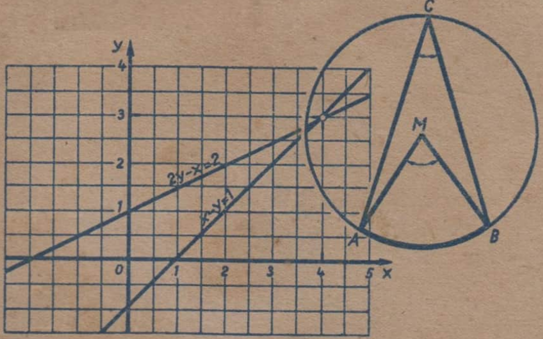
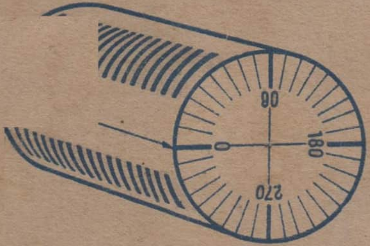


ZAHL und FORM



8. SCHULJAHR

ZAHL UND FORM

RECHNEN UND MATHEMATIK FÜR DIE GRUNDSCHULE

8. Schuljahr

Mit 143 Abbildungen

1948

ARBEITSGEMEINSCHAFT

VOLK UND WISSEN VERLAGS GMBH · BERLIN / LEIPZIG

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG

Herausgegeben von Hans Sturhann, Charlotte Taube und Walter Zabel, Berlin

Abschnitt A. Volkswirtschaftliches Rechnen wurde von Werner Kresse, Leipzig, überarbeitet

Best.-Nr. 2039 · Preis brosch. 1,40 DM

1.–310. Tausend · Liz.-Nr. 334 · 1000/48 – VI – 86/48

Satz: (M 109) B. G. Teubner, Leipzig C 1, Poststr. 3 – A 24

Druck: (33) Mitteldeutsche Druckerei und Verlagsanstalt GmbH., Magdeburg, Bahnhofstr. 17 – A 1855

INHALTSVERZEICHNIS

A. Volkswirtschaftliches Rechnen

I. Haushalt der Familie 5
1. Hauswirtschaftliche Planung 5
2. Wirtschaftsbuch und Küchentagebuch 7

II. Auswertung statistischer Zahlen 12
3. Einführung 12
4. Statistische Übungen 14

III. Vom Zahlungs- und Kreditverkehr 17
5. Der bargeldlose Zahlungsverkehr 17
6. Die Zinsrechnung der Banken 23
7. Von Wertpapieren 26

B. Arithmetik

IV. Verbindung der vier Grundrechenarten mit relativen Zahlen 31
8. Multiplikation von Summen 31
9. Wichtige Multiplikationsformeln 33
10. Gleichungen mit Multiplikationsklammern 35
11. Vermischte Aufgaben 37

V. Faktorenzerlegung / Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen 39
12. Ausklammern 39
13. Formveränderung der Brüche. Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen von Brüchen 41
14. Addition und Subtraktion von Brüchen 44
15. Multiplikation und Division von Brüchen 46
16. Gleichungen mit Brüchen 49
17. Anwendungen der Bruchgleichungen 52
18. Gleichungen aus der Prozentrechnung 53

VI. Verhältnisgleichungen 55
19. Der Verhältnisbegriff 55
20. Verhältnisgleichungen 57
21. Textgleichungen 59

VII. Funktion und graphische Darstellung 62
22. Bildliche Darstellung von Beobachtungsreihen 62
23. Funktionen 66
24. Bildliche Darstellung von Funktionen 67
25. Die lineare Funktion $y = mx$ 69
26. Die allgemeine lineare Funktion $y = mx + b$ 71

VIII. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten 72
27. Zeichnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten 72
28. Rechnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten 73
29. Textgleichungen 77

C. Geometrie

IX. Flächenberechnung und Flächenverwandlung 80
30. Berechnung von Rechteck und Quadrat 80
31. Berechnung von Parallelogramm und Dreieck 82
32. Berechnung von Trapez, unregelmäßigem Viereck und Vieleck 85
33. Verwandlung geradlinig begrenzter Flächen 88
34. Der Lehrsatz des Pythagoras 92

X. Quadratzahlen und Quadratwurzeln 95
35. Das Quadrieren der Zahlen 95
36. Die Quadrattafel 96
37. Die Quadratwurzel 100
38. Die Quadratwurzel aus Zehnerbrüchen / Irrationale Zahlen ... 103
39. Aufsuchen von Quadratwurzeln in der Quadrattafel 105
40. Anwendungen aus Sachgebieten 107

XI. Der Rechenstab 110
41. Der Aufbau des Rechenstabes 110
42. Einfache Multiplikation und Division mit dem Rechenstab... 112
43. Multiplikation und Division mit Rückschlag........ 113
44. Verbindung von Multiplikation und Division 115
45. Lösung von Proportionen mit dem Rechenstab 115
46. Quadrieren und Quadratwurzelziehen 116

XII. Aus der Kreislehre 117
47. Sehnen 117
48. Sekanten und Tangenten 119
49. Umfangs- und Mittelpunktswinkel 122
50. Bestimmungslinien 125
51. Ein Rechteck soll in ein Quadrat verwandelt werden (Anwendung des Thaleskreises) 126
52. Berechnung des Kreisumfanges 128
53. Berechnung des Kreisinhaltes 132

XIII. Berechnung einfacher Körper 135
54. Würfel und Quader 135
55. Senkrechte Säulen und Zylinder 138
56. Pyramide und Kegel 144
57. Inhalt und Oberfläche der Kugel........ 148
58. Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion 151

XIV. Aus der Ähnlichkeitslehre 155
59. Verhältnis zweier Strecken und Teilverhältnis 155
60. Strahlensätze 156
61. Anwendungen der Strahlensätze 159
62. Ähnlichkeit und Ähnlichkeitssatz 162

Münzen, Maße und Gewichte .... 3. Umschlagseite

A. Volkswirtschaftliches Rechnen

I. Haushalt der Familie

1. Hauswirtschaftliche Planung

Wer mit seinen Einkünften auskommen will, muß „haushalten". Zum Haushalten gehört Planung, wie zu allem Wirtschaften überhaupt. Deshalb empfiehlt es sich, zu Beginn eines Jahres einen **Haushaltsplan** aufzustellen. Dabei gehen wir von den geschätzten Einkünften aus, die sich bei Lohn- und Gehaltsempfängern ja ziemlich genau angeben lassen. Diese Einkünfte sind maßgebend für die Ausgabenverteilung.

1. Ein Werkmeister hatte nach Abzug der Steuern und der Beiträge zur Sozialversicherung ein Jahreseinkommen von 2 760,— DM. Er verteilte sein Einkommen in folgender Weise auf seine voraussichtlichen Ausgaben:

1. Miete	540,—	DM
2. Ernährung	1 440,—	„
3. Bekleidung	210,—	„
4. Heizung und Beleuchtung	126,—	„
5. Fahrgeld	96,—	„
6. Erholung und Vergnügen	144,—	„
7. unvorhergesehene Fälle	56,—	„

a) Wie hoch waren durchschnittlich seine monatlichen Einnahmen und Ausgaben?

b) Wieviel % seiner Einnahmen setzte er als Ausgaben in die einzelnen Posten ein?

c) Wie groß war der Überschuß am Ende des Jahres?

2. Ein Gehilfe hat ein monatliches Reineinkommen von 190,— DM. Er verteilt seine Ausgaben wie folgt: für Wohnung 21,3 %, für Ernährung 49 %, für Kleidung 5 %, für Heizung und Licht 4,6 %, für Versicherungen und Beiträge 12 %, für Reisen, Erholung und Vergnügen 7 %.

a) Berechne in DM die Höhe der einzelnen Ausgaben!

b) Wieviel DM bleiben für unvorhergesehene Ausgaben oder für Ersparnisse übrig?

3. Aus Bild 1 ist abzulesen, wie sich die Ausgaben eines Arbeiterhaushaltes, in % ausgedrückt, verteilen. Berechne, wie groß die monatlichen Ausgaben für jeden einzelnen der angegebenen Posten sind, wenn das Jahreseinkommen 2 544 DM (2 760 DM; 3 120 DM) beträgt!

4. Bei höheren Einkommen kann man oft eine starke Verschiebung der Prozentsätze für die einzelnen Posten beobachten. Bei einem Jahreseinkommen von 5 400,— DM (nach Abzug der Steuern) verteilen sich die Ausgaben z. B. folgendermaßen: für Wohnung 15 %, für Ernährung 32 %, für Bekleidung 12 %, für Heizung und Beleuchtung 4 %, für Versicherungen und Beiträge 11 %, für Fortbildung 5 %, für Reisen, Erholung und Vergnügen 16 %.

   a) Berechne die jährlichen (monatlichen) Ausgaben für die einzelnen Posten!

   b) Wie groß ist der monatliche Überschuß?

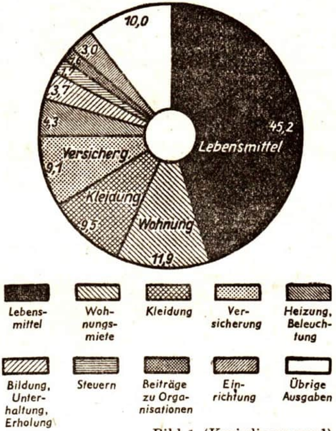


Bild 1 (Kreisdiagramm[1])

5. Auf Grund längerer Erfahrung hat ein Handwerksmeister für die Verwendung seines Einkommens, das nach Abzug der Steuern jährlich 3 906 DM beträgt, folgenden Voranschlag aufgestellt:

1. Wohnungsmiete	21 %
2. Wirtschaftsgeld einschließlich kleiner Küchenbedürfnisse	42 %
3. Heizung, Beleuchtung	2,5 %
4. Neuanschaffungen und Ausbesserungen von Kleidung und Wäsche	8 %
5. Beiträge und Versicherungen	13,5 %
6. Bücher, Zeitungen, Erholung, Vergnügen	4,2 %
7. Ergänzung an Hausgerät u. dgl.	1,8 %
8. Taschengeld, Postgeld und kleinere Ausgaben	3,5 %
9. Unvorhergesehenes oder Ersparnisse	3,5 %

a) Stelle danach in DM den Voranschlag für das Jahr (für den Monat) auf!

---

[1] s. S. 15!

5. b) Warum können die gleichen Prozentsätze für die einzelnen Posten nicht verwendet werden, wenn sich das Jahreseinkommen (nach Abzug der Steuern) auf 5 280,— DM erhöht?

c) Erkläre auf Grund der Beantwortung der Aufgabe b) den Begriff der „fixen“ (festen) Kosten eines Haushalts!

d) Für welche Posten werden sich die Prozentsätze besonders verändern? (Nähere Begründung!)

2. Wirtschaftsbuch und Küchentagebuch

a) Das Wirtschaftsbuch

Das Kernstück der hauswirtschaftlichen Buchführung ist das Wirtschaftsbuch. In dieses Buch, es kann ein einfaches Kassebuch sein, werden täglich alle Einnahmen und Ausgaben eingetragen. Es enthält auf der linken Seite den Anfangsbestand und die Einnahmen. Die Ausgaben werden auf der rechten Seite eingetragen, so daß sich durch Vergleich beider Seiten der Schlußbestand errechnen läßt, der am Ende des Monats zum Ausgleich rechts eingesetzt wird. Beide Seiten werden addiert und enthalten dann die gleichen Endbeträge.

Muster

Der Lehrling Kurt Fischer führt ein Kassebuch, das folgendes Aussehen hat:

Einnahmen	Monat	März	Ausgaben
1. Anfangsbestand	5,30	1. Straßenbahnkarte	6,—
1. Gehalt für Februar	30,—	3. Kinobesuch	1,—
19. Geschenk	5,—	7. Briefmarken	0,60
		8. Geschenk für Mutter	6,20
		13. Theaterbesuch	2,50
		20. Buchkauf	3,—
		25. Haarschneiden	1,—
		31. Kostgeld	12,—
		31. Schlußbestand	8,—
	40,30		40,30

1. Führe ein Wirtschaftsbuch (Kassebuch) nach folgenden Angaben für den Monat August:

   1. 8. Anfangsbestand 12,60 DM
   Gehalt 262,40 DM
   Miete 43,40 DM
   Wirtschaftsgeld 105,— DM

2. 8. Lebensversicherung 7,50 DM
3. 8. Gasrechnung 12,70 DM
Klingelreparatur 3,— DM
4. 8. Taschengeld für Hans und Lotte 1,50 DM, Zeitung 2,60 DM
5. 8. Briefmarken 0,42 DM, Beiträge in der Schule 0,80 DM, Rundfunkgebühren 2,— DM
6. 8. Gasthaus 2,80 DM
9. 8. Schulbücher 4,30 DM, Fahrgeld 0,45 DM
12. 8. Lichtrechnung 4,80 DM
14. 8. Geburtstagsgeschenk 5,— DM
16. 8. Schuhausbesserung 3,35 DM, Fahrgeld 0,60 DM
18. 8. Briefmarken 0,65 DM, Fahrgeld 0,85 DM
21. 8. Friseur 1,70 DM
22. 8. Zigarren 7,50 DM
23. 8. Hefte und Schulbedarf 1,90 DM
29. 8. Zeitschrift für September 3,20 DM

Da die Ausgaben eines Haushaltes mit dem Haushaltsplan verglichen werden müssen, ist es zweckmäßig, sie im Wirtschaftsbuch dem Haushaltsplan entsprechend zu gliedern. Das Wirtschaftsbuch aus Aufgabe 1 hat dann folgendes Aussehen:

Wirtschaftsbuch 1. bis 31. August

Tag	Gegenstand	Einnahmen	Ausgaben	Wohnungsmiete	Wirtschaftsgeld	Heizung, Beleuchtung	Anschaffungen, Ausbesserungen	Beiträge, Versicherungen	Bildung, Erholung, Vergnügen	Verschiedenes
		DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM
1.8.	Übertrag ...	12,60								
1.8.	Gehalt	262,40								
1.8.	Miete			43,40						
	Wirtschaftsgeld				105,00					
			148,40							
2.8.	Versicherung							7,50		
	Kohlen					4,50				
			12,00							
3.8.	Gasrechnung					12,70				
	Klingelreparatur ...						3,00			
			15,70							

2. a) Ergänze das obige Wirtschaftsbuch gemäß den Angaben aus Aufgabe 1 und schließe es ab!

   b) Führe das Wirtschaftsbuch für September nach folgenden Angaben fort (Anfangsbestand vortragen!):

   1. 9. Einnahme: Gehalt 262,40 DM
   Ausgabe: Miete 43,40 DM, Wirtschaftsgeld 90,— DM

   2. 9. Rundfunkgebühren 2,— DM

   3. 9. Taschengeld 2,— DM, Zeitung 2,60 DM, Fahrgeld 0,30 DM

   4. 9. Ausgaben auf einem Ausflug 4,30 DM

   5. 9. Beiträge und Zeitschriften der Kinder 1,80 DM, Gasrechnung 6,60 DM

   7. 9. Läufer 22,— DM, Friseur 1,20 DM

   8. 9. Schuhausbesserung 5,20 DM

   12. 9. Fahrgeld 0,45 DM, Briefmarken 0,42 DM

   13. 9. Tinte, Hefte 1,20 DM, Fußbodenfarbe 3,10 DM

   14. 9. Tabakwaren 5,10 DM

   17. 9. Pacht für den Garten 13,60 DM

   19. 9. Kinobesuch 2,— DM, Fahrgeld 1,20 DM

   23. 9. Lichtrechnung 5,20 DM

   24. 9. Elternabend der Schule 1,30 DM

   25. 9. Fahrgeld 0,75 DM

   27. 9. Papier und Umschläge 0,85 DM

   28. 9. Hausschuhe 14,— DM

   29. 9. Sportfest 7,25 DM

3. a) Vergleiche in den Aufgaben 1 und 2 die Ausgaben für die einzelnen Posten im August und September!

   b) Wieviel % der Einnahme betrug in beiden Monaten der Überschuß?

b) Das Küchentagebuch

Neben dem Wirtschaftsbuch wird noch ein Küchentagebuch geführt. Die Hausfrau trägt darin als Einnahme ihr Wirtschaftsgeld ein. Für die Eintragung der Ausgaben empfiehlt sich eine genaue Aufteilung, so daß sich etwa folgendes Muster ergibt:

Küchentagebuch 1. bis 31. August

1 Tag	2 Einnahmen		3 Ausgaben		4 Mehl und Backwaren		5 Fleisch, Wurst, Fisch		6 Milch, Butter, Eier, Käse		7 Kartoffeln, Gemüse, Obst		8 Seife und andere Waschmittel		9 Verschiedenes	
	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf	DM	Dpf

1. a) Übertrage folgende Einnahmen und Ausgaben im Monat **August** in ein Küchentagebuch:

1. 8. Einnahme: Wirtschaftsgeld 105,– DM
Ausgabe: Brot 1,45 DM; Schweinerippen 1,25 DM; Wurst 0,75 DM; Zucker 0,38 DM; Butter 1,60 DM

2. 8. Mehl 0,96 DM; Kartoffeln 2,35 DM; grüne Bohnen 0,48 DM; Salz 0,20 DM

3. 8. Brot 0,45 DM; Zucker 1,36 DM; Äpfel 0,80 DM; Mohrrüben 0,60 DM

4. 8. Käse 1,35 DM; Weißkraut 0,90 DM; Eier 0,76 DM

5. 8. Milch 0,56 DM; Brot 0,45 DM

7. 8. Nudeln 0,55 DM; Kartoffeln 0,32 DM; Suppengrün 0,21 DM; Mehl 0,56 DM; Seife 1,80 DM

8. 8. Brot 0,45 DM; Salat 1,15 DM; Kunsthonig 1,85 DM

9. 8. Salz 0,10 DM; Kohlrabi 0,35 DM

10. 8. Brot 0,45 DM; Kartoffeln 0,50 DM; Margarine 0,80 DM; Heringe 0,75 DM

11. 8. Einmachegurken ~~3,50~~ DM; Seifenpulver 0,75 DM; Mostrich 0,20 DM; Salat 0,20 DM; Zwiebeln 0,45 DM; Soda 0,25 DM

12. 8. Milch 0,56 DM; Brot 0,45 DM; Schoten, Mohrrüben 1,20 DM; Essig 0,35 DM

14. 8. Brot 0,45 DM; Erbsen 1,42 DM; Kaffee-Ersatz 0,75 DM

15. 8. Butter 1,60 DM; Mehl 1,20 DM; Zucker 0,72 DM; Hefe 0,12 DM; Äpfel 1,30 DM

16. 8. Brot 0,45 DM; Fisch 1,30 DM; Salat 0,20 DM; Scheuertuch 0,32 DM

17. 8. Graupen 0,28 DM; Streichhölzer 0,28 DM

18. 8. Kartoffeln 5,24 DM

19. 8. Milch 0,56 DM; Mehl 0,56 DM; Brot 1,60 DM; Fleisch 4,20 DM

23. 8. Brot 0,45 DM; Kohl zum Einschneiden 15,28 DM

24. 8. Fisch 1,30 DM; Dillkörner und anderes; Gewürz 0,35 DM; Äpfel 1,35 DM; Öl 0,35 DM

25. 8. Kartoffeln 0,48 DM; Grieß 0,27 DM; Kamillentee 0,20 DM

26. 8. Milch 0,56 DM; Mehl 0,48 DM; Brot 0,45 DM

28. 8. Schweinefleisch 0,90 DM; Kohlrabi 0,60 DM

29. 8. Brot 0,60 DM; Butter 0,80 DM

30. 8. Kartoffeln 2,42 DM; grüne Bohnen 2,45 DM

31. 8. Brot 0,45 DM; Käse 0,80 DM

b) Berechne die Summe der Ausgaben für die verschiedenen Posten!

c) Berechne die Gesamtausgaben und schließe den Monat ab!

2. Für den Monat September betrugen bei einem Wirtschaftsgeld von 90,— DM, das die Hausfrau am 1. September erhielt, die Ausgaben:

1. 9. Mehl 0,56 DM; Sauerkohl 0,40 DM; Brot 1,80 DM

2. 9. Milch 0,56 DM; Butter 0,80 DM; Grieß 0,26 DM

4. 9. Rindfleisch 0,90 DM; Kohl 0,55 DM

5. 9. Kartoffeln 1,45 DM; Graupen 0,23 DM

6. 9. Äpfel 1,30 DM; Zucker 0,78 DM; Erbsen 0,54 DM; Brot 1,80 DM

7. 9. Gemüse 2,45 DM; Backaroma 0,80 DM; Salat 0,15 DM

8. 9. Pflaumen 0,45 DM; Kartoffeln 0,42 DM; Gewürz 0,15 DM

9. 9. Milch 0,56 DM; Butter 1,20 DM

11. 9. Käse 0,48 DM; Pfifferlinge 0,73 DM; Zucker 1,16 DM

12. 9. Mehl 0,26 DM; Mohrrüben 0,31 DM; Brot 1,35 DM

13. 9. Kartoffeln 1,39 DM; Butter 0,80 DM

14. 9. Rindfleisch 1,15 DM; Salat 0,10 DM

15. 9. Sauerkohl 0,24 DM; Salz 0,20 DM; Kartoffeln 1,20 DM

16. 9. Milch 0,56 DM; Brot 1,80 DM

18. 9. 2 Gurken 0,65 DM; Nährmittel 1,20 DM

19. 9. Suppenfleisch 1,60 DM; Waschmittel 2,80 DM

20. 9. Kohl 1,46 DM; Heringe 0,65 DM

21. 9. Salat 0,65 DM; Brot 1,35 DM

22. 9. Käse 0,45 DM; Pflaumen 0,60 DM; Kartoffeln 0,34 DM; Margarine 0,98 DM; Kaffee-Ersatz 0,70 DM; Essig 0,55 DM

23. 9. Milch 0,56 DM; Marmelade 1,20 DM

25. 9. Mehl 0,54 DM; Zucker 1,16 DM; Salz 0,10 DM; Pfefferminztee 0,20 DM; Brot 1,35 DM

26. 9. Holunderbeeren 0,15 DM; Kartoffeln 1,34 DM

27. 9. Wurst 0,75 DM; Kohlrabi 0,30 DM; Butter 0,80 DM

28. 9. Erbsen 1,24 DM; 1 Gurke 0,35 DM

29. 9. Gemüse 1,35 DM; Brot 1,35 DM; Winterkartoffeln 31,— DM

30. 9. Milch 0,56 DM; Fleisch 1,40 DM

a) Führe nach diesen Angaben das Küchentagebuch!

b) Wieviel DM betragen die Ausgaben für die einzelnen Posten im September?

c) Schließe die Eintragungen ordnungsmäßig ab! (Beachte den Übertrag aus dem August!)

II. Auswertung statistischer Zahlen

3. Einführung

Wer Einsicht in das Wirtschaftsleben gewinnen will, muß statistische Angaben richtig zu lesen verstehen. Er findet sie in statistischen Tabellen.

Einfaches Beispiel

Die Produktionsleistung einer Maschinenfabrik entwickelte sich wie folgt:

Januar	36 Maschinen
Februar	40 „
März	45 „
April	50 „
Mai	55 „
Juni	62 „
Halbjahresleistung ...	288 Maschinen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Zahlen zu verdeutlichen. Das geschieht entweder durch Umrechnung oder durch bildhafte Darstellung.

Entwicklungszahlen

An obigem Beispiel interessiert vor allem, wie sich die Produktionsleistung in den einzelnen Monaten entwickelt hat. Diese Entwicklung läßt sich am besten erkennen, wenn wir die Produktionsleistung des ersten Monats gleich

100 setzen und die übrigen Zahlen darauf beziehen. Für den Monat Februar ergibt sich dann

$$\frac{100 \cdot 40}{36} = 111{,}1\ldots;$$ das sind rund 111 % der Januarproduktion.

Ergebnisse für die übrigen Monate: März 125 %, April 139 %, Mai 153 %, Juni 172 %.
Diese Werte bezeichnen wir als Entwicklungszahlen, weil sie die Entwicklung zahlenmäßig besonders deutlich erkennen lassen.

Gliederungszahlen

Wer in obigem Beispiel den Produktionsanteil der einzelnen Monate an der Halbjahresproduktion deutlich machen will, setzt die letztere gleich 100 und ermittelt den prozentualen Anteil jedes Monats.
Der Produktionsanteil des Monats Januar beträgt

$$\frac{100 \cdot 36}{288} = 12{,}5;$$ das sind 12,5 % der Halbjahresproduktion.

Ergebnisse für die übrigen Monate: Februar 13,9 %, März 15,6 %, April 17,4 %, Mai 19,1 %, Juni 21,5 %.
Wir sprechen hier von Gliederungszahlen, weil jeder einzelne Wert Glied eines Ganzen (hier der Halbjahresproduktion) ist.

Graphische Darstellungen

Besonders anschaulich und einprägsam sind sog. graphische Darstellungen, die auch als Diagramme bezeichnet werden.
Am bekanntesten sind **Liniendiagramme**, die sich gut zur Darstellung einer Entwicklung eignen.
Die Produktionsleistung der Maschinenfabrik in den Monaten Januar bis Juni geht deutlich aus nachstehendem Liniendiagramm hervor.

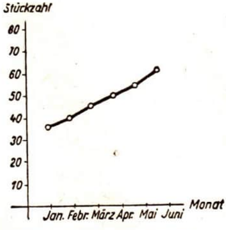


Bild 2a. Liniendiagramm

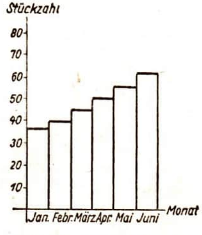


Bild 2b. Säulendiagramm

Oft wird auch ein **Säulendiagramm** verwendet, das die einzelnen Zahlengrößen durch Säulen verschiedener Höhe verdeutlicht. So läßt sich die Produktionsleistung der Maschinenfabrik wie vorstehend darstellen.

In den Bildern 2a und 2b hätten statt der Stückzahlen auch die Entwicklungszahlen in Prozenten durch einen ähnlichen Linienzug oder ein entsprechendes Säulendiagramm dargestellt werden können.

Wenn, wie bei der Anwendung von Gliederungszahlen, der Produktionsanteil der einzelnen Monate an der Gesamterzeugung des ersten Halbjahres verdeutlicht werden soll, dann bedient man sich des **Kreisdiagramms**.

Die gesamte Kreisfläche entspricht der Halbjahresproduktion. Die Produktionsleistungen der einzelnen Monate werden durch Sektoren dargestellt, deren Mittelpunktswinkel sich leicht errechnen lassen:

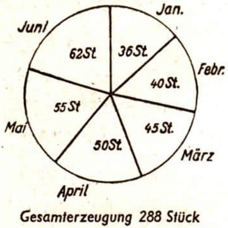


Bild 2c. Kreisdiagramm

$$\begin{array}{lccr} 288 \text{ Stück entsprechen } 360^\circ \\ \quad 36 \quad ,, \qquad\quad ,, \qquad x^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot 36}{288} \doteq 45$$

Der Mittelpunktswinkel des Kreissektors für die Darstellung der Januarproduktion beträgt 45°.

Die Werte für die übrigen Kreissektoren sind:

Februar 50°, März 56°, April 62,5°, Mai 69°, Juni 77,5°.

Bei diesem Kreisdiagramm hätte man auch von den Gliederungszahlen ausgehen können.

4. Statistische Übungen

1. Ergebnis der **Volkszählung** vom 29. Oktober 1946 in der sowjetischen Besatzungszone (ohne Berlin):

   Wohnbevölkerung: männlich 7 379 546, weiblich 9 934 188

   Wohnbevölkerung in den einzelnen Ländern:

Land	männlich	weiblich	insgesamt	in v. H.-Sätzen	
				männlich	weiblich
Brandenburg	1 066 405	1 461 087			
Mecklenburg	912 385	1 227 255			
Sachsen-Anhalt ...	1 801 800	2 358 739			
Thüringen.........	1 262 326	1 665 171			
Sachsen...........	2 336 630	3 221 936			

1. a) Berechne die gesamte Wohnbevölkerung der Zone!

b) Berechne den Anteil der männlichen und weiblichen Bevölkerung in %!

c) Fülle die leergebliebenen Spalten der Tabelle aus!

d) Gib an, wie sich die Bevölkerung prozentual auf die einzelnen Länder verteilt!

e) Stelle die Ergebnisse von d) in einem Säulendiagramm dar!

f) Stelle die auf die einzelnen Länder entfallende Wohnbevölkerung durch Kreisausschnitte dar und berechne dabei aus dem Länderwert die Größe des Mittelpunktswinkels durch einen Dreisatz!

2. Baumwollerzeugung in der UdSSR seit 1913. Lies aus Bild 3 ab, wie groß die Baumwollerzeugung seit 1913 in t war. Setze die Erzeugung 1913 gleich 100 und berechne die Erzeugung der übrigen Jahre in %!

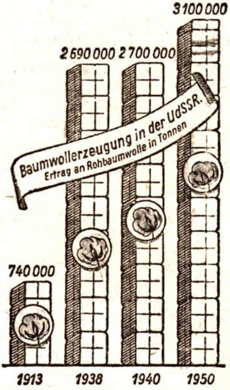


Bild 3. Ertrag an Rohbaumwolle in Tonnen

3. Die sowjetische Zone umfaßt 107 481,2 km². Die landwirtschaftlich genutzte Fläche beträgt 6 595 020 ha. Hiervon sind 2 743 306 ha durch die Bodenreform vom Jahre 1945 erfaßt worden. Auf dieser Fläche wurden u. a. 317 000 Bauernstellen für 1 500 000 Menschen errichtet.

Von der aufgeteilten Fläche sind

Ackerland	1 101 188 ha	Ödland	144 339 ha
Gärten	13 737 „	Wald	853 617 „
Wiesen	207 385 „	übrige Fläche	423 040 „

Bestimme in %, wie die aufgeteilte Fläche genutzt worden ist!

4. In Thüringen wurden durch die Bodenreform in den Bodenfonds 187 851 ha überführt. Hiervon erhielten

Land Thüringen	28 239 ha	Lehr- u. Zuchtgüter .	17 344 ha
Gemeinden	25 444 „	Neubauern	116 824 „

a) Gib die Aufteilung des Bodens in % an!

b) Wie groß waren durchschnittlich die aufgeteilten Güter, wenn insgesamt 1 087 Güter von der Bodenreform erfaßt worden sind?

c) Wie groß ist durchschnittlich eine Bauernstelle, wenn 18 732 Bauern bedacht wurden?

5. Die **Produktion** der UdSSR an Roheisen, Rohstahl, Kohle und Erdöl entwickelte sich wie folgt:

Erzeugung	1913[1])	1940	Plan 1950
	Millionen t		
Roheisen	4,2	14,9	19,5
Rohstahl	4,2	18,3	25,4
Kohle	29,1	165,0	250,0
Erdöl	9,2	31,0	35,4

Setze die Zahlen für 1913 gleich 100 und errechne daraus die **Entwicklungszahlen**, die sich für 1940 und für den Produktionsplan 1950 ergeben!

6. Der **Viehbestand** der UdSSR zeigt folgende Entwicklung:

Jahr	Pferde	Rindvieh	Ziegen	Schweine
	Millionen Stück			
1932	19,6	40,7	52,1	11,6
1937	16,7	57,0	73,7	22,8
1938	17,5	63,2	102,6	30,6
1945	10,5	47,0	69,4	10,4
1950 (Plan)	15,3	65,3	121,5	31,2

a) Setze die Zahlen von 1932 gleich 100 und errechne für die folgenden Jahre die Entwicklungszahlen!

b) Beurteile die Entwicklung!

c) Inwiefern zeigt sich aus der Entwicklung des Pferdebestandes die bedeutende Zunahme der Traktoren in der sowjetischen Landwirtschaft?

7. Stelle die Entwicklung der Pferde- und Rindviehbestände (Aufg. 6) bildlich dar. Trage auf einer Waagerechten nacheinander gleiche Strecken ab, bezeichne ihre Endpunkte durch Jahreszahlen und trage auf den Senkrechten in den Endpunkten der Strecken als Bilder der Viehbestände für je 5 Mill. Stück 1 cm ab!

8. a) Stelle die Gesamtbevölkerung jedes Landes gemäß Aufgabe 1 in einem Säulendiagramm dar! Für jedes Land ist eine Säule zu errichten. Höhe der Säulen: 500 000 Einwohner $\widehat{=}$ 1 cm.

b) Stelle die auf die einzelnen Länder entfallende Bevölkerung durch ein Kreisdiagramm dar! Für jedes Land ergibt sich dann ein Kreisausschnitt. Gib den einzelnen Ausschnitten verschiedene Farben! (Buntstifte benutzen!)

---

1) Gebietsumfang der UdSSR 1938.

9. In den Ländern der sowjetischen Besatzungszone wohnten nach der Volkszählung vom 29. Oktober 1946 bzw. 17. Mai 1939:

Sachsen	5,56 Millionen	5,47 Millionen
Sachsen-Anhalt	4,16 „	3,44 „
Thüringen	2,93 „	2,43 „
Brandenburg	2,53 „	2,41 „
Mecklenburg-Vorpommern	2,14 „	1,41 „

Vergleiche die Ergebnisse beider Zählungen und stelle sie in Schaubildern dar:

a) durch Säulendiagramme; b) durch Kreisausschnitte!
Warum ist das „Kreisdiagramm" für die vorliegende Aufgabe aufschlußreicher?

10. Stelle die Ergebnisse von Aufgabe 3 durch Kreisausschnitte dar!
11. Verdeutliche die Ergebnisse der Bodenreform in Thüringen auf Grund der Aufgabe 4 durch Kreisausschnitte!

III. Vom Zahlungs- und Kreditverkehr

5. Der bargeldlose Zahlungsverkehr

Wesen und Vorzüge

Wer selten Zahlungen zu leisten hat, bedient sich meist nur der Postanweisung. Er muß dann den Betrag bei einem Postamt einzahlen, das ihn dem Zahlungsempfänger auf dem Postwege — durch den Geldbriefträger — zuleitet.
Vorteilhafter ist es, sich in den bargeldlosen Zahlungsverkehr einzuschalten. Wer das will, muß sich bei einer Geldanstalt (Bank, Sparkasse, Postscheckamt) ein Konto errichten lassen. Auf dieses Konto kann er selbst einzahlen. Er kann auch über sein Guthaben bar verfügen und Barauszahlungen an seine Gläubiger leisten. Wenn der Zahlungsempfänger selbst ein Konto unterhält, dann ist der Ausgleich durch Überweisung vollständig bargeldlos möglich. Dieses Verfahren hat viele Vorzüge:

1. Der Umlauf an Zahlungsmitteln wird vermindert.
2. Die Barmittel fließen bei den Geldanstalten zusammen und können volkswirtschaftlich wichtigen Aufgaben zugeführt werden.
3. Der einzelne ist nicht der Gefahr des Geldverlustes, insbesondere des Diebstahls ausgesetzt.
4. Postwege werden überflüssig, das Geld braucht nicht gezählt zu werden. Daraus ergibt sich eine erhebliche Zeitersparnis.
5. Jede Zahlung kann noch nach Jahren durch die Aufzeichnungen der Geldanstalt nachgewiesen werden.
6. Die Gebühren sind geringer als im Barverkehr.

a) Der Postscheckverkehr

Die Postscheckämter der Deutschen Post sind wichtige Mittler des bargeldlosen Zahlungsverkehrs, und zwar nicht nur für Betriebe, sondern für jedermann. Postscheckämter bestehen in der sowjetischen Besatzungszone in Berlin, Dresden, Erfurt, Leipzig und Magdeburg.[1] Außer den Postscheckämtern stehen alle Postämter in Stadt und Land für den Postscheckdienst bereit.

Wer sich am Postscheckverkehr beteiligen will, muß den Antrag auf Eröffnung eines Kontos stellen. Den Vordruck hierfür bekommt er bei jedem Postamt, bei dem er auch die erste Einzahlung auf dieses Konto leisten kann. Auf jedem Konto muß eine Stammeinlage von 5 DM gehalten werden. Nach oben ist das Guthaben nicht begrenzt. Eine Verzinsung des Guthabens erfolgt nicht.

Die Vordrucke für den Postscheckverkehr sind verschieden, je nachdem, ob

nur der Zahlungsempfänger,
nur der Absender
oder beide Beteiligten

ein Konto unterhalten.

Zahlkarte. Sie wird verwendet, wenn nur der Empfänger ein Konto hat (Bild 4a). Die Einzahlung kann bei jedem Postamt erfolgen. Der Betrag wird dem Empfänger auf sein Postscheckkonto gutgeschrieben.

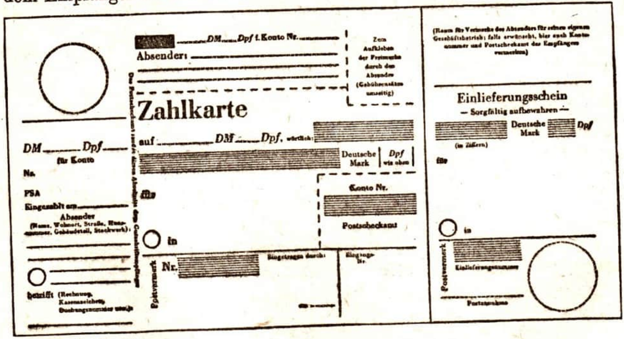


Bild 4a. Zahlkarte

1. Otto Krause, Jena, erhält von den Thüringer Textilwerken in Gera Stoffe im Werte von 265,60 DM. Am 10. April begleicht er die Rechnung, die das Datum vom 28. März und den Vermerk „Postscheckkonto Erfurt Nr. 918 84" aufweist, durch Zahlkarte. Fülle die Zahlkarte aus!

---

1) Weitere Postscheckämter: Dortmund, Essen, Frankfurt a. M., Hamburg, Hannover, Karlsruhe, Köln, Ludwigshafen, München, Nürnberg, Stuttgart.

Postscheck. Er wird verwendet, wenn nur der Absender ein Konto hat. Die Auszahlung an den Empfänger geschieht über die Postämter durch den Geldbriefträger. Der Postscheck (Bild 4b) dient dem Inhaber des Kontos auch zu Barabhebungen beim Postscheckamt.

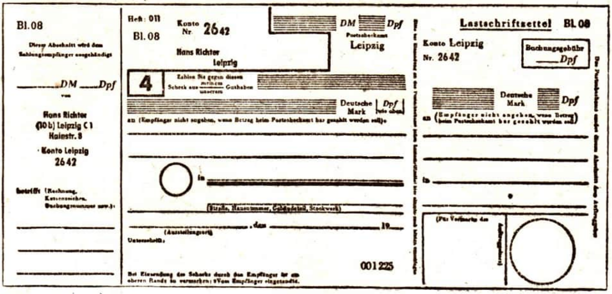

BI. 08
Dieser Abschnitt wird dem Zahlungsempfänger ausgehändigt
DM Dpf
von
Hans Richter
(10b) Leipzig C 1
Hainstr. 8
Konto Leipzig
2642
betrifft (Rechnung, Kassenzeichen, Buchungsnummer usw.):
Heft: 011
BI. 08
Konto Nr. 2642
Hans Richter
Leipzig
DM Dpf
Postscheckamt
Leipzig
4
Zahlen Sie gegen diesen Scheck aus meinem unserem Guthaben
Deutsche Mark
Dpf wie oben
an (Empfänger nicht angeben, wenn Betrag beim Postscheckamt bar gezahlt werden soll)
in
(Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)
, den 19
(Ausstellungsort)
Unterschrift:
001225
Bei Einsendung des Schecks durch den Empfänger ist am oberen Rande zu vermerken: »Vom Empfänger eingesandt«.
Lastschriftzettel BI. 08
Konto Leipzig
Nr. 2642
Buchungsgebühr Dpf
Deutsche Mark
Dpf
an (Empfänger nicht angeben, wenn Betrag beim Postscheckamt bar gezahlt werden soll)
in
(Für Vermerke des Auftraggebers)

Bild 4b. Postscheck

2. Heinz Kluge, Plauen, Bahnhofstr. 45, weist am 20. August das Postscheckamt Leipzig durch Postscheck an, aus seinem Guthaben (Konto Nr. 974 36) den Betrag von 439,75 DM an Erich Krause, Magdeburg, Leipziger Str. 9, zu zahlen. Fülle den Postscheck aus!

Überweisung. Durch die Überweisung (Bild 4c) wird der Zahlungsausgleich völlig bargeldlos bewirkt. Es erfolgt nur eine Umbuchung des Guthabenbetrages von einem Konto auf ein anderes.

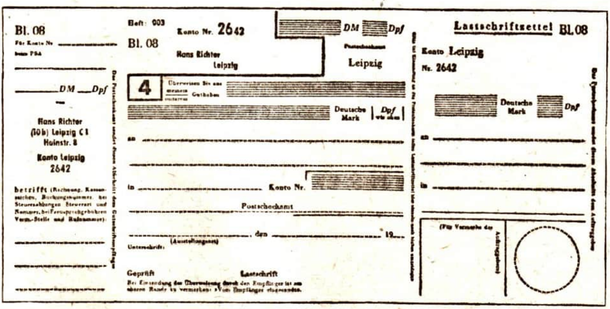

BI. 08
Für Konto Nr
beim PSA
DM Dpf
Hans Richter
(10b) Leipzig C 1
Hainstr. 8
Konto Leipzig
2642
betrifft (Rechnung, Kassenzeichen, Buchungsnummer, bei Steuerzahlungen Steuerart und Nummer, bei Fernsprechgebühren Verm.-Stelle und Rufnummer):
Heft: 003
BI. 08
Konto Nr. 2642
Hans Richter
Leipzig
DM Dpf
Postscheckamt
Leipzig
4
Überweisen Sie aus meinem unserem Guthaben
Deutsche Mark
Dpf wie oben
an
in
Konto Nr.
Postscheckamt
, den 19
(Ausstellungsort)
Unterschrift:
Geprüft
Lastschrift
Bei Einsendung der Überweisung durch den Empfänger ist am oberen Rande zu vermerken: »Vom Empfänger eingesandt«.
Lastschriftzettel BI. 08
Konto Leipzig
Nr. 2642
Deutsche Mark
Dpf
an
in
(Für Vermerke des Auftraggebers)

Bild 4c. Postschecküberweisung

3. Die Märkische Konsumgenossenschaft e. G. m. b. H.[1]), Neustadt, Breite Str. 6, zahlt am 18. Juni an die Schönebecker Zuckerwerke, Schönebeck/Elbe, Feldstr. 16, den Betrag von 2 840,— DM durch Überweisung von ihrem Postscheckkonto Berlin Nr. 764 18 auf das Postscheckkonto der Zuckerwerke, Magdeburg Nr. 76 54. Fülle das Überweisungsformular aus!

Gebührensätze

Im Zahlungsverkehr der Post gelten folgende Gebührensätze (in DM):

	Postanweisung	Zahlkarte	Postscheck	Postschecküberweisung
bis 10 DM	0,20	0,10	Grundgebühr 0,15 DM zuzüglich 0,01 DM für je angefangene 20,— DM	gebührenfrei
bis 25 DM	0,30	0,15		
bis 100 DM	0,40	0,20		
bis 250 DM	0,60	0,25		
bis 500 DM	0,80	0,30		
bis 750 DM	1,—	0,40		
bis 1000 DM	1,20	0,50		

4. a) Berechne die Gebühren zu den Aufgaben 1 bis 3!
   b) Welchen Betrag erspart jemand, der sechs Rechnungen über 8,30 DM, 15,75 DM, 76,50 DM, 180,— DM, 475,— DM und 720,45 DM statt durch Postanweisung durch Zahlkarte begleicht?
   c) Wie groß ist die Ersparnis bei Zahlung durch Postscheck? Berücksichtige dabei, daß die Übersendung der Schecke an das Postscheckamt (in besonderem Umschlag) 0,10 DM kostet!
5. Jemand schuldet 25,— DM (420,— DM, 1 800,— DM). Welche Zahlungsmöglichkeiten durch die Post sind vorhanden? Bestimme für jeden Fall die Portokosten und vergleiche sie!
   Beachte dabei, daß Postanweisungen nur bis 1 000 DM zugelassen sind!

b) Der Zahlungsverkehr der Banken und Sparkassen

Überweisungen

Auch die Banken und Sparkassen pflegen den Überweisungsverkehr. Er wickelt sich am einfachsten ab, wenn der Absender und der Zahlungsempfänger bei der gleichen Bank ein Konto unterhalten. Dann ist nur eine einfache **Umbuchung** von Konto zu Konto nötig. Wenn dagegen der Zahlungsempfänger sein Konto bei einer anderen Bank hat als der Absender, müssen die beteiligten Banken miteinander verrechnen.

6. Hellmut Fischer, Chemnitz, Breiter Weg 192, überweist von seinem Konto bei der Stadtsparkasse Chemnitz an das Steueramt der Stadt

---

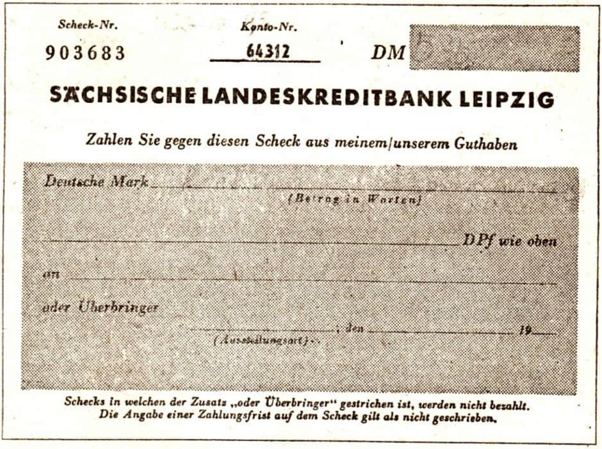
1) e. G. m. b. H. = eingetragene Genossenschaft mit beschränkter Haftung.

Chemnitz, Konto bei der Sächsischen Landeskreditbank, Zweigstelle Chemnitz, den Betrag von 456,75 DM.

Beschaffe einen Überweisungsvordruck und fülle ihn aus!

Der Scheckverkehr

Der Inhaber eines Bankkontos kann über sein Guthaben auch durch **Scheck** (Bild 5) verfügen. In diesem Scheck fordert er seine Bank auf, aus seinem Guthaben eine bestimmte Summe bei Vorlage des Schecks zu bezahlen. Wenn die Bezahlung nicht in bar, sondern nur durch Gutschrift auf das Konto des Zahlungsempfängers erfolgen soll, spricht man von Verrechnungsschecks. Diese tragen (meist quer über den Vordruck gestempelt) den Vermerk „Nur zur Verrechnung".



Scheck-Nr. 903683 *Konto-Nr.* 64312 *DM*

SÄCHSISCHE LANDESKREDITBANK LEIPZIG

Zahlen Sie gegen diesen Scheck aus meinem/unserem Guthaben

Deutsche Mark ____________ *(Betrag in Worten)*

____________ *DPf wie oben*

an ____________

oder Überbringer

____________ *(Ausstellungsort)*, *den* ____________ *19*__

Schecks in welchen der Zusatz „oder Überbringer" gestrichen ist, werden nicht bezahlt.
Die Angabe einer Zahlungsfrist auf dem Scheck gilt als nicht geschrieben.

Bild 5. Bankscheck

Folgende sechs Bestandteile des Schecks sind gesetzlich vorgeschrieben[1]):

① Die Angabe der Bank, die zahlen soll (Bezogener);
② der Zahlungsort;
③ die unbedingte Anweisung, eine bestimmte Geldsumme zu zahlen;
④ die Bezeichnung „Scheck";
⑤ Ort und Tag der Ausstellung;
⑥ die Unterschrift des Ausstellers.

1) Siehe Vordruck.

7. Schlossermeister Otto Löwe in Brandenburg unterhält bei der Stadtsparkasse Brandenburg ein Konto. Er benötigt zu Lohnauszahlungen am 16. August 432,– DM.

   (Warum kommt hier kein Verrechnungsscheck in Frage?)

8. Martin Lemke in Kottbus hat bei der Volksbank Kottbus e. G. m. b. H. ein Konto. Er will am 30. November an seinen Geschäftsfreund Otto Stein durch Verrechnungsscheck 1 345,– DM bezahlen.

   a) Fülle den Scheckvordruck aus!

   b) Überlege, wie sich der Zahlungsausgleich gestaltet, wenn Stein bei der Volksbank ebenfalls ein Konto unterhält oder wenn er bei einer anderen Bank Inhaber eines Kontos ist!

c) Die Verbuchung

Buchungen durch den Konteninhaber

Wer sich über seinen Zahlungsverkehr und damit über den Stand seines Guthabens (oder seiner Schulden) Rechenschaft ablegen will, noch ehe er einen Kontoauszug der Bank oder des Postscheckamts erhält, muß selbst darüber **Buch führen.** Betriebe tun das in jedem Fall. Sie führen über alle ihre Vermögens- und Schuldenbestände Konten. Ein Konto ist eine zweiseitig geführte Rechnung. Es nimmt Vermögensposten in der linken Seite auf (Lastschrift oder Sollbuchung), Schulden dagegen in der rechten (Gutschrift oder Habenbuchung).

Ein Guthaben bei einer Bank oder beim Postscheckamt bedeutet immer einen Vermögensposten. Dieser ist im Konto links einzutragen. Hat die Bank dagegen einen Kredit gewährt, dann hat der Konteninhaber Schulden. Er muß den Bestand an Schulden im Konto rechts eintragen.

