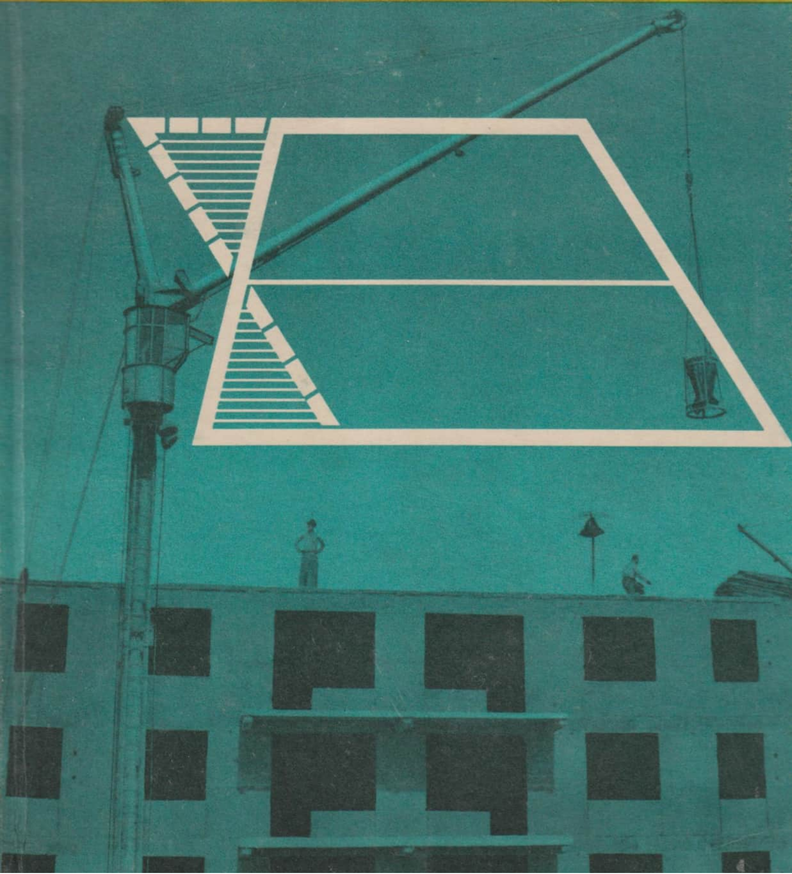
MATHEMATIK 6

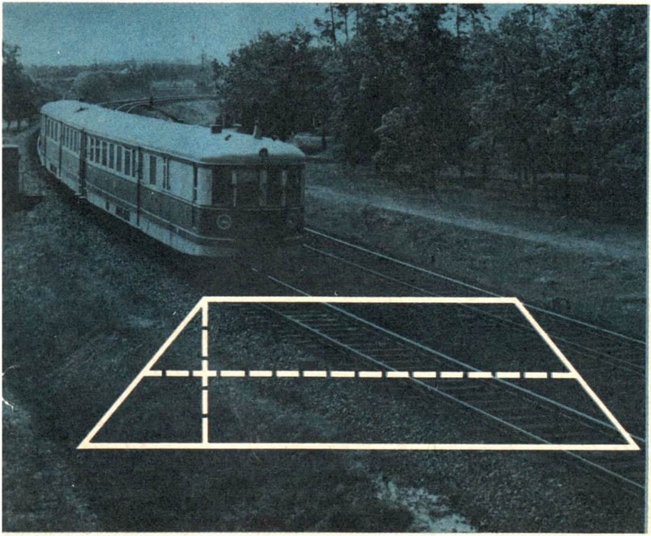
OBERSCHULE



MATHEMATIK

Lehrbuch für die Oberschule · Klasse 6

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1968



Verfasser:
Dr. Dieter Ilse, Dipl.-Math. Werner Tietz — Kapitel A und B
Rudolf Bittner — Kapitel C, D und E
Karl-Heinz Dievenkorn — Kapitel a bis e
Dr. Hans Wußing — Geschichtliche Einblendungen
Redaktion:
Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

4. Auflage
Ausgabe 1966
Lizenz-Nr. 203 1000/67 (DN)
ES 11 G
Einband: Werner Fahr
Zeichnungen: Heinz Grothmann, Rudolf Schultz-Debowski
Grafiken: Klaus Boerger
Typografie: Manfred Behrendt
Satz: B. G. Teubner, 701 Leipzig, Querstr. 17 (III/18/154)
Druck: Karl-Marx-Werk Pößneck V 15/30
Redaktionsschluß: 22. 6. 1967
Bestell-Nr. 00 06 01-4 — Preis: 2,20

Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

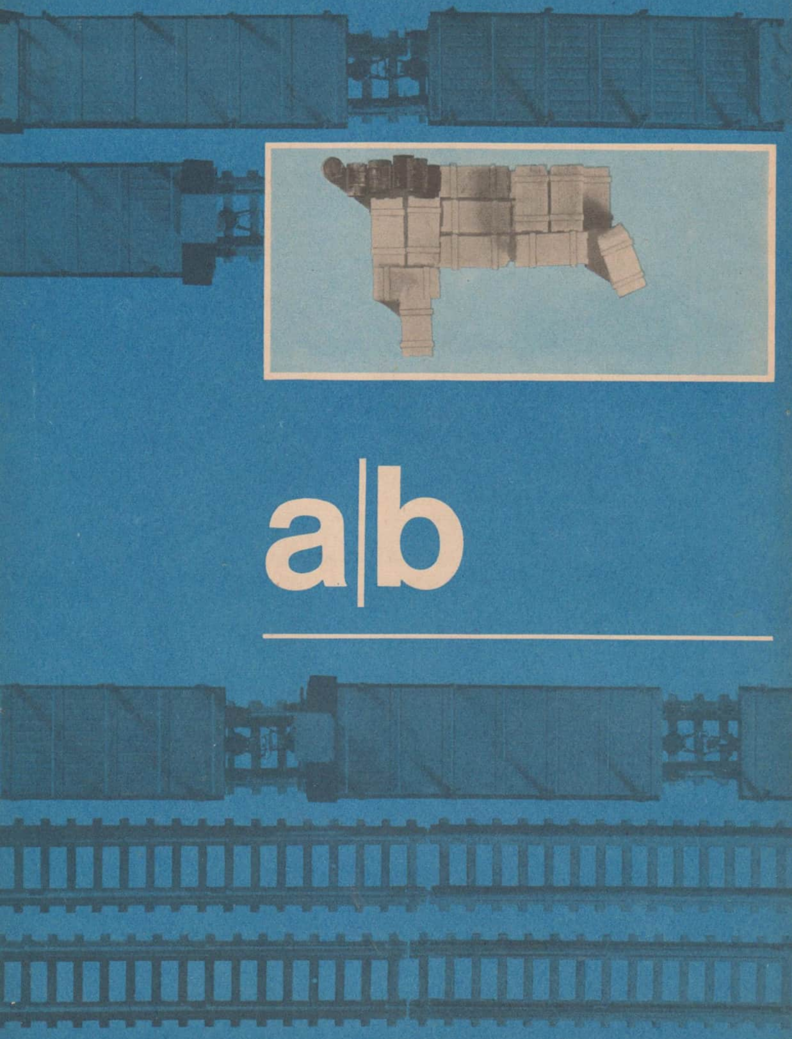
Das farbige Griffregister auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz findest du hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel. Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis E, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis e. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.
Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in Lerneinheiten untergliedert.
Innerhalb der Lerneinheiten werden die Beispiele, Übungen und Definitionen durch folgende blaue Marken gekennzeichnet:

■ Beispiele
● Übungen
▶ Definitionen und Sätze

Dabei werden mit vollen Dreiecken solche Definitionen und Sätze gekennzeichnet, die du dir fest einprägen mußt.
Die Numerierung der Lerneinheiten wird jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnt dann die Numerierung von Neuem. Hinweise auf Lerneinheiten werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Abschnitt C 23 ist die Lerneinheit 23 des Kapitels C.
Auf den Seiten 188 und 189 findest du eine Übersicht über die Gebiete aus der Mathematik, die in der 6. Klasse im Unterricht behandelt werden.


a|b

A. Die Teilbarkeit der natürlichen Zahlen

A

Zur Wiederholung

1

Wenn wir von 0 ausgehend fortlaufend die Zahl 1 addieren, so erhalten wir die **natürlichen Zahlen** 0, 1, 2, 3, . . .
Die Zahlen 2,50 oder 4,35 sind beispielsweise keine natürlichen Zahlen.
Von den vier Grundrechenoperationen sind im Bereich der natürlichen Zahlen nur die Addition und die Multiplikation *uneingeschränkt* ausführbar. Das bedeutet: Welche natürlichen Zahlen wir als Summanden (Faktoren) auch immer wählen, immer gibt es eine natürliche Zahl, die die Summe (das Produkt) dieser Zahlen ist.
Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar. Die Subtraktion ist die *Umkehrung* der Addition. Beim Subtrahieren müssen wir zu einer gegebenen Summe und einem gegebenen Summanden den zweiten Summanden bestimmen.

■ Gegeben seien die Summe 17 und die Zahl 9 als einer ihrer Summanden. Gesucht ist der zweite Summand.

$9 + x = 17$ Dafür schreiben wir auch: $x = 17 - 9$
$9 + 8 = 17$ $x = 8$

Für die Zahlen in diesem Beispiel gilt: $9 < 17$.

■ Gegeben seien die Summe 12 und der Summand 15. Gesucht ist der zweite Summand.

$15 + x = 12$ Dafür schreiben wir auch: $x = 12 - 15$

Es gibt keine natürliche Zahl, die diese Gleichung erfüllt. Für die Zahlen in diesem Beispiel gilt: $15 > 12$.

A

Mit Hilfe der Addition können wir ganz allgemein sagen, ob eine natürliche Zahl a kleiner als eine natürliche Zahl b ist.

1 **DEFINITION: Die Zahl a heißt kleiner als die Zahl b, wenn wir eine natürliche Zahl $x \neq 0$ finden können, so daß**
$a + x = b$
gilt. (Es gibt dann auch nur eine einzige solche Zahl x.)
Wir schreiben: $a < b$ (gelesen: a ist kleiner als b).
Statt $a + x = b$ schreiben wir in diesem Fall auch $x = b - a$.
Es ist üblich, für $a < b$ auch $b > a$ zu schreiben. (Gelesen: b ist größer als a)

2 **SATZ: Die Subtraktion ist ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner als der Minuend ist oder wenn der Subtrahend gleich dem Minuenden ist.**
Die Subtraktion ist nicht ausführbar, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist.

$x = b - a$ ist lösbar, wenn $a < b$ oder $a = b$ gilt.
$x = b - a$ ist nicht lösbar, wenn $a > b$ gilt.

Aufgaben a 1 bis 9

2

Die Division ist die *Umkehrung* der Multiplikation. Beim Dividieren müssen wir zu einem gegebenen Produkt und einem gegebenen Faktor den zweiten Faktor bestimmen.

Gegeben seien das Produkt 35 und die Zahl 7 als einer seiner Faktoren. Gesucht ist der zweite Faktor.

$7 \cdot x = 35$ Dafür schreiben wir auch: $x = 35 : 7$
$7 \cdot 5 = 35$ $x = 5$

Die Division $35 : 7$ ist ausführbar, weil der Dividend 35 ein Vielfaches (nämlich das 5fache) des Divisors 7 ist.

Gegeben seien das Produkt 9 und der Faktor 9. Gesucht ist der zweite Faktor.

$9 \cdot x = 9$ oder $x = 9 : 9$
$9 \cdot 1 = 9$ $x = 1$

Die Division $9 : 9$ ist ausführbar. Auch hier wollen wir den Dividenden 9 ein „Viel"faches (das 1fache) des Divisors 9 nennen.

Gegeben seien das Produkt 0 und der Faktor 12. Gesucht ist der zweite Faktor.

$12 \cdot x = 0$ oder $x = 0 : 12$
$12 \cdot 0 = 0$ $x = 0$

In diesem Beispiel ist der Dividend das 0fache des Divisors. Wir wollen auch noch das 0fache einer Zahl als „Viel"faches bezeichnen.

Die folgenden Überlegungen zeigen, warum die Division durch Null in *keinem Fall* möglich ist.
In der Gleichung $0 \cdot x = a$ sei a von Null verschieden. Dann gibt es keine Zahl x, die diese Gleichung erfüllt. Das heißt, es ist a nicht Vielfaches von 0. Daher gibt es keine Zahl $x = a : 0$, also ist $a : 0$ sinnlos.

In der Gleichung $0 \cdot x = a$ sei $a = 0$. Die Gleichung $0 \cdot x = 0$ ist gleichwertig mit $x = 0 : 0$. In diesem Falle erfüllen *alle* natürlichen Zahlen beide Gleichungen. Es gibt also kein eindeutig bestimmtes Ergebnis der Division $0 : 0$.

3 **SATZ: Die Division ist ausführbar, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Die Division durch Null ist sinnlos.**

Die Forderung, daß der Divisor ungleich Null sein soll, ist notwendig, da es sonst entweder keinen Quotienten oder unendlich viele Quotienten gibt.

$x = 15 : 0$ ist gleichwertig mit $0 \cdot x = 15$.
Hier gibt es *keine* Zahl x, die die letzte Gleichung erfüllt.

$x = 0 : 0$ ist gleichwertig mit $0 \cdot x = 0$.
In diesem Fall erfüllen *alle* natürlichen Zahlen die letzte Gleichung.

Aufgaben a 10

Die Teilbarkeitsbeziehung

3

Mit Hilfe der Addition haben wir die Kleinerbeziehung (▷ A 1) definiert. Auf ähnliche Weise können wir mit Hilfe der Multiplikation eine Beziehung zwischen natürlichen Zahlen a und b definieren, die etwas über die Teilbarkeit aussagt. Dabei wollen wir zunächst annehmen, daß die Zahlen a und b beide von Null verschieden sind.

4 **DEFINITION: Die natürliche Zahl a heißt *Teiler* der natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt:**
$a \cdot x = b$.
Ist a ein Teiler von b, so schreibt man dafür kurz: $a \mid b$
(gelesen: „a ist Teiler von b“ oder „a teilt b“ oder „b ist durch a teilbar“).
Die Zahl x ist dann ebenfalls ein Teiler von b.

Wenn wir feststellen wollen, ob eine gegebene Zahl a Teiler einer gegebenen Zahl b ist, so untersuchen wir die zu $a \cdot x = b$ gleichwertige Gleichung $x = b : a$. Wir stellen also fest, ob die Division $b : a$ ausführbar ist.

Es ist zu ermitteln, ob 12 Teiler von 204 ist, d. h., ob $12 \mid 204$ gilt.
Wir rechnen: $204 : 12 = 17$

$$\begin{array}{r} \underline{}\\ 84 \\ \underline{}\\ 0 \end{array}$$

Es gibt also eine Zahl x, für die $x = 204 : 12$ oder $12 \cdot x = 204$ gilt, nämlich $x = 17$. Damit haben wir festgestellt, daß 12 ein Teiler von 204 ist.

Es ist zu ermitteln, ob $13 \mid 85$ gilt.
Wir rechnen: $85 : 13 = 6$ (nicht lösbar)

$$\begin{array}{r} \underline{}\\ 7 \end{array}$$

Die Division $85 : 13$ ist nicht ausführbar. Es gibt also keine natürliche Zahl x, für die gilt: $13 \cdot x = 85$. Daher ist 13 nicht Teiler von 85.
Die folgenden beiden Beispiele sind Spezialfälle.

Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß gilt $3 \cdot x = 3$, nämlich $x = 1$:
$3 \cdot 1 = 3$, also gilt $3 \mid 3$.
Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß gilt $1 \cdot x = 8$, nämlich $x = 8$:
$1 \cdot 8 = 8$, also gilt $1 \mid 8$.

5 **SATZ: Für jede natürliche Zahl $a \neq 0$ gilt:**
$a \mid a$ (denn $a \cdot 1 = a$) und $1 \mid a$ (denn $1 \cdot a = a$)

Wenn wir von den Teilern einer Zahl sprechen, wollen wir von jetzt an diese Zahl selbst und die Zahl 1 stets mit zu den Teilern rechnen.

Aufgaben a 11 bis 28

4

6 **DEFINITION: Zahlen, die den Teiler 2 besitzen, heißen *gerade Zahlen.***

Ist die Zahl b gerade, so läßt sie sich also in der Form $2 \cdot x$ darstellen. Für die Zahl 0 gilt: $2 \cdot 0 = 0$. Also ist die Null eine gerade Zahl.
Der Satz A 5 besagt, daß jede natürliche Zahl $a \neq 0$ wenigstens sich selbst und die Zahl 1 als Teiler besitzt. Es gibt aber natürliche Zahlen, die darüber hinaus noch weitere Zahlen als Teiler besitzen.
Die Zahl 12 hat die Teiler 1; 2; 3; 4; 6; 12.
Andererseits gibt es Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.
Die Zahl 13 hat nur die Teiler 1 und 13.

7 **DEFINITION: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt *Primzahl.***

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zusätzliche Teiler				2		2;3		2;4	3	2;5
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
zusätzliche Teiler		2;3 4;6		2;7	3;5	2;4 8		2;3 6;9		2;5 10

A 1

Führe die Tabelle im Bild A 1 bis 50 fort!

Unter den Teilern einer Zahl treten stets auch Primzahlen auf. Diese Teiler werden **Primteiler** der betreffenden Zahl genannt. Da die Zahl 1 keine Primzahl ist, kann der Teiler 1 auch nicht als Primteiler bezeichnet werden.
Die Zahl 30 hat die Teiler 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30.
Davon sind 2; 3; 5 Primteiler.
Die Zahl 13, eine Primzahl, hat die Teiler 1 und 13.
Davon ist nur 13 Primteiler.

5

Wenn wir in der Beziehung $a \mid b$ die Zahl b gleich Null setzen, so nimmt die Gleichung in der Definition A 4 die Form $a \cdot x = 0$ an.

Die Zahl 16 ist ein Teiler von 0. Es gibt nämlich eine natürliche Zahl x, so daß gilt $16 \cdot x = 0$. Es ist die Zahl $x = 0$; denn $16 \cdot 0 = 0$, also gilt $16 \mid 0$.

8 **SATZ: Für jede natürliche Zahl a ($a \neq 0$) gilt:**
$a \mid 0$ (denn $a \cdot 0 = 0$)

ZUSAMMENFASSUNG:

$a < b$ (a ist kleiner als b)	$a \mid b$ (a teilt b)
bedeutet:	
Es gibt eine natürliche Zahl $x \neq 0$, so daß $a + x = b$ gilt.	Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ gilt.
Für $x = 0$ ergibt sich aus der letzten Gleichung $a = b$.	Für $x = 1$ ergibt sich aus der letzten Gleichung $a = b$.

Für jede natürliche Zahl $a \neq 0$ gilt:
$a \mid a$, denn $a \cdot 1 = a$, und $a \mid 0$, denn $a \cdot 0 = 0$.
Für jede natürliche Zahl a gilt auch:
$1 \mid a$, denn $1 \cdot a = a$.
Gilt $a > 1$ und ist a nur durch 1 und durch sich selbst teilbar, so ist a eine Primzahl.

Aufgaben a 29 bis 40

Teilbarkeitsregeln

6

Die Teilbarkeitsregeln dienen dem schnellen Auffinden der Teiler von Zahlen. Besonders bei größeren Zahlen ermöglichen die Teilbarkeitsregeln ein sehr rationelles Arbeiten.

Teilbarkeit durch 10

Alle durch 10 teilbaren Zahlen lassen sich in der Form $10 \cdot x = b$ darstellen.
Ergänze die folgende Tabelle!

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...	20
b	10	20							...	200

A

Die Zahlen in der Spalte b wollen wir die Zehnfachen der Zahlen 1, 2, 3 ... nennen. Wie für diese Beispiele gilt für alle natürlichen Zahlen der folgende Satz.

9 **SATZ: Alle Zahlen, deren Ziffern auf 0 enden, sind durch 10 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 10 teilbar.**

● Stelle fest, welche Zahlen durch 100, 1000 usw. teilbar sind!

Teilbarkeit durch 5

Alle durch 5 teilbaren Zahlen lassen sich in der Form $5 \cdot x = b$ darstellen.

● Bilde die Fünffachen der Zahlen 1 bis 20!

So wie in diesen Beispielen gilt für alle natürlichen Zahlen:

10 **SATZ: Alle Zahlen, deren Ziffern auf 0 oder 5 enden, sind durch 5 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 5 teilbar.**

Teilbarkeit durch 2

11 **SATZ: Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.**

Die geraden Zahlen sind die Zahlen 0; 2; 4; 6; 8 und alle Zahlen, deren Ziffern auf 0; 2; 4; 6 oder 8 enden.

Teilbarkeit durch 4

● Bilde die Vierfachen der Zahlen 1 bis 25!

Die Ziffern der durch 4 teilbaren Zahlen enden auf 0; 2; 4; 6 oder 8. Es sind aber nicht alle geraden Zahlen durch 4 teilbar. So ist z. B. 36 durch 4 teilbar, aber nicht 26 und 86. Ebenso ist 20 durch 4 teilbar, aber nicht 70 und 90.
Jedes Vielfache von 100 ist durch 4 teilbar. Es ist nämlich 4 ein Teiler von 100, und damit, wie sich zeigen läßt, auch ein Teiler von jedem Vielfachen von 100. Wir brauchen bei einer Zahl, die größer als 100 ist, nur die aus den letzten beiden Grundziffern dargestellte Zahl zu berücksichtigen.[1]

■ Die Zahl 87 748 ist durch 4 teilbar, weil 87 700 als Vielfaches von 100 und auch 48 durch 4 teilbar sind.

■ Die Zahl 87 778 ist nicht durch 4 teilbar, weil zwar 87 700 durch 4 teilbar ist, nicht aber 78

12 **SATZ: Alle Zahlen, bei denen die letzten beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen, sind durch 4 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 4 teilbar.**

Teilbarkeit durch 8

Jedes Vielfache von 1 000 ist durch 8 teilbar, weil 8 ein Teiler von 1 000 ist. Bei Zahlen, die größer als 1 000 sind, brauchen wir nur festzustellen, ob die letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen.

[1] Sind nämlich die Summanden einer Summe teilbar, so ist auch die Summe durch diese Zahl teilbar.

Die Zahl 6 748 512 ist durch 8 teilbar, weil 512 durch 8 teilbar ist.

Die Zahl 6 748 532 ist nicht durch 8 teilbar, weil 532 nicht durch 8 teilbar ist.

13 **SATZ: Alle Zahlen, bei denen die letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen, sind durch 8 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 8 teilbar.**

7

Bei der Untersuchung der Teilbarkeit einer Zahl durch 9 und durch 3 gehen wir einen anderen Weg.

Teilbarkeit durch 9

Bei der Division durch 9 mit Rest lassen die Zahlen 10; 100; 1 000; 10 000 usw. den Rest 1:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 \cdot 1 + 1 \\ 100 &= 9 \cdot 11 + 1 \\ 1\,000 &= 9 \cdot 111 + 1 \\ 10\,000 &= 9 \cdot 1\,111 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dividieren wir nun Vielfache von 10; 100; 1 000 usw. mit Rest durch 9, so bleiben die gleichen Vielfachen von 1 als Rest:

$$\begin{aligned} 30 &= 9 \cdot 3 + 3 \\ 700 &= 9 \cdot 77 + 7 \\ 5\,000 &= 9 \cdot 555 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es soll festgestellt werden, ob die Zahl 7 146 durch 9 teilbar ist.
Um diese Frage zu beantworten, zerlegen wir die gegebene Zahl folgendermaßen:

$$7\,146 = 7\,000 + 100 + 40 + 6$$

$$\begin{aligned} 7\,000 &= 9 \cdot 777 + 7 \\ 100 &= 9 \cdot 11 + 1 \\ 40 &= 9 \cdot 4 + 4 \\ 6 &= 9 \cdot 0 + 6 \end{aligned}$$

Nun bilden wir auf beiden Seiten die Summen und erhalten:

$$7\,146 = 9 \cdot 792 + 18.$$

Die Summe 18 der Reste ist eine durch 9 teilbare Zahl. Ebenso ist $9 \cdot 792$ durch 9 teilbar, wie es die Form $9 \cdot x$ dieses Produktes zeigt. Damit ist aber auch die Summe $9 \cdot 792 + 18 = 7\,146$ durch 9 teilbar.

Wie in diesem Beispiel hängt die Teilbarkeit einer beliebigen Zahl durch 9 nur davon ab, ob die Summe der Reste durch 9 teilbar ist. Diese Reste werden aber auch von den Grundziffern der gegebenen Zahl dargestellt, ihre Summe nennen wir **Quersumme**. Die Quersumme von 7 146 ist also
$7 + 1 + 4 + 6 = 18$.

14 **SATZ: Alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, sind durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.**

A

Teilbarkeit durch 3

Ebenso wie bei der Division mit Rest durch 9 lassen die Zahlen 10; 100; 1 000 usw. auch bei der Division mit Rest durch 3 den Rest 1.
Durch die gleiche Überlegung, wie sie im letzten Beispiel durchgeführt wurde, finden wir eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 3.

15 **SATZ: Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.**

Aufgaben a 41 bis 50

Zerlegung natürlicher Zahlen in Primfaktoren

8

Wenn wir eine Zahl in Faktoren zerlegen, die sämtlich Primzahlen sind, so sprechen wir von der **Zerlegung in Primfaktoren.**
Bei der Zerlegung in Primfaktoren beginnen wir am besten mit dem kleinsten Primteiler dieser Zahl.

A 2

Zerlegung in Primfaktoren

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \cdot 21 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ \hline 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 72 &= 2 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 18 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 72 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Es soll die Zahl 315 in Primfaktoren zerlegt werden.
Da 315 ungerade ist, enthält 315 nicht den Teiler 2. An der Quersumme 9 erkennen wir aber, daß 315 durch 3 teilbar ist. Die Zahl 3 ist also in diesem Fall der kleinste Primteiler.

$$\begin{aligned} 315 &= 3 \cdot 105 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 35 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline 315 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Bei der Zerlegung in Primfaktoren können gleiche Primzahlen auch mehrmals als Faktoren auftreten. Ein Produkt mit gleichen Faktoren können wir in abgekürzter Form schreiben.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (gelesen: zwei hoch drei); $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (gelesen: drei hoch vier)

In dieser Form geschriebene Produkte heißen **Potenzen.** Die kleine hochgesetzte Zahl heißt **Exponent.** Die untenstehende Zahl heißt **Basis.** Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist.
In der **Potenzschreibweise** können wir die Primfaktorenzerlegungen kürzer schreiben.

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$

9

Durch die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren kann man auch feststellen, welche weiteren Teiler diese Zahl hat, indem man auf alle möglichen Arten die Primfaktoren zusammenfaßt.

Es sollen die Teiler der Zahl 72 ermittelt werden (Bild A 3).

A 3

Ermittlung der Teiler

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 36$	2 und 36
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 18$	4 und 18
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9$	8 und 9
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24 \cdot 3$	24 und 3
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 12 \cdot 6$	12 und 6

Die übrigen, noch möglichen Zusammenfassungen ergeben keine neuen Teiler. Außer den gefundenen Teilern hat 72 natürlich noch die Teiler 1 und 72.
Mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung können wir jetzt noch weitere Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen aufstellen. Die Zerlegung der Zahl 72 in Primfaktoren erbrachte mit den Primfaktoren 2 und 3 den Teiler 6. Ebenso ist die Zahl 72 z. B. durch 8 teilbar, weil sie den Primfaktor 2 dreimal enthält.
Umgekehrt ist 72 durch 2 und durch 3 teilbar, weil 72 durch 6 teilbar ist und deswegen die Primfaktoren 2 und 3 enthält. Allgemein gilt für jede Zahl, daß sie durch 6 teilbar ist, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. Mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln für 2 und 3 gewinnen wir eine Regel für die Teilbarkeit durch 6.

16 **SATZ: Alle Zahlen, die gerade sind und deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 6 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 6 teilbar.**

Aufgaben a 51 bis 59

A

Das kleinste gemeinsame Vielfache natürlicher Zahlen

10

Die Zahl 72 ist Vielfaches der Zahl 6; denn es gilt:
$72 = 12 \cdot 6$.
Die Zahl 72 ist aber auch Vielfaches der Zahl 8, denn es gilt:
$72 = 9 \cdot 8$.
Wir sagen, daß 72 ein **gemeinsames Vielfaches** von 6 und von 8 ist. Außer der Zahl 72 gibt es noch weitere gemeinsame Vielfache der Zahlen 6 und 8, z. B. 96; 240; 24; 120.

● Gib weitere gemeinsame Vielfache von 6 und von 8 an! Wieviel gemeinsame Vielfache dieser Zahlen gibt es?

Unter allen gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6 und 8 gibt es ein kleinstes gemeinsames Vielfaches, nämlich die Zahl 24. Es gibt zwar noch kleinere Vielfache von 6 und auch kleinere Vielfache von 8, aber keine kleineren gemeinsamen Vielfachen.

Vielfache von 6	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14
Vielfache von 8	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14

Vielfache von 6	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	**24**	25	26	27	28
Vielfache von 8	15	**16**	17	18	19	20	21	22	23	**24**	25	26	27	28

Da die 0 Vielfaches (nämlich das 0fache) von jeder Zahl ist, ist 0 auch gemeinsames Vielfaches von 6 und 8. Die Zahl 0 ist also stets gemeinsames Vielfaches zweier beliebiger Zahlen. Daher wollen wir bei der Bildung gemeinsamer Vielfacher die 0 nicht berücksichtigen.
Wir können auch gemeinsame Vielfache von mehr als zwei Zahlen bilden.

■ Es sollen gemeinsame Vielfache von 4, 9 und 10 ermittelt werden:

$180 = 45 \cdot 4 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10$
$360 = 90 \cdot 4 = 40 \cdot 9 = 36 \cdot 10$
$720 = 180 \cdot 4 = 80 \cdot 9 = 72 \cdot 10$

Auch hier gibt es beliebig viele gemeinsame Vielfache; denn jedes Vielfache von 180 ist wieder gemeinsames Vielfaches von 4, 9 und 10.
Für die Zahlen 4, 9 und 10 ist 180 das kleinste von allen gemeinsamen Vielfachen.

17 **DEFINITION: Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.) gegebener natürlicher Zahlen ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die durch alle gegebenen Zahlen teilbar ist.**

Das Produkt gegebener Zahlen ist stets ein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen, aber meistens nicht das kleinste gemeinsame Vielfache.

11

Bei größeren Zahlen ermitteln wir das k. g. V. auf folgende Weise:

1. Wir zerlegen die gegebenen Zahlen in Primfaktoren.

$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2^3$

Da die Zahl 8 im k. g. V. als Faktor enthalten sein muß, müssen wir 2^3 für die Bildung des k. g. V. auswählen. Weiterhin muß aber auch die Zahl 6 im k. g. V. als Faktor enthalten sein, d. h., das k. g. V. muß die Faktoren 2 und 3 enthalten. Der Faktor 2 ist aber schon in der bereits ausgewählten Potenz 2^3 vorhanden, so daß wir zur Bildung des k. g. V. nur noch den Faktor 3 zu berücksichtigen brauchen.

