)** $53{,}7^2$ **k)** $15{,}2^3$

2. a) $3{,}5^3$ **b)** $0{,}042^3$ **c)** $0{,}06^4$ **d)** $21{,}73^2$ **e)** 103^3
f) $205{,}1^2$ **g)** 604^2 **h)** $0{,}314^2$ **i)** $2{,}476^2$ **k)** $0{,}0000006^4$

3. a) $0{,}0042^2$ **b)** $0{,}042^2$ **c)** $0{,}42^2$ **d)** $4{,}2^2$ **e)** 42^2
f) 420^2 **g)** $4\,200^2$ **h)** Was erkennen Sie?

4. Vervollständigen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\lg 16 = \ldots \lg 4$ **b)** $\lg 2500 = 2 \cdot \lg \ldots$ **c)** $\lg 0{,}008 = \ldots \lg 0{,}2$

d) $\lg 56{,}25 = 2 \cdot \lg \ldots$ **e)** $\ldots\ldots\ldots = 3 \cdot \lg 6$ **f)** $\ldots\ldots\ldots = 5 \cdot \lg 2$

g) Bilden Sie drei Beispiele entsprechend den Aufgaben a), b) und e)!

4) Der Logarithmus einer Wurzel

Da jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten ausgedrückt werden kann, gilt das für das Logarithmieren einer Potenz ausgesprochene Gesetz auch für das Logarithmieren einer Wurzel.

Wir betrachten hierzu als Zahlenbeispiel die Gleichung

$$\text{(I)}\quad 64 = 10^{1.8062}.$$

Wir ziehen hieraus die 3. Wurzel:

$$\text{(II)}\quad \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{10^{1.8062}},$$

$$\text{(III)}\quad 64^{\frac{1}{3}} = (10^{1.8062})^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{(III)}\quad 64^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3} \cdot 1.8062}.$$

In logarithmischer Schreibweise lauten die Gleichungen

$$\text{(I}^+\text{)}\quad \lg 64 = 1.8062,$$

$$\text{(III}^+\text{)}\quad \lg 64^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 1.8062.$$

Setzt man (I⁺) in (III⁺) ein, so erhält man

$$\lg 64^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \lg 64 \quad \text{oder}$$

$$\lg \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \lg 64.$$

In allgemeiner Form: $\text{(IV)}\quad x = 10^n$

Wir ziehen auf beiden Seiten der Gleichung die m-te Wurzel und erhalten

$$\text{(V)}\quad \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{10^n} \quad \text{oder}$$

$$\text{(VI)}\quad x^{\frac{1}{m}} = 10^{\frac{n}{m}}$$

In logarithmischer Schreibweise:

$$\text{(IV}^+\text{)}\quad \lg x = n$$

$$\text{(VI}^+\text{)}\quad \lg x^{\frac{1}{m}} = \frac{n}{m}.$$

Setzt man (IV⁺) in (VI⁺) ein, so erhält man

$$\lg x^{\frac{1}{m}} = \frac{\lg x}{m} \quad \text{oder}$$

$$\lg \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m} \lg x.$$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikanden dividiert durch den Wurzelexponenten.

1. Beispiel:

Gesucht ist $x = \sqrt[3]{29}$

Überschlag: $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{29} < \sqrt[3]{64}$

$$3 < \sqrt[3]{29} < 4.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \frac{1}{3} \lg 29 \\ \lg 29 &= 1.4624 \\ \frac{1}{3} \lg x &= 1.4624 : 3 \\ \lg x &= 0.4875 \\ x &= 3{,}073 \end{aligned}$$

2. Beispiel:

Gesucht ist $x = \sqrt[4]{0{,}3}$

Überschlag: $\sqrt[4]{1} > \sqrt[4]{0{,}3} > \sqrt[4]{0{,}0001}$

$$1 > \sqrt[4]{0{,}3} > 0{,}1$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \frac{1}{4} \lg 0{,}3 \\ \lg 0{,}3 &= 0.4771 - 1 \end{aligned}$$

In dieser Form geschrieben kann der Logarithmus nicht durch 4 dividiert werden, da als Quotient nur Logarithmen mit ganzen Kennzahlen auftreten dürfen.
Wir schreiben deshalb

$$\begin{aligned} \lg 0{,}3 &= 3.4771 - 4 \\ \frac{1}{4} \lg 0{,}3 &= (3.4771 - 4) : 4 \\ \lg x &= 0.8693 - 1 \\ x &= 0{,}7402 \end{aligned}$$

Nach Kenntnis der Logarithmengesetze ist es nun auch möglich, unsere Aufgabe fortzuführen, mit der wir anfangs die Notwendigkeit der Logarithmenrechnung begründet hatten (vgl. S. 120).

Es ergab sich Gleichung (2): $1{,}25^n = 10$.

Aus der Gleichungslehre ist uns bekannt, daß eine Gleichung dann richtig bleibt, wenn auf beiden Seiten die gleichen Rechenoperationen vorgenommen werden. Das gilt auch für die letzte der Rechenoperationen, das Logarithmieren.
Wir logarithmieren die Gleichung (2) und erhalten

$$n \lg 1{,}25 = \lg 10$$

$$n \lg 1{,}25 = 1$$

$$n = \frac{1}{\lg 1{,}25} \qquad \lg 1{,}25 = 0.0969$$

$$n = \frac{1}{0.0969} \approx 10$$

Es müssen also 10 Drehzahlstufungen[1] vorgenommen werden.

Nach DIN 323 sind das $100\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $125\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $160\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $200\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $250\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $315\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $400\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $500\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $630\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$; $800\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$.

Aufgaben

Berechnen Sie logarithmisch!

1. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{61}$ c) $\sqrt{75}$ d) $\sqrt{1{,}09}$ e) $\sqrt{2}$
   f) $\sqrt[3]{57{,}9}$ g) $\sqrt[3]{2{,}2}$ h) $\sqrt[3]{300}$ i) $\sqrt[3]{48{,}20}$ k) $\sqrt[3]{15{,}32}$

2. a) $\sqrt{0{,}1}$ b) $\sqrt{0{,}02}$ c) $\sqrt{0{,}4}$ d) $\sqrt{0{,}004}$ e) $\sqrt{0{,}76}$
   f) $\sqrt[3]{0{,}7}$ g) $\sqrt[5]{0{,}231}$ h) $\sqrt[4]{0{,}0002}$ i) $\sqrt[3]{0{,}41}$ k) $\sqrt[3]{0{,}27}$

3. a) $\sqrt{299{,}6}$ b) $\sqrt[5]{0{,}0034}$ c) $\sqrt[3]{21{,}7}$ d) $\sqrt[4]{0{,}63}$ e) $\sqrt[3]{21250}$

4. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

   a) $\lg \sqrt[3]{209} = \frac{\cdots\cdots}{3}$

   b) $\lg \sqrt{129} = \ldots \lg 129$

   c) $\lg \sqrt[4]{17{,}03} = \ldots \lg 17{,}03$

   d) $\lg \sqrt{75} = \frac{1}{2}\,(\ldots\ldots - \lg 5)$

   e) $\ldots\ldots\ldots = \frac{2}{3} \lg 10$

   f) $\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6} \lg 0{,}03$

   g) $\lg \sqrt[3]{200{,}6} = \ldots \lg 200{,}6$

5. Begründen Sie $\quad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a$, aber $\lg \sqrt[n]{a} \neq \lg \frac{a}{n}$!

58. Die logarithmische Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke

Die folgenden Ausdrücke sind logarithmisch zu berechnen. Vor Ausführung jeder Rechnung sind ein Überschlag sowie ein Schema der logarithmischen Rechnung anzufertigen.

1. Beispiel:

$$x = \frac{256{,}4 \cdot 0{,}00973^4}{56{,}13 \cdot 0{,}0000752^3}$$

[1] Das Ergebnis muß ganzzahlig sein, da es die Anzahl der Drehzahlstufungen angibt.

Überschlag:

$$x \approx \frac{250 \cdot 0{,}01^4}{50 \cdot 0{,}00008^3}$$

$$\approx \frac{5 \cdot 10^7}{500} = 100000$$

$$\lg x = \lg 256{,}4 + 4 \lg 0{,}00973 - (\lg 56{,}13 + 3 \lg 0{,}0000752)$$

$$\begin{aligned}
\lg 0{,}00973 &= 0.9881 - 3\\
4 \cdot \lg 0{,}00973 &= 3.9524 - 12\\
\lg 256{,}4 &= 2.4089\\
\hline
\lg \text{Zähler} &= 6.3613 - 12\\
\hline
\lg 0{,}0000752 &= 0.8762 - 5\\
3 \cdot \lg 0{,}0000752 &= 2.6286 - 15\\
\lg 56{,}13 &= 1.7492\\
\hline
\lg \text{Nenner} &= 4.3778 - 15\\
\hline
\lg x &= 1.9835 + 3\\
&= 4.9835\\
x &= 96280
\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$x = \frac{12{,}357 \cdot \sqrt[3]{0{,}07324}}{0{,}672 \cdot \sqrt{0{,}943}}$$

Überschlag:

$$x \approx \frac{12 \cdot 0{,}4}{0{,}6 \cdot 1} = 8$$

$$\lg x = \lg 12{,}357 + \frac{1}{3} \lg 0{,}07324 - \left(\lg 0{,}672 + \frac{1}{2} \lg 0{,}943\right)$$

$$\begin{aligned}
\lg 0{,}07324 &= 0.8647 - 2\\
&= 1.8647 - 3\\
\frac{1}{3} \lg 0{,}07324 &= 0.6216 - 1\\
\lg 12{,}357 &= 1.0919\\
\hline
\lg \text{Zähler} &= 11.7135 - 11\\
\hline
\lg 0{,}943 &= 0.9745 - 1\\
&= 1.9745 - 2\\
\frac{1}{2} \lg 0{,}943 &= 0.9873 - 1\\
\lg 0{,}672 &= 0.8274 - 1\\
\hline
\lg \text{Nenner} &= 1.8147 - 2\\
\hline
\lg x &= 9.8988 - 9\\
&= 0.8988\\
x &= 7{,}922
\end{aligned}$$

Eine Summe kann nur als Ganzes, aber niemals gliedweise logarithmiert werden: $\lg(a+b) \neq \lg a + \lg b$; vielmehr: $\lg a + \lg b = \lg(ab)$.

3. Beispiel:

$$x = \frac{2{,}348^2 + 6\sqrt[3]{58{,}6} + 323}{5}$$

Überschlag:

$$x \approx \frac{2^2 + 6 \cdot 4 + 323}{5} = \frac{351}{5} \approx 70$$

$$\lg x = \lg \text{Zähler} - \lg 5$$

$$\text{Zähler} = A + B + C$$

$$A = 2{,}348^2$$

$$\lg A = 2 \lg 2{,}348$$

$$\lg 2{,}348 = 0.3707$$

$$\lg A = 2 \lg 2{,}348 = 0.7414$$

$$A = 5{,}513$$

$$B = 6\sqrt[3]{58{,}6}$$

$$\lg B = \lg 6 + \frac{1}{3}\lg 58{,}6$$

$$\begin{aligned} \lg 58{,}6 &= 1.7679 \\ \frac{1}{3}\lg 58{,}6 &= 0.5893 \\ \lg 6 &= 0.7782 \\ \hline \lg B &= 1.3675 \\ B &= 23{,}306 \\ C &= 323 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B + C &= 351{,}819 \\ \lg(A+B+C) &= 2.5463 \\ \lg 5 &= 0.6990 \\ \hline \lg x &= 1.8473 \\ x &= 70{,}35 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $\dfrac{5{,}937 \cdot 0{,}32^3}{0{,}871 \cdot 9{,}53}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{12{,}58} \cdot 0{,}532 \cdot 3{,}76}{\pi^2 \cdot 0{,}732}$ **c)** $\dfrac{16{,}39 \cdot 4{,}75^3}{0{,}092 \cdot 58{,}76^2}$

2. a) $\dfrac{9{,}385 \cdot \sqrt[3]{0{,}02993}}{61{,}5 \cdot 0{,}03986}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{204{,}7} \cdot 0{,}314^2 \cdot \sqrt{52}}{0{,}0073 \cdot \sqrt[4]{4152}}$ c) $\dfrac{84{,}52^3 \cdot \sqrt[3]{164{,}2} \cdot 0{,}3}{\sqrt{111{,}2} \cdot 0{,}0092^3}$

3. a) $\dfrac{2{,}549 + \sqrt[3]{47{,}835}}{0{,}29}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{0{,}9876} - 13{,}32^3 - 6\sqrt{2}}{0{,}29 \cdot \sqrt[3]{18}}$ c) $\dfrac{12470 - \sqrt[3]{0{,}063} + 13{,}32^2}{\sqrt{32{,}64} - 8{,}97^3}$

4. a) $\sqrt[3]{\dfrac{23{,}35}{61{,}27}} - \sqrt[4]{\dfrac{89{,}069}{21{,}37}}$ b) $\sqrt{0{,}0325^2 + 0{,}973^2}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{488{,}4^2 + 0{,}97^3}{\sqrt{875{,}3}}}$

5. a) $\sqrt[4]{299{,}5^3}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{96{,}3^2 \cdot 0{,}0081^3}{\sqrt{4{,}21^3}}}$ c) $\sqrt{6{,}632^2 - 0{,}368^2}$

VIII. Der logarithmische Rechenstab

59. Allgemeines über den Rechenstab

Im praktischen Rechnen, besonders in allen Zweigen des Maschinenbaues, des Bauwesens und der chemischen Industrie, benutzt man sehr häufig den **logarithmischen Rechenstab.**

Er kann zum Multiplizieren und Dividieren, zum Bestimmen der Quadratzahlen, Kuben, Quadratwurzeln und Kubikwurzeln sowie zur Bestimmung von Kreisinhalten u. a. benutzt werden.

Für spezielle Zwecke der industriellen Praxis existieren besondere Rechenstäbe, z. B. für die Berechnung von Wellen auf Biegung und Verdrehung, die Berechnung von Wechselrädern, die Berechnung von Transmissionen usw.

Die Vorzüge des Rechenstabes bestehen u. a. darin, daß für Rechnungen, die sonst schriftlich oder im Kopf ausgeführt werden müßten, Arbeitszeit eingespart wird; sie bestehen weiter in seiner Handlichkeit, in seiner ständigen Betriebsbereitschaft und in seiner geräuschlosen Arbeitsweise.

Der Rechenstab ist für Ingenieure, Meister, Facharbeiter und Schüler zu einem unentbehrlichen Rechenhilfsmittel geworden, das aber nur dann völlig ausgenutzt werden kann, wenn man den Umgang mit ihm sicher beherrscht.

Die Nachteile liegen in der häufig geringeren Genauigkeit der Rechnung und der schwierigen Durchführbarkeit längerer Rechnungen. In den meisten Fällen genügt aber die Genauigkeit des Rechenstabes den Anforderungen der Praxis.

Genau wie beim Rechnen mit Logarithmen werden die Grundrechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation, Division) auf solche der 1. Stufe (Addition, Subtraktion) und die Rechenoperationen der 3. Stufe (Potenzieren, Radizieren) auf solche der 2. Stufe zurückgeführt.

60. Der Aufbau des Rechenstabes

Der Rechenstab besteht aus 3 Teilen: **Stabkörper, Zunge** und **Läufer** mit Ablesestrichen. Sind drei Ablesestriche auf dem Läufer vorhanden, so benutzen wir zunächst nur den mittleren.

Auf den inneren Rändern des Stabkörpers und den Rändern der Zunge befindet sich jeweils eine Skala. Diese vier Skalen werden von oben nach unten mit den Buchstaben A, B, C, D bezeichnet (s. Abb. 59). Dabei stimmen Skala A mit Skala B und Skala C mit Skala D überein.

Die Skalen der gebräuchlichsten Rechenstäbe besitzen eine Länge von 25 cm. Die Skalenteilung weicht aber von der beispielsweise auf einem Lineal befindlichen Teilung ganz erheblich ab. Wir erkennen z. B., daß auf den Skalen die Abstände zwischen den einzelnen Teilstrichen in gleichen Intervallen nach rechts zu kleiner werden.

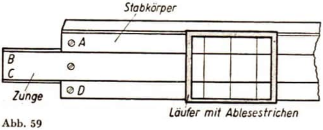


Abb. 59

Wir betrachten zunächst das Zustandekommen dieser Teilung auf den Skalen C und D. Auf der Gesamtlänge der Skala $l = 25$ cm werden die Logarithmen der Zahlen $1 \cdots 10$ durch Strecken dargestellt.

$\lg 1 = 0$, also bildet $\lg 1$ den Anfang der Skala.

Um $\lg 2$ auf der Skala grafisch darzustellen, trägt man vom Skalenanfang die Strecke $(\lg 2) \cdot 25\text{ cm} = 0{,}3010 \cdot 25\text{ cm} \approx 7{,}52$ cm ab. Der entstandene Skalenpunkt wird mit 2 beschriftet.

In gleicher Weise stellt man die anderen Logarithmen durch Strecken dar (s. Abb. 60).

Bei der Beschriftung dieser Skalenteilung — der logarithmischen Teilung — auf dem Rechenstab sind also die Numeruswerte (z. B. 2) und nicht die zur Konstruktion der Teilstriche benutzten Logarithmen (lg 2) verwendet worden. Man muß sich beim Rechnen mit dem Rechenstab stets darüber im klaren sein, daß die Lage der Teilstriche durch die Logarithmen der dabeistehenden Zahlen festgelegt wird.

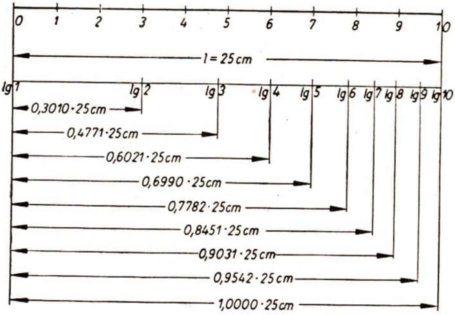


Abb. 60

Das Rechnen mit dem Rechenstab ist ein Rechnen mit Logarithmen.

Wir wissen aus der Logarithmenrechnung, daß sich die Logarithmen von Zahlen gleicher Ziffernfolge nur in der Kennzahl unterscheiden. So ist

$$\begin{aligned}
\lg 253 &= 2.4031\\
\lg 25{,}3 &= 1.4031\\
\lg 2{,}53 &= 0.4031\\
\lg 0{,}253 &= 0.4031 - 1
\end{aligned}$$

usw.

Demgemäß sind die Skalen C und D nicht nur für das Rechnen mit Zahlen zwischen 1 und 10 zu verwenden. Die Teilpunkte der Skalen C und D geben also nicht nur die Mantissen von Logarithmen der Zahlen 1 ··· 10 an; vielmehr liefern sie die Mantissen aller Zahlen gleicher Ziffernfolge.

Die Teilpunkte der Skalen des Rechenstabes können somit als Marken für Ziffernfolgen von Zahlen gedeutet werden. Die Größenordnungen der Zahlen, d. h. die Kennzahlen der zugehörigen Logarithmen, müssen besonders bestimmt werden. Für Zahlen gleicher Ziffernfolge, z. B. 78; 7,8; 0,078; 780000 ergibt sich stets die gleiche Einstellung des Läuferstriches.

Da in die Berechnungen mit dem Rechenstab im allgemeinen nur Ziffernfolgen eingehen, entsteht auch nur die Ziffernfolge des Ergebnisses. Die Stellung des Kommas muß durch eine Überschlagsrechnung ermittelt werden.

