Lehrbuch der Mathematik

ZEHNTES SCHULJAHR

Lehrbuch der Mathematik

für die Oberschule

ZEHNTES SCHULJAHR

Ausgabe 1955

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1958

Der Teil A wurde von Professor Dr. Werner Renneberg
unter Mitarbeit von Johannes Reth verfaßt.

Der Teil B wurde auf der Grundlage eines Manuskriptes von Hans Behlke
in der Verlagsabteilung Mathematik unter Mitarbeit von Herbert Titze ausgearbeitet.

Der Teil C wurde von Dr. Gustav Beyrodt verfaßt.

Zeichnungen: Kurt Dornbusch und Ernst Sültz

Redaktionsschluß: 30. Mai 1955

Bestell-Nr. 00916-5 · 2,70 DM · Lizenz Nr. 203 · 00916-5/1000/57 (DN)

Satz: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203

Druck: VEB Optima, Aschersleben H-12

INHALTSVERZEICHNIS

A. Die trigonometrischen Funktionen

Seite

I. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel 5
1. Die Tangensfunktion und die Sinusfunktion 5
2. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion 10
3. Der Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen 13
4. Das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen 18

II. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel 31
5. Erweiterung des Erklärungsbereiches 31
6. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks. 39

III. Fortsetzung der Lehre von den trigonometrischen Funktionen. . . 49
7. Periodizität der trigonometrischen Funktionen 49
8. Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen 55
9. Goniometrie 60

B. Körperdarstellung und Körperberechnung

I. Einleitung 67
1. Geschichtlicher Überblick 67
2. Abbildungsverfahren 69
3. Zur Zeichentechnik 71
4. Grundlegende Begriffe 71

II. Das Grundriß-Aufrißverfahren 71
5. Die Darstellung von Punkten. 72
6. Die Darstellung von Geraden und Strecken 74
7. Die Darstellung von Ebenen 80
8. Die Darstellung einfacher ebenflächiger Körper 82

III. Die axonometrische Abbildung 86
9. Die Abbildung eines räumlichen Koordinatensystems 86
10. Die isometrische Projektion 89
11. Die dimetrische Projektion 89
12. Die axonometrische Abbildung von einfachen ebenflächigen Körpern . . 90

IV. Ebenflächige Körper 92
13. Der Lehrsatz des Cavalieri 92
14. Die Prismen 93
15. Die Pyramiden 97

Seite

V. Krummflächige Körper 101
16. Der Zylinder 101
17. Der Kegel 110
18. Die Kugel 114

C. Zahlenfolgen

I. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen 121
1. Arithmetische Zahlenfolgen 121
2. Endliche geometrische Zahlenfolgen 133
3. Unendliche geometrische Zahlenfolgen 142

II. Anwendung der endlichen geometrischen Zahlenfolgen 145
4. Zinseszinsrechnung 145
5. Anwendungen der Zinseszinsrechnung im Geldverkehr 147

A. Die trigonometrischen Funktionen

I. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

1. Die Tangensfunktion und die Sinusfunktion

a) Einführung der Tangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Versuche, die nachstehende Aufgabe mit den bisher behandelten mathematischen Hilfsmitteln zu lösen!

Ein Turm wirft auf eine waagerechte Ebene einen Schatten von der Länge l, während die Sonne unter dem Winkel α gegen die Horizontallinie gesehen wird. Die Turmhöhe h ist aus der Schattenlänge l und dem Winkel α zu bestimmen.

Die Bearbeitung technischer Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen Zusammenhänge zwischen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten. Ihre Lösung ist mit Hilfe der bisher behandelten geometrischen Konstruktionen oder durch Berechnungsverfahren möglich, deren mathematische Grundlagen in der **Trigonometrie**[1]) entwickelt werden.

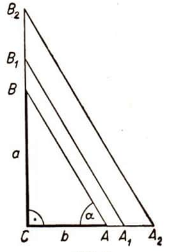


Abb. 1

Die Dreiecke ABC, A_1B_1C und A_2B_2C sind bei C rechtwinklig und einander ähnlich (Abb. 1).

Entsprechende Winkel dieser Dreiecke sind gleich. Insbesondere ist

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CA_2B_2 = \alpha.$$

Ferner sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich. Das gilt z. B. für das Verhältnis der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete, der **Gegenkathete**, zu der ihm anliegenden Kathete, der **Ankathete**:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C} = \frac{B_2C}{A_2C} = \frac{a}{b}.$$

Diese Betrachtungen gelten für alle ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke.

Ergebnis: Im rechtwinkligen Dreieck bestimmt ein Winkel eindeutig das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.
Umgekehrt ist im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel durch das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete eindeutig bestimmt.

---

1) Trigonometrie bedeutet Dreiecksberechnung.

Die bei C rechtwinkligen Dreiecke AB_1C, AB_2C, AB_3C stimmen in der Kathete b überein (Abb. 2). Der Winkel mit dem Scheitel A nimmt zu, wenn man vom Dreieck AB_1C zum Dreieck AB_2C und von diesem zum Dreieck AB_3C übergeht. Es gilt dann die Ungleichung

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Mit dem Winkel wächst die zugehörige Gegenkathete, wenn sich die Ankathete nicht ändert. Da die Ankathete b des Winkels α_n $(n = 1;\ 2;\ 3)$ konstant bleibt, wächst mit dem Winkel auch das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete; es ist

$$\frac{a_1}{b} < \frac{a_2}{b} < \frac{a_3}{b}.$$

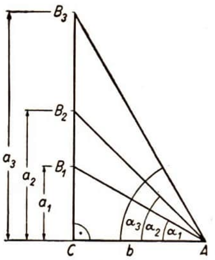


Abb. 2

Allgemein gilt: Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so wächst auch der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete.
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der Gegenkathete eines Winkels zur Ankathete eine Funktion dieses Winkels. Umgekehrt hängt der Winkel von dem Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete ab. Diese Abhängigkeit läßt sich durch keine der bisher bekannten Funktionen ausdrücken. Man führt für sie einen neuen Begriff und ein neues Symbol ein.

Erklärung 1: Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Gegenkathete und der Ankathete eines Winkels den Tangens[1] **dieses Winkels.**

Der Tangens wird durch das Symbol tg bezeichnet. Man schreibt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

und spricht für tg α: Tangens von Alpha oder auch Tangens Alpha.

Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Quotienten „Gegenkathete durch Ankathete“ vom Winkel ausdrückt, nennt man nach Erklärung 1 die **Tangensfunktion.** Das Symbol tg wird dabei als Funktionszeichen benutzt.
Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Veränderliche mit x und den Wert des veränderlichen Quotienten mit y, so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Die Werte der Tangensfunktion lassen sich nur für wenige Winkel mit den Mitteln berechnen, die wir bisher kennengelernt haben; für die meisten Winkel benötigt man dazu die Hilfsmittel der höheren Mathematik.

In der Ausgangsaufgabe ist $\frac{h}{l} = \operatorname{tg} \alpha$; durch Auflösung nach h erhält man

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Um die Größe h zu berechnen, die sich für bestimmte Werte von l und α ergibt, wird eine Tabelle benötigt, in der den Winkeln α die Funktionswerte tg α zugeordnet sind.

---

1) tangere (lat.) heißt berühren.

b) Einführung der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Erklärung 2: Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Gegenkathete eines Winkels und der Hypotenuse den Sinus[1]) dieses Winkels (Abb. 3).

Der Sinus wird durch das Zeichen sin wiedergegeben. Man schreibt

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

und spricht für $\sin\alpha$: Sinus von Alpha oder auch Sinus Alpha.

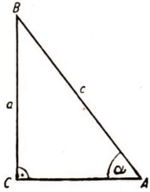


Abb. 3

Das Seitenverhältnis „Gegenkathete zu Hypotenuse“ wächst, wenn der Winkel wächst. Die Funktion, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, läßt sich ebenso wie die Tangensfunktion nicht algebraisch darstellen. Man nennt sie nach der Erklärung 2 die **Sinusfunktion.** Als Funktionszeichen benutzt man das Symbol sin.

Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Veränderliche mit x und den Wert des Quotienten „Gegenkathete durch Hypotenuse“ als abhängige Veränderliche mit y, so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \sin x\,.$$

Die Werte der Sinusfunktion lassen sich, abgesehen von speziellen Fällen, ebensowenig wie die der Tangensfunktion in einfacher Weise berechnen.
Die Funktionswerte $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ und $y = f(x) = \sin x$ sind, entsprechend der Erklärung der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck, unbenannte Zahlen.

c) Die Sinusfunktion am Einheitskreis

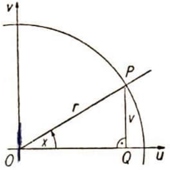


Abb. 4

Es sei ein rechtwinkliges uv-Koordinatensystem gegeben (Abb. 4).
Ein Winkel x entsteht dadurch, daß man einen Strahl um seinen Anfangspunkt $O(0;0)$ von der positiven u-Achse als Ausgangslage aus dreht. Als p o s i t i v e n D r e h s i n n legt man fest, daß die positive u-Achse durch Drehung um 90° in die positive v-Achse übergeführt wird. Um O sei der Kreis mit dem Radius r gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide den Kreis in $P\ (u;\ v)$. Man fällt das Lot von P auf die u-Achse; der Fußpunkt sei Q. Das Dreieck OQP ist rechtwinklig. Nach der Erklärung 2 ist in diesem Dreieck

$$\sin x = \frac{PQ}{OP} = \frac{v}{r}\,.$$

Dabei ist der Radius r in derselben Einheit zu messen wie die Ordinate v.

---

1) sinus (lat.) heißt Bogen, Rundung.

Ergebnis: Das Verhältnis der Ordinate eines auf der Peripherie beweglichen Punktes P zum Radius des Kreises ist gleich dem Sinus des Winkels x.
Wird um O der Kreis mit dem Radius 1 gezeichnet (Abb. 5), den man den Einheitskreis nennt, so geht die letzte Gleichung über in

$$\sin x = \frac{v}{1} = v.$$

Ergebnis: Die Ordinate v eines auf dem Einheitskreis beweglichen Punktes P stellt den Sinus des Winkels x geometrisch dar.

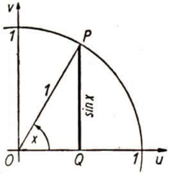


Abb. 5

Wichtig ist, daß das uv-Koordinatensystem hier wie im folgenden aus zwei Zahlengeraden mit gleicher Teilung besteht. Die Ordinate veranschaulicht also eine Zahl in ähnlicher Weise wie bei den geometrischen Darstellungen der früher behandelten Funktionen. Die vorstehende Betrachtung hat zunächst nur für spitze Winkel x Gültigkeit, da sich für andere Winkel x kein rechtwinkliges Dreieck mehr ergibt.
Aus der Abb. 5 können wir ablesen, wie der Funktionswert $y = \sin x$ sich ändert, wenn der Winkel x sich ändert. Verfolge, ausgehend von dem in der Abbildung dargestellten Winkel x, die Änderung des Sinus,

1. wenn der Winkel x abnimmt und schließlich den Wert 0° erreicht,
2. wenn der Winkel x zunimmt und schließlich den Wert 90° erreicht!

Für die Winkel 0° und 90° versagt die Erklärung 2. Die Sinusfunktion ist an diesen beiden Stellen nicht erklärt. Wir wollen sie aber auch hier sinnvoll definieren.
Aus der Abb. 5 erkennen wir, daß

die Ordinate des Punktes P gleich 0 wird, wenn der Winkel x gleich 0° wird,
die Ordinate des Punktes P gleich 1 wird, wenn der Winkel x gleich 90° wird.

Daher müssen wir notwendigerweise festsetzen:

$$\sin 0° = 0,$$
$$\sin 90° = 1.$$

d) Die Tangensfunktion am Einheitskreis

Wir legen im Punkt A (1; 0) die Tangente an den Einheitskreis des uv-Koordinatensystems (Abb. 6). Der den Winkel x erzeugende Strahl schneidet die Tangente in R. Im rechtwinkligen Dreieck OAR ist dann

$$\operatorname{tg} x = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR.$$

Ergebnis: Der Abschnitt AR auf der Tangente im Punkt A des Einheitskreises stellt den Tangens des Winkels x geometrisch dar.

Diese geometrische Deutung läßt die Bezeichnung Tangens für das Seitenverhältnis „Gegenkathete zu Ankathete“ im rechtwinkligen Dreieck verständlich werden.

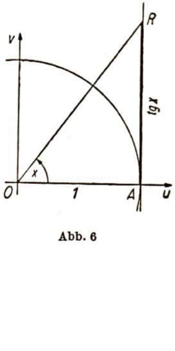


Abb. 6

Aus der Abb. 6 entnehmen wir, wie die Tangensfunktion sich ändert, wenn der Winkel von 0° bis 90° wächst. Für die Winkel 0° und 90° selbst gilt die Erklärung 1 nicht. Wenn der Winkel x sich dem Wert 0° nähert, schrumpft der Tangentenabschnitt AR auf den Wert 0 zusammen. Wir setzen daher fest:

$$\operatorname{tg} 0° = 0 .$$

Wenn der Winkel x sich dem Wert 90° nähert, wächst der Abschnitt AR und damit die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ über alle Grenzen. Ihr Verhalten ist vergleichbar dem der Funktion $y = \frac{1}{x}$, wenn x in dieser sich dem Wert 0 nähert. Für $x = 90°$ ist die Tangensfunktion nicht erklärt, das Zeichen $\operatorname{tg} x$ verliert für diesen Wert seinen Sinn.

Aufgaben

I. Die Tangensfunktion

1. Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mit den Winkeln $\alpha_1 = \alpha_2 = 55°$ und mit den Katheten $b_1 = 4$ cm bzw. $b_2 = 6$ cm! Miß in beiden Fällen die Gegenkathete a_1 bzw. a_2 des Winkels α und bestimme die Quotienten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$! Warum sind beide gleich?

2. Mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre ist zu beweisen, daß in rechtwinkligen Dreiecken, die in einem Winkel, etwa α, übereinstimmen, der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete dieses Winkels α unabhängig von der Länge der Katheten ist.

3. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 10°; 20°; 30°; \cdots; 80°$! Miß in jedem die Katheten a und b in der gleichen Maßeinheit und bilde jedesmal das Verhältnis $y = a : b$! Trage die gefundenen Werte in eine Wertetafel ein! Kommt es auf die Größe der Dreiecke an? Überlege, wie man einerseits möglichst wenig Linien benötigt und andererseits die Verhältnisse $a : b$ leicht vergleichen kann!

4. Der Anstieg einer geradlinigen Bahnlinie beträgt 1 : 40. Bestimme den Steigungswinkel aus dem Steigungsdreieck! Wie kann man das Verhältnis der Erhebung zur waagerechten Strecke in bezug auf den Steigungswinkel ausdrücken? An Bahnstrecken stehen Pfähle mit wegweiserähnlichen Armen. Auf diesen sind die Steigung und die Entfernung, für die sie gilt, angegeben (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, Seite 145, Aufgabe 37, Abb. 106).

5. Welchen Wert hat $\operatorname{tg}\alpha$ $(\operatorname{tg}\beta)$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten
a) $a = 3$ und $b = 4$; **b)** $a = 1$ und $b = 1$; **c)** a und b?

6. Zeichne die Winkel, für die der Tangens die folgenden Werte annimmt:
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{3}{7}$; **c)** 2; **d)** 2,5; **e)** $\sqrt{3}$! Miß die Winkel!

II. Die Sinusfunktion

7. Zeichne mehrere rechtwinklige Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen! Bestimme in ihnen das Verhältnis der Gegenkathete dieses Winkels zur Hypotenuse und vergleiche die einzelnen Ergebnisse miteinander! Wie ändert sich das Verhältnis, wenn sich der Winkel ändert?

8. Welchen Wert hat $\sin\alpha$ $(\sin\beta)$ in einem rechtwinkligen Dreieck
a) mit der Hypotenuse 13 und den Katheten $a = 5$ und $b = 12$,
b) mit der Hypotenuse 2 und den Katheten $a = 1$ und $b = \sqrt{3}$,
c) mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b?

9. Zeichne die Winkel, für die der Sinus die folgenden Werte annimmt: **a)** $\frac{1}{4}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** 0,1; **d)** 0,3; **e)** 0,5; **f)** 0,9! Miß die Winkel! Warum ist 1,1 als Sinuswert nicht möglich?

III. Die Sinusfunktion und die Tangensfunktion am Einheitskreis

10. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\beta = 10°; 20°; 30°; \cdots; 80°$ und miß das Verhältnis $y = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$! Trage die Ergebnisse einschließlich der Werte für $0°$ und $90°$ in eine Wertetafel ein!
Anleitung: Zweckmäßig gibt man allen Dreiecken gleiche Hypotenusen und legt sie so aufeinander, daß der Punkt B allen Dreiecken gemeinsam ist und daß die Ankatheten der Winkel β auf dem gleichen von B ausgehenden Strahl liegen. Auf welcher Kurve befinden sich die Dreieckspunkte A? Wählt man die Hypotenuse gleich 1 dm, so kann man y auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen und die dritte Dezimalstelle schätzen (Millimeterpapier!).

11. Führe die Betrachtung der Sinusfunktion, die am Einheitskreis erfolgt ist, allgemein an einem Kreis mit dem Radius r durch! Aus dem Ergebnis ist der Spezialfall des Einheitskreises zu gewinnen.

12. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.

a) Stelle die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius ausdrückt!

b) Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zum Zentriwinkel $20°$; $80°$; $140°$? — Benutze zur Bestimmung die Tafel aus Aufgabe 10!

2. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion

a) Einführung der Kosinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC stellt das Seitenverhältnis $b : c$ den Sinus des Winkels β dar. Man kann jedoch das Seitenverhältnis $b : c$ auch in Beziehung zum Winkel α setzen. Für den Winkel α bedeutet $b : c$ das Verhältnis „Ankathete zu Hypotenuse" (Abb. 7).

Erklärung 3: Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Ankathete eines Winkels und der Hypotenuse den Kosinus dieses Winkels.

Der Kosinus wird durch das Symbol cos bezeichnet. Es ist

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

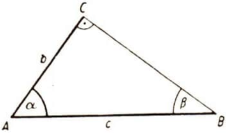


Abb. 7

Die im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis „Ankathete zu Hypotenuse" erklärte Funktion $y = f(x)$ eines Winkels x heißt **Kosinusfunktion.**
Man schreibt

$$y = f(x) = \cos x.$$

b) Einführung der Kotangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Als viertes Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck betrachten wir das Verhältnis der Ankathete eines Winkels zur Gegenkathete dieses Winkels.

Erklärung 4: Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Ankathete und der Gegenkathete eines Winkels den Kotangens dieses Winkels (Abb. 8).

Der Kotangens wird durch das Zeichen ctg abgekürzt.

Für den Winkel α ist

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Die im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis „Ankathete zu Gegenkathete" erklärte Funktion y eines Winkels x heißt **Kotangensfunktion**; man schreibt

$$y = f(x) = \operatorname{ctg} x.$$

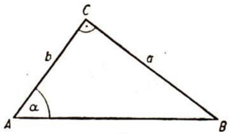


Abb. 8

c) Die Kosinusfunktion am Einheitskreis

Im rechtwinkligen Dreieck OQP (Abb. 9) ist nach der Erklärung 3

$$\cos x = \frac{OQ}{OP} = \frac{u}{1} = u.$$

Ergebnis: Die Abszisse u eines auf dem Einheitskreis beweglichen Punktes P stellt den Kosinus des Winkels x geometrisch dar.

Verfolge, ausgehend vom Winkel x in Abb. 9, die Änderung des Funktionswertes $\cos x$,

1. wenn der Winkel bis zu $0°$ abnimmt,
2. wenn der Winkel bis zu $90°$ zunimmt!

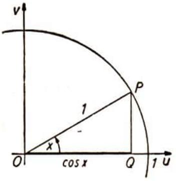


Abb. 9

Für die Winkel $0°$ und $90°$ ist die Funktion $y = f(x) = \cos x$ nicht erklärt. Da die Abszisse des Punktes P für diese Winkel 1 bzw. 0 ist, setzen wir fest

$$\cos 0° = 1,$$
$$\cos 90° = 0.$$

Zusammenfassung: Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$, die im rechtwinkligen Dreieck erklärt sind, erscheinen im I. Quadranten des Einheitskreises als Koordinaten des Schnittpunktes zwischen dem beweglichen Schenkel des Winkels x und dem Kreis (Abb. 5 und 9).

d) Die Kotangensfunktion am Einheitskreis

Im Punkt $B\,(0; 1)$ legen wir die Tangente an den Einheitskreis des uv-Koordinatensystems (Abb. 10). Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneidet die Tangente in T. Das Dreieck OTB ist rechtwinklig, und es ist $\sphericalangle OTB = x$. Aus welchem Satz folgt dies? Nach der Erklärung 4 ist

$$\operatorname{ctg} x = \frac{BT}{OB} = \frac{BT}{1} = BT.$$

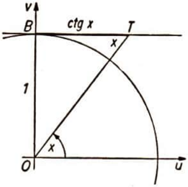


Abb. 10

Ergebnis: Der Abschnitt BT auf der Tangente im Punkte B des Einheitskreises stellt den Kotangens des Winkels x geometrisch dar.

Aus Abb. 10 lesen wir die Änderung der Kotangensfunktion ab, wenn der Winkel x sich ändert. Für die Werte $x = 0°$ und $x = 90°$ ist die Funktion ctg x nicht erklärt. Für $x = 90°$ wird der Tangentenabschnitt BT gleich Null. Wir setzen daher fest:

$$\operatorname{ctg} 90° = 0\,.$$

Nähert sich der Winkel x dem Wert 0°, so wächst der Tangentenabschnitt BT und damit die Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ über alle Grenzen. Für $x = 0°$ existiert die Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ nicht.

Aufgaben

I. Die Kosinusfunktion

1. Ermittle den Kosinus der folgenden Winkel durch Seitenmessung: **a)** 22,5°; **b)** 45°; **c)** 67,5°!

2. Konstruiere den Winkel α, für den $\cos\alpha$ den Wert

a) 0,2; **b)** 0,9; **c)** $\frac{7}{15}$; **d)** $\frac{3}{4}$; **e)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat!

3. Zeichne über dem Durchmesser eines Halbkreises Dreiecke, deren Spitzen auf der Peripherie liegen! Wie ändert sich **a)** die Gegenkathete, **b)** die Ankathete eines der spitzen Winkel des Dreiecks, wenn dieser, bei kleinen Winkeln angefangen, zunimmt? Ziehe daraus Schlüsse, wie sich der Sinus (Kosinus) mit dem Winkel ändert!
Für welches rechtwinklige Dreieck ist $\sin\alpha = \cos\alpha$?

4. Zeichne über dem Durchmesser eines Halbkreises zwei symmetrisch zueinander liegende Dreiecke, deren Spitzen auf der Peripherie liegen! Stelle alle möglichen Funktionsbeziehungen für den Sinus und den Kosinus der spitzen Winkel der beiden Dreiecke (α, β, α', β') auf! Prüfe die Zusammenstellung auf Vollständigkeit!

II. Die Kotangensfunktion

5. Miß im rechtwinkligen Dreieck die Katheten und bestimme **a)** ctg 15°; **b)** ctg 75°!

6. Wie groß ist der Kotangens der folgenden Winkel: **a)** 20°; **b)** 40°; **c)** 60°; **d)** 80°?
Anleitung: Benutze die Ergebnisse der Aufgabe 3 auf Seite 9! — Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen der Tangens- und der Kotangensfunktion?

7. Konstruiere den Winkel α, für den $\operatorname{ctg}\alpha$ den Wert **a)** 4; **b)** 2,5; **c)** $\sqrt{3}$; **d)** 0,8; **e)** $\frac{1}{3}$ hat!

III. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion am Einheitskreis

8. Zeichne den I. Quadranten eines Einheitskreises ($r = 1$ Längeneinheit, zweckmäßig 1 dm)! Trage die Winkel 10°; 20°; $\cdots$; 80° ein und entnimm aus der Zeichnung die Kosinuswerte der Winkel! Kosinusfunktion und Sinusfunktion haben gleiche Funktionswerte; diese sind aber anderen Winkeln zugeordnet. Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Funktionen $y = f(x) = \sin x$ und $y = f(x) = \cos x$?

9. Zeichne die Werte der Kotangensfunktion am Einheitskreis für die Winkel 10°; 30°; 50°; 70° und miß ihre Größe!

10. Stelle eine dreistellige Tafel der Tangens- und Kotangensfunktion zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° auf! Schätze den Wert der dritten Dezimale!

11. Anstatt die trigonometrischen Funktionen zuerst am rechtwinkligen Dreieck zu erklären und sie dann auf den Kreis zu übertragen, kann man sie auch von vornherein am Kreis erklären (siehe Abb. 11) und dann auf beliebige rechtwinklige Dreiecke anwenden.

a) Stelle die vier Erklärungen zusammen!

b) Beweise, daß der Abschnitt AR auf der Tangente an den Einheitskreis (Abb. 6) tg x darstellt!

c) Führe den entsprechenden Beweis (Abb. 10) für den Kotangens!

d) Beweise, daß die für rechtwinklige Dreiecke aufgestellten Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln gelten, wenn die am Kreise erklärten Winkelfunktionen verwendet werden!

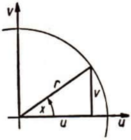


Abb. 11

3. Der Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen

a) Zusammenstellung der trigonometrischen Funktionen

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c stellen die Seitenverhältnisse $a:b$, $a:c$, $b:c$, $b:a$ die trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ des Winkels α dar.

Die vier im vorstehenden erklärten Seitenverhältnisse nennt man **trigonometrische Funktionen.** Sie heißen auch **Winkelfunktionen** oder **goniometrische Funktionen**[1]). Wegen ihres Zusammenhanges mit dem Kreis werden sie auch als **Kreisfunktionen** bezeichnet.

Die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen für das rechtwinklige Dreieck gibt die folgende Zusammenstellung an:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Sinus}; \qquad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Kosinus};$$

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \text{Tangens}; \qquad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \text{Kotangens}.$$

Aus der Zusammenstellung entnehmen wir, daß die Seitenverhältnisse von Tangens und Kotangens für denselben Winkel x zueinander reziprok sind. Die Tangens- und die Kotangensfunktion eines Winkels haben reziproke Werte. Für die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion eines Winkels gilt eine derartige einfache Beziehung nicht.

b) Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen

Um die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$ in einem xy-Achsenkreuz geometrisch zu veranschaulichen, hat man im xy-Koordinatensystem als Abszissen die Winkel x, $(0° \leqq x \leqq 90°)$, und als Ordinaten die zugehörigen Funktionswerte y einzuzeichnen. Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse als Einheit die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel 1° auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den vierten Teil des Einheitskreises auf der positiven x-Achse vom Ursprung O aus ab und teilt die so gefundene Strecke in 90 gleiche Teile.

1) Goniometrie bedeutet Winkelmessung.

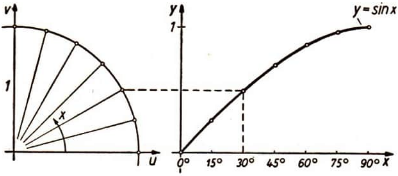


Abb. 12

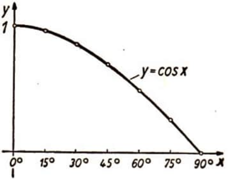


Abb. 14

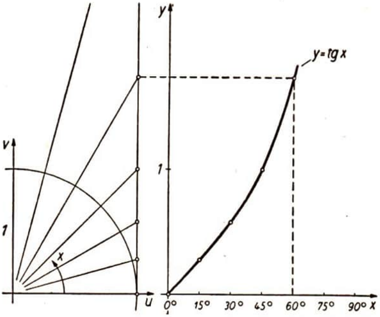


Abb. 13

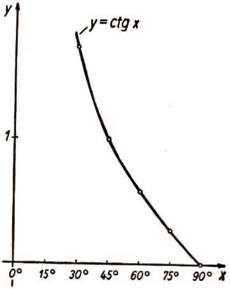


Abb. 15

Um ein Bild der Funktion zu zeichnen, reicht es praktisch aus, wenn man den rechten Winkel im Einheitskreis in sechs gleiche Teile teilt und die zu jedem Winkel von 15° gehörende Bogenlänge näherungsweise durch die Sehne ersetzt. In Abb. 12 ist auf diese Weise die Kurve der Funktion $y = \sin x$ gezeichnet. Wie findet man zeichnerisch für einen gegebenen Winkel den zugehörigen Kurvenpunkt?

Abb. 12 zeigt, daß die Sinusfunktion im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ eine wachsende Funktion ist.

Die geometrische Darstellung der Funktion $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ erhält man in ähnlicher Weise wie die der Sinusfunktion (Abb. 13). Auch die Tangensfunktion ist im Bereich $0° \leqq x < 90°$ eine wachsende Funktion. Der Kurvenverlauf zeigt anschaulich, daß die Funktion für $x = 90°$ nicht existiert.

Den Verlauf der Kosinusfunktion zeigt Abb. 14, den der Kotangensfunktion Abb. 15. Die Kosinusfunktion ist im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ eine fallende Funktion. Dasselbe gilt für die Kotangensfunktion im Bereich $0° < x \leqq 90°$. Diese existiert jedoch nicht für $x = 0°$.

c) Grundformeln für die Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

Dividiert man in der Zusammenstellung des Abschnitts a) die erste Gleichung durch die zweite bzw. die zweite durch die erste, so erhält man die Beziehungen

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Sinus}}{\text{Kosinus}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\text{Kosinus}}{\text{Sinus}}.$$

Hieraus ergeben sich für denselben Winkel x die Grundformeln

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{1}$$

und

$$\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x} = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{2}$$

Sprich diese Beziehungen in Worten aus! — Für welchen Winkelwert gilt die Formel (1), für welchen die Formel (2) zunächst nicht?
Durch Multiplikation der Gleichungen (1) und (2) findet man

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}. \tag{3}$$

Löse die Gleichung nach $\operatorname{tg} x$ bzw. nach $\operatorname{ctg} x$ auf! — Sprich die sich ergebenden Beziehungen in Worten aus!
Im Dreieck OQP (Abb. 16) ist nach dem Satz des Pythagoras

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

Man schreibt vereinfacht $\sin^2 x$ (sprich: Sinus Quadrat x) und $\cos^2 x$ (sprich: Kosinus Quadrat x) an Stelle von $(\sin x)^2$ und $(\cos x)^2$ und erhält so

$$\sin^2 \boldsymbol{x} + \cos^2 \boldsymbol{x} = \mathbf{1}. \tag{4}$$

Sprich den durch die Gleichung (4) vermittelten Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion für denselben Winkel x in Worten aus! Löse die Gleichung nach $\sin x$ bzw. nach $\cos x$ auf!

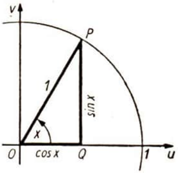


Abb. 16

Auf Grund der Gleichungen für die trigonometrischen Funktionen gelten im rechtwinkligen Dreieck die folgenden Beziehungen:

$$a : c = \sin\alpha = \cos\beta, \qquad a : b = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$b : c = \cos\alpha = \sin\beta, \qquad b : a = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

Da $\beta = 90° - \alpha$ ist, ergibt sich aus diesen Gleichungen, wenn man für den beliebigen Winkel α die Veränderliche x setzt, das Formelsystem

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos(90° - x), & \operatorname{tg} x &= \operatorname{ctg}(90° - x), \\ \cos x &= \sin(90° - x), & \operatorname{ctg} x &= \operatorname{tg}(90° - x). \end{aligned} \tag{5}$$

Durch die Formeln in der zweiten Zeile werden die Namen Kosinus und Kotangens verständlich: complementi sinus (abgekürzt cosinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt cotangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels. Die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion nennt man die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion und umgekehrt.

Die Grundformeln (5) können wir folgendermaßen zusammenfassen:

Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels.

Aufgaben

I. Berechnung spezieller Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen

Aus dem Einheitskreis kann man die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen entnehmen. Bei diesem zeichnerischen Verfahren sind der Genauigkeit jedoch Grenzen gesetzt. Im folgenden sollen zu einigen bestimmten Winkeln die genauen Funktionswerte berechnet werden.

1. Berechne die Werte der vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel 30°; 45° und 60°!
Anleitung: Benutze das gleichseitige bzw. das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck!

2. Stelle die in der Aufgabe 1 berechneten Funktionswerte nebst den Werten für 0° und 90° in Tabellenform zusammen!

II. Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen

3. Zeichne die Kurven der Sinus- und der Kosinusfunktion in ein und dasselbe xy-Achsenkreuz! Spiegele die Kurven an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $x = 45°$! Zeichne dazu entweder **a)** nur das Funktionsbild einer der beiden Funktionen oder **b)** beide Funktionen lediglich im Bereich von 0° bis 45° und vervollständige die Zeichnungen durch Spiegelung!

4. Bestimme durch Interpolation an der Sinus- bzw. Kosinuskurve
a) sin 5°; **b)** sin 78°; **c)** cos 25°; **d)** cos 62°!

5. Entnimm aus der geometrischen Darstellung
a) der Funktion $y = \sin x$ den Winkel, dessen Sinus den Wert 0,35 (0,70),
b) der Funktion $y = \cos x$ den Winkel, dessen Kosinus den Wert 0,40 (0,125) hat!

6. Zeichne die Kurven der Tangens- und Kotangensfunktion in dasselbe xy-Achsenkreuz! Untersuche die Symmetrieeigenschaften der Funktionskurven! Welche Vereinfachungen ergeben sich daraus für die Anlage einer gemeinsamen Tafel der Tangens- und Kotangensfunktion?

7. Beschreibe und vergleiche den Verlauf der Sinus- und der Tangensfunktion im Bereich von 0° bis 90°! Untersuche, wieviel Punkte die beiden Funktionskurven gemeinsam haben!

8. Bestimme durch Interpolation an der Tangens- bzw. Kotangenskurve
a) tg 73°; **b)** tg 11°; **c)** ctg 39°; **d)** ctg 66°!

9. Entnimm aus der geometrischen Darstellung
a) der Funktion $y = \operatorname{tg} x$ den Winkel, dessen Tangens den Wert 1,50 (0,50),
b) der Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ den Winkel, dessen Kotangens den Wert 2,10 (0,83) hat!

III. Grundformeln für die Zusammenhänge trigonometrischer Funktionen

10. Gegeben sind die folgenden Werte der Sinusfunktion:
a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; **b)** $\sin\beta = \frac{1}{2}$; **c)** $\sin\gamma = \frac{3}{4}$.
Welche Werte haben die anderen trigonometrischen Funktionen der Winkel α, β bzw. γ?

11. Gegeben sind die folgenden Werte der Kotangensfunktion:
a) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; **b)** $\operatorname{ctg}\beta = 1$; **c)** $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{4}$.
Berechne die Werte der anderen trigonometrischen Funktionen von α, β bzw. γ!

12. Leite aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen ab!

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$y = f(x) = \sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$y = f(x) = \operatorname{tg} x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	—

13. Beweise die Formeln **a)** $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ und **b)** $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$!

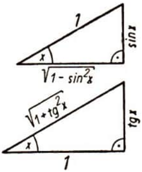


Abb. 17

14. Bestimme aus den Funktionen 1. $y = \sin x$; 2. $y = \cos x$; 3. $y = \operatorname{tg} x$; 4. $y = \operatorname{ctg} x$ jeweils die drei anderen trigonometrischen Funktionen **a)** auf rechnerischem, **b)** auf geometrischem Wege!

Anleitung zu b): Benutze ähnliche Dreiecke (Abb. 17)!

15. Berechne die Werte der drei anderen trigonometrischen Funktionen mit Benutzung der Tabelle aus Aufgabe 14 für

a) $\sin\alpha = \frac{10}{11}$; **b)** $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; **c)** $\operatorname{tg}\gamma = 3$; **d)** $\operatorname{ctg}\delta = 2 - \sqrt{3}$!

16. Vereinfache die nachstehenden Ausdrücke:

a) $\cos x \cdot \operatorname{tg} x$; **b)** $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$!

17. Sprich den Inhalt folgender Formeln in Worten aus:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}!$$

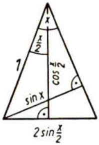


Abb. 18a

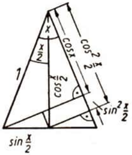


Abb. 18b

Welchen Zusammenhang vermitteln diese Beziehungen?

a) Beweise die Formeln geometrisch!

Anleitung: In Abb. 18a und b ist zunächst zu zeigen, warum einzelne Strecken die angeschriebene Bedeutung haben. Danach sind die Formeln aus den Abbildungen abzuleiten. Beachte ähnliche Dreiecke!

b) Löse die Formeln nach $\sin \frac{x}{2}$ bzw. $\cos \frac{x}{2}$ auf!

18. Stelle den Tangens (Kotangens) eines Winkels x durch trigonometrische Funktionen des halben Winkels dar!

19. Stelle den Tangens (Kotangens) des halben Winkels durch trigonometrische Funktionen des vollen Winkels x dar!

20. Benutze die Formeln der Aufgaben 17 und 19, um die Werte der vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel 15° und 22,5° zu berechnen!
Vergleiche, soweit möglich, die Ergebnisse früherer Messungen mit den berechneten Werten (Aufgaben 1 und 5 von Seite 12)!

21. Berechne die trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel: **a)** 18°; **b)** 36°; **c)** 72°; **d)** 54°!

Anleitung: Gehe von dem Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Zehnecks aus!

22. Gerät zum Bestimmen der Werte der trigonometrischen Funktionen (Abb. 19).
Mit einem Deckblatt (Vollkreis mit Durchmesser) stellt man den Winkel x auf dem Grundblatt (Quadrat mit Quadrant) ein. Auf den Quadratseiten liest man $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (0° bis 45°) und $\operatorname{ctg} x$ (45° bis 90°) unmittelbar ab. Führe den Beweis! Wie findet man die Tangenswerte für Winkel zwischen 45° und 90° und die Kotangenswerte für Winkel zwischen 0° und 45°?

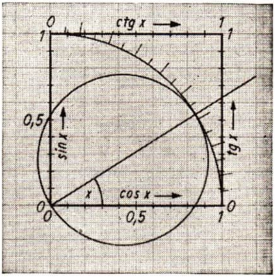


Abb. 19

4. Das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen

Dreiecksaufgaben kann man rein geometrisch auf der Grundlage der Kongruenzsätze und unter Benutzung der geometrischen Örter durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel lösen. Ein Geländedreieck, von dem drei Stücke in der Natur gemessen, die übrigen zu ermitteln sind, zeichnet man bei diesem Verfahren in einem bestimmten Maßstab verkleinert und entnimmt die gesuchten Größen maßstäblich der Zeichnung.

In der Praxis bevorzugt man jedoch die trigonometrische Methode, weil sie genauer ist als jedes zeichnerische Verfahren und durch Benutzung von Hilfsmitteln (Tafeln, Rechenschemata) weitgehend mechanisiert werden kann.

Die Werte der trigonometrischen Funktionen findet man in Tafeln. Im folgenden wird stets auf „Schülkes Tafeln“ Bezug genommen.

Wie man eine Tafel der trigonometrischen Funktionen aufstellt, d. h., wie man die Funktionswerte für beliebige Winkel x berechnet, wird in der Oberschule nicht behandelt. Die Werte der trigonometrischen Funktionen sind im allgemeinen Irrationalzahlen und ergeben sich deshalb als unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche. In „Schülkes Tafeln“ sind sie auf vier Stellen gerundet. Es gibt aber auch für besondere Zwecke fünf- und mehrstellige Tafeln. Die Anwendung der trigonometrischen Methode erfordert, daß man sowohl das Aufsuchen des Wertes $y = f(x)$ einer trigonometrischen Funktion zu einem gegebenen Winkel x als auch das Aufschlagen des Winkels x zu einem bekannten Funktionswert y in der Tafel beherrscht.

a) Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$

In den Tafeln der Funktionen Sinus und Kosinus nutzt man die Tatsache aus, daß $\cos x = \sin(90° - x)$ ist. Der nebenstehende Auszug aus einer vierstelligen Tafel gibt die Sinuswerte von 0° bis 10° für volle Grade wieder. Sie bedeuten gleichzeitig die Werte der Funktion $\cos x$ für Winkel x zwischen 80° und 90°.

x	$\sin x$	
0°	0,0000	90°
1°	0,0175	89°
2°	0,0349	88°
3°	0,0523	87°
4°	0,0698	86°
5°	0,0872	85°
6°	0,1045	84°
7°	0,1219	83°
8°	0,1392	82°
9°	0,1564	81°
10°	0,1736	80°
	$\cos x$	x

Es gehören

die linksstehenden Winkel zur obenstehenden Funktion,

die rechtsstehenden Winkel zur untenstehenden Funktion.

Suche in Schülkes Tafel 8 den wiedergegebenen Auszug auf! Die Tafel 8 enthält die Werte der Funktionen Sinus und Kosinus für volle und zehntel Grade. In den Zeilen stehen die Werte für die Zehntel ein und desselben Grades, in den Spalten die Werte für dasselbe Zehntel aufeinanderfolgender Grade.

Die Tafel 9 für Tangens und Kotangens ist entsprechend der für Sinus und Kosinus eingerichtet. Sie nutzt die Beziehung $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$ aus.

b) Aufsuchen des Winkels x

Man sucht den gegebenen Funktionswert $y = f(x)$ in der Sinus-/Kosinus- bzw. Tangens-/Kotangens-Tafel auf. Bei den Funktionen Sinus und Tangens liest man die vollen Grade für den Winkelwert x in der Zeile, in welcher der Funktionswert steht, links ab, bei Kosinus und Kotangens dagegen rechts. Die Zehntelgrade stehen im ersten Falle in den Spalten der Kopfleisten, im zweiten Falle in den Spalten der Fußleisten.

Beispiele:

$\sin x = 0{,}4664$	$\operatorname{tg} x = 0{,}7400$	$\cos x = 0{,}2284$	$\operatorname{ctg} x = 10{,}99$
$x = 27{,}8°$	$x = 36{,}5°$	$x = 76{,}8°$	$x = 5{,}2°$.

Das Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ bei gegebenem Winkel x nennt man auch Hineingehen in die Tafel; das Ermitteln der Winkelwerte x bei gegebenem Funktionswert $y = f(x)$ dagegen Herausgehen aus der Tafel.

c) Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad gegeben, so hat man zu interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteiltem Grad dieselben Regeln wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel: $y = \sin 13{,}27°$.

Aus Tafel 8 entnimmt man $\sin 13{,}20° = 0{,}2284$,
$\sin 13{,}30° = 0{,}2300$.

Die Tafeldifferenz D beträgt also 16 Einheiten der 4. Dezimale und gehört zu einer Winkeldifferenz von 10 Hundertstelgrad. Ist n die Anzahl der Hundertstelgrade zwischen dem gegebenen Winkel (13,27°) und dem kleineren Winkel (13,20°), so besteht für den mit Eigendifferenz d bezeichneten Unterschied zwischen dem gesuchten Funktionswert und dem des kleineren Winkels, dem Tafelwert, in linearer Annäherung die Beziehung

$$\frac{n}{10} = \frac{d}{D}; \quad \text{sie ergibt} \quad d = \frac{n}{10} \cdot D.$$

In unserem Beispiel wird $d = \frac{7}{10} \cdot 16 = 11{,}2$ oder auf Ganze gerundet 11. Diese Anzahl Einheiten der 4. Dezimale fügt man zu 0,2284 hinzu und erhält

$$y = \sin 13{,}27° = 0{,}2295.$$

Bei der Sinus- und der Tangensfunktion hat man die Eigendifferenz zum Tafelwert zu addieren, bei der Kosinus- und der Kotangensfunktion dagegen vom Tafelwert zu subtrahieren. Begründe dies!

d) Aufsuchen des Winkels x mit Interpolieren

Steht der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel, so hat man beim Aufsuchen des Winkels zu interpolieren.

Beispiel: $\operatorname{ctg} x = 0{,}0550$.

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den Werten 0,0559 und 0,0542, zu denen die Winkel 86,80° und 86,90° gehören (Tafel 9). Die Tafeldifferenz D dieser

Funktionswerte beträgt hier 17 Einheiten ihrer 4. Dezimale und gehört zu einer Winkeldifferenz von 10 Hundertstelgrad. Wird als Eigendifferenz d der Unterschied zwischen dem gegebenen Funktionswert und dem Funktionswert des kleineren Winkels gebildet, so besteht für die Anzahl n der zu ihm gehörenden Hundertstelgrade in linearer Annäherung die Beziehung $\frac{n}{10} = \frac{d}{D}$; sie ergibt $n = d : \frac{D}{10}$. In unserem Beispiel ist d gleich 9 Einheiten der 4. Dezimale. Daraus ergibt sich $n = 9 : 1{,}7 \approx 5{,}3$ oder auf Ganze gerundet 5. Die berechnete Anzahl der Hundertstelgrade addiert man zu 86,80° und erhält als Ergebnis $x = 86{,}85°$.

e) Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

Die meisten Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen in den Tafeln sind Näherungswerte auf vier geltende Ziffern. Multiplikationen und Divisionen mit ihnen werden umständlich. Um die Rechnung zu erleichtern, verwenden wir die Logarithmen der Winkelfunktionswerte, die in derselben Weise tabelliert sind wie die Funktionswerte selbst. Tafel 4 enthält die Logarithmen der Sinus- und der Kosinusfunktion, Tafel 5 die Logarithmen der Tangens- und der Kotangensfunktion in Abhängigkeit vom Winkel x. Die Funktionswerte $y = f(x)$ selbst bezeichnet man in Funktionstafeln — zum Unterschied von ihren Logarithmen — gewöhnlich als die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen.

Die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen. In der Tafel ist aus drucktechnischen Gründen zu allen Logarithmen mit negativer Kennzahl 10 addiert. Deshalb hat man beim Aufschlagen der Logarithmen von der Form 9.····; 8.····; 7.····; usw. die Zahl 10 zu subtrahieren und erhält 0.···· — 1; 0.···· — 2; 0.···· — 3; usw. Umgekehrt ist zu einem gegebenen Logarithmus mit negativer Kennzahl vor dem Hineingehen in die Tafel die Zahl 10 zu addieren.

Beispiel: $\lg \sin 23{,}3° = 9.5972 - 10$
$\qquad\qquad\qquad\quad = 0.5972 - 1.$

Infolge der dezimalen Teilung des Grades ist die Interpolation dieselbe wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Aus Tafel 6 entnimmt man den Logarithmus-Sinus und den Logarithmus-Tangens für kleine Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad unmittelbar, durch Interpolation mit einer Genauigkeit von Tausendstelgrad.

Aufgaben

a) Übungen im Tafelrechnen

I. Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$; Hineingehen in die Funktionstafel

1. Suche für die folgenden Winkel die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion auf:

a) 12° **b)** 84° **c)** 38,1° **d)** 27,3° **e)** 5,6° **f)** 77,7°
g) 40,9° **h)** 69,0° **i)** 81,2° **k)** 6,4° **l)** 53,5° **m)** 11,8°!

2. Bis zu welchem Winkel stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion **a)** auf vier Dezimalen, **b)** auf drei Dezimalen miteinander überein?

3. Suche für die folgenden Winkel die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion auf:

a) 21° **b)** 58° **c)** 0,5° **d)** 88,0° **e)** 56,1° **f)** 43,9°
g) 68,8° **h)** 4,4° **i)** 15,6° **k)** 5,5° **l)** 32,3° **m)** 52,4°!

II. Aufsuchen des Winkels x; Herausgehen aus der Funktionstafel

4. Schlage den Winkel x auf, dessen Sinus den Wert y hat!

a) $y = 0{,}2756$ **b)** $y = 0{,}6157$ **c)** $y = 0{,}8829$ **d)** $y = 0{,}4787$
e) $y = 0{,}2990$ **f)** $y = 0{,}5105$ **g)** $y = 0{,}0454$ **h)** $y = 0{,}9921$
i) $y = 0{,}1547$ **k)** $y = 0{,}6858$ **l)** $y = 0{,}7325$ **m)** $y = 0{,}9724$

5. Schlage den Winkel x auf, dessen Kosinus den in Aufgabe 4 a) bis m) angegebenen Wert y hat!

6. Schlage den Winkel x auf, dessen Tangens den Wert y hat!

a) $y = 0{,}0699$ **b)** $y = 0{,}2679$ **c)** $y = 1{,}483$ **d)** $y = 0{,}9725$
e) $y = 0{,}1495$ **f)** $y = 0{,}4536$ **g)** $y = 1{,}865$ **h)** $y = 0{,}3115$
i) $y = 2{,}592$ **k)** $y = 3{,}420$ **l)** $y = 5{,}730$ **m)** $y = 0{,}00524$

7. Schlage den Winkel x auf, dessen Kotangens den in Aufgabe 6a) bis m) angegebenen Wert y hat!

III. Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Falls der Winkel x in sexagesimaler Teilung, d.h. in Grad, Minuten und Sekunden, gegeben ist, rechne vor der Benutzung der Tafeln die Minuten (′) und Sekunden (″) in dezimale Teile eines Grades um! Für die Umwandlung von m' bzw. s'' in Grad gelten folgende Formeln:

$$60' = 1^\circ \qquad\qquad 60'' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \qquad\qquad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

$$m' = \left(\frac{m}{60}\right)^\circ, \qquad\qquad s'' = \left(\frac{s}{3600}\right)^\circ.$$

Beispiel: 17° 13′ 25″ sind in Grad und Dezimalgrad zu verwandeln (auf 2 Dezimalstellen).

$$13' = \left(\frac{13}{60}\right)^\circ \approx 0{,}217^\circ, \qquad 25'' = \left(\frac{25}{3600}\right)^\circ \approx 0{,}007^\circ.$$

Ergebnis: $17^\circ\ 13'\ 25'' \approx 17{,}22^\circ$.

Zur Umrechnung kann man Tafel 1 benutzen. — Es gibt auch Tafeln der trigonometrischen Funktionen, denen die sexagesimale Teilung des Winkels zugrunde gelegt ist.

8. Verwandle die sexagesimale Teilung folgender Winkel in die dezimale (auf 2 Dezimalstellen):

a) 16° 18′ **b)** 38° 24′ **c)** 79° 39′ **d)** 24° 25′ **e)** 62° 7′
f) 20° 30′ 30″ **g)** 54° 3′ 48″ **h)** 78° 52′ 33″ **i)** 0° 5′ 13″ **k)** 18° 0′ 43″!

9. Rechne folgende Winkelangaben in Grad, Minuten und Sekunden um:

a) 27,1° **b)** 14,9° **c)** 28,5° **d)** 34,12° **e)** 50,08°
f) 68,47° **g)** 73,57° **h)** 7,93° **i)** 40,28° **k)** 12,11°!

10. Suche die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion für die folgenden Winkel auf:

a) 22,75° **b)** 68,24° **c)** 34,77° **d)** 79,67° **e)** 57,18°
f) 87,87° **g)** 15,21° **h)** 45,86° **i)** 60,31° **k)** 5,02°
l) 78,43° **m)** 89,07° **n)** 13° 40′ **o)** 41° 24′ **p)** 4° 29′ 58″
q) 39° 42′ 33″ **r)** 52° 4′ 17″ **s)** 80° 20′ 41″ **t)** 44° 42′ 40″ **u)** 5° 44′ 20″!

11. Suche die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion für die folgenden Winkel auf:

a) 40,05° b) 23,75° c) 77,88° d) 3,94° e) 17,65°
f) 57,21° g) 68,23° h) 84,31° i) 25,33° k) 32,07°
l) 4,16° m) 79,99° n) 22° 30′ o) 57° 44′ p) 44° 50′ 40″
q) 7° 22′ 17″ r) 3° 45′ 15″ s) 34° 58′ 7″ t) 71° 34′ 26″ u) 11° 18′ 25″!

12. Berechne im Bereich $89{,}00° \leqq x \leqq 89{,}10°$ die Werte der Tangensfunktion für Hundertstelgrad durch lineare Interpolation (Tafel 9)! — Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten der Tangensfunktion in der untenstehenden Tabelle! Diese sind einer genaueren Tafel entnommen. — Bilde die Differenzen zwischen den interpolierten und den in der Tabelle stehenden Funktionswerten! Beurteile die Möglichkeit, bei der Tangensfunktion linear zu interpolieren! Beachte auch die Ausführungen in Schülkes Tafeln, S. 2!

x	89,00°	,01°	,02°	,03°	,04°	,05°	,06°	,07°	,08°	,09°	,10°
tg x	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27	62,96	63,66

13. Suche die folgenden Funktionswerte auf:

a) tg 87,88° b) tg 89,05° c) ctg 1,33° d) ctg 2,87° e) ctg 0,92°!

An Stelle der Einteilung des rechten Winkels in 90 Teile (Altgrad) wird auch die in 100 Teile (Neugrad) gebraucht. 1 Neugrad (1^g) ist also der 100. Teil des rechten Winkels.

Zur Umrechnung dienen die folgenden Beziehungen:

Neugrad in Altgrad

$$100^g = 90°$$
$$1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$$
$$n^g = \frac{9}{10} \cdot n^\circ$$

Altgrad in Neugrad

$$90° = 100^g$$
$$1° = \left(\frac{10}{9}\right)^g$$
$$a° = \frac{10}{9} \cdot a^g$$

Beispiele:

$$34{,}26^g = 0{,}9 \cdot 34{,}26° \approx 30{,}83° \qquad 86{,}58° = \frac{10}{9} \cdot 86{,}58^g = 96{,}20^g$$

14. Verwandle in Altgrad:

a) 73^g b) 90^g c) 16^g d) $24{,}5^g$ e) $28{,}7^g$ f) $37{,}8^g$ g) $94{,}13^g$ h) $49{,}98^g$ i) $56{,}75^g$!

15. Verwandle in Neugrad:

a) 60° b) 88° c) 12° d) 47,5° e) 26,6° f) 84,3° g) 72,15° h) 58,48° i) 33,04°!

16. Suche die Werte der vier trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel auf:

a) 35^g b) 94^g c) $5{,}5^g$ d) $38{,}42^g$!

Benutze, soweit möglich, die Tafel 22!

IV. Aufsuchen des Winkels x mit Interpolieren

17. Schlage den Winkel x auf, dessen Sinus den Wert y hat!

a) $y = 0{,}6407$ b) $y = 0{,}4711$ c) $y = 0{,}8308$ d) $y = 0{,}6300$
e) $y = 0{,}6070$ f) $y = 0{,}00807$ g) $y = 0{,}9773$ h) $y = 0{,}0813$
i) $y = 0{,}2376$ k) $y = 0{,}5681$ l) $y = 0{,}7779$ m) $y = 0{,}0480$

18. Schlage den Winkel x auf, dessen Kosinus den Wert y hat!

a) $y = 0{,}1700$ **b)** $y = 0{,}3473$ **c)** $y = 0{,}9872$ **d)** $y = 0{,}0037$
e) $y = 0{,}0323$ **f)** $y = 0{,}9999$ **g)** $y = 0{,}2022$ **h)** $y = 0{,}8975$
i) $y = 0{,}3602$ **k)** $y = 0{,}7350$ **l)** $y = 0{,}4285$ **m)** $y = 0{,}5087$

Rechne die gefundenen Winkel in sexagesimal geteilte Altgrad um!