2. Wir suchen von den Potenzen mit gleicher Basis jeweils die mit dem größten Exponenten heraus. Primfaktoren, die nur einfach und nicht als Potenzen auftreten, werden jeweils einmal ausgewählt.

$$\begin{array}{ll} & 6 = 2 \cdot 3 \\ & 8 = 2^3 \\ \hline \text{k. g. V.:} & 2^3 \cdot 3 = 24 \end{array}$$

Es soll das k. g. V. von 840; 126 und 225 ermittelt werden.
Zerlegung in Primfaktoren:

$$\begin{array}{lll} 840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 & = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ 225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 & = 3^2 \cdot 5^2 \\ \hline \text{k. g. V.:} & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600 \end{array}$$

Die Zahl 12 600 ist ein gemeinsames Vielfaches der gegebenen Zahlen. Es ist aber auch das k l e i n s t e gemeinsame Vielfache. Würden wir auch nur einen Primfaktor fortlassen, so wäre die gefundene Zahl nicht mehr ein gemeinsames Vielfaches der gegebenen Zahlen. Streichen wir etwa aus der Zahl 12 600 einen Faktor 2, so ist die Potenz 2^3 und damit die Zahl 840 nicht mehr als Faktor in der gefundenen Zahl enthalten.

Aufgaben a 60 bis 65

Der größte gemeinsame Teiler natürlicher Zahlen

12

Eine natürliche Zahl kann Teiler von zwei natürlichen Zahlen sein.

4 ist Teiler von 20, denn $20 = 4 \cdot 5$, also $4 \mid 20$.
4 ist Teiler von 32, denn $32 = 4 \cdot 8$, also $4 \mid 32$.
Außer den Zahlen 20 und 32 gibt es natürlich noch andere Zahlen, die den Teiler 4 besitzen, z. B. 4, 16, 80, 104.

Die Zahl 7 ist Teiler von 21, 35, 63, 147, 4 711.

Eine natürliche Zahl, die Teiler von zwei oder mehreren Zahlen ist, heißt **gemeinsamer Teiler** dieser Zahlen.

A

Da die Zahl 1 Teiler einer *jeden* Zahl ist, ist sie auch *stets* gemeinsamer Teiler zweier beliebiger Zahlen. Wir wollen sie deshalb bei der Aufzählung gemeinsamer Teiler nicht aufführen.
Natürliche Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen **zueinander teilerfremd.**

Aufgaben a 66 bis 70

Beim Kürzen von Brüchen müssen wir solche Zahlen finden, durch die Zähler und Nenner teilbar sind. Diese Zahlen müssen also gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner sein.

Der Bruch $\frac{56}{84}$ soll gekürzt werden. Dazu suchen wir alle gemeinsamen Teiler von 56 und 84.

Teiler von 56:	1;	2;		4;		7;	8;		14;		28;		56;	
Teiler von 84:	1;	2;	3;	4;	6;	7;		12;	14;	21;	28;	42;		84
Gemeinsame Teiler:		2;		4;		7;			14;		28			

Damit haben wir die Zahlen gefunden, durch die wir $\frac{56}{84}$ kürzen können.

$\frac{56}{84}$ kürzen durch 2: $\frac{28}{42}$
$\frac{56}{84}$ kürzen durch 4: $\frac{14}{21}$
$\frac{56}{84}$ kürzen durch 7: $\frac{8}{12}$
$\frac{56}{84}$ kürzen durch 14: $\frac{4}{6}$
$\frac{56}{84}$ kürzen durch 28: $\frac{2}{3}$

Unter allen gemeinsamen Teilern von 56 und 84 ist die Zahl 28 der größte.

18 **DEFINITION: Der größte gemeinsame Teiler (g. g. T.) gegebener natürlicher Zahlen ist die größte Zahl, die *alle* gegebenen Zahlen teilt.**

Wenn wir einen Bruch so weit wie möglich kürzen wollen, um im Zähler und Nenner möglichst kleine Zahlen zu erhalten, müssen wir den gegebenen Bruch durch den g. g. T. von Zähler und Nenner kürzen. Im gekürzten Bruch sind dann Zähler und Nenner zueinander teilerfremd.
Zur Bestimmung des g. g. T. gegebener Zahlen brauchen wir nicht wie im letzten Beispiel alle gemeinsamen Teiler dieser Zahlen aufzusuchen. Ähnlich wie bei der Berechnung des k. g. V. können wir nämlich auch den g. g. T. mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung finden.

Es soll der g. g. T. der Zahlen 56 700 und 27 720 ermittelt werden.
Wir zerlegen die beiden gegebenen Zahlen in Primfaktoren:

$56\,700 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
$27\,720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$

Da jeder gemeinsame Teiler in beiden Zahlen als Faktor enthalten ist, können in einem gemeinsamen Teiler nur solche Faktoren auftreten, die ihrerseits in *beiden* Zahlen enthalten sind. Zur Bildung eines gemeinsamen Teilers dürfen wir also nur solche Faktoren heraussuchen, die in *beiden* Zahlen vorkommen. Die Zahlen 11 und 25 können daher z. B. nicht als Faktoren in einem gemeinsamen Teiler auftreten.

Da wir von allen gemeinsamen Teilern den **größten** finden wollen, wählen wir die folgenden gemeinsamen Faktoren aus:

2^2 (2^2 ist die **höchste** Potenz mit der Basis 2, die in beiden Zahlen auftritt; 2^3 tritt in 56 700 nicht auf),

3^2 (3^2 ist die **höchste** Potenz mit der Basis 3, die in beiden Zahlen auftritt; 3^4 tritt in 27 720 nicht auf),

5 (5 ist in beiden Zahlen enthalten; die Potenz 5^2 ist in 27 720 nicht enthalten),

7 (7 ist in beiden Zahlen enthalten; die Potenz 7^2 oder eine größere kommt in keiner der beiden Zahlen vor).

Das Produkt $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\,260$ ist also der g. g. T. von 56 700 und 27 720. Einen größeren gemeinsamen Teiler kann es nach unseren Überlegungen nicht geben.

Nach dem gleichen Verfahren bestimmt man auch den g. g. T. von mehr als zwei Zahlen.

■ Es soll der g. g. T. von 14 700, 28 665 und 1 911 ermittelt werden.

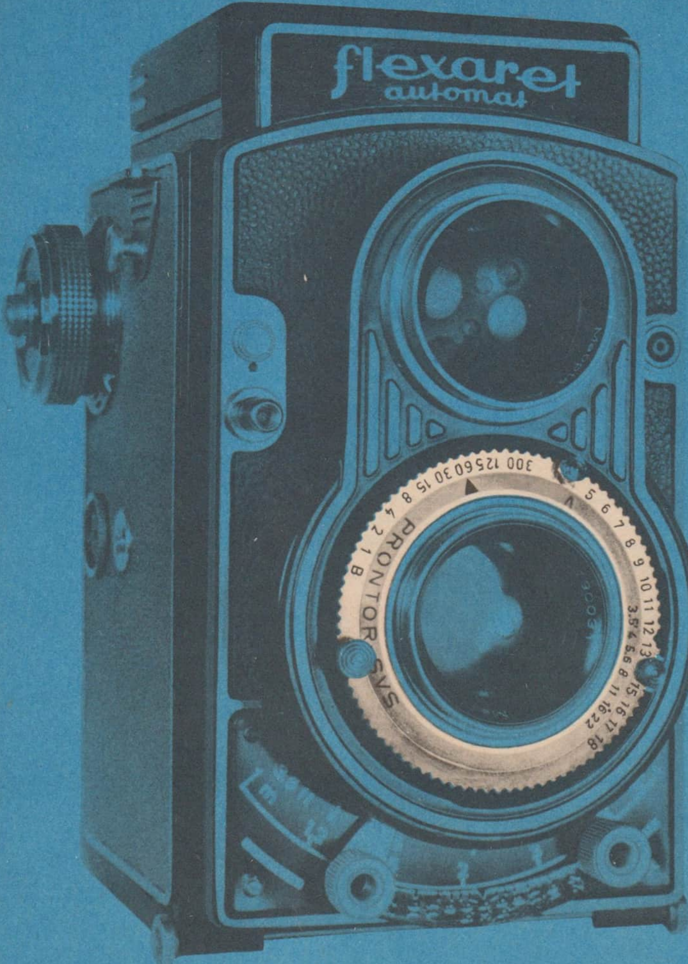
1. Wir zerlegen die gegebenen Zahlen in Primfaktoren;

$$\begin{array}{rlllll} 14\,700 = & 2^2 \cdot & 3 & \cdot 5^2 \cdot & 7^2 & \\ 28\,665 = & & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 7^2 \cdot & 13 \\ 1\,911 = & & 3 \cdot & & 7^2 \cdot & 13 \end{array}$$

2. Wir suchen von den Primfaktoren, die in **allen** Zahlen als Potenz auftreten, jeweils die kleinste Potenz aus. Treten Primfaktoren, die in **allen** Zahlen vorkommen, wenigstens einmal nicht als Potenz auf, so werden diese Primfaktoren ausgewählt.

$$\begin{array}{rlllll} 14\,700 = & 2^2 \cdot & 3 & \cdot 5^2 \cdot & 7^2 & \\ 28\,665 = & & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 7^2 \cdot & 13 \\ 1\,911 = & & 3 \cdot & & 7^2 \cdot & 13 \\ \hline \text{g. g. T.:} & & 3 \cdot & & 7^2 = & 147 \end{array}$$

Aufgaben a 71 und 72



$\frac{1}{60}$ s · Blende 16

B. Die gebrochenen Zahlen

B

Zur Wiederholung

1

Wir wollen im folgenden nur solche Brüche betrachten, deren Zähler und Nenner von 0 verschieden sind.
Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. Sind Zähler und Nenner eines Bruches teilerfremd, so läßt sich dieser Bruch nicht kürzen.
Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben von 0 und 1 verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert. Einen Bruch kann man stets erweitern.

■ $\frac{24}{90}$ durch 3 gekürzt ergibt $\frac{8}{30}$.

■ $\frac{6}{4}$ mit 5 erweitert ergibt $\frac{30}{20}$.

■ $\frac{18}{27}$ durch 3 gekürzt und mit 2 erweitert ergibt $\frac{12}{18}$.

Wenn wir feststellen wollen, ob zwei gegebene Brüche durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, müssen wir Kürzungs- bzw. Erweiterungszahlen finden. Dabei kann es wie im letzten Beispiel vorkommen, daß wir zwei Zahlen finden müssen, d. h., wir müssen beim Übergang von dem einen zum anderen Bruch kürzen *und* erweitern.

Aufgaben b 1 bis 10

Kürzen wir einen Bruch durch den g. g. T. von Zähler und Nenner, so erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind. Brüche, die durch

Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgegangen sind, führen dabei auf denselben Bruch.

Bruch	$\frac{24}{90}$; $\frac{8}{30}$	$\frac{6}{4}$; $\frac{30}{20}$	$\frac{18}{27}$; $\frac{12}{18}$
g. g. T. von Zähler und Nenner	6 ; 2	2 ; 10	9 ; 6
gekürzter Bruch	$\frac{4}{15}$; $\frac{4}{15}$	$\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$

Aufgaben b 11 bis 13

2

Es gibt eine einfachere Methode, nach der wir feststellen können, ob zwei Brüche durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.

In der linken der beiden folgenden Tabellen sind nur solche Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ aufgeführt, die jeweils durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Durch Vergleichen der beiden letzten Spalten stellen wir fest, daß für solche Brüche die Gleichung

$a \cdot d = b \cdot c$

gilt. Im Gegensatz dazu sind in der rechten Tabelle nur solche Brüche eingetragen, die nicht durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Für diese Brüche gilt

$a \cdot d \neq b \cdot c.$

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$	20	20
$\frac{9}{3}$	$\frac{6}{2}$	18	18
$\frac{5}{1}$	$\frac{20}{4}$	20	20

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	14	12
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	40	35
$\frac{18}{5}$	$\frac{9}{2}$	36	45

Wie in diesem Beispiel können wir ganz allgemein feststellen:

1 **SATZ: Wenn für Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d ungleich Null)**

$\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$

gilt, so gehen sie durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervor.

Wenn für Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d ungleich Null)

$\boldsymbol{a \cdot d \neq b \cdot c}$

gilt, so gehen sie nicht durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervor.

● Stelle fest, ob die Brüche in den folgenden Paaren jeweils durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen!

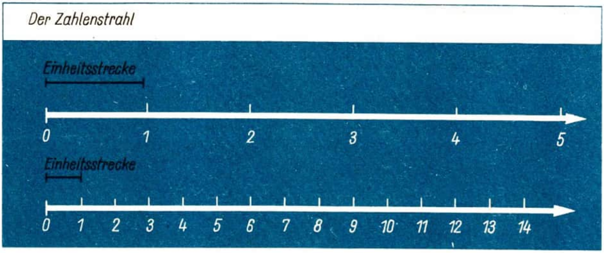
a) $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right]$ b) $\left[\frac{7}{5}; \frac{28}{20}\right]$ c) $\left[\frac{6}{3}; \frac{12}{5}\right]$ d) $\left[\frac{26}{65}; \frac{34}{85}\right]$

Gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen

3

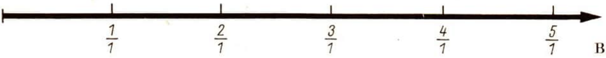
Wir können auf einem Strahl die Folge der natürlichen Zahlen beliebig weit darstellen, wenn wir den Maßstab genügend klein und die Zeichenfläche genügend groß wählen. Jeder natürlichen Zahl kann also auf einem Strahl genau ein Punkt zugeordnet werden (Bild B 1).

B 1

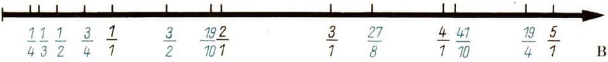


Wir wollen jetzt Brüche auf einem Strahl darstellen. Dazu tragen wir vom Anfangspunkt des Strahls aus eine Strecke mit beliebiger Länge ab (Einheitsstrecke). An den erhaltenen Endpunkt dieser Strecke schreiben wir den Bruch $\frac{1}{1}$.

Von dem Endpunkt ausgehend, tragen wir Strecken mit derselben Länge fortlaufend ab und schreiben an die erhaltenen Punkte der Reihe nach die Brüche $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ usw. (Bild B 2). Durch Abtragen von Bruchteilen der Einheitsstrecke finden wir entsprechend die Punkte, die beliebigen anderen Brüchen zugeordnet sind. Dadurch wird jedem Bruch ein Punkt des Strahls zugeordnet.



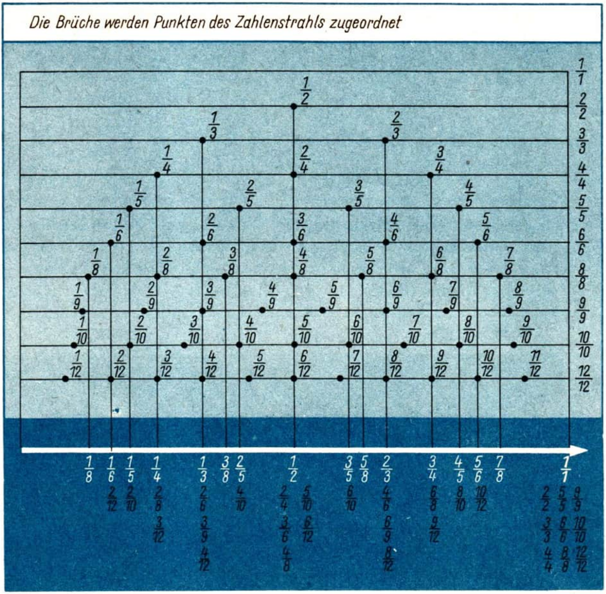
B 2



B 3

Im Bild B 3 sind nur solche Brüche dargestellt, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind.

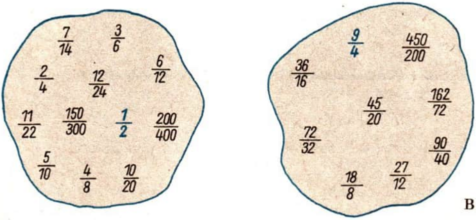
Das Bild B 4 zeigt, welche Punkte des Strahls Brüchen zugeordnet werden müssen, die durch Erweitern aus Brüchen des Bildes B 3 hervorgehen. Wir erkennen



B 4

an unserer Darstellung, daß jedem Bruch nur ein Punkt zugeordnet ist. Umgekehrt sind aber jedem Punkt des Strahls, dem *ein* Bruch zugeordnet ist, sogar beliebig viele Brüche zugeordnet.

Alle Brüche, die ein und demselben Punkt zugeordnet sind, gehen durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervor. Solche Brüche wollen wir jeweils zu einer **Klasse** zusammenfassen (Bild B 5).



B 5

Mit Hilfe des Satzes B 1 können wir folgenden Satz formulieren:

2 **SATZ: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d ungleich Null) liegen in einer *Klasse*, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt.**
Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen nicht in einer Klasse, wenn $a \cdot d \neq b \cdot c$ gilt.

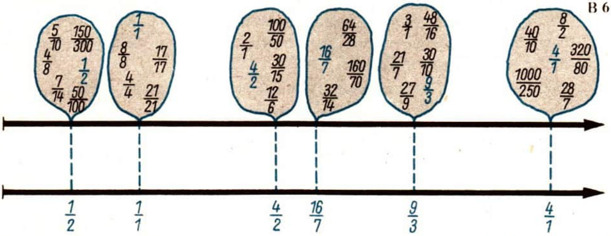
3 **DEFINITION: Alle Brüche, denen ein und derselbe Punkt auf einem Strahl zugeordnet ist, die also durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, bilden eine Klasse. Jede solche Klasse heißt *gebrochene Zahl*.**

Zur Bezeichnung einer gebrochenen Zahl kann jeder Bruch aus der entsprechenden Klasse benutzt werden. So bezeichnen z. B. die verschiedenen Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ dieselbe gebrochene Zahl, also dieselbe Klasse von Brüchen. Wir können deshalb schreiben:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Häufig wird zur Bezeichnung einer gebrochenen Zahl derjenige Bruch benutzt, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind.
Das Kürzen oder Erweitern eines Bruches bedeutet, daß man von diesem Bruch zu einem anderen Bruch aus derselben Klasse übergeht, d. h. eine andere Bezeichnung derselben gebrochenen Zahl wählt.
Durch die Zusammenfassung der Brüche zu Klassen sind nun bei der Darstellung an einem Strahl die Punkte nicht mehr einzelnen Brüchen, sondern gebrochenen Zahlen zugeordnet. Einen solchen Strahl nennen wir jetzt wieder **Zahlenstrahl** (Bild B 6).

B 6



Aufgaben b 14 bis 17

4

Bestimmte gebrochene Zahlen lassen sich durch Brüche darstellen, deren Nenner gleich 10 oder gleich einer Zehnerpotenz sind.
Solche Brüche nennen wir kurz **Zehnerbrüche**.
Brüche, deren Nenner nur die Primfaktoren 2; 5 oder Potenzen dieser Zahlen enthalten, lassen sich zu Zehnerbrüchen erweitern. Wir wollen dazu sagen, daß sie sich in Zehnerbrüche umwandeln lassen.

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{50}{100}=\frac{500}{1000};\quad \frac{3}{8}=\frac{375}{1000}=\frac{3750}{10000}$$

$$\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=\frac{140}{100}=\frac{1400}{1000};\quad \frac{7}{25}=\frac{28}{100}=\frac{280}{1000}=\frac{2800}{10000}$$

Falls im Nenner eines Bruches außer den Primfaktoren 2 und 5 noch andere Primfaktoren auftreten, können wir diesen Bruch nur dann in einen Zehnerbruch umwandeln, wenn diese Primfaktoren auch im Zähler enthalten sind. Durch diese Faktoren können wir vor der Umwandlung kürzen.

$$\frac{14}{35}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10};\quad \frac{33}{15}=\frac{11}{5}=\frac{22}{10}$$

$$\frac{77}{44}=\frac{7}{4}=\frac{175}{100};\quad \frac{72}{24}=\frac{3}{1}=\frac{30}{10}$$

B

Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 usw. können wir als **Dezimalbrüche** schreiben. Dadurch erhalten wir für gebrochene Zahlen, die sich durch solche Brüche darstellen lassen, weitere Bezeichnungen.

$\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}50=0{,}500$ $\qquad$ $\frac{14}{35}=0{,}4$

$\frac{3}{8}=0{,}375=0{,}3750$ $\qquad$ $\frac{33}{15}=2{,}2$

$\frac{7}{5}=1{,}4=1{,}40=1{,}400$ $\qquad$ $\frac{77}{44}=1{,}75$

$\frac{7}{25}=0{,}28=0{,}280=0{,}2800$ $\qquad$ $\frac{72}{24}=3{,}0$

$\frac{11}{40}=0{,}275=0{,}2750=0{,}27500$ $\qquad$ $\frac{135}{18}=7{,}5$

Wenn es nicht anders erforderlich ist, benutzen wir auch bei der Dezimalbruchdarstellung den am weitesten gekürzten Dezimalbruch. Wir lassen also hinter dem Komma alle Nullen fort, die auf die letzte von Null verschiedene Ziffer folgen. In Zukunft nennen wir die Stellen hinter dem Komma **Dezimalstellen.**
Zur Unterscheidung von den Dezimalbrüchen nennen wir die bisher benutzten Brüche auch **gemeine Brüche.**

Sind gebrochene Zahlen durch Dezimalbrüche dargestellt, so können wir diese *Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandeln.*

$0{,}7=\frac{7}{10}$ $\qquad$ $0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$

$0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $3{,}88=\frac{388}{100}=\frac{97}{25}$

$12{,}17=\frac{1217}{100}$

Aufgaben b 18 bis 23

ZUSAMMENFASSUNG:

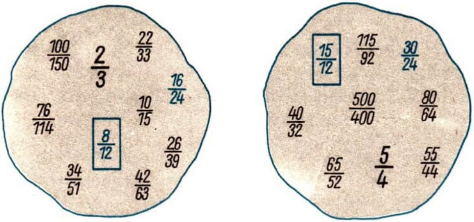
Eine gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.

Für je zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d ungleich Null) aus einer Klasse gilt $a \cdot d = b \cdot c$. Eine gebrochene Zahl kann durch jeden Bruch der Klasse bezeichnet werden. Enthält die Klasse Zehnerbrüche, so lassen sich auch Dezimalbrüche zur Bezeichnung verwenden.

Der Hauptnenner

5

Zwei gegebene gebrochene Zahlen $\left(\frac{2}{3} \text{ und } \frac{5}{4}\right)$ sollen nun durch Brüche mit gleichem Nenner dargestellt werden. Die gegebenen Klassen im Bild B 7 enthalten auch Brüche, die jeweils gleiche Nenner haben.



B 7

Die Darstellungen $\frac{8}{12}$ und $\frac{15}{12}$ können wir dadurch erhalten, daß wir $\frac{2}{3}$ mit 4 und $\frac{5}{4}$ mit 3 erweitern. Darüber hinaus gibt es noch weitere Darstellungen dieser Zahlen mit gleichem Nenner:

z. B.: $\frac{16}{24}$ und $\frac{30}{24}$; $\frac{24}{36}$ und $\frac{45}{36}$; $\frac{32}{48}$ und $\frac{60}{48}$.

Es ist immer möglich, gegebene gebrochene Zahlen durch Brüche mit gleichem Nenner darzustellen.

Es gibt sogar beliebig viele Darstellungen dieser gebrochenen Zahlen durch Brüche mit gemeinsamen Nennern. Unter diesen Nennern gibt es jeweils einen kleinsten. Das ist das k. g. V. der Nenner der gegebenen Brüche. Das Bild B 8 veranschaulicht diesen Sachverhalt für drei gegebene Brüche.

B 8

Der Hauptnenner von $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{7}{8}$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \boxed{\frac{18}{24}} = \frac{21}{28} = \frac{24}{32} = \frac{27}{36} = \frac{30}{40} = \frac{33}{44} = \frac{36}{48}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{4}{24}} = \frac{5}{30} = \frac{6}{36} = \frac{7}{42} = \frac{8}{48} = \frac{9}{54} = \frac{10}{60} = \frac{11}{66} = \frac{12}{72}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{16} = \boxed{\frac{21}{24}} = \frac{28}{32} = \frac{35}{40} = \frac{42}{48} = \frac{49}{56} = \frac{56}{64} = \frac{63}{72} = \frac{70}{80} = \frac{77}{88} = \frac{84}{96}$$

4 **DEFINITION: Brüche mit gleichen Nennern heißen *gleichnamig*. Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt der *Hauptnenner* dieser Brüche.**

Will man Brüche gleichnamig machen, so ist es meist zweckmäßig, sie auf den Hauptnenner, d. h. auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bringen.

Aufgaben b 24 bis 29

6

Wir können schon Brüche mit gleichen Nennern oder mit gleichen Zählern vergleichen.
Ebenso werden die durch diese Brüche dargestellten gebrochenen Zahlen verglichen.

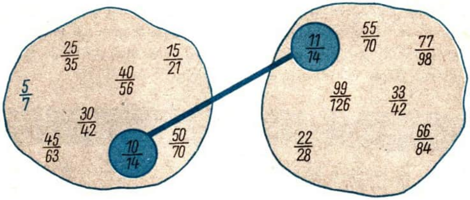
Die gebrochene Zahl $\frac{1}{4}$ ist kleiner als die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$.
$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ (gelesen: ein Viertel ist kleiner als drei Viertel, kürzer: ein Viertel kleiner drei Viertel)

Die gebrochene Zahl $\frac{7}{8}$ ist kleiner als die gebrochene Zahl $\frac{7}{5}$.
$\frac{7}{8} < \frac{7}{5}$

Wenn wir zwei gebrochene Zahlen vergleichen wollen, die durch Brüche mit verschiedenen Zählern und Nennern dargestellt sind, so bringen wir die gegebenen Brüche auf den Hauptnenner.

Es sollen $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{14}$ verglichen werden.

Diese gebrochenen Zahlen sind voneinander verschieden; denn die Brüche $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{14}$, die sie bezeichnen, liegen in verschiedenen Klassen. Es gilt nämlich $5 \cdot 14 \neq 7 \cdot 11$.
Der Hauptnenner beider Brüche ist 14.
Wir gehen also in der Klasse des ersten Bruches zu dem Bruch mit dem Nenner 14 über (Bild B 9).



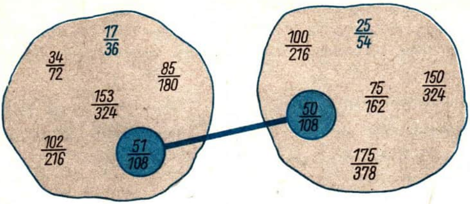
B 9

Nun vergleichen wir $\frac{10}{14}$ und $\frac{11}{14}$ und stellen fest:
$\frac{10}{14} < \frac{11}{14}$.
Damit gilt auch: $\frac{5}{7} < \frac{11}{14}$.

Es sollen $\frac{17}{36}$ und $\frac{25}{54}$ verglichen werden.

Diese gebrochenen Zahlen sind wieder voneinander verschieden; denn es gilt $17 \cdot 54 \neq 36 \cdot 25$. Der Hauptnenner ist 108 (Bild B 10).

Der Vergleich von $\frac{51}{108}$ und $\frac{50}{108}$ ergibt:
$\frac{51}{108} > \frac{50}{108}$, also auch $\frac{17}{36} > \frac{25}{54}$.



B 10

Wir hätten für den Vergleich auch andere gemeinsame Nenner wählen können. Es ist aber zweckmäßig, jeweils den kleinsten gemeinsamen Nenner, also den Hauptnenner, zu benutzen.

Führe den Vergleich in den letzten beiden Beispielen mit Hilfe anderer gemeinsamer Nenner durch!

Gebrochene Zahlen lassen sich auch ohne Bestimmung des Hauptnenners vergleichen.

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$	$a \cdot d \lesseqgtr b \cdot c$
$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$, da $\frac{21}{24} > \frac{20}{24}$	42	40	$42 > 40$
$\frac{5}{13}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{5}{13} < \frac{9}{17}$, da $\frac{85}{221} < \frac{117}{221}$	85	117	$85 < 117$
$\frac{24}{26}$	$\frac{36}{39}$	$\frac{24}{26} = \frac{36}{39}$, da $\frac{12}{13} = \frac{12}{13}$	936	936	$936 = 936$

Wie in dieser Tabelle gilt allgemein der Satz:

5

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Wenn } a \cdot d < b \cdot c, \textbf{ so gilt } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \\[1ex] \textbf{Wenn } a \cdot d > b \cdot c, \textbf{ so gilt } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}. \\[1ex] \textbf{Wenn } a \cdot d = b \cdot c, \textbf{ so gilt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \end{array}\right\} \quad a, b, c, d \text{ ungleich Null}$$

7

Jeder gebrochenen Zahl ist auf dem Zahlenstrahl genau ein Punkt zugeordnet. Von zwei Punkten, die verschiedenen gebrochenen Zahlen zugeordnet sind, liegt derjenige weiter links auf dem Zahlenstrahl, der der kleineren der beiden Zahlen zugeordnet ist. Wir sagen dafür kürzer:

Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt die kleinere auf dem Zahlenstrahl links von der größeren.

Ebenso liegt von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen die kleinere auf dem Zahlenstrahl links von der größeren. Die unmittelbar rechts von einer natürlichen Zahl a liegende Zahl $a + 1$ heißt der **unmittelbare Nachfolger** von a. So hat jede natürliche Zahl einen unmittelbaren Nachfolger. Zwischen einer natürlichen Zahl und ihrem unmittelbaren Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl. Dagegen gibt es keine gebrochene Zahl, die einen unmittelbaren Nachfolger hat.

Die Zahl $\frac{7}{10}$ hat keinen unmittelbaren Nachfolger. So kann z. B. $\frac{8}{10}$ nicht unmittelbarer Nachfolger von $\frac{7}{10}$ sein; denn wir können Zahlen ermitteln, die zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ liegen. Wir erweitern

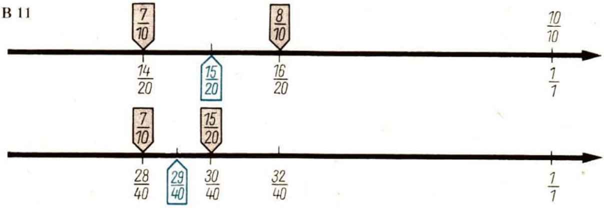
$\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$

mit 2 auf

$\frac{14}{20}$ bzw. $\frac{16}{20}$.

Wir erkennen, daß $\frac{15}{20}$ zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ liegt (Bild B 11).