Auf den Skalen C und D können im Bereich von 1···2 mit Sicherheit die drei ersten geltenden Ziffern abgelesen werden, im restlichen Teil der Skala die ersten beiden geltenden Ziffern. Die jeweils nächste geltende Ziffer ist zu schätzen. Dabei wird linear interpoliert; d. h., es wird kein Gebrauch von der Eigenart der logarithmischen Teilung gemacht, daß die Teilstriche nach rechts zu enger aufeinanderfolgen.

Die Skalen A und B unterscheiden sich von den Skalen C und D nur dadurch, daß die Skalenlänge halb so groß ist, also 12,5 cm beträgt. Daher ist es möglich, zwei Skalen nebeneinander zu legen. Die Genauigkeit ist auf diesen Skalen halb so groß wie auf den Skalen C und D. Für das Interpolieren gilt sinngemäß das gleiche wie für die Skalen C und D.

Aufgaben

Die vor der Ziffernfolge stehenden Buchstaben geben die Skala an, die benutzt werden soll.

1. Der Läuferstrich ist zu stellen auf

D 1500,	D 1050,	D 1005,	D 1320,	D 1325,	D 2130,	D 2385,
D 2965,	D 3005,	D 3135,	D 3142,	D 3265,	D 3575,	D 3795,
D 401,	D 419,	D 444,	D 502,	D 525,	D 673,	D 679,
D 722,	D 777,	D 811,	D 891,	D 899,	D 901,	D 963!

2. Stellen Sie C 1 über D 1250! Was lesen Sie ab unter C 12, C 14, C 18, C 19, C 2160, C 24000, C 3, C 32, C 336, C 5, C 698, C 705, C 8?

3. Stellen Sie C 10 über D 825! Was lesen Sie ab unter C 2, C 3, C 7, C 5, C 8, C 125, C 736, C 358, C 143, C 1736, C 224, C 597, C 673?

4. Stellen Sie C 1 über D 3! Was lesen Sie ab unter C 1005, C 1135, C 129, C 1475, C 163, C 187, C 213, C 266, C 278, C 306, C 324, C 237, C 246?

61. Allgemeine Grundsätze für das Rechnen mit dem Rechenstab

1. Nach Möglichkeit sollen beim Stabrechnen die beiden Grundskalen C und D benutzt werden, weil das Rechnen mit ihnen die größere Genauigkeit ergibt.
2. Vor dem Einstellen sind Stellenzahl und Kommastellung des Ergebnisses zu bestimmen. Dazu ist eventuell vor der Einstellung am Rechenstab die Aufgabe in die Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen umzuformen und durch eine Überschlagsrechnung die Größenordnung des Ergebnisses zu bestimmen.
3. Das Verschieben der Zunge, das Einstellen des Läufers sowie das Ablesen des Ergebnisses müssen sehr sorgfältig ausgeführt werden, um die größtmögliche Genauigkeit des Ergebnisses zu erreichen.

62. Multiplikation

Zur Wiederholung:

1. Rechnen Sie im Kopf!

a)	$6 \cdot 0{,}3$;	$9 \cdot 0{,}4$;	$8 \cdot 0{,}7$;	$3 \cdot 0{,}9$;	$9 \cdot 0{,}8$
b)	$0{,}4 \cdot 5$;	$0{,}9 \cdot 3$;	$0{,}2 \cdot 8$;	$0{,}5 \cdot 6$;	$0{,}07 \cdot 3$
c)	$0{,}5 \cdot 0{,}3$;	$0{,}9 \cdot 0{,}4$;	$0{,}6 \cdot 0{,}7$;	$0{,}8 \cdot 0{,}5$;	$0{,}2 \cdot 0{,}9$
d)	$0{,}2 \cdot 0{,}04$;	$0{,}05 \cdot 0{,}3$;	$0{,}4 \cdot 0{,}0006$;	$0{,}03 \cdot 0{,}05$;	$0{,}09 \cdot 0{,}7$

2. Schreiben Sie die Produkte der Aufgabe 1 mit abgetrennten Zehnerpotenzen!

3. Was können Sie aussagen über die Größe **a)** eines Produktes aus zwei echten Brüchen, **b)** eines Produktes aus einem echten und einem unechten Bruch, **c)** eines Produktes aus zwei unechten Brüchen?

1) Die Grundlage für die Multiplikation mit dem Rechenstab bildet das Logarithmengesetz $\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$.
Der Multiplikation entspricht am Rechenstab die Addition von Strecken (vgl. Abb. 61).

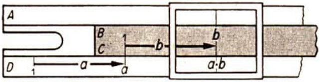


Abb. 61

1. Beispiel: $x = 3 \cdot 2{,}6$

Über D 3 wird C 1 eingestellt; unter C 2 – 6 (lies: C zwei sechs) wird D 7 – 8 abgelesen.

$x = 7{,}8$

2. Beispiel: $x = 15{,}34 \cdot 22{,}96$

Überschlag: $x \approx 15 \cdot 20 = 300$

Lösung: C 1 über D 1 – 5 – 3 – 4 (4 geschätzt!); unter C 2 – 2 – 9 – 6 (6 geschätzt!) wird abgelesen D 3 – 5 – 2

$x = 352$

3. Beispiel: $x = 0{,}0027 \cdot 0{,}34$

Überschlag: $x \approx 0{,}003 \cdot 0{,}3 = 0{,}0009.$

Lösung: C 1 über D 2 — 7; unter C 3 — 4 wird abgelesen D 9 — 1 — 8

$x = 0{,}000918$

2) Multiplikation mit Rückschlag

Es ist folgende Aufgabe zu lösen: $x = 3{,}5 \cdot 8{,}2$ (vgl. Abb. 62).

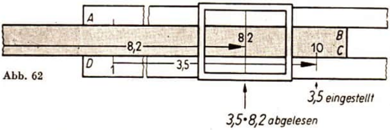


Abb. 62

Dazu müßte C 1 über D 3 — 5 gestellt und unter C 8 — 2 auf D abgelesen werden. Das ist nicht möglich, weil die Zunge über den Stabkörper hinausragt. In einem solchen Falle muß anstatt C 1 der Endpunkt C 10 über D 3 — 5 gestellt werden. Dann wird unter C 8 — 2 auf Skala D die Ziffernfolge des Produktes abgelesen. Die Multiplikation erfolgt „mit Rückschlag".

Erläuterung: Unter C 1 würde auf Skala D das Produkt $\frac{3{,}5}{10} = 0{,}35$ liegen. Man addiert also gewissermaßen zu $\lg\left(\frac{3{,}5}{10}\right)$ den Wert lg 8,2. Damit erhält man C $\frac{3{,}5 \cdot 8{,}2}{10}$. Der Logarithmus von $\frac{3{,}5 \cdot 8{,}2}{10}$ hat die gleiche Mantisse wie $\lg(3{,}5 \cdot 8{,}2)$; deshalb besitzen beide Numeri die gleiche Ziffernfolge.

1. Beispiel: $x = 3 \cdot 9$

Lösung: C 10 über D 3; unter C 9 wird D 2 — 7 abgelesen.

$x = 27$

2. Beispiel: $x = 32{,}8 \cdot 812$

Überschlag: $x \approx 30 \cdot 800 = 24000$

Lösung: C 10 über D 3 — 2 — 8; unter C 8 — 1 — 2 wird D 2 — 6 — 6 — 4 abgelesen.

$x = 26640.$

3. Beispiel: $x = 8{,}02 \cdot 0{,}00735$

Überschlag: $x \approx 8 \cdot 0{,}007 = 0{,}056$

Lösung: C 10 über D 8 — 0 — 2; unter C 7 — 3 — 5 wird D 5 — 8 — 9 abgelesen.

$x = 0{,}0589$

3) Produkte aus mehr als zwei Faktoren

Die Berechnung von Produkten aus mehr als zwei Faktoren geschieht in der Weise, daß das Produkt aus zwei Faktoren mit dem dritten Faktor, das so entstandene Produkt mit dem vierten Faktor usw. multipliziert wird. Die Zwischenergebnisse werden mit dem Läuferstrich festgehalten.

Beispiel: Berechnen Sie das Volumen eines quaderförmigen Gärfutterbehälters, dessen Länge $a = 6{,}80$ m, Breite $b = 2{,}50$ m und Tiefe $c = 3{,}20$ m betragen!

Überschlag: $V \approx 7\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 3\ \mathrm{m} = 42\ \mathrm{m}^3$

Lösung: C 1 über D 6 – 8; Läuferstrich auf C 2 – 5; Zunge so verschieben, daß C 1 unter Läuferstrich zu liegen kommt; unter C 3 – 2 wird D 5 – 4 – 5 abgelesen.

$V = 54{,}5\ \mathrm{m}^3$

Aufgaben

Benutzen Sie zur Lösung die Skalen C und D!

1. a) 1,23 · 4,29 **b)** 2,73 · 4,06 **c)** 2,39 · 1,73 **d)** 3,74 · 1,98
2. a) 0,132 · 0,042 **b)** 0,425 · 0,012 **c)** 0,0042 · 0,139 **d)** 0,473 · 0,0003
3. a) 24,7 · 13,2 **b)** 17,5 · 22,7 **c)** 43,7 · 15,1 **d)** 37,2 · 10,6
4. a) 17,5 · 3,62 **b)** 5,51 · 12,2 **c)** 43,3 · 1,72 **d)** 11,9 · 2,31
5. a) 4,1 · 12,7 **b)** 2,9 · 11,8 **c)** 4,7 · 13,9 **d)** 19,2 · 4,3
6. a) 139 · 16,5 **b)** 263 · 37,1 **c)** 15,9 · 387 **d)** 429 · 1,37
7. a) 128 · 46,3 **b)** 363 · 1,82 **c)** 29,34 · 10,03 **d)** 8,2 · 102,1
8. a) 0,129 · 12,7 **b)** 39,3 · 0,234 **c)** 311 · 16,1 **d)** 1,73 · 406
9. a) 1350 · 2735 **b)** 4125 · 1005 **c)** 376 · 206,7 **d)** 100 · 3,1010
10. a) 221,3 · 19,3 **b)** 409,5 · 0,0014 **c)** 0,0375 · 2100 **d)** 3755 · 173,2
11. a) 0,632 · 0,111 **b)** 0,332 · 23,1 **c)** 19,61 · 17,3 **d)** 4,210 · 0,0109
12. a) 23,75 · 0,023 **b)** 0,0052 · 0,1019 **c)** 1342 · 249 **d)** 43,72 · 0,119
13. a) 6,32 · 9,17 **b)** 8,04 · 6,16 **c)** 5,29 · 7,61 **d)** 9,13 · 5,87
14. a) 16,3 · 83,5 **b)** 81,7 · 35,5 **c)** 7,16 · 83,1 **d)** 72,5 · 7,06
15. a) 4,975 · 83,7 **b)** 63,17 · 682,5 **c)** 519 · 72,8 **d)** 672,5 · 19,45
16. a) 632 · 884,5 **b)** 919,1 · 452 **c)** 1850 · 6355 **d)** 176,5 · 968,3
17. a) 0,82 · 0,0752 **b)** 0,673 · 0,874 **c)** 0,025 · 0,689 **d)** 0,885 · 0,997
18. a) 137,6 · 0,92 **b)** 0,846 · 173,5 **c)** 4635 · 0,0439 **d)** 251,3 · 0,01775
19. a) 42,26 · 0,0463 **b)** 5526 · 0,812 **c)** 713,2 · 0,468 **d)** 0,00027 · 46,35
20. a) 43,6 · 634 **b)** 0,00426 · 0,000892 **c)** 0,3891 · 651 **d)** 73,25 · 0,4965
21. a) 25 · 37 · 9 **b)** 16 · 48 · 3 **c)** 5 · 19 · 36
22. a) 21,7 · 15,4 · 8,9 **b)** 22,7 · 96,3 · 15,1 **c)** 9,6 · 86,3 · 17,5
23. a) 226,4 · 0,36 · 15,21 **b)** 4820 · 16,5 · 0,0426 **c)** 193,6 · 72,1 · 0,43
24. a) 0,068 · 0,4325 · 0,4 **b)** 0,667 · 0,0442 · 19,62 **c)** 4711 · 0,82 · 163,5
25. a) 152,1 · 16,95 · 0,76 **b)** 0,442 · 71,6 · 842 **c)** 19,3 · 672 · 0,0216
26. Berechnen Sie den Rauminhalt Ihres Klassenzimmers!

27. Berechnen Sie die Flächeninhalte nachfolgender Rechtecke!

a) $l = 7{,}3$ cm $\quad b = 19{,}6$ cm
b) $l = 5{,}2$ dm $\quad b = 4{,}6$ dm
c) $l = 635$ mm $\quad b = 18{,}5$ cm
d) $l = 16{,}71$ m $\quad b = 13{,}68$ m
e) $l = 3{,}25$ cm $\quad b = 680$ m

28. Berechnen Sie das Gewicht des in Abbildung 63 dargestellten eisernen Gehäusedeckels $\left(\gamma = 7{,}8\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$!

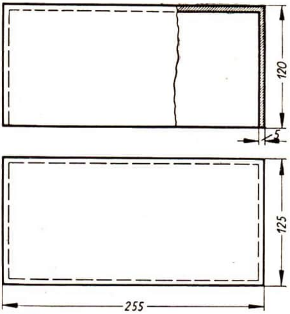


Abb. 63

63. Division

Die Grundlage für die Division mit dem Rechenstab bildet das Logarithmengesetz

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

Der Division entspricht am Rechenstab die Subtraktion von Strecken (vgl. Abb. 64).

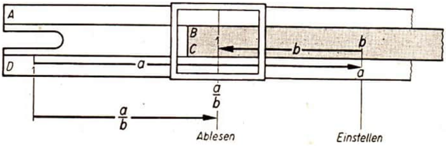


Abb. 64

1. **Beispiel:** $x = 8 : 2$

C 2 über D 8; unter C 1 wird D 4 abgelesen.

$x = 4$

2. **Beispiel:** $x = 761 : 0{,}194$

Überschlag: $x \approx 76000 : 19 = 4000$

Lösung: C 1 – 9 – 4 über D 7 – 6 – 1; unter C 1 wird D 3 – 9 – 3 abgelesen.

$x = 3930$

3. **Beispiel:** $x = 0{,}00965 : 0{,}237$

Überschlag: $x \approx 9{,}6 : 240 = 0{,}04$

Lösung: C 2 – 3 – 7 über D 9 – 6 – 5; unter C 1 wird D 4 – 0 – 7 abgelesen.

$x = 0{,}0407$

4. Beispiel: $x = 480 : 7{,}2$

Überschlag: $x \approx 480 : 8 = 60$

Lösung: C 7 – 2 über D 4 – 8. Da C 1 außerhalb des Stabes liegt, wird in diesem Falle wie beim Multiplizieren mit Rückschlag C 10 statt C 1 benutzt: unter C 10 wird D 6 – 6 – 7 abgelesen.

$x = 66{,}7$

5. Beispiel: $x = 41{,}3 : 832$

Überschlag: $x \approx 42 : 840 = 0{,}05$

Lösung: C 8 – 3 – 2 über D 4 – 1 – 3; unter C 10 wird abgelesen D 4 – 9 – 6.

$x = 0{,}0496$

6. Beispiel: $x = 0{,}0632 : 0{,}000785$

Überschlag: $x \approx 640 : 8 = 80$

Lösung: C 7 – 8 – 5 über D 6 – 3 – 2; unter C 10 wird abgelesen D 8 – 0 – 6.

$x = 80{,}6$

Im Gegensatz zum Multiplizieren ist also beim Dividieren die Zungenstellung stets verwendbar. Ein nachträgliches Verstellen (Rückschlag) ist hierbei niemals erforderlich.

Aufgaben

Benutzen Sie zur Lösung die Skalen C und D!

1. a) 5,14 : 3,82	**b)** 9,63 : 6,04	**c)** 8,12 : 5,87	**d)** 6,72 : 5,98
2. a) 34,6 : 19,2	**b)** 983,6 : 71,4	**c)** 4265 : 3,096	**d)** 52,64 : 489,6
3. a) 76,25 : 0,675	**b)** 0,987 : 53,2	**c)** 838,6 : 0,729	**d)** 0,356 : 211
4. a) 0,814 : 0,759	**b)** 0,00752 : 0,0612	**c)** 0,462 : 0,00106	**d)** 0,42 : 135200
5. a) 3,15 : 7,21	**b)** 2,27 : 5,81	**c)** 6,54 : 9,69	**d)** 1,63 : 3,39
6. a) 25,1 : 79,6	**b)** 383,4 : 75,5	**c)** 1765 : 8,019	**d)** 72,72 : 887,1
7. a) 73,31 : 0,976	**b)** 0,398 : 57,2	**c)** 565,6 : 0,749	**d)** 0,441 : 623
8. a) 0,629 : 0,859	**b)** 0,00352 : 0,0519	**c)** 0,437 : 0,00069	**d)** 0,372 : 65800

9. Ernteflächen und Reinerträge einiger Getreidearten in der Deutschen Demokratischen Republik.

Jahr	Winterweizen		Winterroggen		Grünfutter- und Silomais	
	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]
1953	283957	796013	1202134	2259429	–	–
1954	294035	755318	1200552	2372053	–	–
1955	337992	1048410	1050191	2297772	–	–
1956	315538	923001	1091290	2270183	40040	967010
1957	338948	1054848	1075493	2198284	58176	2285850

Jahr	Wintergerste		Hafer	
	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]
1953	90 711	253 196	585 267	1 445 734
1954	44 689	106 213	517 030	1 128 220
1955	98 141	315 243	535 545	1 362 434
1956	74 644	225 858	447 770	1 112 408
1957	99 145	326 920	445 397	998 574

davon volkseigene Güter:

Jahr	Winterweizen		Winterroggen		Grünfutter- und Silomais	
	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]
1953	11 512	35 738	30 042	63 885	—	—
1954	15 150	40 880	35 659	79 510	—	—
1955	19 750	65 148	34 523	80 977	—	—
1956	18 881	58 842	35 733	81 770	3 259	85 667
1957	20 310	68 505	35 535	79 360	5 175	217 099

Jahr	Wintergerste		Hafer	
	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]
1953	9 050	27 313	17 040	48 721
1954	4 448	11 222	19 706	47 818
1955	11 364	37 986	17 541	49 480
1956	8 255	25 711	16 836	45 461
1957	10 792	38 169	17 995	45 431

davon landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften:

Jahr	Winterweizen		Winterroggen		Grünfutter- und Silomais	
	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]	Erntefläche [ha]	Reinertrag [t]
1955	66 818	212 703	183 186	396 716	—	—
1956	73 484	218 368	232 151	468 554	19 129	455 007
1957	77 387	241 568	233 909	468 591	27 626	1 073 692

a) Berechnen Sie die jeweiligen Hektarerträge!

b) Vergleichen Sie 1. die Hektarerträge von 1953 bis 1957,
2. die Hektarerträge der LPG und VEG mit den Hektarerträgen der gesamten Landwirtschaft!

64. Verbindung von Multiplikation und Division

Nicht nur in technischen und mathematischen Formeln, sondern auch bei vielen Berechnungen in Industrie und Landwirtschaft ist die Multiplikation von Zahlen mit der Division verbunden.