9. Otto Steinkopf führt Buch über sein Konto bei der Landeskreditbank. Seine Aufzeichnungen haben folgendes Aussehen:

Bankkonto

1. 1. Anfangsbestand	1 645,—	3. 2. Überweisung an Fritz Kühn	500,—
19. 2. Bareinzahlung	2 400,—	24. 2. Scheckhingabe an Paul Berg	420,—
6. 3. Scheck von Karl Kleinberg	900,—	15. 3. Barabhebung	200,—
		20. 3. Überweisung an Kurt Kluge	380,—
		31. 3. Schlußbestand	3 445,—
	4 945,—		4 945,—

9. a) Eröffne das Konto am 1. 4.!

b) Verbuche alsdann folgende Geschäftsfälle:

1. Überweisung von Fritz Scheffel	320,–
2. Überweisung an Ernst Liebold	1 654,–
3. Scheck von Hans Werner	2 145,–
4. Barabhebung	300,–
5. Überweisung an Richard Streuber	125,–
6. Scheck an Alfred Möschke	232,–
7. Barauszahlung an Gustav Haage	98,–

c) Schließe das Konto ab! Beachte dabei die äußere Form des Abschlusses (Additionsstriche, Eintragung der beiden Seitensummen in gleiche Zeilenhöhe, Anbringung eines Sperrhakens in der an Beträgen kleineren Seite)!

d) Leite aus dem Konto Regeln ab für die Verbuchung
des Anfangsbestandes,
der Zugänge,
der Abgänge und
des Schlußbestandes!

6. Die Zinsrechnung der Banken

Die Verzinsung von Sparguthaben

Bei Banken und Sparkassen kann für das eingezahlte Geld, das nicht zum Zahlungsausgleich verwendet werden soll, ein **Konto** eingerichtet werden. Die Sparguthaben werden verzinst, und zwar zur Zeit mit 3 % jährlich.
Die Zinsen können auf verschiedene Weise ermittelt werden. Am einfachsten und im Bankverkehr am gebräuchlichsten ist die **Zinsstaffel.**

Beispiel: Heinz Thümmler besitzt ein Sparbuch, das folgende Einträge aufweist:

1. 1.	Vortrag aus dem alten Jahr (Wert[1]) 31. 12.)	300,–
6. 2.	Einlage	200,–
19. 3.	Einlage	500,–
11. 5.	Abhebung (Wert[1]) 10. 5.)	400,–
2. 10.	Einlage	700,–

Wie groß ist die Einlage einschließlich Zinsen bis zum 31. 12.?

Weg der Lösung

1. Anfertigung der eigentlichen Staffel (s. S. 24, Spalten 1 bis 3).
2. Berechnung der Zinstage. Dabei ist zu beachten, daß nicht die einzelne Einzahlung oder Abhebung zu verzinsen ist, sondern das sich nach jeder

1) Die „Wertstellung“ nennt den Beginn der Verzinsung. Die Verzinsung erfolgt bei Neueinlagen vom Tage nach der Einzahlung ab, bei Abhebungen bis zum Tage vor der Abhebung.

Buchung ergebende Guthaben. Das Anfangsguthaben (der Vortrag) bleibt vom 31. 12 bis 6. 2. unverändert, ist also für diese Zeit (36 Tage) zu verzinsen. Dann ergibt sich ein Guthaben von 500,– DM, das bis 19. 3. (43 Tage) zu verzinsen ist. Nunmehr wächst der Einlagenbestand auf 1 000,– DM. Am 11.5. verringert er sich auf 600,– DM mit Wertstellung vom 10. 5. 1 000,– DM müssen also bis 10. 5., also 51 Tage, verzinst werden. In entsprechenden Schritten wird bis zum Ende des Jahres weitergerechnet.

Die Richtigkeit der Tageberechnung läßt sich leicht prüfen, denn bei jährlichem Abschluß müssen sich insgesamt 360 Tage ergeben.

3. Berechnung der Zinszahlen nach der Formel $\frac{k}{100} \cdot t$ (vergl. 7. Schuljahr).

4. Berechnung der Zinsen nach der Formel $\frac{\text{Zinszahlen}}{\text{Zinsteiler}^{1)}}$ = Zinsen.

Die Zinsstaffel hat folgendes Aussehen:

Tag	$\pm$	Betrag DM	Tage	Zinszahlen
1	2	3	4	5
31. 12.		300,—	36	108
6. 2.	+	200,—		
		500,—	43	215
19. 3.	+	500,—		
		1 000,—	51	510
10. 5.	—	400,—		
		600,—	142	852
2. 10.	+	700,—		
		1 300,—	88	1144
31. 12.	Zinsen 3%	23,58	360	2829
31. 12.	Guthaben	1 323,58		

Aufgaben

1. Tischlermeister Friedrich Lepper läßt sich ein Sparkonto errichten und zahlt folgende Beträge ein:

3. Juli	640,– DM	12. Okt.	190,– DM
15. Aug.	226,– „	22. „	275,– „
4. Sept.	93,– „	16. Nov.	149,– „
26. „	380,– „	2. Dez.	345,– „

Stelle für den 31. 12. eine Zinsstaffel auf! Zinsen 3%. Wie lassen sich bei dieser Aufgabe die Tage nachprüfen?

1) Zinsteiler = $\frac{360}{p}$; bei 3 % also gleich 120 (vergl. 7. Schulj., S. 45 ff.).

2. Das Sparkonto des Bäckers Heinrich Witte weist folgende Eintragungen auf:

1. Juli	Vortrag (Wert 30.6.)	230,–	DM
16. „	Einzahlung	435,–	„
20. Aug.	Einzahlung	501,–	„
5. Sept.	Abhebung	646,–	„
24. „	Einzahlung	900,–	„
16. Okt.	Abhebung	332,–	„
12. Nov.	Abhebung	651,–	„
18. Dez.	Einzahlung	937,–	„

Stelle das Guthaben am 31. Dez. fest! Zinsen 3%.

Die Verzinsung von Bankkrediten

Bankkredite müssen von dem Kreditnehmer verzinst werden. Gegenwärtig beträgt der Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%. Außerdem wird eine Kreditprovision in Höhe von $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{8}$% je Monat erhoben. Das bedeutet einen zusätzlichen Zins von 1 bis $1\frac{1}{2}$% je Jahr. Die Berechnung der Zinsen erfolgt in der Form der Staffel. Daneben ist natürlich das Konto aufzustellen. Sein Überschuß (Saldo) muß mit dem der Staffel übereinstimmen.

3. Der Malermeister Fritz Röhl, Rostock, erhielt von der Landeskreditbank Kredit eingeräumt. Sein Konto entwickelte sich in der Buchführung der Bank wie folgt:

1. 7.	(Wert 30. 6.) Schuldensaldo	1 450,–
17. 7.	Überweisung von Franz Richter	560,–
18. 8.	Überweisung an Erwin Jahn	1 240,–
25. 9.	Barabhebung	400,–
19. 10.	Gutschrift für Scheck Berger	265,–
11. 11.	Überweisung an Hans Maar	545,–
6. 12.	Überweisung von Hugo List	210,–

a) Stelle das Konto auf!

b) Fertige die Zinsstaffel an (Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%)!

c) Schließe das Konto ab, wenn noch eine Kreditprovision von $\frac{1}{8}$% je Monat und verschiedene Spesen von 5,30 DM zu berücksichtigen sind!

4. Das Konto von Erich Reinert, Magdeburg, bei der Landeskreditbank ist für den 30. Juni abzuschließen. Dabei ist die Zinsstaffel anzufertigen.

Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%, Kreditprovision $\frac{1}{12}$% je Monat, verschiedene Spesen 6,80 DM.

Soll

1. Jan.	(Wert 31.12.) Vortrag	8 500,–
10. Febr.	Überweisung an K. Reich	1 900,–
28. Mai	Abhebung	2 143,–
12. Juni	Scheck Nr. 21 234	875,-

Haben

5. Februar	Einzahlung	6 526,–
24. April	Scheck auf Leipzig	1 415,–
7. Mai	Überweisung von R. Fisch	900,–

7. Von Wertpapieren

a) Über Anleihen

Die Sächsische Landesregierung nahm im Frühjahr 1946 zum Aufbau einer neuen Friedenswirtschaft eine **Anleihe** von 120 Millionen RM[1]) auf, die als „Erste verzinsliche Anleihe des Bundeslandes Sachsen" bezeichnet wurde. Die Anleihestücke sind gedruckte Urkunden, in denen sich das Land Sachsen verpflichtet, den Anleihebetrag innerhalb von 10 Jahren zurückzuzahlen und bis zur Rückzahlung 4 % Zinsen in halbjährlichen Raten zu entrichten. Wer eine solche Urkunde erwirbt, wird Gläubiger des Landes Sachsen. Die Urkunde verkörpert also das Recht auf Zinsen und auf Rückzahlung des Betrages und gehört zu den **Wertpapieren.**
Der eigentlichen Urkunde, dem sog. **Mantel** (Bild 6a), ist ein **Zinsscheinbogen** (Bild 6b) beigefügt, der bei der Ausgabe 20 Zinsscheine enthält. Die Zinsen werden also halbjährlich gezahlt, die **Zinstermine** sind auf dem Zinsschein angegeben.
Solche Aufbauanleihen sind im Jahre 1946, außer vom Land Sachsen, vom Land Thüringen sowie von Sachsen-Anhalt, Brandenburg und Mecklenburg ausgegeben worden.
Der dem Wertpapier (dem Anleihestück) aufgedruckte Wert heißt **Nennwert.** Er lautet gewöhnlich auf 100, 200, 500, 1 000, 5 000 oder 10 000 DM.[1])

b) Der Kurswert von Anleihen

Oft kann man eine Anleihe zu einem anderen als dem Nennwert erwerben. Alle Wertpapiere haben, wie auch die Waren, gewissermaßen einen Preis, den man als **Kurs** bezeichnet. Der Kurs bezieht sich zumeist auf 100 DM Nennwert. Beim Kurs 100 ist der Kurswert des Papieres gleich dem Nennwert. Steht der Kurs über 100, so ist der Kurswert höher (über „pari"). Wenn der Kurs unter 100 steht, so ist der Kurswert niedriger (unter „pari").

---

1) Die alten Anleihen lauten noch auf RM, es gilt aber jetzt der Wert in DM. — In den folgenden Aufgaben wird aus methodischen Gründen einheitlich die Bezeichnung DM gebraucht.

März/September 4% [illegible] 1946 3. Teilbetrag Serie IV Buchst E 100 RM

3. Teilbetrag Serie IV

[illegible] E

№ 06609

4%ige

SCHULDVERSCHREIBUNG

des

Bundeslandes Sachsen

über

EINHUNDERT
REICHSMARK

[illegible]

Dem Inhaber dieser Schuldverschreibung zahlt die Sächsische [illegible]

EINHUNDERT REICHSMARK

[illegible]

[illegible]

Landesverwaltung Sachsen

Bild 6 a (½ nat. Größe)

Bild 6 b (nat. Größe)

Beispiel: Die 4 %ige Anleihe des Landes Brandenburg soll einen Kurs von 99 % haben. Welcher Kurswert ergibt sich daraus für 1 500,– DM Nennwert?

100 DM Nennwert = 99 DM Kurswert
1 500 „ „ = 99 „ · 15 = 1 485,– DM Kurswert.

Aus dem Beispiel ergibt sich folgende Formel:

$$\boxed{\text{Kurswert} = \frac{\text{Nennwert}}{100} \cdot \text{Kurs}}$$

Jedermann kann von den Landeskreditbanken Anleihestücke erwerben. Er kauft diese Anleihen gegenwärtig zu 100 %. Wer ein ihm gehöriges Anleihestück verkaufen will, kann das zum Kurs von 99 % tun. Eine Provision wird dann nicht berechnet.

1. Karl Fischer will der Sächsischen Landeskreditbank, Zweigstelle Chemnitz, 2 400,– DM Stücke der „Ersten verzinslichen Anleihe des Bundeslandes Sachsen" verkaufen. Wie groß ist der Kurswert?
2. Erich Fleischer in Halle verkauft an die Bank Anleihestücke des Landes Sachsen-Anhalt im Nennwert von 3 600,– DM. Welchen Betrag erlöst er?

c) Berücksichtigung der Zinsen

Beim Verkauf eines Wertpapieres wird dem Käufer in der Regel der Zinsschein mit übergeben. Er bekommt deshalb zuviel Zinsen, da der Zinsbetrag für die Zeit vom letzten Zinstermin bis zum Verkaufstage ja eigentlich noch dem Verkäufer zusteht. Der Verkäufer muß entschädigt werden. Der Kaufpreis ist deshalb um den Zinsanteil zu erhöhen.

Beispiel: Karl Schneider verkauft am 18. Jan. 1949 1 200,– DM 4 %ige Anleihe des Landes Thüringen von 1946, Zinstermin 1. April/1. Okt. zu 99 % an die Thüringische Landeskreditbank Weimar. Da der erste Tag der laufenden Zinsperiode mit verzinst wird, ergibt sich folgendes Bild:

$$\underset{1.\,10.\,48}{} \overset{\text{Verkäufer-Anteil}}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{108 Tage}}} \Big|^{\text{Verkaufstag 18. 1.}} \overset{\text{Käuferanteil}}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{72 Tage}}} \underset{31.\,3.\,49}{}$$

Der Zinsanteil für 108 Tage ist also dem Verkaufpreis zuzurechnen.
Bei der Berechnung ist noch zu berücksichtigen, daß von den Zinsen sofort 25 % Kapitalertragsteuer einzubehalten sind.

Abrechnung der Landeskreditbank Weimar:

Weimar, 18. Jan. 1949

1 200,— DM 4 % Thür. Landesanleihe zu 99 %		= 1 188,— DM
+ Zinsen 108 Tage zu 4 % (v. 1 200,— DM)	= 14,40 DM	
— Kapitalertragsteuer 25 %	= 3,60 „	10,80 „
Ausmachender Betrag		1 198,80 DM

Beachte bei der Zinsberechnung:

1. Die Zinsen werden vom **Nennwert** berechnet.
2. Der erste Tag des laufenden Halbjahres ist mitzurechnen.
3. Die Zinsen sind um 25 % Kapitalertragsteuer zu kürzen.
4. Kurswert + Zinsen = ausmachender Betrag.

Berechne den ausmachenden Betrag für folgende Verkäufe an eine Landeskreditbank:

3. 2 700,— DM 4 %ige Aufbauanleihe des Bundeslandes Sachsen, Verkaufszinstermin März/September[1]), Kurs 99 %, Verkaufstag 26. Juli.
4. 300,– DM 4 %ige Anleihe des Landes Sachsen-Anhalt von 1946, April/Oktober, Kurs 99 %, Verkaufstag 24. November.
5. 6 500,– DM 4 %ige Anleihe des Landes Brandenburg, Juni/Dezember, Kurs 99 %, Verkaufstag 6. Februar.
6. 7 200,– DM 4 %ige Anleihe des Landes Thüringen, April/Oktober, Kurs 99 %, Verkaufstag 3. März.
7. 13 500,– DM 4 %ige Anleihe des Landes Brandenburg, Juni/Dezember, Kurs 99 %, Verkaufstag 27. Oktober.

Wenn der Verkauf des Wertpapieres wenige Tage vor dem Zinstermin erfolgt, dann wird oft der laufende Zinsschein schon abgetrennt und nicht mit an den Käufer übergeben. Der Verkäufer erhält dann zuviel Zinsen, da die

1) Gemeint ist immer der erste Tag eines Monats.

Zinsen vom Verkaufstag bis zum Zinstermin dem Käufer gehören. Er zahlt deshalb nur: Kurswert — Zinsen.

Verkaufstag 25. 3. 49

$$1.\,10.\,48\ \underbrace{\text{Verkäuferanteil}}_{\text{175 Tage}}\ \Big|\ \underbrace{\text{Käuferanteil}}_{\text{5 Tage}}\ 31.\,3.\,49$$

Beispiel:

Weimar, am 25. März 1949

1 200,— DM 4 %ige Thür. Landesanleihe zu 99 % =		1 188,— DM
— Zinsen 5 Tage 4 % (von 1 200,— DM)	= 0,67 DM	
+ Kapitalertragsteuer 25 %	= 0,17 „	0,50 „
Ausmachender Betrag		1 187,50 DM

8. Löse die Aufgabe 5 für den Fall, daß der Verkauf ohne laufenden Zins schein am 23. Dezember erfolgt!

9. Löse die Aufgabe 6 für den Fall, daß der Verkauf am 24. September ohne laufenden Zinsschein erfolgt!

B. Arithmetik

IV. Verbindung der 4 Grundrechenarten mit relativen Zahlen

8. Multiplikation von Summen

Die Aufgabe $74 \cdot 53$ kann man so lösen:

$$\begin{aligned} 74 \cdot 53 = (70 + 4) \cdot 53 \quad &= 70 \cdot 53 + 4 \cdot 53 \\ &= 70 \cdot (50 + 3) + 4 \cdot (50 + 3) \\ = (70 + 4) \cdot (50 + 3) &= 70 \cdot 50 + 70 \cdot 3 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

Bestimme das Ergebnis! Vergleiche damit Bild 7a!

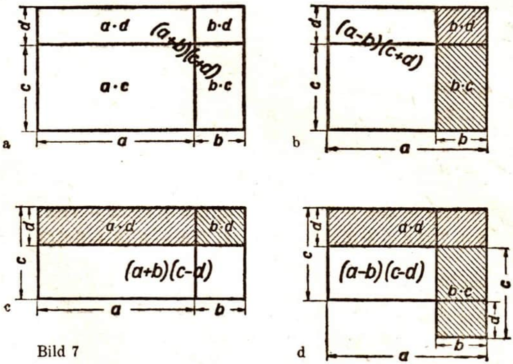


Bild 7

Setze für die bestimmten Zahlen die allgemeinen Zahlen a, b, c und d ein! Bild 7 a bis d veranschaulicht geometrisch die Ergebnisse der folgenden Aufgaben:

1. $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = ac + bc + ad + bd$
2. $(a - b) \cdot (c + d) = (a - b) \cdot c + (a - b) \cdot d = ac - bc + ad - bd$
3. $(a + b) \cdot (c - d) = (a + b) \cdot c - (a + b) \cdot d = ac + bc - ad - bd$
4. $(a - b) \cdot (c - d) = (a - b) \cdot c - (a - b) \cdot d = ac - bc - ad + bd$

Man multipliziert zwei mehrgliedrige Ausdrücke miteinander, indem man jedes Glied des einen mit jedem Glied des anderen multipliziert. Die Teilprodukte erhalten bei gleichen Vorzeichen der Faktoren das Pluszeichen, bei ungleichen das Minuszeichen.

$$(a+b)\cdot(c-d) = ac + bc - ad - bd$$

Aufgaben

1. a) $7(3m - 5n) + 6(4n - 5m) + 2(7m + 3n)$

b) $3(2a - 11) - 17a - 4(5b - 8a) + 19b$

c) $8x(3x - 5y) - 5y(2x - 7y) + 6x(11x - 9y) - 7y(4x - 3y)$

d) $(5m - 7r)4m - (3m - 8r)5r - (7r - 2m)6m + (5m - r)3r$

2. a) $(10 + 3)\cdot(30 + 6)$ **b)** $(40 - 2)\cdot(70 + 3)$ **c)** $(100 - 3)\cdot(60 - 2)$

d) $(a + 3)\cdot(b + 5)$ **e)** $(x + 2)\cdot(y - 7)$ **f)** $(9 - z)\cdot(z + 4)$

g) $(5a - 3)\cdot(4b - 8)$ **h)** $(m + 3)\cdot(3m - 10)$ **i)** $(28 - e)\cdot(5f - 3g)$

3. a) $(2a + 5b)(7a + 4b)$ **b)** $(5x + 3y)(6x - 5y)$

c) $(9r - 7s)(2r + 5s)$ **d)** $(8p - 3q)(5p - 7q)$

e) $(x + 3y + z)(2x - y)$ **f)** $(9a + 7b)(4a - b + 3c)$

4. a) $(2a - 3b - 5c)(4a - 5b + 7c)$ **b)** $(a + 2)(a + 3)(a + 4)$

c) $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$ **d)** $(2x + 1)(3x - 1)(x + 3)$

e) $(5x + 3)(4x + 5)(6x - 5)$ **f)** $(7m - 5)(8 - 6n)(3m + 9n)$

5. Was ergibt

a) $(8a + 5)\cdot(3a - 4)$, und was ergibt $8a + 5\cdot 3a - 4$

b) $(2x + 3)\cdot(x + 4)$, und was ergibt $2x + 3\cdot x + 4$?

6. Berechne den Wert folgender Produkte durch Einsetzen der gegebenen Werte zuerst vor, dann nach dem Multiplizieren:

a) $(2x^2 - 13x - 5)(2x - 3)$ für $x = 4$

b) $(4a^2 - 5a - 11)(-3a + 5)$ für $a = -1$

c) $(-3y^2 + 5y - 6)(y^2 - 3y + 7)$ für $y = -2$

d) $(-u^3 + 3u^2 + 7u - 3)(2u^2 - 5)$ für $u = -3$

e) $(-2a + 5)(-3a + 2) - (-5a + 4)(-3a + 1)$ für $a = 2$

f) $(6v^2 - 3v + 7)(-v + 3) - (-3v^2 + 7v - 2)(-4v + 5)$ für $v = 3$!

9. Wichtige Multiplikationsformeln

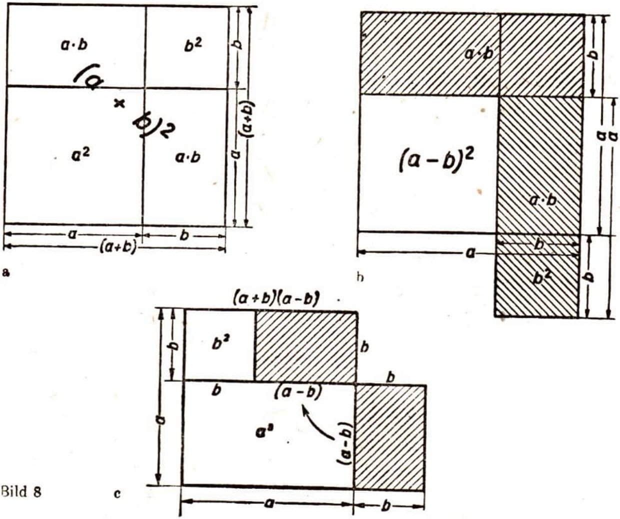
Berechne nach der Regel im Abschnitt 8 den Wert der Klammerausdrücke

$$(50 + 3) \cdot (50 + 3); \quad (50 - 3) \cdot (50 - 3); \quad (50 + 3) \cdot (50 - 3)!$$

Löse rechnerisch die Aufgaben:

$$(a + b) \cdot (a + b); \quad (a - b) \cdot (a - b); \quad (a + b) \cdot (a - b)!$$

Schreibe, soweit möglich, Aufgaben und Teilprodukte als Potenzen!



a b

Bild 8 c

Bild 8 a bis c zeigt die zeichnerische Lösung dieser Aufgaben. Weise daran die Richtigkeit der Rechnung nach! Führe die Zeichnungen mit bestimmten Zahlen auf Millimeterpapier aus!

$$\textbf{I. } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\textbf{II. } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$\textbf{III. } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Sprich die Formeln auch in Form von Sätzen aus!
Lies die Formeln von rechts nach links und merke dir auch die Umkehrungen!

Aufgaben

1. a) $(c + d)^2$ **b)** $(m + n)^2$ **c)** $(p + 5)^2$ **d)** $(7 + a)^2$ **e)** $(x + 4)^2$
f) $(3a + b)^2$ **g)** $(c - d)^2$ **h)** $(5 - v)^2$ **i)** $(p - 12)^2$ **k)** $(3m - 4)^2$
l) $(10a - 4b)^2$ **m)** $(u + v) \cdot (u - v)$ **n)** $(y + z) \cdot (y - z)$
o) $(c - 5) \cdot (c + 5)$ **p)** $(r + 15) \cdot (r - 15)$ **q)** $(20 - a) \cdot (20 + a)$

2. a) $(x + y)^2$ **b)** $(3x + 2y)^2$ **c)** $(7a + 9b)^2$ **d)** $(1{,}2a + 0{,}9b)^2$
e) $(b - c)^2$ **f)** $(5x - 7)^2$ **g)** $(9a - 10b)^2$ **h)** $(\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b)^2$
i) $(x + y)(x - y)$ **k)** $(3a + 5b)(3a - 5b)$ **l)** $(7x - 11y)(7x + 11y)$

3. a) $(2\frac{1}{2} - \frac{4}{5}a)^2$ **b)** $(\frac{2}{3}a + 9)^2$ **c)** $(0{,}3c - 0{,}1)^2$ **d)** $(0{,}9x - 2{,}5y)^2$
e) $(\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b)^2$ **f)** $(1{,}2a + 3{,}5b)(1{,}2a - 3{,}5b)$ **g)** $(a + b + c)^2$

4. a) $(a + b)^2 + (a - b)^2$ **b)** $(u + v)^2 - (u - v)^2$
c) $(x - y)^2 - (x + y)^2$ **d)** $(m + n)^2 + (m - n)^2 - (m + n) \cdot (m - n)$
e) $(a + b) \cdot (a - b) - (a + b)^2 + (a - b)^2$

5. a) $(7a - 5b)(9a + 2b) + (4a + 11b)(a - 5b) + (5a - 9b)^2$
b) $5x(3{,}2x - 1{,}8y) + (0{,}8x - 1{,}5y)(1{,}2x + 0{,}6y) - (1{,}4x - 5y)^2$
c) $(9a + 8b)^2 - (9a - 8b)^2 + (9a + 8b)(9a - 8b)$

6. Aus welchen Produkten sind folgende mehrgliedrige Ausdrücke entstanden:

a) $u^2 + 2uv + v^2$ **b)** $m^2 - 2mn + n^2$ **c)** $p^2 - q^2$
d) $a^2 + 6a + 9$ **e)** $m^2 - 36$ **f)** $c^2 - 10c + 25$
g) $4m^2 + 12mn + 9n^2$ **h)** $25x^2 - 60xy + 36y^2$ **i)** $49c^2 - 81d^2$!

7. Berechne die folgenden Produkte, indem du zuerst die beiden ersten Faktoren miteinander und dann das Ergebnis mit dem dritten Faktor multiplizierst:

a) $(a + 2)(a + 3)(a + 4)$ **b)** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
c) $(x - a)(x - b)(x - c)$ **d)** $(3x - 3)(3x + 7)(6x - 5)$
e) $(3x + 5)(7x - 5)(2x + 1)$ **f)** $(a + b)(a + b)(a + b)$!

8. a) $(x - y)^3$ **b)** $(a + 5)^3$ **c)** $(x - 6)^3$ **d)** $(2a + 3b)^3$
e) $(5x - 2y)^3$ **f)** $(1 - 3x)^3$ **g)** $(4a - 1)^3$

9. Berechne unter Anwendung der Formel $(a + b)^2$:
21^2; 34^2; 42^2; 51^2; 63^2; 72^2; 85^2; 94^2; 308^2; 380^2!

10. Berechne mit Hilfe der Formel $(a - b)^2$:
29^2; 38^2; 49^2; 59^2; 68^2; 78^2; 89^2; 99^2; 198^2; 995^2!

11. Berechne mit Hilfe der Formel $(a+b)(a-b)$:
$27 \cdot 33$; $36 \cdot 44$; $42 \cdot 58$; $58 \cdot 62$; $69 \cdot 71$; $84 \cdot 96$!

12. Berechne 45^2! Wieviel ist dann $44 \cdot 46$; $47 \cdot 43$; $41 \cdot 49$?

13. Berechne 87^2! Wie groß ist dann $85 \cdot 89$; $82 \cdot 92$; $86 \cdot 88$?

14. Die Kreuzmethode zur Multiplikation beliebiger zweistelliger Zahlen. Berechne $(Z+E)(z+e)$, wobei Z und z Zehner, E und e Einer bedeuten. Schreibe die Klammern noch einmal untereinander und erkläre die folgenden Rechnungen! (Beginne mit den Einern!)

$$\begin{array}{lll}
\quad Z+E & \quad 20+6 & \qquad\qquad 26 \\
\quad \underline{z+e} & \quad \underline{30+4} & \text{oder kürzer } \underline{34} \\
Ee+(Ez+Ze) & 6\cdot 4+(6\cdot 30+20\cdot 4) & \qquad\qquad 884 \\
\quad +Zz & \quad +20\cdot 30 &
\end{array}$$

Rechne:

$$\begin{array}{llll}
1.\ E\cdot e & 6\cdot 4 & =24, & \text{schreibe } 4, \text{ merke } 2 \\
2.\ E\cdot z+Z\cdot e & 6\cdot 3+2\cdot 4 & =26,\ldots+2=28, & \quad\text{,,}\quad 8, \quad\text{,,}\quad 2 \\
3.\ Z\cdot z & 2\cdot 3 & =6,\ldots+2=8, & \quad\text{,,}\quad 8
\end{array}$$

Löse folgende Aufgaben nach der Kreuzmethode:

a) $23 \cdot 34$ **b)** $45 \cdot 56$ **c)** $87 \cdot 91$ **d)** $64 \cdot 76$
e) $58 \cdot 63$ **f)** $84 \cdot 37$ **g)** $26 \cdot 41$ **h)** $53 \cdot 67$!

10. Gleichungen mit Multiplikationsklammern

Beispiel: $4(18-5x)-12(3x-7)=15(2x-16)-6(x+14)$

Auflösen der Klammern $72-20x-36x+84=30x-240-6x-84$

Ordnen............ $-20x-36x-30x+6x=-240-84-72-84$

Zusammenfassen .... $-80x=-480$

Teilen durch den Koeffizienten von x........ $\underline{\underline{x=6}}$

Mache die Probe!

Aufgaben

1. a) $4(x+9)=56$ **b)** $7(x-3)=35$ **c)** $3x+1=4(9-x)$
d) $13x-2(4x-5)=66-3x$ **e)** $5(2x+7)=9(2x-5)$
f) $2(2x+1)=11(17-3x)$
g) $8(3x-2)-7x=13x+5(12-3x)$
h) $7(3x+6)+5(x-3)=11-4(17-4x)$
i) $8(2x-5)+3(2x+3)=6(8-x)-2x+71$

2\. a) $(x + 4)(x + 3) = (x + 1)(x + 7)$
b) $(x + 11)(x - 9) = (x + 3)(x - 7)$
c) $(x + 4)(x - 9) - 13 = (x - 5)(x - 7)$
d) $(x - 5)(x + 6) = (x + 3)(x - 6) + 20$
e) $(3x - 5)(2x + 5) = (x + 1)(6x - 4)$

3\. a) $(x + 3)^2 = (x + 2)^2 + 15$
b) $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = (x + 4)^2 + (x - 5)^2$
c) $(x - 5)^2 + (x - 9)^2 = (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + 3$
d) $(3x - 7)^2 + (4x - 5)^2 = (5x - 7)^2 - 11$
e) $(3x - 5)^2 - (2x + 3)^2 = 5(x - 2)(x + 2) - 6$

4\. a) Vergrößert man eine Zahl um 8, multipliziert darauf die Summe mit 4, so erhält man 52. Wie heißt die Zahl?

b) Vermindert man eine Zahl um 6 und multipliziert die Differenz mit 9, so erhält man 27. Berechne die Zahl!

5\. Zwei Zahlen betragen zusammen 15. Multipliziert man die erste mit 4 und die zweite mit 7 und addiert die Produkte, so erhält man 78. Wie heißen die beiden Zahlen?

Anleitung: Die erste Zahl ist x, die zweite $(15 - x)$.

6\. Karl und Werner haben an einem Ferientag zusammen 75 Kastanien gesammelt. An einem anderen Tag brechen sie früh auf und bringen 179 Kastanien heim. Karl hat zweimal soviel und Werner dreimal soviel wie am ersten Tag. Wieviel Kastanien hat jeder am ersten Tag und wieviel am zweiten Tage gesammelt?

7\. a) Ein Jäger wurde gefragt, wieviel Hasen er auf der letzten Treibjagd geschossen habe. Der Jäger antwortete: „Wenn ihr zu der Zahl der erlegten Hasen noch 9 hinzuzählt, die Summe mit 9 malnehmt, dann sind es 9 Hasen mehr als 99. Nun rechnet euch aus, wieviel Hasen ich geschossen habe!"

b) Als man den Jäger weiter fragte, wie groß denn die Jagdbeute überhaupt gewesen sei, antwortete er: „Es sind Hasen und Rebhühner erlegt worden, insgesamt 240 Stück. Wenn ihr's noch genauer wissen wollt, dann rechnet's euch aus; die erlegten Tiere hatten 780 Füße."

8\. Ein Weinhändler bezieht aus einer Weinkelterei Rot- und Weißwein, zusammen 250 Flaschen, und zahlt dafür 305 DM. Wieviel Flaschen Rotwein und wieviel Flaschen Weißwein waren es, wenn er für eine Flasche Rotwein 1,40 DM und für eine Flasche Weißwein 1,10 DM zahlen mußte?

9. Ein Vater ist jetzt 58, sein Sohn 28 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater viermal so alt wie sein Sohn?

10. Die Länge eines Rechtecks ist um 6 cm größer als seine Breite. Verlängert man Länge und Breite dieses Rechteckes um 4 cm, so nimmt sein Flächeninhalt um 72 cm² zu. Berechne Länge und Breite des Rechtecks!

11. Vermischte Aufgaben

1. Addiere die untereinanderstehenden Größen!

a)
$$\begin{array}{rrrr} +9x & +8y & -z & -7v \\ -4x & +7y & +8z & -v \\ +x & -12y & -3z & +5v \\ +5x & +6y & -7z & +8v \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr} -8a & +b & -12c & -d \\ +a & -5b & -3c & +7d \\ +9a & +5b & +c & -4d \\ -3a & +8b & +9c & -5d \\ \hline \end{array}$$

2. a) $10u + (11v - 9w) - (7u + 9v - 8w) - (3u + 2v + 5w)$

b) $43x - 29y - 14z - (19x + 21y - 2z) - (6x + 11y - 13z)$

c) $24r - (6s - 5r) - [7s - (6r + 5s) - (4r + 3s) + 9r]$

d) $7{,}2a - (5{,}3b + 3{,}1c) - [5a - (1{,}6b + 4{,}8c) - 4b] + c$

e) $3\frac{1}{2}x - [(4y + 2\frac{1}{4}z - \frac{2}{3}x) + 4z] - 3\frac{1}{4}y + 2\frac{1}{2}z$

Anmerkung: Löse bei Doppelklammern erst die inneren Klammern auf!

3. a) $5(2x - 7y) + 6(5y - 2x) - 3(4x + 7y)$

b) $(12u - 3v)4u - (11v - 6u)5v + (7v - 3u)8v - (9u + 2v)7v$

c) $7a(0{,}5a - 0{,}3b) + 9b(0{,}4b - 0{,}7a) - 3{,}4(4a^2 - 9ab + 2b^2)$

d) $3r(2\frac{1}{2}r - \frac{2}{3}s) - 2s(4\frac{1}{4}r - 1\frac{1}{3}t) + 5t(2\frac{1}{5}r - 3\frac{1}{4}s)$

4. a) $(9x + 7y)(8x - 5y) + (4x - 11y)(12x - 5y)$

b) $(6p - 5q)(2p - 3q) - (8p - 7q)(4p - 5q) - (9p - q)(2q - 5p)$

c) $(3a - 4b - 5c)(4a + 5b - 3c) - (7a + b - 2c)(2a - 3b + c)$

d) $(5x + 6y)^2 - (3x - 7y)^2 + (4x - 5y)(4x + 5y)$

e) $(3x - 7)^2 - (5x - 2)^2 - (6x + 7)(7 - 6x)$

5. Löse folgende Gleichungen:

a) $5(3x + 11) - 4(5 + 2x) = 7(2x - 7) + 21$

b) $15(2x - 16) - 6(x + 14) = 4(18 - 5x) - 12(3x - 7)$

c) $(17 - 3x)(10 + 12x) + (9x - 17)(4x - 25) = 0$

d) $(x + 9)^2 - (x - 4)^2 = (x + 7)^2 + 4(x + 10) - (x - 2)^2$

e) $(5x - 7)^2 + (9x - 4)^2 = 6(3x - 4)(3x + 4) + 13(2x - 5)^2 + 13$!

6. Beachte den Unterschied von:

a) $2a$ und a^2, **b)** $3a$ und a^3

c) $a^2 + b$, $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$ und $(a + b)2$

d) $a^2 - b$, $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$ und $(a - b)2$!

Setze $a = 6$, $b = 4$, werte aus und gib den Unterschied der gegebenen Buchstabenausdrücke an, die so häufig miteinander verwechselt werden!

Zahlenaufgaben

7. a) Die Summe dreier Zahlen ist 154. Die zweite Zahl ist um 4 größer als das Dreifache der ersten und die dritte um 12 kleiner als das Fünffache der ersten. Wie heißen die Zahlen?

b) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen beträgt 178. Berechne diese Zahlen!

8. a) Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist a, die Einerziffer b. Drücke die Zahl durch a und b aus!

b) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 13. Subtrahiert man von dieser Zahl 27, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Suche die Zahl!

c) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man vom Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die Zahl?

9. Die Schüler einer Klasse kaufen gemeinsam einen Schlagball. Gibt jeder Schüler 25 Dpf, so bleiben 95 Dpf übrig, gibt aber jeder 15 Dpf, so fehlen 1,15 DM an dem zu zahlenden Preis. Wieviel Schüler sind in der Klasse, und wieviel DM kostet der Ball?

Verteilungs- und Mischungsrechnung

10. A und B verteilen unter sich 280 DM. B erhält 50 DM mehr als A. Wieviel DM erhält jeder?

11. A und B teilen sich einen Lotteriegewinn in Höhe von 4 800 DM so, daß A 300 DM weniger erhält als B. Wieviel DM erhält jeder?

12. Ein Vater hinterläßt 5 600 DM mit der Bestimmung, daß sein Sohn von der Erbschaft 800 DM mehr erhalten soll als die Tochter.

13. Die Klassen 1 bis 4 der Grundschule werden von 120 Kindern besucht. Die zweite Klasse hat 5 Schüler mehr als die erste, die dritte 8 Schüler mehr als die zweite und die vierte 36 Schüler weniger als die ersten zusammen. Wieviel Schüler sind in jeder Klasse?

14. Fünf Knaben sollten eine Anzahl Nüsse gleichmäßig unter sich verteilen. Da aber einer von ihnen auf seinen Anteil verzichtete, so erhielt jeder der vier anderen drei Nüsse mehr, als er sonst bekommen hätte. Wieviel Nüsse sollten unter die Knaben verteilt werden?

15. Unter drei Personen sollen 360 DM so geteilt werden, daß jede 36 DM mehr erhält als die vorhergehende.

16. A, B und C verteilen 1 800 DM so untereinander, daß A 120 DM mehr als B und C 180 DM weniger als B erhält.

17. Jemand erhält beim Wechseln eines Hundertmarkscheines Zehnmarkscheine und Fünfmarkscheine, im ganzen 16 Stück.

18. Ein Chemiker will 100 cm³ einer wäßrigen Salzlösung von der Wichte[1]) 1,5 so verdünnen, daß er eine Lösung von der Wichte 1,2 erhält. Wieviel cm³ Wasser muß er hinzufügen?

Anleitung: Bestimme das Gewicht der gesuchten Lösung unter Benutzung der Gleichung: Gewicht = Rauminhalt mal Wichte!

19. 5 kg einer Säure von der Wichte 1,8 sollen mit Wasser so verdünnt werden, daß die verdünnte Säure die Wichte 1,2 hat. Wieviel Gramm Wasser muß man zusetzen?

V. Faktorenzerlegung Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen

12. Ausklammern

Im Rechnen werden Aufgaben, in denen mehrere Faktoren durch eine Zahl oder mehrere Faktoren geteilt werden sollen, mit Hilfe des Bruchstriches gelöst.

Beispiel: $\frac{48 \cdot 130}{120} \underset{}{\overset{12 \cdot 10}{=}} \frac{4 \cdot 13}{1} = 52.$

Warum kann man die Aufgabe $\frac{48 + 130}{120}$ nicht in gleicher Weise lösen? Man erkennt: Nur dann, wenn Zähler und Nenner Produkte sind, kann man den Bruch kürzen.

Dies gilt auch für das Rechnen mit allgemeinen Zahlen.

Kürze: $\frac{10\,ab}{5\,a}$; $\frac{12\,ab}{4\,b}$; $\frac{18\,ab + 12\,b}{6\,b}$!

Warum kann man die letzte Aufgabe nicht durch Kürzen lösen, wie die ersten beiden?

---

1) Gewicht eines Kubikzentimeters.

Um das Kürzen durchführen zu können, verwandelt man die Summe $(18ab + 12b)$ in ein Produkt. Die Summe $(18ab + 12b)$ ist aus der Multiplikationsaufgabe $6b(3a + 2)$ entstanden. Die Aufgabe lautet also in veränderter Form

$$\frac{6b(3a+2)}{6b};$$

durch Kürzen erhält man als Ergebnis $3a + 2$.

Haben alle Glieder eines mehrgliedrigen Ausdrucks einen Faktor gemeinsam, so kann man den Ausdruck in Form eines Produktes schreiben, indem man den gemeinsamen Faktor ausklammert.

$$(ab + ac) = a(b + c) \qquad (ab - ac) = a(b - c)$$

$$(ab + ac - ad) = a(b + c - d)$$

Beachte besonders: $ab + a = ab + a \cdot 1 = a(b + 1)$!

Beispiele:
a) $12a^2b - 9ab^2 = 3ab(4a - 3b)$
b) $ab + ac - a = a(b + c - 1)$
c) $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$
d) $ab - ac + b^2 - bc = a(b - c) + b(b - c) = (b - c)(a + b)$

Aufgaben

Schreibe folgende mehrgliedrige Ausdrücke als Produkte:

1. a) $6a + 6b$ b) $7a + 4a$ c) $5x - 5y$ d) $ab + ac$
e) $10m - 7m$ f) $mx - nx$ g) $am - an$ h) $39a - 39g$

2. a) $5a + a$ b) $9x - x$ c) $m + am$ d) $4r - 4$
e) $xy + x$ f) $ay - a$ g) $ab^2 + b^2$ h) $am - a^2$

3. a) $9a + 6b$ b) $25m - 15n$ c) $48x + 60y$ d) $35ab - 49x$
e) $12xy + 18z$ f) $15r - 10s$ g) $12a^2 - 6a$ h) $30a^2b - 40ab^2$

4. a) $4a + 6b + 8c$ b) $15m + 10n + 250$ c) $ab + ax - ad$
d) $18x - 30y - 12z$ e) $5{,}6a + 7{,}2b - 4c$ f) $4\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}y + 6z$

5. a) $25ab + 30ac - 15ad$ b) $16mx - 40my + 32mz$
c) $21m^2 - 49mn + 35mo$ d) $65a^2bc + 39ab^2c - 26abc^2$

6. a) $m(x+y)+n(x+y)$ **b)** $2a(m-3)-5b(m-3)$
c) $5xy(3a-b)-4vw(3a-b)$ **d)** $4rs(a-5)-9st(a-5)$
e) $a(r+s)-b(r+s)-c(r+s)$
f) $3x(p-q)-4y(p-q)+5z(p-q)$

7. a) $ac+ad+bc+bd$ **b)** $ab+ac+bd+cd$
c) $pr-ps+qr-qs$ **d)** $am-an-bm+bn$
e) $8ax-12bx-20ay+30by$ **f)** $60a^2b-45ab+36a^2c-27ac$
g) $30am-15a-24bm+12b$ **h)** $56x^2-40xy+63xz-45yz$

8. a) $a^2+2ab+b^2$ **b)** $x^2-2xy+y^2$ **c)** $a^2+8a+16$
d) $m^2-10mn+25m^2$ **e)** a^2-2a+1 **f)** $x^2-14xy+49y^2$
g) $9a^2+24ab+16b^2$ **h)** $25x^2-60xy+36y^2$ **i)** $64c^2+80cd+25d^2$

9. a) a^2-b^2 **b)** x^2-y^2 **c)** $4x^2-9y^2$
d) $49m^2-64n^2$ **e)** $25c^2-81d^2$ **f)** $400x^2-900y^2$

10. a) $a^2+8a+15$ **b)** $a^2-9a+20$ **c)** $m^2+10m+21$
d) x^2-5x+4 **e)** $10a^2-11ab+b^2$ **f)** $18x^2+9xy+y^2$!

11. Multiplikation von Zahlen im gleichen Zehner, besonders solcher, die zusammen wieder einen vollen Zehner ergeben (23 und 27, 66 und 64 usw.). Nenne die Zehnerzahl Z und die beiden Einer E und e! Schreibe die Aufgabe in zwei Multiplikationsklammern und multipliziere aus! In dem Ergebnis klammere Z aus und beachte, daß $E+e=10$ ist!

Gib die Rechenregel durch Stichworte wieder und rechne danach:

a) $33 \cdot 37$ **b)** $46 \cdot 44$ **c)** $72 \cdot 78$ **d)** $95 \cdot 95$ **e)** 35^2 **f)** 75^2!
g) Bilde selbst 10 weitere Aufgaben!
h) Untersuche, ob sich das Verfahren auch für andere Zahlen im gleichen Zehner eignet!

13. Formveränderung der Brüche. Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen von Brüchen

Löse folgende Aufgaben:

$$2:5; \quad 1:8; \quad b:5; \quad c:d!$$

Schreibe folgende Aufgaben in Bruchform und stelle das Vorzeichen des Ergebnisses fest, indem du die Regeln über das Teilen relativer Zahlen anwendest:

$$(+a):(+b); \quad (-a):(-b); \quad (+a):(-b); \quad (-a):(+b)!$$

1. Jede Divisionsaufgabe mit bestimmten oder allgemeinen Zahlen kann als Bruch geschrieben werden.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

2. Haben Zähler und Nenner eines Bruches gleiche Vorzeichen, dann hat der Bruch einen positiven, haben Zähler und Nenner entgegengesetzte Vorzeichen, dann hat der Bruch einen negativen Wert.

3. Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

4. Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

5. Der Hauptnenner ungleichnamiger Brüche ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner.

Beispiele: a) $\frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}$; $\frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}$

b) $\frac{a}{b} \overset{m}{=} \frac{ma}{mb}$; $\frac{a+b}{a-b} \overset{x}{=} \frac{x(a+b)}{x(a-b)}$

c) $\frac{ab}{bc} \overset{b}{=} \frac{a}{c}$; $\frac{a^2+ab}{ac-ab} = \frac{a(a+b)}{a(c-b)} \overset{a}{=} \frac{a+b}{c-b}$

d) $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$;

$\frac{a}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$ und $\frac{a}{a-b} = \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$

e) $\frac{a+b}{3b}$; $\frac{a^2-b}{6ab}$; $\frac{a}{3(a+b)^2}$; $\frac{b}{4a^2b+4ab^2}$

Faktorenzerlegung der Nenner	Erweiterungsfaktoren	Erweiterter Zähler
$3b = 3b$	$2^2 \cdot a \cdot (a+b)^2$	$2^2 \cdot a \cdot (a+b)^3$
$6ab = 2 \cdot 3ab$	$2 \cdot (a+b)^2$	$2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a^2-b)$
$3(a+b)^2 = 3(a+b)^2$	$2^2 \cdot ab$	$2^2 \cdot a^2b$
$4a^2b + 4ab^2 = 2^2 \cdot ab \cdot (a+b)$	$3 \cdot (a+b)$	$3 \cdot (a+b) \cdot b$

Hauptnenner: $2^2 \cdot 3 \cdot ab \cdot (a+b)^2 = 12ab(a+b)^2$

$$\frac{a+b}{3b} = \underline{\underline{\frac{4a(a+b)^3}{12ab(a+b)^2}}} \qquad \frac{a^2-b}{6ab} = \underline{\underline{\frac{2(a+b)^2(a^2-b)}{12ab(a+b)^2}}}$$

$$\frac{a}{3(a+b)^2} = \underline{\underline{\frac{4a^2b}{12ab(a+b)^2}}} \qquad \frac{b}{4a^2b+4ab^2} = \underline{\underline{\frac{3(a+b)b}{12ab(a+b)^2}}}$$

Aufgaben

1. Bestimme das Vorzeichen folgender Brüche:

$\frac{+5}{-6}$; $\frac{-a}{+b}$; $\frac{-5x}{-7y}$; $\frac{+3b}{+5c}$; $\frac{-2ab}{+5cd}$; $\frac{-9xyz}{-5uvw}$; $\frac{+5ab}{-3rs}$!

2. Erweitere mit 5; -3; a; $-2b$; $4a^2$; $(a+b)$; $(4x-3y)$ folgende Brüche:

a) $\frac{x}{5}$ **b)** $\frac{7}{b}$ **c)** $\frac{a}{b}$ **d)** $\frac{3x}{5y}$ **e)** $\frac{a+b}{7a}$ **f)** $\frac{2c}{x+y}$ **g)** $\frac{3x+7y}{4x-5}$!

