MATHEMATIK 12

ERWEITERTE OBERSCHULE · B-ZWEIG

Mathematik

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule · Klasse 12 (B)

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1965

Verfasser:

Dr. Fritz Neigenfind	Abschnitt 1.1.
Heinz Junge	Abschnitt 1.2.
Hans Simon	Abschnitt 1.3. und 2.1.
Johannes Gronitz	Abschnitt 2.2.
Dr. Hans Wußing	Kapitel 3.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die erweiterte polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin und Peter Pfeiffer

Zeichnungen: Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung: Werner Fahr
Redaktionsschluß: 1. 10. 1964
ES 11 G · Bestell-Nr. 00 12 56-3 · 4,50 MDN · Lizenz Nr. 203/1000/64 (DN)
Satz und Druck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza

1. Lehre von den Funktionen

Beim Motocross-Rennen jagt der Fahrer seine Maschine über eine kleine Bodenerhebung. Mit einem Satz überspringt sie eine kurze Strecke unmittelbar hinter der Erhebung. Beim Aufsetzen wird der Stoß durch die Teleskopfederung aufgefangen.
Betrachtet man einen Punkt des Fahrzeugs vom Zeitpunkt des Aufsetzens an, so vollführt er eine Schwingung, die sich dadurch auszeichnet, daß ihre Amplitude von Periode zu Periode abnimmt. Eine derartige Schwingung nennt man gedämpft.
Geht die Fahrt auf ebenem Boden weiter, hört die lotrechte Schwingung des Fahrzeugs bald auf.
Trägt man die Elongation als Funktion der Zeit auf, so erhält man das Bild einer Funktion, die sich mit Hilfe der Sinusfunktion und der Exponentialfunktion darstellen läßt.
Mit der Untersuchung derartiger und anderer Funktionen befassen wir uns nunmehr innerhalb der Lehre von den Funktionen.

1.1. Algebraische Funktionen

1.1.1. Aufgaben zur Wiederholung und Einführung

1. Gegeben sei der analytische Ausdruck einer linearen Funktion $F(x, y) = 2x + 3y = 0$ (implizite Form). Bilden Sie die beiden zugehörigen expliziten Darstellungen $y = f(x)$ und $x = g(y)$! Fertigen Sie zu den zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ Wertetafeln an, indem Sie die jeweils unabhängige Veränderliche alle ganzen Zahlen von -6 bis $+6$ durchlaufen lassen! Vergleichen Sie die beiden Wertetafeln!

2. Gegeben sei die lineare Funktion $F(x, y) = 2x + 3y + 6 = 0$. Wie heißen die beiden zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$, die Sie durch Auflösen von $F(x, y) = 0$ nach y bzw. nach x gewinnen? Zeichnen und vergleichen Sie für $y = f(x)$ und für $x = g(y)$ die Funktionsbilder!

a) Es wird ein $x\,y$-System und ein $y\,x$-System benutzt.

Anleitung: Die zuerst genannte Koordinate, die der jeweils unabhängigen Veränderlichen entspricht, ist auf der waagerecht verlaufenden Achse abzutragen.

b) Beide grafischen Darstellungen werden in dasselbe $x\,y$-System eingetragen.

3. a) Stellen Sie für die Funktionen $y = f(x) = -\dfrac{x}{2} + 2$ und $x = g(y) = -2y + 4$ Wertetafeln auf! Zu welcher Vermutung über den Zusammenhang dieser beiden Funktionen gelangen Sie?

b) Erhärten Sie diese Vermutung mit Hilfe einer grafischen Darstellung im $x\,y$-Koordinatensystem!

c) Beweisen Sie durch Umformung der analytischen Ausdrücke, daß Ihre Vermutung richtig ist!

4. Untersuchen Sie den Verlauf der Bildkurven für folgende Funktionen!

$y = f_1(x) = x^2 \quad \text{mit } 0 \leqq x < \infty$

$y = f_2(x) = x^2 \quad \text{mit } -\infty < x \leqq 0$

5. Ermitteln Sie, welche der folgenden Funktionen monoton steigend, welche monoton fallend sind!

a) $y = f_1(x) = 2x^2 + 3 \quad \text{mit } 0 \leqq x$

b) $y = f_2(x) = 2x^2 + 3 \quad \text{mit } x \leqq 0$

c) $y = f_3(x) = -2x^2 + 3 \quad \text{mit } 0 \leqq x$

d) $y = f_4(x) = -2x^2 + 3 \quad \text{mit } x \leqq 0$

6. Bilden Sie zu den in den Aufgaben 4 und 5 genannten sechs Funktionen die jeweiligen inversen Funktionen! Vergleichen Sie die Bilder sowie die Definitionsbereiche und Wertevorräte dieser Paare von zueinander inversen Funktionen!

7. Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ mit $-8 \leqq x \leqq -1$. Bilden Sie die zugehörige inverse Funktion $x = g(y)$! Fertigen Sie das Bild des Funktionenpaares $y = f(x)$ und $x = g(y)$ im $x\,y$-System an! Bestimmen Sie Verlauf, Wertevorräte und Definitionsbereiche der beiden zueinander inversen Funktionen!

8. Vertauschen Sie in der Funktion $x = g(y)$, die Sie beim Lösen der Aufgabe 7 gewonnen haben, x und y! Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = g(x)$ mit anderer Farbe in das gleiche Koordinatensystem ein, in das Sie bereits die Bilder von $y = f(x)$ und $x = g(y)$ eingetragen haben! Welche Beziehung besteht zwischen den Bildern der Funktionen?

1.1.2. Bereits bekannte Begriffe aus der Lehre von den Funktionen

Eine in einem Intervall definierte stetige Funktion $y = f(x)$ heißt in diesem Intervall monoton steigend, wenn für zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 aus dem betrachteten Intervall

$$\text{mit } x_1 < x_2 \quad \text{stets} \quad f(x_1) \leqq f(x_2)$$

gilt. Das Intervall kann dabei abgeschlossen, offen oder halboffen gewählt werden. Es kann also sein:

$a \leqq x \leqq b$ oder kürzer $[a, b]$ (abgeschlossenes Intervall);
$a < x < b$ oder kürzer (a, b) (offenes Intervall);
$a \leqq x < b$ oder kürzer $[a, b)$ (halboffenes Intervall);
$a < x \leqq b$ oder kürzer $(a, b]$ (halboffenes Intervall).

Analog dazu heißt eine in einem beliebigen Intervall definierte stetige Funktion $y = f(x)$ in diesem Intervall monoton fallend, wenn mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geqq f(x_2)$ gilt, wobei x_1 und x_2 beliebige Zahlen aus dem betrachteten Intervall sind.
Monoton steigende bzw. fallende Funktionen heißen streng monoton steigend bzw. fallend, wenn mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt. Streng monoton steigende und streng monoton fallende Funktionen heißen zusammen auch streng einsinnige Funktionen.
Jede in einem Intervall $[a, b]$ streng einsinnige Funktion $y = f(x)$, die keinen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert ausläßt, ist in diesem Intervall stetig. Jede solche Funktion besitzt im Intervall $[f(a), f(b)]$ eine zu ihr inverse Funktion $x = g(y)$. Es entspricht nämlich zunächst jedem y aus $[f(a), f(b)]$ mindestens ein Wert x aus $[a, b]$, für den $f(x) = y$ ist, da nach Voraussetzung $f(x)$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ keinen Wert ausläßt. Andererseits entspricht jedem y aus $[f(a), f(b)]$ höchstens ein Wert x aus $[a, b]$. Denn sind nämlich x_1 und x_2 verschiedene Werte aus $[a, b]$, so ist wegen der strengen Einsinnigkeit von $y = f(x)$ sicher $f(x_1) \neq f(x_2)$, so daß also x_1 und x_2 nicht derselbe Wert y entsprechen kann.
Ohne Beweis wird mitgeteilt, daß dann $x = g(y)$ in $[f(a), f(b)]$ stetig ist.

Überlegen Sie, daß die inverse Funktion einer streng monoton steigenden Funktion wieder streng monoton steigend, die inverse Funktion einer streng monoton fallenden Funktion wieder streng monoton fallend ist!

Hat man ein halboffenes oder offenes Intervall, z.B. $(a, b]$ mit $a < b$, so werden zunächst abgeschlossene Teilintervalle $[a + h, b]$ mit $0 < h < (b - a)$ betrachtet. Auf solche Intervalle sind die vorhergehenden Überlegungen anwendbar, und man kommt so zu ähnlichen Aussagen über Existenz und Stetigkeit einer inversen Funktion.
Die zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ haben im $x\,y$-System das gleiche Bild, jedoch ist für

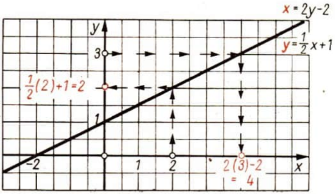


Abb. 1.1.

$y = f(x)$ die unabhängige Veränderliche auf der Abszissenachse, für $x = g(y)$ hingegen auf der Ordinatenachse aufgetragen. Demgemäß wird an ein und demselben Bild die jeweils zugeordnete abhängige Veränderliche auf verschiedenen Achsen abgelesen (vgl. Abb. 1.1.).
Für die zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ sind Definitionsbereich und Wertevorrat miteinander vertauscht. Für die streng monoton steigende Funktion $y = f(x)$ und ihre ebenfalls streng monoton steigende inverse Funktion $x = g(y)$ gilt also im Falle eines abgeschlossenen Intervalls:

	$y = f(x)$	$x = g(y)$
Definitionsbereich:	$a \leqq x \leqq b$	$c \leqq y \leqq d$
Wertevorrat:	$c = f(a) \leqq y \leqq f(b) = d$	$a = g(c) \leqq x \leqq g(d) = b$.

Beispiel 1:

Die im Intervall $[-4, -2]$ streng monoton fallende Funktion $y = f(x) = x^2+2$ besitzt als zu ihr inverse Funktion $x = g(y)$ die ebenfalls streng monoton fallende Funktion $x = -\sqrt{y-2}$. Für diese beiden Funktionen gilt:

	$y = f(x)$	$x = g(y)$
Definitionsbereich:	$-4 \leqq x \leqq -2$	$6 \leqq y \leqq 18$
Wertevorrat:	$18 = f(-4) \geqq y \geqq f(-2) = 6$	$-2 = g(6) \geqq x \geqq g(18) = -4$.

In Abbildung 1.2. ist außer $y = f(x) = x^2 + 2$ mit $-4 \leqq x \leqq -2$ bzw. $x = g(y) = -\sqrt{y-2}$ mit $6 \leqq y \leqq 18$ noch die Funktion $y = g(x) = -\sqrt{x-2}$ mit $6 \leqq x \leqq 18$ eingezeichnet. Wählt man das xy-System fest, so gelangt man zu zwei voneinander verschiedenen Bildern der inversen Funktion von $y = f(x)$, je nachdem, ob man die unabhängige Variable mit x oder y bezeichnet, also die inverse Funktion in der Form $x = g(y)$ oder $y = g(x)$ schreibt. Die Bilder von $x = g(y)$ und $y = g(x)$ liegen achsialsymmetrisch zum Bild der Funktion $y = x$, wie es in der Abbildung 1.2. gezeichnet ist.

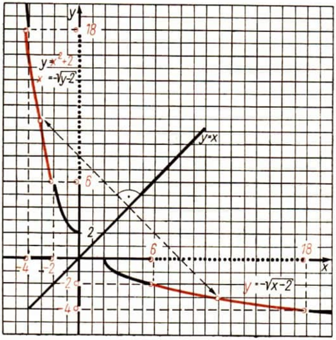


Abb. 1.2.

1.1.3. Ableitung zueinander inverser Funktionen

Im Beispiel 1 wurden die zueinander inversen Funktionen

$$y = f(x) = x^2 + 2 \quad \text{mit} \quad -4 \leqq x \leqq -2 \quad \text{und} \quad 18 \geqq y \geqq 6$$
$$\text{und} \quad x = g(y) = -\sqrt{y-2} \quad \text{mit} \quad 6 \leqq y \leqq 18 \quad \text{und} \quad -2 \geqq x \geqq -4$$

betrachtet. Die Funktion $y = f(x)$ kann man im gesamten Definitionsbereich differenzieren. Ihre Ableitung heißt in $[-4, -2]$ bekanntlich $y' = f'(x) = 2x$.

Die Ableitung der inversen Funktion $x = g(y)$ kann man mit den bisherigen Mitteln jedoch noch nicht nach einer bestimmten Regel bilden. Daher soll die Ableitung von $x = g(y)$ durch Bilden des Differenzenquotienten, Umformen des Differenzenquotienten und Grenzübergang hergeleitet werden.
Da die unabhängige Veränderliche in diesem Fall y ist, bildet man:

$$\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{(y_0+k)-y_0} = \frac{-\sqrt{(y_0+k)-2}-(-\sqrt{y_0-2})}{k} = \frac{\sqrt{y_0-2}-\sqrt{(y_0+k)-2}}{k}$$

$$= \frac{(\sqrt{(y_0-2}-\sqrt{(y_0+k)-2})\cdot(\sqrt{y_0-2}+\sqrt{(y_0+k)-2})}{k\,(\sqrt{y_0-2}+\sqrt{(y_0+k)-2})}$$

$$= \frac{(y_0-2)-[(y_0+k)-2]}{k\,(\sqrt{y_0-2}+\sqrt{(y_0+k)-2})}$$

$$\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{(y_0+k)-y_0} = \frac{-1}{\sqrt{y_0-2}+\sqrt{(y_0+k)-2}}.$$

Läßt man k gegen Null streben, so ergibt sich:

$$g'(y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{(y_0+k)-y_0} = \lim_{k\to 0}\frac{-1}{\sqrt{y_0-2}+\sqrt{(y_0+k)-2}} = \frac{-1}{2\sqrt{y_0-2}}.$$

Dabei wurde stillschweigend benutzt, daß $\lim\limits_{k\to 0}\sqrt{(y_0+k)-2} = \sqrt{y_0-2}$ ist. Für ein beliebiges $y_0 \neq 2$ aus dem Definitionsbereich der Funktion $x = g(y) = -\sqrt{y-2}$ gilt also:

$$g'(y_0) = \frac{-1}{2\sqrt{y_0-2}} = \frac{1}{2\,(-\sqrt{y_0-2})} = \frac{1}{2\cdot g(y_0)}$$

oder kürzer:

$$x' = g'(y) = \frac{1}{2\cdot g(y)}.$$

Für $\frac{1}{2\cdot g(y)}$ kann wegen $x = g(y)$ auch geschrieben werden: $\frac{1}{2\cdot x}$.

Es fällt hierbei auf, daß die Ableitung der inversen Funktion zu $y = f(x) = x^2 + 2$ dem reziproken Wert von $y' = f'(x)$ gleich ist. Es gilt daher für das Funktionenpaar

(I) $\quad y = f(x) = x^2 + 2 \qquad$ mit $-4 \leqq x \leqq -2$,

(II) $\quad x = g(y) = -\sqrt{y-2} \qquad$ mit $\quad 6 \leqq y \leqq 18$

die Beziehung $f'(x)\cdot g'(y) = 1$ für jedes Wertepaar aus den betreffenden Intervallen, wenn x und y vermöge der Bedingungen (I) oder (II) zusammenhängen.
Man kann sich auf geometrischem Wege klarmachen, daß für zueinander inverse streng einsinnige stetige Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ sicher dann $f'(x)\cdot g'(y) = 1$ gilt, wenn $f(x)$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich ist.

In Abbildung 1.3. ist an das Bild einer stetigen streng einsinnigen Funktion im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ die Tangente gelegt. Ferner ist eine durch $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ verlaufende Sekante eingezeichnet. Die Tangente schneidet die Abszissenachse unter dem Winkel α, die Ordinatenachse unter dem Winkel β. Da die Kurve im xy-System sowohl das Bild der Funktion $y = f(x)$ als auch das Bild der dazu inversen Funktion $x = g(y)$ ist, die unabhängige Veränderliche aber im ersten Fall auf der Abszissenachse, im zweiten auf der Ordinatenachse aufgetragen ist, findet man durch Überlegung, daß gilt:

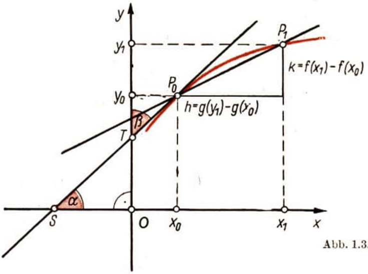


Abb. 1.3.

$$f'(x_0) = \tan\alpha; \qquad g'(y_0) = \tan\beta .$$

Wie aus dem rechtwinkligen Dreieck OST sofort abgelesen werden kann, sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.
Es kann daher statt $\tan\beta$ auch $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$ geschrieben werden. Für jeden spitzen und für jeden stumpfen Winkel gilt ferner $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$. Also gilt für streng monoton steigende, zueinander inverse Funktionen $y = f(x$ und $x = g(y)$ die Differentiationsregel:

(1) $\quad \boldsymbol{f'(x) \cdot g'(y) = 1,}$

vorausgesetzt, daß $y = f(x)$ für alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich differenzierbar und $y' = f'(x)$ dort stets verschieden von Null ist.

● *Führen Sie die entsprechenden Überlegungen für streng monoton fallende zueinander inverse Funktionen durch!*

Für den folgenden analytischen Beweis der Umkehrregel $f'(x) \cdot g'(y) = 1$ ist zu beachten, daß gilt:

(2) $\quad h = (x_0 + h) - x_0 = x_1 - x_0 = g(y_1) - g(y_0) = g(y_0 + k) - g(y_0);$

(3) $\quad k = (y_0 + k) - y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$

Diese Beziehungen sind aus Abbildung 1.3. ebenfalls ablesbar.
Man bildet zunächst unabhängig voneinander die Differenzenquotienten für beide zueinander inverse Funktionen:

(4) $\quad \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$ $\qquad$ (5) $\quad \dfrac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k}.$

Da jede von Null verschiedene Zahl a gleich dem reziproken Wert ihres reziproken Wertes ist, also $a = \dfrac{1}{\frac{1}{a}}$ gilt, kann man beispielsweise den Differenzenquotienten (5) auf zweifache Weise ausdrücken und damit die in der zu beweisenden Umkehrregel auftretende Konstante 1 in die Rechnung einführen:

$$(6)\qquad \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = \frac{1}{\dfrac{k}{g(y_0+k)-g(y_0)}}\,.$$

(Der Quotient im Nenner des rechtsstehenden Ausdrucks ist wegen der strengen Eineinnigkeit von Null verschieden.)
Um die Beziehungen zwischen den beiden zueinander inversen Funktionen nunmehr herzustellen, ersetzt man gemäß (3) auf der rechten Seite von (6) k durch $f(x_0+h)-f(x_0)$ und gemäß (2) die Differenz $g(y_0+k)-g(y_0)$ durch h:

$$(7)\qquad \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{(y_0+k)-y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\,.$$

Wegen der Stetigkeit der zueinander inversen Funktionen $y=f(x)$ und $x=g(y)$ strebt mit $h\to 0$ zugleich $f(x_0+h)$ gegen $f(x_0)$. Anders ausgedrückt: mit $h\to 0$ gilt zugleich auch $f(x_0+h)-f(x_0)=k\to 0$. Daher kann der Grenzübergang wie folgt vollzogen werden:

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\,.$$

Wegen $f'(x_0)\neq 0$ gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Daher existiert auch

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = g'(y_0)\,,$$

und es ist

$$g'(y_0) \qquad = \frac{1}{f'(x_0)}$$

oder

$$g'(y_0)\cdot f'(x_0) = 1\,.$$

Da x_0 und y_0 beliebige Stellen aus dem Definitionsbereich von $f(x)$ bzw. $g(y)$ bedeuten, kann allgemein geschrieben werden:

$$(1)\qquad \boldsymbol{g'(y)\cdot f'(x) = 1}\,.$$

Sehr einprägsam läßt sich diese wichtige Differentiationsregel mit der von Leibniz geschaffenen Symbolik niederschreiben:

$$(8)\qquad \frac{d[g(y)]}{dy}\cdot\frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 1\,.$$

Wie zweckmäßig die Verwendung der Umkehrregel ist, soll an Hand des Beispiels 1 gezeigt werden. Darin sind (in dort genau angegebenen Intervallen)

$y = f(x) = x^2 + 2$ und $x = g(y) = -\sqrt{y-2}$ als zueinander inverse Funktionen betrachtet worden. Die Ableitung von $y = f(x)$ ist $y' = f'(x) = 2x$. Also bestimmt man mit Hilfe der Umkehrregel:

$$x' = g'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot g(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{y-2}}.$$

Aufgaben

1. Bilden Sie die Ableitungen der in den Aufgaben 1 bis 3 von Seite 4 genannten zueinander inversen linearen Funktionen ohne und mit Hilfe der Regel $f'(x) \cdot g'(y) = 1$!

2. Bilden Sie zur Funktion $y = f(x) = \frac{x^2}{3} + 2$ mit $2 \leqq x \leqq 4$ die inverse Funktion $x = g(y)$!

   Legen Sie den Definitionsbereich von $x = g(y)$ fest! Bilden Sie die Ableitungen $y' = f'(x)$ und $x' = g'(y)$ in den jeweils durch die Definitionsbereiche angegebenen abgeschlossenen Intervallen ohne und mit Hilfe der Regel $f'(x) \cdot g'(y) = 1$!

   Hinweis: Bilden Sie die Ableitung $x' = g'(y)$ auf die gleiche Weise, wie auf Seite 7 die Ableitung von $x = -\sqrt{y-2}$ gefunden wurde!

1.1.4. Ableitung der Wurzelfunktionen

Mit Hilfe der Umkehrregel ist man in der Lage, die Differentiationsregel für die allgemeine Wurzelfunktion zu gewinnen. Die Funktionen $y = f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ sind für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ im offenen Intervall $0 < x < \infty$ streng monoton steigende stetige Funktionen, deren Wertevorräte jeweils alle von Null verschiedenen positiven reellen Zahlen umfassen. Dementsprechend existiert für jede dieser n Wurzelfunktionen eine inverse Funktion, die ebenfalls stetig und streng monoton steigend ist.

Bekanntlich ist die zu $y = f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ inverse Funktion die Potenzfunktion $x = g_n(y) = y^n$.

Die Definitionsbereiche und Wertevorräte aller Potenzfunktionen $x = g_n(y) = y^n$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ bestehen ebenso wie die der zu ihnen inversen Wurzelfunktionen jeweils aus allen von Null verschiedenen positiven reellen Zahlen.

Beispielsweise ist zu $y = f_4(x) = \sqrt[4]{x}$ mit $0 < x < \infty$ und $0 < y < \infty$ die Potenzfunktion $x = g_4(y) = y^4$ mit $0 < y < \infty$ und $0 < x < \infty$ die inverse Funktion.

Nach den hier getroffenen Voraussetzungen wird bei den weiteren Erörterungen die Angabe von Definitionsbereichen und Wertevorräten weggelassen und auch nicht immer wieder darauf hingewiesen, daß man unter n nur natürliche Zahlen, die größer oder gleich 2 sind, zu verstehen hat.

Die Ableitung jeder Potenzfunktion $x = g(y) = y^n$ ist $x' = g'(y) = n\,y^{n-1}$.

Man kann nunmehr für $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ die Umkehrregel anwenden:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x'} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{n\,y^{n-1}} = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

Nach dem Wurzelgesetz $\left(\sqrt[k]{a}\right)^n = \sqrt[k]{a^n}$ kann schließlich geschrieben werden:

(9) $\quad \boldsymbol{y = f(x) = \sqrt[n]{x}; \qquad y' = f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}.$

Die Regel nimmt folgende Gestalt an, wenn statt der Wurzelschreibweise die Potenzschreibweise benutzt wird:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n \cdot x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)},$$

(10) $$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}; \qquad y' = f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

In dieser Darstellungsweise ist deutlich zu erkennen, daß die Regel für das Differenzieren von Wurzelfunktionen formal vollkommen mit der entsprechenden Regel für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten übereinstimmt. Es gilt also allgemein:

Für $y = f(x) = x^n$ ist $y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, wobei n eine beliebige ganze oder der reziproke Wert einer beliebigen positiven ganzen Zahl sein kann.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß diese Gesetzmäßigkeit nicht nur für positive Werte $\frac{1}{n}$ gilt.

Beispiel 2:

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $(x \neq 0)$. Man formt zunächst um: $y = f(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Dann wendet man die Quotientenregel an.

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 \cdot x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}}{x^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1-\frac{2}{3}};$$

$$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1}.$$

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß die Regel für das Differenzieren von Potenz- und Wurzelfunktionen auch für alle Funktionen gilt, deren Exponenten reziproke Werte negativer ganzer Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß diese Vermutung richtig ist!

Im folgenden wird die Potenzschreibweise bevorzugt. Nur zum Schluß der Untersuchungen kehrt man, wenn es sich als zweckmäßig erweist, zur Wurzelschreibweise zurück. Beispielsweise läßt sich das oben gewonnene Ergebnis wie folgt umformen:

$$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3 \cdot x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3x \cdot x^{\frac{3}{3}}} = -\frac{1}{3x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Aufgaben

1. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt[5]{x}$ **b)** $y = f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $y = f(x) = \sqrt[3]{8x}$ **d)** $y = f(x) = \sqrt[6]{2x}$

e) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ **f)** $y = f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ **g)** $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$ **h)** $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

2. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = x^3$ **b)** $y = f(x) = x^{-3}$

c) $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ **d)** $y = f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

3. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ **b)** $y = f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$

c) $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{4}}$ **d)** $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} : x^{-\frac{1}{4}}$

Lösen Sie diese Aufgaben auf verschiedene Weise!

4. Bilden Sie die jeweilige inverse Funktion zu folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 3x + 5$ **b)** $y = f(x) = -2x + 1$

c) $y = f(x) = -\dfrac{3}{5}x + 2$ **d)** $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x - 8$

Hinweis: Gewinnen Sie die ersten Ableitungen dieser Funktionen, indem Sie die jeweilige inverse Funktion differenzieren und die Umkehrregel benutzen!

5. Bilden Sie nach Festlegung geeigneter Definitionsbereiche die jeweilige inverse Funktion zu folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3} + 2}$

b) $y = f(x) = \sqrt[3]{5x - 1}$

c) $y = f(x) = \sqrt{2x - 3}$

d) $y = f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x}{4} + \dfrac{2}{3}}$

Wie lauten die ersten Ableitungen dieser vier Funktionenpaare?

6. Gewinnen Sie die Umkehrregel $f'(x) \cdot g'(y) = 1$ durch geometrische Überlegungen mit Hilfe der Abbildung 1.4.!

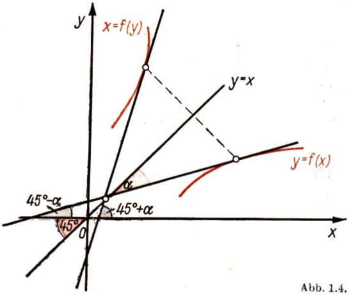


Abb. 1.4.

1.1.5. Ableitung von Funktionen von Funktionen

Mit Hilfe der Umkehrregel ist es in einer Reihe von Fällen möglich, das Differenzieren einer komplizierteren Funktion auf das Bilden der Ableitung einer einfacheren Funktion zurückzuführen. Im folgenden soll nach weiteren Regeln gesucht werden, die das Differenzieren komplizierterer Funktionen erleichtern.

Beispiel 3:
Die Ableitung der Funktion $y = f(x) = (2x^2 - 3x + 4)^3$ ist gesucht.

Lösungsweg 1:
Man multipliziert aus und differenziert die Funktion unter Anwendung bekannter Regeln in der dann entstehenden Form:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= (2x^2 - 3x + 4)^3 \\ &= 8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64 \\ y' = f'(x) &= 48x^5 - 180x^4 + 408x^3 - 513x^2 + 408x - 144\,. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wenig übersichtlich.

Lösungsweg 2:
Man faßt $y = f(x) = (2x^2 - 3x + 4)^3$ als eine Funktion auf, die sich als Produkt dreier Funktionen $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ und $w = \chi(x)$ ergibt. Demgemäß verwendet man die Regel für das Differenzieren eines Produktes von drei Funktionen:

$$\begin{aligned} (u\,v\,w)' &= u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'; \\ y = f(x) &= (2x^2 - 3x + 4)^3 \\ &= (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3x + 4); \\ y' = f'(x) &= (4x - 3)(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3x + 4) \\ &\quad + (2x^2 - 3x + 4)(4x - 3)(2x^2 - 3x + 4) \\ &\quad + (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 - 3x + 4)(4x - 3) \\ y' = f'(x) &= 3 \cdot (2x^2 - 3x + 4)^2 \cdot (4x - 3)\,. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist wesentlich übersichtlicher als das über den Lösungsweg 1 gewonnene.

Weisen Sie die Identität der beim Lösungsweg 1 und beim Lösungsweg 2 gewonnenen Ergebnisse nach!

Die beim Beschreiten des Lösungsweges 2 gewonnenen Erkenntnisse werden durch die folgende Schreibweise besonders deutlich:
Weil $y = f(x) = (2x^2 - 3x + 4)^3$ als Produkt von drei gleichen Funktionen $\varphi(x) = 2x^2 - 3x + 4$ aufgefaßt werden kann,
weil also $y = f(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ mit $\varphi(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ist,
muß für $y' = f'(x)$ nach der Regel für das Differenzieren von Produkten von Funktionen gelten:

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \varphi'(x) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(x) + \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \cdot \varphi(x) + \varphi(x) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \\ &= 3 \cdot [\varphi(x)]^2 \cdot \varphi'(x) \text{ mit } \varphi(x) = 2x^2 - 3x + 4 \text{ und } \varphi'(x) = 4x - 3\,. \end{aligned}$$

Bilden Sie die Ableitung der Funktion $y = f(x) = (2x^3 - 5x + 3)^4$!

Faßt man in $y = f(x) = (2x^3 - 5x + 3)^4$ die viermal als Faktor in der Produktdarstellung dieser Funktion auftretende ganze rationale Funktion dritten Grades $\varphi(x) = 2x^3 - 5x + 3$ als innere Funktion einer Potenzfunktion vierten Grades auf, so kann man kürzer schreiben:

$$y = f(x) = [\varphi(x)]^4 \text{ mit } \varphi(x) = 2x^3 - 5x + 3\,.$$

Die Funktion $y = f(x) = (2x^3 - 5x + 3)^4$ ist also eine Funktion einer Funktion. Allgemein symbolisiert man Funktionen von Funktionen, auch **mittelbare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen** genannt, durch:

(11) $\quad \boldsymbol{y = f[\varphi(x)]} \quad$ oder $\quad \boldsymbol{y = f(u)} \quad$ mit $\quad \boldsymbol{u = \varphi(x)}$.

Für das Beispiel $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$ bzw. für die Funktion $y = (2x^3 - 5x + 3)^4$ schreibt man demgemäß:

a) $\quad y = f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^3 = (2x^2 - 3x + 4)^3$
oder: $y = f(u) = u^3$ mit $u = \varphi(x) = 2x^2 - 3x + 4$;

b) $\quad y = f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^4 = (2x^3 - 5x + 3)^4$
oder: $y = f(u) = u^4$ mit $u = \varphi(x) = 2x^3 - 5x + 3$.

Die Verwendung der eben eingeführten Schreibweise läßt die Struktur der Ableitungen dieser beiden Potenzfunktionen von ganzen rationalen Funktionen klar erkennen:

a₁) $\quad y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 3[\varphi(x)]^2 \cdot \varphi'(x) = 3(2x^2 - 3x + 4)^2 \cdot (4x - 3)$
oder: $y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(2x^2 - 3x + 4)^2 \cdot (4x - 3)$;

b₁) $\quad y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 4[\varphi(x)]^3 \cdot \varphi'(x) = 4(2x^3 - 5x + 3)^3 \cdot (6x^2 - 5)$
oder: $y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = 4u^3 \cdot u' = 4(2x^3 - 5x + 3)^3 \cdot (6x^2 - 5)$.

Die Analyse der Struktur der Ableitungen dieser beiden Potenzfunktionen von ganzen rationalen Funktionen führt zur Vermutung, daß allgemein gelten könnte: Für $y = f(u) = u^n$ $(n = 2; 3; 4; \ldots)$ mit der ganzen rationalen Funktion $u = \varphi(x)$ als innerer Funktion ist stets $y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot \varphi'(x)$. Dabei bedeutet $f'(u)$ die erste Ableitung von $f(u)$ nach der als unabhängige Veränderliche betrachteten Funktion $u = \varphi(x)$.

● *Schreiben Sie $y = (3x^2 - 4x + 5)^2$ so, daß in der allgemeinen Symbolik deutlich sichtbar wird, welche funktionalen Zusammenhänge vorliegen! Weisen Sie nach, daß die Ableitung in der Form*

$y' = 2(3x^2 - 4x + 5)^{2-1} \cdot \varphi'(x)$ mit $\varphi'(x) = 6x - 4$

geschrieben werden kann!

● *Untersuchen Sie, ob für $y = f(u) = u^2$ mit $u = \varphi(x) = 3x + \sqrt{x}$ ebenfalls gilt: $y' = 2u^{2-1} \cdot \varphi'(x)$!*

Das Ergebnis der zuletzt durchgeführten Untersuchung zeigt, daß die innere Funktion $u = \varphi(x)$ einer Funktion von einer Funktion nicht immer eine ganze rationale Funktion sein muß, wenn mit $y = f(u) = u^n$ $(n = 1; 2; 3; \ldots)$ zugleich $y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot \varphi'(x)$ gelten soll. Es genügt, daß die innere Funktion

von $y = f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^n$ $(n = 1; 2; 3; \ldots)$ eine differenzierbare Funktion ist, für deren Funktionswerte die Potenzfunktion $y = [\varphi(x)]^n$ definiert ist.
Unter dieser wesentlich allgemeineren Voraussetzung beweist man diese Vermutung. Für Potenzfunktionen $y = f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^n$ $(n = 1; 2; 3; \ldots)$ von differenzierbaren Funktionen $u = \varphi(x)$ gilt stets:

(12) $y' = n[\varphi(x)]^{n-1} \cdot \varphi'(x)$.

Man schreibt dabei die unabhängige Veränderliche x nicht immer mit. Es ist jedoch notwendig, sich jederzeit bewußtzumachen, daß u unmittelbar und y über u mittelbar von x abhängen.
Der Beweis wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt.

1. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn es ist $[\varphi(x)]' = 1 \cdot [\varphi(x)]^0 \cdot \varphi'(x)$.
2. Jetzt wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ (Induktionsvoraussetzung) die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt, wobei man sich für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken darf. Unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung $[u^k]' = k\, u^{k-1} \cdot u'$ erhält man:

$$[u^{k+1}]' = [u^k \cdot u]' = [u^k]' \cdot u + u^k \cdot u' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \cdot u + u^k \cdot u',$$
$$[u^{k+1}]' = (k + 1)\, u^k \cdot u'.$$

Damit ist die Behauptung für alle natürlichen n bewiesen.

▶ **Für $y = f(u) = u^n$ mit differenzierbarer innerer Funktion $u = \varphi(x)$ gilt für jede natürliche Zahl n stets $y' = nu^{n-1} \cdot u'$; wobei unter u^0 stets 1 zu verstehen ist.**

Es erhebt sich die Frage, ob die gewonnene Regel in der Form $y' = f'(u) \cdot u'$ auch dann gilt, wenn $f(u)$ keine Potenzfunktion $y = f(u) = u^n$ ist, sondern eine beliebige differenzierbare Funktion, die für die Funktionswerte von $u = \varphi(x)$ definiert ist.
Beweis für die Richtigkeit dieser Vermutung:
Es seien $y = f(u)$ und $u = \varphi(x)$ zwei differenzierbare Funktionen, die zusammengesetzt die Funktion $y = f[\varphi(x)]$ bilden, wobei der Wertevorrat von $u = \varphi(x)$ ganz im Definitionsbereich von $y = f(u)$ enthalten sein muß.

Zu $x = x_0$ gehören:
$u_0 = \varphi(x_0)$ und $y_0 = f(u_0)$.

Zu $x = x_0 + h$ gehören:
$u_h = \varphi(x_0 + h)$ und $y_h = f(u_h) = f(u_0 + k)$ mit $k = u_h - u_0$.

Für den Differenzenquotienten der Funktion $y = f[\varphi(x)]$ an der Stelle $x = x_0$ gilt:

$$\frac{f[\varphi(x_0 + h)] - f[\varphi(x_0)]}{h} = \frac{f(u_0 + k) - f(u_0)}{h} = \frac{f(u_0 + k) - f(u_0)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$
$$= \frac{f(u_0 + k) - f(u_0)}{k} \cdot \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h},$$

wobei mit k erweitert wurde. Der Beweis ist nur für den Fall gültig, daß für $h \neq 0$ auch stets $k \neq 0$ ist; auf den Beweis der Allgemeingültigkeit wird hier nicht eingegangen.

Da $f(u)$ und $\varphi(x)$ als differenzierbar nach ihrer jeweiligen unabhängigen Veränderlichen vorausgesetzt sind, ist insbesondere die Funktion $\varphi(x)$ im Untersuchungsintervall auch stetig. Das bedeutet aber, daß mit $h \to 0$ zugleich $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = u_h - u_0 = k \to 0$ gilt. Daher kann der Grenzübergang wie folgt vollzogen werden:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{f[\varphi(x_0 + h)] - f[\varphi(x_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0 + k) - f(u_0)}{k} \cdot \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{f(u_0 + k) - f(u_0)}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} \\ y' &= f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) \,. \end{aligned}$$

Da diese Betrachtungen für jede Stelle $x = x_0$ des Definitionsbereichs gelten, ist somit der folgende Satz bewiesen:

▶ **Ist die Funktion $u = \varphi(x)$ in einem gewissen Intervall I differenzierbar und die Funktion $y = f(u)$ in einem Intervall erklärt und differenzierbar, das jeden Wert des Wertevorrats von $u = \varphi(x)$ enthält, so ist auch die mittelbare Funktion $y = f[\varphi(x)]$ in I differenzierbar, und es gilt dort:**

(13) $$y' = f'[\varphi(x)] = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad \text{mit } u = \varphi(x) \,.$$

In Worten:

▶ **Die Ableitung der mittelbaren Funktion ist gleich dem Produkt aus der Ableitung der äußeren Funktion nach der inneren und der Ableitung der inneren Funktion nach der unabhängigen Veränderlichen x, von der die innere Funktion unmittelbar, die äußere nur mittelbar abhängt.**

Benutzt man die Leibnizsche Schreibweise, so gilt:

(14) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \,.$$

In der Form $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ist die Verkettung der Ableitungen, die beim Differenzieren von Funktionen von Funktionen zu bilden sind, besonders einprägsam. Man bezeichnet daher diese Regel auch oft als **Kettenregel** für das Differenzieren von Funktionen von Funktionen.

Man kann die Kettenregel ähnlich wie die Produktregel, die ursprünglich auch nur für zwei Funktionen als Faktoren erklärt wurde, auf eine beliebige Anzahl von Funktionen erweitern. Wenn beispielsweise y eine Funktion von u, u eine Funktion von v, v eine Funktion von w und w eine Funktion von x ist, so erhalten wir die mehrfach zusammengesetzte Funktion:

$$y = f[\varphi\{\psi[\omega(x)]\}]$$

mit $y = f(u)$, $\quad u = \varphi(v)$, $\quad v = \psi(w) \quad$ und $\quad w = \omega(x)$.

Die Ableitung dieser mehrfach zusammengesetzten Funktion ist:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(w) \cdot \omega'(x) \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\,.$$

Der Beweis für diese Verallgemeinerung ergibt sich durch wiederholte Anwendung der einfachen Kettenregel.

Beweisen Sie die Kettenregel für dreifach zusammengesetzte Funktionen!

An zwei einfachen Beispielen sollen im folgenden die geometrischen Beziehungen bei mittelbaren Funktionen untersucht werden.

Beispiel 4:

Gegeben sei die Funktion $y = f[\varphi(x)] = (2x + 1)^2$.
In der Abbildung 1.5.a ist das Bild von $u = \varphi(x) = 2x + 1$ gezeichnet.
Besonders hervorgehoben sind die beiden Punkte $P_0\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ und $P_h\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.
Es sind also:

$$x_0 = \frac{3}{2}; \quad x_0 + h = \frac{5}{2}; \quad h = 1;$$

$$u_0 = 4; \quad u_0 + k = 6; \quad k = 2\,.$$

In der Abbildung 1.5.b ist das Bild von $y = f(u) = u^2$ gezeichnet. Besonders hervorgehoben sind die beiden Punkte $P_0\,(4; 16)$ und $P_k\,(6; 36)$.
Es sind also:

$$u_0 = 4; \quad u_0 + k = 6; \quad k = 2;$$

$$y_0 = 16; \quad y_0 + l = 36; \quad l = 20\,.$$

In der Abbildung 1.5.c ist das Bild von $y = f[\varphi(x)] = (2x + 1)^2$ gezeichnet.
Besonders hervorgehoben sind die beiden Punkte $P_0\left(\frac{3}{2}; 16\right)$ und $P_1\left(\frac{5}{2}; 36\right)$.

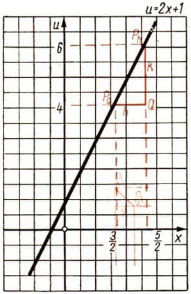


Abb. 1.5.a

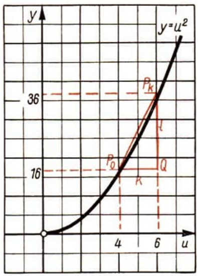


Abb. 1.5.b

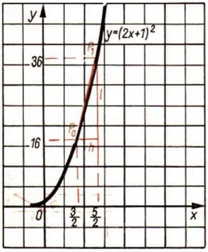


Abb. 1.5.c.

Es sind also:

$$x_0 = \frac{3}{2}; \qquad x_0 + h = \frac{5}{2}; \qquad h = 1;$$

$$f\left[\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = f(4) = 16; \qquad f\left[\varphi\left(\frac{5}{2}\right)\right] = f(6) = 36; \qquad f\left[\varphi\left(\frac{5}{2}\right)\right] - f\left[\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = 20.$$

Die den Differenzenquotienten entsprechenden Steigungen der Sekanten durch die besonders hervorgehobenen Punktepaare sind demnach:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{k}{h} = \frac{2}{1} = 2; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{l}{k} = \frac{20}{2} = 10;$$

$$\frac{f\left[\varphi\left(\frac{5}{2}\right)\right] - f\left[\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right]}{h} = \frac{20}{1} = 20 = 2 \cdot 10 = \frac{k}{h} \cdot \frac{l}{k} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Offenbar durchlaufen mit h gleichzeitig k und l Nullfolgen.

Verfolgen Sie die Änderungen im Beispiel 4, wenn Sie statt $h = 1$ folgende Zahlen wählen: $h_1 = \frac{1}{2}$; $h_2 = \frac{1}{4}$; $h_3 = \frac{1}{8}$!

Beispiel 5:

Gegeben ist die Funktion $y = f[\varphi(x)] = \sqrt[3]{x^2}$ mit $0 < x \leqq 6$. In den Abbildungen 1.6.a, 1.6.b und 1.6.c wurden Bilder der Funktionen $u = \varphi(x) = x^2$, $y = f(u) = \sqrt[3]{u}$ und $y = f[\varphi(x)] = \sqrt[3]{x^2}$ gezeichnet. Dabei sind folgende Punktepaare besonders hervorgehoben:

a) $P_0\,(2; 4)$ und $P_h\,(3; 9)$;

b) $P_0\left(4; \sqrt[3]{4}\right)$ und $P_k\left(9; \sqrt[3]{9}\right)$;

c) $P_0\left(2; \sqrt[3]{4}\right)$ und $P_1\left(3; \sqrt[3]{9}\right)$.

Die eingezeichneten Sekanten haben folgende Steigungen:

a) $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{k}{h} = \dfrac{5}{1} = 5$;

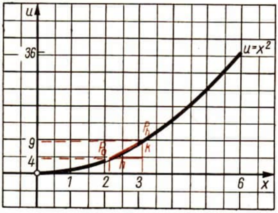


Abb. 1.6.a

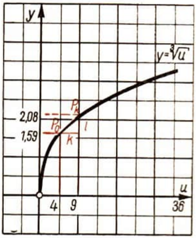


Abb. 1.6.b

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = \dfrac{l}{k} = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{5} \approx \dfrac{2{,}1 - 1{,}6}{5} = 0{,}1\,;$

c) $\dfrac{f[\varphi(3)] - f[\varphi(2)]}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{1} \approx \dfrac{0{,}5}{1} = 5 \cdot 0{,}1\,.$

Die Anwendung der Kettenregel soll an den folgenden Beispielen, die zugleich weitere wichtige mathematische Erkenntnisse und Formeln vermitteln, erläutert werden.

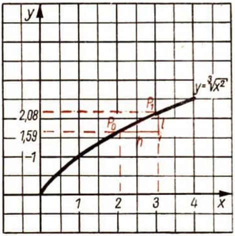


Abb. 1.6.c

Beispiel 6:

Die Ableitung der Funktion $y = f[\varphi(x)] = (2x+1)^2$ ist zu bilden.

$$u = \varphi(x) = 2x + 1\,; \qquad y = f(u) = u^2\,;$$

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x) = 2\,; \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = 2u\,;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = 2u \cdot 2 = 4\,(2x+1)\,.$$

Beispiel 7:

Die Ableitung der Funktion $y = f[\varphi(x)] = \sqrt[3]{x^2}$ $(x > 0)$ ist zu bilden.

$$u = \varphi(x) = x^2; \qquad y = f(u) = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}\,;$$

$$\frac{du}{dx} = 2x; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{3u}\,;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{3u} \cdot 2x = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x^2} \cdot 2x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\,.$$

Dieses Ergebnis kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1}\,.$$

Die Ableitung der Funktion $y = x^n$ mit $n = \dfrac{2}{3}$ ist also wie die Ableitung aller Funktionen $y = x^n$ mit ganzzahligem n oder dem reziproken Wert eines ganzzahligen n als Exponent $y' = n \cdot x^{n-1}$. Das führt zu der Vermutung, daß die Regel für das Differenzieren von Potenz- und Wurzelfunktionen auch für solche Funktionen $y = f(x) = x^n$ Gültigkeit hat, bei denen n eine beliebige rationale Zahl ist.

Beispiel 8:

Die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^n$ mit einer beliebigen rationalen Zahl n als Exponent wird gesucht.

Statt $y = f(x) = x^n$ schreibt man $y = f(x) = x^n = x^{\frac{p}{q}}$ mit ganzzahligem p und q.

Nach den Regeln für das Rechnen mit Potenzen ist $x^{\frac{p}{q}}$ gleich $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Demnach gilt:

$$y = f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^p \text{ mit } \varphi(x) = x^{\frac{1}{q}}.$$

Es sind nach den Regeln für das Differenzieren von Potenzfunktionen (Exponent ganzzahlig bzw. der reziproke Wert einer ganzen Zahl) und nach der Kettenregel:

$$u = \varphi(x) = x^{\frac{1}{q}}; \qquad y = f(u) = u^p;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}; \qquad \frac{dy}{du} = p \cdot u^{p-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = p \cdot u^{p-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Somit gilt die Regel für das Differenzieren von Potenzfunktionen für jede rationale Zahl n.

Die Ableitung von $y = f(x) = x^n$ ist $y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, n beliebig rational.

Beispiel 9:

Die Ableitung der Funktion $y = f[\varphi(x)] = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $0 < x < r$ soll gebildet werden.

$$u = \varphi(x) = r^2 - x^2; \qquad y = f(u) = u^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{du}{dx} = -2x; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Wenn man die in expliziter Form gegebene Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ in die implizite Form umwandelt, so erhält man nach dem Quadrieren:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

In dieser Form ist leicht zu erkennen, daß jeder Punkt des Bildes der Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ auf einem Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Durch den oben festgelegten Definitionsbereich $0 < x < r$ wird in der expliziten Darstellung allerdings nur der im ersten Quadranten gelegene Viertelkreis analytisch erfaßt.

Wie heißen die expliziten Darstellungen derjenigen analytischen Ausdrücke, durch die die übrigen drei Viertelkreise beschrieben werden? Wie lauten die Ableitungen dieser drei Funktionen?

Beispiel 10:

Die Ableitung der durch $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ mit $0 < x < r$ und $0 < y < r$ in impliziter Form gegebenen Funktion $y = f(x)$ soll ermittelt werden. Durch die Festlegung der Intervalle, in denen x und y sich bewegen, erhält man die im Beispiel 9 untersuchte Funktion. In diesem Bereich ist die Funktion $y = f(x)$ streng einsinnig. Daher gibt es, wie man aus dem vorangegangenen Abschnitt weiß, ein Paar zueinander inverser Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$, die die Gleichungen

(15) $F[x, f(x)] = x^2 + [f(x)]^2 - r^2 = 0$

bzw.

(16) $F[g(y), y] = [g(y)]^2 + y^2 - r^2 = 0$

befriedigen, und zwar ist $y = f[\varphi(x)] = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $x = g[\psi(y)] = \sqrt{r^2 - y^2}$. Nach der Umkehrregel gilt $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{-\dfrac{x}{y}} = -\dfrac{y}{x}$.

Man kann aber sowohl das Resultat $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$ als auch das Ergebnis $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ noch auf eine andere Weise gewinnen. Faßt man nämlich in $F(x, y) = 0$ eine der beiden hier völlig gleichberechtigten Veränderlichen x und y als abhängig von der anderen auf, was man wegen der Existenz der zueinander inversen Funktionen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ darf, dann gilt (15) bzw. (16).

In (15) handelt es sich somit um eine Funktion, deren unabhängige Veränderliche x ist. Das Glied x^2 hängt unmittelbar von x ab. Wir schreiben daher vorübergehend: $\varphi(x) = x^2$. Das Glied $[f(x)]^2$ hängt mittelbar von x ab. Wir schreiben daher vorübergehend: $\psi[f(x)] = [f(x)]^2$. Das Glied r^2 ist eine Konstante.

Wir bilden nunmehr die Ableitungen nach x.

Aus $\varphi(x) = x^2$ folgt unmittelbar: $\varphi'(x) = 2x$;
aus $\psi[f(x)] = [f(x)]^2$ folgt nach der Kettenregel:

$$\frac{d\{\psi[f(x)]\}}{d[f(x)]} \cdot \frac{d[f(x)]}{dx} = 2\,[f(x)] \cdot \frac{d[f(x)]}{dx} = 2\,y \cdot y'\;;$$

die Ableitung der Konstanten r^2 ist gleich Null.

Somit ist insgesamt:

$$\frac{d[F(x, y)]}{dx} = \frac{d[F(x, f(x))]}{dx} = F'[x, f(x)] = 2\,x + 2\,y \cdot y' - 0\,.$$

Da aber zugleich $F[x, f(x)] = 0$ gilt, muß $\frac{d[F(x, y)]}{dx}$ gleich der Ableitung der rechten Seite von $F[x, f(x)] = 0$, also gleich der Ableitung von Null sein. Die Ableitung der Konstanten Null ist bekanntlich wieder Null.
Somit gilt schließlich insgesamt:

$$\frac{d[F(x, f(x))]}{dx} = F'[x, f(x)] = 2\,x + 2\,y \cdot y' = 0$$

oder für $y \neq 0$: $$y' = -\frac{x}{y}.$$

Diese Art, die Ableitung einer Funktion zu gewinnen, nennt man **implizites Differenzieren.**

Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $x = g(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ $(0 < y < r)$ durch implizites Differenzieren!

Beispiel 11:

Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[3]{(2\,x + 5)^2 \cdot (3\,x - 4)}$ ist gesucht. Zunächst wird der Bau dieser Funktion analysiert.

Es ist:

$$u = \varphi(x) = 3\,x - 4; \qquad v = \psi(x) = 2\,x + 5; \qquad w = \chi(v) = v^2;$$
$$z = \omega(u, w) = u \cdot w \qquad y = f(z) = \sqrt[3]{z}\,.$$

Insgesamt: $y = f[\omega\{\chi[\psi(x)] \cdot \varphi(x)\}]$.

Man bildet die Ableitungen:

$$u' = \varphi'(x) = 3; \qquad v' = \psi'(x) = 2; \qquad \frac{dw}{dv} = \chi'(v) = 2\,v;$$
$$w' = \chi'[\psi(x)] = 2\,v \cdot v' = 4\,(2\,x + 5);$$
$$\begin{aligned} z' &= u' \cdot w + w' \cdot u = 3\,v^2 + 4\,(2\,x + 5)\,(3\,x - 4) \\ &= 3\,(2\,x + 5)^2 + 4\,(2\,x + 5)\,(3\,x - 4) \\ &= (2\,x + 5)\,[3\,(2\,x + 5) + 4\,(3\,x - 4)] \end{aligned}$$
$$z' = (2\,x + 5)\,(18\,x - 1)\,;$$
$$y' = \frac{1}{3}\,z^{-\frac{2}{3}} \cdot z' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\,x + 5)\,(18\,x - 1)}{\sqrt[3]{(2\,x + 5)^4 \cdot (3\,x - 4)^2}}\,;$$
$$y' = \frac{18\,x - 1}{3\sqrt[3]{(2\,x + 5)\,(3\,x - 4)^2}}\,.$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn vor dem Differenzieren eine implizite Darstellung der Funktion gebildet wird:

$$F(x, y) = y^3 - (2x+5)^2 \cdot (3x-4) = 0;$$

$$F'[x, f(x)] = 3y^2 \cdot y' - 4(2x+5)(3x-4) - 3(2x+5)^2 = 0;$$

$$y' = \frac{(2x+5)[4(3x-4)+3(2x+5)]}{3y^2} = \frac{18x-1}{3\sqrt[3]{(2x+5)(3x-4)^2}}.$$

Aufgaben

In den Aufgaben 1 bis 19 bedeuten a, b, c, d, a_i, b_i, c_i, k, m, n, p, r, s, t Konstante.

1. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (3x+5)^2$ **b)** $y = f(x) = (0{,}2x - 3{,}1)^2$

c) $y = f(x) = (1{,}7x + 2{,}3)^2$ **d)** $y = f(x) = (ax+b)^2$

e) $y = f(x) = (2x^2 - 5x + 5)^2$ **f)** $y = f(x) = (0{,}5x^2 + 3{,}1x - 4)^2$

2. Bilden Sie die ersten und die zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (4x-3)^3$ **b)** $y = f(x) = (5{,}2x - 8)^3$

c) $y = f(x) = (ax+b)^3$ **d)** $y = f(x) = (7x^2 - 5x + 2)^3$

e) $y = f(x) = \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{9}\right)^3$ **f)** $y = f(x) = (ax^2 + bx + c)^3$

3. Bilden Sie die ersten und die zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^4$ **b)** $y = f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^4$

c) $y = f(x) = (ax+b)^4$ **d)** $y = f(x) = (ax+b)^5$

4. Untersuchen Sie, die wievielte Ableitung folgender Funktionen eine von Null verschiedene Konstante ist!

a) $y = f(x) = (ax+b)^2$ **b)** $y = f(x) = (ax+b)^3$

c) $y = f(x) = (ax+b)^4$ **d)** $y = f(x) = (ax+b)^n$

5. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (3x-5)^4 \cdot (2x+5)^3$ **b)** $y = f(x) = (3{,}8x - 1{,}7) \cdot (4{,}2x - 3{,}9)^3$

c) $y = f(x) = (ax+b)^n \cdot (cx+d)^m$ **d)** $y = f(x) = (2ax + b)^n \cdot (ax + 2b)^m$

6. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (2{,}3x - 3{,}5)^3 \cdot (3{,}2x + 5{,}3)^3 \cdot (4{,}7x - 8{,}1)^2$

b) $y = f(x) = (ax+b)^3 \cdot (cx+d)^2 \cdot (ex+f)^4$

7. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (2x^2 + 7x - 5)^3 \cdot (3x^2 + 4x - 6)^4 \cdot (5x^2 - 6x + 8)^2$

b) $y = f(x) = (x^3 + x + 1)^2 \cdot (x^2 - 1)^3 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)^4$

c) $y = f(x) = (ax^2 + bx + c)^3 \cdot (cx^2 + bx + a)^2 \cdot (bx^2 + cx + a)^4$

d) $y = f(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)^n \cdot (a_2x^2 + b_2x + c_2)^m \cdot (a_3x^2 + b_3x + c_3)^r$

8. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2$ **b)** $y = f(x) = \left(\frac{5x-7}{4x+3}\right)^2$

c) $y = f(x) = \left(\frac{7{,}1x - 3{,}2}{4{,}3x - 5{,}6}\right)^3$ **d)** $y = f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n$

9. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \left(\frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 + 5x^2 - 3}\right)^2$ **b)** $y = f(x) = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx^3 + ex^2 + fx + g}\right)^2$

10. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \left[\frac{(2x-3)(3x+4)}{x^2+1}\right]^2$ **b)** $y = f(x) = \left[\frac{(3x+5)(4x-1)}{(2x-3)(9x+7)}\right]^3$

11. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2 \cdot \left[\frac{x^2+x+1}{(x+2)^2}\right]$

b) $y = f(x) = \left[\frac{(2x-1)^2 \cdot (3x+5)}{(4x+3) \cdot (5x-1)^3}\right]^2 \cdot \left[\frac{(x-5) \cdot (2x+5)}{(3x-4)^3}\right]^4$

12. Bilden Sie die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **b)** $y = f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ **c)** $y = f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

13. Bilden Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ **b)** $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$ **c)** $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

14. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt{2x-1}$ **b)** $y = f(x) = \sqrt{9x-4}$

c) $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ **d)** $y = f(x) = \sqrt{(3x+2)(4x-9)}$

e) $y = f(x) = \sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ **f)** $y = f(x) = \sqrt{x^2-9}$

15. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **b)** $y = f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}}$

c) $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$ **d)** $y = f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{(x^2-16)(x+3)}}$

e) $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x-5}{(x^2+4)(3x^2-5)}}$ **f)** $y = f(x) = \sqrt{g(x)}$

16. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = (x - \sqrt{x})^2$ **b)** $y = f(x) = (x^2 - \sqrt[3]{x^2})^2$

c) $y = f(x) = (2x + x\sqrt[4]{x^3})^2$ **d)** $y = f(x) = \left(\frac{x^2\sqrt[5]{x^3}}{x^3+5}\right)^2$

e) $y = f(x) = \frac{2x - x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}{(x - 2x^2 \cdot \sqrt{x})^5}$ **f)** $y = f(x) = \left[\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right]^3$

17. Bilden Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ c) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

d) $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ e) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ f) $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

g) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - (b\,x)^2}}$ h) $y = f(x) = \dfrac{a\,x}{\sqrt{b^2\,x^2 - c^2}}$ i) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x - a)^3}}$

18. Bilden Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ b) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

c) $y = f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ d) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}$

e) $y = f(x) = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + x}}}$

19. Differenzieren Sie unter Beachtung der Nebenbedingungen implizit die folgenden Funktionen!

a) $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(y > 0)$ (Ellipse)

b) $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(y > 0)$ (Hyperbel)

c) $F(x, y) = y^2 - 2\,p\,x = 0$ $(y > 0)$ (Parabel)

d) $F(x, y) = x^3 - a\,y^2 = 0$ $(y > 0)$ (Neilsche Parabel)

e) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2\,a^2\,(x^2 - y^2) = 0$ $(x > 0, y > 0)$ (Lemniskate)

f) $F(x, y) = (x - a)^2\,(x^2 + y^2) - b^2\,x^2 = 0$ $(y > 0)$ (Konchoide)

g) $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ $(x > 0, y > 0)$ (Astroide)

20. Erläutern Sie folgende Formel zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten!

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

Benutzen Sie diese Formel zur näherungsweisen Bestimmung folgender Wurzeln!

a) $\sqrt{3700}$ b) $\sqrt{5020}$ c) $\sqrt{6325}$ d) $\sqrt{8432}$

e) $\sqrt{0{,}0456}$ f) $\sqrt{0{,}005}$ g) $\sqrt{0{,}0003}$ h) $\sqrt{0{,}9001}$

21. Bestimmen Sie folgende Wurzeln näherungsweise!

a) $\sqrt[3]{29}$ b) $\sqrt[3]{70}$ c) $\sqrt[4]{90}$ d) $\sqrt[3]{0{,}250}$ e) $\sqrt[4]{0{,}0600}$

Hinweis: $29 = 27 + 2 = 27\left(1 + \dfrac{2}{27}\right)$

22. Kontrollieren Sie mit Hilfe der in Aufgabe 20 angegebenen Näherungsformel die Richtigkeit folgender Näherungsformeln!

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ **b)** $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$

e) $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{x}{3}$ **f)** $(1+x)^n \approx 1 + n\,x$ (n rational)

23. Zeichnen und diskutieren Sie die Bilder folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}\,(4-x)$ und $y = g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x}\,(4-x)$

b) $y = f(x) = x\sqrt{25-x^2}$ und $y = g(x) = -x\sqrt{25-x^2}$

c) $y = f(x) = \sqrt{x\,(x^2-16)}$ und $y = g(x) = -\sqrt{x\,(x^2-16)}$

d) $y = f(x) = x - \sqrt{1-x}$ **e)** $y = f(x) = 1 + 2\,(1-x)^{\frac{3}{2}}$

24. Aus der Menge aller Dreiecke mit gegebenem Flächeninhalt und gegebener Grundseite ist das mit dem kleinsten Umfang zu bestimmen.

25. Beweisen Sie, daß von allen Dreiecken mit einer gegebenen Grundseite g und gegebenem Umfang $2\,s$ das gleichschenklige den größten Flächeninhalt besitzt!
Hinweis: Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann aus den drei Seiten a, b und c nach der Formel von HERON bestimmt werden:

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \qquad (a+b+c=2\,s)\,.$$

26. In einen Halbkreis soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, daß eine Rechteckseite auf dem den Halbkreis begrenzenden Kreisdurchmesser liegt. In welchem Verhältnis müssen die Rechteckseiten zueinander stehen?

27. Unter den Rechtecken, die einem gegebenen Kreis mit dem Radius r einbeschrieben werden können, ist dasjenige mit dem größten Flächeninhalt zu ermitteln.

28. Um ein Rechteck mit den Seiten $2\,c$ und $2\,d$ soll diejenige Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ umbeschrieben werden, deren Flächeninhalt möglichst klein ist, wenn die Ellipsenachsen parallel zu den Rechteckseiten verlaufen.
Hinweis: Den Flächeninhalt der Ellipse berechnet man nach der Formel $A = \pi \cdot a \cdot b$.

29. In die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ soll ein symmetrisch zur Ellipsenhauptachse $2\,a$ gelegenes gleichschenkliges Dreieck so einbeschrieben werden, daß sein Flächeninhalt möglichst groß wird. Wo schneidet die Basis des gleichschenkligen Dreiecks die Hauptachse der Ellipse?

30. Wie muß das Verhältnis $r : h$ sein, wenn für einen geraden Kreiskegel **a)** bei gegebenem Flächeninhalt des Kegelmantels das Kegelvolumen möglichst groß wird, **b)** bei gegebenem Kegelvolumen der Flächeninhalt des Mantels möglichst klein wird?

31. Aus einer Kreisscheibe von vorgegebenem Radius wird nach Herausschneiden eines Sektors ein Kegel (Filter) geformt. Wie groß ist der Zentriwinkel des herausgeschnittenen Sektors zu wählen, wenn das Fassungsvermögen maximal sein soll?

32. Ein Wanderer geht vom Ort A zum Ort B, indem er zuerst von A bis P auf der Straße entlang geht, dann von P bis B über eine Wiese läuft. Die Teilstrecken $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ werden der Einfachheit halber als geradlinig angenommen. Auf der Straße kann der Wanderer doppelt so schnell gehen wie auf der Wiese. Durch das seitliche Abbiegen von der Straße kürzt er aber den Gesamtweg ab; vgl. Abbildung 1.7. An welcher Stelle P muß der Wanderer die Straße verlassen, wenn er möglichst schnell von A nach B gelangen will und der Ort B von der Straße den Abstand $\overline{BC} = a$, die Strecke von A bis C die Länge b hat?

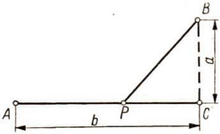


Abb. 1.7.

33. Es sind zwei Punkte A und B und eine mit ihnen in einer Ebene liegende Gerade g gegeben, die die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden gegebenen Punkte nicht schneidet, aber auch nicht zu ihr parallel ist. Es ist die kürzeste Verbindung von A über einen Punkt P der Geraden g nach B zu finden.

34. Es sind zwei Punkte A und B und eine mit ihnen in einer Ebene liegende Gerade g gegeben, die die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden gegebenen Punkte schneidet. Unter allen Punkten P auf g ist derjenige zu bestimmen, über den man am schnellsten von A nach B gelangt. Dabei soll der variable Punkt P ein Punkt auf g und die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Teilstrecke $\overline{AP}$ gleich u, die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Teilstrecke $\overline{PB}$ aber gleich v sein.

35. Von einem Punkt A ausgehend, trifft ein Lichtstrahl auf den Spiegel S und wird dort nach B reflektiert. Das Licht schlägt dabei stets denjenigen Weg ein, auf dem es in kürzester Zeit von A über S nach B gelangt. Welche Beziehung besteht zwischen dem Einfallswinkel und dem Reflexionswinkel am Spiegel?

36. Von einem Punkt A ausgehend, trifft ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche F zwischen zwei lichtdurchlässigen verschiedenen Medien. Von einem Punkt P auf F verläuft das Licht weiter nach B, einem Punkt in dem Medium, dem A nicht angehört. Das Licht schlägt dabei stets denjenigen Weg ein, auf dem es in kürzester Zeit von A über P nach B gelangt. Wo liegt P auf F? Unter welchem Winkel durchstößt der Lichtstrahl F in P, wenn die Geschwindigkeit von A bis P gleich u ist? Wie verläuft der Lichtstrahl von P nach B, wenn die Geschwindigkeit nunmehr gleich v ist?

Vergleichen Sie die mathematische Behandlung der Aufgaben 32 bis 36 untereinander!

37. Zwei Punkte A und B einer geradlinig verlaufenden Straße sind $a = 650$ m voneinander entfernt. Ein Neubau C hat den Abstand $\overline{BC} = b = 180$ m von der Straße. Der Neubau soll Gasanschluß bekommen. Die Baukosten betragen längs der Straße 72 MDN je Meter, seitlich der Straße jedoch 85 MDN je Meter. An welcher Stelle muß beim Bau von der Straße geradlinig abgezweigt werden, damit die Baukosten möglichst gering bleiben? Dieses aus der Praxis stammende Problem soll von Ihnen mathematisch formuliert und gelöst werden.

38. Beim Kanalbau wählt man meist Querschnitte, die die Gestalt gleichschenkliger Trapeze haben. Dabei sind sowohl der Flächeninhalt des Kanalquerschnitts als auch die Kanaltiefe durch den Verwendungszweck (Schiffsgrößen und -typen) festgelegt. Da das Isolieren der vom Wasser benetzten Flächen besonders kostspielig ist, versucht man den Bau so zu gestalten, daß die Seitenflächen einen möglichst günstigen Winkel mit der Kanalsohle bilden. Wie groß ist dieser Winkel?

39. Aus drei Holzbrettern von je 25 cm Breite soll eine Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt und möglichst großem Fassungsvermögen gebaut werden. Wie ist die Rinne zu gestalten?

1.1.6. Integration von Wurzelfunktionen

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung!

Der Zusammenhang zwischen den Stammfunktionen

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

und ihren Ableitungen

$$F'(x) = f(x)$$

ermöglicht es, die im vorangegangenen Unterricht erarbeiteten Erkenntnisse über das Differenzieren der Wurzelfunktionen und der Funktionen von Funktionen für den weiteren Ausbau der Integralrechnung nutzbar zu machen.

Die Funktion $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = x^n$.

Beweisen Sie, daß $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist!

Es gilt also:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Dabei kann n jede beliebige von -1 verschiedene rationale Zahl sein.

Beispiel 12:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C.$$

Beispiel 13:

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\,x\,\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Beispiel 14:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Beispiel 15:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = 4\,x^{\frac{1}{4}} + C = 4\,\sqrt[4]{x} + C.$$

Machen Sie die Probe, indem Sie die Ergebnisse der Integrationen in den Beispielen 12 bis 15 differenzieren!

1.1.7. Integration mittelbarer Funktionen

Mit Hilfe der Regel für das Differenzieren von Funktionen von Funktionen gewinnt man auf folgendem Wege eine sehr wichtige Integrationsregel.
Die Stammfunktion $F(x)$ sei eine mittelbare Funktion:

$$F(x) = F[\varphi(u)] = G(u) \quad \text{mit} \quad x = \varphi(u) .$$

Die Ableitung von $F(x)$ sei mit $F'(x) = f(x)$, die Ableitung von $G(u)$ werde mit $G'(u) = g(u)$ bezeichnet. Da $F(x)$ und $G(u)$ Stammfunktionen sein sollen, kann auch geschrieben werden:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{und} \quad G(u) = \int g(u)\,du .$$

Nach der Kettenregel ist

$$g(u) = G'(u) = F'[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u) = F'(x) \cdot \varphi'(u) = f(x) \cdot \varphi'(u) .$$

Statt $g(u)$ darf also gesetzt werden: $g(u) = f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u)$.
Wegen der vorausgesetzten Gleichheit von $F(x)$ und $G(u)$ gilt aber auch

$$\int g(u)\,du = \int f(x)\,dx \quad \text{und damit}$$

(17) $$\int f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u)\,du = \int f(x)\,dx \quad \text{mit } x = \varphi(u) .$$

Da $x = \varphi(u)$ gesetzt wurde, kann für die Ableitung $x' = \varphi'(u)$ auch geschrieben werden:

$$\frac{dx}{du} = \frac{d[\varphi(u)]}{du} = \varphi'(u) .$$

Sehr einprägsam läßt sich diese wichtige Integrationsregel mit der LEIBNIZschen Symbolik wie folgt schreiben:

(17a) $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)]\,\frac{dx}{du} \cdot du .$$

Diese Regel heißt **Substitutionsregel**, weil sie zeigt, wie die Veränderliche x durch eine andere Veränderliche ersetzt, substituiert, wird. Die Substitutionsregel der Integralrechnung kann von beiden Seiten gelesen werden.

● *Lesen Sie die Regel $\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = \int f(x)\,dx$ von links nach rechts und von rechts nach links! Erläutern Sie die jeweiligen Zusammenhänge!*

Die Substitutionsmethode wird in der Integralrechnung stets dann angewendet, wenn mit ihrer Hilfe ein kompliziert auszuwertendes Integral auf ein leichter auszuwertendes zurückgeführt werden kann.
Unter den vielfältigen Möglichkeiten für die Substitution von Hilfsveränderlichen sind die linearen Substitutionen besonders wichtig.

■ **Beispiel 16:**

$$\int f(x)\,dx = \int (3\,x + 5)^2\,dx .$$

Die Funktion $f(x)$ ist eine mittelbare Funktion. Setzt man die innere Funktion wie üblich gleich u, so ist

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,dx = \int [\varphi(x)]^2\,dx = \int u^2\,dx \text{ mit } u = \varphi(x) = 3\,x + 5 .$$

Die Funktion $u = \varphi(x) = 3x + 5$ besitzt als lineare Funktion die inverse Funktion:

$$x = \psi(u) = \frac{1}{3}(u - 5).$$

Die Ableitung der Funktion $x = \psi(u)$ ist $x' = \psi'(u) = \frac{1}{3}$.
Nach der Substitutionsregel ist also:

$$\int u^2\,dx = \int u^2 \cdot \frac{1}{3}\,du \quad \text{mit} \quad u = \varphi(x) = 3x + 5.$$

Der konstante Faktor $\frac{1}{3}$ kann vor das Integral gezogen werden:

$$\int u^2 \cdot \frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int u^2\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{9}\cdot u^3 + C.$$

Macht man schließlich die Substitution $u = \varphi(x) = 3x + 5$ rückgängig, so erhält man:

$$\int (3x+5)^2\,dx = \frac{1}{9}\cdot(3x+5)^3 + C.$$

Selbstverständlich hätte man das Integral $\int (3x+5)^2\,dx$ auch ohne Anwendung der Substitutionsmethode lösen können:

$$\int (3x+5)^2\,dx = \int (9x^2 + 30x + 25)\,dx = 3x^3 + 15x^2 + 25x + C_1.$$

Beweisen Sie, daß diese auf verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnisse übereinstimmen!

Beispiel 17:

$$\int f(x)\,dx = \int \sqrt{4x-3}\,dx.$$

Man substituiert linear:

$$u = \varphi(x) = 4x - 3; \qquad x = \psi(u) = \frac{1}{4}(u+3); \qquad x' = \psi'(u) = \frac{1}{4}.$$

Also ist:

$$\int \sqrt{4x-3}\,dx = \int (4x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\cdot u\cdot u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6}(4x-3)\cdot\sqrt{4x-3} + C.$$

Dieses Integral hätte man mit den bisher erworbenen Kenntnissen ohne Anwendung der Substitutionsmethode nicht auswerten können. Daher wird hier nur durch Differenzieren überprüft.

$$F(x) = \frac{1}{6}(4x-3)\cdot\sqrt{4x-3} + C = \frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} (4x - 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$F'(x) = \frac{12}{12} (4x - 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4x - 3} = f(x).$$

Da die Ableitung der durch Integration gewonnenen Funktion $F(x)$ gleich der zu integrierenden Funktion $f(x)$ ist, wurde das vorgelegte Integral $\int \sqrt{4x - 3}\, dx$ richtig ausgewertet.

Beispiel 18:

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax + b)^m}} = \int (ax + b)^r\, dx \quad \text{mit} \quad r = -\frac{m}{n}$$

(n und m von Null verschiedene positive ganze Zahlen, $r \neq -1$).

Substitution:

$$u = \varphi(x) = ax + b; \qquad x = \psi(u) = \frac{1}{a}(u - b); \qquad x' = \psi'(u) = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

$$\int f(x)\, dx = \int u^r \cdot \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a} \cdot \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n - m} \cdot (ax + b)^{-\frac{m-n}{n}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax + b)^m}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n - m} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(ax + b)^{m-n}}} + C.$$

Zur Probe differenziert man:

$$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n - m} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(ax + b)^{m-n}}} + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n - m} \cdot (ax + b)^{-\frac{m-n}{n}} + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n - m} \cdot \left(-\frac{m - n}{n}\right) \cdot (ax + b)^{-\frac{m-n}{n} - 1} \cdot a \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$F'(x) = \frac{a}{a} \cdot \frac{n(n - m)}{(n - m)n} \cdot (ax + b)^{\frac{-m+n-n}{n}} = (ax + b)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(ax + b)^m}} = f(x).$$

Aufgaben

In den Aufgaben 1 bis 5 sind a und b Konstanten.

1. a) $\int (x + 1)^2\, dx$ **b)** $\int (2x + 1)^2\, dx$ **c)** $\int (x + 2)^2\, dx$
d) $\int (2x + 2)^2\, dx$ **e)** $\int (3 + ax)^2\, dx$ **f)** $\int (3 - ax)^2\, dx$

2. a) $\int (2x - 5)^3\, dx$ **b)** $\int (6x - 1)^4\, dx$ **c)** $\int (9 - 7x)^4\, dx$
d) $\int (8 - 5x)^3\, dx$ **e)** $\int (a + bx)^3\, dx$ **f)** $\int (a + bx)^4\, dx$

3. a) $\int \frac{dx}{(2x + 5)^2}$ **b)** $\int \frac{dx}{(5x - 3)^4}$ **c)** $\int \frac{dx}{(a - 5x)^5}$

4. a) $\int \sqrt{x+1}\,dx$ b) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ c) $\int \sqrt{ax+1}\,dx$

d) $\int \sqrt{ax+b}\,dx$ e) $\int \sqrt[3]{2x+5}\,dx$ f) $\int \sqrt[3]{(2x+5)^2}\,dx$

g) $\int \sqrt[4]{(2-3x)^3}\,dx$ h) $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$ i) $\int \sqrt[n]{(b-ax)^2}\,dx$

5. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+5}}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x+5)^2}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2x-5}}$

6. Berechnen Sie den Inhalt folgender Flächenstücke!

a) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

b) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ im ersten Quadranten eingeschlossen wird.

c) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ eingeschlossen wird.

1.1.8. Zur Übung und Wiederholung

1. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = -\frac{1}{3+x}$ $(x \neq -3)$

b) $y = f(x) = \frac{1}{5-x}$ $(x \neq 5)$

c) $y = f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(0{,}5+x)^3}$ $(x > -0{,}5)$

d) $y = f(x) = \frac{2}{3}(8-x)\sqrt{8-x}$ $(x < 8)$

e) $y = f(x) = 2\sqrt{-3+x}$ $(x > 3)$

f) $y = f(x) = -\frac{2\sqrt{(6-5x)^3}}{15}$ $\left(x < \frac{6}{5}\right)$

2. Ermitteln Sie die folgenden Integrale!

a) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(3+x)^2}$ b) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{(5-x)^2}$ c) $\int\limits_{-0{,}1}^{0{,}4} \sqrt{0{,}5+x}\,dx$

d) $\int\limits_{4}^{7} \sqrt{8-x}\,dx$ e) $\int\limits_{12}^{19} \frac{dx}{\sqrt{-3+x}}$ f) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{6-5x}\,dx$

3. Zeigen Sie, daß die Parabel $y = \frac{x^2}{a}$ $(a \neq 0)$ das Rechteck mit den Ecken $P_0(0; 0)$, $P_1(x_1; 0)$, $P_2(0; y_1)$ und $P_3(x_1; y_1)$, wobei P_3 auf der Parabel liegt, in zwei Teile zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie 1:2 verhalten!

4. Die Geschwindigkeit v eines frei fallenden Körpers (Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$) ist $v = g \cdot t$, worin g etwa 9,81 ms^{-2} beträgt und t die in Sekunden ausgedrückte Zeit seit Fallbeginn bedeutet. Wie groß ist der in 1; 3; 8; t Sekunden durcheilte Weg?

5. a) Wie groß ist die Fläche, die von den Koordinatenachsen, der Geraden $x_1 = 6$ und dem Bild der Funktion $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ begrenzt wird?

b) Wie lautet das entsprechende Ergebnis für die Funktion

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \quad \text{mit} \quad x_1 = k,$$

wobei $a_0 > 0$, $a_3 > 0$, $f(x) \neq 0$ für $0 \leqq x \leqq x_1$ angenommen seien?

c) Zeigen Sie, daß das in b) gewonnene Resultat dem gleich ist, das man bei Anwendung der Simpsonschen Regel $F_0^{x_1} = \frac{x_1}{6}(y_0 + y_1 + 4\,y_m)$ erhält!

Hinweis: Es gilt hier $y_0 = f(x_0) = f(0)$, $y_1 = f(x_1) = f(k)$, $y_m = f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = f\left(\frac{k}{2}\right)$.

6. Bestimmen Sie die Rauminhalte folgender Rotationskörper!

a) Von der Geraden $2x - y - 5 = 0$ rotiert der zwischen den Koordinatenachsen gelegene Abschnitt um die x-Achse (Kegeldrehen);

b) von der Hyperbel $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ rotiert der unterhalb der x-Achse gelegene Teil im Intervall $4 \leqq x \leqq 8$ um die y-Achse (Kühlturm);

c) ein in Scheitellage befindlicher Kreis rotiert im Intervall $0 \leqq x \leqq h$ mit $h < d$ (d bedeutet den Kreisdurchmesser) um den Kreisdurchmesser, der auf einer Koordinatenachse liegt (Kugelabschnitt);

d) von der Parabel $y = x^2 + a$ $(a > 0)$ rotiert das im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ gelegene Stück um seine Symmetrieachse (zentrifugierte Flüssigkeit).

1.2. Winkelfunktionen und zyklometrische Funktionen

1.2.1. Additionstheoreme für Winkelfunktionen

● *Zeichnen Sie die grafischen Darstellungen der Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$, wobei x im Bogenmaß gemessen wird, in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem!*

Aus dem Unterricht in der Trigonometrie und der Vektorrechnung sind die folgenden für alle Werte von x und y gültigen Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen bekannt:

(1) $\quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$

(2) $\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$

(3) $\quad \sin(-x) = -\sin x,$

(4) $\cos(-x) = \cos x$,

(5) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

(6) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

(7) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$
(Additionstheorem für den Sinus),

(8) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
(Additionstheorem für den Kosinus).

Die Beziehungen (1) und (2) besagen, daß die Sinus- und die Kosinusfunktion die Periode 2π haben. Die Beziehung (3) besagt, daß $y = \sin x$ eine ungerade, die Beziehung (4), daß $y = \cos x$ eine gerade Funktion ist.
Die Beziehungen (5) und (6) verknüpfen den Sinus und den Kosinus miteinander, während die Additionstheoreme (7) und (8) die Winkelfunktionen verschiedener Argumente zueinander in Beziehung setzen.
Mit Hilfe der Beziehungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ergeben sich aus (7) und (8) die beiden Additionstheoreme für den Tangens und den Kotangens:

(9) $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ und

(10) $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$,

sowie aus (3), (4) und (6) die Beziehungen:

$\tan(-x) = \tan x$ und $\cot(-x) = \cot x$, $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$.

Aus (9) und (10) ergeben sich schließlich:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{und} \quad \cot(x + \pi) = \cot x.$$

Beweisen Sie diese Beziehungen!

Aus den Additionstheoremen für den Sinus und den Kosinus ergeben sich für den Spezialfall $x = y$ die beiden wichtigen Relationen:

$\sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$,

(11) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x$

und

$\cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$,

(12) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Diese können z. B. zur Berechnung des Sinus und des Kosinus des „doppelten Winkels“ ($2x$) dienen, wenn die entsprechenden Werte für den „einfachen Winkel“ (x) bekannt sind.

Unter Benutzung von (5) kann man (12) auch in der Form

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

schreiben, woraus man die oft nützlichen Beziehungen

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{und} \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

erhält.

Die letzten Gleichungen werden häufig in der Form

(13) $\mathbf{2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x}$ und

(14) $\mathbf{2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x}$

geschrieben und können so zur Berechnung des Sinus und des Kosinus für den „halben Winkel“ $\left(\frac{x}{2}\right)$ dienen, falls die entsprechenden Werte für den „ganzen Winkel“ (x) bekannt sind.

Beispiel 1: Wie groß ist $\sin 15° = \sin\frac{\pi}{12}$?

Nach (13) ist $2\sin^2 15° = 1 - \cos 30° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $\sin^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Da $\sin 15°$ sicher positiv ist, erhält man schließlich $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Beispiel 2: Wie groß ist $\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10}$?.

Nach (13) ist $2\sin^2 18° = 1 - \cos 36°$, und nach (14) ist $2\cos^2 36° = 1 + \cos 72°$. Auf Grund von (6) ist aber $\cos 72° = \sin 18°$. Somit erhält man:

(15) $2\sin^2 18° = 1 - \cos 36°$,

(16) $2\cos^2 36° = 1 + \sin 18°$.

Subtrahiert man die erste Zeile von der zweiten, so ergibt sich

$$2(\cos^2 36° - \sin^2 18°) = \cos 36° + \sin 18°$$

und hieraus durch Division durch den sicher von Null verschiedenen Wert auf der rechten Seite

(17) $2(\cos 36° - \sin 18°) = 1$.

Rechnet man aus (15) $\cos 36°$ aus, so erhält man:

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°.$$

Setzt man diesen Wert in (17) ein, so ergibt sich:

$$2(1 - \sin 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ) = 1 \quad \text{oder} \quad 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\sin 18^\circ$, und man erhält unter Beachtung der Tatsache, daß $\sin 18^\circ$ positiv ist:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.$$

Führen Sie diese Rechnung aus!

Beispiel 3: Es ist $\cos 144^\circ$ zu berechnen.

Nach (14) ist $2\cos^2 72^\circ = 1 + \cos 144^\circ$ und nach Beispiel 2 ist

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.$$

Daher ist

$$\cos 144^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16} - 1 = \frac{12-4\sqrt{5}-16}{16} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie **a)** $\cos 36^\circ$; **b)** $\sin 22{,}5^\circ$!

2. Berechnen Sie **a)** $\cos 18^\circ$; **b)** $\cos 15^\circ$; **c)** $\sin 9^\circ$; **d)** $\cos 9^\circ$!

3. Unter Benutzung der Additionstheoreme sind folgende Werte zu berechnen!
$\sin 39^\circ = \sin(30^\circ + 9^\circ)$; $\cos 48^\circ = \cos(30^\circ + 18^\circ)$; $\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ)$
Hinweis: Beachten Sie auch die Beziehungen (3) und (4)!

1.2.2. Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen treten z.B. auf, wenn in einer geometrischen Figur aus gegebenen Strecken und Winkeln ein Winkel berechnet werden soll. Zwei Typen einfacher goniometrischer Bestimmungsgleichungen sind:

(I) $\quad a\sin x + b\cos x + c = 0 \quad$ (a, b, c beliebige gegebene reelle Zahlen);

(II) $\quad a\sin(mx + \alpha) - b\sin(nx + \beta) + c = 0$

(a, b, c, α, β beliebige gegebene reelle Zahlen; m, n beliebige gegebene ganze Zahlen).

Nicht jede goniometrische Gleichung hat eine Lösung. So hat z.B. die Gleichung $\cos x = \pi$ keine Lösung, da stets gilt: $-1 \leqq \cos x \leqq 1$, π aber größer als 1 ist.

Unter den goniometrischen Gleichungen, die eine Lösung besitzen, gibt es solche, die nur eine einzige, andere, die unendlich viele haben. So hat z.B. jede der Gleichungen (I), die überhaupt eine Lösung x_0 hat, wegen der Periodizität von $\sin x$ und $\cos x$ auch die Lösungen $x_k = x_0 + 2k\pi$, k ganzzahlig.

Die Gleichung $\sin^2 x + \sin^2 \pi x = 0$ hat die einzige Lösung $x_0 = 0$. Sie ist nur für $\sin x = \sin \pi x = 0$ erfüllt. Für eine beliebige Lösung x_0 muß also gelten:

$$x_0 = m\pi\,, \qquad m \text{ ganzzahlig,}$$

und gleichzeitig

$$x_0 = n\,, \qquad n \text{ ganzzahlig.}$$

Wäre $n \neq 0$, so ergäbe sich $n = m\pi$, also $m \neq 0$ und daher $\pi = \frac{n}{m}$; das ist unmöglich, da π irrational ist.

Beispiel 4:

(18) $\quad 4\sin x + 6\cos x = 3\,.$

Unter der Annahme, daß (18) eine Lösung $x = x_0$ besitzt, folgt aus (18)

(19) $\quad 6\cos x_0 = 3 - 4\sin x_0\,.$

Um eine der beiden Winkelfunktionen zu eliminieren, wird die Beziehung (5) benutzt und daher zuvor (19) durch Quadrieren umgeformt. Man erhält so aus (19) zunächst

$$36\cos^2 x_0 = 9 - 24\sin x_0 + 16\sin^2 x_0$$

und weiter

$$36\,(1 - \sin^2 x_0) = 9 - 24\sin x_0 + 16\sin^2 x_0 \quad \text{oder}$$

$$52\sin^2 x_0 - 24\sin x_0 - 27 = 0\,.$$

Setzt man $\sin x_0 = z_0$, so muß z_0 der quadratischen Gleichung

$$z_0^2 - \frac{6}{13} z_0 - \frac{27}{52} = 0$$

genügen, so daß entweder

(20) $$z_0 = z_1 = \frac{3}{13} + \sqrt{\frac{36 + 351}{4 \cdot 13^2}} = \frac{6 + \sqrt{387}}{26} = \frac{6 + 3\sqrt{43}}{26} \quad \text{oder}$$

$$z_0 = z_2 = \frac{6 - 3\sqrt{43}}{26}$$

sein muß.

Um festzustellen, ob jeder Winkel x_0, für den $\sin x_0 = z_1$ oder $\sin x_0 = z_2$ ist, auch die Gleichung (18) befriedigt, wird zunächst $\cos x_0$ berechnet.

Es gilt $\cos x_0 = +\sqrt{1 - z_1^2}$ oder $\cos x_0 = -\sqrt{1 - z_1^2}$

bzw. $\cos x_0 = +\sqrt{1 - z_2^2}$ oder $\cos x_0 = -\sqrt{1 - z_2^2}\,.$

Aus (20) ergibt sich:

$$1 - z_1^2 = \frac{26^2 - (6 + 3\sqrt{43})^2}{26^2} = \frac{253 - 36\sqrt{43}}{26^2} = \left[\frac{9 - 2\sqrt{43}}{26}\right]^2$$

bzw.

$$1 - z_2^2 = \left[\frac{9 + 2\sqrt{43}}{26}\right]^2$$

und folglich

$$\cos x_0 = \frac{9 - 2\sqrt{43}}{26} \quad \text{oder} \quad \cos x_0 = -\frac{9 - 2\sqrt{43}}{26} \quad \text{bzw.}$$

$$\cos x_0 = \frac{9 + 2\sqrt{43}}{26} \quad \text{oder} \quad \cos x_0 = -\frac{9 + 2\sqrt{43}}{26}.$$

Setzt man diese Werte in (18) ein, so erhält man für die linke Seite von (18)

$$4 \cdot \frac{6 + 3\sqrt{43}}{26} + 6 \cdot \frac{9 - 2\sqrt{43}}{26} \quad \text{oder} \quad 4 \cdot \frac{6 + 3\sqrt{43}}{26} - 6 \cdot \frac{9 - 2\sqrt{43}}{26}$$

bzw.

$$4 \cdot \frac{6 - 3\sqrt{43}}{26} + 6 \cdot \frac{9 + 2\sqrt{43}}{26} \quad \text{oder} \quad 4 \cdot \frac{6 - 3\sqrt{43}}{26} - 6 \cdot \frac{9 + 2\sqrt{43}}{26}.$$

Man erkennt so, daß diejenigen und nur diejenigen Werte x_0 Lösungen von (18) sind, für die entweder

$$\sin x_0 = \frac{6 + 3\sqrt{43}}{26} \text{ und gleichzeitig } \cos x_0 = \frac{9 - 2\sqrt{43}}{26}$$

oder

$$\sin x_0 = \frac{6 - 3\sqrt{43}}{26} \text{ und gleichzeitig } \cos x_0 = \frac{9 + 2\sqrt{43}}{26}$$

ist.

Unter Benutzung von Tafelwerten ergeben sich daher die folgenden Näherungswerte für die Lösungen $x_0 = x_1$ und $x_0 = x_2$:

$\sin x_1 = z_1 \approx 0{,}9874$	$\sin x_2 = z_2 = -0{,}5259$
$\cos x_1 < 0$	$\cos x_2 > 0$
$x_1 \approx 99{,}1^\circ + k \cdot 360^\circ$	$x_2 \approx -31{,}7^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Das hier erläuterte Verfahren führt bei allen Gleichungen der Form (I) zum Ziel. Ein anderes vorteilhaftes Verfahren zur Lösung goniometrischer Geichungen des Typs (I) ist das im folgenden Beispiel verwendete.

Beispiel 5:

(21) $6 \sin x + 8 \cos x = 1$.

Wenn diese Gleichung eine Lösung $x = x_0$ hat, so muß $6 \sin x_0 + 8 \cos x_0 = 1$ sein. Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, so entsteht die mit (21) gleichbedeutende Gleichung

(22) $\frac{3}{5} \sin x_0 + \frac{4}{5} \cos x_0 = \frac{1}{10}$.

Wegen $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ gibt es einen Winkel α, für den

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ und } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$ gilt[1], so daß (22) in

[1] Vgl. auch das entsprechende Verfahren bei der Gewinnung der Hesseschen Normalform einer Geraden.

(23) $\cos\alpha \sin x_0 + \sin\alpha \cos x_0 = \sin(x_0 + \alpha) = 0{,}1$

übergeht. Da für die Sinusfunktion gilt: $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, gibt es sicher Winkel β, für die $\sin\beta = 0{,}1$ ist. Für jeden solchen Wert β ist $x_0 = \beta - \alpha$ eine Lösung von (21); denn durch Einsetzen findet man

$$\begin{aligned} 6\sin(\beta-\alpha) + 8\cos(\beta-\alpha) &= 6(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) \\ &\quad + 8(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \\ &= \sin\beta(6\cos\alpha + 8\sin\alpha) + \cos\beta(8\cos\alpha - 6\sin\alpha) \\ &= 0{,}1\left(\frac{18}{5} + \frac{32}{5}\right) + \cos\beta\left(\frac{24}{5} - \frac{24}{5}\right) = 1\,. \end{aligned}$$

Aus der Tafel entnimmt man:

$\alpha \approx 53{,}1^\circ$,
$\beta_1 \approx 5{,}7^\circ$,
$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$.

Dieser Wert ergibt sich unter Beachtung der Beziehung $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Also erhält man

$x_{01} \approx -47{,}4^\circ + k\cdot 360^\circ$
$x_{02} \approx 121{,}1^\circ \quad + k\cdot 360^\circ$.

Bringen Sie die Gleichung $a\sin x + b\cos x = c$ mit Hilfe des soeben erläuterten Verfahrens auf die Form $\sin(x_0 + \alpha) = d$! Zeigen Sie im Anschluß daran, daß die Ausgangsgleichung dann und nur dann eine Lösung hat, wenn $c^2 \leqq a^2 + b^2$ ist!

Beispiel 6:

(24) $3\sin 3x + 2\sin x = -1$

Nach dem Additionstheorem (7) ist

$$\sin 3x = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x\cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x \sin x\,,$$
$$\sin 3x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x\,,$$

(25) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Damit geht (24) in $9\sin x - 12\sin^3 x + 2\sin x = -1$ oder mit $\sin x = z$ in

(26) $12z^3 - 11z - 1 = 0$

über. Diese kubische Gleichung hat, wie man sofort erkennt, die Lösung $z_1 = 1$. Daher kann man auf der linken Seite den Linearfaktor $(z-1)$ abspalten und erhält, wenn man die linke Seite durch $(z-1)$ teilt, die Identität

$$12z^3 - 11z - 1 \equiv (z-1)(12z^2 + 12z + 1)\,.$$

Die beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms auf der rechten Seite sind

$$z_{2;3} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{6}\,.$$

Man erhält von (26) so die drei Lösungen:

$$z_1 = 1\,,\quad z_2 = \frac{-3+\sqrt{6}}{6} \approx -0{,}0918\,,\quad z_3 = -\frac{3+\sqrt{6}}{6} \approx -0{,}9083\,.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Lösungen von (24):

1) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 2) $x_2 \approx -\ 5{,}26° + k \cdot 360°$,

3) $x_3 = 180° - x_2$, 4) $x_4 \approx -65{,}27° + k \cdot 360°$,

5) $x_5 = 180° - x_4$.

● *Zeigen Sie, daß für alle Werte von α stets* $|3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha| \leqq 1$ *gilt*,

a) *unter Benutzung von* (25),

b) *indem Sie* $\sin \alpha = x$ *setzen und die Funktion* $y = 3x - 4x^3$ *in dem Intervall* $|x| \leqq 1$ *untersuchen! Fertigen Sie auch eine Zeichnung an!*

Im Falle $m = n$ kann die Gleichung der Form (II) auf die Form (I) gebracht werden. Sie lautet nämlich

$$a \sin (n x + \alpha) - b \sin (n x + \beta) = c\,.$$

Setzt man $(n x + \alpha) = t$, so ergibt sich

$$a \sin t - b \sin (t - \alpha + \beta) = a \sin t - b \sin t \cos (\beta - \alpha) - b \cos t \sin (\beta - \alpha) = c$$

oder

$$[a - b \cos (\beta - \alpha)] \sin t - [b \sin (\beta - \alpha)] \cos t = c\,.$$

Diese Gleichung ist von der Form (I) und hat also dann und nur dann eine Lösung, wenn

(27) $c^2 \leqq [a - b \cos (\beta - \alpha)]^2 + b^2 \sin^2 (\beta - \alpha) = a^2 - 2ab \cos (\beta - \alpha) + b^2$

gilt.

Diese Ungleichung kann unabhängig vom vorhergehenden Gedankengang geometrisch gedeutet werden.

● *Geben Sie eine solche geometrische Deutung!*

Anleitung: Fassen Sie a und b als Längen zweier Seiten eines Dreiecks und den Winkel $\gamma = (\beta - \alpha)$ als den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel auf!

● *Untersuchen Sie auf analoge Weise die Gleichungen*

$$a \sin (n x + \alpha) + b \cos (n x + \beta) = c;$$
$$a \cos (n x + \alpha) + b \cos (n x + \beta) = c!$$

■ **Beispiel 7:**

$\sqrt{3} \sin (5x + 10°) - 2 \sin (5x + 40°) = 1$.

Mit $t = 5x + 10°$, $t + 30° = 5x + 40°$ nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\sqrt{3} \sin t - 2 \sin (t + 30°) = \sqrt{3} \sin t - 2 \sin t \cos 30° - 2 \sin 30° \cos t = 1$$

an oder wegen $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Form $-\cos t = 1$.

Daraus folgt $t = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ und folglich wegen $10° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{18}$: $x = \frac{(2k+1)\pi}{5} - \frac{\pi}{90}$, k ganzzahlig, oder im Gradmaß: $x = 34° + k \cdot 72°$, k ganzzahlig.

Aufgaben

1. Lösen Sie die goniometrische Gleichung $\sin 2x = \cos x$ rechnerisch undzeichnerisch!

2. Welche Winkel erfüllen die folgenden Gleichungen?

a) $\frac{1}{2} \cdot \cos x - 2x + 1 = 0$ **b)** $\cos 2x = \cos x - 1$

c) $\cos x - \sin 2x = \cos 3x$ **d)** $\sin 2x = \tan x$

3. Lösen Sie folgende Bestimmungsgleichungen rechnerisch und möglichst auch zeichnerisch!

a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ **b)** $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\sin(\alpha + 23°) + \sin(\alpha - 7°) = 1{,}6$ **d)** $\sin(\beta - 15°) - \sin(\beta - 45°) = 0{,}5176$

e) $\cos(\beta - 19°) + \cos(\beta - 21°) = 1{,}73$ **f)** $\cos(\alpha + 12°) - \cos(\alpha + 25°) = 0{,}193$

4. Ermitteln Sie die Winkel, durch die folgende Gleichungen erfüllt werden!

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 = 0$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$

c) $\sin(\alpha + 60°) - 0{,}5 = \sin\alpha$ **d)** $\cos(\beta + 15°) \cdot \sin(\beta - 15°) = 0{,}25$

e) $\sin x + \sin y = 0{,}75$ und $x + y = \frac{\pi}{4}$ **f)** $\cos\alpha - \cos\beta = 0{,}68$ und $\beta - \alpha = 60°$

Lösen Sie diese Aufgaben auch zeichnerisch!

1.2.3. Definition und Kurven der zyklometrischen Funktionen

Die im vorigen Abschnitt erläuterten Verfahren zur Lösung goniometrischer Gleichungen laufen alle darauf hinaus, zunächst die gegebene Gleichung auf die Form

(28) $\boldsymbol{\sin x = y}$ (x gesucht; y gegeben)

zu bringen.
Diese letzte Gleichung wurde dann mit Hilfe von Tafeln näherungsweise gelöst. Faßt man in der Gleichung (28) das gegebene y als unabhängige Variable und das gesuchte x als abhängige Variable auf, so würde die Auflösung der Gleichung (28) die Aufgabe sein, die Umkehrfunktion von $y = \sin x$ zu bilden. Da jedoch die Gleichung (28) für diejenigen y, für die sie überhaupt eine Lösung hat, stets unendlich viele Lösungen besitzt, sind hier noch einige zusätzliche Überlegungen nötig. Denn bei jeder Funktion, also auch der Umkehrfunktion, ist definitionsgemäß jedem im Definitionsbereich gelegenen Wert der unabhängigen Variablen nur ein Wert zugeordnet.

Aus der Definition der Funktion $y = \sin x$ am Kreis erkennt man folgendes:

Wenn x das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ monoton steigend durchläuft, so durchlaufen die zugehörigen Funktionswerte $y = \sin x$ das Intervall $[-1, 1]$ monoton steigend. Durchläuft x dagegen das Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ monoton steigend, so durchlaufen die Funktionswerte von $y = \sin x$ das Intervall $[-1, 1]$ von $+1$ nach -1 monoton fallend. Wegen der Periodizität ergibt sich so:

$$y = \sin x \text{ ist in } \begin{cases} I_k^*: & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ monoton steigend;} \\ I_{*k}: & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ monoton fallend.} \end{cases}$$

Innerhalb jedes einzelnen der Monotonieintervalle existiert daher zu $y = f(x) = \sin x$ eine inverse Funktion

(29) $\quad x = g_k^*(y)$ in I_k^* bzw. $x = g_{*k}(y)$ in I_{*k}, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Da der Winkel x hier im Bogenmaß gemessen wird, ist also für jede der Funktionen (29) x ein Bogen (auf dem Einheitskreis), dessen Sinus gleich y ist (lat.: x est arcus cuius sinus est y). Daher schreibt man für jede der Funktionen (29)

$\boldsymbol{x = \arcsin y}$ (gelesen: Arkussinus y).

Vertauscht man schließlich wie üblich x und y, so erhält man die unendlich vielen zu $y = \sin x$ inversen Funktionen

(30) $\quad \boldsymbol{y = g_k^*(x)}$ und $\boldsymbol{y = g_{*k}(x)}$ oder kurz

$\boldsymbol{y = \arcsin x}$.

● *Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertevorrat der Funktionen $y = g_k^*(x)$ und $y = g^{*k}(x)$ an und gewinnen Sie die Bilder dieser Funktionen aus den einzelnen Monotoniebögen der Sinuskurve durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 2. Quadranten!*

In analoger Weise kann man von den Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ zu deren inversen Funktionen

$\boldsymbol{y = \arccos x}$ (gelesen: Arkuskosinus x),
$\boldsymbol{y = \operatorname{arctan} x}$ (gelesen: Arkustangens x),
$\boldsymbol{y = \operatorname{arccot} x}$ (gelesen: Arkuskotangens x)

übergehen.

● *Führen Sie diesen Übergang durch, und geben Sie Definitionsbereiche und Wertevorräte der Umkehrfunktionen an!*

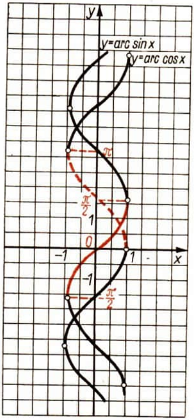
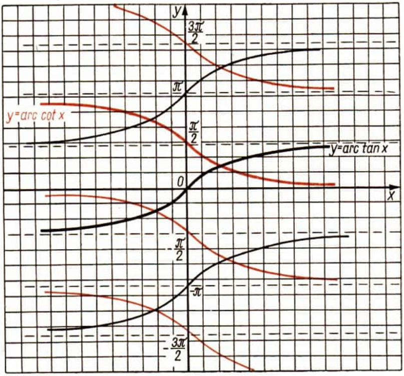


Abb. 1.8.

Abb. 1.9.



Die Abbildungen 1.8. und 1.9. zeigen die Bilder dieser Funktionen, die man **zyklometrische Funktionen** nennt.

Will man (etwa im Verlauf einer Rechnung) Werten von x zugeordnete Werte $y = \arcsin x$ oder Werte einer anderen zyklometrischen Funktion bilden, so ist noch eine weitere Angabe nötig, um y eindeutig festzulegen, da ja $y = \arcsin x$ eigentlich nur eine Kurzschreibweise für unendlich viele in einfacher Weise miteinander verknüpfte Funktionen ist.

Besonders häufig wird dabei der sogenannte **Hauptwert** gewählt, der durch die Bedingung

$$\boldsymbol{y = \arcsin x; \qquad |y| \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{in } |x| \leqq 1;}$$

$$\boldsymbol{y = \arccos x; \qquad 0 \leqq y \leqq \pi \quad \text{in } |x| \leqq 1;}$$

$$\boldsymbol{y = \arctan x; \qquad |y| < \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } x \text{ und}}$$

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arccot} x; \qquad 0 < y < \pi \quad \text{für alle } x}$$

festgelegt ist.

Die anderen Werte der Umkehrfunktionen heißen dementsprechend auch Nebenwerte.

In der Schreibweise (29) ist offenbar gerade die Funktion $y = g_0(x)$ der Hauptwert von $\arcsin x$. Für die Nebenwerte gelten dann die Beziehungen

$$g_k^*(x) = g_0^*(x) + 2\,k\,\pi$$

und $$g_{*k}(x) = \pi - g_0^*(x) + 2\,k\,\pi = (2\,k + 1)\,\pi - g_0^*(x)\,.$$

● *Stellen Sie die entsprechenden Beziehungen zwischen den Nebenwerten und dem Hauptwert bei den anderen zyklometrischen Funktionen auf!*

Aufgaben

1. Sprechen Sie über die Symmetrieverhältnisse der Bilder der zyklometrischen Funktionen!
2. Stellen Sie eine Übersicht über die Definitionsbereiche und Wertevorräte sämtlicher Winkelfunktionen und Arkusfunktionen zusammen und vergleichen Sie beide!

1.2.4. Differentiation und Integration der Winkelfunktionen

Um die Ableitungen der Winkelfunktionen bilden zu können, müssen zunächst einige Untersuchungen über Grenzwerte von Winkelfunktionen durchgeführt werden. Von besonderer Bedeutung ist der Grenzwert der Funktion

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{für } x \to 0.$$

● *Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat der Funktion* $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$, *und untersuchen Sie, ob die Funktion* $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *gerade oder ungerade ist!*

● *Skizzieren Sie auf Grund einer Wertetafel das Bild der Funktion* $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(-4\pi \leqq x \leqq 4\pi)$, $x \neq 0$*!*

Die Funktion $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen stetig. Für hinreichend große Beträge von x unterscheiden sich die Funktionswerte von $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ beliebig wenig von Null.

Es gilt nämlich:

a) Der Betrag der Funktionswerte von $y = \varphi(x) = \sin x$ gehört stets dem Intervall $[0; 1]$ an, ist also nach oben beschränkt.

b) Der Betrag der Funktionswerte von $y = \psi(x) = \frac{1}{x}$ rückt unbegrenzt nahe an Null heran, wenn der Betrag von x über alle Grenzen wächst.

Somit gilt für $y = f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Es soll nun das Verhalten der Funktion $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$ untersucht werden.

● *Warum ist* $\frac{\sin x}{x}$ *für* $x_0 = 0$ *nicht definiert? Durch welchen Punkt wird die Lücke im Bild der Funktion* $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *an der Stelle* $x_0 = 0$ *vermutlich geschlossen werden können?*

● *Stellen Sie die Tabelle*

Winkel im Gradmaß	Winkel im Bogenmaß	$z = \varphi(x) = \sin x$	$y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$
α	$x = \operatorname{arc} \alpha$	z	y

für folgende Winkel α *auf (näherungsweise Angaben):*

10°; 5°; 3°; 2°; 1°; 45′; 30′; 20′; 10′; 5′; 1′; 30″.

Den wichtigen Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

leitet man unter Benutzung der Abbildung 1.10. her. Da $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist, kann man sich beim Beweis darauf beschränken, $x \to +0$ gehen zu lassen. Für jede im offenen Intervall $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ gelegene reelle Zahl x gilt:

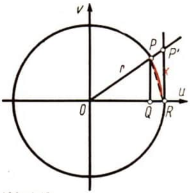


Abb. 1.10.

a) Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt $A_1 = \frac{1}{2}(r \cdot \sin x)(r \cdot \cos x)$.

b) Der Kreissektor $O\widehat{PR}$ hat den Flächeninhalt $A_2 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot x$.

c) Das Dreieck $OP'R$ hat den Flächeninhalt $A_3 = \frac{1}{2} \cdot r\,(r \cdot \tan x)$.

Zwischen den drei Flächeninhalten besteht die Beziehung:

$$A_1 < A_2 < A_3 .$$

Da $r \neq 0$ vorausgesetzt ist, gilt somit:

$$\sin x \cdot \cos x < x < \tan x .$$

Weil im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sicher $\sin x$ positiv und bekanntlich $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, kann die Ungleichung umgeformt werden zu:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

Das Mittelglied dieser Ungleichung ist gleich dem reziproken Wert der zu untersuchenden Funktion $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Daher ist es naheliegend, von allen drei Gliedern der Ungleichung die reziproken Werte zu bilden:

(31) $$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x .$$

Diese Ungleichung kommt dadurch zustande, daß aus $0 < a < b$ stets $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ folgt. Die Grenzwerte für $x \to 0$ der beiden Außenglieder der Ungleichung sind bekannt:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{und daher} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 .$$

Daraus ergibt sich aber auf Grund der Ungleichung (31), daß sich $\frac{\sin x}{x}$ für hinreichend kleine positive Werte von x beliebig wenig von 1 unterscheidet. Es gilt somit, da $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist:

(32) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Mit diesem Grenzwert hängen eine Anzahl weiterer Grenzwerte von Winkelfunktionen eng zusammen. Hier werden nur zwei besonders wichtige Beispiele angegeben.

Beispiel 8:

Für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ gilt stets:

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Benutzt man den Satz über den Grenzwert eines Produktes von Funktionen, so folgt daraus unmittelbar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Beispiel 9:

Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ folgt $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Deshalb ist für $x \neq 0$ stets:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Daraus folgt wegen

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

sofort:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnisse kann man die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = \sin x$ gewinnen. Man bildet den Differenzenquotienten der Sinusfunktion an der Stelle $x = x_0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}.$$

Vor dem Grenzübergang werden einige zweckentsprechende Umformungen des Differenzenquotienten vorgenommen.

Formen Sie den Zähler des Differenzenquotienten der Sinusfunktion mit Hilfe des Additionstheorems $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ *in ein Produkt um!*

Die Anwendung des Additionstheorems allein führt aber noch nicht zum Ziel. Das bei der Umformung des Differenzenquotienten der Sinusfunktion gewonnene Produkt kann jedoch mühelos auf eine solche Form gebracht werden, daß der bekannte Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ beim Ermitteln der Ableitung der Sinusfunktion verwendet werden kann.