So berechnet beispielsweise der Techniker die Umfangsgeschwindigkeit nach der Formel $v = \frac{\pi d n}{60}$ und der Genossenschaftsbauer die Anzahl der Arbeitseinheiten nach der Formel

$$\textit{Arbeitseinheiten} = \frac{\textit{Verrichtete Arbeit} \cdot \textit{Bewertungsfaktor}}{\textit{Tagesarbeitsnorm}}$$

Ähnliche Beispiele lassen sich in großer Zahl finden.

Die Grundlage für die Berechnung derartiger Ausdrücke mit dem Rechenstab liefert das Logarithmengesetz

$$\lg \frac{a \cdot b}{c} = \lg a + \lg b - \lg c$$

Die Reihenfolge, in der die Berechnung ausgeführt wird, hat auf das Ergebnis keinen Einfluß. Jedoch empfiehlt es sich, zuerst die Division und dann die Multiplikation auszuführen, damit man mit **einer** Einstellung der Zunge auskommt.

1. Beispiel: $x = \frac{9 \cdot 5}{8}$

Lösung: C 8 über D 9; unter C 5 wird D 5 — 6 — 3 abgelesen (vgl. Abb. 65).

$x = 5{,}63$

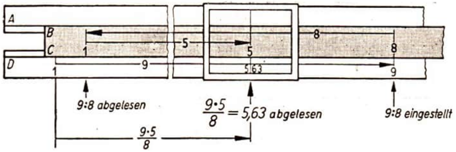


Abb. 65

2. Beispiel: $x = \frac{25{,}6 \cdot 4120}{195{,}3}$

Überschlag: $x \approx \frac{25 \cdot 4000}{200} = 500$

Lösung: C 1 — 9 — 5 — 3 über D 2 — 5 — 6; unter C 4 — 1 — 2 wird D 5 — 3 — 9 abgelesen.

$x = 539$

3. Beispiel: Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \frac{7}{9} x$ für $-3 < x < +3$ auf!

Lösung: C 9 über D 7. Unter jedem C x wird die Ziffernfolge D y abgelesen. (In der Wertetafel Vorzeichen beachten!)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	± 0	$+0{,}5$	$+1$	$+1{,}5$	$+2$	$+2{,}5$	$+3$
y	$-2{,}34$	$-1{,}95$	$-1{,}56$	$-1{,}17$	$-0{,}78$	$-0{,}39$	± 0	$+0{,}39$	$+0{,}78$	$+1{,}17$	$+1{,}56$	$+1{,}95$	$+2{,}34$

4. Beispiel: $x = \dfrac{3{,}71 \cdot 51{,}9 \cdot 12{,}97}{4{,}82 \cdot 10{,}12}$

Ähnlich wie im 1. und 2. Beispiel wird auch bei der Berechnung von Ausdrücken der Form $\dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots}$ die Division und die Multiplikation abwechselnd ausgeführt und mit einer Division begonnen, um mit möglichst wenig Verschiebungen der Zunge auszukommen.

Überschlag: $x \approx \dfrac{4 \cdot 50 \cdot 12}{5 \cdot 10} = 48$

Lösung: C $4 - 8 - 2$ über D $3 - 7 - 1$; Mittelstrich des Läufers auf C $5 - 1 - 9$ (Zunge dabei nicht bewegen!);
Zunge so verschieben, daß C $1 - 0 - 1 - 2$ unter dem Läuferstrich steht; unter C $1 - 2 - 9 - 7$ wird D $5 - 1 - 1$ abgelesen.
$x = 51{,}1$

Aufgaben

Benutzen Sie zur Lösung die Skalen C und D!

1. a) $\dfrac{2{,}642 \cdot 1{,}925}{1{,}460}$ **b)** $\dfrac{2{,}064 \cdot 4{,}124}{3{,}146}$ **c)** $\dfrac{1{,}964 \cdot 2{,}467}{1{,}483}$

2. a) $\dfrac{47{,}25 \cdot 197{,}2}{3{,}675}$ **b)** $\dfrac{205{,}6 \cdot 17{,}3}{43{,}7}$ **c)** $\dfrac{1060 \cdot 23{,}7}{412{,}3}$

3. a) $\dfrac{221{,}3 \cdot 0{,}704}{19{,}3}$ **b)** $\dfrac{0{,}473 \cdot 0{,}0089}{0{,}172}$ **c)** $\dfrac{0{,}762 \cdot 16{,}89}{431}$

4. a) $\dfrac{0{,}67 \cdot 123{,}4}{6{,}83}$ **b)** $\dfrac{150 \cdot 72{,}6}{1505}$ **c)** $\dfrac{0{,}34 \cdot 1750}{0{,}00667}$

5. a) $\dfrac{23{,}6 \cdot 47{,}6 \cdot 0{,}32}{417 \cdot 0{,}03}$ **b)** $\dfrac{0{,}478 \cdot 0{,}308 \cdot 5{,}217}{0{,}00672 \cdot 31{,}9}$ **c)** $\dfrac{0{,}472 \cdot 0{,}063 \cdot 172}{43{,}8 \cdot 196}$

6. a) $\dfrac{2170 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}291}{13{,}7 \cdot 0{,}0632}$ **b)** $\dfrac{10\,000 \cdot 3{,}1 \cdot 0{,}492}{8{,}21 \cdot 9{,}76}$ **c)** $\dfrac{0{,}00041 \cdot 63{,}76 \cdot 2}{4{,}3 \cdot 71}$

7. a) $\dfrac{21{,}7 \cdot 93{,}42}{6{,}4 \cdot 71{,}2 \cdot 0{,}106}$ **b)** $\dfrac{429 \cdot 163 \cdot 699}{125 \cdot 469 \cdot 717}$ **c)** $\dfrac{504 \cdot 17 \cdot 0{,}463}{21{,}7 \cdot 4{,}3}$

8. a) $\dfrac{231 \cdot 0{,}00063}{16{,}4 \cdot 0{,}00217 \cdot 4{,}1}$ **b)** $\dfrac{19{,}6 \cdot 0{,}492 \cdot 1{,}63}{17{,}2 \cdot 0{,}000432 \cdot 0{,}632}$ **c)** $\dfrac{152{,}3 \cdot 0{,}486 \cdot 6{,}74}{0{,}00682 \cdot 12{,}6 \cdot 0{,}688}$

9. Stellen Sie Wertetafeln für folgende Funktionen auf!

a) $y = \dfrac{2}{3} x$ $\quad -5;\ -4{,}5;\ \ldots < x < +5$

b) $m = \dfrac{0{,}32}{4{,}16} n$ $\quad -2;\ -1{,}8;\ \ldots < n < +2$

c) $g = \dfrac{52{,}7}{71{,}3} h$ $\quad +3;\ +3{,}1;\ \ldots < h < +5$

d) $y = 1{,}7\, x$ $\quad -2;\ -1{,}9;\ \ldots < x < 0$

Genau wie auf den Skalen C und D kann das Multiplizieren und Dividieren auch auf den Skalen A und B ausgeführt werden. Jedoch ist hier die Ablesegenauigkeit geringer, weil die Längeneinheit auf den Skalen A und B nur halb so groß ist wie auf den Skalen C und D.

Die Benutzung der Skalen A und B hat lediglich den Vorteil, daß man den Rückschlag ersparen kann.

Lösen Sie die Aufgaben S. 148, 7, 13, und S. 149, 27,
S. 150, 1, 5,
S. 153, 1, 2, 4

unter Benutzung der Skalen A und B!

65. Das Berechnen von Proportionen

Das Berechnen von Proportionen stellt ein Hauptanwendungsgebiet des Rechenstabes dar, auf dem er alle anderen Rechenhilfsmittel übertrifft. Der Rechenstab löst mit einer einzigen Verhältniseinstellung, der Einstellung des Proportionalitätsfaktors, nicht nur die vorgelegte Aufgabe, sondern die Gesamtheit aller möglichen Aufgaben der ganzen Fragestellung.

Beispiel:

Im Warenverkehr zwischen der UdSSR und der DDR entsprechen 100 Rubel 55,56 DM. Stellen Sie eine Umrechnungstabelle zwischen Rubel und DM auf!

Lösung:

Der Aufgabe liegt folgende Proportion zugrunde:

$$\frac{x \text{ Rubel}}{y \text{ DM}} = \frac{100 \text{ Rubel}}{55{,}56 \text{ DM}}$$

C 10 über D 5 — 5 — 5 — 6. Ablesen auf

Skala C	x	2	5	10	20	30	40	50	60	70	80
Skala D	y	1,11	2,78	5,56	11,11	16,67	22,22	27,78	33,34	38,89	44,45

Aufgaben

1. Ein Triebrad einer Schnellzuglokomotive der Deutschen Reichsbahn besitzt einen Durchmesser $d_1 = 2{,}30$ m; das vordere Laufrad einen Durchmesser $d_2 = 1{,}10$ m.

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Durchmessern d_1, d_2 und den entsprechenden Umdrehungszahlen?

b) Wieviel Umdrehungen machen beide Räder während der Fahrt auf den Strecken Gera Hbf—Leipzig Hbf (73,0 km), Erfurt Hbf—Halle Hbf (108,6 km), Wittenberg—Bitterfeld (36,9 km)?

c) Stellen Sie die gleichen Berechnungen an für eine Personenzuglokomotive der Baureihe 38 ($d_1 = 1750$ mm; $d_2 = 1000$ mm), für eine Güterzuglokomotive der Baureihe 44 ($d_1 = 1400$ mm; $d_2 = 850$ mm) und für eine Güterzuglokomotive der Baureihe 58 ($d_1 = 1400$ mm; $d_2 = 1000$ mm)!

Lösen Sie folgende Proportionen!

2. a) $x : 21 = 18 : 7$ **b)** $2 : x = 1 : 9$ **c)** $5 : 2 = 20 : x$
d) $13 : 2 = 91 : x$ **e)** $2{,}25 : 0{,}45 = 10 : x$ **f)** $0{,}04 : 7{,}2 = x : 9$

3. Berechnen Sie die prozentuale Zusammensetzung von Kochsalz!

66. Die Reziprok-Skala

Zur Wiederholung:

1. Bilden Sie den Kehrwert (reziproken Wert) von
a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{4}$ **b)** 2; 3; 7; 15; 1 **c)** 0,2; 0,9; 2,5; 1,6; 0,02!

2. Multiplizieren Sie die Zahlen aus Aufgabe 1 jeweils mit ihrem reziproken Wert!

3. Was gilt für das Produkt zweier reziproker Zahlen?

4. Was können Sie über die Größe der reziproken Werte von Zahlen **a)** > 1, **b)** < 1, **c)** $= 1$ aussagen?

Neben den bereits bekannten Skalen A, B, C und D enthält der Rechenstab die sogenannte **Reziprokskala R.** Sie liegt auf der Zunge zwischen den Skalen B und C und ist oft durch eine besondere Färbung gekennzeichnet.

Die Teilung der Skala R ist die gleiche wie die der Skala C; beide sind jedoch entgegengesetzt angeordnet. Das bedeutet, daß über dem Punkt C x der Punkt R $\frac{1}{x}$ liegt; z. B. liegt über dem Punkt 4 auf Skala C der Punkt $\frac{1}{4} = 0{,}25$ der Skala R. $\frac{1}{4}$ ist bekanntlich der reziproke Wert von 4. Selbstverständlich sind auf dem Rechenstab nur die entsprechenden Ziffernfolgen abzulesen, die Kommastellung ergibt sich aus der Aufgabe (vgl. Abb. 66).

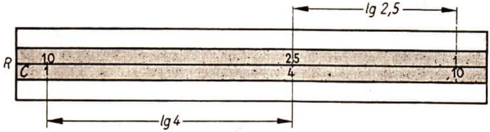


Abb. 66

Wir erkennen unmittelbar:

$$\lg 4 + \lg 2{,}5 = \lg (4 \cdot 2{,}5) = \lg 10 = 1. \tag{1}$$

Aus $\lg (4 \cdot 2{,}5) = 1$

folgt $4 \cdot 2{,}5 = 10.$ (2)

Aus (2) folgt u. a. auch

$$4 \cdot 0{,}25 = 1 \tag{3}$$

$$0{,}4 \cdot 2{,}5 = 1 \tag{3'}$$

1. **Beispiel:** Es soll der reziproke Wert von $a = 0{,}535$ bestimmt werden.

Lösung a: Läuferstrich auf C 5 – 3 – 5; unter dem Läuferstrich wird abgelesen R 1 – 8 – 7.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0{,}535} = 1{,}87$$

Lösung b: Läuferstrich auf R 5 – 3 – 5; unter dem Läuferstrich wird abgelesen C 1 – 8 – 7.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0{,}535} = 1{,}87$$

Die Reziprokskala wird auch verwendet, wenn in einer Aufgabe Multiplikation und Division gleichzeitig vorkommen. In einem solchen Falle kann man sämtliche Multiplikationen und Divisionen als Divisionen durchführen. Das ist einfacher, weil dabei kein Rückschlag vorkommen kann.

2. **Beispiel:** $m = \frac{6{,}71 \cdot 22{,}7}{0{,}42} = \frac{6{,}71}{0{,}42} : \frac{1}{22{,}7}$

Überschlag: $m \approx \frac{7 \cdot 25}{0{,}5} = 350$

Lösung: C 42 über D 6 – 7 – 1; Läuferstrich über C 1; R 2 – 2 – 7 unter Läuferstrich; unter R 10 wird abgelesen D 3 – 6 – 2.

$m = 362$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den reziproken Wert zu

a) 0,072 **b)** 8,13 **c)** 131,5 **d)** 20,6 **e)** 0,483 **f)** 1,031!

2. Lösen Sie auf die im 2. Beispiel angegebene Weise!

a) $\frac{1250 \cdot 472}{1{,}56}$ **b)** $\frac{160 \cdot 2{,}76}{0{,}087}$

c) $\frac{0{,}0892 \cdot 4{,}892}{0{,}31}$ **d)** $\frac{737{,}1 \cdot 19{,}06}{43{,}6}$

e) $\frac{0{,}0076 \cdot 0{,}3}{14{,}6}$ **f)** $\frac{100{,}4 \cdot 0{,}0078}{61{,}3}$

3. Eine LPG besitzt einen Futtersilo mit den aus der Abbildung 67 ersichtlichen Abmessungen.

Wie hoch wird der Behälter durch

a) 105 m³ Silofutter,

b) 900 dz Silofutter $\left(\gamma = 7{,}5 \frac{\text{dz}}{\text{m}^3}\right)$ gefüllt?

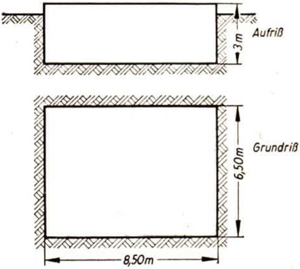


Abb. 67

67. Potenzieren und Radizieren

1) Das Quadrat einer Zahl

Zur Wiederholung:

1. a) $3^2 =$ **b)** $0{,}025^2 =$
$30^2 =$ $0{,}25^2 =$
$300^2 =$ $2{,}5^2 =$
$3000^2 =$ $25^2 =$

Drücken Sie mit Ihren Worten die Gesetzmäßigkeit aus, die in den Aufgaben zum Ausdruck kommt!

2. a) $\lg(a^2) =$ **b)** $\lg 100 =$ **c)** $\lg 100^2 = \lg 10000 =$

3. Welche Zahl steht über D 2 auf A,
über D 3 auf A,
über D 6 auf A,
über D 1,5 auf A?

Die Betrachtung des Rechenstabes zeigt, daß über den Zahlen der Skala D die Quadrate dieser Zahlen auf Skala A stehen. So stehen beispielsweise A 16 über D 4; A 25 über D 5 usw.

Wir haben bereits gesehen, daß die Längeneinheit auf der Skala D doppelt so groß wie auf der Skala A ist. Deshalb ist auf Skala D jede Strecke, die den Logarithmus einer Zahl darstellt, doppelt so groß wie die entsprechende Strecke auf Skala A. Der über den Punkt x der Skala D gestellte Läuferstrich steht also über einem Punkt y der Skala A, der auf der Skala D in doppelter Entfernung von D_1 liegen würde. Es gilt also:

$$\lg y = 2 \lg x = \lg x^2 \quad \text{oder}$$
$$y = x^2.$$

Das heißt: Senkrecht über dem Punkt x der Skala D liegt der Punkt x^2 der Skala A (vgl. Abb. 68).

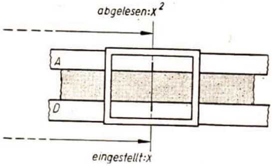


Abb. 68

1. Beispiel: $z = 1{,}6^2$

Läuferstrich auf D 1 – 6; auf A wird 2 – 5 – 6 abgelesen.
$z = 2{,}56$

2. Beispiel: $z = 4{,}21^2 = 17{,}75$

3. Beispiel: $z = 0{,}278^2$

Überschlag: $z \approx 0{,}3^2 = 0{,}09$
$z = 0{,}0774$

4. Beispiel: $z = 217{,}5^2$

Überschlag: $z \approx 200^2 = 40\,000$

Läuferstrich auf D 2 — 1 — 7 — 5; auf A wird 4 — 7 — 2 — 5 abgelesen.

$z = 47\,250$

2) Die Quadratwurzel aus einer Zahl

Zur Wiederholung:

1. a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{4000}$, $\sqrt{40\,000}$, $\sqrt{400\,000}$, $\sqrt{4\,000\,000}$

b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{0{,}9}$, $\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}009}$, $\sqrt{0{,}0009}$, $\sqrt{0{,}00009}$

2. Drücken Sie mit Ihren Worten die Gesetzmäßigkeit aus, die in den Aufgaben zum Ausdruck kommt!

3. a) $\lg \sqrt{6} =$ **b)** $\lg 10\,000 =$ **c)** $\lg \sqrt{10\,000} =$

4. Welche Zahlen stehen unter A 9 auf D,
unter A 25 auf D,
unter A 64 auf D,
unter A 6,25 auf D?

Die Bestimmung der Quadratwurzel aus einer Zahl mittels des Rechenstabes verläuft in umgekehrter Weise wie die Bestimmung des Quadrates einer Zahl. Es muß also zu jeder Zahl auf Skala A die senkrecht darunterstehende Zahl auf Skala D die Quadratwurzel sein (vgl. Abb. 69).

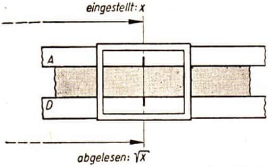


Abb. 69

1. Beispiel: $z = \sqrt{3{,}85}$

Lösung: Läuferstrich auf A 3,85; unter dem Läuferstrich wird D 1 — 9 — 6 abgelesen.

$z = 1{,}96.$

2. Beispiel: $z = \sqrt{38{,}5}$

Lösung: Läuferstrich auf A 38,5; unter dem Läuferstrich wird D 6 — 2 abgelesen.

$z = 6{,}2$

Aus diesen beiden Beispielen ist ersichtlich, daß beim Einstellen des Radikanden auf Skala A nicht nur die Ziffernfolge, sondern auch seine Stellenzahl berücksichtigt werden muß. Das bedeutet einen wesentlichen Unterschied gegenüber dem Multiplizieren, Dividieren und Quadrieren.