3. Bringe

a) $\frac{5}{6}$ auf den Nenner 24 **b)** $\frac{7}{8}$ auf den Nenner 56

c) $\frac{4}{a}$ „ „ „ ab **d)** $\frac{x}{5}$ „ „ „ 45

e) $\frac{5x}{6y}$ „ „ „ $36xy$ **f)** $\frac{3a}{7b}$ „ „ „ $84a^2b^2$

g) $\frac{7rs}{5ab}$ „ „ „ $40a^2b^2$ **h)** $\frac{6mn}{5xy}$ „ „ „ $35x^2yz$

i) $\frac{a+b}{a-b}$ „ „ „ **1.** a^2-b^2 **2.** $a^2-2ab+b^2$

k) $\frac{x-y}{x+y}$ „ „ „ **1.** $x^2+2xy+y^2$ **2.** x^2-y^2

l) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ „ „ „ **1.** $25a^2-16b^2$ **2.** $25a^2-40ab+16b^2$

m) $\frac{r+s}{3r-2s}$ „ „ „ **1.** $9r^2-4s^2$ **2.** $9r^2-12rs+4s^2$

n) $\frac{5r-9m}{4r+3}$ „ „ „ **1.** $16r^2-9$ **2.** $16r^2+24r+9$!

4. Kürze folgende Brüche:

a) $\frac{27}{36}$ **b)** $-\frac{35}{60}$ **c)** $\frac{5a}{15}$ **d)** $\frac{7b}{9b}$ **e)** $\frac{12ab}{9b}$ **f)** $\frac{abc}{bcd}$

g) $-\frac{18xy}{12yz}$ **h)** $\frac{a}{ax}$ **i)** $\frac{b}{b^2}$ **k)** $\frac{a^3}{a^4}$ **l)** $\frac{x^2y^4}{x^3y^2}$ **m)** $\frac{10x^2y^3z}{25x^4yz^2}$

n) $\frac{48r^2s^2t^3}{64rst}$!

5. Verwandle in folgenden Brüchen Zähler und Nenner in Produkte und kürze dann:

a) $\frac{ax+bx}{ax}$ **b)** $\frac{8a+16}{7a+14}$ **c)** $\frac{12ax-18ay}{24ap+30aq}$ **d)** $\frac{25rx-35ry}{35sx-49sy}$

e) $\frac{5a+c}{25a^2-c^2}$ **f)** $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}$ **g)** $\frac{a^2+a}{a+1}$ **h)** $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

i) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$ **k)** $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ **l)** $\frac{4a-4}{a^2-2a+1}$!

6. Mache folgende Brüche gleichnamig:

a) $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{12}$ **b)** $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{a}{8}$ und $\frac{6}{10}$ **d)** $\frac{2x}{7}$ und $\frac{3y}{5}$

e) $\frac{4}{r}$ und $\frac{1}{s}$ **f)** $\frac{5}{2x}$ und $\frac{3}{5y}$ **g)** $\frac{x}{y}$ und $\frac{z}{v}$ **h)** $\frac{3r}{m}$ und $\frac{7s}{n}$

i) $\frac{2x}{5y}$ und $\frac{3v}{4w}$ **k)** $\frac{5y}{8x}$ und $\frac{7x}{12z}$

l) $\frac{3}{4a}$; $\frac{7}{10b}$ und $\frac{6}{5c}$ **m)** $\frac{4x}{a^2}$; $\frac{3y}{ab}$ und $\frac{2z}{b^2}$

n) $\frac{a}{a^2-b^2}$ und $\frac{b}{a+b}$ **o)** $\frac{x}{x+y}$ und $\frac{y}{x-y}$

p) $\frac{b}{ab+b^2}$ und $\frac{c}{a^2-b^2}$ **q)** $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ und $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}$

r) $\frac{a}{b(a-b)}$; $\frac{b}{a(a+b)}$ und $\frac{c}{a^2-b^2}$ **s)** $\frac{x}{x-y}$; $\frac{y}{x+y}$ und $\frac{z}{(x+y)^2}$!

14. Addition und Subtraktion von Brüchen

Allgemein gilt für die Addition und Subtraktion von Brüchen:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Beispiele: a) $\frac{3a-4b}{2x} - \frac{5a-8b}{2x} = \frac{3a-4b-(5a-8b)}{2x}$

$$= \frac{3a-4b-5a+8b}{2x} = \frac{-2a+4b}{2x} = \frac{2(2b-a)}{2x} = \underline{\underline{\frac{2b-a}{x}}}$$

b) $\frac{4x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{20x-6x}{15} = \underline{\underline{\frac{14x}{15}}}$

c) $\frac{a-2b}{2ab} + \frac{2}{a-b} - \frac{a+b}{a^2-ab}$

Faktorenzerlegung der Nenner	Erweiterungsfaktor	Erweiterte Zähler
$2ab = 2ab$ $a-b = 1(a-b)$ $a^2-ab = a(a-b)$	$(a-b)$ $2ab$ $2\ b$	$(a-2b)(a-b) = a^2-3ab+2b^2$ $2 \cdot 2ab = 4ab$ $(a+b) \cdot 2b = 2ab+2b^2$

Hauptnenner:
$2ab(a-b)$

Zähler des Ergebnisses:
$a^2 - ab = a(a-b)$

$$\frac{a(a-b)}{2ab(a-b)} = \underline{\underline{\frac{1}{2b}}}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$ **b)** $\frac{b}{8}-\frac{c}{8}$ **c)** $\frac{x}{12}+\frac{y}{12}-\frac{z}{12}$ **d)** $\frac{r}{5}+\frac{s}{5}-\frac{t}{5}$

e) $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$ **f)** $\frac{p}{r}+\frac{q}{r}$ **g)** $\frac{m}{s}-\frac{n}{s}$ **h)** $\frac{u}{v}+\frac{w}{v}-\frac{x}{v}$

2. a) $\frac{xy}{g}+\frac{yz}{g}$ **b)** $\frac{st}{u}+\frac{vw}{u}$ **c)** $\frac{a}{cd}+\frac{b}{cd}$ **d)** $\frac{4}{r}-\frac{pq}{r}$

e) $\frac{a+b}{3}-\frac{b}{3}$ **f)** $\frac{x+y}{z}-\frac{y}{z}$ **g)** $\frac{v-w}{x}+\frac{w}{x}$ **h)** $\frac{3a+2b}{c}-\frac{3b}{c}$

3. a) $\frac{a+b}{z}+\frac{a-b}{z}$ **b)** $\frac{a+b}{z}-\frac{a-b}{z}$ **c)** $\frac{a-b}{y}-\frac{a+b}{y}$

d) $\frac{3(x+y)}{a}+\frac{4(x-y)}{a}-\frac{2x-3y}{a}$

4. a) $\frac{7a}{5x}+\frac{9a}{5x}-\frac{6a}{5x}$ **b)** $\frac{13a}{7b}-\frac{17a}{7b}-\frac{11a}{7b}+\frac{19a}{7b}$

c) $\frac{2a-3b}{5}+\frac{5a-6b}{5}-\frac{4b-3a}{5}-\frac{2b}{5}$

d) $\frac{7x-8y}{18}-\frac{12x-13y}{18}-\frac{14x+15y}{18}+\frac{21x-7y}{18}$

e) $\frac{7x+5y}{x}+\frac{3y-4x}{x}+\frac{2x+y}{x}-\frac{7y-3x}{x}$

5. a) $\frac{5x+2y}{x-y}+\frac{x-3y}{x-y}$ **b)** $\frac{7m-3n}{m+n}-\frac{5m-4n}{m+n}$

c) $\frac{3a+5b}{a+b}+\frac{a-4b}{a+b}-\frac{5a-7b}{a+b}+\frac{7a-2b}{a+b}$

d) $\frac{x^2+4xy+y^2}{x-y}-\frac{3xy-2x^2+4y^2}{x-y}-\frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$

6. a) $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$ **b)** $\frac{m}{2}-\frac{m}{3}$ **c)** $\frac{3a}{5}+\frac{4a}{7}$ **d)** $\frac{3p}{5}+\frac{4p}{9}-\frac{p}{2}$

e) $\frac{0}{8}+\frac{1}{11}$ **f)** $\frac{z}{6}-\frac{2}{3}$ **g)** $\frac{9}{10}-\frac{x}{2}$ **h)** $\frac{2}{7}+\frac{a}{2}-\frac{1}{14}$

7. a) $\frac{3a}{2}-\frac{4a}{5}$ **b)** $\frac{7x}{4}+\frac{5x}{6}$ **c)** $\frac{3x}{8}-\frac{x}{6}$ **d)** $\frac{x}{5}+2x$

e) $a-\frac{5a}{9}$ **f)** $\frac{4r}{3}+\frac{3r}{8}-\frac{7r}{12}$ **g)** $\frac{7a}{4}-\frac{4a}{5}-\frac{3a}{10}+a$

h) $\frac{4a}{15}+\frac{7b}{12}-\frac{3a}{10}-\frac{b}{6}$

8. a) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$ **b)** $\frac{5}{z}-\frac{6}{w}$ **c)** $\frac{25}{a}-\frac{13}{b}$ **d)** $\frac{c}{g}-\frac{d}{h}$

e) $\frac{3a}{4c}+\frac{5b}{2d}$ **f)** $\frac{10x}{7p}-\frac{4y}{7q}$ **g)** $\frac{15m}{a}+\frac{3n}{5b}$ **h)** $\frac{12a}{7m}-\frac{11v}{8n}$

9. a) $\frac{3}{a} + \frac{5}{4a}$ b) $\frac{7}{3x} - \frac{4}{5x}$ c) $\frac{3}{2b} + \frac{4}{3b} - \frac{5}{4b}$ d) $\frac{2}{5y} - \frac{3}{4y} + 1$

e) $\frac{a}{b} - \frac{c}{bd}$ f) $\frac{3a}{4c} + \frac{2c}{b}$ g) $\frac{a}{cd} + \frac{c}{ab}$ h) $\frac{p}{x} - \frac{r}{y} + \frac{q}{z}$

i) $\frac{5bc}{3a} + \frac{3ac}{4b} - \frac{7ab}{2c}$ k) $\frac{3y}{kz} + \frac{5x}{yz} - \frac{2z}{xy}$

10. a) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ b) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ c) $\frac{m}{u} + \frac{1}{v} - \frac{n}{w}$

d) $\frac{3m}{4x^2y} - \frac{5n}{3xy^2}$ e) $\frac{5}{a^2bc} - \frac{2}{ab^2c} + \frac{3}{abc^2}$ f) $\frac{8a}{pq} - \frac{6a}{pq^2}$

11. a) $\frac{2a+3b}{4a} - \frac{3a-7b}{5b}$ b) $\frac{11x-4y}{7x} - \frac{14x+3y}{11y}$

c) $\frac{6v+5w}{4v} + \frac{2w+3v}{3w} - 1$ d) $2 - \frac{a+5b}{3a} + \frac{3a+8b}{4b}$

12. a) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$ b) $\frac{3}{a-b} - \frac{2}{a+b}$ c) $\frac{7}{a+b} + \frac{3}{5a}$

d) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y}$ e) $\frac{a}{y+b} - \frac{b}{y-b}$ f) $\frac{3x}{a^2-b^2} - \frac{2x}{a+b}$

13. a) $\frac{1}{3} + 1$ b) $\frac{3}{8} - 5$ c) $\frac{3}{a} + 3$ d) $\frac{x}{y} - 1$ e) $\frac{p}{q} - a$

f) $\frac{x}{y} - z + \frac{y}{x}$ g) $\frac{p(p+q)}{p-q} - 1$ h) $4 + \frac{(a-b)^2}{ab}$

Anmerkung: Denke dir die ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1!

15. Multiplikation und Division von Brüchen

Eine Grube fördert jährlich a t Kohle. Wie groß ist die Förderung a) in 7, b) in x Monaten?

Drücke die 7 (x) Monate als Teil des Jahres aus! Du mußt rechnen:

$$\frac{7}{12} \text{ von } a \text{ oder } a \text{mal } \frac{7}{12};\ a \cdot \frac{7}{12} = \frac{a \cdot 7}{12} = \frac{7a}{12};\ a \cdot \frac{x}{12} = \frac{ax}{12}.$$

Der b-te Teil der geförderten Kohle wird an die Bergleute zum Eigenverbrauch abgegeben. Wie groß ist diese Menge in a) 1, b) 7, c) x Monaten? Setze für a und b zunächst natürliche Zahlen ein und rechne! Schreibe das Ergebnis dann in allgemeinen Zahlen und überzeuge dich durch die Probe von der Richtigkeit der Rechnung!

Stelle nach diesem Beispiel eine Formel mit allgemeinen Zahlen für das Teilen durch Brüche auf!

In entsprechender Weise lassen sich auch die übrigen Regeln der Bruchrechnung durch allgemeine Zahlen ausdrücken.

$$\boldsymbol{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}} \qquad \boldsymbol{a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}}$$

Beispiele: 1. $\frac{5a}{27b^4} \cdot 18ab^2 = \frac{5a \cdot 18ab^2}{27b^4} = \underline{\underline{\frac{10a^2}{3b^2}}}$

2. $\frac{14(a+b)}{5c} \cdot \frac{7c^2}{a^2-b^2} = \frac{14(a+b) \cdot 7c^2}{5c(a^2-b^2)} = \underline{\underline{\frac{98c}{5(a-b)}}}$

3. $\frac{18ab^3}{5c} : 6a^2b = \frac{18ab^3}{5c \cdot 6a^2b} = \underline{\underline{\frac{3b^2}{5ac}}}$

4. $\frac{9mn}{10(m-n)} : \frac{12n}{m-n} = \frac{9mn \cdot (m-n)}{10(m-n) \cdot 12n} = \underline{\underline{\frac{3m}{40}}}$

Aufgaben

1. a) $\frac{4}{9} \cdot 2$ **b)** $\frac{a}{12} \cdot 9$ **c)** $\frac{7}{u} \cdot 8$ **d)** $\frac{a}{m} \cdot m$ **e)** $\frac{4s}{t} \cdot 5$

f) $\frac{4}{a} \cdot 3b$ **g)** $\frac{11}{20m} \cdot 15$ **h)** $\frac{a^2}{b} \cdot a$ **i)** $\frac{8u}{3v} \cdot 5u^2$ **k)** $\frac{m+n}{s} \cdot 9v$

2. a) $\frac{a}{4b} \cdot 3b$ **b)** $\frac{3x}{8y} \cdot 12y$ **c)** $\frac{7ab}{15xy} \cdot 5xy$ **d)** $36ay \cdot \frac{5by}{24cx}$

e) $4xy \cdot \frac{3ab}{5xz}$ **f)** $\frac{13uv}{15a^2b} \cdot 5ab^2$ **g)** $\frac{7xy}{12a^2bc} \cdot 18abc^2$

3. a) $\frac{25xy}{24(x^2-y^2)} \cdot 32y(x+y)$ **b)** $\frac{3ab}{25(a^2-b^2)} \cdot 35(a+b)$

c) $\left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{3z} - \frac{z}{4x}\right) \cdot 12xyz$ **d)** $\left(\frac{7x^3}{2y^3} + \frac{9x^2}{4y^2} - \frac{7x}{8y}\right) \cdot 4xy$

4. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{3a}{8} \cdot \frac{10}{21}$ **c)** $\frac{4x^2}{9y^2} \cdot \frac{3xy}{4z^2}$ **d)** $\frac{6m}{5b} \cdot \frac{2bc}{21a}$

e) $\frac{ac}{xy} \cdot \frac{x}{a}$ **f)** $\frac{3a}{4b} \cdot \frac{6x}{7y} \cdot \frac{11b}{9a}$ **g)** $\frac{ax}{by} \cdot \frac{bz}{ac} \cdot \frac{cy}{xz}$ **h)** $\frac{5cd}{18mn} \cdot \frac{24no}{35de} \cdot \frac{42ef}{11op}$

5. a) $\frac{a+b}{m+n} \cdot \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{c}{a+b} \cdot \frac{d}{a-b}$ **c)** $\frac{u+v}{u-v} \cdot \frac{u-v}{u+v}$ **d)** $\left(\frac{15a}{c} + \frac{6}{d}\right) \cdot \frac{9}{m}$

6. a) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ b) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u}$ c) $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5a}{7b}$ d) $\left(\frac{1}{2a}\right)^2$ e) $\left(\frac{3x}{5y}\right)^2$ f) $\frac{9a}{4b} \cdot \frac{10b}{3a}$

g) $\frac{5xy}{16ab} \cdot \frac{24a^2}{25xy^2}$ h) $\frac{7ax}{6by} \cdot \frac{3cy}{5dx}$ i) $\frac{5xy}{2ab} \cdot \frac{8a^2}{15y^2}$ k) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$

7. a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ b) $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{w}\right) \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{w}{z}\right)$

8. a) $\left(\frac{x}{y} + a\right)\left(a - \frac{x}{y}\right)$ b) $\left(\frac{3a}{4b} - \frac{7x}{9y}\right)\left(\frac{4b}{9a} + \frac{3y}{7x}\right)$ c) $\left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right)^2$

d) $\left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)^2$ e) $\left(\frac{a}{x} + \frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)\left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right)$

9. a) $\frac{6}{7} : 3$ b) $\frac{14}{15} : 10$ c) $\frac{a}{5} : a$ d) $\frac{bc}{d} : b$

e) $\frac{12a}{x} : 4a$ f) $\frac{16xy}{3z} : 8y$ g) $\frac{9a^2}{4b} : 3a$ h) $\frac{162p^2q}{27x} : 18pq$

10. a) $\frac{ab}{c} : ad$ b) $\frac{9a^2b}{2cd} : 3ab$ c) $\frac{25rs^2}{9t^2} : 15rs^2$

d) $\frac{15x^2y}{2z} : (-5xy)$ e) $\frac{7(a^2-b^2)}{2ab} : (a+b)$ f) $\frac{24x(x-y)}{5x+y} : 16x(x^2-y^2)$

11. a) $\left(\frac{15a^2b}{4c} - \frac{12ab^2}{5c} + \frac{9a^2b^2}{3c}\right) : 3ab$ b) $\left(\frac{10x^2y^2}{3z} + \frac{8xy^2}{5z^2}\right) : (-6x^2y)$

12. a) $\left(\frac{25m^2n}{6r} - \frac{30mn^2}{7s}\right) : 5mn$ b) $\left(\frac{117x^2y^2}{12ab} + \frac{91xy}{4c}\right) : 13xy$

c) $\left(5 + \frac{18ad}{11u} - \frac{30a^2b^2}{7v}\right) : (-6ab)$ d) $\left(\frac{x^2 + 12x + 36}{x+3} + \frac{x+6}{y+3}\right) : (x+6)$

13. a) $\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$ b) $\frac{15}{17} : \frac{21}{34}$ c) $\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$ d) $\frac{x}{y} : \frac{x}{y}$ e) $\frac{m+n}{pq} : \frac{m}{q}$

f) $\frac{x^2y^2}{u^2v^2} : \frac{xy}{uv}$ g) $\frac{9z^2}{10xz} : \frac{3z}{5x}$ h) $\frac{52u^2v^4}{15z^2} : \frac{39u^4v^2}{30z^4}$

14. a) $1 : \frac{1}{a}$ b) $3 : \frac{1}{x}$ c) $a : \frac{1}{a}$ d) $x : \frac{2}{x}$ e) $a : \frac{b}{a}$ f) $12x : \frac{8x}{3y}$

g) $25a^2 : \frac{15a}{4b}$ h) $8x^2yz : \frac{6xy}{5z}$ i) $18rs^2 : \frac{12r^2t}{5ms}$ k) $25u^2 : \frac{10uv}{2w^2}$

15. a) $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ b) $\frac{a}{y} : \frac{b}{y}$ c) $\frac{5a}{b} : \frac{2a}{c}$ d) $\frac{5xy}{2ab} : \frac{7xz}{3bc}$ e) $\frac{8ax}{3by} : \frac{10bx}{9cy}$

f) $\frac{4x^2y}{9uv^2} : \frac{2xy^2}{3u^2v}$ g) $\frac{12abc}{5xyz} : \frac{8a^2b^2}{15yz}$ h) $\frac{42m^2n}{11ab} : \frac{28mn^2}{33b^2}$

16. a) $\left(\frac{a}{bc} + \frac{bc}{d^2} + \frac{2a}{bd}\right) : \frac{a}{b}$ b) $\left(\frac{2ac}{3bd} - \frac{11}{45} - \frac{2b}{3a}\right) : \frac{4a}{9b}$

c) $\left(\frac{3a^2}{2bx} - \frac{2ab}{5cx} - \frac{5by}{3ax}\right) : \frac{a}{2bx}$ d) $\left(\frac{3xy}{2ab} - \frac{4x}{3a} - \frac{5y}{4b}\right) : \frac{5by}{6ax}$

17. a) $\frac{4ab}{x+y} : \frac{6ax}{x+y}$ b) $\frac{a-b}{3x} : \frac{ab}{3x}$ c) $\frac{28(a^2-b^2)}{27(x+y)} : \frac{35(a+b)}{18(x^2-y^2)}$

18. a) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} : \frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{x+y}{x-y} : \frac{x^2y^2}{(x-y)^2}$ c) $\frac{5y+5z}{8y-8z} : \frac{20y+20z}{16y-16z}$

19. a) $\left(\frac{3a}{4b} + \frac{9a}{20b}\right) : \frac{3a}{4b}$ b) $\left(\frac{21p^2q}{25xy^2} - \frac{24pq^2}{35x^2y}\right) : \frac{3pq}{5xy}$

c) $\left(\frac{132x^4y^3z^2}{117a^2b^3c^4} + \frac{96x^2y^3z^4}{104a^4b^3c^2}\right) : \frac{12x^3y^3z^3}{13a^3b^3c^3}$

20. a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$ b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{bc}}$ c) $\dfrac{\frac{x^2}{y}}{\frac{x}{y^2}}$ d) $\dfrac{\frac{6x}{uv}}{\frac{8xv}{u}}$ e) $\dfrac{\frac{a}{x-y}}{\frac{a}{x+y}}$ f) $\dfrac{\frac{ab}{x-y}}{\frac{b^2}{x^2-y^2}}$

g) $\dfrac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}}$ h) $\dfrac{\frac{36}{x^2}}{\frac{24}{xy}}$ i) $\dfrac{\frac{w}{u} - \frac{v}{u}}{\frac{1}{u^2}}$ k) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ l) $\dfrac{a + \frac{1}{b}}{a - \frac{1}{b}}$ m) $\dfrac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

16. Gleichungen mit Brüchen

Rechne $\frac{5}{8} \cdot 8$; $\frac{7}{12} \cdot 12$; $\frac{3}{4} \cdot 4$; $\frac{5}{x} \cdot x$; $\frac{4}{5x} \cdot 5x$!

Man erkennt: Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man als Produkt den Z ä h l e r des Bruches.
Diese Erkenntnis benutzen wir zum Lösen von Gleichungen mit Brüchen. Bei diesen Gleichungen kommt es darauf an, die Brüche vor dem Ordnen zu beseitigen.
Es soll die Gleichung gelöst werden

$$\frac{x-13}{3} = \frac{x+7}{8}.$$

Mit welcher Zahl muß man die Gleichung multiplizieren, damit die linke Seite ganzzahlig wird; mit welcher Zahl, damit außerdem der Nenner auf der rechten Seite fortfällt?

In Gleichungen werden die Brüche dadurch beseitigt, daß man die Gleichung mit dem Hauptnenner der Brüche multipliziert.

Beispiele:

1. $$\frac{x-13}{3} = \frac{x+7}{8}$$

Der Hauptnenner ist 24.

Beseitigung der Nenner .... $8(x-13) = 3(x+7)$

Auflösen der Klammern .... $8x - 104 = 3x + 21$

Ordnen .... $8x - 3x = 21 + 104$

Zusammenfassen .... $5x = 125$

Teilen durch den Koeffizienten von x .... $\underline{\underline{x = 25}}$

Mache die Probe!

2. $$\frac{16}{3(x+1)} = \frac{7}{9}$$

Der Hauptnenner ist $9(x+1)$.

Beseitigung der Nenner .... $48 = 7(x+1)$

Division durch 7 .... $\frac{48}{7} = x + 1$

Ordnen mit Vertauschung der Seiten .... $x = \frac{48}{7} - 1$

$$= 6\frac{6}{7} - 1$$

$$\underline{\underline{x = 5\frac{6}{7}}}$$

Mache die Probe!

Aufgaben

1. a) $\frac{x}{7} = 2$ **b)** $\frac{3x}{4} = 6$ **c)** $\frac{5x}{2} = 7$ **d)** $\frac{x}{3} + x = 8$

e) $\frac{x}{5} - 3 = 1$ **f)** $\frac{x}{2} + 5 = x$ **g)** $\frac{x}{3} + \frac{x}{8} = 11$ **h)** $\frac{x}{4} - \frac{x}{9} = 10$

2. a) $\frac{4}{x} = 2$ **b)** $\frac{5}{x} = 4$ **c)** $\frac{12}{x} + 1 = 3$ **d)** $\frac{18}{x} - 3 = 5$

e) $\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = 1$ **f)** $\frac{8}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{11}{6}$ **g)** $\frac{10}{3x} + \frac{8}{5x} - \frac{7}{15} = 2$

3. a) $\frac{3x}{8} + \frac{2x}{5} = 3\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{5x}{6} - \frac{4x}{9} = 2\frac{1}{3}$

c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 3$ **d)** $\frac{5x}{4} + \frac{3}{2} - \frac{2x}{5} = x$

e) $\frac{8x}{15} - \frac{4x}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - \frac{5x}{12} - 76$

4. a) $\frac{6}{x} - \frac{9}{2x} + \frac{5}{3x} = \frac{7}{5x} + \frac{53}{60}$ **b)** $\frac{5}{x} - \frac{7}{3x} = \frac{25}{7x} - \frac{17}{21x} - \frac{2}{63}$

c) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{9} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18} - \frac{x}{3} + \frac{x}{12} = 8$

5. a) $\frac{2x-41}{9}+\frac{x-4}{5}=9$ **b)** $\frac{6x+7}{7}-\frac{5x-3}{8}=3$

c) $\frac{6x+3}{11}=10-\frac{3x-1}{2}$ **d)** $\frac{5-7x}{13}-4x=\frac{66-5x}{9}+5$

6. a) $\frac{x-8}{4}+\frac{5x-3}{6}=\frac{3x-5}{12}$ **b)** $\frac{x-7}{5}-\frac{x-2}{15}=\frac{x-8}{6}-\frac{x-29}{3}$

c) $\frac{x+3}{5}-\frac{x-1}{8}=\frac{3x-2}{7}-5$ **d)** $\frac{x-4}{5}+\frac{x+4}{7}=\frac{2x-3}{9}-\frac{3x+21}{5}$

7. a) $\frac{15-3x}{4}-\frac{x-3}{6}=\frac{4x-7}{9}-\frac{3x-7}{12}$

b) $\frac{4(23-2x)}{5}-\frac{5(11x+1)}{9}=\frac{2(5x-2)}{9}-17$

c) $4+\frac{3(x-12)}{4}=\frac{2(x-9)}{3}-\frac{x-6}{6}+\frac{x+9}{5}$

d) $\frac{3(3x+5)}{5}-\frac{2(4x-7)}{15}=\frac{5x+19}{12}-\frac{5(6x-19)}{4}+3x$

8. a) $\frac{5x+7}{8x+4}=\frac{7}{10}$ **b)** $\frac{9x+4}{8x+7}=\frac{8}{5}$ **c)** $\frac{13x+3}{7x+1}=\frac{15}{8}$

d) $\frac{25-x}{x-3}=\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{32x-27}{5x+3}=\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{17x+2}{23x+8}=\frac{18}{19}$

9. a) $\frac{10}{3x-2}=\frac{6}{2x-3}$ **b)** $\frac{16}{3x-4}=\frac{22}{2x+3}$ **c)** $\frac{21}{3x-1}=\frac{14}{3x+1}$

d) $\frac{180}{x+4}=\frac{240}{3x-3}$ **e)** $\frac{150}{x-4}=\frac{225}{x+4}$ **f)** $\frac{224}{5x+2}=\frac{105}{3x-3}$

10. a) $\frac{x+5}{x+1}=\frac{x+2}{x-1}$ **b)** $\frac{x-6}{2x-3}=\frac{x-2}{2x+9}$ **c)** $\frac{x+7}{2x+6}=\frac{2x+8}{4x+1}$

d) $\frac{3x-5}{7-4x}=\frac{6x-11}{15-8x}$ **e)** $\frac{6x-36}{2x-11}=\frac{3x-14}{x-4}$ **f)** $\frac{x-10}{x}=\frac{x-5}{x-4}$

11. a) $\frac{12x+3}{5x-3}=\frac{24x-9}{10x-11}$ **b)** $\frac{x+20}{46-x}=\frac{x+2}{20-x}$ **c)** $\frac{3(x-2)}{x+2}=\frac{6x-1}{2x+1}$

d) $\frac{7x+5}{x+5}+\frac{3x+2}{x-6}=10$ **e)** $\frac{4x-7}{2x-5}-\frac{3x-5}{3x+4}=1$ **f)** $\frac{x+3}{x+4}=\frac{2x+1}{2(x+1)}$

12. a) $\frac{x}{a}=b$ **b)** $\frac{a}{x}=b$ **c)** $\frac{x}{a}-b=c$ **d)** $a-\frac{x}{b}=c$

e) $\frac{a}{x}-b=c$ **f)** $a-\frac{b}{x}=c$ **g)** $a-\frac{2a}{x}=b$ **h)** $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=c$

13. a) $\frac{4a}{3a-x}=5$ **b)** $\frac{8b}{2x-b}=\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3c-x}{x+5c}=2{,}5$

d) $\frac{x}{p}-\frac{x}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ **e)** $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=m+n$ **f)** $\frac{x}{r}-r=\frac{x}{s}-s$

g) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **h)** $\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}=0$ **i)** $\frac{5(x-a)}{x+a}=1$

14. Um welchen gleichen Betrag muß man Zähler und Nenner von $\frac{21}{35}$ vermehren, damit der Bruch den Wert $\frac{3}{4}$ annimmt?

15. Ein Bruch mit dem Wert $\frac{4}{5}$ geht dadurch in seinen Kehrwert über, daß man den Zähler um 18 vermehrt. Wie heißt er?

17. Anwendungen der Bruchgleichungen

Beispiel: Wieviel Minuten nach 2 Uhr stehen die Zeiger einer Uhr genau übereinander?

1. Vorläufige Antwort: Die Zeiger stehen x Minuten nach 2 Uhr übereinander.

2. Bilden der Gleichung: Um 2 Uhr bilden die beiden Zeiger der Uhr einen Winkel von 60°. Der große Zeiger legt am Ziffernblatt in einer Minute 6°, der kleine Zeiger in einer Minute $\frac{1}{2}°$ zurück. Nach x Minuten steht der große Zeiger um $6° \cdot x$ von der 12 entfernt, der kleine Zeiger aber um $60° + \frac{1}{2}° \cdot x$. Da sich die Zeiger nach x Minuten decken sollen, müssen beide Winkel gleich sein, also $6° \cdot x = 60° + \frac{1}{2}° \cdot x$.

3. Lösen der Gleichung:

$$5\tfrac{1}{2}° \cdot x = 60°$$

$$x = \frac{60° \cdot 2}{11}$$

$$x = 10\frac{10}{11}.$$

4. Endgültige Antwort: Die Zeiger stehen $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr übereinander.

5. Probe: $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr steht der große Zeiger um $6° \cdot 10\frac{10}{11} = 65\frac{5}{11}°$ von 12 entfernt, der kleine Zeiger um $60° + \frac{1}{2}° \cdot 10\frac{10}{11} = 65\frac{5}{11}°$; also decken die Zeiger einander.

Aufgaben

Uhrenaufgaben

1. Wieviel Minuten nach **a)** 1, **b)** 3, **c)** 5, **d)** 8, **e)** 10 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr zum erstenmal übereinander?

2. Wieviel Minuten nach **a)** 12, **b)** 3, **c)** 8, **d)** 6, **e)** 11 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr zum erstenmal einen gestreckten Winkel?

3. Wieviel Minuten nach **a)** 2, **b)** 4, **c)** 7, **d)** 8, **e)** 10 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr zum erstenmal einen rechten Winkel?

Bewegungsaufgaben

4. Zwei Radfahrer fuhren sich von Berlin und Leipzig aus entgegen. Wann trafen sie sich, wenn der erste 14 und der andere $18\frac{2}{3}$ Std. Fahrzeit für die ganze Strecke nötig hatte und beide um 5^{00} abfuhren?

5. Ein Kraftpostwagen, der auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 63 km/h fährt, wird von einem Personenkraftwagen, der 30 Min. später abgefahren war und eine Geschwindigkeit von 98 km/h hat, überholt. In welcher Entfernung vom Abfahrtsort treffen die Wagen zusammen?

6. Ein Lastkraftwagen wird 1 Std. und 25 Min. nach seinem Aufbruch von einem Personenkraftwagen eingeholt, der 30 Min. später vom gleichen Ort abfuhr, aber 18 km/h schneller fährt.

a) Welche Geschwindigkeit haben beide Wagen?

b) Welche Wegstrecke durchfuhren sie?

Verschiedenes

7. Ein Schwimmbecken wird durch zwei Röhren gefüllt. Die eine Röhre füllt das Becken allein in 8 Stunden, die andere in 12 Stunden. In wieviel Stunden ist das leere Becken gefüllt, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

8. Zum Füllen eines Wasserbehälters dienen 3 Röhren. Die eine Röhre füllt den Behälter allein in 45, die zweite in 36 und die dritte in 60 Minuten. In wieviel Minuten füllen die 3 Röhren gemeinsam den Behälter?

9. Ein Mann gräbt einen Garten in 12 Tagen um; eine Frau braucht zu derselben Arbeit 18 Tage. In wieviel Tagen graben beide gemeinsam den Garten um?

10. Ein Mäher mäht eine Wiese in 16 Stunden; ein anderer würde zum Mähen dieser Wiese 12 Stunden nötig haben. In wieviel Stunden schaffen beide gemeinsam die Arbeit?

18. Gleichungen aus der Prozentrechnung

Für die Preise und Kosten einer Ware bestehen folgende Gleichungen:

Einkaufspreis + Bezugsspesen	= Einstandspreis
Einstandspreis + Verwaltungskosten	= Selbstkostenpreis
Selbstkostenpreis + Gewinn	= Nettoverkaufspreis
Nettoverkaufspreis + Verkaufsabschläge	= Bruttoverkaufspreis.

Beispiel: Der Einstandspreis für eine Werkzeugmaschine beträgt 2600,– DM. In diesem Preis sind 6 % Bezugsspesen eingerechnet. Wie hoch ist der Einkaufspreis?

Vorläufige Antwort: Der Einkaufspreis beträgt x DM.

Bilden der Gleichung: Die Bezugsspesen werden vom Einkaufspreis als dem Grundwert berechnet. 1 % des Einkaufspreises beträgt $\frac{x}{100}$ DM, 6 % betragen dann $\frac{6x}{100}$ DM. Der Einstandspreis, in x ausgedrückt, beträgt dann x DM $+ \frac{6x}{100}$ DM, das sind nach der Angabe der Aufgabe 2 600 DM. Die Gleichung lautet also

$$x + \frac{6x}{100} = 2\,600.$$

Löse die Gleichung und mache die Probe!

Aufgaben

1. Der Einstandspreis einer Sendung Möbel beträgt 4 620,– DM. Die Bezugskosten belaufen sich auf 7%. Wie groß ist der Einkaufspreis?

2. Der Selbstkostenpreis einer Sendung Lebensmittel beträgt 1 164,– DM. In diesem Preis ist ein Verwaltungskostenanteil von 12% einbezogen. Dieser Verwaltungskostenanteil wird in einem Prozentsatz des Einstandspreises zugeschlagen (Einstandspreis = Grundwert).

a) Wie groß ist der Einstandspreis?

b) Wie groß war der Einkaufspreis für diese Sendung, wenn mit 5% Bezugsspesen zu rechnen war?

c) Versuche in einer einzigen Gleichung vom Selbstkostenpreis zum Einkaufspreis zu kommen!

3. Der Nettoverkaufspreis eines Postens Haushaltgeräte beträgt 963,– DM. Der Gewinn wird in einem Prozentsatz dem Selbstkostenpreis zugeschlagen.

a) Wie groß ist der Selbstkostenpreis, wenn mit 5% Gewinn gerechnet wird?

b) Wie groß ist der Einstandspreis, wenn der Verwaltungskostenanteil 10% des Einstandspreises beträgt?

c) Wie groß ist der Einkaufspreis, wenn die Bezugsspesen 4% desselben ausmachen?

d) Versuche in einer einzigen Gleichung vom Nettoverkaufspreis zum Einkaufspreis zu kommen!

e) Ermittle die sog. Handelsspanne, das ist der Prozentsatz, der vom Nettoverkaufspreis unmittelbar zum Einstandspreis rückführt!

f) Wie groß ist der Kalkulationszuschlag, das ist der Prozentsatz, der es erlaubt, vom Einstandspreis unmittelbar zum Nettoverkaufspreis zu gelangen?

4. Beim Verkauf einer Ware im Einzelhandel müssen 3% Umsatzsteuer einkalkuliert werden, die von dem Betrage zu errechnen ist, den der Käufer zu zahlen hat.

   Ein Wohnzimmer soll zu einem Nettoverkaufspreis von 840,– DM verkauft werden. Wie groß sind
   a) der Bruttoverkaufspreis (3% Umsatzsteuer),
   b) der Selbstkostenpreis (7% Gewinn),
   c) der Einstandspreis (12% Verwaltungskosten),
   d) der Einkaufspreis (4% Bezugsspesen)?

5. Zwei Posten Ware haben zusammen einen Einkaufspreis von 322,– DM; der erste Posten ist um 30% teurer als der zweite. Wieviel DM kostet jeder Posten?

6. Ein Geschäft verkauft an 4 aufeinanderfolgenden Tagen 50%, 25%, $12\frac{1}{2}$% und $6\frac{1}{4}$% des Vorrates an Taschenlampenbatterien und behält noch einen Rest von 15 Batterien. Berechne den Vorrat und die Zahl der an den einzelnen Tagen verkauften Batterien!

7. Die Neustädter Konsumgenossenschaft erwirbt 2 Lieferwagen für zusammen 9 660,– DM. Der erste ist um 16% billiger als der zweite. Wieviel DM kostet jeder Wagen?

8. Zwei Rechnungen über gelieferte Waren lauten zusammen über 820 DM. Da die Rechnungen sofort nach Empfang der Ware beglichen werden, zieht man von der ersten Rechnung 2% und von der zweiten Rechnung 3% Skonto[1]) ab. Der Gesamtabzug beträgt 21,60 DM. Auf welchen Betrag lautet jede der beiden Rechnungen?

9. Ein Kaufmann bezieht 2 Posten Eisenwaren, deren Rechnungen über 280,– DM und 345,– DM lauten. Auf diese Beträge wird ihm Rabatt[2]) eingeräumt, so daß er zusammen nur 604,20 DM zu zahlen hat. Wieviel Prozent Rabatt hat er von jedem Posten abgezogen, wenn er vom zweiten Betrag $1\frac{1}{2}$% Rabatt mehr berechnet?

VI. Verhältnisgleichungen

19. Der Verhältnisbegriff

Ein Fußgänger legt durchschnittlich 5 km, ein Radfahrer 12 km in der Stunde zurück. Man kann die beiden Geschwindigkeiten miteinander vergleichen, indem man z. B. feststellt, daß der Radfahrer in 1 Std. 7 km mehr zurücklegt als der Fußgänger. Die beiden Geschwindigkeiten können aber

1) Skonto = Abzug wegen vorzeitiger Zahlung.
2) Rabatt = Abschlag.

auch dadurch miteinander verglichen werden, daß man sie in ein **Verhältnis** zueinander setzt. Man sagt dann: Die Geschwindigkeiten des Fußgängers und des Radfahrers verhalten sich wie 5 : 12.
Das Verhältnis der Geschwindigkeiten eines Radfahrers und eines Motorradfahrers ist 12 : 57. Was bedeutet das? Das Verhältnis 12 : 57 kann auch dargestellt werden durch 4 : 19. Gib an, welche Überlegung zu dieser Umformung des ursprünglichen Verhältnisses 12 : 57 geführt hat!

Erklärungen:

Jedes Verhältnis besteht aus **zwei Gliedern.** Man nennt sie erstes und zweites Glied oder Vorder- und Hinterglied.
Das Verhältnis zweier Zahlen läßt sich als Bruch darstellen. Zähler und Nenner des Bruches heißen in diesem Fall Glieder des Verhältnisses.

Der Wert eines Verhältnisses bleibt unverändert, wenn man seine Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiele: 1. $3 : 4 = 9 : 12$
2. $20 : 15 = 4 : 3$

Aufgaben

Welchen Wert haben folgende Verhältnisse:

1. **a)** 12 : 18 **b)** 15 : 20 **c)** 27 : 36 **d)** 4 : 28
e) 39 : 52 **f)** 132 : 156 **g)** 225 : 300 **h)** 42 : 168
i) 77 : 99 **k)** 45 : 75 **l)** 36 : 180 **m)** 45 : 81

2. **a)** $4a : 7a$ **b)** $6x : 18x$ **c)** $8c : 16c$
d) $25a : 75a$ **e)** $12xy : 48xy$ **f)** $14e : 49e$
g) $16e : 28f$ **h)** $0{,}5 : 2{,}5$ **i)** $3{,}5 : 2{,}8$
k) $14{,}4a : 4{,}8b$ **l)** $6{,}5x : 1{,}3y$ **m)** $7{,}2xy : 3{,}2x^2y$

3. **a)** 32 m : 48 m **b)** 18 DM : 81 DM **c)** 39 km : 91 km
d) 135 kg : 45 kg **e)** 26 DM : 39 DM **f)** 66 m : 22 m
g) 96 hl : 168 hl **h)** 35 DM : 21 DM **i)** 25 kg : 325 kg?

4. Bilde ein Verhältnis aus den Größen:
a) 6 m und 12 cm **b)** 48 Dpf und 2,40 DM **c)** 32 Tg. und 24 Std.
d) 95 a und 5 ha **e)** 17 cm und 5 m **f)** 9 Dtzd. und 11 Stck.!

5. Drücke folgende Verhältnisse durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:
a) 36 : 27 **b)** 39 : 26 **c)** 48 : 36
d) 77 : 55 **e)** 81 : 36 **f)** 169 : 91
g) 216 : 132 **h)** 72 : 45 **i)** 108 : 144!

6. Erweitere folgende Verhältnisse mit 2 (4; 12; 15):

a) $6 : 7$ **b)** $6 : 37$ **c)** $19 : 14$
d) $121 : 15$ **e)** $8 : 15$ **f)** $46 : 3$
g) $9 : 11$ **h)** $125 : 126$ **i)** $37 : 121$!

7. Drücke folgende Verhältnisse in kleinsten ganzen Zahlen aus:

a) $\frac{5}{12} : \frac{7}{12}$ **b)** $\frac{4}{11} : \frac{10}{11}$ **c)** $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$
e) $\frac{5}{8} : \frac{5}{12}$ **f)** $\frac{5}{6} : \frac{4}{9}$ **g)** $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ **h)** $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$
i) $2\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$ **k)** $\frac{3}{4} : 4\frac{1}{2}$ **l)** $3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{8}$ **m)** $3{,}2 : 4{,}8$!

20. Verhältnisgleichungen

Welchen Wert haben die Verhältnisse $3 : 6$ und $4 : 8$? Wenn zwei Verhältnisse denselben Wert haben, so kann man sie (als Gleichung) einander gleichsetzen, z. B. $3 : 6 = 4 : 8$. In allgemeinen Zahlen:

$$a : b = c : d$$

Man kann die Gleichung $2 : 5 = 6 : x$ nach x auflösen, wenn man sie als Quotientengleichung (Bruchgleichung) $\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$ schreibt. Man rechnet und erhält aus der Produktengleichung:

$$2x = 5 \cdot 6$$

$$x = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$x = 15$$

Erklärung:

Setzt man zwei Verhältnisse mit demselben Wert einander gleich, so entsteht eine **Verhältnisgleichung** (Proportion).

Werden mehr als zwei Verhältnisse mit demselben Wert durch Gleichheitszeichen miteinander verbunden, z. B. $4 : 5 = 8 : 10 = 12 : 15$, so pflegt man das in der Form $4 : 8 : 12 = 5 : 10 : 15$ zusammenzufassen. Eine solche Gleichung nennt man eine **fortlaufende Proportion.** Sind die Innen- oder Außenglieder einer Proportion einander gleich (z. B. $4 : 8 = 8 : 16$), so bezeichnet man die gleichen Innen- oder Außenglieder als **mittlere Proportionale.**

1. Verhältnisgleichungen werden als Bruchgleichungen behandelt.
2. In jeder Verhältnisgleichung ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Aufgaben

1. Bilde durch Vertauschen von Gliedern neue Verhältnisgleichungen aus:

a) $4 : 8 = 2 : 4$ **b)** $12 : 16 = 6 : 8$ **c)** $5 : 15 = 20 : 60$
d) $1 : 3 = 9 : 27$ **e)** $5 : 25 = 10 : 50$ **f)** $6a : 9b = 18a : 27b$
g) $a : b = c : d$ **h)** $5a : 3b = 60 : 4d$ **i)** $ab : c = e : fg$!

2. a) Wieviel viergliedrige Verhältnisgleichungen lassen sich aus der fortlaufenden Proportion $1 : 2 : 3 = 7 : 14 : 21$ bilden?

b) Bilde selbst dreiteilige, vierteilige, fünfteilige fortlaufende Proportionen! Man erhält die Glieder der rechten Seite, indem man alle Glieder der linken Seite mit demselben Faktor multipliziert.

c) Bilde fortlaufende Proportionen aus den folgenden gleichen Verhältnissen:

$$5 : 7; \quad 15 : 21; \quad 20 : 28; \qquad \frac{10}{15}; \quad \frac{14}{21}; \quad \frac{24}{36}; \quad \frac{32}{48}\,!$$

3. Schreibe als Bruchgleichung:

a) $15 : 45 = 20 : 60$ **b)** $6 : 9 = 18 : 27$ **c)** $5a : 3b = 6a : 7c$
d) $6{,}4 : a = 3{,}2 : b$ **e)** $25x : 3y = 7x : z$ **f)** $xy : z = 5a : b$!

4. Bilde die Produktengleichung:

a) $2 : 3 = 8 : 12$ **b)** $4 : 7 = 16 : 28$ **c)** $9 : 11 = 45 : 55$
d) $12 : 16 = 15 : 20$ **e)** $21 : 14 = 36 : 24$ **f)** $125 : 50 = 25 : 10$
g) $14a : 12b = 28a : 24b$ **h)** $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} : 1$
i) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = 1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2}$ **k)** $0{,}15 : 0{,}05 = 0{,}45 : 0{,}15$
l) $7a : 35e = 28a : 140e$ **m)** $11f : 3e = f : a$!

5. Bestimme die Unbekannte:

a) $3 : x = 6 : 12$ **b)** $8 : x = 16 : 48$ **c)** $x : 10 = 12 : 24$
d) $x : 9 = 11 : 33$ **e)** $x : 14 = 50 : 70$ **f)** $3 : 4 = 18 : x$
g) $26 : 32 = 52 : x$ **h)** $9 : 17 = x : 51$ **i)** $5 : 6 = x : 144$
k) $46 : 61 = x : 305$ **l)** $28 : 19 = 140 : x$ **m)** $x : 18 = 54 : 108$

6. a) $3 : 8 = x : 24$ **b)** $5 : 9 = 25 : x$ **c)** $1{,}5 : 7{,}5 = x : 30$
d) $x : 7 = 4 : 14$ **e)** $x : 10{,}5 = 7 : 21$ **f)** $0{,}3 : x = 1{,}8 : 9$
g) $2{,}7 : x = 8{,}1 : 24{,}3$ **h)** $a : b = x : c$
i) $x : a = b : c$ **k)** $m : n = o : x$
l) $p : x = g : r$ **m)** $x : f = s : t$!

7. Suche zu drei aufeinanderfolgenden Gliedern einer Verhältnisgleichung das vierte Glied (die 4. Proportionale):

a) 10, 12 und 6	**b)** 8, 12 und 32	**c)** 25, 30 und 50
d) 7, 14 „ 70	**e)** 21, 63 „ 42	**f)** 100, 50 „ 250
g) 28, 35 „ 70	**h)** 81, 45 „ 162	**i)** 49, 84 „ 70
k) 144, 60 „ 252	**l)** 180, 324 „ 120	**m)** 9,6, 13,2 und 13,6

8. **a)** $8 : 4 = (x - 16) : x$ **b)** $x : (105 - x) = 16 : 24$
c) $x : (x + 2) = 3 : 5$ **d)** $(x + 4) : x = 51 : 34$
e) $x : (x + 3) = 28 : 35$ **f)** $(x - 3) : x = 4 : 7$
g) $4 : 3 = (63 - x) : x$ **h)** $49 : 35 = x : (x - 12)$
i) $8 : 5 = (27 + x) : x$ **k)** $51 : 34 = x : (25 - x)$
l) $25 : 15 = (56 - 3x) : x$ **m)** $68 : 51 = (20 + 2x) : 4x$
n) $63 : 45 = (31 - 2x) : 3x$ **o)** $24 : 8 = (88 + 4x) : 5x$
p) $25 : 15 = (62 - 7x) : 2x$ **q)** $36 : 12 = (120 + 11x) : 7x$
r) $63 : (44 - x) = 91 : x$ **s)** $38 : x = 16 : (x - 33)$!