19. Schlage den Winkel x auf, dessen Tangens den Wert y hat!

a) $y = 0{,}3259$ **b)** $y = 0{,}6425$ **c)** $y = 1{,}022$ **d)** $y = 8{,}190$
e) $y = 0{,}7420$ **f)** $y = 0{,}6000$ **g)** $y = 1{,}712$ **h)** $y = 25{,}00$
i) $y = 0{,}00536$ **k)** $y = 2{,}000$ **l)** $y = 0{,}5001$ **m)** $y = 1{,}610$

20. Schlage den Winkel x auf, dessen Kotangens den Wert y hat!

a) $y = 0{,}2510$ **b)** $y = 0{,}4758$ **c)** $y = 1{,}321$ **d)** $y = 1{,}085$
e) $y = 0{,}9980$ **f)** $y = 0{,}0020$ **g)** $y = 11{,}50$ **h)** $y = 4{,}932$
i) $y = 0{,}0280$ **k)** $y = 0{,}6070$ **l)** $y = 1{,}005$ **m)** $y = 0{,}5000$

V. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

21. Suche die Logarithmen der vier trigonometrischen Funktionen der in den Aufgaben 1, 3 und 8 bis 11 verzeichneten Winkel auf!

22. Schlage für die folgenden Winkel die Logarithmen der Sinus- und der Tangensfunktion auf:

a) $0{,}09°$ **b)** $0{,}902°$ **c)** $2{,}418°$ **d)** $4{,}935°$ **e)** $3{,}076°$ **f)** $1{,}234°$!

23. Suche für die folgenden Winkel die Logarithmen der Kosinus- und der Kotangensfunktion auf:

a) $85{,}238°$ **b)** $88{,}931°$ **c)** $87{,}045°$ **d)** $89{,}304°$ **e)** $86{,}753°$ **f)** $89{,}165°$!

24. Schlage in den entsprechenden Tafeln auf:

a) $\lg \sin 19{,}5°$ **b)** $\lg \sin 31{,}67°$ **c)** $\lg \sin 17° 42'$ **d)** $\lg \sin 93{,}5^g$
e) $\lg \cos 73{,}92°$ **f)** $\lg \cos 37{,}57°$ **g)** $\lg \cos 45° 22' 47''$ **h)** $\lg \cos 24{,}7^g$
i) $\lg \operatorname{tg} 21{,}28°$ **k)** $\lg \operatorname{tg} 50{,}68°$ **l)** $\lg \operatorname{tg} 87{,}55°$ **m)** $\lg \operatorname{tg} 47° 33'$
n) $\lg \operatorname{ctg} 38{,}95°$ **o)** $\lg \operatorname{ctg} 45{,}08°$ **p)** $\lg \operatorname{ctg} 2° 5' 12''$ **q)** $\lg \operatorname{ctg} 1{,}54^g$!

25. Stelle die Funktionen **a)** $y = \lg \sin x$; **b)** $y = \lg \cos x$; **c)** $y = \lg \operatorname{tg} x$; **d)** $y = \lg \operatorname{ctg} x$ geometrisch dar!
Benutze dazu die Tafelwerte für $x = 15°$; $30°$; $45°$; $60°$; $75°$! — Beschreibe den Verlauf jeder Funktion! Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von $x = 0°$ und $x = 90°$? Gib an, für welche Winkel sich jede Funktion am stärksten, für welche am schwächsten ändert! Vergleiche die Ergebnisse mit den Differenzen aufeinanderfolgender Logarithmen! — Untersuche die Logarithmus-Tangens-Kurve und die Logarithmus-Kotangens-Kurve auf Symmetrie!

26. Welche Beziehungen bestehen zwischen
a) $\lg \operatorname{tg} x$ und $\lg \operatorname{ctg} x$, **b)** $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \operatorname{tg} x$, **c)** $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \operatorname{ctg} x$?
Berechne mit Hilfe dieser Gleichungen in einigen selbstgewählten Beispielen den Funktionswert des Logarithmus-Tangens und Logarithmus-Kotangens aus den Funktionswerten für Logarithmus-Sinus und Logarithmus-Kosinus! — Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$?

27. Schlage den Winkel x auf, dessen Logarithmus-Sinus den Wert y hat!

a) $y = 0.6093 - 1$ **b)** $y = 0.3775 - 1$ **c)** $y = 0.5717 - 1$ **d)** $y = 0.0135 - 1$
e) $y = 0.9438 - 1$ **f)** $y = 0.1437 - 1$ **g)** $y = 0.7963 - 1$ **h)** $y = 0.8101 - 1$
i) $y = 0.4783 - 1$ **k)** $y = 0.8583 - 1$ **l)** $y = 0.7460 - 2$ **m)** $y = 0.4920 - 3$

28. Schlage den Winkel x auf, dessen Logarithmus-Kosinus den Wert y hat!

a) $y = 0.5341 - 1$ **b)** $y = 0.7230 - 1$ **c)** $y = 0.9892 - 1$ **d)** $y = 0.2700 - 1$

e) $y = 0.9900 - 1$ **f)** $y = 0.2356 - 1$ **g)** $y = 0.6400 - 1$ **h)** $y = 0.9995 - 1$

i) $y = 0.6000 - 1$ **k)** $y = 0.4840 - 1$ **l)** $y = 0.8221 - 2$ **m)** $y = 0.4459 - 2$

Rechne die gefundenen Winkel in die sexagesimale Teilung um!

29. Schlage den Winkel x auf, dessen Logarithmus-Tangens den Wert y hat!

a) $y = 0.1387$ **b)** $y = 0.8003$ **c)** $y = 0.6486 - 1$ **d)** $y = 1.0944$

e) $y = 0.8345 - 1$ **f)** $y = 0.1479 - 1$ **g)** $y = 0.1599$ **h)** $y = 0.6190 - 1$

i) $y = 0.8036 - 1$ **k)** $y = 1.0200$ **l)** $y = 0.2833 - 3$ **m)** $y = 0.8960 - 2$

30. Schlage den Winkel x auf, dessen Logarithmus-Kotangens den Wert y hat!

a) $y = 0.9848 - 1$ **b)** $y = 0.6129 - 1$ **c)** $y = 0.2509$ **d)** $y = 0.3688$

e) $y = 0.1888$ **f)** $y = 0.9800$ **g)** $y = 0.2880$ **h)** $y = 0.6971 - 1$

i) $y = 1.6250$ **k)** $y = 0.1064 - 1$ **l)** $y = 0.3090 - 2$ **m)** $y = 0.8293 - 2$

Rechne die gefundenen Winkel in Neugrad um!

b) Anwendungen aus der Geometrie

31. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 20) sind gegeben

a) die beiden Katheten: $a = 12{,}7$ cm und $b = 4{,}9$ cm;
$a = 54{,}85$ m und $b = 74{,}54$ m;

b) eine Kathete und die Hypotenuse: $a = 420$ m und $c = 645$ m;
$b = 14{,}54$ cm und $c = 29{,}08$ cm;

c) die Hypotenuse und ein Winkel: $c = 125$ m und $\alpha = 35{,}60°$;
$c = 10{,}50$ cm und $\beta = 40{,}30°$;

d) eine Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel: $a = 63$ mm und $\alpha = 40{,}30°$;
$b = 80{,}70$ m und $\beta = 62{,}30°$.

Berechne die übrigen Stücke und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks!

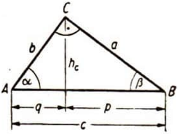


Abb. 20

32. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 20) sind gegeben

a) $c = 18{,}50$ m, $p = 4{,}20$ m; **b)** $c = 18{,}50$ m, $h_c = 4{,}30$ m;

c) $h_c = q = 3{,}5$ cm; **d)** $h_c = 22{,}42$ m, $b = 25{,}30$ m;

e) $p = 18{,}18$ m, $q = 3{,}88$ m.

Berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks! Konstruiere das rechtwinklige Dreieck aus den gegebenen Stücken!

33. In einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 21) sind gegeben

a) $c = 125$ m, $h_c = 85$ m; **b)** $a = 3{,}70$ m, $c = 2{,}50$ m;

c) $c = 19{,}64$ cm, $\gamma = 55{,}40°$; **d)** $c = 75{,}92$ dm, $\alpha = 52{,}62°$;

e) $h_c = 4{,}786$ m, $\gamma = 32{,}10°$.

Berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks! Konstruiere das Dreieck aus den gegebenen Stücken!

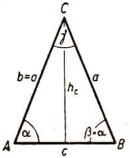


Abb. 21

34. Ein **Rechteck** wird durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

a) Berechne im Rechteck mit den Seiten $a = 5{,}5$ m und $b = 4{,}2$ m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, und den von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!

b) Von einem Rechteck ist die Diagonale $e = 6{,}5$ m und der von beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel $\varepsilon = 55°$ gegeben. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

35. Ein **Rhombus** wird durch die beiden Diagonalen in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechne die beiden Diagonalen des Rhombus und seinen Flächeninhalt!

36. Das **Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen n-Ecks** ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel $\gamma = \frac{4R}{n}$ an der Spitze.

a) Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Wie groß sind seine Seite s_n, sein Umfang u_n und seine Fläche f_n für $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$?

b) Die Seite eines regelmäßigen n-Ecks sei $s_n = 27$ cm. Bestimme die Radien des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$!

c) Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben. Wie groß sind seine Seite S_n, sein Umfang U_n und seine Fläche F_n für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$?

d) Stelle in einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit der Indexachse n als Abszissenachse die Größen s_n und S_n, u_n und U_n, f_n und F_n aus Aufgabe a) und c) in Abhängigkeit von n geometrisch dar!

37. a) Berechne die zu einem beliebigen Zentriwinkel α gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen $\widehat{b}$ und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Einheitskreises ($r = 1$, Abb. 22) als Funktionen des Zentriwinkels und stelle diese Funktionen geometrisch dar!

b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen $s(\alpha)$; $\widehat{b}(\alpha)$ und $h(\alpha)$ in einem Kreis mit dem Radius r?

c) Wie kann man die in technischen Tabellenbüchern enthaltenen Tafeln für die Werte s, $\widehat{b}$ und h der Aufgabe a) berechnen?

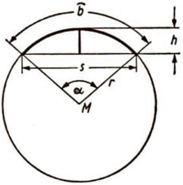


Abb. 22

38. Die Fläche eines **Kreissegments** über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen $\widehat{b}$ und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.

a) Wie groß ist die Fläche des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ m?

b) Berechne die Pfeilhöhe h des Segments in Aufgabe a)!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechne die Fläche des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

d) Stelle 1. den Sektor zum Bogen $\widehat{b}$ eines Einheitskreises,

2. den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,

3. das Kreissegment über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird,

als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und geometrisch dar!

c) Anwendungen aus der Physik

39. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $Q = 400$ kp (Abb. 23).

a) Bestimme geometrisch in maßstäblicher Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Berechne trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

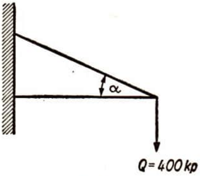


Abb. 23

40. Am Ende eines Tragarmes mit Stütze hängt eine Last von 400 kp (Abb. 24).

a) Bestimme geometrisch in maßstäblicher Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Stütze gegen den Tragarm!

b) Berechne die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

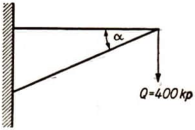


Abb. 24

41. Eine Kiste von 96 kp Gewicht soll auf einer unter 25° gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden.

a) Bestimme trigonometrisch und geometrisch die Abhängigkeit des Hangabtriebs H und des Normaldrucks N vom Neigungswinkel α der Rampe!

b) Berechne unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel $\mu = 0{,}18$.

c) Berechne den Neigungswinkel ϱ der Rampe, bei welchem der Hangabtrieb H gleich der Reibung R wird (Reibungswinkel ϱ)!

d) Zeige, daß der Tangens des Reibungswinkels ϱ gleich der Reibungszahl μ ist!

Das Reflexionsgesetz

42. Zwei Beobachter peilen von einem Schiff aus das Leuchtfeuer eines Leuchtturms an. Der eine Beobachter sieht das Leuchtfeuer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 3{,}81°$. Aus dem nautischen Jahrbuch entnimmt er die Höhe des Leuchtfeuers zu $h = 86$ m über Normalnull. Der andere beobachtet unabhängig davon das Leuchtfeuer gleichfalls unter dem Höhenwinkel $\alpha = 3{,}81°$ und das Spiegelbild des Leuchtfeuers im Wasser unter dem Tiefenwinkel $\beta = 4{,}58°$. Beide Beobachter berechnen die Entfernung des Schiffes vom Leuchtturm. Die Augenhöhe beider Beobachter über dem Meeresspiegel beträgt 8 m.

43. Der Lichtzeiger eines Spiegelgalvanometers steht bei stromlosem Instrument senkrecht auf der Ebene einer 1 m vom Spiegel entfernten, in Zentimeter geteilten Skala von 2 m Gesamtlänge.

a) Einem Strom von $1 \cdot 10^{-6} A$ entspricht ein Ausschlag von 8 cm auf der Skala. Um welchen Winkel hat sich 1. der Lichtzeiger; 2. der Galvanometerspiegel gedreht?

b) Bestimme die Zeigerausschläge auf der Skala für $2 \cdot 10^{-6} A$; $3 \cdot 10^{-6} A$; ... und eiche die Skala in Ampere unter der Voraussetzung, daß die Winkelausschläge des Drehspiegels der Stromstärke proportional sind!

c) Wie groß sind die den Stromstärken entsprechenden Ausschläge, wenn die Skala $d = 2$ m vom Spiegel entfernt ist?

Lichtbrechung

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel α aus Luft in ein optisch dichteres Mittel ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Brechungswinkels β gleich der Brechungszahl n des optischen Mittels gegenüber Luft ist.

Brechungsgesetz: $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl $n' = \frac{1}{n}$.

44. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15°;\ 30°;\ 45°;\ 60°;\ 75°;\ 90°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$.

a) Berechne die zugehörigen Brechungswinkel β!

b) Stelle die einander zugeordneten Werte von Einfalls- und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

45. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von $d = 10$ cm Dicke bei einem Einfallswinkel $\alpha = 60°$ erfährt, ($n = \frac{3}{2}$)?

b) Bestimme den Gang des Lichtstrahls geometrisch!

c) Stelle die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels α geometrisch dar!

46. Auf ein Glasprisma, (Brechungszahl $n = \frac{3}{2}$), dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Abb. 25).

a) Bestimme geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimme trigonometrisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls!

47. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Mittel, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Mittel 90° wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

a) Wasser in Luft ($n' = \frac{3}{4}$);

b) Glas in Luft ($n' = \frac{2}{3}$)?

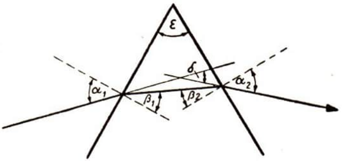


Abb. 25

d) Anwendungen aus der Technik

48. Wie groß ist in dem Gewindeprofil des metrischen Gewindes DIN 13 der Flankenwinkel α, wenn $t = 0{,}8660\,h$ ist (Abb. 26)?

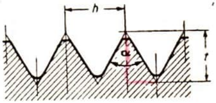


Abb. 26. Gewindeprofil

49. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Abb. 27). Ihre großen Durchmesser sind $D_1 = 150$ mm (900 mm) und $D_2 = 120$ mm (480 mm). Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist $s = 30$ mm (150 mm).

a) Welche Neigungswinkel α und β bilden die Mantellinien der beiden Kegelstümpfe mit ihren Grundflächen?

b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Kegelräder?

c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?

d) Stelle die Kegelräder in einer maßstäblichen Zeichnung dar und löse die Aufgabe geometrisch!

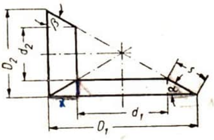


Abb. 27. Kegelräder (schematisch)

50. Kegelzapfen (konische Zapfen oder „Kegel“, technische Bezeichnungen für den Kegelstumpf) können auf einer Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten — durch Schrägstellen des sogenannten Längssupports der Drehmaschine — hergestellt werden (Abb. 28; zur Vereinfachung wurde der Antrieb weggelassen, ebenso in Abb. 29).

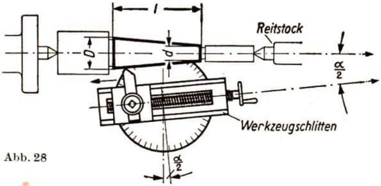


Abb. 28

In der Technik beim Kegeldrehen (eigentlich Kegelstumpfdrehen) gebräuchliche Bezeichnungen sind:
großer Kegeldurchmesser D; kleiner Kegeldurchmesser d; Kegellänge l (sämtlich in mm);
Kegelwinkel α; Drehwinkel des Supports $\frac{\alpha}{2} = \beta$;
Kegel $\frac{1}{x} = \frac{D-d}{l}$ (Kegel $1:x$ bedeutet: Auf die Länge x [mm] verjüngt sich der Kegel im Durchmesser um 1 [mm]); Neigung des Kegels $\frac{1}{y} = \frac{D-d}{2\,l}$.

a) Berechne den Einstellwinkel am Werkzeugschlitten der Drehmaschine, wenn der Kegelwinkel α betragen soll!

b) Wie groß muß der Einstellwinkel am Werkzeugschlitten sein, wenn $D = 80$ mm (30 mm; 100 mm), $d = 60$ mm (20 mm; 60 mm) und $l = 100$ mm (120 mm; 90 mm) werden soll?

c) Wie groß muß man den kleinen Durchmesser d eines $l = 45$ mm langen konischen Zapfens wählen, wenn $D = 25$ mm und die Neigung des Zapfens $\frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ betragen soll?

51. Kegel können auf Drehmaschinen auch durch seitliches Verstellen der Körnerspitze des Reitstocks um ein Stück s hergestellt werden (Abb. 29).

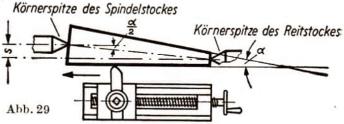


Abb. 29

a) Wie groß wird der Kegel $\frac{1}{x}$, wenn die Reitstockspitze der Drehmaschine um s mm verschoben wird?

b) Drücke die Verschiebung s der Reitstockspitze als Funktion des Kegelwinkels α aus (vgl. Abb. 29)!

c) Wie läßt sich die Verjüngung $\frac{1}{x}$ des Kegelzapfens als Funktion des Kegelwinkels α darstellen?

d) Es soll ein Kegel mit den Maßen $D = 65$ mm, $l = 245$ mm und $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$ gedreht werden. Wie groß werden d und α? Um welches Stück s muß die Körnerspitze des Reitstocks auf der Drehmaschine seitlich verstellt werden?

52. Kugellager. Um einen Kreiszylinder vom Durchmesser $D = 50$ mm sollen $n = 20$ Kugeln so angeordnet werden, daß sie sich gegenseitig berühren.

a) Wie groß muß der Kugeldurchmesser gewählt werden, wenn die Kugeln den Kreiszylinder von außen berühren sollen?

b) Wie groß muß der Kugeldurchmesser gewählt werden, wenn die Kugeln einen Hohlzylinder vom Durchmesser d von innen berühren sollen?

c) Berechne den Durchmesser der Kugeln, wenn der Abstand zweier aufeinanderfolgender Kugeln im Kugelkäfig $a = 5$ mm betragen soll!

d) Stelle die einzelnen Kugellager in maßstäblichen Schnittzeichnungen dar!

53. Ein Riementrieb besteht aus zwei Riemenscheiben mit den Durchmessern $D = 50$ cm und $d = 20$ cm bei einem Abstand $a = 350$ cm zwischen treibender und getriebener Welle (Abb. 30).

a) Berechne die Länge des Treibriemens bei offenem Riemen!

b) Welche Näherungsformel kann man für die Treibriemenlänge angeben, wenn die Neigung des Treibriemens gegen die Verbindungslinie der beiden Wellen so klein ist, daß die zum Winkel α gehörende Bogenlänge durch seinen Sinuswert und $\cos\alpha$ durch 1 ersetzt werden kann?

c) Vergleiche die nach a) und b) berechneten Riemenlängen miteinander!

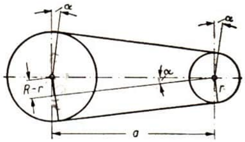


Abb. 30. Riementrieb mit offenem Riemen

54. a) Berechne die Riemenlänge nach den Angaben in Aufgabe 53 für gekreuzten Riemen (Abb. 31)!

b) Wie lautet die Näherungsformel für gekreuzten Riemen?

c) Zeige, daß sich nach der unter a) abgeleiteten Formel die Riemenlänge gekreuzter Treibriemen bei Auswechslung der Riemenscheiben nicht ändert, wenn der Abstand a zwischen treibender und getriebener Welle und die Summe der Durchmesser der Riemenscheiben, $D + d$, (Summe der Radien der Riemenscheiben, $R + r$), unverändert bleiben!

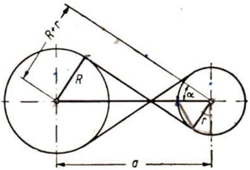


Abb. 31. Riementrieb mit gekreuztem Riemen

55. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft R gleich oder größer als der Hangabtrieb H ist.
Wie hoch darf die Ganghöhe h einer Stahlschraube von $D = 52$ mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Ölfettung) ist $\varrho = 8{,}50°$.

56. Ein zylinderförmiger liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser $D = 1500$ mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt. Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.

a) Zeichne einen Querschnitt des Kessels und trage die Wasserstandslinie ein!

b) Drücke für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe h in diesem Querschnitt zugeordnet ist, und stelle die Funktionen geometrisch dar!

c) Drücke die Verdampfungsfläche des Kessels (m^2) als Funktion des Zentriwinkels aus und stelle die Funktion geometrisch dar!

d) Berechne für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche (m^2) und den Wasserinhalt des Dampfkessels (m^3)!

e) Berechne für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1100 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen (m^2) und Wasserinhalte (m^3) und stelle diese als Funktionen der Wasserstandshöhe geometrisch dar!

e) Anwendungen aus verschiedenen Gebieten

57. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte A und B auf ihr um 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichne einen maßstäblichen Geländeschnitt durch die Straßenmitte und löse die Aufgabe auch trigonometrisch (vgl. Abb. 32)!

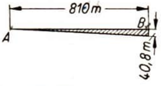


Abb. 32

58. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein?

Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

59. **a)** Berechne den Radius des Breitenkreises, auf welchem der Schulort liegt!

b) Welche (lineare) Bahngeschwindigkeit besitzt der Schulort infolge der Erdumdrehung?

c) Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Schulort und einem auf demselben Breitenkreis liegenden Ort, dessen Meridian sich von dem des Schulorts um 1° unterscheidet?

d) Löse die Aufgabe **a)** auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

Die Erde ist näherungsweise als Kugel anzusehen; $R = 6370$ km.

60. Welche Breitenausdehnung besitzt ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung d unter dem Sehwinkel 1° erscheint?

a) $d = 1$ m; **b)** $d = 10$ m; **c)** $d = 100$ m; **d)** $d = 1$ km; **e)** $d = 10$ km.

61. Die Entfernung Sonne—Erde beträgt im Mittel $149 \cdot 10^6$ km; die Entfernung Erde—Mond $384 \cdot 10^3$ km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund 32′, der des Mondes rund 31′. Berechne den wahren Durchmesser der Sonne und des Mondes!

62. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Sehwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechne die Horizontalparallaxe des Mondes unter Benutzung der in Aufgabe 61 gegebenen Entfernungen (Erdradius $R = 6370$ km)!

63. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von 52,7° in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten.

a) Wie groß ist die Höhe des Leitungsmastes über der Erde?

b) Löse die Aufgabe auch geometrisch!

64. Um die Höhe einer Wolkendecke zu bestimmen, wird diese von dem Scheinwerfer einer meteorologischen Station lotrecht angestrahlt, so daß die Spitze des Lichtkegels an der Wolkendecke einen scharf begrenzten Lichtfleck erzeugt. Der Lichtfleck wird durch das Fernrohr eines in 300 m horizontaler Entfernung vom Scheinwerfer aufgestellten Theodoliten angepeilt und am Höhenkreis des Theodoliten ein Höhenwinkel $\alpha = 70{,}4°$ abgelesen. Wie hoch ist die Wolkendecke? Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

65. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm?

Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

66. Bestimme im Mittel die Mächtigkeit eines Kohlenflözes aus der durchbohrten Teufe $t = 10{,}50$ m und dem sogenannten Einfallswinkel $\beta = 63{,}4°$ (Abb. 33)!

67. In einem Braunkohlentagebau soll der Höhenunterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Planum[1]) bestimmt werden (Abb. 34). Gemessen wurde der Neigungswinkel $\beta = 48°$, die flache Länge des Flözes beträgt $l = 25{,}70$ m.

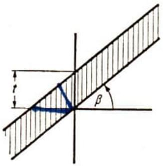


Abb. 33

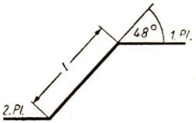


Abb. 34

1) Planum (lat.), das, künstlich hergestellte ebene Fläche, auch im Bauwesen.

II. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel

5. Erweiterung des Erklärungsbereiches

a) Erklärung der trigonometrischen Funktionen durch die Koordinaten eines Kreispunktes $P(u; v)$

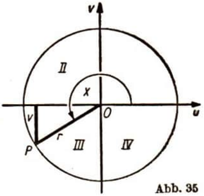


Abb. 35

Die Erklärungen der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck gelten nur für spitze Winkel. Für stumpfe und überstumpfe Winkel sind die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ zunächst nicht erklärt. Es bedarf besonderer Festsetzungen, was unter diesen Funktionen für Winkel zwischen 90° und 360° verstanden werden soll. Die Beziehungen, die für Winkel im I. Quadranten eines Kreises abgeleitet wurden, sind brauchbar, um die trigonometrischen Funktionen der Winkel in allen Quadranten zu erklären.

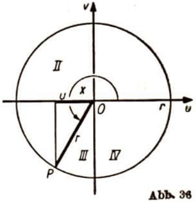


Abb. 36

Erklärung 5: Unter dem Sinus eines Winkels x zwischen 0° und 360° versteht man das Verhältnis der Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P zum Radius r des Kreises um O (Abb. 35).

$$\sin x = \frac{v}{r}, \qquad (0° \leqq x \leqq 360°).$$

Erklärung 6: Unter dem Kosinus eines Winkels x zwischen 0° und 360° versteht man das Verhältnis der Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P zum Radius r des Kreises um O (Abb. 36).

$$\cos x = \frac{u}{r}, \qquad (0° \leqq x \leqq 360°).$$

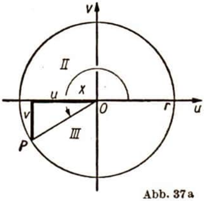


Abb. 37 a

Erklärung 7: Unter dem Tangens eines Winkels x zwischen 0° und 360°, ausgenommen die Werte $x = 90°$ und $x = 270°$, versteht man das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P (Abb. 37a, b).

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{u}, \quad (0° \leqq x \leqq 360°,\ x \neq 90°,\ x \neq 270°).$$

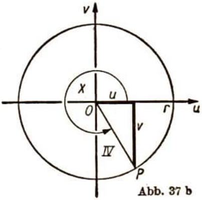


Abb. 37 b

Warum sind die Winkel $x = 90°$ und $x = 270°$ ausgenommen?

Erklärung 8: Unter dem Kotangens eines Winkels x zwischen 0° und 360°, ausgenommen die Werte $x = 0°$, $x = 180°$ und $x = 360°$, versteht man das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P (Abb. 38 a, b).

$$\mathbf{ctg}\, x = \frac{u}{v}, \qquad (0° < x < 360°,\ x \neq 180°).$$

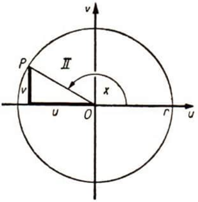


Abb. 38a

Warum sind die Winkel 0°, 180° und 360° ausgenommen?

Der Radius r hat als absolute Größe kein Vorzeichen, aber u und v nehmen je nach dem Quadranten das positive oder negative Vorzeichen an. Die Vorzeichen von u und v bestimmen damit das Vorzeichen der Funktion für die Winkel dieses Quadranten. In der untenstehenden Tafel sind die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den einzelnen Quadranten zusammengestellt. — Leite die Vorzeichen aus den Erklärungen der trigonometrischen Funktionen ab!

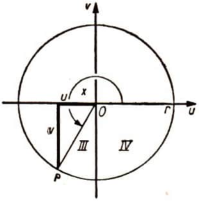


Abb. 38b

Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

	I.	II.	III.	IV. Quadrant
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

Die Erklärungen 5 bis 8 erweitern die Begriffe der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkelwerte x unter 360°.

b) Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis

Im Einheitskreis ($r = 1$) stellt die Ordinate des laufenden Punktes P den Sinus, die Abszisse den Kosinus des Winkels x dar (Abb. 39).

Tangens und Kotangens veranschaulicht man am Einheitskreis als Abschnitte auf den Tangenten in A bzw. B (Abb. 40 a und b). Liegt der Winkel x im

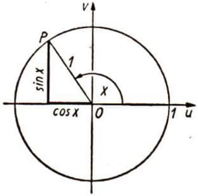


Abb. 39

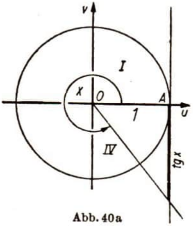


Abb. 40a

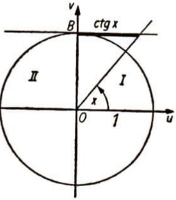


Abb. 40b

II. oder III. Quadranten, so schneidet der bewegliche Schenkel des Winkels x die Tangente in A nicht. Der den Tangens des Winkels x darstellende Abschnitt wird in diesem Fall von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 41). Dasselbe gilt für den Kotangens im III. und IV. Quadranten in bezug auf die Tangente in B (Abb. 42).

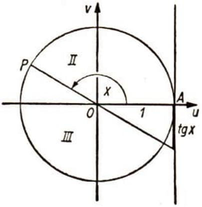


Abb. 41

Welche Funktionswerte besitzen die trigonometrischen Funktionen für die Winkel $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$ und $360°$? Für welche dieser Winkel ist ein Funktionswert der Tangens- und Kotangensfunktion nicht vorhanden?

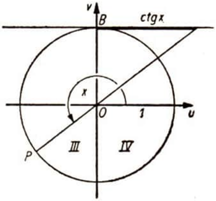


Abb. 42

c) Beziehungen zwischen Funktionen von Winkeln verschiedener Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

Es sei x ein spitzer Winkel. Dann liegen die Winkel $(90° + x)$ bzw. $(180° - x)$ im II., $(180° + x)$ bzw. $(270° - x)$ im III. und $(270° + x)$ bzw. $(360° - x)$ im IV. Quadranten. Zwischen den Winkelfunktionen, die zu Winkeln in höheren Quadranten gehören, und den Winkelfunktionen des entsprechenden Winkels im ersten Quadranten gelten die folgenden Beziehungen:

II. Quadrant

$$\begin{aligned} \sin(90° + x) &= \cos x, & \operatorname{tg}(90° + x) &= -\operatorname{ctg} x,\\ \cos(90° + x) &= -\sin x, & \operatorname{ctg}(90° + x) &= -\operatorname{tg} x;\\ \sin(180° - x) &= \sin x, & \operatorname{tg}(180° - x) &= -\operatorname{tg} x,\\ \cos(180° - x) &= -\cos x, & \operatorname{ctg}(180° - x) &= -\operatorname{ctg} x; \end{aligned} \tag{6}$$

III. Quadrant

$$\begin{aligned} \sin(180° + x) &= -\sin x, & \operatorname{tg}(180° + x) &= \operatorname{tg} x,\\ \cos(180° + x) &= -\cos x, & \operatorname{ctg}(180° + x) &= \operatorname{ctg} x;\\ \sin(270° - x) &= -\cos x, & \operatorname{tg}(270° - x) &= \operatorname{ctg} x,\\ \cos(270° - x) &= -\sin x, & \operatorname{ctg}(270° - x) &= \operatorname{tg} x; \end{aligned} \tag{7}$$

IV. Quadrant

$$\begin{aligned} \sin(270° + x) &= -\cos x, & \operatorname{tg}(270° + x) &= -\operatorname{ctg} x,\\ \cos(270° + x) &= \sin x, & \operatorname{ctg}(270° + x) &= -\operatorname{tg} x;\\ \sin(360° - x) &= -\sin x, & \operatorname{tg}(360° - x) &= -\operatorname{tg} x,\\ \cos(360° - x) &= \cos x, & \operatorname{ctg}(360° - x) &= -\operatorname{ctg} x. \end{aligned} \tag{8}$$

Beweise die Formeln geometrisch am Einheitskreis! Spiegele dazu den Winkel x des I. Quadranten der Reihe nach an der v-Achse, am Koordinatenursprung O und an der u-Achse! Führe diese geometrischen Transformationen durch Umklappen um die v- oder u-Achse bzw. durch Drehen um O praktisch durch!

Die Beziehungen (6) bis (8) führen die trigonometrischen Funktionen im II. bis IV. Quadranten auf die entsprechenden Funktionen im I. Quadranten zurück.

Beispiel für die Anwendung:

Es sei $180° < x < 270°$.

Man setzt $x = 180° + \bar{x}$, $(0° < \bar{x} < 90°$; für $\bar{x}$ sprich: x quer).

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(180° + \bar{x}) = -\sin \bar{x};\\
\cos x &= \cos(180° + \bar{x}) = -\cos \bar{x};\\
\operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(180° + \bar{x}) = +\operatorname{tg} \bar{x};\\
\operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg}(180° + \bar{x}) = +\operatorname{ctg} \bar{x}.
\end{aligned}$$

Bei gegebener Funktion eines Winkels x und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x stets zwei Lösungen.

Beispiel: $\operatorname{tg} x = +0{,}8391$.

Der Winkel x liegt im I. oder III. Quadranten.

Es ist $x_1 = 40°$ und $x_2 = 220°$.

d) Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel

Legt man auf dem Radius $OP = r$ des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt O als Richtung die von O nach P fest, so entsteht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, die man als Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bezeichnet (Abb. 43). Die Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ ist durch den Richtungswinkel x bestimmt, seine Länge durch die Strecke OP.

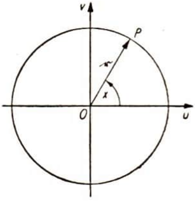


Abb. 43

Wenn sich der Radiusvektor um seinen Anfangspunkt O dreht, so kann diese Drehung — je nach der Drehrichtung — im positiven oder im negativen Drehsinn erfolgen. Eine Drehung im positiven Sinne erfolgt gegen die Bewegung des Uhrzeigers (Gegenzeigerdrehung), eine Drehung im negativen Sinne mit der Uhrzeigerbewegung (Zeigerdrehung).

Dreht sich der Radiusvektor im positiven Sinne, so entstehen positive Winkel (z. B. $+120°$), im anderen Falle negative Winkel (z. B. $-120°$, Abb. 44).

Für Winkel zwischen 0° und 360° werden die trigonometrischen Funktionen durch die Erklärungen 5 bis 8 definiert. — Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel lassen sich auf die entsprechenden Funktionen positiver Winkel zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x, & \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x,\\
\cos(-x) &= \cos x, & \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x.
\end{aligned} \tag{9}$$

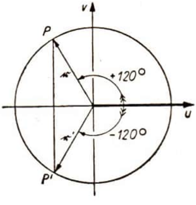


Abb. 44

Beweise die Quadrantenbeziehungen (9) geometrisch für spitze, stumpfe und überstumpfe negative Winkel am Einheitskreis! — Gelten die Formeln (1) bis (8) für negative Winkel?

Funktionen $f(x)$, die ihren Wert nicht ändern, wenn die unabhängige Veränderliche das Vorzeichen wechselt, heißen gerade Funktionen, Funktionen, die dabei das Vorzeichen wechseln, dagegen ungerade Funktionen.

Gerade Funktionen:	Ungerade Funktionen:
$f(-x) = f(x)$.	$f(-x) = -f(x)$.

Die Kosinusfunktion $y = f(x) = \cos x$ ist eine gerade Funktion, die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$ dagegen eine ungerade Funktion. Deute diese Funktionseigenschaft geometrisch! Welche Symmetrieverhältnisse besitzt die Kosinuskurve $y = \cos x$ zur y-Achse, welche die Sinuskurve $y = \sin x$ zum Nullpunkt $(0; 0)$?
Zu welcher Funktionsgruppe gehören die Tangens- und die Kotangensfunktion?

e) Positive und negative Winkel mit Beträgen über 360°

Dreht sich der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ im positiven oder im negativen Sinne, so werden nach einem vollen Umlauf Winkel erzeugt, deren absoluter Betrag größer als 360° ist, nach zwei Umläufen Winkel, deren absoluter Betrag größer als 720° ist, usw. (Abb. 45a, b).

Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, heißen äquivalent.

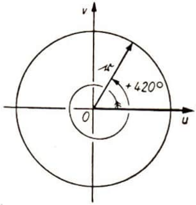


Abb. 45a

Beispiel:
$\cdots; -1020°; -660°; -300°; 60°; 420°; 780°; \cdots$

Bezeichnet man den zwischen 0° und 360° liegenden Winkel $\bar{x}$ als den Hauptwert, so läßt sich jeder beliebige Winkel durch die Gleichung darstellen

$$x = \bar{x} + k \cdot 360°,$$

wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Beispiel: Wenn $x = -855°$ ist, so ist

$$\bar{x} = -855° - (-3) \cdot 360°$$
$$= -855° + 3 \cdot 360° = 225°.$$

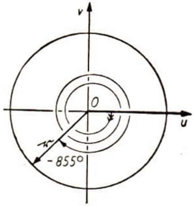


Abb. 45b

f) Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über 360°

Die Erklärungen 5 bis 8 der trigonometrischen Funktionen dehnt man auch auf Winkel x über 360° aus. Dreht sich der Radiusvektor von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Endpunkt P nach einem, zwei, drei usw. vollen Umläufen dieselben rechtwinkligen Koordinaten wie in dieser Ausgangslage. Daher haben die trigonometrischen Funktionen in den Intervallen[1]) $360° \cdots 720°; 720° \cdots 1080°$ usw. dieselben Werte wie im Intervall $0° \cdots 360°$. Entsprechendes gilt für negative Winkel. Veranschauliche einige Zahlenbeispiele durch geeignete Abbildungen!

---
1) intervallum (lat.) heißt Zwischenraum, Teilbereich.

Die trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Winkels x lassen sich auf dieselbe Funktion des Hauptwertes $\overline{x}$ des Winkels zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\overline{x} + k \cdot 360°) = \sin \overline{x}, \\ \cos x &= \cos(\overline{x} + k \cdot 360°) = \cos \overline{x}, \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(\overline{x} + k \cdot 360°) = \operatorname{tg} \overline{x}, \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg}(\overline{x} + k \cdot 360°) = \operatorname{ctg} \overline{x}, \end{aligned}$$

wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist. — Zeige, daß die Formeln (1) bis (4) auf Seite 15 für beliebige Winkel gelten!

Bei gegebener Funktion $f(x)$ ($f=$ sin, cos, tg, ctg) und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x zunächst die beiden Werte $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ zwischen 0° und 360° und durch Addition bzw. Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von 360° die äquivalenten Werte. Zu der gegebenen Funktion $f(x)$ erhält man also die Winkel

$$\overline{x}_1 + k \cdot 360° \text{ und } \overline{x}_2 + k \cdot 360°, \; (k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots).$$

Beispiele für die Anwendung:

1. $\sin 3520° = \sin(3520° - 9 \cdot 360°) = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848.$

2. $\operatorname{tg} x = 2{,}565$; $\overline{x}_1 = 68{,}7°$, $\overline{x}_2 = 248{,}7°$.

Allgemeine Lösung: $68{,}7° + k \cdot 360°$ und $248{,}7° + k \cdot 360°$, $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots)$,
oder
$68{,}7° + k' \cdot 180°$, $(k' = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots)$.

Aufgaben

I. Erweiterung des Erklärungsbereiches

1. Beweise, daß die Formeln (1) bis (4) auf Seite 15 auch für die erweiterten Erklärungen der trigonometrischen Funktionen gelten!

2. In welchen Fällen sind beim praktischen Rechnen die von 90° bzw. 270° ausgehenden Quadrantenbeziehungen der Formeln (6) bis (8) den von 180° und 360° ausgehenden vorzuziehen? Benutze sie gegebenenfalls bei den späteren Aufgaben!

3. An die Stelle der (geometrischen) Erweiterung des Geltungsbereichs der trigonometrischen Funktionen nach den Erklärungen 5 bis 8 kann man die folgende (analytische) Begriffserweiterung setzen:

Die Doppelwinkelformeln

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

sind unter der Bedingung $2x < 90°$, also $x < 45°$ bewiesen (vgl. Aufgaben 17 und 18 auf Seite 17). Nimmt man an, daß die vier Formeln auch für Winkel x zwischen 45° und 90° einen Sinn haben, so lassen sich die Werte der trigonometrischen Funktionen im II. Quadranten berechnen. Man sagt, man habe die Funktionen, die zunächst nur im Intervall 0° $\cdots$ 90° erklärt waren, in das Intervall $90° \cdots 180°$ analytisch fortgesetzt. Durch analytische Fortsetzung mit Hilfe der Doppelwinkelformeln gewinnt man schließlich weiter den Bereich $180° \cdots 360°$.

a) Berechne mit den Doppelwinkelformeln, soweit möglich, die trigonometrischen Funktionen der Winkel 120°; 180°; 150° und 100°!

Anleitung zum 3. Zahlenbeispiel: Berechne zuerst $f(75°)$ aus $f(15°)$ mit Hilfe der Formeln (5) auf Seite 15 (vgl. Aufgabe 20 auf Seite 17)!

b) Berechne ebenso aus den unter a) gefundenen Werten die trigonometrischen Funktionen der Winkel 240°; 300° und 200°!

c) Beweise mit den Doppelwinkelformeln die Formeln (1) bis (4) für die durch analytische Fortsetzung gewonnenen Bereiche!

II. Beziehungen zwischen Funktionen von Winkeln verschiedener Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

4. Bestimme

a) sin 135°	**b)** sin 97°	**c)** sin 113,5°	**d)** sin 147,87°	**e)** sin 173° 25′
f) cos 150°	**g)** cos 101°	**h)** cos 129,6°	**i)** cos 177,13°	**k)** cos 155° 37′
l) tg 120°	**m)** tg 91°	**n)** tg 145,7°	**o)** tg 154,41°	**p)** tg 93° 50′
q) ctg 110°	**r)** ctg 96°	**s)** ctg 164,8°	**t)** ctg 135,23°	**u)** ctg 152° 30′!

5. Welche Werte besitzen die vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel

a) 0°	**b)** 90°	**c)** 180°	**d)** 270°	**e)** 360°
f) 200°	**g)** 194,5°	**h)** 265,35°	**i)** 298,46°	**k)** 354,63°
l) 211,49°	**m)** 315,32°	**n)** 244,66°	**o)** 327,76°	**p)** 300° 23′ 15″?

6. Suche, soweit möglich, die Logarithmen der Beträge der trigonometrischen Funktionen aus den Aufgaben 4 und 5 in der Tafel auf!

7. Bestimme die Winkel x zwischen 0° und 360° zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	$-0,5$	0,3746	$-0,7314$	0,1500	$-0,0728$
$\cos x$	0	1	-1	0,7071	$-0,9336$	0,2358	$-0,7005$
$\operatorname{tg} x$	0	1	2	-3	$-0,4452$	0,9387	$-0,0120$
$\operatorname{ctg} x$	0	1	-3	$-16,50$	0,1700	$-1,319$	$-2,439$

8. Bestimme zu den nachstehenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel x!

Bemerkung: Eine in zwei senkrechte Striche eingeschlossene Größe a, also $|a|$, (sprich entweder: absoluter Betrag von a oder: Betrag von a oder: a absolut), bedeutet denjenigen der beiden Werte $+a$ und $-a$, der nicht negativ ist.

Bei den Aufgaben 8b, d, f, h sowie bei den Aufgaben 12b, d, f, h und 18b, d, f sind die Werte der trigonometrischen Funktionen, zu denen die Logarithmen angegeben sind, negativ. Da aber Logarithmen negativer Zahlen nicht existieren, sind die absoluten Beträge der betreffenden trigonometrischen Funktionen angegeben.

a) $\lg \sin x = 0.8810 - 1, \quad (\sin x > 0)$;
b) $\lg |\sin x| = 0.9750 - 2, \quad (\sin x < 0)$;
c) $\lg \cos x = 0.9996 - 1, \quad (\cos x > 0)$;
d) $\lg |\cos x| = 0.3075 - 1, \quad (\cos x < 0)$;
e) $\lg \operatorname{tg} x = 0.2764 - 1, \quad (\operatorname{tg} x > 0)$;
f) $\lg |\operatorname{tg} x| = 0.9000 - 2, \quad (\operatorname{tg} x < 0)$;
g) $\lg \operatorname{ctg} x = 0.7718, \quad (\operatorname{ctg} x > 0)$;
h) $\lg |\operatorname{ctg} x| = 1.2700, \quad (\operatorname{ctg} x < 0)$.

III. Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel

9. Bestimme die Werte aller trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel:

a) $-30°$ **b)** $-18°$ **c)** $-135°$ **d)** $-83{,}4°$ **e)** $-90{,}45°$
f) $-174{,}77°$ **g)** $-214{,}92^g$ **h)** $-282°\ 12'\ 38''$ **i)** $-393{,}27^g$!

10. Suche die Logarithmen der Beträge zu den Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für die in Aufgabe 9a) bis i) angeführten Winkel auf!

11. Bestimme zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$ die zwischen 0° und — 360° liegenden negativen Winkel!

	a)	b)	c)		a)	b)	c)
$\sin x$	$-0{,}4848$	$-0{,}9024$	$0{,}0820$	$\operatorname{tg} x$	$-0{,}3759$	$-0{,}9935$	$2{,}877$
$\cos x$	$0{,}9655$	$0{,}3704$	$-0{,}8671$	$\operatorname{ctg} x$	$-191{,}0$	$-1{,}333$	$0{,}0107$

12. Bestimme zu den folgenden Logarithmen der vier trigonometrischen Funktionen sowohl die positiven als auch die negativen Winkel!

a) $\lg \sin x = 0.5717 - 1$, $(\sin x > 0)$; **b)** $\lg |\sin x| = 0.1718 - 1$, $(\sin x < 0)$;
c) $\lg \cos x = 0.9970 - 2$, $(\cos x > 0)$; **d)** $\lg |\cos x| = 0.4237 - 1$, $(\cos x < 0)$;
e) $\lg \operatorname{tg} x = 0.3393$, $(\operatorname{tg} x > 0)$; **f)** $\lg |\operatorname{tg} x| = 1.0763$, $(\operatorname{tg} x < 0)$;
g) $\lg \operatorname{ctg} x = 0.6506 - 1$, $(\operatorname{ctg} x > 0)$; **h)** $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0.8411 - 2$, $(\operatorname{ctg} x < 0)$.

IV. Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über 360°

13. Gib zu den nachstehenden Winkeln die auf sie folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an:

a) 50° **b)** 175° **c)** 335° **d)** 117,5° **e)** — 221,68°!

14. Wie groß ist der Hauptwert der Winkel

a) 1200° **b)** 5180° **c)** — 320° **d)** — 1755° **e)** — 615° 23′?

15. Bestimme die Funktionswerte

a) $\sin 383°$ **b)** $\sin 773{,}2°$ **c)** $\sin(-640{,}56°)$ **d)** $\sin(-3620{,}78°)$
e) $\cos 421°$ **f)** $\cos 1527{,}3°$ **g)** $\cos(-704{,}64°)$ **h)** $\cos(-1083{,}92°)$
i) $\operatorname{tg} 8000°$ **k)** $\operatorname{tg}(-444{,}7°)$ **l)** $\operatorname{ctg} 992{,}25°$ **m)** $\operatorname{ctg}(-524{,}44°)$!

16. Suche die Logarithmen der Beträge der Funktionen aus den Aufgaben 15 a) bis m) auf!

17. Stelle sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen allgemein dar! Gib die auf die gefundenen Hauptwerte im positiven und negativen Drehsinn folgenden drei äquivalenten Winkel an!

a) $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8440$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$ **d)** $\cos x = -0{,}1382$
e) $\operatorname{tg} x = -1{,}083$ **f)** $\operatorname{tg} x = 0{,}9045$ **g)** $\operatorname{ctg} x = 0{,}00524$ **h)** $\operatorname{ctg} x = -0{,}4109$

18. Welche Winkel ergeben sich als allgemeine Lösung aus den nachstehenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen?

a) $\lg \sin x = 0.4328 - 1$, $(\sin x > 0)$; **b)** $\lg |\sin x| = 0.6743 - 1$, $(\sin x < 0)$;
c) $\lg \cos x = 0.1873 - 1$, $(\cos x > 0)$; **d)** $\lg |\cos x| = 0.8591 - 1$, $(\cos x < 0)$;
e) $\lg \operatorname{tg} x = 0.4711 - 1$, $(\operatorname{tg} x > 0)$; **f)** $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0.7220 - 2$, $(\operatorname{ctg} x < 0)$.

6. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

Bisher haben wir die trigonometrische Methode auf Berechnungen im rechtwinkligen und im gleichschenkligen Dreieck angewandt. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, die Berechnungen auch auf das schiefwinklige Dreieck auszudehnen.

a) Der Sinussatz

Die Höhe h_c des Dreiecks ABC (Abb. 46a) läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken, nämlich durch

$$h_c = a \sin \beta$$

und durch

$$h_c = b \sin \alpha .$$

Setzt man die Ausdrücke für h_c einander gleich, so ergibt sich

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

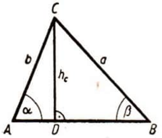


Abb. 46a

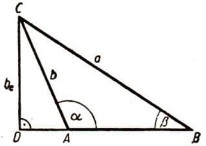


Abb. 46 b

oder, als Proportion geschrieben,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \tag{10 a}$$

Entsprechend findet man, wenn man die Höhe h_a bzw. h_b in das Dreieck einzeichnet,

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \tag{10b}$$

und

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}. \tag{10c}$$

Die Gleichungen (10b) und (10c) kann man auch aus (10a) erhalten, wenn man die Stücke am Dreieck zyklisch vertauscht. Man ordnet die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie bei dem Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen (Abb. 47). Für jeden lateinischen bzw. griechischen Buchstaben der Formel (10a) hat man den lateinischen bzw. griechischen Buchstaben zu setzen, der auf ihn folgt, wenn man den Kreis im positiven Drehsinn durchläuft.

Ist einer der Dreieckswinkel stumpf, beispielsweise α, so lautet die entsprechende Gleichung für die Höhe (Abb. 46b)

$$h_c = b \sin (180° - \alpha) = b \sin \alpha .$$

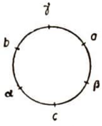


Abb. 47

Es ergibt sich wieder die Gleichung (10a).

Die Formeln (10) stellen den **Sinussatz** dar. Sprich den Satz in Worten aus! Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

$$\boldsymbol{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma .} \tag{10d}$$

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, hat man bei der Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Sinussatz die Doppeldeutigkeit des Winkels zu berücksichtigen.

b) Der Kosinussatz

Im Dreieck ABC (Abb. 48a) gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

und

$$h_c^2 = a^2 - p^2 .$$

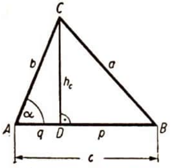


Abb. 48a

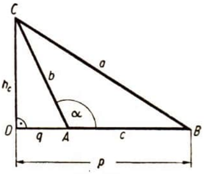


Abb. 48b

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$

oder, da $p = c - q$ ist,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cq .$$

Der Höhenabschnitt q läßt sich durch eine Seite und eine Winkelfunktion ausdrücken:

$$q = b \cos \alpha .$$

Setzt man diesen Ausdruck für q in die vorige Formel ein, so erhält man

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.} \tag{11a}$$

Durch zyklische Vertauschung der Stücke am Dreieck ergeben sich die beiden weiteren Formeln

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta} \tag{11b}$$

und

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.} \tag{11c}$$

Ist $\sphericalangle\,\alpha$ stumpf, so wird (Abb. 48b)

$$p = c + q ,$$

und man berechnet

$$q = b \cos (180° - \alpha) = - b \cos \alpha .$$

Es ergibt sich wie vorher die Gleichung (11a).

Die drei Formeln (11) stellen den **Kosinussatz** dar. Sprich seinen Inhalt in Worten aus!

Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedenes Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.

Drückt man in der Gleichung

$$c = p + q$$

p und q durch Seiten und Winkel aus, so erhält man

$$\boldsymbol{c = a \cos \beta + b \cos \alpha.} \tag{12}$$

Die Gleichung (12) heißt der **Projektionssatz**. Gib die entsprechenden Formeln in bezug auf die Seiten a und b an!

c) Übersicht zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit dem Sinus- und Kosinussatz

Mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht zeigt die Verwendung der beiden Sätze:

Gegebene Stücke	Lösung
1. 1 Seite, 2 Winkel (wsw)	Sinussatz
2. 2 Seiten, 1 Winkel	
a) eingeschlossener Winkel (sws)	Kosinussatz oder Kosinus- und Sinussatz
b) gegenüberliegender Winkel (ssw)	Sinussatz
3. 3 Seiten (sss)	Kosinussatz oder Kosinus- und Sinussatz

Bei der Aufgabe 2 b) läßt sich nach dem Anwenden des Sinussatzes der Projektionssatz benutzen.
Suche bei jeder Aufgabe zunächst mit dem Sinussatz auszukommen und ziehe erst, wenn dies nicht zum Ziele führt, den Kosinussatz heran!
Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wie viele Lösungen vorhanden sind (Determination). Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.
Die Berechnung der unbekannten Stücke des schiefwinkligen Dreiecks geschieht in der Regel logarithmisch. Wird dabei der Kosinussatz verwendet, so muß das logarithmische Rechnen unterbrochen werden. Bei Aufgaben der Gruppe 2 a) kann man die Anwendung des Kosinussatzes vermeiden, wenn man das Dreieck durch eine Höhe in rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
Führe die Rechnung allgemein durch!

d) Flächeninhalt eines Dreiecks

Ersetzt man in der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks,

$$F = \frac{1}{2}\, c h_c,$$

die Höhe h_c mit Hilfe der Beziehung $h_c = b \sin\alpha$, so erhält man

$$\boldsymbol{F = \frac{1}{2}\, b c \sin\alpha.} \tag{13}$$

Leite aus der Formel die zwei weiteren durch zyklische Vertauschung der Stücke am Dreieck ab! Sprich die Formeln in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

e) Weitere Methoden zur Dreiecksberechnung

1. Mollweidesche Gleichungen

Auf der Verlängerung der Seite BC des Dreiecks ABC trägt man b von C bis D ab, so daß $BD = a + b$ ist (Abb. 49). Das Dreieck ACD ist gleichschenklig.
Nach dem Satz über die Außenwinkel im Dreieck findet man

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \frac{\gamma}{2}.$$

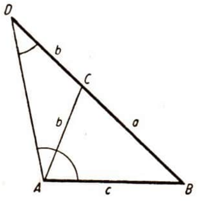


Abb. 49

Weiter ist im Dreieck ABD

$$\sphericalangle BAD = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Wendet man auf das Dreieck ABD den Sinussatz an, so erhält man

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

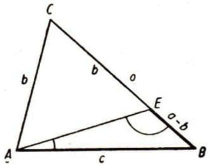


Abb. 50

Auf der Seite BC des Dreiecks ABC trägt man b von C bis E ab, so daß $BE = a - b$ ist (Abb. 50). Das Dreieck AEC ist gleichschenklig, und es gilt

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Weiter ist im Dreieck ABE

$$\sphericalangle EAB = \alpha - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Wendet man auf das Dreieck ABE den Sinussatz an, so erhält man

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Die Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{14}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{15}$$

heißen die **Mollweideschen[1]) Gleichungen.** Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden anderen Formeln an!