3. Beispiel: $z = \sqrt{248}$

Der Radikand 248 ist auf Skala A nicht zu finden. Deshalb muß der Radikand so in ein Produkt aus zwei Faktoren umgeformt werden, daß der eine Faktor des Radikanden auf Skala A eingestellt werden kann, der andere aber eine Potenz von 100 mit positivem oder negativem ganzzahligem Exponenten ist.

$$z = \sqrt{2{,}48 \cdot 100} = \sqrt{2{,}48} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{2{,}48} \cdot 10$$

Lösung: Läuferstrich auf A 2,48; unter dem Läuferstrich wird D 1 – 5 – 7 – 3 abgelesen.

$$z = 1{,}573 \cdot 10 = 15{,}73$$

4. Beispiel: $z = \sqrt{0{,}000755}$

Lösung: $z = \sqrt{7{,}55 \cdot 0{,}0001} = \sqrt{7{,}55 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{7{,}55} \cdot \sqrt{10^{-4}} = \sqrt{7{,}55} \cdot 10^{-2}$
$= \sqrt{7{,}55} \cdot 0{,}01$

Läuferstrich auf A 7,55; unter dem Läuferstrich wird D 2 – 7 – 4 abgelesen.

$$z = 2{,}74 \cdot 0{,}01 = 0{,}0274$$

5. Beispiel: $z = \sqrt{0{,}00755}$

Lösung: $z = \sqrt{75{,}5 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{75{,}5} \cdot 0{,}01$

Läuferstrich auf A 75,5; unter dem Läuferstrich wird auf D 8 – 6 – 5 abgelesen.

$$z = 8{,}65 \cdot 0{,}01 = 0{,}0865$$

3) Die dritte Potenz einer Zahl

Zur Wiederholung:

1. a) $2^3 =$ **b)** $0{,}3^3 =$
$20^3 =$ $0{,}03^3 =$
$200^3 =$ $0{,}003^3 =$
$2000^3 =$ $0{,}0003^3 =$

Drücken Sie mit Ihren Worten die Gesetzmäßigkeit aus, die in den Aufgaben zum Ausdruck kommt!

2. a) $\lg (a^3) =$ **b)** $\lg 100 =$ **c)** $\lg 100^3 =$

Über der Teilung A des Rechenstabes befindet sich eine Stabteilung K. Ihre Längeneinheit beträgt nur den dritten Teil der Längeneinheit von Skala D. Wir können die beim Quadrieren geführten Überlegungen sinngemäß übertragen. Damit gilt:

Senkrecht über dem Punkt x der Skala D liegt auf der Skala K der Punkt x^3 (vgl. Abb. 70).

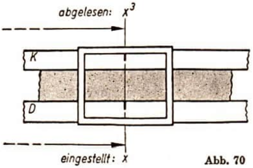


Abb. 70

1. Beispiel: $z = 2{,}5^3$

Lösung: Läuferstrich auf D 2 — 5; unter dem Läuferstrich wird K 1 — 5 — 6 abgelesen.

$z = 15{,}6$

2. Beispiel: $z = 71{,}5^3$

Überschlag: $z \approx 70^3 = 343\,000$

Lösung: Läuferstrich auf D 7 — 1 — 5; unter dem Läuferstrich wird K 3 — 6 — 6 abgelesen.
$z = 366\,000$

3. Beispiel: $z = 0{,}43^3$

Überschlag: $z = 0{,}4^3 = 0{,}064$

Lösung: Läuferstrich auf D 4 — 3; unter dem Läuferstrich wird K 7 — 9 — 5 abgelesen.

$z = 0{,}0795$

4) Die Kubikwurzel aus einer Zahl

Zur Wiederholung:

1. a) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{80}$, $\sqrt[3]{800}$, $\sqrt[3]{8\,000}$, $\sqrt[3]{80\,000}$, $\sqrt[3]{800\,000}$, $\sqrt[3]{8\,000\,000}$

b) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{0{,}8}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{0{,}0008}$, $\sqrt[3]{0{,}00008}$, $\sqrt[3]{0{,}000008}$, $\sqrt[3]{0{,}0000008}$

Drücken Sie mit Ihren Worten die Gesetzmäßigkeit aus, die in den Aufgaben zum Ausdruck kommt!

2. a) $\lg \sqrt[3]{m} =$ **b)** $\lg 1\,000\,000 =$ **c)** $\lg \sqrt[3]{1\,000\,000} =$

Durch sinngemäßes Übertragen der beim Ausziehen der Quadratwurzel geführten Überlegungen gilt:

Die dritte Wurzel einer Zahl auf Skala K wird senkrecht darunter auf Skala D abgelesen (vgl. Abb. 71).

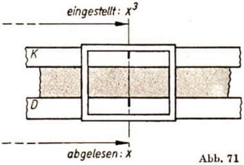


Abb. 71

1. Beispiel: $z = \sqrt[3]{7{,}2}$

Überschlag: $z \approx \sqrt[3]{8} = 2$

Lösung: Läuferstrich auf K 7,2 (nicht 72 oder 720!); unter dem Läuferstrich wird D 1 — 9 — 3 abgelesen.
$z = 1{,}93.$

2. **Beispiel:** $m = \sqrt[3]{69{,}5}$

Überschlag: $m \approx \sqrt[3]{64} = 4$

Lösung: Läuferstrich auf K 69,5 (nicht 6,95 oder 695!); unter dem Läuferstrich wird D 4 — 1 — 1 abgelesen.
$m = 4{,}11$

3. **Beispiel:** $p = \sqrt[3]{648}$

Überschlag: $p \approx \sqrt[3]{729} = 9$

Lösung: Läuferstrich auf K 648 (nicht 6,48 oder 64,8!); unter dem Läuferstrich wird D 8 — 6 — 5 abgelesen.
$p = 8{,}65$

4. **Beispiel:** $g = \sqrt[3]{0{,}055}$

Wir formen den Radikanden in ein Produkt aus zwei Faktoren um, von denen einer eine Potenz von 1000 (mit positiven oder negativen ganzzahligen Exponenten) ist.

$$g = \sqrt[3]{55 \cdot 0{,}001} = \sqrt[3]{55 \cdot 1000^{-1}} = \sqrt[3]{55} \cdot \sqrt[3]{1000^{-1}} = 10^{-1} \sqrt[3]{55} = 0{,}1 \sqrt[3]{55}$$

Überschlag: $g \approx 0{,}1 \cdot \sqrt[3]{64} = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4$

Lösung: Läuferstrich auf K 55; unter dem Läuferstrich wird D 3 — 8 abgelesen.
$g = 0{,}1 \cdot 3{,}8 = 0{,}38$

5. **Beispiel:** $f = \sqrt[3]{0{,}0055}$

Lösung: $f = \sqrt[3]{5{,}5 \cdot 0{,}001} = 0{,}1 \cdot \sqrt[3]{5{,}5}$

Läuferstrich auf K 5,5; unter dem Läuferstrich wird D 1—7—6—5 abgelesen.
$f = 0{,}1 \cdot 1{,}765 = 0{,}1765$

6. **Beispiel:** $e = \sqrt[3]{0{,}55}$

Lösung: $e = \sqrt[3]{550 \cdot 0{,}001} = 0{,}1 \sqrt[3]{550}$

Läuferstrich auf K 550; unter dem Läuferstrich wird D 8—2 abgelesen.
$e = 0{,}1 \cdot 8{,}2 = 0{,}82$

Aufgaben

Bestimmen Sie mit dem Rechenstab!

1. $1{,}076^2$;	$1{,}284^2$;	$1{,}321^2$;	$1{,}398^2$;	$1{,}527^2$;	$1{,}668^2$
$1{,}806^2$;	$1{,}988^2$;	$2{,}04^2$;	$4{,}56^2$;	$7{,}96^2$;	$9{,}24^2$
2. $14{,}64^2$;	$13{,}72^2$;	$17{,}89^2$;	$25{,}6^2$;	$37{,}9^2$;	$87{,}5^2$
3. 221^2;	439^2;	761^2;	2520^2;	9890^2;	12640^2
4. $0{,}2^2$;	$0{,}9^2$;	$0{,}01234^2$;	$0{,}001788^2$;	$0{,}00469^2$;	$0{,}00072^2$
5. $\sqrt{1{,}07}$;	$\sqrt{1{,}09}$;	$\sqrt{1{,}13}$;	$\sqrt{1{,}17}$;	$\sqrt{3{,}25}$;	$\sqrt{3{,}69}$
$\sqrt{4{,}17}$;	$\sqrt{5{,}02}$;	$\sqrt{5{,}78}$;	$\sqrt{6{,}09}$;	$\sqrt{7{,}53}$;	$\sqrt{8{,}81}$

6.	$\sqrt{12{,}3}$;	$\sqrt{10{,}2}$;	$\sqrt{17{,}5}$;	$\sqrt{30{,}2}$;	$\sqrt{37{,}5}$;	$\sqrt{44{,}8}$
	$\sqrt{49{,}1}$;	$\sqrt{63{,}6}$;	$\sqrt{72{,}9}$;	$\sqrt{77{,}7}$;	$\sqrt{84{,}6}$;	$\sqrt{98{,}3}$
7.	$\sqrt{161}$;	$\sqrt{336}$;	$\sqrt{588}$;	$\sqrt{1148}$;	$\sqrt{3090}$;	$\sqrt{8970}$
8.	$\sqrt{0{,}4}$;	$\sqrt{0{,}9}$;	$\sqrt{0{,}016}$;	$\sqrt{0{,}283}$;	$\sqrt{0{,}486}$;	$\sqrt{0{,}0373}$
	$\sqrt{0{,}00476}$;	$\sqrt{0{,}358}$;	$\sqrt{0{,}992}$;	$\sqrt{0{,}0047}$;	$\sqrt{0{,}00078}$;	$\sqrt{0{,}00872}$
9.	$1{,}17^3$;	$1{,}73^3$;	$3{,}15^3$;	736^3;	$8{,}89^3$;	$9{,}13^3$
10.	$12{,}4^3$;	$16{,}8^3$;	$83{,}5^3$;	207^3;	639^3;	1520^3
11.	$0{,}6^3$;	$0{,}259^3$;	$0{,}731^3$;	$0{,}00469^3$;	$0{,}00721^3$;	$0{,}00041^3$
12.	$\sqrt[3]{4{,}13}$;	$\sqrt[3]{7{,}36}$;	$\sqrt[3]{12{,}3}$;	$\sqrt[3]{48{,}5}$;	$\sqrt[3]{79{,}6}$;	$\sqrt[3]{91{,}2}$
13.	$\sqrt[3]{102}$;	$\sqrt[3]{868}$;	$\sqrt[3]{1360}$;	$\sqrt[3]{13400}$;	$\sqrt[3]{86900}$;	$\sqrt[3]{123000}$
14.	$\sqrt[3]{0{,}8}$;	$\sqrt[3]{0{,}027}$;	$\sqrt[3]{0{,}0963}$;	$\sqrt[3]{0{,}0043}$;	$\sqrt[3]{0{,}000343}$;	$\sqrt[3]{0{,}00442}$
15.	$7{,}6^3$;	$\sqrt{126}$;	$70{,}4^2$;	$\sqrt[3]{699000}$;	$72{,}9^2$;	$\sqrt{0{,}00421}$
16.	$\sqrt[3]{82400}$;	$\sqrt{0{,}846}$;	$0{,}01732^2$;	$0{,}063^3$;	$\sqrt[3]{0{,}0629}$;	$42{,}6^2$

68. Die festen Marken auf dem Rechenstab

1) Die Marke π

Auf den Skalen A, B, C und D wird die Zahl $\pi = 3{,}141\ldots$ durch eine besondere Marke angegeben. Sie wird bei Kreisberechnungen verwendet.

2) Die Marken c und c_1

Auf Skala C sind die Zahlen

$$c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}128 \text{ und } c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 3{,}57$$

besonders gekennzeichnet. Sie dienen der Vereinfachung von Kreisberechnungen, indem die Berechnung der Kreisfläche aus dem Durchmesser auf das Quadrieren eines Bruches zurückgeführt wird und die Berechnung des Durchmessers aus der Kreisfläche erleichtert wird. Wenn der Radius in diese Berechnungen eingeht, darf man die Marken c und c_1 nicht verwenden.

Aus

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{c_1}{\sqrt{10}} \quad (2)$$

folgt

$$F = d^2 : \frac{4}{\pi} = \left(d : \sqrt{\frac{4}{\pi}}\right)^2 = (d : c)^2 = \left(d : \frac{c_1}{\sqrt{10}}\right)^2 \quad (3)$$

$$F = \left(\frac{d}{c}\right)^2 = 10\left(\frac{d}{c_1}\right)^2.$$

1. **Beispiel:** Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 5{,}2$ cm!

Überschlag: $F \approx 0{,}75 \cdot 25 \approx 18$

Lösung: C c über D 5 – 2; Mittelstrich des Läufers auf C 1; unter dem Mittelstrich wird A 2 – 1 – 2 abgelesen.

$F = 21{,}2\ \mathrm{cm}^2$

In gleicher Weise kann man anstatt der Strichmarke c auch die Strichmarke c_1 verwenden.

2. **Beispiel:** Berechnen Sie den Durchmesser d des Kreises, dessen Flächeninhalt $F = 75\ \mathrm{cm}^2$ beträgt!

Überschlag: $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10$

Lösung: B 1 unter A 75 (nicht 7,5); unter C c wird D 9 – 7 – 7 abgelesen.

$d = 9{,}77$ cm

Die Berechnung des Kreises wird noch weiter vereinfacht, wenn der **Dreistrichläufer** benutzt wird. Er hat links und rechts vom bisher allein benutzten mittleren Läuferstrich parallele Striche als Ablesemarken. Diese haben für die Skalen A und B die Abstände $\frac{4}{\pi}$ und für die Skalen C und D die Abstände $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ vom mittleren Läuferstrich.

Stellt man den Mittelstrich des Läufers auf D d, so zeigt der linke Läuferstrich auf A F; stellt man den Mittelstrich des Läufers auf A F, so zeigt der rechte Läuferstrich auf D d. (vgl. Abb. 72 und 73). In diesem Fall sind also die Marken c und c_1 überflüssig.

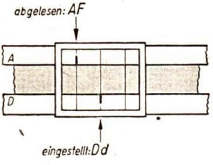


Abb. 72

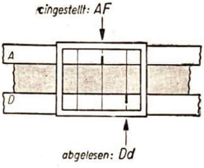


Abb. 73

Bei den beiden vorigen Beispielen verläuft der Rechengang nun folgendermaßen:

1. **Beispiel:** Mittlerer Läuferstrich auf D 5 – 2; unter dem linken Läuferstrich wird A 2 – 1 – 2 abgelesen.

So ergibt sich $F = 21{,}2\ \mathrm{cm}^2$.

2. Beispiel: Mittlerer Läuferstrich auf A 75 (nicht 7,5); unter dem rechten Läuferstrich wird D 9 — 7 — 7 abgelesen.

Es ergibt sich $d = 9{,}77$ cm.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Kreisfläche!

a) $d = 3{,}50$ m **b)** $d = 0{,}73$ m **c)** $d = 142$ mm **d)** $d = 64{,}5$ cm
e) $d = 7{,}25$ m **f)** $d = 0{,}09$ m **g)** $d = 1400$ mm **h)** $d = 43{,}2$ cm

2. Berechnen Sie den Durchmesser des Kreises!

a) $F = 628\ \text{cm}^2$ **b)** $F = 1000\ \text{mm}^2$ **c)** $F = 22{,}5\ \text{cm}^2$ **d)** $F = 3{,}75\ \text{m}^2$
e) $F = 252\ \text{mm}^2$ **f)** $F = 76{,}7\ \text{cm}^2$ **g)** $F = 12{,}75\ \text{m}^2$ **h)** $F = 1067\ \text{cm}^2$

69. Anwendungsaufgaben

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

1. Das Achsgewicht eines Traktors wirkt bei waagerechtem Stand des Fahrzeuges je zur Hälfte auf die beiden Räder. Das Gewicht, das auf einem Rad lastet, ist auf dessen Auflagefläche verteilt. Um den Bodendruck zu kennen, müssen wir ausrechnen, wieviel Kilopond auf ein Quadratzentimeter der Auflagefläche drücken.
Das Achsgewicht der „Brockenhexe“ beträgt vorn 600 kp und hinten 1100 kp, die Auflagefläche je Rad vorn 290 cm² und hinten bei 2 atü Reifendruck 945 cm².

a) Berechnen Sie den Bodendruck der Vorder- und der Hinterräder!

b) Vergleichen Sie den Bodendruck der Hinterräder mit dem Druck, den Sie auf den Boden ausüben, wenn die Auflagefläche Ihrer Schuhsohlen 200 cm² beträgt!

c) Besorgen Sie sich die Zahlenwerte, um den von einem Pferd ausgeübten Bodendruck berechnen zu können!

2. Die günstigste Form der Bewässerung größerer Flächen ist das Beregnen. Meist werden Drehstrahlregner verwendet. Diese Apparate beregnen eine Kreisfläche.
Ein 0,45 ha großes Gemüsefeld wird mit einer Regenhöhe von 25 Millimetern aus der Wasserleitung beregnet.

a) Wieviel Kubikmeter Wasser werden dabei verregnet?

b) Welche Kosten entstehen, wenn der Preis 0,30 DM je Kubikmeter beträgt?

c) Wie hoch sind die Kosten, wenn ein Vorzugspreis von 0,16 DM gewährt wird?

3. Eine LPG erreichte durch verbesserte Haltungs- und Fütterungsbedingungen sowie durch Qualifizierung des Melkpersonals in Verbindung mit intensiver Zuchtauslese folgende Steigerung der Jahresleistung in der Milcherzeugung:

Leistung vor der Steigerung je Kuh und Jahr im Stalldurchschnitt		Leistung nach der Steigerung je Kuh und Jahr im Stalldurchschnitt		Anzahl der Milchkühe
Milch	Fettgehalt	Milch	Fettgehalt	—
3150 kg	3,4%	4000 kg	3,9%	75 Stück

Legen Sie den Sollpreis zugrunde und berechnen Sie je Kuh und insgesamt

a) die Einnahme im Jahr vor der Leistungssteigerung,

b) die Einnahme im Jahr nach der Steigerung,

c) die jährliche Mehreinnahme nach der Leistungssteigerung absolut und in Prozenten!

4. Eine LPG hat ein Ablieferungssoll von 61000 kg Milch. Die Mitglieder haben sich das Ziel gesetzt, darüber hinaus 34000 kg Milch frei zu verkaufen. In der LPG sind 30 Kühe mit einer Jahresdurchschnittsleistung von 2400 kg je Kuh vorhanden.

a) Um wieviel Prozent muß die Milchleistung je Kuh gesteigert werden, um das gesteckte Ziel zu erreichen?

b) Wieviel Färsen müssen angekauft werden, wenn die Gesamtmilchproduktion nach der erzielten Leistungssteigerung um 20% erhöht werden soll und die Jahresleistung einer Färse 2300 kg Milch beträgt?

5. Das Ablieferungssoll für Schweinefleisch beträgt für eine LPG 162 dz. Gleichzeitig sollen 110 dz dem freien Aufkauf zur Verfügung gestellt werden.

a) Wieviel Kartoffeln, Gerste und Magermilch müssen als Mastfutter eingeplant werden, wenn zur Erzeugung von 1 Doppelzentner Schweinefleisch 9 dz Kartoffeln, 1,6 dz Gerste und 120 kg Magermilch benötigt werden?

b) Wieviel Hektar Kartoffeln und Gerste müssen angebaut werden, wenn diese Mengen im Betrieb erzeugt werden sollen und 180 $\frac{\text{dz}}{\text{ha}}$ Kartoffeln und 32 $\frac{\text{dz}}{\text{ha}}$ Gerste geerntet werden?