● *Gewinnen Sie aus* $\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h}$ *das Produkt* $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$, *und bilden Sie von diesem Produkt den Grenzwert für* $h \to 0$*!*

Im folgenden werden noch einmal alle wesentlichen Schritte der Herleitung der ersten Ableitung der Sinusfunktion zusammengestellt:

1. Bilden des Differenzenquotienten: $\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$;
2. Umformen des Differenzenquotienten:
   a) Vereinfachen des Zählers mit Hilfe eines Additionstheorems:
   $$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h};$$
   b) Umbilden des Produktes in zwei Faktoren, deren Grenzwerte für $h \to 0$ bekannt sind:
   $$\frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right);$$
3. Grenzübergang:
   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$
   $$f'(x_0) = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0 .$$

Da die vorhergehenden Überlegungen für jede beliebige Stelle x_0 gelten, ergibt sich der Satz:

▶ **Die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = \sin x$ ist die Funktion $y' = f'(x) = \cos x$.**

In entsprechender Weise kann nachgewiesen werden, daß die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = \cos x$ die Funktion $y' = f'(x) = -\sin x$ ist.

● *Führen Sie die entsprechende Herleitung durch!*

Die Ableitungen der anderen Winkelfunktionen können unter Benutzung der Ableitung der Sinusfunktion und einiger Regeln der Differentialrechnung gewonnen werden, ohne noch einmal Differenzenquotienten bilden und Grenzübergänge vollziehen zu müssen.

Ableitung von $y = f(x) = \cos x$:

$$y = f(x) \quad = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin u \qquad \text{mit} \qquad u = \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$y' = f'(x) \quad = \cos u \cdot u' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\mathbf{y' = f'(x) \quad = -\sin x\,.}$$

Ableitung von $y = f(x) = \tan x$:

Für alle $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ gilt:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nach der Regel für das Differenzieren von Quotienten von Funktionen gilt daher für alle x, für die $\tan x$ erklärt ist:

$$y' = f'(x) = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder auch

$$\mathbf{y' = f'(x) = 1 + \tan^2 x\,.}$$

Ableitung von $y = f(x) = \cot x$:

Für alle $x \neq k \cdot \pi$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ gilt:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Quotientenregel:

$$y' = f'(x) = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

oder auch:

$$\mathbf{y' = f'(x) = -(1 + \cot^2 x)\,.}$$

Zum Schluß dieses Abschnitts seien noch die Grundintegrale zusammengestellt, die sich aus den Ableitungen der Winkelfunktionen unmittelbar ergeben:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse.

Beispiel 10:

Gegeben ist der analytische Ausdruck für eine Wechselspannung

$u = U_{\max} \cdot \sin \omega t$ mit $U_{\max} = 50$ V und $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{50}{3}$ Hz.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich, den Wertevorrat und die Periode der Funktion!

b) Ermitteln Sie die Stellen, an denen die Spannung Null bzw. an denen sie ein Maximum oder Minimum wird!

c) Wie groß ist der Wert der Spannung 0,02 Sekunden nach dem Einschalten?

d) Berechnen Sie den Wert der Stromstärke 0,2 s nach dem Anlegen an die Spannung, wenn im Stromkreis ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 1\ \mu$F liegt und der Ohmsche Widerstand so klein ist, daß er in der Näherungsrechnung vernachlässigt werden kann!

Es gilt $i = C \cdot \frac{du}{dt}$. Diese Gleichung erhält man aus der Gleichung für die Ladung $Q = C \cdot u$ durch Differentiation nach der Zeit: $\frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$. Die Ladungsänderung in der Zeit ist aber der jeweilige Strom i (Augenblickswert).

e) Berechnen Sie den Maximalwert der Stromstärke, wenn im Stromkreis eine Spule mit der Induktivität $L = 100$ mH liegt, deren Ohmscher Widerstand so klein ist, daß er in der Näherungsrechnung vernachlässigt werden kann.

Es gilt: $i = \frac{1}{L} \int u\, dt$. Diese Gleichung folgt aus $u = -L \cdot \frac{di}{dt}$. Da von der Spule eine Gegenspannung aufgebracht wird, ergibt diese Gleichung nach di aufgelöst: $di = \frac{1}{L} \cdot u\, dt$. Durch Integrieren folgt daraus: $i = \frac{1}{L} \int u\, dt$.

Hinweis: Es wird angenommen, daß das Einschalten der Spannung erfolgt, wenn der Augenblickswert der Spannung Null ist.

Lösung:

a) Wird die Spannung zur Zeit Null angelegt, so folgt daraus der Definitionsbereich mit $0 \leqq t < \infty$.

Der Wertevorrat der Funktion ist

$-U_{\max} \leqq u \leqq U_{\max}$ oder $-50\text{ V} \leqq u \leqq 50\text{ V}$.

Als Periode bezeichnet man den Zeitraum, in dem das Argument von 0 bis 2π wächst. Aus der Gleichung $\omega t = 2\pi$ bzw.

$$2\pi \cdot 16\frac{2}{3} \cdot \text{s}^{-1} \cdot t_p = 2\pi \quad \text{folgt:} \quad t_p = \frac{1}{f} \quad \text{bzw.} \quad t_p = \frac{3}{50}\text{ s}.$$

Daraus folgt $2\pi \mathrel{\hat{=}} \frac{3}{50}$ s.

b) Aus $U_{\max} \cdot \sin \omega t = 0$ folgt $t_0 = \frac{k \cdot \pi}{\omega}$ bzw. $t_0 = \frac{3k}{100}$ $\quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Die erste Ableitung ist wegen $\omega t = v$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = U_{\max} \cdot \cos \omega t \cdot \omega = U_{\max} \cdot \omega \cdot \cos \omega t.$$

Daraus ermittelt man durch Berechnung der Nullstellen t_E von $\frac{du}{dt}$ die Werte $t_E = \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}$ bzw. $t_E = \frac{(2k+1)\,3}{200}$ s $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} = U_{\max}\cdot\omega\cdot(-\sin\omega t)\cdot\omega = -U_{\max}\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t.$$

Setzt man in die zweite Ableitung für t den Wert t_E ein, so erhält man für geradzahliges k (z.B. 2):

$$-U_{\max}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\right)^2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot\frac{15}{200}\text{ s} = -U_{\max}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\right)^2\cdot\sin\frac{5\pi}{2} < 0,$$

folglich liegt hier sicher ein lokales Maximum vor,
k ungeradzahlig (z.B. 3):

$$-U_{\max}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\right)^2\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot\frac{21}{200}\text{ s} = -U_{\max}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\right)^2\cdot\sin\frac{7\pi}{2} > 0,$$

folglich liegt hier sicher ein lokales Minimum vor.

c) Man setzt $t = 0{,}02$ s in die Gleichung ein:

$$u = 50\text{ V}\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot 0{,}02\text{ s} = 50\text{ V}\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 50\text{ V}\cdot 0{,}8660,$$

$$u_{(t=0{,}02\text{ s})} \approx 43{,}3\text{ V}.$$

d) Mit den gegebenen Größen lautet die erste Ableitung der Spannungsfunktion:

$$\frac{du}{dt} = 50\text{ V}\cdot\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot t.$$

Aus $i = C\cdot\frac{du}{dt}$ folgt dann für $t = 0{,}2$ s:

$$i_{(t=0{,}2\text{ s})} = 1\,\mu\text{F}\cdot 50\text{ V}\cdot\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot 0{,}2\text{ s}$$

$$= \frac{1}{10^6}\,\frac{\text{As}}{\text{V}}\cdot 50\text{ V}\cdot\frac{2\pi\cdot 50}{3\text{ s}}\cdot\cos\frac{20\pi}{3}$$

$$i_{(t=0{,}2\text{ s})} = \frac{5\cdot 10^3\cdot\pi}{10^6\cdot 3}\text{ A}\cdot\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Wegen $\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ folgt daraus

$$i_{(t=0{,}2\text{ s})} \approx -2{,}6\text{ mA}$$

e) Durch die lineare Substitution $\omega t = v$ folgt aus

$$i = \frac{1}{L}\cdot\int u\,dt = \frac{1}{L}\cdot\int U_{\max}\cdot\sin\omega t\,dt$$

$$i = -\frac{U_{\max}}{L\,\omega}\cos\omega t.$$

Die Maxima dieser Funktion sind gesucht.

Die erste Ableitung

$$\frac{di}{dt} = -\frac{U_{\max}}{L\,\omega} \cdot (-\sin\omega\, t) \cdot \omega = \frac{U_{\max}}{L} \sin\omega\, t$$

setzt man gleich Null:

$$\frac{U_{\max}}{L} \sin\omega\, t = 0\,,$$

und erhält:

$$t = \frac{3\,k}{100}\,\mathrm{s} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Durch Einsetzen in die zweite Ableitung $\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{U_{\max}\cdot\omega}{L} \cos\omega\, t$ findet man für $t = \frac{3\,k}{100}$ s mit k ungeradzahlig die Maxima $I_{\max} \approx 5$ A.

Diese Maxima sind übrigens nicht nur lokale, sondern sogar globale Maxima. Man erkennt dies, wenn man beachtet, daß $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ und $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ ist. Mit Hilfe dieser Überlegung hätte man die Maxima auch ohne die Anwendung der Differentialrechnung finden können.
Vergleicht man die Lage dieser Maxima mit der Lage der Maxima der Spannungsfunktion, so stellt man fest, daß die Stromstärkemaxima gegenüber den Spannungsmaxima um $\frac{\pi}{2}$ verschoben sind. In der Elektrotechnik bezeichnet man das als Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung um 90° (Abb. 1.11.).

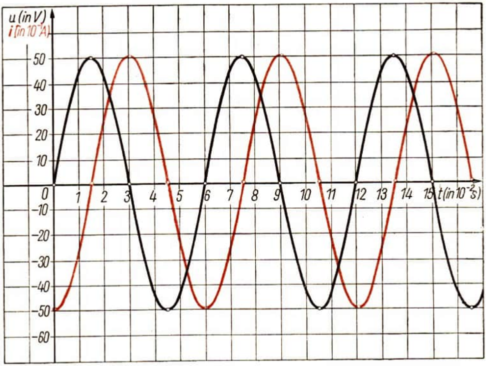


Abb. 1.11.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cdot \tan x$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot \tan x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot \tan x}{x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x \cdot \tan 3x}{6x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{\frac{x}{3}}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\frac{x}{b}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{\tan 2x}$ **i)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$

3. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan 5x}{\tan 2x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \cot x$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2 + x) - \sin(2 - x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ **i)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$

4. Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ in den Intervallen $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ und $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$! Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $y = f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ in den oben angegebenen Intervallen!

5. Erläutern Sie die für kleine Werte von $|x|$ brauchbaren Näherungsformeln!

a) $\sin x \approx x \approx \tan x$ **b)** $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$

6. Gewinnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, indem Sie vom Einheitskreis ausgehen!

a) Sehen Sie das Lot des Punktes P auf die x-Achse, der auf dem im ersten Quadranten gelegenen Viertelkreis wandert, als Bild für $y = \sin x$ an! Konstruieren Sie das Bild für $y = \tan x$ auf der Haupttangente! Vergleichen Sie entsprechend den Überlegungen von Seite 45 die Flächeninhalte der Dreiecke OPQ und $OP'R$ mit dem Flächeninhalt des Kreissektors $O\widehat{PR}$ (vgl. Abb. 1.10.)!

b) Gehen Sie ebenso wie bei der Lösung des Teiles **a)** dieser Aufgabe vor; vergleichen Sie jedoch die Flächeninhalte der Dreiecke OPR und $OP'R$ mit dem Flächeninhalt des Kreissektors $O\widehat{PR}$ (vgl. Abb. 1.10.)!

7. Gewinnen Sie die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = \tan x$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$, indem Sie nur die erste Ableitung der Sinusfunktion als bekannt voraussetzen und demgemäß ansetzen:

$$y = f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}\ !$$

Wie ist zu verfahren, wenn die erste Ableitung von $y = f(x) = \cot x$ gewonnen werden soll und dabei ebenfalls nur die erste Ableitung der Sinusfunktion als bekannt angenommen wird?

8. Gewinnen Sie die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = \sin x$, indem Sie als bekannt voraussetzen, daß für $y = f(x) = \cos x$ gilt: $y' = f'(x) = -\sin x$!

9. Bilden Sie die ersten zehn Ableitungen der Sinus- und der Kosinusfunktion! Notieren Sie die Ableitungen so, daß Sie in der Lage sind, die geltende allgemeine Gesetzmäßigkeit zu formulieren!

10. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 2 \sin x$ **b)** $y = f(x) = \sin 2x$ **c)** $y = f(x) = \sin (x + 2)$

d) $y = f(x) = \sin (2 - x)$ **e)** $y = f(x) = a \cdot \sin (bx + c)$

11. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sin^2 x$ **b)** $y = f(x) = \tan^2 x$ **c)** $y = f(x) = \cos^2 x$

d) $y = f(x) = \cot^2 x$ **e)** $y = f(x) = \sin x^2$ **f)** $y = f(x) = \tan x^2$

g) $y = f(x) = \cos \sqrt{x}$; **h)** $y = f(x) = \cot \sqrt{x}$

12. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ **b)** $y = f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

c) $y = f(x) = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos \frac{x}{2}$ **d)** $y = f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 2x$

e) $y = f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ **f)** $y = f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = f(x) = 1 + \tan^2 x$ **h)** $y = f(x) = \frac{x}{\sin x}$

i) $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ **k)** $y = f(x) = \frac{\tan x}{x}$

l) $y = f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ **m)** $y = f(x) = x \cdot \cot x$

13. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 2(x - \cot x) \cdot \sin x$ **b)** $y = f(x) = \frac{x - \tan x}{\sin^2 x}$

c) $y = f(x) = \sin x (3 \cos x + 5 \cos^2 x)$ **d)** $y = f(x) = 3 \tan^2 x - 4 \cot^{-2} x$

e) $y = f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ **f)** $y = f(x) = \frac{\sin ax}{\cos bx}$

g) $y = f(x) = \frac{1}{\tan x} = \cot x$ **h)** $y = f(x) = \frac{1}{\cot ax} = \tan ax$

14. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ **b)** $y = f(x) = (\cos 2x) \cdot \sqrt{1 + \cot^2 x}$

c) $y = f(x) = \sqrt{\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}}$ **d)** $y = f(x) = x \cdot \sqrt{1 + \tan^2 x}$

15. Bilden Sie $y'' + y$ für folgende Funktionen!

a) $y = \sin x$ **b)** $y = a \cdot \sin x$ **c)** $y = \sin a\, x$ **d)** $y = a \cdot \sin b\, x$

e) $y = \cos x$ **f)** $y = a \cdot \cos x$ **g)** $y = \cos a\, x$ **h)** $y = a \cdot \cos b\, x$

i) $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ **k)** $y = a \cdot \sin(b\, x + c) + d \cdot \cos(b\, x + e)$

Geben Sie in allen Fällen den Koeffizienten k an, mit dessen Hilfe die Summe $y'' + k\, y$ zu Null wird!

16. Bilden Sie jeweils die Ableitungen der beiden Seiten folgender Identitäten!

a) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ **b)** $\sin^2 x + \cos 2\, x = \cos^2 x$ **c)** $\sin x = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$

d) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ **e)** $\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ **f)** $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

g) $\sin(x + \beta) = \sin x \cdot \cos \beta + \cos x \cdot \sin \beta$

17. Unter welchen Winkeln schneiden einander

a) die Bilder der Sinus- und Kosinusfunktion;
b) die Bilder der Tangens- und Kotangensfunktion;
c) das Bild der Sinusfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung;
d) das Bild der Tangensfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung?

18. Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte der Bilder der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = \sin x$ **b)** $y = f(x) = 2 \cdot \sin x$ **c)** $y = f(x) = \sin 2\, x$

d) $y = f(x) = 2 \cdot \sin 2\, x$ **e)** $y = f(x) = \sin^2 x$ **f)** $y = f(x) = 5 \cdot \cot^2 x$

19. Eine Futterrinne soll aus zwei Brettern gleicher Breite so hergestellt werden, daß das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß wird. Unter welchem Winkel müssen die Bretter zusammengefügt werden?

20. Eine Futterrinne soll aus drei Brettern gleicher Breite so hergestellt werden, daß der Flächeninhalt des trapezförmigen Querschnitts der Rinne maximal wird. Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenbretter gegenüber dem Bodenbrett!

21. Vier gleich breite Bretter sollen so zu einer Rinne zusammengefügt werden, daß der in Abbildung 1.12. skizzierte Flächeninhalt des Querschnitts der Rinne maximal wird. Bestimmen Sie den Winkel α!

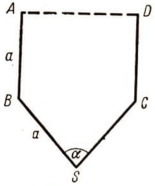


Abb. 1.12.

22. Welches Rechteck hat bei gegebener Länge der Diagonale d den größten Umfang?

23. Welches Dreieck hat bei gegebenen Seitenlängen a und b den größten Flächeninhalt?

24. Die Bahnkurve des schrägen Wurfs nach oben wird durch die Gleichung

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2\, c^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

beschrieben. Machen Sie sich die Bedeutung der in dieser Gleichung auftretenden Größen klar, und versuchen Sie, die angegebene Gleichung mit Hilfe physikalischer Gesetze selbständig herzuleiten!

a) Bestimmen Sie die größte Steighöhe eines schräg nach oben geworfenen Körpers mit Hilfe der angegebenen Gleichung!

b) Bestimmen Sie den Winkel α, für den die Wurfweite in der horizontal verlaufenden Ebene maximal wird!

25. Beim Kugelstoßen gilt für die Stoßweite

$$w = w(\alpha) = \frac{c^2 \cdot \cos\alpha}{g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\,g\,h}{c^2}}\right).$$

Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten, wenn die Höhe h und die Abstoßgeschwindigkeit c bei einem Sportler als konstant angesehen werden?

26. Das Weg-Zeit-Gesetz lautet für harmonische Schwingungen:

$$s = \frac{a}{\omega} \cdot \sin\omega\,t\,.$$

Welche Bedeutung haben darin die Konstanten a und ω?

a) Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der harmonischen Schwingung?

b) Wann erreichen Geschwindigkeit und Beschleunigung bei harmonischen Schwingungen ein Maximum bzw. ein Minimum?

c) Wie groß ist die Amplitude?

27. Die Beleuchtungsstärke wird durch

$$f = \frac{m \cdot \sin\alpha}{e^2}$$

dargestellt. Darin bedeuten e die Entfernung des beleuchteten Punktes P von der Lichtquelle, m eine von der Lichtstärke der Lichtquelle abhängige Konstante und α den Winkel, den die Lichtstrahlen mit dem Lot auf der horizontal gedachten Fläche, der P angehört, bilden.

In welcher Höhe h über der Mitte eines runden Tisches muß sich eine Leuchte befinden, damit es am Rande des gleichmäßig beleuchteten Tisches möglichst hell ist? Der Tisch habe einen Durchmesser d.

28. Ein Körper, auf den die Schwerkraft F_G wirkt, werde auf einer horizontal verlaufenden Ebene fortgezogen, und zwar mit der Kraft F, die im Schwerpunkt S des Körpers angreift und mit der Horizontalebene den Winkel α bildet. Bei welchem Winkel α wird die Zugkraft F ein Minimum, wenn der Reibungskoeffizient bei der Bewegung gleich μ ist?

29. Werten Sie folgende unbestimmte Integrale aus!

a) $\int \sin 2\,x\,dx$ **b)** $\int \cos(3\,x + 5)\,dx$ **c)** $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ **d)** $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$

e) $\int \cos^4 x \cdot \sin x\,dx$ **f)** $\int \frac{dx}{\sin^2(x - 3)}$ **g)** $\int \frac{5\,dx}{\cos^2(2\,x + 1)}$

30. Werten Sie folgende bestimmte Integrale aus, und bestimmen Sie den Flächeninhalt der ebenen Figur, die von dem Kurvenbild, der x-Achse und den jeweiligen Parallelen zur y-Achse begrenzt wird!

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ **b)** $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$ **c)** $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$ **d)** $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$

e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ **f)** $\int\limits_{\pi}^{0} \sin x\,dx$ **g)** $\int\limits_0^{-\pi} \sin x\,dx$ **h)** $\int\limits_{\pi}^{-\pi} \sin x\,dx$

1.2.5. Differentiation der zyklometrischen Funktionen

Die zyklometrischen Funktionen sind zu den Winkelfunktionen invers. Daher lassen sich die Ableitungen der zyklometrischen Funktionen mit Hilfe der Umkehrregel der Differentialrechnung gewinnen.

Beispiel 11:

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = f(x) = \arcsin x$ mit $-1 < x < 1$ und $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Diese Funktion ist streng einsinnig. Zu ihr invers ist die ebenfalls streng einsinnige Funktion $x = g(y) = \sin y$ mit $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ und $-1 < x < 1$, deren Ableitung stets von Null verschieden ist.

Da Sinus- und Kosinusfunktion mittels der Relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ zusammenhängen, gilt:

Aus $x = g(y) = \sin y$ folgt $x' = g'(y) = \cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}$.

(Dabei gilt hier das Pluszeichen, weil $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ist.)

Wegen $\sin y = x$ kann dafür auch geschrieben werden:

$x' = g'\,[f(x)] = \sqrt{1 - x^2}$.

Nach der Umkehrregel ist schließlich

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'\,[f(x)]} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für alle x aus dem Definitionsbereich $-1 < x < 1$.

Die Ableitung der zyklometrischen Funktion $y = f(x) = \arcsin x$ ist also die algebraische Funktion

$$y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{mit} \quad -1 < x < 1.$$

Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß zwar die strenge Einsinnigkeit der Sinusfunktion $x = \sin y$ auch im abgeschlossenen Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ erhalten bleibt, dann aber nicht mehr die Ableitung $x' = g'(y) = \cos y$ an allen Stellen von Null verschieden ist. Vielmehr gelten $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Die Umkehrregel der Differentialrechnung gilt aber bekanntlich nur, wenn die Ableitungen der zueinander inversen Funktionen verschieden von Null sind. Daher kann in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ diese Regel nicht angewendet werden. Die Funktion $y = \arcsin x$ ist an diesen Stellen auch nicht differenzierbar, da die Tangenten parallel zur Ordinatenachse verlaufen.

Beispiel 12:

Die für alle Werte von x erklärte inverse Funktion zu $x = g(y) = \tan y$ mit $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ wird mit $y = f(x) = \arctan x$ bezeichnet. Ihre Ableitung ist gesucht.

Legen Sie für die weitere Untersuchung geeignete Definitionsbereiche und Wertevorräte der zueinander inversen Funktionen $y = f(x) = \arctan x$ und $x = g(y) = \tan y$ fest!

Aus $x = g(y) = \tan y$ folgt $x' = g'(y) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$. Wegen $1 + x^2 \neq 0$ folgt daraus für alle x:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Erläutern Sie folgende Grundintegrale!

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$

Diese Grundintegrale sind ganz besonders wichtig, da es mit ihrer Hilfe möglich wird, eine große Anzahl komplizierterer Integrale von gebrochenen rationalen Funktionen bzw. von Funktionen, die Quadratwurzeln enthalten, auszuwerten.

Beispiel 13:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} + \int \frac{dx}{15 + 4\,x^2}.$$

Das erste Integral läßt sich auf das Grundintegral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, das zweite auf das Grundintegral $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2}$ zurückführen.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} + \int \frac{dx}{15 + 4\,x^2} = \int \frac{dx}{5 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{5}\right)^2}} + \int \frac{dx}{15\left[1 + \left(\frac{2\,x}{\sqrt{15}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{5\,du}{\sqrt{1 - u^2}} + \frac{1}{15} \int \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}\,du}{1 + u^2} = \arcsin u + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan u + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} + \int \frac{dx}{15 + 4\,x^2} = \arcsin \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \frac{2\,x}{\sqrt{15}} + C.$$

Probe: $F(x) = \arcsin \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{15}}{30} \arctan \frac{2x}{\sqrt{15}} + C$

$$F'(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}} + \frac{\sqrt{15}}{30} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{15}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} + \frac{1}{15 + 4x^2}.$$

Aufgaben

1. Bilden Sie die Ableitungen der Funktionen $y = f(x) = \operatorname{arccos} x$ und $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$! Achten Sie dabei besonders auf die richtige Angabe der Definitionsbereiche und Wertevorräte!

2. Bilden Sie die ersten und die zweiten Ableitungen folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = \arcsin 5x$ **b)** $y = f(x) = \arctan \frac{x}{3}$ **c)** $y = f(x) = \arccos \frac{x}{1-x}$

d) $y = f(x) = \operatorname{arccot} \frac{1-x}{1+x}$ **e)** $y = f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$ **f)** $y = f(x) = \sqrt{\arctan x}$

3. Werten Sie folgende Integrale aus!

a) $\int \frac{dx}{5 + x^2}$ **b)** $\int \frac{dx}{5 + 9x^2}$ **c)** $\int \frac{dx}{1 + 5x^2}$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ **e)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$ **f)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 5x^2}}$

1.2.6. Partielle Integration

Betrachtet man das Integral $\int x \cos x \, dx$, so kann dies mit den bisher bekannten Methoden nicht ausgewertet werden.
Da es sich bei dem Integranden um ein Produkt aus zwei Funktionen handelt, liegt es nahe zu versuchen, die Produktregel der Differentialrechnung

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot v \quad \text{bzw.}$$

(33)

$$(u \cdot v)' = u\,v' + u'\,v \quad \text{mit} \quad u = \varphi(x) \quad \text{und} \quad v = \psi(x)$$

auch für das Integrieren nutzbar zu machen.
Schreibt man diese Differentiationsregel unter Benutzung des Integralsymbols auf, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u \cdot v' \, dx + \int u' \cdot v \, dx$$

$$u \cdot v = \int u \cdot v' \, dx + \int u' \cdot v \, dx \quad \text{oder}$$

(34) $$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx.$$

Wenn das Integral auf der linken Seite von (34) als zu berechnen vorgegeben wird, tritt auf der rechten Seite auch noch ein Integral auf, das erst berechnet werden muß. Daher ist die Anwendung der Formel (34) nur von Nutzen, wenn das rechtsstehende Integral nicht schwieriger als das linksstehende zu ermitteln ist. Außerdem muß natürlich zu einem der Faktoren (in (34) mit v' bezeichnet) eine Stammfunktion angegeben werden können.

Beispiel 14:

$\int x \cdot \cos x \, dx$

Man kann hier $u = x$; $v' = \cos x$ ansetzen. Mit diesem Ansatz erhält man $u' = 1$. Wegen $v = \int \cos x \, dx = \sin x + C$ ist $v = \sin x$ eine Stammfunktion zu $v' = \cos x$. Man erhält $\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$.

Das Integral auf der rechten Seite ist ein Grundintegral, und man erhält:

$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$.

Die Probe liefert: $F'(x) = x \cdot \cos x + \sin x - \sin x = x \cdot \cos x$.

Da sich jede Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ von einer solchen Stammfunktion nur durch additive Konstanten unterscheidet, stellt $y = x \cdot \sin x + \cos x + C$ tatsächlich das unbestimmte Integral von $y = x \cdot \cos x$ dar. Hätte man daher an Stelle von $v = \sin x$ eine andere Stammfunktion gewählt, so wäre man zu dem gleichen Resultat gekommen.

Führen Sie das für $v = \sin x + C_1$ durch!

Das soeben erläuterte Integrationsverfahren wird als **partielle[1] Integration** bezeichnet.

Ein andersartiger Fall, in dem die Methode der partiellen Integration zum Ziel führt, wird in dem folgenden Beispiel behandelt.

Beispiel 15:

$\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

Setzt man $\sin x = u$ und $\cos x = v'$, so ist $v = \sin x$ eine Stammfunktion zu $v' = \cos x$. Mit $v' = \cos x$ erhält man nach (34):

$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \, dx$.

Hier ist das Integral auf der rechten Seite gleich dem Integral auf der linken Seite. Unter der Voraussetzung, daß es existiert, kann daher auf der rechten und der linken Seite je eine spezielle Stammfunktion $y = F_1(x)$ und $y = F_2(x) = F_1(x) + C_1$ eingesetzt gedacht werden. Man erhält dann:

$F_1(x) = \sin^2 x - [F_1(x) + C_1]$ oder $2F_1(x) = \sin^2 x - C_1$.

Also $F_1(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2} - \dfrac{C_1}{2}$,

woraus sich

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

ergibt.

[1] pars (lat.), Teil

Daß dies tatsächlich eine Lösung ist, kann man entweder durch Differenzieren bestätigen oder, indem man beachtet, daß das Integral sicherlich existiert, da es zu jeder stetigen Funktion $y = f(x)$ eine Stammfunktion, nämlich $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, gibt.

Berechnen Sie $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, *indem Sie* $u = \cos x$ *und* $v' = \sin x$ *setzen! Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse miteinander!*

Das Integral kann auch ohne die Anwendung der Methode der partiellen Integration ausgewertet werden.

Führen Sie dies durch, indem Sie die Relation $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ *beachten!*

Auf ähnliche Weise läßt sich auch das folgende Integral ermitteln.

Beispiel 16:

$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$

Mit

$$\begin{aligned} u &= \sin x & \qquad v' &= \sin x \\ u' &= \cos x & \qquad v &= -\cos x \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cdot \cos x - \int (-\cos x) \cdot \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cdot \cos x + x \\ F(x) \qquad &= \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x) + C\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch Differenzieren, daß dieses Ergebnis richtig ist!

Eine weitere Möglichkeit zur Anwendung der partiellen Integration zeigt das folgende Beispiel, in dem der Integrand nicht in Form eines Produkts zweier Funktionen vorgelegt ist.

Beispiel 17:

$\int \arcsin x \, dx = \int (\arcsin x) \cdot 1 \, dx$

Mit

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x & \qquad v' &= 1 \\ u' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \qquad v &= x \end{aligned}$$

erhält man:

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx .$$

Durch Berechnung des Integrals auf der rechten Seite mit Hilfe der Substitution $t = 1 - x^2$ erhält man als Ergebnis:

$$F(x) = \int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C .$$

Zeigen Sie auch hier durch Differenzieren, daß das Ergebnis richtig ist!

Die partielle Integration kann in gewissen Fällen auch mehrere Male hintereinander mit Erfolg angewendet werden.

Beispiel 18:

$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$

Mit

$$u = x^2 \qquad v' = \sin x$$
$$u' = 2x \qquad v = -\cos x$$

erhält man:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx .$$

Das Integral auf der rechten Seite kann, wie im Beispiel durchgeführt, durch abermalige Anwendung der Methode der partiellen Integration berechnet werden, so daß man

$$F(x) = \int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C$$

erhält.

Wendet man die partielle Integration zweimal hintereinander an, so muß man darauf achten, daß dies in geeigneter Weise geschieht, d.h. u und v' geeignet gewählt werden, so daß man beim zweiten Schritt nicht etwa nur erreicht, daß die erste partielle Integration wieder rückgängig gemacht wird.

Beispiel 19:

$\int x^2 \cdot \sin x \, dx .$

Durch die partielle Integration im Beispiel 18 erhielt man daraus:

$$(35) \quad \int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx .$$

Berechnet man das Integral auf der rechten Seite durch nochmalige partielle Integration mit

$$u = \cos x \qquad v' = x$$
$$u' = -\sin x \qquad v = \frac{x^2}{2} ,$$

so erhält man:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \cos x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \sin x \, dx \, .$$

Setzt man dies in (35) ein, so folgt:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + x^2 \cdot \cos x + \int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = \int x^2 \cdot \sin x \, dx \, .$$

Damit ist die erste partielle Integration rückgängig gemacht worden, und man bekommt zwar das richtige, aber wenig nützliche Resultat $a = a$.

Aufgaben

1. Berechnen Sie $\int x \cdot \sin x \, dx$!

2. Berechnen Sie folgende Integrale durch partielle Integration bzw. nach geeigneter Umformung durch Substitution!

a) $\int \cos^2 x \, dx$ **b)** $\int \sin x \cos x \, dx$ **c)** $\int \sin 2x \cot x \, dx$

3. Berechnen Sie $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$!

4. Berechnen Sie $\int \arccos x \, dx$!

5. Berechnen Sie folgende Integrale durch partielle Integration!

a) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ **b)** $\int x \cdot \arcsin x \, dx$

c) $\int \sin^3 x \, dx$ **d)** $\int (x^3 - x^2 + x) \cdot \sin x \, dx$

1.2.7. Flächen- und Rauminhaltsberechnungen

An einem einfachen Beispiel sei noch einmal gezeigt, daß bei Flächenberechnungen mit Hilfe des bestimmten Integrals zwischen den Integrationsgrenzen liegende Nullstellen der Integrandenfunktion beachtet werden müssen.

Beispiel 20:

Zu ermitteln sei der Flächeninhalt des von dem Bild der Funktion $y = f(x) = \sin x$ und der x-Achse im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ eingeschlossenen Teils der Zeichenebene (vgl. Abb. 1.13.).
Unter Beachtung der Nullstelle $x = \pi$ ergibt sich:

$$A_0^{2\pi} = \left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$$

$$= \left| -\cos x \Big|_0^{\pi} \right| + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$A_0^{2\pi} = |+2| + |-2| = 4 \, .$$

Dagegen gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = +2 - 2 = 0 \, .$$

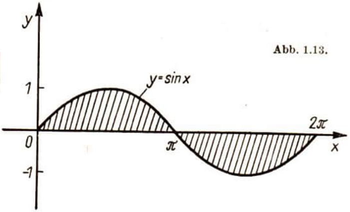


Abb. 1.13.

Oft werden durch die Symmetrieverhältnisse einer Figur gewisse Vereinfachungen für die Berechnung ihres Flächeninhalts möglich.

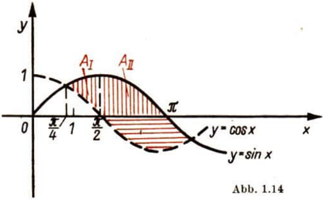


Abb. 1.14

Beispiel 21:

Zu berechnen sei der Flächeninhalt der von den Bildern der Sinus- und Kosinusfunktion im Intervall $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{4}$ eingeschlossenen Figur (vgl. Abb. 1.14.).

Begründen Sie die Symmetrieverhältnisse der zu berechnenden Figur mit Hilfe der Symmetrieverhältnisse der Bilder der beiden Winkelfunktionen!

Für die Teilflächen A_{I} und A_{II} gilt:

$$A_{\mathrm{I}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \left(-\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$A_{\mathrm{I}} = \sqrt{2} - 1$$

$$A_{\mathrm{II}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1\,.$$

Für die Gesamtfläche A ergibt sich demnach:

$$A = 2 \cdot (A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}) = 2\sqrt{2}\,.$$

Bei der Lösung der folgenden beiden Aufgaben soll gezeigt werden, daß die Benutzung bestimmter Substitutionen beim Integrieren über Winkelfunktionen zum Auftreten zyklometrischer Funktionen in der Integralfunktion führen kann.

Beispiel 22:

Es sei der Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Radius r zu bestimmen. Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Ursprung eines rechtwinkligen $x\,y$-Koordinatensystems (vgl. Abb. 1.15.).

Es genügt, den Flächeninhalt des im ersten Quadranten des Systems liegenden Viertelkreises zu ermitteln.

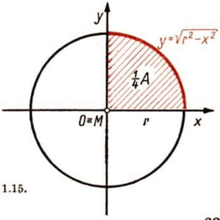


Abb. 1.15.

Die Koordinaten aller Punkte der Kreislinie erfüllen die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$. Daraus folgt: Der oberhalb der x-Achse liegende Teil der Kreislinie ist das Bild der Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Es gilt also: $\frac{1}{4} \cdot A = \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$.

Das Integral $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ ist ein häufig benötigtes Integral, bei dessen Berechnung sowohl Winkelfunktionen als auch zyklometrische Funktionen auftreten.

Man substituiert $\quad x = r \cdot \sin t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$,

woraus folgt: $\quad \frac{dx}{dt} = r \cdot \cos t$.

Durch Einsetzen in $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ erhält man wegen $r > 0$ und $\cos t \geqq 0$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t\, dt &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt \\ &= r^2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt.\end{aligned}$$

Es gilt aber (vgl. Seite 62, Aufgabe 2a):

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + C.$$

Das bedeutet:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (t + \sin t \cdot \cos t) + C.$$

Aus der oben eingeführten Substitution ermittelt man $\sin t = \frac{x}{r}$ und daraus:

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \text{ und } t = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Daraus folgt:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \cdot \arcsin \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) + C.$$

Für den gesuchten Flächeninhalt erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \cdot A = \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\left(r^2 \cdot \arcsin \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^r \\ &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\arcsin 1 - \arcsin 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \cdot A = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi .$$

Der Flächeninhalt des Kreises beträgt $A = r^2 \cdot \pi$.

Beispiel 23:

Der Rauminhalt V eines durch Drehung des Bildes der Funktion $y = f(x)$ um die x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ entstehenden Rotationskörpers wird bekanntlich nach der Formel

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

berechnet.

Es soll das Volumen des Drehkörpers ermittelt werden, der durch Rotation des zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ liegenden Teils des Bildes der Kosinusfunktion um die x-Achse entsteht:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx .$$

Es ergibt sich:

$$V = \frac{1}{2} \pi \left(x + \sin x \cdot \cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + (-1) \cdot 0\right)\right]$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} .$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die in Abbildung 1.14. von den im Intervall $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ oberhalb der x-Achse gelegenen Bildern der Sinus- und Kosinusfunktion und der x-Achse begrenzte ebene Figur um die x-Achse in Drehung versetzt wird!
2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ vom Bild der Funktion $y = \sin^2 x$ und der x-Achse begrenzten Figur!
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt der im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ von den Bildern der Funktionen $y = \sin x$ und $y = x^2$ gemeinsam begrenzten Figur!

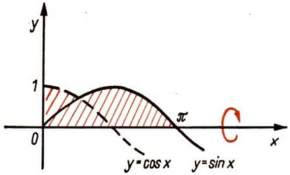


Abb. 1.16.

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Einheitskreises!
(Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $x = \cos t$!)

5. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die in Abbildung 1.16. schraffierte ebene Figur um die x-Achse in Drehung versetzt wird!

1.3. Exponential- und Logarithmusfunktionen

1.3.1. Aufgaben zur Wiederholung und Einführung

1. Wählen Sie in der Grundbeziehung der Potenzlehre $p = a^n$ jeweils p als abhängige Veränderliche und
   a) n als Konstante; a als unabhängige Veränderliche,
   b) a als Konstante; n als unabhängige Veränderliche!
   Was für Funktionen entstehen in jedem Fall? Sind diese für alle Werte der Konstanten n bzw. a erklärt?
2. Fassen Sie die Grundbeziehung der Logarithmen $a^{\log_a n} = n$ in Worte!
3. Wie sehen die Bilder der Potenzfunktionen, der Wurzelfunktionen, der Exponentialfunktionen und der logarithmischen Funktionen im Prinzip aus? Entwerfen Sie Skizzen für typische Fälle!
4. Nennen Sie die Gesetze, nach denen Potenzen multipliziert, dividiert oder potenziert werden!

1.3.2. Die Zahl *e* und der natürliche Logarithmus

Bekanntlich versteht man unter einer Exponentialfunktion jede Funktion, die sich in der Form

(1) $\quad y = a^x$

darstellen läßt. Dabei bedeutet a eine beliebige positive von 1 verschiedene Konstante, so daß auf Grund von (1) jede Exponentialfunktion für alle Werte von x erklärt ist. Für rationale $x = \frac{p}{q}$ (p, q ganzzahlig) ist nämlich a^x durch die q-te Wurzel aus a^p definiert. Ist x eine irrationale Zahl, so wird x durch die Glieder einer gegen x konvergierenden Folge rationaler Zahlen $\{r_n\}$ angenähert gedacht. Die entsprechende Folge $\{y_n\}$ mit $y = a^{r_n}$ besitzt, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, einen Grenzwert. Durch diesen Grenzwert wird die Exponentialfunktion an der Stelle x definiert. So wird z. B. $\sqrt{2}$ durch die Glieder der Folge 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... angenähert; die Folge 3^1; $3^{1,4}$; $3^{1,41}$; $3^{1,414}$; $3^{1,4142}$; ... strebt dann einem Grenzwert zu, durch den $3^{\sqrt{2}}$ erklärt wird.

Für $a < 0$ wird keine Exponentialfunktion $y = a^x$ definiert. In der Tat ist insbesondere $\sqrt[q]{a^p}$ für gerades q und ungerades p nicht definiert, z. B. $\sqrt[6]{(-3)^7}$.
Für $a = 0$ ist a^x nur für $x > 0$ erklärt und ist dort konstant identisch Null. Die Funktion $y = a^x$ mit $a = 0$ wird nicht zu den Exponentialfunktionen gerechnet. Entsprechendes gilt für die Funktion

$y = 1^x$.

● *Fertigen Sie Wertetafeln der Funktionen* $y = a^x$ *für* $a = \frac{1}{10}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 10$ *im Intervall* $-6 < x < 6$ *an!*

In der Abbildung 1.17. sind die Bilder einiger Exponentialfunktionen gezeichnet.

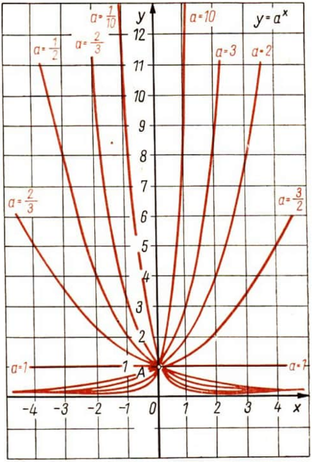


Abb. 1.17.

● *Worin unterscheiden sich die Bilder der Exponentialfunktionen für* $a < 1$ *und* $a > 1$?

Für beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 gilt das grundlegende Additionstheorem der Exponentialfunktion:

(2) $\quad a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

sowie das Gesetz

(3) $\quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$.

Aus (2) und (3) ergibt sich insbesondere folgende wichtige Gesetzmäßigkeit:

▶ **Durchläuft x die Glieder einer arithmetischen Folge $\{x_n\}$ mit $x_n = c + n\,d$ (c, d konstant; $n = 1, 2, 3, \ldots$), so durchläuft $y = a^x$ die Glieder einer geometrischen Zahlenfolge $\{y_n\}$ mit $y_n = a^{x_n} = a^{c + n\,d} = a^c \cdot a^{n\,d} = a^c \cdot (a^d)^n = C \cdot q^n$ ($C = a^c$; $q = a^d$).**

Man erhält z. B. die folgende Wertetafel:

x	0	1	2	3	4	...	k	$k+1$
$y = a^x$	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4		a^k	a^{k+1}

$$\frac{a^1}{a^0} = a; \quad \frac{a^2}{a^1} = a; \quad \frac{a^3}{a^2} = a; \quad \frac{a^4}{a^3} = a; \qquad \frac{a^{k+1}}{a^k} = a$$

oder speziell:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Aus der Abbildung 1.17. und den angegebenen Gesetzen ergeben sich folgende Eigenschaften der Exponentialfunktionen bzw. ihrer Bilder:

1. Allen Exponentialfunktionen ist das Wertepaar $x_0 = 0$; $y_0 = 1$ gemeinsam (alle Exponentialkurven gehen durch den Punkt A (0; 1) auf der y-Achse).

   Beweis: $y = a^0 = 1$ für jedes $a \neq 0$ laut Definition.

2. Die zu $y = a^x$ und $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ gehörenden Bilder liegen wegen $a^{x_1} = a^{-(-x_1)} = \frac{1}{a^{-x_1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_1}$ spiegelbildlich zur y-Achse.

3. Im Fall $a > 1$ ist $y = a^x$ eine streng monoton steigende, im Fall $0 < a < 1$ aber eine streng monoton fallende Funktion. Demgemäß verlaufen die Bilder im Koordinatensystem im Falle $a > 1$ von links unten nach rechts oben, im Falle $0 < a < 1$ von links oben nach rechts unten.

   Beweis der Monotonie von $y = a^x$ im Fall $a > 1$:
   Man untersucht dazu die Funktionswerte an einer Stelle x_0 und einer benachbarten Stelle $x_0 + h$ $(h > 0)$; es ergibt sich a^{x_0} bzw. $a^{x_0 + h}$.
   Wegen $a > 1$ und $h > 0$ gilt $a^h > 1$ und $a^{x_0 + h} = a^{x_0} \cdot a^h > a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$.

   Für $0 < a < 1$ und $b = \frac{1}{a} > 1$ ist b^x monoton steigend und daher $a^x = \frac{1}{b^x}$ monoton fallend.

4. Für alle Bilder der Exponentialfunktionen ist die x-Achse Asymptote, und zwar nähert sich die Kurve im Fall $a > 1$ für $x \to -\infty$ und im Fall $0 < a < 1$ für $x \to \infty$ der x-Achse.

   Beweis: Es wird zunächst gezeigt, daß im Falle $a > 1$

   $$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

   gilt. Dazu genügt es, sich davon zu überzeugen, daß a^x größer ausfällt als jede noch so große Zahl M, sobald x hinreichend groß ist. Wegen der Monotonie von a^x reicht es zu zeigen, daß a^n größer als jede noch so große Zahl M ist, sobald die natürliche Zahl n genügend groß gewählt wird. Wegen $a > 1$ kann man a in der Form $a = 1 + p$ $(p > 0)$ schreiben. Dann gilt nach dem binomischen Satz:

   $$a^n = (1 + p)^n = 1 + n\,p + \cdots + p^n .$$

   Daraus folgt $a^n > 1 + n\,p$. Wählt man n größer als $\frac{M - 1}{p}$, so folgt $a^n > M$.

   Für $0 < a < 1$ strebt $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$ für $x \to \infty$ wegen $b = \frac{1}{a} > 1$ gegen 0.

   Um den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$ im Falle $a > 1$ zu bestimmen, wird a^x in der Form $\frac{1}{a^{-x}}$ geschrieben. Strebt jetzt x gegen $-\infty$, so strebt $(-x)$ gegen $+\infty$ und damit a^x gegen Null.

Aus der Abbildung 1.17. entnimmt man schließlich folgendes: Zeichnet man die Parallelen zur y-Achse im Abstand $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, . . . ein, so schneiden sie die Exponentialkurven in Punkten, deren Ordinaten $\sqrt{a}$, a, a^2, a^3, . . . sind. Die Abbildung 1.17. kann also als Nomogramm für die Folgen von Wurzel- und Potenzwerten benutzt werden.

In der Schar der Exponentialkurven ist jede einzelne Kurve durch ihren Anstieg im Punkte A (0; 1) eindeutig bestimmt. Um ihn zu ermitteln, wird die erste Ableitung der Funktion $y = a^x$ in $x_0 = 0$ bestimmt.

Falls der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, ergibt sich:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot k_a$$

mit $k_a = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$. Dieser Grenzwert ist ein von a, aber nicht von x abhängiger Wert. Es gilt:

$$(4) \qquad y' = \frac{d(a^x)}{dx} = k_a \cdot a^x .$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist also an jeder Stelle der Funktion selbst proportional.
An der Stelle $x_0 = 0$ ergibt sich dann:

$$(5) \qquad y'_0 = k_a \cdot a^0 = k_a \cdot 1 = k_a .$$

Der Proportionalitätsfaktor k_a ist gleich dem Anstieg der jeweiligen Exponentialkurve im Punkt A (0; 1). Die geometrische Anschauung legt es nahe, zu vermuten, daß es in der Schar der Exponentialkurven eine gibt, welche im Punkt A (0; 1) den Anstieg 1 hat, d. h., die die y-Achse unter einem Winkel von 45° schneidet. Die zugehörige Basis a_1 soll nun bestimmt werden.

Für sie muß gelten:

$$(6) \qquad k_{a_1} = \lim_{h \to 0} \frac{a_1^h - 1}{h} = 1 .$$

Diese Funktion hat dann nach (4) die Eigenschaft, daß für alle Werte von x die Gleichung $y = y'$ gilt. Man sagt dafür: $y = a_1^x$ genügt der **Differentialgleichung** $y' = y$.

Bestimmung von a_1

Um a_1 aus der Beziehung $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a_1^h - 1}{h} = 1$ zu ermitteln, wird

$$(7) \quad a_1^h = 1 + t$$

gesetzt. Durch Logarithmieren erhält man:

$$h \cdot \lg a_1 = \lg (1 + t) \quad \text{oder} \quad h = \frac{1}{\lg a_1} \cdot \lg (1 + t) .$$

● *Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung* (6) $\lg a_1$ *nicht Null sein kann!*

Daraus ergibt sich jetzt unter Beachtung von (7):

$$(8) \qquad \frac{a_1^h - 1}{h} = \frac{t \cdot \lg a_1}{\lg (1 + t)} = \frac{\lg a_1}{\frac{1}{t} \cdot \lg (1 + t)} = \frac{\lg a_1}{\lg \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]} .$$

Man kann zeigen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ existiert. Er wird nach L. EULER mit dem Buchstaben e bezeichnet; e ist eine irrationale Zahl:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots$$

Beachtet man jetzt noch, daß $\lim\limits_{x_n \to \xi} \lg x_n = \lg \xi$ gilt und daß wegen (7) mit $h \to 0$ auch t gegen Null geht, so ergibt sich aus (8) in Verbindung mit (6):

$$k_{a_1} = \lim_{h \to 0} \frac{a_1^h - 1}{h} \lim_{t \to 0} \frac{\lg a_1}{\lg\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} = \frac{\lg a_1}{\lg e} = 1\,, \text{ woraus}$$

(9) $\quad a_1 = e$

folgt.

Zur Berechnung von e

In der Beziehung $e = \lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ dürfen nach Definition des Grenzwertes für t die Glieder jeder beliebigen Nullfolge $(t \neq 0)$ eingesetzt werden.[1] Insbesondere darf $t = \frac{1}{n}$ (n eine natürliche Zahl) gesetzt werden, was sich zur Berechnung als zweckmäßig erweist, so daß also $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ folgt.

Unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhält man:

(10) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

Leiten Sie diese Beziehung her!

Aus dieser Relation ergibt sich, wenn k eine beliebige natürliche Zahl kleiner als n bedeutet:

(11) $$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{n^{k-1}}$$
$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Der erste Teil der fortlaufenden Ungleichung ergibt sich, indem auf der rechten Seite von (10) die letzten Glieder weggelassen werden. Der zweite Teil dieser Ungleichung ergibt sich aus (10), indem man beachtet, daß jeweils der Faktor von $\frac{1}{\nu!}$ für $\nu \geqq 2$ die Form $\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{[n-(\nu-1)]}{n}$ hat, also kleiner als 1 ist. Die Faktoren dieses Produktes sind nämlich sämtlich kleiner als 1, so daß auch das Produkt kleiner als 1 ist. Daher gilt:

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(\nu-1)]}{n^{\nu-1}} < \frac{1}{\nu!}.$$

[1] Natürlich muß noch $t > -1$ gewählt werden, damit die Basis positiv ausfällt.

Unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$ konvergiert, ergibt sich aus (11) durch Grenzübergang $n \to \infty$ bei festgehaltenem k unter Beachtung von $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$(12) \quad \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \leqq e \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}.$$

Diese Beziehung gilt für jedes natürliche k; denn denkt man sich die natürliche Zahl $k = k_0$ beliebig vorgegeben, so gilt die Relation (11) für alle $n > k_0$. Läßt man in (12) noch k gegen ∞ streben, so erhält man:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \leqq e \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!},$$

woraus

$$(13) \quad \boldsymbol{e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}}$$

folgt.

Daß diese Reihe konvergiert, leuchtet ein, wenn man beachtet, daß von $\nu = 4$ an $\frac{1}{\nu!} < \frac{1}{2^\nu}$ gilt und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$ ist gut geeignet, um die Zahl e zu berechnen.

● *Bilden Sie die Summe der ersten zehn Glieder dieser Reihe, indem Sie die Brüche $\frac{1}{\nu!}$ auf acht Stellen hinter dem Komma ausrechnen! Vergleichen Sie diese Summe mit dem Näherungswert $e \approx 2{,}718\,281\,828\,5$!*

Aus (9) folgt in Verbindung mit (6) und (4):

$$(14) \quad \boldsymbol{\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \cdot k_{a_1} = e^x \cdot 1 = e^x}\,.$$

Die Funktion $y = e^x$ hat also die Eigenschaft, daß ihre Ableitung und damit auch jede folgende wieder e^x ist. D. h., die Funktion $y = e^x$ genügt der Differentialgleichung $y' = y$.

Die Funktion $y = e^x$ ist übrigens nicht die einzige Funktion, die dieser Differentialgleichung genügt.

● *Zeigen Sie, daß $y = 2\,e^x$, $y = 3\,e^x$ und $y = \frac{1}{4}\,e^x$ auch dieser Differentialgleichung genügen! Gibt es noch weitere Funktionen, die dieser Differentialgleichung genügen?*

Die Funktion $y = e^x$ ist, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, keine rationale Funktion. Es ist also nicht möglich, bei beliebig vorgegebenem Argumentwert x den zugehörigen Funktionswert y stets mit Hilfe der Grundrechenarten genau zu berechnen. Daher ist diese Funktion eine neuartige Funktion; sie ist aus diesem Grunde tabelliert worden, und dadurch ist die Funktion als bekannt anzusehen.

Die Tabellierung von e^x geschieht in der Weise, daß für $x \geqq 0$ die Funktionen $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ tabelliert werden. Aus der Tabelle von $y = e^{-x}$ für $x \geqq 0$ können die Funktionswerte von $y = e^x$ für negative x abgelesen werden. In den

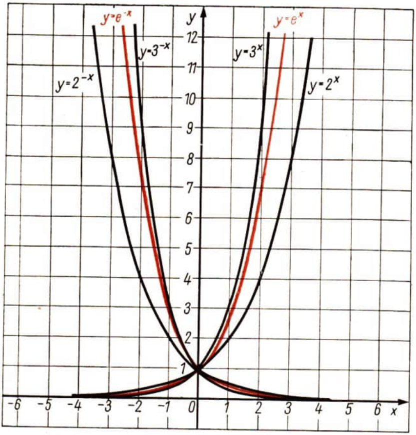


Abb. 1.18.

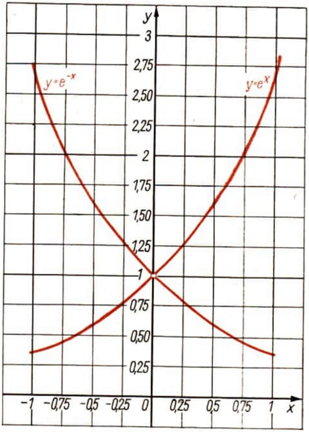


Abb. 1.19.

Abbildungen 1.18. und 1.19. sind die Bilder von $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ mit Hilfe der Wertetafel aus Beyrodt-Küstner gezeichnet worden. Um ihre Lage in der Schar der Exponentialkurven zu verdeutlichen, wurden in Abbildung 1.18. auch die Bilder von $y = 2^x$ und $y = 3^x$ bzw. $y = 2^{-x}$ und $y = 3^{-x}$ eingezeichnet.

Da bei von 1 verschiedener Basis a die Exponentialfunktion $y = a^x$ streng monoton ist, besitzt diese Funktion eine ebenfalls streng monotone Umkehrfunktion, die mit $y = \log_a x$ bezeichnet wird und **Logarithmusfunktion** heißt.