2. Tangenssatz

Dividiert man Gleichung (14) durch Gleichung (15), so ergibt sich

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{16}$$

Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden anderen Formeln an! Man bezeichnet die Formeln als den **Tangenssatz.**

1) Karl Mollweide, Mathematiker und Astronom, 1774—1825, Leipzig

3. Halbwinkelsatz

Quadriert man die Gleichungen (14) und (15) und addiert sie, so ergibt sich, weil $\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1$ ist,

$$(a+b)^2\sin^2\frac{\gamma}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{\gamma}{2}=c^2.$$

In dieser Gleichung ersetzt man $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ und $\cos^2\frac{\gamma}{2}$ mit Hilfe der Formeln

$\sin^2\frac{\gamma}{2}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$ bzw. $\cos^2\frac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$ (vgl. Aufgabe 13 auf Seite 17) und erhält

$$(a+b)^2\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+(a-b)^2=c^2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Daraus findet man

$$\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{[c+(a-b)]\cdot[c-(a-b)]}{[(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]}.$$

Setzt man $a+b+c=2s$, so läßt sich die rechte Seite darstellen als

$$\frac{(2s-2b)(2s-2a)}{2s(2s-2c)}=\frac{(s-b)(s-a)}{s(s-c)},$$

und man erhält schließlich

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \qquad (17)$$

Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden Formeln für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ an! Man bezeichnet die Formeln als den **Halbwinkelsatz.**

Die in diesem Abschnitt aufgestellten Mollweideschen Gleichungen und der Halbwinkelsatz erleichtern die logarithmische Berechnung der Winkel des schiefwinkligen Dreiecks, wenn die drei Seiten gegeben sind. Dagegen ist die Anwendung des Tangenssatzes zu empfehlen, wenn zwei Seiten eines Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind. Der für logarithmische Berechnungen wenig geeignete Kosinussatz wird damit entbehrlich.

Aufgaben

I. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit Sinus- und Kosinussatz

1. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel und kontrolliere die Ergebnisse, gegebenenfalls maßstäblich verkleinert, durch die Konstruktion!

a) $a=4$ cm $\beta=43°$ $\gamma=55°$	**b)** $a=5{,}6$ cm $\beta=83{,}8°$ $\gamma=26{,}5°$	**c)** $c=1{,}46$ m $\alpha=20{,}2°$ $\beta=74{,}3°$	**d)** $b=8{,}5$ cm $\beta=44{,}2°$ $\gamma=54{,}5°$
e) $c=121{,}56$ m $\beta=13{,}47°$ $\gamma=101{,}25°$	**f)** $b=2{,}389$ km $\alpha=39°\,17'$ $\beta=68°\,28'$	**g)** $a=44{,}8$ cm $\alpha=59°\,10'$ $\beta=41°\,18'$	**h)** $c=64{,}9$ m $\alpha=42°\,43'$ $\gamma=102°\,19'$

2. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel und unterscheide, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\gamma = 53{,}6°$
b) $a = 35{,}75$ m, $c = 26{,}48$ m, $\alpha = 93{,}57°$
c) $a = 7{,}0$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\beta = 43{,}7°$
d) $a = 32{,}3$ cm, $c = 36{,}6$ cm, $\alpha = 55{,}7°$
e) $a = 12{,}15$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 109{,}24°$
f) $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20°\ 35'$
g) $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67°\ 23'$
h) $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117°\ 4'$

Bei Dreiecksberechnungen erleichtert man sich die Rechenarbeit durch Verwendung eines Rechenschemas etwa nach folgendem Muster:

Dreiecksstücke			Formeln und Hauptrechnung			Logarithmische Nebenrechnung		
						num	lg	
Gegeben:	a	10,32 m	$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$			8,48	0.9284	
	b	8,48 m				sin 65,05°	0.9575 — 1	+
	α	65,05°	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$			Zähler 10,32		—
Gefunden:	β							
	γ			180,00°		sin β		
	c		α		—	10,32		
			β		—	sin γ		+
			γ			Zähler sin 65,05°		—
						c		

Übertrage das Schema in das Heft und führe die Berechnung aus!

3. Lege ein Rechenschema nach Aufgabe 2 an und berechne die fehlenden Seiten und Winkel!

a) $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$
b) $a = 123{,}5$ m, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$
c) $b = 17{,}18$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$
d) $a = 245{,}9$ m, $b = 392{,}5$ m, $\gamma = 47°\ 43'$

4. Berechne die Dreieckswinkel!

a) $a = 5{,}38$ m, $b = 1{,}97$ m, $c = 4{,}75$ m
b) $a = 2{,}458$ km, $b = 3{,}019$ km, $c = 1{,}389$ km
c) $a = 27{,}18$ m, $b = 33{,}88$ m, $c = 35{,}03$ m
d) $a = 8{,}754$ km, $b = 6{,}672$ km, $c = 8{,}386$ km

5. Beweise mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt (Lehrsatz des Apollonius; vgl. Lehrbuch der Mathematik für das 9. Schuljahr, Seite 177, Aufgabe 21)!

II. Flächeninhalt eines Dreiecks

6. Leite die Formel

$$F = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$$

für den Flächeninhalt eines Dreiecks ab! Wie heißen die Gleichungen, in denen die Seite a bzw. b verwendet wird? Sprich die Formeln in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

7. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn die folgenden Stücke gegeben sind:

a) $a = 8{,}7$ cm, $b = 7{,}1$ cm, $\gamma = 44{,}6°$
b) $a = 52{,}85$ cm, $c = 75{,}23$ cm, $\beta = 56{,}91°$
c) $a = 34{,}76$ m, $\beta = 59°\ 10'$, $\gamma = 79°\ 33'$
d) $b = 4{,}475$ km, $\beta = 59{,}27°$, $\gamma = 41{,}31°$!

8. Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke in den Aufgaben 2 a) bis d)!

9. Stelle die Dreiecksseiten durch den Umkreisradius r und den Sinus des gegenüberliegenden Winkels dar! Leite aus dem gefundenen Gleichungssystem den Sinussatz ab! Welches ist der Proportionalitätsfaktor im Sinussatz?
Berechne die Seiten des Dreiecks, wenn $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm gegeben sind!

10. Beweise, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks gegeben ist durch

$$F = 2\,r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

und berechne aus den Winkeln $\alpha = 56{,}79°$ und $\beta = 62{,}89°$ sowie dem Umkreisradius $r = 12$ cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

11. Warum können die Strecken $a = 8$ cm, $b = 5$ cm und der Flächeninhalt $F = 22\ \text{cm}^2$ nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?

a) Begründe geometrisch, daß dies nicht möglich ist! — Anleitung: Untersuche die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhaltes vom Winkel γ, wenn dieser von 0° bis 180° zunimmt!

b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat?

III. Weitere Methoden zur Dreiecksberechnung

12. Beweise an Hand von Abb. 51 **a)** die Mollweideschen Gleichungen, **b)** den Tangenssatz (Gaußscher Beweis)!

Anleitung:

a) In Abb. 51 sind die Hilfsdreiecke ABD mit $a+b$ und ABE mit $a-b$ gezeichnet. Beweise, daß $\sphericalangle\, DAE = R$,
$\sphericalangle\, ADE = \frac{\gamma}{2}$, $\quad \sphericalangle\, EAB = \frac{\alpha-\beta}{2}$,
$\sphericalangle\, AEB = 2\,R - \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist!

b) Von B ist das Lot auf die Verlängerung von DA gefällt. Beweise, daß $\sphericalangle\, DBF = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sphericalangle\, ABF = \frac{\alpha-\beta}{2}$ ist!
Gib $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ durch Verhältnisse von Strecken an und benutze weiter den Strahlensatz (Scheitel D)!

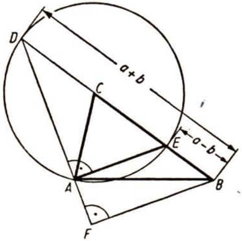


Abb. 51

13. Berechne die Seiten und Winkel des Dreiecks, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

a) $a+b = 15{,}6$ cm, $\alpha = 78{,}1°$, $\beta = 54{,}9°$	**b)** $b-c = 22{,}96$ m, $\alpha = 36{,}15°$, $\beta = 113{,}32°$	**c)** $a = 25{,}7$ cm, $c = 18{,}3$ cm, $\beta = 45{,}5°$	**d)** $b = 32{,}8$ cm, $c = 36{,}4$ cm, $\alpha = 59{,}75°$
e) $b = 9{,}4$ cm, $a+c = 15{,}3$ cm, $\beta = 72{,}3°$	**f)** $b = 319{,}5$ m, $c-a = 48{,}2$ m, $\gamma-\alpha = 7{,}27°$	**g)** $a-b = 6{,}64$ cm, $\alpha = 52°\,8'$, $\beta = 47°\,39'$	**h)** $b+c = 26{,}5$ cm, $r = 8$ cm, $\alpha = 66°\,48'$

14. Löse die Aufgaben 3a) bis d) mit dem Tangenssatz! Vergleiche dieses Verfahren mit der Lösung durch den Kosinussatz!

15. Berechne die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks, von dem folgende Bestimmungsstücke gegeben sind!

a) $a = 36{,}2$ cm, $b = 32{,}5$ cm, $F = 398{,}1\ \text{cm}^2$	**b)** $b = 56{,}46$ m, $\gamma = 41{,}1°$, $F = 511{,}8\ \text{m}^2$	**c)** $F = 8840\ \text{cm}^2$, $\alpha = 76°\,12{,}3'$, $\beta = 83°\,17{,}9'$	**d)** $a = 44{,}12$ cm, $b = 64{,}88$ cm, $r = 33{,}77$ cm

e) $b = 85{,}15$ m $\alpha = 40{,}03^\circ$ $r = 49{,}14$ m	**f)** $\alpha = 96{,}41^\circ$ $\beta = 26{,}33^\circ$ $r = 8{,}75$ cm	**g)** $b = 28{,}17$ cm $c = 26{,}32$ cm $s_b = 26{,}98$ cm	**h)** $b = 6{,}257$ km $w_\gamma = 4{,}319$ km $\alpha = 43^\circ\,16'\,46''$
i) $a = 3{,}104$ km $h_b = 3{,}029$ km $s_c = 2{,}621$ km	**k)** $\alpha = 102{,}46^\circ$ $h_a = 2{,}804$ km $h_c = 3{,}666$ km	**l)** $r = 13{,}48$ cm $h_a = 20{,}57$ cm $\alpha = 39{,}85^\circ$	**m)** $a = 41{,}05$ m $b = 47{,}35$ m $c = 52{,}81$ m
n) $w_\alpha = 32{,}2$ cm $c = 41{,}1$ cm $\alpha = 91{,}76^\circ$	**o)** $b = 28{,}04$ m $h_b = 23{,}97$ m $s_a = 26{,}17$ m	**p)** $r = 87{,}28$ m $\alpha = 113^\circ\,23'\,25''$ $\beta = 19^\circ\,19'\,20''$	**q)** $F = 80{,}45\ \text{cm}^2$ $h_a = 11{,}9$ cm $\beta = 65^\circ\,49{,}3'$

16. Leite den Halbwinkelsatz aus dem Kosinussatz ab!

Anleitung: Aus der Beziehung zwischen dem Kosinus des ganzen Winkels und dem Sinus und Kosinus des halben Winkels (Seite 17, Aufgabe 17) erhalten wir die Gleichungen
$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ und $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Forme mit ihrer Hilfe den Kosinussatz um! Es ergibt sich

$$a^2 = (b+c)^2 - 4\,bc\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad a^2 = (b-c)^2 + 4\,bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

17. Beweise die Formel für den Inkreisradius ϱ,

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}\,!$$

Anleitung (Abb. 52):

a) $s-a$, $s-b$ und $s-c$ sind die Abschnitte der Dreiecksseiten von den Ecken A, B bzw. C bis zu den Berührungspunkten des Inkreises.

b) $CG = CK = s$. Beachte, daß $AG = AH$, $BK = BH$ und $AH + HB = c$ ist!

c) Stelle mit Hilfe des Strahlensatzes sowie der ähnlichen Dreiecke AOF und O_1AG zwei Gleichungen für ϱ und ϱ_c auf!

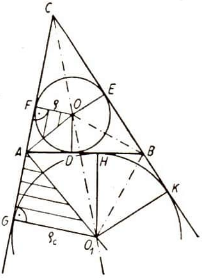


Abb. 52

18. Leite den Halbwinkelsatz aus Abb. 52 ab!

19. Beweise die Heronische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\,!$$

Sprich die Formel in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

20. Berechne den Radius des Inkreises der Dreiecke mit den Seiten

a) $a = 4{,}8$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $c = 3{,}7$ cm; **b)** $a = 23{,}48$ m, $b = 44{,}44$ m, $c = 36{,}37$ m!

21. In einem schiefwinkligen Dreieck sind die Seiten $a = 61{,}28$ m, $b = 98{,}64$ m und $c = 143{,}19$ m gegeben. Berechne die Dreieckswinkel **a)** mit dem Kosinussatz, **b)** mit dem Halbwinkelsatz! Welches Verfahren ist in bezug auf die logarithmische Rechnung einfacher?

22. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten $a = 2{,}7$ cm, $b = 4{,}3$ cm und $c = 6{,}8$ cm?

23. Löse die Aufgaben 4 a) bis d) mit dem Halbwinkelsatz!

24. Berechne Inkreisradius und Flächeninhalt des Dreiecks aus den in Aufgabe 15 m) gegebenen Stücken!

25. Stelle alle bisher bekannten Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks zusammen und gib ihre Bedeutung an!

IV. Anwendungen zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

A. Aus der Nautik

Unter dem Kurs eines Schiffes versteht man seine Fahrtrichtung, angegeben durch den Winkel, den die Fahrtrichtung am Schiffsort mit der Nord-Süd-Richtung, dem Meridian, bildet[1]).

26. Ein Schiff liegt auf Kurs

a) N 45° O; **b)** N 45° W; **c)** S 60° O; **d)** S 60° W; **e)** N 30° O; **f)** N 30° W.

In welcher Himmelsrichtung fährt das Schiff? Veranschauliche den Kurs geometrisch!

27. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie $AB = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $\alpha = 86{,}40°$ und $\beta = 78{,}50°$.

a) In welcher Entfernung von A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

b) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

28. Von einem Schiff aus peilt man gleichzeitig den Leuchtturm L in Richtung S 55° O und den Kirchturm K in Richtung S 28° W an. Die Entfernung KL beträgt nach der Seekarte 33,2 km und hat die Richtung N 85° O.

a) In welcher Entfernung von K und L befindet sich das Schiff während der Beobachtung (in sm)?

b) Welchen Kurs muß das Schiff einhalten, wenn es im Abstand von 4 sm am Leuchtturm vorbeifahren soll? (Die Durchfahrt zwischen K und L ist dabei ausgeschlossen.)

c) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

Anleitung: 1 sm = 1,852 km.

29. Ein Schiff steuert einen Kurs N 45° W bei einer Geschwindigkeit von 9 sm/h (oder 9 Knoten). Vom Schiffsort A aus peilt man einen Leuchtturm unter N 23,4° O. Nach 90 min peilt man vom Schiffsort B aus denselben Leuchtturm in Richtung N 85,3° O.

a) Wie weit ist das Schiff am Ort B vom Leuchtturm entfernt?

b) Welchen Abstand hat der Leuchtturm vom Schiffskurs?

c) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

B. Aus der Physik und der Technik

30. Der Ausleger eines Krans (Abb. 53 a) hat gegen die Horizontalebene eine Neigung von 40°. Die Ebene der nach den vorderen, oberen Eckpunkten des Kranhauses führenden Spannseile ist gegen die Horizontalebene um 25° geneigt. Das Kranhaus ist 4 m hoch und 4 m breit (siehe Abb. 53 a, Seitenansicht; Abb. 53 b, Draufsicht).

a) Wie lang ist der Ausleger des Krans?

b) Wie lang sind die nach den vorderen Eckpunkten des Kranhauses führenden Spannseile?

c) Welchen Winkel schließen die Spannseile am Krankopf miteinander ein?

d) Welche Druckkräfte und welche Zugkräfte treten im Ausleger und in den Spannseilen auf, wenn der Kran am Auslegerkopf mit 1 000 kp (2 000 kp; 3 000 kp) belastet wird?

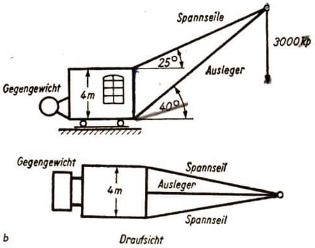


Abb. 53. Kran. a) Seitenansicht, b) Draufsicht

---

1) Neuerdings wird der Kurs eines Schiffes nur noch durch den Winkel (gemessen im Uhrzeigersinn) angegeben, den die Fahrtrichtung mit der Nordrichtung bildet.

31. Die Schubstange eines Kurbelgetriebes ist 750 mm lang, der Kurbelradius ist $r = 200$ mm (Abb. 54).

a) Wie groß ist die Ablenkung β der Schubstange, wenn die Kurbel sich um $\alpha°$ dreht?

b) Berechne die zu den Winkeln $\alpha = 0°$; $15°$; $30°$; $\cdots$; $360°$ gehörigen Winkel β und stelle β als Funktion von α geometrisch dar!

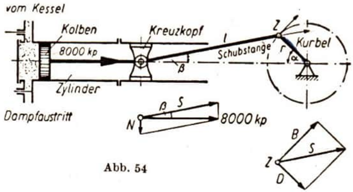


Abb. 54

c) Für welche Drehwinkel α erreicht die Ablenkung β der Schubstange ihre größten Werte?

d) Welche Verschiebung des Kreuzkopfes entspricht den Kurbelstellungen $\alpha = 0°$; $15°$; $30°$; $\cdots$; $360°$?

e) Stelle die Verschiebung des Kreuzkopfes als Funktion des Winkels α der Kurbeldrehung analytisch und geometrisch dar!

f) Zerlege die von der Kolbenstange auf den Kreuzkopf übertragene Kraft $P = 8000$ kp in ihre Komponenten S und N! S wirkt in Richtung der Schubstange, N senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes bei den einzelnen Kurbelstellungen (siehe Abb. 54).

g) Zerlege die auf den Kurbelzapfen Z wirkende Schubstangenkraft S in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten B und D! D stellt den Druck auf die Kurbelwelle dar, B ist die tangential zur Kreisbahn des Kurbelzapfens wirkende Bewegungskraft.

h) Berechne die Größe der Komponentenkräfte S und B für die Kurbelstellungen $\alpha = 0°$; $15°$; $30°$; $\cdots$; $360°$!

i) Stelle die Größe der treibenden Kraft B als Funktion des Winkels α geometrisch dar!

32. In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage siehe Abb. 55). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter dem Winkel 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

c) Löse die Aufgabe geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

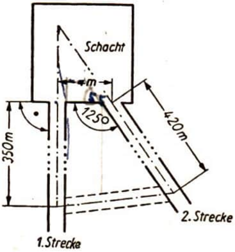


Abb. 55
Grundriß einer Schachtanlage

33. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen CA und CB bilden miteinander den Winkel $\gamma = 38{,}70°$. Die Entfernungen CA und CB werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung AB?

b) In welchen Richtungen von A und von B aus ist die Schneise zu schlagen?

c) Löse die Aufgabe geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

III. Fortsetzung der Lehre von den trigonometrischen Funktionen

7. Periodizität der trigonometrischen Funktionen

a) Das Bogenmaß eines Winkels

Bei der geometrischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen hatten wir auf der Abszissenachse als Einheit des Winkels die Bogenlänge aufgetragen, die zum Zentriwinkel 1° des Einheitskreises gehört (vgl. Abb. 12). Damit hatten wir das Bogenmaß als neues Maß für einen Winkel eingeführt. Wir wollen dieses jetzt begründen.

Ein Zentriwinkel α möge aus den konzentrischen Kreisen mit den Radien r_1, r_2, r_3 die Bogenlängen b_1, b_2, b_3 ausschneiden (Abb. 56). Dann gilt die fortlaufende Proportion

$$b_1 : b_2 : b_3 = r_1 : r_2 : r_3 .$$

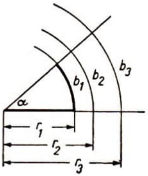


Abb. 56

Der Beweis ergibt sich aus der Formel für die Bogenlänge $b = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$.

Das Verhältnis „Bogenlänge zu Radius“ ist für ein und denselben Zentriwinkel konstant.

Aus der Formel folgt weiter, daß das Verhältnis „Bogenlänge zu Radius“ dem Zentriwinkel α proportional ist. (Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?) Man kann daher dieses Verhältnis als Maß für den Winkel α einführen.

Unter dem **Bogenmaß $\widehat{\alpha}$** (sprich: Bogen Alpha) eines Winkels α versteht man das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zum Radius. Es ist

$$\widehat{\alpha} = \frac{b}{r} .$$

Das Bogenmaß ist eine **reine Zahl.**

Besonders einfach wird die Erklärung für das Bogenmaß eines Winkels im Einheitskreis (Abb. 57). Hier ist

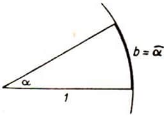


Abb. 57

$$\widehat{\alpha} = \frac{b}{1} = b ,$$

d. h. der Winkel α wird durch die Maßzahl der Bogenlänge auf dem Einheitskreis gemessen. Zu jedem Winkel gehört eine bestimmte positive oder negative reelle Zahl und umgekehrt. Die lineare Funktion $f(\alpha) = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ$ nennt man **Arkus α**[1]. Es ist

$$\widehat{\alpha} = \operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ ;$$

sprich: Bogen Alpha gleich Arkus Alpha gleich ...

Zur Umrechnung des Gradmaßes eines Winkels in Bogenmaß und umgekehrt dienen die Formeln

$$\widehat{\alpha} = \operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \operatorname{arc} \alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\,\widehat{\alpha} . \qquad (18\text{a, b})$$

1) arcus (lat.) heißt Bogen.

Man kann sich zur Umwandlung der Tafel 7 und für kleine Winkel mittelbar der Tafel 6 in Schülkes Tafeln bedienen.
Als Einheit des Bogenmaßes nimmt man die Bogenlänge 1 auf dem Einheitskreis. Sie entspricht einem Winkel $\alpha \approx 57{,}30°$ im Gradmaß, denn es ist

$$\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot 1 \approx 57{,}30°.$$

Das Bogenmaß eines Winkels wird entsprechend der Umrechnungsformel (18a) zumeist als Bruchteil oder Vielfaches von π angegeben. Ein rechter Winkel hat das Bogenmaß $x = \frac{\pi}{2}$, ein Vollwinkel das Bogenmaß $x = 2\pi$.
Die griechischen Buchstaben $\alpha, \cdots$ sollen künftig den im Gradmaß gemessenen Wert des Winkels bedeuten, die lateinischen Buchstaben $x, \cdots$ werden zur Bezeichnung des Bogenmaßes verwendet. Bei Abweichungen von dieser Regel wird das Maß besonders angegeben.

Beispiele

Gradmaß: $\alpha; \beta; \cdots; x°; a°$. Bogenmaß: $\widehat{\alpha}; \widehat{\beta}; \cdots; x; a$.

In der Elementargeometrie mißt man einen Winkel stets im Gradmaß. In der Trigonometrie benutzt man Winkelgrade bei praktischen Messungen und Rechnungen, bei allgemeinen Betrachtungen bevorzugt man das Bogenmaß. Die höhere Mathematik bedient sich ausschließlich des Bogenmaßes.

b) Geometrische Darstellung der Sinus- und der Kosinusfunktion

Die Funktion $y = f(x) = \sin x$ haben wir bisher nur im I. Quadranten, d. h. für Argumente[1]) x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, geometrisch dargestellt. Auf Grund der Erklärung 5 und der Festsetzung, daß der Sinus für beliebige Winkel x den Funktionswert des zugehörigen Hauptwertes $\bar{x}$ hat, läßt sich die Funktionskurve $y = \sin x$ für alle Werte x geometrisch darstellen (Abb. 58).
Für die Zeichnung entnimmt man die Funktionswerte $y = f(x)$ dem Einheitskreis als Ordinaten $v = y = \sin x$ (Abb. 12). Das Bild der Funktion $y = \sin x$ nennt man kurz eine **Sinuskurve.**

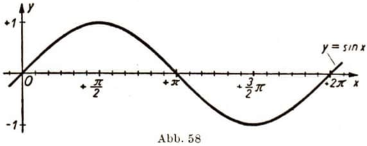


Abb. 58

Was die erste der Quadrantenbeziehungen im Abschnitt 5f analytisch wiedergab, zeigt die Kurve, die man sich nach beiden Seiten fortgesetzt zu denken hat, anschaulich. Im Bereich $2\pi \cdots 4\pi$; $4\pi \cdots 6\pi$ usw. und ebenso auf der negativen x-Achse im Bereich $-2\pi \cdots 0$ usw. wiederholen sich die Funktionswerte des Bereiches $0 \cdots 2\pi$. Eine derartige Funktion nennt man eine **periodische** Funktion.

1) Argument bedeutet unabhängige Veränderliche einer Funktion, hier den Winkel x.

Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise 2π; 4π; 6π; $\cdots$ und -2π; -4π; -6π; $\cdots$ Allgemein lassen sich die Perioden der Sinusfunktion zusammenfassen als

$$k \cdot 2\pi = 2k\pi, \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \cdots).$$

Insbesondere ist 2π die **kleinste Periode.** Im Bogenmaß geschrieben, findet die Periodizität der Sinusfunktion ihren Ausdruck in der Gleichung

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x. \tag{19}$$

Wichtig ist, daß die Formel (19) nicht nur für einen bestimmten Winkelwert x, sondern für alle Werte x gilt. Wodurch unterscheidet sie sich von der ersten der Quadrantenbeziehungen im Abschnitt 5f? Der Teilbereich $0 \ldots 2\pi$ enthält alle für die Sinusfunktion möglichen Werte.

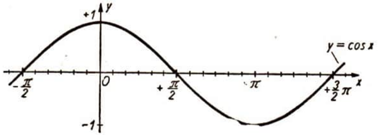


Abb. 59

In Abb. 59 ist die Funktion $y = f(x) = \cos x$ geometrisch dargestellt.

Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode 2π. Es ist

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x. \tag{20}$$

Projizieren wir die Punkte der Sinuskurve mit den Abszissenwerten $x = 0°;\ 10°;\ 20°;\ 30°; \cdots;\ 90°$ senkrecht auf die y-Achse des Achsenkreuzes und setzen wir an die Fußpunkte der Lote im Bereich $0 \leqq y \leqq 1$ die zugehörigen Argumentwerte $x = 0°;\ 10°;\ 20°;\ 30°;\ \cdots;\ 90°$, so erhalten wir eine neue Form der geometrischen Darstellung der Funktion $y = f(x) = \sin x$, nämlich ihre geometrische Darstellung als **Funktionsskala** $y = f(x) = \sin x$ oder als **Sinusskala** (Abb. 60a). Teilen wir eine Einheitslänge $0 \cdots 1$ in dieser Weise, lassen aber die Bezeichnung der Funktionswerte $y = \sin x$ fort, so erhalten wir eine **Sinusteilung** der Einheit $0 \cdots 1$.

In Abb. 60b ist die Kosinusfunktion in entsprechender Weise als **Funktionsskala** $y = f(x) = \cos x$ oder als **Kosinusskala** geometrisch dargestellt.

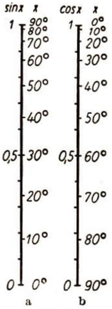


Abb. 60

c) Geometrische Darstellung der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Funktion $y = f(x) = \mathrm{tg}\, x$ wurde bisher nur im I. Quadranten gezeichnet. Auf Grund der Erweiterung des Tangensbegriffes durch die Erklärung 7 und der Erklärung der Tangenswerte beliebiger Winkel x als Funktionswerte des zugehörigen

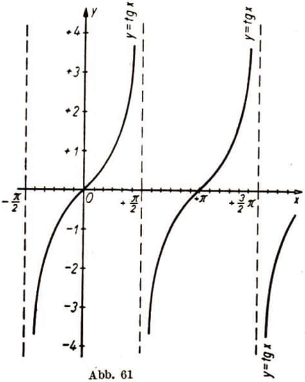


Abb. 61

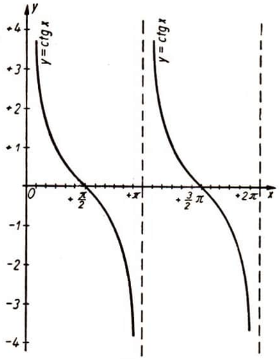


Abb. 62

Hauptwertes $\overline{x}$ kann man die Funktion im ganzen x-Bereich mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ geometrisch darstellen (Abb. 61).

Wir erkennen, daß auch die Tangensfunktion eine **periodische** Funktion ist. Perioden von $\operatorname{tg} x$ sind beispielsweise

$$\pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ \cdots \text{ und } -\pi;\ -2\pi;\ -3\pi;\ \cdots .$$

Im Gegensatz zur Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich bei der Funktion $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ die Funktionswerte y bereits nach einem Zuwachs des Argumentes um π. Die Tangensfunktion hat also die (kleinste) Periode π. Es ist, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \cdots)$,

$$\mathbf{tg}\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}. \tag{21}$$

Abb. 62 stellt die Kurve der Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ dar.
Die Kotangensfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode π. Es ist

$$\mathbf{ctg}\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}. \tag{22}$$

Wie aus den geometrischen Darstellungen der trigonometrischen Funktionen hervorgeht, gehört zu jeder reellen Zahl x (als Winkel x im Bogenmaß) eine bestimmte reelle Zahl y aus dem Bereich $-1 \leqq y \leqq +1$ als Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zu jeder reellen Zahl x mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ bzw. $\pm n\pi$ gehört eine bestimmte reelle Zahl y als Funktionswert der Tangens- bzw. Kotangensfunktion.

Aufgaben

I. Das Bogenmaß eines Winkels

1. Rechne die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel in Bogenmaß um:

a) $1°$ **b)** $0{,}1°$ **c)** $0{,}01°$ **d)** $1'$ **e)** $1''$ **f)** $45°$
g) $120°$ **h)** $75°$ **i)** $300°$ **k)** $-180°$ **l)** $900°$ **m)** $32°$
n) $67{,}5°$ **o)** $102{,}7°$ **p)** $256{,}58°$ **q)** $318{,}04°$ **r)** $-177{,}42°$ **s)** $1125{,}17°$!

2. Rechne die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel in Gradmaß um:

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{10}$ **d)** $\frac{\pi}{15}$ **e)** $\frac{\pi}{30}$ **f)** $\frac{\pi}{180}$
g) $\frac{3}{2}\pi$ **h)** $\frac{3}{4}\pi$ **i)** $\frac{7}{8}\pi$ **k)** $\frac{\pi}{12}$ **l)** $2{,}5\,\pi$ **m)** $37\,\pi$
n) $1{,}13\,\pi$ **o)** $0{,}1$ **p)** $0{,}01$ **q)** 2 **r)** $1{,}5$ **s)** $3{,}04$
t) $-\pi$ **u)** $-\frac{2}{3}\pi$ **v)** -3 **w)** $-0{,}703$ **x)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **y)** 12!

3. Berechne die Bogenlängen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm für die Zentriwinkel

a) $36{,}3°$ **b)** $117{,}45°$ **c)** $255{,}58°$!

4. Berechne die Bogenlänge zum Zentriwinkel $1°$ auf einem Kreis mit dem Radius

a) $r = 1$ cm **b)** $r = 2$ cm **c)** $r = 4$ cm!

5. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Zahlenwerte von $\operatorname{arc}\alpha$

a) mit denen von $\sin\alpha$, **b)** mit denen von $\operatorname{tg}\alpha$

bis auf 3 Dezimalstellen überein?

6. Nach Schülke-Tafel 6 lassen sich die Sinus- und die Tangenswerte von Winkeln zwischen $0°$ und $4{,}99°$ bestimmen. Man formt unter Verwendung der für kleine Winkel gültigen Beziehung $\sin\alpha \approx \operatorname{arc}\alpha$ um. Zu beachten ist weiter, daß $\operatorname{arc}\alpha$ dem Winkel α (im Gradmaß!) proportional ist. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

a) $\sin 0{,}0001°$ **b)** $\sin 0{,}0018°$ **c)** $\sin 0{,}000094°$ **d)** $\sin\ 1''$
e) $\operatorname{tg}\ 0{,}0001°$ **f)** $\operatorname{tg}\ 0{,}000313°$ **g)** $\operatorname{tg}\ 0{,}0000847°$ **h)** $\operatorname{tg} 0{,}5''$!

7. Bestimme die Winkel x zu den nachstehenden Funktionswerten:

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **c)** $\sin x = 8{,}24 \cdot 10^{-7}$
d) $\operatorname{tg}\ x = 0{,}0000104$ **e)** $\operatorname{tg}\ x = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\operatorname{tg}\ x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$!

8. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

a) $\sin\frac{\pi}{3}$ **b)** $\sin\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ **d)** $\sin 1$ **e)** $\sin 0{,}43$
f) $\sin(-1{,}87)$ **g)** $\sin 2{,}163$ **h)** $\cos\frac{\pi}{4}$ **i)** $\cos\frac{4}{3}\pi$ **k)** $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$
l) $\cos 1{,}31\,\pi$ **m)** $\cos 0{,}5$ **n)** $\cos(-1)$ **o)** $\cos 2{,}897$ **p)** $\cos(-2{,}17)$!

9. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

a) $\operatorname{tg}\pi$ **b)** $\operatorname{tg}\frac{2}{7}\pi$ **c)** $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{20}\right)$ **d)** $\operatorname{tg} 0{,}7$ **e)** $\operatorname{tg}(-1{,}2)$
f) $\operatorname{tg} 5{,}943$ **g)** $\operatorname{tg} 1{,}052$ **h)** $\operatorname{ctg}(-\pi)$ **i)** $\operatorname{ctg}\frac{2}{5}\pi$ **k)** $\operatorname{ctg} 1{,}8\,\pi$
l) $\operatorname{ctg} 0{,}05$ **m)** $\operatorname{ctg}\sqrt{2}$ **n)** $\operatorname{ctg} 3$ **o)** $\operatorname{ctg}(-1{,}32)$ **p)** $\operatorname{ctg}(-0{,}48\,\pi)$!

10. Suche die Logarithmen der Beträge der folgenden Funktionswerte auf:

a) $\sin \frac{5}{9}\pi$ **b)** $\sin 0{,}1\,\pi$ **c)** $\sin 6{,}1$ **d)** $\cos 1\frac{3}{4}\pi$ **e)** $\cos(-2{,}4)$

f) $\cos 3{,}515$ **g)** $\operatorname{tg} \frac{13}{20}\pi$ **h)** $\operatorname{tg} \frac{\pi}{100}$ **i)** $\operatorname{ctg} 5{,}5$ **k)** $\operatorname{ctg}(-0{,}721)$!

11. Gib die Winkel x zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß an:

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\sin x = 0{,}6428$ **c)** $\sin x = 0{,}9736$

d) $\sin x = -0{,}1951$ **e)** $\sin x = 3{,}23 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

g) $\cos x = 0{,}4067$ **h)** $\cos x = -0{,}8805$ **i)** $\cos x = 0{,}2190$

k) $\operatorname{tg} x = 1$ **l)** $\operatorname{tg} x = 0{,}7265$ **m)** $\operatorname{tg} x = -3{,}630$

n) $\operatorname{tg} x = -0{,}5924$ **o)** $\operatorname{tg} x = 5{,}18 \cdot 10^{-5}$ **p)** $\operatorname{ctg} x = 0$

q) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **r)** $\operatorname{ctg} x = 2{,}762$ **s)** $\operatorname{ctg} x = -0{,}5080$!

12. Welche Winkel x, im Bogenmaß gemessen, ergeben sich aus den folgenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen:

a) $\lg \sin x = 0.8495 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg \sin x = 0.7990 - 3$, $(\sin x > 0)$

c) $\lg \sin x = 0.5686 - 6$, $(\sin x > 0)$ **d)** $\lg \cos x = 0.9730 - 1$, $(\cos x > 0)$

e) $\lg |\cos x| = 0.8026 - 1$, $(\cos x < 0)$ **f)** $\lg \cos x = 0.9278 - 1$, $(\cos x > 0)$

g) $\lg \operatorname{tg} x = 0.0762$, $(\operatorname{tg} x > 0)$ **h)** $\lg \operatorname{tg} x = 0.8699 - 2$, $(\operatorname{tg} x > 0)$

i) $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0.0456$, $(\operatorname{ctg} x < 0)$ **k)** $\lg \operatorname{ctg} x = 0.7741 - 1$, $(\operatorname{ctg} x > 0)$?

II. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen

13. Untersuche die Symmetrieverhältnisse (Achsensymmetrie und zentrische Symmetrie) bei den Kurven der trigonometrischen Funktionen in den folgenden Bereichen:

a) $0 \cdots 2\pi$ **b)** $0 \cdots \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \cdots +\frac{\pi}{2}$!

14. Unter Benutzung der Formeln (1) und (2) ist zu zeigen, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die Periode π besitzen!

15. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

a) $\sin 5\pi$ **b)** $\sin 7\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin(-15{,}4\,\pi)$ **d)** $\sin 10{,}5$

e) $\cos(-3\pi)$ **f)** $\cos 2\frac{1}{2}\pi$ **g)** $\cos 100\,\pi$ **h)** $\cos 6{,}53$

i) $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi$ **k)** $\operatorname{tg} 1{,}7\,\pi$ **l)** $\operatorname{tg}(-2\frac{1}{12}\pi)$ **m)** $\operatorname{tg} 3{,}487$

n) $\operatorname{ctg}(-\frac{10}{9}\pi)$ **o)** $\operatorname{ctg} 14\,\pi$ **p)** $\operatorname{ctg} 14$ **q)** $\operatorname{ctg}(-3{,}206)$!

16. Suche die Logarithmen zu den Beträgen der Funktionen der Aufgaben 15 a) bis q)!

17. Gib die allgemeinen Lösungen für die folgenden Funktionswerte im Bogenmaß an:

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\sin x = 0{,}5052$

d) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **e)** $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\cos x = 0{,}9340$

g) $\operatorname{tg} x = 2+\sqrt{3}$ **h)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **i)** $\operatorname{tg} x = 5{,}823$

k) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **l)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - 2$ **m)** $\operatorname{ctg} x = 0{,}1341$!

18. Gib die allgemeinen Lösungen zu den folgenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß an:

a) $\lg \sin x = 0.7859 - 3$, $(\sin x > 0)$
b) $\lg |\sin x| = 0.9750 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0.8436 - 2$, $(\cos x > 0)$
d) $\lg |\cos x| = 0.8436 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \operatorname{tg} x = 0.4189 - 1$, $(\operatorname{tg} x > 0)$
f) $\lg |\operatorname{tg} x| = 0.7732$, $(\operatorname{tg} x < 0)$
g) $\lg \operatorname{ctg} x = 0.5066 - 1$, $(\operatorname{ctg} x > 0)$
h) $\lg |\operatorname{ctg} x| = 1.1178$, $(\operatorname{ctg} x < 0)$

III. Sinus- und Kosinusskala

19. Stelle die Funktion $\sin x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz geometrisch dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt! Man nennt diese Darstellung eine Verstreckung der Sinuskurve. Diese Darstellung ist beim Interpolieren vorteilhafter verwendbar als die übliche Darstellung der Sinusfunktion in einem xy-Achsenkreuz, bei dem beide Achsen gleichmäßig geteilt sind.

20. Stelle die Funktion $\cos x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung von $0°$ bis $90°$ und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!

8. Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

a) Sinus- und Kosinusfunktion einer Winkelsumme $x + y$

Folgende Aufgabe sei gestellt: Gegeben sind die Werte der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion für zwei Argumente x und y. Es sollen die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion der Summe der Argumente, $\sin(x+y)$ bzw. $\cos(x+y)$, durch die Sinus- und Kosinuswerte der Einzelargumente, $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ und $\cos y$, dargestellt werden.

Lösung: Die Aufgabe werde zunächst unter der Bedingung gelöst, daß die (positiven) Winkel x und y im I. oder II. Quadranten liegen, ihre Summe aber kleiner als π bleibt. x und y seien Winkel eines schiefwinkligen Dreiecks. Nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck ist dann der dritte Winkel $\pi-(x+y)=z$. Im Projektionssatz, Formel 12 auf Seite 40,

$$\begin{aligned} b &= c\cos x + a\cos z, \\ c &= a\cos y + b\cos x, \end{aligned}$$

können wir nach dem Sinussatz a durch $k\cdot\sin x$, b durch $k\cdot\sin y$, c durch $k\cdot\sin z$ ersetzen. Dies ergibt, da der Proportionalitätsfaktor k durch Dividieren wegfällt,

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin z\,\cos x + \sin x\,\cos z\,, \\ \sin z &= \sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Benutzung der Quadrantenrelation $\sin(\pi-u)=\sin u$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung von (23)

$$\boldsymbol{\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y}\,. \tag{24}$$

Eine entsprechende Formel läßt sich für den Kosinus der Winkelsumme $x+y$ ableiten. Aus der ersten Gleichung von (23) berechnen wir zunächst $\sin x\cos z$,

$$\begin{aligned} \sin x\cos z &= \sin y - \sin z\cos x \\ &= \sin y - \cos x\,(\sin x\cos y + \sin y\cos x) \\ &= -\cos x\sin x\cos y + \sin y\,(1-\cos^2 x) \\ &= -\cos x\sin x\cos y + \sin y\sin^2 x\,. \end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten durch $\sin x$, so ergibt sich

$$\cos z = -\cos x \cos y + \sin x \sin y\,.$$

Ersetzen wir den Winkel z durch $\pi - (x + y)$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{\cos (x + y) = \cos x \ \cos y - \sin x \ \sin y}\,. \tag{25}$$

Die Formeln (24) und (25) bilden die **Additionstheoreme** der Sinus- und der Kosinusfunktion. Das zu ihrer Ableitung benutzte Verfahren heißt „Dreiecksmethode".

Wenn wir in den Formeln (24) und (25) x statt y schreiben, so bekommen wir die **Doppelwinkelformeln**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sin 2x} &\boldsymbol{= 2 \sin x \ \cos x}, \\ \boldsymbol{\cos 2x} &\boldsymbol{= \cos^2 x - \sin^2 x}. \end{aligned} \tag{26}$$

Diese Formeln können wir auch als **Halbwinkelformeln** schreiben, wenn wir $2x$ durch x, also x durch $\frac{x}{2}$ ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sin x} &\boldsymbol{= 2 \sin \frac{x}{2} \ \cos \frac{x}{2}}, \\ \boldsymbol{\cos x} &\boldsymbol{= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme und der Doppelwinkelformeln leiten wir die Formeln für die Sinus- und Kosinusfunktion des dreifachen Winkels ab. Es ist

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin (x + 2x) &= \sin x \ \cos 2x + \cos x \ \sin 2x \\ &= \sin x \ \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \ \cos^2 x \\ &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \\ \cos 3x = \cos (x + 2x) &= \cos x \ \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \ \cos x - 2 \sin^2 x \ \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \ \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\,. \end{aligned}$$

b) Erweiterung des Gültigkeitsbereiches für die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion

Die Winkel x und y seien positiv und kleiner als π, die Summe $x + y$ aber größer als π. Um die Formeln (24) und (25) anwenden zu können, setzen wir

$$x' = \pi - x, \quad y' = \pi - y\,.$$

Dann wird

$$x' + y' = 2\pi - x - y < \pi\,.$$

Für x' und y' sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Gleichungen (24) und (25) bewiesen sind. Wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned} \sin (2\pi - x - y) &= \sin (\pi - x) \ \cos (\pi - y) + \cos (\pi - x) \ \sin (\pi - y) \\ \cos (2\pi - x - y) &= \cos (\pi - x) \ \cos (\pi - y) - \sin (\pi - x) \ \sin (\pi - y)\,. \end{aligned}$$

Auf Grund bestehender Quadrantenrelationen setzen wir

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - x - y) &= -\sin(x+y), \quad & \cos(2\pi - x - y) &= \cos(x+y) \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - y) &= \sin y, & \cos(\pi - y) &= -\cos y \end{aligned}$$

und erhalten wieder die Formeln (24) und (25).

Beweis der Allgemeingültigkeit der Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion:

Man kann eine ganze Zahl k immer so bestimmen, daß $x + k\pi$ zwischen 0 und π liegt. Ist beispielsweise $x = \frac{10\pi}{3}$, so liegt $x - 3\pi = \frac{\pi}{3}$ zwischen 0 und π. Wie groß ist in diesem Falle k? Welchem Winkel im Gradmaß entspricht $\frac{10\pi}{3}$?

Für jedes beliebige x und jedes y zwischen 0 und π gilt also

$$\begin{aligned} \sin(x + y + k\pi) &= \sin(x + k\pi)\cos y + \cos(x + k\pi)\sin y \\ \cos(x + y + k\pi) &= \cos(x + k\pi)\cos y - \sin(x + k\pi)\sin y. \end{aligned} \tag{28}$$

Ist k eine gerade Zahl, so setzen wir $k = 2k'$ und erhalten wegen der Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion

$$\begin{aligned} \sin(x + y + k\pi) &= \sin(x + y + 2k'\pi) = \sin(x + y) \\ \cos(x + y + k\pi) &= \cos(x + y + 2k'\pi) = \cos(x + y) \\ \sin(x + k\pi) &= \sin(x + 2k'\pi) = \sin x \\ \cos(x + k\pi) &= \cos(x + 2k'\pi) = \cos x. \end{aligned}$$

Ist k eine ungerade Zahl, so setzen wir $k = 2k' + 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sin(x + y + k\pi) &= \sin(x + y + \pi + 2k'\pi) = \sin(x + y + \pi) = -\sin(x + y) \\ \cos(x + y + k\pi) &= \cos(x + y + \pi + 2k'\pi) = \cos(x + y + \pi) = -\cos(x + y) \\ \sin(x + k\pi) &= \sin(x + \pi + 2k'\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + k\pi) &= \cos(x + \pi + 2k'\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ergeben sich aus den Gleichungen (28) wiederum die Formeln (24) und (25). Nach dem gleichen Prinzip beweisen wir die Gültigkeit der Additionstheoreme für alle x und alle y. Führe die Rechnung durch und begründe die einzelnen Schritte!

Die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion gelten für zwei beliebige (positive oder negative) Winkel x und y. Wir können daher y durch $-y$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{aligned} \tag{29}$$

Welche Beziehungen sind in diesen Gleichungen ausgesprochen? Welche Relationen sind bei ihrer Herleitung zu benutzen?

Zusammenstellung der Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{aligned} \tag{I}$$

c) Summe und Differenz zweier Sinus- bzw. Kosinusfunktionen

Während der vorige Abschnitt von Funktionen der Winkelsummen und Winkeldifferenzen handelte, sollen jetzt Formeln für die Summen und die Differenzen der Winkelfunktionen zusammengestellt werden. Diese ergeben sich als Folgerungen aus den Additionstheoremen (I).

Wenn wir die Gleichung (24) oder (25) und eine der Gleichungen des Systems (29) addieren bzw. subtrahieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(x+y)+\sin(x-y) &= 2\sin x\cos y \\ \sin(x+y)-\sin(x-y) &= 2\cos x\sin y \\ \cos(x+y)+\cos(x-y) &= 2\cos x\cos y \\ \cos(x+y)-\cos(x-y) &= -2\sin x\sin y\,. \end{aligned} \tag{II}$$

Schreiben wir x' und y' anstatt x bzw. y und setzen wir

$$x'+y'=x$$
$$\text{und } x'-y'=y\,,$$

so entstehen aus dem System (II) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin x+\sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x-\sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x-\cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,. \end{aligned} \tag{III}$$

Welche Beziehungen werden durch das Formelsystem (III) ausgesprochen?

d) Die Additionstheoreme der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Additionstheoreme der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion finden wir als Folgerungen aus den Additionstheoremen der Sinus- und der Kosinusfunktion. Dividieren wir die Gleichung (24) durch die Gleichung (25), so ergibt sich

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}\,.$$

Wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch das Produkt $\cos x\cos y$ dividieren und berücksichtigen, daß der Quotient von Sinus und Kosinus ein und desselben Winkels den Tangens dieses Winkels ergibt, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\,. \tag{30}$$

Dividieren wir die Gleichung (25) durch die Gleichung (24) und formen wir entsprechend um, so ergibt sich

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x}\,. \tag{31}$$

Führe die Rechnung durch!

Setzen wir in den Gleichungen (30) und (31) $-y$ an Stelle von y, so erhalten wir als Formeln für Tangens und Kotangens der Winkeldifferenz

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}.$$

Welche Relationen wurden dabei benutzt?

Zusammenstellung der Additionstheoreme für die Tangens- und Kotangensfunktion:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\\ \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.\end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Aufgaben

I. Sinus- und Kosinusfunktion

1. Leite die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion am Einheitskreis ab („Einheitskreismethode")!
   Anleitung: Zeichne spezielle Figuren für die folgenden Fälle:
   a) $x + y$ im I. Quadranten (Abb. 63),
   b) x, y im I., $x + y$ im II. Quadranten,
   c) x oder y und $x + y$ im II. Quadranten!

2. Leite die Formeln für $\sin(x-y)$ und $\cos(x-y)$ nach der Einheitskreismethode ab (Abb. 64)!

3. Leite die Formeln für $\sin(x-y)$ und $\cos(x-y)$ nach der Dreiecksmethode ab (Abb. 65)!

4. Leite aus Abb. 66 das Additionstheorem der Sinusfunktion ab!
   Anleitung: Gehe davon aus, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke PAC und PBC gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks PAB ist, und benutze, um Winkel einzuführen, entsprechende Formeln für den Flächeninhalt!

5. Zeichne eine entsprechende Figur wie die der vorigen Aufgabe für den Fall, daß ein Winkel stumpf ist, und leite daraus die Additionsformel der Sinusfunktion ab!

6. Leite die Formel für $\sin(\alpha - \beta)$ aus einer Figur ab, welche der der Aufgabe 4 entspricht!

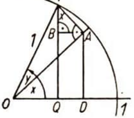


Abb. 63

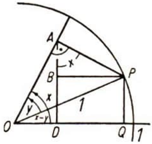


Abb. 64

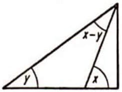


Abb. 65

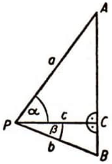


Abb. 66

7. Bestimme das Additionstheorem der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion unter Verwendung der Quadrantenbeziehung $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$!

8. Stelle die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion als reine Beziehungen zwischen Sinus- bzw. Kosinusfunktionen dar!

9. Leite die Formeln $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ und $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ aus dem Additionstheorem (III) ab!

10. Berechne $\sin(x + y)$ und $\sin(x - y)$ aus $\sin x$ und $\sin y$!

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin y = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ d) $\sin x = 0{,}8$, $\sin y = 0{,}3$

11. Berechne $\cos(x + y)$ und $\cos(x - y)$ aus $\cos x$ und $\cos y$!

a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos y = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ c) $\cos x = -\frac{1}{4}$, $\cos y = \frac{3}{4}$ d) $\cos x = -0{,}2$, $\cos y = 0{,}9$

12. Leite die Mollweideschen Gleichungen aus dem Sinussatz ab!

II. Tangens- und Kotangensfunktion

13. Leite aus den Formeln für $\sin(x - y)$ und $\cos(x - y)$ die Tangens- und Kotangensfunktion der Winkeldifferenz ab!

14. Bestimme das Additionstheorem der Kotangensfunktion aus dem der Tangensfunktion!

15. Berechne $\operatorname{tg}(x + y)$ und $\operatorname{tg}(x - y)$ aus $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{tg} y$!

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} y = 1$ b) $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} y = -1$ d) $\operatorname{tg} x = 3$, $\operatorname{tg} y = 2$

16. Berechne $\operatorname{ctg}(x + y)$ und $\operatorname{ctg}(x - y)$ aus $\operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{ctg} y$!

a) $\operatorname{ctg} x = 1$, $\operatorname{ctg} y = 2 + \sqrt{3}$ b) $\operatorname{ctg} x = -1$, $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$ c) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - 2$, $\operatorname{ctg} y = \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{ctg} x = -10$, $\operatorname{ctg} y = 4$

17. Leite Formeln für $\operatorname{tg} 2x$ und $\operatorname{ctg} 2x$ ab!

9. Goniometrie

a) Goniometrische Formeln

Als **Trigonometrie** wurde bisher der Zweig der Mathematik bezeichnet, mit dessen Hilfe man aus Zahlenangaben für die Größen einzelner Seiten und Winkel eines Dreiecks die übrigen Stücke berechnet. Demgegenüber wird die Lehre von Eigenschaften und Zusammenhängen trigonometrischer Funktionen, die nicht in unmittelbarer Beziehung zur Dreiecksberechnung stehen und ohne Beschränkung der Winkelgröße gelten, auch **Goniometrie** genannt. Gewöhnlich wird beides unter dem Begriff Trigonometrie zusammengefaßt; man versteht darunter allgemein die Lehre von den trigonometrischen Funktionen. Sie schließt sowohl die

Untersuchung der rein mathematischen Beziehungen der trigonometrischen Funktionen (Goniometrie) als auch deren Anwendung bei der Berechnung des Dreiecks, Vierecks usw. ein.

Die wichtigsten goniometrischen Formeln haben wir bereits abgeleitet. Es gehören dazu:

die Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens ein und desselben Winkels,
die Quadrantenbeziehungen,
die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen positiver und negativer Winkel,
die Formeln, welche die Periodizität angeben,
die Additionstheoreme und
die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen des zweifachen, dreifachen usw. Winkels und solchen des einfachen Winkels.

Stelle alle im Text und in den Aufgaben aufgetretenen goniometrischen Formeln zusammen!

b) Goniometrische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, welche die Unbekannte x im Argument trigonometrischer Funktionen enthalten, heißen goniometrische Gleichungen. Zu ihrer Lösung stehen zwei Verfahren zur Verfügung.

Zeichnerische Lösung

In einfachen Fällen, z. B. für die goniometrische Gleichung

$$\sin x + \sin\left(x + \tfrac{1}{3}\pi\right) - 1{,}5 = 0,$$

stellt man die als Summanden auftretenden Funktionen $u = u(x)$, $v = v(x)$ usw. geometrisch dar und zeichnet dazu die Funktion $y = u + v$. Die y-Werte werden rechnerisch durch algebraische Addition oder geometrisch durch Addition bzw. Subtraktion der Ordinaten zum gleichen Wert x gefunden. Die resultierende Funktion $y = f(x) = u + v$ stellt die Überlagerung der Funktionskurven u und v dar. Man bestimmt die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = u(x) + v(x)$ und hat damit die Lösungen der gegebenen goniometrischen Gleichung (siehe das 1. Beispiel zum Typ 3 goniometrischer Gleichungen).