6. Die Rübenvollerntemaschine SKM 3 köpft, erntet und ladet die Rüben in einem Arbeitsgang. Mit ihrer Hilfe ist es unseren werktätigen Bauern möglich, mit viel weniger Aufwand an Handarbeit als bei den veralteten Erntemethoden die Rübenernte zu meistern. Folgende Untersuchungen zeigen die Steigerung der Arbeitsproduktivität der Rübenernte bei den verschiedenen Erntemethoden. So beträgt der Aufwand an Handarbeitsstunden bei:

1. Handroden und Abschneiden . . . . 195 Std./ha
2. Köpfschlitten und Rodepflug . . . . 115 Std./ha
3. Köpfschlitten und Schatzgräber . . . . 80 Std./ha
4. Köpfschlitten und Schatzgräber mit Rucksack . . . . . 45 Std./ha
5. Rübenvollerntemaschine . . . . 28 Std./ha

Um wieviel Prozent konnte die Arbeitsproduktivität der einzelnen Methoden gegenüber der ersten Methode gesteigert werden?

7. Wird Stallmist 6 Stunden nach dem Ausbringen untergepflügt, so beträgt die Ertragswirkung gegenüber sofortigem Unterpflügen nur noch 97%. Nach 24 Stunden beträgt sie 94% und nach 4 Tagen nur noch 86%.
Berechnen Sie die entsprechenden Ertragsverluste

a) für 15 ha Kartoffeln bei einem erwarteten Ertrag von 240 $\frac{\text{dz}}{\text{ha}}$,

b) für 12 ha Zuckerrüben bei einem erwarteten Ertrag von 380 $\frac{\text{dz}}{\text{ha}}$!

8. Die Hackfruchtflächen eines VEG sollen je Hektar mit 34 kg, der Raps mit 51 kg, die Erbsen mit 17 kg, die Getreidearten mit 17 kg und die Luzerne mit 20 kg Phosphorsäure (P_2O_5) gedüngt werden. Wiesen und Weiden erhalten 36 $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$ Phosphorsäure in Form von Thomasphosphat.

a) Wieviel Doppelzentner Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17% Phosphorsäure enthält und 73,5 ha Getreide, 37,81 ha Hackfrüchte, 5,33 ha Winterraps, 5,33 ha Erbsen und 23,43 ha Luzerne vorhanden sind?

b) Berechnen Sie die erforderliche Menge an Thomasphosphat, wenn dieser Dünger 15% Phosphorsäure enthält!

9. Nach Gericke beträgt der mittlere Gehalt der Gülle an:

Wasser	97 % ,	P_2O_5	0,03%,
organischer Substanz	2,0 %,	K_2O	0,4 %,
N	0,17%,	CaO	0,08%,
		sonstigen Stoffen	0,32%.

Welche Mengen an organischer Substanz und an Nährstoffen werden bei einer Gabe von $5000\ \frac{\text{kg}}{\text{ha}}$ Gülle ausgebracht?

10. Die Anzahl der von einem LPG-Mitglied verrichteten Arbeitseinheiten (AE) errechnet sich nach der Formel

$$\text{Anzahl der AE} = \frac{\text{Menge der verrichteten Arbeit} \cdot \text{Bewertungsfaktor}}{\text{Tagesarbeitsnorm}}$$

a) Genossenschaftsbauer Müller hat an einem Arbeitstag 5,4 ha gedrillt. Der Bewertungsfaktor für diese Arbeit ist 1,2 AE.
Die Tagesarbeitsnorm beträgt 5,0 ha. Berechnen Sie die Anzahl der verrichteten Arbeitseinheiten!

b) Berechnen Sie am Unterrichtstag in der Produktion die von Genossenschaftsbauern der LPG, in der Sie tätig sind, verrichteten Arbeitseinheiten!

11. Bestimmen Sie die Maße des in der Abbildung 74 gegebenen Gärfuttersilos, der randgefüllt 585 dz gedämpfte Kartoffeln faßt $\left(\text{Schüttdichte } 0{,}975\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}\right)$! Die Maße sind in m angegeben.

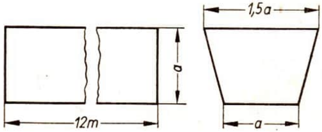


Abb. 74

12. Berechnen Sie logarithmisch den Raum, den 1 dz Stalldünger einnimmt, wenn die Schüttdichte $0{,}850\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ beträgt!
Beantworten Sie dieselbe Frage für

a) schwefelsaures Ammoniak $\left(\text{Schüttdichte } 0{,}900\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}\right)$,

b) Kalkstickstoff $\left(\text{Schüttdichte } 0{,}950\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}\right)$,

c) Kali $\left(\text{Schüttdichte } 1{,}200\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}\right)$!

Rechnen Sie während des Unterrichtstages in der Produktion!

13. Die Aussaatmenge je Hektar wird wie folgt berechnet:

$$\text{Aussaatmenge je Hektar} = \frac{s \cdot G_P}{G_D \cdot K}.$$

Dabei sind s: ortsübliche Aussaatmenge in $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$,
G_D: das durchschnittliche Tausendkorngewicht der betreffenden Art in g,
G_P: das Tausendkorngewicht der Prüfnummer in g,
K: die Keimfähigkeit der Prüfnummer.

$$\text{Keimfähigkeit} = \frac{\text{Anzahl der ausgekeimten Samen}}{\text{Gesamtzahl der Samen}}$$

Berechnen Sie die Aussaatmengen für die Kulturen und Flächen der LPG bzw. des VEG Ihres Ortes!

14. Das Abdrehen von Drillmaschinen zur Feststellung der benötigten Saatgutmenge.

Gegeben: s: Ortsübliche Aussaatmenge in $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$,

r: Radius des Rades in m,
b: Säbreite der Maschine in m.

Wenn die Aussaatmenge $s\ \frac{\text{kg}}{\text{ha}}$ aus der Maschine fallen soll, beträgt die Saatgutmenge x bei n Umdrehungen

$$x = \frac{s \cdot n \cdot 2 r \pi b}{10\,000}\ \text{kg}.$$

15. Die Umrechnung von Reinnährstoff in Düngemittel.

Ein Feld in der Größe von 6,2 ha soll eine Düngergabe von 40 $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$ Reinphosphorsäure erhalten.

Zur Verfügung steht Superphosphat, dessen Analyse 18% P_2O_5 ergibt.

a) Berechnen Sie die anzuwendende Gesamtmenge an Superphosphat!

b) Bilden Sie ähnliche Aufgaben aus den Erfahrungen, die Sie am Unterrichtstag in der Produktion sammeln!

Aufgaben aus der chemischen Produktion

16. Die zwischen der Sowjetunion und der DDR geplante Erdölleitung wird in jeder Minute 8 t Erdöl in die DDR befördern.

a) Berechnen Sie die Menge, die täglich, monatlich, jährlich in die DDR transportiert wird!

b) Wie viele Kesselwagen mit je 44 000 l Fassungsvermögen wären zum Transport dieser Ölmengen notwendig?

c) Wieviel Kubikmeter Tankvolumen wird benötigt, um die in 7 Tagen transportierte Erdölmenge zu lagern?

17. In einem volkseigenen Hydrierwerk wird im Rahmen der Elementaranalyse der Gehalt an C und H in verschiedenen Analysensubstanzen bestimmt.

Beispiel: Analysensubstanz Rohteer

Einwaage	Gefäß mit Substanz	0,54697 g
	Gefäß leer	0,52525 g
Einwaage	Rohteer:	0,02172 g

	CO_2	H_2O
Gefäß mit Substanz:	11,91250 g	8,73256 g
Gefäß leer:	11,84596 g	8,71185 g
	0,06654 g CO_2	0,02071 g H_2O

Prozentualer Gehalt an C (x_C) bzw. H (x_H):

$$x_C = \frac{C \cdot 0{,}06654}{CO_2 \cdot 0{,}02172} \cdot 100\ \% \qquad x_H = \frac{H \cdot 0{,}02071}{H_2O \cdot 0{,}02172} \cdot 100\ \%$$

$$\begin{array}{lr}
\lg 0{,}06654 & = 0.8231 - 2 \\
+ \lg \frac{C}{CO_2} & = 0.4360 - 1 \\
\hline
 & 1.2591 - 3 \\
- \lg 0{,}02172 & 0.3369 - 2 \\
\hline
 & 0.9222 - 1 \\
\text{Numerus} & = 0{,}8360 \\
x_C & 83{,}60\%
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\lg 0{,}02071 & = 0.3162 - 2 \\
+ \lg \frac{H}{H_2O} & = 0.0488 - 1 \\
\hline
 & 0.3650 - 3 \\
- \lg O & 0.3369 - 2 \\
\hline
 & 0.0281 - 1 \\
\text{Numerus} & = 0{,}1067 \\
x_H & 10{,}67\%
\end{array}$$

18. Führen Sie entsprechend dem Beispiel in Aufgabe 17 folgende Berechnungen der Elementaranalyse für C und H durch:

a) Analysensubstanz: *Grude*

Einwaage	CO_2	H_2O
0,55196 g	11,74641 g	9,22926 g
0,52634 g	11,68553 g	9,22462 g

b) Analysensubstanz: *Benzin*

Einwaage	CO_2	H_2O
0,09042 g	11,64031 g	8,88524 g
0,07154 g	11,58112 g	8,86128 g

c) Analysensubstanz: *Dieselöl*

Einwaage	CO_2	H_2O
0,08953 g	11,02703 g	9,49957 g
0,07348 g	10,97593 g	9,48100 g

19. Bei der quantitativen Analyse von Portlandzement wird u. a. der Glührückstand bestimmt.

Von den weiteren Analysen, die auf die verschiedensten Bestandteile durchgeführt werden, ist vor allem die Ermittlung des Siliziumgehaltes (geprüft wird auf SiO_2) besonders wichtig. Bei einer Analyse ergaben sich folgende Werte:

Einwaage:	Brutto	19,7696 g
	Netto	18,7216 g
	Tara	1,0480 g

Glühverlust:

19,7696 g
19,7652 g
0,0044 g

$$\text{Glühverlust} = \frac{\text{Gewichtsabnahme} \cdot 100}{\text{Einwaage}}\ \%$$

SiO_2:

18,9436 g
18,7216 g
0,2220 g

$$SiO_2 = \frac{\text{Auswaage} \cdot 100}{\text{Einwaage}}\ \%$$

Berechnen Sie den Glühverlust und den Anteil an SiO_2 in Prozenten!

Aus verschiedenen Gebieten der sozialistischen Industrie

20. Eine Rohrleitung mit einem Durchmesser von 400 mm soll in einem rechteckigen Anschlußstück mit gleicher Querschnittsfläche ausmünden. Die Seiten des Rechtecks sollen sich wie 5 : 2 verhalten.

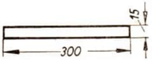


Abb. 75

21. Die Absaugöffnung einer Absaugvorrichtung hat den in Abbildung 75 dargestellten Querschnitt.

Welchen Durchmesser muß die runde Absaugleitung erhalten, wenn die Luftgeschwindigkeit in der Öffnung doppelt so groß sein soll wie in der Leitung?

22. Beim Kegel gibt die Bezeichnung „Kegel $\frac{1}{k}$" das Verhältnis $\frac{\text{Änderung des Durchmessers}}{\text{Länge des Kegelstumpfes}}$ an (s. Abb. 76):

$$\frac{1}{k} = \frac{D - d}{l}$$

a) Berechnen Sie d aus

$D = 60$ mm; $l = 120$ mm; Kegel $\frac{1}{8}$!

b) Berechnen Sie $\frac{1}{k}$ aus

$D = 150$ mm; $d = 120$ mm; $l = 360$ mm!

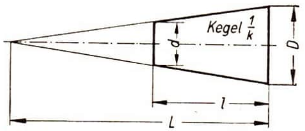


Abb. 76

23. Sn L 60 ist ein Zinnlot aus 60% Sn und 40% Pb; Sn L 40 ein solches aus 40% Sn und 60% Pb.
Zum Löten von Ölbehältern werden 4,8 kg Sn L 40 benötigt; vorhanden sind Sn L 60 und Blei.
Wieviel Sn L 60 und wieviel Blei müssen zusammengeschmolzen werden, um die benötigte Menge Sn L 40 zu erhalten?

24. Zur Herstellung der Einzelteile einer Brikettpresse sind 220 Std. Kleindreharbeiten erforderlich.
Wieviel Drehmaschinen müssen bei der Herstellung einer Serie von 40 Pressen eingesetzt werden, wenn die Dreharbeiten in 4 Monaten (zu je 25 Arbeitstagen) beendet sein müssen? (Es wird in zwei Schichten zu je 7,5 Std. gearbeitet. Die Auslastung der Drehmaschinen wird mit je 80% angenommen.)

25. Bei der Steigerung der Arbeitsproduktivität spielt die Beseitigung von Verlustzeiten, die durch Mängel im Ablauf der Fertigung auftreten, eine wichtige Rolle.
Bei Anwendung der Seifert-Methode schreiben die Arbeiter selbst den Ablauf der Fertigung, insbesondere die Verlustzeiten, genau auf, so daß Mängel im Arbeitsablauf erkannt und beseitigt werden können.
Die Bearbeitung einer Kurbelwelle wird in 42 Std. vorgenommen; die Normzeit für diese Arbeit beträgt 64 Std. Die Aufzeichnungen des Arbeiters weisen 14 Verluststunden auf, von denen 8 Std. durch Verbesserung des Arbeitsablaufes beseitigt werden können. Die neue Normzeit beträgt demnach 56 Stunden; die Arbeit wird also in 34 Std. fertiggestellt.

a) Wie hoch war die ursprüngliche Normerfüllung?

b) Wie hoch ist die Normerfüllung bei Anwendung der Seifert-Methode?

c) Um wieviel Prozent ist die Normerfüllung durch die Anwendung der Seifert-Methode gestiegen?

d) Um wieviel Prozent ist die Arbeitsproduktivität gestiegen?

e) Um wieviel Prozent sind die Selbstkosten gesunken?

26. Eine Getriebewelle ($d = 80$ mm, $l = 780$ mm) ist einmal zu überdrehen. Die Schnittgeschwindigkeit beträgt 45 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ und der Vorschub 0,6 $\frac{\text{mm}}{\text{U}}$.

Berechnen Sie **a)** die erforderliche Umdrehungszahl der Arbeitsspindel,

b) die erforderliche Arbeitszeit!

27. Eine Antriebswelle ($d = 160$ mm) wird überdreht. Die Arbeitsspindel der Drehmaschine macht 90 Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit?

28. Berechnen Sie das Gewicht der in Abbildung 77 durch eine technische Zeichnung gegebene Exzenterwelle für einen Backenbrecher aus Stahl $\left(\gamma = 7{,}85 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$!

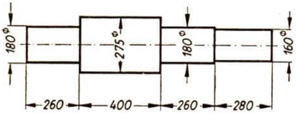


Abb. 77

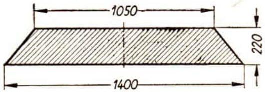


Abb. 78

29. Der Lagerzapfen eines Röhrentrockners für Braunkohle wird auf der Drehmaschine hergestellt. Er besitzt einen Durchmesser von 550 mm und eine Länge von 700 mm.

Die Schnittgeschwindigkeit soll 28 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, die Spantiefe 14 mm und der Vorschub je Umdrehung 1,2 mm betragen.
Berechnen Sie **a)** die erforderliche Umdrehungszahl der Arbeitsspindel, **b)** die Spanleistung (Spangewicht) je Minute $\left(\text{Material: Stahlguß}, \gamma = 7{,}8 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$!

30. Das Band einer Förderanlage für Rohbraunkohle ist 1400 mm breit. Das Schnittprofil der aufgeschütteten Kohle hat die in Abbildung 78 angegebene Form. Die Bandgeschwindigkeit beträgt $v = 1{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Berechnen Sie die Tagesleistung der Anlage bei dreischichtigem Betrieb und einer durchschnittlichen Auslastung von 85% $\left(\text{Wichte der Rohbraunkohle } \gamma = 1{,}4 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$!

b) Durch Verbesserung der technischen Voraussetzungen und der Arbeitsorganisation kann die Bandgeschwindigkeit auf 2,05 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und die durchschnittliche Auslastung auf 88% gesteigert werden.
Berechnen Sie die prozentuale Erhöhung der Tagesleistung!

31. Abbildung 79 zeigt den Innenraum einer Gießpfanne.
Berechnen Sie **a)** das Fassungsvermögen der Gießpfanne, wenn sie bis 180 mm unterhalb der oberen Kante gefüllt werden darf; **b)** das Gewicht des Pfanneninhaltes $\left(\text{Wichte des flüssigen Eisens } \gamma = 6{,}9 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$!

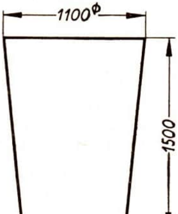


Abb. 79

32. Die in Abbildung 80 durch eine technische Zeichnung gegebene Entlüftungshaube, oben und unten offen, wird aus 2 mm dickem Blech gefertigt; die Kanten werden geschweißt.
Berechnen Sie **a)** die Länge der Schweißnähte; **b)** das Gewicht der Haube $\left(1 \text{ mm dickes Blech wiegt } 8 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}\right)$.

33. Die in Abbildung 81 dargestellte oben und unten offene Übergabeschurre wird aus 5 mm dickem Blech gefertigt; die Kanten werden geschweißt.
Berechnen Sie **a)** die Länge der Schweißnähte, **b)** das Gewicht der Schurre $\left(1 \text{ mm dickes Blech wiegt } 8 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}\right)$!

34. Der Transport von Werkstücken, die schwerer sind, als ein Kran heben darf, bereitet Schwierigkeiten.

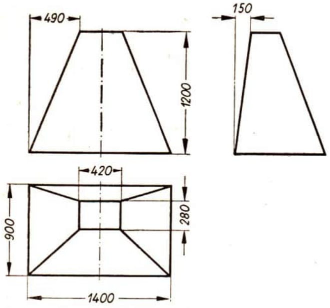


Abb. 80

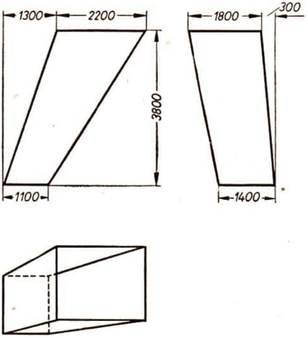


Abb. 81

In einem VEB wurden bis zur Montage eines Kranes mit ausreichender Tragkraft die Rümpfe der Brikettpressen mit zwei Kränen, die wie in Abbildung 82 angeordnet waren, unter Zuhilfenahme einer Traverse bewegt.

a) Berechnen Sie die Entfernungen a und b, wenn sich die Last entsprechend der Tragkraft der beiden Kräne verteilt!

b) Wieviel Tonnen trägt jeder Kran, wenn ein Pressenrumpf von 29 t Gewicht transportiert wird?

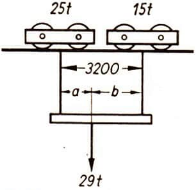


Abb. 82

35. Nach dem Hookeschen Gesetz erfährt ein Draht von der Länge L und dem Querschnitt q bei einer Belastung von P die Verlängerung $\lambda = \frac{L\,P}{q\,E}$.