Die zugehörigen Logarithmuskurven ergeben sich aus den entsprechenden Exponentialkurven durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ (Abb. 1.20.). Der Abbildung 1.20. und allgemeinen Überlegungen, die sich aus der Spiegelung der Exponentialkurvenschar ergeben, entnimmt man folgendes:

1. Durchlaufen die Argumente einer Logarithmusfunktion eine geometrische Folge, so durchlaufen die Funktionswerte eine arithmetische Folge erster Ordnung:

x	2	4	8	16	...	2^k
$y = \log_a x$	$\log_a 2$ $= 1 \cdot \log_a 2$	$\log_a 2^2$ $= 2 \cdot \log_a 2$	$\log_a 2^3$ $= 3 \cdot \log_a 2$	$\log_a 2^4$ $= 4 \cdot \log_a 2$	... ...	$\log_a 2^k$ $= k \cdot \log_a 2$

$d = \log_a 2$ $d = \log_a 2$ $d = \log_a 2$ $d = \log_a 2$

2. Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist für alle positiven reellen Zahlen $a \neq 1$ definiert. Der Definitionsbereich ist $x > 0$, der Wertevorrat ist $-\infty < y < \infty$.

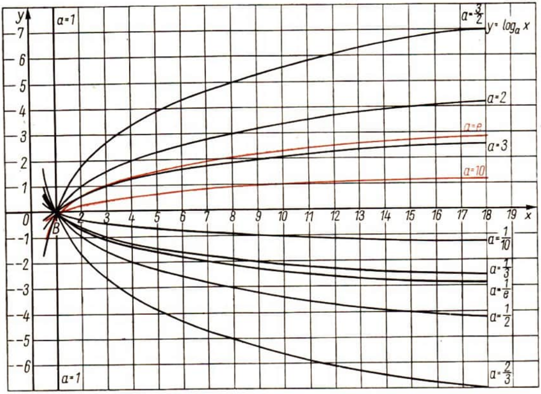


Abb. 1.20.

3. Jede Logarithmusfunktion hat an der Stelle $x = 1$ den Wert $y = 0$ ($\log_a 1 = 0$). Die Bilder gehen alle durch den Punkt $B\,(1;0)$ auf der x-Achse. Für alle Logarithmusfunktionen gilt außerdem $\log_a a = 1$.
4. Die zu $y = \log_a x$ und $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ gehörenden Bilder liegen spiegelbildlich zur x-Achse, denn es gilt $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$.
5. Die Funktion $y = \log_a x$ ist für $a > 1$ im Sinne zunehmender Argumente streng monoton steigend, für $0 < a < 1$ aber streng monoton fallend. Demgemäß verlaufen die Bilder im Koordinatensystem für $a > 1$ von links unten nach rechts oben, für $0 < a < 1$ von links oben nach rechts unten.
6. Für alle Bilder ist die y-Achse Asymptote. Und zwar nähern sie sich mit abnehmenden, gegen Null strebenden Abszissen im Fall $a > 1$ dem negativen Teil der y-Achse, im Fall $0 < a < 1$ dem positiven Teil der y-Achse.
7. Für $a > 1$ gehören zu Argumenten $x > 1$ positive Funktionswerte, zu Argumenten $0 < x < 1$ negative Funktionswerte. Für $0 < a < 1$ gehören zu Argumenten $x > 1$ negative Funktionswerte, zu Argumenten $0 < x < 1$ positive Funktionswerte.

▶ **Insbesondere heißt die zur Basis e gehörende Logarithmusfunktion $y = \log_e x = \ln x$ die natürliche Logarithmusfunktion.**

Die entsprechende Kurve schneidet in $B\,(1;0)$ die x-Achse unter 45°.

Die natürlichen Logarithmen spielen in der Mathematik, insbesondere auch bei solchen Problemen, die aus der Praxis stammen, eine große Rolle. Auch die Logarithmusfunktionen sind wie die Exponentialfunktionen keine rationalen Funktionen, weswegen $y = \ln x$ und $y = \log_{10} x = \lg x$ aus den gleichen Gründen wie die Funktion $y = e^x$ tabelliert werden (Beyrodt-Küstner). Bei der Benutzung der Tafeln für $\ln x$ ist zu beachten, daß die von den dekadischen Logarithmen her bekannte Beziehung zwischen Kennzahl und Stellenzahl des Numerus ($\lg 2573 = 3, \ldots$) bei den natürlichen Logarithmen im allgemeinen nicht gilt ($\ln 2573 = \ln 257{,}3 + \ln 10 \approx 5{,}5503 + 2{,}3026 = 7{,}8529$).

Sowohl die Exponentialfunktionen zu verschiedenen Basen als auch die Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen stehen in einfachen Beziehungen zueinander, die jetzt hergeleitet werden.
Aus den Gleichungen $c = b^\lambda$ und $\lambda = \log_b c$ ($c > 0$) folgt:

$$(15) \quad \boldsymbol{c = b^{\log_b c}} \quad (\boldsymbol{c > 0}) .$$

Mit Hilfe von (15) können Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen zu einer Basis a in solche zu einer anderen Basis b umgerechnet werden.

1. Exponentialfunktionen

$$y = a^x \text{ gibt wegen } a = b^{\log_b a};$$

$$y = \left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x \cdot \log_b a}, \quad \text{d. h.}$$

$$(16) \quad \boldsymbol{y = a^x = b^{x \cdot \log_b a}} .$$

Dadurch ist es insbesondere möglich, alle Exponentialfunktionen auf die natürliche Exponentialfunktion zurückzuführen:

$$(17) \quad \boldsymbol{y = a^x = e^{x \cdot \ln a}} .$$

Formulieren Sie (17) *mit Worten!*

2. Logarithmusfunktionen

Wird die Beziehung (17) in Logarithmusform geschrieben, so ergibt sich:

$x = \log_a y$ und $x \cdot \log_b a = \log_b y$.

Durch Eliminieren von x folgt schließlich:

$$(18) \quad \boldsymbol{\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b y = {}^b M_a \cdot \log_b y} .$$

Der Ausdruck ${}^b M_a = \dfrac{1}{\log_b a}$ heißt der **Modul** des Logarithmensystems zur Basis a bezüglich der Logarithmen zur Basis b.

Um aus den Logarithmen eines Systems (z. B. zur Basis b) die eines anderen Systems (z. B. zur Basis a) zu berechnen, werden die ersteren mit dem Modul des neuen Logarithmensystems bezüglich der Logarithmen zur alten Basis multipliziert.

Dadurch ist es insbesondere möglich, alle Logarithmusfunktionen auf die natürliche Logarithmusfunktion zurückzuführen:

$$(19) \quad \boldsymbol{\log_a x = {}^e M_a \ln x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a}} \text{ [1]} \qquad \text{oder}$$

[1] Für den Modul ${}^e M_a$ schreibt man nach TGL 0-1302 nur M_a. Es gilt:

$${}^e M_a \equiv M_a = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a} .$$

(20) $\ln a \cdot \log_a x = \ln x$.

Um eine Logarithmusfunktion mit einer beliebigen Basis a als natürliche Logarithmusfunktion darzustellen, werden ihre Funktionswerte mit $\ln a$ multipliziert.

Die für die Praxis wichtigste Folgerung aus (20) ist, daß man in den Zahlentafeln nur die Logarithmen eines einzigen Systems zu tabellieren braucht. Alle anderen lassen sich daraus berechnen. Das wird gelegentlich bei Exponentialgleichungen benutzt.

Beispiel 1:

$3^x = 5$

$x = \log_3 5$ (genaue Lösung)

$x = {}^{10}M_3 \cdot \lg 5$ *Nebenrechnung:* ${}^{10}M_3 = \frac{1}{\lg 3} \approx \frac{1}{0{,}4771} \approx 2{,}10$

$x \approx 0{,}6990 \cdot 2{,}10 \approx 1{,}47$ (Näherungslösung)

Beispiel 2:

$$12^{\frac{1}{5x+4}} = 1{,}318$$

$$12 = 1{,}318^{5x+4}$$

$$5x + 4 = \log_{1,318} 12$$

$$x = \frac{1}{5}(\log_{1,318} 12 - 4) \text{ (genaue Lösung)}$$

Nebenrechnung: $\log_{1,318} 12 = {}^{10}M_{1,318} \cdot \lg 12 = \frac{1}{\lg 1{,}318} \cdot \lg 12 \approx \frac{1}{0{,}12} \cdot 1{,}08 = 9$

$$x \approx \frac{1}{5} \cdot (9 - 4)$$

$$x \approx 1 \quad \text{(Näherungslösung)}$$

Sonderfälle:

1. Die Umrechnungsbeziehung (18) gilt auch für den Numerus $y = b$:

(21) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ oder $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

2. Besonders häufig wird die Umrechnung von dekadischen Logarithmen in natürliche (und umgekehrt) benötigt. Die zugehörigen Moduln sind in den Tafeln deshalb besonders verzeichnet (Beyrodt-Küstner).

(22) $\lg N = \frac{\ln N}{\ln 10} = {}^{e}M_{10} \cdot \ln N = M_{10} \cdot \ln N$ mit $M_{10} = \frac{1}{\ln 10} = \lg e \approx 0{,}4343$,

(22a) $\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} = {}^{10}M_e \cdot \lg N = \frac{1}{M_{10}} \cdot \lg N$ mit $\frac{1}{M_{10}} = \frac{1}{\lg e} = \ln 10 \approx 2{,}3026$.

Aufgaben

1. a) Zeichnen Sie näherungsweise die Schar der Exponentialkurven für $-1 \leqq x \leqq +1$ und $a = \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, e, 3, 5, 10$ mit großer Maßeinheit, indem Sie x von 0,1 zu 0,1 fortschreiten lassen!

b) Wie heißen die Basen a für die acht Funktionsbilder von Aufgabe 1a, wenn sie an der y-Achse gespiegelt werden?

2. Stellen Sie eine Regel für den Zusammenhang zwischen Kennzahl des Logarithmus und Größe des Numerus für die Logarithmensysteme zu folgender Basis auf!

a) 10 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** e **f)** a

3. Entnehmen Sie folgende natürliche Logarithmen der Tafel!

a) ln 1	**b)** ln 3	**c)** ln 5	**d)** ln 37
ln 10	ln 30	ln 0,5	ln 859
ln 100	ln 300	ln 0,05	ln 12
ln 1000	ln 3000	ln 0,005	ln 358
e) ln 6530	**f)** ln 2987	**g)** ln 0,07265	**h)** ln 12,004
ln 17,3	ln 4004	ln 7,853	ln 23958
ln 2,47	ln 12,78	ln 0,2983	ln 0,98736
ln 0,528	ln 4,592	ln 0,0004365	ln 0,47298

Anleitung: Auch bei der Tafel der natürlichen Logarithmen können nur vier geltende Ziffern berücksichtigt werden: $\ln 15{,}786 \approx \ln 15{,}79$. Natürliche Logarithmen echter Brüche sind negativ:

$$\ln 0{,}0243 = \ln 243 - \ln 1000 - \ln 10 = 5{,}4931 - 6{,}9078 - 2{,}3026 = 5{,}4931 - 9{,}2104$$
$$= -3{,}7173\,.$$

Die bei dekadischen Logarithmen übliche Schreibweise mit „negativer Kennzahl" kann auch hier benutzt werden:

$$\ln 0{,}0243 = 0{,}2827 - 4\,.$$

4. Wenden Sie die Logarithmengesetze an!

a) $\ln 12{,}4^3$	**b)** $\ln (243 \cdot 0{,}7245)$	**c)** $\ln (5{,}824 : 0{,}792)$
d) $\ln \sqrt[3]{0{,}7823}$	**e)** $\ln \frac{16{,}4 \cdot 3{,}25^2}{0{,}722}$	**f)** $\ln 16{,}7^3 \cdot \sqrt{0{,}2}$

5. Wie heißen die Numeri?

a) $\ln x = 6{,}4862$	**b)** $\ln x = 1{,}8000$	**c)** $\ln x = 8{,}2020$
$\ln x = 3{,}2958$	$\ln x = 4{,}7370$	$\ln x = 7{,}3055$
$\ln x = 6{,}0162$	$\ln x = 5{,}8050$	$\ln x = 10{,}0000$
$\ln x = 6{,}9078$	$\ln x = 3{,}4567$	$\ln x = 9{,}6023$
d) $\ln x = -0{,}1625$	**e)** $\ln x = 0{,}6931 - 3$	**f)** $\ln x = 3{,}0000$
$\ln x = -3{,}2734$	$\ln x = 0{,}2311 - 1$	$\ln x = -3{,}0000$
$\ln x = -6{,}1044$	$\ln x = 0{,}4444 - 5$	$\ln x = 2{,}1624$
$\ln x = -1{,}0000$	$\ln x = 0{,}2035 - 4$	$\ln x = -2{,}1624$

6. Berechnen Sie folgende Aufgaben einmal mit natürlichen Logarithmen, dann mit dekadischen Logarithmen, dann mit dem Rechenstab und beurteilen Sie Vor- und Nachteile der drei Rechenhilfsmittel!

a) $\dfrac{58{,}54 \cdot 3{,}614}{506{,}4 \cdot 0{,}7831}$ b) $\dfrac{0{,}56^2 \cdot 1{,}345^3}{(146 \cdot 0{,}148)^4}$ c) $\sqrt[5]{1346} \cdot \sqrt[4]{0{,}0019}$

d) $\sqrt[5]{5 \cdot \sqrt[3]{127}}$ e) $\sqrt[3]{5{,}03^2 + \sqrt[5]{0{,}2}}$ f) $\left(\dfrac{643}{489}\right)^{\frac{3}{2}}$

7. Bestimmen Sie folgende Moduln zwischen zwei Logarithmensystemen!

a) ${}^{10}M_3$ b) ${}^{10}M_{7,5}$ c) ${}^{e}M_5$ d) ${}^{e}M_{12,6}$
e) ${}^{7}M_4$ f) ${}^{8}M_{1,5}$ g) ${}^{4}M_{13}$ h) ${}^{7,9}M_{6,8}$

8. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen, zunächst genau, dann durch Näherung!

a) $2^{4 + \frac{3}{4}x} = 128$ b) $0{,}45^{\,x-7} = 1$ c) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^x} = \dfrac{4}{3}$ d) $(3^5)^x = 7$

e) $(3^5)^{\frac{1}{x}} = 7$ f) $(7{,}943)^{\frac{1}{x}} = 1000$ g) $1{,}3^x = 2{,}856$ h) $(7693)^{\frac{1}{x}} = 0{,}00013$

i) $100^x = 30$ k) $2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$ l) $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$

9. Die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe erfolgt, wenn von Temperaturänderungen abgesehen wird, nach dem Gesetz:

$$p = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} h}.$$

Dabei bedeuten p den Druck in der Höhe h, p_0 den Normdruck (760 Torr), ϱ_0 die Luftdichte beim Normdruck ($0{,}001293\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) und g die Gravitationskonstante.
Gewöhnlich wird die Beziehung als sogenannte barometrische Höhenformel in der Form

$$h = 18400\,(2{,}8808 - \lg p)$$

geschrieben, wobei p die Maßzahl des Druckes für die Maßeinheit Torr und h die Maßzahl der Höhe für die Maßeinheit m ist. Leiten Sie die zweite Formel aus der ersten her!

1.3.3. Die Differentiation der allgemeinen Exponentialfunktion und der allgemeinen Logarithmusfunktion

Mit Hilfe der soeben hergeleiteten Beziehungen zwischen den Exponentialfunktionen und den Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen sowie der Kettenregel und der Umkehrregel kann für die allgemeine Exponentialfunktion und die allgemeine Logarithmusfunktion der erste Differentialquotient hergeleitet werden.
Für die allgemeine Exponentialfunktion gilt nach (18):

$$y = a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

Unter Anwendung der Kettenregel folgt daraus infolge (14):

$$(23) \quad y' = \frac{d(a^x)}{dx} = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}.$$

Der in der Gleichung (4) mit k_a bezeichnete Proportionalitätsfaktor ist also gleich

$$\ln a = \frac{1}{\log_a e}.$$

Für die höheren Ableitungen von $y = a^x$ ergibt sich dann:

$$y'' = a^x \cdot (\ln a)^2;$$
$$y''' = a^x \cdot (\ln a)^3;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n.$$

Die Funktion $y = a^x$ genügt daher der Differentialgleichung $y' = c \cdot y$ (c konstant).

Bilden Sie die Differentialgleichungen für $y = a^x$ mit $a = \frac{1}{2}$; 2; 4 und $\frac{5}{4}$! Wie groß ist jeweils der Faktor c?

Faßt man y als unabhängige und x als abhängige Variable auf, so kann die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = e^x$ in der Form $x = \ln y$ geschrieben werden. Daher gilt nach der Umkehrregel:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d(e^x)}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Nach Austausch der Symbole der Veränderlichen folgt:

$$(24) \quad \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Man kommt also zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß die Ableitung einer nicht rationalen Funktion eine rationale Funktion ist.

Nach Gleichung (19) gilt $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Daraus folgt:

$$(25) \quad \frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Für die höheren Ableitungen ergibt sich:

$$y = \ln x \qquad\qquad y = \log_a x$$
$$y' = \frac{1}{x} \qquad\qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2} \qquad\qquad y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a} = -\frac{1!}{x^2 \ln a}$$
$$y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3} = \frac{2!}{x^3} \qquad\qquad \cdot$$
$$y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4} \qquad\qquad \cdot$$
$$\vdots \qquad\qquad \cdot$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} \qquad\qquad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n \cdot \ln a}.$$

1.3.4. Die logarithmische Differentiation

Differenzieren Sie die Funktion $y = x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$! Beachten Sie, daß $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}$ gilt!

Die Differentiation von Funktionen, die sich in der Form $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ darstellen lassen, läßt sich in entsprechender Weise durchführen, jedoch kann man sich dabei auch des folgenden Rechenvorteils bedienen.
Logarithmiert man die beiden Seiten von $y = [f(x)]^{g(x)}$, so erhält man $\ln y = g(x)\cdot\ln f(x)$. Wenn man jetzt auf beiden Seiten differenziert, ergibt sich, weil y eine Funktion von x ist,

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot\ln[f(x)] + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Unter Beachtung von $y = [f(x)]^{g(x)}$ kann dann y' als Funktion von x dargestellt werden.
Für die Funktion $y = x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ ergibt sich:

$$\ln y = \sqrt{x}\cdot\ln x\,; \qquad \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\ln y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{y}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x + 2)\,.$$

Das soeben erläuterte Verfahren nennt man **logarithmische Differentiation.** Es hat allerdings zur Voraussetzung, daß bei differenzierbaren Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ auch $y = [f(x)]^{g(x)}$ differenzierbar ist.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie durch logarithmische Differentiation die ersten Ableitungen von folgenden Funktionen!

a) $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ **b)** $y = x^x$ $(x > 0)$ **c)** $y = \frac{e^x}{x}$ $(x > 0)$

2. Von folgenden Funktionen ist die erste Ableitung zu bilden!

a) $y = a^{2\sqrt{x}}$ **b)** $y = e^x(x+1)$ **c)** $y = \sqrt{x(e^x+1)}$ **d)** $y = \ln x^n$

e) $y = \ln(a + e^x)$ **f)** $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$ **g)** $y = a^{-\frac{1}{x}}$ **h)** $y = e^{x^2-2x-1}$

i) $y = \lg\sqrt{5x^2 - 2x + 7}$ **k)** $y = a^{\tan x}$ **l)** $y = (\lg x)^{10}$ **m)** $y = e^{2x}\cdot\cos x\cdot\ln x$

Anleitung: Beachten Sie, daß mitunter die logarithmische Differentiation schneller zum Ziel führt!

3. Von folgenden Funktionen sind die ersten drei Ableitungen zu bilden!

a) $y = \ln x^n$ **b)** $y = (\ln x)^n$ **c)** $y = \ln\sin x$ **d)** $y = e^{\ln x}$

1.3.5. Anwendungen

Es gibt eine Reihe von Prozessen, die durch Exponential- und Logarithmusfunktionen beschrieben werden.
Die wichtigsten sind die Wachstums- und Zerfallsprozesse.

a) Wachstumsprozesse

1. Verzinsung von Sparguthaben

Die Verzinsung wird so vorgenommen, daß in gewissen Zeitabständen die prozentual vom Guthaben errechneten Zinsen diesem buchungsmäßig beigefügt werden, so daß sie das Guthaben vergrößern und demgemäß vom nächsten Zinsabschnitt an selbst mit verzinst werden. Man spricht deshalb auch von Zinseszinsen.
Bei einem Sparguthaben von 1000 MDN und einer jährlichen Zinsgutschrift von 3% sieht das folgendermaßen aus:

Zinsjahr	Verzinsbares Guthaben	Zinsen	Gesamtguthaben nach Zinsgutschrift am Jahresende
1	1000 MDN	30 MDN	1030 MDN
2	1030 MDN	30,90 MDN	1060,90 MDN
3	1060,90 MDN	31,83 MDN [1]	1092,73 MDN
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Allgemein: Sparguthaben g_0; Verzinsung jährlich zu $p\%$ [2]

1.	g_0	$\frac{g_0 p}{100}$	$g_0 + \frac{g_0 p}{100} = g_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q$
2.	$g_0 q$	$\frac{g_0 q \cdot p}{100}$	$g_0 q + \frac{g_0 q p}{100} = g_0 q\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q^2$
3.	$g_0 q^2$	$\frac{g_0 q^2 \cdot p}{100}$	$g_0 q^2 + \frac{g_0 q^2 p}{100} = g_0 q^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Man erkennt, daß das Sparguthaben nach i Jahren einen Wert von

$$g = g_0 \cdot q^i$$

erreicht hat. Es läßt sich also mit Hilfe einer Exponentialfunktion vom Typ $y = b \cdot a^x$ errechnen. Die Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x$ gibt in diesem Fall die Bildungsvorschrift für die Glieder einer geometrischen Folge wieder, in der x auf natürliche Zahlen beschränkt ist.

[1] Zur Vereinfachung der Rechnung ist dabei angenommen worden, daß auch die Pfennige mit verzinst werden, was in der Bankpraxis nicht geschieht.

[2] Für den Ausdruck $1 + \frac{p}{100}$, den sogenannten Zinsfaktor, wird meist die Abkürzung q benutzt.

Die Zinsgutschrift erfolgt in gewissen Fällen auch in kürzeren Zeitabständen zu einem kleineren Prozentsatz, z. B. halbjährlich zu $\frac{p}{2}$ % oder monatlich zu $\frac{p}{12}$ %. Da dabei die Zinsen schon früher wiederverzinst werden, ist das Endguthaben nach i Jahren größer. Wenn die Zinsgutschrift nach jeweils $\frac{1}{n}$ Jahr zu $\frac{p}{n}$ % erfolgt, ergibt sich entsprechend nach i Jahren

$$(26) \quad g = g_0\left(1 + \frac{p}{100\,n}\right)^{ni} = g_0\left[\left(1 + \frac{p}{100\,n}\right)^{n}\right]^{i}.$$

2. Organisches Wachstum

Auch der Prozeß des organischen Wachstums läßt sich mit Hilfe einer Exponentialfunktion beschreiben. Im Gegensatz zur Verzinsung erfolgt hier der Zuwachs in sehr kurzen Zeitabständen. Ist der prozentuale Zuwachs in einer gewissen Zeiteinheit p %, und erfolgt der Zuwachs in $\frac{1}{n}$ Zeiteinheit, so gilt nach i Zeiteinheiten ebenfalls (26) oder umgeformt:

$$g = g_0\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{100\,n}{p}}\right)^{\frac{100\,n}{p}}\right]^{\frac{p\,i}{100}}.$$

Bei außerordentlich kleinen Zeitabständen für den Zuwachs unterscheidet sich daher dieser Betrag nur sehr wenig von dem Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} g_0\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{100\,n}{p}}\right)^{\frac{100\,n}{p}}\right]^{\frac{p\,i}{100}}.$$

Man pflegt daher mit diesem Grenzwert zu rechnen, weil er in den genannten Fällen gute Näherungswerte liefert bzw. den idealisierten Fall kontinuierlichen Wachstums beschreibt.

Setzt man $\frac{100\,n}{p}$ gleich $\frac{1}{h}$, so strebt h gegen Null für $n \to \infty$, und man erhält:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{100\,n}{p}}\right)^{\frac{100\,n}{p}} = \lim_{h \to 0}\,(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e\,.$$

Folglich wird die Endgröße g, die eine Anfangsgröße g_0 nach gewisser Zeit t beim organischen Wachstum erreicht, (näherungsweise) nach

$$(27\text{a}) \quad \boldsymbol{g = g_0 \cdot e^{c\,t}}$$

berechnet. Dabei bedeutet c eine Konstante (Wachstumskonstante), die gleich $\frac{p}{100}$ ist, wenn p % auf dieselbe Zeiteinheit bezogen ist, in der t gemessen wird.

Setzt man in der Gleichung (27a) $e^c = a$, so kann man (27a) auch in der Form $g = g_0 \cdot a^t$ schreiben. Von dieser Umformung macht man jedoch meist gerade in der umgekehrten Form Gebrauch, indem man die Funktion $y = a^x$ in der Form $y = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \ln a$ schreibt.

Beispiel 3:

Durch Schädlingsbefall wurden in einem Waldbestand von 55 000 fm (Festmeter) 17000 fm vernichtet. Wie lange muß der Wald geschont werden, um den ursprünglichen Stand zu erreichen, wenn im ersten Jahr 2% Holzzuwachs gemessen wurde und der Zuwachs nach dem Gesetz über das organische Wachstum erfolgt?

Lösung:

Das Wachstumsgesetz heißt, wenn t in Jahren gemessen wird:

$$g = g_0 \, e^{0{,}02\, t}.$$

$\left(c \text{ ist dabei } \frac{2}{100} = 0{,}02.\right)$

Die völlige Gesundung des Forstbestandes ist erreicht, wenn gilt:

$$55\,000 = 38\,000 \cdot e^{0{,}02\, t}$$

$$\frac{55}{38} = e^{0{,}02\, t}$$

$$0{,}02\, t = \ln \frac{55}{38} \approx \ln 1{,}447.$$

Unter Verwendung der Tafel ergibt sich:

$$0{,}02\, t \approx 0{,}37$$

$$t \approx 19\,.$$

Es ist also eine Schonung von rund 19 Jahren erforderlich. Das zeigt: Forstschäden werden nur langsam beseitigt.

b) Zerfallsprozesse

Radioaktiver Zerfall

Jede natürliche Zerfallserscheinung, z.B. der selbständige Zerfall einer radioaktiven Substanz durch laufende Kernumwandlungen, ist das Gegenstück zum organischen Wachstum. Hier zerfällt laufend ein gewisser Teil der Ausgangssubstanz, der ebenfalls der jeweiligen Ausgangsmenge proportional ist, d.h. prozentual von dieser berechnet werden kann. Die neue Menge m ist dann die Ausgangsmenge m_0 vermindert um den zerfallenen Teil, der p % ausmachen möge:

$$m = m_0 - \frac{m_0\, p}{100} = m_0\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Nach entsprechenden Überlegungen, wie sie bereits durchgeführt wurden, kommt man jetzt zu

$$m = m_0 \left[\lim_{h \to 0} (1 - h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\lambda t}.$$

Damit kann der Zerfall in guter Näherung berechnet werden.

Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} (1 - h)^{\frac{1}{h}}$ wird durch die Substitution $h = -h'$ auf die Form $\lim\limits_{h' \to 0} (1 + h')^{-\frac{1}{h'}} = \left[\lim\limits_{h' \to 0} (1 + h')^{\frac{1}{h'}}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ zurückgeführt.

Folglich gilt für den radioaktiven Zerfall:

(27b) $\boldsymbol{m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}}$.

Der Faktor λ heißt Zerfallskonstante; sie hat für jede einzelne radioaktive Substanz einen spezifischen Wert.

Beispiel 4:

Die Zeit T, in der eine radioaktive Substanz zur Hälfte zerfallen ist, nennt man die Halbwertzeit. Wie groß ist die Halbwertzeit von Radium? ($\lambda = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{a}^{-1}$.)

Lösung:

$$m = m_0 \cdot e^{-4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot e^{-4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T}$$

$$e^{4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T} = 2$$

$$4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

$$T \approx \frac{0{,}6931}{4{,}4} \cdot 10^4 \approx 1580\,.$$

Die Halbwertzeit des Radiums beträgt etwa 1580 Jahre.

c) *Weitere Beispiele, in denen die Exponentialfunktionen verwendet werden*

1. Gedämpfte Schwingung

Für eine gedämpfte Schwingung gilt:

$$y = a \cdot e^{-bt} \cdot \sin c\,t \qquad (a, b, c > 0)\,.$$

Dabei bedeuten:

y die Elongation, d.h. den nach der Zeit t (vom Beginn der Bewegung an gemessen) vorliegenden Abstand von der Ruhelage;

c die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$;

(f: Frequenz, d. h. die Schwingungszahl in der Zeiteinheit; T: Schwingungsdauer, d.h. die Zeit, die für eine Vollschwingung benötigt wird);

b die Dämpfungs- oder Abklingkonstante, die von der die Dämpfung verursachenden Widerstandskraft abhängt;

a den Quotienten $\frac{v_0}{\omega}$, wenn v_0 die zum Beginn der Schwingung ($t = 0$) vorliegende Anfangsgeschwindigkeit ist, die von der Stärke des Anstoßes abhängt.

Bei der folgenden Untersuchung werden für die Konstanten die nachstehenden Zahlenwerte angenommen:

$$a = 6; \quad b = 0{,}2; \quad c = 0{,}6\,.$$

Um das Bild der Funktion zeichnen zu können, wird eine Funktionsuntersuchung durchgeführt. Dabei ist die Untersuchung nur für $t \geqq 0$ sinnvoll, da die Schwingung erst zur Zeit $t = 0$ beginnt, so daß die Funktion nur für $t \geqq 0$ erklärt ist.

1. Nullstellen (notwendige und hinreichende Bedingung: $y = 0$)

Wegen $e^{-bt} \neq 0$ für jedes t folgt $\sin c\, t_0 = 0$ und daraus:

$$t_0 = \frac{k\pi}{c} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man erkennt, daß die Dämpfungskonstante b keinen Einfluß auf die Lage der Nullstellen hat und damit auch nicht auf die Schwingungsdauer. Diese bleibt auch bei gedämpften Schwingungen während des gesamten Bewegungsvorganges konstant $T = \frac{2\pi}{c}$. Mit $c = 0{,}6$ ergibt sich:

$$t_{01} = 0; \quad t_{02} = \frac{5}{3}\pi; \quad t_{03} = \frac{10}{3}\pi; \ldots \quad \text{und} \quad T = \frac{10}{3}\pi.$$

2. Lokale Extremwerte $\left(\text{hinreichende Bedingung: } \frac{dy}{dt} = 0;\ \frac{d^2y}{dt^2} \neq 0\right)$

Die erste Ableitung nach der Zeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ symbolisiert man durch $\dot{y}$ und schreibt für $\frac{d^2y}{dt^2}$ entsprechend $\ddot{y}$. Es ergibt sich:

$$\dot{y} = a\, e^{-bt}\,(c \cos c\,t - b \sin c\,t)$$

$$\ddot{y} = a\, e^{-bt}\,[(b^2 - c^2) \sin c\,t - 2\,b\,c \cos c\,t].$$

Mit $a = 6$; $b = 0{,}2$; $c = 0{,}6$ erhält man:

$$\dot{y} = 1{,}2\, e^{-0{,}2t}\,(3 \cos 0{,}6\,t - \sin 0{,}6\,t)$$

$$\ddot{y} = -\,0{,}48\, e^{-0{,}2t}\,(3 \cos 0{,}6\,t + 4 \sin 0{,}6\,t).$$

Berechnung der lokalen Extremstellen:

Wegen $e^{-bt} \neq 0$ für jedes endliche t kann angesetzt werden:

$$c \cos c\,t_E - b \sin c\,t_E = 0$$

$$3 \cos 0{,}6\,t_E - \sin 0{,}6\,t_E = 0.$$

Daraus folgt, da $\sin x$ und $\cos x$ nie gleichzeitig verschwinden können:

$$\tan 0{,}6\,t_E = 3$$

$$t_E \approx \frac{1{,}25 + k\pi}{0{,}6} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ergeben sich als Näherungswerte:

$$t_{E1} \approx 2{,}1; \qquad t_{E2} \approx 7{,}3; \qquad t_{E3} \approx 12{,}6; \ldots$$

An jeder Stelle t_E ist $\ddot{y}$ von Null verschieden.
Wegen $\dot{y}\,|_{t_E} = 0$ und $a \cdot e^{-bt} \neq 0$ gilt nämlich

(28) $3 \cos 0{,}6\,t_E = \sin 0{,}6\,t_E$;

und daher

$$\ddot{y}|_{t_E} = -0{,}48\, e^{-0{,}2 t_E} \cdot (3 \cos 0{,}6\, t_E + 4 \sin 0{,}6\, t_E)$$
$$= -0{,}48\, e^{-0{,}2 t_E} \cdot (3 \cos 0{,}6\, t_E + 12 \cos 0{,}6\, t_E)$$
$$\ddot{y}|_{t_E} = -0{,}48\, e^{-0{,}2 t_E} \cdot 15 \cos 0{,}6\, t_E \, .$$

Wäre $\ddot{y}|_{t_E}$ gleich Null, so müßte $\cos 0{,}6\, t_E$ gleich Null sein und daher wegen (28) auch $\sin 0{,}6\, t_E$ gleich Null sein, was wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ unmöglich ist.
Daher sind die aus $\dot{y}$ errechneten Werte t_E auf jeden Fall lokale Extremstellen der untersuchten Funktion. Und zwar liegen lokale Maxima dort vor, wo in $t_E \approx \frac{1{,}25 + k\pi}{0{,}6}$ k geradzahlig, Minima dort, wo k ungeradzahlig ist:

$$t_{\max} \approx \frac{1{,}25 + 2\,m\,\pi}{0{,}6} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$t_{\min} \approx \frac{1{,}25 + (2\,m + 1)\,\pi}{0{,}6} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)\, .$$

● *Führen Sie den Nachweis für die Richtigkeit dieser Behauptung, und berechnen Sie für $m = 0, 1, 2$ die Amplituden näherungsweise! Beachten Sie, daß diese von der Dämpfung beeinflußt werden!*

3. Wendepunkte des Funktionsbildes (hinreichende Bedingung: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$; $\frac{d^3y}{dt^3} \neq 0$)
Wegen $e^{-bt} \neq 0$ für alle t ergibt sich für die Berechnung der Abszissen t_W der Wendepunkte:

$$3 \cos 0{,}6\, t_W + 4 \sin 0{,}6\, t_W = 0$$
$$\tan 0{,}6\, t_W = -0{,}75$$
$$t_W \approx \frac{2{,}5 + k\pi}{0{,}6} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\, .$$

Es ergeben sich die Näherungswerte:

$t_{W\,1} \approx 4{,}2$; $\quad t_{W\,2} \approx 9{,}4$; $\quad t_{W\,3} \approx 14{,}6$.

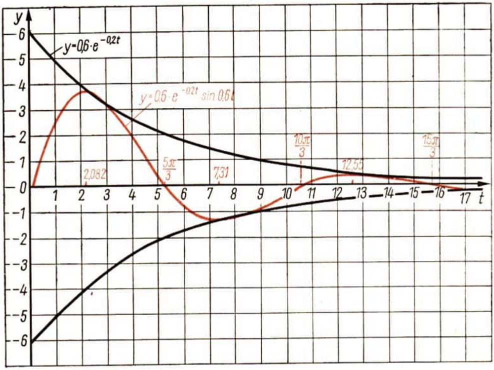


Abb. 1.21.

Bilden Sie $\dddot{y}$ und bestätigen Sie damit, daß es sich bei $t_W \approx \frac{2{,}5 + k\pi}{0{,}6}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ tatsächlich um die Abszissen von Wendepunkten handelt! Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2, 3$ die zugehörigen Ordinaten (Elongationen)!

Das Bild der Funktion $y = 6\,e^{-0{,}2t} \sin 0{,}6\,t$ zeigt die Abbildung 1.21. Beachten Sie, daß das ebenfalls eingezeichnete Bild der Funktion $y = 6\,e^{-0{,}2t}$ zwar die Abnahme der Amplitude veranschaulicht, das Bild der Funktion $y = 6\,e^{-0{,}2t} \sin 0{,}6\,t$ aber nicht in den Extrempunkten berührt!

Begründen Sie das und berechnen Sie, in welchen Punkten die Berührung stattfindet!

2. Gaußsche Glockenkurve

Bei Fehleruntersuchungen spielt die für alle x erklärte sogenannte Gausssche Fehlerfunktion $y = e^{-x^2}$ eine große Rolle. Die Funktion soll grafisch dargestellt werden.

Führen Sie dazu eine Funktionsuntersuchung durch! Bestimmen Sie folgende Punkte, soweit sie vorhanden sind:

1. *den Schnittpunkt mit der y-Achse;*
2. *die Schnittpunkte mit der x-Achse;*
3. *die lokalen Extrempunkte;*
4. *die Wendepunkte!*

3. Fallbewegung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

Beim Fallschirmspringen wird die Fallbeschleunigung g durch den Luftwiderstand laufend verkleinert. Diese Verminderung der Beschleunigung ist der Fallgeschwindigkeit proportional: $b = g - f \cdot v$. Der Proportionalitätsfaktor f hängt von verschiedenen Faktoren (Fallschirmgröße, Masse, Luftdichte) ab.

Das Weg-Zeit-Gesetz lautet dann:

(29) $$s = \frac{g}{f}\,t - \frac{g}{f^2}\,(1 - e^{-ft}) \,.$$

Es ist

a) die Richtigkeit dieses Gesetzes zu bestätigen und
b) zu bestimmen, welche maximale Geschwindigkeit sich beim Absprung ergibt.

Anleitungen:

Zu a): Weisen Sie nach, daß sich durch zweimaliges Differenzieren des Weges nach der Zeit die Beschleunigung in der vorgeschriebenen Form ergibt, d. h., daß durch (29) die Differentialgleichung $\ddot{s} = g - f \cdot \dot{s}$ erfüllt wird!

Zu b): Die maximale Geschwindigkeit erhalten Sie aus der ersten Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion. Die Bestimmung der geforderten Zeit führt dabei auf eine Grenzwertuntersuchung.

Aufgaben

1. Bestätigen Sie, daß die Funktion $y = a \cdot e^{-bt} \sin ct$ der Differentialgleichung $\ddot{y} + C_1 \cdot \dot{y} + C_2 \cdot y = 0$ genügt! Welchen Wert haben dabei die Koeffizienten C_1 und C_2?

2. Die folgenden Funktionen sind zu untersuchen und die zugehörigen Kurven sind zu zeichnen.

   a) $y = 2 \cdot e^{-0{,}3t} \sin 3t$ **b)** $y = \frac{1}{2} e^{-2x} \sin \frac{1}{2} t$

   Deuten Sie diese analytischen Ausdrücke physikalisch!

3. Folgende Funktionen sind zu untersuchen und grafisch darzustellen.

   a) $y = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2}{x}}$ **b)** $y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$ **c)** $y = \frac{1}{x} \cdot e^x$ **d)** $y = e^x \cdot \cos x$ **e)** $y = (\ln x)^2$.

4. Vergleichen Sie das Wachstum eines Sparguthabens von 2000 MDN in 10 Jahren bei folgenden Zinsgutschriften!

   a) einfache Zinsen zu 3% im Jahr (ohne Zinseszinsen)
   b) Zinseszinsen bei täglicher Kündigung und jährlicher Zinsgutschrift (3%)
   c) Zinseszinsen bei jährlicher Kündigung mit jährlicher Zinsgutschrift $\left(3\frac{1}{2}\%\right)$
   d) Zinseszinsen zu 3% jährlich bei halbjährlicher Zinsgutschrift

   Veranschaulichen Sie die Unterschiede grafisch!

5. Die Zunahme der Bevölkerung einer großen Stadt folgt im Durchschnitt ebenfalls näherungsweise dem Wachstumsgesetz $g = g_0\, e^{ct}$. Wie groß ist die Wachstumskonstante c, wenn eine Stadt in 13 Jahren ihre Bevölkerungszahl von 320000 auf 410000 vergrößert?

6. Das Wesen jeder Kettenreaktion besteht darin, daß der zugrunde liegende Elementarvorgang Anlaß für den Ablauf weiterer Elementarvorgänge wird, so daß sich deren Zahl sehr rasch steigert.

   Beispiel: A möge eine Neuigkeit, die er um 8 Uhr erfuhr, in der nächsten Viertelstunde zwei Bekannten B_1 und B_2 mitteilen. Diese verfahren genauso in der darauffolgenden Viertelstunde und geben die Nachricht an C_1, C_2, C_3, C_4 weiter.
   Wieviel Personen sind um 12 Uhr unterrichtet, wenn

   a) jeder Beteiligte die Nachricht nur einmal weiterträgt;
   b) jeder Beteiligte sich in jeder neuen Viertelstunde bis 12 Uhr laufend an der Verbreitung weiter beteiligt?

   Anleitung: Stellen Sie Zahlenfolgen auf und ermitteln Sie die allgemeinen Gesetze! Schreiben Sie diese als e-Funktionen! Wie heißt jeweils die Wachstumskonstante? Wie erhalten Sie bei **a)**, wie bei **b)** die Gesamtzahl aller Mitwisser? Welche Art von Funktionen liegt also einer Kettenreaktion zugrunde?

7. Bei Kernspaltungsreaktionen, bei denen neue Beschußteilchen entstehen und die deshalb zu Kettenreaktionen führen können, liegt die Zeit zwischen zwei Reaktionen in der Größenordnung von 10^{-4} s. Auf wieviel Kernspaltungen schwillt die Kettenreaktion in $\frac{1}{100}$ s an, wenn vereinfachend angenommen wird, daß jedes entstehende Teilchen ohne Ausnahme eine Reaktion auslöst, daß dabei stets zwei neue Teilchen entstehen, und daß keinerlei Verzögerungen der fliegenden Teilchen veranlaßt werden?

8. Die folgende Übersicht enthält die Halbwertzeiten für einige radioaktive Stoffe.

Actinium	$^{227}_{89}Ac$	21,7 a	Caesium	$^{137}_{55}Cs$	33 a
Uran	$^{238}_{92}U$	$4{,}5 \cdot 10^9$ a	Kobalt	$^{60}_{27}Co$	5,26 a
Radium	$^{226}_{88}Ra$	1622 a	Jod	$^{131}_{53}J$	8,1 d

Wie lautet das Zerfallsgesetz? Wie groß ist für folgende Elemente die Zerfallskonstante λ und wieviel Substanz ist nach der jeweils in Klammern angegebenen Zeit noch vorhanden?

a) $^{227}_{89}Ac$ (1 a) **b)** $^{238}_{92}U$ (100 a) **c)** $^{226}_{88}Ra$ (1000 a)

d) $^{137}_{55}Cs$ (33 a) **e)** $^{60}_{27}Co$ (10 a) **f)** $^{131}_{53}J$ (1 a)

Wie heißt allgemein die Beziehung zwischen Halbwertzeit und Zerfallskonstante?

9. Zersetzungsreaktionen, an denen nur Molekeln gleicher Art beteiligt sind, verlaufen nach der Funktion $z = k \cdot \ln \dfrac{a}{a-t}$.

Hierin bedeuten

a: die Anzahl der anfänglich vorhandenen Molekeln;

z: die Anzahl der in der Zeit t zersetzten Molekeln;

k: eine spezifischer Reaktionskonstante.

a) Bestimmen Sie die Reaktionsgeschwindigkeit!
b) Zeichnen Sie Diagramme für das Zersetzungsgesetz und für das Geschwindigkeitsgesetz!
c) Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Substanz zersetzt?

10. Wird ein auf die Temperatur T_0 erhitzter Körper in einer kälteren Umgebung mit der Temperature T_1 ($T_0 > T_1$) sich selbst überlassen, so kühlt er sich so ab, daß er nach der Zeit t die Temperatur $T = T_1 + (T_0 - T_1)\, e^{-k \cdot t}$ annimmt.
(NEWTONsches Abkühlungsgesetz; k ist eine von den spezifischen Eigenarten des abzukühlenden Körpers abhängige Konstante.)

a) Bestimmen Sie die Abkühlungsgeschwindigkeit, und zeichnen Sie grafische Darstellungen des Abkühlungsgesetzes für verschiedene (selbt gewählte) Werte von T_1 und T_0!
b) Welchen Einfluß hat bei konstantem T_0 verschiedenes T_1 (Kühlwassertemperatur)?

11. Befindet sich in einem Gleichstromkreis ein Verbraucher mit dem OHMschen Widerstand R und dem Selbstinduktionskoeffizienten L, so nimmt beim Einschalten Stromstärke nicht sofort den nach dem OHMschen Gesetz zu erwartenden Wert $I_0 = \dfrac{U}{R}$ an, sondern erreicht diesen Wert nach dem Gesetz $I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ erst nach einer gewissen Zeit. Entsprechend sinkt beim Ausschalten die Stromstärke infolge der Selbstinduktion nach dem Gesetz $I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$. Hierin heißt $\dfrac{L}{R}$ die Zeitkonstante.

a) Untersuchen Sie die Funktionen, und zeichnen Sie Diagramme!
b) Wann wird beim Einschalten $I = I_0$ und beim Ausschalten $I = 0$ erreicht?
c) Wie groß ist I jeweils nach der Zeitkonstanten $\left(t = \dfrac{L}{R}\right)$?

12. Wenn eine Schwungscheibe durch Flüssigkeitsreibung abgebremst wird, ändert sich die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit t nach dem Gesetz $\omega = \omega_0 \cdot e^{-f \cdot t}$, wobei ω_0 die Winkelgeschwindigkeit vor Einsetzen des Bremsvorgangs und f eine Konstante ist, die u. a. von der Viskosität der Flüssigkeit und vom Trägheitsmoment der Schwungscheibe abhängt.

   a) Handelt es sich um eine gleichmäßig verzögerte Bewegung?
   b) Nach welcher Zeit beträgt die Geschwindigkeit nur noch 10% von ω_0?
   c) Entwerfen Sie Diagramme für das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und für das Beschleunigung-Zeit-Gesetz!

1.3.6. Die Hyperbelfunktionen

Große theoretische wie praktische Bedeutung haben einige Funktionen, die sich durch Superposition gewisser e-Funktionen ergeben.
Hängt man eine gleichmäßige, allseitig biegsame Kette (Seil o. ä.) an den Enden auf, so daß sie nur der eigenen Schwere unterliegt, so nimmt sie beim Durchhängen eine Gestalt an, die (wie hier nicht hergeleitet werden soll) dem Bild der Funktion

$$y = c \cdot \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2}$$ entspricht.

Skizzieren Sie das Bild der Funktion für den Sonderfall $c = 1$, also für $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ auf zweierlei Weise:

a) durch geometrische Addition der Bilder von $y = e^x$ und $y = e^{-x}$;
b) punktweise, wobei Sie die Ordinaten rechnerisch unter Zuhilfenahme der e-Tafeln (Beyrodt-Küstner) *ermitteln!*

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 1.22. Die Kurve heißt **Kettenlinie**. Je nach der Entfernung der Aufhängepunkte A_1 und A_2 bei vorgegebener Kettenlänge kann die Kurve in Richtung der Achsen eine Streckung bzw. Stauchung erfahren. Eine solche gestreckte bzw. gestauchte Kurve läßt sich durch die Gleichung $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ beschreiben, wobei c eine Konstante ist.

Neben der Funktion $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ soll auch die Funktion $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ betrachtet werden. Skizzieren Sie das Funktionsbild ebenfalls auf zweierlei Weise!

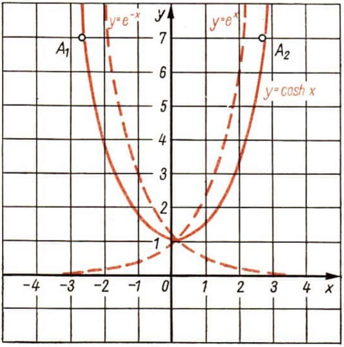


Abb. 1.22.

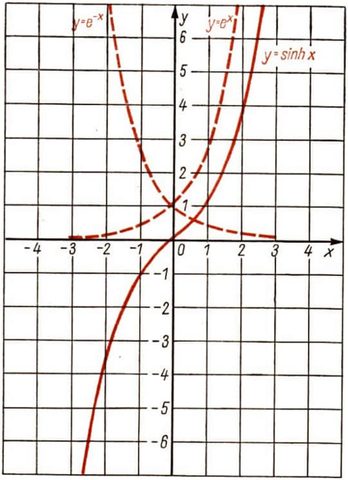


Abb. 1.23.

Das Ergebnis zeigt Abbildung 1.23. Die beiden Funktionen $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ haben einige Eigenschaften, die solchen der Sinus- und Kosinusfunktion ähneln. So wie deren Funktionswerte durch Ordinaten und Abszissen von Punkten des Einheitskreises dargestellt werden können, kann das bei den beiden in den Abbildungen 1.22. und 1.23. dargestellten Funktionen durch Abszissen und Ordinaten von Punkten einer gleichseitigen Hyperbel geschehen (Abb. 1.24.). (Auf einen Beweis dieser Tatsache muß hier verzichtet werden.) Man bezeichnet diese Funktion deshalb als **hyperbolische Funktionen**, und zwar als **sinus hyperbolicus** oder **Hyperbelsinus** bzw. als **cosinus hyperbolicus** oder **Hyperbelkosinus**. Sie werden durch die Gleichungen

(30) $\quad \mathbf{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

und

(31) $\quad \mathbf{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

für alle Werte von x definiert.

Es werden jetzt einige Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen genannt, die eine Verwandtschaft zwischen $\sin x$ und $\sinh x$ bzw. $\cos x$ und $\cosh x$ erkennen lassen.

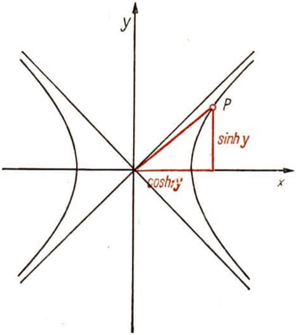
1. $\left.\begin{aligned} \sin x &= -\sin(-x) \\ \sinh x &= -\sinh(-x) \end{aligned}\right\}$ ungerade Funktionen

   $\left.\begin{aligned} \cos x &= \cos(-x) \\ \cosh x &= \cosh(-x) \end{aligned}\right\}$ gerade Funktionen

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

   $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Abb. 1.24.



3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

4. $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

$\frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x; \qquad \frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x$

Beachten Sie bei 2. und 4. den Vorzeichenunterschied gegenüber den entsprechenden Formeln der Winkelfunktionen!

Beweisen Sie die unter 1., 2., 3. *und* 4. *genannten Beziehungen für die Hyperbelfunktionen!*
Anleitung: Gehen Sie auf die Definitionen (30) *und* (31) *zurück!*

Aufgaben

1. Untersuchen Sie für die Kettenlinie, deren analytischer Ausdruck in allgemeiner Form $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ ist, den Einfluß der Konstanten c auf die Form der Kurve!

Anleitung: Behalten Sie den gleichen Argumentbereich bei (z. B. von -6 bis $+6$) und ändern Sie c! Kann c auch negativ werden?

2. Genau wie $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ definiert man:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

a) Drücken Sie $\tanh x$ und $\coth x$ durch e-Funktionen aus!
b) Bilden Sie $\tanh x \cdot \coth x$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den entsprechenden Formeln der Winkelfunktionen!
c) Stellen Sie $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ grafisch dar! Nehmen Sie dabei in wichtigen Punkten die Tangentensteigungen zu Hilfe!
d) Bilden Sie die Ableitungen von $y = \tanh x$ und $y = \coth x$, und vergleichen Sie diese mit $\frac{d(\tan x)}{dx}$ und $\frac{d(\cot x)}{dx}$!

3. Bilden Sie folgende zusammengesetzte Funktionen, drücken Sie sie durch e-Funktionen aus, und untersuchen Sie sie rechnerisch und zeichnerisch! Bilden Sie auch die Ableitungen auf beiden Seiten, und bestätigen Sie dadurch die Richtigkeit ihrer Beziehungen!

a) $\cosh x + \sinh x =$ **b)** $\cosh x - \sinh x =$
c) $(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 =$ **d)** $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 =$

4. Unter welchem Winkel schneidet das Bild der Funktion $y = \sinh x$ die x-Achse?

5. Zeigen Sie, daß

a) die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ jede für sich der Differentialgleichung $y'' + y = 0$;
b) die Funktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ jede für sich der Differentialgleichung $y'' - y = 0$;
c) jede der vier Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ der Differentialgleichung $y^{(4)} - y = 0$ genügen!

1.3.7. Integrale der Exponential- und Logarithmusfunktionen

Da die Ableitung von $y = e^x$ wieder $y' = e^x$ ist, gilt umgekehrt:

(32) $\int e^x\,dx = e^x + C$.

Aus $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$ folgt $\int a^x \ln a\,dx = a^x + C'$ oder

(33) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Die Integrale der Exponentialfunktionen sind also Grundintegrale. Die Integrale der Logarithmusfunktionen sind dagegen keine Grundintegrale wie (32) und (33). Man kann bei den Logarithmusfunktionen aber mit der Methode der partiellen Integration zum Ziele kommen.

$$\int u \cdot v'\,dx = u\,v - \int v \cdot u'\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx \qquad u = \ln x \qquad v' = 1$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \int 1\,dx = x$$

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

(34) $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \quad (x > 0)$.

Mit Hilfe von (20) ergibt sich entsprechend:

$$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x\,dx$$

(35) $\int \log_a x\,dx = x \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{x}{\ln a} + C = \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C \quad (x > 0)$.

Die Formel $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ist gültig für alle rationalen n mit Ausnahme von $n = -1$, da hierbei die nicht definierte Division durch Null notwendig würde. Für $n = -1$ fehlte bisher eine Möglichkeit, das Integral zu berechnen. Diese Lücke kann jetzt durch ein weiteres Grundintegral geschlossen werden, denn aus $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und aus $\frac{d[\ln(-x)]}{dx} = \frac{1}{x}$ für $x < 0$ folgt:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0) .$$

Daraus ergibt sich für alle rationalen n das Grundintegral:

(36) $\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{für } n \neq -1 \\ \ln |x| + C & \text{für } n = -1 . \end{cases}$

Das unbestimmte Integral der algebraischen Funktion $y = x^n$ (n rational) ist also für $n \neq -1$ stets wieder eine Schar algebraischer Funktionen, während im Falle $n = -1$ eine Schar nicht algebraischer Funktionen entsteht.

Auf das Integral $\int \frac{dx}{x}$ lassen sich häufig Integrale mit gebrochenem Integranden von komplizierterer Gestalt zurückführen. Das ist immer möglich, wenn die Zählerfunktion die Ableitung der Nennerfunktion ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\,.$$

Differenziert man nämlich $y = \ln|f(x)|$, so erhält man:

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Diese Beziehung kann mit Hilfe eines unbestimmten Integrals dargestellt werden:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,. \tag{37}$$

Beispiel 5:

$\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \tan x\,dx$ soll berechnet werden.