Rechnerische Lösung

Man formt die Bestimmungsgleichung, z. B. die goniometrische Gleichung $\sin\left(x + \frac{1}{12}\pi\right) \cdot \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$, mit Hilfe goniometrischer Formeln um (siehe das 2. Beispiel zum Typ 3 goniometrischer Gleichungen). Ziel ist, eine Gleichung mit nur einer trigonometrischen Funktion $f(x)$ des unbekannten Argumentes x zu erhalten. Dabei steht f als Funktionszeichen für eine der trigonometrischen Funktionen sin, cos, tg oder ctg. Die Gleichung verwandelt man durch die Substitution $f(x) = z$ in eine algebraische Gleichung für z, die nach z aufgelöst wird. Aus $f(x) = z$ findet man die Werte für den Winkel x.

Wir unterscheiden folgende vier Typen goniometrischer Gleichungen:

Typ 1. Bestimmungsgleichungen, die nur eine trigonometrische Funktion des Argumentes x enthalten.

Beispiel: $\sin^2 x - 0{,}25 = 0$.

Bei der rechnerischen Lösung setzt man $f(x) = z$, löst die Gleichung nach z auf und findet aus den errechneten z-Werten die Winkelwerte x.

Typ 2. Bestimmungsgleichungen, die mehrere trigonometrische Funktionen des Argumentes x enthalten.

Von diesem Typ soll die Bestimmungsgleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ näher behandelt werden.

Die Gleichung wird für spezielle Werte a, b und c zeichnerisch oder rechnerisch gelöst. Da $\sin x$ und $\cos x$ Zahlen zwischen -1 und $+1$ sein müssen, ist die Gleichung nicht für alle Werte a, b und c lösbar.

Es seien die folgenden Lösungsverfahren genannt:

1. $\sin x$ und $\cos x$ müssen sowohl die Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ als auch gleichzeitig die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erfüllen. Daraus ergibt sich ein zeichnerisches Lösungsverfahren. Setzen wir $\sin x = v$ und $\cos x = u$, so lassen sich u und v als Schnittpunkte der Geraden $av + bu + c = 0$ mit dem Einheitskreis $u^2 + v^2 = 1$ in einem uv-Achsenkreuz bestimmen.
2. Setzt man $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ und $\sin x = z$, so erhält man eine Wurzelgleichung, die auf eine quadratische Gleichung für z führt.
3. Die quadratische Gleichung umgeht man, wenn man einen Hilfswinkel $\varkappa$ durch die Gleichung

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varkappa = \frac{\sin \varkappa}{\cos \varkappa}, \qquad (0° < \varkappa < 90°),$$

einführt. Man erhält dann

$$\sin x + \frac{\sin \varkappa \cos x}{\cos \varkappa} = -\frac{c}{a} \qquad \text{oder} \qquad \sin(x + \varkappa) = \frac{-c \cdot \cos \varkappa}{a}.$$

Bei einer Diskussion der Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ kommt es darauf an festzustellen, für welche Werte a, b und c sie überhaupt lösbar ist.
Aus den angeführten Lösungsmethoden findet man die Beziehungen zwischen den Konstanten als Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung.

Typ 3. Bestimmungsgleichungen, die trigonometrische Funktionen verschiedener Argumente, aber mit einer Unbekannten enthalten.
Bei der rechnerischen Methode formt man zuerst mit Hilfe der Additionstheoreme so um, daß man eine Gleichung vom Typ 1 erhält, und verfährt dann, wie bei diesem angegeben.

1. Beispiel: $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1{,}5 = 0$.

Zeichnerische Lösung

Die zugehörige Funktion ist $y = f(x) = \sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1{,}5$. Man überlagert einander die Funktionskurven $u = \sin x$ und $v = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ und verschiebt die resultierende Kurve $\bar{y} = u + v$ parallel zur y-Achse um $-1{,}5$. Die Schnittpunkte der transformierten Kurve $y = \bar{y} - 1{,}5 = u + v - 1{,}5$ mit der x-Achse (oder der Geraden $y = 0$) ergeben die Lösungen der Bestimmungsgleichung $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1{,}5 = 0$.

Zeichnerisch einfacher ist es jedoch, die resultierende Kurve $\bar{y}$ fest stehen zu lassen und ihre Schnittpunkte mit der Parallelen zur x-Achse $y = +1{,}5$ zu bestimmen, d. h. das xy-Achsenkreuz parallel zu sich in der y-Richtung um $+1{,}5$ bei feststehender Funktionskurve zu verschieben (Abb. 67).

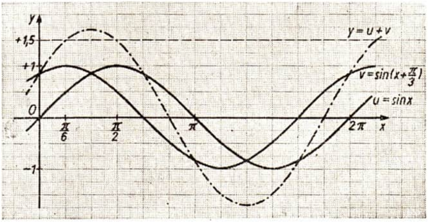


Abb. 67

Führe die Parallelverschiebung der Kurve $\bar{y} = f_1(\bar{x})$ bei feststehendem Achsenkreuz und die Parallelverschiebung des Achsenkreuzes bei feststehender Funktionskurve praktisch durch! Warum sind beide Verfahren gleichwertig?

2. Beispiel: $\sin(x + \frac{1}{12}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$.

Rechnerische Lösung

Man setzt $\quad x + \frac{1}{12}\pi = \frac{u+v}{2} \quad$ und $\quad x - \frac{1}{4}\pi = \frac{u-v}{2}$.

Daraus folgt $\quad u = 2x - \frac{1}{6}\pi, \quad v = \frac{1}{3}\pi$.

Unter Benutzung der Formeln (III) erhält man

$$\sin(2x - \tfrac{1}{6}\pi) + \sin\tfrac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$$

oder

$$\sin(2x - \tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x_1 - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{3}\pi \qquad\qquad 2x_2 - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{2}{3}\pi$$

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\pi \qquad\qquad x_2 = \tfrac{5}{12}\pi.$$

Proben:

$$\sin\tfrac{1}{3}\pi \cdot \cos 0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad\qquad \sin\tfrac{1}{2}\pi \cdot \cos\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sonderfälle dieses Typs sind Bestimmungsgleichungen, welche trigonometrische Funktionen des doppelten oder dreifachen Argumentes neben solchen des einfachen enthalten.

Man benutzt in diesem Falle beim rechnerischen Lösungsverfahren zur Umformung die Doppelwinkelformeln bzw. diejenigen Formeln, die die trigonometrischen Funktionen des dreifachen Arguments auf solche des einfachen zurückführen.

Typ 4. Systeme goniometrischer Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y.

Beispiel: $x+y=\frac{1}{3}\pi, \qquad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{3}{4}.$

Unter Anwendung goniometrischer Formeln sucht man beim rechnerischen Verfahren zunächst eine Unbekannte durch die andere zu ersetzen, so daß man eine goniometrische Gleichung mit einer Unbekannten erhält. Diese wird dann weiter so umgeformt, daß eine Gleichung vom Typ 1 entsteht.

Aufgaben

I. Goniometrische Formeln

1. Beweise die folgenden Formeln:

a) $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ **b)** $\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

c) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$!

2. Beweise die folgenden Formeln:

a) $\sin(30^\circ+\alpha)=\cos\alpha-\sin(30^\circ-\alpha)$ **b)** $\cos(30^\circ+\alpha)=\cos(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha$!

Zeige, daß man mit Hilfe dieser Formeln aus den Sinus- und Kosinuswerten der Winkel bis zu 30° die Sinus- und Kosinuswerte aller größeren (spitzen) Winkel finden kann!

3. Beweise die Formeln

a) $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)$, **b)** $\operatorname{tg}(30^\circ+2\alpha)=\frac{1}{2}[\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)-\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)]$!

4. Beweise die nachstehenden Formeln:

a) $\sin^2 x-\sin^2 y=\cos^2 y-\cos^2 x=\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$

b) $\cos^2 x-\sin^2 y=\cos^2 y-\sin^2 x=\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$!

II. Goniometrische Gleichungen mit einer Funktion des Argumentes x

5. Löse die im Text gegebenen beiden ersten Beispiele zeichnerisch oder rechnerisch!

6. Welche Winkel genügen den folgenden Gleichungen:

a) $\sin^2 x=0{,}81$, **b)** $\cos^2 x=\frac{1}{3}$, **c)** $\operatorname{tg}^2 x=3$, **d)** $\operatorname{ctg}^2 x=1{,}5$?

III. Goniometrische Gleichungen mit mehreren Funktionen des Argumentes x. Die Bestimmungsgleichung $a\sin x+b\cos x+c=0$

7. Löse die goniometrische Gleichung $(1+\sin\alpha)\cos\alpha-\frac{10}{9}=0$ durch eine Zeichnung!

Anleitung: Forme das Produkt zunächst in eine Summe trigonometrischer Funktionen um!

8. Zeichne die Funktion $y=f(x)=\sin x+\cos x+c$ für $c=0$! Für welche Werte von c besitzt die Funktion a) zwei Nullstellen, b) eine Nullstelle, c) keine Nullstelle im Bereich $0\leqq x<2\pi$?

9. Zeichne die Funktion $y=\sin x-\cos x+c$ für $c=0$ und untersuche wie vorher die Abhängigkeit der Zahl der Nullstellen vom Wert c!

10. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch:

a) $3\sin x-4\cos x=0$ **b)** $\sin x=-2\cos x$!

11. Löse die Gleichung $a\sin x+b\cos x+c=0$ für die folgenden Sonderfälle:

a) $a=c$ **b)** $b=c$ **c)** $a=-c$ **d)** $b=-c$!

Untersuche, für welche Wertebereiche der Konstanten a, b und c die Gleichung lösbar ist!

12. Untersuche, welchen Einfluß eine Veränderung der Konstanten a, b und c in der Funktion $y = f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ auf Gestalt und Lage der Funktionskurve $y = f(x)$ ausübt, wenn man von dem Sonderfall der Aufgabe 8 ausgeht! Welche Hinweise ergeben sich daraus für die Lösbarkeit der zugehörigen Bestimmungsgleichung

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c = 0$$

in Abhängigkeit von den Konstanten a, b und c?

Anleitung: Betrachte zuerst die Veränderung in der Gestalt der Kurve, wenn a, von 1 ausgehend, wächst! In welchen Bereichen darf c liegen, damit die Gleichung lösbar ist? Wie ändert sich die Kurve, wenn a von 1 bis 0 abnimmt? Berücksichtige auch negative Werte von a! Führe die Untersuchung ebenso für b durch!

13. Führe die Diskussion der Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ nach dem zeichnerischen Lösungsverfahren durch (Methode 1 des Textes)! Welche Bedingungen für a, b und c leiten sich aus der Forderung ab, daß die Gerade den Kreis **a)** in zwei Punkten schneidet, **b)** in einem Punkte berührt, **c)** verfehlt?

14. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch:

a) $2 \cos x + \frac{4}{3} \sin x - 1 = 0$ **b)** $\sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$!

15. Stelle in der Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$

a) die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion, **b)** die Sinusfunktion durch die Kosinusfunktion dar und diskutiere die sich ergebende Gleichung (Methode 2 des Textes)! Vergleiche das Ergebnis mit der Lösung der Aufgabe 13!

16. Diskutiere die Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ unter Benutzung eines Hilfswinkels $\varkappa$, der durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{b}{a}$ eingeführt wird (Methode 3 des Textes)!

17. Diskutiere die Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ unter Verwendung eines Hilfswinkels $\bar{\varkappa}$, der durch die Beziehung $\operatorname{ctg} \bar{\varkappa} = \frac{a}{b}$ eingeführt wird!

18. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\sin x + 1{,}75 \cos x - 1{,}574 = 0$ **b)** $5 \sin x + 4 \cos x = 6{,}25$

c) $\sin x - 0{,}75 \cos x - 0{,}49 = 0$ **d)** $3 \sin x = 1 + 4 \cos x$!

IV. Goniometrische Gleichungen mit Funktionen verschiedener Argumente, aber mit einer Unbekannten

19. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch:

a) $\sin(x^\circ + 54^\circ) - \sin(x^\circ - 12^\circ) - 0{,}5933 = 0$

b) $\cos(x^\circ - 18^\circ) + \cos(x^\circ - 78^\circ) - 1{,}5 = 0$

c) $\sin(x^\circ + 7^\circ) + \cos(x^\circ - 67^\circ) - 1{,}6 = 0$

d) $\sin(x - \frac{1}{12}\pi) - \sin(x - \frac{1}{4}\pi) - 0{,}5176 = 0$!

20. Welche Winkel genügen den nachstehenden Gleichungen:

a) $\sin(x^\circ + 10^\circ) \cdot \sin(x^\circ - 40^\circ) = 0{,}75$ **b)** $\cos(x^\circ + 20^\circ) \cdot \cos(x^\circ - 55^\circ) = 0{,}4918$

c) $\sin(x - \frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0{,}5$ **d)** $\cos(x + \frac{1}{12}\pi) \cdot \sin(x - \frac{1}{12}\pi) = 0{,}1834$?

21. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\sin 2x = \cos x$ **b)** $\sin 2x = 1{,}1 \cos x$ **c)** $\cos 2x = \frac{2}{3} \cos x$

d) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$ **e)** $\operatorname{tg} 2x = 3 \sin x$ **f)** $5 \cos 2x = 4 \sin x$!

22. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $4\cos^2 x - \sin^2 x = 1{,}5 \sin 2x$ **b)** $\sin 2x + \frac{3}{2}(\sin x + \cos x) = 0$

c) $\sin x - \cos x = 1{,}18 \sin 2x$ **d)** $2\sqrt{3} \sin 2x - 16 \sin^2 x + 1 = 0$!

23. Löse die nachstehenden Gleichungen:

a) $\sin 3x - 2\sin x = 0$ **b)** $\sin 3x = \frac{3}{2} \sin x$ **c)** $\cos x = -\cos 3x$

d) $5 \sin 3x = 7 \sin 2x$ **e)** $4 \sin x \sin 3x = 1$ **f)** $2 \sin 2x = 3 \cos 3x$!

24. Löse die nachstehenden Gleichungen:

a) $\dfrac{3(\operatorname{ctg} x - 1)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = 5(\cos x - \sin x)$ **b)** $\dfrac{12}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 5 \cos 2x (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)$!

V. Goniometrische Gleichungen mit zwei Unbekannten

25. Löse das Beispiel zu Typ 4 des Textes!

26. Welche Winkel genügen den beiden Gleichungen?

a) $\sin x^\circ + \sin y^\circ = 0{,}7272$; $x^\circ + y^\circ = 43^\circ$

b) $\cos x^\circ - \cos y^\circ = 0{,}675$; $x^\circ - y^\circ = 59{,}93^\circ$

c) $\operatorname{tg} x^\circ + \operatorname{tg} y^\circ = 2{,}75$; $x^\circ + y^\circ = 102{,}75^\circ$

d) $\operatorname{ctg} y^\circ - \operatorname{ctg} x^\circ = 0{,}91$; $x^\circ - y^\circ = 23{,}1^\circ$

27. Welche Winkel genügen den beiden Gleichungen?

a) $\sin x^\circ : \sin y^\circ = 5:4$; $x^\circ + y^\circ = 60^\circ$ **b)** $\sin y^\circ : \sin x^\circ = 3:4$; $x^\circ - y^\circ = 6{,}38^\circ$

c) $\operatorname{tg} x^\circ \cdot \operatorname{tg} y^\circ = 1{,}41$; $x^\circ + y^\circ = 93{,}25^\circ$ **d)** $\operatorname{ctg} x^\circ : \operatorname{ctg} y^\circ = 11:20$; $x^\circ - y^\circ = 16{,}16^\circ$

B. Körperdarstellung und Körperberechnung

I. Einleitung

1. Geschichtlicher Überblick

In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, wie wir Körper darstellen und berechnen können. Wir werden zu diesem Zweck zwei Teilgebiete der Mathematik, die darstellende Geometrie und die Stereometrie (Körperberechnung), in ihren Grundzügen kennenlernen.
In der Stereometrie werden allgemein von räumlichen Gebilden, speziell von Körpern, Größe und Form untersucht. Dabei werden verschiedene Gebilde miteinander verglichen oder miteinander in Beziehung gesetzt.
Die altgriechischen Mathematiker, die die elementare Geometrie sehr gut beherrschten, kannten schon viele Ergebnisse der Stereometrie. So enthalten zum Beispiel die Werke Euklids (um 300 v. u. Z.) eine vollständige Lehre der elementaren Stereometrie. Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) fand einen Weg, den Inhalt gekrümmter Flächen und das Volumen von Körpern mit gekrümmter Oberfläche zu berechnen. Seither war es also auch möglich, das Kugelvolumen und die Kugeloberfläche zu bestimmen. Die Griechen lösten die weitaus meisten mathematischen Probleme geometrisch; so bestimmten sie zum Beispiel die Wurzeln einer Gleichung nicht nach der heute geläufigen Methode, sondern auf geometrischem Wege. Die von den griechischen Mathematikern erzielten Ergebnisse waren für Jahrhunderte die Grundlage der Mathematik. Nur in der Algebra gelangen im Mittelalter den Arabern Fortschritte, die über die Erkenntnisse der Griechen hinausgingen.
Mit der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts begann eine gewaltige Epoche moderner Naturforschung. „Es war die größte progressive Umwälzung, die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit. ... Leonardo da Vinci war nicht nur ein großer Maler, sondern auch ein großer Mathematiker, Mechaniker und Ingenieur, dem die verschiedensten Zweige der Physik wichtige Entdeckungen verdanken; Albrecht Dürer war Maler, Kupferstecher, Bildhauer, Architekt und erfand außerdem ein System der Fortifikation, das schon manche der weit später ... wiederaufgenommenen Ideen enthält.“[1] Auch im Hinblick auf die Entwicklung in der Geometrie sind besonders der italienische Künstler Leonardo da Vinci (1452 bis 1519) und der deutsche Künstler Albrecht Dürer (1471 bis 1528) zu nennen. Die von den italienischen

1) Friedrich Engels: Dialektik der Natur. Berlin: Dietz Verlag 1952, Seite 8.

Mathematikern ihrer Epoche wieder aufgegriffene und erweiterte Methode der Konstruktion mit konstanter Zirkelöffnung wandten sie mit Erfolg in ihrem Fache an. In seinem Buch *Vnderweysung der messung mit dem zirckel vñ richtscheyt in Linien ebnen vnnd gantzen corporen* (erstmalig erschienen im Jahre 1525) beschreibt Dürer viele dieser Konstruktionen (unter „messung" versteht er die Geometrie). Während vor Dürer und auch noch von seinen Zeitgenossen Näherungskonstruktionen für exakt gehalten wurden, ist er der erste, der sich des Charakters dieser Konstruktionen voll bewußt ist. An vielen Stellen in seiner Schrift weist er ausdrücklich auf die Näherung hin. Am Schluß seines Werkes gibt Dürer zwei Methoden zur Anfertigung perspektivisch richtiger Abbildungen an. Diese von ihm entwickelten Methoden beruhen auf den Ergebnissen, die von den Wissenschaftlern und Künstlern der italienischen Renaissance erzielt wurden; besondere Anregungen auf diesem Gebiet erhielt Dürer von dem Italiener Leone Battista Alberti (1404 bis 1472). Dürer gehört zu den Begründern der Literatur über die Perspektivität. Er schrieb sein Werk in der Absicht, den vielen talentierten jungen Malern ein Mittel in die Hand zu geben, richtig zeichnen zu lernen und von dem Irrtum ihrer Lehrmeister abzukommen. Deshalb schrieb er sein Werk in deutscher Sprache, während die Sprache der Wissenschaft das Latein war. Aber nicht nur auf die Kunst wandte Dürer seine mathematischen Kenntnisse an. So schrieb er auch ein Werk über die menschlichen Proportionen und ein Lehrbuch über die Befestigungskunst.

Vom 15. Jahrhundert an entwickelte sich auch die Algebra, anknüpfend an die durch die Araber gewonnenen Ergebnisse, in Europa bedeutend weiter. So wurden zum Beispiel die Buchstaben als Symbole für Zahlengrößen und viele der uns heute bekannten grundlegenden mathematischen Symbole (z. B. die Operationszeichen plus und minus) eingeführt. Auf Grund dieser Entwicklung konnten der Franzose Pierre Fermat (1601 bis 1665) und der bedeutende französische Philosoph und Mathematiker René Descartes (1596 bis 1650) die Geometrie und die Algebra zur analytischen Geometrie vereinigen. Dabei spielten die Erfolge in der Mechanik (Galilei) eine große Rolle. Mit der analytischen Geometrie begann der Umschwung zur modernen Mathematik.

Zur selben Zeit erwarben sich der bedeutende deutsche Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (1571 bis 1630) und der italienische Mathematiker und Astronom Francesco Bonaventura Cavalieri (1591 bis 1647) besondere Verdienste. Sie griffen die von Archimedes angewandte Methode zur Berechnung gekrümmter Flächen und Körper auf und erweiterten sie. Von diesen Arbeiten aus und wesentlich gefördert durch die analytische Geometrie entstand die Infinitesimalrechnung (Newton und Leibniz).

Gleichzeitig im 17. Jahrhundert, aufbauend auf der von den Malern der Renaissance entwickelten Lehre von der Perspektivität, schuf Gérard Desargues (1593 bis 1662) das erste grundlegende Werk über die projektive Geometrie. Dabei ging er nicht mehr von praktischen Bedürfnissen, sondern vielmehr von mathematischen Überlegungen aus. Deshalb gilt er als der Begründer dieser mathematischen Disziplin.

Aus der einheitlichen Geometrie entstanden somit im 17. Jahrhundert selbständige Teilgebiete. So entwickelte sich vornehmlich im 18. Jahrhundert und weiterhin im 19. Jahrhundert die darstellende Geometrie aus der projektiven Geometrie.

Während in der projektiven Geometrie nur Lageverhältnisse in geometrischen Gebilden betrachtet werden, gibt die Projektionslehre oder die darstellende Geometrie die Möglichkeit, die Raumgebilde in der Ebene maßgetreu und anschaulich darzustellen.

Der Begründer der darstellenden Geometrie ist der französische Mathematiker Gaspard Monge (1746 bis 1818). Er wurde bereits mit 22 Jahren Professor der Mathematik und zwei Jahre später Professor der Physik. Monge war maßgeblich an der Gründung der École politechnique in Paris im Jahre 1794 beteiligt, einer wissenschaftlichen Ausbildungsstätte für Offiziere. Er lehrte in ihr Mathematik. Die Entwicklung der Technik erforderte technisch ausgebildete Menschen. Aus diesem Bedürfnis heraus waren die Entwicklung der darstellenden Geometrie ebenso wie die Schaffung dieser Schule eine Notwendigkeit geworden.

Auch auf dem Gebiet der Stereometrie erzielte Monge einzelne bedeutende Ergebnisse.

Der fünfzig Jahre später geborene Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796 bis 1863) war ebenfalls ein bedeutender Geometer. Von 1821 bis 1835 war er in Berlin als Lehrer tätig. Er gilt als der Begründer der synthetischen Geometrie. Durch ihn wurde unter anderem die Entwicklung in der Stereometrie bedeutend vorwärts getrieben. In der Schule werden viele Lehrsätze in Anlehnung an die Methoden Steiners bewiesen.

Der rapide Aufschwung des kapitalistischen Bürgertums führte auch in der Mathematik bereits im Laufe des 18. Jahrhunderts zu einer wesentlichen Erweiterung fast aller Disziplinen und davon ausgehend zur Entwicklung einer neuen mathematischen Auffassung. In den letzten hundertundfünfzig Jahren wurde die Geometrie insbesondere von dem Deutschen Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855), dem Russen Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793 bis 1856), dem Ungarn János Bolyai (1802 bis 1860) und dem Deutschen Bernhard Riemann (1826 bis 1866) weiterentwickelt. Das Wesentliche dieser Entwicklung geht jedoch über den Lehrstoff der allgemeinbildenden Schulen hinaus.

2. Abbildungsverfahren

Wenn ein Haus gebaut werden soll, ist es notwendig, daß man vor Beginn des Baues ein anschauliches Bild von dem Gebäude erhält. Man muß also vorher eine Zeichnung anfertigen, die den Bau so zeigt, wie man ihn später sehen wird. Die Bauarbeiter, die das Gebäude aufführen sollen, erhalten Zeichnungen, aus denen sie die Maße des Bauwerkes entnehmen können. Entsprechende Zeichnungen benötigt man, wenn eine Maschine hergestellt werden soll.

In all diesen Fällen besteht das Problem, räumliche Gegenstände in einer Ebene darzustellen. Das Teilgebiet der Mathematik, mit dessen Hilfe dieses Problem gelöst wird, heißt **darstellende Geometrie.** Wir wollen in den folgenden Abschnitten einige ihrer Verfahren kennenlernen. Dabei beschränken wir uns auf Körper; es gibt jedoch außer den Körpern auch noch andere räumliche Gebilde, zum Beispiel schraubenförmig gekrümmte Flächen. Bei sämtlichen Verfahren denkt man sich jeden Punkt des Körpers durch Strahlen, die Projektionsstrahlen, auf eine Ebene, die Bildebene, projiziert.

An eine gute Abbildung werden im allgemeinen folgende Forderungen gestellt: 1. Sie soll ein anschauliches Bild des Gegenstandes vermitteln. 2. Sie soll maßgerecht sein. 3. Das Konstruktionsverfahren soll möglichst einfach sein. Alle drei Forderungen lassen sich bei keinem Projektionsverfahren gleichzeitig erfüllen.

Das anschaulichste Bild erhält man durch ein Verfahren, das dem Sehvorgang entspricht und in der Natur außerdem als Schattenwurf bei punktförmiger Lichtquelle auftritt.

Bei diesem Verfahren gehen sämtliche Projektionsstrahlen von einem Punkte aus, dem Projektionszentrum (beim Auge dem optischen Mittelpunkt des Linsensystems). Diese Art der Abbildung nennt man deshalb **Zentralprojektion.** In der Technik findet sie ihre Anwendung zum Beispiel beim Photoapparat und beim Bildprojektor. Die Konstruktion eines Bildes ist bei Zentralprojektion ziemlich umständlich. Dieses Verfahren hat außerdem den Nachteil, daß es keine maßgerechten Bilder liefert. Wir wollen es deshalb nicht näher betrachten.

Verhältnismäßig anschauliche Bilder, die außerdem leicht zu konstruieren sind, liefert die **Parallelprojektion.** Bei diesem Verfahren verlaufen sämtliche Projektionsstrahlen parallel zueinander. Sie treffen unter einem beliebigen Winkel auf die Bildebene. In der Natur findet man diese Projektionsart beim Schattenwurf durch die praktisch parallelen Sonnenstrahlen. Wir werden im Verlauf unserer Betrachtungen zwei Verfahren der Parallelprojektion kennenlernen, das **Grundriß-Aufrißverfahren** (auch **Zweitafelverfahren** genannt) und die **Axonometrie.**

Die Forderung nach Maßgerechtigkeit der Bilder kann am besten bei der senkrechten Parallelprojektion erfüllt werden. Diese ist ein Sonderfall der Parallelprojektion und dadurch ausgezeichnet, daß die Projektionsstrahlen senkrecht auf die Bildebene treffen. Das Zweitafelverfahren ist das Verfahren, nach dem die meisten technischen Zeichnungen und Bauzeichnungen angefertigt werden. Auch bei ihm werden im allgemeinen nicht alle Teile des Körpers maßgerecht abgebildet, jedoch läßt sich, wie wir später sehen werden, auf einfache Weise eine maßgerechte Abbildung auch dieser Teile erzielen. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt in der Tatsache, daß die mit seiner Hilfe hergestellten Bilder häufig wenig anschaulich sind.

Die Abb. 68 zeigt ein Haus a) in Zentralprojektion, b) in senkrechter Parallelprojektion (Axonometrie), c) in senkrechter Parallelprojektion (Grundriß-Aufrißverfahren oder Zweitafelverfahren). Aus der Abbildung sind die obenerwähnten Vor- und Nachteile der einzelnen Projektionsarten deutlich zu erkennen.

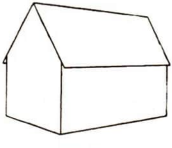


Abb. 68a

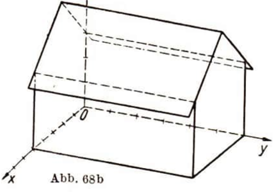


Abb. 68b

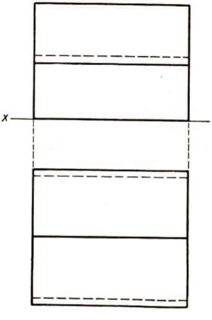


Abb. 68c

3. Zur Zeichentechnik

Zur sauberen Ausführung geometrischer Zeichnungen muß man folgendes beachten:
Das Zeichenpapier soll glatt und nur schwach gekörnt sein. Der Bleistift ist beständig gut gespitzt zu halten. Es ist daher ein harter Bleistift am besten geeignet, man darf ihn aber nicht zu fest andrücken. Als Reißzeug genügt ein Zirkel mit Blei- und Ziehfedereinsatz sowie eine Ziehfeder zum Ausziehen gerader Linien. Mit einem weichen Bleistift oder mit schwarzer Tusche werden die hervorzuhebenden Linien und Punkte nachgezogen. Die Ziehfeder darf nicht durch Eintauchen in die Tusche gefüllt werden. Zum Füllen dienen eine saubere Feder oder ein Papierstreifen. Beim Führen der Ziehfeder darf kein Druck ausgeübt werden. Die Verwendung von Farben ist durch den Zweck der Zeichnung bestimmt, an sich genügt schwarz. Nach dem Normblatt DIN 15 werden sichtbare Kanten und Umrisse von Flächen und Körpern voll ausgezogen, unsichtbare (verdeckte) Kanten und Umrisse werden gestrichelt und Achsen im Strichpunktverfahren gezeichnet. Statt des Lineals benutzen wir zwei Zeichendreiecke. Sie sind beide rechtwinklig, das eine hat außerdem zwei Winkel von je 45°, das andere Winkel von 30° und 60°. Zum Ausziehen krummer Linien, die keine Kreise sind, bedienen wir uns eines der in vielen verschiedenen Formen erhältlichen Kurvenlineale.

4. Grundlegende Begriffe

Einen Körper abbilden heißt, seine Begrenzungsflächen, seine Begrenzungslinien und Eckpunkte (soweit vorhanden) bzw. seine Umrißlinien abbilden. Man muß daher zunächst lernen, die elementaren geometrischen Gebilde abzubilden. Wir wollen deshalb bei den folgenden Betrachtungen von den elementaren geometrischen Gebilden Punkt, Gerade und Ebene ausgehen. Dabei muß man aber stets bedenken, daß diese elementaren geometrischen Gebilde in der Natur nicht losgelöst von den räumlichen Gegenständen existieren.
Wenn wir also bei unseren Untersuchungen zum Beispiel einzelne Punkte oder Geraden betrachten, so geschieht dies nur deshalb, weil wir damit die Möglichkeit erhalten, einen Körper darzustellen.
Wir wollen nunmehr noch einige Bezeichnungen einführen. Der abzubildende Gegenstand heißt **Original**, die Abbildung des Originals heißt sein **Bild** oder sein **Riß**. Entsprechend heißen der abzubildende Punkt **Originalpunkt**, seine Abbildung **Bildpunkt**. Die Ebene, auf die abgebildet wird, heißt **Bildebene**. Der Vollständigkeit halber sei hier nochmals der bereits erwähnte **Projektionsstrahl** definiert; so heißt jeder Strahl, durch den ein Originalpunkt auf der Bildebene abgebildet wird.

II. Das Grundriß-Aufrißverfahren

Wie bereits erwähnt, wird das Grundriß-Aufrißverfahren bei technischen Zeichnungen sehr häufig angewendet. Da dieses Verfahren außerdem besonders einfach ist, wollen wir es zuerst betrachten.

5. Die Darstellung von Punkten

a) Das Eintafelverfahren

Man kann sich das Bild eines Gegenstandes aus Punkten zusammengesetzt denken. Wir wollen deshalb zuerst untersuchen, wie beliebig im Raum gelegene Punkte mit Hilfe der senkrechten Parallelprojektion auf die Bildebene abgebildet werden. Ein Raumpunkt kann entweder über, in oder unter der Bildebene liegen. Der zu dem Punkt gehörige Projektionsstrahl ist das Lot von diesem Punkte auf die Bildebene (bzw. die Senkrechte in diesem Punkte auf der Bildebene). Die Abb. 69 zeigt vier beliebige Punkte A, B, C und D. Der Punkt C liegt auf der Bildtafel selbst. Die von den Punkten A, B und D auf die Bildebene gefällten Lote treffen diese in den Fußpunkten[1]) A', B', D'. Sämtliche Lote liegen parallel zueinander und entsprechen mithin den Projektionsstrahlen bei senkrechter Parallelprojektion. A', B', D' nennt man die Bilder der Punkte A, B, D. Der Punkt C fällt mit seinem Bildpunkt C' zusammen. Den entsprechenden Projektionsstrahl erhält man, wenn man in C die Senkrechte auf der Bildebene errichtet. Wir haben mithin festgestellt, daß zu jedem Originalpunkt ein und nur ein Bildpunkt gehört. Liegt ein Originalpunkt in der Bildebene, so fällt er mit seinem Bildpunkt zusammen.

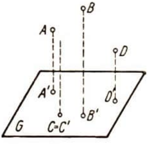


Abb. 69

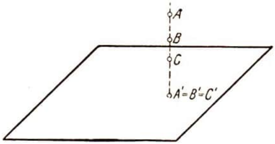


Abb. 70

Wir wollen nun untersuchen, ob auch zu jedem Bildpunkt ein und nur ein Originalpunkt gehört. Das ist offensichtlich nicht der Fall; denn jeder auf dem gleichen Projektionsstrahl p liegende Originalpunkt wird durch den gleichen Bildpunkt dargestellt (vgl. Abb. 70). Mithin ist jeder Bildpunkt P' das Bild von beliebig vielen Raumpunkten P. Um diese Vieldeutigkeit des Eintafelbildes zu beseitigen, muß man den Abstand der einzelnen Raumpunkte von der Bildebene, ihre Höhe, auf irgendeine Art und Weise festlegen. Das geschieht im allgemeinen entweder dadurch, daß man neben jeden Bildpunkt eine Höhenzahl schreibt (sogenannte kotierte Projektion, Abb. 71a), oder durch Angabe eines besonderen Höhenmaßstabes (Abb. 71b).

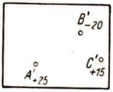


Abb. 71a

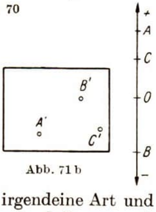


Abb. 71b

Die Darstellung mit Hilfe der Höhenzahlen ist uns von den Landkarten her bekannt. Durch das Vorzeichen wird dabei zum Ausdruck gebracht, ob die Raumpunkte oberhalb oder unterhalb der Grundrißebene liegen. Bei dem zuletzt erwähnten Verfahren werden die Höhen der Raumpunkte sowie der Nullpunkt neben der eigentlichen Zeichnung auf einer senkrechten Geraden, dem Höhenmaßstab, abgetragen (vgl. Abb. 71b). Die Abb. 72 zeigt die Darstellung eines Hauses a) mit Hilfe von Höhenzahlen, b) unter Benutzung eines Höhenmaßstabes.

1) Die Zeichen A', B', C' usw. werden „A Strich, B Strich, C Strich“ usw. gelesen.

b) Das Zweitafelverfahren

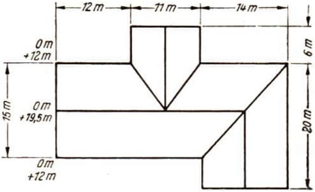


Abb. 72a

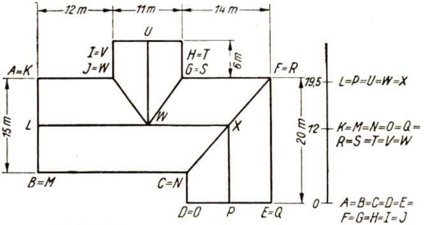


Abb. 72b

Die soeben betrachteten Verfahren sind für die Abbildung von Körpern vielfach zu unübersichtlich, da der Höhenmaßstab zum Beispiel eine Vielzahl von Eintragungen enthalten müßte. Die Eindeutigkeit der Abbildung läßt sich aber auch dadurch erzielen, daß man den gleichen Körper mit Hilfe der senkrechten Parallelprojektion auf eine zweite Bildebene abbildet. Diese zweite Bildebene wird dabei im allgemeinen senkrecht zur ersten, der sogenannten **Grundrißebene,** gewählt. Man nennt sie entsprechend die **Aufrißebene.** Zwei nicht zueinander parallele Ebenen schneiden einander stets in einer Geraden. Die Schnittgerade der Grund- und der Aufrißebene heißt Bildachse. Ein anschauliches Bild dieser Verhältnisse liefert uns ein aufgeschlagenes Heft, dessen Deckelseiten senkrecht zueinander stehen. Die waagerecht liegende Deckelseite entspricht in diesem Fall der Grundrißebene. Die zur Grundrißebene gehörigen Projektionsstrahlen verlaufen lotrecht (vgl. Abb. 73). Die senkrecht stehende Deckelseite entspricht der Aufrißebene. Die zu ihr gehörigen Projektionsstrahlen verlaufen waagerecht, aber so, daß sie senkrecht auf die Aufrißebene treffen (vgl. Abb. 73). Selbstverständlich muß man sich beide Ebenen unbegrenzt denken. Fällt man von einem Raumpunkt das Lot auf die Aufrißebene, so gibt der Abstand des dort entstehenden Bildpunktes P'' von der Bildachse die Höhe des Raumpunktes P über der Grundrißebene an. Dadurch ist unsere Abbildung umkehrbar eindeutig geworden, das heißt, für jeden Raumpunkt kann man eindeutig die beiden Bildpunkte und umgekehrt aus den beiden Bildpunkten eindeutig den Raumpunkt bestimmen.

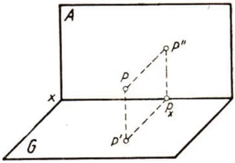


Abb. 73

Das Bild P' in der Grundrißebene heißt **Grundrißbild** oder kurz **Grundriß** des Originalpunktes P; entsprechend heißt das Bild P'' in der Aufrißebene **Aufrißbild** oder **Aufriß.**

Wir fällen vom Grundriß P' des Punktes P auf die Bildachse x das Lot und bezeichnen den Fußpunkt mit P_x. Die Strecke $P'P_x$ ist gleich dem Abstand des Raumpunktes P von der Aufrißebene. Entsprechend fällen wir vom Aufriß P'' das Lot auf die Bildachse x. Der Fußpunkt fällt mit dem Fußpunkt des Lotes $P'P_x$

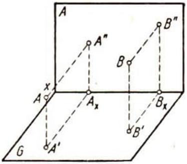


Abb. 74

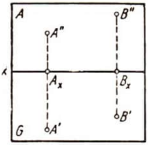


Abb. 75

zusammen, wie man sich an Hand der Figur verdeutlichen kann. Der Abstand $P''P_x$ ist gleich dem Abstand des Originalpunktes von der Grundrißebene, das heißt also gleich der Höhe des Punktes P über der Grundrißebene. In der Abb. 74 ist das für die Punkte A und B veranschaulicht. Zur Darstellung in der Zeichenebene klappt man die Aufrißebene um 90° um die Bildachse so nach hinten, daß sie mit der Grundrißebene in einer Ebene liegt. Grundriß- und Aufrißebene bieten dann ein Bild, wie es die Abb. 75 zeigt. Da sowohl $P'P_x$ als auch $P''P_x$ auf der Bildachse senkrecht stehen, liegt der Streckenzug $P'P_xP''$ nunmehr auf einer Geraden. Diese Gerade heißt **Ordnungslinie** des Raumpunktes P (in der Abbildung 75 sind die Ordnungslinien der Punkte A und B gezeichnet).

Es gilt also der folgende Satz:

Die Verbindungsgerade zwischen Grund- und Aufriß eines Raumpunktes steht senkrecht auf der Bildachse und heißt Ordnungslinie.

Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes:

Liegen zwei Bildpunkte in verschiedenen Rißebenen nicht auf einer gemeinsamen Ordnungslinie, so können sie nicht Bilder des gleichen Raumpunktes sein.

Ein Raumpunkt P ist gegeben, wenn sein Grund- und sein Aufriß gegeben sind.

Aufgaben

1. Zeichne die Bilder der folgenden Punkte in senkrechter Eintafelprojektion bei Verwendung des Höhenmaßstabes in eine Grundrißebene! Dabei sind die Projektionen der einzelnen Punkte beliebig zu wählen.
$A\,(h = +4)$; $B\,(h = +6)$; $C\,(h = 0)$; $D\,(h = -4)$; $E\,(h = -3)$; $F\,(h = +3{,}5)$; $G\,(h = -2{,}6)$; $H\,(h = +1{,}8)$.
Hierbei bedeutet h die Höhe in cm.
2. Es sind Punkte mit den folgenden Abständen (in cm) von der Projektionsebene darzustellen:

Aufgabe	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m
Abstand vom Grundriß	5	1	3	3,5	2,3	0	3	0	5,5	0	2,9	0
Abstand vom Aufriß	4	2	1	3,1	2,2	2,2	0	4,1	3,2	4,8	0	0

6. Die Darstellung von Geraden und Strecken

a) Grund- und Aufriß einer Geraden

Sowohl in der Ebene als auch im Raum bestimmen zwei Punkte eindeutig eine Strecke und mithin auch eine Gerade. Bildet man alle Punkte einer Geraden durch Parallelprojektion auf eine Ebene ab, so erfüllt die Gesamtheit aller Pro-

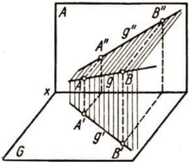


Abb. 76a

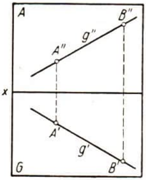


Abb. 76b

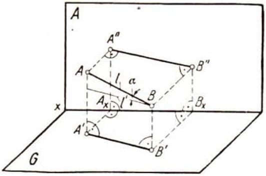


Abb. 77

jektionsstrahlen im allgemeinen eine Ebene (vgl. Abb. **76a**). Diese Ebene schneidet die Bildebene in einer Geraden, die man als das Bild der abzubildenden Geraden bezeichnet. Das Bild einer Geraden ist mithin bei Parallelprojektion (abgesehen von einem Sonderfall) wieder eine Gerade. Die Bildpunkte von mindestens zwei Originalpunkten, die auf der Originalgeraden liegen, bestimmen also eindeutig das Bild der Geraden (Abb. 76b).

Die Abbildung von Körpern wird häufig auf die Abbildung von Strecken zurückgeführt. Wir wollen daher die Abbildung von Strecken mit Hilfe der senkrechten Parallelprojektion näher untersuchen. Strecken können zur Bildtafel entweder parallel oder geneigt oder senkrecht liegen.

a) Zur Bildtafel parallele Strecken werden in wahrer Größe abgebildet. Die Strecke, ihr Bild sowie die zu den beiden Eckpunkten gehörenden Projektionsstrahlen bilden in diesem Fall ein Rechteck.

b) Zur Bildtafel geneigte Strecken werden verkürzt abgebildet. Die Strecke, ihr Bild sowie die zu den beiden Eckpunkten gehörenden Projektionsstrahlen bilden ein rechtwinkliges Trapez (vgl. Abb. 77). Zeichnet man die Parallele zu $A'B'$, die durch B läuft, so erkennt man, daß sich die Länge l' der Bildstrecke durch die Länge der Raumstrecke l und den Kosinus des Neigungswinkels α ausdrücken läßt. Es ist $l' = l \cdot \cos\alpha$.

c) Zur Bildtafel senkrechte Strecken werden als Punkte dargestellt.

Das Bild einer Strecke kann also bei senkrechter Parallelprojektion nie länger sein als das Original.

Da alle zu einer Bildtafel parallelen Strecken auf dieser in wahrer Größe abgebildet werden, spielen derartige Strecken eine besondere Rolle. Alle Geraden, die parallel zur Grundrißebene verlaufen, heißen **Höhenlinien,** da alle ihre Punkte die gleiche Höhe über der Grundrißebene haben. Ihr Aufriß ist eine Parallele zur Bildachse (im Sonderfall ein Punkt). Handelt es sich um Strecken, dann werden diese im Grundriß in wahrer Größe abgebildet (vgl. Abb. 78a, b). Alle Geraden, die parallel zur Aufrißebene verlaufen, heißen **Frontlinien.** Ihr Grundriß ist eine Parallele zur Bildachse (im Sonderfall ebenfalls ein Punkt). Handelt es sich um Strecken, so

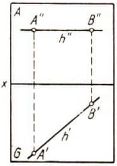


Abb. 78a

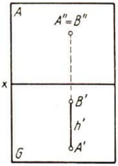


Abb. 78b

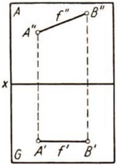


Abb. 79a

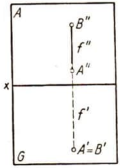


Abb. 79b

werden sie im Aufriß in wahrer Größe abgebildet (vgl. Abb. 79a, b).

Höhen- und Frontlinien werden auch gemeinsam als **Hauptlinien** bezeichnet. Bei der Abbildung eines Körpers bemüht man sich stets, ihn so zu stellen, daß man möglichst viel Hauptlinien erhält.

b) Wahre Länge einer Strecke

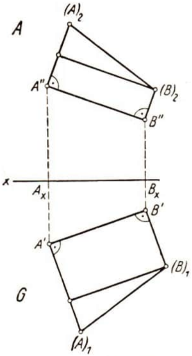


Abb. 80

Wie wir bereits erkannt haben, wird jede Strecke, die weder Front- noch Höhenlinie ist, verkürzt abgebildet. Da man aber (z. B. bei Konstruktionszeichnungen) häufig die wahre Länge braucht, wollen wir ein Verfahren zur Ermittlung dieser Länge kennenlernen. Dazu stellen wir folgende Überlegungen an: A und B seien die Endpunkte einer Raumstrecke, A' und B' ihre Grundrißbilder (vgl. Abb. 80). Senkrecht über A' liegt der Punkt A, senkrecht über B' der Punkt B. Diese Punkte bestimmen das Trapez $A'ABB'$. Es hat bei A' und bei B' rechte Winkel. Wir legen dieses Trapez um die durch A' und B' bestimmte Gerade in die Grundrißebene um. Dabei bleiben seine Größe und seine Gestalt unverändert. Derartige Umlegungen senkrechter oder auch schräger Ebenen werden in der darstellenden Geometrie häufig ausgeführt. Die umgeklappten Punkte werden wie die ursprünglichen Punkte bezeichnet, aber in Klammern gesetzt. Um Verwechslungen bei der Bezeichnung der Umlegungen zu vermeiden, versieht man die umgeklappten (eingeklammerten) Punkte häufig auch mit Indizes[1]) (vgl. Abb. 80). Das umgeklappte Trapez konstruiert man folgendermaßen: Wir errichten innerhalb der Bildebene in A' und B' auf $A'B'$ die Senkrechten und tragen auf ihnen von A' und von B' aus die Höhen der Punkte A und B über der Grundrißebene ab. Diese Höhen sind gleich den Strecken $A''A_x$ und $B''B_x$, die wir dem Aufriß entnehmen. Wir erhalten somit die Punkte $(A)_1$ und $(B)_1$. Diese Punkte verbinden wir durch eine Gerade. Die Strecke $(A)_1(B)_1$ ist die wahre Länge von AB. Die Umklappung können wir auch am Aufriß durchführen.

Rechnerisch kann man die wahre Länge einer Strecke folgendermaßen ermitteln: Wie wir aus der Abb. 80 erkennen, ist die wahre Länge AB gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist die Projektion $A'B'$, die andere Kathete der Höhenunterschied zwischen A und B. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ergibt sich damit für die wahre Länge einer Strecke AB

$$AB = \sqrt{(A'B')^2 + (A''A_x - B''B_x)^2}.$$

---

1) Das Zeichen (A) wird also „A umgelegt“ gelesen, das Zeichen $(A)_1$ entsprechend „A umgelegt 1“.

Einen entsprechenden Ausdruck kann man aus dem Aufriß herleiten. Aus dieser Betrachtung ergibt sich nochmals der Satz:

Das Bild einer Strecke ist niemals länger als sein Original. Bild und Original sind dann gleich lang, wenn die Strecke parallel zur Bildebene verläuft.

c) Spurpunkte einer Geraden

Eine schräg zu einer Bildebene (etwa der Grundrißebene) gelegene Gerade durchstößt diese Ebene in einem Punkt (vgl. Abb. 81). Diesen Punkt der Geraden nennt man den **Spurpunkt** S. In dem von uns betrachteten Beispiel liegt er in der Grundrißebene und fällt daher mit seinem Grundriß S' zusammen. Da alle Punkte der Grundrißebene die Höhe Null haben, liegt das Aufrißbild S'' des Spurpunktes auf der Bildachse x. Mithin finden wir den Aufriß S'' des Spurpunktes S als Schnittpunkt des Aufrißbildes der Geraden mit der Bildachse x. Da S'' und $S' = S$ auf einer Ordnungslinie liegen, findet man S' als Schnittpunkt der in S'' auf der x-Achse errichteten Senkrechten mit dem Grundrißbild der Geraden. Verläuft die betrachtete Gerade auch schräg zur Aufrißebene (in der Abbildung ist das der Fall), so hat sie in dieser ebenfalls einen Spurpunkt, den wir mit T bezeichnen. Sein Aufriß T'' fällt diesmal mit T zusammen. Man findet ihn entsprechend als Schnittpunkt der in T' auf x errichteten Senkrechten mit dem Aufrißbild der Geraden. Wir sind also in der Lage, die Bilder beider Spurpunkte zu konstruieren.

d) Zwei Geraden

Die Abb. 82 zeigt das Schaubild eines Hausdaches. Die sichtbaren Kanten a, b, c, d, e, f und g des Daches denken wir uns zu Geraden verlängert. Wenn wir ihre Lage zueinander betrachten, stellen wir die folgenden drei Fälle fest:

1. Zwei Geraden sind zueinander parallel (z. B. $a \parallel c$, $b \parallel d$).
2. Zwei Geraden schneiden einander (a und b bzw. c und d).
3. Zwei Geraden sind weder parallel noch schneiden sie einander (d und e bzw. a und g). Man nennt sie windschief.

In den ersten beiden Fällen liegen beide betrachteten Geraden jeweils in einer gemeinsamen Ebene. Im Falle 3 gibt es keine Ebene, der beide Geraden angehören. Die angeführten Fälle zeigen uns sämtliche Möglichkeiten für die Lage, die zwei Geraden im Raum zueinander haben können.

Wir wollen nun die Zweitafelbilder von Geradenpaaren in diesen drei Lagen untersuchen.

1. Bei parallelen Geraden (Abb. 83a, b) liegen auch die Ebenen parallel zueinander, durch die die Geraden auf die Bildebene projiziert werden (vgl. Abschnitt 6a). Infolgedessen sind Grund- und Aufriß paralleler Geraden im allgemeinen wieder je zwei Parallelen, da parallele Ebenen von einer dazu nicht

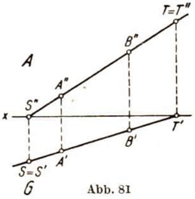


Abb. 81

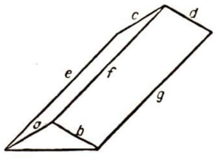


Abb. 82

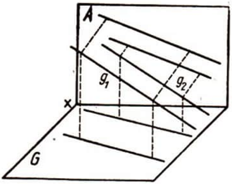


Abb. 83a

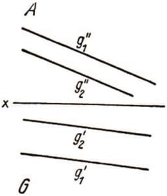


Abb. 83b

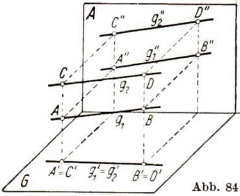


Abb. 84a

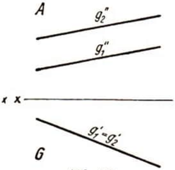


Abb. 84b

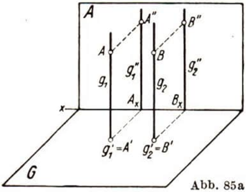


Abb. 85a

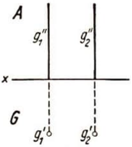


Abb. 85b

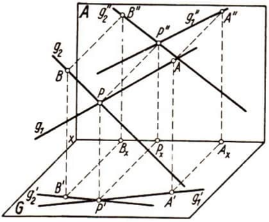


Abb. 86a

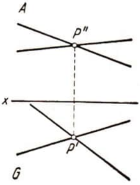


Abb. 86b

parallelen Ebene stets in parallelen Geraden geschnitten werden. Liegen die beiden parallelen Geraden in der gleichen durch die Projektionsstrahlen gebildeten Ebene, so fallen ihre Bilder in der zugehörigen Bildebene zusammen (Abb. 84a, b). Stehen sie senkrecht auf einer der Bildebenen, so werden sie auf dieser durch zwei Punkte dargestellt (Abb. 85a, b).

2. Schneiden zwei Geraden einander, so haben sie einen gemeinsamen Punkt P (Abb. 86a). Der Grundriß P' muß demnach den Grundrissen beider Geraden angehören, das heißt aber, die Grundrisse beider Geraden schneiden einander ebenfalls, und zwar im Punkt P' (Abb. 86b). Entsprechendes gilt für den Aufriß P''. Da P' und P'' Bilder ein und desselben Raumpunktes P sind, liegen P' und P'' auf derselben Ordnungslinie. Daraus folgt der Satz:

Wenn zwei Geraden im Raum einander schneiden, so liegen die Schnittpunkte von Grund- und Aufriß auf einer Ordnungslinie.

Auch die Umkehrung des Satzes gilt:

Erhält man als Grund- und Aufriß zweier Geraden je zwei einander schneidende Geraden, so schneiden die beiden Originalgeraden nur dann einander, wenn die Schnittpunktbilder auf der gleichen Ordnungslinie liegen.

Liegt die den beiden Originalgeraden gemeinsame Ebene senkrecht zu einer der Bildebenen, so fallen die Bilder der Geraden auf dieser zusammen. Wir haben es also auch dann mit zwei einander schneidenden Originalgeraden zu tun, wenn der eine Riß aus zwei einander schneidenden Geraden, der andere aus einer einzigen Geraden besteht, da jeder Punkt der zusammenfallenden Bilder dem Bild einer jeden der beiden Geraden angehört.

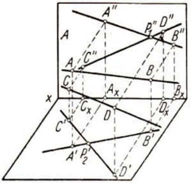


Abb. 87a

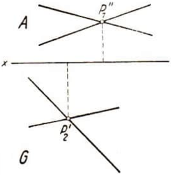


Abb. 87b

3. Sind die Geraden windschief, so erhält man im allgemeinen sowohl im Grundriß als auch im Aufriß je zwei einander schneidende Geraden. Da die beiden Schnittpunkte nicht mehr Grund- und Aufriß des gleichen Raumpunktes sind, können sie auch nicht auf der gleichen Ordnungslinie liegen (Abb. 87a, b). Es gibt aber auch keine Ebene, in der beide Originalgeraden zugleich liegen. Infolgedessen können die Bilder beider Geraden weder im Grund- noch im Aufriß zusammenfallen. Es ist aber möglich, daß die Projektionsebenen der beiden Geraden parallel zueinander liegen. In diesem Falle erhält man auf der zugehörigen Bildebene ein Parallelenpaar.