B 11



Auf diese Weise können wir für jede beliebige gebrochene Zahl, die größer als $\frac{7}{10}$ ist, nachweisen, daß sie nicht unmittelbarer Nachfolger von $\frac{7}{10}$ ist. Das bedeutet, daß $\frac{7}{10}$ keine gebrochene Zahl als unmittelbaren Nachfolger hat.

Aufgaben b 30 bis 52

8

Bisher haben wir nur solche Brüche betrachtet und zu Klassen zusammengefaßt, deren Zähler *und* Nenner von Null verschieden sind.

Ebenso lassen sich alle Brüche bilden und zu einer Klasse zusammenfassen, deren Zähler gleich Null und deren Nenner ungleich Null sind. Für solche Brüche

$\frac{0}{b}$ und $\frac{0}{d}$ gilt nämlich stets genau wie in Satz **B 1** auf Seite 20:

$0 \cdot d = b \cdot 0$, d. h. $0 = 0$.

Diese Klasse ist wieder eine gebrochene Zahl. Vergleichen wir diese Zahl mit irgendeiner *anderen* gebrochenen Zahl $\frac{x}{y}$, (also $x \neq 0$), so gilt:

$\frac{0}{b} < \frac{x}{y}$, denn $0 \cdot y < b \cdot x$.

Sie ist also die kleinste gebrochene Zahl.

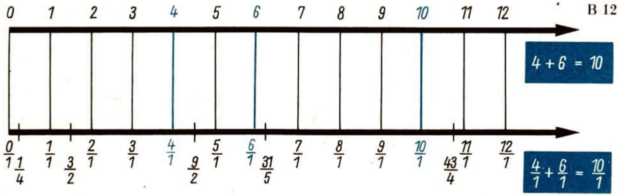
$\frac{0}{1} < \frac{7}{1}$, denn $0 \cdot 1 < 1 \cdot 7$; $\frac{0}{9} < \frac{7}{5}$, denn $0 \cdot 5 < 9 \cdot 7$

$\frac{0}{2} < \frac{3}{2}$, denn $0 \cdot 2 < 2 \cdot 3$; $\frac{0}{3} < \frac{1}{9000}$, denn $0 \cdot 9\,000 < 3 \cdot 1$

Da Brüche mit dem Zähler 0 auch eine gebrochene Zahl darstellen, wollen wir von jetzt an nur noch fordern, daß die Nenner ungleich Null sind.

Wir vergleichen einen Zahlenstrahl, auf dem die natürlichen Zahlen veranschaulicht sind, mit einem Zahlenstrahl, der die gebrochenen Zahlen veranschaulicht. Jeder gebrochenen Zahl, die sich durch einen Bruch mit dem Nenner 1 darstellen läßt, entspricht eine natürliche Zahl und umgekehrt. Dabei ist der gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ die natürliche Zahl a zugeordnet. Diese gebrochenen Zahlen verhalten sich beim Vergleichen wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen (Bild B 12).

B 12



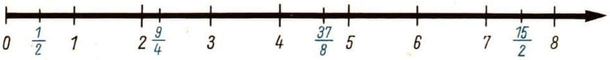
Auf entsprechende Weise wird der Klasse, in der $\frac{0}{1}$ liegt, die natürliche Zahl 0 zugeordnet.

gebrochene Zahlen	$\frac{0}{1} < \frac{5}{1}$	$\frac{2}{1} < \frac{3}{1}$	$\frac{4}{1} < \frac{8}{1}$	$\frac{6}{1} > \frac{0}{1}$	$\frac{7}{1} > \frac{5}{1}$
natürliche Zahlen	$0 < 5$	$2 < 3$	$4 < 8$	$6 > 0$	$7 > 5$

Wenn wir gebrochene Zahlen vergleichen, können wir deshalb von jetzt an z. B. 4 statt $\frac{4}{1}$, $2 < \frac{5}{2}$ statt $\frac{2}{1} < \frac{5}{2}$ oder $0 < \frac{1}{100}$ statt $\frac{0}{1} < \frac{1}{100}$ schreiben.

6 **SATZ: Beim Vergleichen verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen. Sie können daher gegenseitig ersetzt werden (Bild B 13).**

B 13



9

Gebrochene Zahlen, die sich durch echte Brüche darstellen lassen, heißen **echt gebrochene** Zahlen. Gebrochene Zahlen, die sich durch unechte Brüche darstellen lassen, heißen **unecht gebrochene** Zahlen.
Echt gebrochene Zahlen sind kleiner als 1. Unecht gebrochene Zahlen sind größer als 1 oder gleich 1.
Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung vergleichen wir, indem wir die Dezimalbrüche zunächst gleichnamig machen und sie dann ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen vergleichen.

B ■ 12,4 und 13,38 sind zu vergleichen.
Gleichnamig machen: 12,40 und 13,38
Es gilt $12{,}40 < 13{,}38$, d. h. $\frac{1240}{100} < \frac{1338}{100}$; denn $1240 < 1338$.
Also $12{,}4 < 13{,}38$.

7,08 und 7,3
7,08 und 7,30 (gleichnamig)
Es gilt $7{,}08 < 7{,}30$, d. h. $\frac{708}{100} < \frac{730}{100}$; denn $708 < 730$.
Also $7{,}08 < 7{,}3$.

Aufgaben b 53 bis 55

ZUSAMMENFASSUNG:

Gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ können verglichen werden,

a) indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und diese vergleicht. Dabei werden Dezimalbrüche ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen verglichen;

b) indem man die Produkte $a \cdot d$ und $b \cdot c$ vergleicht.

Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlenstrahl die kleinere links von der größeren.
Gebrochene Zahlen haben keinen unmittelbaren Nachfolger.
Alle gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, können beim Vergleichen durch natürliche Zahlen ersetzt werden. Die Zahl 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.

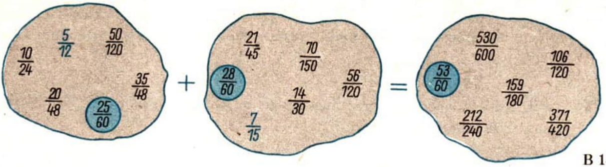
Addition gebrochener Zahlen

10

Die Addition gebrochener Zahlen ist eine andere Rechenoperation als die Addition natürlicher Zahlen. Durch die folgende Definition wird sie jedoch auf die Addition natürlicher Zahlen zurückgeführt.

7 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden addiert, indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und nur deren Zähler addiert. Den gemeinsamen Nenner behält man bei.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$ **(b ungleich Null)**



B 14

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{15} = \frac{25}{60} + \frac{28}{60} = \frac{25+28}{60} = \frac{53}{60}$$

Das Bild B 14 veranschaulicht dieses Beispiel.

Beim schriftlichen Rechnen wollen wir Haupt- und Nebenrechnung übersichtlich anordnen.

Die gebrochenen Zahlen $\frac{5}{36}$ und $\frac{27}{40}$ sollen addiert werden.

$$\frac{5}{36} + \frac{27}{40} = \frac{50}{360} + \frac{243}{360} = \frac{293}{360}$$

$$\begin{array}{ll|l} 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 & & 10 \\ 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot & 5 & 9 \\ \hline & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 & \end{array}$$

Hinter dem senkrechten Strich in der Nebenrechnung stehen die zu den Nennern gehörenden Erweiterungszahlen.

Die Addition gebrochener Zahlen ist stets ausführbar, da wir stets die Brüche gleichnamig machen und die im Zähler stehenden natürlichen Zahlen addieren können.

Für natürliche Zahlen gilt
das Kommutationsgesetz $a + b = b + a$
und das Assoziationsgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$
der Addition.

$5 + 7 = 12 \quad | \quad 7 + 5 = 12 \quad || \quad 5 + 7 = 7 + 5$

$$\begin{array}{l|l||l} 5 + (7 + 9) = & (5 + 7) + 9 = & \\ = 5 + \quad 16 \quad = 21 & = \quad 12 \quad + 9 = 21 & 5 + (7 + 9) = (5 + 7) + 9 \end{array}$$

Diese beiden Sätze übertragen sich auf die Addition gebrochener Zahlen.

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{15}{24} + \frac{14}{24} = \frac{15+14}{24} = \frac{14+15}{24} = \frac{14}{24} + \frac{15}{24} = \frac{7}{12} + \frac{5}{8}$$

8 **Kommutationsgesetz der Addition gebrochener Zahlen**

SATZ: In einer Summe von zwei gebrochenen Zahlen sind die Summanden vertauschbar.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad (b, d \text{ ungleich Null})$$

$$\frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{8} + \frac{5+7}{8} = \frac{3+(5+7)}{8} = \frac{(3+5)+7}{8} = \frac{3+5}{8} + \frac{7}{8} = \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) + \frac{7}{8}$$

9 **Assoziationsgesetz der Addition gebrochener Zahlen**

SATZ: $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ **(b, d, f ungleich Null)**

B

Der Satz 9 besagt, daß es nicht darauf ankommt, welche der beiden Additionen zuerst ausgeführt wird. Wir können daher die Klammern fortlassen und schreiben:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Auch in einer mehrgliedrigen Summe gebrochener Zahlen ist die Reihenfolge der Summanden beliebig.

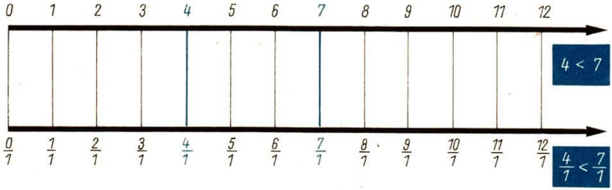
Aufgaben b 56 bis 62

B

11

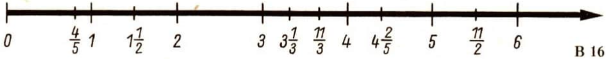
Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, verhalten sich bei der Addition wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen (Bild B 15).

B 15



gebrochene Zahlen	$\frac{1}{1} + \frac{6}{1} = \frac{7}{1}$	$\frac{9}{1} + \frac{12}{1} = \frac{21}{1}$	$\frac{15}{1} + \frac{27}{1} = \frac{42}{1}$
natürliche Zahlen	$1 + 6 = 7$	$9 + 12 = 21$	$15 + 27 = 42$

10 **SATZ: Bei der Addition verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen. Sie können daher gegenseitig ersetzt werden (Bild B 16).**



B 16

Unechte gebrochene Zahlen kann man als sogenannte **gemischte Zahlen** schreiben.

$\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$ (gelesen: Fünf zwei Drittel)

Durch gemischte Zahlen vermeidet man unnötig große Zähler. Außerdem kann man gebrochene Zahlen in dieser Schreibweise leichter vergleichen. So erkennt man sofort, daß z. B. $14\frac{17}{67}$ zwischen 14 und 15 liegt. In der Darstellung $\frac{955}{67}$ derselben Zahl erkennt man dies nicht ohne weiteres.[1]

[1] Die gemischten Zahlen sind keine neue Art von Zahlen. Es handelt sich vielmehr um eine andere Bezeichnung gebrochener Zahlen.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1\frac{1}{12}$$

$$17\frac{11}{20}+15\frac{9}{35}=17+\frac{11}{20}+15+\frac{9}{35}$$
$$=17+15+\frac{11}{20}+\frac{9}{35}$$
$$=32+\frac{77+36}{140}$$
$$=32+\frac{113}{140}$$
$$17\frac{11}{20}+15\frac{9}{35}=32\frac{113}{140}$$

Das nächste Beispiel zeigt eine verkürzte Schreibweise.

Aufgabe: $7\frac{13}{14}+5\frac{19}{21}$

Überschlag: $8+6=14$

Hauptrechnung:

$$7\frac{13}{14}+5\frac{19}{21}=12+\frac{39+38}{42}$$
$$=12+\frac{77}{42}$$
$$=13\frac{35}{42}$$
$$7\frac{13}{14}+5\frac{19}{21}=13\frac{5}{6}$$

Nebenrechnung:

$14=2\cdot\phantom{3\cdot{}}7$	3
$21=\phantom{2\cdot{}}3\cdot 7$	2
$2\cdot 3\cdot 7=42$	

B

Brüche, deren Nenner gleich Null sind, stellen keine gebrochenen Zahlen dar. Würde z. B. $\frac{5}{0}$ eine gebrochene Zahl darstellen, so müßte man auch die Summe $\frac{3}{4}+\frac{5}{0}$ berechnen können. Dazu müßten wir die Erweiterung von Brüchen mit Null zulassen, da wir diese Brüche nicht anders gleichnamig machen könnten. Der „Hauptnenner" wäre nämlich Null. Wenn wir aber mit Null erweitern dürften, könnten wir alle Brüche auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen. Dann würden alle Brüche in derselben Klasse wie der Bruch $\frac{0}{0}$ liegen. Es gäbe also nur eine einzige gebrochene Zahl. Das ist aber sinnlos und steht auch im Widerspruch zu unserer praktischen Erfahrung.

Aufgaben b 63 bis 80

12

Wenn wir gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung addieren wollen, machen wir die Dezimalbrüche zunächst gleichnamig. Dann schreiben wir die Summanden so untereinander, daß Stellen mit dem gleichen Stellenwert jeweils untereinander stehen. Das bedeutet, daß Komma unter Komma stehen muß. Wir addieren stellenweise wie bei den natürlichen Zahlen. Im Ergebnis setzen wir das Komma zwischen dieselben Stellen wie in den Summanden.

$2{,}123 + 64{,}81 + 312 + 46{,}18 + 8{,}12 + 0{,}731$

Gleichnamig untereinander geschrieben:

$$\begin{array}{r} 2{,}123 \\ 64{,}810 \\ 312{,}000 \\ 46{,}180 \\ 8{,}120 \\ +\quad 0{,}731 \\ \hline 433{,}964 \end{array}$$

Da Nullen beim Addieren keinen Einfluß auf die Teilsummen haben, können wir auch schreiben:

$$\begin{array}{r@{,}l} 2&123 \\ 64&81 \\ 312& \\ 46&18 \\ 8&12 \\ +\quad 0&731 \\ \hline 433&964 \end{array}$$

Manchmal sollen gemeine Brüche und Dezimalbrüche addiert werden.

■ $\frac{2}{5} + 3{,}87 + \frac{9}{8} + 0{,}004$

Hier können wir alle auftretenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandeln.

$$\begin{array}{r} 0{,}400 \\ 3{,}870 \\ 1{,}125 \\ +\,0{,}004 \\ \hline 5{,}399 \end{array} \qquad \text{kürzer:} \qquad \begin{array}{r} 0{,}4 \\ 3{,}87 \\ 1{,}125 \\ +\,0{,}004 \\ \hline 5{,}399 \end{array}$$

B

■ $13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8$

In diesem Beispiel können wir nicht alle gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandeln. Der Bruch $\frac{7}{3}$ liegt nämlich in einer Klasse, in der keine Zehnerbrüche enthalten sind.
Deshalb verwandeln wir umgekehrt die Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

$$13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8 = \frac{134}{10} + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + \frac{28}{10}$$
$$= \frac{402 + 70 + 24 + 84}{30} = \frac{580}{30}$$
$$13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8 = \frac{58}{3}$$

Aufgaben b 81 bis 96

ZUSAMMENFASSUNG:

Um gebrochene Zahlen zu addieren, stellt man sie durch gleichnamige Brüche dar und addiert deren Zähler. Der gemeinsame Nenner wird beibehalten.
Gebrochene Zahlen, die durch Dezimalbrüche dargestellt sind, werden unter Berücksichtigung der Stellenwerte (Komma unter Komma) wie natürliche Zahlen addiert.
Die Addition gebrochener Zahlen ist kommutativ und assoziativ.
Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, können auch bei der Addition durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

Subtraktion gebrochener Zahlen

13

Die Subtraktion im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Umkehrung der Addition in diesem Bereich. Die Bestimmung der Zahl $\frac{x}{y}$, für die $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ gilt, führt auf die Differenz

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ (b, d, y ungleich Null).

Auch hier gibt es wie im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann eine solche Zahl $\frac{x}{y}$, wenn der Subtrahend $\frac{c}{d}$ nicht größer als der Minuend $\frac{a}{b}$ ist.

11 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden subtrahiert, indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und nur die Zähler subtrahiert. Den gemeinsamen Nenner behält man bei.**

$$\frac{x}{y} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}, \text{ also } \frac{x}{y} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{11}{4} - \frac{7}{10} = \frac{55-14}{20} = \frac{41}{20}$$
$$\frac{11}{4} - \frac{7}{10} = 2\frac{1}{20}$$

Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, verhalten sich auch bei der Subtraktion wie natürliche Zahlen.

gebrochene Zahlen	$\frac{15}{1} - \frac{9}{1} = \frac{6}{1}$	$\frac{100}{10} - \frac{36}{6} = \frac{10}{1} - \frac{6}{1} = \frac{4}{1}$
natürliche Zahlen	$15 - 9 = 6$	$10 - 6 = 4$

12 **SATZ: Bei der Subtraktion verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen. Sie können daher gegenseitig ersetzt werden.**

14

Im folgenden Beispiel wird eine besondere Umformung erforderlich.

$$7\frac{5}{12} - 3\frac{11}{20} = 7\frac{25}{60} - 3\frac{33}{60}$$
$$= 6\frac{85}{60} - 3\frac{33}{60}$$
$$= 3\frac{52}{60}$$
$$7\frac{5}{12} - 3\frac{11}{20} = 3\frac{13}{15}$$

Wir können $\frac{33}{60}$ nicht von $\frac{25}{60}$ subtrahieren.
Deshalb formen wir folgendermaßen um:
$7\frac{25}{60} = 6 + 1\frac{25}{60} = 6 + \frac{85}{60} = 6\frac{85}{60}$
Dabei haben wir 1 durch $\frac{60}{60}$ ersetzt.

$$20\frac{4}{5} - 8\frac{9}{20} + 9\frac{11}{15} + 15\frac{17}{60} - 7\frac{3}{4} = 29 + \frac{48 - 27 + 44 + 17 - 45}{60} = 29\frac{37}{60}$$

Bei der Subtraktion gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung verfahren wir wie bei der Addition:

$34{,}56 - 13{,}478$

$$\begin{array}{r} 34{,}560 \\ -\ 13{,}478 \\ \hline 21{,}082 \end{array}$$

$164{,}7 - 65{,}321 - 12{,}05$

$$\begin{array}{r} 164{,}700 \\ -\ 65{,}321 \\ -\ 12{,}050 \\ \hline 87{,}329 \end{array}$$

Aufgaben b 97 bis 151

Multiplikation gebrochener Zahlen

15

Beim Vergleichen, Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen erkennen wir, daß sich bestimmte gebrochene Zahlen dabei wie die natürlichen Zahlen verhalten. Das sind gerade die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem

Nenner 1 darstellen lassen. Mit ihnen konnten wir also beim Vergleichen, Addieren und Subtrahieren wie mit natürlichen Zahlen umgehen. Wir wollen nun die Multiplikation so festlegen, daß sich die Brüche mit dem Nenner 1 auch wieder durch die natürlichen Zahlen ersetzen lassen.

Die gebrochenen Zahlen $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ sollen multipliziert werden.

$\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{x}{y}$.

Da $4 \cdot 5 = 20$ gilt, setzen wir fest: $\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{20}{1}$.

B

Nach diesem Beispiel könnte man zunächst denken, daß sich für die Multiplikation eine ähnliche Regel ergibt wie für die Addition. Das Ergebnis $\frac{20}{1}$ können wir ja dadurch erhalten, daß wir die Zähler der gegebenen Brüche multiplizieren und den gemeinsamen Nenner 1 beibehalten.

Für die im letzten Beispiel gegebenen gebrochenen Zahlen $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ können wir z. B. auch die Darstellungen $\frac{8}{2}$ und $\frac{10}{2}$ wählen. Multiplizieren wir nach der vermuteten Regel, so erhalten wir als Ergebnis $\frac{80}{2}$. Dieser Bruch stellt aber nicht dieselbe gebrochene Zahl wie der Bruch $\frac{20}{1}$ dar. Daher ist die vermutete Multiplikationsregel nicht verwendbar.

Nun können wir aber das Ergebnis $\frac{20}{1}$ aus $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ auch dadurch erhalten, daß wir sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multiplizieren. Gehen wir jetzt zu anderen Darstellungen der gegebenen Zahl über, so erhalten wir auf diese Art stets dasselbe Ergebnis.

$\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{20}{1}$

$\frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2 \cdot 2} = \frac{80}{4} = \frac{20}{1}$

$\frac{20}{5} \cdot \frac{25}{5} = \frac{20 \cdot 25}{5 \cdot 5} = \frac{500}{25} = \frac{20}{1}$

$\frac{12}{3} \cdot \frac{35}{7} = \frac{12 \cdot 35}{3 \cdot 7} = \frac{420}{21} = \frac{20}{1}$

Wir setzen deshalb fest:

13 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad (b, d \text{ ungleich Null})$$

Da Zähler und Nenner der darstellenden Brüche natürliche Zahlen sind und natürliche Zahlen uneingeschränkt multipliziert werden können, ist auch die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
Es ist zweckmäßig, vor dem Ausrechnen der Produkte so weit wie möglich zu kürzen.

Gemischte Zahlen wandeln wir vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

$\frac{40}{9} \cdot \frac{15}{8} = \frac{40 \cdot 15}{9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$

$7\frac{4}{5} \cdot 1\frac{8}{13} = \frac{39}{5} \cdot \frac{21}{13} = \frac{39 \cdot 21}{5 \cdot 13} = \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 1} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$

Aufgaben b 152 bis 155

Wir haben die Multiplikation gebrochener Zahlen so festgelegt, daß folgender Satz gilt:

14 **SATZ: Bei der Multiplikation verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen. Sie können daher gegenseitig ersetzt werden.**

Im folgenden Beispiel wird 3 durch $\frac{3}{1}$ ersetzt.

$\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{5}$

Für natürliche Zahlen gilt
das Kommutationsgesetz $a \cdot b = b \cdot a$
und das Assoziationsgesetz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
der Multiplikation.

Ferner gilt für natürliche Zahlen
das Distributionsgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$5 \cdot 7 = 35$	$7 \cdot 5 = 35$	$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5.$
$5 \cdot (7 \cdot 9) = 5 \cdot 63 = 315$	$(5 \cdot 7) \cdot 9 = 35 \cdot 9 = 315$	$5 \cdot (7 \cdot 9) = (5 \cdot 7) \cdot 9$
$5 \cdot (7 + 9) = 5 \cdot 16 = 80$	$5 \cdot 7 + 5 \cdot 9 = 35 + 45 = 80$	$5 \cdot (7 + 9) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 9$

Diese drei Sätze übertragen sich auf die Multiplikation gebrochener Zahlen.

15 **Kommutationsgesetz der Multiplikation:**

SATZ: Bei einem Produkt gebrochener Zahlen mit zwei Faktoren können die Faktoren vertauscht werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$

16 **Assoziationsgesetz der Multiplikation:**

SATZ: $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$

Der Satz 16 besagt, daß es nicht darauf ankommt, welche der beiden Multiplikationen zuerst ausgeführt wird. Wir können deshalb die Klammern fortlassen und schreiben

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{9}{7} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 7}$

Zur Überprüfung rechnen wir:

$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{7}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{7} = \frac{30}{7}$ | $\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{9}{7} = \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{30}{7}$

Ähnlich wie in einer Summe die Reihenfolge der Summanden beliebig ist, können wir auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese Faktoren beliebig vertauschen.

17 **Distributionsgesetz:**

B

SATZ: $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9}$

Zur Überprüfung rechnen wir:

$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{36}{45} + \frac{10}{45}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{46}{45}$ | $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{15} + \frac{14}{27} = \frac{252}{135} + \frac{70}{135}$

$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{322}{135}$ | $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{322}{135}$

Im Bereich der natürlichen Zahlen galt stets

$a \cdot 0 = 0$ und $a \cdot 1 = a$.

Das gilt auch im Bereich der gebrochenen Zahlen:

$$\frac{a}{b} \cdot 0 = 0 \text{ und } \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$\frac{5}{9} \cdot 0 = \frac{5}{9} \cdot \frac{0}{1} = \frac{5 \cdot 0}{9 \cdot 1} = \frac{0}{9} = 0$ | $\frac{5}{9} \cdot 1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5 \cdot 1}{9 \cdot 1} = \frac{5}{9}$

Aufgaben b 156 bis 183

17

Die Dezimalbrüche sind eine besondere Darstellungsform für gebrochene Zahlen. Will man gebrochene Zahlen in dieser Form multiplizieren, so kann man sie zunächst in Zehnerbrüche, also gemeine Brüche, umwandeln:

$4{,}6 \cdot 2{,}7 = \frac{46}{10} \cdot \frac{27}{10} = \frac{46 \cdot 27}{100} = \frac{1242}{100} = 12{,}42$

$0{,}721 \cdot 0{,}308 = \frac{721}{1000} \cdot \frac{308}{1000} = \frac{721 \cdot 308}{1\,000\,000} = \frac{222\,068}{1\,000\,000} = 0{,}222\,068$

$17{,}31 \cdot 29 = \frac{1731}{100} \cdot \frac{29}{1} = \frac{1731 \cdot 29}{100} = \frac{50\,199}{100} = 501{,}99$

Diese Beispiele weisen einen Weg für eine bequemere Methode:

18 **Man multipliziert gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung miteinander, indem man die Dezimalbrüche zunächst ohne Rücksicht auf das Komma wie natürliche Zahlen multipliziert. Das Komma setzt man so, daß das Ergebnis soviel Dezimalstellen hat wie die beiden Faktoren zusammen.**

Auf diese Weise vereinfachen sich die letzten drei Beispiele folgendermaßen:

4,6 · 2,7	0,721 · 0,308	17,31 · 29
9 2	2163	3462
3 22	5768	15579
12,42	0,222068	501,99

Wenn wir nach der Multiplikation das Komma setzen wollen, so müssen wir manchmal vor das Ergebnis noch Nullen schreiben, um die richtige Anzahl von Dezimalstellen zu erhalten.

0,051 · 0,003
0,000 153

Dagegen können wir Nullen fortlassen, die hinter der letzten von Null verschiedenen Dezimalstelle stehen. Das bedeutet nichts anderes, als daß das Endergebnis gekürzt wird.

Begründe das, indem du das Produkt 8,64 · 14,5 berechnest und das Ergebnis kürzt!

Besonders einfach ist die Multiplikation einer gebrochenen Zahl in Dezimalbruchdarstellung mit 10; 100; 1 000 usw.

$3{,}78 \cdot 10 = 37{,}80 = 37{,}8$
$3{,}78 \cdot 100 = 378{,}00 = 378$
$3{,}78 \cdot 1\,000 = 3\,780{,}00 = 3\,780$
$3{,}78 \cdot 10\,000 = 37\,800{,}00 = 37\,800$

19 **SATZ: Man multipliziert mit 10, 100, 1 000, . . ., indem man das Komma im Dezimalbruch um 1, 2, 3, . . . Stellen nach rechts versetzt.**

Zur Kontrolle des Endergebnisses machen wir vor der Multiplikation einen Überschlag.

Aufgaben b 184 bis 192

ZUSAMMENFASSUNG:

Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar.
Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung multipliziert man wie natürliche Zahlen. Das Produkt hat so viel Dezimalstellen wie beide Faktoren zusammen.
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist kommutativ und assoziativ.
Multiplikation und Addition sind durch das Distributionsgesetz verbunden.
Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, können bei der Multiplikation durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

Division gebrochener Zahlen

18

Vertauschen wir in einem Bruch, dessen Zähler ungleich Null ist, Zähler und Nenner, so erhalten wir wieder einen Bruch. Beide Brüche stellen gebrochene Zahlen dar, die beide ungleich Null sind.

$\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{1}$ und $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{7}$ und $\frac{7}{7}$

B

20 **DEFINITION: Ist $\frac{a}{b}$ eine von Null verschiedene gebrochene Zahl (also $a \neq 0$ und $b \neq 0$), so heißt die gebrochene Zahl $\frac{b}{a}$ das *Reziproke* der gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$.**

Das Produkt aus einer beliebigen von 0 verschiedenen gebrochenen Zahl und ihrem Reziproken ist gleich 1.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$ (a, b ungleich Null).

Die Division im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Umkehrung der Multiplikation in diesem Bereich. Die Bestimmung der gebrochenen Zahl $\frac{x}{y}$, für die $\frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ gilt, führt auf den Quotienten

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

Wenn uns zum Beispiel die Gleichung

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{11}, \text{ d.h. } \frac{x}{y} = \frac{5}{11} : \frac{2}{3},$$

gegeben ist, so müssen wir die Zahl finden, die, mit $\frac{2}{3}$ multipliziert, $\frac{5}{11}$ ergibt. Diese Zahl ist gleich dem Produkt $\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}$. Wenn wir nämlich dieses Produkt für $\frac{x}{y}$ in die Gleichung einsetzen,

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{11},$$

so können wir kürzen und erhalten $\frac{5}{11} = \frac{5}{11}$. Also gilt:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{5}{11} : \frac{2}{3} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}.$$

Wie in diesem Beispiel setzen wir allgemein fest:

21 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b, c, d \text{ ungleich Null})$$

Aufgaben b 193 bis 196

Gemischte Zahlen wandeln wir vor dem Dividieren in unechte Brüche um. Durch die Definition 21 wird im Bereich der gebrochenen Zahlen jede Division auf eine Multiplikation zurückgeführt. Da aber die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, können wir jetzt jede Divisionsaufgabe lösen. Die gebrochenen Zahlen bilden also einen Zahlenbereich, in dem wir **uneingeschränkt dividieren** können. Nur durch die Zahl Null können wir nicht dividieren, wie folgendes Beispiel zeigt.

B

a) Der Dividend sei ungleich Null.

$\frac{2}{5} : \frac{0}{8} = \frac{x}{y}$,

d. h., wir müssen eine Zahl $\frac{x}{y}$ finden, für die gilt:

$\frac{2}{5} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{8} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 8}$.

Eine solche Zahl gibt es aber nicht, denn der Zähler $x \cdot 0$ ist stets gleich 0, und daher kann der Bruch $\frac{x \cdot 0}{y \cdot 8}$ nicht mit dem Bruch $\frac{2}{5}$ in derselben Klasse liegen.

b) Der Dividend sei Null.

$\frac{0}{7} : \frac{0}{11} = \frac{x}{y}$.

Hier müssen wir eine Zahl $\frac{x}{y}$ finden, für die gilt:

$\frac{0}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{11} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 11}$.

Diese Gleichung wird aber von jeder gebrochenen Zahl erfüllt, denn stets liegt der Bruch $\frac{x \cdot 0}{y \cdot 11}$ in derselben Klasse wie $\frac{0}{7}$. Also gilt stets:

$\frac{0}{7} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 11}$.

22 **SATZ: Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Division mit Ausnahme der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar.**

Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, verhalten sich auch bei der Division wie natürliche Zahlen.