Dazu wird zunächst das unbestimmte Integral ermittelt. Der Integrand $\tan x$ kann leicht auf die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gebracht werden, denn es gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,.$$

Folglich ergibt sich:

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Für das in der Aufgabe genannte bestimmte Integral erhält man daher:

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \tan x\,dx = -\ln|\cos x|\,\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -\left[\ln|\cos\pi| - \ln\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|\right]$$

$$= -(\ln|-1| - \ln|-0{,}5|) = -(0 - \ln 0{,}5)$$
$$= \ln 0{,}5 = -\ln 2 \approx -0{,}693\,.$$

Auf diese Form (37) können insbesondere alle diejenigen Integrale gebracht werden, bei denen der Integrand eine rationale Funktion mit konstantem Zähler und linearer Nennerfunktion ist:

$$\int \frac{a}{bx + c}\,dx\,.$$

Für $b \neq 0$ erhält man nämlich:

$$\frac{a}{bx+c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{bx+c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

1.3.8. Flächen- und Volumenberechnungen

Aus der Schar der Potenzfunktionen $y = x^n$ für negative Werte von n ist die Potenzfunktion für $n = -1$ die einfachste. Ihre grafische Darstellung (Abb. 1.25.) ergibt eine gleichseitige Hyperbel, deren Äste durch die Punkte $A\ (1;\ 1)$ und $B\,(-1;\ -1)$ verlaufen. Es soll die Fläche A zwischen Kurve und x-Achse in den Grenzen $x_a = 1$ und $x_e = 2, 3, 4, \ldots$ berechnet werden.

Lösung:

$$A = \int\limits_1^{x_e} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Bigg|_1^{x_e} = \ln x_e\,.$$

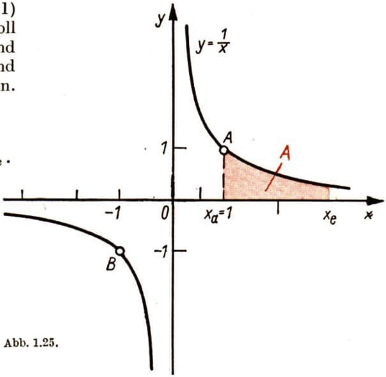


Abb. 1.25.

Es ergibt sich ein interessantes Ergebnis:

Das Flächenstück zwischen der zu $y = \dfrac{1}{x}$ gehörenden Hyperbel und der x-Achse von $x_a = 1$ bis zu einer beliebigen oberen Grenze $x_e > 1$ ist gleich $\ln x_e$. (Abb. 1.26.)

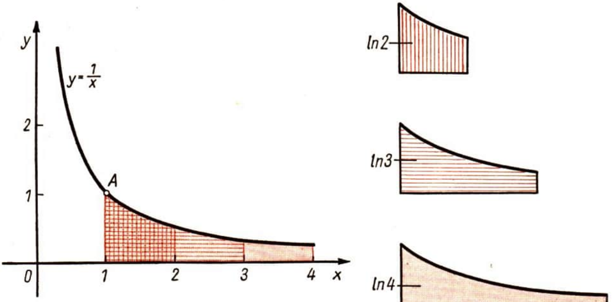


Abb. 1.26.

Beispiel 6:

Durch Drehung der Kettenlinie $y = \cosh x$ um die x-Achse entsteht eine Seilrolle, die so lang sein soll wie ihr kleinster Durchmesser. Wie groß ist das Volumen?
Da der kleinste Durchmesser gleich 2 ist (Abb. 1.27.), reicht die begrenzende Kurve von -1 bis 1.

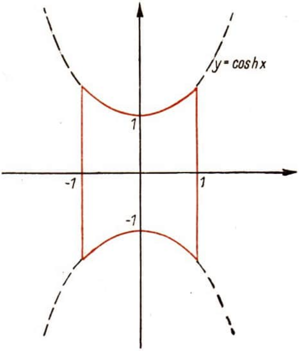


Abb. 1.27.

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (\cosh x)^2\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} (\cosh x)^2\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2\, dx$$

$$V = \frac{1}{2}\pi \int_{0}^{1} (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\, dx\,.$$

Man zerlegt in drei Teilintegrale:

1. $\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int e^z\, dz = \frac{1}{2} e^z + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

   Substitution: $2x = z \qquad dx = \frac{dz}{2}$

2. $\int 2\, dx = 2x + C$

3. $\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2} \int e^z\, dz = -\frac{1}{2} e^z + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$

   Substitution: $-2x = z \qquad dx = -\frac{dz}{2}$

Daraus ergibt sich:

$$V = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[\left(\frac{1}{2} e^2 + 2 - \frac{1}{2} e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^2 + 4 - e^{-2}) \approx \frac{\pi}{4} (7{,}39 + 4 - 0{,}14) = \frac{11{,}25}{4}\pi$$

$$V \approx 2{,}8\,\pi \approx 8{,}8\,.$$

Ergebnis: Das Volumen der Rolle beträgt rund 8,8 Volumeneinheiten.[1]

Die Näherungswerte für e^2, e^{-2} und $2{,}8\pi$ wurden mit Hilfe der Zahlentafel (Beyrodt-Küstner) gewonnen und gerundet. Für die Ermittlung des letzten Wertes wäre auch der Rechenstab nützlich gewesen.

Aufgaben

1. Folgende Integrale sind zu berechnen.

a) $\int\limits_1^3 \left(\frac{1}{x} + x\right) dx$ b) $\int\limits_2^3 (e^x + x^e)\, dx$ c) $\int \left(e^x + e + \frac{e}{x}\right) dx$

d) $\int\limits_0^{\frac{1}{a}} e^{-ax}\, dx$ e) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\, dx$ f) $\int e^x \cdot x\, dx$

g) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{7 - 2x}$ h) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ i) $\int \frac{\sqrt{\pi} \cdot x}{\pi + x^2}\, dx$

k) $\int e^x \sin x\, dx$ l) $\int x^2 e^x\, dx$

2. Es ist die Fläche zu berechnen, die von den durch die folgenden analytischen Ausdrücke gegebenen Funktionsbildern, der x-Achse und den an den angegebenen Stellen zur y-Achse gezogenen Parallelen eingeschlossen wird.

a) $y = \ln x;$ $x_a = \frac{1}{2};$ $x_e = 2$

b) $y = \sinh x;$ $x_a = -1;$ $x_e = 1$

c) $y = 3^x;$ $x_a = 0;$ $x_e = 3$

d) $y = e^{-x};$ $x_a = -\frac{5}{2};$ $x_e = \frac{1}{3}$

e) $y = \lg 3x$ $x_a = \frac{1}{30};$ $x_e = 10$

f) $y = \lg 2x$ $x_a = \frac{1}{4};$ $x_e = 8$

Anleitung: Beachten Sie etwaige Nullstellen der Funktionen im jeweiligen Integrationsintervall!

3. Die durch die folgenden analytischen Ausdrücke gegebenen Funktionsbilder mögen um die angegebene Achse rotieren. Man bestimme jeweils das Volumen des Rotationskörpers in den genannten Grenzen.

	$y = f(x)$	Rotation um	Abszissen der Grenzpunkte
a)	$y = e^x$	x-Achse	1...3
b)	$y = e^x$	y-Achse	1...3
c)	$y = \sinh x$	x-Achse	2...4
d)	$y = \lg x$	y-Achse	0,5...5

4. Bestätigen Sie die Richtigkeit der hergeleiteten Integralformeln durch Differenzieren!

1.3.9. Zur Wiederholung und Übung

1. Worin besteht der Unterschied zwischen einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion
   a) in bezug auf ihre analytischen Ausdrücke,
   b) in bezug auf die Funktionsbilder,
   c) in bezug auf ihre Ableitungen?

2. Wie hängen Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit den arithmetischen und geometrischen Folgen zusammen?

3. Exponentialkurven und Logarithmenkurven zeigen asymptotisches Verhalten. Erläutern und begründen Sie diese Behauptung!

4. Welchen Winkel schließen das Bild der natürlichen Logarithmusfunktion und das der dekadischen Logarithmusfunktion in ihrem Schnittpunkt miteinander ein?

5. Was versteht man unter dem Modul zweier Logarithmensysteme? Bei welchen Aufgaben spielt er eine Rolle?

6. Aufschlagübungen

a) $\ln 27{,}13$;	$\ln 0{,}882$;	$\ln 1{,}225$;	$\ln 0{,}078$
b) $\ln 70$;	$\ln 7$;	$\ln 0{,}07$;	$\ln 0{,}001$
c) $\ln x = 0{,}2245$;	$\ln x = 6{,}1600$;	$\ln x = -2{,}45$;	$\ln x = 0{,}3355 - 2$
d) $\ln x = 1{,}8540$;	$\ln x = -2$;	$\ln x = 3$;	$\ln x = 0{,}2500 - 1$

7. Berechnen Sie folgende Werte!

a) $\ln 7{,}2^2$;	$\ln \sqrt{13}$;	$\ln 7 \cdot \sqrt[3]{55}$;	$\ln \dfrac{35{,}2 \cdot 7{,}72^2}{0{,}855}$
b) ${}^{10}M_2$;	${}^{e}M_6$;	${}^{5}M_3$;	${}^{7,5}M_{2,5}$
c) $\log_3 16{,}4$;	$\log_2 0{,}5$;	$\log_5 825$;	$\log_{12} 1522$
d) $\log_2 x = 5$;	$\log_3 x = -8$;	$\log_5 x = 68{,}5$;	$\log_4 x = 0{,}2245 - 2$

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

   a) $(3^5)^x = 9{,}656$ b) $7{,}943^{\frac{1}{x}} = 1000$ c) $1{,}76^{\frac{1}{x}} = \sqrt[5]{5}$ d) $\left(2\,\frac{1}{2}\right)^x = 15\,\frac{5}{8}$

9. Milzbrandbakterien teilen sich durchschnittlich alle 40 Minuten in zwei Teile.
   a) Wieviel Bakterien können maximal aus einer Bakterie in zwei Tagen entstehen?
   b) Wann können frühestens 1 Million Bakterien vorhanden sein?

10. Differenzieren Sie!

a) $y = e^{2x} \sin^2 x$	b) $y = \sqrt{e^{ax}}$	c) $y = a^{\tan x}$
d) $y = \ln \frac{1}{x} - \ln x$	e) $y = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$	f) $y = \ln \tan x$
g) $y = e^{\sin^2 x}$	h) $y = \lg\left(\dfrac{a}{a + x}\right)$	i) $y = \cos x \cdot e^{\sin x}$
k) $y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x$	l) $y = (x)^{\frac{1}{x}}$	m) $y = (a + b\,x)^{\frac{1}{x}}$

(a und b sind konstant.)

11. Der Rezipient einer Stiefelverdünnungspumpe faßt 8100 cm³, der Pumpenzylinder („Stiefel") 540 cm³.

a) Welchen Bruchteil der Ausgangsdichte macht die Luftdichte nach 12 Kolbenzügen aus?

b) Wieviel Kolbenzüge sind erforderlich, wenn die Dichte nur noch 5% des Ausgangswertes betragen soll?

c) Wie würde das Gesetz lauten, wenn die Verdünnung kontinuierlich, z. B. mit einer Diffusionspumpe, durchgeführt würde?

12. Untersuchen Sie folgende Funktionen, und entwerfen Sie die grafischen Darstellungen!

a) $y = \frac{x^2}{e^x}$ b) $y = e^{2x} - e^x$ c) $y = \frac{x}{\ln x}$ d) $y = x^{1 - \ln x}$

e) $y = e^{-x} \sin x$ f) $y = 0{,}3\, e^{-0{,}3x} \sin \frac{x}{2}$

13. Integrieren Sie!

a) $\int e^{mx}\, dx$ b) $\int \frac{1}{r + sx}\, dx$ c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$

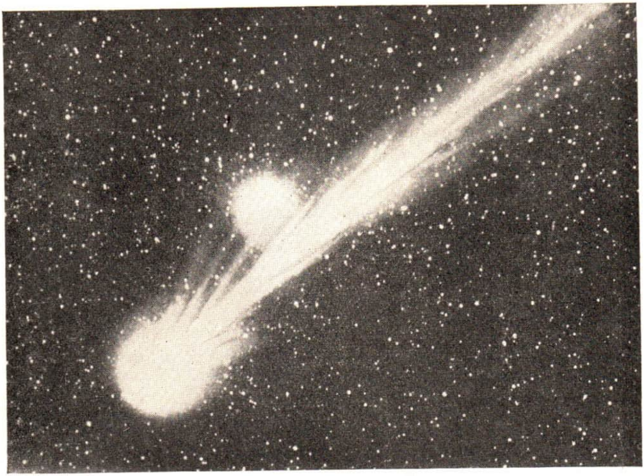
d) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{e^x + a}$ e) $\int \frac{\sin x}{a + b \cos x}$ f) $\int \frac{x^{n-1}}{a + b x^n}\, dx$

(m, a, b, r und s sind konstant.)

14. Untersuchen Sie folgende Funktionen!

a) $y = 2 \sinh x + \cosh x$ b) $y = \frac{1}{2} \sinh x - \cosh x$ c) $y = \frac{1}{2} \cosh x - \sinh x$

Wie sehen die grafischen Darstellungen aus?
Wie groß sind die von diesen Funktionsbildern, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse im Abstand $x_a = 2$ und $x_b = 5$ begrenzten Flächen? Wie groß sind die Volumina der Drehkörper in den gleichen Grenzen, die bei Rotation der Kurven α) um die x-Achse, β) um die y-Achse entstehen?



2. Kegelschnitte

Zu den einstmals so rätselhaften und auch heute noch interessanten Objekten des gestirnten Himmels gehören die Kometen. Oft tauchen sie unerwartet auf, bewegen sich dann auf vollkommen ungewöhnlichen Bahnen am Himmel, um ebenso plötzlich wieder zu verschwinden. Das NEWTONsche Gravitationsgesetz gab die Grundlage für die Möglichkeit einer Bahnbestimmung und damit für das Verständnis der räumlichen Bewegung. Die Kometen gehören zu unserem Sonnensystem, sie gehorchen ebenfalls den KEPLERschen Gesetzen. Die Bahnen, auf denen sie sich bewegen, sind Kegelschnitte, bei denen die elliptischen Bahnen mit einer numerischen Exzentrizität nahe 1 überwiegen. Überdies werden Kometenbahnen, die den Bahnen der kleinen Planeten ähnlich sind, beobachtet. Darüber hinaus gibt es aber auch Kometen, die sich auf parabolischen oder hyperbolischen Bahnen bewegen. Oftmals sind derartige Bahnen durch die störenden Einflüsse der großen Planeten aus elliptischen hervorgegangen.
Die Eigenschaften der verschiedenen Kegelschnitte untersucht man mit Hilfe der darstellenden und der analytischen Geometrie.

2.1.1. Aufgaben zur Wiederholung und Einführung

1. Wie kann man im Grundriß-Aufriß-Bild die wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur bestimmen? Wie verfährt man insbesondere bei Schnittfiguren von Körpern und Ebenen?
2. Was versteht man unter perspektiv-affinen Figuren? Wie kann man diese geometrische Verwandtschaft bei der Konstruktion der wahren Größe und Gestalt **a)** des Schrägrisses einer ebenen Figur, **b)** der Schnittfigur einer Ebene und eines Körpers im Grundriß-Aufriß-Verfahren ausnutzen?
3. Inwiefern kann man den Kreiszylinder als Grenzfall des Kreiskegels ansehen? Anleitung: Benutzen Sie zur Beschreibung dieses Grenzfalls den Achsenschnitt und dabei den Winkel an der Kegelspitze! Beantworten Sie die Frage insbesondere für die geraden Körper!

2.1.2. Zylinder, Kegel, Kugel

Wird ein Punkt einer Geraden längs einer ebenen in sich geschlossenen Kurve, der **Leitkurve**, so bewegt, daß die Gerade im Raum immer parallel zu sich verschoben wird und nicht mit der Ebene der Leitkurve zusammenfällt, so beschreibt sie den Mantel eines Zylinders (Abb. 2.1.); wenn sie durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene der Leitkurve geht, beschreibt sie den Mantel eines Kegels (Abb. 2.2.).

Abb. 2.1.

Abb. 2.2.

Die Mantellinien gehören beim Zylinder einem Parallelgeradenbündel, beim Kegel einem Zentralgeradenbündel an. Der gemeinsame Schnittpunkt S im Kegelfall heißt Kegelspitze.
Zylindrische Körper werden durch die Mantelfläche, die von der Leitkurve umschlossenen Fläche (Grundfläche) und durch eine zweite, im allgemeinen dazu parallele Fläche (Deckfläche) begrenzt.
Kegelförmige Körper werden entsprechend neben der Mantelfläche noch durch die Grundfläche und die Spitze oder durch die Grundfläche und eine zweite, im allgemeinen zu ihr parallele Deckfläche begrenzt. Liegen die zueinander parallele Grund- und Deckfläche auf derselben Seite der Kegelspitze, entsteht ein Kegelstumpf, liegen sie auf verschiedenen Seiten, ergibt sich ein Doppelkegel.
Im folgenden soll zunächst ausschließlich der Sonderfall des geraden Kreiszylinders bzw. Kreiskegels betrachtet werden.
Die Kugel entsteht als Rotationskörper bei der Drehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser. Jeder Schnitt, der einen Durchmesser enthält, ergibt einen größten Kugelkreis (Großkreis oder Hauptkreis). Jeder dazu parallel geführte Schnitt ergibt einen Kleinkreis oder Nebenkreis.
Die Grundlage des Projektionsbildes von Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel ist das Projektionsbild des Kreises.

2.1.3. Die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises

Die geschlossene Kurve, die bei (senkrechter oder schräger) Parallelprojektion eines Kreises (in allgemeiner Lage) entsteht, heißt Ellipse.

Man konstruiert eine Ellipse punktweise, indem man einen Kreis im Grundriß-Aufriß-Verfahren abbildet und aus der wahren Gestalt der Figur (eben dem Kreis) rückwärts das Projektionsbild konstruiert. Die Kreisebene möge senkrecht zur Aufrißtafel verlaufen und die wahre Gestalt der Figur in der um ihre Grundrißspur in die Grundrißebene umgeklappten Kreisebene sichtbar sein (Abb. 2.3.). Der Aufriß des Kreises ist dann eine Strecke von der Länge des Kreisdurchmessers. Der Grundriß wird laut Definition eine Ellipse, die punktweise konstruiert wird. Aus der Konstruktion entnimmt man folgende Tatsachen:

1. **Ellipse und Kreis** sind **perspektiv-affin verwandt.**
2. Die Ellipse besitzt zwei senkrecht zueinander verlaufende Symmetrieachsen ($A'B'$ und $C'D'$ in Abb. 2.3.). Infolgedessen ist sie auch zentralsymmetrisch und hat einen Mittelpunkt (M' in Abb. 2.3.).
3. In Richtung der Symmetrieachsen liegen der größte ($A'B'$) und der kleinste ($C'D'$) Durchmesser.
   Festsetzung: **Diese Durchmesser heißen die Achsen der Ellipse, ihre Endpunkte die Scheitel, und zwar:**
   $A'B'$: Große Achse, Hauptachse;
   ihre Endpunkte: Hauptscheitel;
   $C'D'$: Kleine Achse, Nebenachse;
   ihre Endpunkte: Nebenscheitel.

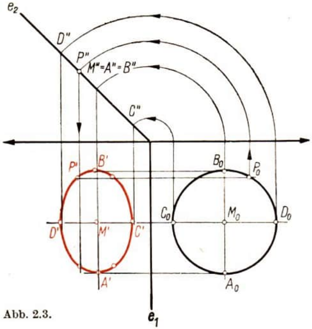


Abb. 2.3.

4. Jedem Durchmesser des Kreises ist ein bestimmter Durchmesser der perspektiv-affin verwandten Ellipse zugeordnet.
   Festsetzung: **Zwei Ellipsendurchmesser, die zueinander senkrechten Kreisdurchmessern zugeordnet sind, heißen konjugierte Durchmesser.**
   Diese konjugierten Durchmesser verlaufen im allgemeinen nicht rechtwinklig zueinander.
5. **Haupt- und Nebenachse sind die beiden einzigen senkrecht aufeinander stehenden konjugierten Durchmesser einer Ellipse.**

Die Konstruktion der Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises geht aus von einem Kreis, einer beliebigen Geraden als Affinitätsachse a und einer beliebigen Richtung, in der die Affinitätsstrahlen verlaufen (Abb. 2.4.). Ein Ellipsenpunkt $\overline{X}$ kann belie-

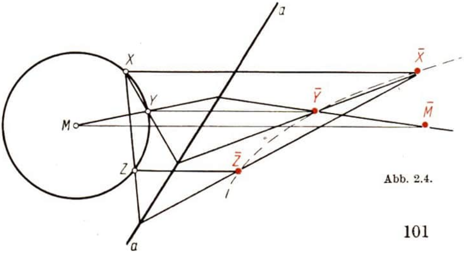


Abb. 2.4.

big gewählt werden, alle anderen liegen dann fest.

Von besonderer Bedeutung ist dabei die Konstruktion der Ellipsenachsen. Die Abbildung 2.5. dient zur Erläuterung der Vorüberlegung, die zum Konstruktionsgang führt: Voraussetzung ist, daß (vgl. Abb. 2.4.) der Mittelpunkt $\overline{M}$ der Ellipse konstruiert wurde. Um jetzt die senkrecht zueinander verlaufenden Ellipsenachsen als konjugierte Durchmesser zu konstruieren, müssen die zugeordneten, ebenfalls senkrecht zueinander verlaufenden Kreisdurchmesser zu Hilfe genommen werden. Das erfordert die Konstruktion eines Hilfskreises, der durch M und $\overline{M}$ geht und der durch die Affinitätsachse a als Durchmesser halbiert wird. Die Bestimmungslinien für seinen Mittelpunkt H sind demnach die Affinitätsachse a und die Mittelsenkrechte zu $M\,\overline{M}$. Durch seine Schnittpunkte mit der Affinitätsachse a und durch $\overline{M}$ verlaufen die gesuchten Ellipsenachsen. Die Scheitel $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ sind die den Endpunkten A, B, C, D der zugehörigen Kreisdurchmesser zugeordneten Ellipsenpunkte, die man mit Hilfe der Affinitätsstrahlen konstruieren kann.

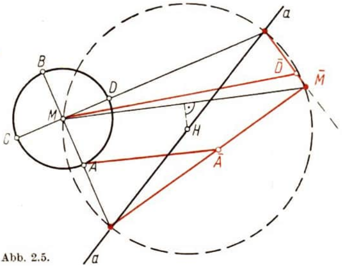


Abb. 2.5.

Wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn die Neigung der Schnittebene in der Abbildung 2.3. geändert wird? Beschreiben Sie diese Gestaltsänderung durch eine Aussage über die Längen der Achsen!

Bei beliebiger Lage der Ebene des Kreises zur Grundriß- und Aufrißtafel ergeben sich als Grundriß und Aufriß Ellipsen, deren Hauptachsen die Länge des Kreisdurchmessers haben, während die Längen der Nebenachsen von der Lage des Kreises zu den Rißtafeln abhängen.

Begründung:

Bei allgemeiner Lage des Kreises gibt es stets einen Kreisdurchmesser in Frontlage zur Grundrißtafel und einen anderen in Frontlage zur Aufrißtafel, die in natürlicher Größe abgebildet werden. Diese sind also die größten Ellipsendurchmesser, d.h. die Hauptachsen. Alle anderen Kreisdurchmesser verlaufen geneigt zur jeweiligen Bildtafel, werden also verkürzt abgebildet. Da aber bei senkrechter Parallelprojektion für solche Strecken stets $q < 1$ gilt, ergeben sich aus diesen Kreisdurchmessern Ellipsendurchmesser als Bilder, die alle kleiner als der Kreisdurchmesser sind.

Die standardisierten axonometrischen Verfahren sind ebenfalls Verfahren der senkrechten Parallelprojektion, so daß für sie die gleichen Gesetze gelten. Man legt den Kreis gewöhnlich in die eine Dreibeinebene, den Mittelpunkt in den Dreibeinscheitel. In Richtung der entsprechenden Achsen des axonometrischen Achsenkreuzes liegen dann zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse. Die Hauptachse der Ellipse verläuft senkrecht zur dritten axonometrischen Achse als Bild desjenigen Kreisdurchmessers, der sich in Frontlage zur Bildtafel befindet. Sie ist auch bei der axonometrischen Projektion gleich dem Durchmesser des abgebildeten Kreises. Weitere Ellipsenpunkte findet man durch Hilfssehnen, die parallel zu einer der Achse verlaufen. Dabei sind die Verkürzungen genau zu berücksichtigen. Es empfiehlt sich, mit einer Vorlage zu arbeiten (Abb. 2.6. und 2.7.).

Halten Sie eine Kreisscheibe aus Karton im Sonnenlicht vor eine Papptafel oder ähnliches als Projektionstafel! Beobachten Sie den Schatten bei verschiedenen Lagen der Kreisscheibe zur Projektionstafel und bei verschiedener Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen!

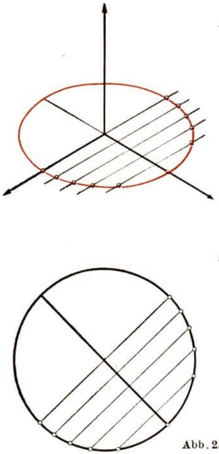


Abb. 2.6.

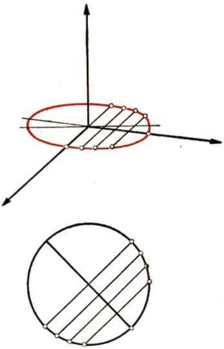


Abb. 2.7.

Bei jeder schrägen Parallelprojektion sind Vorlage und Schrägbild perspektiv-affin verwandt. Ist das Urbild ein Kreis, muß der Schrägriß die dazu affin verwandte Figur, also eine Ellipse werden. Die Konstruktion erfolgt punktweise, wobei die Kreispunkte durch Halbsehnen als Hilfslote an die durch den Kreismittelpunkt gelegte Projektionsachse angeschlossen werden. Die Lote werden unter dem Winkel α verzerrt und mit q verkürzt als Halbsehnen der Ellipse eingetragen. Zeichenvorteile bietet die Benutzung der Affinitätsstrahlen $\left(\text{Abb. 2.8. für } \alpha = 30°;\ q = \frac{2}{3}\right)$. Der Kreisdurchmesser in Frontlage AB wird auch bei der schrägen Parallelprojektion in wahrer Größe abgebildet. Da aber bei schräger Parallelprojektion im Gegensatz zur senkrechten gewisse Strecken in allgemeiner Lage auch vergrößert abgebildet werden können, ergeben sich diesmal als Bilder der übrigen Kreisdurchmesser auch Ellipsendurchmesser, die größer als der Durchmesser des abgebildeten Kreises sind (z. B. $M\bar{R}$ in Abb. 2.8.). Der größte unter ihnen ist die Hauptachse der Ellipse.

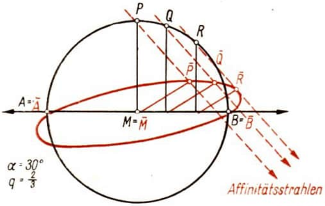


Abb. 2.8.

Jedem Ellipsendurchmesser ist ein bestimmter Kreisdurchmesser zugeordnet. Ein beliebiger Kreisdurchmesser sei durch den Winkel δ gegen die Projektionsachse festgelegt

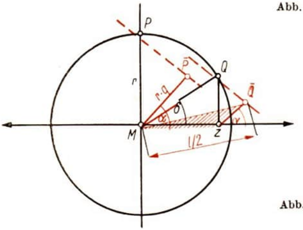


Abb. 2.9.

(Abb. 2.9.). Die Länge l des zugeordneten Ellipsendurchmessers läßt sich dann wie folgt berechnen, wenn die Verkürzung q und die Verzerrung α zugrunde gelegt wird.

Im Dreieck $M\overline{Q}Z$ gilt nach dem Kosinussatz:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{\overline{MZ}^2 + \overline{Z\overline{Q}}^2 - 2 \cdot \overline{MZ} \cdot \overline{Z\overline{Q}} \cdot \cos(180° - \alpha)}\,.$$

Wegen $\overline{MZ} = r \cdot \cos\delta$ und $\overline{Z\overline{Q}} : \overline{ZQ} = \overline{M\overline{P}} : \overline{MP}$ oder $\overline{Z\overline{Q}} = q \cdot r \sin\delta \left(\text{mit } q = \frac{\overline{M\overline{P}}}{\overline{MP}}\right)$ folgt:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{r^2 \cos^2\delta + q^2 r^2 \sin^2\delta + 2\, r^2 q \sin\delta \cos\delta \cos\alpha}$$

$$\frac{l}{2} = r\sqrt{\cos^2\delta + q^2 \sin^2\delta + q \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\,\delta}\,.$$

Um die Lage desjenigen Kreisdurchmessers zu finden, der in die Hauptachse bzw. Nebenachse der Ellipse abgebildet wird, muß ermittelt werden, für welchen Winkel δ die Durchmesserlänge l ein Extremum wird. Mit l wird offensichtlich auch

$$\frac{l^2}{4} = f(\delta) = r^2 (\cos^2\delta + q^2 \sin^2\delta + q \cos\alpha \cdot \sin 2\,\delta)$$

ein Extremum. Denn wegen $l = 2\sqrt{f(\delta)}$ ergibt sich $l' = \frac{f'(\delta)}{\sqrt{f(\delta)}}$, und $l' = 0$ hat $[f(\delta) \neq 0$ vorausgesetzt$]$ $f'(\delta) = 0$ zur Folge.

Zur Bestimmung der lokalen Extremwerte von l wird deshalb die erste Ableitung von $f(\delta)$ gleich Null gesetzt, und die dieser Bedingung genügenden Winkel δ_e werden bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(\delta) &= r^2 [2 \cos\delta \cdot (-\sin\delta) + q^2 \cdot 2 \sin\delta \cos\delta + q \cos\alpha \cdot \cos 2\,\delta \cdot 2] \\ &\quad - \sin 2\,\delta_e + q^2 \cdot \sin 2\,\delta_e + 2\, q \cos\alpha \cdot \cos 2\,\delta_e = 0 \\ (1 - q^2) \sin 2\,\delta_e &= 2\, q \cos\alpha \cdot \cos 2\,\delta_e \\ \tan 2\,\delta_e &= \frac{2 q \cos\alpha}{1 - q^2} \left(\delta_e \neq (k+1)\frac{\pi}{4}\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots\right). \end{aligned}$$

Da die Tangensfunktion eine Periode von 180° aufweist, ergeben sich aus dieser Bedingungsgleichung stets zwei Winkel: $2\,\delta_e$ und $2\,\delta_e + 180°$, bzw. δ_e und $\delta_e + 90°$. Jetzt muß gezeigt werden, daß $f''(\delta)$ für δ_e und $\delta_e + 90°$ verschieden von Null ist. Zugleich kann dabei entschieden werden, welcher der beiden durch δ_e bzw. $\delta_e + 90°$ bestimmten Kreisdurchmesser die Hauptachse und welcher die Nebenachse ergibt. Aus

$$f''(\delta) = r^2 [2\,(q^2 - 1) \cos 2\,\delta - 4\, q \cos\alpha \sin 2\,\delta]$$

folgt für $f''(\delta_e) \neq 0$ die Bedingung

$$2\,(q^2 - 1) \cos^2 2\,\delta_e \neq 4\, q \cos\alpha \sin 2\,\delta_e$$

$$\tan 2\,\delta_e \neq \frac{q^2 - 1}{2 q \cos\alpha} \left((\delta_e \neq (k+1)\frac{\pi}{4}\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Wegen $\tan 2\,\delta_e = \frac{2\, q \cos\alpha}{1 - q^2}$ ist aber die Bedingung sicher erfüllt.

Beispiel 1:

Für das in Abbildung 2.8. zugrunde gelegte Verfahren $\left(\alpha = 30°; q = \frac{2}{3}\right)$ ergibt sich:

$$\tan 2\,\delta_e = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}078$$

$$2\,\delta_e \approx 64° \text{ bzw. } 244°, \qquad \delta_e \approx 32° \text{ bzw. } 122°.$$

$$f''(32°) = r^2\left[2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \cos 64° - \frac{8}{3}\cos 30° \cdot \sin 64°\right]$$

$$\approx r^2\left(-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2 = \left(-\frac{5}{9} - 2\right) < 0$$

$$f''(122°) \approx r^2\left[2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \cos 244° - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin 244°\right]$$

$$= r^2\left[-\frac{10}{9}\cdot(-\cos 64°) - \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot(-\sin 64°)\right]$$

$$\approx r^2\left(+\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$f''(122°) \approx r^2\left(\frac{5}{9} + 2\right) > 0.$$

Der unter 32° geneigte Kreisdurchmesser ergibt also einen Ellipsendurchmesser von maximaler Länge (Hauptachse), der unter 122° verlaufende einen solchen von minimaler Länge (Nebenachse).

Beispiel 2:

Für die Abbildung in Kavalierperspektive $\left(\alpha = 45°; q = \frac{1}{2}\right)$ ergibt sich entsprechend:

$$\tan 2\,\delta_e = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\cos 45°}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}943$$

$$2\,\delta_e \approx 43° \text{ bzw. } 223°$$

$$\delta_e \approx 22° \text{ (Hauptachse) bzw. } 112° \text{ (Nebenachse) (Abb. 2.10.)}.$$

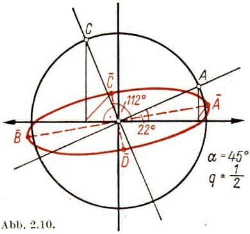


Abb. 2.10.

Bei jeder schrägen Parallelprojektion eines Kreises gibt es zwei Kreisdurchmesser, die in die Haupt- und Nebenachse der Ellipse abgebildet werden. Ihre Winkel gegen die Projektionsachse (δ_e) hängen von der gewählten Verkürzung q und Verzerrung α ab nach der Beziehung

$$\tan 2\,\delta_e = \frac{2\,q\cos\alpha}{1 - q^2}.$$

2.1.4. Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel in Parallelprojektion

Die Darstellung von Kreiszylinder und Kreiskegel im Grundriß-Aufriß-Verfahren bietet bei einfacher Lage keine Schwierigkeiten (Abb. 2.11.).
Wenn bei allgemeiner Lage zu den Rißtafeln oder in axonometrischer Darstellung bzw. im Schrägriß die Grundkreise als Ellipsen abgebildet werden, erfordert die Vervollständigung des Bildumrisses die Zeichnung zweier Tangenten an die Ellipsen. Da deren exakte Konstruktion schwierig und zeitraubend ist, begnügt man sich in der Praxis mit dem freien Zeichnen der Tangenten mit Hilfe eines Lineals nach Augenmaß. Im übrigen wird stets vom Grundkreis ausgegangen, die ihm zugeordnete Ellipse gezeichnet und der Körper darauf aufgebaut (Abb. 2.12. und 2.13.).

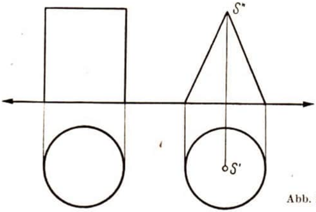


Abb. 2.11.

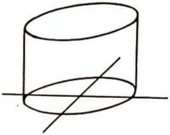


Abb. 2.12.

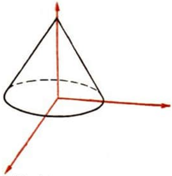


Abb. 2.13.

Fangen Sie den vom Sonnenlicht erzeugten Schatten einer Kugel (Ball, Spielmurmel o.ä.) auf einer Papptafel auf und verändern Sie deren Lage so, daß die Sonnenstrahlen einmal senkrecht (orthogonale Parallelprojektion) und dann unter beliebigen Einfallswinkeln (schräge Parallelprojektion) auf die Tafel treffen!

Beobachten Sie die Gestalt des Schattens, und halten Sie seine Form, besonders bei sehr schrägem Lichteinfall, durch Umfahren mit dem Bleistift fest!

Man entnimmt dadurch der Anschauung:

Das Bild einer Kugel ist bei senkrechter Parallelprojektion ein Kreis, bei schräger eine Ellipse.

Die Projektionsbilder der Kugel im Grundriß-Aufriß-Verfahren entbehren jeder Anschaulichkeit. Um diese zu verbessern, ist es üblich, auf der Oberfläche der Kugel nach Art des Gradnetzes der Erde einige Groß- und Kleinkreise mit zu zeichnen, vor allem den *Äquator* und die *Pole*. Bringt man im Grundriß-Aufriß-Verfahren dabei den Äquator in einfache Lage (Front- bzw. Tiefenlage) zu den Rißtafeln, ergibt sich noch keine wesentliche Verbesserung der Anschaulichkeit (Abb. 2.14.). Erst wenn man die Kugel kippt, d. h. den Äquator in allgemeine Lage zu den Rißtafeln bringt, ergeben sich Vorteile für die räumliche Vorstellung. Die richtige Lage der Pole

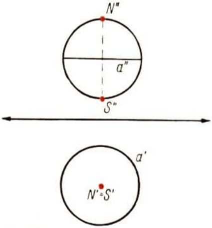


Abb. 2.14.

bzw. die Gestalt der Äquatorellipse ergibt sich dabei aus dem Kreuzriß (Abb. 2.15.).
Bei den axonometrischen Darstellungen wird gewöhnlich der Äquator in die eine Dreibeinebene gelegt und zunächst konstruiert. Die Pole liegen dann auf der dritten (lotrechten) Achse. Dabei ist die Beachtung der Verkürzungen wichtig. Da es sich bei den axonometrischen Projektionsverfahren um senkrechte Parallelprojektionen handelt, muß der Kugelumriß im Bild ein Kreis in natürlicher Größe werden, da er das Abbild desjenigen Kugelgroßkreises ist, der sich in Frontlage zur Bildtafel befindet. Die Abbildung 2.16. zeigt das isometrische Bild einer Kugel.

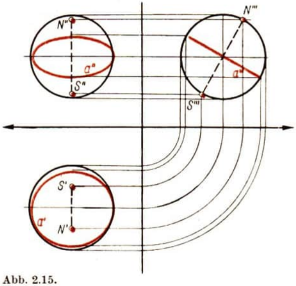


Abb. 2.15.

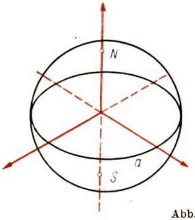


Abb. 2.16.

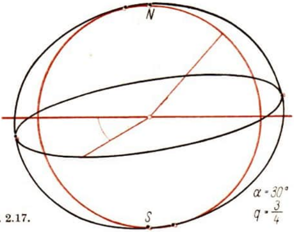


Abb. 2.17.

Bei der Darstellung der Kugel in schräger Parallelprojektion (Abb. 2.17.) wird zunächst der Schrägriß des Äquators gezeichnet. Die senkrecht über bzw. unter dem Mittelpunkt der Äquatorebene liegenden Pole erscheinen in wahrer Entfernung vom Mittelpunkt. Durch sie verläuft der Großkreis, der in Frontlage zur Bildtafel steht; er wird jetzt als weitere Zeichenhilfe eingetragen. Dieser Kreis und der Schrägriß des Äquators müssen nun von der Umrißellipse umschlossen werden. Diese wird in der Praxis meist aus freier Hand nach Augenmaß eingetragen, da ihre exakte Konstruktion schwierig ist.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie zu dem in der Abbildung 2.3. im Grund- und Aufriß dargestellten Kreis den Kreuzriß!

2. Zeichnen Sie Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Kreises, dessen Ebene die folgenden Lagen hat!

   a) Senkrecht zu π_2; Neigungswinkel gegen π_1: 30°
   b) Senkrecht zu π_1; Neigungswinkel gegen π_2: °45
   c) Senkrecht zu π_1 und π_2
   d) Halbierungsebene des I. Quadranten
   e) Parallel zu π_1
   f) Parallel zu π_2

3. Gegeben ist ein Kreis. Zeichnen Sie die dazu affine Ellipse unter folgenden Bedingungen!

	Affinitätsachse a	Affinitätsstrahlen
a)	außerhalb des Kreises	unter 45° zu a
b)	außerhalb des Kreises	senkrecht zu a
c)	Tangente des Kreises	beliebig
d)	beliebige Sekante	unter 60° zu a
e)	Sekante durch Mittelpunkt	senkrecht zu a

4. Begründen Sie,

a) daß Ellipse und Kreis perspektiv-affin verwandt sind;
b) daß die Ellipse zentral-symmetrisch ist;
c) daß jedem Durchmesser des Kreises ein bestimmter Durchmesser der perspektiv-affinen Ellipse zugeordnet ist!

5. Beweisen Sie den Satz auf Seite 102 mit Hilfe des Satzes von Seite 105!
Anleitung: Die senkrechte Parallelprojektion (Grundriß-Aufriß-Verfahren) ist der Grenzfall der schrägen für $q = 0$.

6. Sobald nach dem Satz von Seite 105 der Winkel δ_e bestimmt worden ist, kann man auch nach Abbildung 2.9. im Dreieck $MZ\overline{Q}$ durch $\sphericalangle\, \overline{Q}MZ$ die Lage der Ellipsenachse gegen die Projektionsachse und durch $\overline{M\overline{Q}} = \frac{l}{2}$ ihre Länge l berechnen. Führen Sie diese Rechnung durch für

a) $\alpha = 30°$, $q = \frac{2}{3}$; **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ (Kavalierperspektive);
c) $q = 0$ (senkrechte Parallelprojektion); **d)** allgemein $(\alpha; q)$!

7. Ein Senklot besteht aus einem zylindrischen Mittelstück (Höhe gleich Halbmesser), auf dessen einer Seite eine Halbkugel, auf dessen anderer Seite ein Kegel (Höhe gleich Durchmesser) aufgesetzt ist. Zeichnen Sie

a) das Grundriß-Aufriß-Bild, **b)** den Schrägriß in Kavalierperspektive,
c) das isometrische, **d)** das standardisierte dimetrische Projektionsbild!
e) Welche Masse hat das Lot (Durchmesser 30 mm; Material: Messing; $\varrho = 8{,}3 \text{ g cm}^{-3}$)?

8. Zur Herleitung der Formel für das Kugelvolumen mit Hilfe des CAVALIERIschen Satzes vergleicht man eine Halbkugel mit dem Restkörper, der entsteht, wenn aus einem Zylinder von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe wie die Halbkugel ein Kegel ausgebohrt wird. Zeichnen Sie ein Bild dieser Körper nach den in Aufgabe 7 genannten Verfahren!

9. Stellen Sie folgende Gegenstände nach den unter Aufgabe 7 genannten Verfahren dar! Wählen Sie dazu selbst jeweils einen geeigneten Maßstab! Berechnen Sie, soweit angegeben, Volumen (V), Masse (m), Oberfläche (O) oder Dichte (ϱ)!

a) Zementrohr; 80 cm lang; 12,5 cm lichter Durchmesser; 5 cm Wanddicke; $\varrho = 2{,}2 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ (V; m)
b) Rohling einer Sechskantmutter (V; m) (Maße und Material selbst feststellen!)
c) Rohling einer Sechskantschraube (V; m) (Maße und Material selbst feststellen!)

d) Körnerspitze, bestehend aus einem 90 mm langen zylindrischen Mittelstück (Durchmesser: 80 mm); einer kegelförmigen Spitze (Öffnungswinkel 90°); einem Kegel 1:10 als Schaft (Verjüngung bis auf 60 mm Durchmesser), Material: Stahl mit $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg\ dm^{-3}}$ $(V; m; O)$

e) Axial zylindrisch ausgebohrter Kegel 1:6; großer Durchmesser 70 mm; Länge 90 mm; Bohrungsdurchmesser 40 mm. Material: Aluminium mit $\varrho = 2{,}7\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$ $(V; m; O)$

f) Stahlbolzen: Länge 120 mm; Durchmesser 30 mm; an beiden Enden halbkugelförmig eingeschliffen $(V; m; O)$

g) Zwirnrolle $(V; \varrho)$ (Maße selbst feststellen, Rolle abwägen!)

h) Halbkugel mit einem zur Kreisebene parallelen Schnitt I, der das Halbkugelvolumen halbiert, und einem Schnitt II, der die Halbkugeloberfläche halbiert ($d = 6$ cm)

10. a) Oft findet man Darstellungen der Erdkugel mit Polen und Äquator ähnlich der in Abbildung 2.18. wiedergegebenen. Kritisieren Sie diese Zeichnung!

b) Wie muß das Projektionsbild aussehen, wenn N und S auf dem Umriß liegen sollen?

c) Wie muß es aussehen, wenn der Äquator a als Ellipse sichtbar sein soll?

11. Zeichnen Sie die Erdkugel mit Polen und Äquator

a) in senkrechter Parallelprojektion, Erdachse senkrecht zur Grundrißtafel,

b) in isometrischer Projektion,

und versuchen Sie, die die Deutsche Demokratische Republik begrenzenden Breitenkreise sowie den Breitenkreis Ihres Wohnorts einzutragen!

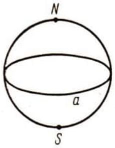


Abb. 2.18.

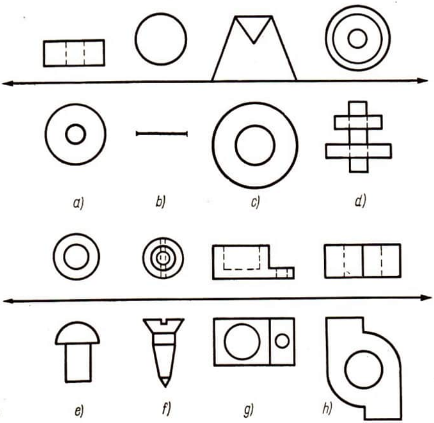


Abb. 2.19.

12. Was für Gebilde sind durch obige Grundriß-Aufriß-Bilder dargestellt (Abb. 2.19.)? Zeichnen Sie jeweils ein anschauliches Projektionsbild, und wechseln Sie dabei zwischen den beiden axonometrischen Verfahren und dem Schrägbildverfahren ab!

2.1.5. Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einer Ebene

Ein (gerader oder schiefer) Kreiszylinder wird von einer Ebene, die nicht parallel zur Grundfläche und nicht parallel zur Achse verläuft, in einer Ellipse geschnitten.

Begründung:

Faßt man die schneidende Ebene als Projektionsebene und die Mantellinien des Zylinders als Projektionsstrahlen auf, so stellt die in der Schnittebene entstehende Figur das schräge Parallelprojektionsbild des Grundkreises des Zylinders dar. Die schräge Parallelprojektion eines Kreises ergibt aber nach Definition stets eine Ellipse.

Die Konstruktion der beim Schnitt entstehenden Ellipse in wahrer Größe und Gestalt erfolgt im Grundriß-Aufriß-Verfahren durch Umlegen der schneidenden Ebene um eine ihrer Spuren. Die Abbildung 2.20. zeigt die Konstruktion für einen geraden Kreiszylinder und eine senkrecht zur Aufrißtafel verlaufende Schnittebene E.

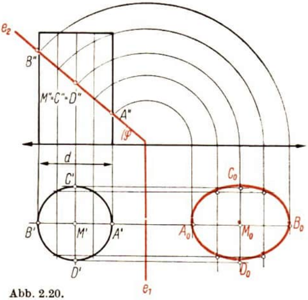


Abb. 2.20.

Zur Konstruktion werden soviele Hilfsmantellinien benutzt, wie für die einwandfreie Zeichnung der Ellipse in der Umklappung um die Grundrißspur erforderlich sind.

Der Anschauung entnimmt man:

Wird ein gerader Kreiszylinder von einer Ebene geschnitten, so entsteht als Schnittfigur eine Ellipse, deren Nebenachse CD die Länge des Durchmessers d des Kreiszylinders hat. Die Länge der Ellipsenhauptachse AB hängt von dem Neigungswinkel φ der Schnittebene gegen die Grundkreisebene ab; sie beträgt $\frac{d}{\cos\varphi}$.

Hat eine Kugel den gleichen Durchmesser wie ein kreiszylindrisches Rohr im Lichten, so gleitet die Kugel im schräg gehaltenen Rohr solange abwärts, bis sie z.B. auf der Tischplatte T, auf die das Rohr schräg aufgesetzt ist, zum Stillstand kommt (Abb. 2.21.). Sie berührt dann T in einem Punkt F und die Rohrwandung längs eines Kreises K.

Mathematisch entspricht das Rohr einem Kreiszylinder, die Tischplatte T einer schneidenden Ebene. Im geschnittenen Kreiszylinder lassen sich zwei solche Kugeln einpassen, welche die Schnittebene von je einer Seite her in symmetrisch gelegenen Punkten F_1 und F_2 berühren. Die Abbildung 2.22. zeigt das im Grundriß-Aufriß-Bild, die Abbildung 2.23. in isometrischer Projektion.

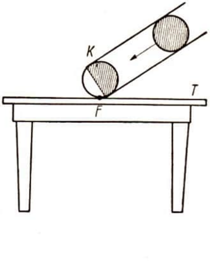


Abb. 2.21.

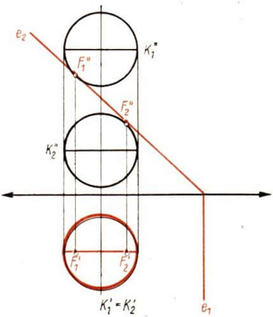


Abb. 2.22.

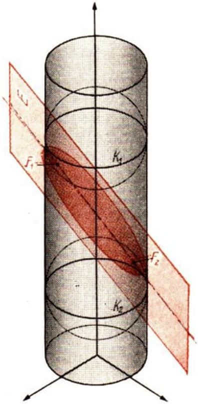


Abb. 2.23.

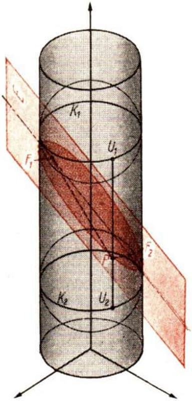


Abb. 2.24.

Mit Hilfe dieser Kugeln ist es möglich, für die Ellipse eine Definition als geometrischer Ort (Ortsdefinition) herzuleiten, die gegenüber der bisherigen den Vorteil hat, daß sie nicht von räumlichen Gegebenheiten (Parallelprojektion eines Kreises) ausgeht, sondern in der Ellipsenebene E aufgestellt werden kann. Diese Erkenntnis verdankt man dem belgischen Mathematiker Germinal Pierre Dandelin (sprich: dangdeläng; 1794—1847). Nach ihm werden die Kugeln als **Dandelinkugeln** bezeichnet.

Herleitung der Ortsdefinition:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P der Ellipse die Mantellinie des Zylinders, so schneidet diese die Berührungskreise K_1 und K_2 der Dandelinkugeln in zwei Punkten U_1 und U_2 (Abb. 2.24.). Wo auch immer P auf der Ellipse angenommen wird, stets gilt:

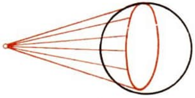
$$\overline{PU_1} + \overline{PU_2} = \overline{U_1U_2} = \text{const}\,.$$

Nun ist aber PU_1 Abschnitt einer von P an die Dandelinkugel I gelegten Tangente. Eine zweite Tangente von P an dieselbe Kugel verläuft innerhalb der Schnittebene E nach F_1.

Da alle von einem Raumpunkt R an eine Kugel verlaufenden Tangenten gleiche Abschnitte zwischen R und dem Berührungspunkt haben (Abb. 2.25.), gilt auch:

$$\overline{PU_1} = \overline{PF_1}\,.$$

Abb. 2.25.



Für die Dandelinkugel II gilt entsprechend: $\overline{PU_2} = \overline{PF_2}$.
Daraus folgt für jeden Ellipsenpunkt P:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{const.}$$ **(Ortsdefinition der Ellipse).**

In Worten:

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene konstant ist.

Die festen Punkte heißen **Brennpunkte** der Ellipse; sie entsprechen im Raum den Berührungspunkten der Dandelinkugeln mit der Schnittebene. Ihre Entfernung vom Mittelpunkt der Ellipse heißt die **lineare Exzentrizität** e.
Die konstante Abstandssumme bezeichnet man gewöhnlich mit $2a$. Die Ortsdefinition ist die Grundlage für die bekannte (mechanische) Gärtnerkonstruktion der Ellipse mit Hilfe eines an zwei Stellen befestigten Fadens. Die Länge des gespannten Fadens entspricht dabei der konstanten Abstandssumme $2a$, die Befestigungsstellen des Fadens entsprechen den Brennpunkten.

Führen Sie mit einem Zwirnsfaden und zwei Stecknadeln die Gärtnerkonstruktion in Ihrem Heft aus, und beweisen Sie, daß die entstehende Kurve eine Ellipse ist!

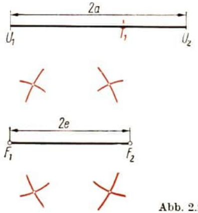


Abb. 2.26.

Der Gärtnerkonstruktion entspricht eine punktweise Konstruktion der Ellipse mit Zirkel und Lineal (Abb. 2.26.).

Gegeben:

Zwei feste Punkte F_1 und F_2; $\overline{F_1 F_2} = 2e$;
eine Strecke $\overline{U_1 U_2} = 2a$ $(2a > 2e)$.

Konstruktionsgang: $\overline{U_1 U_2}$ wird an einer beliebigen Stelle T_1 $(a - e < \overline{T_1 U_1} < a + e)$ unterteilt. Dann werden mit $\overline{U_1 T_1}$ und $\overline{U_2 T_1}$ Kreise um F_1 und F_2 geschlagen. Die vier Schnittpunkte sind Ellipsenpunkte. Weitere Teilpunkte $T_2, T_3, \ldots$ von $\overline{U_1 U_2}$ ergeben jeweils vier weitere Ellipsenpunkte. Bei genügender Dichte lassen sich die Punkte schließlich zur Kurve verbinden.

Beweisen Sie, daß diese punktweis konstruierte Kurve eine Ellipse ist!

Begründen Sie mit Hilfe der Punktkonstruktion, daß jede Ellipse zwei Symmetrieachsen, die rechtwinklig zueinander stehen (die Gerade durch F_1 und F_2 und die Mittelsenkrechte zu $\overline{F_1 F_2}$), und infolgedessen auch ein Symmetriezentrum (einen Mittelpunkt) hat! (Vgl. Abschnitt 2.1.3.)

Wählen Sie zur Punktkonstruktion drei Teilpunkte T_1, T_2, T_3 von $\overline{U_1 U_2}$ so, daß gilt:
$\overline{T_1 U_1} < a - e$; $\quad a - e < \overline{T_2 U_1} < a + e$;
$\overline{T_3 U_1} = a - e$! *Was stellen Sie jeweils fest?*

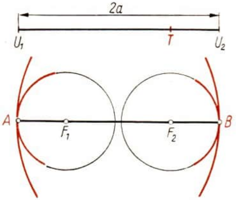


Abb. 2.27.

Im Falle $\overline{T_3 U_1} = a - e$ berühren bei der Punktkonstruktion die Kreise einander (Abb. 2.27.). Es ergeben sich die Hauptscheitel A und B der Ellipse. (Vgl. Abschnitt 2.1.3.)

Beweisen Sie, daß die Hauptachse der Ellipse gleich der Summe 2 a der Abstände eines beliebigen Ellipsenpunktes von den Brennpunkten ist!
Anleitung: Stellen Sie die Abstandssumme für die Hauptscheitel A und B auf und vereinigen Sie beide Gleichungen durch Addition! Daraus läßt sich die Hauptachse $\overline{AB}$ berechnen.