Die Konstante E wird als Elastizitätsmodul bezeichnet; er ist von der Art des Stoffes abhängig. Wird λ und L in cm, q in cm^2 und P in kp gemessen, so ist

$$E_{\text{Stahl}} = 2\,100\,000\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}, \qquad E_{\text{Kupfer}} = 1\,200\,000\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Berechnen Sie **a)** die Verlängerung für einen Stahldraht mit $P = 2{,}7$ kp; $L = 4{,}72$ m; $d = 0{,}5$ cm, **b)** die Verlängerung für einen Kupferdraht mit $P = 15{,}2$ kp; $L = 612$ cm; $d = 8$ mm!

c) Stellen Sie grafisch dar: $\lambda = f(P)$, $\lambda = f(q)$!

36. In einer Brikettfabrik stehen 13 Zwillingspressen. Der Schwungraddurchmesser beträgt $d = 4000$ mm, die Drehzahl beträgt $n = \frac{90}{\mathrm{min}}$.

Bei jeder Umdrehung des Schwungrades werden 2 Briketts erzeugt; etwa 60 Stück wiegen 50 kp.

Berechnen Sie **a)** die Tagesproduktion in Tonnen; **b)** den Weg, den ein Punkt des Schwungrades während eines Tages zurücklegt!

37. Ein Stab mit rechteckigem Querschnitt sei an einem Ende fest eingeklemmt, das andere Ende sei mit P kp belastet.

Die Durchbiegung des Stabes beträgt $B = \frac{4\,P L^3}{E \cdot b \cdot h^3}$.

Berechnen Sie die Durchbiegung von Stäben aus

a) Stahl: Länge $L = 75$ cm; Breite $b = 1{,}5$ cm; Höhe $h = 2{,}2$ cm; $P = 2{,}5$; $1{,}72$; $8{,}75$ kp;

b) Kupfer: Länge $L = 64$ cm; Breite $b = 1{,}8$ cm; Höhe $h = 3{,}0$ cm; $P = 1{,}3$; $4{,}72$; $6{,}95$ kp.

38. In einem Kraftwerk wurden in einem Monat 282 850 t Dampf erzeugt.
Der Dampf wird zur Stromerzeugung und zur Brikettherstellung benötigt.

Im gleichen Monat wurden 19 775 400 kWh erzeugt; der Dampfverbrauch beträgt $12 \frac{\text{kp}}{\text{kWh}}$.

a) Wieviel Tonnen Dampf wurden zur Stromerzeugung benötigt?

b) Wieviel Tonnen Dampf wurden an die Brikettfabriken abgegeben?

c) Wieviel Tonnen Brikett können hergestellt werden, wenn man 1,2 t Dampf für eine Tonne Brikett benötigt?

39. Zur Erzeugung der in Aufgabe 38 angegebenen 282 850 t Dampf wird eine Gesamtwärmemenge von $768 \cdot 10^9$ kcal benötigt, von der $7{,}8 \cdot 10^9$ kcal aus Schwelgas, der Rest aus 106 960 t Rohbraunkohle erzeugt wird.

a) Wieviel Kubikmeter Schwelgas werden benötigt, wenn das Gas einen Heizwert $H_{u_G} = 1727 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$ besitzt?

b) Wie hoch ist der Heizwert H_{u_K} der Rohkohle?

c) Wieviel Prozent beträgt der Anteil der durch Schwelgas erzeugten Wärmemenge an der Gesamtwärmemenge?

40. Der Brennstoffverbrauch B eines Dampferzeugers ist nach folgender Formel zu ermitteln:

$$B = \frac{D\,(i_D - i_W)}{H_u \cdot \eta} \; \frac{\text{t}}{\text{h}}$$

Kesselleistung $D \approx 50 \frac{\text{t}}{\text{h}}$,

Erzeugungswärme des Dampfes $i_D = 802 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$,

Wärmeinhalt des Speisewassers $i_W = 138 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$,

Heizwert des Brennstoffes $H_u = 2300 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$,

Kesselwirkungsgrad $\eta = 0{,}85$.

41. Der Abraumbagger DS 1200 im Tagebau besitzt eine Eimerkette mit 39 Eimern. Jeder Eimer hat ein Volumen von 1200 l.
Die maximale Standortleistung des Baggers errechnet sich aus

$$A = \frac{I \cdot n \cdot \eta_e \cdot 60}{f} \; \frac{\text{m}^3}{\text{h}},$$

Eimerinhalt: $I = 1{,}2\ \mathrm{m}^3$,

Schüttzahl: $n = \dfrac{23}{\mathrm{min}}$,

Wirkungsgrad: $\eta_e = 0{,}93$,

Auflockerungsfaktor: $f = \dfrac{\text{Volumen des aufgelockerten Bodens}}{\text{Volumen des gewachsenen Bodens}} = 1{,}4$.

Berechnen Sie **a)** die Förderleistung je Stunde,

b) die Förderleistung je Monat (Monat zu 30 Tagen)!

c) In welcher Zeit werden 2 Züge zu je 8 Wagen mit je 25 m³ Inhalt gefüllt?

d) Bestimmen Sie das Gewicht der je Schicht (7,5 Std.) geförderten Abraummenge $\left(\text{Schüttgewicht } G = 1{,}8\ \dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}\right)$!

42. Wie groß ist das Eigengewicht eines Klinkerpfeilers mit einem quadratischen Querschnitt von 61,5 cm Kantenlänge und 3,50 m Höhe? Die Wichte beträgt für Klinker $1900\ \dfrac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^3}$.

43. Ein Speichergebäude hat eine Länge $l = 80$ m und eine Breite $b = 25$ m. Das Giebeldreieck des Satteldaches hat eine Höhe $h = 16$ m (vgl. Abb. 83). Wie groß ist die Dachfläche?

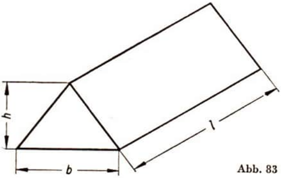


Abb. 83

Aus verschiedenen Gebieten

44. Im Warenverkehr zwischen der UdSSR und der DDR entsprechen 100 Rubel 55,56 DM. Vervollständigen Sie die nachstehende Umrechnungstabelle!

Rubel:											
DM:	1,–	5,–	10,–	25,–	50,–	100,–	200,–	300,–	400,–	500,–	1000,–

45. Sputnik III umkreiste die Erde in einer durchschnittlichen Höhe von 1740 km; er besaß eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $28\,000\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie die Umlaufzeit um die Erde (kreisförmige Bahn vorausgesetzt)!

46. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Punkt des Erdäquators durch die tägliche Erddrehung?

47. Der Abstand Erde–Mond beträgt 384 000 km.

a) Wie lange benötigt ein Lichtstrahl zum Durchlaufen dieser Strecke?

b) Wie lange würde ein Raumschiff für diese Strecke benötigen, wenn es eine durchschnittliche Geschwindigkeit $v = 650\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ besitzen würde?

c) Beantworten Sie die Fragen a) und b) auch für den Abstand Erde–Mars (z. Z. etwa 73 000 000 km)!

48. Für die Berechnung des Luftwiderstandes gilt die Formel

$$W = \frac{c_W \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot F}{2}.$$

Hierbei bedeuten c_W den Widerstandsbeiwert, ϱ die Luftdichte ($\approx 0{,}125$), v die relative Geschwindigkeit, F die Stirnfläche und W den Luftwiderstand.

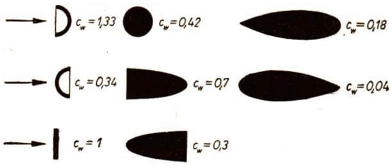


Abb. 84

a) Berechnen Sie den Luftwiderstand für folgende Drehkörper gleichen Durchmessers d (vgl. Abb. 84).

Setzen Sie für d (m): **a)** 0,25; **b)** 0,50; **c)** 0,75; **d)** 1,0;

	a)	**b)**	**c)**	**d)**
Setzen Sie für d (m):	0,25;	0,50;	0,75;	1,0;
jeweils für $v\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$:	1,4	1,4	1,4	1,4
	17	17	17	17
	300	300	300	300!

b) Wie ändert sich der Luftwiderstand eines Körpers, wenn sich die Geschwindigkeit verdoppelt?

c) Wie ändert sich der Luftwiderstand eines Körpers, wenn sich seine Stirnfläche verdoppelt?

49. Der griechische Mathematiker und Physiker Heron von Alexandria (um 120 v. u. Z.) hat den Dreiecksinhalt wie folgt bestimmt:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

wobei $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ist.

Berechnen Sie auf diese Weise den Flächeninhalt folgender Dreiecke!

a)	**b)**	**c)**
$a = 11{,}8$ cm	$a = 76{,}25$ m	$a = 304$ mm
$b = 15{,}3$ cm	$b = 131{,}50$ m	$b = 396$ mm
$c = 18{,}7$ cm	$c = 159{,}75$ m	$c = 552$ mm

50. Der Inkreisradius ϱ im Dreieck wird nach folgender Formel bestimmt:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}\,.$$

Berechnen Sie ϱ für die Dreiecke aus Aufgabe 49!

51. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls beträgt in trockener Luft bei t °C

$$v = 332\,(1 + 0{,}00367\,t)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Bestimmen Sie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für

$t_1 = -44$°C; $t_2 = -21$°C; $t_3 = -6$°C; $t_4 = 0$°C; $t_5 = 9$°C; $t_6 = 24$°C; $t_7 = 38$°C!

52. Der Hubraum V von Kraftfahrzeugen läßt sich aus der Bohrung d (lichter Durchmesser der Zylinderlaufbüchse), dem Hub b (Kolbenweg) und der Zylinderzahl n berechnen. Berechnen Sie den Hubraum folgender Kraftfahrzeuge!

Type	Fahrzeugart	Land	Bohrung (mm)	Hub (mm)	Anzahl der Zylinder
Simson 425	Krad	DDR	68	68	1
MZ-ES 175	Krad	DDR	58	65	1
MZ-BK 350	Krad	DDR	58	65	2
SR 2	Moped	DDR	38	42	1
P 50 Trabant	PKW	DDR	66	73	2
P 70	PKW	DDR	76	76	2
Wartburg	PKW	DDR	70	78	3
Moskwitsch 410 . . .	PKW	UdSSR	76	75	4
Wolga M 21	PKW	UdSSR	92	92	4
VW	PKW	DBR	76,9	64	4
Cadillac Super 62 . .	PKW	USA	101,6	91,6	8
Sachsenring H 3 S . .	LKW	DDR	115	145	4

70. Funktionspapiere

Zur Wiederholung:

1. a) Zeichnen Sie das Diagramm der Funktion $y = \frac{1}{2}x + 1$ in einem normalen kartesischen Koordinatensystem!

b) Wie ändert sich das Diagramm, wenn Sie den Nullpunkt
α) der Maßteilung auf der x-Achse um $+3$ $(-2, a)$ verschieben,
β) der Maßteilung auf der y-Achse um -2 $(+1, b)$ verschieben,
γ) beider Maßteilungen zugleich um a bzw. b verschieben?

c) Wie ändert sich das Diagramm, wenn Sie die zunächst gleichen Maßeinheiten e beider Achsen ändern in

α) $e_x = 2e$; $e_y = e$, β) $e_x = e$; $e_y = 3e$, γ) $e_x = 2e$; $e_y = 3e$, δ) $e_x = \frac{1}{2}e$; $e_y = \frac{1}{2}e$?

2. Führen Sie dieselben Untersuchungen für die Diagramme der Funktion **a)** $y = x^2$; **b)** $y = \lg x$ durch!

Bei allen grafischen Darstellungen war bisher selbstverständliche Voraussetzung, daß die Maßteilungen auf beiden Achsen sogenannte lineare Leitern waren. Bei diesen ist der Abstand der einzelnen Punkte vom Nullpunkt proportional zur dazugehörigen Zahl. Als Raster bei solchen Achsenteilungen ergibt sich das bekannte gleichmäßig geteilte Millimeterraster.

Statt dessen kann man die Maßeinteilungen auf einer oder auf beiden Achsen nichtlinear wählen. Oft trägt man z. B. auf den Achsen logarithmische Leitern ab, wie wir sie vom Rechenstab kennen. Werden die Rasterlinien nach diesen Teilungen eingetragen, entsteht beim Zugrundelegen von logarithmischen Leitern auf beiden Achsen das **logarithmische Funktionspapier,** bei logarithmischer Teilung auf nur einer Achse das **halblogarithmische Funktionspapier.** Der Punkt $P(2; 3)$ hat also im logarithmischen Papier die Abstände $\lg 2$ bzw. $\lg 3$ von der y- bzw. x-Achse, der Punkt $Q(x; y)$ die Abstände $u = \lg x$ bzw. $v = \lg y$. Der Koordinatenursprung, der die Abstände 0; 0 von den Achsen hat, muß in diesem Funktionspapier wegen $0 = \lg x_0 = \lg 1$; $0 = \lg y_0 = \lg 1$ die Beschriftung 1; 1 erhalten.

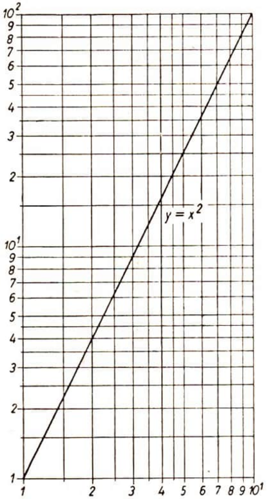


Abb. 85

Einer Geraden $v = m \cdot u + n$ auf logarithmischem Papier entspricht die Gleichung

$$\lg y = m \cdot \lg x + n.$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\lg y = \lg x^m + \lg 10^n$$
$$\lg y = \lg (x^m \cdot 10^n)$$

oder
$$y = 10^n \cdot x^m.$$

Setzen wir $10^n = \mathrm{B}$, so erhalten wir die Funktion

$$y = \mathrm{B} \cdot x^m,$$

also eine Potenzfunktion (m beliebig rational).

Dieser entspricht auf logarithmischem Papier eine Gerade als Diagramm. Man kann also Potenzfunktionen, die auf Millimeterpapier Parabeln oder Hyperbeln ergeben, auf logarithmischem Papier als Geraden darstellen. Hierin liegt der Vorteil der Verwendung dieses Funktionspapiers; man nennt es deshalb auch **Potenzpapier.**

Beispiel: Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist in Abbildung 85 auf logarithmischem Papier dargestellt.

Auf halblogarithmischem Papier ($u = x$; $v = \lg y$) entspricht z. B. der Geraden

$$v = u - n$$

die Funktion

$$\lg y = x - \lg 10^n = x - \lg \mathrm{B}$$
$$\lg y + \lg \mathrm{B} = x$$
$$\lg \mathrm{B} \cdot y = x$$
$$\mathrm{B}y = 10^x$$

Das ist eine Exponentialfunktion. Sie ergibt auf halblogarithmischem Papier eine Gerade als Diagramm; deshalb nennt man dieses Funktionspapier auch **Exponentialpapier.**

Aufgaben

1. Stellen Sie folgende Funktionen auf logarithmischem Papier dar!

a) $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}$

c) $y = f(x) = 0{,}5\,x^2$ **d)** $y = f(x) = 0{,}5\,x^2 + 2$

e) $y = f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ **f)** $P = P(d) = 0{,}613\,d^2$

2. Wie lautet die Gleichung **a)** der Abszissenachse, **b)** der Ordinatenachse auf logarithmischem Papier?

C. Geometrie

IX. Darstellende Geometrie

71. Die senkrechte Parallelprojektion

Bisher haben wir den Grundriß eines Gegenstandes als Ansicht von oben, den Aufriß als Ansicht von vorn und den Kreuzriß als Ansicht von der Seite betrachtet. Geometrisch wird der Grundriß als Bild aufgefaßt, das entsteht, wenn die Punkte, Linien und Flächen des Gegenstandes durch parallele Geraden auf die Grundrißtafel abgebildet werden. Diese Geraden stehen dabei auf der Grundrißtafel senkrecht (Abb. 86). Der Abbildungsvorgang wird **Projektion**, zur Unterscheidung von der optischen Projektion zum Beispiel durch einen Bildwerfer auch geometrische Projektion, genannt. Die bilderzeugenden Geraden heißen **Projektionsstrahlen**, die Ebene, auf der das Bild entsteht, heißt **Projektionsebene**, und das Bild selbst wird als **Projektion** bezeichnet.

Da im betrachteten Fall die Projektionsstrahlen parallel sind und auf der Projektionsebene senkrecht stehen, wird von einer **senkrechten Parallelprojektion** gesprochen. Der Grundriß eines Gegenstandes ist somit seine senkrechte Parallelprojektion auf die Grundrißtafel.

Entsprechend ist der Aufriß die senkrechte Parallelprojektion auf die Aufrißtafel und der Kreuzriß die senkrechte Parallelprojektion auf die Kreuzrißtafel. Der Zusammenhang zwischen den drei Projektionen ist in Abbildung 87 dargestellt.

In der darstellenden Geometrie wird die Grundrißtafel mit Π_1, die Aufrißtafel mit Π_2 und die Kreuzrißtafel mit Π_3 bezeichnet.

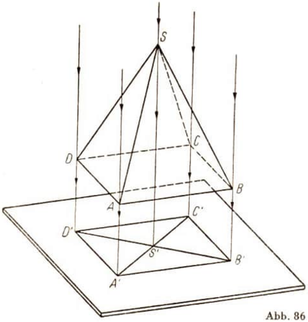


Abb. 86

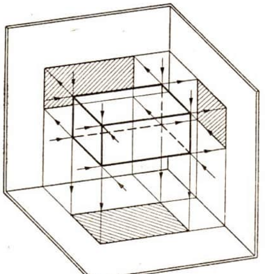


Abb. 87

Bei der senkrechten Parallelprojektion auf eine Tafel hat jeder Punkt des Gegenstandes ein bestimmtes Bild, mit anderen Worten, zu jedem Originalpunkt gibt es genau einen Bildpunkt als Projektion. Die Abbildung durch senkrechte Parallelprojektion ist somit eindeutig. In der Abbildung 88 ist eine gerade quadratische Pyramide $ABCDS$ dargestellt, auf ihr sind zwei Punkte (P auf der Kante DS und Q auf der Seitenfläche ABS) bezeichnet. Wo liegen die Grundrisse dieser Punkte? Die Lösung gibt die Abbildung 89.

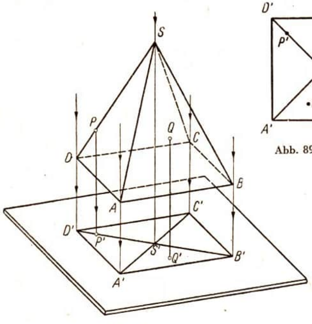


Abb. 88

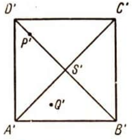


Abb. 89

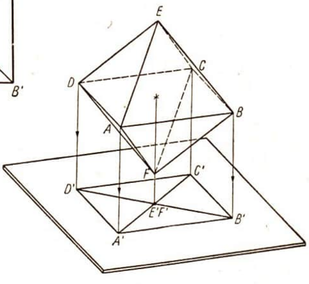


Abb. 90

Dagegen braucht ein Bildpunkt nicht die Projektion eines einzigen Originalpunkts zu sein. So können wir bei der Betrachtung des Grundrisses eines auf der Grundrißtafel stehenden Quaders feststellen, daß ein Bildpunkt auch die Projektion mehrerer Punkte oder einer Strecke sein kann. Die Abbildung 90 zeigt eine Doppelpyramide, bei der beide Spitzen den gleichen Punkt als Projektion haben. Aus der Tatsache, daß jeder Originalpunkt genau einen Bildpunkt hat, dürfen wir nicht schließen, daß umgekehrt zu jedem Bildpunkt genau ein Originalpunkt gehört. Die Eindeutigkeit der Abbildung ist nicht umkehrbar.