Zusammenfassung:

Zwei beliebig im Raume liegende Geraden g_1 und g_2 schneiden einander dann und nur dann (das heißt genau dann), wenn der Schnittpunkt ihrer Grundrisse und der Schnittpunkt ihrer Aufrisse auf einer gemeinsamen Ordnungslinie liegen. Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind parallel, wenn sowohl ihr Grundriß- als auch ihr Aufrißbild je zwei parallele Geraden ergibt.

Aufgaben

1. Die aus der Aufgabe 2 im Abschnitt II, 5 angegebenen Punkte unter a und b, c und d, · · ·, l und m bestimmen je eine Gerade.

a) Durch Zeichnung sind die Spurpunkte und die wahren Längen zu bestimmen.

b) Aus der Zeichnung ist die Lage der Geraden im Raum zu ermitteln.

2. Bestimme durch Zeichnung und durch Rechnung die wahre Länge einer Strecke AB nach den folgenden Angaben!

Aufgabe	a	b	c	d	e	f
Länge der Bildstrecke $A'B'$ im Grundriß	4 cm	5 cm	0	3,80 m	1 km	370 m
Höhenzahl von A	2 cm	3 cm	3 cm	8,00 m	26 m	112 m
Höhenzahl von B	4cm	3 cm	5 cm	6,80 m	54 m	75 m

3. Eine Strecke ist durch ihren Grundriß $P'Q'$ und die Höhen ihrer Endpunkte P und Q gegeben. Welche Höhe hat der Mittelpunkt der Strecke über der Grundrißebene?

4. Eine Gerade ist durch zwei Punkte A und B in der Grundrißebene und durch ihre Höhen über der Grundrißebene gegeben. Welche Höhe hat der Punkt C dieser Geraden, dessen Projektion ein beliebig auf $A'B'$ angenommener Punkt C' ist?
5. Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte P, Q und R sind durch ihre Grundrisse und Höhen gegeben. P und Q haben nicht die gleiche Höhe. Durch R soll diejenige Gerade gezogen werden, die zur Projektionsebene parallel verläuft und die die Gerade PQ schneidet. Anleitung: Man muß den Punkt auf PQ ermitteln, der so hoch wie R liegt.
6. Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte P, Q und R sind durch ihre Grund- und Aufrisse gegeben. Ermittle die Spurpunkte der Geraden durch R, die zur Geraden PQ parallel verläuft! Welche Spezialfälle sind möglich?
7. Es gilt der Satz: Sind zwei Geraden parallel, so gilt dasselbe von ihren Projektionen. Es ist zu prüfen, ob dieser Satz umkehrbar ist.
8. Konstruiere das Zweitafelbild
   a) von zwei einander schneidenden Geraden,
   b) von drei einander in einem Punkte schneidenden Geraden!
9. Wie liegen die Geraden in den Abbildungen 88 und 89 im Raum?

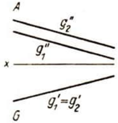


Abb. 88

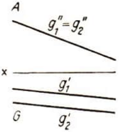


Abb. 89

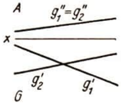


Abb. 90

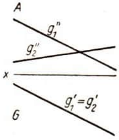


Abb. 91

10. Wie liegen die Geraden in den Abbildungen 90 und 91 zueinander?
11. Die geradlinige Rohrleitung eines Wasserkraftwerkes hat in einem Lageplan 1 : 25000 eine Länge von 1,4 cm. Ihre beiden Endpunkte liegen 783 m und 603 m über NN[1]). Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die wahre Länge der Rohrleitung!

7. Die Darstellung von Ebenen

Bei technischen Zeichnungen legt man häufig Schnitte durch den darzustellenden Körper, weil dadurch Einzelheiten besser zu erkennen sind. Liegt die Schnittebene zu einer Bildebene parallel, so wird die Schnittfigur in dieser in wahrer Größe abgebildet; schneidet dagegen die Schnittebene die Bildebene, so ist die Abbildung der Schnittfigur verzerrt. In vielen Fällen ist aber die Abbildung der Schnittfigur in wahrer Größe notwendig. Wir müssen daher untersuchen, wie diese Konstruktion möglich ist. Dazu untersuchen wir zunächst, wie eine Ebene — die Schnittebene — im Zweitafelverfahren dargestellt wird.

---

1) Erklärung für NN: Da sich der Meeresspiegel im steten Wechsel (Ebbe und Flut) befindet, wird ein mittlerer Wasserstand als Ausgangspunkt angenommen. Dieser mittlere Meeresspiegel wurde 1878 in Amsterdam (Amsterdamer Pegel) festgelegt und als Normalnull (NN) bezeichnet. Von diesem Ausgangspunkt wurden in allen Staaten, über das ganze Land verstreut, Festpunkte eingemessen. Wir finden diese Festpunkte an markanten Stellen: Bahnhöfen, Brücken, Schleusen, öffentlichen Gebäuden usw.

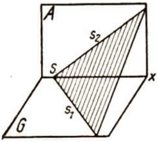


Abb. 92a

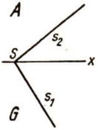


Abb. 92b

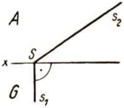


Abb. 93a

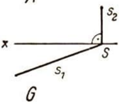


Abb. 93b

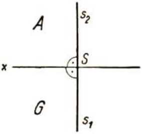


Abb. 93c

Jede Ebene im Raum ist durch drei Punkte, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt. Zwei zueinander nicht parallele Ebenen schneiden einander stets in einer Geraden. Infolgedessen schneidet eine beliebig im Raum liegende Ebene im allgemeinen sowohl die Grundriß- als auch die Aufrißebene in je einer Geraden, die man Spurgeraden nennt. Da die Spurgeraden im allgemeinen nicht zueinander parallel liegen, schneiden sie einander. Ihr Schnittpunkt gehört aber sowohl der Grundriß- als auch der Aufrißebene an, er liegt mithin auf der Bildachse (Abb. 92a, b).

Besondere Bedeutung in der darstellenden Geometrie haben Ebenen, die senkrecht zu einer oder auch zu beiden Rißebenen stehen. Die Abb. 93a, b, c veranschaulichen diese Sonderfälle. Wir stellen fest:

Wenn die Originalebene senkrecht zu einer Bildebene steht, so steht ihre zur anderen Bildebene gehörende Spurgerade senkrecht auf der Bildachse.

Liegt die Ebene parallel zu einer der Bildebenen, so schneidet sie diese Rißebene nicht. Es ergibt sich somit nur eine Spurgerade. Diese verläuft in der anderen Rißebene parallel zur Bildachse (Abb. 94a, b). Zwei zur Bildachse parallele Spurgeraden entstehen dann, wenn die Ebene parallel zur Bildachse, aber nicht parallel zu einer der Rißebenen verläuft (Abb. 95).

Nun betrachten wir als einfachste Schnittfigur ein Dreieck ABC, dessen Ebene die Grundrißebene schneidet (vgl. Abb. 96). Wir können es uns als Schnitt durch ein dreiseitiges Prisma entstanden denken (vgl. Abb. 97). Zur Ver-

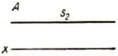


Abb. 94a

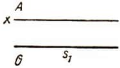


Abb. 94b

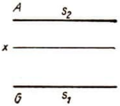


Abb. 95

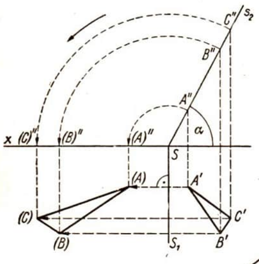


Abb. 96

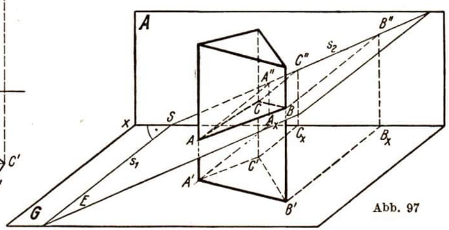


Abb. 97

einfachung nehmen wir an, daß die Schnittebene E senkrecht auf der Aufrißebene steht (sonst ist noch eine Hilfskonstruktion durchzuführen). Uns sind also die Grundrißspur s_1 und die Aufrißspur s_2 der Schnittebene E gegeben. Beide schneiden einander im Punkt S auf der Bildachse x, s_1 steht senkrecht auf x. Ferner sind die Grundrißpunkte A', B' und C' und die Aufrißpunkte A'', B'' und C'' bekannt. A'', B'' und C'' liegen auf der Aufrißspur s_2.
Wir drehen die Ebene E um die Grundrißspur s_1, bis sie mit der Grundrißebene zusammenfällt. Dabei wählen wir die Drehrichtung so, daß der Grundriß des Dreiecks und die Darstellung in wahrer Größe einander nicht überschneiden. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt der Ebene E einen Kreis, der im Mittelpunkt senkrecht von s_1 durchstoßen wird. Insbesondere gilt das für die Punkte A, B und C. Im Aufriß werden diese Kreise in wahrer Größe abgebildet, im Grundriß dagegen als Parallele zur Bildachse x.
Durch die Drehung werden die Punkte A, B und C in die Punkte (A), (B) und (C) der Grundrißebene übergeführt; (A), (B) und (C) fallen also mit ihren Grundrissen $(A)'$, $(B)'$ und $(C)'$ zusammen. Die Aufrißpunkte A'', B'' und C'' werden durch die Drehung in die Aufrißpunkte $(A)''$, $(B)''$ und $(C)''$ übergeführt. Wir finden $(A)' = (A)$ also als Schnittpunkt der Ordnungslinie durch $(A)''$ mit der Parallelen zur Bildachse x durch A' (Grundriß des Kreises, den A beschreibt). Entsprechendes gilt für (B) und (C).
Auf diese Weise kann man auch für andere Figuren die wahre Größe konstruieren.

Aufgaben

1. Wie liegen Ebenen im Raum, wenn die Bildachse Spurgerade ist?

2. Grund- und Aufriß von vier Punkten A, B, C und D sind gegeben. Es ist festzustellen, ob sie die Ecken eines ebenen Viereckes sind.
Anleitung: Es ist zu prüfen, ob die Verbindungsgeraden einander schneiden.

3. Der Aufriß eines ebenen Sechseckes $ABCDEF$ sei regelmäßig, wobei die Aufrißpunkte A'' und B'', C'' und F'', D'' und E'' jeweils gleiche Höhe haben. Die Grundrißpunkte B', C' und D' bilden ein gleichseitiges Dreieck. Das vollständige Zweitafelbild des Sechseckes ist zu konstruieren.

4. Eine Ebene ist durch ein Dreieck ABC bestimmt. Außerdem ist ein Punkt P so gegeben, daß P' innerhalb $A'B'C'$ und P'' innerhalb $A''B''C''$ liegt. Entscheide, ob der Punkt P in der Ebene liegt!

5. Welchen Umlaufsinn erhält jedes Dreieck ABC in der Abbildung 98, wenn es von der Grundrißebene aus betrachtet wird?

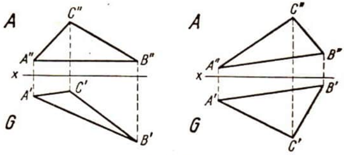


Abb. 98

8. Die Darstellung einfacher ebenflächiger Körper

Wir wollen nunmehr einige einfache Körper im Zweitafelverfahren darstellen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf solche Körper, die durch ebene Flächen begrenzt werden. Die Darstellung solcher Körper ist im Zweitafelverfahren insbesondere dann sehr einfach, wenn die Gestalt der Körper sehr einfach ist und wenn viele Kanten und Flächen der Körper parallel zu den Rißebenen verlaufen.

Zur Vereinfachung wollen wir die Grundrißebene so wählen, daß sie Standebene des Körpers ist. Bei der Konstruktion gehen wir stets von der Grundrißebene aus.

a) Der Würfel

Als ersten Körper stellen wir einen Würfel dar (vgl. Abb. 99). Der Grundriß zeigt die Grundfläche in wahrer Größe. Da die Standebene mit der Grundrißebene zusammenfällt, fallen auch die Punkte A, B, C, D mit ihren Grundrissen A', B', C', D' zusammen. Ihre Aufrisse A'', B'', C'', D'' liegen also auf der Bildachse. Da sie außerdem auf den zu A', B', C' und D' gehörenden Ordnungslinien liegen, sind sie die Fußpunkte der von A', B', C' und D' auf die Bildachse x gefällten Lote. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A. Sein Grundriß E' fällt also mit dem Grundriß A' zusammen, sein Aufriß E'' liegt senkrecht über dem Aufriß A''. Entsprechendes gilt für die Punktepaare F und B, G und C sowie H und D. Die Kanten AE, BF, CG und DH liegen parallel zur Aufrißebene und werden deshalb in dieser in wahrer Größe abgebildet. Damit sind auch die Aufrisse E'', F'', G'' und H'' festgelegt. Die Kanten AB, BC, CD und DA liegen in der Grundrißebene und fallen deshalb im Aufriß mit der Bildachse zusammen. Auch die Kanten EF, FG, GH und HE liegen parallel zur Grundrißebene und erscheinen deshalb im Aufriß als Parallele zur Bildachse durch die Punkte E'', F'', G'' und H''.

Spezielle Fälle für die Lage des Würfels sind in den Abb. 100 und 101 dargestellt.

b) Weitere einfache Körper

In der Abb. 102a und b ist ein Quader mit den Kanten 1 cm, 2 cm und 3 cm für zwei spezielle Lagen gezeichnet. Die Konstruktion erfolgt analog zu der eben angegebenen Konstruktion des Würfels.

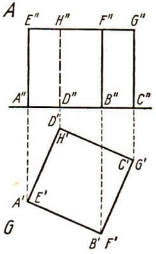


Abb. 99

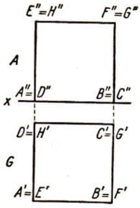


Abb. 100

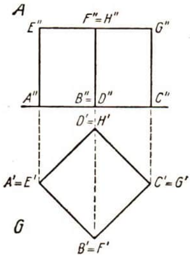


Abb. 101

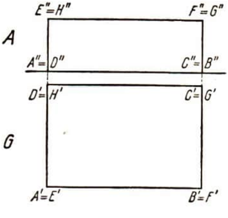


Abb. 102a

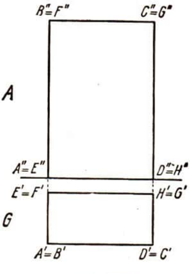


Abb. 102b

In der Abb. 103 ist ein Haus mit Giebeldach im Zweitafelverfahren dargestellt, dessen Front AB mit der Bildachse einen Winkel von 25° bildet. In der Abb. 104 ist ein Haus mit einem Walmdach im Zweitafelverfahren abgebildet.

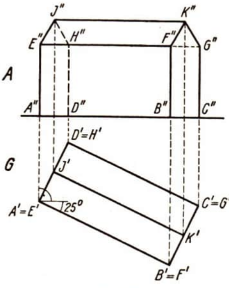


Abb. 103

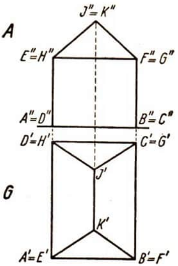


Abb. 104

Aufgaben

1. Zeichne von einem Würfel, bei dem die Seitenkanten mit der Bildachse einen Winkel von a) 45°, b) 20°, c) 60° bilden, den Grund- und Aufriß!
2. Zeichne Grund- und Aufriß eines Quaders mit den Seiten 2 cm, 3 cm und 4 cm in Übereckstellung! Es ist jeweils eine der drei verschieden großen Flächen als Grundfläche des Quaders zu wählen.
3. Über der rechteckigen Dachbodenfläche eines Hauses von 12,00 m Breite und 8,00 m Tiefe soll ein Pultdach mit einem Neigungswinkel von 30° errichtet werden. Zeichne im passenden Maßstab ein Bild des Daches in Zweitafelprojektion und stelle die Dachfläche in diesem Maßstab in wahrer Größe dar!
4. Zeichne im geeigneten Maßstab Grundriß und Aufriß
   a) eines Dammes von 20,00 m Länge und 3,00 m Höhe (die Breite beträgt oben 6,00 m und unten 8,00 m, der Querschnitt sei ein gleichschenkliges Trapez),
   b) eines Satteldaches von 24,00 m Länge, 6,00 m Höhe und 8,00 m Breite,
   c) einer Säule mit quadratischer Grundfläche von 0,80 m Kantenlänge und 5,00 m Höhe,
   d) eines Zeltdaches mit quadratischer Grundfläche von 1,80 m Kantenlänge und 1,20 m Höhe!

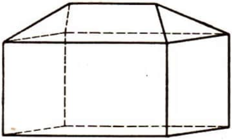


Abb. 105

5. Zeichne ein Haus mit Walmdach, wie es die Abbildung 105 zeigt, im Grund- und Aufriß! Verwende einen geeigneten Maßstab! Abmessungen des Hauses: Länge 12,80 m, Breite 8,50 m, Firstlänge 6,80 m, Gesamthöhe 10,30 m, Firsthöhe 3,00 m. Wie lang sind die Grate?
6. Ein Wohnhaus hat ein Krüppelwalmdach (Abb. 106). Es ist 13,40 m lang, 9,40 m breit, die Traufenkanten liegen 6,60 m, der Dachfirst 11,40 m über dem Erdboden. Die Giebelwand ist 9,30 m

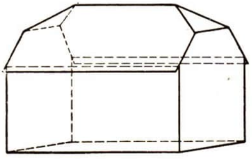


Abb. 106

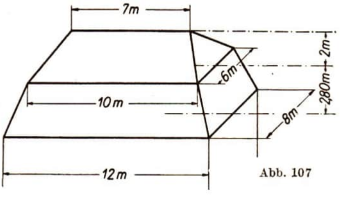


Abb. 107

hoch, der First 8,00 m lang. Die Dachtraufen stehen 0,40 m über. Zeichne das Haus im geeigneten Maßstab!

7. Es sind im geeigneten Maßstab Grund- und Aufriß des Mansardendaches nach Abbildung 107 zu zeichnen.

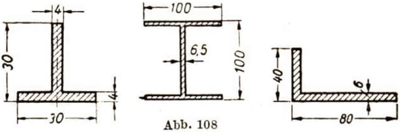


Abb. 108

8. Zeichne einen T-Stahl von 30 mm × 30 mm × 4 mm, einen I-Stahl von 100 mm × 100 mm × 6,5 mm und einen L-Stahl von 40 mm × 80 mm × 6 mm beliebiger Länge in verschiedenen Stellungen zu den Tafeln (Abb. 108)![1])

9. Über der quadratischen Dachbodenfläche eines Turmes von 6,00 m Seitenlänge soll ein Zeltdach von 10,00 m Höhe errichtet werden.

a) Zeichne das Dach im Grund- und Aufriß!

b) Wie lang sind die Grate des Turmes?

c) Bestimme sowohl durch Zeichnung als auch durch Rechnung die wahre Größe der Dachfläche!

d) Unter welchem Winkel sind die Dachflächen gegen den Dachboden geneigt? Löse die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch!

10. Über der quadratischen Dachbodenfläche eines Turmes soll ein Zeltdach von 8,00 m Höhe errichtet werden. Die Kante des Quadrates ist 5,00 m lang. Löse die entsprechenden Aufgaben, wie sie unter 9a und 9d angegeben sind!

11. Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die wahre Größe der einzelnen Flächen für **a)** das in Abbildung 109 in senkrechter Zweitafelprojektion (Maßstab 1 : 500) dargestellte Satteldach, **b)** das Walmdach in Abbildung 110 (Maßstab 1 : 500), **c)** das Zeltdach in Abbildung 111 (Maßstab 1 : 400)! Stelle Modelle der Dächer her!
Anleitung: In den Fällen b und c müssen neue Aufrisse so konstruiert werden, daß die Ebenen der umzuklappenden Flächen senkrecht auf der Aufrißebene stehen.

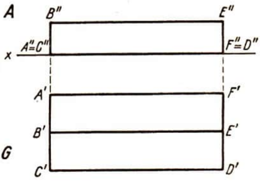


Abb. 109

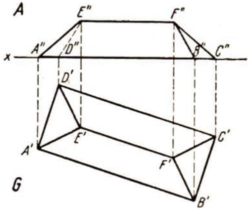


Abb. 110

12. Über der rechteckigen Dachbodenfläche eines Hauses von 12,00 m Breite und 8,00 m Tiefe soll **a)** ein Pultdach mit einem Neigungswinkel von 30°, **b)** ein Walmdach, dessen Dachflächen sämtlich einen Neigungswinkel von 45° haben, errichtet werden. Es sind die Bilder der Dächer in senkrechter Eintafelprojektion mit beigefügtem Höhenmaßstab zu zeichnen, die Dachflächen in wahrer Größe darzustellen und die Größen der Dachflächen zu berechnen. Sämtliche Dächer stehen an den Traufkanten 0,40 m vor.

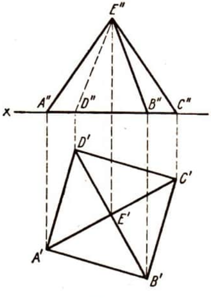


Abb. 111

---
1) Die Bezeichnungen T-Stahl, I-Stahl und L-Stahl für Profilstähle werden Te-Stahl, Doppel-Te-Stahl und Winkelstahl gesprochen.

III. Die axonometrische Abbildung

Im folgenden Abschnitt wollen wir ein Abbildungsverfahren kennenlernen, das ebenfalls auf der Parallelprojektion beruht. Es hat gegenüber dem behandelten Zweitafelverfahren den Vorteil, daß es wesentlich anschaulichere Bilder liefert. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist es jedoch, daß die Ermittlung der wahren Größe einer Figur schwieriger als beim Zweitafelverfahren ist.
Bei dem zu behandelnden Verfahren bezieht man die Originalfigur (z. B. den Körper) auf ein rechtwinkliges xyz-Koordinatensystem. Das ganze System wird dann durch Parallelprojektion auf die Bildebene projiziert. Der Projektion unterliegen somit auch die Koordinatenachsen. Aus diesem Grunde heißt die Lehre von diesem Abbildungsverfahren Axonometrie. Im Falle der senkrechten Parallelprojektion eines solchen Systems spricht man von senkrechter Axonometrie.

9. Die Abbildung eines räumlichen Koordinatensystems

a) Das räumliche Koordinatensystem

Uns ist bereits das rechtwinklige xy-Koordinatensystem bekannt. Durch dieses System wird ein Punkt in der Ebene eindeutig festgelegt. Zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes im Raume benötigt man noch eine dritte Koordinate. Man erhält diese, indem man im Nullpunkt des ebenen xy-Koordinatensystems die Senkrechte auf der Ebene errichtet und auf ihr die gleiche Einheit wie auf der x-Achse und auf der y-Achse abträgt. Durch die dritte Achse, die man im allgemeinen als z-Achse bezeichnet, wird es möglich, den Abstand des Raumpunktes P von der durch die x-Achse und die y-Achse aufgespannten Ebene zu bestimmen. Auf ein solches Koordinatensystem wird bei der axonometrischen Abbildung das Original bezogen (vgl. Abb. 112).

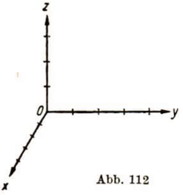


Abb. 112

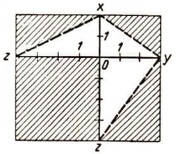


Abb. 113

Ein Modell eines solchen Achsenkreuzes kann man leicht herstellen. Wir nehmen dazu ein Stück steifes Papier mit den in der Abb. 113 angegebenen Maßen und schneiden die in der Abbildung schraffiert gezeichneten Teile weg (bis auf einen Klebefalz). Dann falten wir das Papier längs der Geraden OX und OY rechtwinklig und kleben das Papier an der Geraden OZ zusammen. Dadurch haben wir einen Ausschnitt aus dem Koordinatensystem erhalten. Ein solches Gebilde nennt man auch eine körperliche Ecke.

b) Die Abbildung des räumlichen Koordinatensystems durch Parallelprojektion

Zur Abbildung unseres Koordinatensystems legen wir unser Pappmodell mit dem offenen Dreieck auf die Zeichenebene. Dadurch entsteht eine dreiseitige Pyramide

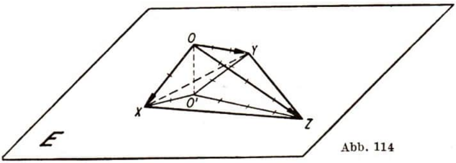


Abb. 114

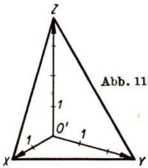


Abb. 115

mit der Grundfläche XYZ, der Spitze O, den Grundkanten XY, YZ und ZX und den Seitenkanten OX, OY und OZ (vgl. Abb. 114).

In dieser Lage wird das Koordinatensystem durch senkrechte Parallelprojektion in die Zeichenebene abgebildet. Die Abb. 115 stellt diese Projektion (von unten betrachtet) dar. Dabei ist O' die Projektion des Nullpunktes O. Die Strecke $O'X$ ist die Projektion der x-Achse, X ist der **Spurpunkt** der x-Achse. Entsprechendes gilt für die Strecke $O'Y$ und den Punkt Y sowie für die Strecke $O'Z$ und den Punkt Z. Die Strecke XY ist die **Spur** der durch die Koordinatenachsen x und y aufgespannten Ebene, YZ und ZX sind die Spuren der entsprechenden Ebenen. Durch die Spurpunkte X, Y und Z bzw. durch die Spurgeraden XY, YZ und ZX wird ein Dreieck bestimmt, das **Spurdreieck** heißt.

Es ist anschaulich klar, daß nur dann ein Spurdreieck entsteht, wenn keine der Achsen parallel zur Zeichenebene liegt. Sonst durchstößt nämlich die zur Zeichenebene parallele Achse die Zeichenebene nicht, man erhält also höchstens zwei Spurpunkte. Es ist ebenso anschaulich klar, daß es zu jedem xyz-Koordinatensystem beliebig viele Spurdreiecke gibt, da man jedes xyz-Koordinatensystem auf beliebig viele verschiedene Weisen so legen kann, daß keine der Achsen parallel zur Zeichenebene verläuft.

Es gilt der folgende Satz, der hier nicht bewiesen werden soll:

> **Das Spurdreieck eines rechtwinkligen xyz-Koordinatensystems ist stets spitzwinklig. Insbesondere ist es gleichschenklig, wenn zwei Achsen gleiche Länge haben, und gleichseitig, wenn alle drei Achsen gleich lang sind.**

c) Die Verkürzung

Für die Abbildungen im axonometrischen Verfahren verwendet man stets eine solche Projektion, bei der ein Spurdreieck vorhanden ist, da nur dann die Abbildung den Vorteil der Anschaulichkeit hat. Wie wir bereits bei der Behandlung des Zweitafelverfahrens festgestellt haben, werden Strecken bei Parallelprojektion verkürzt abgebildet, wenn sie nicht parallel zur Bildebene liegen. Dies trifft auch bei den Achsen unseres Koordinatensystems zu. Wir wollen jetzt das Verhältnis der Verkürzung ermitteln. Dazu legen wir die durch die Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen um ihre Spuren in die Zeichenebene um (vgl. Abb. 116). Bei den Umlegungen beschreibt der Punkt O

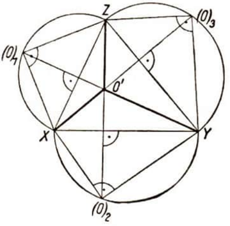


Abb. 116

Kreisbögen, deren Projektionen Strecken sind. Jede dieser Strecken steht senkrecht auf der Spur der entsprechenden Ebene, da diese Spur die Drehachse ist.
Da die Koordinatenachsen bei O rechtwinklig aufeinanderstehen, liegen $(O)_1$, $(O)_2$ und $(O)_3$ außerdem auf den Thaleskreisen über den Spuren. Es genügt, wenn nur zwei Koordinatenebenen umgelegt werden, da bei drei Umklappungen jede Achse zweimal umgelegt wird. Die Konstruktion der Umklappung kann man durch die folgende Überlegung vereinfachen:
Die Achse OY steht auf der Ebene ZOX senkrecht. Daraus folgt, daß die Projektion $O'Y$ senkrecht zu der Spur ZX liegt. Die Höhe des Spurdreiecks auf ZX fällt also mit der durch $O'Y$ bestimmten Geraden zusammen. Mithin findet man $(O)_1$ als Schnittpunkt der Verlängerung von YO' mit dem Thaleskreis über ZX. Entsprechendes gilt für $(O)_2$ und $(O)_3$. Aus dieser Überlegung folgt ferner, daß der Punkt O' der Schnittpunkt der Höhen im Spurdreieck ist.
Durch diese Umlegungen haben wir die Achsen und mithin auch die Einheit auf den Achsen in wahrer Länge erhalten. Wir können diese Einheit mit Hilfe der Strahlensätze auf die Projektion übertragen. Wir führen die Betrachtung am Beispiel der x-Achse durch (vgl. Abb. 117). Die Strecke $(O)_1\,A_x$ ist die wahre Länge der Einheit auf der x-Achse. Wir ziehen zu $(O)_1\,O'$ die Parallele durch A_x. Diese schneidet $O'X$ in A'_x. Es ist nach dem Strahlensatz

$$X(O)_1 : A_x(O)_1 = XO' : A'_xO'.$$

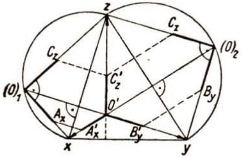


Abb. 117

Damit haben wir die Einheit auf der x-Achse auf die Projektion der x-Achse verkürzt übertragen. Entsprechend verfährt man bei den übrigen Achsen. Da man für jede Achse die Konstruktion von zwei Umlegungen ausgehend durchführen kann, hat man die Möglichkeit einer Zeichenkontrolle.
Das Verhältnis zwischen der Einheit auf der Projektion und der Einheit auf der Achse nennt man Verkürzungsverhältnis (oder auch Verkürzungsfaktor). Im allgemeinen ist es für die Achsen verschieden. Ist das Spurdreieck gleichschenklig, so ist das Verkürzungsverhältnis für zwei Achsen gleich, ist das Spurdreieck gleichseitig, so ist das Verkürzungsverhältnis für alle Seiten gleich.

Aufgaben

1. Über einem gleichseitigen Dreieck XYZ (Seitenlänge 4 cm) soll eine dreiseitige Pyramide errichtet werden, deren Seitenkanten in der Pyramidenspitze O sämtlich rechtwinklig zusammenlaufen. Zeichne den Grundriß der Pyramide auf die Grundflächenebene und die Seitenflächen durch Umlegung um die Grundkanten!
2. Gegeben ist ein beliebiges spitzwinkliges Spurdreieck XYZ. Konstruiere den Grundriß des dazugehörenden Koordinatensystems! Bestimme durch Umlegung die Höhe des Punktes O über der Grundrißebene!
3. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck XYZ mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ cm als Spurdreieck eines rechtwinkligen xyz-Koordinatensystems. Wie sieht das dazugehörige Achsenkreuz im Original (Achsenteilung in cm) und wie im Bild bei senkrechter Parallelprojektion auf die Zeichenebene aus? Wie groß sind die Verkürzungen in Richtung der Koordinatenachsen und das Verkürzungsverhältnis?

4. Lege durch die Punkte (4; 0; 0;), (0; 3; 0;), (0; 0; 3;) eines rechtwinkligen xyz-Achsenkreuzes eine Bildebene und bilde das Achsenkreuz durch senkrechte Parallelprojektion auf diese Ebene ab! Wie verlaufen die Bilder der Achsen zueinander?
Anleitung: Es sind zunächst die Längen der Seiten des Spurdreiecks zu konstruieren.

10. Die isometrische Projektion

Unter isometrischer Projektion versteht man den Sonderfall der axonometrischen Abbildung, für den die Verkürzung auf allen drei Achsen gleich ist. Ihr liegt also ein gleichseitiges Spurdreieck zugrunde (Abb. 118). Die Bilder der Achsen schneiden einander unter den gleichen Winkeln von 120°. Das isometrische Bild des Achsenkreuzes zeichnet man schnell durch Dreiteilung eines Kreises (Abb. 119). Das Verkürzungsverhältnis beträgt auf allen Achsen

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816 \ldots$$

Den Beweis für diese Behauptung kann man geometrisch durch zweimalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes führen (vgl. Abb. 120):

1. $e_s = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e_a$; 2. $e_s = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, e_x$;

3. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e_a = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, e_x$; 4. $\frac{e_x}{e_a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

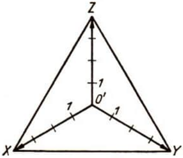


Abb. 118

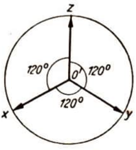


Abb. 119

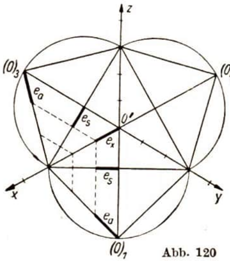


Abb. 120

Die wahre Länge einer parallel zu einer Achse liegenden Strecke l ist also

$$l = \frac{l'}{q} = l' \cdot \frac{1}{q} = l' \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = l' \cdot 1{,}224 \ldots,$$

wenn l' die Projektion der Strecke ist.

11. Die dimetrische Projektion

Als dimetrische Projektion bezeichnet man ein solches axonometrisches Abbildungsverfahren, bei dem das Verkürzungsverhältnis zweier Achsen gleich ist und die dritte Achse stärker verkürzt gezeichnet wird (vgl. oben Aufgabe 4). Dabei geht man zweckmäßig so vor, daß man die y- und die z-Richtung (Länge und Höhe) gleichmäßig verkürzt und für die x-Richtung (Breite) die stärkere Verkürzung wählt. Im Maschinenbau benutzt man häufig ein dimetrisches Abbildungsverfahren, bei dem das Verhältnis der Einheiten auf den Achsen $e_x : e_y : e_z = \frac{1}{2} : 1 : 1$ ist. Die Bildachsen schneiden dabei einander unter den Winkeln von annähernd 97,2°, 131,4° und 131,4° (Abb. 121). Auf den Beweis für diese Behauptung wollen wir verzichten. Dieses Abbildungsverfahren heißt genormte senkrechte axonometrische Projektion. Wenn im folgenden kurz von dimetrischer Projektion gesprochen wird, so ist darunter stets dieses genormte Verfahren zu verstehen.

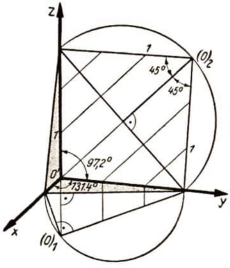


Abb. 121

Aufgaben

1. Stelle einen Raumpunkt P **a)** in senkrechter Eintafelprojektion mit Höhenmaß, **b)** im Zweitafelverfahren, **c)** mit Hilfe axonometrischer Abbildung in isometrischer Projektion und **d)** in dimetrischer Projektion dar!
Beispiele: $P(1; 1; 1)$, $P(3; 3; 3)$, $P(2; 2; 4)$, $P(2; 3; 4)$.
2. Es sind die Punkte mit den folgenden Koordinaten in isometrischer und in dimetrischer Projektion zu zeichnen.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
x	0	0	4	5	4	0	1	3	5	3,5	2
y	5	0	0	3	0	1	2	1	2	1,5	4,5
z	0	3	0	0	4	2	3	4	4	3	5,5

12. Die axonometrische Abbildung von einfachen ebenflächigen Körpern

Ein Raumpunkt P mit den Koordinaten $x = 2$; $y = 3$ und $z = 4$ ist in der Abb. 122 in isometrischer und in der Abb. 123 in dimetrischer Projektion dargestellt. Die Projektionen des Raumpunktes auf die Ebenen sind durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

Wir sind nun in der Lage, einfache Körper, die in einem xyz-Koordinatensystem liegen, axonometrisch darzustellen. Das Spurdreieck XYZ ist mit O' als Höhenschnittpunkt gegeben. Es kann beliebig spitzwinklig angenommen werden, wir beschränken uns aber auf die isometrische und dimetrische Projektion.

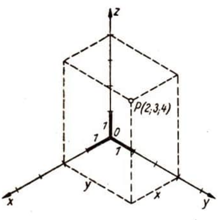


Abb. 122

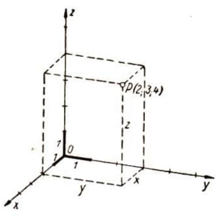


Abb. 123

Zunächst soll ein Würfel mit der Kantenlänge a in den beiden genannten Projektionsarten dargestellt werden. Wir denken uns den Würfel so in das Koordinatensystem geschoben, daß eine Würfel-

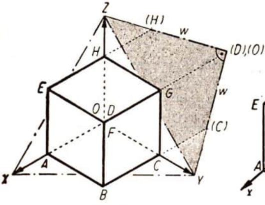


Abb. 124

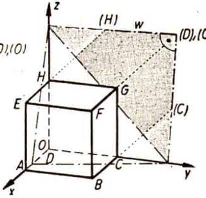


Abb. 125

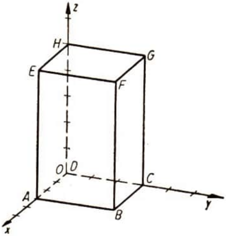


Abb. 126

ecke mit O zusammenfällt und die drei von ihr ausgehenden Kanten mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Die Konstruktion beginnt wie in der Abb. 124. Wir übertragen also die Verkürzung der Kanten auf die Achsen. Damit sind uns bereits vier Eckpunkte des Würfels, nämlich O, A, H und C, bekannt. Durch Ziehen von Parallelen vervollständigen wir die Konstruktion; wir erhalten damit das Bild des Würfels in axonometrischer Darstellung. In der Abb. 125 wird ein Würfel dimetrisch dargestellt.

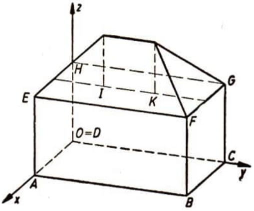


Abb. 127

Als zweites Beispiel wollen wir einen Quader mit quadratischer Grundfläche ($a = 3$ cm) und der Höhe $h = 5$ cm in dimetrischer Projektion darstellen (Abb. 126). Als drittes Beispiel ist in der Abb. 127 ein Haus mit einem Walmdach in dimetrischer Projektion dargestellt. Die Maße des Hauses sind: Länge 12 m, Breite 8 m, Traufenhöhe 6 m, Firsthöhe 10 m, Firstlänge 4 m, Maßstab 1:400. Das Haus ohne Dach ist ein Quader, der in den angegebenen Maßen gezeichnet wird. In der Deckfläche zieht man die zu EF parallele Mittellinie. Auf ihr werden zwei Punkte I und K bestimmt, die voneinander und von den Seiten FG und EH den Abstand 4 m haben. Senkrecht über I und K liegen die Endpunkte des Firstes in der Höhe 10 m. Die Verbindungslinien vervollständigen die Zeichnung.

Aufgaben

1. Es ist ein Quader mit den Kanten $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm **a)** im Zweitafelverfahren, **b)** in isometrischer Projektion, **c)** in dimetrischer Projektion zeichnerisch darzustellen.

2. Zeichne einen Quader mit quadratischer Grundfläche $a = 3$ cm und $h = 5$ cm in isometrischer Projektion! Ermittle die wahre Länge einer Flächendiagonale durch Umlegen um eine Grundkante!

3. Ein Haus mit Satteldach ist in dimetrischer Projektion zu zeichnen. Maße des Hauses: Länge 10,00 m, Breite 5,00 m, Traufenhöhe 4,00 m, Firsthöhe 6,00 m. Maßstab 1 : 200.

4. Zeichne einen Quader mit quadratischer Grundfläche, der oben durch ein Giebeldach abgeschlossen ist, in dimetrischer Projektion! Die Grundkanten des Quaders sind sämtlich 3,00 m lang, die Höhe beträgt 6,00 m. Das Giebeldach ist 2,00 m hoch. Maßstab 1 : 100.

5. Zeichne einen Treppenlauf, dessen Grundriß ein Rechteck ist! Die einzelnen Stufen haben die Abmessungen 1,00 m × 0,30 m × 0,15 m (0,15 m ist die Stufenhöhe). Maßstab 1 : 50.

IV. Ebenflächige Körper

Als ebenflächige Körper bezeichnet man alle diejenigen Körper, die nur durch ebene Flächen begrenzt werden. Einige spezielle ebenflächige Körper sind uns schon bekannt, zum Beispiel der Würfel und der Quader. In diesem Abschnitt werden wir die Darstellung sowie die Berechnung von Oberfläche und Volumen einiger ebenflächiger Körper behandeln.

13. Der Lehrsatz des Cavalieri

Zur Berechnung des Volumens von Körpern benötigen wir einen Lehrsatz, der es uns ermöglicht, das unbekannte Volumen eines Körpers mit Hilfe des bekannten Volumens eines anderen Körpers zu ermitteln. Die dazu notwendigen Betrachtungen führen wir an Flächen durch, weil daran das Wesentliche des Problems deutlich wird, die Betrachtungen selbst aber bedeutend vereinfacht werden.
Wir betrachten eine beliebige ebene Figur F, die wir durch eine Schar paralleler Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ in die Streifen $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ zerlegen. Jeder dieser Streifen S_i kann derart in ein Rechteck R_i eingeschlossen werden, daß es kein kleineres Rechteck gibt, das S_i ganz enthält (Abb. 128a). Andererseits kann man in jeden Streifen S_i ein Rechteck r_i so einschließen, daß es kein größeres Rechteck gibt, das ganz in S_i liegt (Abb. 128b). Die Flächeninhalte von R_i und r_i sind leicht zu ermitteln, der Flächeninhalt von S_i liegt offensichtlich zwischen beiden. Es gilt also

$$R_i > S_i > r_i.$$

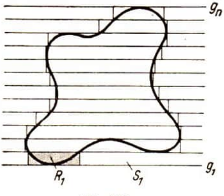


Abb. 128a

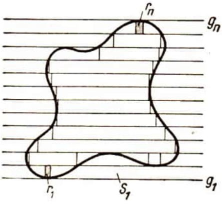


Abb. 128b

Die Summen der Flächeninhalte aller R_i und der Flächeninhalte aller r_i geben also Schranken, zwischen denen die Summe der Flächeninhalte aller S_i liegt. Die Summe der Flächeninhalte aller S_i ist aber der Flächeninhalt der Figur F.
Nun nähern sich sowohl R_i als auch r_i im Flächeninhalt um so besser einander an, je kleiner die Breite von R_i und r_i ist. Durch eine Verkleinerung aller Rechteckbreiten — oder mit anderen Worten: durch eine Vergrößerung der Anzahl der Streifen — kann man also den Unterschied von R_i und r_i beliebig klein machen. Damit kann man den Inhalt eines jeden S_i und folglich auch den Inhalt von F beliebig einschränken. Mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung, die im 11. Schuljahr behandelt wird, kann man zeigen, daß man den Inhalt von F exakt angeben kann, wenn man die Zahl der Streifen über alle Grenzen wachsen läßt oder — was dasselbe besagt — die Breite der Streifen kleiner als jede noch so kleine (positive) Zahl werden läßt.

Wir vergleichen nun zwei ebene Figuren F und F^*. Beide seien durch dieselbe Schar paralleler Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ in Streifen $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ und $S_1^*, S_2^*, S_3^*, \ldots, S_n^*$ von gleicher Breite zerlegt (Abb. 129). Gilt für den Inhalt F_{S_i} eines jeden S_i

$$F_{S_i} = F_{S_i^*},$$

so gilt auch für den Flächeninhalt I_F von F

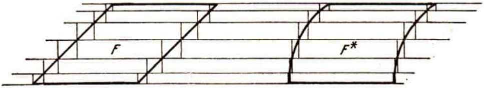


Abb. 129

$$I_F = I_{F^*},$$

wobei mit I_{F^*} der Inhalt von F^* bezeichnet ist.

Diese beiden Betrachtungen führen zu dem folgenden Satz:

Lassen sich zwei ebene Flächen so an eine Grundlinie anlegen, daß sie durch jede zur Grundlinie parallele Gerade in gleichen Strecken geschnitten werden, so sind die Flächen inhaltsgleich.

Bei der Herleitung dieses Satzes besteht noch eine Lücke. Wir sind nämlich bedenkenlos von Rechtecken — wenn auch noch so kleiner Breite — zu Geraden übergegangen. Gerade dieser Übergang wird aber mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung durchgeführt.

Entsprechende Überlegungen kann man auch für den Raum anstellen. Man erhält dann einen Satz, der als Lehrsatz des Cavalieri bezeichnet wird. Dieser Satz lautet:

Lehrsatz des Cavalieri:

Lassen sich zwei Körper so auf eine Grundebene stellen, daß sie durch jede zur Grundebene parallele Ebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden, so sind die Körper rauminhaltsgleich.

14. Die Prismen

a) Definition

Ein Körper, der durch zwei parallele kongruente n-Ecke als Grund- und Deckfläche und durch n Parallelogramme als Seitenflächen begrenzt wird, heißt n-seitiges Prisma (Abb. 130, fünfseitiges Prisma).

Der Abstand der Deckfläche von der Grundfläche heißt Höhe des Prismas. Ein Prisma heißt gerade, wenn alle Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen, andernfalls heißt es schief. Ein gerades Prisma heißt regelmäßig, wenn Grund- und Deckfläche regelmäßige Vielecke sind. Als Mantel des Prismas bezeichnet man die Gesamtheit der Seitenflächen; die Summe aus den Inhalten aller Begrenzungsflächen heißt Oberfläche des Prismas. Die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der Grund- und der Deckfläche eines regelmäßigen Prismas heißt Achse des Prismas. Jede Schnitt-

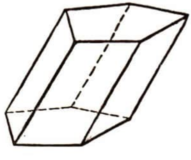


Abb. 130

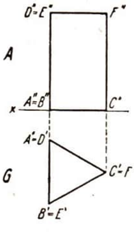


Abb. 131 a

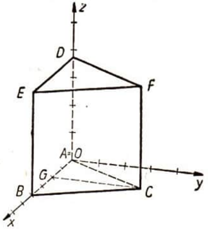


Abb. 131 b

ebene, die diese ganz enthält, schneidet aus einem regelmäßigen Prisma ein Parallelogramm aus, das man als Achsenschnitt bezeichnet.

In der Technik haben Gegenstände von der Form eines Prismas verschiedene Bezeichnungen. So können zum Beispiel Balken, Träger, kantige Säulen und Stäbe Prismen sein.

b) Darstellung von Prismen

Die Darstellung eines speziellen Prismas, des Quaders, im Zweitafelverfahren haben wir bereits in Abschnitt 8 kennengelernt. Die folgenden Abbildungen geben die Darstellung einiger anderer Prismen im Zweitafelverfahren (a) und in dimetrischer Projektion (b) wieder.

In der Abb. 131 ist ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma, in der Abb. 132 ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma dargestellt.

Erläuterung zur Abb. 131b: Eine Grundkante möge auf der x-Achse liegen. Die Punkte A und B sind leicht zu finden. Der Punkt C hat von der x-Achse den Abstand $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ in Richtung der y-Achse, denn GC ist die Höhe des gleichseitigen Dreieckes ABC mit der Seitenlänge a.

Zur Vereinfachung der Konstruktion eines sechsseitigen Prismas bei dimetrischer Darstellung ergänzt man ganz zweckmäßig das Sechseck zu einem Rechteck, wie es die Hilfsfigur in der Abb. 132b zeigt. Dann ist nämlich $OF = \frac{a}{2}$ und $OA = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, wenn a die Sechseckseite ist. Derartige Hilfskonstruktionen sind häufig zweckmäßig.

c) Berechnung des Volumens von Prismen

Das Volumen eines speziellen Prismas, des Quaders, kennen wir bereits. Haben die Kanten des Quaders die Längen a, b und c, so ist sein Volumen

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Da $a \cdot b$ gleich der Grundfläche G und c gleich der Höhe h ist, gilt

$$V = G \cdot h.$$

Wir vergleichen nun ein beliebiges Prisma mit einem Quader von gleicher Höhe und inhaltsgleicher Grundfläche. Jede zur Grundfläche parallele Ebene schneidet sowohl den Quader als auch

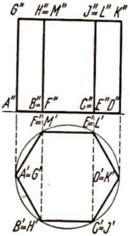


Abb. 132a

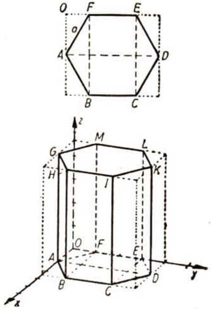


Abb. 132b

das beliebige Prisma in Flächen, die der Grundfläche kongruent, demnach auch inhaltsgleich sind. Nach dem Lehrsatz des Cavalieri sind also die Rauminhalte beider Körper gleich.

Es gilt mithin der Satz:

Der Rauminhalt V eines beliebigen Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = G \cdot h$.

Aufgaben

1. Ein regelmäßiges gerades **a)** vierseitiges, **b)** sechsseitiges Prisma ist in Grund- und Aufriß darzustellen. Wie verläuft ein Achsenschnitt jedes Körpers? Zeichne diesen in wahrer Größe! Welche Symmetrieverhältnisse haben die Körper?

2. Ein regelmäßiges gerades achtseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 2$ cm und der Höhe $h = 5$ cm ist
a) im Zweitafelverfahren in möglichst einfacher Lage,
b) mit Hilfe der dimetrischen Axonometrie darzustellen.
Anleitung: Zur axonometrischen Darstellung ist das Achteck zu einem Quadrat zu ergänzen.

3. Ein regelmäßiges gerades fünfseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 1{,}5$ cm und der Höhe $h = 4$ cm ist im Zweitafelverfahren und mit Hilfe der dimetrischen Projektion darzustellen.

4. Konstruiere das Zweitafelbild
a) eines unregelmäßigen schiefen dreiseitigen Prismas,
b) eines schiefen sechsseitigen Prismas mit regelmäßiger Grundfläche,
c) eines unregelmäßigen schiefen vierseitigen Prismas!

5. Mit Hilfe der dimetrischen Projektion ist
a) ein unregelmäßiges gerades fünfseitiges Prisma,
b) ein schiefes fünfseitiges Prisma mit regelmäßiger Grundfläche darzustellen.

6. Zeichne die Abwicklung
a) eines regelmäßigen geraden dreiseitigen Prismas,
b) eines regelmäßigen geraden sechsseitigen Prismas,
c) eines unregelmäßigen schiefen fünfseitigen Prismas!
Die Abwicklungen sind auszuschneiden und zu einem Flächenmodell des jeweiligen Körpers zusammenzukleben.

7. Es ist das Zweitafelbild eines unregelmäßigen sechsseitigen geraden Prismas zu zeichnen. Das Prisma wird durch eine Ebene geschnitten, die senkrecht auf der Aufrißebene steht und mit der Grundrißebene einen Winkel von 40° bildet. Die wahre Größe der Schnittfläche ist durch Umlegung um die Grundrißspur zu ermitteln.

8. Die äußeren Kanten einer Kiste sind 25 cm, 36 cm und 18 cm lang, die Brettdicke beträgt 10 mm. Welchen Rauminhalt hat die Kiste? Aus wieviel Kubikmetern Holz besteht sie?

9. Die Kanten eines Quaders sind dreimal (n-mal) so lang wie die entsprechenden Kanten eines anderen Quaders. Um wieviel größer sind Oberfläche und Rauminhalt des ersten Quaders als die entsprechenden Größen des zweiten?

10. Ein Quader hat den Rauminhalt 1220 cm³ und die Seiten 5 cm und 8 cm. Wie lang ist die dritte Seite?

11. Wie lang sind die Flächendiagonalen und die Körperdiagonalen und wie groß ist die Oberfläche eines Quaders mit den Seitenkanten a, b und c?

a)	$a = 6$ cm,	$b = 4$ cm,	$c = 5$ cm
b)	$a = 2{,}5$ dm,	$b = 1{,}2$ dm,	$c = 80$ cm
c)	$a = 3{,}75$ dm,	$b = 5{,}28$ dm,	$c = 8{,}42$ dm
d)	$a = 42$ mm,	$b = 3{,}8$ cm,	$c = 1{,}5$ dm

12. Die Grundkante eines regelmäßigen geraden dreiseitigen Prismas ist $a = 4$ cm, seine Höhe $h = 16$ cm. Berechne Rauminhalt und Oberfläche!

13. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $a = 2{,}6$ cm, die Höhe des Prismas ist $h = 17{,}2$ cm. Sein Rauminhalt und seine Oberfläche sind zu berechnen.

14. Der Rauminhalt eines geraden regelmäßigen sechsseitigen Prismas von der Höhe $h = 36$ m ist $V = 875\ \text{m}^3$. Wie groß sind Grundkante und Oberfläche?

15. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $a = 18$ cm und $c = 12$ cm und den gleichen Seiten $b = d = 8{,}5$ cm, die Höhe des Prismas ist $h = 17{,}2$ cm. Berechne Rauminhalt und Oberfläche des Prismas!

16. Die Oberfläche eines geraden regelmäßigen achtseitigen Prismas ist $O = 7400\ \text{cm}^2$, der Durchmesser des Umkreises der Grundfläche $2r = 18{,}5$ cm. Wie groß ist der Rauminhalt des Prismas?

17. Ein regelmäßiges gerades sechsseitiges Prisma mit dem Rauminhalt $V = 540\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ hat die Höhe $h = 10$ cm. Wie groß ist die Oberfläche?

18. In eine Kugel vom Radius $r = 10$ cm ist ein gerades quadratisches Prisma so einbeschrieben, daß alle Prismenecken auf der Kugeloberfläche liegen. Die Höhe des Prismas beträgt $h = 16$ cm. Wie groß sind die Grundkante a und der Rauminhalt des Prismas?

19. Aus einem geraden regelmäßigen dreiseitigen Prisma mit der Grundkante a und der Höhe h ist das größte quadratische Prisma von gleicher Höhe herzustellen. Wie groß sind dessen Grundkante und Rauminhalt?

20. a) Wieviel Liter Wasser kann ein oben offener prismatischer Wasserbehälter aus Stahlblech aufnehmen, dessen Grundfläche rechteckig ist ($a = 2{,}50$ m und $b = 1{,}25$ m) und dessen Höhe 2,30 m beträgt?
   b) Wieviel Quadratmeter Blech sind für den Behälter notwendig (ohne Überlappung)?
   c) Wieviel beträgt sein Gewicht (1 m² Blech wiegt 23,4 kp)? Zuschlag für Überlappung: 2 %.

21. Wieviel wiegen die folgenden Flachstähle[1]) (Wichte: $\gamma = 7{,}8\ \text{p/cm}^3$):
   a) 1,00 m ▭-Stahl 25 mm × 4 mm, b) 17,00 m ▭-Stahl 50 mm × 8 mm,
   c) 9,50 m ▭-Stahl 30 mm × 5 mm, d) 60,00 m ▭-Stahl 60 mm × 10 mm?

22. Wieviel wiegen die folgenden Profilstähle (Wichte: $\gamma = 7{,}8\ \text{p/cm}^3$):
   a) 25,75 m L-Stahl 25 mm × 25 mm × 5 mm,
   b) 18,50 m L-Stahl 40 mm × 80 mm × 8 mm,
   c) 17,50 m T-Stahl 80 mm × 80 mm × 9 mm,
   d) 65,30 m T-Stahl 100 mm × 50 mm × 8,5 mm?

23. Die Maße des Querschnittes eines I-Stahls sind der Abb. 108 zu entnehmen. Wie schwer sind Träger von 4,00 m, 5,75 m, 12,50 m Länge? (Wichte: $\gamma = 7{,}8\ \text{p/cm}^3$.)