Wählen Sie als Teilpunkt T bei der Punktkonstruktion den Mittelpunkt von $\overline{U_1U_2}$ ($\overline{TU_1} = \overline{TU_2}$)!
Welche Ellipsenpunkte erhalten Sie? (Abb. 2.28.)

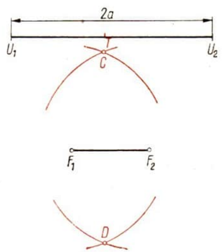


Abb. 2.28.

Bezeichnet man die Länge der kleinen Ellipsenachse mit $2b$, so folgt aus dem sogenannten **charakteristischen Dreieck der Ellipse** die Beziehung:

$$b^2 = a^2 - e^2$$

(Abb. 2.29.).

Beweisen Sie diese Beziehung mit Hilfe der Ortsdefinition!

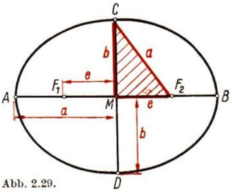


Abb. 2.29.

Weitere Konstruktionsvorschriften für Ellipsen, die sich aus der Ortsdefinition herleiten lassen, werden im Abschnitt 2.2. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" näher untersucht.

Aufgaben

1. Konstruieren Sie das Grundriß-Aufriß-Bild eines auf der Grundrißtafel senkrecht zur Aufrißtafel liegenden Zylinders, der von einer senkrecht zur Grundrißtafel verlaufenden Ebene geschnitten wird, die

a) unter 60° zur Aufrißtafel geneigt ist und den in der Aufrißtafel liegenden Grundkreis des Zylinders berührt;

b) unter 30° zur Aufrißtafel geneigt ist und die Grundkreisebene des Zylinders im Abstand des Grundkreisdurchmessers vom Mittelpunkt schneidet;

c) unter 45° zur Aufrißtafel geneigt ist und durch den Grundkreismittelpunkt verläuft! Konstruieren Sie auch jeweils die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur!

2. a) Ein Rohr (lichte Weite 30 mm, Wandstärke 15 mm) wird unter 45° so abgeschnitten, daß ein Rohrstück mit einer kürzesten Außenmantellinie von 30 mm entsteht. Konstruieren Sie die Schnittfigur!

b) Wie groß sind die Achsen der äußeren und der inneren Schnittellipsen?

c) Wie groß ist die Schnittfläche? (Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b: $A = \pi a b$)

d) Ellipsen, deren Achsen im gleichen Verhältnis stehen, sind ähnlich. Sind die Schnittellipsen ähnlich?

3. Zwei rechtwinklig zueinander verlaufende Rohrleitungen sollen zu einem Rohrwinkel verschweißt werden. Welche Gestalt hat die Schweißnaht? Zeichnen Sie das Winkelstück in standardisierter dimetrischer Projektion! (Maße an einem entsprechenden Werkstück messen und eine maßstäbliche Zeichnung anfertigen!)

4. Konstruieren Sie eine Schar konfokaler Ellipsen!
Anleitung: Unter konfokalen Ellipsen versteht man Ellipsen mit gleichen Brennpunkten und unterschiedlichen Achsenlängen.

5. Wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn bei gleichbleibendem a die lineare Exzentrizität e immer kleiner wird? Was ergibt sich im Grenzfall $e = 0$? Zeichnen Sie diese Ellipsenschar!

6. Zeichnen Sie zwei kongruente Ellipsen mit gleichem Mittelpunkt, deren Hauptachsen aufeinander senkrecht stehen!

7. Jeder (gerade und schiefe) Kreiszylinder wird von Ebenen, die parallel zur Grund- und Deckfläche verlaufen, in zur Grundfläche kongruenten Kreisen geschnitten. Beim schiefen Kreiszylinder ist auch noch ein zweiter Kreisschnitt möglich. Zeichnen Sie das Grundriß-Aufriß-Bild eines so abgeschnittenen schiefen Kreiszylinders! Neigungswinkel der Zylindermantellinien gegen die Grundkreisebene:

   a) $\gamma = 60°$; **b)** $\gamma = 45°$; **c)** $\gamma = 30°$.

   Wie groß muß jeweils der Neigungswinkel der Schnittebene sein, damit die Schnittfigur ein Kreis wird?

8. Beweisen Sie den Satz, daß das Bild einer Kugel bei senkrechter Parallelprojektion ein Kreis, bei schräger Parallelprojektion eine Ellipse ist!
Anleitung: Die Projektionsstrahlen, deren Durchstoßpunkte den Umriß des Projektionsbildes der Kugel ergeben, bilden einen geraden Kreiszylinder mit dem projizierten Kugelkreis als Grundkreis.

2.1.6. Der Begriff „Kegelschnitt"

Jedes geometrische Gebilde, das sich beim Schnitt eines (geraden oder schiefen) Kreiskegels mit einer Ebene ergibt, heißt Kegelschnitt.

Die Gestalt der Kegelschnitte ist sehr verschieden, je nachdem unter welchem Winkel die Schnittebene geneigt ist. Ihre Neigung wird gewöhnlich durch den Winkel φ gegen die Kegelachse festgelegt und in Beziehung zum halben Öffnungswinkel β des Kegels gesetzt. Die Abbildung 2.30. zeigt das für einen geraden Kreiskegel im Aufriß, wobei die Schnittebenen senkrecht zur Aufrißtafel verlaufen.
Aus der Abbildung 2.30. bzw. einem Modell entnimmt man, daß eine geschlossene Kurve nur entstehen kann, sofern $\beta < \varphi \leq 90°$ (E_1) gilt. Für $\beta = \varphi$ (E_2) ergibt sich eine (einästige) offene Kurve, für $\beta > \varphi \geqq 0°$ (E_3) eine Kurve, die aus zwei Ästen besteht, von denen jeder offen ist. Die Fachbezeichnungen dieser Kurven sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

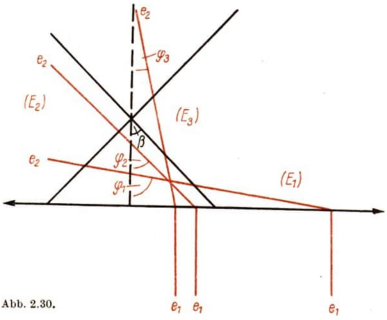


Abb. 2.30.

Voraussetzung dabei ist, daß die Ebene E nicht durch die Kegelspitze S verläuft. Ist das der Fall, so entstehen Punkte oder Geraden als Schnittgebilde. Diese rechnet man zwar als sogenannte Ausartungen im allgemeinen Sinne auch zu den Kegelschnitten, doch sollen sie im folgenden ausdrücklich ausgeschlossen werden.

Übersicht (für einen geraden Kreiskegel)

Neigung von E	E geht nicht durch S		E geht durch S (Ausartung)
	Kurvengestalt	Fachbezeichnung	gemeinsames Gebilde
$\varphi = 90°$ $\beta < \varphi < 90°$	geschlossen	Kreis Ellipse	Punkt
$\beta = \varphi$	offen, einästig	Parabel	Gerade (Doppelgerade)
$\beta > \varphi \geqq 0°$	offen, zweiästig	Hyperbel	einander schneidendes Geradenpaar

2.1.7. Die Ellipse als Kegelschnitt

▶ **Die geschlossene Kurve, die beim Schnitt eines (geraden oder schiefen) Kreiskegels durch eine Ebene, die nicht parallel zur Grundfläche verläuft, entsteht, ist eine Ellipse.**

Beweis für den geraden Kreiskegel ($90° > \varphi > \beta$):
Falls ein gerader Kegel von einer Ebene mit $90° > \varphi > \beta$ geschnitten wird, lassen sich wie beim Zylinder zwei Dandelinkugeln hineinlegen. Diese sind allerdings diesmal nicht gleich groß. Die Abbildung 2.31. zeigt das im Aufrißbild (Achsenschnitt), die Abbildung 2.32. in isometrischer Projektion. (Die Abbildungen entsprechen völlig den Abbildungen 2.22. und 2.23. bzw. 2.24. Betrachten Sie sie nebeneinander!)

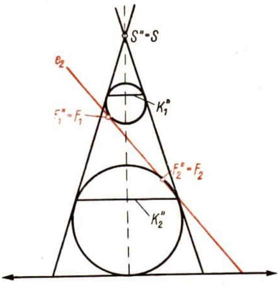


Abb. 2.31.

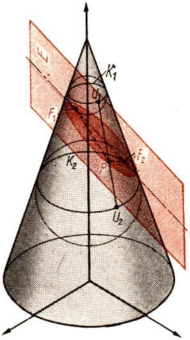


Abb. 2.32.

Auch in diesem Falle bleibt bei Wanderung des Punktes P auf der Schnittkurve $\overline{PU}_1 + \overline{PU}_2$, diesmal als Mantellinie eines geraden Kegelstumpfes, konstant. Für die Schnittkurve gilt also ebenfalls:

$$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \text{const}\,.$$

Damit ist nach der Ortsdefinition bewiesen, daß der geschlossene Kegelschnitt eine Ellipse ist.

Konstruktion der Kegelschnitt-Ellipse im Grundriß-Aufriß-Bild:
Bedingung: $90° > \varphi > \beta$
Die Konstruktion der Ellipse in wahrer Größe und Gestalt entspricht der in Abbildung 2.20. dargestellten Konstruktion der Zylinderschnitt-Ellipse. Nur ist zu beachten, daß der Grundriß der Schnittfigur diesmal kein Kreis, sondern selbst eine Ellipse ist, also ebenfalls zunächst punktweise mit Hilfe von Kegelmantellinien und Ordnungslinien konstruiert werden muß (vgl. Aufgabe 1a).

2.1.8. Die Hyperbel als Kegelschnitt

Die zweiästige offene Kurve, die beim Schnitt eines (geraden oder schiefen) Kreiskegels durch eine Ebene entsteht, heißt Hyperbel.

Konstruktion der Schnitthyperbel im Grundriß-Aufriß-Bild (Abb. 2.33.):
Bedingung: $\beta > \varphi \geqq 0°$
Durch Hilfsmantellinien wird zunächst zum Aufriß punktweise der Grundriß konstruiert, der ebenfalls eine Hyperbel ist. Dann wird die Schnittebene mit der Schnittfigur um e_1 umgeklappt.
Aus der Konstruktion entnehmen wir folgende Eigenschaften der Hyperbel:

1. Die Hyperbel besitzt zwei senkrecht zueinander verlaufende Symmetrieachsen und ist infolgedessen zentralsymmetrisch. Sie besitzt einen Mittelpunkt M.
2. Auf der Hauptsymmetrieachse liegen zwei zu verschiedenen Ästen gehörende Hyperbelpunkte A_0 und B_0, deren Entfernung den kürzesten Abstand der Äste darstellt. Sie heißen **Scheitel** der Hyperbel, ihre Entfernung die **Achse** der Hyperbel.

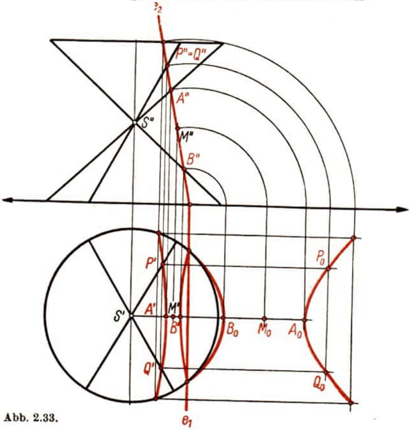


Abb. 2.33.

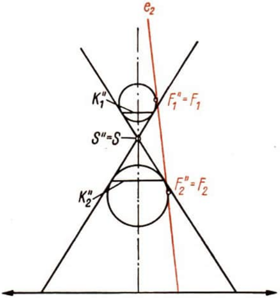


Abb. 2.34.

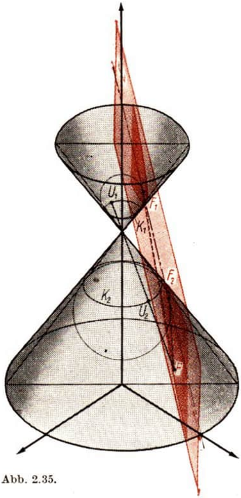


Abb. 2.35.

Auch im Hyperbelfall lassen sich in den Kegel zwei Dandelinkugeln legen. Die Abbildungen 2.34. und 2.35. zeigen (entsprechend Abb. 2.31. und 2.32.) diese Kugeln im Aufrißbild (Achsenschnitt) und in isometrischer Projektion.
Die Abbildung 2.35. zeigt, daß diesmal im Gegensatz zum Ellipsenfall bei Wanderung von P auf der Hyperbel die konstante Länge der Kegelmantellinie durch $|\overline{PU}_1 - \overline{PU}_2|$ gegeben ist. Es gilt also bei der Hyperbel:

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = \text{const.}$$ **(Ortsdefinition der Hyperbel)**

In Worten:

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene konstant ist.

Die festen Punkte heißen auch bei der Hyperbel **Brennpunkte**, ihre Entfernung wird ebenfalls mit $2\,e$, die konstante Abstandsdifferenz wird mit $2\,a$ bezeichnet.
Die Ortsdefinition ist die Grundlage für eine Punktkonstruktion der Hyperbel, die der der Ellipse ähnelt (Abb. 2.36.).
Gegeben:
Zwei feste Punkte F_1 und F_2; $\overline{F_1 F_2} = 2\,e$;
eine Strecke $\overline{U_1 U_2} = 2\,a$ $(2\,a < 2\,e)$.
Konstruktionsgang: $\overline{U_1 U_2}$ wird verlängert, und auf der Verlängerung wird ein beliebiger äußerer

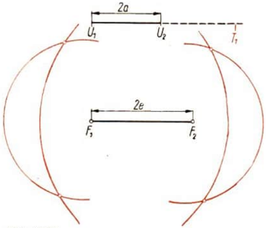


Abb. 2.36.

Teilpunkt T_1 ($\overline{T_1 U_2} > e - a$) angenommen. Die Kreise mit $\overline{T_1 U_1}$ und $\overline{T_1 U_2}$ um F_1 und F_2 ergeben vier Hyperbelpunkte als Schnittpunkte. Weitere Punkte $T_2, T_3, \ldots$ liefern jeweils vier weitere Hyperbelpunkte. Bei genügender Dichte können die Punkte schließlich zur Kurve verbunden werden.

Beweisen Sie, daß diese punktweis konstruierte Kurve eine Hyperbel ist!

Bestätigen Sie mit Hilfe der Punktkonstruktion bzw. der Ortsdefinition folgende Eigenschaften der Hyperbel!

a) *Die Hyperbel besitzt zwei rechtwinklig zueinander verlaufende Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum.*

b) *Liegt T bei der Punktkonstruktion so, daß $\overline{T_1 U_2} < e - a$, so ergeben sich keine Hyperbelpunkte. Für $\overline{T_2 U_2} > e - a$ ergeben sich jeweils vier Hyperbelpunkte. Mit $\overline{T_3 U_2} = e - a$* (Abb. 2.37.) *erhält man die beiden Scheitel A und B der Hyperbel.*

c) *Die Achse der Hyperbel ist gleich der Differenz $2a$ der Abstände eines beliebigen Hyperbelpunktes von den Brennpunkten.*

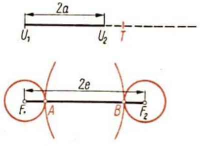


Abb. 2.37.

Die Hyperbel besitzt keine Nebenscheitel, da auf der zweiten Symmetrieachse, der Mittelsenkrechten zu $\overline{F_1 F_2}$, keine Hyperbelpunkte liegen. Trotzdem ist es zweckmäßig, wie bei der Ellipse eine Größe b einzuführen, die hier eine reine Rechengröße ist. Wegen $e > a$ lautet die Beziehung diesmal:

$$b^2 = e^2 - a^2.$$

Gelegentlich wird $2b$ **Nebenachse** der Hyperbel genannt.

Konstruieren Sie eine Hyperbel und mit b, e und a das charakteristische Dreieck! Legen Sie dabei b auf die zweite Symmetrieachse! Vergleichen Sie das Dreieck mit dem charakteristischen Dreieck der Ellipse!

Im Abschnitt „2.2. Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ werden aus der Ortsdefinition der Hyperbel weitere Konstruktionsvorschriften hergeleitet.

2.1.9. Die Parabel als Kegelschnitt

Die einästige offene Kurve, die beim Schnitt eines (geraden oder schiefen) Kreiskegels durch eine Ebene entsteht, heißt Parabel.

Konstruktion der Schnittparabel im Grundriß-Aufriß-Bild (Abb. 2.38.):
Bedingung: $\beta = \varphi$
Die punktweise Konstruktion der Schnittfigur kann wie in Abbildung 2.20. (Ellipse) und Abbildung 2.34. (Hyperbel) mit Hilfe von Mantellinien geschehen. Man kann stattdessen aber auch Hilfsebenen parallel zur Grundfläche des Kegels verwenden, die den Kegelmantel in Kreisen schneiden. Dieses Verfahren ist in Abbildung 2.38. benutzt worden.[1]

[1] Nach dem Verfahren der Parallelschnitte zur Grundfläche des Kegels können auch die Ellipsen- und Hyperbelschnitte des Kreiskegels konstruiert werden (vgl. Aufgabe 1b und 2).

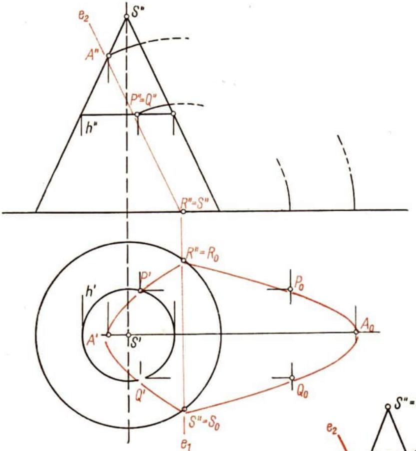


Abb. 2.38.

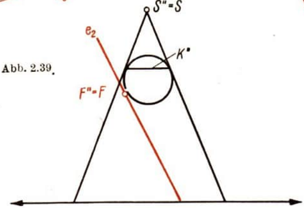


Abb. 2.39.

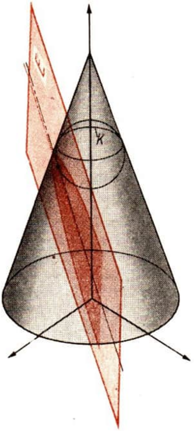


Abb. 2.40.

Der Grundriß der Parabel ist wieder eine Parabel. Die Umlegung der Schnittebene um die Grundrißspur e_1 ergibt schließlich die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur.

Aus der Konstruktion entnimmt man folgende Eigenschaften:

1. Die Parabel besitzt nur eine Symmetrieachse. Die Kurve ist infolgedessen nicht zentralsymmetrisch und besitzt keinen Mittelpunkt.
2. Der auf der Symmetrieachse liegende Parabelpunkt A_0 heißt **Scheitel**.

Im Gegensatz zu den Fällen, in denen als Schnittfiguren Ellipsen und Hyperbeln entstehen, kann bei dem Schnitt, bei dem als Schnittfigur eine Parabel entsteht, nur eine einzige Dandelinkugel in den Kegel eingeführt werden (Abb. 2.39. und 2.40.). Infolgedessen entfällt hier eine auf dem Abstand von zwei Brennpunkten fußende Ortsdefinition. (Vergleichen Sie die Abbildungen 2.39. und 2.40. mit den Abbildungen 2.31. und 2.32. sowie den Abbildungen 2.34. und 2.35!) Eine Ortsdefinition muß deshalb bei der Parabel auf anderem Wege gewonnen werden.

Aufgaben

1. Konstruieren Sie im Grundriß-Aufriß-Bild den Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene, bei dem als Schnittfigur eine Ellipse entsteht, und die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur **a)** mit Hilfe von Mantellinien, **b)** mit Hilfe von Hilfsebenen parallel zur Grundkreisebene des Kegels!
2. Konstruieren Sie im Grundriß-Aufriß-Bild den Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene, bei dem als Schnittfigur eine Hyperbel entsteht, entsprechend der Abbildung 2.33., aber mit Hilfe von Parallelebenen zur Grundkreisebene!
3. Konstruieren Sie im Grundriß-Aufriß-Bild den Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene, bei dem als Schnittfigur eine Parabel entsteht, entsprechend der Abbildung 2.38., aber mit Hilfe von Mantellinien!
4. Ein gerader Kreiskegel wird von einer parallel zur Achse verlaufenden Ebene geschnitten. Konstruieren Sie im Grundriß-Aufriß-Bild die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt! Wählen Sie dabei **a)** $\beta < 45°$, **b)** $\beta > 45°$, **c)** $\beta = 45°$!
Anleitung: Legen Sie die Schnittebene in diesem Fall bei normaler Stellung des Kreiskegels geneigt zur Aufrißtafel! Konstruieren Sie zunächst mit Hilfe von Mantellinien oder Parallelebenen zur Grundkreisebene den Aufriß der Schnittfigur! Legen Sie die Schnittebene dann um ihre Aufrißspur in die Aufrißtafel um! Die bei **c)** entstehende Hyperbel heißt gleichseitige Hyperbel.
5. Ein gerader Kreiskegel wird so geschnitten, daß die Schnittfigur eine Ellipse wird. Wie ändert sich die Gestalt dieser Ellipse, wenn
a) bei gleichbleibendem Kegel die Neigung der Schnittebene;
b) bei gleichbleibender Ebenenneigung der Spitzenwinkel des Kegels
kontinuierlich geändert wird?
6. Untersuchen Sie das in Aufgabe 5 genannte Problem für den Fall, daß die Schnittfigur eine Hyperbel ist!
7. Wie muß die Frage der Aufgabe 5 für eine Parabel als Schnittfigur formuliert werden? Welches Ergebnis stellen Sie fest?

2.1.10. Ortsdefinition der Parabel

An Stelle der bei Ellipse und Hyperbel verwendeten Ortsdefinition, die auf den Berührungspunkten zweier Dandelinkugeln basierte, kann auch eine Definition als geometrischer Ort verwendet werden, die den Berührungspunkt nur einer Dandelinkugel und eine feste Gerade verwendet. Diese Definition kann ebenfalls für die Parabel verwendet werden.
Die feste Gerade, die dazu benötigt wird, ergibt sich als Schnittgerade der Schnittebene E des Kegels mit derjenigen Ebene, in der der Berührungskreis der Dandelinkugel mit dem Kegelmantel liegt. Sie heißt **Leitlinie l.** Für die Parabel ist das in Abbildung 2.41. im Aufriß und in Abbildung 2.42. in isometrischer Projektion dargestellt.
Von einem beliebigen Parabelpunkt P wird in E auf l das Lot gefällt. Der Fußpunkt sei L. Zugleich werden P und L in den Achsenschnitt senkrecht nach P'' bzw. L'' projiziert. Dann gilt:

$$\overline{PL} = \overline{P''L''}\,.$$

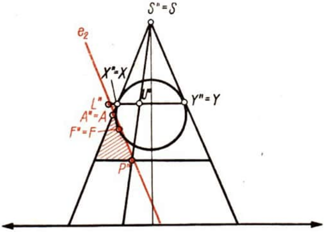


Abb. 2.41.

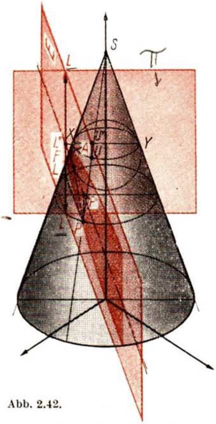


Abb. 2.42.

Dem Achsenschnitt (Abb. 2.41.) entnimmt man wegen der Parallelität von e_2 zur Kegelmantellinie (Bedingung für den Parabelschnitt), daß $\overline{P''L''} = \overline{ZX}$, also auch $\overline{PL} = \overline{ZX}$ gilt.

Wie die Abbildung 2.42. zeigt, ist $\overline{ZX}$ Mantellinie eines Kegelstumpfes. Folglich gilt:

$$\overline{ZX} = \overline{PU}\text{ , also auch } \overline{PL} = \overline{PU}\,.$$

Nun ist aber $\overline{PU}$ ebenso wie $\overline{PF}$ Tangente von P an die Dandelinkugel. Deshalb gilt schließlich wegen $\overline{PU} = \overline{PF}$ auch:

$$\overline{PL} = \overline{PF}$$ **(Ortsdefinition der Parabel).**

In Worten:

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die der Abstand von einem festen Punkt und einer festen Geraden dieser Ebene jeweils gleich ist.

Der feste Punkt heißt **Brennpunkt**, die feste Gerade **Leitlinie**.
Der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie heißt der **Halbparameter p** der Parabel.
Die Ortsdefinition ist die Grundlage für eine Punktkonstruktion der Parabel (Abb. 2.43.).
Gegeben: Ein fester Punkt F; eine feste Gerade l.

Konstruktionsgang: Zu l wird eine beliebige Parallele g_1 gezogen. Ihr Abstand a_1 von l muß größer als $\frac{p}{2}$ sein. Mit a_1 wird um F der Kreis geschlagen. Seine Schnittpunkte mit g_1 sind zwei Parabelpunkte. Weitere Parallelen $g_2, g_3, \ldots$ ergeben weitere Parabelpunkte. Bei genügender Dichte lassen diese sich schließlich zur Kurve verbinden.

Beweisen Sie, daß diese punktweis konstruierte Kurve eine Parabel ist!

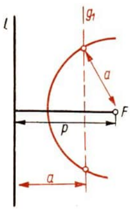


Abb. 2.43.

Bestätigen Sie mit Hilfe der Punktkonstruktion, daß jede Parabel eine Symmetrieachse besitzt, die durch F senkrecht zu l verläuft!

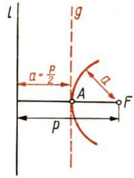


Abb. 2.44.

Wählen Sie zur Punktkonstruktion drei Parallelen g_1, g_2, g_3 zu l so, daß für ihre Abstände von l gilt: $a_1 < \frac{p}{2}$; $a_2 > \frac{p}{2}$; $a_3 = \frac{p}{2}$ Was stellen Sie jeweils fest?

Im Falle $a_3 = \frac{p}{2}$ berührt der Kreis um F die Parallele g_3. Dadurch ergibt sich der Scheitel A der Parabel (Abb. 2.44.). Die Parallele g_3 heißt die **Scheiteltangente** der Parabel, die Gerade durch F und A die **Achse** der Parabel.

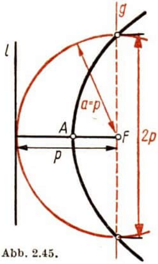


Abb. 2.45.

Beweisen Sie, daß die senkrecht zur Achse durch F verlaufende Sehne der Parabel gleich dem doppelten Halbparameter, also gleich 2 p ist (Abb. 2.45.).

Anleitung: Die Parallele g zu l im Abstand a = p verläuft durch F. Mit welchem Radius ist bei der Punktkonstruktion der Kreis um F zu schlagen?

Man nennt $2p$ den Parameter der Parabel. Er ist ein Maß für die Spreizung der Parabel, die um so größer zu sein scheint, je weiter F von l entfernt ist. In Wirklichkeit gibt es aber nur eine einzige Form der Parabel. Die scheinbar verschieden stark gespreizten Parabelformen werden dadurch vorgetäuscht, daß bei großem Parameter nur ein kleiner Parabelbogen in der Umgebung des Scheitels stark vergrößert dargestellt wird (Abb. 2.46.).

Aus der Ortsdefinition können weitere Konstruktionsvorschriften hergeleitet werden. Das geschieht im Abschnitt „2.2. Analytische Geometrie der Kegelschnitte“.

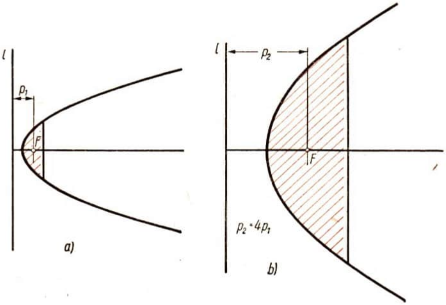


Abb. 2.46.

2.1.11. Gemeinsame Definition von Parabel, Ellipse und Hyperbel

Die Leitlinie läßt sich zusammen mit nur einer Dandelinkugel, d.h. mit nur einem Brennpunkt, auch zur Definition von Ellipse und Hyperbel verwenden. Die Abbildungen 2.41. und 2.42. bleiben dabei im wesentlichen erhalten, nur die Neigung der Ebene E ändert sich. In den Abbildungen 2.47.a und c sind die Aufrißbilder (Achsenschnitte) für den Ellipsen- und Hyperbelfall gezeichnet, zum Vergleich ist die Abbildung 2.41. (Parabelfall) als Abbildung 2.47.b nochmals beigefügt.

Betrachtet man den charakteristischen schraffierten Figurenteil, der in der Abbildung 2.48. für den Ellipsenfall vergrößert herausgezeichnet ist, so erkennt man, daß beim Ellipsen- und Hyperbelfall wegen der anderen Neigung φ der Schnittebene gegen die Kegelachse die Gleichschenkligkeit der Figur entfällt. Es gilt also jetzt nicht mehr die für die Herleitung der Ortsdefinition der Parabel benutzte Beziehung $\overline{P''L''} = \overline{ZX}$. Dafür kann diesmal mit Hilfe des Strahlensatzes und des Sinussatzes notiert werden:

$$\overline{ZX} : \overline{P''L''} = \overline{ZA} : \overline{P''A} =$$
$$\sin(90^\circ - \varphi) : \sin(90^\circ - \beta) = \cos\varphi : \cos\beta .$$

Bei jedem Kegel ist wegen $0^\circ < \beta < 90^\circ$ sicher $\cos\beta$ von Null verschieden. Ferner muß bei dieser Herleitung noch $\varphi \neq 90^\circ$ vorausgesetzt werden, da sonst der mit L'' bezeichnete Punkt nicht existiert.[1]

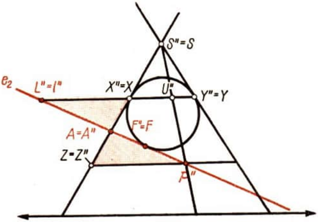


Abb. 2.47.a

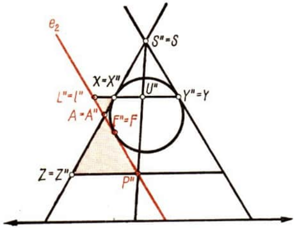


Abb. 2.47.b

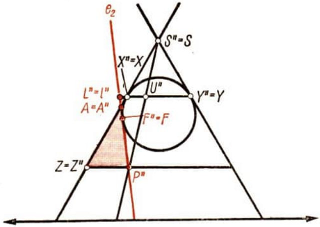


Abb. 2.47.c

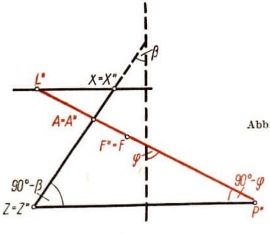


Abb. 2.48.

[1] Damit wird der Grenzfall der Kreisgestalt der Ellipse ausgeschlossen.

Nach wie vor gelten die aus der Abbildung 2.42. gewonnenen Beziehungen $\overline{P''L''} = \overline{PL}$ und $\overline{ZX} = \overline{PF}$. Daraus folgt:

$$\overline{PF} : \overline{PL} = \cos\varphi : \cos\beta .$$

Da φ und β für jeden einzelnen Kegelschnitt konstant sind und die Gestalt der Kurve bestimmen, ist auch das Verhältnis $\cos\varphi : \cos\beta$ eine für den betreffenden Kegelschnitt charakteristische Konstante. Man nennt sie die **numerische Exzentrizität ε** des Kegelschnitts. Folglich gilt für jeden Kegelschnitt, der kein Kreis ist:

$$\overline{PF} : \overline{PL} = \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$$

(gemeinsame Ortsdefinition für Ellipse, Parabel und Hyperbel).

In Worten:

Jeder von einem Kreis verschiedene Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden dieser Ebene, der Leitlinie, einen konstanten Wert hat. Diese Konstante heißt die numerische Exzentrizität des Kegelschnitts.

Inwiefern ist die Ortsdefinition der Parabel in dieser allgemeinen Kegelschnittdefinition enthalten? Wie groß ist ε? In welchen Grenzen liegt ε für die Ellipsen und für die Hyperbeln?

Der Kegelschnitt hat die Gestalt einer

Ellipse für $0 < \varepsilon < 1$,
Parabel für $\varepsilon = 1$,
Hyperbel für $\varepsilon > 1$.

Als Grenzfall der Ellipse für $\varphi = 90°$, also $\cos\varphi = 0$, erhält man einen Kreis. Wegen der Beziehung $\varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$ wird daher dem Kreis die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0$ zugeschrieben. Man kann ihn jedoch nicht durch die Gleichung $\overline{PF} : \overline{PL} = \varepsilon$ definieren, da bei ihm gewissermaßen die Leitlinie ins Unendliche gerückt ist. Das ist so zu verstehen: Denkt man sich eine Folge von Ellipsen, die gegen die Kreisform streben, so wächst der Abstand der Leitlinie vom Mittelpunkt über alle Grenzen. Nach dieser Festsetzung über die numerische Exzentrizität des Kreises gilt:

Die numerische Exzentrizität der Kegelschnitte kann alle endlichen nichtnegativen Zahlenwerte annehmen.

Zu jedem fest gegebenen Punkt als Brennpunkt F und jeder fest gegebenen Geraden als Leitlinie l gehören demnach unzählig viele Kegelschnitte. Jedem ist ein bestimmter nicht negativer Zahlenwert als numerische Exzentrizität ε zugeordnet.

Die gegenseitige Lage von l und F sei dabei durch den Abstand $\overline{L''F} = d$ festgelegt (Abb. 2.49.). Jeder Kegelschnitt schneidet $\overline{L''F}$ an einer bestimmten Stelle, die von der Gestalt des Kegelschnitts, also von ε, abhängt. Der Schnittpunkt ist der Scheitel A des Kegelschnitts. Da A auch ein Punkt des Kegelschnitts ist, gilt für ihn ebenfalls:

$$\overline{AF} : \overline{AL''} = \cos\varphi : \cos\beta = \varepsilon .$$

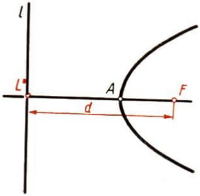


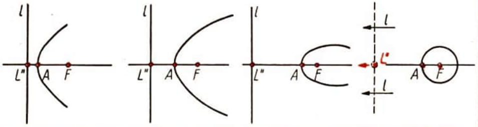
Abb. 2.49.

Der Scheitel des Kegelschnitts teilt das Lot vom Brennpunkt auf die Leitlinie im Verhältnis der numerischen Exzentrizität: $\overline{AF}:\overline{AL''} = \varepsilon$.

Dieser Satz besagt, daß die Leitlinien bei den Ellipsen ($\varepsilon < 1$) sich verhältnismäßig weit vom Kegelschnitt entfernen, daß sie bei den Hyperbeln ($\varepsilon > 1$) aber nahe am Scheitel liegen. Bei der Parabel ($\varepsilon = 1$) halbiert der Scheitel das Lot vom Brennpunkt zur Leitlinie.

Für den Kreis mit $\overline{AF} = r \neq 0$ kann die Exzentrizität $\varepsilon = 0$ bzw. die Bedingung $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AL''}} = 0$ als Grenzfall so gedeutet werden, daß $\overline{AL''}$, d.h. die Entfernung der Leitlinie vom Kreis über alle Grenzen wächst.

Winkel φ der Schnittebene zur Kegelachse	$0 \leq \varphi < \beta$	$\varphi = \beta$	$\beta < \varphi < 90°$	$\varphi = 90°$
$\varepsilon = \cos\varphi : \cos\beta$	$\varepsilon > 1$	$\varepsilon = 1$	$1 > \varepsilon > 0$	$\varepsilon = 0$
Art des Kegelschnitts	Hyperbel	Parabel	Ellipse	Kreis
Lage der Leitlinie l in bezug auf den Scheitel A und den Brennpunkt F	$\overline{L''A} < \overline{FA}$ nahe	$\overline{L''A} = \overline{FA}$ A halbiert $\overline{L''F}$	$\overline{L''A} > \overline{FA}$ weit	$\overline{L''A} \to \infty$ über alle Grenzen weit



Aufgaben

1. Beweisen Sie mit Hilfe der numerischen Exzentrizität, daß bei Kreiszylindern keine Parabeln oder Hyperbeln als Schnittfiguren entstehen können!
   Anleitung: Der Zylinder kann als Kegel mit $\beta = 0°$ aufgefaßt werden. Wie groß ist dann ε? Welche Werte kann φ demnach beim Zylinderschnitt annehmen?

2. Leiten Sie die Beziehung für ε beim Zylinderschnitt durch Ergänzung der Abbildung 2.22. entsprechend der Abbildung 2.47.a bzw. der Abbildung 2.48. geometrisch her!

3. Untersuchen Sie die Änderung der Gestalt
   a) der Ellipse, wenn ε kontinuierlich verkleinert wird;
   b) der Hyperbel, wenn ε kontinuierlich vergrößert wird!

4. Fassen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3 unter Einschluß von Parabel und Kreis zusammen, indem Sie ε kontinuierlich von Null an wachsen lassen und eine Serie charakteristischer Kurvenskizzen zusammenstellen, die die Gestaltsänderungen deutlich zeigen!

5. Welchen Wert hat ε für die Hyperbeln, die durch Schnitte parallel zur Kegelachse entstehen? Welchen Wert hat ε speziell für die gleichseitige Hyperbel?
Anleitung: Beachten Sie dazu die Aufgabe 4 von Seite 120!

6. Ergänzen Sie die Skizzen der Aufgabe 4 von Seite 125 durch Einzeichnen der Leitlinien!

7. In welchem Abstand d vom Brennpunkt verläuft die Leitlinie bei der gleichseitigen Hyperbel?

2.1.12. Aufgaben zur Wiederholung

1. Geben Sie verschiedene Definitionen für die folgenden Kurven an und zwar jeweils die genannte Anzahl!

   a) Ellipse (6) **b)** Hyperbel (3) **c)** Parabel (2) **d)** Kreis (3)

2. In Zahlentafeln (z. B. Beyrodt-Küstner) finden Sie bei den Planetenbahnen die Angabe der jeweiligen numerischen Exzentrizität. Beurteilen Sie danach die Bahnformen!

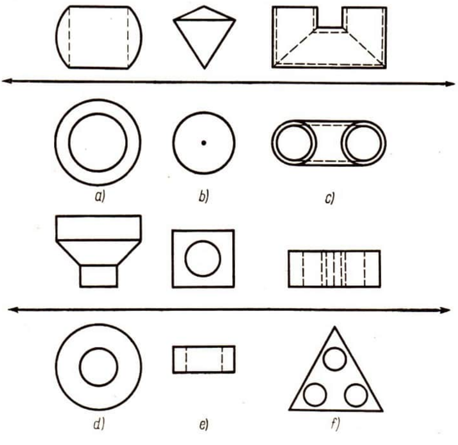


Abb. 2.50.

3. Zeichnen Sie von den in der Abbildung 2.50. in Grundriß und Aufriß dargestellten Körpern und Gegenständen anschauliche Projektionsbilder! Wählen Sie dazu im Wechsel die Kavalierperspektive, das standardisierte isometrische und das standardisierte dimetrische Projektionsverfahren!

4. Ein prismenförmiger Turm mit quadratischer Grundfläche und einem pyramidenförmigen Dach enthält an jeder Seite das Zifferblatt einer Uhr. Entwerfen Sie anschauliche Bilder nach den in Aufgabe 5 genannten Verfahren!

5. Schauen Sie sich in der Praxis nach Gegenständen um, die die Gestalt von Zylindern, Kegeln oder Kegelstümpfen haben, z.B. Papierkörbe, Töpfe, Trichter, Bauwerke, Werkstücke! Stellen Sie die Maße fest, und zeichnen Sie die Gegenstände in geeignetem Maßstab
   a) im Grundriß-Aufriß-Verfahren,
   b) in Kavalierperspektive,
   c) in isometrischer Projektion,
   d) in standardisierter dimetrischer Projektion!

6. Stellen Sie in den in Aufgabe 5 genannten Verfahren folgende Körper dar!
   a) Gerader Kreiszylinder mit aufgesetztem geraden Kegel; Mantellinie von Zylinder und Kegel je gleich dem Zylinderdurchmesser.
   b) Beidseitig halbkugelig ausgehöhlter gerader Kreiszylinder; Halbkugeln berühren sich in der Zylindermitte.
   c) Restkörper, der durch Ausbohren eines geraden Kreiskegels aus einer Halbkugel entsteht; die Spitze des Kegels liegt in der Mitte der Halbkugeloberfläche; die beiden Grundkreise fallen zusammen.
   d) Globus in der üblichen Achsenneigung (auf den Beschauer zu gerichtet); einzuzeichnen sind Pole, Äquator sowie 30°- und 60°-Breitenkreise.

2.2. Analytische Geometrie der Kegelschnitte

2.2.1. Die Scheitelgleichung für die Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel[1]

● *Erklären Sie den Begriff „geometrischer Ort" an einigen Beispielen!*

● *Beantworten Sie folgende Fragen, und stellen Sie die Ergebnisse in einer Übersicht zusammen!*
a) Welche Arten von Kegelschnitten haben Sie kennengelernt?
b) Wie entstehen die einzelnen Kegelschnitte als Schnittfiguren?
Fertigen Sie zur Erläuterung einige Zeichnungen an!

● *Wie wurden die Kegelschnitte bisher definiert?*

Die Kegelschnitte, die auf Grund ihrer Entstehung Zusammenhänge untereinander erkennen lassen, müssen auch bei der analytischen Betrachtung verwandtschaftliche und gemeinsame Beziehungen aufweisen. Deshalb schließt man an die gemeinsame Definition der nicht kreisförmigen Kegelschnitte an:

▶ **Ein nicht kreisförmiger Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden dieser Ebene, der Leitlinie, einen konstanten Wert hat. Diese Konstante heißt die numerische Exzentrizität des Kegelschnitts.**

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem diese numerische Exzentrizität $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon > 1$ ist. Diese Definition soll dazu benützt werden, eine für alle drei Kegelschnitte gemeinsame Gleichung herzu-

[1] Im folgenden wird, wenn von einer Ellipse die Rede ist, diese als nicht kreisförmig angenommen.

leiten. In dieser Gleichung tritt zur Charakterisierung der Kegelschnitte die numerische Exzentrizität ε auf (Abb. 2.51.).

Dazu werden die Kegelschnitte in eine gleichartige Lage im Koordinatensystem gebracht. Das wird erreicht, indem man je einen Scheitel der Kurven in den Anfangspunkt eines xy-Koordinatensystems legt. Die Leitlinie laufe parallel zur y-Achse.

In Abbildung 2.52. sei K ein Kegelschnitt, der die vorgeschriebene Lage im Koordinatensystem hat. Es sei $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, l die Leitlinie, F der Brennpunkt. Dann gilt $\overline{PD} \perp l$. Der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie sei d.

Dann gilt nach der Definition:

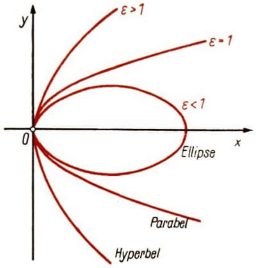


Abb. 2.51

$$(1) \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \frac{\overline{OF}}{\overline{OL}} = \varepsilon\,,$$

da P und O Punkte des Kegelschnitts sind.

Außerdem gelten folgende Beziehungen:

$$(3) \quad \overline{PF} = \sqrt{(x - \overline{OF})^2 + y^2}$$

$$(4) \quad \overline{PD} = |x + \overline{OL}|$$

$$\overline{OF} = \overline{OL} \cdot \varepsilon \qquad (\text{aus } (2))$$

$$\overline{FL} = \overline{OL} + \overline{OF} = \overline{OL} + \varepsilon \cdot \overline{OL} = d\,.$$

Man erhält aus diesen Beziehungen

$$(5) \quad \overline{OL} = \frac{d}{1 + \varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \overline{OF} = \frac{\varepsilon\, d}{1 + \varepsilon}.$$

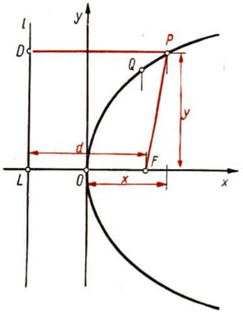


Abb.2.52.

Wenn man (5) in (3) und (4) einsetzt, folgt:

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon\, d}{1 + \varepsilon}\right)^2 + y^2} \qquad \text{und}$$

$$\overline{PD} = \left|x + \frac{d}{1 + \varepsilon}\right|.$$

Diese Größen werden in (1) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon\, d}{1 + \varepsilon}\right)^2 + y^2} : \left(\left|x + \frac{d}{1 + \varepsilon}\right|\right) = \varepsilon$$

$$\left(x - \frac{\varepsilon\, d}{1 + \varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x + \frac{d}{1 + \varepsilon}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{2\, x\, \varepsilon\, d}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\, d^2}{(1 + \varepsilon)^2} + y^2 = \varepsilon^2\, x^2 + \frac{2\, x\, \varepsilon^2\, d}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\, d^2}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Daraus entsteht

$$y^2 = \frac{2\,\varepsilon\, d}{1+\varepsilon}\, x\,(1+\varepsilon) + x^2\,(\varepsilon^2 - 1)$$

und schließlich **die gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte**

$$(6) \qquad y^2 = 2\,\varepsilon\, d x + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 \ .$$

Also müssen die Koordinaten jedes Punktes, der (1) genügt, (6) erfüllen. Durchläuft man die Schlußkette rückwärts, so erkennt man, daß auch umgekehrt alle Punkte, deren Koordinaten (6) genügen, (1) erfüllen und damit auf dem Kegelschnitt liegen.

Die zu F gehörige Ordinate eines Kegelschnitts in Normallage heißt **Halbparameter** p (Abb. 2.51.). Die durch F gehende zur Achse des Kegelschnitts senkrechte Sehne heißt **Parameter** $2\,p$.

- *Bestimmen Sie die Abszisse des Brennpunktes F!* (−1)
- *Berechnen Sie den Halbparameter p!*

Mit diesem Parameter heißt die Scheitelgleichung:

$$(7) \qquad y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 \ .$$

2.2.2. Scheitelgleichungen und Mittelpunktsgleichungen

Die gemeinsame Scheitelgleichung kann für die einzelnen Kegelschnitte, d.h. für die speziellen Werte $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$, die nach der Definition für die Spezialfälle der Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) charakteristisch sind, gedeutet werden. Man erhält die Scheitelgleichungen der Kegelschnitte.

a) Fall $0 < \varepsilon < 1$

Für die Gleichung (7) ergibt sich die Form

$$y^2 = 2\,p\,x - (1 - \varepsilon^2)\, x^2 \,.$$

Dieser Kegelschnitt schneidet die x-Achse in zwei Punkten. Für $y = 0$ ergibt sich

$$x\,[2\,p - (1 - \varepsilon^2)\, x] = 0 \quad \text{und daraus}$$

$$x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{2\,p}{1 - \varepsilon^2}\,.$$

Der Punkt $P_1\ (0; 0)$ ist der eine Hauptscheitel des Kegelschnitts (Abb. 2.53.). Wegen $0 < \varepsilon < 1$ ist $x_2 > 0$. Man setzt $x_2 = 2\,a$ und nennt die Strecke **große Achse des Kegelschnitts.** Es ist nach dieser Festsetzung

$$x_2 = \frac{2\,p}{1 - \varepsilon^2} = 2\,a\,, \quad \text{also} \ \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = a\,.$$

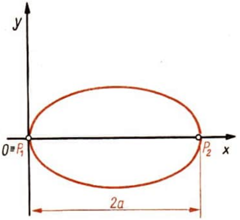


Abb. 2.53.

Mit diesem Wert nimmt die Scheitelgleichung für die Ellipse folgende Form an:

(8) $$y^2 = 2\,px - \frac{p}{a}\,x^2 \,.$$

b) Fall $\varepsilon = 1$

Wenn $\varepsilon = 1$ ist, erhält man

(9) $$y^2 = 2\,p\,x \,.$$

Das ist die Scheitelgleichung der Parabel.

c) Fall $\varepsilon > 1$

Der Kegelschnitt mit der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2$ hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $P_1\,(0; 0)$ und $P_2\left(-\dfrac{2\,p}{\varepsilon^2 - 1}\,; 0\right)$.

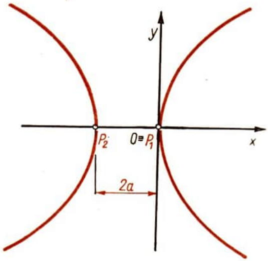
Der Punkt P_1 ist der eine Scheitel des Kegelschnitts, der Punkt P_2 der andere (Abb. 2.54.). Für $\varepsilon > 1$ ist $x_2 < 0$. Der Punkt P_2 liegt auf dem negativen Teil der x-Achse. Man setzt $x_2 = -\,2\,a$ und nennt $2\,a$ die Achse der Hyperbel. Nach dieser Festsetzung ist dann

$$-\,2\,a = -\,\frac{2\,p}{\varepsilon^2 - 1}\,,$$

also $\dfrac{p}{\varepsilon^2 - 1} = a$

oder $\varepsilon^2 - 1 = \dfrac{p}{a}\,.$

Abb. 2.54.



Die Scheitelgleichung der Hyperbel lautet:

(10) $$y^2 = 2\,px + \frac{p}{a}\,x^2 \,.$$

Aus den Scheitelgleichungen lassen sich die sogenannten Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel herleiten, d.h. diejenigen Gleichungen, die gelten, wenn der Koordinatenursprung mit dem Halbierungspunkt von $\overline{F_1F_2}$ und die Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

Die Ellipse ($0 < \varepsilon < 1$) hat die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2 \,.$$

Man führt folgende Koordinatentransformation durch (Abb. 2.55.):

(11) $$x = \xi + a; \qquad y = \eta \,.$$

Daraus entsteht

$$y^2 = \frac{2\,\varepsilon\,d}{1+\varepsilon}\,x\,(1+\varepsilon) + x^2\,(\varepsilon^2 - 1)$$

und schließlich **die gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte**

$$(6) \qquad y^2 = 2\,\varepsilon\,dx + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2\ .$$

Also müssen die Koordinaten jedes Punktes, der (1) genügt, (6) erfüllen. Durchläuft man die Schlußkette rückwärts, so erkennt man, daß auch umgekehrt alle Punkte, deren Koordinaten (6) genügen, (1) erfüllen und damit auf dem Kegelschnitt liegen.

Die zu F gehörige Ordinate eines Kegelschnitts in Normallage heißt **Halbparameter** p (Abb. 2.51.). Die durch F gehende zur Achse des Kegelschnitts senkrechte Sehne heißt **Parameter** $2\,p$.

● *Bestimmen Sie die Abszisse des Brennpunktes F!*

● *Berechnen Sie den Halbparameter p!*

Mit diesem Parameter heißt die Scheitelgleichung:

$$(7) \qquad y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2\ .$$

2.2.2. Scheitelgleichungen und Mittelpunktsgleichungen

Die gemeinsame Scheitelgleichung kann für die einzelnen Kegelschnitte, d.h. für die speziellen Werte $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$, die nach der Definition für die Spezialfälle der Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) charakteristisch sind, gedeutet werden. Man erhält die Scheitelgleichungen der Kegelschnitte.

a) Fall $0 < \varepsilon < 1$

Für die Gleichung (7) ergibt sich die Form

$$y^2 = 2\,p\,x - (1 - \varepsilon^2)\,x^2\ .$$

Dieser Kegelschnitt schneidet die x-Achse in zwei Punkten. Für $y = 0$ ergibt sich

$$x\,[2\,p - (1 - \varepsilon^2)\,x] = 0 \quad \text{und daraus}$$

$$x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{2\,p}{1 - \varepsilon^2}\,.$$

Der Punkt $P_1\,(0;0)$ ist der eine Hauptscheitel des Kegelschnitts (Abb. 2.53.). Wegen $0 < \varepsilon < 1$ ist $x_2 > 0$. Man setzt $x_2 = 2\,a$ und nennt die Strecke **große Achse des Kegelschnitts.** Es ist nach dieser Festsetzung

$$x_2 = \frac{2\,p}{1 - \varepsilon^2} = 2\,a\,, \quad \text{also}\ \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = a\ .$$

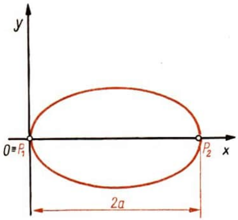


Abb. 2.53.

Mit diesem Wert nimmt die Scheitelgleichung für die Ellipse folgende Form an:

(8) $$y^2 = 2\,px - \frac{p}{a}\,x^2\,.$$

b) Fall $\varepsilon = 1$

Wenn $\varepsilon = 1$ ist, erhält man

(9) $$y^2 = 2\,p\,x\,.$$

Das ist die Scheitelgleichung der Parabel.

c) Fall $\varepsilon > 1$

Der Kegelschnitt mit der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2$ hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $P_1\,(0;0)$ und $P_2\left(-\frac{2\,p}{\varepsilon^2 - 1};0\right)$.

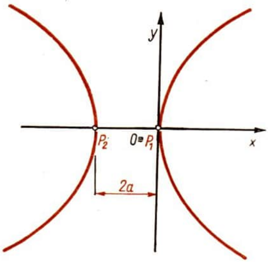
Der Punkt P_1 ist der eine Scheitel des Kegelschnitts, der Punkt P_2 der andere (Abb. 2.54.). Für $\varepsilon > 1$ ist $x_2 < 0$. Der Punkt P_2 liegt auf dem negativen Teil der x-Achse. Man setzt $x_2 = -\,2\,a$ und nennt $2\,a$ die Achse der Hyperbel. Nach dieser Festsetzung ist dann

$$-\,2\,a = -\,\frac{2\,p}{\varepsilon^2 - 1}\,,$$

also $\dfrac{p}{\varepsilon^2 - 1} = a$

oder $\varepsilon^2 - 1 = \dfrac{p}{a}\,.$

Abb. 2.54.



Die Scheitelgleichung der Hyperbel lautet:

(10) $$y^2 = 2\,px + \frac{p}{a}\,x^2\,.$$

Aus den Scheitelgleichungen lassen sich die sogenannten Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel herleiten, d.h. diejenigen Gleichungen, die gelten, wenn der Koordinatenursprung mit dem Halbierungspunkt von $\overline{F_1F_2}$ und die Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

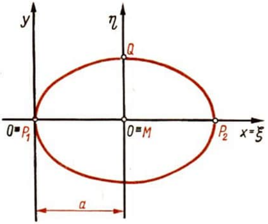
Die Ellipse $(0 < \varepsilon < 1)$ hat die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2\,.$$

Man führt folgende Koordinatentransformation durch (Abb. 2.55.):

(11) $$x = \xi + a\,; \qquad y = \eta\,.$$

Abb. 2.55.



Bei dieser Transformation fällt der Mittelpunkt M der Ellipse, der im $x\,y$-System die Koordinaten $(a;\ 0)$ hat, mit dem Ursprung des $\xi\,\eta$-Systems zusammen.
Nach der Transformation erhält man für die Ellipse folgende Gleichung:

(12) $\eta^2 = p\,a - \dfrac{p\,\xi^2}{a}$.