Zusammenfassung:

1. **Die Abbildung in senkrechter Parallelprojektion auf eine Tafel ist eindeutig, sie ist aber nicht umkehrbar eindeutig.**
2. **Gerade Linien werden in senkrechter Parallelprojektion als gerade Linien abgebildet, falls sie nicht auf der Projektionsebene senkrecht stehen. Gerade Linien, die auf der Projektionsebene senkrecht stehen, werden als Punkte abgebildet.**
3. **Parallelen werden als Parallelen abgebildet, falls sie nicht auf der Projektionsebene senkrecht stehen.**
4. **Ebene Flächen, die auf der Projektionsebene senkrecht stehen, werden als gerade Linien abgebildet.**

72. Die schiefe Parallelprojektion

Die Abbildung in Kavalierperspektive läßt sich gleichfalls auf Parallelprojektion zurückführen.

Wir halten ein Kantenmodell eines Würfels so vor eine senkrechte Bildtafel, daß die Vorderfläche des Würfels zur Bildtafel parallel ist, und beleuchten das Modell mit parallelem Licht (Sonnenlicht). Auf der Bildtafel entsteht eine Schattenfigur, die der Abbildung in Kavalierperspektive ähnelt. Die Vorder- und die Rückfläche des Würfels werden auf der Bildtafel deckungsgleich abgebildet, die zur Bildtafel senkrechten Kanten erscheinen schräg. Durch geeignete Wahl der Beleuchtungsrichtung läßt sich erreichen, daß die zur Bildtafel senkrechten Kanten auf die Hälfte verkürzt und unter einem Winkel von 45° gegen die Waagerechte abgebildet werden (Abb. 91).

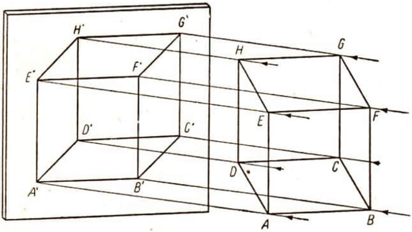


Abb. 91

Geometrisch entsprechen den Lichtstrahlen parallele Projektionsstrahlen durch die Punkte des Gegenstandes. Diese Projektionsstrahlen treffen jedoch auf die Projektionsebene, die Bildtafel, nicht senkrecht, sondern schief, das heißt unter einem spitzen Winkel auf. Die Abbildung in Kavalierperspektive ist somit eine **schiefe Parallelprojektion auf eine Tafel.**

Aufgaben

1. Welche wichtigen Sätze über die Abbildung in senkrechter Parallelprojektion gelten auch für die schiefe Parallelprojektion?
2. Zeichnen Sie die Schrägbilder der in Abbildung 92 in drei Rissen gegebenen Körper in Kavalierperspektive!

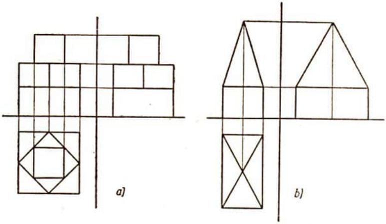


Abb. 92

73. Darstellungen in schiefer und in senkrechter Parallelprojektion

Die schiefe Parallelprojektion gibt zwar anschauliche Bilder, das heißt Bilder, die dem Betrachter einen Gesamteindruck von dem Gegenstand vermitteln, doch wirken diese Bilder verzerrt. Beispielsweise sind wir gewohnt, Kreise, die in einer waagerechten Ebene liegen, als Ellipsen mit waagerechter großer Achse zu sehen. Dagegen sehen wir Kugeln in jeder Lage als Kreise (Abb. 93). In der Kavalierperspektive werden aber

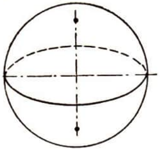


Abb. 93

Kreise, die in einer waagerechten Ebene liegen, und auch Kugeln als Ellipsen mit schräggestellten Achsen abgebildet.

Dreht man bei dem Versuch, der in Kapitel 72 beschrieben ist, die Bildtafel bei gleichbleibender Lage des Würfelmodells und bei gleichbleibender Beleuchtungsrichtung, so wird die Verzerrung des Schattenbildes um so stärker, je kleiner der Winkel ist, den die Lichtstrahlen mit der Bildtafel einschließen. Sie wird um so geringer, je mehr sich dieser Winkel einem rechten Winkel nähert (Abb. 94). Da die Bildtafel beim Drehen zur Vorderfläche des Würfels nicht parallel bleibt, werden Vorder- und Rückfläche auch nicht mehr als dem Original deckungsgleiche Quadrate, sondern als Parallelogramme abgebildet. Befindet sich die Bildtafel zu den Lichtstrahlen in senkrechter Lage, so erscheint das Bild fast unverzerrt. Es wirkt so, als ob der Gegenstand aus einer Entfernung betrachtet würde, die groß gegenüber seinen Abmessungen ist. Geometrisch liegt in diesem Falle eine **senkrechte Parallelprojektion** auf eine Tafel vor.

Je nach der Lage des Gegenstandes zur Projektionsebene ergeben sich verschiedene Bilder; dies ist in der Abbildung 95 am Beispiel eines Würfels gezeigt. Für das praktische Zeichnen von Schrägbildern ist es notwendig, vor allem zu wissen, wie Strecken in den Richtungen der Körperhauptachsen — Breite, Höhe, Tiefe — abgebildet werden. Dies ist an der Darstellung eines Würfels unmittelbar zu erkennen; denn im allgemeinen wird angenommen, daß die Kanten des Körpers in den Hauptrichtungen

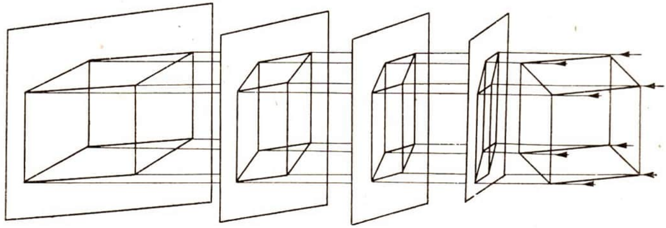


Abb. 94

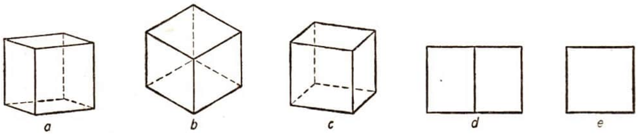


Abb. 95

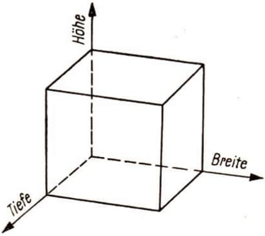


Abb. 96

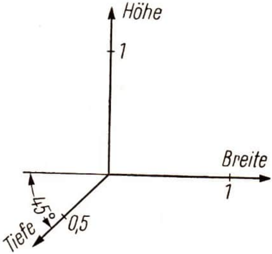


Abb. 97

liegen (Abb. 96). In der Kavalierperspektive werden die Breiten waagerecht, das heißt in der Richtung der Rißachse gezeichnet, die Höhen dazu senkrecht, die Tiefen unter einem Winkel von 45° geneigt. Breiten und Höhen werden in wahrer Größe aufgetragen, Tiefen auf die Hälfte verkürzt (Abb. 97).

Bei der senkrechten Parallelprojektion werden jedoch die Strecken in den Hauptachsrichtungen im allgemeinen verkürzt abgebildet; denn sie sind, von den Sonderfällen abgesehen, zur Bildtafel nicht parallel. Nimmt man zum Beispiel, wie bei der Kavalierperspektive, Vorder- und Rückfläche eines Würfels parallel zur Bildtafel an, so werden die Tiefenkanten, da sie zur Bildtafel senkrecht stehen, als Punkte abgebildet. Man erhält dann den Aufriß des Körpers und kein anschauliches Bild.

a) Die dimetrische senkrechte Parallelprojektion

Von besonderer Bedeutung für das technische Zeichnen ist diejenige senkrechte Parallelprojektion, bei der, wie bei der Kavalierperspektive, die Tiefenstrecken gegenüber den Höhen und Breiten auf die Hälfte verkürzt dargestellt werden. In der Abbildung 94 ist ein Würfel in dieser Projektionsart dargestellt. Der Verkürzungsfaktor beträgt für die Breiten und Höhen annähernd 0,9428, für die Tiefen annähernd 0,4714. Im Bild schließen die Breiten mit den Höhen einen Winkel von etwa 97°, die Tiefen mit den Höhen einen Winkel von etwa 131,5° ein. Die Höhen werden senkrecht zum oberen und unteren Blattrand gezeichnet (Abb. 98).

Diese Projektionsart heißt **dimetrische senkrechte Parallelprojektion**, sie ist für technische Zeichnungen genormt und wird hauptsächlich dann angewandt, wenn eine der drei Ansichten des Gegenstandes – die Vorderansicht als Hauptansicht – besonders hervortreten soll. Das Wort „dimetrisch“[1] bedeutet, daß für die Hauptachsrichtungen

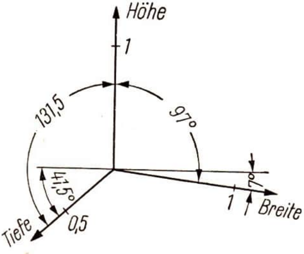


Abb. 98

[1] di (griechisch), zwei.

zwei verschiedene Maßstäbe gelten: für die Breiten und die Höhen der gleiche Maßstab, für die Tiefen ein anderer.

Beim praktischen Zeichnen werden die Strecken in Richtung der Breiten- und der Höhenachse unverkürzt, die Tiefenstrecken auf die Hälfte verkürzt aufgetragen. Die Darstellung erscheint dadurch linear vergrößert, und zwar um den Faktor $\frac{1}{0{,}9428} \approx 1{,}06$. Diese Festlegung erleichtert das Arbeiten, denn es können die Maße ohne zeitraubende Umrechnung in die Zeichnung übertragen oder aus der Zeichnung entnommen werden.

b) Die isometrische senkrechte Parallelprojektion

Gleichfalls, wenn auch seltener, wird beim technischen Zeichnen eine Projektionsart angewandt, bei der die Verkürzung in allen drei Hauptachsrichtungen den gleichen Wert hat. In der Abbildung 95 ist ein Würfel in dieser Projektionsart dargestellt. Die Breiten und die Tiefen schließen im Bild mit den Höhen jeweils einen Winkel von 120° ein. Die Strecken in den drei Hauptachsrichtungen werden um einen Faktor von annähernd 0,8165 verkürzt abgebildet (Abb. 99).

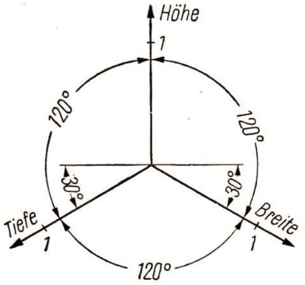


Abb. 99

Diese Projektionsart heißt **isometrische senkrechte Parallelprojektion.** Sie ist für technische Zeichnungen genormt und wird vor allem dann angewandt, wenn alle drei Ansichten des Gegenstandes — Draufsicht, Vorderansicht, Seitenansicht — gleich wichtig sind. Das Wort „isometrisch"[1] bedeutet, daß für alle drei Hauptachsrichtungen der gleiche Maßstab gilt.

Bei der isometrischen senkrechten Parallelprojektion werden in der Praxis die Strecken in den Hauptachsrichtungen unverkürzt aufgetragen. Die Zeichnung erscheint dadurch um den Faktor $\frac{1}{0{,}8165} \approx 1{,}22$ linear vergrößert.

Im Unterschied zur Kavalierperspektive wird weder bei der dimetrischen noch bei der isometrischen Parallelprojektion die Vorderansicht eines würfel- oder quaderförmigen Gegenstandes in wahrer Größe und Gestalt abgebildet. Die Tatsache, daß Breiten und Höhen in wahrer Größe abgebildet werden, ist nicht gleichbedeutend mit einer deckungsgleichen Abbildung der Vorderansicht bei den genannten Körpern. Die quadratische Vorderfläche eines Würfels wird in der dimetrischen senkrechten Parallelprojektion als Rhombus mit Winkeln von annähernd 83° und 97°, in der isometrischen senkrechten Parallelprojektion als Rhombus mit Winkeln von 60° und 120° abgebildet (Abb. 95).

Beim praktischen Zeichnen wird, wie bei der Kavalierperspektive, von der Grundfläche des Gegenstandes ausgegangen. Die Figur auf der Grundfläche wird, wie bei der Kavalierperspektive, mit Hilfe von Breiten- und Tiefenlinien entworfen. Es ist jedoch zweckmäßig, die Hilfsfigur für die Konstruktion der Grundfigur gesondert zu

[1] isos (griechisch), gleich.

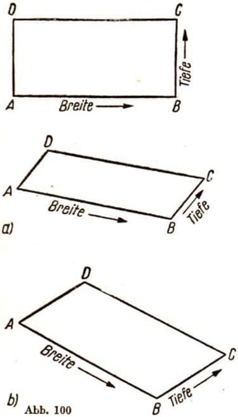


Abb. 100

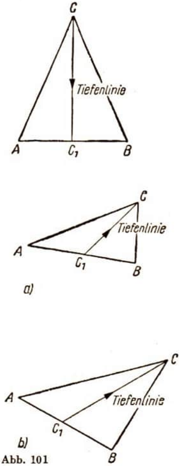


Abb. 101

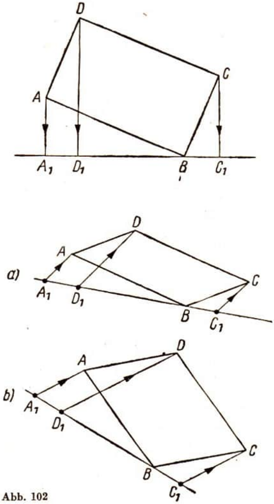


Abb. 102

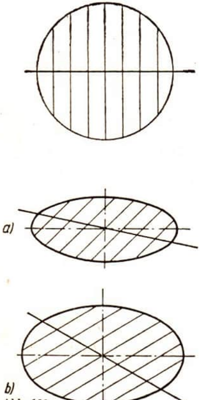


Abb. 103

zeichnen und von dieser Zeichnung die Strecken zu übertragen. In den Abbildungen 100 bis 103 sind dafür einige Beispiele gegeben.

Bei symmetrischen Figuren kann zuerst die Symmetrieachse, sofern diese in einer der Hauptachsrichtungen liegt, gezeichnet werden. Von der Symmetrieachse aus werden dann die einzelnen Strecken aufgetragen (vgl. Abb. 103). Bei Körpern, deren Symmetrieachsen in den Hauptachsrichtungen liegen, kann beim Zeichnen gleichfalls von den Symmetrieachsen ausgegangen werden.

Zusammenfassung:

1. **Bei der dimetrischen senkrechten Parallelprojektion werden die Breiten unter einem Winkel von 97°, die Tiefen unter einem Winkel von 131,5° gegenüber den Höhen abgebildet. Die Höhen werden senkrecht zum oberen Bildrand gezeichnet. Breiten und Höhen werden in wahrer Größe, Tiefen auf die Hälfte verkürzt gezeichnet. Die so entstandene Abbildung ist um den Faktor 1,06 vergrößert.**

2. Bei der isometrischen senkrechten Parallelprojektion werden die Breiten und die Tiefen unter Winkeln von 120° gegenüber den Höhen abgebildet. Die Höhen werden senkrecht zum oberen Bildrand gezeichnet. Breiten, Höhen und Tiefen werden in wahrer Größe gezeichnet. Die so entstandene Abbildung ist um den Faktor 1,22 vergrößert.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie einen Quader (Kanten $a = 3{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 6$ cm)
a) in Kavalierperspektive,
b) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
c) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion
und vergleichen Sie die Darstellungen! Welche Darstellung gibt die Form des Körpers am besten wieder?

2. Zeichnen Sie ein regelmäßiges sechskantiges Prisma ($s_a = 3$ cm, $h = 7$ cm)
a) in Kavalierperspektive,
b) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion!

3. Zeichnen Sie eine gerade quadratische Pyramide ($a = 4$ cm, $h = 6$ cm)
a) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
b) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!

4. Zeichnen Sie die in Abbildung 104 in Grundriß und Aufriß gegebenen Körper
a) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
b) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!

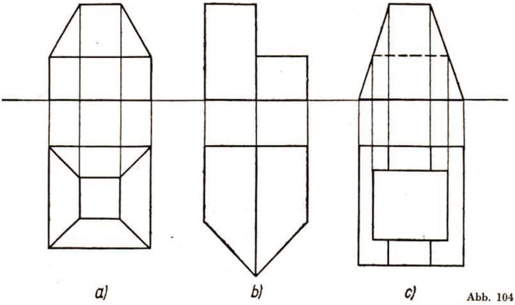


Abb. 104

5. Zeichnen Sie einen geraden Kreiszylinder ($d = 5{,}4$ cm, $h = 8{,}2$ cm)
a) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
b) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!

6. Zeichnen Sie einen geraden Kreiskegel ($d = 5{,}6$ cm, $h = 7{,}2$ cm) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion!

7. Ein gerader Kreiskegel ($d = 8$ cm, $h = 12$ cm) wird in 6 cm Höhe angestumpft. Stellen Sie den Stumpfkörper in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion dar!

8. Ein gerader Kreiskegel ($d = 4{,}8$ cm, $h = 7{,}2$ cm) steht mit seiner Spitze auf der Grundebene. Stellen Sie ihn in isometrischer senkrechter Parallelprojektion dar!

9. Ein gerader Kreiszylinder ($d = 6$ cm, $h = 8$ cm) liegt so, daß seine Achse parallel zur Breitenachse ist. Zeichnen Sie den Zylinder

a) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,

b) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!

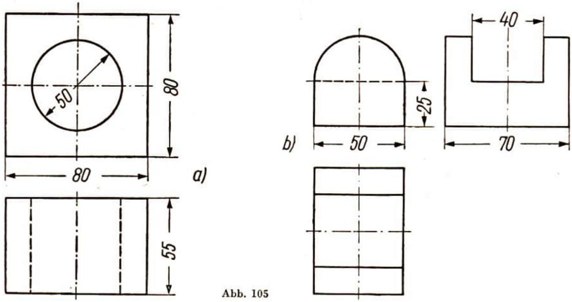
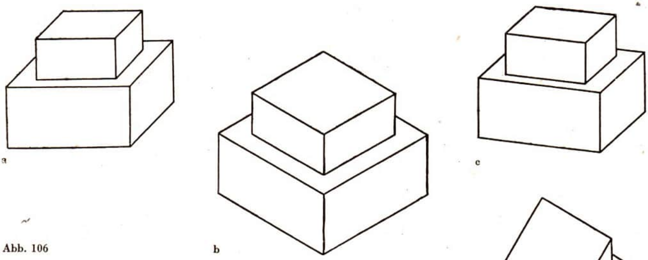


Abb. 105



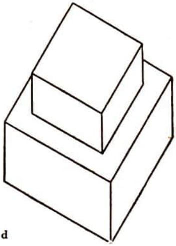


Abb. 106

10. Zeichnen Sie die in Abbildung 105 in zwei bzw. drei Rissen gegebenen Werkstücke in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion und in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!