24. Wie groß ist der Bodenraum einer Scheune mit Satteldach von 16,50 m Länge, 11,20 m Breite und 4,50 m Firsthöhe?

25. Ein rechteckiger Platz von 25,00 m Länge und 12,50 m Breite ist in Richtung der längeren Seite geneigt, so daß die eine kürzere Seite 0,65 m höher liegt als die andere. Der Platz ist eben.
   a) Er soll durch Aufschütten horizontal planiert werden. Wieviel Kubikmeter Erde sind mindestens anzufahren?
   b) Wieviel Kubikmeter sind zu bewegen, wenn der Platz so planiert werden soll, daß Erde weder ab- noch angefahren zu werden braucht?

26. Beim Bauen berechnet man als Durchschnittswert für den Materialverbrauch, daß man für 1 m³ Mauerwerk aus Mauerziegeln im Normalformat 52 (NF 52) 410 Mauersteine und 275 l Mörtel braucht. Prüfe die Richtigkeit dieser Materialverbrauchsnorm nach!
   Anleitung: Die Abmessungen eines Ziegels im Normalformat 52 sind 24 × 11,5 × 7,1 (in cm). Die Dicke der Stoßfugen (lotrecht stehend) beträgt durchschnittlich 1 cm, die Dicke der Lagerfugen (waagerecht liegend) 1,2 cm.

---

1) Die Bezeichnung ▭-Stahl ist eine Abkürzung für Flachstahl.

15. Die Pyramiden

a) Definition

Ein Körper, der ein n-Eck als Grundfläche und n in einem Punkte S zusammenstoßende Dreiecke als Seitenflächen hat, heißt n-seitige Pyramide (Abb. 133 zeigt eine dreiseitige Pyramide).

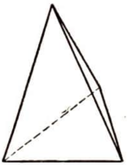


Abb. 133

Der Punkt S heißt Spitze der Pyramide. Die Länge des Lotes von der Spitze S auf die Ebene der Grundfläche heißt Höhe h. Hat die Grundfläche ein Symmetriezentrum[1]) und liegt die Spitze senkrecht darüber, so heißt die Pyramide gerade. Eine gerade Pyramide heißt regelmäßig, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist. Die Summe aus den Inhalten aller Begrenzungsflächen heißt Oberfläche der Pyramide. Bei einer geraden Pyramide heißt die Gerade durch die Spitze und den Mittelpunkt (Symmetriezentrum) der Grundfläche Achse der Pyramide. Jede Schnittebene, die diese Achse ganz enthält, heißt Achsenschnitt der Pyramide.

b) Darstellung von Pyramiden

Die folgenden Abbildungen geben die Darstellung im Zweitafelverfahren (a) und in dimetrischer Projektion (b) wieder. Die Abb. 134

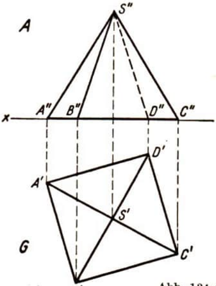


Abb. 134 a

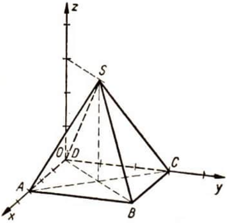


Abb. 134 b

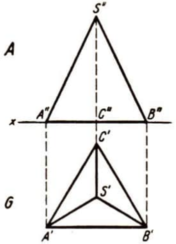


Abb. 135a

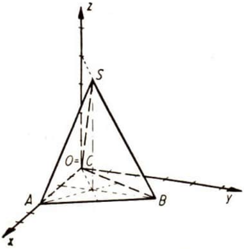


Abb. 135 b

1) Ein Punkt im Innern einer ebenen Figur heißt Symmetriezentrum, wenn die Figur durch Drehung um diesen Punkt bei einem Drehwinkel $\varphi = \frac{360°}{k}$ ($k > 1$, ganzzahlig) mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann. Beispiele: Im gleichseitigen Dreieck ist der Höhenschnittpunkt Symmetriezentrum ($k = 3$, $\varphi = 120°$); im Parallelogramm ist der Diagonalenschnittpunkt Symmetriezentrum ($k = 2$, $\varphi = 180°$, im Spezialfall Quadrat: $k = 4$, $\varphi = 90°$). Das ungleichseitige Dreieck hat kein Symmetriezentrum.

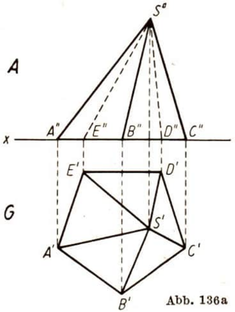


Abb. 136a

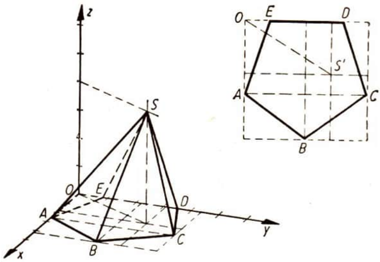


Abb. 136b

stellt eine regelmäßige gerade vierseitige Pyramide dar. Die Grundfläche wird wie bei den Prismen konstruiert. Senkrecht über ihrem Mittelpunkt liegt die Spitze S. In der Abb. 135 ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide und in der Abb. 136 eine fünfseitige schiefe Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche dargestellt.

c) Berechnung des Volumens von Pyramiden

Das dreiseitige Prisma $ABCDEF$ sei gegeben (Abb. 137), sein Rauminhalt ist

$$V = G \cdot h.$$

Zwei ebene Schnitte, einmal durch A, E und F und einmal durch A, C und E, zerlegen das Prisma in drei Pyramiden. Die Pyramide I ($ABCE$) und die Pyramide II ($EFDA$) haben inhaltsgleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Daraus folgt nach dem Strahlensatz: Schnittebenen, die bei beiden Pyramiden in gleicher Höhe parallel zur Grundfläche liegen, ergeben inhaltsgleiche Schnittfiguren. Nach dem Lehrsatz des Cavalieri ist also $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$. Die Pyramide I und die Pyramide III

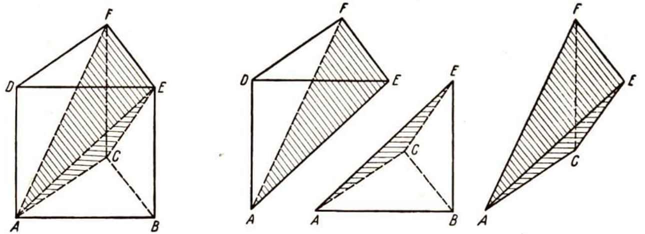


Abb. 137

($CEFA$) haben ebenfalls gleiche Grundflächen und gleiche Höhen (die Grundflächen sind BCE und CEF); es ist also $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{III}}$. Alle drei Pyramiden sind demnach rauminhaltsgleich.
Diese Betrachtung ist unabhängig von der Wahl des dreiseitigen Prismas, das also auch schief sein kann. Es gilt daher allgemein der folgende Satz:

Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei rauminhaltsgleiche Pyramiden zerlegen.

Die Summe der Rauminhalte aller drei Pyramiden ist gleich dem Rauminhalt $G \cdot h$ des dreiseitigen Prismas:

$$V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}} = G \cdot h$$

oder

$$3\,V_{\mathrm{I}} = G \cdot h, \qquad V_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3}\,G \cdot h.$$

Jede dreiseitige Pyramide kann man nun umgekehrt zu einem dreiseitigen Prisma ergänzen, indem man in geeigneter Weise Parallelen zu den Kanten zieht. Folglich gilt der Satz:

Der Rauminhalt V einer dreiseitigen Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = \frac{1}{3}\,G \cdot h$.

Man kann nun jede n-seitige Pyramide ($n > 3$) in ($n-2$) dreiseitige Pyramiden mit verschiedenen Grundflächen G_1, $G_2, \cdots G_{n-2}$ zerlegen, wenn man durch die Pyramide ebene Schnitte so legt, daß in der Schnittfläche jeweils eine Grundflächendiagonale und die Spitze liegen. Ihre Rauminhalte sind $V_1 = \frac{1}{3}\,G_1 \cdot h$; $V_2 = \frac{1}{3}\,G_2 \cdot h; \cdots; \quad V_{n-2} = \frac{1}{3}\,G_{n-2} \cdot h$.

Der Rauminhalt der n-seitigen Pyramide ist demnach

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{n-2},$$

$$V = \frac{1}{3}\,G_1 \cdot h + \frac{1}{3}\,G_2 \cdot h + \frac{1}{3}\,G_3 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3}\,G_{n-2} \cdot h,$$

$$V = \frac{1}{3}\,h\,(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_{n-2}).$$

Nun ist aber

$$G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_{n-2} = G,$$

mithin also

$$V = \frac{1}{3}\,G \cdot h.$$

Folglich gilt:

Der Rauminhalt einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = \frac{1}{3}\,G \cdot h$.

Aufgaben

1. Zeichne in senkrechter Zweitafelprojektion und mit Hilfe der dimetrischen Projektion
a) eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm) und der Höhe $h = 5$ cm,
b) eine regelmäßige gerade sechsseitige Pyramide mit der Grundkante $a = 2$ cm und der Höhe $h = 6$ cm,
c) eine regelmäßige gerade achtseitige Pyramide mit der Grundkante $a = 2$ cm und der Höhe $h = 4$ cm!

2. Konstruiere das Zweitafelbild
a) einer unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide,
b) einer unregelmäßigen vierseitigen geraden Pyramide,
c) einer sechsseitigen schiefen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche!

3. Zeichne die Abwicklung
a) einer regelmäßigen dreiseitigen geraden Pyramide,
b) einer quadratischen geraden Pyramide,
c) einer regelmäßigen geraden sechsseitigen Pyramide!
Die Abwicklungen sind auszuschneiden und zu einem Körpermodell zusammenzukleben.

4. Über einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite $a = 4{,}5$ cm ist eine gerade Pyramide errichtet, deren Spitze 6 cm über der Grundfläche liegt. Berechne **a)** den Rauminhalt, **b)** die Länge der Seitenkanten, **c)** die Oberfläche der Pyramide!

5. Über einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = 7{,}5$ cm und $b = 10$ cm ist eine Pyramide errichtet, deren Höhe $h = 12$ cm beträgt. Der Rauminhalt ist zu berechnen.

6. Berechne die Oberfläche einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 7$ cm und $b = 5$ cm und deren Höhe $h = 12$ cm ist!

7. Berechne den Rauminhalt einer regelmäßigen geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 7{,}5$ cm und mit den Seitenkanten $s = 14$ cm!

8. Wie groß ist der Rauminhalt einer Pyramide, wenn die Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $a = 8{,}4$ cm und die Höhe gleich der Diagonalen dieses Quadrates ist?

9. Berechne die Seitenkante s und den Rauminhalt V einer geraden regelmäßigen n-seitigen Pyramide, für die die Anzahl der Seitenflächen (n), die Grundkante (a) und die Höhe (h) gegeben ist!
a) $n = 4$, $a = 2{,}5$ cm, $h = 7{,}0$ cm;
b) $n = 3$, $a = 14{,}4$ cm, $h = 13{,}1$ cm;
c) $n = 8$, $a = 19{,}4$ cm, $h = 33{,}0$ cm;
d) $n = 12$, $a = 4{,}1$ cm, $h = 9{,}8$ cm.

10. Es ist die Grundkante a der regelmäßigen geraden fünfseitigen Pyramide zu berechnen, für die $s = 16{,}8$ cm und $h = 12{,}7$ cm ist.

11. Berechne die Höhe h einer regelmäßigen geraden sechsseitigen Pyramide, für die die Grundkante $a = 5{,}6$ cm und die Seitenkante $s = 7{,}5$ cm gegeben sind!

12. Wie groß ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Rauminhalt $V = 1644\ \text{cm}^3$ und deren Höhe $h = 27{,}4$ cm ist?

13. Eine Pyramide hat einen Rauminhalt von $2{,}7\ \text{dm}^3$ und eine Höhe von 40 cm. Die Grundfläche ist ein Quadrat. Wie lang ist die Seite des Quadrates?

14. Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 4$ cm ist eine gerade Pyramide mit der Höhe $h = 6$ cm errichtet. Berechne **a)** die Höhe der Dreiecke, die die Seitenflächen sind, **b)** die Neigungswinkel dieser Dreieckshöhen gegen die Pyramidenachse, **c)** die Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Pyramidenachse!

15. Der Rauminhalt einer schiefen Pyramide beträgt $V = 0{,}75\ \text{m}^3$, die Grundfläche $0{,}5\ \text{m}^2$. Die Höhe ist zu berechnen.

16. Welchen Rauminhalt und welche Oberfläche hat eine gerade quadratische Doppelpyramide, bei der die beiden Pyramiden eine gemeinsame Grundfläche haben und sämtliche Kanten $a = 2$ cm lang sind (regelmäßiges Achtflach oder Oktaeder)?

17. Wieviel wiegt eine Pyramide aus Marmor (Wichte: $\gamma = 2{,}7\,p/cm^3$), wenn die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 9$ cm und $b = 13$ cm und die Höhe $h = 21$ cm ist?

18. Wieviel wiegt eine gerade, regelmäßige fünfseitige Pyramide aus Beton (Wichte: $\gamma \approx 2{,}5\,p/cm^3$), deren Grundfläche einem Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm einbeschrieben ist und deren Seitenkante $s = 13$ cm lang ist?

19. Das Traufenviereck eines Turmes mit quadratischer Grundfläche hat 4,50 m Kantenlänge. Der Turm soll ein Zeltdach von 8,00 m Höhe erhalten. **a)** Wie lang sind die Gratbalken? **b)** Wieviel Quadratmeter Blech sind zum Eindecken notwendig bei einem Zuschlag von 5 % der errechneten Fläche für die Überlappung? **c)** Wie groß ist der vom Turmdach umschlossene Raum?

20. Eine schiefe Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Kante $a = 8$ cm und die Höhe $h = 11{,}5$ cm. Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide?

V. Krummflächige Körper

16. Der Zylinder

a) Definitionen

1. Definition: **Ein Körper heißt Kreiszylinder, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:**

1. **Der Körper wird von drei Flächen begrenzt.**
2. **Zwei dieser Flächen sind kongruente Kreise und liegen parallel zueinander.**
3. **Die dritte Fläche ist in einer Richtung so gekrümmt, daß alle in ihr existierenden Geraden zueinander parallel sind.**

Die Kreisflächen heißen Grund- und Deckfläche des Kreiszylinders, die gekrümmte Fläche heißt Mantelfläche (Abb. 138).

Entsprechend dieser Definition kann man auch Zylinder mit Grund- und Deckflächen definieren, die nicht kreisförmig sind. Wir werden aber nur Kreiszylinder behandeln. Wenn im folgenden kurz vom Zylinder gesprochen wird, so ist darunter also stets der Kreiszylinder zu verstehen. Beim Kreiszylinder heißt die Verbindungsgerade der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche Achse des Zylinders. Ein Schnitt, der die Achse enthält, heißt Achsenschnitt. Die Geraden in der Mantelfläche werden als Mantellinien bezeichnet. Stehen die Mantellinien senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Zylinder gerade.

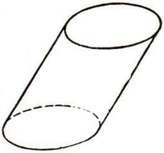


Abb. 138

Jeder Zylindermantel kann in die Ebene abgewickelt werden. Den Mantel eines geraden Kreiszylinders kann man zu einem Rechteck abwickeln, dessen eine Seite gleich einer Mantellinie s und dessen andere Seite gleich dem Kreisumfang $2\pi r$ ist (wobei r der Radius des Grundkreises des Zylinders ist). Da Grund- und Deckfläche ebene Flächen sind, kann man also ein vollständiges Netz des Zylinders zeichnen (vgl. Abb. 139, Netz eines geraden Kreiszylinders). Aus dem Netz kann man ein Körpermodell herstellen. Beim schiefen Kreiszylinder ist die Abwicklung des Mantels nicht — wie man bei oberflächlicher Betrachtung annehmen könnte — ein Parallelogramm, sondern eine ebene Figur, die von zwei parallelen Strecken und von zwei gekrümmten Kurven begrenzt wird.

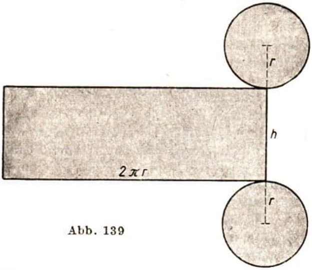


Abb. 139

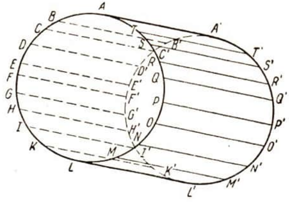


Abb. 140

Wir wollen noch eine weitere Definition des Zylinders kennenlernen, bei der wir die in der darstellenden Geometrie gewonnenen Erkenntnisse anwenden:

2. Definition: **Wird ein Kreis durch Parallelprojektion auf eine zur Ebene des Originals parallele Bildebene projiziert, so bilden die von dem Kreis und die vom Bild des Kreises berandeten Flächen sowie die Gesamtheit der Projektionsstrahlen zwischen Original und Bild einen Körper, der Kreiszylinder heißt** (Abb. 140).

Die von dem Kreis bzw. von dessen Bild berandeten Flächen heißen Grund- und Deckfläche, die von der Gesamtheit der Projektionsstrahlen zwischen Original und Bild erzeugte Fläche heißt Mantel des Kreiszylinders. Wird der Kreiszylinder durch senkrechte Parallelprojektion erzeugt, so heißt er gerade.

Jede Gerade in der Mantelfläche des Kreiszylinders heißt Mantellinie. Sie fällt mit einem Projektionsstrahl zusammen. Daraus ergibt sich, daß alle Mantellinien zueinander parallel sind.

Diese Definitionen 1 und 2 sind gleichwertig; man sagt dafür auch, sie sind **äquivalent.** Wir erkennen, daß man für die gleichen Begriffe in der Mathematik verschiedene Definitionen geben kann.

b) Die Darstellung des Kreises

Zur Darstellung des Kreiszylinders ist es notwendig, daß wir uns zunächst mit der Darstellung des Kreises bei senkrechter Parallelprojektion beschäftigen.

Liegt ein Kreis in einer zur Bildebene parallelen Ebene, so ist sein Bild ein dem Original kongruenter Kreis (Abb. 141). Liegt der Kreis in einer zur Bildebene senkrechten Ebene, so ist sein Bild eine Strecke von der Länge des Durchmessers (Abb. 141). In allen anderen Fällen liegt stets genau ein Durchmesser parallel zur Bildebene; dieser Durchmesser wird

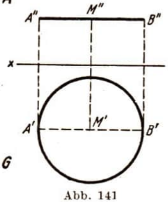


Abb. 141

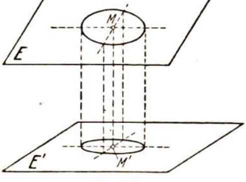


Abb. 142

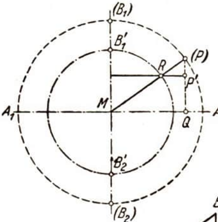
also in wahrer Länge abgebildet, während alle anderen Durchmesser verkürzt abgebildet werden (Abb. 142). Am stärksten wird der Durchmesser verkürzt, der senkrecht zu dem in wahrer Länge abgebildeten Durchmesser liegt. Das so entstandene Bild eines Kreises in allgemeiner Lage ist eine geschlossene Kurve. Sie heißt **Ellipse.** Der in wahrer Länge abgebildete Durchmesser heißt **Hauptachse** und wird mit $2a$ $(a = r)$ bezeichnet. Der am meisten verkürzt abgebildete Durchmesser heißt **Nebenachse** und wird mit $2b$ $(b < r)$ bezeichnet. Die Projektion M' des Kreismittelpunktes M ist Mittelpunkt der Ellipse. Alle Bilder von Kreisdurchmessern heißen Durchmesser der Ellipse.

Zur Darstellung eines beliebig gelegenen Kreises in senkrechter Parallelprojektion nehmen wir zunächst an, daß der in wahrer Länge abgebildete Durchmesser A_1A_2 in der Bildebene liege. Der eine Endpunkt B_1 des Kreisdurchmessers, der am stärksten verkürzt abgebildet wird, liege oberhalb der Bildebene. Der Winkel α zwischen Kreisebene und Bildebene ist gleich dem Winkel $B_1 M B_1'$. Da $M B_1$ gleich dem Kreisradius a, die Projektion dagegen gleich b ist, ergibt sich der Neigungswinkel α aus dem rechtwinkligen Dreieck in der Abb. 143. Legen wir die Kreisebene um $A_1 A_2$ in die Tafel um, so gelangt B_1 nach (B_1), B_2 nach (B_2) und ein beliebiger Kreispunkt P nach (P). Dabei bewegt sich jeder Kreispunkt P auf einem Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf A_1A_2 steht und dessen Projektion deshalb eine senkrecht auf $A_1 A_2$ stehende Gerade ist. Der Fußpunkt sei Q. Der Punkt P' liegt also auf $(P)Q$. Da PQ parallel zu $B_1 M$ liegt, wird $(P)\,Q$ in demselben Verhältnis verkürzt wie $(B_1)\,M$. Es gilt also

$$\frac{(P)\,Q}{P'\,Q} = \frac{a}{b}.$$

Wir schlagen jetzt um M einen Kreis mit dem Radius b und verbinden (P) mit M. Der Schnittpunkt mit diesem Kreis sei R. Es ist $(P)\,M = a$ und $R\,M = b$. Nun ziehen wir durch R die Parallele zu $A_1 A_2$, die $(P)\,Q$ im Punkt S schneide. Nach den Strahlensätzen gilt

$$\frac{(P)\,Q}{S\,Q} = \frac{(P)\,M}{R\,M} = \frac{a}{b}.$$



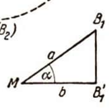


Abb. 143

Wir erkennen, daß der Punkt S auf der Strecke $(P)\,Q$ liegt und diese Strecke im Verhältnis $a : b$ verkürzt. Daraus folgt, daß S der gesuchte Bildpunkt P' ist. Auf diese Weise lassen sich alle Punkte des Risses konstruieren (vgl. Abb. 144).

Wir können nunmehr die Einschränkung fallen lassen, daß die Hauptachse in der Bildebene liege, da sich das Bild einer Figur nicht ändert, wenn die Figur in Richtung der Projektionsstrahlen parallel zu sich selbst verschoben wird.

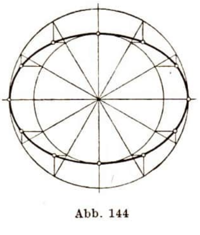


Abb. 144

Zur Konstruktion des dimetrischen Bildes legen wir den Kreis so, daß die y-Achse Durchmesser des

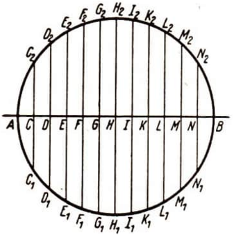


Abb. 145a

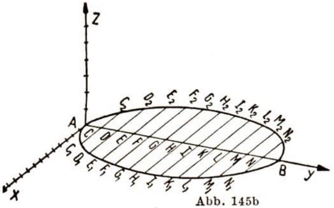


Abb. 145b

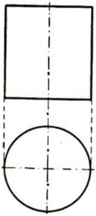


Abb. 146a

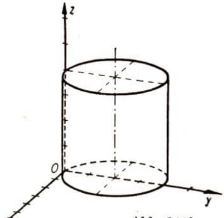


Abb. 146b

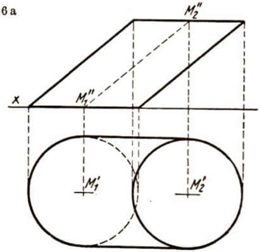


Abb. 147a

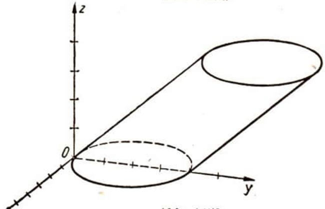


Abb. 147b

Kreises ist (Abb. 145). Durch eine beliebige Anzahl von Senkrechten zur Achse AB legen wir Punkte C_1, C_2; D_1, D_2; $\cdots$ auf dem Kreis fest. Die Senkrechten verlaufen im dimetrischen Bild parallel zur x-Achse und werden im entsprechenden Verhältnis verkürzt. In der Abb. 145 ist der Kreis im genormten senkrechten axonometrischen Abbildungsverfahren dargestellt, bei dem bekanntlich die Einheit auf der x-Achse gegenüber denen der anderen beiden Achsen im Verhältnis 1 : 2 verkürzt ist.

c) Die Darstellung eines Kreiszylinders

In den Abb. 146a und b ist ein gerader Kreiszylinder in den beiden behandelten Darstellungsverfahren abgebildet. Ein schiefer Zylinder ist in den Abb. 147a und b dargestellt. Die Darstellung des Kreiszylinders im Zweitafelverfahren ist sehr einfach: Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Darstellung des Grundrisses behandelt, für den Aufriß können sinngemäß die Ausführungen über Prismen übertragen werden.

Entsprechendes gilt für das axonometrische Bild.

Wir wollen nun noch einen ebenen Schnitt schräg zur Achse eines geraden Kreiszylinders konstruieren (vgl. Abb. 148). Dabei beschränken wir uns auf den Fall, bei dem die Schnittebene senkrecht auf der Aufrißebene steht. Die Grundrißspur der Schnittebene ist s_1, die Aufrißspur ist s_2. Auf der Schnittkurve der Schnittebene mit dem Zylinder nehmen wir beliebige Punkte A, B, C, D, E, F, G und H an. Sie sind durch Angabe im Grundriß eindeutig festgelegt. Ihr Aufrißbild erhalten wir als Schnittpunkt der zugehörigen Ordnungslinie mit der Aufrißspur der Schnittebene. Die wahre Gestalt der Schnittfläche ermitteln wir, indem wir die Schnittebene um die Spur s_1 in die Grundrißebene umlegen. Dabei wenden wir das Verfahren an, das wir im Abschnitt II. 7 kennengelernt haben. Durch die Umlegung erhalten wir (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G) und (H).

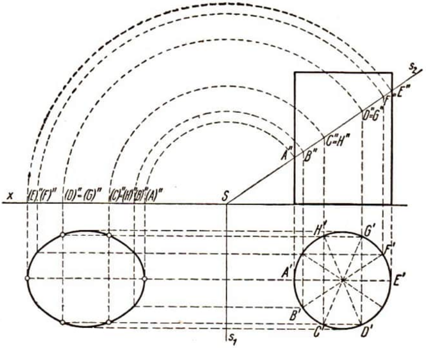


Abb. 148

Wir haben die Konstruktion nur für acht beliebig gewählte Punkte durchgeführt. Man kann auf diese Weise jeden Punkt der Schnittkurve konstruieren, so daß man die wahre Schnittfigur erhält. Sie ist stets eine Ellipse, wenn die Schnittebene nur die Mantelfläche schneidet. Anderenfalls ist sie eine ebene Fläche, die von mindestens einem Ellipsenbogen und mindestens einer Geraden begrenzt ist. Denkt man sich nämlich den Zylinder beliebig verlängert, so ist auch in diesem Fall die Schnittfigur eine Ellipse; diese wird jedoch durch die Grundfläche oder die Deckfläche oder durch beide Flächen geradlinig beschnitten.

Aus diesen Überlegungen folgt der Satz:

> **Jede Ellipse kann man im Raum in eine solche Lage bringen, daß ihr Bild bei senkrechter Parallelprojektion ein Kreis ist.**

Dabei ist die Nebenachse parallel zur Bildebene zu legen, der Radius des Kreises ist gleich der halben Nebenachse.

d) Die Berechnung der Zylinderoberfläche

Wie wir bereits feststellten, kann der Mantel eines geraden Kreiszylinders in die Ebene als Rechteck mit den Seiten s und $2\pi r$ abgewickelt werden. Dabei ist die Länge der Mantellinie s gleich der Höhe h des Zylinders.

Für den Flächeninhalt F_M des Mantels gilt also

$$\boldsymbol{F_M = 2\pi r \cdot h.}$$

Für den Flächeninhalt F_G der Grundfläche gilt ebenso wie für den Flächeninhalt F_D der zur Grundfläche kongruenten Deckfläche

$$F_G = F_D = \pi r^2.$$

Die Oberfläche O setzt sich aus der Summe der Begrenzungsflächen zusammen. Es gilt also:

$$O = F_M + F_G + F_D = F_M + 2\,F_G,$$

mithin

$$\boldsymbol{O = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h).}$$

Diese Formel gilt nur für den geraden Kreiszylinder; für die Herleitung des Oberflächeninhalts bei anderen Zylindern sind Betrachtungen notwendig, die über den Lehrstoff der Oberschule hinausgehen.

e) Die Berechnung des Zylindervolumens

Zur Herleitung des Zylindervolumens vergleichen wir einen beliebigen Kreiszylinder mit einem quadratischen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Jeder dieser Körper wird von jeder zur Grundfläche parallelen Ebene in einer Fläche geschnitten, die zur Grundfläche kongruent ist. Wir können deshalb den Lehrsatz des Cavalieri anwenden. Aus ihm folgt, daß beide Körper gleiches Volumen haben. Für das Volumen V des Zylinders gilt demnach

$$V = G \cdot h,$$

wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe des Zylinders ist. Da $G = \pi r^2$ ist, folgt der Satz:

Der Rauminhalt eines Kreiszylinders mit dem Radius r und der Höhe h beträgt

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot h.}$$

Er gilt, wie aus der Herleitung hervorgeht, für jeden Kreiszylinder. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Höhe h nur bei geraden Kreiszylindern gleich der Länge der Mantellinie s ist. Allgemein ist h der Abstand von Grund- und Deckfläche.

Aufgaben

1. Um einen Kreis liege ein regelmäßiges Achteck. Es ist das axonometrische Bild des Kreises mit Hilfe des Achteckes zu zeichnen.
2. Zeichne das axonometrische Bild eines Kreises mit $r = 3$ cm (4 cm)!
3. Schneide aus Pappe Rechtecke verschiedener Form und Größe und drehe die Rechtecke um eine Symmetrieachse! Welche Drehkörper entstehen?
4. Ein gerader Kreiszylinder, dessen Radius 2 cm (3 cm, 1 cm) und dessen Höhe 6 cm (1 cm, 7 cm) beträgt, ist im Grund- und Aufriß und mit Hilfe der dimetrischen Projektion zu zeichnen. Die Lage des Zylinders ist so zu wählen, daß seine Achse **a)** senkrecht auf der Grundrißebene, **b)** senkrecht auf der Aufrißebene steht.

5. Der Achsenschnitt eines Zylinders sei ein Quadrat mit der Seite $a = 3{,}6$ cm. Der Zylinder ist in den beiden behandelten Abbildungsarten zu zeichnen.

6. Ein schiefer Zylinder ist mit seiner Körperachse um 30° gegen die Senkrechte auf der Grundrißebene geneigt. Er hat den Radius $r = 2{,}5$ cm und die Höhe $h = 5$ cm. Der Zylinder ist im Zweitafelverfahren darzustellen.

7. Ein Zylinder entstehe durch Drehung eines quadratischen Achsenschnittes. Wie verhalten sich Radius und Höhe zueinander?

8. Ein Kreis mit dem Radius r wird in senkrechter Parallelprojektion abgebildet. Berechne die Länge der Nebenachse $2b$ der entstehenden Ellipse in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α der Kreisebene gegen die Grundrißebene!

9. Eine Ellipse hat die Achsen $2a = 12$ cm und $2b = 8$ cm. Unter welchem Winkel muß die Hauptachse zur Grundrißebene geneigt sein, damit die Projektion ein Kreis wird?

10. Berechne den Mantel eines geraden Zylinders, von dem gegeben ist: **a)** $r = 2{,}5$ cm, $h = 23$ cm; **b)** $r = 3$ mm, $h = 2{,}15$ m!

11. Ein Rechteck mit den Seiten 3 cm und 4 cm rotiert einmal um die eine Seite, das andere Mal um die andere Seite als Achse. In welchem Verhältnis stehen die Mäntel der entstehenden Zylinder zueinander?

12. Von einem Zylinder ist gegeben: und gesucht:

	gegeben		gesucht
a)	$M = 126\ \text{cm}^2$,	$r = 3{,}25$ cm;	$h,\ O,\ V$,
b)	$O = 10\ \text{cm}^2$,	$r = 1$ cm;	$h,\ M,\ V$,
c)	$V = 1\ \text{m}^3$,	$r = 12$ cm;	$h,\ M,\ O$,
d)	$M = 45{,}6\ \text{cm}^2$,	$h = 6{,}2$ cm;	$r,\ O,\ V$,
e)	$V = 15840\ \text{cm}^3$	$h = 35$ cm;	$r,\ M,\ O$.

13. a) Zeichne auf den Mantel eines geraden, lotrecht stehenden Kreiszylinders eine Schar von Höhenlinien und eine Schar von Mantellinien! Was ergeben beide Kurvenscharen bei der Abwicklung des Zylindermantels in die Ebene?

b) Rolle ein Stück Papier von der Form eines Parallelogramms zu einem Zylindermantel zusammen! Welche Zylindermäntel können entstehen?

14. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders beträgt $M = 832{,}7\ \text{cm}^2$. Die Höhe verhält sich zum Radius des Grundkreises wie 5 : 2. Wie groß ist der Rauminhalt?

15. Es sind Volumen, Mantel und Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r zu berechnen.

16. Wie groß ist der Rauminhalt eines geraden Zylinders, wenn der Mantel ein Rechteck mit den Seiten 10,3 cm und 8,5 cm bildet? Begründe, weshalb die Aufgabe nicht eindeutig ist, und gib alle möglichen Lösungen an!

17. Bei den in der Technik angewandten Formeln für den Rauminhalt und den Mantel eines geraden Zylinders wird an Stelle des Grundkreisradius r oft der leichter meßbare Durchmesser $d = 2r$ angegeben. Wie heißen dann die Formeln für V, M und O des geraden Zylinders?

18. Das Volumen eines schiefen Zylinders beträgt $V = 0{,}5\ \text{m}^3$. Der Grundkreis hat einen Radius $r = 25$ cm. Wie groß ist die Höhe h des Zylinders?

19. Ein zylindrisches Standglas soll als Meßzylinder geeicht werden. Der Boden des Standglases ist eben, sein lichter Durchmesser beträgt 26 mm.

a) Wie hängt der Inhalt der Zylinderfüllung vom Bodenabstand des Flüssigkeitsspiegels ab?

b) Stelle diese Abhängigkeit geometrisch dar und entnimm dem Funktionsbild die Teilung des Zylinders für 5, 10, 15, ···, 100 cm³!

c) Zeichne das Zweitafelbild des Meßzylinders mit Teilung im Aufriß!

20. Ein Gasrohr aus Grauguß von $2\frac{3}{4}$ mm Wanddicke hat einen lichten Durchmesser von $\frac{3}{4}$ Zoll (1 Zoll = 25,4 mm). Wieviel wiegt ein Meter Gasrohr? (Wichte: $\gamma = 7{,}2\ \text{p/cm}^3$.)

21. In der Technik bestimmt man das Gewicht eines laufenden Meters Rundstahl oft durch die Faustformel $G \approx 612\, d^2$, wobei d in Zentimetern eingesetzt wird und das Ergebnis in Pond berechnet ist. Für Überschlagsrechnungen rundet man 612 auf 600. Begründe die Brauchbarkeit dieser Faustformel!

22. Wieviel wiegt eine 850 mm lange Stahlwelle mit dem Durchmesser 125 mm? (Wichte: $\gamma = 7{,}8$ p/cm³.)

23. Ein zylinderförmiger Gasometer soll 3000 m³ Gas bei Normaldruck fassen und 10 m hoch werden. Wie groß ist sein innerer Durchmesser zu wählen?

24. Ein zylindrisches Litermaß soll quadratischen Achsenschnitt erhalten. Wie sind die Ausmessungen zu wählen?

25. Wieviel wiegen 500 m Kupferdraht (Wichte: $\gamma = 8{,}9$ p/cm³) von 3 mm Dicke? Wieviel Meter Draht entfallen auf 1 kp?

26. Ein Meßzylinder von 50 mm lichter Weite soll mit Teilstrichen versehen werden, die je 10 cm³ abgrenzen sollen. In welchem Abstand müssen die Markierungen angegeben werden?

27. Wieviel wiegen die folgenden Rundstähle?

a) 10,00 m lang, 30 mm Durchmesser
b) 75,00 m lang, 35 mm Durchmesser
c) 8,75 m lang, 45 mm Durchmesser
d) 850,00 m lang, 125 mm Durchmesser (Wichte: $\gamma = 7{,}8$ p/cm³)

28. In der folgenden Tabelle sind die Kessel der wichtigsten Lokomotivarten der Deutschen Reichsbahn angegeben (Abb. 149). Zwischen der Feuerbüchse und der Rauchkammer liegt der zylindrische Kessel. Er ist von Heiz- und Rauchrohren durchzogen. Berechne **a)** den Wasserinhalt des Kessels unter Annahme, daß drei Viertel des zylindrischen Kesselteils mit Wasser, der restliche Raum mit Dampf gefüllt ist, **b)** die Rohrheizfläche (Summe der Außenflächen sämtlicher Heiz- und Rauchrohre)!

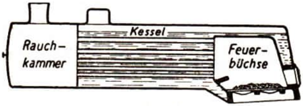


Abb. 149

Bezeichnung der Lokomotiven	Sämtliche Maßangaben in cm							
	Kessel		Heizrohre			Rauchrohre		
	Länge	Durchmesser	Anzahl	Durchmesser innen	Durchmesser außen	Anzahl	Durchmesser innen	Durchmesser außen
2 C 1 Schnellzuglok	680	190	106	6,5	7,0	24	16,3	17,1
2 C 2 Personenzuglok	470	180	155	4,6	5,1	41	12,5	13,3
1 E Güterzuglok	580	190	127	4,9	5,4	43	13,5	14,3

29. Die nachstehende Tabelle enthält Angaben über Dampfzylinder der wichtigsten Lokomotivarten der Reichsbahn.

Bezeichnung der Lokomotiven	Zylinderdurchmesser [cm]	Hublänge [cm]
2 C 1 Schnellzuglok	57	66
2 C 2 Personenzuglok	60	66
1 E Güterzuglok	72	66

Gib den Hubraum für jeden Zylinder an!

80. In einer kleinen hydraulischen Presse hat der Zylinder des Druckkolbens 10 mm inneren Radius, der Druckkolben hat 270 mm Hubhöhe. Wie hoch wird der Stempel des weiteren Zylinders von 300 mm innerem Radius durch 1000 Kolbenstöße am Druckkolben gehoben?

81. Ein zylindrisches Bleirohr von 10 m Länge hat einen lichten Durchmesser von 2 cm und eine Dicke von 3 mm. Wieviel wiegt es? (Wichte: $\gamma = 11{,}3$ p/cm³.)

82. Wieviel wiegt das laufende Meter eines gußeisernen Wasserrohres ($\gamma = 7{,}2$ p/cm³) von 25 mm äußerem Durchmesser und 4 mm Wanddicke?

83. Ein Stück Blei wiegt 2 kp. Wieviel massive Zylinder von 3 mm Radius und 9 mm Höhe können daraus gegossen werden? (Wichte: $\gamma = 11{,}3$ p/cm³.)

84. Zum Ausgleich plötzlich auftretender Druckschwankungen sind in die Druckwasserleitungen eines Pumpspeicherwerkes zwei Stahlblechzylinder als Wasserschlösser eingebaut. Ihre Durchmesser betragen 17 m, ihre Höhen 35 m.

a) Wieviel Kubikmeter Volumen haben die beiden Behälter?

b) Wieviel Quadratmeter Stahlblech sind zu ihrem Bau verwendet worden?

85. Nahtlose Stahlrohre für hohe Drucke werden aus einem Stück gezogen.

a) Wie lang muß ein Stahlblock von quadratischem Querschnitt (Seitenlänge des Quadrats 200 mm) sein, wenn man aus ihm ein 12 m langes Stahlrohr mit einem lichten Durchmesser von 150 mm und einer Wanddicke von 4 mm ziehen will?

b) Aus einem 500 mm langen Stahlblock mit quadratischem Querschnitt (200 mm × 200 mm) wird ein Stahlrohr mit einer Wanddicke von 5 mm und einem lichten Durchmesser von 120 mm gezogen. Wie lang wird es?

86. Ein Einflammrohr-Dampfkessel ist 450 cm lang und hat einen inneren Durchmesser von 140 cm. Das Flammrohr ist aus Stahlblech von 7 mm Stärke gefertigt und hat einen äußeren Durchmesser von 75 cm.

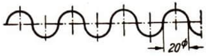


Abb. 150

a) Wie groß ist die Heizfläche des Flammrohres?

b) Wie groß ist die für das Flammrohr benötigte Menge Stahlblech und sein Gewicht, wenn für Nieten und Laschen ein Zuschlag von 15 % gerechnet wird?

c) Um wieviel vergrößert sich die Heizfläche des Flammrohres, wenn an Stelle von glattem Stahlblech gewelltes Stahlblech verwendet wird (Durchmesser der Halbwelle $d = 2$ cm; vgl. Abb 150)?

d) Zeichne den Dampfkessel in einem Längsschnitt und einem Querschnitt mit einem Flammrohr von glattem Stahlbech!

87. Wie groß ist der lichte Durchmesser einer Kapillare, die nach Einfüllung eines 8 cm langen Quecksilberfadens bei 18° C ein Mehrgewicht von 0,268 p aufweist? (Wichte bei 18° C: $\gamma = 13{,}55$ p/cm³.)

88. Den Rauminhalt von Fässern und Tonnen berechnet man mit guter Annäherung nach der Formel für das Volumen eines Zylinders, wobei man für die Höhe die des Fasses bzw. der Tonne und für den Radius den halben mittleren Faßdurchmesser d_m (Keplersche Faßregel, Abb. 151) einsetzt. Unter dem mittleren Durchmesser eines Fasses oder einer Tonne versteht man das arithmetische Mittel zwischen dem Bodenkreisdurchmesser d_1 und zwei Spundkreisdurchmessern d_2:

$$d_m = \frac{d_1 + d_2 + d_2}{3} = \frac{d_1 + 2d_2}{3}.$$

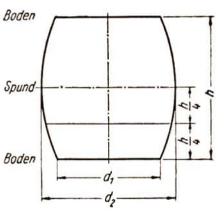


Abb. 151

a) Begründe die Formel für den mittleren Durchmesser d_m eines Fasses!

b) Zeige, daß der mittlere Durchmesser eines Fasses auch $d_m = d_1 + \frac{2}{3}(d_2 - d_1)$ ist!

c) Zeige, daß der mittlere Radius eines Fasses $r_m = \frac{r_1 + 2r_2}{3}$ oder $r_m = r_1 + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1)}{3}$ ist!

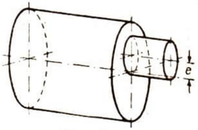


Abb. 152

d) Leite die Näherungsformel für den Rauminhalt eines Fasses ab!

$$V_F \approx \pi r_m^2 \cdot h \text{ oder } V \approx \frac{\pi}{4} d_m^2 \cdot h$$

39. Wieviel Liter fassen annähernd die folgenden Fässer, deren Wanddicke sämtlich 2 cm beträgt?

	a)	b)	c)
Spunddurchmesser d_2	80 cm	55 cm	52 cm
Bodendurchmesser d_1	70 cm	47 cm	40 cm
Höhe h	100 cm	80 cm	66 cm

40. Die Abb. 152 stellt einen Bolzen mit exzentrischem[1]) Zapfen dar. Der Durchmesser des Bolzens beträgt 36 mm, die Gesamtlänge 55 mm, die Länge des Zapfens 15 mm, der Durchmesser des Zapfens 20 mm und die Exzentrizität $e = 6$ mm.

a) Zeichne das Werkstück im Grund- und Aufriß, wobei die Lage des Bolzens so zu wählen ist, daß die kreisförmigen Begrenzungsflächen parallel zu einer Rißebene liegen!

b) Bestimme das Volumen des Werkstückes!

17. Der Kegel

a) Definition

Ein Körper heißt Kreiskegel, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:
1. Der Körper wird von zwei Flächen begrenzt.
2. Die eine dieser Flächen ist ein Kreis.
3. Die andere Fläche ist in einer Richtung so gekrümmt, daß alle in ihr existierenden Geraden einander in ein und demselben Punkt schneiden.

Der Kreis heißt Grundfläche des Kreiskegels, die gekrümmte Fläche heißt Mantelfläche (Abb. 153). Die Geraden in der Mantelfläche werden als Mantellinien bezeichnet. Der gemeinsame Schnittpunkt der Mantellinien heißt Spitze des Kegels. Die Länge des Lotes von der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe des Kegels. Entsprechend dem Zylinder kann man auch Kegel definieren, deren Grundfläche nicht kreisförmig ist. Wir werden aber nur Kreiskegel behandeln. Wenn im folgenden kurz vom Kegel gesprochen wird, so ist darunter also stets der Kreiskegel zu verstehen. Beim Kreiskegel heißt die Gerade durch Spitze und Mittelpunkt der Grundfläche Achse des Kegels. Ein Schnitt, der die Achse ganz enthält, heißt Achsenschnitt. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel gerade.

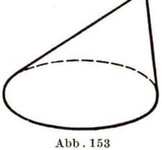


Abb. 153

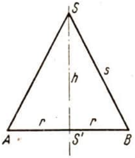


Abb. 154

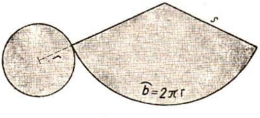


Abb. 155

1) In diesem Zusammenhang bedeutet „exzentrisch", daß die Körperachse des Bolzens nicht mit der Körperachse des Zapfens zusammenfällt. Die Exzentrizität gibt den Abstand dieser Achsen an.

Auch für den Kegel kann man ähnlich wie für den Zylinder eine äquivalente Definition mit Hilfe der darstellenden Geometrie angeben. Man benötigt dazu jedoch die Zentralprojektion, die wir nicht behandeln.

Satz: Beim geraden Kreiskegel sind alle Mantellinien gleich lang.

Beweis: Es sei ASB ein beliebiger Achsenschnitt des geraden Kreiskegels (vgl. Abb. 154). $SS' = h$ sei die Achse. Dann ist $AS' = r$ der Radius des Grundkreises, $AS = s$ ist eine Mantellinie. Da SS' auf der Grundfläche senkrecht steht, bildet SS' mit AS' einen rechten Winkel. Das rechtwinklige Dreieck $AS'S$ ist mithin unabhängig von der Wahl des Punktes A auf dem Grundkreis bestimmt. Es ist stets $AS = s = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Aus diesem Satz läßt sich unmittelbar folgern:

Jeder Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein gleichschenkliges Dreieck.

Der Mantel eines jeden Kegels läßt sich in die Ebene abwickeln. Wird der Mantel eines geraden Kreiskegels entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und in eine Ebene abgewickelt, so entsteht ein Kreisausschnitt. Der Radius ϱ dieses Kreisausschnittes ist gleich einer Mantellinie s, der Bogen b ist gleich dem Umfang $2\pi r$ des Grundkreises (wobei r der Radius des Grundkreises ist). Da die Grundfläche eine ebene Fläche ist, kann man das Netz eines geraden Kreiskegels zeichnen (vgl. Abb. 155, Netz eines geraden Kreiskegels).

b) Die Darstellung des Kreiskegels

In der Abb. 156a ist ein gerader Kreiskegel im Zweitafelverfahren, in der Abb. 156b mit Hilfe der dimetrischen Projektion dargestellt. Die Konstruktion der Bilder ist nach den vorangegangenen Ausführungen einfach: Beim Zweitafelverfahren wird zweckmäßig zuerst der Grundriß, bei der axonometrischen Darstellung zuerst die Grundfläche gezeichnet. Die Spitze S des Kegels befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche. Ihr Aufriß liegt also auf der zum Mittelpunkt des Grundrisses gehörigen Ordnungslinie im Abstand h von der Bildachse. Die Grundfläche erscheint im Aufriß als Abschnitt $A''B''$ der Bildachse von der Länge $2r$. Die Verbindungsstrecken $S''A''$ und $S''B''$ vervollständigen den Aufriß. Sie sind Mantellinien des Kegels. Ist an Stelle der Höhe h die Länge der Mantellinie s gegeben, so ist der Aufriß durch das Dreieck $A''B''S''$ mit $A''S'' = B''S'' = s$ und $A''B'' = 2r$ eindeutig bestimmt. Bei axonometrischer Darstellung findet man die Spitze S des Kegels auf der Parallelen zur z-Achse durch den Mittelpunkt S' der Grundfläche; sie hat auch hierbei den Abstand h von S'. Die Tangenten von S aus an die Ellipse vervollständigen das axonometrische Bild des Kegels. Ist an Stelle der Höhe h die Länge der Mantellinie s gegeben, so wird man zweckmäßig h nach dem Lehrsatz des

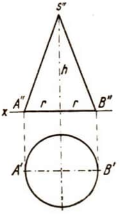


Abb. 156a

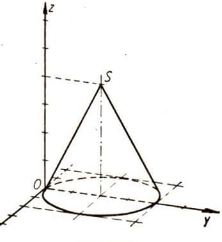


Abb. 156 b

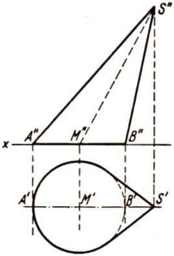


Abb. 157 a

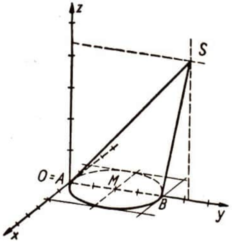


Abb. 157b

Pythagoras berechnen bzw. konstruieren. In den Abb. 157a und b ist ein schiefer Kreiskegel in den beiden von uns betrachteten Darstellungsverfahren gezeichnet. Die dabei gegenüber dem geraden Kreiskegel auftretenden Abweichungen in der Konstruktion können den Abbildungen entnommen werden.

c) Die Berechnung der Kegeloberfläche

Wie wir bereits feststellten, kann der Mantel eines geraden Kreiskegels als Kreisausschnitt mit dem Radius s und der Bogenlänge $2\pi r$ in die Ebene abgewickelt werden. Dabei ist r der Radius des Grundkreises. Den Flächeninhalt F_M des Mantels ermitteln wir, indem wir ihn ins Verhältnis zu einem Kreis mit dem Radius s setzen. Es verhält sich nämlich der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes zum Flächeninhalt des zugehörigen Vollkreises wie der Bogen des Kreisausschnittes zum Umfang des Kreises. Mithin gilt für den Flächeninhalt F_M die Proportion:

$$F_M : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s.$$

Durch Umformung folgt $F_M = \pi r \cdot s$. Der Flächeninhalt F_G der Grundfläche ist bekanntlich $F_G = \pi r^2$. Die Oberfläche O setzt sich aus der Summe der Begrenzungsflächen zusammen. Es gilt also: $O = F_M + F_G$, mithin

$$\boldsymbol{O = \pi r s + \pi r^2 = \pi r\,(r + s).}$$

Setzt man in die Formel für die Mantelfläche bzw. für die Oberfläche an Stelle von s den mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes ermittelten Wert $s = \sqrt{h^2 + r^2}$, so ergibt sich $F_M = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ und

$$\boldsymbol{O = \pi r\,(r + \sqrt{h^2 + r^2}).}$$

Diese Formeln gelten nur für den geraden Kreiskegel; für die Herleitung des Oberflächeninhalts bei anderen Kegeln sind Betrachtungen notwendig, die über den Lehrstoff der Oberschule hinausgehen.

d) Die Berechnung des Kegelvolumens

Zur Herleitung des Kegelvolumens vergleichen wir einen beliebigen Kreiskegel mit einer quadratischen Pyramide gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Jeder dieser Körper wird von jeder zur Grundfläche parallelen Ebene in einer Fläche geschnitten, die der Grundfläche ähnlich ist. Liegt die Schnittebene in der Höhe $\overline{h}$ über der Grundfläche, so verhält sich der Inhalt der Schnittfläche zum Inhalt der Grundfläche bei beiden Körpern wie $(h - \overline{h})^2$ zu h^2. Diese Behauptung läßt sich mit Hilfe der Strahlensätze leicht beweisen (Abb. 158, Zweitafelbild). Aus ihr

folgt, daß die entsprechenden Schnittflächen der beiden Körper stets einander inhaltsgleich sind. Wir können deshalb den Lehrsatz des Cavalieri anwenden. Aus ihm folgt, daß beide Körper gleiches Volumen haben. Für das Volumen V des Kegels gilt demnach $V = \frac{G \cdot h}{3}$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe des Kegels ist.
Da $G = \pi r^2$ ist, folgt der Satz:

Der Rauminhalt V eines Kreiskegels mit dem Radius r und der Höhe h beträgt

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

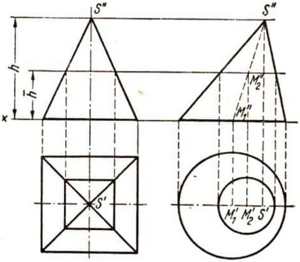


Abb. 158

Er gilt, wie aus der Herleitung hervorgeht, für jeden Kreiskegel. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Höhe h nur bei geraden Kreiskegeln mit Hilfe der Mantellinie berechnet werden kann.

Aufgaben

1. Ein gerader Kegel, dessen Radius $r = 3$ cm und dessen Höhe $h = 4$ cm beträgt, ist **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in axonometrischer Abbildung darzustellen.

2. Zeichne die Abwicklung des Kegels in der Aufgabe 1 in die Ebene und fertige ein Körpermodell an!

3. Die Achse eines schiefen Kegels mit der Höhe $h = 4$ cm und dem Grundkreisradius $r = 1{,}5$ cm bildet mit der Senkrechten auf der Grundrißebene einen Winkel $\alpha = 20°$. Der Kegel ist im Zweitafelverfahren darzustellen.

4. Zeichne einen geraden Kreiskegel **a)** im Zweitafelverfahren, **b)** im axonometrischen Abbildungsverfahren!

5. Bestimme die Fläche, die bei Rotation um eine Gerade einen geraden Kreiskegel erzeugt!

6. Der Mantel und die Oberfläche eines geraden Kegels sind zu berechnen. Gegeben sind
a) $r = 3$ cm, $s = 10$ cm; **b)** $r = 4$ cm, $h = 12$ cm;
c) $s = 2r = 12$ cm; **d)** $r = 9$ cm, $h : s = 4 : 5$.

7. Die Rauminhalte der in der Aufgabe 6 angegebenen Kegel sind zu berechnen.

8. Von einem Kegel ist gegeben: gesucht:
a) $h = 13{,}54$ cm, $s = 15{,}54$ cm; M, O, V;
b) $h = 13{,}74$ cm, $r = 6{,}54$ cm; M, O, V;
c) $M = 44{,}01$ cm², $s = 5{,}17$ cm; r, O, V;
d) $M = 147{,}40$ cm², $O = 224{,}40$ cm²; r, h, V.

9. Berechne Rauminhalt und Oberfläche eines Kegels mit gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisdurchmesser $d = 36$ cm!

10. Es ist der in eine Ebene abgewickelte Mantel eines geraden Kegels zu zeichnen, dessen Volumen $V = 700$ cm³ und dessen Grundkreisradius $r = 10$ cm beträgt.

11. Die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Mantellinie dreimal so lang wie der Grundkreisradius ist, beträgt $O = 8325$ cm². Es ist das Volumen des Kegels zu berechnen.

12. Von einem schiefen Kegel ist der Radius $r = 5$ cm, die längste Mantellinie $a = 9$ cm und die kürzeste Mantellinie $b = 7$ cm gegeben. Wieviel beträgt sein Rauminhalt?
Anleitung: Die Höhe ist trigonometrisch zu berechnen.

13. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 15$ cm und $b = 20$ cm rotiert einmal um die Kathete a, zum anderen um die Kathete b. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Mäntel, **b)** die Oberflächen, **c)** die Rauminhalte der entstehenden Kegel zueinander?
14. Bei einem Achsenschnitt eines geraden Kegels beträgt der Winkel zwischen den Mantellinien 135°, die Höhe 4,2 cm. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt des Kegels?
15. Das kegelfömige Dach eines im Grundriß kreisrunden Turmes soll mit Vinidur[1]) eingedeckt werden. Der Turm hat einen äußeren Durchmesser von 6,00 m, das Dach steht um 0,40 m vor. Die Länge der Mantellinie ist 11,00 m. Wieviel Quadratmeter Vinidur werden benötigt? (Der Verschnitt ist hierbei nicht zu berücksichtigen.)
16. Eine Boje besteht aus zwei Kegeln mit gemeinsamer Grundfläche von 1,00 m äußerem Radius. Die Achsenschnitte beider Kegel sind gleichseitige Dreiecke. Wie schwer ist die Boje, wenn sie aus Stahlblech von 2 mm Dicke hergestellt wurde? Mit welchem Gewicht muß die Boje belastet werden, wenn sie schwimmend zur Hälfte aus dem Wasser ragen soll (Wichte des Seewassers: $\gamma = 1{,}03$ p/cm^3)?
    Beachte: Die Wanddicke ist nicht gleich der Differenz aus äußerem und innerem Radius.
17. Ein kegelförmiges Zelt soll eine Grundfläche von 12 m^2 haben. Wieviel Zeltstoff wird gebraucht, wenn die Zelthöhe 2,50 m sein soll?
18. Ein Körper besteht aus einem geraden Zylinder vom Radius $r = 4$ cm und zwei gleichen auf die Grund- und Deckfläche aufgesetzten Kegeln mit gleichseitigem Achsenschnitt. Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers, wenn seine Oberfläche 300 cm^2 beträgt?
19. Einem Turm mit kreisförmiger Grundfläche, der einen Umfang von 35,50 m hat, soll ein kegelförmiges Dach aufgesetzt werden. Das Dach soll 25,00 m hoch sein. **a)** Welche Länge müssen die Dachsparren haben? **b)** Wie groß ist die Dachfläche?
20. In der Technik bedeutet „Kegel $1 : x$": Auf die Länge x (mm) verjüngt sich der Kegel im Durchmesser um 1 (mm).
    a) Berechne den Kegelwinkel α (d. h. den Winkel, der bei einem Achsenschnitt an der Spitze entsteht) für einen Kegel mit dem Radius 3 cm und der Verjüngung $1 : 0{,}500$; $1 : 0{,}866$; $1 : 5{,}000$ und $1 : 10{,}000$!
    b) Wie ändert sich α in Abhängigkeit von x?
    c) Zeichne je einen Kegel im Zweitafelverfahren mit dem Radius $r = 3$ cm und den unter a) angegebenen Verjüngungen!

18. Die Kugel

a) Definition

Wird ein Kreis (im Raum) um einen Durchmesser gedreht, so entsteht ein Drehkörper, der Kugel heißt. Der Mittelpunkt des Kreises heißt auch Mittelpunkt der Kugel.

Aus dieser Definition gehen die folgenden Eigenschaften hervor:

1. Die Kugel hat nur eine Begrenzungsfläche. In ihr existiert keine Gerade.
2. Jeder Punkt der Kugeloberfläche hat vom Mittelpunkt der Kugel denselben Abstand r wie jeder Punkt auf dem Umfang des erzeugenden Kreises von dessen Mittelpunkt. Man nennt deshalb r auch den Radius der Kugel.
3. Jede die Kugel schneidende Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis.
   Beweis: Der Punkt P liege auf der Schnittkurve. Wir fällen vom Mittelpunkt M der Kugel auf die Schnittebene das Lot und bezeichnen den Fußpunkt mit M' (Abb. 159). Dann bildet $PM'M$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei M'. In diesem rechtwinkligen Dreieck ist stets $PM = r$. Es

1) Vinidur ist ein vollsynthetischer Kunststoff von großer chemischer Widerstandsfähigkeit. Er läßt sich gut in der Wärme verformen und schweißen. Als Ausgangsstoffe für seine Herstellung dienen im wesentlichen Kohle und Kalk.

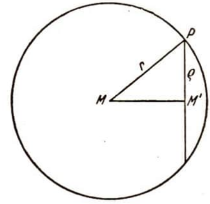


Abb. 159

gilt also für $PM' = \varrho$ nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\varrho = \sqrt{r^2 - (MM')^2}$. Da der Punkt P beliebig gewählt war, gilt dieser Ausdruck für jeden Punkt P. Da sowohl MM' bei gegebener Schnittfläche als auch r konstant sind, ist ϱ unabhängig von der Wahl des Punktes P ein fester Wert. Daraus folgt, daß alle Punkte P auf einem Kreis mit dem Radius ϱ um M' liegen.

Aus diesem Beweis folgt ferner, daß der Schnittkreis mit dem Radius ϱ um so größer wird, je kleiner der Abstand MM' der Schnittebene vom Mittelpunkt ist. Für $MM' = 0$ folgt $\varrho = r$. Das heißt also, daß jede Schnittebene, die den Kugelmittelpunkt enthält, die Kugel in einem Kreis schneidet, der gleich dem erzeugenden Kreis ist. Dieser Kreis ist zugleich, wie aus der Formel hervorgeht, der größte unter allen möglichen. Er wird deshalb als Großkreis bezeichnet.

Jede Gerade durch den Kugelmittelpunkt heißt Achse der Kugel. Jede Kugel hat also beliebig viele Achsen. Für spezielle Untersuchungen bezieht man sich auf eine besonders ausgewählte Achse. Die beiden Durchstoßpunkte der Achse durch die Kugeloberfläche heißen Pole der Kugel. Zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel sind also genau dann Pole, wenn sie auf derselben Achse liegen. Der Abschnitt der Achse zwischen zwei Polen heißt Durchmesser der Kugel. Aus der Definition der Achse folgt, daß jeder Schnitt durch den Mittelpunkt einer Kugel Achsenschnitt ist. Jede Verbindungsgerade durch zwei Punkte auf der Kugeloberfläche heißt Sekante. Der Abschnitt einer Sekante, der innerhalb der Kugel verläuft, heißt Sehne. Jeder Durchmesser ist eine größte Sehne, wie sich mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes beweisen läßt.

b) Die Darstellung der Kugel

Das Bild der Kugel in senkrechter Parallelprojektion wird bestimmt durch denjenigen Großkreis, der parallel zur Bildebene liegt. Da dieser Kreis in wahrer Größe abgebildet wird, ist der Grundriß der Kugel ein Kreis. Entsprechendes gilt für den Aufriß (Abb. 160).

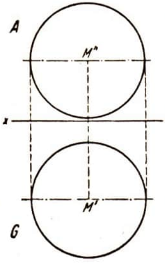


Abb. 160

Die Kugel wird im allgemeinen nicht im axonometrischen Verfahren dargestellt. Als Umriß würde sich nämlich eine Ellipse ergeben. Da man den Umriß einer Kugel stets kreisförmig sieht, empfindet man diese Darstellung als Verzerrung. Wir verzichten deshalb auf dieses Verfahren. Die auftretende Verzerrung kann man allerdings am Schatten einer Kugel beobachten, wenn die Lichtstrahlen schräg auf die Schattenebene fallen.

c) Die Berechnung des Kugelvolumens

Wir vergleichen eine Halbkugel mit dem Radius r, einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe r und einen geraden Kegel mit dem Radius r und der Höhe r mit-

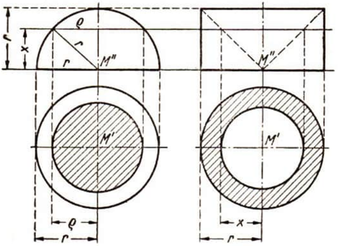


Abb. 161

einander. Der Kegel läßt sich in die Halbkugel einbeschreiben, die Halbkugel kann man in den Zylinder einbeschreiben. Infolgedessen gilt für die Volumina der drei Körper die Ungleichung

$$\frac{\pi r^3}{3} < V_H < \frac{3\pi r^3}{3},$$

wobei mit V_H das Volumen der Halbkugel bezeichnet ist.
Schneiden wir aus dem Zylinder den betrachteten Kegel heraus, so verbleibt ein Restkörper, dessen Inhalt

$$V_R = \frac{3\pi r^3}{3} - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$$

ist. Wir wollen nun beweisen, daß der Inhalt dieses Restkörpers gleich dem Inhalt der Halbkugel ist. Dazu beweisen wir, daß der Restkörper und die Halbkugel von Schnittebenen, die gleichen Abstand von der Grundfläche haben, stets in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden.
Wir betrachten die Zweitafelbilder dieser beiden Körper (vgl. Abb. 161). Im Abstand x von ihren Grundflächen legen wir einen Parallelschnitt, der im Aufriß als Parallele zur Bildachse erscheint. Die Schnittfläche der Halbkugel ist ein Kreis mit dem Radius ϱ und dem Flächeninhalt $F_H = \pi\varrho^2$. Da $\varrho^2 = r^2 - x^2$ ist, gilt $F_H = \pi\,(r^2 - x^2)$.
Die Schnittfläche des Restkörpers ist ein Kreisring mit den Radien r und x. Den Flächeninhalt F_R erhalten wir als Differenz der beiden Kreisflächen πr^2 und πx^2. Es gilt also $F_R = \pi\,(r^2 - x^2)$. Da diese Beziehungen unabhängig von der gewählten Höhe der Schnittfläche gelten, ist somit bewiesen, daß die entsprechenden Schnittflächen bei beiden Körpern stets einander gleich sind. Nach dem Lehrsatz des Cavalieri haben mithin die beiden Körper den gleichen Rauminhalt. Es gilt der Satz:

Das Volumen V der Halbkugel mit dem Radius r ist $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Für die Volumina von Kreiszylinder, Halbkugel und Kreiskegel gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gilt also die Proportion

$$V_Z : V_H : V_{Ke} = 3 : 2 : 1.$$

Diese Proportion war schon Archimedes bekannt.
Aus dem Satz über das Volumen der Halbkugel folgt unmittelbar der Satz:

Das Volumen der Kugel mit dem Radius r ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

d) Die Berechnung der Kugeloberfläche

Wir denken uns die Kugeloberfläche vollständig mit einem Netz von Dreiecken überzogen. Die Flächen dieser Dreiecke bezeichnen wir mit $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_n$, allgemein mit G_k. Die Ecken eines jeden Dreiecks werden mit dem Kugelmittelpunkt M verbunden (vgl. Abb. 162). Auf diese Weise zerlegen wir die Kugel in

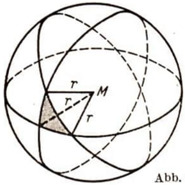


Abb. 162

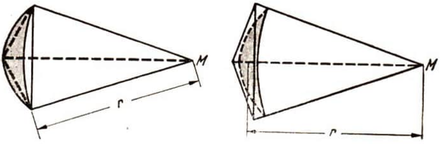


Abb. 163

eine Vielzahl pyramidenähnlicher Körper mit gemeinsamer Spitze M und gleicher Höhe r. Der Unterschied zur Pyramide besteht darin, daß die Grundfläche nicht eben, sondern gekrümmt ist. Die Summe der Volumina aller dieser pyramidenähnlichen Körper ist gleich dem uns bekannten Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi r^3$, die Summe ihrer Grundflächen ist gleich der zu ermittelnden Kugeloberfläche O.

Man kann nun in jeden dieser Körper eine größte Pyramide mit der Seitenkante $s = r$ einbeschreiben, indem man die gewölbte Grundfläche durch eine Ebene abschneidet. Offensichtlich ist das Volumen V_u dieser einbeschriebenen Pyramide kleiner als das Volumen V_k des ursprünglichen Körpers. Andererseits kann man dem Körper auch eine kleinste Pyramide mit der Höhe $h_o = r$ umbeschreiben, indem man an die gewölbte Grundfläche eine Ebene anlegt und die Seitenkanten entsprechend verlängert (vgl. Abb. 163). Ihr Volumen V_o ist größer als das Volumen V_u. Der Inhalt G_k der gewölbten Grundfläche ist kleiner als der Inhalt G_o der Grundfläche, die zur umbeschriebenen Pyramide gehört, und größer als der Inhalt G_u der Grundfläche, die zur einbeschriebenen Pyramide gehört[1]). Es gelten also die Ungleichungen

$$V_u \leqq V_k \leqq V_o \quad \text{und} \quad G_u \leqq G_k \leqq G_o .$$

Diese Ungleichungen gelten damit auch für die Summen der Volumina bzw. der Grundflächen aller dieser Körper. Ist $\underline{V}$ die Summe der Volumina aller einbeschriebenen Pyramiden und $\overline{V}$ die Summe der Volumina aller umbeschriebenen Pyramiden[2]), so gilt also $\underline{V} \leqq \frac{4}{3}\pi r^3 \leqq \overline{V}$. Entsprechend ist auch $\underline{G} \leqq O \leqq \overline{G}$.

Nun ist $V_u = \frac{1}{3} G_u \cdot h_u$, $V_o = \frac{1}{3} G_o \cdot h_o$. Für die Summe $\underline{V}$ der Volumina aller einbeschriebenen Pyramiden gilt also

$$\underline{V} = \frac{1}{3} h_u \, (G_{u1} + G_{u2} + G_{u3} + \cdots + G_{u\,n}) = \frac{1}{3} h_u \, \underline{G}.$$

---

1) Diese Behauptung ergibt sich aus der folgenden Nebenbetrachtung: Am Einheitskreis erkennt man, daß die Ungleichung $\sin x \leqq x$ für jeden Bogen x gilt. Ferner erkennt man, daß die Ungleichung

$$\frac{\pi x}{2\pi} \leqq \frac{tg\, x}{2} \text{ oder } x \leqq tg\, x$$

gilt. (Es ist nämlich die Fläche des Kreissektors mit dem Radius 1 und dem Bogen x kleiner als die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1 und $\operatorname{tg} x$.) Diese Betrachtung kann man auf Flächen ausdehnen.

2) Die Symbole $\underline{V}$ und $\overline{V}$ werden „V unten quer“ und „V oben quer“ gelesen.

Entsprechend gilt für die Summe $\overline{V}$ der Volumina aller umbeschriebenen Pyramiden

$$\overline{V} = \frac{1}{3} h_o \, (G_{o1} + G_{o2} + G_{o3} + \cdots + G_{o\,n}) = \frac{1}{3} r \overline{G}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{3} h_u \underline{G} \leqq \frac{4}{3} \pi r^3 \leqq \frac{1}{3} r \overline{G}.$$

Je kleiner nun G_k wird, desto besser nähern sich ihm G_u und G_o, damit nähern sich aber auch $\underline{G}$ und $\overline{G}$ der Kugeloberfläche O. Gleichzeitig nähert sich h_u immer mehr der Höhe $h_o = r$.

Man kann sich vorstellen, daß die pyramidenähnlichen Körper beliebig klein werden, das heißt also, daß man ihre Zahl über alle Grenzen wachsen läßt. Der Flächeninhalt der Grundfläche eines jeden solchen Körpers wäre dann nahezu gleich Null, die Summe n aller Flächeninhalte ist aber nach wie vor gleich dem Inhalt der Kugeloberfläche, und die Höhe des Körpers wäre $h = r$. Auch das Volumen eines jeden Teilkörpers wäre dann nahezu gleich Null, die Summe aller Volumina ist aber nach wie vor gleich dem Kugelvolumen $\frac{4}{3} \pi r^3$. Entsprechendes würde dann auch für die einbeschriebenen und für die umbeschriebenen Pyramiden gelten, so daß man in die letzte Ungleichung für $\underline{G}$ und für $\overline{G}$ die Oberfläche O der Kugel und für h_u den Radius r der Kugel einsetzen kann. Dann gilt

$$\frac{1}{3} r\, O \leqq \frac{4}{3} \pi r^3 \leqq \frac{1}{3} r\, O.$$

Daraus folgt aber, daß $\frac{1}{3} r\, O = \frac{4}{3} \pi r^3$ ist. Durch Auflösen nach O erhält man für die Oberfläche O der Kugel

$$\boldsymbol{O = 4\,\pi r^2}.$$

Bei dieser Herleitung besteht noch eine Lücke. Wir haben nämlich bei der Ersetzung von $\underline{G}$ und $\overline{G}$ durch O und von h_u durch r nicht berücksichtigt, daß die Grundfläche G_k nicht gleich Null werden kann, das heißt also, daß sich $\underline{G}$ und $\overline{G}$ von O und h_u von r immer noch um einen — wenn auch noch so kleinen — Betrag unterscheiden. Diese Lücke kann aber erst mit den Hilfsmitteln der Integralrechnung geschlossen werden.

Aufgaben

1. Eine Kugel wird parallel zur Grundrißebene durch eine Ebene geschnitten. Zeichne den Grundriß und den Aufriß von Kugel und Schnittfläche!
2. Bilde das Gradnetz der östlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion so ab, daß die Projektionsebene durch den Nullmeridian verläuft!
3. Bilde das Gradnetz der nördlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion auf die Äquatorebene ab!
4. Grundriß und Aufriß einer Kugel sind gegeben. Außerdem ist der Grundriß P' eines Punktes der Kugeloberfläche gegeben. Konstruiere den Aufriß P''! Wieviel Lösungen hat die Aufgabe? Anleitung: Es ist durch P eine zur Grundrißebene parallele Schnittfläche zu legen.

5. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche einer Kugel enthalten an Stelle des Kugelradius r oft den leichter meßbaren Kugeldurchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für das Volumen und für die Oberfläche?

6. Bei Überschlagsrechnungen in der Praxis verwendet man für die Berechnung des Rauminhalts einer Kugel mit dem Durchmesser d häufig die Formel $V \approx \frac{1}{2} d^3$. Um wieviel Prozent ist diese Formel ungenau?

7. Vergleiche die Oberfläche einer Kugel mit dem Mantel des ihr umbeschriebenen Zylinders!

8. Ein Zylinder, eine Halbkugel und ein Kegel haben gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Wie verhalten sich **a)** die Mäntel, **b)** die Oberflächen der drei Körper zueinander?
Bemerkung: Unter dem Mantel der Halbkugel soll der gekrümmte Teil der Oberfläche verstanden werden.

9. Die Oberfläche einer Kugel ist $O = 3500\ \text{cm}^2$ ($176{,}5\ \text{cm}^2$, $53\,789\ \text{m}^2$). Der Radius und der Rauminhalt sind zu berechnen.

10. Wie groß ist der Rauminhalt einer Halbkugel, wenn die ebene Begrenzungsfläche einen Inhalt von $F = 22\,176\ \text{cm}^2$ hat?

11. Welchen Radius hat eine Kugel, deren Rauminhalt $1\ \text{m}^3$ beträgt?

12. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte und die Oberflächen zweier Kugeln, deren Radien sich **a)** wie $1:2$, **b)** wie $m:n$ verhalten?

13. Welchen Rauminhalt hat eine Kugel von $113\frac{1}{7}\ \text{cm}^2$ Oberfläche? Wie ist das Ergebnis zu erklären?
Anleitung: Man setze $\pi \approx \frac{22}{7}$.

14. In einen Würfel von 15 cm Kantenlänge wird eine Kugel einbeschrieben. Wie groß sind ihr Volumen und ihre Oberfläche?

15. Der Radius einer Kugel ist $r = 5$ cm. Ein Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt hat die gleiche Oberfläche wie die Kugel. Wie groß ist sein Volumen?

16. Welchen Rauminhalt hat ein Zylinder von quadratischem Achsenschnitt, der in eine Kugel mit dem Radius $r = 6$ cm hineingestellt werden kann?

17. Es ist das Volumen des Würfels zu berechnen, der einer Kugel mit dem Radius r einbeschrieben ist.

18. Einer Kugel mit dem Radius $r = 12$ cm ist ein gerades vierseitiges Prisma mit quadratischer Grundfläche einbeschrieben, dessen Höhe $h = 10$ cm ist. Wie groß ist sein Rauminhalt?

19. Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 8$ cm ist ein gerader Zylinder von der Höhe $h = 5$ cm einbeschrieben. Wie groß ist seine Oberfläche?

20. Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 4$ cm ist ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Wieviel betragen sein Rauminhalt und seine Mantelfläche, wenn der Radius seiner Grundfläche gleich seiner Höhe ist?

21. Es ist das Gewicht einer Kugel aus Gußeisen von 200 mm Durchmesser zu berechnen (Wichte: $\gamma = 7{,}2\ \text{p/cm}^3$).

22. Die Kugeln zum Kugelstoßen müssen die folgenden Mindestgewichte haben: 4 kp, 5 kp, 6,250 kp, 7,257 kp. Wie groß müssen bei ihrer Herstellung aus Eisen die Durchmesser gewählt werden? (Wichte: $\gamma = 7{,}8\ \text{p/cm}^3$.)

23. Genormte Rundkolben aus Glas (Kugelform mit Hals) haben nach den DIN-Bestimmungen u. a. die folgenden Durchmesser: 9 cm, 10,5 cm, 12 cm. Der nutzbare Inhalt wird mit $300\ \text{cm}^3$, $500\ \text{cm}^3$, $750\ \text{cm}^3$ angegeben.
a) Wieviel beträgt der wirkliche Rauminhalt der Rundkolben ohne Hals?
b) Welcher Teil des Rauminhaltes bleibt bei obiger Inhaltsangabe ungefüllt (in Prozenten auf drei Stellen genau)?

24. Schätze und prüfe durch Rechnung nach, ob ein Mensch eine Korkkugel von 1 m Radius tragen könnte! (Wichte: $\gamma = 0{,}2\ \text{p/cm}^3$.)

25. Wie groß ist die Oberfläche des Erdkörpers, wenn wir die Erde als Kugel mit dem Radius $r = 6370$ km ansehen?

26. Zu Zwecken der Tiefseeforschung soll eine bemannte Tauchkugel mit einem Durchmesser von $d = 137$ cm auf annähernd 1000 m Meerestiefe herabgelassen werden. Wie groß ist die Kraft, die auf die Oberfläche der Kugel in dieser Tiefe drückt? (Wichte des Seewassers bei 20° C annähernd 1,02 p/cm³.)

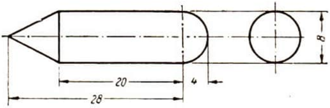


Abb. 164

27. Wieviel wiegt eine Hohlkugel aus Gußeisen, deren äußerer Durchmesser $d_1 = 8$ cm und deren innerer Durchmesser $d_2 = 7$ cm beträgt? (Wichte: $\gamma = 7{,}2$ p/cm³.)

28. Eine Hohlkugel aus Gußeisen hat einen äußeren Durchmesser von 6 cm und wiegt 410 p. Wie dick ist ihre Wand? (Wichte: $\gamma = 7{,}2$ p/cm³.)

29. Eine hohle kupferne Kugel mit $d = 20$ cm äußerem Durchmesser sinkt genau bis zur Hälfte in Wasser ein. Wie dick ist ihre Wand? (Wichte: $\gamma = 8{,}9$ p/cm³.)

30. Ein Bolzen aus Stahl hat die in der Abbildung 164 angegebenen Maße. Es ist sein Gewicht zu berechnen. (Wichte: $\gamma = 7{,}8$ p/cm³.)

31. Zum Vorwärmen der in einen Hochofen gepreßten Frischluft dienen 3 bis 5 Winderhitzer. In diesen geben die aus dem Hochofen kommenden Abgase (Gichtgase) ihre Wärme an ein Schamottegitterwerk ab. Heißluft von einer Temperatur bis 800° wird dann dem Hochofen zugeführt. In Abbildung 165 ist der Grundriß und der Aufriß eines Winderhitzers dargestellt.

a) Wie groß ist der gesamte Hohlraum des Winderhitzers?

b) Wie groß ist der für Wärmespeicherung ausnutzbare Raum des Winderhitzers?

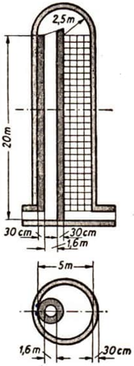


Abb. 165

32. Moderne Gasbehälter werden als Hochdruck-Kugelgasbehälter oder als Kolbengasbehälter ausgeführt. Kugelgasbehälter haben kugelförmige Gestalt, in ihnen kann das Gas unter hohem Druck stark zusammengepreßt werden. Im Kolbengasbehälter (Abb. 166, Längsschnitt) wird das Gas unten seitlich eingeführt. Es hebt dabei den kuppelförmigen Abschlußkolben, der genau in die Bodenwölbung des Behälters paßt.

a) Wie groß ist der Rauminhalt eines Hochdruck-Kugelgasbehälters von 21,30 m Durchmesser? Auf wieviel Atmosphären Druck muß das Gas zusammengepreßt werden, wenn 25 000 m³ von Normaldruck in ihn hineingepumpt werden?

b) Wie groß ist das nutzbare Fassungsvermögen des Kolbengasbehälters in der Abbildung 166? (Das nutzbare Fassungsvermögen ist in diesem Fall annähernd gleich dem Volumen.)

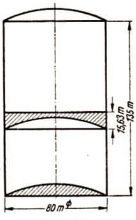


Abb. 166

C. Zahlenfolgen

I. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen

1. Arithmetische Zahlenfolgen

a) Zahlenfolgen, allgemeine Eigenschaften

Eine Menge von Zahlen, die nach einer bestimmten Vorschrift gebildet sind, nennt man eine Zahlenfolge. So ergeben die positiven ganzen Zahlen

$$1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ (n-1);\ n;\ (n+1);\ \cdots \tag{1}$$

eine Zahlenfolge. Andere Zahlenfolgen sind z. B.

die ungeraden positiven Zahlen

$$1;\ 3;\ 5;\ \cdots;\ (2n-3);\ (2n-1);\ (2n+1);\ \cdots, \tag{2}$$

die reziproken Werte der positiven ganzen Zahlen

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \cdots;\ \frac{1}{n-1};\ \frac{1}{n};\ \frac{1}{n+1};\ \cdots, \tag{3}$$

die Quadratzahlen

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \cdots;\ (n-1)^2;\ n^2;\ (n+1)^2;\ \cdots \tag{4}$$

oder auch die Konstanten k, etwa für $k = 3$,

$$3;\ 3;\ 3;\ \cdots. \tag{5}$$

Wir stellen also fest:

> Läßt sich auf Grund einer bestimmten Vorschrift (eines Bildungsgesetzes) aus einer Zahl x_1 eine zweite Zahl x_2, aus dieser eine dritte Zahl x_3 usf. entwickeln, so bilden die Zahlen $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots$ in dieser, den natürlichen Zahlen entsprechenden Anordnung, eine Zahlenfolge.

Die einzelnen Zahlen $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots$ heißen die Glieder der Folge.

Die Zahlenfolge ist endlich, wenn die Bildung der Zahlen nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern abbricht, sie ist unendlich, wenn sie nicht abbricht, wenn also jeder natürlichen Zahl n eine bestimmte Zahl x_n entspricht.

Eine endliche Folge bezeichnen wir mit $(x_n) = x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n$, eine unendliche Folge mit $(x_n) = x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n;\ \cdots$ oder kurz mit $(x_n) = x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots$.

Das Bildungsgesetz einer Folge stellen wir durch das allgemeine Glied x_n dar; für die positiven ganzen Zahlen ist

$$x_n = n, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1a}$$

für die ungeraden positiven Zahlen

$$x_n = (2n - 1), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{2a}$$

für die reziproken Werte der positiven ganzen Zahlen

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{3a}$$

für die Quadratzahlen

$$x_n = n^2, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{4a}$$

für die Konstanten k, also etwa für $k = 3$

$$x_n = 3, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{5a}$$

Zahlenfolgen können geometrisch veranschaulicht werden, indem die einzelnen Glieder auf einem Strahl x_n abgetragen werden. Wir erkennen als Bild der Zahlenfolge (1) die Punkte, die den ganzen Zahlen $1, 2, 3, \cdots n-1, n, n+1, \cdots$ auf dem Zahlenstrahl x_n zugeordnet sind (Abb. 167a). Die Größe der Glieder nimmt mit wachsendem n zu. Ein Bild der unendlichen Zahlenfolge (3) ist in Abb. 167b dargestellt. Die Größe der Glieder nimmt mit wachsendem n ab. Ein Bild der Zahlenfolge (5) gibt die Abb. 167c wieder. Bei jedem n ist die Größe des zugehörigen Gliedes gleich 3.

Eine Folge heißt **wachsend**, wenn stets $x_n < x_{n+1}$, dagegen **fallend**, wenn $x_n > x_{n+1}$.

Es ist zu erkennen, daß die Folgen (1), (2) und (4) wachsen, die Folge (3) dagegen fällt. Diese Tatsache verdeutlichen die Abb. 167a und b.

Eine Folge heißt **konstant**, wenn alle Glieder denselben Wert k besitzen. Dies trifft für die Folge (5) zu, wie die Abb. 167c zeigt.

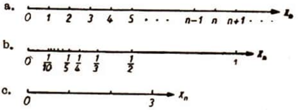


Abb. 167

b) Arithmetische Zahlenfolgen erster Ordnung

1. Die Zahlenfolge 1; 3; 5; ⋯; 13

Gegeben sei die Zahlenfolge

$$(x_n) = 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13.$$

Wir bilden die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder, also

$$3 - 1 = 2; \quad 5 - 3 = 2; \quad \cdots; \quad 13 - 11 = 2$$

und der Reihe nach die Teilsummen

$$1 + 3 = 4; \quad 1 + 3 + 5 = 9; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16; \quad \cdots$$

sowie die Summe der Glieder

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49.$$

Wir stellen fest: Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge besitzt den festen Wert 2, die Teilsummen sind Quadratzahlen, und die Summe der Glieder hat den Wert 49.

Eine Veranschaulichung der Glieder dieser Folge, der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder und der Summen der Glieder können wir finden, indem wir der Achse der Indizes ($n = 1, 2, 3, \cdots, 7$) eine Achse der Glieder x_n, der Differenzen d_n und der Summen der Glieder x_n, die wir mit s_n bezeichnen, zuordnen.

Abb. 168 gibt eine Veranschaulichung der Zahlenfolge und verdeutlicht das Bildungsgesetz. Die Glieder der Folge liegen auf einer als Strichlinie gezeichneten Geraden. Auf dieser bezeichnen nur einzelne Punkte die Glieder der arithmetischen Folge.

Abb. 169 gibt eine Veranschaulichung der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder. Dabei ordnen wir die Differenz dem Glied mit dem niederen Index zu. Es ergeben sich Punkte, die sämtlich den Abstand $d = 2$ von der Achse n besitzen. Sie sind, um anzudeuten, daß es sich um die Differenzen einer Zahlenfolge handelt, durch eine Strichlinie miteinander verbunden.

Abb. 170 zeigt eine Veranschaulichung der Teilsummen der Zahlenfolge. Es ist zu erkennen, daß die Summe der Glieder stets Quadratzahlen sind. Sie liegen auf der als Strichlinie gezeichneten Parabel.

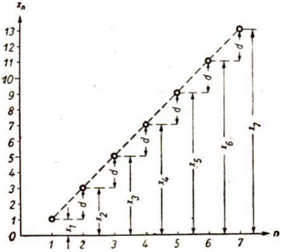


Abb. 168

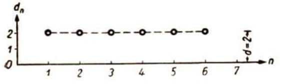


Abb. 169

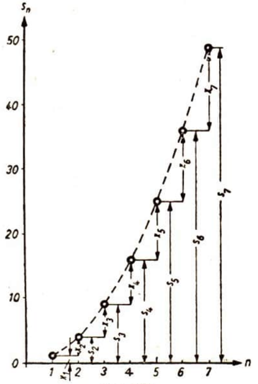


Abb. 170

2. Die Zahlenfolge $a;\ a + d;\ a + 2d;\ \cdots;\ a + (n-1)\,d$

Bilden wir, vom Anfangsgliede $x_1 = a$ ausgehend, eine Zahlenfolge mit der konstanten Differenz d für zwei aufeinanderfolgende Glieder, so erhalten wir die Folge

$$x_1 = a; \qquad x_2 = a + d; \qquad x_3 = a + 2d; \qquad \cdots; \qquad x_n = a + (n-1)\,d;$$

das Bildungsgesetz der Folge ist

$$\boldsymbol{x_n = a + (n-1)\,d}, \qquad (n = 1; 2; 3 \cdots; n). \tag{6}$$

Eine Zahlenfolge dieser Art nennt man eine arithmetische Zahlenfolge erster Ordnung.

Erklärung: Eine Zahlenfolge (x_n), bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert besitzt, heißt eine arithmetische Folge erster Ordnung.

Eine arithmetische Folge (x_n), wie wir sie zunächst betrachten, ist durch ihr Anfangsglied $x_1 = a$ und durch die konstante Differenz $x_n - x_{n-1} = d$ bestimmt.

Eine arithmetische Folge können wir aber auch vom Endglied ausgehend darstellen. Bezeichnen wir dieses mit z, so erhalten wir die Zahlenfolge

$$x_n = z; \quad x_{n-1} = z - d; \quad x_{n-2} = z - 2d; \quad \cdots; \quad x_1 = z - (n-1)\,d.$$

Die Summe einer arithmetischen Folge haben wir zunächst durch Addieren der Glieder gefunden. Bei großer Gliederzahl ist dieses Verfahren jedoch umständlich. Bezeichnen wir die Summe mit s_n, in dem Ausgangsbeispiel mit s_7, und schreiben wir die Summe in auf- und absteigender Folge der Glieder untereinander, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s_7 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \text{ bzw.} \\ s_7 &= 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \end{aligned}$$

und beim Addieren

$$\begin{aligned} 2\,s_7 &= 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 \\ &= 7 \cdot 14 \end{aligned}$$

oder

$$s_7 = \frac{7 \cdot 14}{2} = 49.$$

Allgemein finden wir

$$\begin{aligned} s_n &= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d] \\ s_n &= z + (z - d) + (z - 2d) + \cdots + [z - (n-2)d] + [z - (n-1)d] \\ 2\,s_n &= (a + z) + (a + z) + (a + z) + \cdots + (a + z) + (a + z) \\ &= n\,(a + z) \end{aligned}$$

und damit

$$\boldsymbol{s_n = \frac{n(a+z)}{2}}. \tag{7a}$$

Setzen wir $z = a + (n-1)\,d$, so wird

$$s_n = \frac{n\,[2\,a + (n-1)\,d]}{2} = na + \frac{n\,(n-1)\,d}{2}. \tag{7b}$$

Damit ist die Summe einer arithmetischen Folge ebenfalls bestimmt.

Multiplizieren wir die rechte Seite in Gleichung (7 b) aus und ordnen nach fallenden Potenzen von n, so erhalten wir

$$s_n = n^2\,\frac{d}{2} + n\,\frac{2\,a - d}{2}.$$

Wir erkennen, daß jede Summe einer arithmetischen Folge erster Ordnung durch eine quadratische Funktion von n darstellbar ist, die jedoch nur für die positiven ganzzahligen Werte n erklärt ist.

c) Differenzenfolgen und arithmetische Folgen höherer Ordnung

Aus der Folge der Quadrat- und der Kubikzahlen ($n = 0, 1, 2 \cdots$) bilden wir die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder nach folgendem Schema:

n	x_n	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$
0	0		
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		

n	x_n	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$	$\Delta^3 x_n$
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			

Die Folgen $(\Delta^1 x_n)$, $(\Delta^2 x_n)$ bzw. $(\Delta^3 x_n)$[1]) nennt man die erste, zweite bzw. dritte **Differenzenfolge** der gegebenen ursprünglichen Zahlenfolge (x_n). Dabei bedeuten

$$\Delta^1 x_n = x_{n+1} - x_n,\ \Delta^2 x_n = \Delta^1 x_{n+1} - \Delta^1 x_n \text{ und } \Delta^3 x_n = \Delta^2 x_{n+1} - \Delta^2 x_n .$$

Wir erkennen, daß bei der Folge der Quadratzahlen die zweite, bei der Folge der Kubikzahlen die dritte Differenz konstant ist. Die Folge der Quadratzahlen wird als eine **arithmetische Folge zweiter Ordnung**, die der Kubikzahlen als eine **arithmetische Folge dritter Ordnung** bezeichnet.

Die Entstehung der Differenzenfolgen aus der Ausgangsfolge verdeutlichen die Abb. 171a und b sowie 172a und b.

In den Abb. 171a und 172a tragen die nach rechts weisenden Achsen die Glieder x_n der Zahlenfolgen (x_n), die nach oben führenden die der Folgen $(\Delta^1 x_n)$, die nach links zeigenden die der Folgen $(\Delta^2 x_n)$ und die nach unten die der Folge $(\Delta^3 x_n)$. Die Werte der Differenzenfolgen sind jeweils dem niederen Index der vorhergehenden Folge zugeordnet.

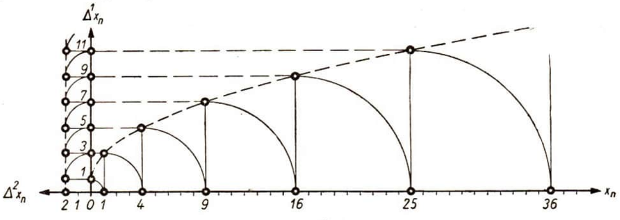


Abb. 171a

[1]) Sprich: „Delta eins x_n, Delta zwei x_n, Delta drei $x_n \cdots$"; vgl. Lehrbuch der Mathematik. 9. Schuljahr, Seite 131!

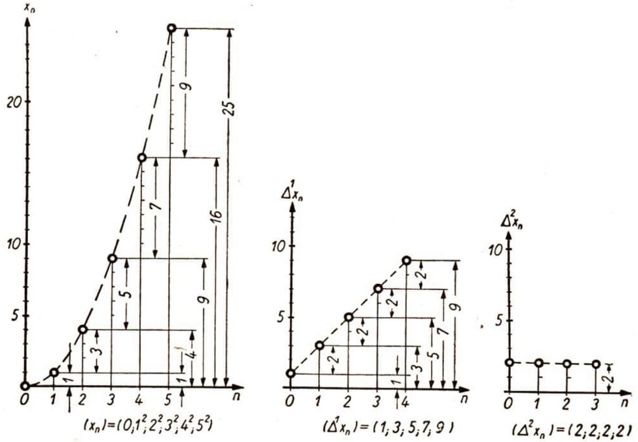


Abb. 171 b

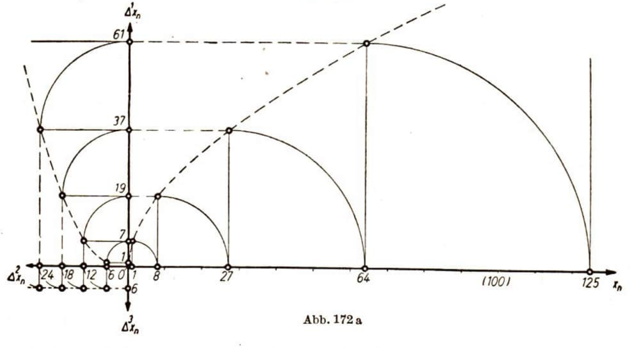


Abb. 172 a

In den Abb. 171 b bzw. 172 b sind der Index-Achse n die Glieder der Zahlenfolgen (x_n), $(\Delta^1 x_n)$, $(\Delta^2 x_n)$ bzw. (x_n), $(\Delta^1 x_n)$, $(\Delta^2 x_n)$, $(\Delta^3 x_n)$ zugeordnet.

$(\Delta^m x_n)$ ist die m-te Differenzenfolge von (x_n). Ist diese konstant, so sagt man auch, (x_n) ist eine arithmetische Folge m-ter Ordnung. Abb. 171 b zeigt die Folgen (n^2), $(2n+1)$ und (2), Abb. 172 b die Folgen (n^3), $(3n^2+3n+1)$, $(6n+6)$ und (6). Dabei sind die Differenzenfolgen ebenfalls dem niederen Index n zugeordnet.

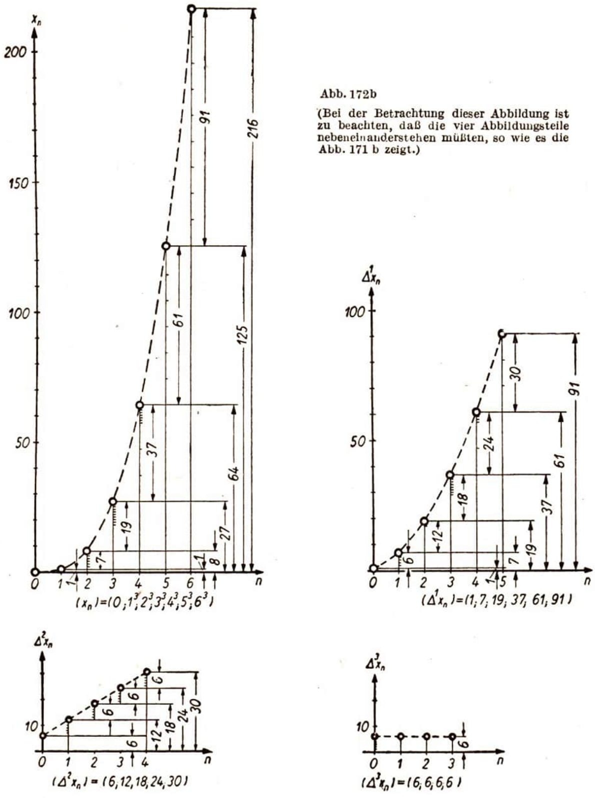


Abb. 172b

(Bei der Betrachtung dieser Abbildung ist zu beachten, daß die vier Abbildungsteile nebeneinanderstehen müßten, so wie es die Abb. 171 b zeigt.)

Den Zusammenhang der Folgen erkennen wir an dem nachstehenden Zahlenbeispiel. Es ist für Abb. 171 b z. B.

$$\Delta^1 x_4 = 5^2 - 4^2 = (4+1)^2 - 4^2$$
$$= 16 + 8 + 1 - 16 = 8 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

und $$\Delta^2 x_3 = 9 - 7 = 2.$$

Aus der Funktion $y = 2x^2 + 3x - 5$ berechnen wir für die ganzzahligen Werte $x = 0, 1, 2, \cdots$ die zugehörigen y-Werte und deren Differenzen.

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
0	-5		
		5	
1	0		4
		9	
2	9		4
		13	
3	22		4
		17	
4	39		

Wir erkennen, daß die den ganzzahligen x-Werten ($x = 0, 1, 2, 3, \cdots$) zugeordneten y-Werte der quadratischen Funktion eine arithmetische Folge zweiter Ordnung bilden.

Allgemein gilt für die Funktion $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}
\Delta^1 y_n &= a\,[(n+1)^2 - n^2] + b\,(n+1-n) \\
&= a \cdot (2n+1) \qquad + b \\
&= 2an \qquad + (a+b) \\
&= 2an \qquad + b' \\
\Delta^2 y_n &= 2a\,(n+1-n) = 2a.
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Eine arithmetische Folge erster Ordnung ist durch das Bildungsgesetz $x_n = an + b$, eine arithmetische Folge zweiter Ordnung durch $x_n = an^2 + bn + c$ gegeben. Hierbei sind verschiedenen Zahlenfolgen auch verschiedene Werte von a und b bzw. a, b und c zugeordnet. Entsprechende Gesetzmäßigkeiten ergeben sich für arithmetische Folgen höherer Ordnung.

Um die Summe der n ersten Quadratzahlen zu bilden, gehen wir von der Identität

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

aus und setzen der Reihe nach $x = 1, 2, 3 \cdots n$ ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

oder nach dem Addieren auf beiden Seiten

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1).$$

Es ist $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

und somit die Summe s der n ersten Quadratzahlen

$$s = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n\right)$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1).$$

Die Summe der n ersten Quadratzahlen ist eine Funktion dritten Grades von n, die jedoch nur für positive ganzzahlige Werte von n erklärt ist.

Wir bilden für die Zahlenfolge zweiter Ordnung

$$0;\ \ 9;\ \ 22;\ \ 39;\ \ 60;\ \ 85,$$

deren Glieder aus der quadratischen Funktion $y = 2x^2 + 3x - 5$ für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ berechnet sind, die Folge der Teilsummen

$$0;\ \ 9;\ \ 31;\ \ 70;\ \ 130;\ \ 215.$$

Wir erkennen, daß in der Folge der Teilsummen die 3. Differenzen konstant sind, daß sie also eine Zahlenfolge dritter Ordnung ist. Ihr Bildungsgesetz können wir als

$$x_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{19}{6}n$$

finden, also eine Funktion dritten Grades von n für die ganzzahligen positiven Werte von n.

Allgemein gilt: Ist (x_n) eine arithmetische Zahlenfolge m-ter Ordnung und ist die Zahlenfolge (s_n) dadurch erklärt, daß

$$s_1 = x_1;\quad s_2 = x_1 + x_2;\quad \cdots;\quad s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

ist, so wird (s_n) als die zur Folge (x_n) zugehörige Summenfolge bezeichnet. Es ist zu erkennen, daß die erste Differenzenfolge von (s_n) die ursprüngliche Folge (x_n) ist. Damit ist die Summenfolge einer arithmetischen Zahlenfolge m-ter Ordnung von der $(m+1)$-ten Ordnung.

Aufgaben

I. Zahlenfolgen

1. Stelle die Zahlenfolgen auf, deren allgemeines Glied

a) $x_n = -n$, **b)** $x_n = \frac{n+1}{n}$, **c)** $x_n = \frac{n-1+n}{2}$, **d)** $x_n = \frac{1}{2n}$ ist!

2. Veranschauliche die Zahlenfolgen

a) $(x_n) = 1;\ 2;\ 3;\ \cdots;\ 8$ **b)** $(x_n) = 1;\ 3;\ 5;\ \cdots$
c) $(x_n) = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5}$ **d)** $(x_n) = 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \cdots$!

Anleitung: Wähle zu a) und b) als Einheit 1 cm, zu c) und d) 10 cm!

3. Prüfe an Hand **a)** bestimmter Glieder, **b)** des allgemeinen Gliedes, welche der Folgen in Aufgabe 1 und 2 wachsen und welche fallen!

4. Veranschauliche die konstanten Zahlenfolgen mit dem allgemeinen Glied **a)** $x_n = 3$, **b)** $x_n = 5$!

II. Arithmetische Zahlenfolgen

5. Veranschauliche die ersten 5 Glieder der arithmetischen Folgen und deren Summen, wenn **a)** $x_1 = 3, d = \frac{1}{2}$, **b)** $x_1 = 1, d = 3$, **c)** $x_1 = 13, d = -2$ ist! Verbinde die gefundenen Punkte durch Strichlinien!

Anleitung: Wähle die Form nach Abb. 168 bzw. 170!

6. Stahlträger von der Form I (sprich: Doppel-Te; Bezeichnung I, Abb. 173) haben nach DIN 1025, Blatt 1, die in der untenstehenden Tabelle genannten Abmessungen. Prüfe, ob die Abmessungen arithmetische Folgen darstellen! Gib die Differenzen der Abmessungen an! Veranschauliche den Verlauf der Abmessungen!
Prüfe, ob Querschnitt und Gewicht arithmetische Folgen sind! Stelle Querschnitt F und Gewicht G als Funktionen der Höhe h geometrisch dar!

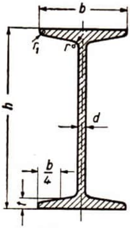


Abb. 173

Bezeichnung	Abmessungen mm						Querschnitt cm²	Gewicht kp/m
I	h	b	d	t	r	r_1	F	G
8	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95
10	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32
12	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2
14	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4
16	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9
18	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9
20	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3
22	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1
24	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2
26	260	113	9,4	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9
28	280	119	10,1	15,2	10,1	6,1	61,1	48,0
30	300	125	10,8	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2
32	320	131	11,5	17,3	11,5	6,9	77,8	61,1
34	340	137	12,2	18,3	12,2	7,3	86,8	68,1
36	360	143	13,0	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2
38	380	149	13,7	20,5	13,7	8,2	107	84,0
40	400	155	14,4	21,6	14,4	8,6	118	92,6
$42\frac{1}{2}$	425	163	15,3	23,0	15,3	9,2	132	104
45	450	170	16,2	24,3	16,2	9,7	147	115
$47\frac{1}{2}$	475	178	17,1	25,6	17,1	10,3	163	128
50	500	185	18,0	27,0	18,0	10,8	180	141
55	550	200	19,0	30,0	19,0	11,9	213	167
60	600	215	21,6	32,4	21,6	13,0	254	199

7. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:

a) $x_7 = 65$ und $x_8 = 72$, **b)** $x_3 = 35$ und $x_4 = 46$, **c)** $x_5 = 38$ und $x_6 = 27$.

Wie groß ist die Differenz d, das Anfangsglied x_1, und wie heißt das allgemeine Glied x_n?

8. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:

a) $x_5 = 20$ und $x_{11} = 44$, **b)** $x_{10} = 39$ und $x_{14} = 24$.
Gesucht sind die Differenz d, das Anfangsglied x_1 und das Glied x_{25}.

Anleitung: Bilde die Differenz der Glieder in allgemeiner Form und berechne daraus die Differenz d!

9. Es sind gegeben $x_6 + x_{12} = 47$ und $x_7 + x_{15} = 57$. Gesucht sind die Differenz, das Anfangsglied und das Glied x_{25}.

Anleitung: Stelle die Summen durch das allgemeine Glied dar! Dies führt auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

10. Gegeben sind die Summen $x_5 + x_{11} = 58$, $x_6 + x_{14} = 40$. Bestimme x_1 und x_{20}!

Anleitung: Vergleiche Aufgabe 9!

11. Es sind gegeben:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
x_1	10	16	25	$\frac{3}{4}$	120	0
x_n	80	676	35	$\frac{4}{3}$	15	-6
d	5	11	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	-7	$-\frac{2}{3}$
n	15	61	16	8	16	10
s_n	675	21106	480	$\frac{25}{3}$	1080	-30

Wähle aus einer der Spalten a) bis f) drei Werte und berechne für jede einzelne Spalte die fehlenden!

12. Von den Größen x_1, x_n, d, n und s_n müssen drei gegeben sein, um die Folge zu bestimmen.

a) Stelle sämtliche möglichen Aufgabengruppen zusammen! Wieviel sind dies?
b) Stelle die Formeln für die Lösungen dieser Aufgabengruppen auf!

13. Sind drei Zahlenwerte, durch die eine arithmetische Folge bestimmt ist, frei wählbar? Welche Bedingungen bestehen für n?

14. Gegeben sind x_1, x_n und s_n. Zeige, daß d ein Bruch mit dem Zähler $x_n - x_1$ und n ein Bruch mit dem Nenner $x_1 + x_n$ ist!

15. Bestimme die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100! Carl Friedrich Gauß (geb. 1777 in Braunschweig, gestorben als Professor der Astronomie 1855 in Göttingen) soll bereits als Neunjähriger eine solche Aufgabe selbständig gelöst haben. Als die Aufgabe gestellt war, erkannte er sofort, daß die Summe der Glieder, die gleich weit vom Anfang und Ende der Folge entfernt sind, einen bestimmten Wert ergibt. Beispiel:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

Fasse, den Klammern entsprechend, zusammen!

16. Es sei $x_1; x_2; x_3; \cdots; x_n; \cdots$ eine arithmetische Folge. Zeige, daß $x_1; x_3; x_5; \cdots; x_{2n-1}; \cdots$ und $x_1; x_5; x_9; \cdots x_{4n+1}; \cdots$ ebenfalls arithmetische Folgen sind! Wie groß sind die Differenzen dieser Folgen?

17. a) Zeige, daß die y-Werte, die durch die Funktion $y = 2x + 3$ den ganzzahligen Werten $x = 1, 2, 3 \cdots$ zugeordnet werden, eine arithmetische Folge bilden!

b) Zeige dies für die lineare Funktion $y = mx + b$!
Bildet eine Folge von x-Werten eine arithmetische Folge, so gilt dies auch für die zugehörige Folge einer linearen Funktion $y = f(x)$.

Anleitung: Setze $x = a_1 + (n - 1)\,d$ in die Funktionsgleichung ein!

18. Welche linearen Funktionen führen die nachstehenden Folgen (x_n) in (y_n) über:

a) $(x_n) = (1;\ 3;\ 5;\ 7;\ \cdots)$ in $(y_n) = (4;\ 8;\ 12;\ 16;\ \cdots)$,

b) $(x_n) = (2;\ 6;\ 10;\ 14;\ \cdots)$ in $(y_n) = (30;\ 25;\ 20;\ 15;\ \cdots)$,

c) $(x_n) = (1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \cdots)$ in $(y_n) = (3;\ 3\frac{1}{2};\ 4;\ 4\frac{1}{2};\ \cdots)$,

d) $(x_n) = (1;\ 3;\ 5,\ 7;\ \cdots)$ in $(y_n) = (6;\ 5\frac{3}{4};\ 5\frac{1}{2};\ 5\frac{1}{4};\ \cdots)$?

Anleitung: Stelle die Bildungsgesetze von x und y auf, berechne dann aus $y = mx + b$ die Größen m und b!

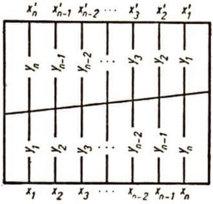


Abb. 174

19. In Abb. 174 sind die Funktionswerte $y_1, y_2, y_3 \cdots$ Glieder der arithmetischen Folge $y = mx + b$. Zeige, daß aus der Abbildung unmittelbar $2\,s_n = n\,(y_1 + y_n)$ abgelesen werden kann!

Anleitung: Betrachte in Richtung von x_1 nach x_n und dann in entgegengesetzter Richtung die beiden zentrisch-symmetrisch liegenden Trapeze!

III. Angewandte Aufgaben

20. Eine Uhr schlägt nur die vollen Stunden. Wieviel Schläge erfolgen in 12 Stunden?

21. Eine Turmuhr schlägt die Stundenzahl und zu den vollen Stunden viermal, nach einer Viertelstunde einmal, nach einer halben Stunde zweimal, nach einer dreiviertel Stunde dreimal. Wievielmal schlägt die Uhr in 24 Stunden?

22. In einem Schaufenster sind Konservendosen in der gleichen Anordnung wie in Abb. 175 aufgestellt. In der untersten Reihe wurden 20 Dosen gezählt. Wieviel sind es insgesamt?

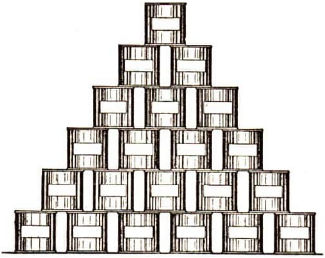


Abb. 175

23. Der Seilkorb einer Förderanlage ist eine Winde mit einer schmalen, zylindrischen Trommel von der Breite des Förderbandes mit rechteckigem Querschnitt. An ihm hängt der Förderkorb. Bei Drehung des Seilkorbes wird das Förderband in übereinanderliegenden Lagen auf den Seilkorb gewickelt.

a) Wie groß ist die Zahl der übereinanderliegenden Windungen bei hochgezogenem Förderkorb, wenn die Dicke des Förderbandes $d = 3$ cm, der Halbmesser des Seilkorbes $r = 1$ m und die Schachttiefe 400 m beträgt?

b) Die Förderanlage besteht aus zwei Seilkörben und einer gemeinsamen Welle. Die Förderbänder mit den Förderkörben hängen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Welle in den Schacht hinunter, so daß der volle Korb oben anlangt, wenn der leere die Sohle des Schachtes erreicht. Wo begegnen sich der abwärts und der aufwärts gehende Förderkorb?
Bei der geringen Dicke des Förderbandes kann in der Aufgabe die kleine Abweichung der aufgewickelten einzelnen Seillagen von der Kreisform unberücksichtigt bleiben. Es soll auch von der Dehnung abgesehen werden.