Bei den weiteren Untersuchungen ist es zweckmäßig, wieder die gebräuchlichen Symbole zu verwenden:

(13) $y^2 = p\,a - \dfrac{p\,x^2}{a}$.

Die Strecke $\overline{QM}$ (Abb. 2.55.) wird mit b bezeichnet; sie ist die **kleine Halbachse des Kegelschnitts.**

Es soll nun die Größe p bestimmt werden. Für $x = 0$ erhält man $p\,a = y^2$; $y^2 = b^2$ und daraus $p = \dfrac{b^2}{a}$. Der Parameter hat also den Wert $\dfrac{b^2}{a}$. Diesen Wert setzt man in die Gleichung (13) ein, und man erhält:

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}\,x^2 + b^2\,,$$

(14) $\boldsymbol{b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2}$ oder $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.

Das ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

● *Leiten Sie in ähnlicher Weise die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel* ($\varepsilon > 1$) *her!*

Für den Fall $\varepsilon = 1$, die Parabel, gibt es keine Mittelpunktsgleichung.

Bei den oben hergeleiteten Mittelpunktsgleichungen bzw. bei der Scheitelgleichung der Parabel fällt der Scheitelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammen.

Die Scheitelgleichungen der

Ellipse: $\quad y^2 = 2\,p\,x - \dfrac{p}{a}\,x^2$;

Parabel: $\quad y^2 = 2\,p\,x$;

Hyperbel: $\quad y^2 = 2\,p\,x + \dfrac{p}{a}\,x^2$

unterscheiden sich jeweils um das Glied $\dfrac{p}{a}\,x^2$.

Das Subtrahieren bzw. das Addieren des Gliedes $\frac{p}{a} x^2$ in der Scheitelgleichung der Parabel hat zu den Namen Ellipse[1] bzw. Hyperbel[2] geführt. Bei der Parabel wird das Quadrat mit der Seite y mit dem Rechteck $2\,p\,x$ verglichen.[3]

Aufgaben

1. Die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts sei $y^2 = \frac{10}{3}x - \frac{5}{9}x^2$.
   a) Was ist das für ein Kegelschnitt?
   b) Wie lautet die entsprechende Mittelpunktsgleichung?
   c) Geben Sie die Koordinaten der Brennpunkte und die Größen der Achsen an!
   d) Wie groß ist die numerische Exzentrizität ε?
   e) Wie groß ist die lineare Exzentrizität e?

2. Die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts sei $y^2 = \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2$.
   a) Was ist das für ein Kegelschnitt?
   b) Wie lautet die entsprechende Mittelpunktsgleichung?
   c) Geben Sie die Koordinaten der Brennpunkte und die Größen der Achsen an!
   d) Wie groß sind ε und e?

2.2.3. Herleitung der Mittelpunktsgleichungen von Ellipse und Hyperbel sowie der Scheitelgleichung der Parabel mit Hilfe der Ortsdefinitionen

- *Erläutern Sie die Ortsdefinitionen der Kegelschnitte an entsprechenden Skizzen!*

- *Wiederholen Sie die analytisch-geometrischen Untersuchungen an Punkten und Strecken!*
  Beantworten Sie dabei folgende Fragen!
  a) Wie werden die Koordinaten eines Punktes in der Ebene festgelegt?
  b) Wie kann man den Abstand zweier Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ bestimmen?

- *Bei der Behandlung der Differentialrechnung haben Sie Kurven diskutiert.*
  a) Welche Gesichtspunkte muß man bei der Kurvendiskussion beachten?
  Wann ist eine Kurve steigend (fallend)?
  Wie bestimmt man ihre Schnittpunkte mit den Achsen?
  Wie ermittelt man Extrempunkte und Wendepunkte?
  Wie untersucht man das Verhalten der Kurve im Unendlichen?
  b) Stellen Sie die Gesichtspunkte und die zugehörigen Kriterien, die bei einer Kurvendiskussion zu beachten sind, in einer Übersicht zusammen!

Die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel bzw. die Scheitelgleichung der Parabel kann man auch mit Hilfe der Ortsdefinitionen herleiten.

[1] ἡ ἔλλειψις (griech.), Mangel
[2] ἡ ὑπερβολή (griech.), Überschuß
[3] ἡ παραβολή (griech.), Gleichheit

Es seien $F_1(-e; 0)$ und $F_2(e; 0)$ die Brennpunkte einer Ellipse und $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt auf der Ellipse. Der Mittelpunkt M der Ellipse, der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$, fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen (Abb. 2.56.). Es gilt dann:

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \text{ (konstant).}$$

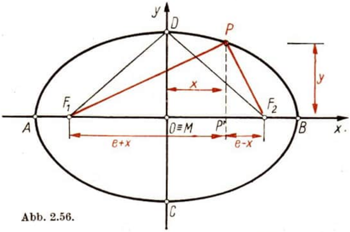


Abb. 2.56.

Durch Einsetzen der entsprechenden Koordinaten in die Formel für die Länge einer Strecke erhält man:

(15) $\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a$.

Formen Sie die Gleichung durch Trennen der Wurzeln, Quadrieren und Ordnen so um, daß Sie die Ihnen bereits bekannte Mittelpunktsgleichung der Ellipse erhalten!

Beispiel 1:

Gegeben sind die Brennpunkte $F_1(-3; 0)$ und $F_2(3; 0)$ und die konstante Summe der Abstände $2a = 10$. Für b erhält man dann den Wert $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 4$. Für die Gleichung der Ellipse ergeben sich somit folgende Formen:

$16x^2 + 25y^2 = 400$,

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$,

$y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$ und

$y = -\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

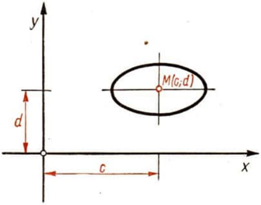


Abb. 2.57.

Sind die Koordinaten des Ellipsenmittelpunkts mit $M(c; d)$ gegeben (Abb. 2.57.) und liegen die Ellipsenachsen parallel zu den Koordinatenachsen, so ordnet man dem verschobenen Kegelschnitt ein derartiges Koordinatensystem zu, in dem der Ellipsenmittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. In diesem $\xi\eta$-System lautet die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Wegen $\xi = x - c$ und $\eta = y - d$ folgt für die Ellipse in achsenparalleler Lage:

(16) $$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1.$$

■ **Beispiel 2:**

Die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

hat die Achsen $a = 6$ und $b = 5$. Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $M\ (-3; 2)$.

● *Untersuchen Sie mit Hilfe der Ellipsengleichung die Eigenschaften der Ellipse (Schnittpunkte mit den Achsen, Symmetrieeigenschaften und den Verlauf der Kurve)!*

● *Erläutern Sie, inwiefern der Kreis als Sonderfall der Ellipse angesehen werden kann!*

● *Leiten Sie aus der Ortsdefinition die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel her!*

● *Untersuchen Sie die Eigenschaften der Hyperbel!*

● *Leiten Sie aus der Ortsdefinition die Scheitelgleichung der Parabel her!*

● *Untersuchen Sie die Eigenschaften der Parabel!*

● *Stellen Sie die Gleichungen und Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel in einer Übersicht zusammen!*

Aufgaben

1. Es ist die Mittelpunktsgleichung der folgenden Ellipsen aufzustellen.

a) $a = 10 \quad b = 6$ **b)** $a = 15 \quad b = 12$ **c)** $a = 4{,}5 \quad b = 6{,}5$

d) $a = 3 \quad b = 5$ **e)** $a = 10 \quad e = 6$ **f)** $a = 20 \quad e = 16$

g) $b = 10 \quad e = 25$ **h)** $b = 4 \quad e = 3$

(M falle mit dem Koordinatenursprung zusammen, die Hauptachse mit der x-Achse.) Geben Sie die Koordinaten der Scheitel- und der Brennpunkte an!

2. Es ist die Mittelpunktsgleichung für folgende Hyperbeln aufzustellen.

a) $a = 5 \quad b = 3$ **b)** $a = 3 \quad b = 3$ **c)** $a = 3 \quad b = 2$

d) $a = 2{,}3 \quad b = 2$ **e)** $a = 3 \quad e = 5$ **f)** $a = 5 \quad e = 8$

(M falle mit dem Koordinatenursprung zusammen, die Achse mit der x-Achse.) Geben Sie jeweils die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte an!

3. Es ist die Scheitelgleichung der Parabel aufzustellen, die durch folgende Achsen und Parameter bestimmt wird.

a) x-Achse und $2\,p = 4$ **b)** x-Achse und $2\,p = 3{,}5$ **c)** x-Achse und $2\,p = -8$

d) y-Achse und $2\,p = 4$ **e)** y-Achse und $2p = -12$ **f)** y-Achse und $2\,p = 3{,}5$

(S fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen.)

4. Ermitteln Sie für die Parabeln aus Aufgabe 3 die folgenden Angaben!

a) Die Koordinaten des Scheitels und des Brennpunktes

b) Die Gleichung der Leitlinie

c) Beschreiben Sie die Lage der Parabeln!

5. Von einer Ellipse sind die Brennpunkte $F_1(-6; 0)$ und $F_2(6; 0)$ und die Hauptscheitel $A(-8; 0)$ und $B(8; 0)$ gegeben.

   a) Welche Koordinaten haben die Nebenscheitel?
   b) Wie lautet die Gleichung der Ellipse?
   c) Bestimmen Sie jeweils die Nebenscheitel durch Konstruktion!

6. Von einer Ellipse sind die vier Scheitelpunkte gegeben. Sie liegen auf den Koordinatenachsen und haben vom Koordinatenursprung eine Entfernung von 18 bzw. 12 Längeneinheiten.

   a) Welche Koordinaten haben die Brennpunkte?
   b) Bestimmen Sie die Brennpunkte durch Konstruktion!

7. Einem Rechteck mit den Seiten 16 und 25 Längeneinheiten ist eine Ellipse einbeschrieben.

   a) Wie lautet die Gleichung der Ellipse?
   b) Welche Koordinaten haben die Brennpunkte?

8. Einem Rechteck mit den Seiten 16 und 7,2 ist eine Ellipse umbeschrieben, deren Brennpunkte in den Mittelpunkten der kleineren Seiten liegen. Es ist die Gleichung der Ellipse zu bestimmen.

9. Von einer Hyperbel sind die Brennpunkte $F_1(-8; 0)$ und $F_2(8; 0)$ und die Scheitelpunkte $A(-6; 0)$ und $B(6; 0)$ gegeben.

   a) Wie groß ist b?
   b) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?

10. Wie lautet die Gleichung einer durch den Punkt $P_1(9; 4)$ gehenden Hyperbel, deren Achsen mit den Achsen des Koordinatensystems zusammenfallen und bei der $2a = 6$ ist?

11. Welche Lage hat die Parabel $y^2 = 2px$ mit $p < 0$, welche Lage hat die Parabel $x^2 = 2py$ mit $p > 0$?

12. Von einer Parabel in Scheitellage ist der Brennpunkt $F(6{,}5; 0)$ gegeben.

    a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?
    b) Wie lautet die Gleichung der Leitlinie?

13. Wie lautet die Gleichung der Parabel mit dem Brennpunkt $F(-7; 0)$ und der Leitliniengleichung $x - 7 = 0$?

14. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht. Der Mittelpunkt der Ellipse liege im Koordinatenursprung.

    a) $P_1(4; 2)$, $P_2(1; 4)$ b) $P_1\left(4; \frac{3}{5}\right)$, $P_2\left(-3; \frac{4}{5}\right)$

    c) $P_1(18; 20)$, $P_2(-24; 15)$ d) $P_1\left(-3; \frac{24}{5}\right)$, $P_2(5; 0)$

    Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte an!

15. Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht! Der Mittelpunkt liege im Koordinatenursprung.

    a) $P_1(5; 3)$, $P_2(8; -10)$ b) $P_1(6; \sqrt{5})$, $P_2(-5; 1)$

    c) $P_1(5; 0)$, $P_2(7; 2\sqrt{6})$ d) $P_1(9; 4)$, $P_2(-3; 0)$

    Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte an!

16. Bestimmen Sie die Gleichungen und die Brennpunkte der Parabeln mit den folgenden Achsen, Parametern und Scheitelkoordinaten!

a) $y = 4$, $p = 2$; $S(2; y_s)$ b) $y = -5$, $p = 3{,}5$; $S(3; y_s)$

c) $x = 5$, $p = 2{,}2$; $S(x_s; 3)$ d) $x = -3$, $p = 3$; $S(x_s; -8)$

Wie lautet jeweils die Gleichung der Leitlinie?

17. Die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ soll durch den Punkt P_i mit folgenden Koordinaten gehen.

a) $P_1(-2; 2)$ b) $P_2(2; 4)$ c) $P_3(-2; \sqrt{56})$

d) $P_4(12; 6)$ e) $P_5(1; -8)$ f) $P_6(-25; -10)$

Bestimmen Sie jeweils den Halbparameter p und die Gleichung der Leitlinie!

18. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die durch den Punkt P_1 geht und von der die Scheitelabszisse x_s oder die Scheitelordinate y_s und die Achse gegeben sind!

P_1	Scheitelkoordinaten	Achse
a) $(7; 4)$	$x_s = 3$	$y = 8$
b) $(5; -5)$	$x_s = -3$	$y = 3$
c) $(-11; 4)$	$y_s = -2$	$x = -5$

Geben Sie die Koordinaten des Brennpunkts an!

19. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die den Halbparameter $p = 4$, die Achse $y = 3$ und die Scheitelabszisse $x_s = 4$ hat! Geben Sie die Koordinaten des Brennpunkts an!

20. Es ist die Gleichung der Parabel zu bestimmen, deren Achse zur x-Achse parallel ist und die durch die folgenden Punkte geht. Geben Sie die Koordinaten des Brennpunkts und die Gleichung der Leitlinie an!

a) $P_1(-3; 1)$; $P_2(2; 4)$; $P_3(-6; -2)$

b) $P_1(7; 2)$; $P_2(7{,}4; 4)$; $P_3(17; 12)$

21. Es ist die Gleichung der Parabel zu bestimmen, deren Achse zur x-Achse parallel ist und die durch die folgenden Punkte geht.

a) $P_1(-3; -2)$; $P_2(3; 1)$; $P_3(9; 10)$

b) $P_1(4; -2)$; $P_2(4; 16)$; $P_3(1; -1)$

22. Bestimmen Sie die Größe der Halbachsen, die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte folgender Kegelschnitte!

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{9} - 4\,y^2 = 1$

c) $2\,x^2 - 3\,y^2 = 1$ d) $x^2 + 4\,y^2 = 64$

e) $25\,x^2 + 16\,y^2 = 400$ f) $64\,x^2 + 225\,y^2 = 14\,400$

g) $5\,x^2 - 4\,y^2 = 20$ h) $2\,x^2 - 5\,y^2 - 8 = 0$

i) $2\,x^2 + 4\,y^2 - 5 = 0$ k) $2\,x^2 + \dfrac{4\,y^2}{9} = 1$

l) $a\,x^2 + b\,y^2 + c = 0$ $(a > 0, b > 0, c < 0)$

m) $x^2 - 2\,y^2 - 9 = 0$

23. Untersuchen Sie, welche von den nachfolgenden Punkten innerhalb oder außerhalb des jeweiligen Kegelschnitts liegen!

a) Kegelschnitt: $9x^2 + 25y^2 = 225$, $P_1(4;1)$, $P_2(4;2)$, $P_3(2{,}7;2{,}7)$, $P_4(2;7)$

b) Kegelschnitt: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $P_1(6;2)$, $P_2(4;3)$, $P_3(-3;-1)$, $P_4(-4;1)$

c) Kegelschnitt: $y^2 = 12x$, $P_1(2;2)$, $P_2(1;-3)$, $P_3(3;5)$, $P_4(4;-8)$

24. Drücken Sie die Länge der Brennstrahlen, die zu einem Ellipsenpunkt $P_1(x_1;y_1)$ gehören, durch a, e und x aus!

25. Mit $P_1(x_1;y_1)$ sei ein Punkt des Kegelschnitts $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. $y^2 = 2px$ gegeben.

a) Wie lauten die Gleichungen der Brennstrahlen?

b) Wie lang sind die Strecken $\overline{F_1P_1}$ und $\overline{F_2P_1}$ (F_1 und F_2 sind die Brennpunkte)?

26. Weisen Sie auf verschiedene Weise nach, daß der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist!

27. Wie lauten die Gleichungen des Haupt- bzw. Nebenscheitelkreises der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d.h. des Kreises, der den gleichen Mittelpunkt wie die Ellipse hat und der durch die Haupt- bzw. Nebenscheitel der Ellipse geht?

28. Wie lautet die Gleichung des Scheitelkreises der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d.h. des Kreises, der den gleichen Mittelpunkt wie die Hyperbel hat und durch deren Scheitel geht?

29. Die durch $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ dargestellte Hyperbel heißt die konjugierte Hyperbel zu der durch $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ gegebenen.

a) Bestimmen Sie Lage und Verlauf der konjugierten Hyperbel!

b) Wie lautet die Gleichung der zu $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$ konjugierten Hyperbel?

30. Die Achsen eines Kegelschnitts verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie die Brennpunkt-, Scheitel- und Mittelpunktskoordinaten der folgenden Kegelschnitte!

a) $3x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

b) $4x^2 + 9y^2 + 18y + 8 = 0$

c) $25x^2 - 16y^2 - 90x + 17 = 0$

d) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 40y - 56 = 0$

e) $25x^2 - 64y^2 - 300x - 256y - 956 = 0$

f) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

31. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, deren Hauptachse $2a = 26$ und deren Brennpunkte $F_1(14;0)$ und $F_2(-10;0)$ sind!

2.2.4. Kegelschnitt und Gerade

Wenn Ellipsen- und Geradengleichung bekannt sind und man die Koordinaten der gemeinsamen Punkte $P_s(x_s; y_s)$ einer Ellipse und einer Geraden bestimmen will, löst man, weil die Koordinaten des Punktes P_s beide Gleichungen erfüllen müssen, das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\ b^2 x_s^2 + a^2 y_s^2 = a^2 b^2 \,, \\ \mathrm{II}:&\ y_s = m x_s + n \,. \end{aligned}$$

Durch Umformen der ersten Gleichung und Einsetzen von y_s der zweiten in die erste erhält man:

$$\begin{aligned} b^2 x_s^2 + a^2 (m x_s + n)^2 - a^2 b^2 &= 0 \\ (b^2 + a^2 m^2) x_s^2 + 2 a^2 m n x_s + a^2 (n^2 - b^2) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man die Abszissen der Schnittpunkte berechnen:

$$x_{s\,1,2} = -\frac{a^2 m n \pm a \sqrt{a^2 m^2 n^2 - (n^2 - b^2)(b^2 + a^2 m^2)}}{b^2 + a^2 m^2} \,.$$

Die Ordinaten der gemeinsamen Punkte erhält man durch Einsetzen der Abszissenwerte in eine der Gleichungen des Systems, hier zweckmäßigerweise in die Geradengleichung. Will man das Schnittverhalten diskutieren, dann braucht man nur die Diskriminante

$$D = a^2 m^2 n^2 - (a^2 m^2 + b^2)(n^2 - b^2) = b^2 (a^2 m^2 + b^2 - n^2)$$

zu untersuchen. Das Vorzeichen der Diskriminante ist aber gleich dem Vorzeichen des Ausdrucks $E = a^2 m^2 + b^2 - n^2$.

1. Fall: $E > 0$

Es gibt zwei reelle voneinander verschiedene gemeinsame Punkte. Die Gerade ist Sekante der Ellipse.

2. Fall: $E = 0$

Es gibt nur einen reellen gemeinsamen Punkt, einen Berührungspunkt. Die Gerade ist Tangente.

3. Fall: $E < 0$

Es gibt keine reellen gemeinsamen Punkte. Die Gerade verläuft außerhalb der Ellipse.

Beispiel 3:

An die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist die zu einer gegebenen Richtung m parallele Tangente zu ermitteln.

Es sei $y = m x + n$ die gesuchte Tangente. Dann gilt nach den obigen Überlegungen $E = a^2 m^2 + b^2 - n^2 = 0$, also $n_1 = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ und

$n_2 = -\sqrt{a^2 m^2 + b^2}$. Durch Einsetzen in die Geradengleichung folgt dann $y = m\,x + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ und $y = m\,x - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$. Zu einer gegebenen Richtung m erhält man demnach zwei parallele Tangenten.

Beispiel 4:

Von einem Punkt $P_0\,(x_0; y_0)$ außerhalb der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die Tangenten an die Ellipse zu legen.

Es sei $y = m\,x + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ die zu einer beliebigen Richtung m parallele Tangente. Es ist in diesem Fall m so zu bestimmen, daß die Tangente durch P_0 geht. Man erhält $y_0 = m\,x_0 + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ und durch Quadrieren $(y_0 - m\,x_0)^2 = a^2 m^2 + b^2$.

Aus dieser Gleichung folgen m_1 und m_2. Die Gleichungen der Tangenten erhält man dann mit Hilfe der Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden.

Die Steigung der Tangente einer Kurve in einem Punkt $P_1\,(x_1; y_1)$ ist gleich der Steigung der Kurve in diesem Punkt. Man erhält für die Steigung

$$(17)\quad f'(x_1) = m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

wobei $P\,(x; y)$ ein beliebiger Punkt der Tangente ist.

Diese Beziehung stellt die **allgemeine Tangentengleichung** für eine beliebige Kurve dar. Dabei ist $P_1\,(x_1; y_1)$ der Berührungspunkt. Für die Ellipse gilt:

$$f'(x_1) = m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} \qquad (y_1 \neq 0)\,.$$

Mit Hilfe der Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden (Richtung m und Punkt P_1) folgt daraus:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)\,,$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x\,x_1}{a^2 y_1} + \frac{b^2 x_1^2}{a^2 y_1}$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2\,.$$

Der Punkt $P_1\,(x_1; y_1)$ ist ein Punkt der Ellipse, also gilt:

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2\,.$$

Daraus folgt $\boldsymbol{a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2}$ oder

$$(18)\quad \boldsymbol{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1}\,.$$

Das ist die Tangentengleichung der Ellipse; sie gilt übrigens auch im Fall $y_1 = 0$.

Beispiel 5:

Es sollen die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ mit der Geraden $3x + 2y - 3 = 0$ bestimmt werden.
Setzt man $2y_s = 3 - 3x_s$ in die umgeformte Ellipsengleichung $x_s^2 + 4y_s^2 - 4 = 0$ ein, so erhält man $10x_s^2 - 18x_s + 5 = 0$ und daraus $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{31}}{10}$ und schließlich $y_{1,2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 \mp \sqrt{31}}{10}$, wobei jeweils die oberen und die unteren Vorzeichen zusammengehören.

Beispiel 6:

Die Gleichungen der Tangenten, die die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} - 1 = 0$ in den Punkten P_1 und P_2 mit der Abszisse $x_{1,2} = 2$ berühren, lauten wegen $y_1 = \sqrt{12\left(1 - \frac{4}{16}\right)} = 3$ und $y_2 = -\sqrt{12\left(1 - \frac{4}{16}\right)} = -3$:

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{2x}{16} + \frac{(-3)\,y}{12} = 1\,.$$

Man erhält schließlich

$$x + 2y = 8 \qquad \text{und} \qquad x - 2y = 8\,.$$

Ähnliche Überlegungen wie bei der Ellipse ermöglichen es auch, das Schnittverhalten von Hyperbel und Gerade zu diskutieren. Führen Sie diese Überlegungen durch!

Leiten Sie die Tangentengleichung für die Hyperbel her!

Wiederholen Sie aus der Differentialrechnung den Abschnitt „Verhalten einer Kurve im Unendlichen" und den Begriff „Asymptote!"

Wenn eine Gerade $y = mx$ mit der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ zum Schnitt gebracht wird, ergeben sich für die Schnittpunkte $S(x_s; y_s)$ folgende Koordinaten:

$$x_{s_1} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad \text{bzw.} \quad x_{s_2} = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\,,$$

$$y_{s_1} = \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad \text{bzw.} \quad y_{s_2} = -\frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\,.$$

Die Werte x_s und y_s sind reell für $b^2 > a^2m^2$ (Radikand ist dann positiv). Für $b^2 < a^2m^2$ ist der Radikand negativ, und es gibt keine Schnittpunkte. Falls $m \to \frac{b}{a}$ oder $m \to -\frac{b}{a}$ strebt, wird der Radikand Null, und es folgt:
$x_s \to \infty$ bzw. $x_s \to -\infty$ und $y_s \to \infty$ bzw. $y_s \to -\infty$.
Für die Steigung der Geraden $y = mx$ erhält man in diesem Grenzfall $m = \frac{b}{a}$ bzw. $m = -\frac{b}{a}$.

Erläutern Sie, wie diese Geraden verlaufen!

Man bezeichnet die Geraden

$$(19) \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

als **Asymptoten der Hyperbel** $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.
Wenn ein Punkt eine Kurve c in ein und demselben Sinn nach dem Unendlichen hin durchläuft und es eine solche Gerade g gibt, daß der Abstand des Kurvenpunktes von g gegen Null strebt, so nennt man die Gerade g eine Asymptote an die Kurve c.

Wie lauten die Asymptotengleichungen der gleichseitigen Hyperbel ($a = b$)? Erläutern Sie die Bezeichnung „rechtwinklige Hyperbel“!

Beispiel 7:

Es sind die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{8}{5}} = 1 \text{, daraus}$$

$a = 2$, $b = \sqrt{\frac{8}{5}}$ und als Gleichung für die Asymptoten

$$y = \sqrt{\frac{2}{5}}\,x \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{\frac{2}{5}}\,x\,.$$

Untersuchen Sie das Schnittverhalten von Parabel und Gerade!

Leiten Sie die Tangentengleichung für die Parabel her!

Wie lauten die Tangentengleichungen der Kegelschnitte nach einer Verschiebung parallel zu den Achsen des Koordinatensystems?

In der Abbildung 2.58. sei an die Parabel im Punkt P die Tangente gezeichnet. Die Tangente schneidet die x-Achse in T; das Lot von P auf die x-Achse schneidet diese in Q. Die Strecke $\overline{TQ}$ nennt man Subtangente der Parabel.

Bestimmen Sie die Länge der Subtangente!

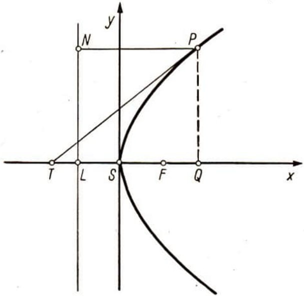


Abb. 2.58.

Aufgaben

1. Geben Sie die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $y = m\,x$ an!

2. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Geraden $x - y = 4$ mit dem Kegelschnitt $3x^2 + 4y^2 = 120$! Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Konstruktion!

3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$!

4. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kegelschnitts $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ mit den Koordinatenachsen!

5. Es sind die Schnittpunkte des Kegelschnitts $9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 10 = 0$ mit der Geraden $3x - 2y - 3 = 0$ zu bestimmen.

6. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $A\,x + B\,y + C = 0$ zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam hat!

7. Geben Sie die Schnittpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $y = m\,x$ an! Unter welcher Bedingung sind keine Schnittpunkte vorhanden?

8. Bringen Sie die Gerade $x + y = 4$ mit dem Kegelschnitt $9x^2 - 4y^2 = 36$ zum Schnitt! Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Konstruktion!

9. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$!

10. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kegelschnitts $16x^2 - 25y^2 + 64x - 336 = 0$ mit der x-Achse!

11. Es sind die Schnittpunkte der Hyperbel $18x^2 - y^2 + 12x = 0$ mit der Geraden $3x - y - 6 = 0$ zu bestimmen.

12. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $A\,x + B\,y + C = 0$ zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam hat!

13. Geben Sie die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ mit der Geraden $y = m\,x$ an! Wie lang ist die Parabelsehne?

14. Bringen Sie die Gerade $6x - y - 12 = 0$ mit dem Kegelschnitt $y^2 = 6x$ zum Schnitt! Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Konstruktion!

15. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kegelschnitts $2x^2 + 16x + y - 18 = 0$ mit den Koordinatenachsen!

16. Es sind die Schnittpunkte des Kegelschnitts $2x^2 + 16x + y + 34 = 0$ mit der Geraden $\frac{x}{3} - \frac{y}{15} + 1 = 0$ zu bestimmen.

17. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ mit der Geraden $A\,x + B\,y + C = 0$ zwei, einen oder keinen Schnittpunkt gemeinsam hat!

18. Untersuchen Sie das Schnittverhalten der folgenden Kegelschnitte mit den jeweiligen Geraden!

a) $3x^2 + 4y^2 = 120$	und $x + y = 4$
b) $y^2 = 24x$	und $6x - 5y + 25 = 0$
c) $36x^2 - 25y^2 = 900$	und $y = 2x - 8$
d) $x^2 - 4y^2 = 144$	und $11x - 14y - 108 = 0$
e) $y = \sqrt{18x}$	und $6x + y - 6 = 0$
f) $25x^2 + 169y^2 - 100x - 4125 = 0$	und $y = 5$
g) $4x^2 + 9y^2 = 36$	und $x + 3\sqrt{2}\,y = 36$
h) $9x^2 - 8y^2 - 72 = 0$	und $3x - 2y - 6 = 0$
i) $2x^2 = 36y$	und $x + 2y + 4 = 0$

Überprüfen Sie die Ergebnisse von a, e und h durch Konstruktion!

19. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Kegelschnitt

a) $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ im Punkt $P_1\left(4; \frac{3}{5}\right)$,

b) $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ im Punkt $P_1\,(6; 4)$,

c) $y^2 = 18x$ im Punkt $P_1\,(2; -6)$,

d) $y^2 - 3x = 0$ im Punkt $P_1\,(3; 3)$,

e) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ im Punkt $P_1\,(4; 3)$,

f) $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$ im Punkt $P_1\left(6; \sqrt{5}\right)$?

20. Für den Kegelschnitt $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1$ sind die Gleichungen der Tangenten zu bestimmen, die parallel zu den Achsen verlaufen. Konstruieren Sie den Kegelschnitt, und zeichnen Sie die Tangenten ein!

21. Für den Kegelschnitt $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$ sind die Tangenten zu bestimmen, die zu den Sehnen durch die Scheitelpunkte parallel laufen.

22. Wie heißen die Gleichungen der Tangenten an den Kegelschnitt $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, die die Steigung $m = \frac{1}{2}$ haben?

23. Wie heißen die Gleichungen der Tangenten an den Kegelschnitt $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$, die die Steigung $m = -\frac{5}{2}$ haben?

24. Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an die Parabel $y = \frac{x^2}{12}$ in den Punkten mit den Abszissen ± 1, ± 2 und ± 3!

25. Zeigen Sie, daß die y-Achse Scheiteltangente der Parabel $y^2 = 2px$ ist!

26. An die Parabeln $y^2 = 2px$ bzw. $x^2 = 2py$ sind parallel zur Geraden $y = x$ die Tangenten gelegt. Wie lauten deren Gleichungen?

27. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Kegelschnitt $y^2 = 16\,x$, die die Steigung $m = \frac{1}{2}$ hat! Konstruieren Sie den Kegelschnitt, und zeichnen Sie die Tangente ein!

28. An den Kegelschnitt $x^2 + 4\,y^2 = 100$ sind in den Punkten $P_1(8; y_1 > 0)$ und $P_2(6; y_2 > 0)$ die Tangenten gelegt.

a) Wie lauten die Tangentengleichungen?

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_3 beider Tangenten!

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$?

d) Konstruieren Sie die Ellipse und das Dreieck!

29. In den Punkten mit den Abszissen e und $-e$ einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die vier Tangenten gezeichnet. Sie erzeugen einen Rhombus.

a) Wie lauten die Tangentengleichungen?

b) Wie lang sind die Seiten des Rhombus?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Rhombus?

30. Dem Kegelschnitt $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ ist das Dreieck $P_1(-3; y_1 > 0)$; $P_2(x_2 > 0; 0)$, $P_3(0; y_3 > 0)$ einbeschrieben.

a) Zeigen Sie, daß die Schnittpunkte jeder Dreieckseite mit der Tangente im gegenüberliegenden Dreieckpunkt auf einer Geraden liegen!

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine Konstruktion nach!

31. An den Kegelschnitt $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ ist im Punkt $P_1(-10; y_1 > 0)$ die Tangente gezeichnet. Wie lautet die Tangentengleichung?

32. In den Punkten mit den Abszissen e und $-e$ eines Kegelschnitts $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die vier Tangenten gezeichnet. Sie erzeugen einen Rhombus.

a) Wie lauten die Tangentengleichungen?

b) Wie lang sind die Seiten des Rhombus?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Rhombus?

d) Konstruieren Sie Kegelschnitt und Rhombus!

33. Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten von den Punkten P_0 aus an die folgenden Kegelschnitte!

a) $P_0(0; b)$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $P_0(1{,}5; 3)$; $y^2 = 6\,x$

c) $P_0(3; 5)$; $x^2 + 2\,y^2 - 32 = 0$

d) $P_0(5; 8)$; $9\,x^2 + 25\,y^2 = 225$

e) $P_0(-8; y_0)$; $y^2 + 3\,x + 4\,y - 8 = 0$

f) $P_0(-1; 6)$; $9\,x^2 + 25\,y^2 - 72\,x + 150\,y + 144 = 0$

g) $P_0(3; 5)$; $y = \sqrt{6\,x}$

2.2.5. Verschiedene Konstruktionsverfahren für Kegelschnitte

Wiederholen Sie die in den Abschnitten 2.1.5., 2.1.8. *und* 2.1.10. *besprochenen Punktkonstruktionen für Ellipse, Hyperbel und Parabel an Hand je eines Beispiels!*

Punktkonstruktionen mit Hilfe der Mittelpunktsgleichungen bzw. der Scheitelgleichung

Die Gleichungen der Kegelschnitte können in folgender Form geschrieben werden:

für die Ellipse: $a:z = b:y$ mit $z = \sqrt{a^2 - x^2}$;

für die Hyperbel: $a:z = b:y$ mit $z = \sqrt{x^2 - a^2}$;

für die Parabel: $2\,p:y = y:x$.

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser drei Gleichungen!

Aus diesen Gleichungen ergeben sich Punktkonstruktionen, die auf der Konstruktion der Ordinaten y_i zu willkürlich gewählten Abszissen x_i von Kegelschnittspunkten P_i beruhen.

a) Ellipse (Abb. 2.59.):

Gegeben: a und b ($a > b$ in Abb. 2.59.) durch die Scheitelkreise (Kreise mit a bzw. b um M).

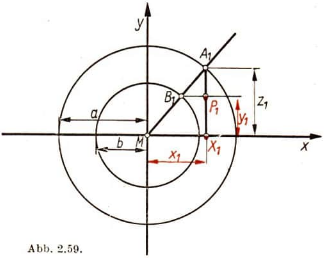
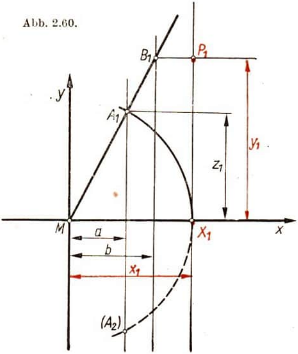


Abb. 2.59.

Konstruktionsbeschreibung: Eine willkürlich gewählte Abszisse $|x_1| < a$ bestimmt auf der x-Achse den Punkt X_1. Die Parallele zur y-Achse durch X_1 schneidet den Hauptscheitelkreis (Radius a) in A_1. Die durch A_1 und M verlaufende Gerade schneidet den Nebenscheitelkreis (Radius b) in B_1. Die Parallele zur x-Achse durch B_1 schneidet $\overline{A_1X_1}$ im Ellipsenpunkt P_1.

Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion, und konstruieren Sie danach je eine Kurve für $a > b$, $a < b$, $a = b$! *Warum muß die Bedingung* $-a < x_1 < a$ *beachtet werden?*

Abb. 2.60.



b) Hyperbel (Abb. 2.60.):

Gegeben: a und b ($a < b$ in Abb. 2.60.) durch zwei Parallelen zur y-Achse im Abstand a und b.

Konstruktionsbeschreibung: Eine willkürlich gewählte Abszisse $|x_1| > a$ bestimmt auf der x-Achse den Punkt X_1. Der Kreis mit $\overline{MX_1} = x_1$ schneidet die Parallele $x = a$ in A_1 (und A_2). Die durch M und A_1 verlaufende Gerade schneidet die Parallele $x = b$ in B_1. Die Parallele zur x-Achse durch B_1 schneidet die Parallele zur y-Achse durch X_1 im Hyperbelpunkt P_1.

Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion, und konstruieren Sie danach je eine Hyperbel für $a > b$, $a < b$, $a = b$! Warum muß die Bedingung $-a < x_1 < a$ beachtet werden?

c) Parabel (Abb. 2.61.):

Gegeben: Der Parameter $2p$ durch den Punkt $Q(-2p; O)$.

Konstruktionsbeschreibung: Um einen beliebigen Punkt $U_1(u_1; O)$ mit $u_1 > -p$ wird der durch Q verlaufende Kreis geschlagen. Er schneidet die x-Achse ein zweites Mal in $X_1(x_1; O)$ und die y-Achse in $Y_1(O; y_1)$ (und in Y_2). x_1 und y_1 sind die Koordinaten des Parabelpunktes P_1, der durch die Parallelen zu den Achsen durch X_1 und Y_1 erhalten wird.

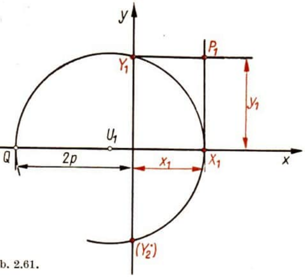


Abb. 2.61.

Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion, und konstruieren Sie danach eine Parabel! Warum muß die Bedingung $u > -p$ beachtet werden?

Punktkonstruktionen mit Hilfe der Leitkreise bzw. der Leitgeraden

Schlägt man um den einen Brennpunkt einer Ellipse bzw. Hyperbel den Kreis mit dem Radius $2a$, den sogenannten Leitkreis, so ist der Kegelschnitt der geometrische Ort aller Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den zweiten Brennpunkt gehen und den Leitkreis (bei der Ellipse von innen, bei der Hyperbel von außen) berühren (Abb. 2.62.).

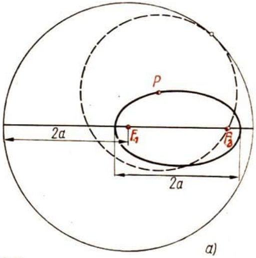
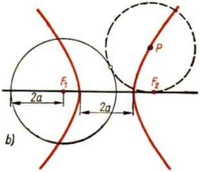


Abb. 2.62.



Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung mit Hilfe der Ortsdefinition! Warum muß die Berührung bei der Ellipse von innen, bei der Hyperbel von außen erfolgen?

Aus dieser Definition ergeben sich neue Punktkonstruktionen für Ellipse und Hyperbel.

Ellipse (Abb. 2.63.):

Gegeben: Zwei feste Punkte F_1 und F_2 als Brennpunkte; $2a > \overline{F_1F_2}$ durch den Leitkreis um F_1.

Konstruktionsbeschreibung: Ein beliebiger Strahl von F_1 aus schneidet den Leitkreis in A_1. Die Mittelsenkrechte auf $\overline{F_2A_1}$ schneidet $\overline{F_1A_1}$ im Ellipsenpunkt P_1.

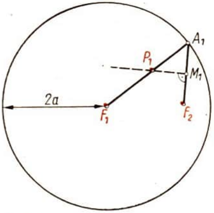


Abb. 2.63

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Konstruktion, und konstruieren Sie auf diese Weise eine Ellipse! Warum muß die Bedingung $2a > \overline{F_1F_2}$ beachtet werden?

Entwickeln Sie eine entsprechende Punktkonstruktion für die Hyperbel, und konstruieren Sie diese Kurve! Welche Bedingung zwischen $2a$ und $\overline{F_1F_2}$ muß hierbei beachtet werden?

Bei der Parabel wird der Leitkreis zur Leitgeraden. Diese wurde schon bei der in Abschnitt 2.1.10. hergeleiteten Ortsdefinition als Leitlinie verwendet.

Beweisen Sie, daß die Definition der Parabel als geometrischer Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch F gehen und l berühren, mit der Ortsdefinition aus Abschnitt 2.1.10. *übereinstimmt!*

Entwickeln Sie eine Punktkonstruktion für die Parabel, die der eben für Ellipse und Hyperbel besprochenen ähnelt, und konstruieren Sie damit eine Parabel!
Anleitung: Die Strahlen von F_1 nach P und A (vgl. Abb. 2.63.) *verlaufen senkrecht zum Leitkreis. Das gilt auch bei der Parabel, wenn der Leitkreis zur Leitgeraden wird. F_2 ist dabei der Parabelbrennpunkt F.*

Hüllkonstruktionen

Die zur Punktkonstruktion mit Hilfe von Leitkreis bzw. Leitgerade benutzten Mittelsenkrechten auf $\overline{AF_2}$ (vgl. Abb. 2.63.) sind jeweils Tangenten an den Kegelschnitt im Punkt P.

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung für den Parabelfall mit den Mitteln der analytischen Geometrie!
Anleitung: Stellen Sie den Richtungsfaktor der Mittelsenkrechten für einen beliebigen Parabelpunkt $P_1(x_1; y_1)$ auf, und vergleichen Sie ihn mit dem Richtungsfaktor der Tangente in diesem Punkt!

Diese Tangenten umhüllen den Kegelschnitt. Mit ihrer Hilfe läßt sich deshalb ebenfalls der Kegelschnitt zeichnen (sog. Hüllkonstruktion). Dazu benötigt man die Fußpunkte M dieser Mittelsenkrechten auf $\overline{AF_2}$. Der geometrische Ort dieser

Fußpunkte ist der Hauptscheitelkreis der Ellipse oder Hyperbel bzw. die Scheiteltangente der Parabel.

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung für alle drei Kegelschnitte mit den Mitteln der analytischen Geometrie!

Anleitung: Nehmen Sie die Gleichung des Leitkreises bzw. der Leitgeraden zu Hilfe und gehen Sie von einem beliebigen Punkt A_0 $(x_0; y_0)$ dieser Leitkurve aus!

Die Abbildung 2.64. zeigt die Hüllkonstruktion für einen Teil der Ellipse.

Vervollständigen Sie Abbildung 2.64., *und konstruieren Sie entsprechende Figuren für Hyperbel und Parabel!*

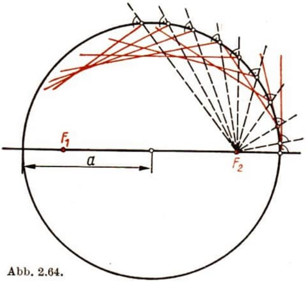


Abb. 2.64.

Punktkonstruktionen mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε

Die gemeinsame Definition für alle nicht kreisförmigen Kegelschnitte mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε (vgl. Aschnitt 2.1.11.) kann als Grundlage für Punktkonstruktionen dienen, die für alle drei Kegelschnitte denselben Konstruktionsgang haben. (Für die Parabel wurde diese Konstruktion bereits im Abschnitt 2.1.10. hergeleitet.)

Gegeben: eine feste Gerade l;
ein fester Punkt F im Abstand d von l;

eine positive Zahl $\varepsilon \lesseqgtr 1$ bei Ellipse / Parabel / Hyperbel.

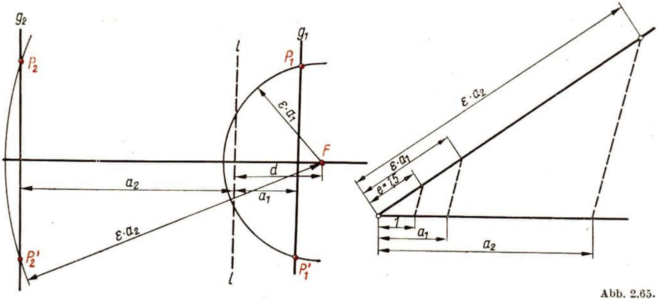


Abb. 2.65.

Konstruktionsbeschreibung: (Abb. 2.65. für $\varepsilon = 1{,}5$; Hyperbelfall):

Im beliebigen Abstand $a_1(a_2)$ von l wird eine Parallele $g_1(g_2)$ gezogen. Mit $\varepsilon \cdot a_1$ $(\varepsilon \cdot a_2)$ als Radius wird um F der Kreis geschlagen. Er schneidet $g_1(g_2)$ in zwei Kegelschnittpunkten, falls für Parallelen auf derjenigen Seite von l, auf der auch F liegt, $a \geqq \frac{d}{\varepsilon + 1}$, für Parallelen auf der Gegenseite $a \geqq \frac{d}{\varepsilon - 1}$ gewählt wurde. Die Konstruktion von $\varepsilon \cdot a_i$ kann mit Hilfe von Ähnlichkeitsstrahlen bequem durchgeführt werden (vgl. Nebenfigur in Abb. 2.65.).

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Konstruktion für alle Kegelschnitte, und konstruieren Sie in dieser Weise nebeneinander eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel!

Begründen Sie die Notwendigkeit der Bedingungen $a \geqq \frac{d}{\varepsilon + 1}$ *bzw.* $a \geqq \frac{d}{\varepsilon - 1}$ *für die Parallelenabstände! Was folgt aus der zweiten Bedingung für die Kurvengestalt von Ellipse und Parabel wegen* $\varepsilon \leqq 1$*?*

Aufgaben

1. Konstruieren Sie die in folgenden Aufgaben genannten Kegelschnitte nach einem der vorgenannten Konstruktionsverfahren! Wechseln Sie dabei die Verfahren, und beurteilen Sie die verschiedenen Verfahren nach Genauigkeit und rationeller Arbeitsweise!
S. 142 bis S. 144; Aufgaben Nr. 2, 8, 14, 18a bis i, 19a bis f, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33a bis e, 33i.

2. a) Zeichnen Sie eine Ellipse, indem Sie am Rande eines Kartonstreifens die Summe ihrer Halbachsen $a + b = \overline{AB} + \overline{BC}$ durch A, B und C markieren, dann A auf der y-Achse, B auf der x-Achse eines Koordinatenkreuzes entlang führen und dabei die Bahn von B aufzeichnen!
   b) Beweisen Sie analytisch die Richtigkeit dieser Konstruktion!
   c) Dieses Verfahren ist die Grundlage des Ellipsenzirkels von LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519). Bauen Sie ein solches Gerät!

2.2.6. Schnitt zweier Kegelschnitte

Die Kegelschnitte sind durch ihre Gleichungen gegeben, zwei Kegelschnitte also durch zwei quadratische Gleichungen mit zwei Veränderlichen. Die Koordinaten des Schnittpunkts müssen beide Gleichungen erfüllen. Man findet diese Punkte dadurch, daß man die gesuchten Koordinaten x_s und y_s in die beiden Kegelschnittsgleichungen einsetzt und damit Gleichungen erhält, die ein System bilden. Oft ist es nur möglich, die Schnittpunkte näherungsweise zu bestimmen.

Beispiel 8:

Es sollen die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ mit der Parabel $x^2 = 8y$ bestimmt werden.

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I:}\ & x_s^2 + 4\,y_s^2 = 100 \\ \text{II:}\ & \qquad x_s^2 = 8\,y_s \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} 100 - 4\,y_s^2 &= 8\,y_s \\ y_s^2 + 2\,y_s - 25 &= 0 \\ y_{s\,1;\,2} &= -1 \pm \sqrt{26}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ordinaten der Schnittpunkte

$$\begin{aligned} y_{s1} &\approx 4{,}1 \\ y_{s2} &\approx -6{,}1\,, \end{aligned}$$

und durch Einsetzen von y_{s1} in die Parabelgleichung für die Abszissen der Schnittpunkte

$$x_{s\,1;\,2} \approx \pm 5{,}7\,.$$

(Einsetzen von y_{s2} liefert keine reellen Werte.)

Man erhält also zwei Schnittpunkte

$S_1\,(5{,}7;\ 4{,}1)$ und $S_2\,(-5{,}7;\ 4{,}1)$.

Aufgaben

1. Der Mittelpunkt einer Ellipse, deren Halbachsen $a = 10$ und $b = 7$ sind, ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit dem Nebenscheitel $S\,(0;\, y_s > 0)$ der Ellipse zusammenfällt.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte rechnerisch!
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte durch Konstruktion!

2. Die Halbachsen einer Hyperbel sind $a = 3$ und $b = 2$. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit dem Scheitel $S\,(x_s < 0;\, 0)$ der Hyperbel zusammenfällt.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Kurven rechnerisch!
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte durch Konstruktion!

3. Zwei kongruente Ellipsen haben den gleichen Mittelpunkt und liegen so, daß ihre großen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Die Halbachsen sind $a = 40$ und $b = 25$.

a) Konstruieren Sie die Ellipsen!
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ellipsen!

4. Die Kegelschnitte $\dfrac{x^2}{25\,b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ und $y^2 = -\,b(x + b)$ schneiden einander. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte!

5. Die Kegelschnitte $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ und $x^2 = -\dfrac{18}{\sqrt{5}}\,(y - 3\sqrt{5})$ schneiden einander.
Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte!

6. Die Kegelschnitte $x^2 + y^2 = 25$ und $y^2 = \dfrac{9}{2}\,(x - 2)$ schneiden einander.
Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte!

2.2.7. Aufgaben zur Wiederholung und Anwendung

1. Die Gleichungen $g_1 \equiv 8x + 3y - 25 = 0$, $g_2 \equiv 2x + 5 = 0$ und $g_3 \equiv y + 5 = 0$ stellen die Seiten eines der Ellipse $E \equiv 4x^2 + y^2 = 25$ umbeschriebenen Dreiecks dar.

a) Zeigen Sie, daß die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt gehen!

b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Zeichnung!

2. Der Parabel $(y+1)^2 = x - 2$ ist das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(x_1; 0)$, $P_2(11; y_2 < 0)$ und $P_3(x_3; 1)$ einbeschrieben.

a) Zeigen Sie, daß die Schnittpunkte jeder Dreieckseite mit der Tangente der gegenüberliegenden Ecke in einer Geraden liegen! (Durch Verschiebung des Koordinatensystems kann die Rechnung vereinfacht werden!)

b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Zeichnung!

3. Bestimmen Sie die Masse des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die in Abbildung 2.66. dargestellte Fläche um die y-Achse rotiert! ($\varrho = 7{,}8\ g\ \mathrm{cm}^{-3}$).

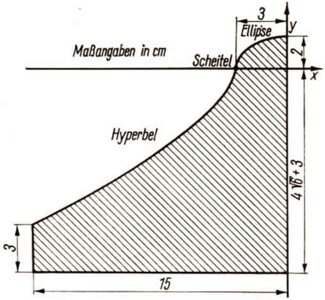


Abb. 2.66. (Maßangaben in cm)

4. Für die in Abbildung 2.67. skizzierte Trommel sind

a) die Größe der Querschnittsfläche (die Trommelachse sei die x-Achse) und

b) das Volumen zu berechnen.

5. Die Abbildung 2.68. zeigt einen Schnitt durch einen Kühlturm.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Innenraums!

b) Berechnen Sie den Durchmesser der oberen Öffnung!

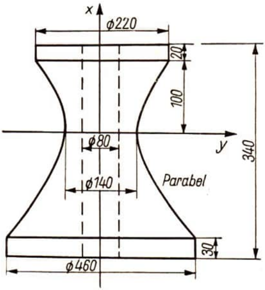


Abb. 2.67.

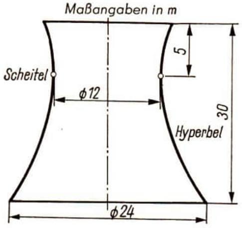


Abb. 2.68. (Maßangaben in m)

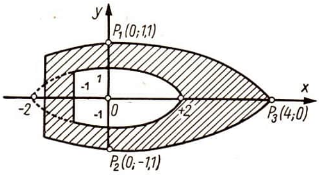


Abb. 2.69.

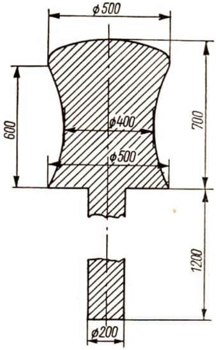


Abb. 2.70.

6. Das Volumen der in Abbildung 2.69. im Achsenschnitt skizzierten Granate ist zu berechnen! (äußere Form: Paraboloid; innere Form: Ellipsoid)

7. Die Abbildung 2.70. zeigt den Achsenschnitt eines Pollers, an dem beim Anlegen eines Schiffes die Haltetaue befestigt werden.

Die seitlichen Bögen des Achsenschnitts sind Hyperbeläste. Den oberen Abschluß bildet eine halbe Ellipse, der untere Teil ist zylindrisch. Der Poller ergibt sich durch Rotation des Achsenschnitts um die y-Achse.

Berechnen Sie

a) das Volumen und
b) die Masse des Pollers ($\varrho = 7{,}1\ g\ \mathrm{cm}^{-3}$)!

8. Unter dem Perihel einer Planetenbahn versteht man den Punkt größter Sonnennähe, unter dem Aphel den Punkt größter Sonnenferne.
Geben Sie die Bahngleichung der folgenden Planeten an, und bestimmen Sie deren numerische Exzentrizität!
Welcher Planet hat die größte, welcher die kleinste numerische Exzentrizität?

	a) Merkur	**b)** Venus	**c)** Erde	**d)** Mars
Aphel	69,4	108,3	151,1	247,6
Perihel	45,6	106,7	146,2	205,4

	e) Jupiter	**f)** Saturn	**g)** Uranus	**h)** Neptun
Aphel	810,6	1497,3	2983,5	4505,5
Perihel	735,6	1338,3	2719,1	4429,6

(Maßangaben in Millionen Kilometer)

9. Geben Sie bei folgenden Flugkörpern die numerische Exzentrizität und die Bahngleichung an!
(Durchmesser der Erde $D \approx 12\,700$ km)

	a) Sputnik I	**b)** Lunik III	**c)** Wostok I	**d)** Wostok III
Größte Entfernung von der Erde:	947 km	470000 km	302 km	257 km
kleinste Entfernung von der Erde:	228 km	47500 km	175 km	178 km

10. Ein Körper (z.B. ein Geschoß), der vom Punkt O mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in eine Richtung geworfen wird, die mit der Horizontalen den Winkel α bildet, beschreibt im luftleeren Raum eine Bahnkurve, die der Gleichung

$$y = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha$$

genügt (g ist die Erdbeschleunigung).

a) Was für eine Kurve wird durch die Gleichung dargestellt?

b) Berechnen Sie die größte Wurfweite!

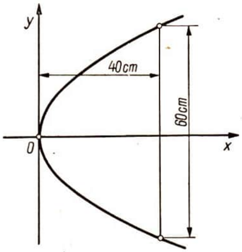
c) Berechnen Sie die größte Wurfhöhe!

d) Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt der Kurve?

11. Die Abbildung 2.71. zeigt den Querschnitt eines parabolischen Spiegels. Bestimmen Sie mit Hilfe der Maßangaben der Abbildung die Koordinaten des Brennpunktes und die Brennweite!

12. Es ist analytisch nachzuweisen, daß beim sphärischen Spiegel alle Mittelpunktsstrahlen in sich selbst reflektiert werden.

13. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger mit der Spannweite 24 m und der Bogenhöhe 6 m. Bestimmen Sie den Halbparameter dieser Parabel!



Abk. 2.71.