11. In der Abbildung 106 ist ein Körper in vier verschiedenen Projektionsarten dargestellt. In welchen Fällen liegt senkrechte, in welchen schiefe Parallelprojektion vor? Welche Projektionen sind isometrisch, welche dimetrisch?

74. Die Darstellung der Kugel in Parallelprojektion

Wird eine Kugel durch parallele Strahlen auf eine Ebene senkrecht projiziert, so entsteht ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Kugeldurchmesser, das heißt dem Durchmesser eines Kugelgroßkreises ist (Abb. 107a). Treffen die Projektionsstrahlen schief auf die Ebene auf, so entsteht eine Ellipse, deren kleine Achse gleich dem Kugeldurchmesser ist und deren große Achse um so länger ist, je kleiner der Winkel ist, den die Projektionsstrahlen mit der Projektionsebene einschließen (Abb. 107b, c). Das Bild der Kugel ist somit in der senkrechten Parallelprojektion (Grundriß, Aufriß, Kreuzriß, isometrische und dimetrische Parallelprojektion) ein Kreis, in der schiefen Parallelprojektion eine Ellipse.

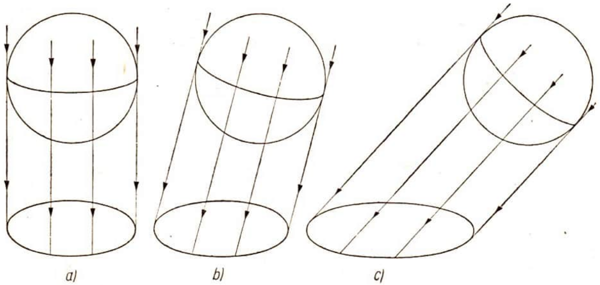


Abb. 107

Das Bild einer Kugel in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion ist ein Kreis, dessen Durchmesser, entsprechend der Festlegung über das unverkürzte Auftragen der Strecken in den Hauptachsrichtungen Breite und Höhe, gegenüber dem wahren Kugeldurchmesser auf das 1,06fache vergrößert gezeichnet wird. Bei der isometrischen

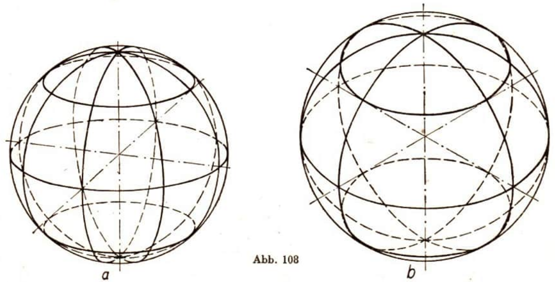


Abb. 108

senkrechten Parallelprojektion beträgt der Faktor, um den der Kugeldurchmesser zu vergrößern ist, sogar 1,22.

Überziehen wir die Kugel mit einem Gradnetz, so wird in dimetrischer und isometrischer senkrechter Parallelprojektion der Äquator als Ellipse abgebildet. Auch die Parallelkreise werden als Ellipsen wiedergegeben (Abb. 108a). Diese sind der Äquatorellipse ähnlich, das heißt, sie haben das gleiche Achsverhältnis wie diese. Die Meridiane werden zusammen mit ihren gegenüberliegenden gleichfalls im allgemeinen als Ellipsen abgebildet (Abb. 108b). Zu beachten ist bei dieser Darstellung, daß die Pole nicht „oben" und „unten" auf dem Umriß liegen. Die in Abbildung 109 gezeigte Hilfskonstruktion gibt an, wie man den Ort der Pole finden kann, wenn Kugelumriß und Äquatorellipse gegeben sind.

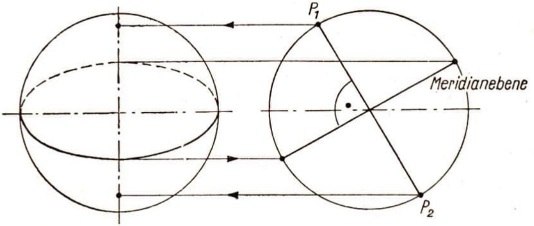


Abb. 109

Zusammenfassung:

1. **Das Bild einer Kugel in senkrechter Parallelprojektion ist ein Kreis, in schiefer Parallelprojektion ist es eine Ellipse. Der Durchmesser des Kreises bzw. die kleine Achse der Ellipse ist gleich dem Kugeldurchmesser.**
2. **In senkrechter dimetrischer Parallelprojektion wird der Umriß der Kugel als Kreis gezeichnet, dessen Durchmesser das 1,06fache des Kugeldurchmessers beträgt.**
3. **In senkrechter isometrischer Parallelprojektion wird der Umriß der Kugel als Kreis gezeichnet, dessen Durchmesser das 1,22fache des Kugeldurchmessers beträgt.**

Aufgaben

1. Zeichnen Sie eine Kugel ($d = 7$ cm) mit einem Gradnetz von 30° zu 30° in Grundriß und Aufriß!
2. Zeichnen Sie eine Kugel ($d = 6$ cm) mit waagerecht liegendem Äquator
   a) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
   b) in isometrischer senkrechter Parallelprojektion!
3. Ein Behälter hat die Form eines Zylinders ($d = 5{,}4$ m, $h = 4$ m) mit halbkugelförmiger Kappe. Zeichnen Sie den Gegenstand
   a) in Grundriß und Aufriß,
   b) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion!
   (Maßstab 1 : 100)

4. Eine Halbkugel ($d = 7$ cm) wird in 2,5 cm Höhe abgeflacht.
   Zeichnen Sie den Körper
   a) in Grundriß und Aufriß,
   b) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion,
   c) in isometrischer lotrechter Parallelprojektion!
5. Eine Kugel ($d = 8$ cm) wird in der lotrechten Achse zylindrisch ($d_1 = 6$ cm) durchbohrt.
   Zeichnen Sie den ringförmigen Restkörper
   a) in Grundriß und Aufriß,
   b) in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion!

75. Parallelprojektion und Zentralprojektion

Die geometrischen Abbildungsverfahren, die auf Parallelprojektion beruhen, ergeben Bilder, die in mancher Hinsicht vom optischen Eindruck abweichen, den wir beim Betrachten des Gegenstandes mit unseren Augen erhalten. Dies gilt nicht nur für die Abbildung in schiefer Parallelprojektion, die verzerrte Bilder liefert, sondern auch für die senkrechte Parallelprojektion, etwa die isometrische oder die dimetrische senkrechte Parallelprojektion, obwohl sie gegenüber der schiefen Projektion unverzerrt wirken.

Betrachten wir zum Beispiel mit unseren Augen einen quaderförmigen Gegenstand, so scheinen die in die Tiefe führenden Kanten zusammenzulaufen. Dies ist um so deutlicher zu bemerken, je größer der Gegenstand im Verhältnis zur Betrachtungsentfernung ist (Abb. 110a). In (schiefer oder senkrechter) Parallelprojektion werden Tiefenlinien parallel abgebildet (Abb. 110b).

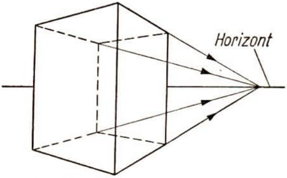


Abb. 110a

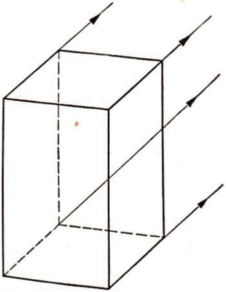


Abb. 110b

Wird ein Modell eines geometrischen Körpers, zum Beispiel das Kantenmodell eines Würfels, vor eine Bildtafel gehalten und von einer punktförmigen Lichtquelle (Punktlichtlampe) beleuchtet, so entsteht eine Schattenfigur in Zentralprojektion (Abb. 111). Bei Beleuchtung mit parallelem Licht (Sonnenlicht) jedoch entsteht ein Schatten in Parallelprojektion.

Je weiter bei diesem Versuch die Punktlichtlampe vom Modell entfernt wird, desto mehr ähnelt die Schattenfigur dem Schatten bei paralleler Beleuchtung. Die Parallelprojektion kann als Grenzfall der Zentralprojektion angesehen werden, wenn das Projektionszentrum über alle Maßen weit hinausrückt.

Bei der Abbildung in Zentralprojektion werden Strecken im allgemeinen nicht in wahrer Größe abgebildet, parallele Geraden werden im allgemeinen nicht parallel wiedergegeben. Aus einem Bild in Zentralprojektion können die Abmessungen des Gegenstandes nicht unmittelbar entnommen

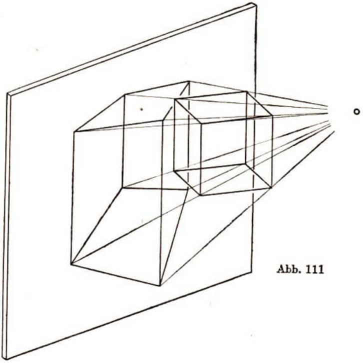


Abb. 111

werden. Die Zentralprojektion ergibt wohl anschauliche, aber nicht maßgerechte Bilder. Sie wird in der Praxis hauptsächlich für Architekturzeichnungen verwendet. Fotografische Aufnahmen sind ebenfalls Abbildungen in Zentralprojektion.

76. Kartenprojektionen

Die Kartographie befaßt sich mit der Aufgabe, von der als Kugeloberfläche angenommenen Erdoberfläche eine ebene Karte zu entwerfen. Da die Oberfläche einer Kugel nicht in die Ebene abwickelbar ist, wird an die Kugel entweder eine Ebene oder eine in die Ebene abwickelbare gekrümmte Fläche, z. B. ein Kegel- oder Zylindermantel, angelegt (Abb. 112). Die Punkte der Kugeloberfläche werden auf diese Fläche nach bestimmter Vorschrift projiziert. Dabei entsteht auf der ebenen oder abwickelbaren Projektionsfläche kein geometrisch ähnliches Bild der Kugeloberfläche, sondern eine Abbildung, die sich von dieser in den Längen-, Flächen- oder Winkelbeziehungen unterscheidet, anders ausgedrückt, die Kugeloberfläche wird **verzerrt** abgebildet.

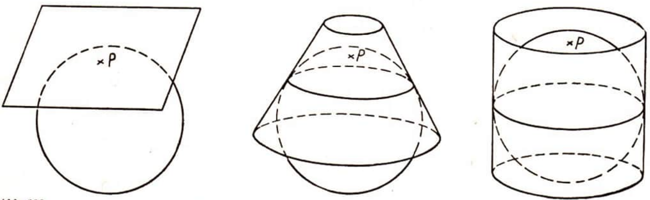


Abb. 112 a b c

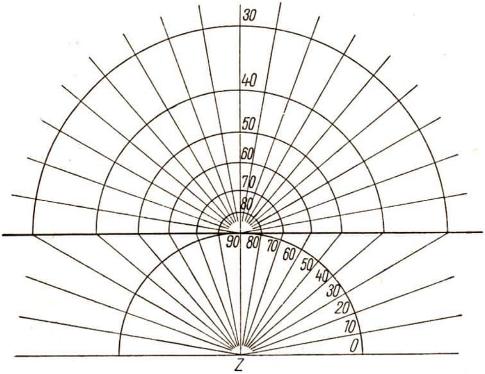


Abb. 113

Nach der Art der Projektionsfläche unterscheidet man **ebene** Projektionen, **Kegel-** und **Zylinder**projektionen, nach der Projektionsart **Zentral-** und **Parallel**projektionen und andere, kompliziertere Projektionen.

Bei der **gnomonischen Projektion** liegt das Projektionszentrum im Kugelmittelpunkt, die Projektionsfläche ist eine Berührungsebene der Kugel. Ist der Berührungspunkt ein Pol der Erde, so spricht man von einer gnomonischen **Polarprojektion.** Bei dieser werden die Meridiane als gerade Linien, die Parallelkreise als konzentrische Kreise abgebildet (Abb. 113). Aus der Abbildung ist zu ersehen, daß die gnomonische Polarprojektion nur für polnahe Gebiete günstig ist, da mit zunehmendem Polabstand auch die Verzerrung stark zunimmt. Sollen andere Gebiete gnomonisch projiziert werden, so ist der Berührungspunkt der Projektionsfläche ungefähr im Mittelpunkt dieses Gebiets zu wählen. Die Abbildung 114 zeigt dies für einen Punkt des Äquators. Die gnomonische Projektion hat den Vorteil, daß Kugelgroßkreise als gerade Linien abgebildet werden.

Bei der **stereographischen Projektion** liegt das Projektionszentrum im Gegenpunkt des Berührungspunktes der Projektionsebene, also bei der stereografischen Polarprojektion im anderen Pol der Erde (Abb. 115). Die stereografische Projektion ist winkeltreu, auch werden Kreise auf der Kugeloberfläche als Kreise oder Geraden abgebildet. Sie eignet sich besonders für die Abbildung einer Halbkugel und wird darum bei Sternkarten häufig angewandt. Die Abbildung 116 zeigt das Netz der stereographischen Äquatorialprojektion, das heißt der Projektion, bei der die Projektionsebene die Erde in einem Punkte des Äquators berührt.

Bei der **orthographischen Projektion** treffen parallele Projektionsstrahlen senkrecht auf die Projektionsebene auf; die Abbildung 117 zeigt die orthografische Polarprojektion, die Abbildung 118 ein Netz der orthographischen Äquatorialprojektion. Wegen der starken

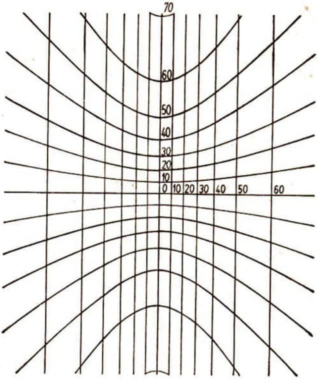


Abb. 114

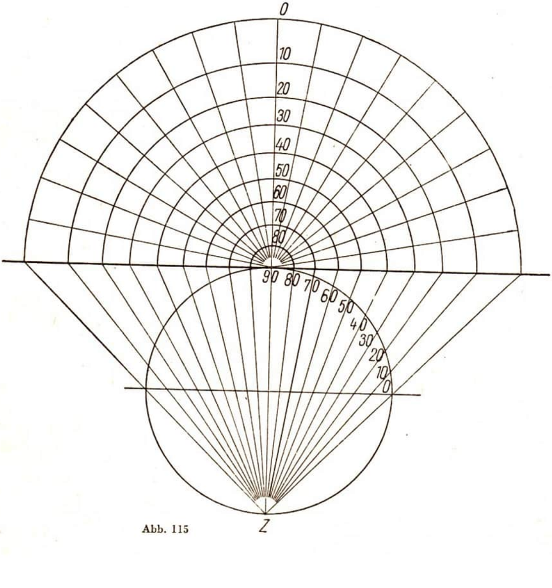


Abb. 115

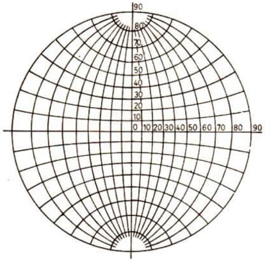


Abb. 116

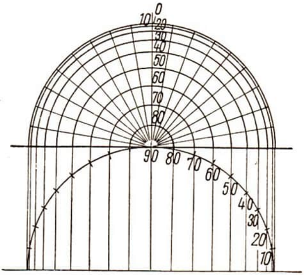


Abb. 117

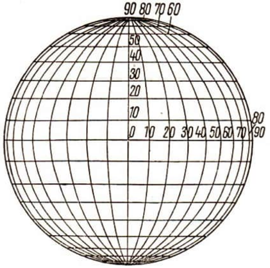


Abb. 118

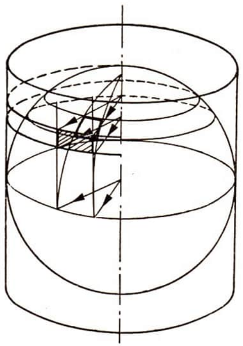


Abb. 119

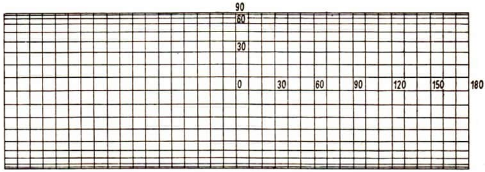


Abb. 120

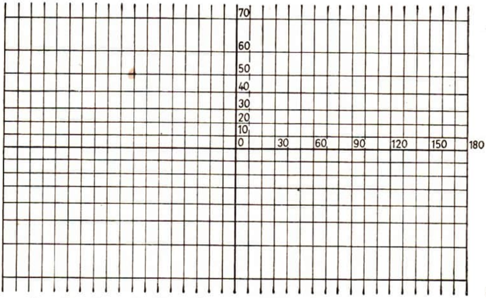


Abb. 121

Verzerrung an den Rändern findet die orthographische Projektion in der Geographie nur selten Anwendung, dagegen ist sie bei Mondkarten gebräuchlich, da wir diesen Himmelskörper in einer Ansicht sehen, die wegen der großen Entfernung nahezu der Parallelprojektion entspricht.

Wichtige Beispiele für Kartenprojektionen mit komplizierteren Projektionsverfahren sind die **Lambertsche Zylinderprojektion** und die **Merkatorprojektion.** Bei der Lambertschen Zylinderprojektion wird dem Globus ein Zylinder umbeschrieben, er berührt die Kugel längs des Äquators. Die Projektionsstrahlen treffen, von der gemeinsamen Kugel- und Zylinderachse ausgehend, senkrecht auf den Zylindermantel (Abb. 119); dieser wird in die Ebene abgewickelt (Abb. 120). Die Lambertsche Zylinderprojektion ist flächentreu, das heißt, alle Teile der Kugeloberfläche werden flächengleich abgebildet. Die Merkatorprojektion entsteht nicht durch einen unmittelbaren Projektionsvorgang, sondern ist mathematisch konstruiert mit der Eigenschaft, winkeltreu zu sein. Sie findet in der Navigation Anwendung; denn Linien gleichen Kurses erscheinen auf der Merkatorkarte als Geraden, die die als parallele Geraden abgebildeten Meridiane unter den betreffenden Winkeln schneiden (Abb. 121).

Aufgaben

1. Bilden Sie die Erdkugel mit einem Gradnetz von 15° zu 15°
 a) in orthographischer Polarprojektion,
 b) in orthographischer Äquatorialprojektion ab! (Maßstab 1 : 100 000 000)

2. Zeichnen Sie das Gradnetz für das Gebiet zwischen 45° nördlicher Breite und dem Nordpol (Abstand 7,5°)
 a) in gnomonischer Polarprojektion,
 b) in stereographischer Polarprojektion
 und vergleichen Sie die Ergebnisse! (Maßstab 1 : 100 000 000)

3. Bilden Sie die nördliche Halbkugel der Erde auf die Äquatorebene
 a) orthographisch,
 b) stereographisch
 ab und vergleichen Sie die Ergebnisse! (Abstand der Meridiane und Parallelkreise 22,5°, Maßstab 1 : 200 000 000)
 Begründen Sie, warum die stereographische Projektion auf die Äquatorebene ein Bild liefert, das dem Bild auf der Berührungsebene am Pol ähnlich, und zwar linear auf die Hälfte verkleinert ist!

INHALTSVERZEICHNIS

A. Arithmetik

B. Algebra und Analysis

C. Geometrie