21. Textgleichungen

Aus 8 dz Leinsamen gewinnt man 95,2 l reines Öl. Wieviel l Öl gewinnt man aus 5 dz? Früher hast du solche Aufgaben durch einen Dreisatz gelöst, jetzt kannst du sie auch durch Aufstellen einer Verhältnisgleichung lösen. Die gewonnenen Mengen Öl stehen in demselben Verhältnis wie die Mengen des Leinsamens.

Wenn man die unbekannte Menge Öl mit x bezeichnet, so kann man folgende Verhältnisgleichung aufstellen:

$$8 : 5 = 95{,}2 : x \quad \text{oder in Bruchform:} \quad \frac{8}{5} = \frac{95{,}2}{x}.$$

Vergleiche die Brüche mit den Zahlen des Ansatzes! Was ergibt sich also?

8 Schüler graben ein Beet des Schulgartens in $2\frac{1}{2}$ Std. um. In wieviel Std. haben 5 Schüler die Arbeit geschafft? Die Arbeitszeiten stehen im umgekehrten Verhältnis wie die Zahlen der Schüler, also $8 : 5 = x : 2\frac{1}{2}$ oder in Bruchform $\frac{8}{5} = \frac{x}{2\frac{1}{2}}$.

Der Ansatz der Aufgabe heißt:

8 Schüler graben $2\frac{1}{2}$ Std.
5 „ „ x „

Daraus folgt die Verhältnisgleichung

Aufgaben

Aus dem kaufmännischen und gewerblichen Leben

1. Kaufmann Schmidt zahlt für 72 Flaschen Aroma 330,40 DM. Wieviel DM hat er für eine Sendung von 96 (45, 126) Flaschen Aroma zu zahlen?

2. Schlächtermeister Weber zahlt für ein Schwein von 180 kg Lebendgewicht 144 DM. Wieviel DM muß er für ein Schwein von 225 kg Lebendgewicht zahlen?

3. An einem Unternehmen sind zwei Kaufleute mit 18 000 DM bzw. 24 000 DM beteiligt. Verteile den Reinertrag in Höhe von 9 800 DM im Verhältnis der Einlagen!

4. Bäckermeister B. hat sich ein Grundstück von 900 m² für 4 050 DM gekauft. Es bietet sich ihm Gelegenheit, sein Grundstück durch Zukauf von weiteren 150 m² zu vergrößern. Wieviel DM hat er für das neue Stück zu zahlen?

5. In einem Betrieb erhalten 3 Angestellte, die gleiche Gehälter beziehen. 735,— DM. Es soll ein weiterer Mitarbeiter angestellt werden, der 30,— DM weniger erhält als jeder der drei übrigen. Wieviel DM Gehalt sind insgesamt zu zahlen?

6. 6 Schlossergesellen erhalten (bei gleichem Stundenlohn und gleicher Arbeitszeit) zusammen wöchentlich 345,60 DM Lohn.
   a) Wieviel DM sind an 11 Schlossergesellen zu zahlen?
   b) Wie groß ist der Stundenlohn, wenn die wöchentliche Arbeitszeit 48 Stunden beträgt?

7. Aus 12 kg Hanf kann ein Seil von 316,8 m Länge hergestellt werden. Wieviel m Seil von gleicher Stärke erhält man aus 35 kg Hanf?

8. 12 Arbeiter werfen einen Graben in 20 Tagen aus. In wieviel Tagen werden 15 (8; 10) Arbeiter mit der Arbeit fertig?

9. 6 Bauarbeiter werfen bei 8stündiger Arbeitszeit eine Baugrube in $7\frac{1}{2}$ Tagen aus. In wieviel Tagen werden 4 Arbeiter bei 10stündiger Arbeitszeit mit dieser Arbeit fertig?

10. Die Hallische Sole ist 21,6 %ig. Wieviel kg Salz gewinnt man aus 4 250 (7 800; 12 500) kg dieser Sole?

11. Der „Kalkulationszuschlag“ für einen Bücherschrank beträgt $16\frac{2}{3}$ %. Wie hoch ist der Einstandspreis des Schrankes, wenn der Nettoverkaufspreis 420,– DM beträgt?

12. Der Rechnungsbetrag für eine Warensendung lautet über 240 DM. Wieviel DM sind bei $2\frac{1}{2}\%$ Skonto sofort zu zahlen?

13. Das Bruttogewicht einer Warensendung beträgt 180 kg, das Nettogewicht • 174,6 kg. Wieviel % beträgt die Tara?

Verkehr

14. Ein Radfahrer legt eine Wegstrecke in 3 Std. zurück. Wie lange braucht ein Autofahrer für die gleiche Strecke, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 1 : 4 verhalten?

15. Ein D-Zug erreicht bei einer Geschwindigkeit von 84 km/h sein Ziel in $4\frac{1}{2}$ Std. Wie lange braucht ein Personenzug zu derselben Strecke, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 3 : 5 verhalten?

16. Mit seinem Auto erreicht A. ein 300 km entferntes Ziel am Tage in 6 Std. Die Geschwindigkeit bei der Rückfahrt während der Nacht verhält sich zur Geschwindigkeit bei der Hinfahrt wie 4 : 5. Wie lange dauert die Rückfahrt?

17. Für einen Straßenbau werden die Kosten in Höhe von 178 360 DM von zwei Gemeinden mit 2 450 und 3 920 Einwohnern im Verhältnis ihrer Einwohnerzahl aufgebracht.

18. Ein Fußgänger und ein Radler verlassen zu gleicher Zeit Neustadt. Ihre Geschwindigkeiten verhalten sich wie 1 : 3. Der Fußgänger legt stündlich 4,5 km zurück. Wie groß ist der Vorsprung des Radfahrers nach $3\frac{1}{2}$ Std.?

Einfache Maschinen

19. Durch einen 2 m langen Hebebaum soll ein Bücherschrank, der 100 kg wiegt, gehoben werden. Der Lastarm sei 20 cm lang. Wieviel kg Kraft sind erforderlich, wenn der Hebebaum **a)** als zweiseitiger, **b)** als einseitiger Hebel gebraucht wird, und die Kraft jedesmal am Ende wirkt?

20. Der Hebel eines Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kg befestigt. Wie groß ist der Druck auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

21. Zwei Personen tragen an einer Stange einen Korb von 1 dz Gewicht so, daß der Stangenanteil des Stärkeren $\frac{2}{5}$ der ganzen Stangenlänge beträgt. Wieviel kg hat jeder zu tragen, wenn das Gewicht der Stange unberücksichtigt bleibt?

22. Auf einer Wippe sitzt 2 m vom Drehpunkt entfernt ein Junge, dessen Gewicht 48 kg beträgt. Auf der anderen Seite, 2,40 m vom Drehpunkt entfernt, sitzt seine Schwester. Wieviel wiegt sie, wenn die Wippe im Gleichgewicht ist?

23. Zwei Jungen, von denen der eine 52 kg, der andere 39 kg wiegt, legen ein Brett über einen Balken, um es als Wippe zu benutzen. Der schwerere Junge sitzt 1,50 m vom Balken entfernt. In welche Entfernung vom Balken muß sich der andere Junge setzen, wenn die Wippe im Gleichgewicht sein soll?

24. Wieviel Kraft wird gebraucht und welchen Weg legt sie zurück, wenn 120 kg 1 m hoch gehoben werden? Es werden angewandt **a)** ein gleicharmiger Hebel, **b)** ein ungleicharmiger Hebel, dessen Kraftarm dreimal so lang wie der Lastarm ist, **c)** ein einseitiger Hebel, dessen Kraftarm sechsmal so lang wie der Lastarm ist, **d)** eine feste Rolle, **e)** eine lose Rolle.

VII. Funktion und graphische Darstellung

22. Bildliche Darstellung von Beobachtungsreihen

Die Eltern eines Jungen haben seine Körperlänge an jedem Geburtstag aufgeschrieben. Es ergab sich die folgende Zusammenstellung:

Lebensalter in Jahren:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Länge in cm:	75	85	93	97	103	111	121	125	128	130	135	140

Stelle die Längen durch Strecken in $\frac{1}{20}$ der natürlichen Größe dar! Zeichne diese Strecken in gleichen Abständen als Senkrechte auf einer waagerechten Geraden nebeneinander und schreibe unter jede Strecke das zugehörige Lebensalter! Vergleiche die Übersichtlichkeit der Zeichnung mit derjenigen der Tafel!

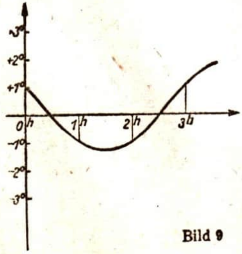


Bild 9

Denke dir die Länge des Jungen auch für alle zwischen den Geburtstagen liegenden Tage aufgetragen! Wo sind diese Senkrechten zu zeichnen?

Zeichne die Linie, die die Endpunkte aller dieser Senkrechten verbinden würde! Lies an der so gewonnenen „Schaulinie“

die Größe des Jungen ab für das Alter von $1\frac{1}{2}$ Jahren, $7\frac{1}{3}$ Jahren, 5 Jahren und 5 Monaten!

Zeitlich veränderliche Vorgänge können durch eine Schaulinie dargestellt werden. Zu diesem Zweck bringt man auf einer waagerechten Geraden den Zeitpunkt der Beobachtung an und zeichnet in diesem Punkt eine zur waagerechten Geraden senkrechte Strecke, deren Länge der beobachteten Größe entspricht (Bild 9). Die Verbindungslinie der Endpunkte aller dieser Strecken liefert ein Schaubild der Beobachtungsreihe.

Aufgaben

1. An einem Novembertag wurde die Lufttemperatur alle zwei Stunden am Thermometer abgelesen und folgende Tafel aufgestellt:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatur	6,2°	4,4°	4,0°	5,8°	8,0°	10,4°	11,8°	12,8°	11,4°	9,6°	8,4°	7,8°	7,0°

a) Zeichne auf Millimeterpapier von einem Punkt aus eine waagerechte Zeitachse und eine senkrechte Temperaturachse (1 cm $\widehat{=}$ 2 Std., 1 cm $\widehat{=}$ 2°)! Bestimme die Endpunkte der Temperaturstrecken, die zu den angegebenen Zeiten gehören, ohne die Strecken selbst zu ziehen! Verbinde die Endpunkte geradlinig miteinander!

b) Lege in einer zweiten Zeichnung durch die Endpunkte freihändig eine krumme Linie (Temperaturkurve)[1])! Warum gibt diese Kurve den wirklichen Temperaturverlauf besser wieder als der Streckenzug?

c) Lies von der erhaltenen Temperaturkurve ab, welche Temperatur um 1, 3, 5 . . .; 0,30, 1,30, 2,30 . . . Uhr war! Wann zeigte das Thermometer an diesem Tage 8°, 10°, 12°?

2. In Mitteldeutschland betrugen die Niederschläge eines Jahres: im Januar 43,6 mm; im Februar 39,7 mm; im März 54,2 mm; im April 41,1 mm; im Mai 60,9 mm; im Juni 37 mm; im Juli 54,4 mm; im August 21,2 mm; im September 31,9 mm; im Oktober 62,5 mm; im November 52,9 mm; im Dezember 9,3 mm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche monatliche Niederschlagsmenge?

b) Gib den Unterschied zwischen der größten und geringsten Niederschlagsmenge, die Schwankungsbreite, in % der durchschnittlichen monatlichen Niederschlagsmenge an!

1) linea curva (lat.) = die gekrümmte Linie.

2. c) Berechne die durchschnittliche monatliche Abweichung vom Monatsmittel in % des Monatsmittels!

d) Zeichne die Niederschlagskurve!

3. Die folgende Tafel gibt Aufschluß über die Zahl der Gewittertage in einer Stadt Norddeutschlands während der Jahre 1887 bis 1919.

Jahre	Gewittertage	Jahre	Gewittertage	Jahre	Gewittertage
1887	12	1898	13	1909	19
1888	14	1899	19	1910	28
1889	19	1900	15	1911	13
1890	26	1901	19	1912	22
1891	27	1902	15	1913	15
1892	18	1903	13	1914	18
1893	18	1904	17	1915	17
1894	21	1905	18	1916	9
1895	33	1906	12	1917	13
1896	23	1907	17	1918	20
1897	13	1908	37	1919	7

a) Wieviel Gewittertage kommen im Durchschnitt auf ein Jahr?

b) Zeichne die Kurve der Gewittertage!

c) Gib die Schwankungsbreite in % des nach Aufgabe a) errechneten Jahresdurchschnitts an!

d) Berechne die durchschnittliche jährliche Abweichung vom nach Aufgabe a) ermittelten Durchschnitt in % dieses Durchschnitts!

4. Aus Bild 10 ist die durchschnittliche monatliche Temperatur für Dresden abzulesen.

a) Wie groß ist die Schwankungsbreite der Temperaturkurve?

b) Berechne die durchschnittliche Jahrestemperatur und die Abweichungen der Monatstemperatur in % der durchschnittlichen Jahrestemperatur!

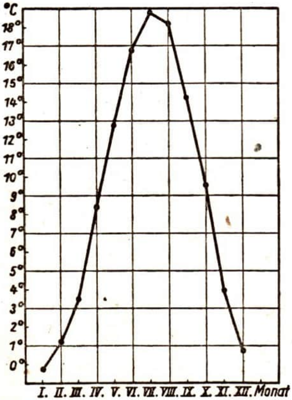


Bild 10

5. Bild 11 zeigt einen Ausschnitt aus der Fieberkurve eines Typhuskranken. Das Fieber wurde täglich zweimal, morgens und abends, mitunter auch dreimal, gemessen.

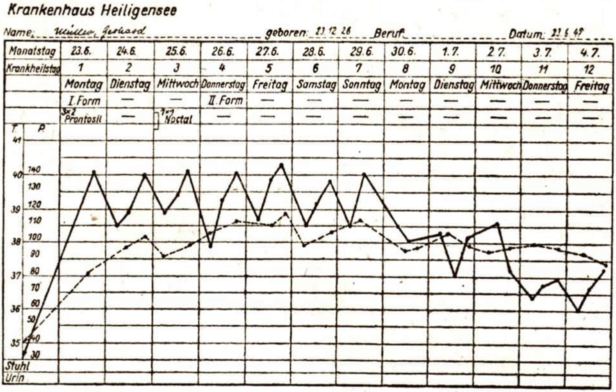


Bild 11

a) Welche Bedeutung kommt der Fieberkurve zu?

b) Entnimm der Fieberkurve, wie hoch das Fieber an jedem Krankheitstag war, und stelle eine Zahlentafel folgendermaßen auf:

Krankheitstag			
morgens mittags abends			

c) Wie groß ist die tägliche Steigerung und die Schwankung von Tag zu Tag, die aus den Abendtemperaturen abgelesen werden?

d) Entnimm der gestrichelten Pulsschlagkurve, wie hoch der Puls an jedem Krankheitstag war!

e) Welches ist die höchste und welches ist die tiefste Zahl der gemessenen Pulsschläge, und am wievielten Krankheitstage treten sie auf?

6. Bei einem anderen Typhuskranken wurden von Beginn der Krankheit an folgende Körpertemperaturen zweimal täglich gemessen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
morgens	38,2	38,4	37,2	38,6	38,8	38,1	37,4	36,8	37,2	37,5	37,2	36,9
abends	39,3	39,1	38,9	39,7	40,1	39,5	39,1	39,4	39,5	39,2	39,0	38,2

Zeichne die Kurve der Körpertemperaturen! Vergleiche Bild 11!

7. Veranschauliche durch eine Kurve das Wachsen eines Roggenhalmes, wie es Anfang Mai beobachtet wurde!

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Höhe des Sprosses (in cm)	12,2	14,3	15,6	18,1	20,4	23,2	26,6	29,8	31,4	34,0	37,2	40,5

(1 cm der Zeichnung $\triangleq$ 1 Tag, 0,3 cm $\triangleq$ 1 cm Wachstum; wähle auf dem senkrechten Zahlenstrahl 10 cm Sproßhöhe als Ausgangspunkt!)

23. Funktionen

Wie groß ist a) der Umfang u und b) der Flächeninhalt y eines Quadrats mit der Seite $x = 1; 2; 3; 4; 5$ cm?

Wie berechnet man die Werte von u und y aus den zugehörigen Werten von x? Stelle die Werte übersichtlich in einer „Wertetafel" zusammen und zeichne die Schaulinien!

1. Hängt eine veränderliche Größe y von einer anderen Größe x so ab, daß zu jedem Wert von x ein Wert von y gehört, dann nennt man y eine **Funktion** von x.
2. Die Zuordnung zwischen y und x kann oft durch eine Rechenvorschrift angegeben werden, die die Form einer Gleichung hat und **Funktionsgleichung** heißt.

Aufgaben

1. Der in einer Stunde zurückgelegte Weg beträgt im Durchschnitt

	bei gewöhnlicher Fahrt	bei rascher Fahrt
beim Fahrrad	12 km	15 km
beim Kraftrad	30 km	40 km

Wie lautet die Funktionsgleichung für den in der Zeit x zurückgelegten Weg y!

2. a) Stelle die Zinsen y, die ein Kapital von 500 DM im Laufe von x Monaten bei einer Verzinsung von 3% bringt, als Funktion der Zeit durch eine Funktionsgleichung dar!

b) Stelle die Zinsen y, die ein Kapital x im Laufe von $\frac{3}{4}$ Jahren bei einer Verzinsung von 3% bringt, als Funktion des Kapitals dar!

c) Stelle die Zinsen y, die ein Kapital von 500 DM im Laufe von $\frac{3}{4}$ Jahren bei einer Verzinsung von x% bringt, als Funktion des Zinsfußes dar!

3. a) Stelle den Winkel y an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks als Funktion des Basiswinkels x dar!

b) Stelle den Basiswinkel y eines gleichschenkligen Dreiecks als Funktion des Winkels x an der Spitze dar!

4. Stelle den spitzen Winkel y eines rechtwinkligen Dreiecks als Funktion des zweiten spitzen Winkels x dar!

5. Ein Arbeiter verdient täglich 5,75 DM. Stelle den Lohn y als Funktion der Arbeitszeit x dar!

6. Vergleiche die Fahrenheit- und Celsiusgrade miteinander! Gib die Fahrenheitgrade y als Funktion der Celsiusgrade x an!

7. Ein Behälter enthält 20 l Wasser. Um 12 Uhr wird eine Abflußröhre geöffnet, durch die in jeder Sekunde $\frac{1}{2}$ l Wasser abfließt.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Abhängigkeit der noch im Behälter befindlichen Wassermenge y von der seit 12 Uhr verflossenen Zeit x angibt (x in Sekunden)!

b) Prüfe, ob man für x den Wert 50 oder auch negative Werte einsetzen kann!

c) Auf welchen Bereich muß man hier die Werte von x beschränken?

8. Die Länge eines Messingdrahtes wächst bei jeder Temperaturzunahme von 1° C um $\frac{1}{50\,000}$ seiner Länge bei 0° C. Ein solcher Draht sei bei 0° C 20 m lang. Drücke seine Länge als Funktion der Temperatur aus!

24. Bildliche Darstellung von Funktionen

Berechne die Funktion $y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + 1$, für die Werte $x = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 5$ und stelle die gefundenen Werte in einer Wertetafel zusammen. Zeichne wie bei der bildlichen Darstellung von Beobachtungsreihen ein Schaubild der Funktion für die in der Tafel zusammengestellten Werte!

Bei der bildlichen Darstellung von Funktionen unter Benutzung einzelner Wertepaare verfährt man wie bei der Veranschaulichung von Beobachtungsreihen. Zur eindeutigen Bestimmung der Lage eines Punktes der Ebene errichtet man im Nullpunkt der Zahlengeraden die Senkrechte und erhält so ein Achsenkreuz, das die Ebene in 4 Felder (Quadranten) teilt (Bild 12). Die Zahlengerade heißt x-Achse oder Abszissenachse[1]), die Senkrechte y-Achse oder Ordinatenachse[2]). Beide Geraden bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen **Koordinatenachsen**[3]).

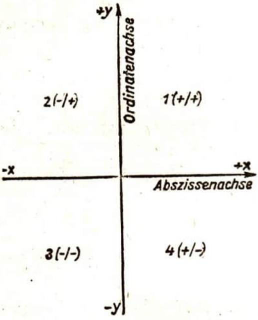


Bild 12

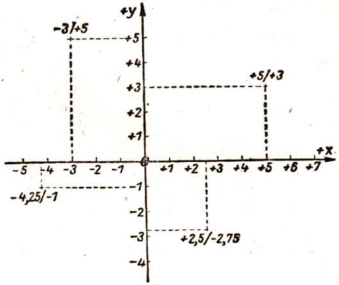


Bild 13

Die Lage eines Punktes der Ebene ist durch seine Abstände von den Achsen bestimmt. Die Vorzeichen dieser Abstände lassen das Feld erkennen, in dem der Punkt liegt. Der Abstand des Punktes von der y-Achse heißt seine **Abszisse** (x), der Abstand von der x-Achse seine **Ordinate** (y), die Zahlen x und y nennt man die **Koordinaten** (Netzzahlen) des Punktes x / y (Bild 13).

Man kann die Werte, die eine Funktion für verschiedene Werte der Veränderlichen annimmt, übersichtlich in einer Zahlentafel zusammenstellen. Die Funktionswerte werden im rechtwinkligen Achsenkreuz bildlich als Punkte einer Kurve dargestellt. Das Schaubild einer Funktion ist eine Kurve.

---

1) abscindere (lat.) = abschneiden.
2) ordináre (lat.) = zuordnen.
3) coordináre (lat.) = zusammenstellen.

Beispiel: Die Menge des Wasserdampfes, die 1 m³ Luft höchstens aufnehmen kann, ist eine Funktion der Temperatur.

Wertetafel: Temperatur (x)	Menge des Wasserdampfes (y)
− 10°	2,14 g
− 5°	3,24 g
0°	4,84 g
+ 5°	6,8 g
+ 10°	9,4 g
+ 15°	12,8 g
+ 20°	17,3 g

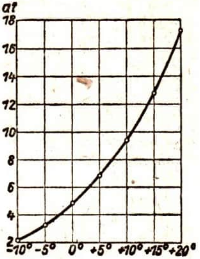


Bild 14

Die Kurve der Funktion zeigt Bild 14.

Aufgaben

1. Bestimme in einem auf Millimeterpapier gezeichneten Achsenkreuz die Lage folgender Punkte:

a) $3 / 6$ **b)** $-2 / +3$ **c)** $-4 / -5$ **d)** $1 / -3$ **e)** $-4 / 4$
f) $2 / -1\frac{1}{3}$ **g)** $-1 / \frac{2}{3}$ **h)** $5{,}2 / 6{,}3$ **i)** $-2{,}6 / -7{,}1$
k) $1{,}8 / -3{,}5$!

2. Zeichne beliebige Punkte in ein Achsenkreuz und bestimme jedesmal ihre Koordinaten!

3. Stelle für folgende Funktionen Wertetafeln zusammen und zeichne ihre Schaulinien in einem rechtwinkligen Achsenkreuz:

a) $y = x$ **b)** $y = \frac{2}{3}x$ **c)** $y = x + 1$ **d)** $y = 2x - 3$
e) $y = \frac{2}{x}$ **f)** $y = \frac{4}{x}$ **g)** $y = \frac{6}{x - 3}$ **h)** $y = \frac{5}{x + 2}$
i) $y = x^2$ **k)** $y = 0{,}5x^2$ **l)** $y = 0{,}5x^2 + 2$ **m)** $y = 0{,}8x^2 - 3$!

25. Die lineare Funktion $y = mx$

Die Angabe, die Wichte des Eisens ist 7,8 g/cm³, bedeutet, wie aus dem Physikunterricht bekannt ist, daß das Verhältnis $\frac{\text{Gewicht des Eisens}}{\text{Rauminhalt}}$ unveränderlich 7,8 ist. Bezeichnet man das Gewicht des Eisens mit y, den Rauminhalt, den es einnimmt, mit x, so erhält man $\frac{y}{x} = 7{,}8$ oder $y = 7{,}8x$ als Funktionsgleichung zwischen Rauminhalt und Gewicht des Eisens. Stelle eine Wertetafel dieser Funktion auf und zeichne die Funktionskurve! Verfahre ebenso, nachdem du die Funktionsgleichungen zwischen Rauminhalt und Gewicht anderer Körper: Aluminium (Wichte 2,6 g/cm³), Wasser (Wichte 1 g/cm³), Kork (Wichte 0,24 g/cm³), aufgestellt hast!

Erklärung: Ist das Verhältnis zweier veränderlicher Größen konstant, ist z. B. $\frac{y}{x} = m$, so folgt $y = mx$. Die feste Zahl m heißt **Verhältniszahl** oder **Proportionalitätsfaktor.**

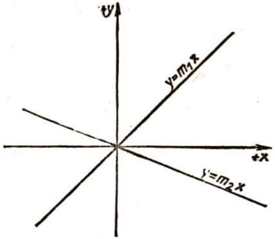


Bild 15

Das Bild der Funktion $y = mx$ ist eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht. Die Größe m ist das Maß für den Anstieg der Geraden.

Ist $m = m_1 > 0$, so steigt die Gerade, ist $m = m_2 < 0$, so fällt sie mit wachsendem x (Bild 15).

Aufgaben

1. a) Durch wieviel Punkte ist eine Gerade bestimmt?

b) Wieviel Funktionswerte der linearen Funktion $y = mx$ brauchst du also nur zu bestimmen, um ihre Schaulinie zu zeichnen?

2. Zeichne das Bild folgender Funktionen:

a) $y = x$ **b)** $y = 3x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$ **d)** $y = 2{,}4x$

e) $y = -x$ **f)** $y = -4x$ **g)** $y = \frac{3}{5}x$ **h)** $y = -1{,}8x$!

3. Metallegierungen. In 2,4 kg Messing sind 0,8 kg Zink enthalten; das andere Metall ist Kupfer.

a) Stelle das Verhältnis Zink : Kupfer fest!

b) Stelle die für die Herstellung des Messings nötige Menge Zink (y) als Funktion des Kupfers (x) dar und zeichne das Bild der Funktion!

4. Böschungen. Die Steilheit einer Böschung wird bestimmt durch das Verhältnis von Dammhöhe zur Böschungsbreite (Bild 16). Stelle für das Verhältnis **1 : 1,5** (1 : 2; 1 : 2,5) die Dammhöhe als eine Funktion der Böschungsbreite dar und zeichne das Bild der Funktion!

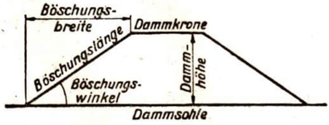


Bild 16

5. Neuerdings wird der Luftdruck statt in mm Quecksilbersäule (y) in Millibar (x) angegeben. 750 mm Quecksilbersäule entsprechen 1000 Millibar.
Stelle die Höhe der Quecksilbersäule als Funktion der Millibar dar und zeichne das Bild der Funktion!

26. Die allgemeine lineare Funktion $y = mx + b$

Der Temperaturbereich zwischen dem Gefrierpunkt und dem Siedepunkt des Wassers ist beim Celsiusthermometer in 100, beim Fahrenheitthermometer in 180 Teile geteilt. Wieviel Fahrenheitgrade entsprechen daher 1° C? Der Gefrierpunkt des Wassers wird aber bei Fahrenheit mit 32° bezeichnet. Welche Funktionsgleichung besteht daher zwischen den Fahrenheitgraden y und den Celsiusgraden x? Zeichne diese Funktion! Vergleiche das Bild dieser Funktion mit dem Schaubild für $y = \frac{9}{5}x$!

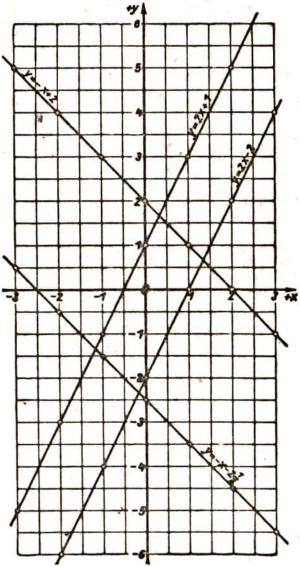


Bild 17

Das Bild der Funktion $y = mx + b$ ist eine Gerade mit dem Anstieg m; b bezeichnet den auf der y-Achse erzeugten Abschnitt (Bild 17).

Aufgaben

1. Entwirf die Wertetafel und zeichne das Bild folgender Funktionen:

a) $y = x + 2$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = \frac{1}{2}x + 5$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$!

2. Zeichne die Bilder der Funktionen:

$$y = 2x + 3; \quad y = 2x + 5; \quad y = 2x - 7!$$

Vergleiche die Richtung dieser drei Geraden miteinander!
Von welcher Größe hängt die Lage der Geraden ab?

3. Zeichne die Bilder der Funktionen:

$$y = 2x + 3; \qquad y = 3x + 3; \qquad y = \tfrac{1}{2}x + 3; \qquad y = \tfrac{2}{3}x + 3!$$

Durch welchen Punkt der y-Achse gehen die vier Geraden? Welche Größe ist hierfür maßgebend?

4. Leite aus der Gleichung $2x + y = 14$ eine Gleichung von der Form $y = mx + b$ ab! (Entwickle y als eine Funktion von x!) Stelle die Wertetafel und das Bild der Funktion her!

5. Entwickle nach der Gleichung $3x - 2y = 5$ die Veränderliche y als Funktion der Veränderlichen x und stelle Wertetafel und Bild der Funktion her!

6. Bestimme, ohne y als Funktion von x zu entwickeln, einige ganzzahlige Wertepaare von x und y, die der Funktionsgleichung $3x - 2y = 5$ genügen! Zeichne das Bild der Funktion und vergleiche es mit dem nach Aufg. 5 gezeichneten!

7. Eine Funktion lautet: $y = 5x - 2$. Versuche, ohne eine Wertetafel herzustellen, in einer Skizze den ungefähren Verlauf der Geraden anzugeben!

8. Gib ohne Herstellung der Wertetafel den Verlauf der Bilder folgender Funktionen an:

a) $y = -2x + 3$ **b)** $y = 6x + 4$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = -7$
e) $y = -7x - 5$ **f)** $x = 0$ **g)** $x = -2\tfrac{1}{5}$ **h)** $y = +x$!

VIII. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

27. Zeichnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten

Die Differenz zweier Zahlen beträgt 1. Wie heißen diese Zahlen? Bezeichne die größere der Zahlen mit x, die kleinere mit y und stelle die Buchstabengleichung auf; stelle eine Wertetafel auf für die Zahlenpaare, die die Gleichung befriedigen!

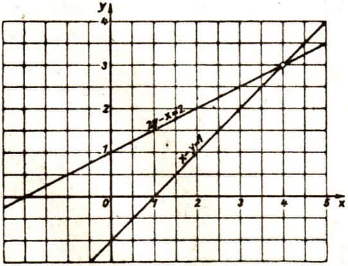


Bild 18

Eine Gleichung ersten Grades zwischen zwei Unbekannten reicht also zu deren Bestimmung nicht aus. Zwischen den beiden Unbekannten muß noch eine andere Beziehung hergestellt werden. So kann man in der oben angeführten Aufgabe z. B. festsetzen, daß der Unterschied zwischen dem Doppelten der kleineren

Zahl und der größeren 2 betragen soll. Stelle die Buchstabengleichung auf!

Zur eindeutigen Bestimmung zweier Unbekannten x und y sind zwei verschiedene Gleichungen nötig.

Zeichnerische Lösung: Die Schaubilder der beiden Gleichungen sind zwei Gerade; in dasselbe Achsenkreuz gezeichnet, sind die Koordinaten des Schnittpunktes beider Geraden die Lösung beider Gleichungen (Bild 18).

Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen durch Zeichnung:

1. $x + y = 8$; $y = 3x$ **2.** $x - 2y = 0$; $x + y = 3$ **3.** $2x - y = 14$; $y = x - 2$

4. $x + 2y = 6$; $x - \frac{1}{2}y = 1$ **5.** $4x + y = 0$; $3x + 2y = 5$ **6.** $\frac{1}{3}x - y = 4\frac{1}{6}$; $2x + 3y = 7$

7. $y = 2x - 2$; $y = 5x - 11$ **8.** $y = -\frac{3}{5}x + 4\frac{1}{5}$; $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$ **9.** $4x = 7y + 2$; $12x = 25y - 2$

10. $9y = 5x + 2$; $3y = 29 - 4x$ **11.** $21x = 9y - 3$; $3x = 31 - 5y$ **12.** $4x - 7y = 8$; $7y = 3x + 1$!

13. Zeichne das Schaubild der Funktionsgleichung $2x + 5y = 10$! Für welchen Wert von x schneidet die Gerade die x-Achse, und für welchen Wert von y schneidet sie die y-Achse?

14. Bringe die in Aufgabe 13 gegebene Funktionsgleichung auf die Form $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$! Wie erkennt man nun sofort die Punkte, in denen die Gerade die beiden Achsen schneidet? (Die Spuren der Geraden auf den Achsen.)

15. Bringe die Gleichungen

a) $2x + 3y = 12$ **b)** $4x - 3y = 12$ **c)** $3x - 5y = 15$ **d)** $5x + 2y = 20$

auf die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und zeichne dann das Bild der Gleichung!

28. Rechnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten

a) Das Einsetzungsverfahren

Man bestimmt den Wert einer Unbekannten aus der einen Gleichung und setzt den gefundenen Wert in die andere Gleichung ein. Dadurch erhält man eine neue Gleichung mit nur einer Unbekannten.

Beispiel: I. $x - 2y = 4$ II. $2x + 5y = 35$

Man erhält aus I.: $x = 4 + 2y$

x wird in II. eingesetzt: III. $2(4 + 2y) + 5y = 35$

$$8 + 4y + 5y = 35$$
$$9y = 27$$
$$\underline{\underline{y = 3}}$$
$$x = 4 + 6$$
$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Probe:

$$10 - 2 \cdot 3 = 4$$
$$2 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = 35$$

b) Das Gleichsetzungsverfahren

Man bestimmt den Wert der einen Unbekannten aus beiden Gleichungen und setzt die gefundenen Werte einander gleich.

Beispiel: I. $8x - 3y = 19$ II. $5x + 2y = 39$

$$x = \frac{19 + 3y}{8} \qquad x = \frac{39 - 2y}{5}$$

$$\text{III. } \frac{19 + 3y}{8} = \frac{39 - 2y}{5}$$
$$5(19 + 3y) = 8(39 - 2y)$$
$$95 + 15y = 312 - 16y$$
$$31y = 217$$
$$\underline{\underline{y = 7}}$$
$$x = \frac{19 + 21}{8}$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Probe:

$$8 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 19$$
$$5 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 39$$

c) Das Additionsverfahren

Man gestaltet die Gleichungen durch Multiplikation so um, daß eine der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzt. Dann verbindet man die Gleichungen durch Addition.

Beispiel:

$$\text{I. } 3x + 7y = 27 \mid \cdot 5$$
$$\text{II. } 2x - 5y = -11 \mid \cdot 7$$

Durch Multiplikation der Gleichung I mit 5 und der Gleichung II mit 7 erhält man

$$\text{III. } 15x + 35y = 135$$
$$\text{IV. } 14x - 35y = -77$$

Durch Addition der Gleichungen III und IV ergibt sich

$$\text{V.}\ 29x = 58$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Durch Einsetzen in Gleichung I erhält man

$$3 \cdot 2 + 7y = 27$$
$$7y = 21$$
$$\underline{\underline{y = 3}}$$

Probe:

$$3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 27$$
$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -11$$

Löse die Aufgabe auch in der Weise, daß du Gleichung I mit 2 und Gleichung II mit (— 3) multiplizierst!

Aufgaben

1. Löse die Gleichungen der Aufgaben 1 bis 12 in Abschn. 27 rechnerisch!

2. $5x - 2y = 19$; $15x = 31 - 7y$

3. $8x + 9y = 93$; $8x - 5y = 23$

4. $16x + 11y = 38$; $43y - 48x = 38$

5. a) $x + y = 21$; $x - y = 11$ **b)** $x - y = 8$; $x + y = 20$ **c)** $x + 5y = 29$; $x + 3y = 19$ **d)** $4x + y = 31$; $2x - y = 11$

6. a) $7x - 5y = 11$; $3x + 5y = 19$ **b)** $5x + 7y = 50$; $9x + 14y = 97$ **c)** $2x + 2y = 32$; $2x - 3y = 2$

d) $12x - 13y = 9$; $17y - 4x = 35$ **e)** $8x - 5y = 49$; $7x + 15y = 101$ **f)** $13x - 11y = 2$; $16x + 9y = 25$

7. a) $39x - 38y = 1$; $91x - 57y = 4$ **b)** $69x - 51y = 0$; $115x + 34y = 7$ **c)** $15x - 3y = 123$; $2x + 11y = 62$

d) $7x - 9y = 11$; $5x + 8y = 80$ **e)** $6x + 11y = 96$; $7x - 3y = 17$ **f)** $x - 3y = 0$; $11x - 2y = 62$

8. a) $3x + 13y = 19$; $5x - 2y = 8$ **b)** $4x + 5y = 31$; $6y - 5x = -2$ **c)** $2x + 3y = -21$; $5x - 4y = 5$

d) $8x - 9y = 2$; $7y - 5x = 7$ **e)** $10x + 7y = 99$; $6y - 7x = 7$ **f)** $5x + 2y = 22$; $3y - 11x = -4$

9. a) $x + 13 = y + 9$; $y - 5 = 21 - x$ **b)** $x + 24 = y + 18$; $y + 5 = 35 - x$

c) $4x + 11 = 42 - y$; $17 + y = 6 + 2x$ **d)** $3x + 17 = 11y + 6$; $4y - 11 = 38 - 3x$

10. a) $0{,}5x - 1{,}9 = 0{,}3y - 1$
$2{,}5 - 0{,}3y = 0{,}3x - 1{,}4$

b) $0{,}15 = 0{,}53 - 0{,}7x - 0{,}5y$
$0{,}13 + 0{,}5y = 0{,}59 - 0{,}9x$

c) $12(2x - 3y) - 7(x + y) = 84$
$9(5x - 8y) = 8(3x - 5y + 21) + 696$

d) $(2x + 3y - 7) : (5x - 2y + 4) = 3 : 4$
$(7x - 9y + 15) : (4x - 5y + 12) = 2 : 5$

11. a) $x + y = 33$
$x : y = 6 : 5$

b) $x - y = 6$
$x : y = 4 : 3$

c) $x : y = 9 : 11$
$(x - 6) : (y + 6) = 3 : 5$

12. a) $\frac{3x}{4} - 2y = 1$
$\frac{x}{3} - y = 0$

b) $2x - \frac{5y}{3} = 4$
$3x - \frac{7y}{2} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{4} - \frac{4y}{3} = -10$

13. a) $\frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 1$
$\frac{x}{4} = \frac{2y}{5} - 3$

b) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 17$
$\frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 19$

c) $\frac{9x}{4} + \frac{10y}{3} = 4$
$\frac{11y}{5} - \frac{10x}{3} = -47$

14. a) $1{,}5x - 2y = 1$
$2{,}5x - 3y = 6$

b) $2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8$
$0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4$

c) $0{,}16x - 0{,}11y = 1$
$0{,}19x - 0{,}11y = 1$

15. a) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$
$\frac{x+3}{y+3} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$
$\frac{x+2}{y-2} = 1$

c) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{2}{3}$
$\frac{x+1}{y-2} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{7-2x}{5-3y} = \frac{3}{2}$
$y - x = 4$

16. a) $\frac{5}{x+2y} = \frac{7}{2x+y}$
$\frac{7}{3x-2} = \frac{5}{6-y}$

b) $\frac{x+2y+1}{2x-y+1} = 2$
$\frac{3x-y+1}{x-y+3} = 5$

c) $\frac{75}{2x+3} = \frac{35}{2y-3}$
$\frac{36}{21-2x} = \frac{20}{20-3y}$

17. a) $\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5}$
$\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x$

b) $\frac{3x-2y}{5} - \frac{5x-3y}{3} = x + 1$
$\frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1$

18. Die Summe zweier Zahlen beträgt 34, ihre Differenz 28. Wie groß ist jede von ihnen?

19. Die Summe zweier Zahlen beträgt 25. Sie verhalten sich wie 2 : 3. Wie groß ist jede von ihnen?

20. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 7. Sie verhalten sich wie 6 : 5. Wie groß ist jede von ihnen?

21. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 7. Vermehrt man beide Zahlen um 3, so verhalten sich die entstandenen Zahlen wie 3 : 4. Wie groß sind die ursprünglichen Zahlen?

22. Die Summe zweier Zahlen betägt 350. Dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 8 zum Quotienten und 8 zum Rest. Wie heißen die Zahlen?

23. Ein Bruch erhält den Wert $\frac{3}{4}$, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner je um 2 vermindert; dagegen erhält er den Wert $\frac{1}{2}$, wenn man den Zähler um 1 vermindert und den Nenner um 2 vermehrt.

24. Welcher Bruch erhält den Wert $\frac{2}{3}$, wenn man Zähler und Nenner um 3 vermindert, dagegen den Wert $\frac{1}{2}$, wenn man Zähler und Nenner um 4 vermindert?

29. Textgleichungen

Aus der Zinsrechnung

1. Ein Darlehen bringt jährlich 2 160 DM Zinsen. Wäre es um $\frac{1}{2}$% höher ausgeliehen worden, so würde es 240 DM mehr an Zinsen bringen. Wie groß ist das Darlehen, und zu wieviel % ist es ausgeliehen?

2. Ein Darlehen bringt jährlich 50 DM Zinsen und würde, wenn man den Zinsfuß um $\frac{1}{2}$% vergrößerte, jährlich 56,25 DM Zinsen tragen. Wie groß ist das Darlehen, und zu welchem Zinsfuß ist es ausgeliehen?

3. Ein Darlehen trägt jährlich a DM Zinsen. Würde es um p% höher ausgeliehen, so würden d DM Zinsen mehr einkommen. Wie groß sind Darlehen und Zinsfuß?

4. Jemand erhält für zwei Hypotheken in Höhe von 5000 DM und 3000 DM, die zu verschiedenen Zinsfüßen ausgeliehen worden sind, im Jahr 370 DM Zinsen. Der Schuldner bietet dem Geldgeber an, beide Hypotheken mit dem mittleren Zinsfuß zu verzinsen. Dadurch würde der Geldgeber im Jahr 10 DM Zinsen weniger erhalten. Zu welchen Zinsfüßen waren die Hypotheken ausgeliehen?

5. Jemand erhält für ein Darlehen jährlich 150 DM Zinsen. Durch Herabsetzung des Zinsfußes um 1% erhält er im nächsten Jahr für das gleiche Darlehen 30 DM Zinsen weniger. Wie hoch sind Darlehen und Zinsfuß?

6. Zwei Kapitalien von insgesamt 6500 DM werden zu $2\frac{1}{2}$% bzw. 3% verzinst. Das zweite Kapital bringt 25 DM weniger Zinsen als das erste. Wie groß ist jedes Kapital?

7. Zwei Wechsel über 800 und 1200 DM, von denen der erste drei Monate später fällig war als der zweite, wurden für 773 DM bzw. für 1173 DM verkauft. Wieviel % Diskont wurde berechnet, und nach wieviel Monaten war der erste Wechsel fällig?

8. Jemand besitzt zwei Wechsel, die zusammen über 4 000 DM lauten. Beide Wechsel sind am 1. April fällig. Er läßt beide Wechsel am 1. Februar diskontieren und erhält 3 864 DM. Der eine Wechsel wurde mit 6 %, der andere mit 5 % diskontiert. Über welchen Betrag war jeder Wechsel ausgestellt?

Verschiedenes

9. Zwei Fuhrleute A. und B. hatten es übernommen, die Steine zum Bau einer Straße in 12 Tagen anzufahren. Nach 8 Tagen mußte jedoch B. aufhören, da eines seiner Pferde erkrankt war. In wieviel Tagen hätte jeder Fuhrmann die Steine allein herbeigefahren, wenn A. nach dem Ausscheiden von B. noch 7 Tage zu tun hatte?

10. Wenn ein Zug auf der Fahrt von A nach B seine fahrplanmäßige Geschwindigkeit in der Stunde um 5 km erhöht, so kommt er in B 20 Minuten zu früh an. Fährt er dagegen in der Stunde 5 km zu langsam, so verspätet er sich um 25 Minuten. Wie weit ist A von B entfernt, und wieviel km/h beträgt die fahrplanmäßige Geschwindigkeit des Zuges?

Mischungsaufgaben

11. Mischt man zwei Sorten Walnüsse, von denen 1 kg 1,30 DM bzw. 1,60 DM kostet, so stellt sich der Preis für 1 kg der Mischung auf 1,50 DM. Er würde sich aber nur auf 1,40 DM stellen, wenn von der geringeren Sorte 8 kg mehr und von der besseren 14 kg weniger genommen würden. Wieviel kg von jeder Sorte werden zu der ersten Mischung genommen?

12. Werden 1,4 kg Silber mit 3,5 kg einer zweiten Sorte legiert, so entsteht Silber mit dem Feingehalt 825. Werden dagegen 3,2 kg der ersten und 2,4 kg der zweiten Sorte legiert, so hat das Silber den Feingehalt 775. Welchen Feingehalt hat jede der beiden Sorten?

Aus der Geometrie

13. In einem Dreieck ist die Summe der Winkel α und β 91°, ihre Differenz beträgt 37°. Wie groß ist jeder Winkel?

14. In einem Rechteck beträgt die Summe der beiden anstoßenden Seiten 105,1 cm; ihre Differenz ist 43,5 cm. Wie lang sind die Seiten?

15. Der Umfang eines Rechtecks ist 1,59 m. Die eine Seite ist 25 cm länger als die andere. Wie lang sind die Seiten?

16. Die Mittellinie eines Trapezes mißt 67 cm, der Unterschied der Grundseiten beträgt 24 cm. Wie lang ist jede?

17. Wenn man die beiden Seiten eines Rechtecks um je 1 cm verlängert, wächst der Flächeninhalt des Rechtecks um 10 cm^2. Verkürzt man die kürzere Seite um 1 cm, so wird der Flächeninhalt um 5 cm^2 kleiner. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

18. Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 4 cm und verkürzt die größere um 3 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 21 cm^2 größer ist als die Fläche des Rechtecks. Wie groß sind dessen Seiten?

19. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie 9 zu 11. Ihre Umfänge, die sich wie 20 zu 23 verhalten, sind zusammen 172 cm lang. Wie groß sind die Seiten des ersten Rechtecks?

20. Verlängert man in einem Dreieck eine Seite um 7 cm und die zu ihr gehörige Höhe um 2 cm, so wächst sein Flächeninhalt um 117 cm^2. Verlängert man dagegen die Seite um 1 cm und die Höhe um 4 cm, so wächst der Flächeninhalt nur um 53 cm^2. Wie groß ist die Seite und die zu ihr gehörige Höhe?

21. Die Differenz der Flächeninhalte zweier Quadrate ist 180 m^2; die Summe ihrer Umfänge beträgt 120 m. Wie lang sind die Seiten?

C. Geometrie

IX. Flächenberechnung und Flächenverwandlung

30. Berechnung von Rechteck und Quadrat

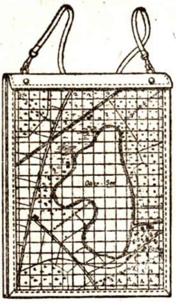


Bild 19

Schneide aus starkem Papier Quadratzentimeter aus und bedecke mit ihnen kleine rechteckige Flächen! Wie groß ist jedesmal der Flächeninhalt? Warum ist die durchsichtige Hülle einer Kartentasche quadriert (Bild 19)?
Zeichne dir ein solches Quadratnetz auf Pauspapier, d.h. stelle dir einen „Raster" her und bedecke damit eine Postkarte, eine Seite des Tagebuches, den Deckel deines Halterkastens usf.! Zähle die Fläche in cm^2 aus (Bild 20)!
In Bild 21 kann man die Zahl der Einheitsquadrate angeben, die ganz innerhalb der Fläche liegen. Zähle ein zweites Mal die von den Grenzlinien der Fläche durchschnittenen Quadrate hinzu! Suche den Mittelwert! Er gibt ungefähr den Inhalt des Dreiecks an.

Erklärungen: Unter dem *Inhalt* einer Fläche versteht man die Anzahl der Einheitsquadrate, die die Fläche bedecken.

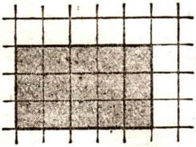


Bild 20

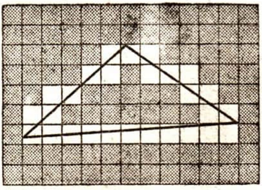


Bild 21

Der Inhalt einer Fläche wird gewöhnlich nicht ausgezählt, sondern berechnet.
Als *Flächeneinheit* wurde das *Quadratmeter* (m^2) festgesetzt. Zum Messen großer oder kleiner Flächen werden Vielfache oder Teile des Quadratmeters benutzt.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist ab. 1)

$$F = ab$$

Der Flächeninhalt eines Quadrats über der Seite a ist a^2.

$$F = a^2$$

Aufgaben

Berechnungen

1. Die Seite eines Quadrats mißt **a)** 37 cm, **b)** 68,9 cm, **c)** 95,87 cm, **d)** 57 mm. Wie groß sind Umfang und Inhalt?