$\frac{20}{1} : \frac{4}{1} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{1}$ und $20 : 4 = 5$ | $\frac{56}{1} : \frac{1}{1} = \frac{56}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{56}{1}$ und $56 : 1 = 56$

23 **SATZ: Bei der Division verhalten sich gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen. Sie können daher gegenseitig ersetzt werden.**

$\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5} : \frac{3}{1} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$; kürzer: $\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}$

$12 : \frac{36}{13} = \frac{12}{1} : \frac{36}{13} = \frac{12}{1} \cdot \frac{13}{36} = \frac{13}{3}$; kürzer: $12 : \frac{36}{13} = \frac{12 \cdot 13}{36} = \frac{13}{3}$

Aufgaben b 197 bis 227

Die natürlichen Zahlen als Teilbereich der gebrochenen Zahlen

20

Die gebrochenen Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, verhalten sich beim Vergleichen und bei allen Rechenoperationen wie natürliche Zahlen. Deshalb können wir diese gebrochenen Zahlen durch die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen ersetzen. Umgekehrt können wir auch alle natürlichen Zahlen durch die entsprechenden gebrochenen Zahlen ersetzen.

$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10} = 5 = \frac{125}{25}$

$2 < \frac{8}{2};\quad \frac{10}{5} < 4;\quad 2 < 4;\quad \frac{20}{10} < \frac{12}{3};$

$\frac{3}{2} < \frac{7}{1};\quad 1\frac{1}{2} < 7;\quad \frac{15}{10} < \frac{70}{10};$

$\frac{3}{5} + \frac{6}{1} = \frac{3}{5} + \frac{18}{3} = \frac{3}{5} + 6$

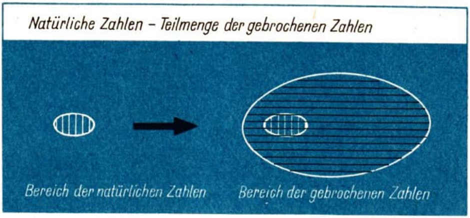
$\frac{15}{3} - \frac{12}{4} = 5 - \frac{6}{2} = \frac{30}{6} - 3 = 5 - 3$

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{1} = 6 \cdot \frac{40}{8} = 6 \cdot 5$

$\frac{90}{1} : \frac{36}{2} = 90 : 18 = \frac{180}{2} : \frac{72}{4}.$

In allen Beispielen können wir noch beliebig viele andere gleichwertige Schreibweisen finden. Nach der Ersetzung eines Teils der gebrochenen Zahlen durch die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen können wir feststellen (Bild B 17):

24 **SATZ: Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.**



B 17

Damit können wir jede Division natürlicher Zahlen auch als Division gebrochener Zahlen schreiben:

$3 : 8 = \frac{3}{1} : \frac{8}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8};\qquad$ also $\quad 3 : 8 = \frac{3}{8}$

$6 : 16 = \frac{6}{1} : \frac{16}{1} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16};\quad$ also $\quad 6 : 16 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$

Damit ist jede Division natürlicher Zahlen (außer der Division durch Null) innerhalb des Bereichs der gebrochenen Zahlen ausführbar.
Oder umgekehrt: Jeder Bruch kann als Quotient natürlicher Zahlen geschrieben werden.

Es gilt also:

$\frac{a}{b} = a : b \quad (b \neq 0).$

Da wir einen Bruch beliebig erweitern oder kürzen können, dürfen wir auch stets in einem Quotienten den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren.

■ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30}$; $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 20 : 30$

■ $\frac{24}{18} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; $24 : 18 = 12 : 9 = 4 : 3$.

Anwendungen

21

■ Eine Pumpe fördert in einer Stunde 5 m^3 Wasser. Wieviel Kubikmeter fördert sie in einer Dreiviertelstunde?

Wenn nach der Wassermenge nach 2 h gefragt wäre, würden wir rechnen:

$2 \cdot 5$.

Wenn nach der Wassermenge nach 6 h gefragt wäre, würden wir rechnen:

$6 \cdot 5$.

Zur Lösung der Aufgabe können wir entsprechend folgendermaßen rechnen:

$\frac{3}{4} \cdot 5$.

In einer Viertelstunde fördert die Pumpe nämlich den vierten Teil der Wassermenge einer Stunde, also

$5 : 4 = \frac{5}{4}$.

In einer Dreiviertelstunde fördert die Pumpe das Dreifache von $\frac{5}{4}$ m^3, also rechnen wir

$3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Dieses Ergebnis erhalten wir aber gerade, wenn wir rechnen:

$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ergebnis: Die Pumpe fördert in $\frac{3}{4}$ h also $3\frac{3}{4}$ m^3 Wasser.

■ In einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft sollen $15\frac{1}{2}$ ha mit Roggen bestellt werden. Für 1 ha benötigt man $1\frac{2}{5}$ dt Saatgut.

Für $\frac{1}{2}$ ha würde die LPG $1\frac{2}{5} : 2 = \frac{7}{5} : 2 = \frac{7}{10}$, also $\frac{7}{10}$ dt benötigen.

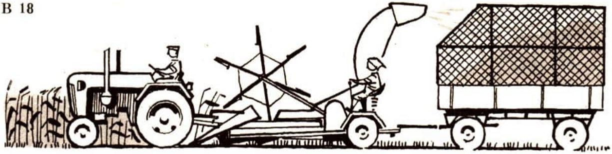
Für $15\frac{1}{2}$ ha $= \frac{31}{2}$ ha benötigt sie dann $31 \cdot \frac{7}{10}$ dt $= \frac{217}{10}$ dt.

Wir rechnen kürzer:

$15\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5} = \frac{31}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{217}{10} = 21\frac{7}{10}$.

Ergebnis: Die LPG benötigt für dieses Feld $21\frac{7}{10}$ dt Saatgut.

B 18



In einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft wird das Grünfutter mit einem Feldhäcksler geerntet. Dabei konnte in 8 h eine Fläche von $2\frac{1}{2}$ ha abgeerntet werden. Wieviel Zeit war für die Bearbeitung von 1 ha nötig?
Anmerkung: Wenn in 8 h nur 2 ha abgeerntet worden wären, würden wir rechnen 8 : 2. Wenn in dieser Zeit 3 ha abgeerntet worden wären, würden wir rechnen 8 : 3. Wenn in dieser Zeit $2\frac{1}{2}$ ha abgeerntet wurden, rechnen wir also:

$8 : 2\frac{1}{2} = \frac{8}{1} : \frac{5}{2} = \frac{8}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$.

Wenn nämlich in 8 h eine Fläche von $\frac{5}{2}$ ha abgeerntet wird, so benötigt man für $\frac{1}{2}$ ha den fünften Teil der Zeit. Wir rechnen also:

$8 : 5 = \frac{8}{5}$.

Für 1 ha benötigt man das Doppelte von $\frac{8}{5}$ h. Wir rechnen also:

$\frac{8}{5} \cdot 2 = \frac{16}{5}$.

Das ist dasselbe Ergebnis, das wir durch die Division $8 : 2\frac{1}{2}$ erhalten haben.

Ergebnis: 1 ha wird in $3\frac{1}{5}$ h = 3 h 12 min abgeerntet.

Aufgaben b 228 bis 248

Division gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

22

Um eine Regel für die Division gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung zu finden, gehen wir schrittweise vor. In den folgenden Aufgaben 1 bis 4 dividieren wir zunächst nur durch natürliche Zahlen.

Aufgabe 1: 12,4 : 4 *Überschlag:* 12 : 4 = 3

$12{,}4 : 4 = \frac{124}{10} : \frac{4}{1} = \frac{124}{10 \cdot 4}$

Den letzten Bruch kürzen wir durch 4, d. h., wir dividieren Zähler und Nenner durch 4:

$12{,}4 : 4 = \frac{124 : 4}{10} = \frac{31}{10} = 3{,}1$

Schriftliche Rechnung:

ohne Komma	*mit Komma*
124 : 4 = 31	12,4 : 4 = 3,1
04	04
0	0

Aufgabe 2: 296,48 : 17

Überschlag: 300 : 20 = 15

$$296{,}48 : 17 = \frac{29\,648}{100} : \frac{17}{1} = \frac{29\,648}{100 \cdot 17}$$

Kürzen durch 17:

$$296{,}48 : 17 = \frac{29648 : 17}{100} = \frac{1\,744}{100} = 17{,}44$$

Schriftliche Rechnung:

ohne Komma	*mit Komma*
29 648 : 17 = 1 744	296,48 : 17 = 17,44
126	126
74	74
68	68
0	0

Aufgabe 3: 17,5 : 4

Überschlag: 16 : 4 = 4

$$17{,}5 : 4 = \frac{175}{10} : \frac{4}{1} = \frac{175}{10 \cdot 4}$$

Wir können den letzten Bruch nicht durch 4 kürzen, da 175 nicht durch 4 teilbar ist. Deshalb erweitern wir zunächst mit 100 (der Nenner soll ja eine Zehnerpotenz bleiben) und kürzen dann durch 4:

$$17{,}5 : 4 = \frac{17\,500 : 4}{1\,000} = \frac{4375}{1000} = 4{,}375$$

Schriftliche Rechnung:

ohne Komma	*mit Komma*
17 500 : 4 = 4375	17,500 : 4 = 4,375
15	15
30	30
20	20
0	0

Wir können diese Division auch ausführen, ohne den Dezimalbruch vorher zu erweitern, d. h. ohne im Dezimalbruch die Nullen anzufügen. Es genügt, die Nullen bei den entsprechenden Teildivisionen zu schreiben:

```
17,5 : 4 = 4,375
16
 15
 12
  30 ←
  28
   20 ←
   20
    0
```

Aufgabe 4: 13 : 8

$$13 : 8 = \frac{13}{1} : \frac{8}{1} = \frac{13}{1 \cdot 8} = \frac{13\,000}{1\,000 \cdot 8}$$

$$= \frac{13\,000 : 8}{1\,000} = \frac{1\,625}{1\,000} = 1{,}625$$

Schriftliche Rechnung:

ohne Komma	*mit Komma*
13 000 : 8 = 1625	13 : 8 = 1,625
50	50 ←
20	20 ←
40	40 ←
0	0

In den Aufgaben 1 bis 4 erkennen wir, daß bei der Division von Dezimalbrüchen durch natürliche Zahlen wie mit natürlichen Zahlen gerechnet wird. Dabei wird im Quotienten das Komma gesetzt, wenn man bei den Teildivisionen die Einer des Dividenden dividiert hat.

Besonders einfach ist die Division durch 10; 100; 1 000 usw.

426,4 : 10 = 42,64
 26
  64
   40
    0

426,4 : 10 = 42,64

426,4 : 100 = 4,264
 264
  640
   400
     0

426,4 : 100 = 4,264

Entsprechend: 426,4 : 1 000 = 0,426 4 426,4 : 10 000 = 0,042 64

25 **SATZ: Man dividiert durch 10; 100; 1 000; . . ., indem man das Komma im Dezimalbruch um 1; 2; 3; . . . Stellen nach links versetzt.**

Aufgaben b 249 bis 258

23

Als nächstes prüfen wir nach, ob uns die gefundene Regel auch weiterhilft, wenn der Divisor Dezimalstellen hat. Wir betrachten zu diesem Zweck die Aufgaben 5 bis 7.

Aufgabe 5: 5,25 : 1,5 *Überschlag:* 5 : 2 = 2,5

Wir beseitigen zunächst das Komma im Divisor.

In der Lerneinheit B 20 wurde auf Seite 43 oben gezeigt, daß wir in einem Quotienten den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl multiplizieren können. Wir multiplizieren in dieser Aufgabe den Dividenden und den Divisor mit 10:

5,25 : 1,5 = 52,5 : 15.

Jetzt können wir wie in den Aufgaben 1 bis 4 weiterrechnen.

52,5 : 15 = 3,5
 75
  0

Aufgabe 6: 5,872 : 0,32 *Überschlag:* $6 : \frac{3}{10} = 20$

Multiplikation von Dividend und Divisor mit 100:

5,872 : 0,32 = 587,2 : 32

587,2 : 32 = 18,35
267
 112
  160
    0

Aufgabe 7: 4,97 : 12,425 *Überschlag:* 5 : 10 = 0,5

Multiplikation von Dividend und Divisor mit 1 000:

4970 : 12 425 = 0,4
49700
0

An den Aufgaben 5 bis 7 erkennen wir, daß auch bei der Division durch gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung wie mit natürlichen Zahlen gerechnet wird. Dazu multiplizieren wir vorher den Dividenden und den Divisor mit 10; 100; 1 000; . . ., je nachdem, ob der Divisor 1; 2; 3; . . . Dezimalstellen hat. Dadurch fällt das Komma im Divisor fort. Im Quotienten wird das Komma gesetzt, wenn wir die Einer des Dividenden dividiert haben.
Damit haben wir eine Regel für die Division durch einen Dezimalbruch erhalten. Einschränkend müssen wir aber feststellen, daß wir bei allen Divisionsaufgaben in den Lerneinheiten B 22 und 23 nach einer gewissen Anzahl von Teildivisionen den Rest 0 erhielten. Bei den meisten Divisionen durch Dezimalbrüche ist das aber nicht der Fall. Wir beschäftigen uns deshalb in der Lerneinheit B 28 noch einmal mit der Division durch Dezimalbrüche.

Aufgaben b 259 bis 263

Periodische Dezimalbrüche

24

Gemeine Brüche, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 oder 5 enthalten, können wir in Dezimalbrüche verwandeln. Dazu erweitern wir sie zu Zehnerbrüchen und schreiben diese dann als Dezimalbrüche. (Vgl. Lerneinheit B 4!)

$\frac{3}{8}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{3}{8} = \frac{375}{1\,000} = 0{,}375$

$\frac{113}{40}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{113}{40} = \frac{2825}{1000} = 2{,}825$

Wir können aber solche Brüche auch dadurch in Dezimalbrüche verwandeln, daß wir sie als Quotienten schreiben und diese nach den Regeln für die Division von Dezimalbrüchen ausrechnen.

$\frac{3}{8}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{3}{8} = 3 : 8$; 3 : 8 = 0,375
30
60
40
0

$\frac{113}{40}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{113}{40} = 113 : 40$; 113 : 40 = 2,825
330
100
200
0

25

Auch Brüche, die sich nicht zu Zehnerbrüchen erweitern lassen, können wir als Quotienten schreiben, z. B. $\frac{2}{9} = 2:9$. Wir versuchen, diese Division auszuführen:

$$\frac{2}{9} = 2:9; \quad 2:9 = 0{,}22\,\ldots$$

$$\begin{array}{l} \underline{20} \\ \;\underline{20} \\ \;\;\underline{2} \\ \;\;\vdots \end{array}$$

Dieses Verfahren bricht im Gegensatz zu den früheren Beispielen nie ab, denn wir erhalten bei jeder folgenden Teildivision den Rest 2. Daher ergibt sich immer wieder die Ziffer 2 in den folgenden Dezimalstellen. Die drei Punkte hinter der letzten geschriebenen 2 sollen dies andeuten.

Der Bruch $\frac{2}{9}$ läßt sich also nicht wie bisher in einen Dezimalbruch verwandeln. Da aber im Bereich der gebrochenen Zahlen die Division $2:9$ ausführbar ist, wollen wir auch 0,222 ... als Dezimalbruch bezeichnen.

26 **DEFINITION: Ein Dezimalbruch, der eine letzte Dezimalstelle mit von 0 verschiedener Ziffer besitzt, heißt *endlicher Dezimalbruch*.**
Ein Dezimalbruch, der keine letzte Dezimalstelle mit von 0 verschiedener Ziffer besitzt, heißt *unendlicher Dezimalbruch*.

Wir können den unendlichen Dezimalbruch 0,222 ... als andere Darstellung für die gebrochene Zahl $\frac{2}{9}$ benutzen. Wie den Bruch $\frac{2}{9}$ können wir jeden gemeinen Bruch durch Division in einen Dezimalbruch verwandeln.

■ $\frac{4}{9}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$$4:9 = 0{,}44\,\ldots$$

$$\begin{array}{l} \underline{40} \\ \;\underline{40} \\ \;\;\;4 \\ \;\;\;\vdots \end{array}$$

Es tritt immer wieder der Rest 4 auf. Daher erhalten wir einen unendlichen Dezimalbruch, bei dem in den Dezimalstellen die Grundziffer 4 stets wiederkehrt.

$$\frac{4}{9} = 0{,}44\,\ldots$$

■ $\frac{5}{12}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$$5:12 = 0{,}416\,6\,\ldots$$

$$\begin{array}{l} \underline{50} \\ \;\underline{20} \\ \;\;\underline{80} \\ \;\;\;\underline{80} \\ \;\;\;\;8 \\ \;\;\;\;\vdots \end{array}$$

Es tritt immer wieder der Rest 8 auf. Daher erhalten wir einen unendlichen Dezimalbruch mit der stets wiederkehrenden Grundziffer 6.

$$\frac{5}{12} = 0{,}416\,6\,\ldots$$

■ $\frac{117}{55}$ ist in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

$117 : 55 = 2{,}12727\ldots \qquad \frac{117}{55} = 2{,}12727\ldots$

70
150
400
150
400
15
⋮

Führen wir weitere Teildivisionen aus, so treten abwechselnd immer wieder die Reste 15 und 40 auf. Das bedeutet, daß im Ergebnis in den weiteren Dezimalstellen fortlaufend die Ziffern 2 und 7 erscheinen.
In den letzten drei Beispielen sind die Ergebnisse unendliche Dezimalbrüche, in deren Dezimalstellen bestimmte Grundziffern oder Gruppen von Grundziffern immer wiederkehren. Diese sich wiederholenden Ziffern heißen **Perioden**.

27 **DEFINITION: Ein unendlicher Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt *periodischer Dezimalbruch*.**

Die Ergebnisse in den letzten drei Beispielen sind also die periodischen Dezimalbrüche

0,44 . . . mit der Periode 4;
0,4166 . . . mit der Periode 6;
2,12727 . . . mit der Periode 27.

Nach der Anzahl der Grundziffern in einer Periode spricht man von 1; 2; 3; . . . n-stelligen Perioden. So ist in den Dezimalbrüchen 0,44 . . . und 0,4166 . . . die Periode einstellig und in 2,12727 . . . zweistellig.

26

Für periodische Dezimalbrüche gibt es eine abgekürzte Schreibweise. Man setzt über die Ziffern, die eine Periode bilden, einen waagerechten Strich.

■ Für 0,44 . . . schreibt man $0{,}\overline{4}$ (gelesen: Null — Komma — Vier; Periode Vier)

■ Für 0,4166 . . . schreibt man $0{,}41\overline{6}$ (gelesen: Null — Komma — Vier — Eins — Sechs; Periode Sechs)

■ Für 2,12727 . . . schreibt man $2{,}1\overline{27}$ (gelesen: Zwei — Komma — Eins — Zwei — Sieben; Periode Zwei — Sieben)

■ Für 12,32534534 . . . schreibt man $12{,}32\overline{534}$ (gelesen: Zwölf — Komma — Drei — Zwei — Fünf — Drei — Vier; Periode Fünf — Drei — Vier).

Wir können nunmehr jeden gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$, in dem Zähler und Nenner teilerfremd sind, durch Ausrechnen des Quotienten $a : b$ in einen Dezimalbruch umwandeln. Enthält der Nenner b nur die Primfaktoren 2 und 5 bzw. Potenzen dieser Zahlen, so erhalten wir einen endlichen, in allen anderen Fällen einen periodischen Dezimalbruch.

28 **SATZ: Für jede gebrochene Zahl gibt es eine Darstellung als Dezimalbruch. Dieser ist entweder endlich oder periodisch.**

B

Umgekehrt kann man jeden endlichen oder periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln. Für die endlichen Dezimalbrüche haben wir schon ein Verwandlungsverfahren kennengelernt (vgl. Lerneinheit B 4!). Auf die Verwandlung der periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche wollen wir hier nicht näher eingehen.
Es gibt auch unendliche Dezimalbrüche, die nicht periodisch sind, z. B. 0,5005000500005 ... Diese stellen aber keine gebrochenen Zahlen dar.

29 **SATZ: Jeder endliche oder periodische Dezimalbruch stellt eine gebrochene Zahl dar.**

Aufgaben b 264 bis 270

ZUSAMMENFASSUNG:

Jeder gemeine Bruch läßt sich in einen endlichen oder periodischen Dezimalbruch verwandeln.
Jeder endliche oder periodische Dezimalbruch läßt sich in einen gemeinen Bruch verwandeln.
Die gebrochenen Zahlen können sowohl durch gemeine Brüche als auch durch Dezimalbrüche dargestellt werden.

Rechnen mit gebrochenen Zahlen, die als periodische Dezimalbrüche dargestellt sind

27

Bisher haben wir nur solche Aufgaben gerechnet, bei denen endliche Dezimalbrüche auftraten. Treten in einer Aufgabe periodische Dezimalbrüche auf, so werden diese häufig gerundet. Dadurch erhalten wir im allgemeinen nicht das genaue Ergebnis, sondern einen Näherungswert. Je mehr Stellen des periodischen Dezimalbruchs wir dabei berücksichtigen, desto besser ist der jeweilige Näherungswert für das genaue Ergebnis.

Es sollen die Zahlen $2,\overline{3}$ und $1,2$ multipliziert werden. $2,\overline{3} \cdot 1,2$

Auf 2,3 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,3 \cdot 1,2 \\ \hline 23 \\ 46 \\ \hline \underline{\underline{2,76}} \end{array}$$

Auf 2,33 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,33 \cdot 1,2 \\ \hline 233 \\ 466 \\ \hline \underline{\underline{2,796}} \end{array}$$

Auf 2,333 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,333 \cdot 1,2 \\ \hline 2333 \\ 4666 \\ \hline \underline{\underline{2,7996}} \end{array}$$

Berechnung durch Umwandeln in gemeine Brüche

Wie wir durch Division nachprüfen können, gilt:

$\frac{7}{3} = 2,\overline{3}$.

Außerdem ist:

$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Wir haben also zu rechnen:

$\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{14}{5} = \underline{\underline{2,8}}$.

Es sollen $1,\overline{09}$ und $1,8\overline{3}$ multipliziert werden. $1,\overline{09} \cdot 1,8\overline{3}$

Auf 1,1 und 1,8 gerundet: $1,1 \cdot 1,8 = 1,98$

Auf 1,09 und 1,83 gerundet: $1,09 \cdot 1,83 = 1,9947$

Auf 1,091 und 1,833 gerundet: $1,091 \cdot 1,833 = 1,999\,803$

Verwandlung in gemeine Brüche:

Es gilt: $\frac{12}{11} = 1,\overline{09}$; $\frac{11}{6} = 1,8\overline{3}$

$1,\overline{09} \cdot 1,8\overline{3} = \frac{12}{11} \cdot \frac{11}{6} = 2$

Die Zahl 5,7 soll durch $0,\overline{6}$ dividiert werden. $5,7 : 0,\overline{6}$

Wir rechnen auf fünf Dezimalstellen.

Auf 0,7 gerundet:	$5,7 : 0,7 =$ $57 : 7 = 8,14285$
Auf 0,67 gerundet:	$5,7 : 0,67 =$ $570 : 67 = 8,50746$
Auf 0,667 gerundet:	$5,7 : 0,667 =$ $5\,700 : 667 = 8,54572$
Auf 0,6667 gerundet:	$5,7 : 0,6667$ $57\,000 : 6667 = 8,54957$

Es gilt: $\frac{57}{10} = 5,7$; $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

$5,7 : 0,\overline{6} = \frac{57}{10} : \frac{2}{3} = \frac{57}{10} \cdot \frac{3}{2} = \frac{171}{20} = 8,55$

Wenn man den Divisor rundet, so ergibt die Probe nur einen Näherungswert für den Dividenden.

Führe die Probe für jede Division im letzten Beispiel durch!

In der Lerneinheit B 22 haben wir die Division gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung für den Fall kennengelernt, daß nach einer gewissen Anzahl von Teildivisionen der Rest 0 auftrat. Nachdem wir nun die periodischen Dezimalbrüche kennengelernt haben, können wir diese Einschränkung aufheben.
Wir erhalten also bei der Division entweder einen endlichen oder einen periodischen Dezimalbruch. Im letzten Fall deuten wir die Periode durch den Strich an. Häufig rundet man auch auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen (vgl. letztes Beispiel). Besonders bei Anwendungsaufgaben wird das Ergebnis auf eine den Maßeinheiten entsprechende Anzahl von Dezimalstellen gerundet. So rundet man zum Beispiel Geldbeträge stets auf zwei Dezimalstellen.

Wir können nunmehr formulieren:

30 **Man dividiert durch eine gebrochene Zahl in Dezimalbruchdarstellung, indem man zunächst den Dividenden und den Divisor mit 10; 100; 1 000; ... multipliziert, je nachdem, ob der Divisor 1; 2; 3; ... Dezimalstellen hat. Dann rechnet man wie mit natürlichen Zahlen. Im Quotienten wird das Komma gesetzt, wenn man auch die Einer des Dividenden dividiert hat.**

Auf einem Feld von 0,9 ha Größe wurden 175,60 dt Kohlrabi geerntet. Es soll der Ertrag je Hektar ermittelt werden.

175,60 : 0,9 *Überschlag:* 200 : 1 = 200
Wir multiplizieren den Dividenden und den Divisor mit 100 und führen die Division aus.

```
1756 : 9 = 195,111 ...
 85
  46
   10
    10
     10
      ⋮
```

Beim vorliegenden Sachverhalt ist ein Runden auf 2 Dezimalstellen sinnvoll; denn es wäre unvernünftig, einen Hektarertrag auf 100 g genau anzugeben. Außerdem ist der gegebene Ertrag auch nur auf 2 Dezimalstellen genau gegeben.

Ergebnis: Es wurden rund 195,11 dt Kohlrabi je Hektar geerntet.

Aufgaben b 271 bis 289

Aus der Geschichte der Zahlen und Rechenmethoden

Die ersten Zahlenschreibweisen und Rechenverfahren sind schon sehr alt. Wo immer die Menschen sich in Staaten zusammenschlossen, mußten sie zählen und rechnen lernen. Bei Ausgrabungen in Ägypten und in Mesopotamien, einem Gebiet, auf dem heute der Staat Irak liegt, fand man auf Papyrusrollen, Tontäfelchen und Inschriften an Wänden auch mathematische Aufzeichnungen. Diese waren in uns unbekannten Schriftzeichen verfaßt, die

55	LV	90	XC	4000	IIII^{M}
56	LVI	91	XCI	5000	V^{M}
57	LVII	92	XCII	6000	VI^{M}
58	LVIII	93	XCIII	7000	VII^{M}
59	LIX	94	XCIIII	8000	VIII^{M}
60	LX	95	XCV	9000	IX^{M}
61	LXI	96	XCVI	10000	X^{M}
62	LXII	97	XCVII	20000	XX^{M}
63	LXIII	98	XCVIII	30000	XXX^{M}
64	LXIIII	99	XCIX	1400	M CCCC
65	LXV	100	C		M IIII^{C}
65	LXVI	101	CI	1500	M V^{C}
67	LXVII	102	CII		M D
68	LXVIII	103	CIII	1514	M V^{C} XIIII
69	LXIX	104	CIIII	1600	M DC
70	LXX	105	CV		M VI^{C}
71	LXXI	106	CVI	1612	M VI^{C} X II
72	LXXII	107	CVII	1700	M DCC
73	LXXIII	108	CVIII		M VII^{C}
74	LXXIIII	109	CIX	1715	M VII^{C} XV
75	LXXV	110	CX	1800	M DCCC
75	LXXVI	111	CXI		M VIII^{C}
77	LXXVII	112	CXII	1820	M VIII^{C} XX
78	LXXVIII	112	CXIII ꝛc.	1900	M VIIII^{C}
79	LXXIX	200	CC		
80	LXXX	300	CCC		
81	LXXXI	400	CCCC		
82	LXXXII	500	V^{C}		
83	LXXXIII	600	VI^{C}		
84	LXXXIIII	700	VII^{C}		
85	LXXXV	800	VIII^{C}		
85	LXXXVI	900	IX^{C}		
87	LXXXVII	1000	M		
83	LXXXVIII	2000	II^{M}		
89	LXXXXI	3000	III^{M}		

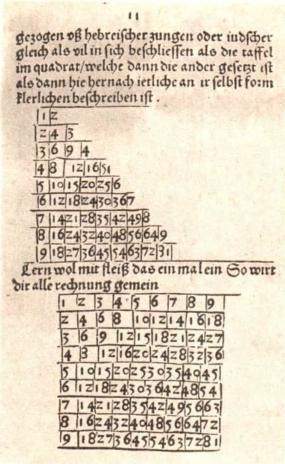
Dem nach mag sie die baÿde zale durch ainn ander lernen erkennen vnd rechen.

Bild B 19: Ausschnitt aus einer ägyptischen Lederrolle mit Bruchrechnung. Ungefähr 1700 v. u. Z. angefertigt.

Bild B 20: Eine Tafel zum Erlernen der Zahlenschreibweise mit den arabischen statt mit den römischen Zahlzeichen. Aus einem deutschen Rechenbuch vom Jahre 1524.

aber in mühevoller Arbeit entziffert werden konnten (Bild B 19). Auf diese Weise wurde bekannt, daß man schon vor ungefähr 4000 Jahren sehr gut mit Brüchen rechnen konnte. Das alte Griechenland, das im 4. Jahrhundert v. u. Z. die führende Stellung im Mittelmeergebiet einnahm, übernahm diese sehr frühen arithmetischen Kenntnisse und entwickelte sie bedeutend weiter. Aber bereits unter den Römern, die die Griechen besiegten und unterwarfen, trat ein Verfall ein. Im Mittelalter dann wurden besonders die Naturwissenschaften von der herrschenden christlichen Kirche mißachtet. Dagegen war der Stand der Naturwissenschaften und der Mathematik um diese Zeit in arabischen und asiatischen Ländern sehr viel höher als in Europa. Erst im 13. und 14. Jahrhundert begann auch in Europa die Mathematik wieder aufzublühen.
Durch die Ausdehnung des Handels und durch die Kreuzzüge lernte man die Schätze der arabischen Wissenschaft kennen. Die europäischen Völker übernahmen z. B. von den Arabern die Zeichen für die Ziffern (Bild B 21), die diese ihrerseits bei den Indern kennengelernt hatten.

Bild B 21: Das früheste Auftreten der arabischen Ziffern in Europa. Aus einem Manuskript, das im Jahre 976 in Spanien geschrieben wurde. Ein großer Teil Spaniens war damals von den Arabern besetzt.



11

gezogen vß hebreischer zungen oder iudscher gleich als vil in sich beschliessen als die taffel im quadrat/welche dann die ander gesetzt ist als dann hie hernach ietliche an ir selbst form klerlichen beschreiben ist.

1	2								
2	4	3							
3	6	9	4						
4	8	12	16	5					
5	10	15	20	25	6				
6	12	18	24	30	36	7			
7	14	21	28	35	42	49	8		
8	16	24	32	40	48	56	64	9	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Lern wol mit fleiß das ein mal ein So wirt dir alle rechnung gemein

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Bild B 22: Das Einmaleins in einem in Deutschland gedruckten Rechenbuch vom Jahre 1500. Achte auf das Sprüchlein „Lern wol mit fleiß das einmal ein, So wirt dir alle rechnung gemein,, (d. i. soviel wie leicht, zugänglich).