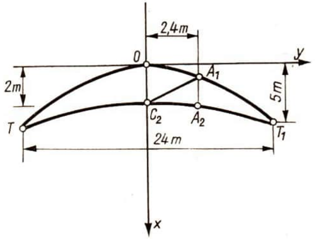


Abb. 2.72.

14. Die Abbildung 2.72. zeigt einen Parabelsichelträger.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben in der Abbildung die Gleichungen des oberen und unteren Parabelbogens!

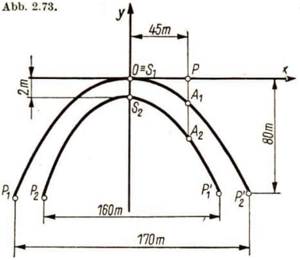
b) Berechnen Sie die Längen der Verbindungsstäbe $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{A_1C_2}$!

15. Eine Eisenbahnbrücke besteht aus einem Doppelparabelträger, auf dem der Fahrdamm durch senkrechte Stützen ruht (Abb. 2.73.). Die Spannweite des oberen Parabelbogens beträgt 170 m, die des unteren 160 m, der Abstand der Scheitelpunkte beider Bogen 2 m.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen des oberen und unteren Parabelbogens!

b) Berechnen Sie die Länge der Stützen $\overline{PA_1}$ und $\overline{A_1A_2}$!

Abb. 2.73.



16. Die Abbildung 2.74. zeigt die Skizze für eine Kanalbrücke mit einigen Maßangaben. Der Bogen stellt eine Parabel dar.

a) Stellen Sie die Gleichung für die Parabel auf!

b) Berechnen Sie die Längen der Streben!

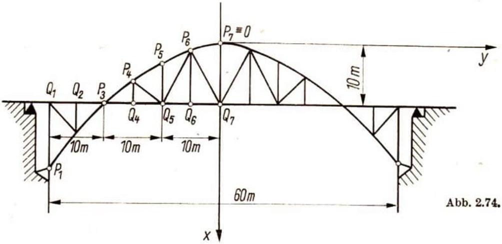


Abb. 2.74.

3. Rückblick auf die Geschichte der Mathematik

Es gibt eine uralte chinesische Sage über den Ursprung des Zahlensystems, die mit verschiedenen Versionen bis ins 3. Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung zurückreicht.

Eine göttliche Schildkröte, so heißt es, sei aus den Fluten des Gelben Flusses aufgetaucht und habe auf ihrem Rückenpanzer das Schema der Zahlen 1 bis 9 getragen.

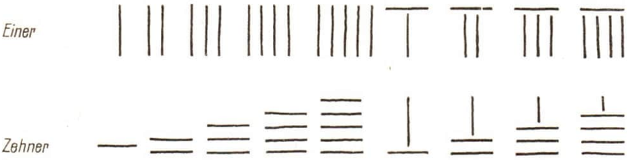


Abb. 3.1. Chinesische sog. Bambusziffern. Ungefähr 6. Jahrhundert v. u. Z.

Ein Mann namens Fu Li habe die Erscheinung beobachtet und die Zahlzeichen in Umlauf gesetzt, als Geschenk des Himmels an die Menschen.
In die Form einer Sage eingekleidet, enthält diese Erzählung trotz aller Naivität die Erkenntnis von der außerordentlichen Bedeutung, die die Zahlen und die Rechenkunst im Leben der menschlichen Gesellschaft schon zu einem so frühen Zeitpunkt ihrer Entwicklung erlangt hatten. Die Bedeutung und der Einfluß der Mathematik sind seitdem immerfort gestiegen und nehmen heute ganz außerordentlich rasch zu, da in der Übergangsperiode vom Kapitalismus zum Sozialismus und weiter zum Kommunismus die Wissenschaften immer mehr zu einer unmittelbaren Produktivkraft werden.
Jene alte chinesische Sage geht nun freilich völlig an den historischen Tatsachen vorbei. Die Mathematik ist keineswegs göttlichen Ursprungs, sie ist vielmehr entstanden als Ergebnis sehr handgreiflicher Forderungen der gesellschaftlichen Praxis an das menschliche Denken, nicht als Ergebnis „reinen Denkens", sondern als abstrakte Widerspiegelung recht konkreter Zusammenhänge der Natur und Gesellschaft. Dabei hat sich immer wieder die gesellschaftliche Praxis als die entscheidende Triebkraft für die Entwicklung der Mathematik erwiesen, jene Forderungen nämlich, die sich aus der Landvermessung, dem Bauwesen, der Schiffahrt, dem Handel usw., vor allem aber aus der Entwicklung der Produktionsinstrumente ergaben. Von der allergrößten Wichtigkeit für die Weiterentwicklung der Mathematik sind gerade in den letzten Jahrhunderten auch diejenigen mathematischen Probleme gewesen, die sich aus der Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Astronomie und Physik, ergaben, und diejenigen Probleme, die aus den Bereichen der Technik stammen. Wichtige Impulse verdankt die Mathematik auch ökonomischen Problemen, eine Entwicklungsrichtung, die unter den Bedingungen der sozialistischen Planwirtschaft stark an Bedeutung gewinnen wird.
Natürlich besitzt auch und gerade die Mathematik eigengesetzliche, aus inneren Problemen erwachsende Entwicklungsgänge. Aber ohne neue, aus der Praxis stammende Anforderungen an das Gesamtgebiet der Mathematik ist der eigengesetzliche Schwung früher oder später erlahmt, und die Entwicklung kam und kommt, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, zum Stillstand.
In ihrer vieltausendjährigen Geschichte ist die Mathematik auch starken ideologischen Einflüssen ausgesetzt gewesen. Sie ist in ihrer Entwicklung durch idealistische philosophische Systeme, z. B. durch den antiken Platonismus und die christlichen Dogmen, gebremst worden; sie nahm einen gewaltigen Aufschwung durch ihre Verbindung mit dem philosophischen Materialismus, so bei dem antiken Materialisten Demokritos von Abdera, in der Periode der Aufklärung und heute durch den dialektischen Materialismus.
Die menschliche Arbeit enthielt schon frühzeitig mathematische Elemente. Die handwerklichen Erzeugnisse der jüngeren Steinzeit und der frühen Bronzezeit verraten die Vertrautheit mit den geometrischen Grundtatsachen, z. B. mit gleichseitigem und gleichschenkligem Dreieck, mit Quadrat und Würfel. Auch die Untersuchung alter Bauwerke, der Anlage von Felderplänen, der Ornamente auf Waffen und anderen Geräten usw. liefert dieselbe Einschätzung der ältesten geometrischen

Abb. 3.2. Mathematische Ornamente auf Tongefäßen aus der jüngeren Steinzeit (Bandkeramik).

Kenntnisse. Dazu führten die immer wieder nötigen Bestimmungen von Feldergrenzen in den durch periodische Überschwemmungen betroffenen Niederungen der Flüsse, z. B des Nil, des Euphrat und Tigris, des Gelben Flusses, des Indus, zu geometrischen Problemen.

Für die Ausbildung und Weiterführung der Zahlreihe haben die erste gesellschaftliche Arbeitsteilung, die Trennung in Ackerbauer und Viehzüchter, und insbesondere das Aufkommen von Privateigentum die entscheidende Rolle gespielt. Aus der Notwendigkeit, Viehherden zu zählen, Tausch- und Handelsgeschäfte zu tätigen usw. entwickelte sich die Fähigkeit des Zählens und Rechnens.

Dabei hing ursprünglich das verwendete Zahlwort von der Art des gezählten Gegenstandes ab. Noch heute heißen bei den Fidschi-Insulanern 10 Kähne bola, 10 Kokosnüsse dagegen koro. Erst später, auf einer höheren Abstraktionsstufe, kamen die unbenannten Zahlwörter auf. Die Zahlsysteme wurden meist auf dezimaler Grundlage (10 Finger) ausgebildet. Manche Völker, wie die Kelten und Mayas, besaßen ein 20er-System (Finger und Zehen zusammen), andere wieder ein 12er-System (Fingerknöchel).

Eine weitere Haupttriebkraft zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bestand in der Notwendigkeit, sich in Raum und Zeit zu orientieren: Bestimmungen von Entfernungen, von Richtungen, von Höhenunterschieden im Gelände beim Bau von Bewässerungsanlagen sowie systematische Beobachtungen von landwirtschaftlichen Terminen und periodischen Naturerscheinungen wie etwa Überschwemmungen und Jahreszeiten führten zur Ausbildung erster geographisch-mathematischer Vorstellungen sowie schon in der Frühzeit zur Ausbildung sehr genauer Kalenderrechnungen.

In der Periode der Entstehung von Klassengesellschaften handelte es sich noch um eine rezeptartige, empirisch betriebene Mathematik. Die Herausbildung des ursprünglichen mathematischen Denkens hat sich bei allen Völkern unter ähnlichen gesellschaftlichen Bedingungen fast gleichartig und voneinander unabhängig vollzogen.

So besaßen die Chinesen und Inder schon zwischen 3000 und 500 v.u.Z. hohe mathematische Kenntnisse. Aus China sind uns seit 2800 v.u.Z. kontinuierliche

Abb. 3.3. Ägyptischer Schreiber. Altes Reich, ungefähr 2500 v. u. Z.

astronomische Beobachtungen überliefert. Um 1200 v. u. Z. entstand ein Lehrbuch der Kombinatorik und eine Theorie der magischen Quadrate. Um 1100 v. u. Z. war das pythagoreische Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 bekannt und π wurde durch 3 angenähert. Aus der Zeit um 1000 v. u. Z. stammt ein erhalten gebliebenes Lehrbuch des Rechnens mit dem Titel *Arithmetik in neun Teilen*, das elementare ebene Geometrie, Dreisatzrechnung, Quadrat- und Kubikwurzeln, Volumenberechnungen, Lösen von linearen und quadratischen Bestimmungsgleichungen und die Systematisierung pythagoreischer Dreiecke enthielt.

Aus Indien sind für diese Zeit geometrische Flächenverwandlungen, der pythagoreische Lehrsatz und die Verwendung der Ähnlichkeitssätze am Dreieck nachgewiesen. Arithmetische und geometrische Mittelwertbildungen stellten eine Besonderheit der indischen Mathematik dar; mit ihrer Hilfe wurde z. B. die ausgezeichnete Näherung $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17}$ gefunden.

Über die gesellschaftliche Stellung und den Stand der altägyptischen Mathematik besitzen wir recht genaue Unterlagen. Die gesellschaftliche Arbeitsteilung hatte den Stand der Schreiber hervorgebracht, die, als Verwaltungsbeamte des Staates mit mehr oder weniger großen Machtbefugnissen ausgestattet, der herrschenden Klasse angehörten. In ihren Aufgabenbereich fielen auch Verwaltungsprobleme mit mathematischem Inhalt wie Feldvermessung, Abgabenberechnung, Bestimmung des Fassungsvermögens von Vorratsbehältern, Verpflegung von riesigen Arbeitsheeren usw. Aus der Zeit von 1700 v. u. Z. sind mathematische Papyri erhalten geblieben, die zum praktischen Handwerkszeug der Schreiber gehörten.

Das Zahlensystem war dezimal aufgebaut, aber kein Positionssystem. Jede Zehnerpotenz besaß ein eigenes Zeichen. So wurde 10^5 z. B. durch einen kleinen Frosch dargestellt, denn Frösche gab es im Nildelta überreichlich. Die Rechenverfahren beruhten auf fortgesetztem Verdoppeln und Halbieren, waren also dual aufgebaut. Die Bruchrechnung wurde ausschließlich mit Stammbrüchen vorgenommen, d.h., es gab z.B. nicht die Zahl $\frac{3}{4}$. Dieser Bruch stellte vielmehr eine Aufgabe mit der

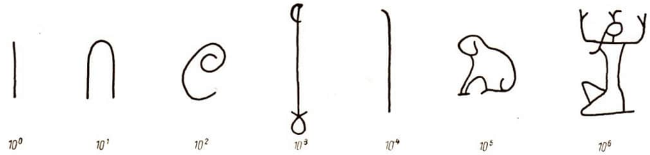


Abb. 3.4. Ägyptische Individualzeichen für Zehnerpotenzen. Z.B. bedeutet 10^5 einen kleinen Frosch, von denen es im Nildelta sehr viele gab, ebenso wie Lotosblüten (10^3) und Rohrkolben (10^4); 10^2 ist die Hieroglyphe für eine Meßleine, 10^6 symbolisiert den ägyptischen Gott des Luftraumes.

Lösung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ dar. Reichhaltig traten in den mathematischen Papyri lineare Bestimmungsgleichungen auf, wobei man Unbekannte durch die Hieroglyphe für „Haufen“, „Menge“ bezeichnete. Arithmetische und geometrische Reihen wurden behandelt. Recht gut wurde $\frac{\pi}{4}$ durch $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ angenähert. Im Bauwesen wurden als Vorstufe der darstellenden Geometrie Risse und quadratische Netze angewendet. Das Glanzstück der ägyptischen Mathematik war die korrekte Volumenberechnung des Pyramidenstumpfes.

Die babylonische Mathematik hat eine erstaunliche Höhe erreicht. Erhalten gebliebene mathematische Keilschrifttafeln reichen bis ins zweite Jahrtausend v.u.Z. zurück und zeigen die sichere Beherrschung von linearen Gleichungssystemen, die Bekanntschaft mit arithmetischen und geometrischen Reihen, mit Quadrat- und Kubikwurzeln, mit Zins- und Zinseszinsrechnung, mit dem pythagoreischen Lehrsatz, mit dem Thalessatz, mit dem sogenannten Böschungswert, der auf den trigonometrischen Kotangens hinausläuft. Das Zahlensystem war sexagesimal aufgebaut, wobei ein inneres Lückenzeichen (Null) verwendet wurde. Die babylonischen Schreiber, die in regelrechten Schulen ausgebildet wurden, haben eine ganz bedeutende Fähigkeit des algebraischen Denkens erreicht, die in Europa erst zur Zeit der Renaissance überschritten werden konnte.

Abb. 3.5. Babylonische Zahlzeichen. Das Zahlensystem ist ein sexagesimales Positionssystem. Als Beispiel ist die Zahl $410\,482 = 1 \cdot 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60^1 + 22 \cdot 60^0$ gewählt.

Der aus Babylonien und Ägypten übernommene mathematische Erfahrungsschatz wurde im 7. und 6. Jahrhundert v.u.Z. von den ionischen Naturphilosophen zu einer auf Definition und Beweisen beruhenden selbständigen Wissenschaft „Mathematik“ umgestaltet. Diese Leistung knüpft sich insbesondere an THALES VON MILET (624 ? [1]–548 ? v.u.Z.), an HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v.u.Z.) und an den

[1] Die Jahreszahl mit einem Fragezeichen ist unsicher.

bedeutenden materialistischen Denker DEMOKRITOS VON ABDERA (460 ?–370 ? v.u.Z.), der auf Grund seiner atomistischen Vorstellungen zum erstenmal die Volumina des Kegels und der Pyramide angeben konnte. Auch die praktische Mathematik war um diese Zeit schon hoch entwickelt, das beweist etwa der auf der Insel Samos angelegte 1 km lange Wasserleitungstunnel durch den Berg Kastro. Die von beiden Seiten vorangetriebenen Stollen haben sich, wie Ausgrabungen ergaben, nur um 2 bis 3 m in der Mitte verfehlt: eine feldmesserische Glanzleistung!

Indessen trat durch die von PYTHAGORAS VON SAMOS (580 ?–500 ? v.u.Z.) gegründete religiöse und politisch reaktionäre Sekte der Pythagoreer eine Entfremdung der Mathematik von der Praxis ein. Im Vordergrund ihrer mathematischen Interessen stand Zahlenmystik, doch sind von ihnen auch wertvolle mathematische Erkenntnisse gewonnen worden, z. B. die von der Irrationalität von speziellen Quadratwurzeln.

Unter dem Eindruck der mit den irrationalen Zahlen zusammenhängenden Schwierigkeiten, welche im Grunde genommen auf den mit Grenzübergängen entstehenden Problemen beruhten, erhielt dann im 5. und 4. Jahrhundert v.u.Z. die griechische Mathematik, insbesondere durch das Wirken der hervorragenden Mathematiker EUDOXOS VON KNIDOS (408 ?–355 ? v.u.Z.) und THEAITETOS VON ATHEN (410 ?–368 v.u.Z.), in ihrer zweiten Entwicklungsetappe den Charakter einer geometrischen Algebra, d.h. rechnerische und algebraische Probleme wie lineare und quadratische Gleichungen wurden durch Konstruktion auf geometrischem Wege gelöst. Durch den zunehmenden Einfluß der idealistischen Philosophie, insbesondere der platonischen Schule, entfremdete sich die Mathematik weiter von der Praxis.

Der in Alexandria wirkende Mathematiker EUKLEIDES (365 ?–300 ? v.u.Z.) hat dann unter Verwendung früherer Teildarstellungen in den berühmten 13 Büchern der *Elemente* eine vorzügliche systematische Zusammenfassung der damaligen mathematischen Kenntnisse gegeben, allerdings als Anhänger PLATONS ohne jede Anspielung auf die Anwendungen der Mathematik und ohne Darstellung der Rechenkunst, die als praktische Tätigkeit der Kaufleute von den Platonikern verachtet wurde.

Unter Anknüpfung an die materialistischen Traditionen von DEMOKRITOS erreichte die griechisch-hellenistische Mathematik mit ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287 ?–212 ? v. u. Z.) und APOLLONIOS VON PERGE (262 ?–190 ? v. u. Z.) ihren Höhepunkt. ARCHIMEDES erkannte die unbeschränkte Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe, lieferte sehr gute Näherungen für π, z. B. $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, berechnete krummlinig begrenzte Flächen, indem er infinitesimale Betrachtungen nach Art der späteren Integralrechnung anstellte, und wandte die Mathematik auf physikalische Probleme an. APOLLONIOS faßte frühere und weitreichende eigene Ergebnisse über Kegelschnitte in dem Buch *Conika* zusammen.

Mit der Stagnation und dem Untergang der antiken Sklavenhalterordnung, im Zersetzungsprozeß des römischen Weltreiches gerieten auch die Wissenschaften immer mehr in Verfall. Trotzdem sind noch bedeutende mathematische Einzelleistungen erzielt worden. Wahrscheinlich um 100 u.Z. verfaßte HERON VON ALEXANDRIA neben Beschreibungen technischer Erfindungen auch eine Vielzahl von Schriften zur praktischen Mathematik, die mit ihren rechnerischen Methoden an die babylonische Mathematik anknüpften. So behandelte er bei der Kaliberberechnung von Steinschleudern kubische Gleichungen. Der hellenistische Astronom und Geograph PTOLEMAIOS (85?–165?) faßte im *Almagest* die astronomischen Kenntnisse der Antike zusammen. Dazu gehörten ebene und sphärische Trigonometrie, die in Form einer Sehnentrigonometrie behandelt wurden. Schließlich wurde noch am Ausgang der Antike durch DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (wahrscheinlich um 250 u. Z.) das echte algebraische Denken neu belebt; in seiner *Arithmetik* werden u. a. unbestimmte Gleichungen höherer Grade behandelt, und es finden sich Anfänge einer algebraischen Symbolik.

Diese Mathematik, betrieben von Angehörigen der ausbeutenden Klasse, war unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft durch eine unüberbrückbare Kluft von den Bedürfnissen der Praktiker, der Ingenieure, Baumeister, der Kaufleute und Seeleute, getrennt, die sich mit groben Faustregeln behelfen mußten. Mit dem Untergang der Sklavenhaltergesellschaft mußte daher auch die Bewahrung der wissenschaftlichen Tradition ein Ende finden. Die letzten Zentren der antiken Wissenschaft waren Alexandria und Athen; mit der Ermordung der Mathematikerin HYPATIA durch christlichen Pöbel erlosch 415 die alexandrinische mathematische Schule, und die Akademie in Athen wurde 529 durch den christlichen Kaiser IUSTINIANUS als Stätte „heidnischer und verderbter Lehren“ gewaltsam geschlossen.

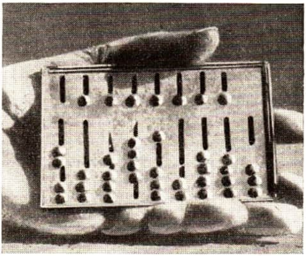


Abb. 3.6. Erhaltener römischer Handabakus.

Die Wissenschaftsfeindlichkeit der Kirche, noch verstärkt durch den allgemeinen Verdacht gegen wissenschaftliche Ergebnisse, die aus vorchristlicher Zeit stammten, hat das wissenschaftliche Leben im Bereich des Christentums auf viele Jahrhunderte weitgehend lahmgelegt. Nur die allernotwendigsten mathematischen Kenntnisse konnten sich halten: Ein wenig Feldmeßkunst, etwas Bruchrechnung und elementare Geometrie sowie der Computus, die Berechnung der beweglichen christlichen Feiertage, besonders des Osterdatums.

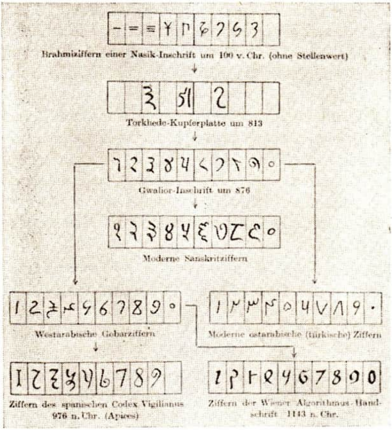


Abb. 3.7. Stammbaum der indisch-arabischen Ziffern, unserer heutigen Zahlzeichen.

Insbesondere von arabisch schreibenden Gelehrten wurde ein großer Teil der antiken Wissenschaften und auch der Mathematik gerettet. Noch heute erinnern die Märchen aus 1001 Nacht an eine glanzvolle kulturelle Epoche. In Bagdad war ein riesiges Übersetzungsbüro eingerichtet worden; um 900 etwa waren die wichtigsten griechischen und hellenistischen mathematischen Autoren ins Arabische übertragen. Mit einem ausgedehnten Handel flossen dem arabischen Kulturkreis auch Teile der chinesischen und indischen Mathematik zu, die ebenfalls ins Arabische übersetzt wurden.

So hatte um 250 der chinesische Mathematiker Liu Hui bedeutende Rechenbücher verfaßt, die seit dem 11. Jahrhundert im Druck vorlagen. Im 7. Jahrhundert lösten chinesische Mathematiker kubische Gleichungen; seit dem 12. Jahrhundert war eine Kugelrechenmaschine, der Suan-pan, im Gebrauch; seit der Mitte des 13. Jahrhunderts wurde das später nach Horner benannte Schema zur Auflösung von Gleichungen verwendet, insbesondere von Li Yeh (1178–1265). Andere Mathematiker beschäftigten sich mit der Summierung von Quadratzahlen und stießen bis zum Pascalschen Dreieck vor.

Seit dem 6. Jahrhundert hatte sich die indische Mathematik rasch entwickelt. Âryabhata (geb. 476) behandelte astronomische Probleme mit Kettenbrüchen und berechnete trigonometrische Tafeln. Brahmagupta (geb. 598) untersuchte Sehnenvierecke und unbestimmte Gleichungen. Seit dem 7. Jahrhundert ist in Indien das dezimale Positionssystem verbürgt, später kam das innere Lückenzeichen, die Null — ein kleiner Kreis —, hinzu, das sich schon um 800 längs der Karawanenstraße bis in den arabischen Kulturbereich ausgebreitet hatte. Gleichzeitig schufen

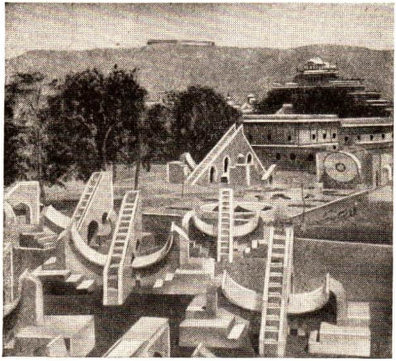


Abb. 3.8. Astronomisch-mathematische Bauwerke aus Indien. Etwa 11. Jahrhundert.

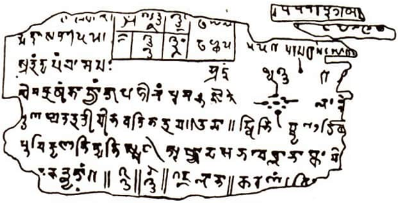


Abb. 3.9. Ausschnitt aus einem indischen mathematischen Manuskript des 10. Jahrhunderts.

die indischen Mathematiker eine hochentwickelte Trigonometrie. So wurden im 10. Jahrhundert die Funktionen Sinus und Kosinus in allen vier Quadranten untersucht, noch später wurden der Sinus- und Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie angedeutet.

Die arabisch schreibenden Gelehrten, die ihrer Nationalität nach vorwiegend aus Syrien, Iran und Mittelasien stammten, entwickelten auf der Grundlage der übernommenen Teile der hellenistischen, chinesischen und indischen Mathematik eine außerordentlich hochstehende Mathematik. Insbesondere Algebra und Trigonometrie gelangten zu hoher Vollendung. Ganz besonders herausragende arabische Algebraiker waren AL-ḪWÂRAZMÎ (gest. um 840), ABÛ KÂMIL (850?–930?) und AL-KARAǦÎ (gest. um 1029). AL-ḪAJJÂMÎ (1044?–1124?) gab eine Einteilung der kubischen Gleichungen. Durch ABÛ'L-WAFÂ (940–998) und AL-BÎRÛNÎ (973–1048) u. a. wurde eine Sinus-Trigonometrie aufgebaut, wurden der Sinus- und Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie gefunden und die trigonometrischen Tafeln bis

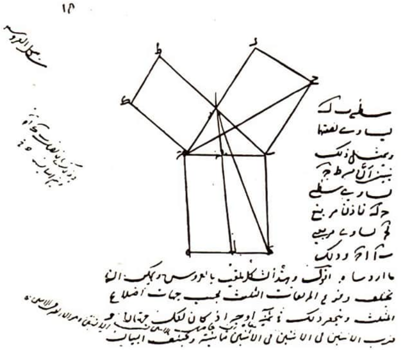


Abb. 3.10. Ausschnitt aus einem arabischen mathematischen Manuskript (ca. 1350), das den pythagoreischen Satz behandelt.

Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quafoelicissime:

Punctus est cuius ps nõ est. Linea est lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ extremitates sũt duo pũcta. Linea recta ẽ ab vno pũcto ad aliũ breuissima extẽsio i extremitates suas vtrũq3 eo℞ recipiens. Supficies ẽ q̃ lõgitudinẽ ꝛ latitudinẽ tñ hꝫ: cui⁹ termi quidẽ sũt linee. Supficies plana ẽ ab vna linea ad aliã extẽsio i extremitates suas recipiẽs. Angulus planus ẽ duarũ linearũ alterius ꝯtactus: qua℞ expãsio ẽ sup supficiẽ applicatioq3 nõ directa. Quãdo aũt angulum ꝯtinẽt due linee recte rectiline⁹ angulus noiaf. Qñ recta linea sup rectã steterit duoq3 anguli vtrobiq3 fuerit eq̃les: eo℞ vterq3 rect⁹ erit. Lineaq3 linee supstãs ei cui supstat ꝑpendicularis vocat. Angulus vo qui recto maior ẽ obtusus dicit. Angul⁹ vo minor recto acut⁹ appellaf. Termin⁹ ẽ qd vniuscuiusq3 finis ẽ. Figura ẽ q̃ termino vl terminis ꝯtinef. Circul⁹ ẽ figura plana vna q̃dem linea ꝯtẽta: q̃ circũferentia noiaf: in cui⁹ medio pũct⁹ ẽ: a quo oẽs linee recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiinuicẽ sũt equales. Et hic quidẽ pũct⁹ cẽtrũ circuli dr̃. Diameter circuli ẽ linea recta que sup ei⁹ cent℞ trãsiens extremitatesq3 suas circũferẽtie applicans circulũ i duo media diuidit. Semicirculus ẽ figura plana diametro circuli ꝛ medietate circũferentie ꝯtenta. Portio circuli ẽ figura plana recta linea ꝛ parte circũferẽtie ꝯtẽta: semicirculo quidẽ aut maior aut minor. Rectilinee figure sũt q̃ rectis lineis ꝯtinent quarũ quedã trilatere q̃ trib⁹ rectis lineis: quedã quadrilatere q̃ quatuor rectis lineis. q̃da multilatere que pluribus q̃3 quatuor rectis lineis continẽt. Figurarũ trilaterarũ: alia est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs eq̃lia latera. Alia triangulus triũ inequalium laterũ. Ha℞ iterũ alia est orthogoniũ: vnũ .s. rectum angulum habens. Alia ẽ amblygonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxygonium: in qua tres anguli sunt acuti. Figurarũ aũt quadrilatera℞ Alia est q̃dratum quod est equilaterũ atq3 rectangulũ. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̃ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs p se notis: e pmo de diffinitionibus earundem.

Abb. 3.11. Eine Seite aus der ersten lateinischen Druckausgabe der „Elemente“ von EUKLID in Europa (1482).

zur Genauigkeit von acht Dezimalen berechnet, später durch ULUĜ BEG (1393—1449) sogar bis zur 15. Dezimale.

Seit dem 11. Jahrhundert gelangten über Spanien und Sizilien unter vielen Erfindungen und geistigen Schätzen auch mathematische Kenntnisse des arabischen Kulturbereiches nach Europa, wo sie zunächst nur zögernd Aufnahme fanden.

Ein bedeutender Aufschwung der mathematischen Wissenschaften setzte in Europa erst mit der Entwicklung des Frühkapitalismus im 15. und 16. Jahrhundert ein, wodurch starke gesellschaftliche Anforderungen an die Mathematik gestellt wurden. Die zunehmende Hochseeschiffahrt auf den Seewegen in die Kolonien und die Anforderungen des sich rasch entwickelnden Geschützwesens erzwangen eine Durchbildung der Trigonometrie. Die trigonometrischen Tafeln wurden genauer berechnet, der Zusammenhang der Methoden und Lehrsätze herausgearbeitet, und schließlich faßte der deutsche Mathematiker J. REGIOMONTANUS (1436—1476) die ebene und sphärische Trigonometrie in dem bedeutenden fünfbändigen Werk *De triangulis omnimodis* (Über alle Arten von Dreiecken) zusammen.

Durch den Übergang zur Geldwirtschaft mußten große Bevölkerungskreise die verschiedensten Währungs- und Maßeinheiten ineinander umrechnen können, mußten Buchführung, Zinsberechnung usw. bewältigt werden. Im Auftrage der Stadtverwaltungen lehrten daher überall Rechenmeister kaufmännisches Rechnen; in Deutschland ist ADAM RIES (1492—1559) am bekanntesten geworden, der im Bergbaugebiet von Annaberg, einem der Zentren des europäischen Frühkapitalismus, gewirkt hat.

Wie im Altertum rechnete man ursprünglich auch in Europa auf dem Abakus, indem man sogenannte Rechenpfennige auf parallelen Linien auflegte, die, auf einem Tisch, Brett oder Tuch aufgetragen, die verschiedenen Einheiten von Maß

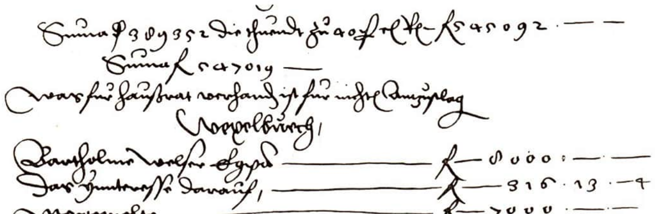


Abb. 3.12. Im Jahre 1533 nahm ANTON FUGGER, einer der reichsten damaligen europäischen Kaufleute, sein Vermögen auf. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt dieses Verzeichnisses und verdeutlicht das Eindringen der indisch-arabischen Ziffern in die Buchführung. So liest man etwa:

Wexelbuech
Bertholme Welser cgpa (compagnia) — 8 000.—.—
Das ynteresse darauf 316.13.— 4

Die Kaufleute WELSER schuldeten also den FUGGERN 8000 Gulden (f) mit den entsprechenden Zinsen (Interesse darauf).

Abb. 3.13. Zeitgenössische Illustration zum Sieg des schriftlichen Ziffernrechnens über das Abakusrechnen (1504). – Unter Aufsicht der Göttin Arithmetica führen BOETHIUS und PYTHAGORAS, die damals als Erfinder des schriftlichen Rechnens bzw. des Rechnens auf dem Rechentisch galten, ein Wettrechnen durch. BOETHIUS ist bereits fertig. Beachte die Gesichtsausdrücke, insbesondere, wie griesgrämig PYTHAGORAS noch rechnet!

oder Gewicht bzw. die Zehnerpotenzen bezeichneten. Hieraus ist später die heutige Kinderrechenmaschine hervorgegangen.

Nach und nach aber setzte sich das schriftliche Rechnen mit den indischen Ziffern, die über Spanien nach Europa gekommen waren, gegen das Abakusrechnen durch. Die Rechenmeister gingen dann dazu über, spezielle Abkürzungen und Symbole für mathematische Begriffe und Operationen einzuführen; 1496 trat zum erstenmal der Multiplikationspunkt auf, 1481 die Zeichen + und –, 1525 erschien zum erstenmal der Wurzelhaken im Druck und 1557 das heutige Gleichheitszeichen. Diese algebraischen Abhandlungen hießen Schriften der Coß, nach dem italienischen Wort cosa für Sache, Ding, das die Stelle der Unbekannten in Bestimmungsgleichungen einnahm.

Im 16. Jahrhundert konnten in Europa erstmals die antiken Kenntnisse übertroffen werden. Der italienische Büchsenmeister N. TARTAGLIA (1500?–1557) fand die rechnerische Auflösung der Gleichung 3. Grades, L. FERRARI (1522–1565) die der Gleichung 4. Grades; G. CARDANO (1501–1576) stellte erste Untersuchungen über komplexe Zahlen an. Die *Arithmetica integra* (1544) des Deutschen M. STIFEL (1487?–1567) enthielt u.a. Grundgedanken des logarithmischen Rechnens. Der bedeutendste Algebraiker jener Periode war jedoch der Franzose FR. VIÈTE (1540 bis 1603) (VIETA), der zum erstenmal durchgängig Buchstaben zur Bezeichnung bekannter und unbekannter Zahlen verwendete.

	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
10	100000000	100501227	1010.4966	101511230	102020032	102531384	103045299	103561790
10	····10000	····11277	····15067	····21381	····30234	····41637	····55603	····72140
20	····20001	····21218	····25168	····35524	····40437	····51891	····65909	····82503
30	····30003	····31380	····35271	····41687	····50641	····62146	····76216	····92861
40	····40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72402	····86523	103603211
50	····50010	····51487	····55479	····61006	····71052	····82660	····96232	····18581

Abb. 3.14. Anfang der Progreß-Tabulen von J. BÜRGI (1620).

Zu Anfang des 17. Jahrhunderts wurden zur Erleichterung des bedeutenden Aufwandes bei trigonometrischen Rechnungen in Astronomie und Nautik die Logarithmen erfunden, so von J. BÜRGI (1552–1632), einem aus der Schweiz stammenden Mechaniker und Astronomen, dem Schotten J. NEPER (1550–1617) und dem Engländer H. BRIGGS (1561–1630).

Somit hatte bereits Ende des 16., Anfang des 17. Jahrhunderts die Mathematik eine ganz neue gesellschaftliche Stellung erreicht, indem sich neue und erweiterte Möglichkeiten für sie in der gesellschaftlichen Praxis ergeben hatten.

Die sich formierende neue Klasse, die Bourgeoisie, hatte in den Naturwissenschaften ein Mittel erkannt, zum Zwecke ihrer eigenen Emanzipation als Klasse die Produktion auf eine höhere Stufe der Produktivität und Organisationsform zu heben. Das Ergebnis bestand in einem bis dahin nicht gekannten Aufschwung der Naturwissenschaften, insbesondere der Mechanik, Optik, Hydromechanik und Astronomie, ferner in einer raschen Entwicklung der Kommunikationsmittel und der Produktionsinstrumente in den Manufakturen.

Für die Mathematik entstanden aus der Weiterentwicklung der Produktionsinstrumente, der Wasserhebemaschinen und Seilzugaggregate, der Bagger und Windmühlen, der Bohrmaschinen und Walkmühlen für die Papier- und Textilherstellung usw. entscheidende Impulse; typisch war dabei die sich aufdrängende Untersuchung der Kraft- und Energieverhältnisse gegeneinander beweglicher Teile von Mechanismen. „Sehr wichtig wurde die sporadische Anwendung der Maschinerie im 17. Jahrhundert, weil sie den Mathematikern jener Epoche Anhaltspunkte und Reizmittel zur Schöpfung der modernen Mechanik darbot.“[1]

Zugleich unterstützte die Entwicklung der Naturwissenschaften die Herausbildung des theoretisch-mechanischen Denkens. Es wurde deutlich, daß die Mathematik nicht mehr dabei stehen bleiben konnte, Zustände zu beschreiben, sondern daß es darauf ankam, die sich vollziehenden Veränderungen mathematisch, durch einen besonderen Kalkül zu erfassen. Für die Naturwissenschaft erwiesen sich insbesondere die Fallbewegung und die Bewegung der Planeten als Schlüsselprobleme.

Die geistige Bewältigung mechanischer Bewegungsabläufe in Form neuer Rechnungsarten war in der Tat die zentrale Aufgabe der Mathematiker eines ganzen Jahrhunderts. Das Ergebnis bestand darin, daß im 17. Jahrhundert die Mathematik nicht nur eine neue gesellschaftliche Stellung erreicht, sondern einen prinzipiellen Wandel vollzogen hatte, den Übergang von der Mathematik der Statik

[1] K. Marx: Kapital. Bd. 1, Berlin 1951, S. 365.

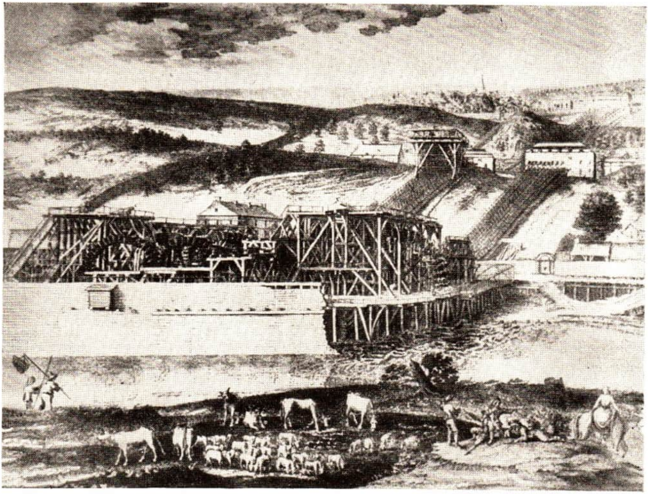


Abb. 3.15. Wasserhebemaschine bei Marly an der Seine zur Versorgung der Wasserkünste Ludwigs des XIV. im Schloßpark zu Versailles. Erbaut 1681/85. — 14 Wasserräder von je 12 m Durchmesser hoben mittels 221 Pumpen täglich etwa 3200 m³ 162 m hoch; Leistung etwa 80 PS.

zur Mathematik der funktionalen Beziehungen und der Dynamik. Am durchgreifendsten haben die funktionale Denkweise, das methodische Verfahren der analytischen Geometrie und die Ausbildung der infinitesimalen Methoden den Charakter der Mathematik umgestaltet und damit zugleich wesentliche Elemente der modernen Mathematik geformt. Zugleich wurden um diese Zeit auch die Grundlagen der projektiven Geometrie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt.

Die Entwicklung der Grundgedanken der analytischen Geometrie verdankt man in der Hauptsache den Franzosen P. Fermat (1601—1665) und R. Descartes (1596 bis 1650) (Cartesius).

Die Suche nach neuen Methoden der Flächen- und Rauminhaltsberechnung bildete einen wesentlichen Ausgangspunkt der späteren Integralrechnung. Hier haben die großen Italiener G. Galilei (1564—1642), E. Torricelli (1608—1647) und B. Cavalieri (1598 ?—1647), der deutsche Naturforscher J. Kepler (1571—1630), der Franzose G. P. de Roberval (1602—1675) und die Engländer J. Gregory (1638 bis 1675) und J. Wallis (1616—1703) die bedeutendsten Beiträge geliefert. Zugleich enthielt das durch die Entwicklung der Mechanik aufgeworfene Tangentenproblem Ansatzpunkte zum differentiellen Denken, noch unterstützt durch die um diese Zeit erfolgende Wiederbelebung der antiken atomistischen Vorstellungen von Demokrit. Die wesentlichsten Beiträge stammen hier von dem Niederländer I. Beeckmann (1588–1637), von den Franzosen Bl. Pascal (1623–1662) und P. Fermat und dem Engländer I. Barrow (1630–1677), der als erster den gegenseitigen Zusammenhang von Differentiation und Integration erkannte.

In den 70er Jahren des 17. Jahrhunderts erfolgte schließlich die Herausarbeitung geschlossener und zusammenhängender infinitesimaler Methoden, und zwar unabhängig voneinander durch den überragenden englischen Naturforscher Isaac Newton (1643–1727) und den deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Newton war in seiner Fluxionsrechnung zu tieferem Verständnis vorgestoßen, aber die von Leibniz gewählten Bezeichnungen wie etwa das Differentiationszeichen *d* und das Integralzeichen $\int$ erwiesen sich als geschickter. Nachdem Leibniz zwischen 1682 und 1686 die wichtigsten seiner Ergebnisse publiziert hatte, setzten sich seine Bezeichnungen auf dem Kontinent rasch durch. Vor allem die aus Basel stammenden Brüder Jakob Bernoulli (1655–1705) und Johann Bernoulli (1667–1748) sowie der Franzose l'Hospital (1661–1704)

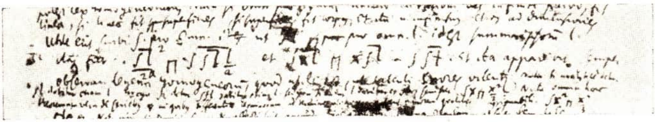


Abb. 3.16. Faksimile eines Manuskriptes von Leibniz vom 29. Oktober 1675, in welchem er zum ersten Male das Integralzeichen verwendet.

wandten die Leibnizsche Methode auf viele neue Probleme der Mechanik an, schrieben die ersten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung und entwickelten bereits die Grundzüge einer Theorie der Differentialgleichungen sowie die ersten Ergebnisse der Variationsrechnung.

Parallel mit den Methoden der Differential- und Integralrechnung wurde die Theorie der unendlichen Reihen, insbesondere die der Potenzreihen, durchgebildet, ein auch noch heute außerordentlich wichtiges Hilfsmittel der höheren Analysis, das z. B. die schnelle Berechnung der Logarithmen ermöglicht. Hier haben I. Newton insbesondere und später C. Maclaurin (1698–1746) und Br. Taylor (1685–1731) die Hauptarbeiten verrichtet. Zugleich wurde die Algebra wesentlich weiter entwickelt, wieder durch Newton, Leibniz und den deutschen Gelehrten E. W. v. Tschirnhaus (1651–1708).

Auf Grund des gestiegenen allgemeinen gesellschaftlichen Interesses erhielten die Naturwissenschaftler und Mathematiker in dieser Periode auch eine neue gesellschaftliche Stellung. Giordano Bruno hatte 1600 in Rom den Scheiterhaufen besteigen müssen, Galilei starb im Gewahrsam der Inquisition und Descartes in schwedischem Exil, Newton aber erhielt als erster Naturwissenschaftler überhaupt ein Staatsbegräbnis.

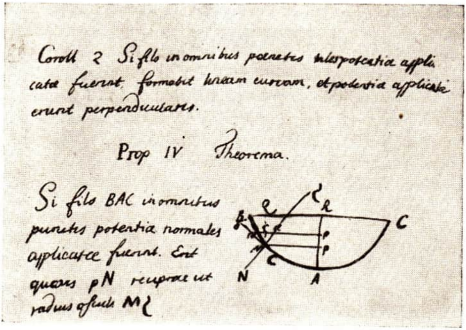


Abb. 3.17. Ausschnitt aus einem mathematischen Manuskript von L. EULER.

Zur Erfüllung der Interessen der absolutistischen Staaten wurden Ende des 17. und Anfang des 18. Jahrhunderts in den ökonomisch fortgeschrittensten Feudalstaaten Europas Akademien gegründet, so in London, Paris, Berlin und Petersburg, dem heutigen Leningrad. Diese vier wissenschaftlichen Zentren Europas stellten im 18. Jahrhundert auch die Sammelpunkte der bedeutendsten Mathematiker dar. NEWTON war erster Präsident der Londoner Akademie, in Paris wirkten u.a. D'ALEMBERT (1717–1783), A. CL. CLAIRAUT (1713–1765) und später der überragende Mathematiker J. L. LAGRANGE (1736–1813), in Berlin LAGRANGE, J. H. LAMBERT (1728–1777) sowie der geniale Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783). EULER arbeitete jedoch hauptsächlich in Petersburg, zusammen z.B. mit dem bedeutenden DANIEL BERNOULLI (1700–1782).

Mit Hilfe der an den Akademien tätigen Gelehrten lösten die feudalen Staaten die Probleme, die naturwissenschaftliche und mathematische Methoden erforderten, z. B. für die Mathematik die kartographische und geodätische Erschließung der Schiffahrtswege und Kolonialreiche, die Konstruktion verbesserter Kriegsschiffe, Wasserräder und Turbinen, die Durchbildung des Artilleriewesens usw. Auf allen diesen Gebieten hat sich z. B. LEONHARD EULER bedeutende Verdienste erworben. Zugleich entwickelte sich die theoretische Mathematik rasch weiter, wie etwa die Theorie der Differentialgleichungen, die Variationsrechnung, aber auch Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es ist charakteristisch für jene Periode, daß Theorie und Praxis Hand in Hand gingen und Männer wie EULER und LAGRANGE sowohl die reine wie die angewandte Mathematik förderten.

Naturwissenschaft und Mathematik machten in der gesamteuropäischen geistigen Strömung der Aufklärung einen wesentlichen Anteil aus, indem sie die Welt aus natürlichen Gründen rational erklären konnten. Durch VOLTAIRE z. B. gelangte die NEWTONsche Gravitationstheorie nach Frankreich und damit auf den Kontinent.

d'Alembert war einer der entscheidenden Mitarbeiter an der großen französischen Enzyklopädie. Die so in materialistischem Geist betriebene Mathematik und Himmelsmechanik feierte Triumphe, von 1799 an erschien die berühmte fünfbändige Himmelsmechanik von P. S. Laplace (1749–1827), in der nicht einmal mehr das Wort „Gott" auftrat.

Die Ende des 18. Jahrhunderts zunächst in England und Frankreich einsetzende industrielle Revolution, die in den 20er Jahren auch nach Deutschland und später nach Osteuropa übergriff, erhöhte sprunghaft die gesellschaftlichen Anforderungen an die Naturwissenschaften und die Mathematik. In steigendem Umfang benötigte die Bourgeoisie zur Inganghaltung ihrer Produktion Ingenieure, die bedeutende mathematische und naturwissenschaftliche Kenntnisse besaßen. Als erste Ausbildungsstätte derartiger Fachkräfte wurde während der Großen Französischen Revolution durch die Initiative der Jakobinerregierung und des der Revolution treu ergebenen überragenden Mathematikers G. Monge (1746–1818) in Paris eine polytechnische Schule gegründet, die im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Zentrum Europas wurde und an der alle damaligen großen französischen Mathematiker — Lagrange, Laplace, S. Poisson (1781–1840), A. C. Cauchy (1789–1857), J. V. Poncelet (1788–1868) und viele andere — wirkten. Nach Pariser Vorbild wurden in ganz Europa — in Dresden (1828), Karlsruhe, Riga, Kopenhagen, Prag, Zürich, Wien, Lissabon — polytechnische Schulen gegründet, die „ein auf der Grundlage der großen Industrie naturwüchsig entwickeltes Moment dieses Umwälzungsprozesses" (K. Marx) der industriellen Revolution darstellten. Aus ihnen sind die späteren Technischen Hochschulen hervorgegangen. An ihnen wurde die technische Mechanik auf der Grundlage der höheren Analysis durchgebildet, der Arbeitsprozeß der Dampfmaschine zur Erhöhung ihres Wirkungsgrades erforscht, und es wurden mathematische Methoden in die physikalische Ausbildung der Studenten eingeführt. Seither gehört eine gründliche mathematische Ausbildung zum Rüstzeug der Ingenieure.

Auf der Grundlage der durch die industrielle Revolution entstandenen erhöhten Anforderungen an die Mathematik und der aus dem gleichen Grunde sprunghaften Entfaltung der Naturwissenschaften — der Elektrizitätslehre, des Magnetismus, der Elektrodynamik, der Optik, der Wärmelehre, der theoretischen Chemie —, die ihrerseits erhöhte Anforderungen an die Mathematik stellten, entwickelte sich die Mathematik im 19. Jahrhundert in einem noch nicht gekannten Maße nach Umfang und Tiefe. Es wurde eine Vielzahl neuer mathematischer Gebiete — so die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Differentialgeometrie, Integralgleichungen, Funktionentheorie, analytische Zahlentheorie, Theorie der analytischen Funktionen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre axiomatische Begründung, Gruppentheorie, Algebra, Körpertheorie, Mengenlehre usw. — entwickelt, die nicht mehr Gegenstand der Schulmathematik sind und daher hier im einzelnen nicht behandelt werden. Vielmehr sollen nur einige wenige Einzelheiten mitgeteilt werden.

Teilweise direkt aus dem Unterrichtsbetrieb der polytechnischen Schulen ist eine exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung, besonders die genaue Erklärung des Grenzüberganges, hervorgegangen. Diese Leistung ist von CAUCHY, dem böhmischen Philosophen B. BOLZANO (1781–1848), dem norwegischen Mathematiker N. H. ABEL (1802–1829), den russischen Mathematikern M. OSTROGRADSKI (1801–1862) und P. TSCHEBYSCHEW (1821–1894) und den deutschen Mathematikern C. F. GAUSS (1777–1855), P. G. LEJEUNE-DIRICHLET (1805–1859) und B. RIEMANN (1826–1866) vollbracht worden. RIEMANN z. B. führte die Summendefinition des bestimmten Integrals ein.

Seit der Antike war versucht worden, das sogenannte euklidische Parallelenpostulat mit Hilfe der anderen geometrischen Axiome zu beweisen, indessen blieben alle derartigen Ansätze erfolglos. GAUSS, der größte deutsche Mathematiker, erkannte als erster, daß dieses Parallelenpostulat, also die Annahme, daß es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt eine und nur eine parallele Gerade gibt, sich nicht mit Hilfe der anderen Postulate beweisen läßt und daß es möglich ist, Geometrien aufzubauen, die ohne diese Annahme auskommen. Doch scheute er sich vor der Veröffentlichung solcher nichteuklidischer Geometrien, die in starkem Widerspruch zur damals herrschenden Philosophie KANTS standen. Unabhängig von GAUSS kam der russische Mathematiker N. LOBATSCHEWSKI (1793–1856) zum gleichen Ergebnis und tat 1829 als erster den mutigen Schritt der Veröffentlichung, wie auch unabhängig von seinen beiden Vorgängern 1832 der Ungar J. BOLYAI (1802–1860). Hier hat später B. RIEMANN weitergearbeitet und die sogenannte RIEMANNsche Geometrie begründet, die im 20. Jahrhundert in der Relativitätstheorie A. EINSTEINS (1879–1955) zu außerordentlicher Wichtigkeit gelangte.

Dieser Fall einer ausgebreiteten Anwendung einer abstrakten mathematischen

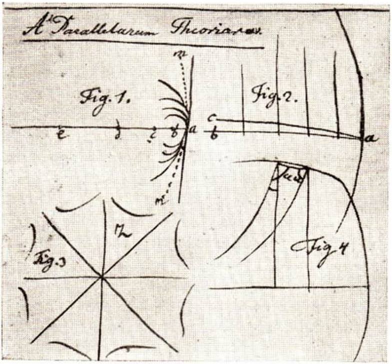


Abb. 3.18. Handzeichnung JOHANN BOLYAIS zur nichteuklidischen Geometrie (1820).

Theorie steht keineswegs allein da, im Gegenteil. So beruht — abgesehen von den technischen Voraussetzungen — auf der Entwicklung der abstrakten Algebra, der mathematischen Logik und der Mengenlehre die Entwicklung der maschinellen elektronischen Rechentechnik, die zu einer unbedingten Notwendigkeit für den Raketenflug, zur Konstruktion kybernetischer Maschinen, zur Steuerung komplizierter ökonomischer Vorgänge und zur Bewältigung einer Unzahl einzelner mathematischer, physikalischer und technischer Probleme geworden ist.

Auf der ganzen Erde, insbesondere in den industriell hochentwickelten Staaten und da wieder besonders in der Sowjetunion und den USA, ist die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrzehnten ganz außerordentlich rasch vorangeschritten, sowohl in der abstrakten Forschung als auch in den verschiedensten Bereichen ihrer Anwendungen.

Heute ist die mathematische Forschung eine große internationale Gemeinschaftsarbeit, deren Ausmaß und Fruchtbarkeit freilich davon abhängen, wie sich die Prinzipien der friedlichen Koexistenz zwischen Staaten verschiedener Gesellschaftsordnung durchsetzen. Auch die Mathematiker in der Deutschen Demokratischen Republik leisten bedeutende Beiträge zur Weiterentwicklung der mathematischen Wissenschaften.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Lehre von den Funktionen	3
1.1.	Algebraische Funktionen	4
1.2.	Winkelfunktionen und zyklometrische Funktionen	33
1.3.	Exponential- und Logarithmusfunktionen	66
2.	Kegelschnitte	99
2.1.	Darstellende Geometrie	100
2.2.	Analytische Geometrie	127
3.	Rückblick auf die Geschichte der Mathematik	155

Abbildungsnachweis

Kapitelbild 1.0.: Zentralbild.

Kapitelbild 2.0.: N. B. Richter: ,,Statistik und Physik der Kometen". I. A. Barth Verlag, Leipzig 1954.

Kapitelbild 3.0.: Zentralbild.

Abbildung 3.2.: Propyläen — Weltgeschichte. Bd. I.

Abbildung 3.3., 3.13.: B. L. van der Waerden: ,,Erwachende Wissenschaft". Basel und Stuttgart 1956.

Abbildung 3.5., 3.7., 3.14.: Volk und Wissen.

Abbildung 3.6., 3.12.: K. Menninger: ,,Zahlwort und Ziffer". Göttingen 1958.

Abbildung 3.8 , 3.9., 3.10., 3.11.: D. E. Smith: ,,History of Mathematics". Vol. I, 1923.

Abbildung 3.15.: Klemm: ,,Technik — Eine Geschichte ihrer Probleme". Freiburg—München 1954.

Abbildung 3.16.: Cajori: ,,A History of mathematical notations". Vol. II, The University of Chicago Press 1929.

Abbildung 3.17.: ,,Leonhard Euler — Sammelband zu Ehren seines 250. Geburtstages". Moskau 1958.

Abbildung 3.18.: W. u. I. Bolyai: ,,Geometrische Untersuchungen". Leipzig 1913.

00 12 56-3
4,50 MDN