2. Länge und Breite eines Rechtecks werden gemessen mit **a)** 54 cm und 19 cm, **b)** 3,80 m und 69 cm, **c)** 548 m und 236 m, **d)** 17 cm und 38 mm. Wie groß sind Umfang und Inhalt?

3. Der Flächeninhalt eines Quadrats soll aus seinem Umfang, der **a)** 64 m, **b)** 180 cm, **c)** 42 m, **d)** 630 m, **e)** 1 376 m lang ist, berechnet werden.

4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten **a)** 4,5 und 3,5 m, **b)** 52,2 und 37,9 cm, **c)** 78,5 und 52,6 cm, **d)** 246,8 und 23,75 m?

5. Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 884 (1462; 618,75; 915,9) cm², und eine seiner Seiten ist 34 (43; 27,5; 32,25) cm lang. Wie lang ist die andere Seite?

6. Ein Rechteck hat einen Umfang von 199,5 (813,6) cm, seine Seiten unterscheiden sich um 12,5 (43,2) cm. **a)** Wie lang ist jede Seite? **b)** Wie groß ist der Flächeninhalt?

Anwendungen

7. Der Boden eines quadratischen Zimmers von 6,25 m Seitenlänge wird mit Ölfarbe gestrichen. Der Maler berechnet 1 m² Anstrich mit 1,15 DM. Wieviel DM kann der Maler für seine Arbeit fordern?

8. Ein quadratischer Garten wurde zum Preise von 1,75 DM für 1 m² gekauft. Als bald darauf die Umzäunung erneuert werden mußte, kostete diese 660 DM, wobei das Meter mit 3,75 DM berechnet wurde. Wieviel DM hat der Garten gekostet?

9. Beim Verkauf einer Baustelle, die die Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten $a = 36{,}10$ m und $b = 65{,}70$ m besitzt, wurde 1 m² mit 13,75 DM berechnet. Wie teuer war die Baustelle?

---

1) Vorausgesetzt, daß beide Strecken ein gemeinsames Längenmaß haben.

10. Für eine Baustelle von rechteckiger Gestalt, die 33,70 m breit und 57,60 m tief ist, wurden 48 528 DM bezahlt. Wieviel DM kostet 1 m^2?

11. In einem Neubau sind 36 Doppelfenster zu verglasen. Jedes Fenster hat vier rechteckige Scheiben von 50 cm Breite und 130 cm bzw. 60 cm Höhe. 1 m^2 Fensterglas kostet 16 DM. Wieviel DM kostet das Glas der Doppelfenster des Neubaues?

12. Ein Wohnzimmer von 5,80 m Länge und 4,75 m Breite wird neu tapeziert. Bei der Berechnung sind Türen und Fenster nicht zu berücksichtigen. 1 Rolle Tapete (50 cm breit) liefert 2 Längen und kostet 0,98 DM. Die erforderliche Borte stellt sich auf 11 Dpf für das Meter, und der Tapezierer fordert für seine Arbeit 12 DM. Wieviel DM kostet das Tapezieren des Zimmers?

13. Für die Vorratskammer ist zum Schutz gegen Fliegen im Sommer ein Holzrahmen mit Drahtgeflecht nötig. Wieviel m Latten und wieviel m^2 Drahtgeflecht müssen beschafft werden? (Entnimm die Maße dem Bild 22!)

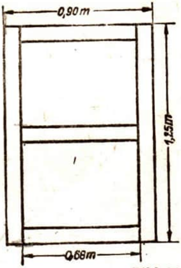


Bild 22

Geometrische Deutung arithmetischer Sätze

Veranschauliche durch Zeichnung die Richtigkeit der Gleichungen:

14. a) $ab + ac = a(b + c)$ **b)** $ab - ac = a(b - c)$

15. a) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

b) $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$!

31. Berechnung von Parallelogramm und Dreieck

Stelle aus Stäben oder Pappstreifen (Zollstock) ein Gelenkparallelogramm her! Gib ihm zunächst die Form eines Rechtecks; verkleinere einen Winkel allmählich bis auf 0°; wie verändert sich dabei der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten (die Höhe)? Zähle den Flächeninhalt aus, wenn die Höhe nur noch $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ von der ursprünglichen Höhe beträgt! Wie ändert sich dabei der Flächeninhalt? Wovon ist er also abhängig? Weshalb kann der Inhalt eines Parallelogramms nicht aus den beiden Seiten allein berechnet werden?

Erklärung: Der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten eines Parallelogramms heißt Höhe und eine der zugehörigen Seiten Grundlinie des Parallelogramms (Bild 23).

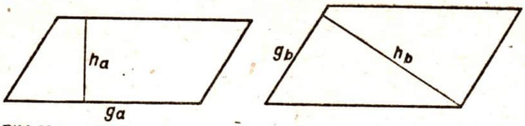


Bild 23

1. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

$$F = g \cdot h$$

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zu ihr gehörigen Höhe.

$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$

Beweis zu Satz 1 (Bild 24):

Die Dreiecke $AA'D$ und $BB'C$ stimmen in folgenden Stücken überein:

$A'D = B'C$ als Höhe des Parallelogramms
$\sphericalangle AA'D = \sphericalangle BB'C$ als Rechte
$AD = BC$ als Gegenseiten im Parallelogramm.

Folglich ist $\triangle AA'D \cong \triangle BB'C$ nach *ssw* und $A'B'CD$ ist ein Rechteck, dessen Flächeninhalt gleich ist dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

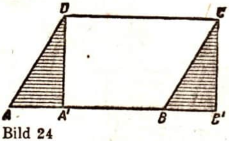


Bild 24

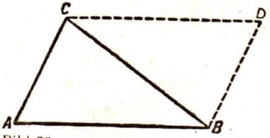


Bild 25

Beweis zu Satz 2 (Bild 25):

Zum Beweis zieht man durch B und C die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. Ihr Schnittpunkt ist D. Dann ist

$\sphericalangle DCB = \sphericalangle ABC$ (Wechselwinkel)
$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ACB$ („)
$BC = BC$

Also ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ und die Fläche von $\triangle ABC$ die Hälfte der Fläche des Parallelogramms $ABCD$.

Aufgaben

Berechnungen

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms für

a) $g = 24$ cm $h = 19$ cm **b)** $g = 36$ cm $h = 12{,}5$ cm
c) $g = 4{,}5$ m $h = 2{,}4$ m **d)** $g = 38{,}5$ cm $h = 22{,}7$ cm
e) $g = 142{,}5$ cm $h = 82{,}4$ cm **f)** $g = 4{,}5$ cm $h = 137$ cm
g) $g = 82{,}75$ m $h = 7{,}28$ m **h)** $g = 7{,}5$ cm $h = 5{,}4$ cm?

2. Zeichne ein Parallelogramm aus den beiden Seiten $a = 6$ cm; $b = 4$ cm, die einen Winkel von 60° einschließen! Bestimme die beiden Höhen und berechne den Flächeninhalt auf zweierlei Art! Vergleiche die beiden Ergebnisse!

3. Wie groß ist die Grundlinie eines Parallelogramms für

a) $F = 5\,162$ cm² und $h = 58$ cm
b) $F = 6\,528{,}51$ cm² und $h = 75{,}3$ cm
c) $F = 55\,957{,}5$ m² und $h = 67{,}5$ m
d) $F = 282{,}8540$ m² und $h = 4{,}73$ m?

4. Zeichne ein Dreieck aus $a = 11$ cm, $b = 8$ cm und $c = 6$ cm und bestimme die Längen der drei Höhen aus der Zeichnung! Berechne den Inhalt aus jeder Dreiecksseite und der dazugehörigen Höhe und vergleiche die Ergebnisse! Versuche, das Ergebnis der Untersuchung in einem Satz auszusprechen!

5. Zeichne ein Dreieck aus $a = 6$ cm; $b = 8$ cm; $c = 9$ cm! Zeichne die drei Höhen und berechne den Flächeninhalt auf dreierlei Art! Vergleiche die Ergebnisse!

6. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks nach folgenden Angaben:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$c =$	15 cm	64 cm	27,4 cm	7,28 m	36,7 cm	2,775 m
$h_c =$	22 cm	55 cm	22,5 cm	87,5 m	44,8 cm	3,808 m!

7. Wie groß ist die Höhe h_c des Dreiecks für

a) $F = 3{,}54$ m² und $c = 1{,}5$ m
b) $F = 2{,}21$ m² „ $c = 0{,}65$ m
c) $F = 142{,}45$ cm² „ $c = 32{,}5$ cm
d) $F = 530{,}55$ cm² „ $c = 32{,}4$ cm?

8. Entwickle eine Formel für die Inhaltsberechnung des rechtwinkligen Dreiecks! (Bezeichne die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, mit a und b!) Bestimme die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn

a) $a = 48$ cm und $b = 76{,}9$ cm **b)** $a = 238$ m und $b = 485{,}5$ m ist!

Anwendungen

9. Ein Gartengrundstück hat die Form eines Parallelogramms. Die Seiten a und b messen 52 m und 29 m und bilden einen Winkel von 72°. Zeichne die Fläche im Maßstab 1 : 500; entnimm der Zeichnung das fehlende Maß. Berechne **a)** die Größe des Gartens, **b)** den Kaufpreis, wenn 1 m² mit 2,85 DM bezahlt wird!

10. Die Giebelseite eines einstöckigen Hauses soll einen Kalkanstrich erhalten; 1 m² kostet 0,68 DM. Berechne mit Hilfe der in Bild 26 angegebenen Maße, wieviel DM der Kalkanstrich kostet!

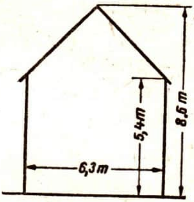


Bild 26

11. Im Winkel zweier Straßen, die einander rechtwinklig kreuzen, liegt der Acker des Bauern G. Er hat die Form eines Dreiecks; die Eckpunkte liegen vom Kreuzpunkt 128 m und 89 m entfernt. Er wird als Baustelle benötigt. Dafür erhält G in anderer Lage einen rechteckigen Acker, der an der Straße 20 m breit ist. Berechne seine Länge!

32. Berechnung von Trapez und unregelmäßigem Viereck und Vieleck

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus Mittellinie und Höhe!

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad \text{oder} \quad F = m \cdot h$$

Beweis (Bild 27): Zeichnet man im Trapez $ABCD$ die Mittellinie EF und legt GH parallel zu AD, so hat das Parallelogramm $AGHD$ den gleichen Inhalt wie das Trapez; denn es ist $\triangle GBE \cong \triangle EHC$. Die Grundlinie ($AG$) des Parallelogramms ist gleich $EF = \frac{a+c}{2}$. Folglich ist der Inhalt des Trapezes $F = \frac{a+c}{2} \cdot h$.

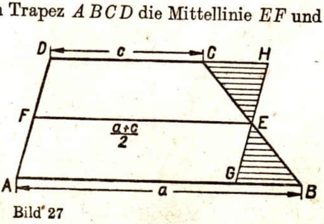


Bild 27

Ein unregelmäßiges Viereck wird berechnet, indem man es durch eine Diagonale in Dreiecke zerlegt. Die Dreieckszerlegung kann man auch bei jedem beliebigen Vieleck anwenden. Beschreibe das Verfahren nach Bild 28!

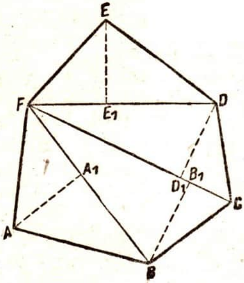


Bild 28

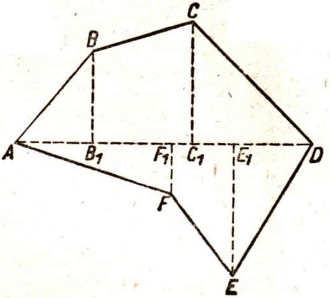


Bild 29

Bild 29 zeigt die Inhaltsberechnung eines Vielecks nach dem Trapezverfahren. Man zeichnet im Vieleck eine Diagonale und fällt von den übrigen Ecken die Lote darauf. Dadurch wird das Vieleck in Trapeze und rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die einzeln berechnet werden können.

Aufgaben

1. Leite die Formel für den Flächeninhalt des Trapezes noch auf zwei andere Weisen ab (Bild 27):

a) Verlängere AB über B hinaus um CD bis E und verbinde E mit D!

b) Verlängere AB wie bei **a)** und CD über C hinaus um AB bis F und verbinde F mit E!

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezes für

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$a =$	13 cm	25 cm	54 cm	127 cm	79 m	8,45 m	35.97 m
$c =$	9 cm	19 cm	46 cm	73 cm	58 m	3,67 m	19,48 m
$h =$	16 cm	15 cm	33 cm	59 cm	37 m	4,53 m	23,75 m?

3. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des **a)** in Bild 28, **b)** in Bild 29 gezeichneten Vielecks? Miß mit dem Stechzirkel auf mm genau!

Anwendungen

4. Jede der sechs Scheiben einer Straßenlaterne ist ein Trapez. Die parallelen Seiten sind 24 und 12 cm lang. Die Höhe beträgt 37,5 cm.

a) Wieviel m² Glas sind zu einer Laterne erforderlich?

b) Für eine neu angelegte Straße sind 64 Laternen nötig. Man rechnet beim Glas auf Bruch und Abfall $7\frac{1}{2}$%. Wieviel m² Glas sind für die Laternen nötig?

5. Die Traufenlinien eines aus zwei gleichen Trapezen und zwei gleichen Dreiecken bestehenden Daches (Walmdach, Bild 30) sind 30,6 m bzw. 19,5 m und seine Firstseite ist 22,8 m lang. Die Höhen der Trapeze betragen 11,05 m, und die Höhen der Dreiecke sind 6,5 m lang. Das Dach wird mit Ziegeln von 0,25 m Länge und 0,12 m Breite neu gedeckt. Die Ziegel greifen in der Längsrichtung 3 cm übereinander.

a) Wie groß ist die Gesamtfläche, die zu decken ist?

b) Wieviel DM kosten die Dachziegel, wenn 1000 Stck. 63,75 DM kosten?

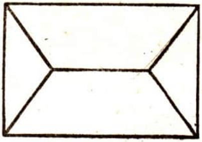


Bild 30

6. Ein Gärtner hat ein trapezförmiges Stück Ackerland, dessen parallele Seiten 28,75 bzw. 15,45 m lang und 112,5 m voneinander entfernt sind, für 68 DM jährlich gepachtet und für die Umzäunung 62,50 DM ausgegeben. Wie groß ist sein Verdienst im ersten Jahr, wenn 1 m² durchschnittlich einen Reinertrag von 1,20 DM lieferte?

7. Ein Bauplatz hat die Gestalt eines Vierecks, und seine größere Diagonale ist 55,4 m lang. Die Ecken der zweiten Diagonale sind von der ersten 16,2 bzw. 21,8 m entfernt. 1 m² des Platzes kostet 7,50 DM. Wie teuer ist der Bauplatz?

8. Bestimme die Größe eines Stückes Land in der Form eines Viereckes, dessen größere Diagonale 26,5 m lang und von den Endpunkten der anderen Diagonale 8,25 bzw. 7,35 m entfernt ist!

9. Ein Feldmesser hat ein Wiesengrundstück *A B C D E F G H* (Bild 31) zu vermessen. Er verfährt nach dem Trapezverfahren. Auf der abgesteckten

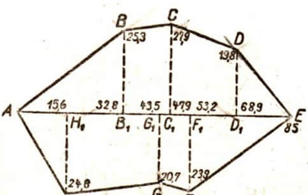


Bild 31

Standlinie $AE = 85$ m mißt er von A aus die Entfernungen der Fußpunkte der Senkrechten; er bezeichnet sie als Rechtswerte. Die Längen der Senkrechten (BB_1, CC_1 usw.) nennt er Hochwerte. Berechne mit Hilfe der in die Zeichnung eingetragenen Maße den Flächeninhalt der Wiese!

33. Verwandlung geradlinig begrenzter Flächen

Zwei Felder liegen zwischen zwei Wegen und grenzen so aneinander, wie es Bild 32 zeigt. Die Bauern M. und N. kommen überein, die gebrochene Grenzlinie durch eine geradlinige so zu ersetzen, daß keiner Nachteil erleidet. Gib in einer Skizze an, welche Lösungen möglich sind! Verbinde A mit B und ziehe durch C die Parallele zu AB! Welche Teilfläche muß eine andere Gestalt erhalten?

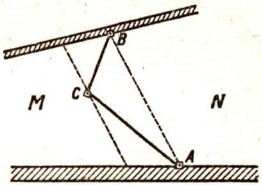


Bild 32

Erklärung: Eine Fläche verwandeln heißt ihr eine andere Gestalt geben, ohne den Flächeninhalt zu verändern.

Das Zeichen für flächengleich ist $=$; unterscheide deckungsgleich ($\cong$) und flächengleich ($=$)!

Dreiecke (Parallelogramme) sind flächengleich, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Beweis: In Bild 33 ist zu AB im Abstand h_c die Parallele gezogen; dann ist $h_{c1} = h_{c2} = h_{c3} = h_{c4} = h_{c5}$. Der Inhalt aller über der Grundseite $AB = c$ gezeichneten Dreiecke ist $\frac{1}{2}c \cdot h_{c1} = \frac{1}{2}c \cdot h_{c2} = \frac{1}{2}c \cdot h_{c3} = \frac{1}{2}c \cdot h_{c4} = \frac{1}{2}c \cdot h_{c5}$.

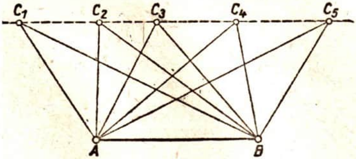


Bild 33

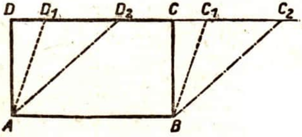


Bild 34

Beweis: Der Inhalt der in Bild 34 über der Seite $AB = a$ gezeichneten Parallelogramme ist $a \cdot h$, wobei $h = AD = BC$ ist.

Zieht man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonalen die Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonalen nicht geschnittenen Parallelogramme flächengleich; sie heißen Ergänzungsparallelogramme.

Beweis (Bild 35): Es ist

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC,$$

desgleichen $\triangle AIE \cong \triangle AFE$

und $\triangle EGC \cong EHC.$

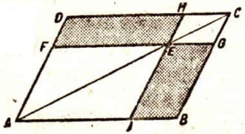


Bild 35

Vermindert man das Dreieck ABC um die Dreiecke AIE und EGC und das Dreieck ADC um die Dreiecke AFE und EHC, so müssen die übrigbleibenden Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ flächengleich sein!

Aufgaben

Übungen

1. Weise nach, daß in Bild 35 **a)** die Parallelogramme $ABGF$ und $AIHD$, **b)** die Parallelogramme $IBCH$ und $FGCD$ flächengleich sind!

2. Zeichne ein Dreieck aus $a = 7{,}8$ cm, $b = 3{,}5$ cm und $c = 7{,}6$ cm! Verwandle es unter Beibehaltung der Grundseite c **a)** in ein gleichschenkliges Dreieck, **b)** in ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $\beta_1 = R$ ist, **c)** in ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $\gamma_1 = R$ ist!

3. Verwandle das Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels α in ein anderes, das die gegebene Grundseite c_1 hat!

   Anleitung (Bild 36): Trage c_1 auf AB von A aus ab, verbinde D mit C, ziehe die Parallele zu DC durch B und verbinde ihren Schnittpunkt E mit der Verlängerung von AC mit D! Weise nach, daß $\triangle ADE = \triangle ABC$ ist!

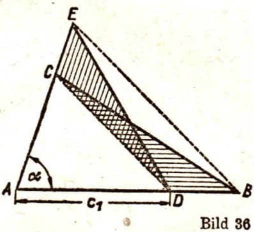


Bild 36

4. Führe Aufg. 3 für den Fall durch, daß c_1 größer als c ist!

   Anleitung: Betrachte in Bild 36 Dreieck ADE als das gegebene und zeichne ähnlich wie in Aufg. 3!

5. Zeichne $\triangle ABC$ aus $a = 4{,}9$ cm, $b = 3{,}6$ cm und $c = 5{,}8$ cm! Verwandle es unter Beibehaltung der Seite b in ein anderes, von dem gegeben ist **a)** $c_1 = 6{,}7$ cm, **b)** $a_1 = 5{,}7$ cm, **c)** $m_b = 5{,}2$ cm!

6. Verwandle $\triangle\, ABC$ ($a = 3{,}2$ cm, $b = 4{,}6$ cm, $c = 5{,}8$ cm) in ein anderes, dessen Höhe h_{c1} **a)** 3,8 cm, **b)** 1,9 cm beträgt! (Siehe Bild 37!)

7. Verwandle ein Dreieck in ein Parallelogramm (Rechteck) **a)** mit gleicher Grundlinie, **b)** mit gleicher Höhe! (Vergleiche Bild 38a und b!)

8. Verwandle das Viereck $ABCD$ unter Beibehaltung der Seite a und des Winkels α in ein Dreieck (Bild 39)!

9. Verwandle ein Fünfeck in ein Dreieck! (Mehrere Lösungen!)

10. Erkläre Bild 40! Zeichne fünf Dreiecke, deren Höhen gleich sind, und verwandle sie **a)** in ein einziges Dreieck, **b)** in ein einziges Rechteck!

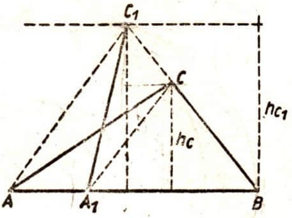


Bild 37

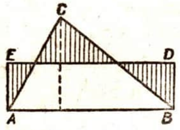


Bild 38 a

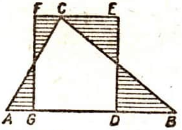


Bild 38 b

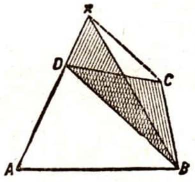


Bild 39

11. Zeichne ein Parallelogramm aus $a = 6{,}2$ cm, $b = 4{,}5$ cm und $\alpha = 48°$! Verwandle es unter Beibehaltung der Seite a **a)** in ein Rechteck, **b)** in ein anderes Parallelogramm, in dem $\alpha_1 = 65°$ ist!

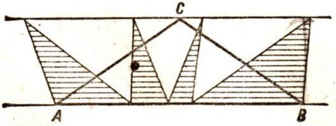


Bild 40

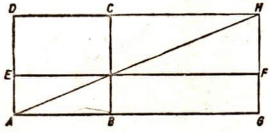


Bild 41

12. Verwandle ein Parallelogramm unter Beibehaltung einer Seite und eines Winkels in ein Dreieck!

13. Verwandle ein Rechteck in ein anderes, von dem eine Seite gegeben ist! (Verwende Ergänzungsparallelogramme!)

14. a) Verwandle ein Quadrat $ABCD$ in ein Rechteck, von dem eine Seite gegeben ist! Verfahre nach Bild 41!

b) Laß in deiner Zeichnung Punkt H auf der Geraden DC wandern! Welche Folgen hat es für die Form des Rechtecks? Verfolge den Weg des Punktes F!

15. Verwandle ein Parallelogramm unter Beibehaltung des Winkels α in ein anderes, von dem gegeben ist **a)** a_1, **b)** b_1!

16. Verwandle ein Parallelogramm mit den Seiten a und b **a)** in ein anderes mit den Seiten a_1 und b_1, **b)** in einen Rhombus mit der Seite a_1, **c)** in ein Dreieck, das die gleiche Höhe hat, **d)** in ein Dreieck, das die gleiche Grundseite hat!

17. Verwandle ein Trapez **a)** in ein Dreieck, **b)** in ein Parallelogramm, **c)** in ein Rechteck!

18. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck (Achteck, Zwölfeck) und verwandle es **a)** in ein Dreieck, **b)** in ein Rechteck! Beachte, daß die Teildreiecke gleiche Höhen haben!

Anwendungen

19. Beim Zuschneiden ist ein dreieckiger Stoffrest übriggeblieben, zwei seiner Seiten messen 90 bzw. 65 cm und bilden einen Winkel von 75°. Es soll eine rechteckige Stoffbahn daraus genäht werden, die 90 cm lang ist. An Hand einer Zeichnung im Maßstab 1 : 10 ist zu überlegen, wie der Stoff zugeschnitten und die Teile zusammengenäht werden müssen. Die Maße sind der Zeichnung zu entnehmen.

20. Beim Arbeiten von Vorhängen sind zwei gleiche trapezförmige Stoffreste übriggeblieben. Es messen nach den Bezeichnungen im Bild 42 $AB = 130$ cm; $CD = 96$ cm; $h = 60$ cm und der Winkel $\alpha = 68°$. Aus beiden Resten soll eine rechteckige Bahn von gleicher Breite hergestellt werden. In welcher Weise ist das möglich? (Skizze!)

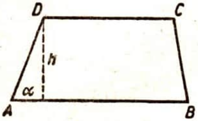


Bild 42

21. Aus der Landwirtschaft. Der Acker des Bauern G. schiebt sich in das Grundstück des Bauern Str., so daß von dessen Besitz auf der Straßenseite ein dreieckiges Stück abgetrennt wird. Da die Bearbeitung dadurch sehr erschwert wird, wollen sie einen Tausch so vornehmen, daß G. das

Dreieck an der Straße und Str. dafür einen Streifen an der gegenüberliegenden Seite erhält (Bild 43). Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung!

22. Zwei Nachbargärten bilden zusammen ein großes Rechteck von 53 m Länge und 16 m Breite. Die Grenzlinie verläuft aber schräg, und zwar von Meter 23,7 an der einen Längsseite bis zum Meter 34,5 an der anderen Längsseite. Die Grenze soll rechtwinklig gelegt werden. Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 500!

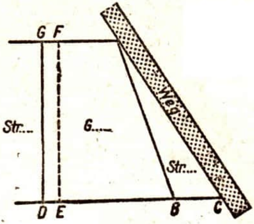


Bild 43

23. Die Grenze zweier aneinanderstoßender Grundstücke (Bild 44) ist eine gebrochene Linie. Zur Erleichterung der Bodenbestellung kommen die Nachbarn überein, die Grenze von C aus geradlinig zu führen. Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung!

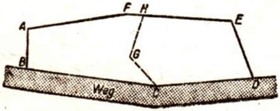


Bild 44

34. Der Lehrsatz des Pythagoras

Zeichne ein beliebiges gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, errichte über den Schenkeln und der Grundlinie die Quadrate und ziehe in den Quadraten die Diagonalen, wie Bild 45 a zeigt! Vergleiche die entstandenen Dreiecke miteinander! Vergleiche den Flächeninhalt beider Kathetenquadrate mit dem des Hypotenusenquadrats! Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm! Miß die Länge der Hypotenuse! Zeichne über jeder

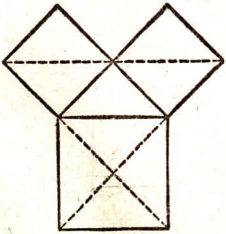


Bild 45a

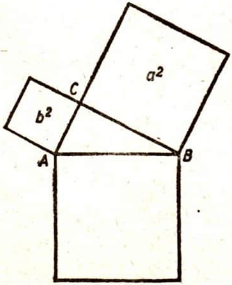


Bild 45b

Seite das Quadrat und zerlege es in cm²! Zähle die Inhalte beider Kathetenquadrate zusammen und vergleiche mit dem Inhalt des Hypotenusenquadrats!

> **Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Lehrsatz des Pythagoras).**
>
> $$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2} \quad \textbf{(Bild 45b)}$$

Beweis (Bild 46): Man zeichnet zweimal ein Quadrat mit der Seite $a + b$ und legt in jedes von ihnen vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b, wie es Bild 46 zeigt. Der Inhalt dieser vier Dreiecke ist $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$; dann ist der Inhalt

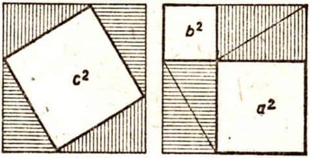


Bild 46

$$\begin{array}{lrl} \text{des ersten} & \text{Quadrates } F & = c^2 + 2ab, \\ \text{des zweiten} & \text{,,} \quad F & = a^2 + b^2 + 2ab \\ \hline & c^2 + 2ab & = a^2 + b^2 + 2ab \\ & c^2 & = a^2 + b^2 \end{array}$$

Aufgaben

1. a) Beweise den Satz des Pythagoras unter Benutzung der Formel für $(a - b)^2$ nach Bild 47!

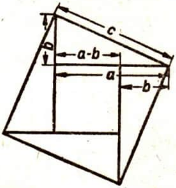


Bild 47

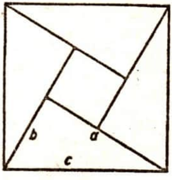


Bild 48

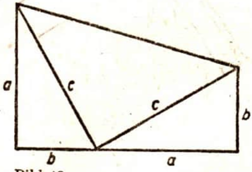


Bild 49

b) Lege vier kongruente rechtwinklige Dreiecke nach Art des Bildes 48 zusammen! Weise nach, daß dabei zwei Quadrate entstehen müssen, berechne das freibleibende innere Quadrat aus den Katheten a und b und drücke den Inhalt des großen Quadrats durch die in ihm enthaltenen Teile aus! Benutze diese Überlegungen zu einem neuen Beweis für den Satz des Pythagoras!

c) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes (Bild 49) **1.** als Summe der Teildreiecke, **2.** als Trapez! Benutze wieder die Teilergebnisse zum Beweis des pythagoreischen Satzes!

2. Zeichne zwei Quadrate und dann ein drittes, das gleich der Summe der beiden Quadrate ist!

3. Zeichne zwei Quadrate mit den Seiten

a) $a_1 = 3$ cm und $a_2 = 4{,}5$ cm

b) $a_1 = 2{,}8$ cm und $a_2 = 3{,}5$ cm

c) $a_1 = 1{,}8$ cm und $a_2 = 3{,}6$ cm

und dazu das Quadrat, das gleich der Summe der beiden gegebenen Quadrate ist!

4. Zeichne ein Quadrat, das gleich der Summe von **a)** 3, **b)** 4, **c)** 6, **d)** 7 Quadraten mit den Seiten s_1, s_2, s_3 ... ist! Bild 50 zeigt dir eine praktische Lösung dieser Aufgabe.

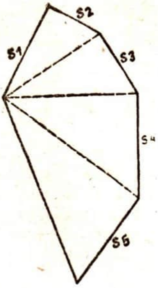


Bild 50

5. Zeichne ein Quadrat mit der Seite $a = 2$ cm und daneben Quadrate, die doppelt, dreimal, viermal, fünfmal, sechsmal so groß sind! Miß deren Seiten und vergleiche!

6. Es ist anzunehmen, daß schon die alten Ägypter einen rechten Winkel mit Hilfe eines Seiles absteckten, das durch Knoten in Teile von 3, 4 und 5 Längeneinheiten zerlegt war. Führe den Versuch auf dem Schulhof mit einer 3 m + 4 m + 5 m langen Schnur aus und begründe das Verfahren!

7. Versuche, weitere rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können (pythagoreische Dreiecke)!

Anleitung: Die Schenkel eines rechten Winkels werden, vom Scheitelpunkt beginnend, mit Zentimetereinteilung versehen und als Katheten betrachtet; die Hypotenuse kann mit dem Zirkel abgegriffen werden.

8. a) Man nennt positive ganze Zahlen a, b und c, durch die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ befriedigt wird, **pythagoreische Zahlen**. 3, 4 und 5 sind z. B. pythagoreische Zahlen. Weise nach, daß auch $3n$, $4n$ und $5n$ pythagoreische Zahlen sind, wenn n irgendeine positive ganze Zahl ist.

b) Man hat gefunden, daß sich pythagoreische Zahlen auf folgende Art ergeben:

Sind m und n zwei beliebige positive ganze Zahlen, so liefern die Ausdrücke $2mn$, $m^2 + n^2$ und $m^2 - n^2$ pythagoreische Zahlen. Stelle eine Tabelle pythagoreischer Zahlen auf, indem du z. B. m und n alle Zahlen von 1 bis 10 durchlaufen läßt!

X. Quadratzahlen und Quadratwurzeln

35. Das Quadrieren der Zahlen

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite 5 cm (9 cm, 30 m, 700 m) mißt?
Jedes Produkt aus zwei gleichen Faktoren kann den Flächeninhalt eines Quadrates darstellen.
Man schreibt $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$ und nennt 64 die **zweite Potenz** oder das **Quadrat** der Grundzahl 8.
Welche Formeln kann man benutzen, um zwei- und mehrstellige Zahlen ins Quadrat zu erheben?

Erklärung: Eine Zahl **quadrieren** heißt, ihre zweite Potenz oder ihr Quadrat zu bestimmen.

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Aufgaben

1. Wie groß sind die Quadrate folgender Zahlen:

a) 26 b) 37 c) 43 d) 47 e) 56 f) 68
g) 0,1 h) 8,3 i) 0,94 k) 0,013 l) $\frac{1}{8}$ m) $\frac{11}{12}$?

2. Quadriere die folgenden Zahlen, indem du sie in geeignete Faktoren zerlegst, wie z. B. $63^2 = 3^2 \cdot 21^2 = 9 \cdot 441 = 4\,410 - 441 = 3\,969$:

a) 27^2 b) 33^2 c) 35^2 d) 36^2 e) 56^2!

3. Zeige die Richtigkeit der Formel $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$!

4. Berechne folgende Quadrate

a) 125^2 b) 432^2 c) 683^2 d) 745^2 e) 876^2 f) 989^2 g) 569^2 h) 794^2
nach der Formel für das Quadrat einer dreigliedrigen Summe! Schreibe jeweils die Teilprodukte untereinander und beachte, welche Stelle von dem einzelnen Teilprodukt beeinflußt wird!

5. Es ist $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + a + (a + 1)$, demnach
$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 20 + 21$.

Berechne ebenso a) 31^2; 41^2; ...; 91^2, b) 101^2; 201^2; 801^2; 901^2!

6. Es ist $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 = a^2 - a - (a - 1)$, demnach $19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 20 - 19 = 361$.

Berechne ebenso **a)** $29^2; 39^2; \ldots; 99^2$ **b)** $199^2; 299^2; \ldots; 999^2$!

7. Es ist $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 5 \cdot 20 + 5^2 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 5^2 = 20 \cdot 30 + 5^2$.

Berechne entsprechend $35^2; 45^2; \ldots; 95^2$!

8. Es ist $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$; begründe die Formel!

9. Benutze die Formel der Aufgabe 8, um Quadratzahlen nach folgendem Beispiel zu berechnen:

$107^2 = 100 \cdot 114 + 49 = \underline{\underline{11\,449}}$

a) 103^2 **b)** 197^2 **c)** 206^2 **d)** 307^2 **e)** 498^2 **f)** 999^2 **g)** 54^2 **h)** 48^2!

36. Die Quadrattafel

Um das Berechnen der Quadrate zu ersparen, hat man die Quadratzahlen in Tafeln zusammengestellt. So enthält die hier beigefügte Quadrattafel die Quadrate der Zahlen 1,00 bis 9,99. Jeweils die beiden ersten Ziffern der Zahlen 1,00 bis 9,99 stehen in der linken Spalte, die letzte Ziffer steht in der ersten Zeile. Das Quadrat der Zahl 1,23 z. B. steht im Schnittpunkt der zu 1,2 gehörenden Zeile mit der zur Endziffer 3 gehörenden Spalte. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen heißt **Tafeldifferenz** (D). In der mit D überschriebenen Spalte steht die Tafeldifferenz zwischen der letzten Quadratzahl einer Zeile und der ersten der folgenden Zeile.

Aufsuchen von Quadratzahlen

I. Die Quadratzahl jeder zwei- und dreistelligen Zahl ist sofort der Tafel zu entnehmen.

Beispiele:

1. $6{,}7^2 = \underline{\underline{44{,}89}}$
2. $4{,}56^2 \approx \underline{\underline{20{,}79}}$
3. $45{,}6^2 = 4{,}56^2 \cdot 10^2 \approx 20{,}79 \cdot 100 \approx \underline{\underline{2\,079}}$
4. $456^2 = 4{,}56^2 \cdot 100^2 \approx 20{,}79 \cdot 10\,000 \approx \underline{\underline{207\,900}}$
5. $0{,}456^2 = 4{,}56^2 : 10^2 \approx 20{,}79 : 100 \approx \underline{\underline{0{,}2079}}$

II. Die Quadratzahl einer vierstelligen Zahl ist nicht ohne weiteres der Tafel zu entnehmen. Sie muß berechnet werden und liegt zwischen den benachbarten Quadratzahlen. Das Verfahren zur Berechnung von Zwischenwerten wird Interpolation (Zwischenschaltung) genannt.

Beispiel: Wie groß ist $3{,}568^2$?

Nach der Tafel ist $3{,}56^2$ ($= 3{,}560^2$) $\approx 12{,}67$ und $3{,}57^2$ ($= 3{,}570^2$) $\approx 12{,}74$. Die Grundzahl wächst um 10 Tausendstel oder — ohne Stellenbezeichnung — um 10 Einheiten, ihr Quadrat nimmt um 7 Hundertstel (7 Einheiten) zu. Der Wert für $3{,}568^2$ muß zwischen 12,67 und 12,74 liegen. Zur Vereinfachung nimmt man nun an, daß die Quadratzahlen innerhalb eines sehr kleinen Zahlenbereiches im selben Verhältnis wachsen wie die Grundzahlen und schließt:

Wächst die Grundzahl um 10 Einheiten, so wächst ihr Quadrat um 7 Einheiten.

Wächst die Grundzahl um 1 Einheit, so wächst ihr Quadrat um $\frac{7}{10}$ Einheiten.

Wächst die Grundzahl um 8 Einheiten, so wächst ihr Quadrat um $\frac{7 \cdot 8}{10}$ Einheiten.

$$\frac{7 \cdot 8}{10} = 5{,}6 \approx 6$$

$$\begin{array}{rl} 3{,}568^2 = & 12{,}67 \\ & +\ \ 6 \\ \hline & 12{,}73 \\ \hline\hline \end{array}$$

Aufgaben

1. Berechne **a)** die Quadrate der Zahlen 1 bis 20,

b) die Quadrate der reinen Zehnerzahlen!

2. Rechne und schreibe die Ergebnisse in Tafelform untereinander!

a) 1^2; 2^2; ...; 9^2 **b)** 10^2; 20^2; ...; 90^2; 99^2

c) 100^2; 200^2; ...; 900^2; 999^2

d) $1\,000^2$; $2\,000^2$; ...; $9\,000^2$; $9\,999^2$

e) $0{,}1^2$; $0{,}2^2$; ...; $0{,}9^2$ **f)** $0{,}01^2$; $0{,}02^2$; ...; $0{,}99^2$

g) $0{,}001^2$; $0{,}002^2$; $0{,}043^2$; $0{,}087^2$; $0{,}038^2$; $0{,}999^2$

3. Leite aus den Beispielen der Aufgabe 2 folgende Regeln ab:

a) Das Quadrat einer 1stelligen Zahl ist 1- oder 2stellig.
Das Quadrat einer 2stelligen Zahl ist 3- oder 4stellig usw.

b) Das Quadrat eines Zehnerbruches hat doppelt so viel Stellen hinter dem Komma wie die Grundzahl.

4. Berechne in jeder folgenden Aufgabe das Quadrat der ersten Zahl und leite die übrigen davon ab:

a) 15^2; 150^2; $1{,}5^2$; $1\,500^2$; $0{,}15^2$; $0{,}015^2$; $15\,000^2$

b) 63^2; $0{,}63^2$; 630^2; $6{,}3^2$; $0{,}063^2$; $6\,300^2$; $63\,000^2$

Quadratzahlen von 1,00

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	22
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	24
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	26
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	28
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	30
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	32
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	34
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	36
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	38
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	40
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	42
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	44
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	46
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	48
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	50
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	52
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	54
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	56
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	58
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	60
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	62
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	7
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	7
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	7
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	7
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	8
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	8
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	8
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	8
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	8
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	9
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	9
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	9
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	9
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	9
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	10
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	10
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	10
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	10
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	10
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	11
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	11
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	11
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

bis 9,99 und Quadratwurzeln

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	11
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	11
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	12
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	12
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	12
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	12
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	12
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	13
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	13
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	13
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	13
6,6	43,56	43,69	43,82	[illegible]	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	13
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	14
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	14
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	14
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	14
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	14
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	15
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	15
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	15
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	15
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	15
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	16
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	16
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	16
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	16
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	16
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	17
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	17
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	17
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	17
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	17
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	18
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	18
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	18
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	18
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	18
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	19
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	19
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	19
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	19
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	19
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	19
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	20
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	20
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

4. c) 87^2; $8\,700^2$; $0{,}087^2$; $87\,000^2$; $8{,}7^2$; 870^2; $0{,}87^2$

d) 354^2; $3{,}54^2$; $3\,540^2$; $35{,}4^2$; $35\,400^2$; $0{,}354^2$; $354\,000^2$!

5. Bestimme mit Hilfe der Quadrattafel die Werte

a) $1{,}4^2$; $2{,}7^2$; $5{,}8^2$; $9{,}6^2$; $7{,}4^2$

b) $1{,}83^2$; $2{,}95^2$; $6{,}74^2$; $8{,}88^2$; $5{,}97^2$

c) 23^2; 39^2; 87^2; 56^2; 99^2

d) 245^2; 768^2; 375^2; 939^2; 417^2

e) $65{,}3^2$; $79{,}2^2$; $45{,}9^2$; $91{,}8^2$; $50{,}7^2$

f) $0{,}732^2$; $0{,}394^2$; $0{,}086^2$; $0{,}509^2$; $0{,}057^2$

6. a) $3{,}784^2$	**b)** $5{,}972^2$	**c)** $8{,}659^2$	**d)** $7{,}587^2$
e) $86{,}45^2$	**f)** $39{,}49^2$	**g)** $439{,}6^2$	**h)** $0{,}739\,4^2$
i) $6{,}753^2$	**k)** $96{,}78^2$	**l)** $653{,}3^2$	**m)** $9{,}476^2$!

7. Wie hoch ist der Kaufpreis für eine quadratische Baustelle, deren Seite 37,5 m mißt, wenn 1 m² mit 5,60 DM bezahlt wird?

37. Die Quadratwurzel

Wie teuer stellt sich die Umzäunung eines quadratischen Gartens von 784 m² Größe, wenn das Meter mit 16,25 DM berechnet ist?

Will man die Aufgabe lösen, so muß man zuerst berechnen, wie lang die Seite des Quadrats ist. Es muß die Grundzahl gesucht werden, die, mit sich selbst malgenommen, die Quadratzahl 784 ergibt. Nun ist $28 \cdot 28 = 784$; man nennt die Grundzahl 28 die Quadratwurzel aus 784 und schreibt $28 = \sqrt{784}$.

Eine Seite des Gartens mißt also 28 m, der Umfang $4 \cdot 28$ m $= 112$ m. Die Umzäunung kostet $16{,}25$ DM $\cdot\, 112 = 1\,820$ DM.

Erklärung: Unter der **Quadratwurzel** aus einer Zahl a versteht man diejenige Zahl, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl a ist. Die gegebene Zahl a heißt **Radikand**[1]).

Beispiel: 9 ist die Quadratwurzel aus 81; man schreibt $9 = \sqrt{81}$. 81 ist der Radikand.

Die Quadratwurzel aus einer 1- oder 2stelligen Quadratzahl ist 1stellig.
Die Quadratwurzel aus einer 3- oder 4stelligen Quadratzahl ist 2stellig.
Die Quadratwurzel aus einer 5- oder 6stelligen Quadratzahl ist 3stellig.

1) radix (lat.) = Wurzel.

Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Die Quadratwurzel aus 3- und 4stelligen Zahlen

Beispiel: Die Quadratwurzel von 4 096 soll gesucht werden.

Man teilt die Zahl von rechts nach links in Gruppen zu je 2 Stellen. Die Quadratwurzel muß 2stellig werden, also Zehner und Einer enthalten, die man mit a und b bezeichnet. In 4 096 ist 3 600 als Zehnerquadrat enthalten. Da $60^2 = 3\,600$ ist, ist $a = 60$. Im Rest 496 müssen $2ab$ und b^2 enthalten sein. Im Verhältnis zu $2ab$ ist b^2 klein und wird zunächst vernachlässigt. Man findet die Einer (b), indem man 496 durch $2a$ ($= 120$) teilt. $2ab$ ($= 480$) wird abgezogen, der Rest 16 ist b^2.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad a \quad\; b \\
 & \sqrt{40'96} = 60 + 4 \\
a^2 = & \underline{36\,00} \\
 & \;\;4\,96 : 120\ (2a) \\
2ab = & \;\;\underline{4\,80} \\
 & \quad\;\; 16 \\
b^2 = & \quad\;\; \underline{16} \\
 & \quad\;\; \cdot/\cdot
\end{array}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie das Verfahren abgekürzt werden kann:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{40'96} = \underline{\underline{64}} \\
a^2 = & \underline{36} \\
 & \;49 : 12 \\
2ab = & \;\underline{48} \\
 & \;16 \\
b^2 = & \;\underline{16} \\
 & \;\cdot/\cdot
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{40'96} = \underline{\underline{64}} \\
a^2 = & \underline{36} \\
 & \;49'6 : 12 \\
2ab + b^2 = & \;\underline{49\,6} \\
 & \;\cdot/\cdot \\
 = & (2a + b)b \\
 = & 124 \cdot 4
\end{array}$$

Erkläre und begründe beide Verfahren!

Die Quadratwurzel aus 5- und mehrstelligen Zahlen

Beispiel: Die Quadratwurzel aus 556 516 soll berechnet werden.

Die Einteilung in Gruppen zu je 2 Stellen von rechts nach links zeigt, daß die Wurzel 3stellig wird. Man bezeichnet die Hunderter, Zehner und Einer mit a, b und c. Das nächst niedere Hundertquadrat ist 490 000. Den Rest 66 516 teilt man durch $2a$ ($= 1\,400$) und erhält so b ($= 40$). Es müssen $2ab$ und b^2 (letzteres nicht vergessen!) abgezogen werden.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad a \qquad b \qquad c \\
 & \sqrt{55'65'16} = 700 + 40 + 6 \\
a^2 = & \underline{49\,00\,00} \\
 & \;\;6\,65\,16 : 1\,400\ (2a) \\
2ab = & \;\;\underline{5\,60\,00} \\
- & \;\;1\,05\,16 \\
b^2 = & \quad\;\underline{16\,00} \\
 & \quad\;89\,16 : 1\,480\ (2(a+b)) \\
2(a+b)c = & \quad\;\underline{88\,80} \\
 & \qquad\;36 \\
c^2 = & \qquad\;\underline{36} \\
 & \qquad\;\cdot/\cdot
\end{array}$$

Um c zu erhalten, teilt man den Rest 8 916 durch $2(a+b) = 1480$; $2(a+b)c = 8\,880$. Der Rest 36 ist das Einerquadrat (vgl. Bild 51). Erkläre und begründe auch die folgenden abgekürzten Rechenweisen:

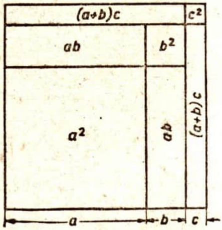


Bild 51

$\sqrt{55'65'16} = \underline{\underline{746}}$

```
49
 66 : 14
 56
 105
  16
  891 : 148
  888
    36
    36
    ·/.
```

$\sqrt{55'65'16} = \underline{\underline{746}}$

```
49•
 66'5 : 14
 576
  891'6 : 148
  8916
   ·/.
```

Bei Quadratzahlen mit mehr als 6 Stellen wird das Verfahren in gleicher Weise fortgesetzt.

Aufgaben

Wie groß ist die Quadratwurzel aus

1. a) 4 **b)** 1 **c)** 16 **d)** 49 **e)** 64
f) 25 **g)** 36 **h)** 81 **i)** 121 **k)** 144
l) 256 **m)** 196 **n)** 289 **o)** 169 **p)** 324

2. a) 900 **b)** 2 500 **c)** 3 600 **d)** 16 900 **e)** 19 600
f) 14 400 **g)** 4 900 **h)** 22 500 **i)** 62 500 **k)** 12 100

3. a) 0,49 **b)** 2,25 **c)** 2,56 **d)** 6,25 **e)** 0,0625
f) 1,44 **g)** 0,0144 **h)** 1,21 **i)** 0,0121 **k)** 0,0004

4. a) $\frac{1}{25}$ **b)** $\frac{9}{16}$ **c)** $12\frac{1}{4}$ **d)** $7\frac{1}{9}$ **e)** $7\frac{9}{16}$
f) $5\frac{4}{9}$ **g)** $3\frac{1}{16}$ **h)** $6\frac{19}{25}$ **i)** $12\frac{24}{25}$ **k)** $3\frac{18}{36}$

5. a) a^2 **b)** a^2b^2 **c)** $x^2 + 2xy + y^2$ **d)** $9a^2 + 24ab + 16b^2$?