Wir nennen ja, wie Ihr wißt, unsere heutigen Ziffern arabische Ziffern. Nach und nach verdrängten die arabischen Ziffern die zum Rechnen sehr ungeeigneten römischen Zahlzeichen (Bild B 20).
Aber auch die teilweise überlieferten Schriften der Mathematiker des alten Griechenland wurden von den Wissenschaftlern wiederum studiert. Es war die Zeit der „Renaissance", die Zeit der „Wiedergeburt" antiker Errungenschaften.
Neue Anforderungen wurden auch an die mathematischen Fähigkeiten der Menschen gestellt. Viele mußten die damals für außerordentlich schwierig gehaltene Kunst des Rechnens erlernen. Es galt,

Bild B 23: Das Erlernen des Rechnens auf dem Rechentisch um 1514.

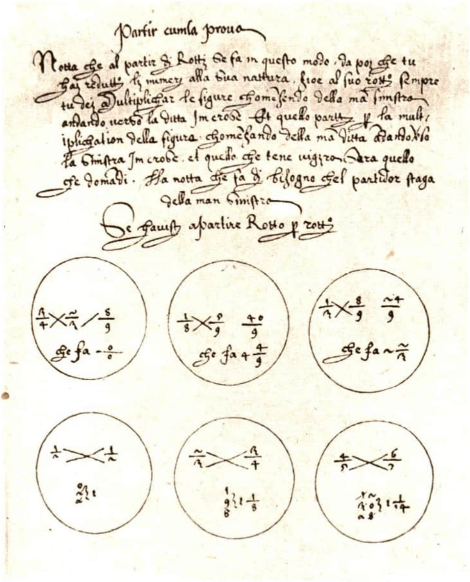


Bild B 24: Eine der frühesten Formen der modernen Bruchrechnung. Das in Italien im Jahre 1545 geschriebene Manuskript behandelt die Multiplikation von Brüchen.

die vielen verschiedenen Währungen der Länder und Städte, die unterschiedlichen Maßeinheiten für Gewicht, Weglängen, Flächeninhalte, Rauminhalte usw. ineinander umzurechnen, Zinsen mußten berechnet werden und vieles andere mehr. In dieser Zeit, also im 15. und 16. Jahrhundert, hat man Verfahren für verschiedene Rechenoperationen entwickelt, von denen Ihr einige schon kennt.

Die Grundlage war natürlich auch damals schon das Einmaleins (Bild B 22). Gerechnet wurde anfangs hauptsächlich auf dem Rechenbrett oder Rechentisch (in lateinischer Sprache hieß er abacus), wobei man sogenannte Rechenpfennige auf verschiedenen Linien auflegte, die die verschiedenen Einheiten von Maß und Gewicht bezeichneten (Denkt an Eure Kinderrechenmaschine!) (Bild B 23 und B 24). Diese Rechenmethode nannte man daher „Rechnen auf den Linien". Das schriftliche Rechnen mit den arabischen Ziffern nannte man dagegen „Rechnen auf (d. i. mit) den Federn" (Gänsekiel!). Die Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen, wie Ihr sie heute erlernt, wurden ebenfalls in dieser Zeit ausgearbeitet. Schließlich entwickelte man im 16. Jahrhundert auch die Darstellung der gebrochenen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbrüchen. Bereits damals wurden auch die Zeichen + und − für die Addition bzw. Subtraktion eingeführt.

C. Winkelbeziehungen, Symmetrie

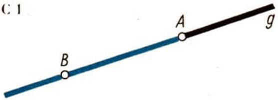
C

Zur Wiederholung

1

In der Geometrie untersuchen wir unter anderem die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen. Ein **Punkt** kann auf einem Zeichenblatt durch einen Einstich mit einer Zirkelspitze veranschaulicht werden.
Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine **Gerade**. Eine Gerade ist unbegrenzt und läßt sich nur teilweise veranschaulichen. Die Veranschaulichung kann zum Beispiel durch einen gespannten Faden erfolgen.
Liegen die Punkte und Geraden, die wir betrachten, alle in ein und derselben **Ebene**, so betreiben wir ebene Geometrie. Eine Ebene ist unbegrenzt und kann stets nur teilweise veranschaulicht werden.
Aus einzelnen Punkten und Geraden lassen sich Figuren zusammensetzen. Ein beliebiger Punkt A einer Geraden g zerlegt die Gerade in zwei **Strahlen**. Der Punkt A ist hierbei der **Anfangspunkt** beider Strahlen.

C 1



Im Bild C 1 ist der Strahl AB derjenige Teil der Geraden AB, der den Punkt B enthält. Den anderen Teil der Geraden nennen wir die *Verlängerung* des Strahls AB über A hinaus. Ein Strahl ist ebenfalls (nach einer Seite) unbegrenzt und kann stets nur teilweise veranschaulicht werden.

Zwei Strahlen *a* und *b*, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen und einen gemeinsamen Anfangspunkt *P* haben, nennen wir einen **Winkel**. Den Punkt *P* nennen wir den Scheitel, die beiden Strahlen die Schenkel des Winkels.

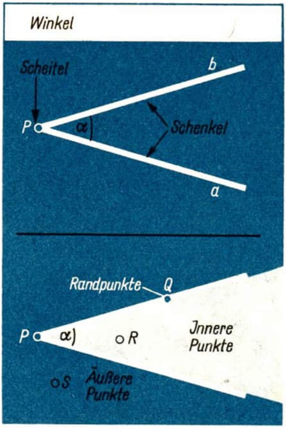
Der Punkt *Q* im Bild C 2 ist ein Randpunkt, der Punkt *R* ein innerer Punkt und der Punkt *S* ein äußerer Punkt des Winkels α.

Ein Winkel ist unbegrenzt und kann stets nur teilweise veranschaulicht werden.

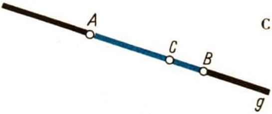
- Zu welcher Klasse von Punkten gehört der Punkt *P* im Bild C 2?
- Stelle eine Tabelle der verschiedenen Winkelarten auf!

Art des Winkels	Grad

Bemerkung: Beachte dabei, daß die oben gegebene Erklärung für den Winkelbegriff erweitert werden muß!



C 2



C 3

Alle Punkte *C* einer Geraden *g*, die zwischen zwei Punkten *A* und *B* der Geraden liegen, bilden zusammen mit den Punkten *A* und *B* die **Strecke** $\overline{AB}$ (Bild C 3). Die Punkte *A* und *B* bezeichnen wir als *Randpunkte* oder *Endpunkte*, die Punkte, die zwischen *A* und *B* liegen, als *innere Punkte* der Strecke. Alle Punkte der Geraden *g*, die weder Randpunkte noch innere Punkte sind, nennen wir *äußere Punkte* der Strecke.

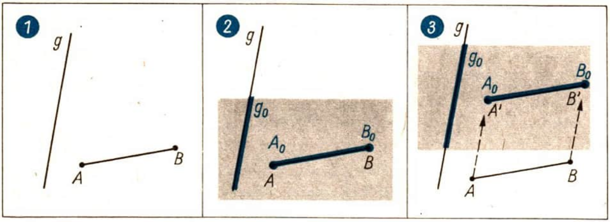
Aufgaben c 1 bis 15

Verschiebungen und ebene Drehungen

2

Das Bild C 4 veranschaulicht eine **Verschiebung** mit Hilfe von Transparentpapier. Dabei ist die Strecke $\overline{A'B'}$ das **Bild** einer Strecke $\overline{AB}$ bei einer Verschiebung in Richtung einer Geraden *g*. Die Strecke $\overline{AB}$ selbst nennen wir das **Original**. Beide Strecken nennen wir auch **entsprechende Strecken** bei dieser Verschiebung. An Stelle von Transparentpapier können auch durchsichtige Folien, Schablonen oder andere Hilfsmittel verwendet werden.

Wir zeichnen eine Strecke $\overline{AB}$ sowie eine Gerade *g* und legen auf die Zeichnung Transparentpapier (im Bild C 4 durch schwarzes Raster angedeutet). Nun pausen

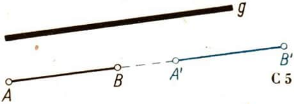


C 4

wir die Strecke $\overline{AB}$ und die Gerade g durch und erhalten auf dem Transparentpapier die Strecke $\overline{A_0B_0}$ und die Gerade g_0. Wir verändern jetzt die Lage des Transparentpapiers, achten aber darauf, daß die Gerade g auf dem Zeichenblatt mit der Geraden g_0 auf dem Transparentpapier in Deckung bleibt. Mit der Zirkelspitze stechen wir die Punkte A_0 und B_0 durch und erhalten auf dem Zeichenblatt die Punkte A' bzw. B'.

Die Gerade g kann auch in Richtung der Geraden AB liegen (Bild C 5).

Die Punkte A' bzw. B' sind Bilder der Originalpunkte A bzw. B. Original- und Bildpunkte sind einander **entsprechende Punkte** bei der betreffenden Verschiebung.



C 5

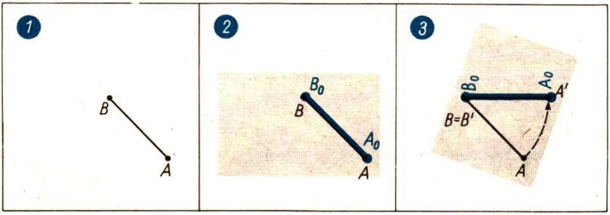
3

Das Bild C 6 veranschaulicht eine **Drehung** mit Hilfe von Transparentpapier. Dabei ist die Strecke $\overline{A'B'}$ das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ bei einer Drehung um den Punkt B.

(Wir verwenden in den folgenden Abschnitten Drehungen, ohne auf ihre Eigenschaften einzugehen.)

Wir zeichnen eine Strecke $\overline{AB}$ und legen auf die Zeichnung Transparentpapier. Nun pausen wir die Strecke $\overline{AB}$ durch und erhalten auf dem Transparentpapier

C 6

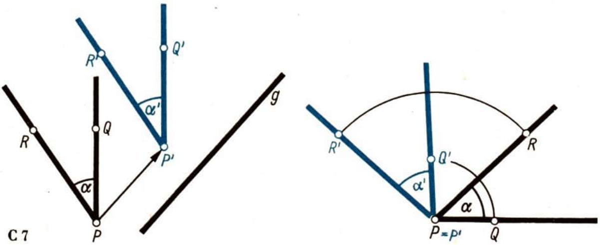


die Strecke $\overline{A_0B_0}$. Dann drehen wir das Transparentpapier, achten aber darauf, daß der Punkt B mit dem Punkt B_0 in Deckung bleibt. Mit der Zirkelspitze stechen wir den Punkt A_0 durch. Wir erhalten die Punkte A' bzw. $B' = B_0$. Den Punkt B nennen wir **Drehpunkt** bei dieser Drehung. Die Punkte A und A' bzw. B und B' sind einander *entsprechende Punkte* und die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ *entsprechende Strecken* bei dieser Drehung.

1 **DEFINITION: Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die durch eine Verschiebung oder eine Drehung ineinander überführt werden können, nennen wir *gleich lang* oder *kongruent*.**
Wir schreiben: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

4

Das Bild C 7 veranschaulicht die Verschiebung eines Winkels α in Richtung einer Geraden g. Der Winkel α ist durch die Punkte R, P und Q festgelegt. Die Bilder R', P' bzw. Q' dieser Punkte bei einer Verschiebung können wir mit Hilfe von Transparentpapier bestimmen. Dabei haben wir darauf zu achten, daß sich nach der Lageveränderung des Transparentpapiers die Gerade g in der Zeichenebene und die Gerade g_0 auf dem Transparentpapier decken. Der Winkel α' ist das Bild des Winkels α bei dieser Verschiebung.



C 7

Das Bild C 8 veranschaulicht eine Drehung eines Winkels α um den Scheitel P. Der Winkel α' ist das Bild des Winkels α bei dieser Drehung. Bei der Drehung mit Hilfe von Transparentpapier ist darauf zu achten, daß sich nach der Lageveränderung des Transparentpapiers die Punkte P und P_0 decken.

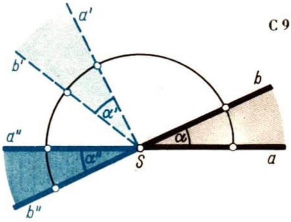
2 **DEFINITION: Zwei Winkel α und β, die durch eine Verschiebung oder eine Drehung ineinander überführt werden können, nennen wir *gleich groß* oder *kongruent*.**
Wir schreiben: $\alpha = \beta$.

Aufgaben c 16 bis 28

Scheitelwinkel und Nebenwinkel

5

Im Bild C 9 schneiden einander zwei Geraden im Punkt S. Die Winkel α und α'', die hierbei entstehen, wollen wir **Scheitelwinkel** nennen. Da der Winkel α durch eine Drehung in den Winkel α'' überführt werden kann, sind beide Winkel gleich groß.

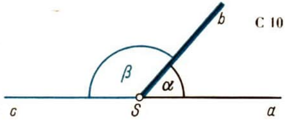


C 9

3 **SATZ: Scheitelwinkel sind gleich groß.**

- Zeichne verschiedene spitze und stumpfe Winkel und bestimme die zugehörigen Scheitelwinkel!

Im Bild C 10 wurde der Schenkel ***a*** eines Winkels α über den Scheitel S hinaus verlängert. Es entsteht ein Winkel β. Die Verlängerung des Schenkels wurde mit *c* bezeichnet, ***a*** und *c* liegen auf einer Geraden. Die Winkel α und β haben einen Schenkel, nämlich ***b***, gemeinsam; α und β heißen in diesem Fall **Nebenwinkel**.



C 10

4 **SATZ: Nebenwinkel betragen zusammen 180°.**

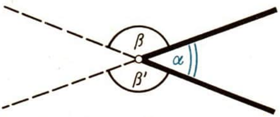
- Zeichne zwei Geraden, die einander schneiden, und stelle alle Winkel zusammen, die **a)** Nebenwinkel bzw. **b)** Scheitelwinkel sind!

Schneiden einander zwei Geraden so, daß die Nebenwinkel gleich groß sind, so stehen die Geraden senkrecht aufeinander.

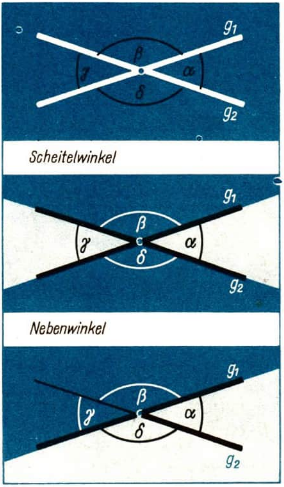
Zu jedem Winkel gibt es zwei Nebenwinkel, die als Scheitelwinkel gleich groß sind.

Die Winkel β und β' im Bild C 12 sind Nebenwinkel des Winkels α. Die Winkel β und β' sind Scheitelwinkel, also gilt $\beta = \beta'$.

C 12



C 11



Zwei Winkel, deren Summe 180° beträgt, heißen Supplementwinkel. Nebenwinkel sind also Supplementwinkel in spezieller Lage. Zwei Winkel, deren Summe zusammen 90° beträgt, nennen wir Komplementwinkel.

Aufgaben c 29 bis 38

Winkelpaare mit verschiedenen Scheitelpunkten

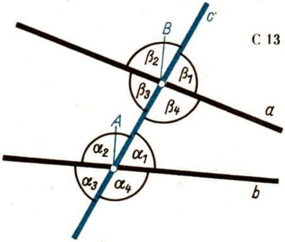
6

Werden zwei beliebige Geraden *a* und *b* von einer dritten Geraden *c* in den Punkten *A* und *B* geschnitten (Bild C 13), so lassen sich Paare von Winkeln mit verschiedenen Scheitelpunkten zusammenstellen.

Winkelpaare				Besondere Bezeichnung
α_1, β_1	α_2, β_2	α_3, β_3	α_4, β_4	Stufenwinkel
α_1, β_3	α_2, β_4	α_3, β_1	α_4, β_2	Wechselwinkel
α_1, β_4	α_2, β_3	α_3, β_2	α_4, β_1	Entgegengesetzt liegende Winkel
α_1, β_2	α_2, β_1	α_3, β_4	α_4, β_3	—

C

Wird eine Gerade *g* verschoben und ist *h* das Bild von *g* bei dieser Verschiebung, so sind die beiden Geraden *g* und *h* punktfremd. Sie verlaufen **parallel**.



C 13

5 **DEFINITION: Zwei Geraden *g* und *h*, die parallel verlaufen, nennen wir einen *Streifen*.**

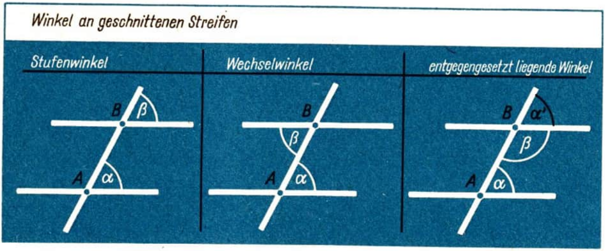
Ein Streifen ist beiderseits unbegrenzt und kann nur teilweise veranschaulicht werden. Wir unterscheiden bei einem Streifen wiederum Randpunkte, innere Punkte und äußere Punkte des Streifens.

In den Bildern C 14 bis C 16 wird jeweils ein Streifen von einer Geraden geschnitten.

Wenn wir im Bild C 14 die Stufenwinkel mit Hilfe von Transparentpapier miteinander vergleichen, so stellen wir fest:

6 **SATZ: Sind α und β Stufenwinkel an einem geschnittenen Streifen, so sind α und β gleich groß.**

Die Winkel α und β können im Bild C 14 durch eine Verschiebung ineinander überführt werden.



C 14 bis 16

Wenn wir im Bild C 15 die Wechselwinkel mit Hilfe von Transparentpapier miteinander vergleichen, so stellen wir fest:

7 **SATZ: Sind α und β Wechselwinkel an einem geschnittenen Streifen, so sind α und β gleich groß.**

Die Winkel α und β können im Bild C 15 durch Nacheinanderausführung einer Verschiebung und einer Drehung ineinander überführt werden.
Im Bild C 16 ist der Winkel α' einerseits Nebenwinkel des Winkels β, andererseits gilt $\alpha = \alpha'$. Daraus ergibt sich, daß α und β Supplementwinkel sind.

8 **SATZ: Sind α und β entgegengesetzt liegende Winkel an einem geschnittenen Streifen, so sind α und β Supplementwinkel.**

Der Winkel α kann durch eine Verschiebung in einen Nebenwinkel des Winkels β überführt werden.

● Untersuche die Winkel, die bei einem Schnitt eines Streifens mit einer Geraden g entstehen, wenn die Gerade g senkrecht auf einer Geraden des Streifens steht!

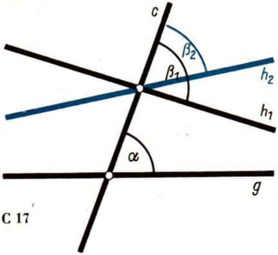
Aufgaben c 39 bis 44

Parallelen und Senkrechten

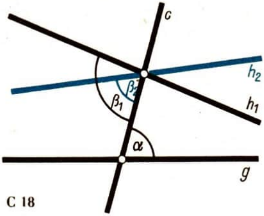
7

Im Bild C 17 sind die Winkelpaare α und β_1 bzw. α und β_2 Stufenwinkel. Dabei sind α und β_1 sowie α und β_2 verschieden groß. Treten an geschnittenen Geraden g und h Stufenwinkel α und β auf, die gleich groß sind, so handelt es sich um einen geschnittenen Streifen. In diesem Fall sind also g und h parallel.
Mit der Umkehrung des Satzes 6 erhalten wir ein **Kriterium[1] für die Parallelität zweier Geraden.**

[1] Ein Kriterium nennt man die Zusammenfassung von gewissen Bedingungen für einen bestimmten Sachverhalt.



C 17



C 18

9 **SATZ: Sind α und β Stufenwinkel an geschnittenen Geraden g und h und sind α und β gleich groß, so bilden g und h einen Streifen.**

Auch die Umkehrungen der Sätze 7 und 8 können als Kriterien für die Parallelität zweier Geraden dienen.
Im Bild C 18 sind die Winkelpaare α und β_1 bzw. α und β_2 verschieden große Wechselwinkel. Treten an geschnittenen Geraden gleich große Wechselwinkel auf, so liegen die Geraden parallel.

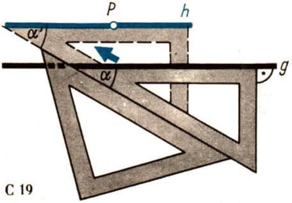
10 **SATZ: Sind α und β Wechselwinkel an geschnittenen Geraden g und h und sind α und β gleich groß, so bilden g und h einen Streifen.**

● Stelle ein entsprechendes Kriterium für die Parallelität zweier Geraden unter Verwendung von entgegengesetzt liegenden Winkeln auf!

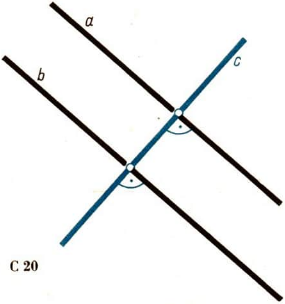
8

Parallelen und Senkrechten können mit Hilfe von zwei Zeichendreiecken gezeichnet werden. Im Bild C 19 wird gezeigt, wie man zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P die Parallele zeichnet.

● Begründe das Verfahren im Bild C 19!



C 19



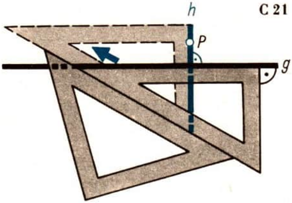
C 20

11 **Zu einer Geraden g gibt es durch einen Punkt P genau eine Gerade h, die parallel zur Geraden g verläuft.**

Stehen zwei Geraden a und b auf einer dritten Geraden c senkrecht, so sind a und b parallel (Bild C 20). Diesen Sachverhalt nutzen wir aus, um zu einer gegebenen Geraden g mit Hilfe von zwei Zeichendreiecken eine Senkrechte h zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt P gehen soll. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: P liegt auf g.
Zweiter Fall: P liegt nicht auf g.
In beiden Fällen kann man entsprechend Bild C 21 verfahren.

C 21



● Zeichne durch P eine Senkrechte zu g! Wähle den Punkt P so, daß **a)** P auf g liegt und **b)** P nicht auf g liegt!

12 **SATZ: Zu einer Geraden g gibt es durch einen Punkt P genau eine Gerade h, die senkrecht auf g steht.**

Aufgaben c 45 bis 48

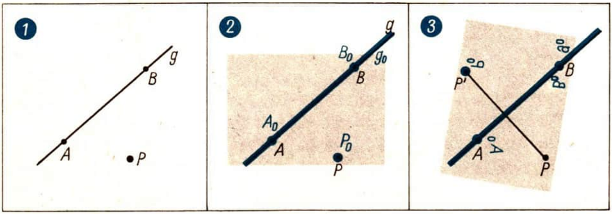
Spiegelungen an einer Geraden

9

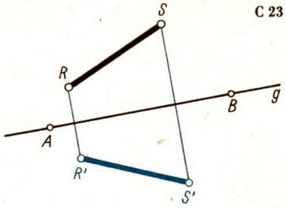
Das Bild C 22 veranschaulicht eine Spiegelung mit Hilfe von Transparentpapier. Dabei ist der Punkt P' das Bild eines Punktes P bei einer Spiegelung an einer Geraden g.

Wir zeichnen in der Zeichenebene einen Punkt P und eine Gerade g, die nicht durch P geht. Auf g wählen wir zwei Punkte A und B. Die Gerade g und die Punkte A, B und P übertragen wir durch Pausen auf Transparentpapier und bezeichnen dort die Gerade mit g_0 und die Punkte mit A_0, B_0 bzw. P_0. Wir wenden das Transparentpapier um und bringen einerseits die Punkte A und A_0 und

C 22



andererseits die Punkte B und B_0 zur Deckung. Dann decken sich auch g und g_0. Den Punkt P_0 stechen wir mit der Zirkelspitze durch und erhalten auf dem Zeichenblatt den Punkt P'.



C 23

Die Gerade g nennen wir **Spiegelungsachse** oder **Symmetrieachse**.

Die Punkte P und P' liegen bezüglich der Geraden g **symmetrisch** oder **spiegelbildlich** zueinander; P und P' sind *entsprechende Punkte* bei der Spiegelung. Im Bild C 23 wurde mit Hilfe von Transparentpapier eine Strecke $\overline{RS}$ an einer Geraden g gespiegelt. Dazu wurden die Spiegelbilder R' bzw. S' der Punkte R bzw. S ermittelt.

Die Strecke $\overline{R'S'}$ ist das Spiegelbild der Strecke $\overline{RS}$ bezüglich der Geraden g.

13 **SATZ: Strecken, die durch eine Spiegelung an einer Geraden auseinander hervorgehen, sind kongruent.**

C

10

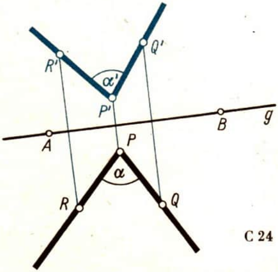
Wir können beliebige Strecken, Winkel usw. an einer Geraden spiegeln, indem wir die Spiegelbilder einzelner Punkte der betreffenden Figur bestimmen.

Ein Winkel α soll an einer Geraden g gespiegelt werden. Die Gerade g soll nur äußere Punkte des Winkels enthalten (Bild C 24).

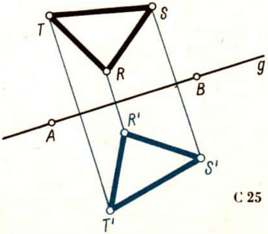
Der Winkel α ist durch die Punkte Q, P und R festgelegt. Wir bestimmen mit Hilfe von Transparentpapier die Spiegelbilder Q', P' bzw. R' dieser Punkte. Der Winkel α' ist das Spiegelbild des Winkels α; α und α' liegen bezüglich der Geraden g symmetrisch.

Wenn wir den Winkel α mit seinem Spiegelbild α' vergleichen, so stellen wir fest, daß die beiden entsprechenden Winkel gleich groß sind.

14 **SATZ: Zwei Winkel, die bei einer Spiegelung an einer Geraden g einander entsprechen, sind kongruent.**



C 24



C 25

Ein Dreieck RST soll mit Hilfe von Transparentpapier an einer Geraden g gespiegelt werden (Bild C 25). Die Gerade g soll nur äußere Punkte des Dreiecks enthalten.
Wir bestimmen die Spiegelbilder R', S' bzw. T' der Punkte R, S bzw. T mit Hilfe von Transparentpapier.
Das Dreieck $R'S'T'$ ist das Spiegelbild des Dreiecks RST. Die Dreiecke RST und $R'S'T'$ liegen bezüglich g symmetrisch.

In der folgenden Tabelle sind entsprechende Punkte, Seiten und Winkel der beiden Dreiecke RST und $R'S'T'$ (Bild C 25) zusammengestellt.

	Punkte			Seiten			Winkel		
$\triangle RST$	R	S	T	$\overline{RS}$	$\overline{ST}$	$\overline{TR}$	$\sphericalangle TRS$	$\sphericalangle RST$	$\sphericalangle STR$
$\triangle R'S'T'$	R'	S'	T'	$\overline{R'S'}$	$\overline{S'T'}$	$\overline{T'R'}$	$\sphericalangle T'R'S'$	$\sphericalangle R'S'T'$	$\sphericalangle S'T'R'$

Vergleiche im Bild C 25 entsprechende Seiten und Winkel!

Neben Spiegelungen an einer Geraden gibt es noch Spiegelungen an einem Punkt und Spiegelungen an einer Ebene.

C

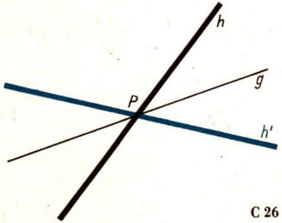
Spiegelbilder von Geraden

11

Wird eine Gerade h an einer Geraden g gespiegelt, so ist das Spiegelbild h' wieder eine Gerade, die aber im allgemeinen von der Geraden h verschieden ist (Bild C 26). Wenn P der Schnittpunkt von h und g ist, so ist das Bild von P der Punkt P selbst.

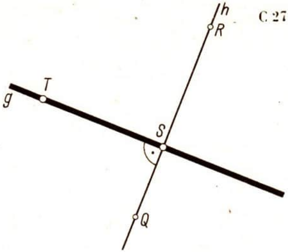
Zeichne eine Gerade h, die senkrecht auf einer Geraden g steht, und spiegle die Gerade h an der Geraden g!

15 **SATZ: Wenn eine Gerade h auf einer Geraden g senkrecht steht und an g gespiegelt wird, so geht die Gerade h in sich selbst über.**



C 26

Der Satz folgt aus folgender Überlegung (Bild C 27): Zwei Geraden, g und h, stehen senkrecht aufeinander, ihr Schnittpunkt sei S. Ferner seien Q und R Punkte der Geraden h auf verschiedenen Seiten von S. Auf g liege ein Punkt T. Die Punkte S und T bleiben bei der Spiegelung fest. Das Bild des rechten Winkels QST hat mit dem Original einen gemeinsamen Schenkel. Würde das Bild von Q nicht auf h liegen, wäre das Spiegelbild des rechten Winkels kein rechter Winkel. Das wäre ein Widerspruch. Entsprechende Überlegungen können wir für den rechten Winkel RST anstellen. Da die Bilder von Q und R auf h liegen müssen, geht h bei einer Spiegelung an g in sich selbst über.



C 27

Auch die Umkehrung des Satzes gilt:

16 **SATZ: Wenn eine Gerade h bei einer Spiegelung an einer Geraden g in sich selbst übergeht, so steht h senkrecht auf g.**

C

Dieser Satz folgt aus folgender Überlegung: Zwei Geraden, g und h, schneiden einander und bilden die Nebenwinkel α und β mit dem gemeinsamen Schenkel auf g. Geht h bei einer Spiegelung an g in sich selbst über, so entsprechen α und β einander bei dieser Spiegelung. Dann müssen sie kongruent sein. Kongruente Nebenwinkel sind aber rechte Winkel. Wir können die letzten beiden Sätze zu einem Satz zusammenfassen:

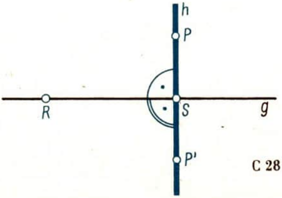
17 **SATZ: Eine Gerade h geht genau dann bei einer Spiegelung an einer Geraden g in sich selbst über, wenn sie senkrecht auf g steht.**

Die Verbindungsgerade eines Punktes P und seines Bildes P' geht bei einer Spiegelung an g in sich selbst über. Aus Satz C 17 folgt:

18 **SATZ: Die Verbindungsgerade zweier Punkte, die bezüglich einer Geraden g symmetrisch liegen, steht senkrecht auf g.**

12

Liegen zwei Punkte P und P' symmetrisch bezüglich einer Geraden g und ist S der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden beider Punkte mit der Symmetrieachse, so sind die Strecken $\overline{PS}$ und $\overline{P'S}$ Spiegelbilder bezüglich g (Bild C 28). Nach Satz C 13 sind dann die beiden Strecken $\overline{PS}$ und $\overline{P'S}$ gleich lang.