IV. Differenzenfolgen und arithmetische Folgen höherer Ordnung

24. Gegeben ist die Zahlenfolge $(x_n) = 1; 3; 9; 19; 33; 51$ mit dem Bildungsgesetz $x_n = 2\,n^2 - 4\,n + 3$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, d. h. $x_n = an^2 + bn + c$, wenn $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$ ist. Ordne jedem Index n den Wert des Gliedes in einem $(n;\ x_n)$-System zu und bilde geometrisch alle Differenzenfolgen! Vergleiche dazu Abb. 171a!

25. Gegeben ist die Zahlenfolge $(x_n) = -4;\ -\frac{7}{2};\ 0;\ \frac{19}{2};\ 28;\ \frac{117}{2};\ \cdots;\ x_n = \frac{1}{2}n^3 - 4$ oder $a = \frac{1}{2},\ b = 0,\ c = 0,\ d = -4$ in $x_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Stelle der Aufgabe 24 entsprechend die Differenzenfolgen dar!

26. Bestimme unter Verwendung der Differenzen die Werte der Funktion

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$, b) $y = 2x^2 + 3x - 5$,

wenn x die ganzzahligen Werte von -5 bis $+5$ durchläuft!

Anleitung: Bilde von den Werten $x = -1, 0, +1$ ausgehend die Differenzen nach dem Schema und erweitere nach oben und unten bis zu den verlangten Werten! Das Schema gilt für die Aufgabe a)!

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
-1	10		
		-5	
0	5		6
		1	
1	6		

27. Bestimme die Werte von $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ für die ganzzahligen x-Werte von -6 bis $+6$ nach dem in Aufgabe 26 gezeigten Verfahren!

28. Bestimme nach einem anderen Verfahren die Werte

a) von $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ für die ganzzahligen x-Werte von -5 bis $+5$;

b) von $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ für die ganzzahligen x-Werte von -6 bis $+6$!

Anleitung: Schreibe für $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$
den Ausdruck $y = x(x^2 - 2x - 3) + 4$,
schließlich $y = x[x(x-2) - 3] + 4$
und setze $x - 2 = z_1,\ xz_1 - 3 = z_2,\ y = xz_2 + 4$!

2. Endliche geometrische Zahlenfolgen

a) Die Zahlenfolge 1; 2; 4; $\cdots$; 32

Gegeben ist die Zahlenfolge

$$(x_n) = 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32.$$

Wir bilden die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder, also

$$2:1 = 2;\ 4:2 = 2;\ \cdots;\ 32:16 = 2,$$

die Teilsummen

$$1 + 2 = 3;\ 1 + 2 + 4 = 7;\ 1 + 2 + 4 + 8 = 15;\ 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

sowie die Summe

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

Wir stellen fest: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder hat stets den Wert 2, die Summe der Glieder hat den Wert 63.

Abb. 176 veranschaulicht die Zahlenfolge, Abb. 177 den Quotienten und Abb. 178 die Teilsummen.

Abb. 176 läßt zwar die Größe der einzelnen Glieder erkennen, jedoch kann man das Bildungsgesetz, nach dem sich aus einem vorhergehenden Glied das nächste entwickeln läßt, geometrisch nicht erkennen. Die Endpunkte der Glieder liegen auf einer als Strichlinie dargestellten Kurve, und zwar auf einer Exponentialkurve, denn für jedes n gilt $x_n = 2^{n-1}$.

Mit Hilfe des Strahlensatzes lassen sich jedoch die Glieder der Zahlenfolge $(x_n) = 1;\ 2;\ 4;\cdots;\ 32$ konstruieren. Wir tragen auf einer Geraden von einem Punkte 0 aus die Strecken 1 und 2 bis A bzw. C ab (Abb. 179). In A und C errichten wir je eine Senkrechte und tragen auf der Senkrechten von A aus die Strecke $AA_1 = 1$ ab. Verbinden wir O mit A_1, so ergibt sich auf der Senkrechten in C der Punkt B_1. Die Parallele zu AC durch B_1 schneidet AA_1 in A_2. Es ist also $AA_2 = CB_1$. Die weitere Konstruktion ergibt sich aus der Abbildung. Es verhält sich dann

$$AA_2 : AA_1 = OC : OA = 2:1$$

$$AA_3 : AA_2 = 2:1 \text{ usf.}$$

Die Abb. 179 gibt damit einen Weg an, wie die Glieder der Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $x_n = 2^{n-1}$ konstruiert werden können.

Konstruieren wir eine Folge von ähnlichen Dreiecken nach Abb. 180, deren Katheten sich wie $2:1$ verhalten, so finden wir geometrisch die Glieder der gegebenen Zahlenfolge. Wir erkennen, daß sich

$$D_1D : OD = D_2E_1 : D_1E_1 = D_3E_2 : D_2E_2 = \cdots = 2:1$$

verhalten. Es ist

$$OD = x_1;\quad D_1E_1 = x_2;\quad D_2E_2 = x_3;\quad D_3E_3 = x_4;\cdots.$$

Abb. 180 zeigt damit einen anderen Weg, die Glieder der Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $x_n = 2^{n-1}$ zu konstruieren.

Aus derselben Abbildung ist ferner zu ersehen, wie man durch Projektion der Glieder auf eine Parallele zu OD, die Achse s_n, die Teilsummen finden kann.

In halblogarithmischem Papier, bei dem die lineare Teilung in der Indexachse liegt, ist das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder der gegebenen Zahlenfolge erkennbar (Abb. 181). Die Glieder der Zahlenfolge liegen auf der zur Geraden gestreckten Exponentialkurve $x_n = 2^{n-1}$, also auf der Geraden $\lg x_n = (n-1)\lg 2$, die als Strichlinie gezeichnet ist.

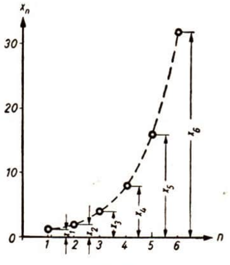


Abb. 176

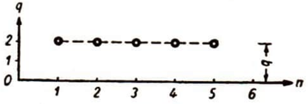


Abb. 177

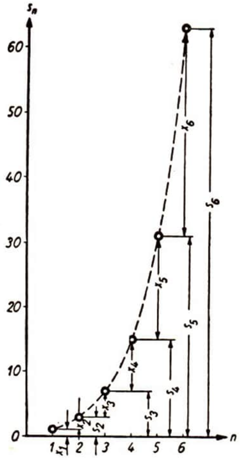


Abb. 178

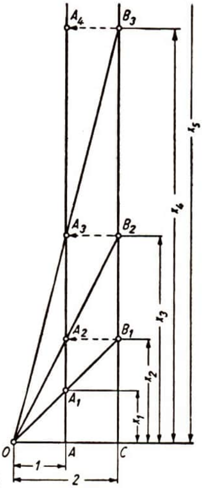


Abb. 179

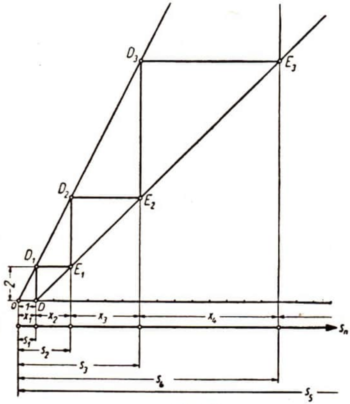


Abb. 180

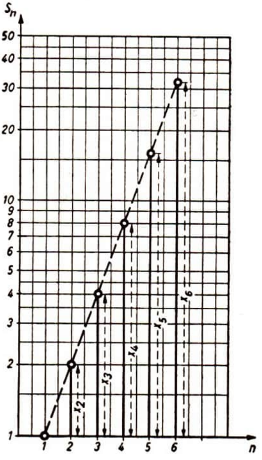


Abb. 181

b) Die Zahlenfolge $a; aq; aq^2; \cdots; aq^{n-1}$

Bilden wir eine Zahlenfolge mit dem Anfangsglied a und dem Quotienten q zweier aufeinanderfolgender Glieder, $(q > 0)$, so erhalten wir die Folge

$$(x_n) = a;\quad aq;\quad aq^2;\quad aq^3;\quad \cdots;\quad aq^{n-1},$$

die n Glieder umfaßt, deren Bildungsgesetz

$$\boldsymbol{x_n = aq^{n-1}},\ (n = 1, 2, 3, \cdots, n), \tag{8}$$

ist. Eine Zahlenfolge dieser Art nennt man eine geometrische Folge.

> **Erklärung: Eine Zahlenfolge (x_n), bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert besitzt, heißt eine geometrische Folge.**

Aus Gleichung (8), dem Bildungsgesetz der Glieder x_n der geometrischen Folge, erkennen wir, daß dieses der Exponentialfunktion

$$y = aq^{x-1}$$

für alle ganzzahligen x-Werte entspricht. Diese Funktion hatten wir in der Form $y = a^x$ kennengelernt (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, Seite 100). Beachte, daß in diesen beiden Gleichungen die Größe a verschiedene Bedeutung besitzt!

Logarithmieren wir die einzelnen Glieder der geometrischen Folge

$$a;\quad aq;\quad aq^2;\quad \cdots;\quad aq^{n-1},$$

so erhalten wir die Folge

$$\lg a;\quad \lg a + \lg q;\quad \lg a + 2\lg q;\quad \cdots;\quad \lg a + (n-1)\lg q.$$

Diese ist eine arithmetische Folge erster Ordnung.
Denken wir uns diese Folge in einem gleichmäßig geteilten Netz dargestellt, so erkennen wir, daß diese Folge durch Punkte veranschaulicht wird, die auf einer Geraden mit dem Anstieg $\lg q$ liegen.
Das entsprechende Ergebnis zeigt die Darstellung der Glieder der geometrischen Folge in halblogarithmischem Papier (vgl. Abb. 181).

Die Summe der n Glieder einer geometrischen Folge ist

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Um ihren Wert zu bestimmen, ohne daß die Glieder einzeln addiert werden müssen, wollen wir diese Summe mit q multiplizieren. Es ergibt sich

$$s_n q = \phantom{a +{}} aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Die Differenz der Summen beider Folgen liefert

$$\begin{aligned} s_n q - s_n &= -a \qquad\qquad\qquad\qquad + aq^n \\ s_n(q-1) &= a(q^n - 1) \end{aligned}$$

und damit

$$\boldsymbol{s_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}} \qquad \text{für } q \neq 1. \tag{9}$$

Für $q = 1$ geht der Quotient $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für jedes n in die Form $\frac{0}{0}$ über. Die Summenformel (9) verliert ihren Sinn. Trotzdem ist s_n für endliche Werte von n bestimmbar.

Wir wenden das in Abb. 180 dargestellte Verfahren auf endliche geometrische Folgen an, wenn

$$q > 1, \quad q = 1, \quad 0 < q < 1$$

ist, und projizieren die Summen dieser Folgen auf eine zur Waagerechten parallele Achse s_n.

Wir erkennen:

Ist $q > 1$, so wachsen die Glieder mit fortschreitendem n. Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, laufen auseinander (Abb. 182). Wir sprechen von einer wachsenden geometrischen Folge. Ihre Summe ist

$$s_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ist $q = 1$, so bleibt die Größe der Glieder unverändert. Die geometrische Folge ist in eine konstante Folge ausgeartet. Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, sind einander parallel (Abb. 183). Es ergibt sich

$$s_n = na.$$

Ist $0 < q < 1$, so nehmen die Glieder mit fortschreitendem n ab. Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, laufen aufeinander zu (Abb. 184). Wir sprechen von einer fallenden geometrischen Folge. Die Gleichung (9) schreiben wir in der Form

$$s_n = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{10}$$

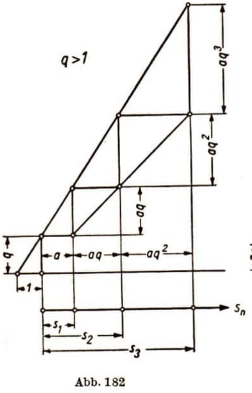


Abb. 182

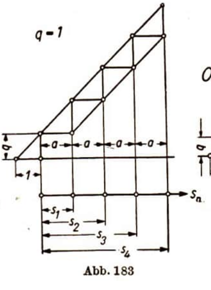


Abb. 183

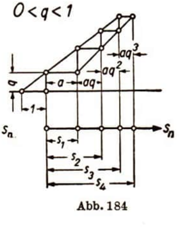


Abb. 184

Aufgaben

I. Endliche geometrische Zahlenfolgen

1. Was für Zahlenfolgen sind

a) $1; 9; 81; 729$, **b)** $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256}; \frac{1}{1024}$? Bestimme ihre Quotienten!

2. Stelle die geometrischen Folgen

a) $x_1 = 3$, $q = 1{,}5$, **b)** $x_1 = 5$, $q = 0{,}8$

bis zum fünften Glied graphisch dar:

1. entsprechend Abb. 176, 2. entsprechend Abb. 179, 3. entsprechend Abb. 180, 4. entsprechend Abb. 181 (halblogarithmisches Papier)!

Welche Konstruktion ist die einfachste?

3. Konstruiere Strecken für die Glieder der geometrischen Folge mit $x_1 = a = 1$ und $q = \frac{3}{2}$!
Anleitung: a) Verfahre nach Abb. 179! b) Verfahre nach Abb. 180! c) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete $a = 1$, die andere $\frac{3}{2}$, also $\frac{3}{2} = a \cdot q$. Setze $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$! Konstruiere von a ausgehend aus ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken der Reihe nach aq, aq^2, aq^3 und aq^4 (vgl. Abb. 185)!

4. Konstruiere Strecken für die ersten vier Glieder der geometrischen Folge mit $a = 3$ und $q = \frac{1}{3}$!
Anleitung: Verfahre nach Abb. 185!
Wie erkennt man bei dieser Konstruktion, ob die Folge wachsend oder fallend ist?

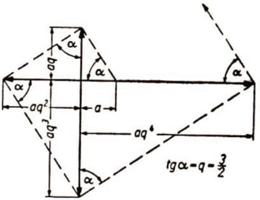


Abb. 185

5. Berechne für eine geometrische Folge x_n und s_n,
wenn **a)** $a = 2$, $q = 2$, $n = 10$,
b) $a = 2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$ ist!

6. Berechne für eine geometrische Folge q und s_n,
wenn **a)** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_n = 13\,122$, $n = 10$,
b) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_n = 768$, $n = 10$ ist!

7. Berechne für eine geometrische Folge n,
wenn **a)** $a = \frac{5}{3}$, $q = 2$, $s_n = 1705$,
b) $a = 4$, $q = 3$, $s_n = 39\,364$ ist!

Anleitung: n ist in der Bestimmungsgleichung der Exponent. Logarithmiere die Gleichung für q^n! Beachte, daß zwei Logarithmen zu dividieren sind!

8. Gegeben ist die Folge $x_1 = a$; $x_2 = (a + d)\, q$; $x_3 = (a + 2d)\, q^2$; $\cdots$; $x_n = [a + (n - 1)\, d]\, q^{n-1}$.
Gesucht ist s_n.
Anleitung: Bilde s_n, $s_n q$ und die Differenz $s_n(q - 1)$! Vereinfache und bestimme s_n!

9. Bilde die Summen der Folgen
a) $(x_n) = q;\ 3\,q^2;\ 5\,q^3;\ \cdots;\ (2n - 1)\, q^n$, **b)** $(x_n) = 1;\ 2q;\ 3q^2;\ 4\,q^3;\ \cdots;\ nq^{n-1}$!
Anleitung: Multipliziere die Summe mit q, bilde die Differenz und vereinfache!

II. Anwendungen

10. Nach der Sage erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Belohnung die Zahl der Weizenkörner, die auf ein Schachbrett kommen, wenn das erste Feld mit einem Korn, das zweite mit zwei, das dritte mit vier, das vierte mit acht Körnern und so fort belegt werden. Wie groß ist die Zahl der Weizenkörner? Um von dieser Menge eine Vorstellung zu bekommen, sollen 10 Schüler je 200 Körner auf einer Briefwaage wiegen und aus dem arithmetischen Mittel die Zahl der Körner errechnen, die 1 t wiegen.

11. An einer Maschine sollen zwischen den Drehzahlen $n_a = 450\ \text{min}^{-1}$ und $n_e = 1400\ \text{min}^{-1}$ vier Zwischenstufen mit konstanten Stufensprüngen eingeschaltet werden. Welche Drehzahlen ergeben sich für das zu konstruierende Getriebe?

a) In welcher allgemeinen Form läßt sich die Endstufe des Getriebes (n_e) ausdrücken, wenn man die Anfangsstufe mit n_a, den konstanten Stufensprung mit q und die Anzahl der Stufen mit z bezeichnet?

b) Berechne aus der gewonnenen Gleichung die Größe des Stufensprungs!

c) Stelle die in a) gewonnene Funktion von z geometrisch dar! Welcher Art ist die Funktion?

d) Logarithmiere die in a) gewonnene Gleichung! Welcher Art ist die Funktion, die den Logarithmus der Endstufe als Funktion der Stufenzahl darstellt?

e) Stelle diese Funktion in einfach-logarithmischem Papier geometrisch dar! Welcher Art ist die Kurve?

f) Zeichne die Funktion für die gegebenen Werte

$n_a = 450\ \text{min}^{-1}$, $n_e = 1400\ \text{min}^{-1}$ und $z = 5$!

g) Bestimme aus dem geometrischen Bild die zu den einzelnen Stufen gehörigen Drehzahlen n_1, n_2, n_3, n_4!

h) Überprüfe die geometrische Lösung durch Rechnung!

12. Übertrage von der unteren Teilung des logarithmischen Rechenstabes die zwischen den Zahlen 25 und 75 liegende Strecke auf Millimeterpapier und teile sie in fünf gleiche Teile!

a) Bestimme die den Teilpunkten auf dem Rechenstab zugeordneten Numeri!

b) Bilde die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Zahlenfolge!

c) Beweise allgemein, daß zu den Teilpunkten, die durch die gleichmäßige Teilung einer zwischen den Zahlen a und b auf dem Rechenstab liegenden Strecke in n gleiche Teile entstehen, eine geometrische Zahlenfolge gehört!

13. Wende das in Aufgabe 12 entwickelte und begründete Verfahren zur Lösung der Aufgabe 11 an!

Anleitung: Übertrage die zwischen den Zahlen 450 und 1400 auf dem Rechenstab liegende Strecke auf Millimeterpapier und teile sie in fünf gleiche Teile! Bestimme die den Teilpunkten auf dem Rechenstab entsprechenden Zahlenwerte und vergleiche sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 11!

14. Eine Drehbank kann mit den Drehzahlen 35, 45, 56, 71, 90, 112, 140, 180, 224, 280, 355 und 450 min^{-1} laufen. Untersuche, ob diese Folge eine geometrische Folge ist!

Anleitung: Bestimme die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder mit dem Rechenstab und bestimme den Mittelwert der Quotienten!

15. Beim Dreh-, Bohr- und Schleifdurchmesser 100 mm betragen

die Schnittgeschwindigkeiten v

3,5 4,4 5,7 6,9 8,8 11 14 18 22 m/min,

die Umdrehungen n

11 14 18 22 28 36 45 56 71 min^{-1}

und beim Vorschub[1]) $s = 0{,}1$ mm, bezogen auf eine Umdrehung,

die Arbeitszeiten t für 100 mm Länge des Arbeitsstückes

88 71 56 45 36 28 22 17 14 min.

Untersuche, ob diese Folgen geometrische Folgen sind!

---

1) Vorschub ist die Bewegung eines Arbeitsstückes gegenüber dem feststehenden Teil der Werkzeugmaschine bzw. des Werkzeugs oder umgekehrt.

16. Die Bedürfnisse der Technik (Drehzahlen an Werkzeugmaschinen, Durchmesser von Werkstücken, metrische Nummern von Garnen[1]) u. a.) erfordern eine geometrische Unterteilung der Stufensprünge im Zehnersystem. Diese ist durch die Normzahlreihe R 10 (DIN 323), eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$\sqrt[10]{10},$$

gegeben. Abgeleitet sind die Normzahlreihen R 5 (Wurzelexponent 5), R 20 (Wurzelexponent 20) und R 40 (Wurzelexponent 40) mit dem Radikanden 10. Berechne für die Normzahlreihe R 10 die Werte zwischen 1 und 10! Nach Multiplikation mit 10, 100 usf. gelten diese Werte in den folgenden Zehnerstufen. (In der Praxis wird mit gerundeten Werten gearbeitet — vgl. Aufgaben 11, 14, 15.)

Anleitung: Berechne die Wurzel logarithmisch und die Normzahlwerte auf die ersten vier geltenden Ziffern!

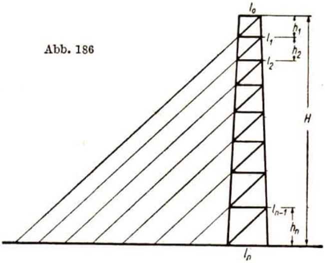
17. In DIN 3 sind u. a. folgende Durchmesser genormt:

100, 105, 110, 120, **125**, 130, 140, 150, **160**, 170, 180, 190, **200**, 210, 220, 240, **250**, 260, 280, 300, **315**, 330, 355, 380, **400**, 420, 450, 480, **500**, 530, 560, 600, **630**, 670, 710, 750, **800**, 850, 900, 950, **1000**.

Welcher Normzahlreihe sind die fettgedruckten Werte entnommen? Wie heißen sie genau? Welches sind die Zahlen der Reihe R 5?

18. Ein Gittermast einer elektrischen Hochspannungsleitung hat die Form einer geraden, quadratischen, abgestumpften Pyramide, deren Seitenflächen durch Stahlgitter gebildet werden, die die Form gleichschenkliger Trapeze haben (Abb. 186). Jede dieser Seitenflächen ist durch horizontale Stahlschienen so in Felder unterteilt, daß die diagonalen Versteifungen dieser Felder parallel laufen. Die Höhe einer Seitenfläche ist gleich h m, die oberste Parallele l_0 m, die unterste l_n m.

Abb. 186



a) Beweise allgemein, daß die parallelen Strecken $l_0, l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n$ eine geometrische Folge bilden!

b) Beweise, daß auch die Abstände $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_n$ der parallelen Strecken ebenso wie die Seitenlängen der einzelnen Felder eine geometrische Zahlenfolge mit gleichem Stufensprung bilden wie die l-Reihe!

c) Durch welchen allgemeinen Ausdruck ist die Gesamtlänge aller horizontalen Versteifungen einer Seitenfläche darstellbar?

d) Berechne die Summe der Höhen der einzelnen Felder!

e) Durch welche Strecken werden in der Abbildung die Summen aller horizontalen Versteifungen, aller Diagonalstützen und aller Höhen dargestellt?

f) Berechne den konstanten Stufensprung q, wenn die Längen $l_0 = 1$ m und $l_n = 4$ m gegeben sind und die Zahl der Felder $n = 10$ beträgt!

g) Berechne mit dem ermittelten Wert von q die Längen der einzelnen horizontalen Versteifungen, der Höhen der einzelnen Felder und die Längen der einzelnen Diagonalstützen!

---

1) Metrische Nummer (Kurzzeichen Nm) gibt an, wieviel Kilometer (Meter) eines Garnes 1 kp (1 p) wiegen. Beispiel: Nm 28 bedeutet, 28 km Garn wiegen 1 kp.

19. In einer Kompressoranlage führt die Kompressionspumpe dem Kompressor, dessen Volumen V_0 cm³ beträgt, bei jedem Hub die Luftmenge v cm³ zu. Der Anfangsdruck im Kompressor sei 1 at. Die Kompressionswärme werde abgeführt.

a) Wie groß ist die Luftmenge im Kompressor nach 1, 2, 3, ···, n Umdrehungen des die Pumpe treibenden Elektromotors?

b) Berechne den Druck nach 1000 Umdrehungen für einen Kompressor, der ein Volumen von 25 l hat, wenn die bei einem Hub dem Kompressor zugeführte Luftmenge 80 cm³ bei 1 at beträgt!

c) Wie groß ist der Druck p_n im Kompressor nach 1 min, wenn die Drehzahl des Motors n min^{-1} beträgt?

20. Abb. 187 zeigt im Schnitt eine Rotationskapselpumpe. An den konischen Stutzen K wird der Rezipient mit dem Volumen V cm³ angeschlossen. Durch Drehung des exzentrischen Vollzylinders Z wird bei jeder Umdrehung zwischen den durch eine Druckfeder F an den Zylinder angepreßten Schieber S und dem Gehäuse G eine Luftmenge v cm³ abgeschlossen und durch A nach außen befördert. Das Pumpengehäuse steht in einem Behälter unter Ölabschluß.

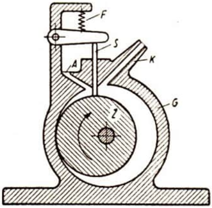


Abb. 187

a) Wie groß ist nach einer einmaligen Umdrehung dem Mariotteschen Gesetz entsprechend der Luftdruck im Rezipienten, wenn der ursprüngliche Luftdruck 760 Torr war, der Rezipient das Volumen $V = 3000$ cm³ hat und $v = 200$ cm³ beträgt?

b) Wie groß ist der Verdünnungsfaktor bei einer Umdrehung?

c) Bestimme den Luftdruck im Rezipienten nach 1, 2, 3, ···, n Umdrehungen!

d) Wie verhalten sich die Luftdrucke im Rezipienten nach 1, 2, 3, ···, n Umdrehungen?

e) Auf welchen Druck sinkt der Luftdruck im Rezipienten in 1 min, wenn der die Pumpe treibende Motor 180 Umdrehungen je Minute macht und das Übersetzungsverhältnis der Riemenscheiben 4 : 1 beträgt?

21. Bei der gleichschwebend temperierten Stimmung haben die Töne

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	c

die relativen Schwingungszahlen

$q^0 = 1$	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}	q^{11}	$q^{12} = 2.$

Wie groß ist das Intervall zwischen zwei Tönen?
Untersuche die Unterschiede zwischen der reinen und der temperierten Stimmung für die Quinte (3 : 2), die Quarte (4 : 3), die Sexte (5 : 3) und die große Terz (5 : 4)!

22. Teile mit Hilfe der Konstruktion der Glieder einer fallenden geometrischen Folge (vgl. Abb. 184) das Griffbrett einer Laute mit der Saitenlänge von 624 mm nach der gleichschwebend temperierten Stimmung (Maßstab 1 : 2, vgl. Aufg. 21)!

23. Auf einem Photoapparat mit der Brennweite 10,5 cm sind die relativen Öffnungen F : 4,5; 5,6; 8; 11; 16; 22; 32 angegeben. Die Wahl der nächstkleineren Blende erfordert etwa die doppelte Belichtungszeit der vorhergehenden. Für Blende F : 8 ist mit einem Belichtungsmesser für einen Film $\frac{17^\circ}{10}$ DIN eine Belichtungszeit von $\frac{1}{100}$ s bestimmt worden.

a) Welche Belichtungszeiten sind für die angegebenen Blenden erforderlich?

b) Der Verschluß läßt 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{250}$ s als Belichtungszeiten zu. Welche Blenden können verwendet werden?

24. Im sogenannten englischen Blendensystem sind die Blendennummern Verhältniszahlen der Belichtungszeit, wobei von der relativen Öffnung 1 : 4 als Einheit ausgegangen wird. Die Blendennummern sind ganze Zahlen und so abgestuft, daß irgendeine Blende die halbe Belichtungszeit der vorangehenden kleineren und die doppelte Belichtungszeit der nächstgrößeren bedingt. Berechne die relativen Öffnungen für die relativen Belichtungszeiten 1, 2, 4, ⋯, 256!

Anleitung: Die Belichtungszeiten zweier Objektive verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der relativen Öffnungen.

25. In einem anderen Blendensystem, dem von Dallmeyer-Stolze, ist der Ausgangspunkt für die relative Öffnung $F : \sqrt{10} \approx F : 3{,}2$, dem die relative Belichtungszeit 1 zugeordnet ist. Berechne die Blendenöffnungen für die relativen Belichtungszeiten 1, 2, 4, ⋯, 256!

3. Unendliche geometrische Zahlenfolgen

Eine unendliche geometrische Zahlenfolge sei gegeben durch

$$(x_n) = a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3;\ \cdots.$$

Als Summe einer endlichen geometrischen Folge hatten wir in (9)

$$s_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

erkannt.

Ist nun $q > 1$, so wächst in einer unendlichen Zahlenfolge q^n über jede endliche Zahl hinaus und damit auch die Summe s_n. Diesen Fall verdeutlicht Abb. 182, wenn die obere und untere Begrenzungsstrecke in Strahlen übergehen, die auseinanderlaufen, divergieren.

Ist $q = 1$, so bleibt wie bei der endlichen Zahlenfolge die Größe der Glieder konstant. Es gehen jedoch die parallelen Begrenzungsstrecken in der Abb. 183 in parallele Strahlen über. Der Wert der Summe $s_n = na$ wächst mit der Gliederzahl über alle Grenzen.

Ist $0 < q < 1$, so nehmen die Glieder mit fortschreitendem n immer mehr ab. Aus Abb. 184 ist zu erkennen, daß die Strecken, zwischen denen die fortgesetzt kleiner werdenden Glieder der Folge liegen, zusammenlaufen, konvergieren. Die Teilsumme dieser geometrischen Folge wächst zwar mit der Gliederzahl, jedoch wird die Zunahme von Glied zu Glied immer kleiner. Die Summe strebt, wie wir sagen und wie aus Abb. 188 zu erkennen ist, einer bestimmten Zahl, einem Grenzwert, derart zu, daß der Unterschied gegen diese Zahl beliebig klein wird. Projizieren wir den Schnittpunkt der beiden begrenzenden Strecken auf die Parallele s_n zur Achse, so wird dies deutlich.

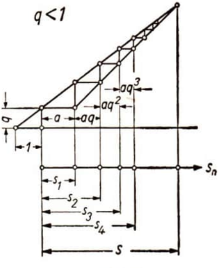


Abb. 188

In Gleichung (10) war die Summe einer fallenden geometrischen Folge durch

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\cdot\frac{q^n}{1-q}$$

bestimmt worden. Da $0 < q < 1$ ist, so wird q^n mit wachsendem Exponenten kleiner und kleiner und nähert sich dem Werte 0. Es ergibt sich dann

$$s = \frac{a}{1-q}. \tag{11}$$

s wird als Grenzwert der Teilsummen s_n bezeichnet. Unter s verstehen wir die Summe einer fallenden unendlichen geometrischen Folge.

Abb. 189 zeigt die fallende geometrische Folge mit dem Anfangsglied $x_1 = 0{,}8$ und dem Quotienten $q = 0{,}5$, also die Werte

$x_1 = 0{,}8$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}2$; $x_4 = 0{,}1$; $x_5 = 0{,}05$; $x_6 = 0{,}025$; $x_7 = 0{,}0125$; $\cdots$.

In Abb. 190 sind die Teilsummen mit den Werten

$s_1 = 0{,}8$; $s_2 = 1{,}2$; $s_3 = 1{,}4$; $s_4 = 1{,}5$; $s_5 = 1{,}55$; $s_6 = 1{,}575$; $s_7 = 1{,}5875$; $\cdots$

veranschaulicht. Mit wachsendem Index wird der Wert der Teilsumme immer größer und nähert sich dem Zahlenwert 1,6; dabei wird der Wert der einzelnen Glieder immer kleiner und nähert sich dem Zahlenwert 0.

Mit dem Index $n = 7$ ist die Genauigkeitsgrenze in den Abb. 189 und 190 erreicht.

Eine andere fallende geometrische Folge ist zum Beispiel die Folge mit dem Anfangsglied $x_1 = 0{,}3$ und dem Quotienten $q = 0{,}1$. Es ist

$x_1 = 0{,}3$; $x_2 = 0{,}03$; $x_3 = 0{,}003$; $\cdots$.

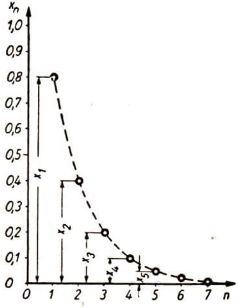


Abb. 189

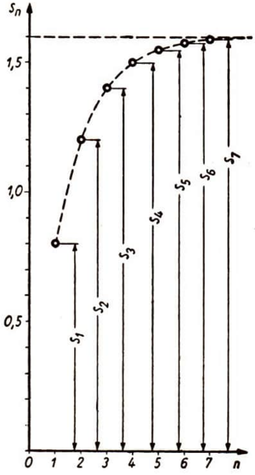


Abb. 190

Als Teilsummen ergeben sich

$$s_1 = 0{,}3;\ s_2 = 0{,}33;\ s_3 = 0{,}333;\ \cdots;\ s_n = 0{,}333333\cdots.$$

Mit wachsender Gliederzahl wächst der Wert der Teilsummen. s_n ist aber, wie groß auch n gewählt werden mag, stets größer als 0,3 und kleiner als 0,4.

Wird auf vier Dezimalstellen genau gerechnet, so zeigen die Teilsummen von s_4 an keine Unterschiede mehr. Wird eine größere Genauigkeit gefordert, so tritt diese Tatsache später ein, bleibt aber immer bestehen.

Für $x_1 = 0{,}3$ und $q = 0{,}1$ folgt

$$s = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3},$$

d. h., der Grenzwert ist $\frac{1}{3}$.

Aufgaben

1. Veranschauliche die unendlichen geometrischen Zahlenfolgen
a) $x_1 = 2,\ q = 1{,}5$; **b)** $x_1 = 4,\ q = 0{,}5$ in geeigneter Weise!

2. Konstruiere **a)** nach Abb. 188, **b)** nach Abb. 190 die Summe der unendlichen geometrischen Folge $x_1 = 2,\ q = \frac{1}{2}$ und deren Grenzwerte! Projiziere bei Konstruktion nach Abb. 188 die Teilsummen auf eine zur Waagerechten parallele Achse!

3. Berechne die Summen der unendlichen geometrischen Folgen mit den allgemeinen Gliedern
a) $\frac{1}{2^n}$; **b)** $\frac{1}{5^n}$; **c)** $\left(\frac{3}{5}\right)^n$!
Veranschauliche die Konvergenz! Welche der Folgen konvergiert am stärksten? Nach wieviel Gliedern ist die Summe auf vier Stellen genau berechnet?
Anleitung: Das Restglied $R_n = \frac{a q^n}{1-q}$ muß kleiner sein als die Hälfte der vierten Stelle! ($R_n < 1 : 20000$)

4. Zeige, daß die Stufen
a) des dekadischen Zahlensystems,
b) des Zweier-Zahlensystems,
c) des Fünfer-Zahlensystems Glieder von geometrischen Zahlenfolgen sind!

5. Wie groß ist die Summe der unendlichen geometrischen Folge mit dem Anfangswert $a = 3$ und dem Quotienten 0,1?
Schreibe die Summe als gemischte Zahl! Bilde Teilsummen!

6. Jeder periodische Dezimalbruch stellt die Summe einer geometrischen Folge dar. Bilde die Summen von **a)** $a = 0{,}37,\ q = 0{,}01$; **b)** $a = 0{,}159,\ q = 0{,}001$!
Kann man aus der Ableitung die Regel für die Umwandlung eines periodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch erkennen?

7. Jeder gemischtperiodische Dezimalbruch läßt sich in die Summe $s = a + b + bq + bq^2 + \cdots$ umwandeln. Berechne den Wert, wenn
a) $a = 0{,}2,\ b = 0{,}03,\ q = 0{,}01$; **b)** $a = 0{,}41,\ b = 0{,}006,\ q = 0{,}1$ ist!

8. Ein Tennisball springt $h_1 = 1{,}50$ m hoch, wenn man ihn aus der Höhe $h = 2{,}50$ m auf eine harte Unterlage frei fallen läßt. Wie hoch springt er nach dem zweiten Aufschlagen? Wann kommt der Ball zur Ruhe? Welche Strecke legt er insgesamt zurück?

II. Anwendung der endlichen geometrischen Zahlenfolgen

4. Zinseszinsrechnung

a) Begriff des Zinseszinses

Auf Sparkassenkonten eingezahlte Gelder werden je nach der Kündigungszeit mit einem Zinsfuß $p = 3,\ 3\frac{3}{4}$ oder 4% im Jahr verzinst. Bleibt der Sparbetrag während eines Jahres unverändert, so wird er am Ende des Jahres um die Zinsen vermehrt. Der vermehrte Betrag gilt für das folgende Jahr als zinsbringend. Die Fortsetzung dieses Verfahrens, bei dem Zinsen, die zu dem vorhergehenden Betrag hinzugerechnet sind, wieder Zinsen bringen, führt zum Begriff Zinseszins.

b) Ableitung der Zinseszinsformel

Wir bezeichnen einen zinsbringenden Betrag am Anfang des ersten Jahres, d. h. zum Zeitpunkt 0, mit k_0, seinen Wert am Ende des ersten Jahres mit k_1. Dieser Zeitpunkt stimmt mit dem Beginn des zweiten Jahres überein, so daß k_1 gleichzeitig den Wert des Betrages am Anfang des zweiten Jahres darstellt, wie dies Abb. 191 erläutert. Die Werte am Ende des zweiten, dritten usf. Jahres bezeichnen wir mit $k_2, k_3, \cdots, k_n$. Ist der Zinsfuß p, dann ergibt sich aus der einfachen Verzinsung jeweils für ein Jahr die nachstehende Aufstellung:

Abb. 191

Zinstermin Ende des Jahres	Anfangskapital	Zins des laufenden Jahres	Summe von Anfangskapital und Zins			Endkapital zurückgeführt auf Anfangskapital
			unmittelbar	vereinfacht	$1 + \frac{p}{100} = r$ eingesetzt	
1	k_0	$k_0 \frac{p}{100}$	$k_0 + k_0 \frac{p}{100}$	$k_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_0 r = k_1$	$k_0 r$
2	k_1	$k_1 \frac{p}{100}$	$k_1 + k_1 \frac{p}{100}$	$k_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_1 r = k_2$	$k_0 r^2$
3	k_2	$k_2 \frac{p}{100}$	$k_2 + k_2 \frac{p}{100}$	$k_2\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_2 r = k_3$	$k_0 r^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	k_{n-1}	$k_{n-1} \frac{p}{100}$	$k_{n-1} + k_{n-1} \frac{p}{100}$	$k_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_{n-1} r = k_n$	$k_0 r^n$

Der Faktor $1 + \frac{p}{100} = r$, mit dem in jedem Jahr das zinspflichtige Kapital multipliziert wird, heißt der Aufzinsungsfaktor.

Aus der letzten Spalte der Aufstellung erkennen wir, daß bei der Berechnung von Zinseszinsen die Werte für das Kapital am Ende der einzelnen Zinsabschnitte Glieder einer wachsenden endlichen geometrischen Zahlenfolge mit dem Anfangsglied k_0 und dem Quotienten $r = 1 + \frac{p}{100}$ sind. Der letzte Wert der Endkapitalspalte gibt die Zinseszinsformel

$$\boldsymbol{k_n = k_0 \cdot r^n}. \tag{12}$$

In dieser Gleichung wird k_0 als der Anfangs- oder Barwert des Kapitals, k_n als der Endwert, $r = 1 + \frac{p}{100}$ als der Aufzinsungsfaktor und n als die Zahl der Aufzinsungsabschnitte oder die Zeit bezeichnet.

Von den vier Größen der Zinseszinsformel müssen drei gegeben sein, wenn die vierte berechnet werden soll.

Die Frage nach dem Bar- oder Anfangswert wird beantwortet durch

$$\boldsymbol{k_0 = \frac{k_n}{r^n} = k_n v^n}, \tag{13}$$

wenn für den reziproken Wert des Aufzinsungsfaktors die Größe $v = \frac{1}{r}$ gesetzt wird. v wird als Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor bezeichnet. Da $0 < v < 1$ ist, bilden die Barwerte eine fallende endliche geometrische Zahlenfolge.

Merke:

Aufzinsen heißt Endwert des Kapitals berechnen!
Abzinsen heißt Barwert des Kapitals berechnen!

Gehe bei Berechnungen stets von den Gleichungen (12) oder (13) aus!

c) Zinseszinstabellen

Sparkassen und andere Kreditinstitute benutzen zur Berechnung Zinseszinstabellen, die der in der Logarithmentafel enthaltenen Zinseszinstafel ähneln. Schülkes Tafeln enthalten die Aufzinsungs- und Abzinsungsfaktoren auf die ersten vier geltenden Ziffern für wenige Zinsfüße. Das Tabellenbuch zur Wirtschaftsmathematik[1]) enthält die Faktoren für eine größere Anzahl von Zinsfüßen auf sechs Stellen genau. In der Praxis werden vielfach Tafelwerte benutzt, die die Faktoren auf acht Stellen genau angeben.
Wir benutzen die Tafelwerte von Schülkes Tafeln oder berechnen die Werte mit Hilfe von Logarithmen. Vierstellige Logarithmentafeln enthalten die Logarithmen der Aufzinsungsfaktoren fünfstellig, fünfstellige dagegen sechsstellig.

---

1) Beyrodt-Reißner: Tabellenbuch zur Wirtschaftsmathematik. Zweite, verbesserte Auflage Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1952.

Aufgaben

1.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
k_0	5000	4200	3225	2500	1575	7250	2325	DM
p	4	3,5	3	5	4,5	2,5	3,5	%
n	20	40	60	32	16	38	27	Jahre
k_n	10955	16628	19000	11912	3185	18523	5886	DM

Berechne mit Hilfe der Zinseszinstafel bzw. logarithmisch 1) den Endwert, 2) den Anfangswert, 3) den Zinsfuß, 4) die Zeit, wenn jeweils die anderen Werte gegeben sind!

Anleitung: Benutze bei der Berechnung von Aufzinsungsfaktoren die fünfstelligen Logarithmen in Schülkes Tafeln!

2. Welches Kapital wächst in 25 Jahren bei $4\frac{1}{2}$ % Zinseszins auf DM 16325,— an?

3. In welcher Zeit wächst ein Kapital von 2500 DM auf 6300 DM bei 4 % Zinseszins an?

Anleitung: Bestimme aus der Exponentialgleichung (12) durch Logarithmieren den Wert von n! Der Wert $n = 23{,}56$ bedeutet, daß in 23 Jahren der Betrag 6300 noch nicht erreicht, in 24 Jahren aber überschritten ist. In der praktischen Anwendung der Zinseszinsrechnung wird meist vereinbart, daß Zinseszinsen nur für volle Jahre gelten. Innerhalb eines jeden Jahres wird mit einfachen Zinsen gerechnet.

4. In welcher Zeit verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht) sich ein Betrag bei 2 %; 3 %; $3\frac{1}{2}$ %; 4 % und 5 % Zinseszins? Deute jedes Ergebnis in einer Ungleichung!

Anleitung: Benutze möglichst die Zinseszinstafel!

5. In welcher Zeit wachsen 2756 DM auf 8127 DM bei 2 % Zinseszins an?

6. Warum streckt sich die Zinseszinskurve in halblogarithmischem Papier zur Geraden?

7. Der in Festmetern angegebene Waldbestand wächst während eines verhältnismäßig großen Zeitraumes angenähert nach der Zinseszinsformel. Diese Faustregel gilt nicht für einen sehr jungen und einen sehr alten Bestand. Ein Waldbestand ist mit 4 Millionen Festmetern geschätzt. Der jährliche Zuwachs beträgt 3 %. Wie groß ist der Bestand nach 10 Jahren, wenn in der Zwischenzeit nichts geschlagen wird?

5. Anwendungen der Zinseszinsrechnung im Geldverkehr

a) Der Begriff der Zeitrente

Als Zeitrente wird eine Folge von Zahlungen bezeichnet, die in regelmäßigen Zeitabschnitten während einer von vornherein vereinbarten Dauer geleistet werden. Die einzelnen Zahlungen heißen Raten der Zeitrente. Die Raten werden meist ganzjährig nachschüssig, d. h. am Ende der regelmäßigen Zeitabschnitte, dagegen selten vorschüssig, d. h. jeweils am Anfang, in gleicher oder in gesetzmäßig veränderlicher Höhe geleistet.

b) Der Endwert der nachschüssigen Zeitrente als Summe einer geometrischen Folge

Den Endwert (Schlußwert) der jährlichen Zeitrente mit dem Rentenbetrage 1 bezeichnen wir mit $s_{\overline{n|}}$ (sprich: Endwert der nachschüssigen Zeitrente 1 auf n Jahre). Dabei bedeutet n die Laufzeit der Zeitrente und s das Symbol für den Endwert bei nachschüssiger Zahlungsweise.
Handelt es sich um die Jahresrate R, so ist der Endwert dieser Zeitrente R mal so groß wie der entsprechende Wert für die Einheit.

Zur Erleichterung der Berechnung veranschaulichen wir die Zahlungsbedingungen und den Bezugspunkt, für den der Wert der Zeitrente berechnet werden soll, an einer Zeitskala (Abb. 192).

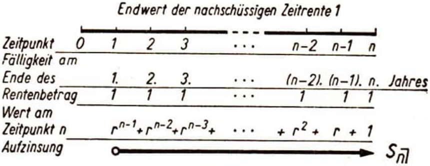


Abb. 192

Aus Abb. 192 ergibt sich, daß die Raten der Zeitrente 1 selbst eine konstante endliche Folge darstellen. Wird jede einzelne Zahlung mit Zinseszins auf den Zeitpunkt n aufgezinst, so erhalten wir die in der folgenden Aufstellung gegebenen Werte:

Ende des ... Jahres	Wert des 1. Rentenbetrages	2.	3.	...	$(n-2)$-ten	$(n-1)$-ten	n-ten	Endwert
1.	1							
2.	r	1						
3.	r^2	r	1					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$(n-2)$-ten	r^{n-3}	r^{n-4}	r^{n-5}		1			
$(n-1)$-ten	r^{n-2}	r^{n-3}	r^{n-4}		r	1		
n-ten	r^{n-1}	r^{n-2}	r^{n-3}		r^2	r	1	$s_{\overline{n}|}$

Die Werte in der letzten Zeile bilden eine endliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten r, so daß der Endwert der nachschüssigen, auf n Jahre beschränkten Zeitrente 1 gleich der Summe dieser Folge ist. Es ist

$$s_{\overline{n}|} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

$$\mathbf{s_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad (14)$$

c) Der Barwert der nachschüssigen Zeitrente

Den Barwert (Anfangswert) der nachschüssigen, auf n Jahre beschränkten Zeitrente 1 bezeichnen wir mit $a_{\overline{n}|}$ (sprich: Barwert der nachschüssigen Zeitrente 1 auf n Jahre). a ist das Symbol für den Barwert bei nachschüssiger Zahlungsweise. Diskontieren wir den Endwert $s_{\overline{n}|}$ auf den Zeitpunkt 0, d. h., dividieren wir nach dem Zinseszinsgesetz durch r^n, so erhalten wir den Barwert der auf n Jahre beschränkten nachschüssigen Zeitrente 1. Es ist

$$\mathbf{a_{\overline{n}|} = \frac{s_{\overline{n}|}}{r^n} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad (15)$$

d) Abgeleitete Werte

Sind abgeleitete Werte zu berechnen, so gehen wir stets auf die Grundformeln (14) oder (15) zurück und lösen diese nach der gesuchten Größe auf.

Berechnen wir z. B. die Zeit, in der die nachschüssige Zeitrente 1 bei 4 % Zinseszins den Endwert 15 besitzt, so gehen wir von der Gleichung (14) aus, erhalten aus

$$15 = \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04}$$

die Exponentialgleichung

$$1{,}04^n = 1 + 15 \cdot 0{,}04 = 1{,}6$$

und nach dem Logarithmieren

$$n \cdot \lg 1{,}04 = \lg 1{,}6$$

oder

$$n = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}04} = \frac{0.2041}{0.01703}.$$

Den Wert dieses Quotienten bestimmen wir entweder durch Division oder mit Hilfe einer logarithmischen Nebenrechnung.

Die Laufzeit der Zeitrente beträgt 11,98 Jahre. Die Rente muß, wenn sie 12 Jahre laufen soll, um ein Geringes kleiner als 1 sein.

e) Der Tilgungsplan eines Darlehens

Hypotheken werden vielfach in der Form von Tilgungsdarlehen gegeben.

Beispiel: Eine Hypothek über 10000 DM wird mit $4\frac{1}{2}$ % verzinst und mit 1 % des ursprünglichen Betrages getilgt. Die Jahresleistung, die Zins- und Tilgungsbeträge umfaßt, wird als Annuität[1]) bezeichnet. Die Annuität bleibt während der Tilgungsdauer unverändert. Den Tilgungsverlauf verdeutlicht der nachstehende Tilgungsplan:

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Annuität	Zinsbetrag	Tilgungsbetrag	Schuld am Ende des Jahres
1	10000,00	550,00	450,00	100,00	9900,00
2	9900,00	550,00	445,50	104,50	9795,50
3	9795,50	550,00	440,80	109,20	9686,30
4	9686,30	550,00	435,88	114,12	9572,18
5	9572,18	550,00	430,75	119,25	9452,93
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Aus diesem Anfang ist zu erkennen, daß der Tilgungsplan elementar zu berechnen ist, wenn die Annuität bekannt ist. Weiter stellen wir fest, daß mit der fortschreitenden Tilgung der Zinsbetrag abnimmt, der Tilgungsbetrag dagegen wächst, die Hypothekenschuld sich also in zunehmendem Maße vermindert.

1) annus (lat.) heißt das Jahr.

Bezeichnen wir die Annuität mit A, den Schuldbestand zu Beginn der Tilgung mit S, den am Ende des 1., 2., 3., $\cdots$ Jahres mit $S_1, S_2, S_3 \cdots$ und die Tilgungsbeträge, die am Ende des 1., 2., 3., $\cdots$ Jahres geleistet werden, mit $T_1, T_2, T_3, \cdots$, so wird

$$\begin{array}{lcl} T_1 = A - S \cdot \frac{p}{100} & \text{und} & S_1 = S - T_1 \\ T_2 = A - S_1 \cdot \frac{p}{100} & & S_2 = S_1 - T_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ T_k = A - S_{k-1} \cdot \frac{p}{100} & & S_k = S_{k-1} - T_k. \end{array} \tag{16, 17}$$

Setzen wir in

$$T_{k+1} = A - S_k \cdot \frac{p}{100}$$

den Wert von S_k ein, so folgt

$$T_{k+1} = A - S_{k-1} \cdot \frac{p}{100} + T_k \cdot \frac{p}{100}$$

und, da der erste Teil der rechten Seite gleich T_k ist (vgl. 16),

$$T_{k+1} = T_k + T_k \cdot \frac{p}{100} = T_k \cdot r. \tag{18}$$

Setzen wir für k der Reihe nach 1, 2, 3, $\cdots$, so folgt

$$T_2 = T_1 r; \quad T_3 = T_2 r = T_1 r^2; \quad T_4 = T_3 r = T_1 r^3; \quad \cdots; \quad T_k = T_1 r^{k-1}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) lassen erkennen, daß die Tilgungsbeträge Glieder einer geometrischen Folge sind.

Für das Ausgangsbeispiel ist der Tilgungsbetrag des 10. Jahres

$$T_{10} = 100 \cdot 1{,}045^9 = 148{,}60 \text{ DM}.$$

Die Summe der Tilgungsraten der k ersten Jahre ist die Summe der durch die Gleichungen (19) gegebenen geometrischen Folge. Es ist

$$T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_k = T_1 (1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}) = T_1 \cdot s_{\overline{k}|}. \tag{20}$$

Addiert man die Gleichungen (17)

$$\begin{array}{lll} S_1 = S & - T_1 \\ S_2 = S_1 & - T_2 \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \\ S_k = S_{k-1} & - T_k, \end{array}$$

so folgt für den Schuldwert am Ende des k-ten Jahres

$$S_k = S - (T_1 + T_2 + \cdots + T_k)$$

und unter Benutzung von Gleichung (20)

$$S_k = S - T_1 \cdot s_{\overline{k}|}. \tag{21a}$$

Der Schuldrest am Ende des 10. Jahres ist in unserem Ausgangsbeispiel

$$S_{10} = 10000 - 100\, s_{\overline{10|}} = 10000 - 1229 = 8771 \text{ DM}.$$

Wenn die Schuld nach n Jahren getilgt sein soll, so wird $S_n = 0$ und somit

$$0 = S - T_1 \cdot s_{\overline{n|}} \tag{21b}$$

oder auf Grund von (14) $\qquad T_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = S.$

Aus dieser Bestimmungsgleichung für n entsteht zunächst

$$r^n = \frac{S}{T_1}(r-1) + 1$$

und nach dem Logarithmieren

$$n = \frac{\lg\left[\frac{S}{T_1}(r-1)+1\right]}{\lg r}.$$

In unserem Beispiel wird $n \approx 38{,}72$; die Hypothek ist also am Ende des 39. Jahres getilgt.

Aufgaben

1. Zeige, daß $\frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = v\,\frac{1 - v^n}{1 - v}$ ist! Beachte: $v = \frac{1}{r}$!

2. Löse $s_{\overline{n|}} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ nach n auf!

3. Ein Betrag von 2500 DM wird 25 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres um 250 DM vermehrt. Wie hoch ist der Wert am Ende **a)** des 15., **b)** des 25. Jahres bei 4% Zinseszins?

   Anleitung: Stelle an der Zeitskala die Einzahlungen dar und beziehe die Berechnung auf den Endzeitpunkt! Rechne mit Tabelle und logarithmisch!

4. Eine Hypothek von 8000 DM wird mit 4% jährlich verzinst und **a)** mit 1%, **b)** mit 6% getilgt. Nach wieviel Jahren ist die Tilgung beendet?

   Anleitung: Stelle die Entwicklung an der Zeitskala dar! Berechne die Werte der Leistungen von Schuldner und Gläubiger für den Endzeitpunkt! Löse nach n auf!
   Was bedeutet das Ergebnis?

5. Stelle zur Aufgabe 4 die beiden Tilgungspläne für die ersten 5 Jahre auf! Berechne die entsprechenden Zeilen der Tilgungspläne für das 11., 21., 31., 41. und die beiden letzten Jahre bzw. vom 11. Jahre an!

   Anleitung: Benutze die Gleichungen (21) und (19)!

6. Löse die Aufgaben 4 und 5 bei 4% Zinsen und 2% Tilgung, gerechnet vom ursprünglichen Betrag!

7. Die Annuität eines Tilgungsdarlehens beträgt 5%. Berechne die Tilgungsdauer **a)** bei 3%, **b)** bei $3\frac{1}{2}$% und **c)** bei 4% Zinseszins!

8. Veranschauliche die Entwicklung der Zinsen und der Tilgungsbeträge in halblogarithmischem Papier für eine Annuität von 5% bei einem Zinsfuß **a)** von 3%, **b)** von 4%!

   Anleitung: Benutze als Zeitskala die linear geteilte Achse!

00 916-5