Berechne die folgenden Quadratwurzeln:

6. a) $\sqrt{576}$ **b)** $\sqrt{841}$ **c)** $\sqrt{1225}$ **d)** $\sqrt{3844}$
e) $\sqrt{8649}$ **f)** $\sqrt{3249}$ **g)** $\sqrt{7056}$ **h)** $\sqrt{9025}$
i) $\sqrt{7569}$ **k)** $\sqrt{9409}$ **l)** $\sqrt{1849}$ **m)** $\sqrt{6241}$

7. a) $\sqrt{15\,129}$ b) $\sqrt{27\,889}$ c) $\sqrt{328\,329}$ d) $\sqrt{524\,176}$
e) $\sqrt{857\,476}$ f) $\sqrt{77\,284}$ g) $\sqrt{308\,025}$ h) $\sqrt{649\,636}$
i) $\sqrt{17\,161}$ k) $\sqrt{88\,209}$ l) $\sqrt{246\,016}$ m) $\sqrt{994\,009}$
n) $\sqrt{494\,209}$ o) $\sqrt{370\,881}$ p) $\sqrt{638\,401}$ q) $\sqrt{331\,776}$

8. a) $\sqrt{390\,625}$ b) $\sqrt{559\,504}$ c) $\sqrt{863\,041}$ d) $\sqrt{495\,616}$
e) $\sqrt{603\,729}$ f) $\sqrt{741\,321}$ g) $\sqrt{165\,649}$ h) $\sqrt{788\,544}$
i) $\sqrt{313\,600}$ k) $\sqrt{589\,824}$ l) $\sqrt{820\,836}$ m) $\sqrt{978\,121}$!

Anwendungen

9. Das Weißen einer Decke einer quadratischen Küche kostete 5,67 DM. Wie groß war die Seitenlänge der Decke, wenn der Maler für 1 m² 28 Dpf berechnet hatte?

10. Ein quadratförmiger Bauplatz kostet 58 800 DM, wenn 1 m² mit 75 DM bezahlt wird. Wie lang ist die Seite des Bauplatzes?

11. Jemand verkaufte ein quadratisches Grundstück, das er mit 9 216 DM bezahlt hatte, mit einem Gewinn von 25%. Wie groß war die Seitenlänge des Grundstücks, wenn er für 1 m² 5 DM erhielt?

38. Die Quadratwurzel aus Zehnerbrüchen / Irrationale Zahlen

Die Quadratwurzel aus Zehnerbrüchen und gemischten Zahlen

Wieviel Stellen rechts vom Komma haben die Quadrate der Zehntel, Hundertstel und Tausendstel? Wieviel Stellen muß demnach die Quadratwurzel aus einem 2-, 4-, 6-, 8stelligen Zehnerbruch besitzen? (Vergleiche Aufg. 2 und 3 in Abschn. 36!)

Beispiele:

$$\sqrt{0,'23'91'21} = \underline{\underline{0,489}}$$

$$\begin{array}{l} 16 \\ \hline 791 : 8 \\ 704 \\ \hline 8721 : 96 \\ 8721 \\ \hline \cdot/\cdot \end{array}$$

$$\sqrt{7'64,'52'25} = \underline{\underline{27,65}}$$

$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 364 : 4 \\ 329 \\ \hline 3552 : 54 \\ 3276 \\ \hline 27625 : 552 \\ 27625 \\ \hline \cdot/\cdot \end{array}$$

Bei Zehnerbrüchen teilt man vom Komma aus nach rechts, bei gemischten Zahlen vom Komma aus nach links und rechts Gruppen zu je 2 Stellen ab.

Irrationale Zahlen

Die Quadratwurzel aus 5 soll bestimmt werden.

1. $\sqrt{5}$ kann keine ganze Zahl sein, denn $2^2 < 5 < 3^2$.
2. $\sqrt{5}$ kann keine gemischte Zahl sein, denn gemischte Zahlen ergeben mit sich selbst multipliziert wieder gemischte Zahlen.
3. $\sqrt{5}$ kann gezeichnet werden (Bild 52), aber es gibt keinen unechten Bruch $\frac{p}{q}$, der ihren Wert angibt, und auf jedem noch so fein unterteilten Maßstab kann die Länge der Strecke, die $\sqrt{5}$ darstellt, daher nur angenähert abgelesen werden.

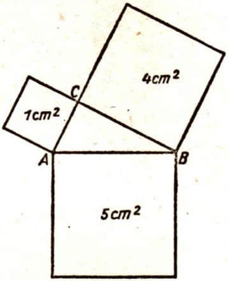


Bild 52

Man nennt $\sqrt{5}$ eine **irrationale**[1]) Zahl.

4. Will man den Näherungswert für eine irrationale Wurzel berechnen, so betrachtet man den Radikanden als eine gemischte Zahl und wendet das für ganze Zahlen und Dezimalbrüche geübte Verfahren an. Je nach der verlangten Genauigkeit bricht man die Rechnung ab, wenn man 2, 3, 4 oder mehr Stellen nach dem Komma erhalten hat.

Beispiele:

a) $\sqrt{7} = 2{,}6457 \approx 2{,}646 \approx 2{,}65$

4
300 : 4′6
276
2400 : 52′4
2096
30400 : 528′5
26425
397500 : 5290′7
370349
....

b) $\sqrt{0{,}60} = 0{,}77459 \approx 0{,}7746 \approx 0{,}775$

49
1100 : 14′7
1029
7100 : 154′4
6176
92400 : 1548′5
77425
1497500 : 15490′9
1394181
....

1) irrationális (lat.) = kein Verhältnis besitzend.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{0{,}0676}$ b) $\sqrt{0{,}4624}$ c) $\sqrt{0{,}8836}$ d) $\sqrt{0{,}5184}$
e) $\sqrt{0{,}6724}$ f) $\sqrt{0{,}027889}$ g) $\sqrt{0{,}082369}$ h) $\sqrt{0{,}390625}$
i) $\sqrt{0{,}649636}$ k) $\sqrt{0{,}435621}$ l) $\sqrt{0{,}023459}$ m) $\sqrt{0{,}423876}$

2. a) $\sqrt{10{,}89}$ b) $\sqrt{457{,}96}$ c) $\sqrt{18{,}4041}$ d) $\sqrt{13{,}205956}$
e) $\sqrt{5\,745{,}64}$ f) $\sqrt{735{,}440}$ g) $\sqrt{65{,}4481}$ h) $\sqrt{548{,}0281}$

3. a) $\sqrt{3\,686{,}9184}$ b) $\sqrt{33{,}790969}$ c) $\sqrt{709\,469{,}29}$ d) $\sqrt{9\,531{,}6169}$
e) $\sqrt{49\,079{,}9716}$ f) $\sqrt{2\,816{,}4249}$ g) $\sqrt{77{,}951241}$ h) $\sqrt{231\,101{,}3329}$

4. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{38}$ e) $\sqrt{96}$
f) $\sqrt{360}$ g) $\sqrt{12{,}62}$ h) $\sqrt{83{,}17}$ i) $\sqrt{3{,}349}$ k) $\sqrt{7\,175}$
l) $\sqrt{552{,}3}$ m) $\sqrt{0{,}018\,23}$ n) $\sqrt{0{,}9}$ o) $\sqrt{0{,}0725}$ p) $\sqrt{14{,}4}$
q) $\sqrt{\frac{13}{20}}$ r) $\sqrt{\frac{19}{50}}$ s) $\sqrt{3\frac{4}{5}}$ t) $\sqrt{3\frac{1}{20}}$ u) $\sqrt{4\frac{2}{5}}$

Anleitung: Verwandle die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche!

39. Aufsuchen von Quadratwurzeln in der Quadrattafel

1. Ist die Quadratzahl in der Tafel enthalten, so kann man die Quadratwurzel ohne weiteres ablesen.

Beispiele:

a) $\sqrt{79{,}21} = 8{,}9$ b) $\sqrt{29{,}92} = 5{,}47$

c) $\sqrt{571{,}2} = \sqrt{5{,}712 \cdot 100} = \sqrt{5{,}712} \cdot \sqrt{100} = 2{,}39 \cdot 10 = 23{,}9$

d) $\sqrt{0{,}5402} = \sqrt{54{,}02 : 100} = \sqrt{54{,}02} : \sqrt{100} = 7{,}35 : 10 = 0{,}735$

2. Ist die Quadratzahl nicht in der Tafel enthalten, so sucht man die zur nächstniederen Quadratzahl gehörige dreiziffrige Zahl. Die vierte Ziffer dieser Zahl bestimmt man durch Zwischenschalten mit Hilfe eines Dreisatzes.

a) $\sqrt{90}$

Die nächstniedere Quadratzahl ist 89,87; die nächsthöhere 90,06; die Tafeldifferenz (D) beträgt 19. Man liest ab: $\sqrt{89{,}87} = 9{,}48$ und schließt, ohne den Stellenwert zu beachten:

Wächst die Quadratzahl um 19 Einheiten, so wächst die Wurzel um 10 Einheiten.

Wächst die Quadratzahl um 1 Einheit, so wächst die Wurzel um $\frac{10}{19}$ Einheiten.

Wächst die Quadratzahl um 13 Einheiten, so wächst die Wurzel um $\frac{10 \cdot 13}{19}$ Einheiten.

$$\frac{10 \cdot 13}{19} = 6\frac{16}{19} \approx 7$$

$$\sqrt{90} = 9{,}48 + 0{,}007 = \underline{\underline{9{,}487}}$$

b) $\sqrt{3\,964}$

$\sqrt{3\,964} = \sqrt{39{,}64 \cdot 100} = \sqrt{39{,}64} \cdot \sqrt{100}$

$\sqrt{39{,}56} = 6{,}29$; Nebenrechnung: $\frac{10 \cdot 8}{13} = 6\frac{2}{13} \approx 6$

$\sqrt{39{,}64} = 6{,}29 + 0{,}006 = 6{,}296$

$\sqrt{3\,964} = 6{,}296 \cdot 10 = \underline{\underline{62{,}96}}$

Aufgaben

1. a) $\sqrt{5{,}905}$ b) $\sqrt{62{,}73}$ c) $\sqrt{384{,}2}$ d) $\sqrt{9\,643}$
e) $\sqrt{0{,}3552}$ f) $\sqrt{0{,}0392}$ g) $\sqrt{187\,500}$ h) $\sqrt{0{,}003\,956}$
i) $\sqrt{58\,560}$ k) $\sqrt{0{,}7797}$ l) $\sqrt{0{,}08352}$ m) $\sqrt{717\,400}$

2. a) $\sqrt{36{,}9}$ b) $\sqrt{80{,}75}$ c) $\sqrt{3{,}085}$ d) $\sqrt{94{,}56}$
e) $\sqrt{55{,}28}$ f) $\sqrt{5790}$ g) $\sqrt{0{,}4854}$ h) $\sqrt{342{,}5}$
i) $\sqrt{892\,500}$ k) $\sqrt{0{,}001\,994}$ l) $\sqrt{0{,}000\,2345}$ m) $\sqrt{0{,}018\,57}$

Anwendungen

3. Weise nach, daß nach dem Lehrsatz des Pythagoras für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks folgende Gleichungen bestehen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

4. Berechne in einem rechtwinkligen Dreieck die dritte Seite und den Flächeninhalt, wenn gegeben sind:

a) $a = 8$ cm, $b = 15$ cm b) $a = 35$ cm, $c = 37$ cm c) $b = 75$ cm, $c = 1{,}28$ m!

5. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $F = 2\,425{,}6$ m²; die Seite a mißt 64 cm. Wie groß ist der Umfang?

6. Berechne in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite c

a) den Umfang U aus $c = 18$ cm und $h_c = 27$ cm
b) h_c und F aus $c = 45$ cm und $a = 89$ cm
c) c und F aus $a = 17{,}5$ m und $h_c = 14{,}8$ m!

7. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mißt **a)** 12 cm, **b)** 37 cm, **c)** 9,84 m. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt!

Anleitung (Bild 53):

Es ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

8. Wie lang sind die Diagonalen **a)** eines Quadrates mit der Seite $a = 29$ cm, **b)** eines Rechtecks mit den Seiten $a = 25{,}4$ cm und $b = 19{,}3$ cm?

9. Die Diagonale eines quadratischen Platzes ist 184 m lang. Wie groß sind Umfang und Fläche des Platzes?

10. Die Diagonalen eines Rhombus messen $e = 42{,}4$ cm und $f = 35{,}2$ cm. **a)** Wie lang ist die Seite des Rhombus? **b)** Wie groß ist der Flächeninhalt?

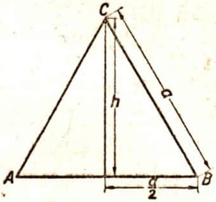


Bild 53

11. Der Durchmesser eines Kreises ist 16 cm lang; parallel zu ihm legt man in Abständen von 2 zu 2 cm Sehnen in den Kreis; wie lang sind sie?

40. Anwendungen aus Sachgebieten

Straße und Haus

1. Der Fußboden einer Waschküche soll mit Fliesen neu belegt werden. Es werden 350 Stück einer Sorte bestellt, die 24 cm lang und 15 cm breit sind. Da die Ziegelei sie nicht vorrätig hat, müssen Mauersteine von 25 cm Länge und 12 cm Breite genommen werden. Wieviel Mauersteine müssen angefahren werden?

2. Die Wände einer Küche sollen 1,35 m hoch mit glasierten Kacheln bekleidet werden. Die Küche ist 4,25 m lang und 3,60 m breit. Die Eingangstür ist 1,10 m und die Tür zur Speisekammer 0,70 m breit. Die Kacheln sind quadratisch, die Seite mißt 15 cm. Wieviel Kacheln sind nötig?

3. Die Punkte A und B (Bild 54) liegen auf zwei Straßen, die einander rechtwinklig schneiden; sie sollen durch einen Weg verbunden werden. Wegen eines dazwischen liegenden Laubgehölzes kann die Strecke AB nicht gemessen werden. Man mißt AC zu 550 m und BC zu 380 m. Berechne AB!

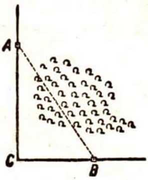


Bild 54

4. Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an der Wand hinauf?

5. Die Giebelseite eines Hauses, die der Wetterseite zugekehrt ist, muß neu verputzt werden. Der Dachgiebel ist ein gleichseitiges Dreieck. Entnimm die Maße Bild 55 und berechne die Kosten des Verputzens, wenn 1 m² 6,40 DM kostet!

6. Ein Garten in Form eines gleichschenkligen Trapezes hat die parallelen Seiten $a = 59{,}5$ m bzw. $c = 45{,}5$ m und die Breite $h = 24$ m. Der Garten soll mit einem schmiedeeisernen Gitter eingezäunt werden, von dem das Meter mit 14,40 DM berechnet wird. Wie teuer ist die Umzäunung?

7. Eine Telegraphenstange ist durch ein Drahtseil befestigt, dessen Verankerung in der Erde vom Fußpunkt der Stange 7,50 m entfernt ist. Die Höhe der Stange bis zur Drahtbefestigung beträgt schätzungsweise 6 m. Wie lang ist das Drahtseil?

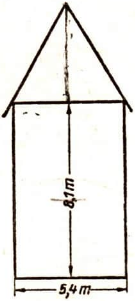


Bild 55

8. Du läßt einen Drachen steigen, so hoch es dein 87 m langer Bindfaden zuläßt. Dein Freund, der 50 m von dir entfernt steht, sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe über dem Erdboden hat der Drachen erreicht?

9. Bei einer Flurbereinigung erhält der Bauer Schade für zwei auseinanderliegende, rechteckige Ackerflächen in anderer Lage einen gleich großen, quadratischen Ackerplan. Der erste Acker ist 24 m breit und 165 m lang, der zweite 35 m breit und 140 m lang. Wie lang muß die Seite des neuen Ackerplanes abgesteckt werden?

Anleitung: Zeichne im Maßstab 1 : 2000, verwandle die Rechtecke in Quadrate und diese in ein gleichgroßes Quadrat!

Löse diese Aufgabe auch rechnerisch und vergleiche die Ergebnisse!

10. An eine 12 m lange Hauswand wird ein Schuppen mit einem einfachen Pultdach gebaut. Berechne nach den Maßen in Bild 56 **a)** wie lang die schräg verlaufende Dachkante wird, **b)** wieviel m² Bretter zum Bedecken des Daches erforderlich sind!

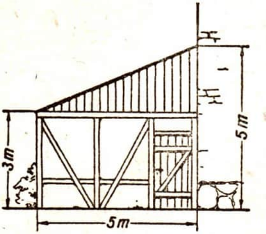


Bild 56

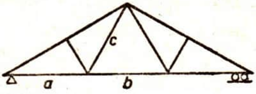


Bild 57

11. Wie groß sind bei dem Dachbinder in Bild 57 die Firsthöhe und die Entfernung der Traufkanten voneinander, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m ist!

12. Ein Turmdach soll mit Dachziegeln neu gedeckt werden. Die Turmspitze hat die Form einer quadratischen Pyramide; sie ist 14,2 m hoch, die Grundkante mißt 8,6 m. Berechne: Wie groß sind **a)** eine Seitenkante, **b)** die Höhe einer Dachfläche, **c)** die gesamte Dachfläche? **d)** Wie hoch werden die Kosten, wenn der Preis für 1 m² 7,85 DM beträgt?

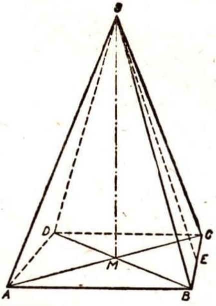


Bild 58

Anleitung: Bild 58 zeigt den Weg der Lösung. Schneide aus einer Kartoffel ein Modell des Turmdaches und führe die entsprechenden Schnitte aus!

13. Handarbeit. Erika fertigt drei quadratische Deckchen, deren Seiten 40 cm lang sind, und umgibt sie mit einer Spitze, von der 1 m 1,45 DM kostet. Sie will dazu passend noch drei Deckchen von gleicher Form, aber mit doppelt so großer Fläche herstellen. Wieviel DM kostet die Spitze **a)** für die ersten drei, **b)** für die letzten drei Deckchen?

Aus der Schiffahrt / Echolot

14. Ein Schiff ist von Helgoland 8,5 sm (1 sm = 1,852 km) entfernt und will bei geradliniger Fahrt in einem Abstand von 4 sm an der Insel vorbeikommen. Wie groß ist seine Stundengeschwindigkeit, wenn es nach $1\frac{1}{4}$ Std. an Helgoland vorbeikommt?

15. Ein Schiff kam nach einer 13stündigen geradlinigen Fahrt in einem Abstand von 4,3 sm an dem Warnemünder Leuchtturm vorbei und hatte stündlich 4,75 sm zurückgelegt. Wie weit war das Schiff ursprünglich vom Warnemünder Leuchtturm entfernt?

16. Ein Schiff war von dem Leuchtturm auf Wangeroog 14,3 sm entfernt und kam bei einer (geradlinigen) Fahrt von 5,25 Knoten (5,25 Knoten = Geschwindigkeit von 5,25 sm in der Stunde) nach 2 Std. 40 Min. an dem Turm vorbei. In welcher Entfernung kam das Schiff an dem Turm vorbei?

17. Um Meerestiefen zu messen, wird das Echolot benutzt (Bild 59). Der Schallerreger befindet sich in S, der Schallempfänger in E. Die Schiffsbreite beträgt $b = 18$ m (15 m). Der Schall pflanzt sich im Wasser mit einer Geschwindigkeit von 1510 m/s fort. Während der Zeitmessung ruht das Schiff.

a) Berechne Wassertiefen für einen Zeitunterschied $t = 0{,}01$ (0,05; 0,08; 0,1) s!

b) Berechne für dieselben Zeitunterschiede die Wassertiefen, wenn die Schiffsbreite vernachlässigt wird! Vergleiche!

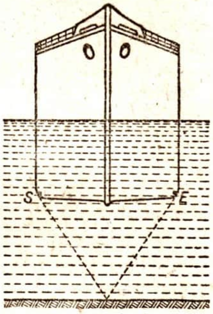


Bild 59

XI. Der Rechenstab

41. Der Aufbau des Rechenstabes

Setze folgende Zahlenreihen nach rechts fort:

$$0, 2, 4, 6, 8, \ldots \quad \text{und} \quad 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots!$$

Wir können die erste Zahlenreihe veranschaulichen, indem wir auf der Zahlenachse mit Zweierschritten nach rechts schreiten (Bild 60). Jedem Schritt entspricht die Addition von 2.

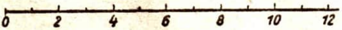


Bild 60

Dasselbe Voranschreiten auf der Zahlenachse können wir aber auch deuten durch die Festsetzung, daß jedem Zweierschritt eine Multiplikation mit 2 entsprechen soll. Wir müssen dann die Punkte auf der Zahlenachse wie in Bild 61 beziffern.

Warum beginnt die „Additionsachse“ (Bild 60) mit Null, die „Multiplikationsachse“ (Bild 61) dagegen mit 1?

Wie löst man mit zwei gegeneinander verschiebbaren Additionsstäben die Aufgaben $2 + 2$; $2 + 4$; $4 + 6$; $8 - 4$; $6 - 2$?

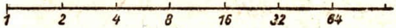


Bild 61

Wie kann man mit zwei gegeneinander verschiebbaren Multiplikationsstäben die Aufgaben $2 \cdot 2$; $2 \cdot 4$; $4 \cdot 4$; $16 : 2$; $16 : 4$ lösen?

Man kann jede der obigen Multiplikationsaufgaben als Produkt von Primfaktoren schreiben, z. B. $4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^2$. Welche Faktoren kommen in diesen Aufgaben vor? Unser Multiplikationsstab gestattet nur die Multiplikation von Potenzen der 2. Fertige zwei entsprechende Stäbe an für die Multiplikation von Potenzen der 3 und löse mit ihnen folgende Aufgaben: $3 \cdot 3$; $3 \cdot 9$; $3 \cdot 27$; $27 : 9$!

Die Einteilung auf unseren Multiplikationsstäben soll nun verfeinert werden. Wir betrachten den Zweierstab. Welche Zahl steht in der Mitte zwischen a) 1 und 64, b) 1 und 16, c) 1 und 4, d) 1 und 2? Welche neuen Teilstriche gewinnt man durch Ausführung der Rechnungen a) $2 \cdot 1{,}41$, b) $3 \cdot 1{,}41$, c) $4 \cdot 1{,}41$ usw.? Durch die Proportion $1 : x = x : 4$ findet man die mittlere Proportionale von 1 und 4. Wo findet man sie mit dem Multiplikationsstab?

Zu welchen Zahlen gelangt man durch weiteres Halbieren der durch Multiplikation der Zweierpotenzen mit 1,41 unterteilten Strecken?

Der Teilstrich für die Zahl 3 kann folgendermaßen gewonnen werden: Man findet für die mittlere Proportionale zu $64\sqrt{\sqrt{2}}$ $(= 64 \cdot 1{,}19 = 76{,}16)$ und $64\sqrt{2}$ $(= 64 \cdot 1{,}41 = 90{,}24)$ den Wert **82,90** und berechnet $\sqrt{\sqrt{82{,}90}} = \sqrt{9{,}10}$ $= 3{,}02$. Der Zweierstab kann nun durch die Potenzen von 3 ergänzt werden. Bestimme die Stelle für die Zahl 24! Wie findet man angenähert die Stelle für die Zahl 5? Um die Stelle für die Zahl 7 zu finden, vermerkt man zunächst die Zahl 49 in der Mitte zwischen 48 und 50. Wo liegt dann die Zahl 7? Wir haben nun einen Stab, der alle ganzen Zahlen von 1 bis 10 enthält. Er kann durch Ziehen der Quadratwurzeln, also fortgesetztes Halbieren der Teilstrecken, immer weiter unterteilt werden.

Aber auch durch Multiplizieren und anschließendes Dividieren durch 10 kann man die Unterteilung verfeinern. Wie findet man z. B. die Stellen für die Zahlen 1,2; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2,4; 2,5; 2,8; 3,2 usw.? Man kann auf diese Weise Stäbe herstellen, mit denen es möglich ist, alle Multiplikations- und Divisionsaufgaben für ganze und gebrochene Zahlen bis auf 3 geltende Ziffern zu lösen, indem man die diesen Zahlen zugeordneten Strecken addiert oder subtrahiert. Versuche selbst, zwei Stäbe für das Rechnen mit 2 geltenden Ziffern herzustellen!

Die käuflichen Rechenstäbe (Bild 62) bestehen aus einem Stabkörper K, dessen Mitte ein in der Längsrichtung beweglicher Schieber S (Zunge) einnimmt. Ein beweglicher Läufer L mit einem feinen Strich gestattet das Einstellen und Festhalten bestimmter Punkte. Es sind 4 Teilungen A, B, C und D vorhanden, von denen je zwei, nämlich A und B einerseits und C und D andererseits, einander gleich sind. Einfache Multiplikationen und Divisionen werden meist in den Teilungen C und D durchgeführt.

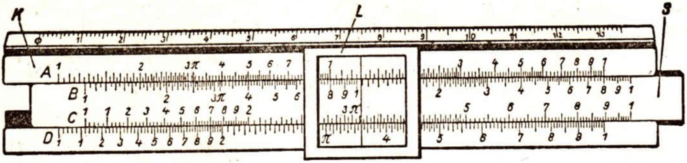


Bild 62

Aufgaben

1. a) Wieviel bedeutet auf D (und C) ein Teilstrich zwischen 1 und 2, 2 und 4, 4 und 10?

b) Beantworte dieselben Fragen für A (und B)!

2. a) Stelle den Läuferstrich auf D nacheinander auf die Teilstriche für 2,5; 4,4; 1,9; 8,3; 1,64; 3,74; 5,25; 9,65; 2,42; 1,37!

b) Stelle den Läuferstrich auf D nacheinander an die Stellen 2,35; 3 23; 1,835; 5,175; 2,2; 2,02; 4,5; 4,05; 1,3; 10,3!

3. Stelle den Läuferstrich auf A an folgende Stellen, wobei z. B. zwischen 3 und 30 genau zu unterscheiden ist: 1,73; 17,3; 43,5; 28,75; 5,55; 7,05; 31,5; 3,15; 16,08!

42. Einfache Multiplikation und Division mit dem Rechenstab

a) Multiplikation

Beispiel: $2 \cdot 3 = 6$ (Bild 63)

Einstellen: 1 auf C (C1) über 2 auf D (D 2); Läuferstrich auf C 3.

Ablesen: Auf D unter C 3.

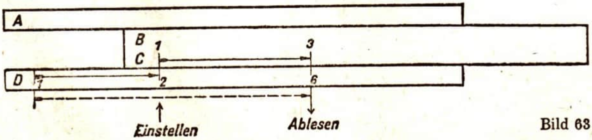


Bild 63

b) Division

Beispiel: 8 : 4 = 2 (Bild 64)

Einstellen: C 4 über D 8; Läuferstrich auf C 1.

Ablesen: Auf D unter C 1.

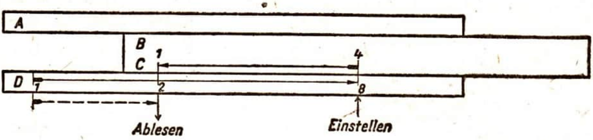


Bild 64

Schätze vor jeder Benutzung des Rechenstabes das Ergebnis durch Überschlagsrechnung ab, um festzustellen, wohin das Komma zu setzen ist!

Aufgaben

1. Multipliziere auf den Leitern **C** und **D**:

a) 1,8 · 3,5 **b)** 2,4 · 1,5 **c)** 4,15 · 1,47 **d)** 2,62 · 3,16
e) 5,65 · 1,56 **f)** 20,1 · 0,21 **g)** 0,405 · 0,102 **h)** 1,64 · 19,3
i) 1,64 · 0,25 **k)** 1,64 · 7,2 **l)** 2,65 · 3,17 **m)** 5,28 · 11,74
n) 5,3 · 1,74 **o)** 110,8 · 0,086 **p)** 22,1 · 0,43 **q)** 42,5 · 0,38!

2. Dividiere auf den Leitern **C** und **D**:

a) 4 : 1,725 **b)** 6,3 : 3,48 **c)** 38,4 : 2,3 **d)** 61 : 0,147
e) 67,4 : 0,445 **f)** 17 : 1,32 **g)** 7,6 : 29 **h)** 70 : 3,25
i) 4,08 : 18,4 **k)** 0,7 : 4,61 **l)** 2,8 : 3,1 **m)** 4,9 : 1,03!

3. Berechne die folgenden Quotienten:

a) $\frac{21,4}{13,6}$ $\frac{43,5}{13,6}$ $\frac{71,8}{13,6}$ **b)** $\frac{5,78}{4,92}$ $\frac{7,36}{4,92}$ $\frac{8,15}{4,92}$!

43. Multiplikation und Division mit Rückschlag

Liegt die Ablesemarke nicht mehr im Bereich der Teilung D, so wird Punkt 10 der Teilung C an Stelle von Punkt 1 als Einstell- bzw. Ablesemarke verwendet. Die Zunge wird im Falle der Multiplikation nach links „durchgeschoben", man nennt das einen Rückschlag.

Beispiel 1 (Multiplikation): $5 \cdot 4 = 20$ (Bild 65)

Einstellen: C 10 über D 5 (dadurch wird der eine Faktor durch 10 dividiert, an den Ziffern des Ergebnisses also nichts geändert); Läuferstrich auf C 4.

Ablesen: Auf D 4 unter C 4.

Bild 65

Beispiel 2 (Division): $30 : 6 = 5$

Einstellen: C 6 über D 30; Läuferstrich auf C 10.

Ablesen: Auf D unter C 10 (dadurch wird der Quotient mit 10 multipliziert, an den Ziffern also nichts geändert).

Aufgaben

1. Multipliziere auf den Leitern C und D:

a) $1{,}64 \cdot 655$ b) $42{,}4 \cdot 0{,}52$ c) $508 \cdot 0{,}39$ d) $30{,}7 \cdot 0{,}094$
e) $375 \cdot 382$ f) $7{,}45 \cdot 0{,}306$ g) $1{,}63 \cdot 0{,}845$ h) $4{,}2 \cdot 2{,}7$
i) $5{,}3 \cdot 1{,}74$ k) $3{,}35 \cdot 34{,}5$ l) $3{,}04 \cdot 42{,}75$ m) $813 \cdot 0{,}141$
n) $111 \cdot 95{,}5$ o) $4{,}31 \cdot 3{,}5$ p) $5{,}27 \cdot 0{,}29$ q) $8{,}02 \cdot 1{,}98$!

2. Berechne folgende Produkte mit dem Rechenstab:

a) $5{,}2 \cdot 0{,}83 \cdot 1{,}76$ b) $17{,}45 \cdot 8{,}6 \cdot 0{,}84$ c) $7{,}65 \cdot 4{,}24 \cdot 165$
d) $0{,}368 \cdot 6{,}75 \cdot 3{,}34$ e) $22{,}8 \cdot 0{,}374 \cdot 5{,}67$ f) $124{,}2 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}72$!

3. Dividiere auf den Leitern C und D:

a) $5 : 6{,}55$ b) $168 : 4{,}4$ c) $13 : 0{,}625$ d) $17 : 4{,}35$
e) $3{,}08 : 51{,}4$ f) $638 : 87{,}5$ g) $23{,}5 : 75$ h) $5{,}4 : 725$
i) $4{,}08 : 55{,}5$ k) $22{,}1 : 0{,}0366$ l) $35{,}4 : 0{,}895$ m) $18{,}4 : 0{,}426$!

4. Berechne die folgenden Quotienten:

a) $\frac{3{,}21}{8{,}27}$ $\frac{4{,}23}{8{,}27}$ $\frac{6{,}78}{8{,}27}$ b) $\frac{3{,}82}{0{,}743}$ $\frac{4{,}64}{0{,}743}$ $\frac{7{,}15}{0{,}743}$ c) $\frac{5{,}28}{32{,}7}$ $\frac{4{,}95}{32{,}7}$ $\frac{2{,}74}{32{,}7}$

d) $\frac{82{,}4}{14{,}25}$ $\frac{3{,}92}{14{,}25}$ $\frac{13{,}16}{14{,}25}$ e) $\frac{7{,}08}{4{,}25}$ $\frac{6{,}39}{4{,}25}$ $\frac{3{,}19}{4{,}25}$ f) $\frac{22{,}4}{51{,}6}$ $\frac{43{,}8}{51{,}6}$ $\frac{67{,}8}{51{,}6}$!

44. Verbindung von Multiplikation und Division

Beispiel: $\frac{6 \cdot 3}{4} = 4{,}5$ (Bild 66)

Einstellen: **C 4 über D 6; Läuferstrich auf C 3.**
Ablesen: Auf D unter C 3.

> **Führe die Division vor der Multiplikation aus! Man kommt dabei, sofern die Zunge nicht durchgeschoben werden muß, mit einer Einstellung aus.**

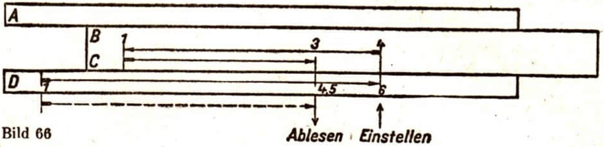


Bild 66

Aufgaben

1. a) $\frac{2{,}40 \cdot 6{,}3}{8{,}55} = \frac{2{,}40}{8{,}55}\ 6{,}3$ b) $\frac{2{,}40 \cdot 1{,}57}{8{,}55}$ c) $\frac{86 \cdot 0{,}12}{40{,}3}$ d) $\frac{86 \cdot 0{,}72}{46{,}3}$

e) $(32{,}4 \cdot 0{,}42) : 6{,}3$ f) $(32{,}4 \cdot 1{,}75) : 6{,}3$ g) $\frac{5{,}65 \cdot 21{,}6}{0{,}364}$ h) $\frac{5{,}65 \cdot 8{,}5}{0{,}364}$

2. a) $\frac{4{,}55 \cdot 1{,}935 \cdot 3{,}87}{2{,}98 \cdot 6{,}44}$ b) $\frac{26{,}3 \cdot 0{,}965 \cdot 0{,}303}{7{,}77 \cdot 153}$ c) $\frac{3{,}42 \cdot 4{,}2 \cdot 1{,}43}{1{,}195 \cdot 2{,}06}$

d) $\frac{57{,}8 \cdot 0{,}021 \cdot 63{,}5}{6{,}14 \cdot 0{,}321}$ e) $\frac{2{,}34 \cdot 2{,}01 \cdot 1{,}84}{0{,}885 \cdot 9{,}23}$ f) $\frac{1{,}53 \cdot 203 \cdot 0{,}139}{65{,}4 \cdot 0{,}53}$

g) $\frac{36{,}8 \cdot 4{,}63 \cdot 27{,}9}{130 \cdot 51{,}1}$ h) $\frac{0{,}735 \cdot 3{,}84 \cdot 12{,}05}{1{,}875 \cdot 6{,}94}$ i) $\frac{0{,}134 \cdot 2{,}58 \cdot 21{,}3}{1{,}45 \cdot 7{,}82}$

45. Lösung von Proportionen mit dem Rechenstab

1. a) Stelle den Schieber so weit nach rechts, daß die 1 der Leiter B unter der 3 der Leiter A steht! Welche Zahl steht dann unter dem Teilstrich 6, 15, 30, 60 usw. der Leiter A?

b) Bilde den Quotienten je zweier untereinander stehender Zahlen! Was erhältst du? Bilde daraus eine größere Zahl von Verhältnisgleichungen!

c) Führe ähnliche Versuche mit anderen Einstellungen des Schiebers durch! Welche allgemeine Regel folgt aus dem Ergebnis?

2. Führe die entsprechenden Untersuchungen wie in Aufg. 1 auch für die Leitern C und D durch!

3. Löse mit Hilfe der in Aufg. 1 gefundenen Regel die folgenden Gleichungen:

a) $4 : 3 = 7 : x$ b) $2{,}5 : 3{,}8 = 9{,}7 : x$ c) $4{,}7 : 1{,}4 = 13{,}9 : x$!

46. Quadrieren und Quadratwurzelziehen

Während die Teilungen A und B die Zahlen von 1 bis 100 umfassen, enthalten die Teilungen C und D nur die Zahlen 1 bis 10. Jede Zahl der Teilung A oder B ist auf den Teilungen C und D in doppeltem Abstand vom Anfangspunkt zu suchen. Stellt man den Läuferstrich z.B. auf D 3, so zeigt er oben auf diejenige Zahl, die auf D doppelt so weit von 1 entfernt ist wie 3. Das ist die Zahl 9. Welche Zahl steht auf der Teilung A über D 4; D 6; D 7; D 8; D 9; D 1,5; D 2,5; D a? Zu welchen Rechnungen wird man daher die Teilungen A und D verwenden?

Wie der Rechenstab zum **Quadrieren** verwendet wird, zeigt Bild 67. Die Bestimmmung der **Quadratwurzel** geschieht nach dem umgekehrten Verfahren. Dabei ist zu beachten, daß alle Radikanden mit ungerader Stellenzahl auf der ersten Hälfte der Teilung A, alle Radikanden mit gerader Stellenzahl auf der zweiten Hälfte der Teilung A einzustellen sind.

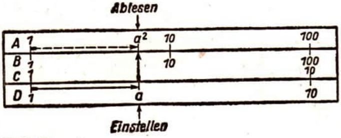


Bild 67

Beispiele: $\sqrt{6{,}4} = 2{,}53$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$; $\sqrt{22{,}5} = 4{,}74$.

Um Fehler zu vermeiden, schätze in jedem Falle die 1. Ziffer der Wurzel vor dem Einstellen ab!

Aufgaben

1. Berechne:

a) $1{,}91^2$ b) $27{,}2^2$ c) 366^2 d) $0{,}905^2$ e) $11{,}4^2$ f) 39^2 g) $22{,}8^2$
h) 134^2 i) $16{,}1^2$ k) $1{,}84^2$ l) $0{,}208^2$ m) 346^2 n) $0{,}425^2$ o) $60{,}5^2$
p) $14{,}49^2$ q) $189{,}7^2$ r) 247^2 s) $69{,}6^2$ t) $3{,}063^2$ u) $4{,}29^2$ v) $0{,}534^2$
w) 1056^2 x) $15{,}02^2$!

2. Bestimme:

a) $\sqrt{2{,}25}$ b) $\sqrt{3{,}1}$ c) $\sqrt{3{,}35}$ d) $\sqrt{3{,}5}$ e) $\sqrt{4{,}25}$ f) $\sqrt{4{,}5}$ g) $\sqrt{1{,}3}$
h) $\sqrt{12{,}4}$ i) $\sqrt{12{,}8}$ k) $\sqrt{13{,}4}$ l) $\sqrt{15{,}2}$ m) $\sqrt{16{,}4}$ n) $\sqrt{19{,}8}$ o) $\sqrt{24}$
p) $\sqrt{4{,}6}$ q) $\sqrt{1{,}6}$ r) $\sqrt{8{,}7}$ s) $\sqrt{12{,}2}$ t) $\sqrt{15{,}6}$ u) $\sqrt{22{,}5}$ v) $\sqrt{36{,}5}$
w) $\sqrt{11{,}1}$ x) $\sqrt{2{,}54}$ y) $\sqrt{43{,}2}$ z) $\sqrt{3{,}5}$!

XII. Aus der Kreislehre

47. Sehnen

Bild 68 stellt einen Mauerbogen dar. Die mit Sp gekennzeichnete Strecke bezeichnet man als **Spannweite**, die mit *H* bezeichnete Strecke als **Bogen-, Stich-** oder **Pfeilhöhe**. Der „Stichbogen" der Maueröffnung ist aus einem Kreis entstanden. Bild 69 zeigt, wie man den Mittelpunkt des Kreises findet. Welche Strecken des Kreises in Bild 70 kann man erkennen und benennen?

Halbmesser (Radius), Sehnenlänge oder Spannung und Stichhöhe sind voneinander abhängig. Untersuche die Abhängigkeit!

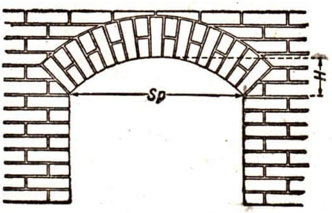
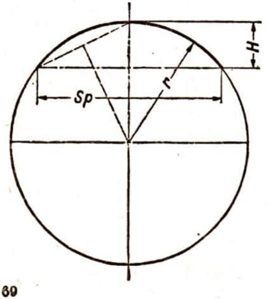


Bild 68



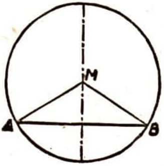


Bild 70

Bild 69

Erklärung: Die Verbindungsstrecke zweier Punkte des Kreisumfanges heißt Sehne.

> **1. Der Durchmesser ist die größte Sehne eines Kreises.**
> **2. Jeder Durchmesser ist Spiegelachse (Symmetrieachse) des Kreises.**
> **3. Die Achse der Sehne eines Kreises geht durch den Kreismittelpunkt (Bild 70).**
> **4. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.**

Beweis zu Satz 1 (Bild 71a):

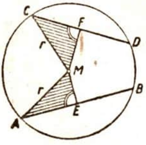


Bild 71a

Aus $AB > CD,$

also auch $\frac{AB}{2} > \frac{CD}{2},$

d.h. $AE > CF,$

folgt $AE^2 > CF^2,$

aber $r^2 - AE^2 < r^2 - CF^2,$

d.h. $ME^2 < MF^2$

und $\underline{\underline{ME < MF.}}$

Von zwei ungleichen Sehnen liegt die größere dem Mittelpunkt näher; der Durchmesser ist daher die größte Sehne, da er den kleinsten Mittelpunktsabstand (Null!) hat.

Beweis zu Satz 4 (Bild 71b):

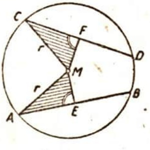


Bild 71b

Aus $AB = CD$ und $ME \perp AB$, $MF \perp CD$

folgt $AE = EB$ und $CF = FD,$

d.h. $AE = CF,$

mithin $\triangle AEM \cong \triangle CFM,$

daher $\underline{\underline{ME = MF.}}$

Aufgaben

1. Bestimme den Mittelpunkt eines Kreises, der mit Hilfe einer Tasse, eines Tellers u.a. gezeichnet wurde!
2. Miß, wie groß in Bild 68 die Spannweite und die Pfeilhöhe sind! Zeichne im Maßstab 2 : 1 das Stichbogenfenster und suche zuerst den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises als Schnittpunkt zweier Achsen!
3. Zeichne ein Flachbogenfenster mit 150 cm Spannweite und $\frac{1}{6}$ Pfeilhöhe (d.i. $\frac{1}{6}$ der Spannweite! Maßstab beifügen; Maße eintragen!).
4. Zeichne ein Kreisbogenfenster (Halbkreis) mit 120 cm Spannweite! (Maßstab beifügen; Maße eintragen!)
5. Zeichne einen hölzernen Kleiderbügel mit Steg, der die Gestalt eines Kreisabschnittes (Kreisbogen mit zugehöriger Sehne) besitzt!
6. Zeichne einen Kreis, der durch die Punkte A und B geht und dessen Mittelpunkt auf einer (nicht auf AB senkrechten) Geraden g liegt!
7. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 5$ cm, der durch zwei gegebene, 6 cm voneinander entfernte Punkte A und B geht!
8. Ziehe durch den Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne so, daß sie durch den Punkt A halbiert wird!
9. Zeichne einen Kreis, der durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte geht!

48. Sekanten und Tangenten

In Bild 72 ist eine beliebige Gerade um einen Punkt P gedreht worden. Gib an, in wieviel Punkten jede Gerade den Kreis schneidet, und vergleiche die Lage der Schnittpunkte der Geraden im Laufe der Drehung! Welche besondere Lage hat die Gerade, wenn sie durch Punkt C bzw. C' geht?

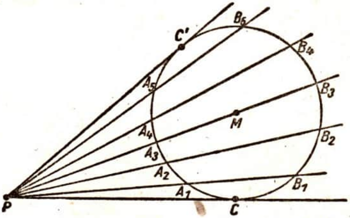


Bild 72

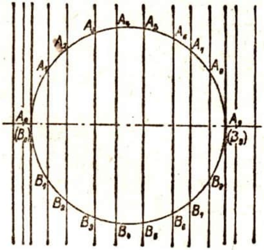


Bild 73

In Bild 73 ist eine Gerade parallel zu sich selbst verschoben. Gib in jeder Lage der Geraden die Spiegelachse der von der Geraden durch den Kreis abgeschnittenen Sehne an!

Was ergibt sich, wenn beide Schnittpunkte zusammenfallen, wenn also die Gerade den Kreis berührt?

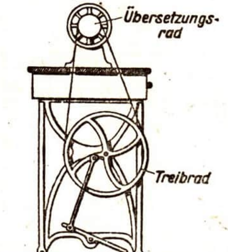


Bild 74

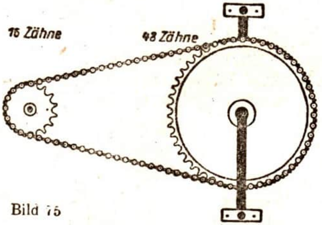


Bild 75

Bezeichne die Lage des Riemens zu den beiden Rädern der Nähmaschine (Bild 74) bzw. der Kette zu Zahnkranz und Kettenrad des Fahrrades (Bild 75)!

Erklärungen:

Eine Gerade, die den Kreis schneidet, heißt Schneidende oder **Sekante**[1]).
Eine Gerade, die den Kreis berührt, heißt Berührende oder **Tangente**[2]).
Der Halbmesser zum Berührungspunkt heißt **Berührungshalbmesser.**

1) secáre (lat.) = schneiden.
2) tángere (lat.) = berühren.

1. Die Tangente steht auf dem Berührungshalbmesser senkrecht.
2. Von einem Punkt außerhalb eines Kreises können zwei Tangenten an den Kreis gezeichnet werden. Ihre Tangentenabschnitte sind gleich; die Berührungssehne und der von den Tangenten gebildete Winkel werden durch die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit dem Punkt (Zentrale) halbiert.

Beweis zu Satz 2 (Bild 76): Jeder Durchmesser, auch der in seiner Verlängerung durch P gehende, ist Achse für den Kreis. Also gibt es zu einer durch P gehenden Tangente eine ihr spiegelgleiche (symmetrische).

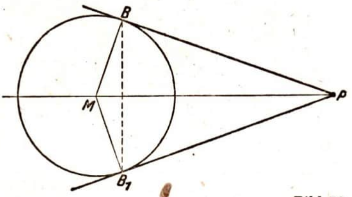


Bild 76

Bestimmungslinie: Die in einem Punkt auf einer Geraden errichtete Senkrechte ist die Bestimmungslinie für die Mittelpunkte aller Kreise, die die Gerade in diesem Punkt berühren.

Aufgaben

1. Zeichne an einen Kreis in einem Punkt des Umfangs die Tangente!
   Ausführung: Zeichne den Berührungshalbmesser und errichte auf ihm im Berührungspunkt die Senkrechte!

2. Zeichne von einem Punkt P außerhalb eines gegebenen Kreises an ihn die beiden Tangenten!
   Ausführung (Bild 77):
   1. Zeichne die gesuchte Tangente als Achse des doppelten Berührungshalbmessers!
   2. Lege die Schenkel des rechten Winkels eines Holzdreiecks so, daß sie durch M und P hindurchgehen und der Scheitelpunkt des Winkels auf dem Kreisumfang liegt. Dann gibt der durch P gehende Schenkel die Richtung der Tangente an.

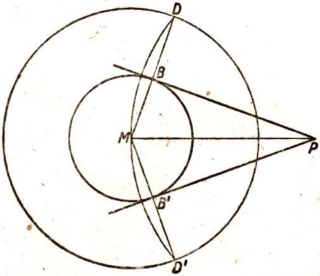


Bild 77

3. Zeichne einen Kreis, der zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen Punkt A **a)** auf einer der Parallelen, **b)** zwischen den Parallelen liegt!

4. Zeichne einen Kreis, der die Gerade g in dem Punkt A berührt und durch den (nicht auf g liegenden) Punkt B geht!

5. Um M sei ein Kreis mit dem Halbmesser $r = 3$ cm gezeichnet.

a) Zeichne an den Kreis eine Tangente, die einer gegebenen Geraden g parallel läuft!

b) Zeichne an den Kreis eine Tangente, die mit einer gegebenen Geraden g den Winkel $\alpha = 45°$ bildet!

c) Beschreibe in den Kreis ein Quadrat so, daß eine Seite waagerecht liegt!

6. Zeichne einen Kreis ($r = 2$ cm), der zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berührt!

7. Zeichne einen Kreis, der zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berührt, und zwar eine von ihnen in einem gegebenen Punkt P!

Anwendungen

8. Den Mittelpunkt kreisförmiger Querschnitte von Büchsen, Rundhölzern usw. finden die Handwerker durch einen Mittelpunktssucher (Bild 78).

a) Stelle einen solchen Mittelpunktssucher her!

b) Wie wird er benutzt, um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden?

c) Überlege, ob die Schenkel des Winkelhakens auch einen beliebigen Winkel miteinander bilden dürfen!

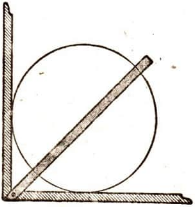


Bild 78

Bild 79

9. Ein Schienenstrang von 1,435 m Spurweite muß seine Richtung um 120° ändern. Fertige eine maßstäbliche Zeichnung für den Fall, daß die beiden Richtungen durch einen Kreisbogen vom Krümmungshalbmesser $r = 600$ m zu verbinden sind (Bild 79)!