C 28

19 **DEFINITION: Steht eine Gerade *h* senkrecht auf einer Geraden *g* und ist *S* der Schnittpunkt der beiden Geraden und *P* ein beliebiger Punkt von *h*, so nennen wir die Länge der Strecke $\overline{PS}$ den *Abstand* des Punktes *P* von der Geraden *g*.**

Die Gerade *PS* nennen wir dann auch das **Lot** von *P* auf die Gerade *g* und den Punkt *S* den **Fußpunkt** des Lotes.

● Definiere entsprechend den Abstand eines inneren Punktes *P* eines Winkels von einem seiner Schenkel!

ZUSAMMENFASSUNG:

Spiegelungen an einer Geraden sind spezielle Abbildungen. Ist F' das Bild einer Figur F, so sagen wir, F und F' liegen bezüglich g symmetrisch. Entsprechende Strecken sind gleich lang, entsprechende Winkel gleich groß.
Liegen zwei Punkte P und P' symmetrisch bezüglich einer Geraden g, so sind die Abstände der Punkte P und P' von g gleich groß.

Axiale Symmetrie

Bestimmung von Spiegelbildern mit Hilfe von Zirkel und Lineal

13

Spiegelbilder von Punkten, Strecken, Winkeln und anderen Figuren können mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden.

■ Das Spiegelbild eines Punktes *P* bezüglich einer Geraden *g* soll mit Hilfe von Zirkel und Lineal bestimmt werden (Bild C 28).
Wir konstruieren die Senkrechte zu *g* durch den Punkt *P* und erhalten *S*.

Von *S* aus tragen wir mit Hilfe des Zirkels die Strecke $\overline{PS}$ auf demjenigen Strahl der Senkrechten zu *g* ab, der *P* nicht enthält. Wir erhalten so den Punkt P', der zu *P* bezüglich *g* symmetrisch liegt.

● Ermittle das Spiegelbild eines Dreiecks *PQS* bezüglich einer Geraden *g* mit Hilfe von Zirkel und Lineal!

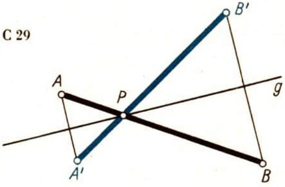
Axialsymmetrische Figuren

14

Wir können die Spiegelungsachse so legen, daß sie mit der zu spiegelnden Figur gemeinsame Punkte hat.

Die Strecke $\overline{AB}$ im Bild C 29 wird von einer Geraden g in einem inneren Punkte P geschnitten. Die Strecke $\overline{AB}$ soll an g gespiegelt werden.

C 29

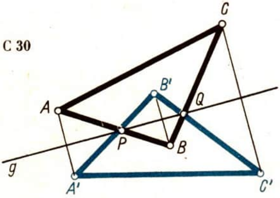


Bei der Spiegelung ist das Bild von P der Punkt P selbst. Die Punkte A' bzw. B' sind die Bilder der Punkte A bzw. B. Die Strecke $\overline{A'B'}$ ist das Bild der Strecke $\overline{AB}$.

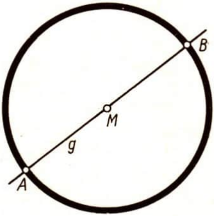
Ermittle das Spiegelbild eines Dreiecks ABC bezüglich einer Geraden g, wenn die Gerade g das Dreieck in den Randpunkten P und Q schneidet (Bild C 30)!

C

C 30



C 31



Es kann vorkommen, daß eine Figur bei einer Spiegelung an einer Geraden in sich selbst übergeht.

Ein Kreis soll an einer Geraden g gespiegelt werden, die durch seinen Mittelpunkt geht (Bild C 31).
Der Mittelpunkt M bleibt bei der Spiegelung an der Geraden g fest. Da A und B auf der Spiegelungsachse liegen und deshalb fest bleiben, ist der Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises auch Durchmesser des Bildes. Der Kreis mit dem Mittelpunkt M geht daher bei einer Spiegelung an der Geraden g in sich selbst über.

Zeichne ein Quadrat $ABCD$ und spiegele das Quadrat an der Geraden BD!

20 **DEFINITION: Eine Figur F heißt *axialsymmetrisch*, wenn es mindestens eine Gerade g gibt, so daß bei Spiegelung an g die Figur in sich übergeht. Eine solche Gerade g heißt dann *Symmetrieachse* der betreffenden Figur.**

Untersuche alle dir bekannten ebenen Figuren auf axiale Symmetrie! Gib alle eventuell vorhandenen Symmetrieachsen an! Gib insbesondere die Symmetrieachsen **a)** einer Strecke und **b)** eines Winkels an!

Aufgaben c 49 bis 67

15

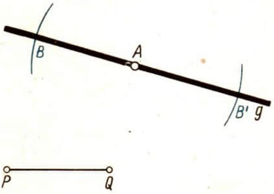
Unter einer geometrischen Konstruktion verstehen wir die Bestimmung von Punkten aus gegebenen Punkten. Alle geometrischen Konstruktionen, die mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausgeführt werden, setzen sich dabei aus zwei *Grundaufgaben* zusammen.

I. Durch zwei gegebene Punkte ist die Gerade zu legen.

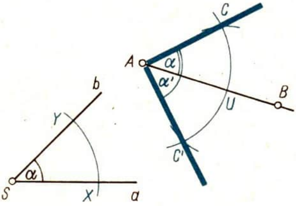
II. Um einen gegebenen Punkt ist der Kreis zu zeichnen, der als Radius die Entfernung zweier gegebener Punkte hat.

■ Eine gegebene Strecke $\overline{PQ}$ soll auf der Geraden g von A aus abgetragen werden (Bild C 32).

Ein Kreis um A mit dem Radius $\overline{PQ}$ schneidet die Gerade g in zwei Punkten B und B' (Grundaufgabe II). Die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AB'}$ sind kongruent. $\overline{AB}$ oder $\overline{AB'}$ ist das Ergebnis der Konstruktion.



C 32



C 33

■ Ein gegebener Winkel α mit dem Scheitel S soll im Punkte A an den gegebenen Strahl AB angetragen werden (Bild C 33).

Wir zeichnen um S und A je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius. Der Kreis um S schneidet den Strahl a im Punkte X und den Strahl b in Y. Der Kreisbogen um A schneidet den Strahl AB im Punkt U. Um U zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius $\overline{XY}$, der den Kreisbogen um A in den Punkten C und C' schneidet. Die beiden Winkel BAC und $C'AB$ sind kongruent, denn sie können durch eine Spiegelung an AB ineinander überführt werden. $\sphericalangle\, BAC$ oder $\sphericalangle\, C'AB$ ist das Ergebnis der Konstruktion.

● Konstruiere zu einer gegebenen Geraden AB durch einen gegebenen Punkt P die Parallele, indem du nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal arbeitest! Anleitung: Lege durch den Punkt P eine Gerade, die die gegebene Gerade AB schneidet! Wende nun den Satz über die Stufenwinkel an einem geschnittenen Streifen an!

Die Konstruktionen, die in den Lerneinheiten C 16 bis 18 erläutert werden, nennen wir **geometrische Grundkonstruktionen**.

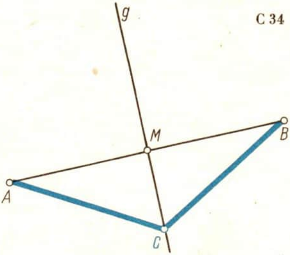
Ein innerer Punkt M einer Strecke $\overline{AB}$ heißt **Mittelpunkt** der Strecke, wenn $\overline{AM} = \overline{BM}$ gilt. Da es nur einen Punkt M gibt, der diese Bedingung erfüllt, sprechen wir von *dem* Mittelpunkt einer Strecke.

Ist M der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ und wird in M die Senkrechte g auf $\overline{AB}$ errichtet, so nennt man g die **Mittelsenkrechte** der Strecke $\overline{AB}$.

Aus dieser Erklärung folgt, daß die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ Symmetrieachse dieser Strecke $\overline{AB}$ ist.

Ist die Gerade g Mittelsenkrechte und damit Symmetrieachse der Strecke $\overline{AB}$, so ist jeder Punkt von g von den Punkten A und B gleich weit entfernt (Bild C 34). Spiegeln wir nämlich die Strecke $\overline{AC}$ an der Geraden g, so ist das Spiegelbild von $\overline{AC}$ die Strecke $\overline{BC}$ (B entspricht A').

C 34



C

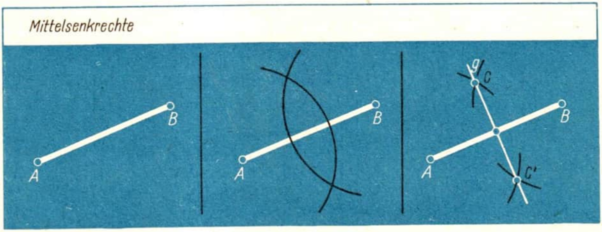
21 **SATZ: Jeder Punkt C der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ ist von den Endpunkten A und B der Strecke gleich weit entfernt.**

(Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$, wenn C ein Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist. Liegt C nicht auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$, so gilt: $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.)

Den Satz 21 verwenden wir zur Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$.

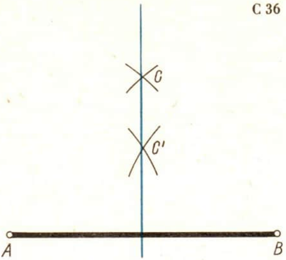
Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist zu konstruieren (Bild C 35).
Wir müssen zwei Punkte C und C' der Mittelsenkrechten bestimmen. Der Punkt C liegt auf einem Kreis um A und auf einem Kreis um B. Beide Kreise müssen gleiche Radien haben. Der Radius beider Kreise muß größer als $\overline{AM}$ sein. Da M noch nicht bekannt ist, muß der Radius der beiden Kreise nach Augenmaß gewählt werden. Für den Punkt C' gelten die gleichen Bedingungen.

C 35



Konstruktionsbeschreibung: Wir zeichnen um die Endpunkte der Strecke $\overline{AB}$ je einen Kreis mit gleichem Radius, der größer als die halbe Strecke sein muß. Die beiden Kreise schneiden einander in den Punkten C und C'. Die Gerade CC' ist die gesuchte Mittelsenkrechte.

C 36



Das Bild C 36 veranschaulicht eine weitere Möglichkeit, die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren.

Mit Hilfe der Konstruktion der Mittelsenkrechten kann man auch den Mittelpunkt einer Strecke finden, d. h. eine Strecke halbieren.

Der Mittelpunkt einer Strecke liegt erstens auf der Strecke $\overline{AB}$ und zweitens auf der Mittelsenkrechten. Da die Strecke $\overline{AB}$ gegeben ist, muß also die Mittelsenkrechte konstruiert werden. Diese Konstruktion haben wir bereits erläutert.

C

17

Bei der Konstruktion der Senkrechten zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt P liegt auf der Geraden g. In diesem Fall lautet die Konstruktionsaufgabe:

Im Punkte P der Geraden g ist die Senkrechte zu errichten.

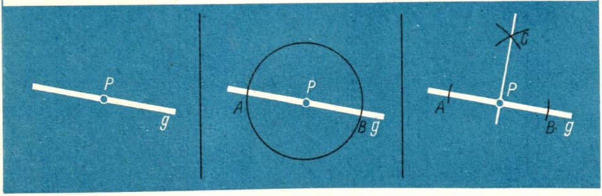
Fall 2: Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g. In diesem Fall lautet die Konstruktionsaufgabe: Vom Punkte P ist auf die Gerade g das Lot zu fällen.

Im *Fall 1* wird die Aufgabe auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke zurückgeführt (Bild C 37). Wir zeichnen um P einen beliebigen Kreis, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet. Der Punkt P ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Danach ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ zu konstruieren. Diese Aufgabe haben wir bereits erläutert.

C 37

Senkrechte zu g in P

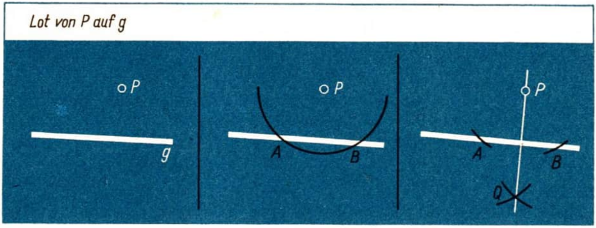


Da der Punkt P auf der Mittelsenkrechten liegt, genügt es, einen weiteren Punkt C der Mittelsenkrechten zu bestimmen.

Konstruktionsbeschreibung: Wir zeichnen um P einen Kreis. Seine Schnittpunkte mit g nennen wir A bzw. B. Mit einem Radius, der größer als $\overline{AP}$ sein muß, zeichnen wir je einen Kreisbogen um A und um B. Den einen der Schnittpunkte nennen wir C. Die Gerade PC ist die gesuchte Senkrechte.

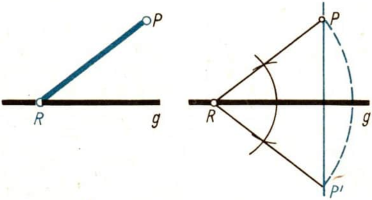
Im *Fall 2* verfahren wir folgendermaßen (Bild C 38): Das Lot ist durch zwei Punkte bestimmt. Da P ein Punkt des Lotes ist, genügt es, einen weiteren Punkt Q zu ermitteln. Das gesuchte Lot ist Symmetrieachse der Geraden g, denn g geht bei einer Spiegelung an einer Senkrechten in sich selbst über. Wir bestimmen deshalb auf g zwei Punkte, die bezüglich des gesuchten Lotes symmetrisch liegen. Dazu zeichnen wir um P einen Kreis mit einem Radius, der größer sein muß als der Abstand des Punktes P von g. Die Schnittpunkte des Kreises mit g seien die Punkte A und B, die durch Spiegelung an dem gesuchten Lot auseinander hervorgehen. Damit haben wir die Aufgabe wieder auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke zurückgeführt. Von dieser Mittelsenkrechten benötigen wir noch einen Punkt.

C 38

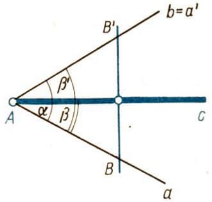


Konstruktionsbeschreibung: Wir zeichnen um P einen Kreis, der die Gerade g schneidet, A und B seien die Schnittpunkte des Kreises mit g. Um A und B zeichnen wir je einen Kreisbogen. Beide Radien müssen gleich lang und dabei größer als die halbe Strecke $\overline{AB}$ sein. Beide Kreisbögen schneiden einander in Q. Die Gerade PQ ist das gesuchte Lot.

Im Bild C 39 wird eine weitere Möglichkeit für die Konstruktion des Lotes von P auf eine Gerade g gezeigt. Begründe diese Konstruktion!



C 39



C 40

Wenn wir die Symmetrieachse eines Winkels α konstruieren, so zerlegen wir den Winkel α in zwei gleich große Winkel β und β′ (Bild C 40). Die Symmetrieachse eines Winkels halbiert also den Winkel, wir nennen sie deshalb in diesem Fall auch **Winkelhalbierende**. Wenn wir nun in einem beliebigen Punkte der Winkelhalbierenden die Senkrechte errichten, so schneidet sie die Schenkel des Winkels in den Punkten B und B'. Da die Winkelhalbierende c Symmetrieachse des Winkels ist, liegen B und B' bezüglich c symmetrisch. Die Winkelhalbierende ist demnach Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BB'}$. Diesen Sachverhalt nutzen wir aus, um die Winkelhalbierende zu konstruieren.

Die Winkelhalbierende eines Winkels α ist zu konstruieren (Bild C 41).

■ Die Winkelhalbierende c des Winkels α geht durch den Scheitel A des Winkels. Um einen weiteren Punkt von c zu finden, wählen wir auf den Schenkeln des Winkels zwei Punkte B und B', die bezüglich der gesuchten Winkelhalbierenden symmetrisch liegen.

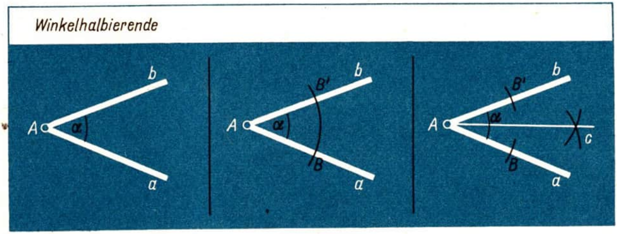
Die Punkte B und B' liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden, wenn $\overline{AB} = \overline{AB'}$ gilt. Ist der Punkt C ein Punkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BB'}$, so ist AC die gesuchte Winkelhalbierende.

Konstruktionsbeschreibung: Um den Scheitel A des gegebenen Winkels zeichnen wir einen Kreis, der die Schenkel in B und B' schneidet. Um den Punkt B zeichnen wir einen Kreisbogen mit einem Radius, der größer als die halbe Strecke $\overline{BB'}$ sein muß.

Mit dem gleichen Radius zeichnen wir einen Kreisbogen um B'. Beide Kreisbögen schneiden einander in C. Der Strahl AC ist die gesuchte Winkelhalbierende.

● Konstruiere die Winkelhalbierende eines Winkels α! Bestimme dann den Abstand beliebiger Punkte R, S und T der Winkelhalbierenden von den Schenkeln! Bestimme weiter den Abstand beliebiger innerer Punkte U und V, die nicht auf der Winkelhalbierenden liegen, von den Schenkeln! Formuliere das Ergebnis!

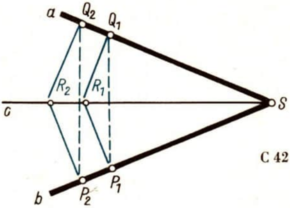
C 41



22 **SATZ: Ein beliebiger Punkt R ist dann und nur dann Punkt der Winkelhalbierenden eines beliebigen Winkels α, wenn er von den Schenkeln a und b gleichen Abstand hat.**

Dieser Satz ergibt sich aus der Überlegung, daß die Fußpunkte der Lote von R auf die Schenkel Spiegelbilder bezüglich der Winkelhalbierenden sind (Bild C 42).

Aufgaben c 68 bis 74



C 42

Anwendungen der Grundkonstruktionen

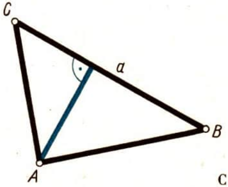
19

Drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, nennen wir zusammen mit ihren Verbindungsstrecken ein **Dreieck**.

23 **DEFINITION: Wird von einem Eckpunkt P eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite oder auf die Verlängerung dieser Seite das Lot gefällt und ist Q der Schnittpunkt des Lotes mit der Seite oder deren Verlängerung, so heißt die Strecke $\overline{PQ}$ eine *Höhe des Dreiecks*. Q nennt man den Fußpunkt der Höhe.**

■ Im Bild C 43 ist die Höhe des Dreiecks ABC bezüglich der Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks angegeben.

● Konstruiere in einem Dreieck ABC alle drei Höhen!



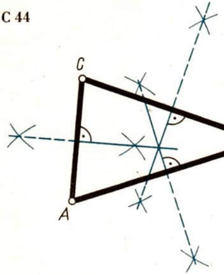
C 43

20

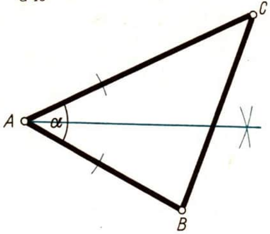
Jede Dreiecksseite besitzt einen Mittelpunkt. Verbindet man den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks, so erhält man eine Seitenhalbierende im Dreieck.

24 **DEFINITION: Die Verbindungsstrecke eines Eckpunktes P eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt M der gegenüberliegenden Seite heißt *Seitenhalbierende*.**

C 44



C 45



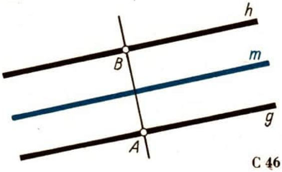
● Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere die Seitenhalbierende der Seite $\overline{AC}$!

Im Bild C 44 sind die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC angegeben.
● Erkläre, was du unter den Mittelsenkrechten eines Dreiecks verstehst!

In dem Dreieck ABC im Bild C 45 ist die Winkelhalbierende des Winkels α eingezeichnet.
● Erkläre, was du unter den Winkelhalbierenden eines Dreiecks verstehst!

25 **DEFINITION: Eine Gerade m, deren Punkte von den beiden Geraden g und h eines Streifens gleichen Abstand haben, nennen wir *Mittelparallele* oder *Mittellinie* des Streifens.**

■ Die Mittelparallele eines Streifens ist zu konstruieren (Bild C 46).
Dazu konstruieren wir eine Gerade, die senkrecht auf dem Streifen steht. Die Senkrechte schneidet den Streifen in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist die gesuchte Mittelparallele. Die Mittelparallele eines Streifens ist Symmetrieachse des Streifens.



C 46

Konstruktionsbeschreibung: Wir zeichnen einen Streifen und konstruieren in einem Punkte A der einen Parallelen eine Senkrechte. Die Senkrechte schneide die andere Parallele in B. Dann konstruieren wir die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Aufgaben c 75 bis 82

D. Planimetrie

Dreiecke

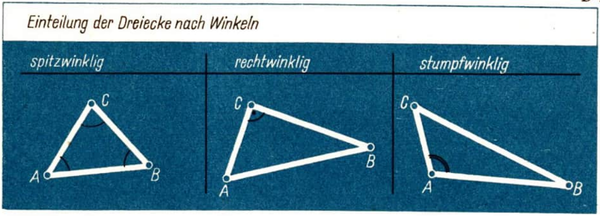
1

Dreiecke können nach ihren Winkeln eingeteilt werden (Bild D 1).

Wir nennen ein Dreieck **spitzwinklig**, wenn alle Winkel des Dreiecks spitz sind.

Wir nennen ein Dreieck **rechtwinklig**, wenn das Dreieck einen rechten Winkel besitzt. Wir nennen ein Dreieck **stumpfwinklig**, wenn das Dreieck einen stumpfen Winkel hat.

D 1

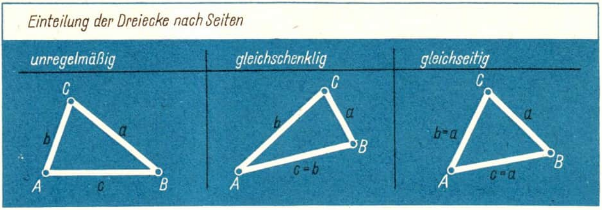


Dreiecke können auch nach den Seiten eingeteilt werden (Bild D 2).

Wir nennen ein Dreieck **unregelmäßig**, wenn die Seiten paarweise verschieden sind.

Wir nennen ein Dreieck **gleichschenklig**, wenn es zwei gleich lange Seiten hat.

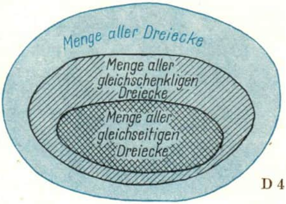
Wir nennen ein Dreieck **gleichseitig**, wenn alle Seiten gleich lang sind.



D 2

D 3

Das Bild D 3 zeigt die Einteilung der Menge aller Dreiecke nach den Winkeln, das Bild D 4 die Einteilung nach den Seiten.



D 4

Zeichne verschiedene Dreiecke! Bilde in diesen Dreiecken jeweils die Summe aus zwei Seiten[1] und vergleiche sie mit der Länge der dritten Seite!

D

1 **SATZ: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.**

Die in diesem Satz angegebene Beziehung zwischen den Seiten eines Dreiecks bezeichnen wir auch als die **Dreiecksungleichung.**
Sind a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks, so gelten die Ungleichungen:

$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a.$

Den Satz D 1 haben wir auf Grund von Beispielen vermutet. Um nachzuweisen, daß der Satz für alle Dreiecke wahr ist, müssen wir einen Beweis führen. Bei einem Beweis müssen wir uns überlegen, was wir voraussetzen dürfen.
Beweis: Ist ABC ein Dreieck, dann liegen die drei Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden. Die kürzeste Entfernung zweier Punkte ist die Länge ihrer Verbindungsstrecke. Die Verbindung zweier Punkte des Dreiecks durch einen Streckenzug über den dritten Punkt ist nicht die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte. Daraus folgt, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die dritte Seite (Bild D 5).

Aufgaben d 1 bis 11

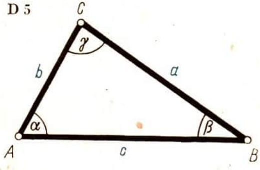
[1] Unter der Summe zweier Seiten wollen wir die Summe der Maßzahlen der Seiten verstehen, wobei die Längen beider Seiten mit derselben Maßeinheit angegeben sind.

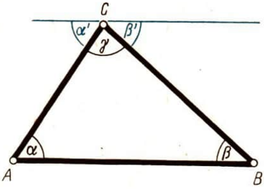
Winkel eines Dreiecks

2

- Zeichne verschiedene Dreiecke, miß die Winkel der Dreiecke (Bild D 5) und bilde jeweils die Summe der Winkel in einem Dreieck!
Zu welcher Vermutung gelangst du?

2 **SATZ: Die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt 180°.**

D 5


D 6


- Löse zur Vorbereitung des Beweises die folgenden Aufgaben!

a) Konstruiere ein Dreieck und trage in C an den Strahl CA entsprechend Bild D 6 den Winkel α an!

b) Trage in C an den Strahl CB den Winkel β an!

Die beiden Strahlen, die nach diesen Aufgaben **a)** und **b)** konstruiert wurden, liegen beide auf der Parallelen zu AB durch C.

Beweis: Ist ABC ein Dreieck, so konstruieren wir die Parallele zu AB durch den Punkt C (Bild D 6). Die Winkel α', γ und β' betragen zusammen 180°. Es gilt:

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$.

Da $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ (als Wechselwinkel an einem geschnittenen Streifen), können α' durch α und β' durch β ersetzt werden. Wir erhalten:

$\alpha + \gamma + \beta = 180°$.

Sind zwei Winkel eines Dreiecks bekannt, kann man stets den dritten Winkel auf Grund des Satzes D 2 ermitteln.

Aus dem Satz D 2 folgt, daß ein stumpfwinkliges bzw. ein rechtwinkliges Dreieck nur einen stumpfen bzw. einen rechten Winkel haben kann.

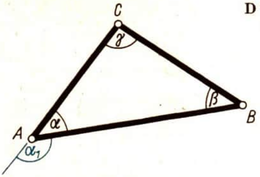
- Begründe diese Folgerung!

3

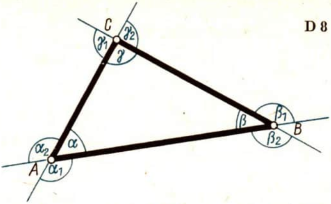
Wird ein Schenkel eines Dreieckswinkels über den Scheitel hinaus verlängert, so nennt man den entstehenden Nebenwinkel einen **Außenwinkel** des Dreiecks. Im Bild D 7 ist α_1 *ein* Außenwinkel in A.

Die Winkel α, β und γ des Dreiecks wollen wir künftig zur Unterscheidung von den Außenwinkeln **Innenwinkel** nennen.

D



D 7



D 8

Zu jedem Innenwinkel gehören *zwei* Außenwinkel (Bild D 8), die als Scheitelwinkel kongruent sind. Wenn wir zu einem Innenwinkel *einen* zugehörigen Außenwinkel suchen, ist es gleichgültig, welchen Nebenwinkel des betreffenden Innenwinkels wir betrachten.
Wenn wir drei Außenwinkel eines Dreiecks untersuchen, so sind Außenwinkel gemeint, die zu verschiedenen Innenwinkeln gehören.
Ein Innenwinkel und einer der zugehörigen Außenwinkel eines Dreiecks betragen zusammen 180°.
Für die Winkel α und α_1 gilt also:

$\alpha + \alpha_1 = 180°$.

Andererseits gilt:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Wir vergleichen die beiden Beziehungen und erkennen, daß gilt:

$\alpha_1 = \beta + \gamma$.

3 **SATZ: Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.**

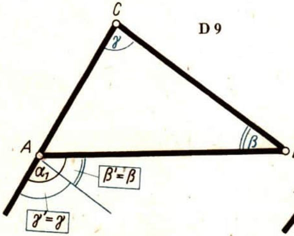
D

● Führe an Hand von Bild D 9 einen Beweis für diesen Satz!

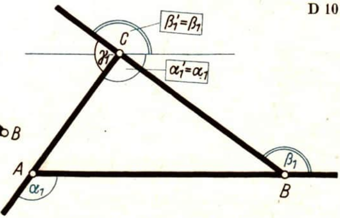
Aus Satz D 3 ergibt sich die Folgerung, daß ein Außenwinkel stets größer ist als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

● Zeichne ein Dreieck und kennzeichne die Außenwinkel α_1, β_1 und γ_1! Konstruiere entsprechend Bild D 10 die Parallele zu AB durch den Punkt C und begründe den folgenden Satz D 4!

4 **SATZ: Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.**



D 9



D 10

Gleichschenklige Dreiecke

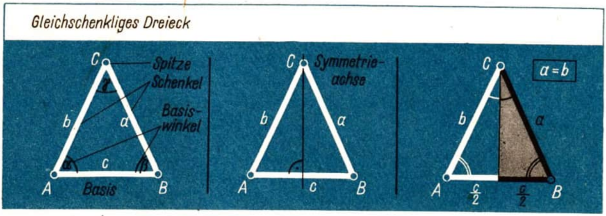
4

Das Bild D 11 zeigt ein gleichschenkliges Dreieck.

5 **SATZ: Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.**

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich daraus, daß der Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks, der der Basis gegenüberliegt, auf der Mittelsenkrechten der Basis liegt.
Aus der Symmetrie gleichschenkliger Dreiecke ergeben sich weitere wichtige Sätze für die Seiten und Winkel von gleichschenkligen Dreiecken.

6 **SATZ: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß.**



D 11

Beweis: Wird ein gleichschenkliges Dreieck ABC an der Mittelsenkrechten seiner Basis gespiegelt, so entsprechen die Basiswinkel einander (Bild D 11). Daraus folgt, daß sie gleich groß sind.

● Wie groß sind die Basiswinkel in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck?