49. Umfangs- und Mittelpunktswinkel

Stelle ein Modell her, wie es Bild 80 zeigt. Bringe den Winkel in verschiedene Lagen! Bezeichne die Punkte, auf die der Scheitelpunkt fällt! Auf was

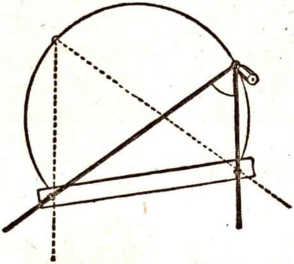


Bild 80

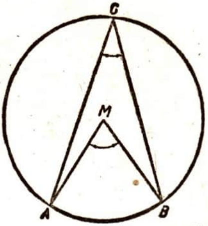


Bild 81

für einer Linie scheinen die Punkte zu liegen? Prüfe das Ergebnis auch für andere Winkel!

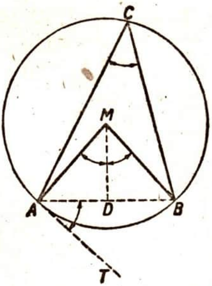


Bild 82

Erklärungen:

Der Winkel, den die Halbmesser eines Kreises einschließen, heißt **Mittelpunktswinkel** ($\sphericalangle AMB$, Bild 81). Zu jedem Kreisbogen gehört ein Mittelpunktswinkel.

Zwei von einem Punkt des Kreises ausgehende Sehnen bilden einen **Umfangswinkel** ($\sphericalangle ACB$, Bild 81). Ein Umfangswinkel steht auf dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

Der Winkel, den eine Tangente und eine von ihrem Berührungspunkt aus gezogene Sehne bilden, heißt **Sehnentangentenwinkel** ($\sphericalangle BAT$, Bild 82).

1. Jeder Umfangswinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

2. Umfangswinkel auf demselben Bogen eines Kreises sind gleich (als Folgerung von 1).

3. Der Umfangswinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel (Satz des Thales; als Folgerung von 1).

4. Jeder Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Umfangswinkel über dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen.

Anleitung für den Beweis zu Satz 1: Alle Umfangswinkel, die mit einem Mittelpunktswinkel auf demselben Bogen stehen, lassen sich zu drei Gruppen zusammenfassen:

a) Der Mittelpunkt des Kreises liegt **auf** einem der Schenkel des Umfangswinkels (Bild 83a).

b) Der Mittelpunkt des Kreises liegt **zwischen** den Schenkeln des Umfangswinkels (Bild 83b).

c) Der Mittelpunkt des Kreises liegt **außerhalb** der Schenkel des Umfangswinkels (Bild 83c).

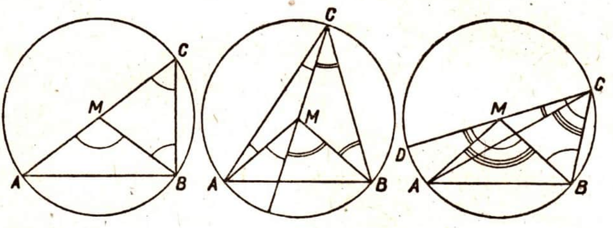


Bild 83

Im Falle a) ist der Mittelpunktswinkel Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, in dem der Umfangswinkel ein Winkel an der Grundlinie ist.

Im Falle b) ist der Mittelpunktswinkel gleich der Summe zweier Außenwinkel an der Spitze zweier gleichschenkliger Dreiecke.

Im Falle c) ist der Mittelpunktswinkel gleich dem Unterschied zweier Außenwinkel an der Spitze zweier gleichschenkliger Dreiecke.

Anleitung für den Beweis zu Satz 3 (Bild 84): Da der Mittelpunktswinkel im Halbkreis 180° ist, ist der Umfangswinkel 90° (als Folgerung von 1).

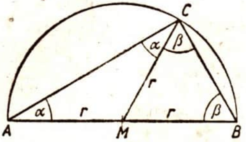


Bild 84

Ein weiterer Beweis:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \; (\triangle ABC),$$

also $$\underline{\underline{\alpha + \beta = \sphericalangle ACB = 90^\circ.}}$$

Anleitung für den Beweis zu Satz 4 (Bild 85 bis 87): Der Durchmesser BE ermöglicht es, die Eigenschaften der Tangente auszunutzen. Gehe von der Gleichheit der rechten Winkel ABE und BDE aus!

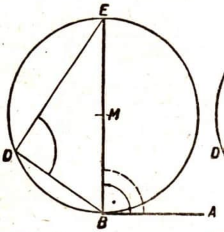


Bild 85

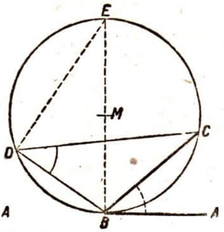


Bild 86

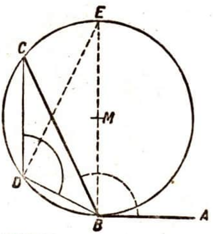


Bild 87

Aufgaben

1. Zeichne in einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 4{,}5$ cm **a)** einen spitzen, **b)** einen rechten, **c)** einen stumpfen Mittelpunktswinkel! Zeichne zu jedem Mittelpunktswinkel mehrere zugehörige Umfangswinkel und überzeuge dich durch Messen von ihrer Gleichheit!

2. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 3{,}2$ cm und in ihm eine 5,5 cm lange Sehne!

a) Beweise Satz 1 für den Umfangswinkel, der auf dem größeren Bogen steht! (Benutze den Durchmesser, dessen Lage durch den Scheitelpunkt bestimmt ist!)

b) Stelle fest, in welcher Beziehung dieser Umfangswinkel zu dem über dem kleineren Bogen (Ergänzungsbogen) steht!

c) Sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

3. Bestimme die Länge der Sehne, die in einem Kreis mit dem Halbmesser $r = 4$ cm zu dem Umfangswinkel $\alpha = 30°$ gehört!

4. Zeichne ein Dreieck aus dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $r = 4$ cm und **a)** $\gamma = 60°$; $h_c = 5$ cm, **b)** $\gamma = 75°$; $s_c = 4{,}2$ cm!

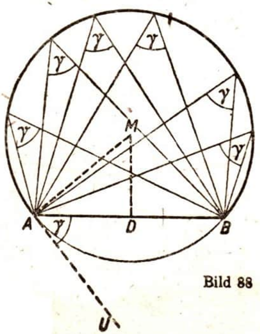


Bild 88

50. Bestimmungslinien

1. Der Kreis mit dem Durchmesser AB ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch A und B gehen.

2. Der Kreisbogen, der eine Strecke AB als Sehne und den Winkel γ als Umfangswinkel faßt, ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller Winkel von der gegebenen Größe γ, deren Schenkel durch A und B gehen (Bild 88).

Beweis (Bild 89): Rückt der Scheitelpunkt eines über einer Sehne stehenden Winkels vom Umfang ins Innere des Kreises (C_2), so wird der Winkel größer, rückt er nach außen (C_1), so wird er kleiner, denn nach dem Satz vom Außenwinkel (7. Schuljahr, XI, 47) ist

$$\sphericalangle AC_2B = \sphericalangle \gamma + \sphericalangle C_2BC,$$

also $\sphericalangle AC_2B > \sphericalangle \gamma,$

und $\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle \gamma - \sphericalangle CBC_1,$

also $\sphericalangle AC_1B < \sphericalangle \gamma.$

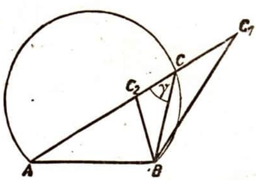


Bild 89

Zeichnet man über der Sehne AB nach derselben Seite mehrere Umfangswinkel (Bild 88), so sind nach Satz 2 alle Umfangswinkel über dem Bogen AB einander gleich, ihre Größe sei γ. Nach der vorangegangenen Feststellung liegen die Scheitel aller Winkel, die größer als γ sind, innerhalb des Kreises und die Scheitel aller Winkel, die kleiner als γ sind, außerhalb des Kreises. Also liegen auf dem Kreisbogen, der den Bogen AB zum Vollkreis ergänzt, nur die Scheitel aller Winkel, die gleich γ sind.

Aufgaben

1. Zeichne den Kreisbogen, der über der Strecke AB als Sehne den Winkel γ als Umfangswinkel faßt!

   Ausführung (Bild 88): Zeichne den Winkel γ als Sehnentangentenwinkel an AB! Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Senkrechten auf der Tangente in A.

Zeichenübungen

2. Benutze den Satz des Thales, um die Höhen eines Dreiecks zu zeichnen!
3. Benutze den Satz des Thales, um von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Tangenten an den Kreis zu zeichnen!
4. Zeichne ein Dreieck aus **a)** $c = 5$ cm; $\gamma = 75°$; $h_c = 3$ cm, **b)** $c = 6$ cm; $\gamma = 60°$; $s_c = 4$ cm!

5. Bestimme im Innern eines Dreiecks einen Punkt P, von dem aus alle Seiten unter demselben Winkel gesehen werden!

Anwendungen

6. Sieht der Seemann drei Landmarken A, B und C (insbesondere Leuchttürme) und kennt er ihre Lage und ihre Entfernungen voneinander aus der Karte, so kann er durch zwei Winkelmessungen α und β den eigenen Standort durch Zeichnung finden. Untersuche, ob die Lösung immer möglich ist bzw. ob das Ergebnis eindeutig ist!

Beispiele:				Gesichtswinkel für AB	Gesichtswinkel für BC
a)	$AB = 6{,}5$ km	$BC = 4{,}6$ km	$\sphericalangle ABC = 120°$	$\sphericalangle \alpha = 69°$	$\beta = 40°$
b)	$AB = 5{,}6$ km	$BC = 6{,}4$ km	$\sphericalangle ABC = 130°$	$\sphericalangle \alpha = 52°$	$\beta = 54°$
c)	$AB = 3{,}8$ km	$BC = 4{,}1$ km	$\sphericalangle ABC = 145°$	$\sphericalangle \alpha = 36°$	$\beta = 60°$

7. Stelle den in Aufgabe 6 gesuchten Standort dadurch fest, daß du die beiden Winkel α und β so auf Pauspapier zeichnest, daß sie einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam haben (Spinne des Seemanns)!

Schiebe das Blatt über der Zeichnung mit den drei Punkten A, B und C so lange hin und her, bis alle Linien durch die drei Punkte gehen! Vergleiche die Lösungen der Aufgaben 6 und 7 miteinander!

51. Ein Rechteck soll in ein Quadrat verwandelt werden (Anwendung des Thaleskreises)

Bild 90 zeigt, wie ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck verwandelt werden kann. Ein gegebenes Rechteck läßt sich aber nicht auf dieselbe Art in ein Quadrat verwandeln.

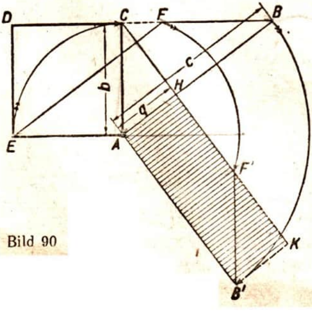


Bild 90

Beschreibe nach Bild 91, wie ein Quadrat in ein Parallelogramm mit derselben Grundlinie und Höhe verwandelt werden kann! Auch wenn man sich die Seite FB in ihrer eigenen Richtung beliebig verschoben denkt, entsteht immer ein rechtwinkliges Dreieck ABC.

Wird das Parallelogramm $ABFE$ um 90° um A als Drehpunkt gedreht, so kommt es in die Lage $AB'F'C$ (Bild 90). Gib an, wie das diesem Parallelogramm gleiche Rechteck hergestellt worden ist!

Wende den Lehrsatz des Pythagoras auf das rechtwinklige Teildreieck ADC an, das durch Zeichnung der Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABC entsteht (Bild 92). Suche ein Rechteck, das dem Quadrat über der Höhe CD flächengleich ist!

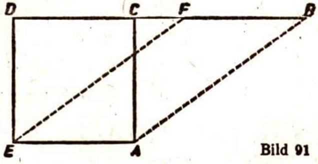


Bild 91

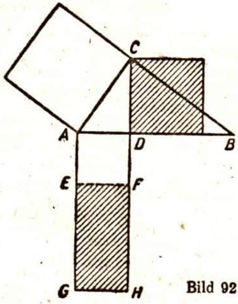


Bild 92

1. Der Kathetensatz:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt (Lehrsatz des Euklid).

$$a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$$

Anleitung für den Beweis (Bild 90): Weise nach, daß $CH \perp AB$ steht! Parallelogramm $ABFE$ ist flächengleich dem Quadrat $ACDE$ (b^2) und dem Rechteck $AHKB'$ ($c \cdot q$).

2. Der Höhensatz:

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

$$h^2 = p \cdot q$$

Beweis (Bild 92):

$$h^2 = b^2 - q^2 = cq - q^2$$
$$h^2 = q(c - q) = p \cdot q$$

Aufgaben

1. Beweise den Lehrsatz des Pythagoras mit Hilfe des Kathetensatzes!

Zeichenübungen

2. Verwandle mit Hilfe des Kathetensatzes ein Quadrat mit der Seite 4 cm in ein Rechteck, von dem eine Seite **a)** 6,5 cm, **b)** 5,2 cm, **c)** 2,8 cm lang ist!

3. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein Quadrat:

a) $a = 4$ cm	$b = 7$ cm	**b)** $a = 2{,}5$ cm	$b = 4{,}8$ cm
c) $a = 1{,}8$ cm	$b = 6{,}5$ cm	**d)** $a = 8{,}1$ cm	$b = 5{,}9$ cm!

Anleitung: Die längere Seite des Rechtecks wird Hypotenuse und die kürzere Hypotenusenabschnitt eines rechtwinkligen Dreiecks. Der Scheitelpunkt des rechten Winkels wird bestimmt 1. durch den Halbkreis über der Hypotenuse, 2. durch die Senkrechte im Endpunkt des Hypotenusenabschnitts. Damit ist auch die Seite des gesuchten Quadrates bestimmt.

4. Zeichne ein Quadrat, das **a)** doppelt, **b)** dreimal, **c)** fünfmal so groß ist wie das Quadrat mit der Seite 2,5 cm!

5. Die Seite eines Quadrats mißt 7,5 cm. Zeichne das Quadrat, das **a)** halb so groß ist wie das gegebene, **b)** den dritten, **c)** den fünften Teil des gegebenen beträgt!

6. Verwandle **a)** ein Dreieck, **b)** einen Rhombus, **c)** ein Trapez in ein Quadrat!

7. Zeichne ein Quadrat, das gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate ist!

8. Zeichne ein Quadrat mit dem Flächeninhalt

a) 20 cm²	**b)** 29 cm²	**c)** 34 cm²	**d)** 41 cm²
e) 12 cm²	**f)** 21 cm²	**g)** 27 cm²	**h)** 33 cm²!

Anleitung: Zerlege die Zahlen in Summen oder Differenzen von Quadratzahlen oder in geeignete Faktoren, z. B. $60 = 8^2 - 2^2$; $47 = 7^2 - 1^2 - 1^2$ bzw. $5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$; $54 = 6 \cdot 9$!

Anwendungen

9. Der Fußboden eines Wohnzimmers, das 5,5 m lang und 4,2 m breit ist, soll mit Parkett belegt werden. Der vorhandene noch verwendbare Linoleumbelag soll ins Kinderschlafzimmer verlegt werden. Dieses ist quadratförmig, eine Seite mißt 4,65 m. Stelle **a)** durch eine Maßstabzeichnung, **b)** durch Rechnung fest, ob das Linoleum reicht!

10. Infolge einer Flurbereinigung wird ein 28 m langes und 17 m breites Gemüseland gegen ein gleich großes quadratisches getauscht. Einer Zeichnung im Maßstab 1 : 500 kann entnommen werden, wie lang eine Seite des quadratischen Stückes Gemüseland sein muß.

52. Berechnung des Kreisumfanges

Weise an Bild 93 nach, daß der Umfang eines Kreises größer als $6r = 3d$ und kleiner als $8r = 4d$ ist, also zwischen $3d$ und $4d$ liegt!
Miß an walzen- oder kegelförmigen Gegenständen (Töpfen, Büchsen, Teilen des Fahrrades) Durchmesser und Umfang eines Kreises und prüfe, wie-

vielmal der Durchmesser im Umfang enthalten ist! Vergleiche die aus verschiedenen Messungen stammenden Quotienten aus Umfang und Durchmesser miteinander!

Zeichne einen Kreis um M mit $r = 6$ cm und in ihn und um ihn das regelmäßige Sechseck! Vergleiche den Umfang des Kreises mit den Umfängen des eingeschriebenen und umbeschriebenen Sechsecks! Verdopple nun die Seitenzahl, so daß das regelmäßige eingeschriebene bzw. umbeschriebene Zwölfeck entsteht! Vergleiche wieder die drei Umfangslinien! Beachte auch Bild 94!

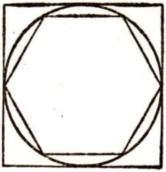


Bild 93

Zeichne einen Kreis von 5 cm Radius und darin einen Durchmesser; nimm dann eine kleine Strecke, etwa $\frac{1}{2}$ cm, in den Zirkel (Stechzirkel) und untersuche, wievielmal sich diese Strecke einmal als Sehne in den Kreis einzeichnen lassen würde und wievielmal sie sich auf dem Durchmesser abtragen läßt! In welchem Verhältnis stehen beide Strecken dann zueinander?

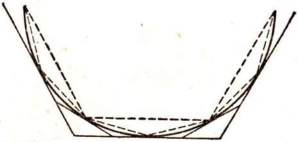


Bild 94

Wenn man den Umfang eines Kreises durch seinen Durchmesser teilt, erhält man immer dieselbe Zahl, die zwischen 3 und 4 liegt; man bezeichnet sie mit dem griechischen Buchstaben π (gelesen „Pi"); die Zahl ist ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch: $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$ In den meisten Fällen begnügt man sich mit den Näherungswerten 3,14; 3,141 6 oder $3\frac{1}{7}$. Zur exakten Herleitung von π sind mathematische Hilfsmittel erforderlich, die erst später zur Verfügung stehen.

1. Der Quotient aus Umfang und Durchmesser hat bei allen Kreisen denselben Wert; er wird mit π bezeichnet.

$$\frac{u}{d} \text{ oder } \frac{u}{2r} = \pi \approx 3{,}14$$

2. Ein Kreis mit dem Halbmesser r hat den Umfang

$$u = 2\pi r$$

3. Die Länge b eines Kreisbogens ist ebensooft in dem Kreisumfang enthalten wie sein Mittelpunktswinkel α in 360°.

$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360}{\alpha}$$

Es ist daher $$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180}$$

Aufgaben

1. Berechne den Umfang eines Kreises, wenn

a) $d = 9$ cm (21 cm; 38,5 cm; 78 cm; 2,52 m)

b) $r = 8$ cm (56 cm; 1,69 m; 54,6 m; 185 m) ist!

In welchem Fall wirst du mit $3\frac{1}{7}$ rechnen?

2. Wie groß ist **a)** der Durchmesser, **b)** der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang 25,12 cm (84,78 cm; 187 cm; 737,9 m; 1000 m) mißt?

3. Wie groß ist in einem Kreis mit dem Halbmesser $r = 14$ cm ein Bogen, der zu dem Mittelpunktswinkel

a) $\alpha = 60°$	**b)** $\alpha = 45°$
c) $\alpha = 36°$	**d)** $\alpha = 24°$
e) $\alpha = 144°$	**f)** $\alpha = 225°$
g) $\alpha = 168°$	**h)** $\alpha = 17°$
i) $\alpha = 59°$	**k)** $\alpha = 63°$

gehört?

4. Berechne den Mittelpunktswinkel α, dessen Bogen gleich dem Halbmesser des Kreises ist!

Anwendungen

5. Ein Tischlermeister soll einen kreisrunden Tisch für 8 Personen anfertigen. Wie groß muß er den Durchmesser nehmen, wenn auf jede Person 80 cm gerechnet werden?

6. a) Miß den Durchmesser an den Rädern deines Fahrrades! Wieviel Umdrehungen machen sie, wenn du eine 45 km lange Strecke fährst?

b) Führe die Berechnung für den Fall durch, daß $d = 73$ cm ist!

7. Der Durchmesser des Triebrades einer Personenzuglokomotive mißt 1,75 m.

a) Welche Strecke legt die Lokomotive bei 100 Umdrehungen zurück?

b) Wie oft dreht sich das Triebrad bei einer Fahrt von Berlin nach Wittenberg (95 km)?

Aus der Technik

8. Der Durchmesser von Röhren wird in der Technik in mm angegeben. Gas- und Wasserleitungsrohre haben u. a. folgende äußere Rohrdurchmesser: 56; 118; 274; 429; 738; 1256. Berechne jedesmal den Umfang des Rohres!

9. Wie groß ist der Durchmesser, wenn **a)** ein Wagenrad einen Umfang von 3,77 m, **b)** ein Baum einen Umfang von 2,35 m, **c)** eine Regenrinne einen Umfang von 47,1 cm, **d)** eine Rundsäule einen Umfang von 2,83 m hat?

10. Der Bauklempner schneidet aus einer 2 m langen und 1 m breiten Blechtafel sechs Rohrmäntel parallel zur kürzeren Seite für die Abfallrohre der Regenrinnen. Vom Umfang jedes Mantels gehen 1,5 cm für die Lötnaht ab. Wie groß ist der Durchmesser eines Rohres?

11. Ein Stück Blech soll zu Wellblech, dessen Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen mit dem Halbmesser $r = 2$ (3; 3,5; 4; 5) zusammensetzt, geformt werden.

a) Fertige dazu eine Zeichnung an und berechne ($r = 2$ cm), wieviel m glattes Blech man zu 1 m Wellblech braucht!

b) Untersuche, ob man an Blech spart, wenn man der Rechnung einen anderen der angeführten Halbmesser zugrunde legt!

c) Führe die Rechnung auch mit allgemeinen Zahlen durch!

Erdkundliches

12. a) Die Länge des Erdäquators wird mit rund 40 000 km angegeben. Berechne daraus den Halbmesser der Erde!

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit (in m/s) eines Ortes am Äquator infolge der Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse?

c) Denke dir um die Erdkugel längs des Äquators einen Strick gelegt! Man will den Strick nun so lang machen, daß er überall einen Meter von der Erdoberfläche absteht. Um wieviel m muß er zu diesem Zweck verlängert werden?

13. Berechne auf einem Längengrad

a) den Bogen, der zum Mittelpunktswinkel 1° (1′) gehört,

b) den Mittelpunktswinkel, der zu einer geographischen Meile (7 420 m) gehört (Halbmesser der Erdkugel $r = 6\,370$ km)!

53. Berechnung des Kreisinhaltes

Bestimme den Inhalt des Kreises in Bild 95, indem du einmal die Quadrate auszählst, die ganz innerhalb des Kreises liegen; beim zweitenmal zähle auch die Quadrate mit, die von der Kreislinie durchschnitten werden! Miß nach, wieviel der kleinen Quadrate in 1 cm² enthalten sind, und vergleiche die für den Inhalt des Kreises gefundenen Näherungswerte mit dem Inhalt des Quadrates über seinem Halbmesser! Zeichne auf Millimeterpapier Kreise mit verschiedenen Halbmessern (1 cm; 2 cm; 3,2 cm), ermittle die angenäherten Flächeninhalte der Kreise und gib jedesmal das Verhältnis aus dem Flächeninhalt und dem Quadrat über dem entsprechenden Halbmesser an! Schneide aus Pappe einen Kreis mit der Längeneinheit 1 dm Halbmesser aus und ebenso ein Quadrat mit derselben Längeneinheit. Wiege beide Stücke recht sorgfältig und berechne, wievielmal so schwer die Kreisscheibe ist als das Quadrat. (Bei einem dieser Versuche ergeben sich die Gewichte 60 g und 19 g, also 3,15 die „Verhältniszahl" beider Gewichte.) Genau sovielmal so groß ist auch die Fläche des Einheitskreises wie die des Einheitsquadrates, oder:

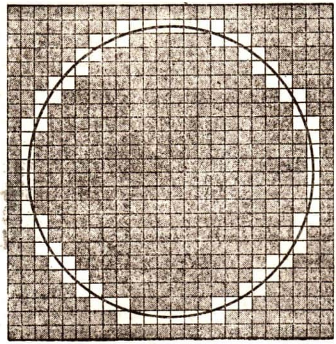


Bild 95

Die Fläche des Einheitskreises ist rund 3,14 Flächeneinheiten groß.

Schneide nun aus demselben Material Kreise mit dem Radius 2 dm, 3 dm usw. aus und bestimme ihre Gewichte. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Gewicht des Einheitskreises. Man findet: Ist der Radius doppelt so groß, so ist das Gewicht 4mal so groß, ist der Radius 3mal so groß wie der des Einheitskreises, so ist das Gewicht 9mal so groß wie das des Einheitskreises; die Gewichte nehmen also mit dem Quadrat des Halbmessers zu, dasselbe muß auch für die Flächeninhalte gelten, d. h.:

Die Kreisinhalte nehmen, verglichen mit dem Inhalt des Einheitskreises, wie die Quadrate ihrer Radien zu.

Da der Kreis mit dem Radius der Längeneinheit den Inhalt π hat, so ist der Inhalt des Kreises mit dem Radius $r = \pi r^2$.

1. Ein Kreis mit dem Halbmesser r hat den Flächeninhalt $F = \pi r^2$.
2. Der Flächeninhalt A eines Kreisausschnittes mit dem Mittelpunktswinkel α ist

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{2} r \cdot \pi r \frac{\alpha}{180} = \frac{1}{2} r \cdot b.$$

Inwiefern erinnert diese Formel an die für den Inhalt eines Dreiecks?

Anleitung für den Beweis zu Satz 2 (Bild 96): Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes steht zum Flächeninhalt des Kreises in demselben Verhältnis wie sein Bogen b zum Kreisumfang u oder wie sein Mittelpunktswinkel α zu 360°.

$$A : \pi r^2 = b : u \quad \text{oder} \quad A : \pi r^2 = \alpha : 360°$$

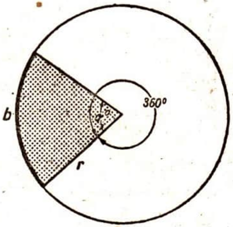


Bild 96

Aufgaben

1. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Halbmesser

   a) $r = 7$ cm, **b)** $r = 35$ cm, **c)** $r = 4{,}2$ cm, **d)** $r = 5{,}6$ cm, **e)** $r = 18$ mm!

2. Der Durchmesser eines Kreises beträgt **a)** $d = 12$ cm, **b)** $d = 16$ cm, **c)** $d = 27$ cm, **d)** $d = 45$ m, **e)** $d = 32$ mm. Berechne den Flächeninhalt!

3. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit einem Umfang von

   a) 1,56 m, **b)** 3,25 m, **c)** 18,7 cm, **d)** 2 m, **e)** 56,6 cm, **f)** 12,56 m, **g)** 345,40 m!

4. Ein Quadrat und ein Kreis haben den gleichen Umfang von 110 cm. Welche Fläche ist größer?

5. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt und ungleichen Halbmessern begrenzen einen Kreisring. Der Unterschied der beiden Halbmesser heißt Breite des Ringes. Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisringes mit den Halbmessern **a)** $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm, **b)** $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 9$ cm, **c)** $r_1 = 1{,}6$ cm; $r_2 = 1{,}4$ cm?

   d) Entwickle eine Formel für den Flächeninhalt des Kreisringes!

6. Berechne den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn folgende Stücke gegeben sind:

a) Radius $r = 25$ cm, Mittelpunktswinkel $\alpha = 60°$
b) „ $r = 32$ cm, „ $\alpha = 72°$
c) „ $r = 16$ cm, „ $\alpha = 39°$
d) „ $r = 40$ cm, „ $\alpha = 112°$
e) „ $r = 56$ cm, Bogen $b = 88$ cm
f) „ $r = 62$ cm, „ $b = 57$ cm
g) „ $r = 18$ cm, „ $b = 39$ cm!

7. Zeichne drei Kreise, deren Halbmesser 2 cm; 4 cm und 6 cm messen! Berechne **a)** die Umfänge, **b)** die Inhalte der Kreise und vergleiche die Ergebnisse!

8. Der Stamm einer alten Eiche im Park von Muskau hat einen Umfang von 7,85 m. Berechne seinen Querschnitt!

9. Die Seite einer quadratischen Marmorplatte mißt 89 cm. Aus ihr wird die größte Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne **a)** die Tischfläche, **b)** den Abfall!

10. Ein gußeisernes Wasserleitungsrohr hat einen Umfang von 248 cm und eine Wandstärke von 2 cm. Wie groß ist sein metallischer Querschnitt?

11. Verschaffe dir die Maße der wirklichen Größe des in Bild 97 gezeichneten Verkehrszeichens und berechne die Größe des weißen Kreises und des roten Randes!

12. T e c h n i k. Eine Zugstange aus Schmiedeeisen hat einen Umfang von 9,60 cm. Die höchste zulässige Zugkraft für 1 cm² Querschnitt beträgt 825 kg. Wieviel kg Zug darf auf die Zugstange höchstens ausgeübt werden?

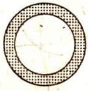


Bild 97

13. Bild 98 zeigt die Hochsprunganlage eines Sportplatzes, die aus einer rechteckigen Sprunggrube und einem Anlauffeld besteht.

a) Zeichne die Anlage im Maßstab 1 : 100!

b) Entnimm deiner Zeichnung die fehlenden Maße, insbesondere den Mittelpunktswinkel und berechne die Fläche der Sprunggrube, die Anlauffläche und die Gesamtfläche der Anlage!

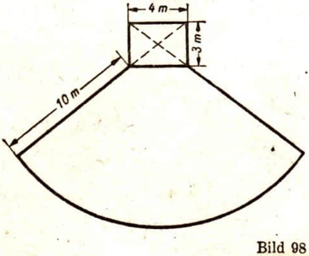


Bild 98

XIII. Berechnung einfacher Körper

54. Würfel und Quader

Stelle das Pappmodell eines nach oben aufklappbaren Würfels her, dessen Kante 5 cm lang ist! Wieviel Würfel von 1 cm^3 Inhalt brauchst du, um den Boden einmal zu bedecken? Wieviel solcher Schichten mußt du übereinanderlegen, um den ganzen Würfel auszufüllen?

Stelle das Pappmodell eines Quaders her, dessen Kanten 5 cm, 4 cm und 3 cm lang sind und stelle wie beim Würfel fest, wieviel Kubikzentimeter nötig sind, um den Quader auszufüllen!

Bestimme die Oberflächen von Würfel und Quader!

Erklärungen

1. Der Rauminhalt eines Körpers wird gemessen durch die Anzahl der Einheitswürfel, mit denen er ausgefüllt werden kann.
2. Der Rauminhalt eines Körpers wird gewöhnlich nicht ausgezählt, sondern aus der Länge seiner Kanten berechnet.

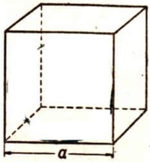


Bild 99

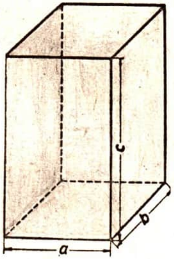


Bild 100

3. Die Einheit der Raummaße ist das Kubikmeter (m^3). Zum Messen großer oder kleiner Rauminhalte verwendet man Vielfache oder Teile des Kubikmeters.

1. Der Rauminhalt eines Würfels mit der Kante a (Bild 99) ist

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

2. Der Rauminhalt eines Quaders mit den Kanten a, b, c (Bild 100) ist

$$V = a \cdot b \cdot c = abc$$

3. Die Oberfläche eines Würfels mit der Kante a ist

$$O = 6a^2$$

4. Die Oberfläche eines Quaders mit den Kanten a, b und c ist

$$O = 2(ab + bc + ac)$$

Aufgaben

1. Berechne Oberfläche und Rauminhalt für Würfel mit folgenden Kantenlängen:

a) 12 cm **b)** 7 mm **c)** 3,5 m **d)** 1,3 dm!

2. Berechne Oberfläche und Rauminhalt für Quader mit folgenden Kantenlängen:

	a	*b*	*c*
a)	25 cm	12 cm	17 cm
b)	36 cm	45 cm	8 cm
c)	2 m	0,8 m	1,5 m
d)	5 dm	20 cm	4 dm

3. Berechne in folgender Zusammenstellung, die Kantenlängen und Rauminhalte von Quadern enthält, die fehlenden Größen:

	Länge *a*	Breite *b*	Höhe *c*	Rauminhalt *V*
a)	5 cm	4 cm	3 cm	
b)	3 cm	4 cm		96 cm³
c)	15,3 m		4,7 m	89,8875 m³
d)		2,5 dm	0,3 dm	15,75 dm³

4. Berechne Rauminhalt und Gewicht (Rauminhalt mal Wichte) von Quadern nach folgenden Angaben:

	Länge *a*	Breite *b*	Höhe *h*	Werkstoff	Wichte
a)	2,9 cm	1,3 cm	0,7 cm	Blei	11,36 g/cm³
b)	41 cm	23 cm	19 cm	Aluminium	2,5 g/cm³
c)	25 cm	4 cm	0,75 cm	Gußeisen	7,2 g/cm³
d)	85 cm	42 cm	7 cm	Granit	2,7 g/cm³
e)	1,2 m	0,80 m	12 cm	Sandstein	2,3 g/cm³

5. In folgender Übersicht sind die Kantenlängen und Gewichte von Würfeln aus verschiedenem Material zusammengestellt. Ermittle die verwendeten Werkstoffe!

	Kantenlänge	Gewicht
a)	12 cm	10,714 kg
b)	4 cm	727 g
c)	25 cm	39,063 kg
d)	30 cm	72,9 kg
e)	33 cm	82,655 kg

6. a) Ein Klassenzimmer ist 11,35 m lang, 7,25 m breit und 4,10 m hoch. Wie groß ist sein Rauminhalt?

b) Meßt euer Klassenzimmer aus und bestimmt seinen Rauminhalt!

7. Aus einer rechteckigen Weißblechtafel mit den Kanten $a = 53$ cm, $b = 76$ cm soll ein oben offener Kasten hergestellt werden. Um Werkstoff zu sparen, wird die Blechtafel so eingeteilt, daß nichts abfällt (Bild 101, Maßstab 1 : 10).

a) Wie hoch wird der Kasten?

b) Welchen Rauminhalt hat er?

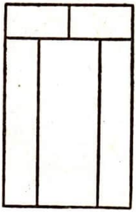


Bild 101

8. Kachelofen. Ein quaderförmiger Kachelofen steht auf einem 20 cm hohen Sockel und hat einschließlich des Sockels die folgenden Ausmaße: 200 cm · 80 cm · 48 cm. Auf einer Schmalseite ist zum Warmhalten von Geschirr und dgl. ein Hohlraum von 30 cm Breite, 40 cm Tiefe und 25 cm Höhe eingelassen.

a) Wie groß ist die Wärmfläche des Ofens 1. ohne, 2. mit Berücksichtigung des Hohlraumes? (Nach unten in den Sockel hinein findet keine Wärmeabgabe statt.)

b) Welchen Rauminhalt hat der Ofen mit und ohne Hohlraum?

Von Lastkraftwagen und ihren Lasten

9. Die Ladekästen (Pritschen) einiger gebräuchlicher deutscher Lastkraftwagen haben folgende Ausmaße:

Pritschenlänge	4,0 m	4,4 m	5,0 m
Pritschenbreite	2,05 m	2,3 m	2,35 m
Wandhöhe	0,47 m	0,465 m	0,5 m
Nutzlast	3 000 kg	3 500 kg	6 000 kg

a) Berechne für jeden Wagen das Fassungsvermögen der Kästen!

b) Prüfe nach, ob bei einer Beladung mit Sand (Wichte 2,1 g/cm³) oder mit Schlacke (Wichte 0,7 g/cm³) die zulässige Ladegrenze erreicht wird oder nicht, und gib an, wieviel m³ von jedem dieser Stoffe höchstens geladen werden dürfen!

10. Ein Ziegelstein der deutschen Regelform ist 25 cm lang, 12 cm breit, 6,5 cm hoch (Wichte 1,8 g/cm³).

a) Welchen Rauminhalt, welches Gewicht hat er?

b) Wieviel Ziegelsteine könnte ein Lastkraftwagen (Aufg. 9) höchstens laden?

11. Gehsteigplatten aus Granit sind 75 cm lang und 60 cm breit und 10 cm hoch. 1 m^3 des Gesteins wiegt 2,8 t. Wieviel Platten kann jeder Wagen in Aufg. 9 laden?

12. Große Pflastersteine aus Granit sind 20 cm lang, 15 cm breit und 13 cm hoch. Wieviel Steine kann jeder Wagen laden?

13. Zum Bau von Baracken sollen quaderförmige Holzbalken von 4,5 m Länge, 20 cm Breite und 15 cm Höhe verladen werden, 1 cm^3 des Holzes wiegt 0,7 t. Wieviel Balken kann jeder Wagen laden, wenn bei den kleineren Wagen die Rückwand heruntergeklappt wird?

Schiffshebewerk

14. Der Trog eines Schiffshebewerkes hat eine Länge von 85 m, eine Breite von 12 m, eine Wassertiefe von 2,50 m.

a) Welchen Raum nimmt die Wassermenge ein; wie schwer ist sie?

b) Die gesamte Eisenkonstruktion des Troges wiegt 1 600 t. Wie schwer ist der mit Wasser gefüllte Trog?

c) Wie schwer ist der Trog, wenn ein Schiff von 1 000 t Gewicht eingefahren ist? (Denke an die Wasserverdrängung!)

15. Ein anderes Schiffshebewerk hat einen Trog mit einer Breite von 12,50 m, einer Länge von 85 m. Seine Wassertiefe beträgt 2,50 m.

a) Wieviel Wasser faßt der Trog?

b) Das Gewicht des leeren Troges und der Stahlträger, auf denen er ruht, ist ebenso groß wie das Gewicht seiner Wasserfüllung. Welche Last wird bei jedem Aufstieg des Troges gehoben?

55. Senkrechte Säulen und Zylinder

Bild 102 zeigt dir kantige Säulen. Zeichne die Endflächen dieser kantigen Säulen! Zeichne ihre Seitenflächen! Zerschneide einen Quader aus Plastilin in der Richtung einer Diagonale der Grundfläche. Vergleiche den Rauminhalt einer der entstandenen Säulen mit dem des ursprünglichen Quaders! Zerlege auch die Endflächen der kantigen Säulen durch Diagonalen in Dreiecke!

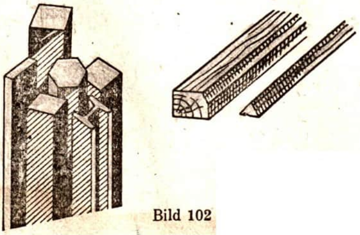


Bild 102

Erklärungen:

Kantige Säulen haben als Grund- und Deckfläche deckungsgleiche Vielecke. Die Seitenflächen der kantigen Säulen sind Rechtecke.

Rundsäulen oder **Zylinder** haben als Grund- und Deckfläche deckungsgleiche Kreisflächen; die Seitenfläche oder der **Mantel** läßt sich in ein Rechteck abwickeln.

1. Eine gerade Säule mit der Grundfläche G und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = G \cdot h$$

Beweis: a) Für eine dreiseitige Säule mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche (Bild 103):

Die gegebene Säule wird mit einer dazu deckungsgleichen zusammengesetzt zu einem Quader.

Dann ist Quaderinhalt = Quadergrundfläche · Quaderhöhe,

also Säuleninhalt = halber Quaderinhalt
= halbe Quadergrundfläche · Quaderhöhe
= Säulengrundfläche · Säulenhöhe.

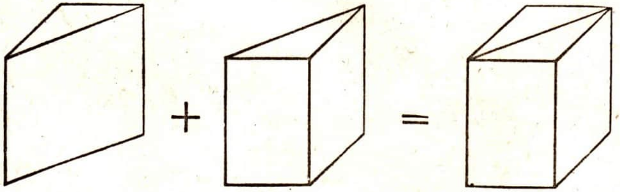


Bild 103

Entsprechend verläuft der Beweis

b) für eine beliebige gerade dreiseitige Säule (Bild 104),

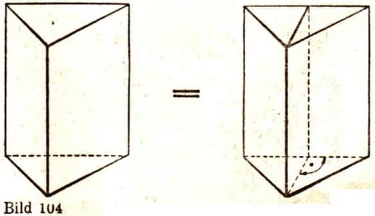


Bild 104

c) für eine beliebige gerade Säule (Bild 105):

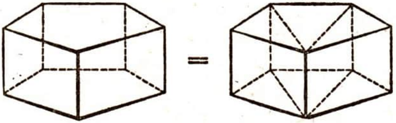


Bild 105

2. Der gerade Zylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = \pi r^2 h$$

Beweis: Der Zylinder kann mit beliebiger Genauigkeit durch kantige Säulen genügend hoher Kantenzahl ersetzt werden.

3. Die Oberfläche des geraden Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h ist

$$O = 2\pi r(r + h)$$

Beweis (Bild 106): Durch Abrollen des Mantels entsteht ein Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfang des Grundkreises, also $2\pi r$, und dessen Breite gleich der Höhe h des Zylinders ist. Der Inhalt ist also gleich $2\pi r h$. Zur Mantelfläche $2\pi r h$ müssen die beiden Kreisflächen $2\pi r^2$ addiert werden: $2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$.

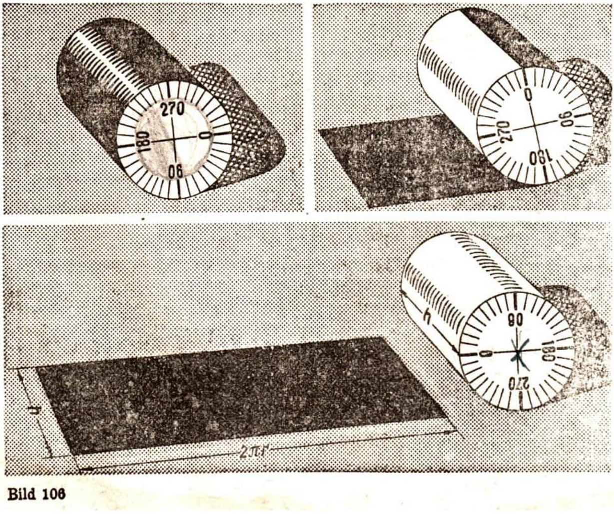


Bild 106

Aufgaben

1. Die Grundfläche einer dreiseitigen Säule ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 4 cm und 3 cm, ihre Höhe beträgt 20 cm. Berechne ihre Oberfläche und ihren Rauminhalt!

2. Berechne **a)** den Mantel (d.i. die Summe der Seitenflächen), **b)** die Oberfläche, **c)** den Rauminhalt der in Bild 107 dargestellten regelmäßigen Sechskantsäule, deren Maße in cm in der Zeichnung angegeben sind.

   Anleitung: Zerlege die Grundfläche in 6 deckungsgleiche Dreiecke, deren Höhe du berechnen kannst!

3. **a)** bis **c)** Führe dieselbe Aufgabe für die in Bild 108 wiedergegebene regelmäßige fünfseitige Säule durch! Die angegebenen Zahlen bedeuten wieder die wahren Maße in cm.

   Anleitung: Zeichne die Grundfläche in wahrer Größe in dein Heft und zerlege sie in 5 deckungsgleiche Dreiecke, deren Höhe du der Zeichnung entnehmen kannst!

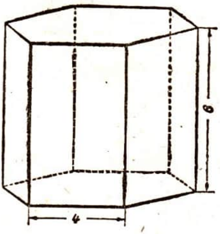


Bild 107

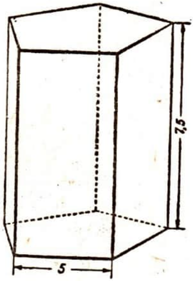


Bild 108

4. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um die Seite a gedreht. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche der entstandenen Rundsäule?

   a) $a = 9$ cm; $b = 7$ cm **b)** $a = 15$ cm; $b = 18$ cm

5. Um wieviel cm³ ändert sich der Rauminhalt, wenn das Rechteck (Aufg. 4) um die Seite b gedreht wird?

6. Wird ein Rechteck um seine größere Seite gedreht, so entsteht eine Rundsäule mit der Oberfläche $O = 648$ cm². Wie lang sind die Seiten des Rechtsecks, wenn sie sich um 3 cm unterscheiden?

7. Die Giebelseite eines Daches ist ein gleichseitiges Dreieck.

   a) Die Länge der Dreiecksseite betrage 10 m und die Länge des Daches 15 m. Fertige eine maßgerechte Zeichnung (1 : 200) von der Stirnfläche und einer Seitenfläche des Daches!

7. b) Wie groß ist die Fläche des Daches, die mit Ziegeln gedeckt werden muß?

c) Das gleichseitige Dreieck hat eine Fläche von 43,3 m². Welchen Luftraum umschließt das Dach?

8. Die Sprunglatte, die beim Hochsprung benutzt wird, hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 30 mm lang ist. Die Sprunglatte ist 4 m lang. Wie schwer ist sie, wenn das gleichseitige Dreieck einen Flächeninhalt von 389,7 mm² hat und 1 cm³ des Holzes 0,79 g wiegt?

9. Bild 109 zeigt verschiedene Querschnitte des Mittellandkanals: **a)** des Dortmund-Ems-Kanals vor der Erweiterung, **b)** des Dortmund-Ems-Kanals nach der Vergrößerung, **c)** des Ems-Weser-Kanals. Flächeninhalt des Kanalquerschnittes: **a)** 103,9 m², **b)** 109,0 m², **c)** 81,5 m². Berechne die Wassermengen bei einer Kanallänge von 120 m!

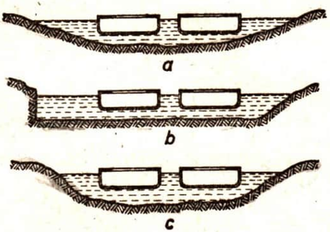


Bild 109

10. Nach den Wettkampfbestimmungen ist für Steinstoßen ein vierkantiges Wurfgerät von 15 kg Gewicht vorgeschrieben. Es wird beispielsweise ein Eisenquader verwendet, der 15 cm lang, 10 cm breit und 13 cm hoch ist. Wieviel g wiegt 1 cm³ Eisen?

11. Ein Giebelzelt wird aus quadratischen Zeltbahnen hergestellt (Bild 110). Eine quadratische Zeltbahn ist 1,60 m lang. Wieviel m² Zeltstoff werden für das Zelt verwendet, und wieviel m³ Luftraum stehen zur Verfügung, wenn die vordere Fläche des Zeltes 1,28 m² groß ist?

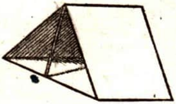


Bild 110

12. Eine Lieferung eichener Eisenbahnschwellen umfaßt 1 200 „Zwischenschwellen“, die 2,5 m lang, 25 cm breit und 16 cm hoch sind, und 180 „Stoßschwellen“, die 30 cm breit sind und in den übrigen Maßen mit den Zwischenschwellen übereinstimmen. Wieviel Güterwagen sind für die Beförderung der Schwellen nötig, wenn 1 m³ Eichenholz 900 kg wiegt und ein Güterwagen mit 10 t beladen werden darf?

13. Bild 111 zeigt die Querschnitte von gleichschenkligen Winkeleisen (a), ungleichschenkligen Winkeleisen (b) und ⅂_-Eisen (c). Die Fläche des Querschnitts ist bei (a) 26,2 cm²; bei (b) 33,2 cm²; bei (c) 14,5 cm². Wie schwer ist ein solches Eisen von 4 m Länge, wenn 1 cm³ Eisen 7,8 g wiegt?

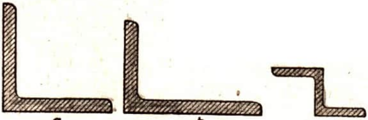


Bild 111

Eichung von Gefäßen

14. Bis zu welcher Höhe füllt ein Liter Wasser ein Gefäß von der Form einer Rundsäule, wenn der Halbmesser des Grundkreises 4 cm beträgt?

15. Ein Meßzylinder soll in cm³ eingeteilt werden; die Teilstriche sollen 2 mm voneinander entfernt sein. Wie groß muß bei der Herstellung der lichte Durchmesser gemacht werden?

16. Nach der Eichordnung sollen Hohlmaße bis zum Eichstrich doppelt so hoch wie weit sein. In welcher Höhe muß deshalb der Eichstrich eines Fünflitermaßes angebracht sein?

17. Haarröhrchen. Um den Durchmesser eines Haarröhrchens zu bestimmen, wurden 150 mg Quecksilber hineingebracht (Wichte = 13,6 g/cm³). Der entstandene Quecksilberfaden war 9 mm lang. Berechne den Durchmesser des Haarröhrchens!

Aus der Werkstatt des Klempners und Schlossers

18. Ein rechteckiges Stück Blech mit den Seiten $a = 20$ cm und $b = 45$ cm wird zum Mantel einer Rundsäule zusammengebogen. Bei welchem der beiden möglichen Fälle erhält man den größeren Hohlraum? (Rechne 1 cm auf den Falz!)

19. Ein Badeofen in Form einer Rundsäule, der 222 l faßt, hat einen Durchmesser von 50 cm. Das im Inneren befindliche Rauchrohr hat einen Durchmesser von 12 cm. Wie hoch ist der Badeofen, und wieviel Blech war zu seiner Herstellung nötig, wenn für den Falz 5% gerechnet werden?

20. Eine Riemenscheibe von 8 cm Breite erhält einen Stahlmantel (Wichte = 7,9 g/cm³), wodurch der Durchmesser von 30 auf 32 cm vergrößert wird. Berechne die durch den Stahlmantel entstandene Gewichtszunahme!

21. Es soll ein Scheibenrad hergestellt werden ($r = 10$ cm), dessen Gewicht durch 4 kreisförmige Löcher um $\frac{1}{4}$ des Gesamtgewichtes verringert werden soll. Berechne den Durchmesser der Löcher!

22. Der Mantel eines 16 m hohen und 24 m weiten (äußere Weite!) Gasbehälters wird mit Mennige grundiert und dann dreimal mit Ölfarbe gestrichen. 1 m² wird mit 1,15 DM berechnet. Berechne die Kosten für den Anstrich!

23. Ein gußeisernes Wasserleitungsrohr ist 5,25 m lang und besitzt einen Umfang von 2,20 m. Es wiegt 1 220 kg. Die Wichte des Eisens ist 7,3 g/cm³. Wie dick ist die Wand des Rohres?

Aus der Elektrotechnik

24. Wieviel kg Kupfer sind zur Herstellung eines 8 500 km langen Leitungsdrahtes erforderlich, wenn er einen Durchmesser von 1 mm (1,2 mm; 0,8 mm) besitzen soll und die Wichte des Kupfers 8,9 g/cm³ ist?

25. Für das Gehäuse einer kleinen Gleichstromdynamomaschine hat man ein normales Eisenrohrstück von 102/87 mm ⌀ und 80 mm Länge nötig. Berechne das Gewicht des Rohrstückes! (Wichte des Eisens s. Aufg. 23!)

26. Aus der Motortechnik. Für die verschiedenen Motoren der Verbrennungskraftmaschinen gibt es Erfahrungswerte für das Verhältnis $K = \frac{\text{Hub}}{\text{Zylinderdurchmesser}}$. Berechne den Hubraum für Zylinderdurchmesser von 4 (5; 7; 9,5) cm nach der Tafel!

Motorart	K
Dieselmotoren ...	1,30 bis 1,70
Ottomotoren	1,10 „ 1,45

56. Pyramide und Kegel

1. Zerschneiden eines Würfels. Versuche einen Würfel aus Ton, Kitt oder Plastilina nach Art von Bild 112 durch Schnitte in drei deckungsgleiche Pyramiden zu zerlegen!

a) Durch welche Eckpunkte gehen die einzelnen Schnittebenen? Welche Gerade ist ihnen gemeinsam?

b) Gib die entstandenen Pyramiden an, schreibe an die Eckpunkte in Bild 112 die Buchstaben! Vergleiche die Pyramiden hinsichtlich ihrer Größe miteinander und mit dem Würfel!
Wäge sie ab! Welche Vermutungen ergeben sich?

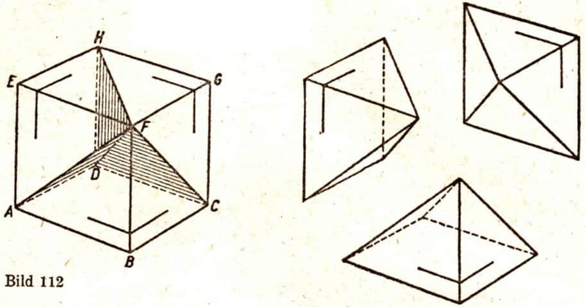


Bild 112

2. Versuchsmäßige Bestimmung des Rauminhalts. Zeichne auf dünne Pappe das Netz einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 5$ cm und der Höhe $h = 4$ cm und das Netz einer quadratischen Säule mit gleicher Grundkante und Höhe (beide ohne Grundfläche)! Fertige aus beiden Netzen Modelle an, die an der Grundfläche offen sind! Fülle die Pyramide bis zum Rand mit trockenem Sand und entleere sie in die quadratische Säule! Wie oft läßt sich dies ausführen?

3. Fertige eine Blumentüte und dazu das Modell einer Rundsäule mit derselben Grundfläche und Höhe an! Führe den Versuch der Aufgabe 2 für Kegel und Rundsäule aus!

1. Der Rauminhalt einer Pyramide ist ein Drittel des Rauminhaltes eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Bemerkung: Der Satz muß der Erfahrung entnommen werden, da zu seinem Beweis die noch nicht behandelte Ähnlichkeitslehre erforderlich ist.

2. Der Rauminhalt eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreishalbmesser r und der Höhe h ist

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Beweis (Bild 113): Ein gerader Kreiskegel kann als eine gerade Pyramide mit der Grundfläche πr^2 und der Höhe h angesehen werden.

3. Der Mantel eines geraden Kegels mit dem Grundkreishalbmesser r und der Mantellinie s hat den Flächeninhalt

$$M = \pi r s$$

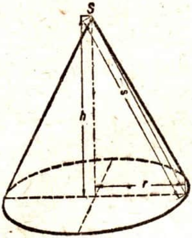


Bild 113

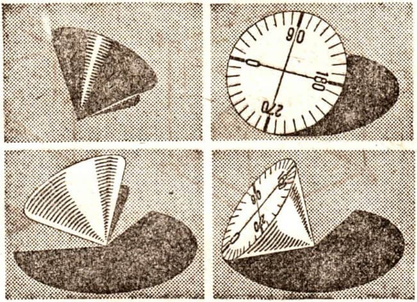


Bild 114

Beweis (Bild 114a bis d): Die Abwicklung des Kegelmantels liefert einen Kreisausschnitt. Dabei ist der Halbmesser ϱ des Kreisausschnittes gleich der Mantellinie s, der Bogen b des Kreisausschnittes gleich dem Grundkreisumfang $2\pi r$ des Kegels. Also ergibt sich nach Abschn. 53 für den Flächeninhalt des Kreisausschnittes

$$M = \frac{b\varrho}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s$$

4. Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreishalbmesser r und der Mantellinie s hat den Flächeninhalt

$$O = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s)$$

Aufgaben

1. Ein Turm, der die Gestalt einer quadratischen Säule hat, endigt in einer quadratischen Pyramide. Sein Umfang mißt 12 m, die Seitenhöhe des Daches 5,75 m.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe der Turmspitze fest und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach!

b) Wieviel DM kostet das Decken des Daches, wenn für 1 m² Schieferdach 7,50 DM zu zahlen sind?

2. Die Cheopspyramide bei Giseh hat als Grundfläche ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 233 m und ist 145 m hoch.

a) Berechne die Höhe eines Seitendreiecks!

b) Berechne die Länge einer Seitenkante!

c) Wie groß ist ihr Rauminhalt?

3. Ein Zelt, das am Boden 11 m Umfang hat, hat die Gestalt einer quadratischen Pyramide. Seine Höhe beträgt 1,60 m. Berechne den Luftraum, den das Zelt umschließt!

4. Das Walmdach eines Hauses von $a = 25$ m Breite und $b = 14$ m Tiefe ist unter dem Neigungswinkel $\alpha = 60°$ gegen alle Seiten aufgesetzt.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe des Daches fest!

b) Berechne den Bodenraum (2 Ebenen, die senkrecht zum Dachfirst durch dessen Endpunkte gelegt werden, trennen 2 halbe Pyramiden ab)!

5. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b wird um die Kathete a gedreht. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt des entstehenden Kegels?

a) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm **b)** $a = 24$ cm; $b = 7$ cm

c) $a = 15$ cm; $b = 8$ cm **d)** $a = 40$ cm; $b = 9$ cm

6. Ein Quadrat wird um eine seiner Diagonalen gedreht. Wie groß ist die Seite des Quadrats, wenn der entstandene Doppelkegel den Rauminhalt $V = 625$ cm³ besitzt?

7. Der aufgerollte Mantel eines geraden Kegels ist ein Kreisausschnitt mit der Fläche $M = 150$ cm² und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 60°$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

8. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 10$ cm! Schneide einen Halbkreis heraus und forme ihn zu einem Kegel. Wie groß ist sein Rauminhalt?

Dächer

9. Das kegelförmige Dach eines Eiskellers hat 4 m Radius in der Traufe bei 3 m Höhe. Es erhält eine 25 cm starke Eindeckung von Stroh. Wieviel m³ Stroh sind zur Eindeckung nötig?

10. Auf einen kreisrunden Turm mit 11 m Umfang ist ein 6 m hohes kegelförmiges Dach gesetzt und mit Zinkblech beschlagen worden. 1 m² kostet einschließlich Arbeitslohn 5,60 DM. Wie teuer wurde das Dach?

Verschiedenes

11. Eine stählerne Welle endet in zwei Kegeln. Berechne das Gewicht der Welle! Wichte 7,9 g/cm³. Entnimm die Maße dem Bild 115!

12. Aus einem Marmorkegel (Wichte 2,84 g/cm³) mit der Höhe $h = 21$ cm und der Mantellinie $s = 29$ cm ist ein Kegel von gleicher Grundfläche und der Höhe $h' = 7$ cm ausgebohrt und der Raum mit Blei gefüllt worden (Wichte = 11,35 g/cm³). Wie schwer ist nun der Kegel geworden?

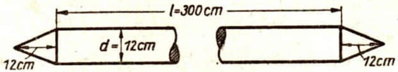


Bild 115

13. Genormte Trichter haben einen Öffnungswinkel von 60° und eine Trichterweite von 4,5 cm; 7 cm; 10 cm; 25 cm. Wieviel cm³ können in die Trichter hineingefüllt werden?

57. Inhalt und Oberfläche der Kugel

Vergleiche eine Glasmurmel, einen Ball, eine Kegelkugel usf. miteinander! Durch welches Bestimmungsstück allein unterscheiden sich die Kugeln voneinander? Oberfläche und Rauminhalt der Kugel sind also nur von der Größe des Kugelradius abhängig.
Miß den Durchmesser einer Glasmurmel, stelle ihren Rauminhalt durch Hineinlegen in einen Meßzylinder mit genau bekanntem Wasserinhalt fest und vergleiche ihn mit dem Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante gleich dem Radius der Glasmurmel ist!
Fülle einen Schöpflöffel, der die Form einer Halbkugel hat, mit Wasser aus einem Meßzylinder! Vergleiche den Rauminhalt des Schöpflöffels wieder mit dem Rauminhalt des Würfels, dessen Kante gleich dem Radius des Schöpflöffels ist!

1. Der Rauminhalt einer Kugel mit dem Radius r ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist

$$O = 4\pi r^2$$

Versuchsweise Bestimmung des Rauminhaltes der Kugel

Stelle aus Pappe einen Zylinder und einen Kegel her, die dieselbe Grundfläche wie ein halbkugelförmiger Schöpflöffel und den Radius der Grundfläche zur Höhe haben (Bild 116)! Fülle den Kegel mit trockenem Sand und untersuche, wie oft der Inhalt des Kegels in die Rundsäule und in den Schöpflöffel entleert werden kann! Der Versuch zeigt zwischen den Rauminhalten der drei Körper die Beziehung: Rauminhalt der Halbkugel = Rauminhalt der Rundsäule − Rauminhalt des Kegels.

Bemerkung: Zum exakten Beweis dieser Beziehungen sind Hilfsmittel erforderlich, die jetzt noch nicht zur Verfügung stehen.

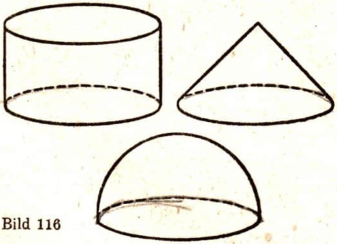


Bild 116

Da aber der Rauminhalt der Rundsäule $\pi r^2 \cdot r$ oder πr^3 und der Rauminhalt des Kegels gleich $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$ oder $\frac{1}{3}\pi r^3$ ist, so erhält man für den Rauminhalt der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$. Für die Vollkugel ergibt sich damit

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Beweis zu Satz 2: Denkt man sich der Kugel einen Körper mit n ebenen Flächen einbeschrieben und verbindet alle Ecken dieses Körpers mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entstehen n Pyramiden mit den Höhen $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ und den Grundflächen $g_1, g_2, g_3 \ldots g_n$ (Bild 117). Für den Rauminhalt dieses Körpers erhält man $\frac{1}{3}(g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + \cdots + g_n h_n)$. Mit wachsendem n nähern sich die Höhen unbegrenzt dem Wert r und die Summe der n Grundflächen der Pyramiden unbegrenzt der Oberfläche O der Kugel. Für den Rauminhalt der Kugel darf daher gesetzt werden

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{O \cdot r}{3}$$

Daraus folgt für die Oberfläche

$$O = 4\pi r^2$$

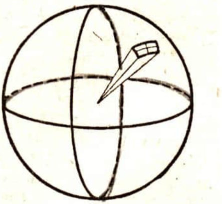


Bild 117

Aufgaben

1. Eine Kugel hat den Radius **a)** $r = 15{,}4$ cm, **b)** $r = 32{,}5$ cm. Wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Eine Kugel hat die Oberfläche **a)** $O = 616\ \text{cm}^2$, **b)** $O = 55{,}44\ \text{cm}^2$. Wie groß ist ihr Rauminhalt? (Setze für π $\frac{22}{7}$ ein!)

3. Ein eiserner Wasserbehälter hat zum Grundriß einen Kreis von 2 m Radius (lichte Weite). Er ist unten halbkugelförmig abgeschlossen. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,8 m hoch.

a) Wieviel hl Wasser faßt dieser Behälter?

b) Wie groß ist die Benetzungsfläche des Behälters?

4. Ein gefüllter Ballon hat einen Radius von $r = 2{,}1$ m. Wieviel m³ Gas müßten zu seiner Füllung entwickelt werden?

Kuppeln

5. Ein kreisrunder Turm von 11 m Umfang ist durch ein halbkugelförmiges Dach abgeschlossen. Die Halbkugel wird mit Zinkblech belegt. 1 m² kostet einschließlich Arbeitslohn 5,75 DM. Wieviel DM kostet das Belegen des Daches?

6. Bei einem im Maßstab 1 : 125 gehaltenen Modell einer Kirche hat eine halbkugelförmige Kuppel den Umfang des Grundkreises $u = 19$ cm. Berechne den wirklichen Durchmesser der Kuppel!

Kugeln aus verschiedenen Werkstoffen

7. Wie groß ist die Oberfläche und welches Gewicht besitzt eine Kugel aus

a) Buchsbaumholz (Wichte 2,75 g/cm³) mit dem Halbmesser $r = 40$ cm

b) Sandstein („ 1,33 „) „ „ „ $r = 9$ „

c) Messing („ 8,40 „) „ „ „ $r = 6$ „

d) Elfenbein („ 1,92 „) „ „ „ $r = 5$ „ ?

8. Die beiden Eingangspfeiler eines Gartentores sind durch Sandsteinkugeln gekrönt. Die Herstellung der Oberflächen beider Sandsteinkugeln kostet 8,48 DM, wenn 1 m² mit 15 DM berechnet wird. Jede Kugel wurde aus einem Würfel gearbeitet, dessen Kante gleich dem Durchmesser der Kugel ist. 1 m³ Sandstein kostet 82 DM.

a) Wie groß ist der Durchmesser einer Sandsteinkugel?

b) Wieviel DM kostet jede Kugel?

c) Wie groß war der Abfall bei der Herstellung jeder Kugel?

9. Aus einem Holzwürfel mit der Kante $a = 28$ cm wird eine Kugel so gedreht, daß der Abfall möglichst gering wird. Wieviel cm³ betrug der Abfall?

10. a) Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser $r = 3$ cm können aus einem Bleirohr von 1,8 m Länge, 3 cm Wandstärke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4% verlorengehen?

b) Wie schwer ist jede Kugel, wenn die Wichte des Bleis 11,35 g/cm³ ist?

Sportgeräte

11. Die zum Kugelstoßen verwendete Kugel wiegt 7,25 kg und hat einen Umfang von 391 mm, wenn sie aus Eisen besteht. Enthält sie eine Bleifüllung, so beträgt der Umfang 346 mm. Der Stahlmantel dieser Kugel ist rund 7 mm dick. Die Wichte des Bleis beträgt 11,35 g/cm³.

a) Berechne den Durchmesser der Eisenkugel und die Wichte des Eisens!

b) Berechne den Durchmesser der Kugel mit Bleifüllung!

c) Berechne das Gewicht des Stahlmantels und der Bleifüllung dieser Kugel!

12. Ein Schlagball hat ein Gewicht von 90 g und einen Umfang von 22 cm. Berechne den Durchmesser und die Wichte des Balles!

Aus der Erd- und Himmelskunde

13. Der Radius der Erde wird mit 6 370 km angegeben. Berechne unter der Voraussetzung, daß die Erde eine vollständige Kugel ist, **a)** den Umfang eines Längenkreises der Erdkugel, **b)** ihre Oberfläche, **c)** ihren Rauminhalt!

14. Vergleiche Oberfläche und Rauminhalt des Mondes mit den bei der Erde berechneten Größen, wenn sein Durchmesser mit 3 476 km bestimmt wurde.

15. Der Radius der Sonne beträgt 695 400 km.

a) Bestimme ihren Rauminhalt!

b) Wieviel Erdkugeln könnte man aus der Masse der Sonnenkugel formen?

16. Der Durchmesser eines großen Schulglobus mißt 84 cm. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte des Globus und der Erdkugel zueinander?

58. Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion

Hält man das Drahtmodell eines Quaders so in das Sonnenlicht, daß zwei seiner Flächen waagerecht und zwei andere parallel zu einer Bildwand liegen, so entsteht ein Schattenbild des Quaders (Bild 118). Wie ändert sich das Schattenbild, wenn der Quader bei unveränderter Lage der Bildwand gedreht, gehoben oder gesenkt wird?

Das Schattenbild eines Körpers (hervorgerufen durch parallele Lichtstrahlen, die schräg auf die Bildebene fallen) heißt **Schrägbild** des Körpers (**schiefe Parallelprojektion**[1])).

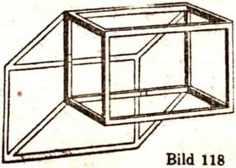


Bild 118

[1]) projicere (lat.) = hinwerfen.

Für jede schiefe Parallelprojektion gelten folgende Sätze:

1. **Jede Gerade gibt als Bild wieder eine Gerade, wenn sie nicht in der Richtung der Lichtstrahlen verläuft (Bild 119 a).**
2. **Parallele Geraden liefern als Bilder parallele Geraden.**
3. **Strecken, die der Bildebene parallel sind, behalten in der Projektion ihre natürliche Größe.**
4. **Strecken, die auf der Bildebene senkrecht stehen, werden durch die Projektion verkürzt oder verlängert. Sie sind unter demselben Winkel α gegen die Waagerechte geneigt und im selben Verhältnis verkleinert oder vergrößert. $\sphericalangle\,\alpha$ nennt man den Verzerrungswinkel, q das Verzerrungsverhältnis.**

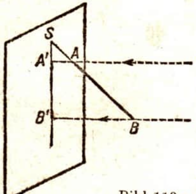


Bild 119 a

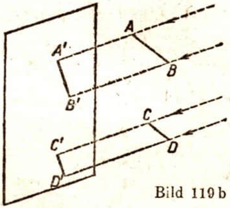


Bild 119 b

Beweise zu Satz 2 (Bild 119b): Die parallelen Ebenen $ABA'B'$ und $CDC'D'$ werden von jeder Schnittebene, also auch von der Bildebene, in parallelen Geraden geschnitten.

Zu Satz 3 (Bild 119c): $ABB'A'$ ist ein Parallelogramm.

Zu Satz 4 (Bild 119d): a) Die Schenkel der Winkel mit den Scheiteln A, C und E sind parallel, die Winkel liegen daher in parallelen Ebenen, die die Bildebene in den parallelen Geraden $A'B$, $C'D$ und $E'F$ schneiden.

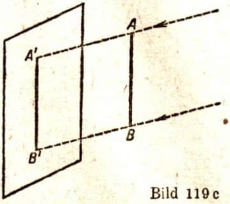


Bild 119 c

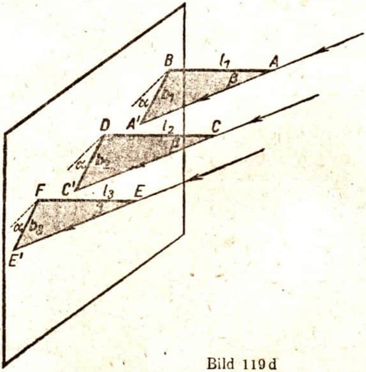


Bild 119 d

b) $\triangle ABA' \sim \triangle CDC' \sim \triangle EFE'$ (Begründung in Abschnitt 62), da sie außer im rechten Winkel auch in dem Winkel β übereinstimmen. Bezeichnet man mit l die Länge der Strecken und mit b die Länge ihrer Bilder, so ist in allen Dreiecken

$$\frac{b}{l} = q.$$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Sätze 1 bis 4, indem du als Bildebene einen Buchdeckel benutzt und als schattengebende Gerade Bleistifte!

2. Gib an, unter welcher Bedingung ein Rechteck, Trapez, gleichschenkliges Dreieck in der Projektion in der in Bild 120a und b dargestellten Form erscheint! α und q sind anzugeben!

3. Es ist die Projektion einer Kreisscheibe zu zeichnen, deren Ebene senkrecht zur Bildebene liegt! Bild 120c soll als Anleitung dienen. α und q dieses Bildes sind anzugeben!

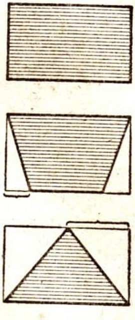


Bild 120a

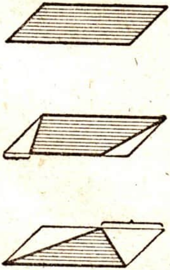


Bild 120b

4. a) Zeichne das Schrägbild eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 5{,}6$ cm so, daß zwei gegenüberliegende Flächen der Bildebene parallel sind! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$.

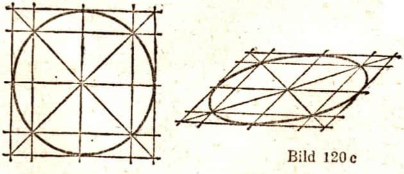


Bild 120c

b) Zeichne das Schrägbild desselben Würfels der Aufgabe **a)** so, daß vier seiner Flächen um 45° gegen die Bildebene geneigt sind! $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$.

Anleitung: Suche die durch gegenüberliegende Kanten gehende Fläche auf, die der Bildebene parallel ist, und zeichne sie in natürlicher Größe! Zeichne dann das Bild der senkrecht auf ihr stehenden Flächen!

5. Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Kanten $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $c = 6$ cm so, daß

a) zwei gegenüberliegende Flächen der Bildebene parallel sind,

b) zwei gegenüberliegende Kanten in einer Ebene liegen, die der Bildebene parallel ist! Wähle Verzerrungswinkel und Verzerrungsmaßstab beliebig!

6. Zeichne das Schrägbild einer quadratischen Platte $a = b = 6$ cm; $c = 2$ cm mit quadratischem Durchbruch ($a' = 2{,}5$ cm) in der Mitte, dessen Kanten den Plattenkanten parallel laufen! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$.

7. Zeichne das Schrägbild einer Sechskantschraubenmutter (ohne Gewindebohrung), Schlüsselweite 2,5 cm, Höhe 1,5 cm, $\alpha = 45°$; $q = \frac{2}{3}$, sodaß

a) die Sechsecke der Bildebene parallel sind,

b) zwei parallele Seitenflächen der Bildebene parallel sind!

8. Zeichne das Schrägbild eines Viererzeltes aus 4 dreieckigen Zeltbahnen (Länge = Breite = 3,20 m; Höhe = 1 m) im Maßstab 1 : 50 so, daß zwei gegenüberliegende Grundkanten der Bildebene parallel sind! $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$.

Anleitung: Der Aufbau der Pyramide erfolgt von der liegenden Grundfläche aus, im Mittelpunkt der Grundfläche wird die senkrechte Achse errichtet und die Pyramidenhöhe auf ihr abgetragen. Die Verbindungsstrecken der Spitze mit den Ecken der Grundfläche ergeben die Pyramidenform.

9. Zeichne das Schrägbild einer Riemenscheibe mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Breite von 8 cm im Maßstab 1 : 4, wenn die Kreisflächen waagerecht liegen; $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$.

10. Zeichne das Schrägbild einer senkrechten Rundsäule mit dem Grundkreishalbmesser $r = 2{,}5$ cm und der Höhe $h = 6$ cm ($\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$)!

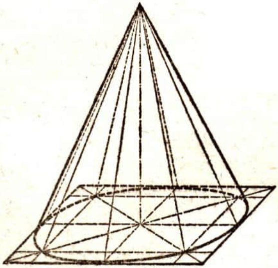


Bild 121

11. Zeichne das Schrägbild eines geraden Kreiskegels mit $r = 4$ cm und $h = 3$ cm! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ (Bild 121).

XIV. Aus der Ähnlichkeitslehre

59. Verhältnis zweier Strecken und Teilverhältnis

Bild 122 veranschaulicht, welche Strecken ein Fußgänger (a), ein Reiter (b) und ein Kraftradfahrer (c) in einer Stunde zurücklegen. Lies aus der Zeichnung ab, in welchem Verhältnis die Strecken zueinander stehen! Wodurch erleichtert dir die Zeichnung diese Feststellung? Gib an, in welchem Verhältnis der Drehpunkt die Hebel HF und ED der in Bild 123 dargestellten Dezimalwaage teilt!

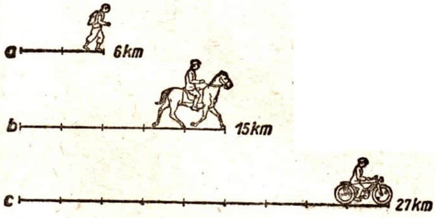


Bild 122

Erklärunge

Das Verhältnis zweier Strecken ist gleich dem Verhältnis ihrer Maßzahlen. Das **gemeinsame** Maß der beiden Strecken ist die Strecke, die in beiden gleichzeitig enthalten ist.

Liegt ein Punkt C auf einer Strecke AB so, daß sich die Entfernungen des Punktes C von den Endpunkten A und B der Strecke wie $p : q$ verhalten, so sagt man, der Punkt teile die Strecke im Verhältnis $p : q$.

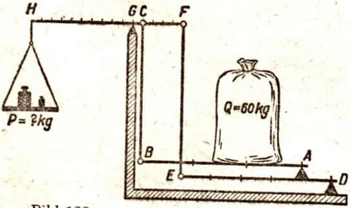


Bild 123

Es gibt auch Strecken **ohne** ein gemeinschaftliches Maß. Die Diagonale des Einheitsquadrates z. B. hat die Länge $\sqrt{2}$, die Quadratseite 1. Nun ist 1. $1 < \sqrt{2} < 2$, d.h. $\sqrt{2}$ keine ganze Zahl. 2. Wäre $\sqrt{2}$ ein Bruch $\frac{p}{q}$, dann müßte $2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ sein, d. h. eine ganze Zahl 2 gleich einem Bruch. $\sqrt{2}$ ist weder eine ganze Zahl noch ein Bruch, d.h. keine rationale Zahl (so nennt man die ganzen und gebrochenen Zahlen), sondern irrational. Daher können die Diagonale und die Seite eines Quadrates kein gemeinsames Maß haben, sie sind inkommensurabel.[1])

---

1) in- (lat. Vorsilbe) = un-, mensura (lat.) = Maß, also unvergleichbar.

Aufgaben

1. a) Rechne nach Bild 122 aus, in welcher Zeit Fußgänger, Reiter und Kraftfahrer 1 km zurücklegen!

b) Gib an, in welchem Verhältnis die Strecken zueinander stehen!

c) Fertige eine Zeichnung so, daß die Verhältnisse an ihr abzulesen sind!

2. Zeichne je zwei Streckenpaare mit den Verhältnissen **a)** $2:5$, **b)** $4:3$, **c)** $7:5$, **d)** $3:1$, **e)** $2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$!

3. Zeichne mehrere Streckenpaare und bestimme die Streckenverhältnisse! Gib die Länge der Strecken **a)** auf 1 cm, **b)** auf 1 mm genau an!

4. Ziehe in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele und miß auf jeder der beiden anderen Seiten die Streckenverhältnisse der entstandenen Abschnitte!

5. Zeichne einen Winkel und zwei Parallelen so, daß sie die Schenkel des Winkels schneiden! Miß die Verhältnisse der Schenkelabschnitte!

6. Zeichne eine Strecke AB von 12 cm Länge und teile sie durch einen zwischen den Endpunkten gelegenen Teilpunkt so, daß sich die Teilstrecken wie **a)** $7:5$, **b)** $1:11$, **c)** $5:19$, **d)** $17:7$, **e)** $5:3$ verhalten!

7. Zeichne eine Strecke von 8 cm! Teile sie durch beliebig angenommene Punkte und stelle jedesmal das Teilungsverhältnis fest!

60. Strahlensätze

Zum Putzen von Schaufenstern wird eine spitz zulaufende Leiter benutzt (Bild 124). Zeichne sie in der Draufsicht!

Bild 124

In Bild 125 erkennst du Fernsprechleitungen längs einer Eisenbahnstrecke.

Vergleiche die Entfernungen der Stangen in der Zeichnung mit den Entfernungen der Leitersprossen!

Wie verlaufen die Linien in der Wirklichkeit und wie in der Zeichnung?

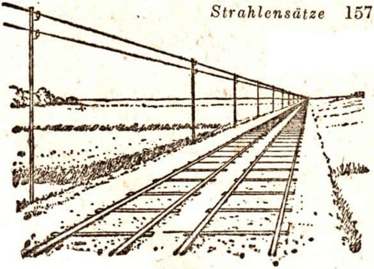


Bild 125

> **Parallelensatz: Teilt man eine Strecke AB in n gleiche Teile und legt durch die Endpunkte der Teilstrecken Parallelen, so begrenzen diese auf jedem durch A oder B gelegten Strahl n gleiche Abschnitte (Bild 126).**

Beweis: Jede Parallele ist Mittellinie in einem durch die Zeichnung entstandenen Trapez.

Bemerkung: Durch die Parallelen wird also die Teilung der Strecke AB auf die durch A (oder B) gehenden Strahlen übertragen.

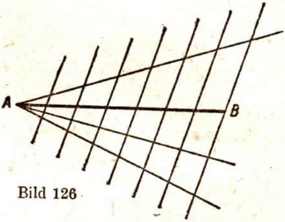


Bild 126

> **Erster Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen durch Parallelen geschnitten, so sind die entsprechenden Abschnitte auf den Strahlen verhältnisgleich (Bild 127 und 128).**

Beweis: In Bild 127 schneiden zwei Parallelen die von S ausgehenden Strahlen in A, B, A' und B'. Der Abschnitt SA ist 27 mm (p mm) und der Abschnitt AB 18 mm (q mm) lang. Demnach verhält sich SA zu AB wie

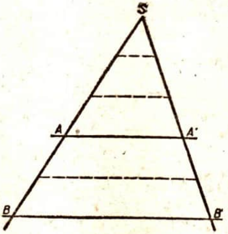


Bild 127

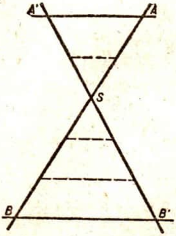


Bild 128

$3:2$ $(p:q)$. Teilt man SA in 3 (p) und AB in 2 (q) gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte Parallelen zu den schon gezeichneten Parallelen, so werden auf dem anderen Strahl ebensoviel Teilabschnitte erzeugt. Sie sind etwas kürzer, aber nach dem Parallelensatz untereinander gleich. Die Abschnitte SA' und $A'B'$ verhalten sich ebenfalls wie $3:2$ $(p:q)$.

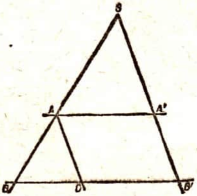


Bild 129

Es ist $\quad SA : AB = 3:2(p:q)$

$\qquad\qquad SA' : A'B' = 3:2(p:q)$,

folglich ist $\quad SA : AB = SA' : A'B'$.

Führe den Beweis nach Bild 128!

Man kann die letzte Verhältnisgleichung mehrfach umformen; weise nach, daß z. B. folgende Umformungen richtig sind:

$$SA : SA' = AB : A'B'$$
$$AB : SA = A'B' : SA'.$$

Zweiter Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Ausgangspunkt gemessenen Abschnitte eines Strahles (Bild 129).

Beweis: Zieht man $AD \parallel SB'$, so verhält sich

$\qquad DB' : BB' = SA : SB$,

da aber $\quad DB' = AA'$ ist (warum?),

so folgt $\quad AA' : BB' = SA : SB$

und entsprechend $\quad AA' : BB' = SA' : SB'$.

Aufgaben

1. Zeichne zu drei gegebenen Strecken a, b und c eine vierte Strecke x so, daß sich $a:b = c:x$ verhalten!

Anleitung: Bild 130 zeigt dir, wie du die Aufgabe nach dem 1. Strahlensatz lösen kannst. Ordne die Strecken auch anders an! Löse die Aufgabe auch mit Hilfe des 2. Strahlensatzes!

Anmerkung: Die gesuchte Strecke x wird als 4. Proportionale zu a, b und c bezeichnet.

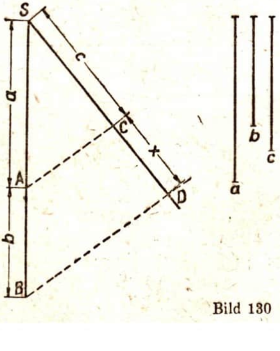


Bild 130

2. Teile die Strecke AB durch einen Punkt C im Verhältnis $p : q$ (z.B. 5 : 3)!

Ausführung (Bild 131): Man zieht durch A und B in einer beliebigen Richtung Parallelen, trägt auf diesen von A aus p (5) gleiche Teile und von B aus nach der anderen Seite q (3) gleiche Teile ab und verbindet die Eckpunkte der letzten Teilstrecken miteinander.

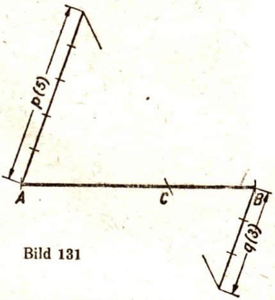


Bild 131

3. Teile in einem Dreieck, dessen Seiten 6 cm, 7 cm und 8 cm lang sind, die größte Seite im Verhältnis 3 : 5 und zeichne durch den Teilungspunkt die Parallele zu der kleinsten Seite! Berechne
a) die Abschnitte auf der mittleren Seite,
b) die Länge der Parallelen und miß dann nach!

4. Zeichne eine beliebig lange Strecke und teile sie im Verhältnis
a) 4 : 5 **b)** 3 : 8 **c)** 7 : 4 **d)** 11 : 6 **e)** $m : n$!

5. Benutze eine Heftseite mit Linien, um eine gegebene Strecke in n (3, 4, 5 . . .) gleiche Teile zu teilen! Begründe das Verfahren!

6. Teile die Fläche eines Dreiecks durch eine Gerade von einer Ecke aus in zwei Teile, die sich wie 3 : 4 verhalten!

61. Anwendungen der Strahlensätze

Vergrößern und Verkleinern

1. a) Miß Länge und Breite von Postwertzeichen aus! Zeichne die Fläche einer Marke vergrößert aus Strecken, die sich zu den ursprünglichen wie 3 : 5 verhalten, ohne deren Maßzahlen zu berechnen! Bild 132 zeigt die Lösung.

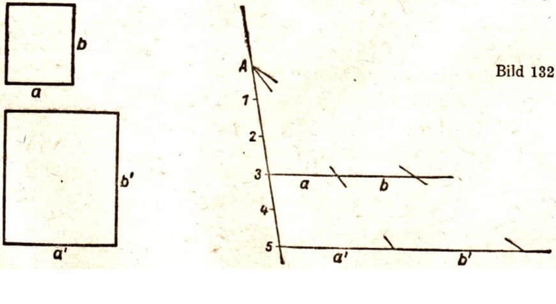


Bild 132

1. b) Gib an, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt bei der Vergrößerung der Seiten gewachsen ist!

2. Verkleinere in entsprechender Weise eine Postkarte im Verhältnis 8 : 3!

3. Zum schnellen Vergrößern und Verkleinern einzelner Strecken ist ein Doppelzirkel (Proportionalzirkel) hergestellt worden, wie ihn Bild 133 zeigt.

a) Beschreibe den Zirkel und erkläre, wie er angewendet wird!

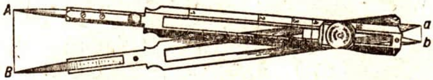


Bild 133

b) Fertige dir aus schmalen Pappstreifen oder Holzschienen das Modell eines solchen Zirkels und befestige die Streifen so aufeinander, daß eine Vergrößerung 3 : 1 entsteht!

c) Benutze den hergestellten Doppelzirkel zum Vergrößern und Verkleinern von Quadraten, Rechtecken, Dreiecken und anderen Flächen, die du zeichnest!

4. Bild 134 zeigt eine aus dem Physikunterricht bekannte Lochkamera. Stelle durch Versuche fest, wie stark die Lochkamera verkleinert! Bestimme die Verkleinerung im Bild!

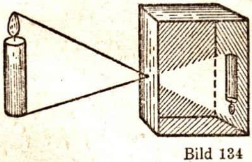


Bild 134

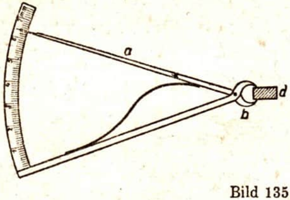


Bild 135

Meßgeräte

5. Der Fühlhebel (Bild 135) dient zum Messen geringer Dicken. Gib auf Grund des Bildes an, wie groß die geringste Dicke ist, die noch gemessen werden kann, wenn sich $b : a = 1 : 10$ verhält!

6. Auf Karten und Winkelmessern findest du einen verjüngten Maßstab (Bild 136).

a) Stelle fest, welcher Strahlensatz Anwendung findet!

b) In welcher Weise wachsen die Längen der Parallelen zwischen den Strahlen? Beachte, daß Bild 136 im Maßstab 2 : 1 gezeichnet wurde!

c) Wie lang ist die untere eingezeichnete Strecke?

d) Führe Messungen mit dem verjüngten Maßstab auf Wanderkarten aus!

7. Nach dem Portugiesen Pedro Nunes (1542) ist der häufig angewendete **Nonius** benannt (Bild 137). Ist er z. B. 9 mm lang und in 10 gleiche Teile geteilt, so ist ein Teil $\frac{9}{10}$ mm lang. Fällt der Teilstrich 0 des Nonius in die Richtung eines Teilstriches des Zentimetermaßes, so ist dasselbe beim Teilstrich 10 des Nonius festzustellen. Erfüllt der Teilstrich 1 des Nonius diese Bedingung, so ist der Teilstrich 0 um $\frac{1}{10}$ mm weitergerückt. Es können also Zehntelmillimeter abgelesen werden. Was ist bei der in Bild 137 gezeichneten Einstellung abzulesen? Führe mit dem Nonius auf der Schieblehre Messungen aus!

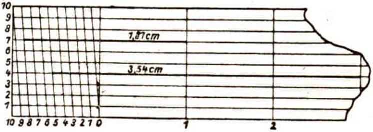


Bild 136

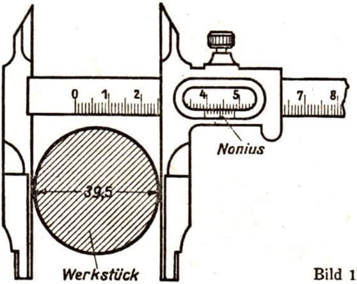


Bild 137

8. Die Entfernung zweier Masten einer Hochspannungsleitung, die schräg über einen Kanal führt, soll durch Aufstellen von Fluchtstäben und Streckenmessungen nach Bild 138 ermittelt werden. Beschreibe und begründe das Verfahren!

Beispiele:

	a	*b*	*c*
a)	21 m	18 m	9 m
b)	24 m	20 m	12 m

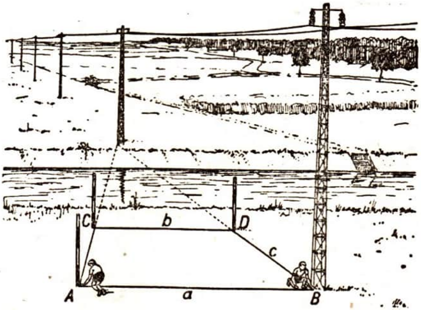


Bild 138

9. Löse die folgenden Gleichungen durch Zeichnung auf:

a) $\frac{4}{5} = \frac{3}{x}$ b) $\frac{3}{7} = \frac{5}{x}$ c) $\frac{5}{9} = \frac{x}{4}$ d) $\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$

e) $5x = 28$ f) $ax = bc$ g) $ax = b^2$ h) $ax = 3b^2$!

62. Ähnlichkeit und Ähnlichkeitssatz

Stelle fest, welche Vielecke in Bild 139 einander ähnlich sind und welche nicht! Versuche, durch Messungen die Gründe für die Ähnlichkeit und für die Unähnlichkeit zu finden!

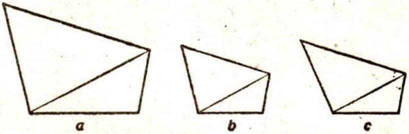


Bild 139

Erklärungen: Dreiecke und Vielecke heißen **ähnlich**, wenn sie in gleichliegenden Winkeln und im Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen.

Ähnliche Flächen haben die gleiche Gestalt.

Das Zeichen für ähnlich ist $\sim$.[1])

Bedeutet m den Wert des Verhältnisses entsprechender Seiten in ähnlichen Vielecken, so ist m gleichbedeutend mit dem von früher her bekannten Maßstab. m gibt die lineare Vergrößerung (Verkleinerung) an.

Jede Parallele zu einer Seite eines Dreiecks schneidet von diesem ein ihm ähnliches Dreieck ab.

Anleitung für den Beweis (Bild 140):

Weise nach, daß die Winkel gleich sind und daß entsprechende Seiten das gleiche Verhältnis haben (Strahlensätze)!

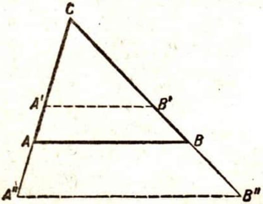


Bild 140

Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Winkel überein, so sind sie ähnlich.

1) Das Zeichen für ähnlich war ursprünglich ein umgelegtes S (lat. similis = ähnlich).

Anleitung für den Beweis (Bild 141): Verschiebt man $\triangle A'B'C'$ so auf $\triangle ABC$, daß $\sphericalangle \gamma'$ auf $\sphericalangle \gamma$ fällt, so erhält es die neue Lage $A''B''C$. Dann ist $A''B'' \parallel AB$ (warum?). Daraus ergibt sich nach obigem Satz die Verhältnisgleichheit aller entsprechenden Seiten.

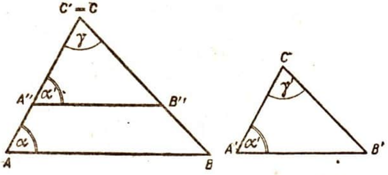


Bild 141

Aufgaben

1. Welche Eigenschaften haben **a)** flächengleiche Dreiecke, **b)** ähnliche Dreiecke, **c)** deckungsgleiche Dreiecke? Wie kommen diese Unterschiede in den Zeichen für die Gleichheit usf. zum Ausdruck?

2. Nenne Dreiecke und Vierecke, die einander immer ähnlich sind!

3. In welchen Fällen sind **a)** gleichschenklige Dreiecke, **b)** rechtwinklige Dreiecke, **c)** Parallelogramme, **d)** Rhomben, **e)** Rechtecke einander ähnlich?

4. Vergleiche Kreise verschiedener Größe in bezug auf die Ähnlichkeit miteinander!

5. Zeichne Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen:

a) $\alpha = 75°$; $\beta = 40°$ **b)** $\alpha = 60°$; $\gamma = 57°$ **c)** $\beta = 100°$; $\gamma = 45°$!

6. Bild 142 zeigt einen „Storchschnabel", der zur Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen benutzt wird. Punkt P wird festgehalten, der Stift in F folgt den Umrissen einer Zeichnung. Dann zeichnet der Schreibstift in Z die verkleinerte ähnliche Figur.

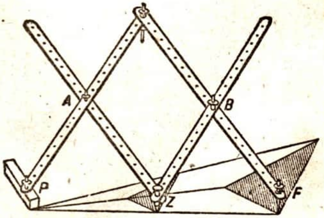


Bild 142

a) Fertige dir ein Modell des Storchschnabels an und übe das Vergrößern und Verkleinern an geeigneten Vorlagen!

b) Weise nach, daß die von den Stiften F und Z beschriebenen Zeichnungen ähnliche Vielecke sind!

c) Wovon hängt das Vergrößerungsverhältnis m ab?

7. Bei der in Bild 143 abgebildeten Form des Storchschnabels läßt sich der Stab S nach dem verlangten Maßstab verschieben. Wird A festgehalten, so kann man einen der Stifte in B und C als Führungsstift, den anderen als Zeichenstift benutzen.

a) Erkläre den Gebrauch dieses Storchschnabels und stelle den Maßstab m der Verkleinerung (Vergrößerung) fest!

b) Wie ändert sich der Maßstab, wenn an die Stelle von A der Punkt C tritt?

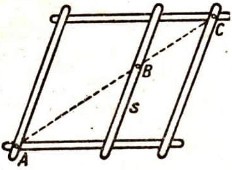


Bild 143

8. Zeige, daß jedes rechtwinklige Dreieck durch die Höhe so in zwei Dreiecke zerlegt wird, daß **a)** jedes Teildreieck dem ganzen Dreieck und **b)** beide Teildreiecke einander ähnlich sind!

9. Setze in beiden Fällen der Aufg. 8 die Verhältnisse entsprechender Seiten einander gleich und weise nach, daß die aus ihnen gebildeten Produktengleichungen die schon bekannten Sätze des Euklid und den Höhensatz ergeben!

10. Zeichne zu folgenden Stücken die mittlere Proportionale:

a) 3 cm und 5 cm **b)** 4 cm und 6 cm **c)** 5 cm und 7 cm!

Münzen, Maße und Gewichte

I. Münzen: Deutsche Mark und Deutsche Pfennig (DM und Dpf).

1 DM = 100 Dpf

II. Längenmaße: Meter (m), Dezimeter (dm), Zentimeter (cm), Millimeter (mm); Kilometer (km); Meile, Seemeile (sm).

1 km =	1 000 m =	10 000 dm =	100 000 cm =	1 000 000 mm
	1 m =	10 dm =	100 cm =	1 000 mm
		1 dm =	10 cm =	100 mm
			1 cm =	10 mm

1 geographische Meile = 7,420 km; 1 sm = 1,852 km

III. Flächenmaße: Quadratmeter (qm oder m^2), Quadratdezimeter (qdm oder dm^2), Quadratzentimeter (qcm oder cm^2), Quadratmillimeter (qmm oder mm^2); Quadratkilometer (qkm oder km^2), Hektar (ha; Quadrat mit der Seite 100 m) und Ar (a; Quadrat mit der Seite 10 m), Quadratmeile.

1 qkm =	100 ha =	10 000 a =	1 000 000 qm
	1 ha =	100 a =	10 000 qm
		1 a =	100 qm

1 qm =	100 qdm =	10 000 qcm =	1 000 000 qmm
	1 qdm =	100 qcm =	10 000 qmm
		1 qcm =	100 qmm

IV. Körper- und Hohlmaße: Kubikmeter (cbm oder m^3), Kubikdezimeter (cdm oder dm^3), Kubikzentimeter (ccm oder cm^3), Kubikmillimeter (cmm oder mm^3); Hektoliter (hl), Liter (l).

1 cbm =	1 000 cdm =	1 000 000 ccm =	1 000 000 000 cmm
	1 cdm =	1 000 ccm =	1 000 000 cmm
		1 ccm =	1 000 cmm

1 hl = 100 l; 1 l = 1 cdm

V. Gewichte: Kilogramm (kg), Gramm (g), Milligramm (mg); Tonne (t), Doppelzentner (dz).

1 t = 10 dz =	1 000 kg =	1 000 000 g =	1 000 000 000 mg
	1 kg =	1 000 g =	1 000 000 mg
		1 g =	1 000 mg

VI. Zeitmaße: Tag (Tg.), Stunde (Std.), Minute (Min.), Sekunde (Sek.); Jahr (J.), Monat (Mon.), Woche (Wo.).

1 Tg. =	24 Std. =	1440 Min. =	86 400 Sek.
	1 Std. =	60 Min. =	3 600 Sek.
		1 Min. =	60 Sek.

Kaufmännisch: 1 J. = 12 Mon. = 52 Wo., 1 Mon. = 30 Tg.

VII. Zählmaße: Stück (St.), Dutzend (Dtzd.), Gros (Grs.).

1 Grs. = 12 Dtzd. = 144 St.
1 Dtzd. = 12 St.

VIII. Winkelmaße: Grad (°), Minuten (′), Sekunden (″).

$1° = 60' = 3\,600''$; $1' = 60''$

Quadrattafel: Seite 98/99