Da die beiden Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks den beiden gleich langen Schenkeln gegenüberliegen, gilt folgender Satz:

7 **SATZ: Zwei gleich langen Seiten eines Dreiecks liegen gleich große Winkel gegenüber und umgekehrt.**

5

Werden in einem Dreieck ABC die Seiten und die Winkel verglichen und ordnet man die Seiten und die Winkel nach ihrer Größe, so gelangt man zu der Vermutung, daß der größten Seite der größte Winkel gegenüberliegt.

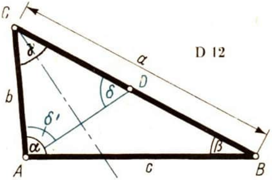
Um diese Vermutung zu bestätigen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

8 **SATZ: Liegt in einem Dreieck der Seite a der Winkel α und der Seite b der Winkel β gegenüber, so gilt:**
Wenn a größer ist als b, so ist auch α größer als β.

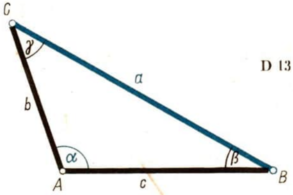
Beweis (Bild D 12): In einem Dreieck ABC sei a größer als die Seite b. Wir spiegeln die Seite $\overline{AC}$ an der Winkelhalbierenden des Winkels γ. Der Bildpunkt D des Punktes A ist ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$. Das Dreieck ADC ist gleichschenklig. Der Basiswinkel δ bei D ist Außenwinkel des Dreiecks ABD. Deshalb ist δ größer als β. Da δ gleich dem Winkel DAC und der Winkel α größer als $\sphericalangle\, DAC$ ist, ergibt sich, daß α größer als β ist.

Aus	$\sphericalangle\, \alpha$	größer als	$\sphericalangle\, DAC$ und
	$\sphericalangle\, DAC$	gleich	$\sphericalangle\, \delta$ und
	$\sphericalangle\, \delta$	größer als	$\sphericalangle\, \beta$
folgt	$\sphericalangle\, \alpha$	größer als	$\sphericalangle\, \beta$

Damit läßt sich die am Anfang dieser Lerneinheit geäußerte Vermutung bestätigen.



D 12



D 13

9 **SATZ: In jedem Dreieck liegt der größten Seite stets der größte Winkel des Dreiecks gegenüber.**

Beweis: Es sei a die größte Seite eines Dreiecks ABC (Bild D 13). Da a größer als b sein soll, ist $\sphericalangle\, \alpha$ größer als $\sphericalangle\, \beta$. Da a größer als c sein soll, ist $\sphericalangle\, \alpha$ größer als $\sphericalangle\, \gamma$. Also ist α der größte Winkel im Dreieck ABC.

D

Gleichseitige Dreiecke

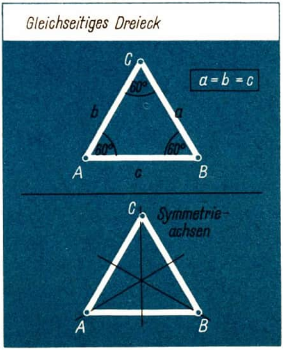
6

Im gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Innenwinkel 60° (Bild D 14). Diese Aussage kann man folgendermaßen gewinnen:

Alle Seiten des Dreiecks sind gleich lang. Ihnen liegen nach Satz D 7 gleich große Winkel gegenüber. Auf Grund des Satzes D 2 entfallen demnach auf jeden Winkel 60°.

- Wie groß ist ein Außenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks?
- Konstruiere einen Winkel von 60° ohne Verwendung eines Winkelmessers!
- Begründe, daß jedes gleichseitige Dreieck drei Symmetrieachsen hat!

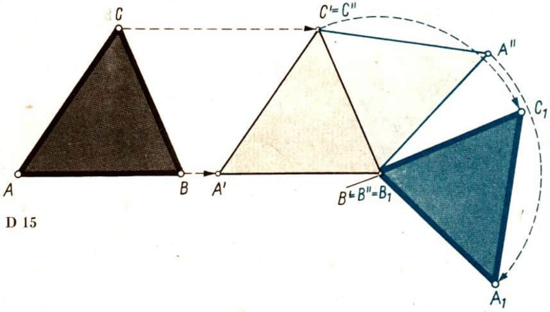
Aufgaben d 12 bis 31



D 14

Wir haben aus der Menge aller Bewegungen drei Klassen kennengelernt: *Verschiebungen in Richtung einer Geraden, Drehungen um einen Punkt* und *Spiegelungen an einer Geraden.*
Bewegungen können miteinander verknüpft werden, indem sie nacheinander ausgeführt werden. Das Ergebnis der Verknüpfung von Bewegungen ist wieder eine Bewegung.

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ im Bild D 15 sind *Original* und *Bild* bei einer Bewegung, die sich aus einer Verschiebung, einer Spiegelung und einer Drehung zusammensetzt.



D 15

Das Dreieck $A'B'C'$ ist Bild von ABC bei einer Verschiebung in Richtung der Geraden AB.
Das Dreieck $A''B''C''$ ist Bild von $A'B'C'$ bei einer Spiegelung an der Geraden $B'C'$.
Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist Bild von $A''B''C''$ bei einer Drehung um den Punkt B''.

Führe mit Hilfe von Transparentpapier folgende Bewegung eines Dreiecks ABC aus[1]:
Spiegele das Dreieck ABC an der Geraden AB!
Verschiebe das Bild in Richtung der Geraden AB so, daß der Punkt A'' und der Punkt B nach der Verschiebung zusammenfallen!
Drehe schließlich das Dreieck $A''B''C''$ um den Punkt C'' mit einem beliebigen Drehwinkel!
Gib in der Zeichenebene nur das Dreieck ABC und das Bild $A_1B_1C_1$ des Dreiecks ABC bei dieser Bewegung an!

Sind die Figuren F_1 und F_2 Original und Bild bei einer Bewegung, so sagen wir, daß F_1 und F_2 einander entsprechen.

[1] Die folgenden Bezeichnungen entsprechen der Bezeichnungsweise im Bild D 15.

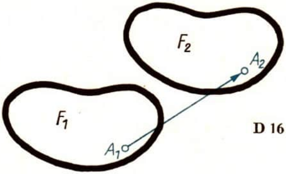
D

10 **DEFINITION: Wenn zwei beliebige Figuren (einer Ebene) bei einer Bewegung einander entsprechen, so nennen wir sie *kongruent*.**

Sind F_1 und F_2 zwei beliebige Figuren, die kongruent sind, so schreiben wir: $F_1 \cong F_2$ (gelesen F_1 kongruent F_2).
Wir sagen auch, daß F_1 und F_2 durch eine Bewegung ineinander überführt werden bzw. zur Deckung gebracht werden können.
Die Menge aller Figuren, die zu einer vorgegebenen Figur kongruent sind, ist eine *Klasse kongruenter Figuren* (der Ebene). Für zwei Elemente einer Klasse gilt, daß sie kongruent sind. Jedes Element einer Klasse ist ein Vertreter (Repräsentant) dieser Klasse.
Für die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ im Bild D 15 gilt $ABC \cong A_1B_1C_1$; denn sie können durch die Nacheinanderausführung einer Verschiebung, einer Spiegelung und einer Drehung zur Deckung gebracht werden. Die beiden Dreiecke gehören ein und derselben Klasse an.

■ Die beiden Figuren F_1 und F_2 im Bild D 16 sind kongruent; denn sie können durch eine Verschiebung zur Deckung gebracht werden: $F_1 \cong F_2$. Die beiden Figuren gehören ein und derselben Klasse an.

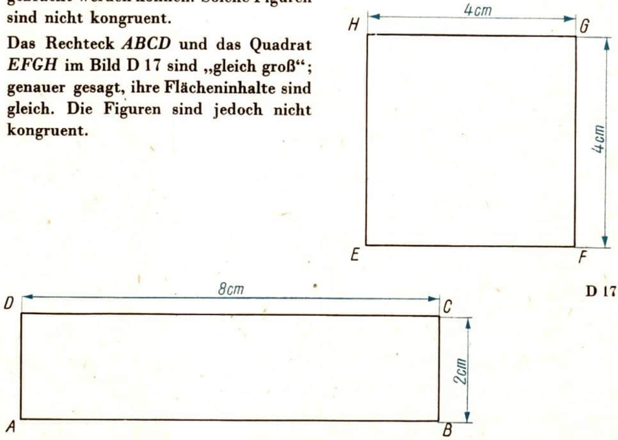
● Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und ermittle mit Hilfe von Transparentpapier ein Dreieck $A'B'C'$ so, daß gilt $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$! Stelle in einer Tabelle einander entsprechende Punkte, Seiten und Winkel zusammen!



D 16

Es gibt Figuren, die gleichen Flächeninhalt haben, jedoch nicht zur Deckung gebracht werden können. Solche Figuren sind nicht kongruent.

■ Das Rechteck $ABCD$ und das Quadrat $EFGH$ im Bild D 17 sind „gleich groß“; genauer gesagt, ihre Flächeninhalte sind gleich. Die Figuren sind jedoch nicht kongruent.

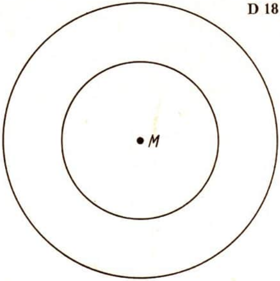


D 17

Es gibt Figuren, die ähnliche Gestalt haben, jedoch nicht zur Deckung gebracht werden können.

Im Bild D 18 sind zwei Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt *M* gezeichnet. Es gibt keine Bewegung, durch die die beiden Kreise zur Deckung gebracht werden könnten. Sie sind nicht kongruent.

D 18

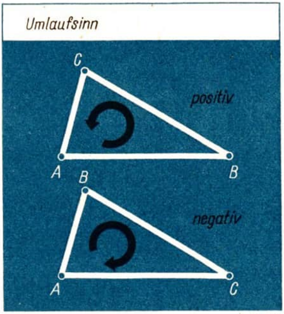


Kongruenz von Dreiecken

8

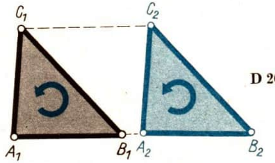
Unter dem *Umlaufsinn* eines Dreiecks verstehen wir die Reihenfolge, in der die Eckpunkte des Dreiecks durchlaufen werden.
Ein Dreieck *ABC* soll einen **positiven Umlaufsinn** haben, wenn die Eckpunkte des Dreiecks in der Reihenfolge *A*, *B*, *C* entgegen dem Drehsinn eines Uhrzeigers durchlaufen werden (Bild D 19).
Ein Dreieck *ABC* soll einen **negativen Umlaufsinn** besitzen, wenn die Eckpunkte des Dreiecks in der Reihenfolge *A*, *B*, *C* im Sinne der Drehung eines Uhrzeigers durchlaufen werden.
Verschiebungen und Drehungen ändern den Umlaufsinn nicht. Wir sagen:
Verschiebungen und Drehungen sind **gleichsinnige** Bewegungen.

Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ im Bild D 20 können durch eine gleichsinnige Bewegung, in diesem Falle durch eine Verschiebung, zur Deckung gebracht werden.



D 19

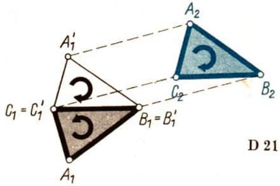
Zwei kongruente Dreiecke, die den gleichen Umlaufsinn haben, nennen wir **gleichsinnig** kongruent.
Zwei gleichsinnig kongruente Dreiecke lassen sich stets durch eine gleichsinnige Bewegung ineinander überführen.
Durch eine Spiegelung an einer Geraden wird der Umlaufsinn eines Dreiecks in den entgegengesetzten verändert.
Wir sagen:
Spiegelungen an einer Geraden sind **ungleichsinnige** Bewegungen.



D 20

■ Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ im Bild D 21 haben entgegengesetzten Umlaufsinn. Sie können durch die Verknüpfung einer ungleichsinnigen und einer gleichsinnigen Bewegung zur Deckung gebracht werden.

● Führe die Bewegungen in den letzten beiden Beispielen mit Hilfe von Transparentpapier aus!



D 21

Zwei kongruente Dreiecke, die entgegengesetzten Umlaufsinn haben, nennen wir **ungleichsinnig** kongruent.
Zwei ungleichsinnig kongruente Dreiecke lassen sich stets durch eine ungleichsinnige Bewegung ineinander überführen.

ZUSAMMENFASSUNG:

Verschiebung	gleichsinnige Bewegung	Original und Bild sind gleichsinnig kongruent
Drehung um einen Punkt	gleichsinnige Bewegung	Original und Bild sind gleichsinnig kongruent
Spiegelung an einer Geraden	ungleichsinnige Bewegung	Original und Bild sind ungleichsinnig kongruent

D

9

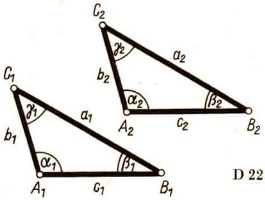
Lassen sich zwei Dreiecke durch eine Bewegung zur Deckung bringen, so sind alle entsprechenden Seiten und alle entsprechenden Winkel der beiden Dreiecke kongruent (Bild D 22).

11 **SATZ: Sind zwei Dreiecke kongruent, so sind entsprechende Seiten gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß.**

Auch die Umkehrung des Satzes D 11 gilt:

12 **SATZ: Sind bei zwei Dreiecken entsprechende Seiten gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß, so sind die beiden Dreiecke kongruent.**

Es läßt sich zeigen, daß es unter den angegebenen Voraussetzungen eine Bewegung gibt, durch die die beiden Dreiecke



D 22

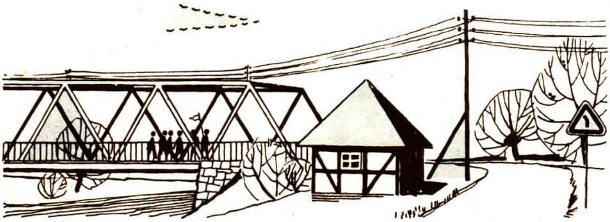
zur Deckung gebracht werden können. Sind zwei Dreiecke gegeben, von denen festgestellt werden soll, ob sie kongruent sind, so können wir folgendermaßen verfahren:

1. Wir versuchen, eine geeignete Bewegung zu finden, bei der die beiden Dreiecke einander entsprechen.
2. Wir wenden den Satz D 12 an, indem wir untersuchen, ob die Punkte der beiden Dreiecke einander so zugeordnet werden können, daß alle entsprechenden Seiten und alle entsprechenden Winkel jeweils kongruent sind.

Konstruktion von Dreiecken

10

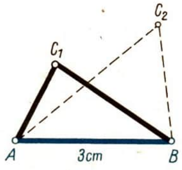
Soll ein Dreieck mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden, so müssen die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks eindeutig bestimmt werden. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks nennen wir die **Stücke** des Dreiecks.
Wir wollen untersuchen, wieviel Stücke gegeben sein müssen, damit aus ihnen ein Dreieck (als Vertreter einer Klasse) eindeutig konstruiert werden kann.



D 23

Ein gesuchtes Dreieck soll eine Seite von einer bestimmten Länge (einen Winkel von einer bestimmten Größe) besitzen. Das folgende Beispiel zeigt, daß es beliebig viele unregelmäßige Dreiecke aus verschiedenen Klassen gibt, die den gegebenen Bedingungen genügen.

■ Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, dessen Seite $\overline{AB}$ eine Länge von 3 cm hat (Bild D 24). Die Konstruktionsaufgabe ist nicht (eindeutig) lösbar, da durch die gegebene Seite nur zwei Eckpunkte des gesuchten Dreiecks bestimmt sind. Der dritte Punkt ist durch die Angabe nicht festgelegt. Es gibt viele Dreiecke (aus verschiedenen Klassen), die eine Seite von 3 cm Länge besitzen.



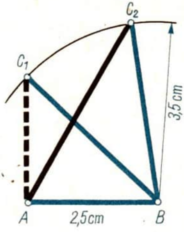
D 24

D

- Welches spezielle Dreieck ist durch die Angabe eines geeigneten Stückes eindeutig bestimmt?
- Nimm zu der folgenden Aufgabe Stellung!
Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, in dem der Winkel α eine Größe von $57°$ besitzt.

Auch *zwei Stücke* reichen nicht aus, um ein unregelmäßiges Dreieck (als Vertreter einer Klasse) eindeutig zu bestimmen.

■ Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, dessen Seiten $\overline{AB} = 2{,}5$ cm und $\overline{BC} = 3{,}5$ cm betragen (Bild D 25).
Durch die Seite $\overline{AB}$ sind die Punkte A und B festgelegt. Der Punkt C liegt auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{BC}$. Eine zweite Bedingung für den Punkt C fehlt.



D 25

- Welche speziellen Dreiecke sind durch die Angabe von zwei geeigneten Stücken eindeutig bestimmt?
- Konstruiere ein Dreieck, von dem **a)** zwei Winkel, **b)** eine Seite und ein Winkel gegeben sind!
- Begründe, daß die beiden Aufgaben nicht lösbar sind!

In den Lerneinheiten 11 bis 14 wird die Konstruktion von Dreiecken, von denen *drei Stücke* gegeben sind, untersucht.

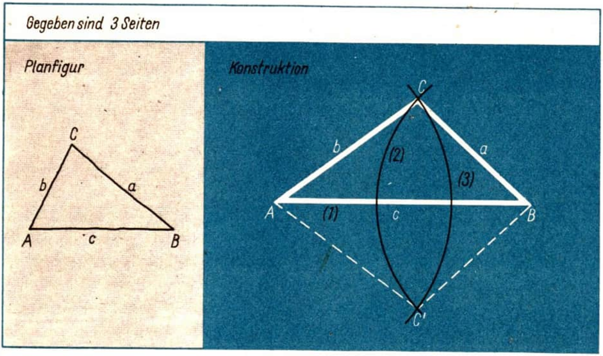
- Stelle in einer Tabelle alle möglichen Fälle dafür zusammen!

D

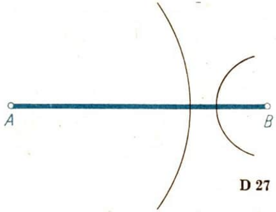
11

Für die Konstruktion eines Dreiecks seien drei Strecken gegeben, es sollen die **drei Seiten** des gesuchten Dreiecks sein.

■ Es ist ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten $\overline{AB} = 5{,}0$ cm; $\overline{BC} = 3{,}0$ cm; $\overline{CA} = 3{,}5$ cm betragen sollen (Bild D 26). (Die Zahlen in runden Klammern geben die Reihenfolge an, in der die Konstruktion gewonnen wurde.)
Die Aufgabe ist lösbar.
(1) Durch die Seite $\overline{AB}$ sind die Punkte A und B festgelegt. Der Punkt C liegt
(2) erstens auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{BC}$ und
(3) zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius $\overline{CA}$.
Die beiden Kreise schneiden einander in den Punkten C und C'.
Wir erhalten die beiden Dreiecke ABC und ABC'. Sie sind ungleichsinnig kongruent; denn sie lassen sich durch eine Spiegelung an der Geraden AB ineinander überführen.
Liefert eine Konstruktion zwei (oder mehrere) kongruente Dreiecke, so betrachten wir die Aufgabe als eindeutig lösbar, da die Dreiecke, die wir erhalten, in ein und derselben Klasse liegen. Es genügt die Angabe eines der Dreiecke.



D 26



D 27

■ Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Seiten $\overline{AB} = 5{,}0$ cm; $\overline{BC} = 1{,}0$ cm; $\overline{CA} = 3{,}5$ cm betragen sollen (Bild D27)[1]. Die Aufgabe ist nicht lösbar (vgl. Satz D 1). Der Kreis um B mit dem Radius $\overline{BC}$ und der Kreis um A mit dem Radius $\overline{CA}$ schneiden einander nicht.

● Überprüfe, aus welchen Angaben sich ein Dreieck konstruieren läßt! (a, b und c sollen Dreiecksseiten sein.)

a) $a = 5$ cm; $b = 8$ cm; $c = 2$ cm **b)** $a = 9$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4$ cm
c) $a = 3$ cm; $b = 5$ cm; $c = 7$ cm

Ein Dreieck läßt sich stets dann konstruieren, wenn die gegebenen Seiten dem Satz D 1 genügen. Ist das der Fall, so ist ein Dreieck durch die Angabe der **drei Seiten** eindeutig bestimmt. Damit können wir aber auch schneller überprüfen, ob zwei Dreiecke kongruent sind. Wir brauchen nur noch die drei entsprechenden Seiten zu vergleichen.

13 **KRITERIUM: Gilt für zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$:**
$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2};\ \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2};\ \overline{C_1A_1} = \overline{C_2A_2},$$
so sind die beiden Dreiecke kongruent.

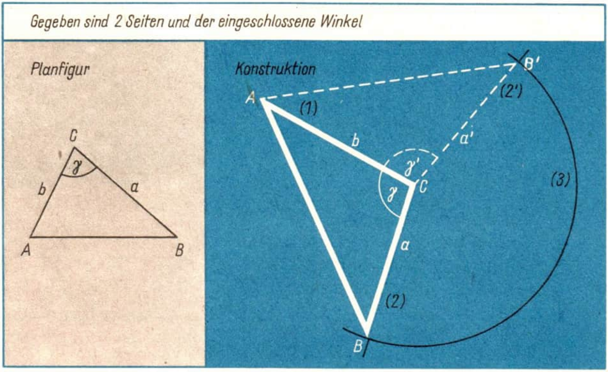
Wir haben damit ein **Kriterium für die Kongruenz zweier Dreiecke** gewonnen. Wir schreiben für dieses Kriterium kurz sss.

[1] Wir wenden in Zukunft eine kürzere Schreibweise an, die im vorliegenden Fall lauten würde:
Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus: $\overline{AB} = 5{,}0$ cm; $\overline{BC} = 1{,}0$ cm; $\overline{CA} = 3{,}5$ cm.

Für die Konstruktion eines Dreiecks seien **zwei Seiten** und **der Winkel gegeben, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird.**

Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus: $\overline{AC} = 3{,}5$ cm; $\overline{BC} = 3{,}0$ cm; $\sphericalangle ACB = 100°$ (Bild D 28).

D 28



Durch die Seite $\overline{AC}$ sind die Punkte A und C des Dreiecks festgelegt. Der Punkt B liegt erstens auf dem freien Schenkel des Winkels γ, der in C an den Strahl $\overline{CA}$ angetragen wird, und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{BC}$. (Wir nennen den Schenkel des Winkels γ, der A nicht enthält, einen *freien Schenkel*, da auf ihm außer C noch kein Punkt des Dreiecks festgelegt ist.) Wir können den Winkel γ auf verschiedenen Seiten des Strahls AC in C antragen. Die beiden Dreiecke, die dadurch entstehen, können durch eine Spiegelung zur Deckung gebracht werden. Sie sind also ungleichsinnig kongruent. Die Konstruktion ist eindeutig lösbar.

Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen auf einer Geraden einen Punkt C.

(1) Von C aus tragen wir die Strecke $\overline{AC}$ ab und erhalten den Punkt A.

(2) In C tragen wir an den Strahl CA den Winkel γ an.

(3) Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{BC}$ schneidet den freien Schenkel von γ in B.

Das letzte Beispiel zeigt, daß ein Dreieck durch die Angabe von **zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel** eindeutig bestimmt ist. Wir haben damit ein weiteres Kriterium für die Kongruenz von Dreiecken gefunden. Die Kongruenz zweier Dreiecke ist erwiesen, wenn die Dreiecke übereinstimmen in zwei Paaren entsprechender Seiten und in demjenigen Paar entsprechender Winkel, die von den gegebenen Seiten eingeschlossen werden.

14 **KRITERIUM: Gilt für zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$:**
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$; $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$; $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$,
so sind die beiden Dreiecke kongruent.
Wir schreiben für dieses Kriterium kurz sws

13

Für die Konstruktion eines Dreiecks seien zwei Seiten und der Winkel gegeben, der der größeren Seite gegenüberliegt.

Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus:
$\overline{BC} = 3{,}5$ cm; $\overline{AC} = 2{,}0$ cm; $\sphericalangle BAC = 70°$ (Bild D 29).

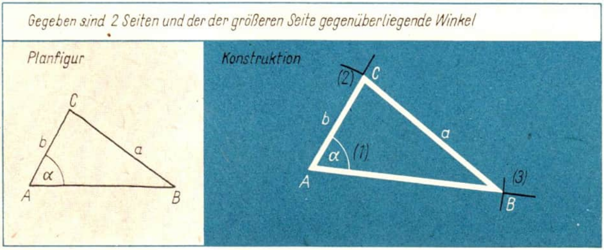
Durch den Scheitel von α ist A festgelegt. Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AC}$ schneidet einen Schenkel des Winkels in C. Es liegt B erstens auf dem anderen Schenkel des Winkels α und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{BC}$. Dieser Kreis muß den freien Schenkel in genau einem Punkt schneiden, da $\overline{BC}$ länger ist als b.

Konstruktionsbeschreibung:
(1) In einem Punkt A einer Geraden tragen wir an die Gerade den Winkel α an.
(2) Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AC}$ schneidet einen Schenkel in C.
(3) Um C zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius $\overline{BC}$, der den freien Schenkel des Winkels α in B schneidet.

Das letzte Beispiel zeigt, daß ein Dreieck durch die Angabe von **zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel** eindeutig bestimmt ist. Auch dieser Fall führt auf ein Kriterium für die Kongruenz von Dreiecken. Die Kongruenz zweier Dreiecke ist erwiesen, wenn die Dreiecke übereinstimmen in zwei Paaren entsprechender Seiten und in einem Paar von entsprechenden Winkeln, wobei die Winkel jeweils der größeren Seite gegenüberliegen müssen.

15 **KRITERIUM: Gilt für die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$:**
$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$; $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$; $\sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_2A_2B_2$,
und gilt $\overline{B_1C_1} \geq \overline{A_1B_1}$, so sind die beiden Dreiecke kongruent.
Wir schreiben für dieses Kriterium kurz ssw.

D 29



D

Sind zwei Seiten und der Winkel gegeben, der der kleineren Seite gegenüberliegt, so erhalten wir je nach der Größe der einzelnen Stücke
zwei verschiedene Dreiecke, ein Dreieck oder gar kein Dreieck.

● Konstruiere Dreiecke aus

a) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\beta = 75°$, **b)** $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\alpha = 75°$!

14

Für die Konstruktion eines Dreiecks seien **eine Seite und die beiden anliegenden Winkel** gegeben.

■ Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus:

$\overline{BC} = 3$ cm; $\sphericalangle\,\beta = 78°$; $\sphericalangle\,\gamma = 72°$ (Bild D 30).

Die Aufgabe ist lösbar. Durch die Seite $\overline{BC}$ sind die Punkte B und C gegeben. Der Punkt A liegt erstens auf dem freien Schenkel des Winkels β und zweitens auf dem freien Schenkel des Winkels γ.

Konstruktionsbeschreibung: Wir zeichnen eine Gerade und wählen darauf einen Punkt B.

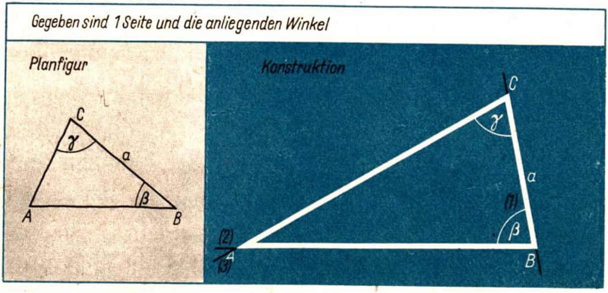
(1) Von B aus tragen wir die Seite $\overline{BC}$ ab und erhalten den Punkt C.
(2) In B tragen wir an den Strahl BC den Winkel β und
(3) in C an den Strahl CB den Winkel γ so an, daß sich die freien Schenkel der Winkel schneiden.
Ihr Schnittpunkt ist A.

Wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel 180° oder mehr als 180° beträgt, ist die Konstruktion eines Dreiecks nicht möglich. In diesen Fällen schneiden die beiden freien Schenkel einander nicht.

● Nimm zu den folgenden beiden Aufgaben Stellung!

a) Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus: $\overline{AB} = 4$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 102°$.
b) Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus: $\overline{AC} = 5$ cm; $\alpha = 85°$; $\gamma = 95°$.

D 30



Wir wollen in Zukunft stets voraussetzen, daß die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als 180° ist. Ein Dreieck ist dann durch die Angabe von **einer Seite und zwei Winkeln** eindeutig bestimmt.
Auch dieser Fall führt auf ein Kriterium für die Kongruenz zweier Dreiecke. Die Kongruenz zweier Dreiecke ist erwiesen, wenn die Dreiecke übereinstimmen in einem Paar entsprechender Seiten und in zwei Paaren entsprechender Winkel.

16 **KRITERIUM: Gilt für zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$:**
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$; $\sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_2A_2B_2$; $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$,
so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Wir schreiben für dieses Kriterium kurz wsw.

- Formuliere entsprechend die Bedingungen für die anderen beiden Fälle!
- Begründe, warum sich ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt, wenn eine Seite, ein anliegender Winkel und ein nicht anliegender Winkel gegeben sind!
- Stelle Kongruenzkriterien für
a) gleichseitige, b) gleichschenklige, c) rechtwinklige Dreiecke auf!

15

Die Konstruktion eines Dreiecks, von dem die drei Winkel gegeben sind, ist nicht eindeutig möglich.

- Begründe diese Feststellung, indem du Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 63°$; $\beta = 47°$ und $\gamma = 70°$ konstruierst!

Aufgaben d 32 bis 44

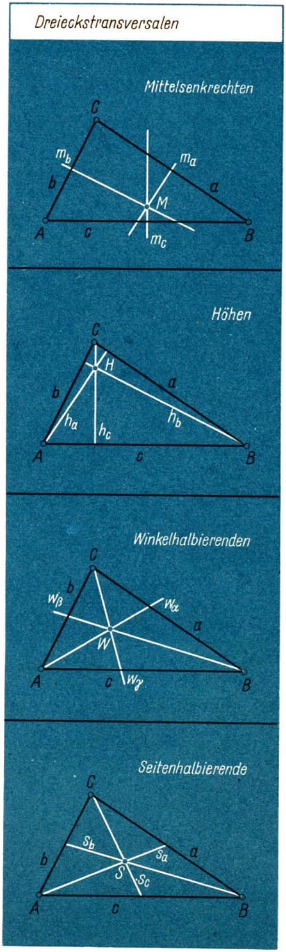
D

ZUSAMMENFASSUNG:

Kongruenzkriterien	Abkürzung
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in	
den drei Seiten übereinstimmen,	s s s
zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,	s w s
zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen,	s s w
einer Seite und zwei anliegenden Winkeln übereinstimmen.	w s w

Die Dreieckskonstruktionen, die den Kongruenzkriterien entsprechen, sind eindeutig.
Der Fall, daß eine Seite, ein anliegender Winkel und ein nicht anliegender Winkel gegeben sind, läßt sich auf den Fall wsw zurückführen.

In einem Dreieck haben die Mittelsenkrechten, die Höhen, die Winkelhalbierenden und die Seitenhalbierenden die gemeinsame Bezeichnung **Dreieckstransversalen** (Bild D 31).



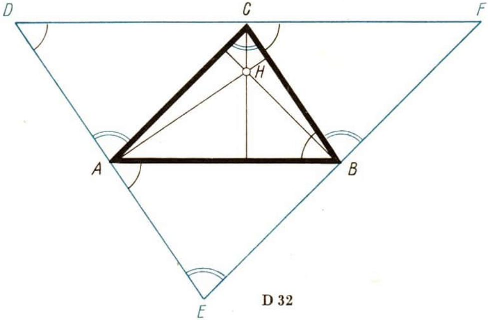
17 **SATZ: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Beweis (Bild D 31): Wir nehmen an, daß die Mittelsenkrechten der Seiten a und b im Punkt M einander schneiden. Dann ist M einerseits von den Punkten B und C und andererseits von den Punkten A und C gleich weit entfernt. Also ist M auch von den Punkten A und B gleich weit entfernt und somit ein Punkt der Mittelsenkrechten der Seite c.

18 **SATZ: Die Höhen eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen schneiden einander in einem Punkt.**

Beweis (Bild D 32): Das Dreieck ABC sei unregelmäßig. Wir konstruieren durch jeden Eckpunkt die Parallele zu der gegenüberliegenden Dreiecksseite. Die Parallelen schneiden einander in den Punkten D, E bzw. F. Die Dreiecke ABC, ACD, AEB und BFC sind paarweise kongruent. Je zwei Dreiecke genügen dem Kriterium wsw. Jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC ist Mittelpunkt derjenigen Seite des Dreiecks DEF, auf der er liegt. Die Mittelsenkrechten des Dreiecks DEF, die gleichzeitig die Höhen des Dreiecks ABC sind, schneiden einander nach Satz D 17 in einem Punkt H. Daraus folgt, daß die Höhen des Dreiecks ABC einander in einem Punkt H schneiden.

19 **SATZ: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**



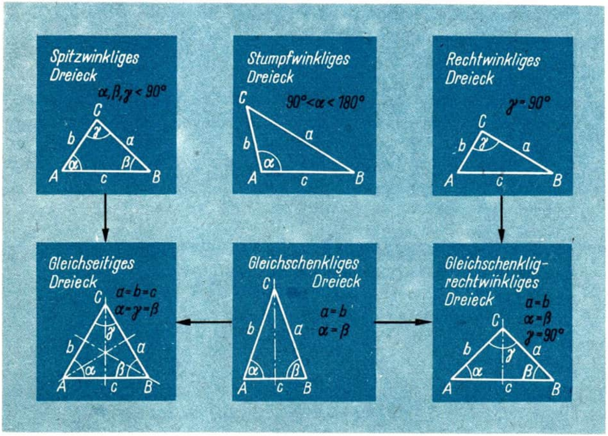
D 32

Beweis (Bild D 31): Wir nehmen an, daß die Winkelhalbierenden der Winkel α und β einander in einem Punkt W schneiden. Der Punkt W hat dann einerseits von den Seiten b und c und andererseits von den Seiten c und a den gleichen Abstand (nach Satz C 22). Also hat W auch von den Seiten a und b den gleichen Abstand und ist somit ein Punkt der Winkelhalbierenden des Winkels γ.

20 **SATZ: Die Seitenhalbierenden eines beliebigen Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Diesen Satz können wir mit den bisherigen Kenntnissen noch nicht beweisen.

Übersicht über die Arten der Dreiecke

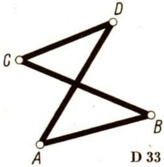


- Die Eckpunkte eines Dreiecks sind von dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gleich weit entfernt. Gib den gleichen Sachverhalt durch eine andere Formulierung an!
- Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden W eines Dreiecks hat von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand. Konstruiere die Lote von W auf die Seiten und gib den Sachverhalt durch eine andere Formulierung an!
- Konstruiere in einem stumpfwinkligen Dreieck
  a) alle Mittelsenkrechten, **b)** alle Höhen,
  c) alle Winkelhalbierenden, **d)** alle Seitenhalbierenden!
- Warum fallen in einem gleichseitigen Dreieck jeweils eine Mittelsenkrechte, eine Höhe, eine Winkelhalbierende und eine Seitenhalbierende zusammen?

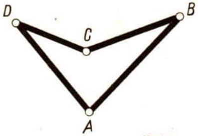
Aufgaben d 45 bis 59

Vierecke

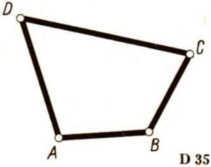
17



D 33



D 34



D 35

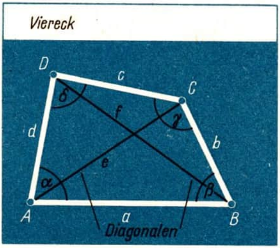
D

Die Punkte A, B, C und D seien vier Punkte ein und derselben Ebene, von denen nicht drei auf ein und derselben Geraden liegen sollen. Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte eines **Vierecks.** Die Bilder D 33, D 34 und D 35 zeigen verschiedene Möglichkeiten, für vier gegebene Punkte einen geschlossenen Streckenzug anzugeben.

Die Strecken eines derartigen geschlossenen Streckenzuges nennen wir **Seiten** und die Verbindungsstrecken von zwei Eckpunkten, die nicht ein und derselben Seite angehören, **Diagonalen** des Vierecks. Je zwei Seiten eines Vierecks, die einen Eckpunkt gemeinsam haben, bestimmen einen **Winkel** des Vierecks. Die Seiten, Diagonalen und Winkel eines Vierecks sowie die Winkel, die von je einer Seite und einer Diagonale mit einem gemeinsamen Eckpunkt bestimmt werden, nennen wir **Stücke** des Vierecks.

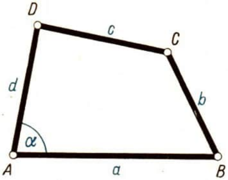
Vierecke, bei denen sich zwei Seiten „überschneiden“, schließen wir von den folgenden Betrachtungen aus. Im Bild D 33 wird ein solches Viereck veranschaulicht.

D 36



Vierecke, bei denen ein Eckpunkt des Vierecks ein innerer Punkt des Dreiecks ist, das durch die übrigen drei Eckpunkte des Vierecks bestimmt wird (Bild D 34), wollen wir ebenfalls ausschließen.
Vierecke, bei denen jeder Eckpunkt äußerer Punkt des Dreiecks ist, das jeweils durch die übrigen drei Eckpunkte bestimmt ist, nennen wir **konvex** (Bild D 35).
Ein Viereck wird durch eine seiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt. Um eines dieser Dreiecke konstruieren zu können, benötigen wir drei geeignete Stücke. Für die Konstruktion des anderen Dreiecks benötigen wir zusätzlich nur noch zwei geeignete Stücke, da eine Seite davon bereits gegeben ist.
Ein Viereck läßt sich also aus fünf geeigneten Stücken konstruieren, wobei unter den fünf gegebenen Stücken mindestens eine Seite sein muß.

Ein Viereck *ABCD* soll aus den Seiten a, b, c, d und dem Winkel α konstruiert werden (Bild D 37).
Die Seiten a und d und der Winkel α bestimmen das Dreieck *ABD*. Der Punkt C liegt erstens auf dem Kreis um B mit dem Radius b und zweitens auf dem Kreis um D mit dem Radius c.



D 37.

Konstruiere ein Viereck aus $a = 3{,}0$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 62°$; $\beta = 73°$ und $e = 5{,}0$ cm!
Miß die beiden anderen Winkel γ und δ und bilde die Summe der Winkel des Vierecks!

21 **SATZ: Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.**

Beweis: Ist *ABCD* ein Viereck und $\overline{AC}$ eine Diagonale, so hat jedes der beiden Dreiecke *ABC* und *ACD* eine Winkelsumme von 180°. Die Winkel der beiden Dreiecke bilden zusammen die Winkel des Vierecks, ihre Summe beträgt also $180° + 180° = 360°$.

In der Menge aller Vierecke gibt es verschiedene Teilmengen spezieller Vierecke.

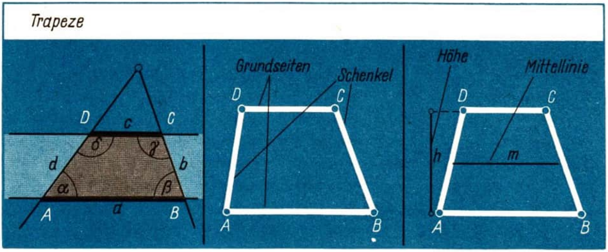
Trapez

18

Wenn wir einen Streifen mit zwei Geraden zum Schnitt bringen und der Schnittpunkt der beiden Geraden ein äußerer Punkt des Streifens ist, so entsteht ein spezielles Viereck, ein **Trapez** (Bild D 38).

22 **DEFINITION: Liegen zwei Seiten eines Vierecks auf parallelen Geraden, so nennen wir das Viereck ein *Trapez*.**

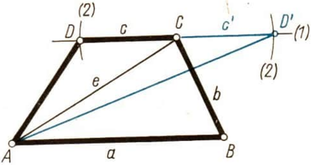
Liegen zwei Seiten auf parallelen Geraden, so sagen wir, die beiden Seiten sind zueinander parallel.



D 38

Ein Trapez läßt sich bereits eindeutig konstruieren, wenn mindestens vier geeignete Stücke bekannt sind; die fünfte erforderliche Angabe ist dadurch bekannt, daß zwei Seiten parallel verlaufen sollen. Es muß angegeben werden, welche Seiten das sein sollen.

■ Ein Trapez mit den Grundseiten *a* und *c* soll aus den Seiten *a*, *b*, *c* und der Diagonalen $\overline{AC} = e$ konstruiert werden (Bild D 39).
Aus *a*, *b* und *e* läßt sich das Dreieck *ABC* konstruieren. Der Punkt *D* liegt
(1) erstens auf der Parallelen zu *AB* durch *C* und
(2) zweitens auf dem Kreis um *C* mit dem Radius *c*.



D 39

Dieser Kreis schneidet die Parallele in den Punkten *D* und *D'*. Die Konstruktion ist eindeutig, da wir Vierecke der Form *ABCD'* von den Betrachtungen ausgeschlossen haben.

● Konstruiere ein Trapez aus: $a = 4$ cm; $d = 3$ cm; $\alpha = 55°$; $\beta = 78°$ (*a* und *c* seien die Grundseiten)!

● Weise folgende Behauptung nach:
Die Winkel im Trapez, die ein und demselben Schenkel anliegen, sind Supplementwinkel!

19

Im Kapitel C haben wir den Begriff der Mittellinie eines Streifens erklärt. Die Mittellinie in einem Trapez liegt auf der Mittellinie des Streifens, der durch die beiden Grundseiten des Trapezes bestimmt ist. Die **Mittellinie** im Trapez ist eine Strecke, deren Endpunkte die Schnittpunkte der Schenkel mit der Mittellinie des Streifens sind (Bild D 38).
Die Strecke *h* im Bild D 38 ist eine *Höhe* im Trapez.

23 **SATZ: Ist $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, so halbiert die Mittellinie des Trapezes $ABCD$ die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.**

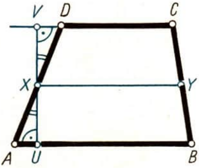
Beweis: Der Punkt X sei der Schnittpunkt der Mittellinie mit dem Schenkel $\overline{AD}$ (Bild D 40). In X errichten wir die Senkrechte auf der Mittellinie. Die Punkte U bzw. V seien die Schnittpunkte der Senkrechten mit den Geraden AB bzw. CD. Dann sind U und V symmetrische Punkte bezüglich der Mittellinie, das heißt, es gilt $\overline{XU} = \overline{XV}$. Die beiden Dreiecke XAU und XDV sind nach dem Kriterium wsw kongruent. Daraus folgt $\overline{AX} = \overline{DX}$.
Der Beweis, daß Y Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, ergibt sich entsprechend.
Die Umkehrung des Satzes D 23 gilt ebenfalls.

24 **SATZ: Ist $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und sind die Punkte X bzw. Y die Mittelpunkte der Schenkel $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$, so ist die Strecke $\overline{XY}$ die Mittellinie im Trapez $ABCD$.**

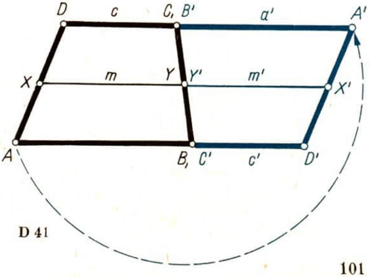
Beweis: Das Lot von X auf die Gerade AB schneide diese im Punkt U und die Gerade CD in V (Bild 40). Da die Dreiecke AUX und DVX nach dem Kriterium wsw kongruent sind, gilt $\overline{XU} = \overline{XV}$. Der Punkt X ist also ein Punkt der Mittellinie im Trapez $ABCD$. Entsprechend zeigt man, daß auch Y ein Punkt der Mittellinie im Trapez $ABCD$ ist. Da zwei Punkte nur eine einzige Verbindungsstrecke haben, ist $\overline{XY}$ Mittellinie.

25 **SATZ: Ist m die Mittellinie eines Trapezes mit den Grundseiten a und c, so gilt $m = \frac{a+c}{2}$.**

Beweis: Wir drehen ein Trapez $ABCD$ entsprechend Bild D 41 um den Mittelpunkt eines Schenkels und erhalten das Bild $A'B'C'D'$. Die Strecken $\overline{AD'}$ und $\overline{XX'}$ lassen sich durch eine Verschiebung ineinander überführen, sie sind also gleich lang. Deshalb gilt $m + m' = a + c'$. Da $m = m'$ und $c = c'$ gilt, erhalten wir $2m = a + c$, also $m = \frac{a+c}{2}$.
Ein Trapez mit gleich langen Schenkeln heißt ein **gleichschenkliges Trapez.** Ein gleichschenkliges Trapez läßt sich aus drei geeigneten Stücken konstruieren.



D 40



D 41

D

- Konstruiere durch einen Punkt im Innern eines gleichschenkligen Dreiecks eine Parallele zur Basis!
- Zeige, daß jedes gleichschenklige Trapez eine Symmetrieachse besitzt!
- Weise nach, daß die Winkel an ein und derselben Grundseite eines gleichschenkligen Trapezes gleich groß sind!

Aufgaben d 60 bis 66

> In einem Trapez
>
> sind zwei Seiten zueinander parallel,
> sind die beiden Winkel, die ein und demselben Schenkel anliegen, Supplementwinkel,
> halbiert die Mittellinie die beiden Schenkel.

Parallelogramm

20

Wenn wir zwei Streifen miteinander zum Schnitt bringen, so erhalten wir ein spezielles Viereck, ein **Parallelogramm** (Bild D 42).

- Bestimme das Bild $\overline{A'B'}$ einer Strecke $\overline{AB}$ bei einer Verschiebung in Richtung einer Geraden g!

Die Punkte $ABB'A'$ in der vorstehenden Übung sind Eckpunkte eines Parallelogramms.

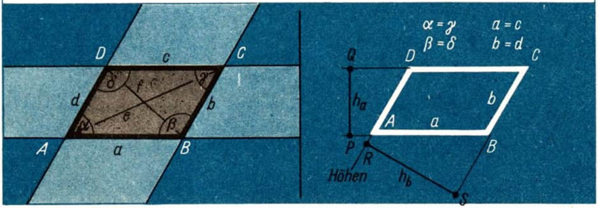
D

26 **DEFINITION: Ist $ABCD$ ein Viereck und sind einerseits die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und andererseits die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel, so nennen wir das Viereck ein *Parallelogramm*.**

Ein Parallelogramm läßt sich bereits eindeutig konstruieren, wenn drei geeignete Stücke bekannt sind. Eine Diagonale zerlegt ein Parallelogramm in zwei Dreiecke. Zur Konstruktion des einen Dreiecks benötigt man drei Stücke. Der vierte

D 42

Parallelogramm



Punkt des Parallelogramms liegt dann auf den Parallelen zu zwei Dreieckseiten jeweils durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.

● Konstruiere ein Parallelogramm aus: $a = 5$ cm; $d = 3$ cm; $\alpha = 70°$! Beschreibe die Konstruktion!

21

Im Parallelogramm gelten die folgenden Sätze:

27 **Ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm mit den Winkeln α, β, γ, δ, so gilt:**

a) $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$,

b) $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$,

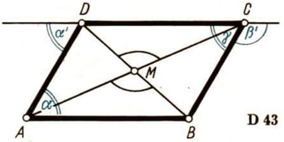
c) die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbieren einander,

d) zwei Winkel, die ein und derselben Seite anliegen, sind Supplementwinkel.

Beweis zu **a)** (Bild D 43): Wir verlängern die Parallelogrammseite $\overline{CD}$ über beide Endpunkte hinaus. Es entstehen die Winkel α' und β'. Dann gilt $\alpha = \alpha'$ als Wechselwinkel und $\alpha' = \gamma$ als Stufenwinkel. Daraus folgt $\alpha = \gamma$.
Entsprechend findet man $\beta = \delta$.

Beweis zu **b)**: Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gehen durch eine Verschiebung auseinander hervor, also gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Dasselbe gilt für die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Beweis zu **c)** (Bild D 43): Der Punkt M sei der Schnittpunkt der Diagonalen.



D 43

Dann sind die Dreiecke ABM und CDM nach dem Kriterium wsw kongruent. Daraus folgt $\overline{AM} = \overline{CM}$ und $\overline{BM} = \overline{DM}$.

● Warum gilt der Satz d)?

Den Schnittpunkt M der Diagonalen nennen wir den **Mittelpunkt** eines Parallelogramms.

● Weise nach, daß ein Parallelogramm mit sich selbst zur Deckung kommt, wenn es um M mit einem Drehwinkel von 180° gedreht wird.

Mit den Umkehrungen der Sätze 27a bis 27c läßt sich überprüfen, ob ein Viereck ein Parallelogramm ist.

28 **SATZ: Wenn in einem Viereck $ABCD$ die gegenüberliegenden Winkel jeweils gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

Beweis: In einem Viereck $ABCD$ gelte $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ folgt dann $\alpha + \beta = 180°$ und $\alpha + \delta = 180°$ (Bild D 42).
Die Winkel α und β sind entgegengesetzt liegende Winkel an den geschnittenen Geraden AD und BC. Da α und β Supplementwinkel sind, verlaufen AD und BC parallel zueinander. Die Winkel α und δ sind entgegengesetzt liegende Winkel an den geschnittenen Geraden AB und DC. Da α und δ Supplementwinkel sind, verlaufen AB und DC ebenfalls parallel.

29 **SATZ: Wenn in einem Viereck *ABCD* die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

Beweis (Bild D 42): Ist $ABCD$ ein Viereck und gilt $a = c$ und $b = d$, so sind die Dreiecke ABC und CDA nach dem Kriterium sss kongruent; denn die dritte Seite beider Dreiecke ist $\overline{AC}$. Dann gilt: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$. Daraus folgt, daß AB und CD parallel sind. Da $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$, sind auch BC und DA parallel.

30 **SATZ: Wenn in einem Viereck *ABCD* die Diagonalen einander halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

● Führe den Beweis dieses Satzes selbständig durch!

Aufgaben d 67 bis 72

> In einem Parallelogramm
> **sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang,**
> **sind gegenüberliegende Winkel gleich groß,**
> **halbieren die Diagonalen einander,**
> **sind zwei Winkel, die ein und derselben Seite anliegen, Supplementwinkel.**

Rechteck

22

Wenn wir zwei Streifen unter einem rechten Winkel zum Schnitt bringen, so entsteht ein spezielles Parallelogramm, ein **Rechteck.**

● Wie kann man ein Rechteck durch eine Verschiebung einer Strecke erhalten?

31 **DEFINITION: Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel nennen wir ein *Rechteck*.**

Aus dieser Definition folgt, daß in einem Rechteck die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, die Diagonalen einander halbieren und daß alle Winkel eines Rechtecks 90° betragen.
Zusätzlich gilt:

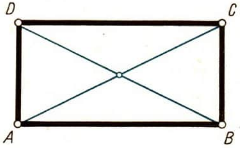
32 **SATZ: Ist *ABCD* ein Rechteck, so sind die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich lang.**

Der Beweis ergibt sich daraus, daß die Dreiecke ABC und BAD kongruent sind (Bild D 44).

● Führe den Beweis an Hand des Bildes D 44 aus!

Um nachzuweisen, daß ein Parallelogramm ein Rechteck ist, kann man die Umkehrung des Satzes D 32 verwenden.

D 44



33 **SATZ: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist das Parallelogramm ein Rechteck.**

Beweis: Ist $ABCD$ ein Parallelogramm und sind die Diagonalen gleich lang, so sind die Dreiecke ABC und BAD kongruent nach dem Kriterium sss (Bild D 44). Dann sind aber auch die Winkel ABC und BAD gleich groß. Da diese Winkel Supplementwinkel sind, muß jeder 90° betragen.

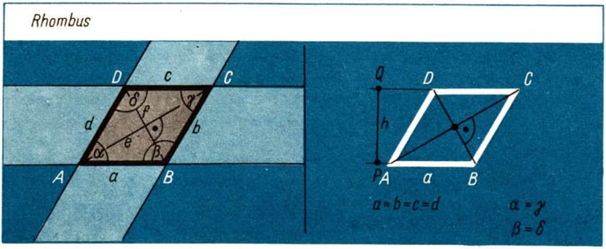
Rhombus

23

Wenn wir zwei Streifen gleicher Breite miteinander zum Schnitt bringen, so erhalten wir ein spezielles Parallelogramm, einen **Rhombus** (Bild D 45).

34 **DEFINITION: Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten nennen wir einen *Rhombus*.**

D 45



- Unter welcher Bedingung bestimmen eine Strecke und ihr Bild bei einer Verschiebung einen Rhombus?
- Stelle die Gesetzmäßigkeiten zusammen, die nach Definition D 34 für einen Rhombus gelten!
- Wieviel Stücke benötigt man zur Konstruktion eines Rhombus?

In einem Rhombus gilt zusätzlich noch, daß die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

35 **SATZ: Ist *ABCD* ein Rhombus, so stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.**

Beweis: Eine Diagonale zerlegt einen Rhombus in zwei kongruente gleichschenklige Teildreiecke (Bild D 45). Wenn wir eines der Teildreiecke an dieser Diagonalen als Spiegelungsachse spiegeln, werden die Lote von den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke auf die jeweilige Basis ineinander überführt.

- Formuliere die Umkehrung des Satzes D 35 und beweise die Umkehrung!

D

Quadrat

24

Wenn wir zwei Streifen gleicher Breite unter einem rechten Winkel miteinander zum Schnitt bringen, so erhalten wir ein spezielles Parallelogramm, das sowohl ein spezielles Rechteck als auch ein spezieller Rhombus ist, ein **Quadrat**.

36 **DEFINITION: Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten und einem rechten Winkel nennen wir ein *Quadrat*.**

- **a)** Stelle alle Sätze zusammen, die für ein Quadrat gelten!
  b) Bilde die Umkehrungen aller Sätze!
  c) Bestimme für je ein spezielles Parallelogramm alle möglichen Symmetrieachsen!

Drachenviereck

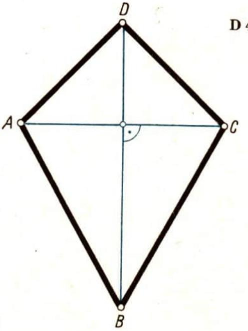
25

Eine weitere Teilmenge spezieller Vierecke erhalten wir durch Spiegelung spitzwinkliger Dreiecke an jeweils einer ihrer Seiten.

- Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und spiegle es an der Geraden AB! Untersuche die Diagonalen des entstehenden Vierecks!

37 **DEFINITION: Ein Viereck $ABCD$, das durch eine Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden kann, nennen wir ein *Drachenviereck*.**

Das Viereck $ABCD$ im Bild D 46 läßt sich durch die Diagonale $\overline{AC}$ in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegen. $ABCD$ ist ein Drachenviereck.



D 46

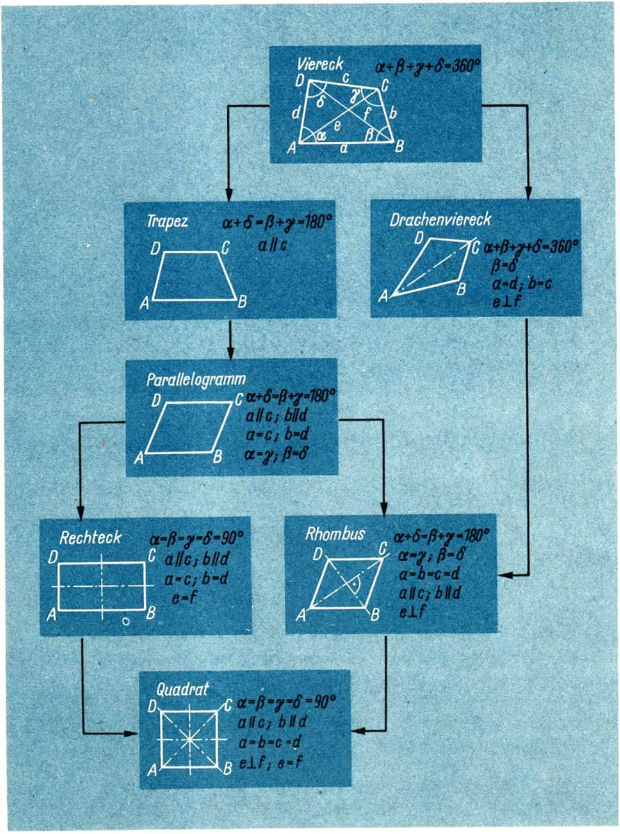
38 **SATZ: In einem Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Eine der beiden Diagonalen wird durch die andere halbiert.**

Der Beweis ergibt sich durch Spiegelung an der Symmetrieachse des Drachenvierecks.

- Formuliere die Umkehrung des Satzes D 38 und beweise sie!
- Wieviel geeignete Stücke benötigt man zur Konstruktion eines Drachenvierecks?
- Begründe, daß Rhombus und Quadrat spezielle Drachenvierecke sind!

Aufgaben d 73 bis 77

Übersicht über die Arten der Vierecke



D

Flächeninhalt und Flächenverwandlung

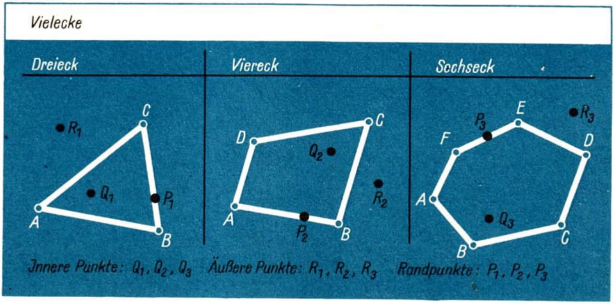
26

Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, ..., n-Ecke werden in ihrer Gesamtheit auch als **Vielecke** bezeichnet (Bild D 47).

Unter der Fläche eines Vielecks verstehen wir die Menge aller inneren Punkte des betreffenden Vielecks. Eine derartige Fläche hat eine bestimmte Größe, ihren **Flächeninhalt**.

● Wiederhole die Flächenmaße!

D 47



39 **DEFINITION: Zwei Vielecke heißen flächengleich, wenn die Inhalte ihrer Flächen gleich groß sind.**

■ Ein Rechteck habe Seiten mit den Längen von 3 cm und 4 cm. Der Flächeninhalt beträgt 12 cm².
Ein anderes Rechteck habe Seiten mit den Längen von 2 cm und 6 cm. Der Inhalt des zweiten Rechtecks beträgt ebenfalls 12 cm².
Beide Rechtecke sind flächengleich.

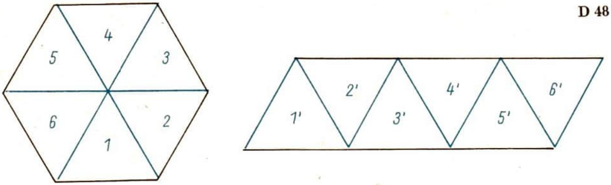
Bei unseren Betrachtungen gehen wir von den beiden folgenden Sätzen aus.

40 **SATZ: Kongruente Vielecke sind flächengleich.**

41 **SATZ: Wird ein Vieleck F in zwei andere Vielecke F_1 und F_2 zerlegt, so ist die Summe der Flächeninhalte von F_1 und F_2 gleich dem Flächeninhalt von F.**

■ Das Bild D 48 zeigt ein regelmäßiges Sechseck; das ist ein Sechseck, dessen Seiten gleich lang sind. Durch die Diagonalen, die durch den Mittelpunkt gehen, wird das Sechseck in sechs gleichseitige kongruente Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke sind also untereinander flächengleich. Der Flächeninhalt des Sechsecks beträgt demnach das Sechsfache des Flächeninhalts eines der Dreiecke.
Das Bild D 48 a zeigt eine andere Anordnung dieser sechs gleichseitigen Dreiecke. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms beträgt ebenfalls das Sechsfache des Flächeninhalts eines der Dreiecke.

D 48



Das Sechseck (Bild D 48) und das Parallelogramm (Bild D 48 a) sind flächengleich. Wir sagen, daß wir im letzten Beispiel das Sechseck in ein Parallelogramm **verwandelt** haben. Von einer **Flächenverwandlung** sprechen wir dann, wenn wir zu einer gegebenen Fläche eine zu ihr flächengleiche konstruiert haben.

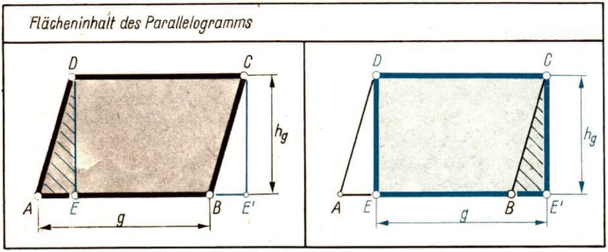
Flächeninhalt von Parallelogrammen

27

Um den Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmen zu können, verwandeln wir es in ein Rechteck (Bild D 49). Dazu fällen wir von den Endpunkten der Seite $\overline{CD}$ des Parallelogramms $ABCD$ die Lote auf die gegenüberliegende Seite bzw. deren Verlängerung. Dadurch entsteht das Rechteck $EE'CD$. Der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AED und des Trapezes $EBCD$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $EE'CD$ ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks $BE'C$ und des Trapezes $EBCD$. Da die beiden Dreiecke AED und $BE'C$ kongruent und damit flächengleich sind, ist der Inhalt des Parallelogramms $ABCD$ gleich dem Inhalt des Rechtecks $EE'CD$.

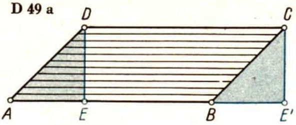
Der Flächeninhalt des Rechtecks ergibt sich aus den Längen der Seiten $\overline{EE'}$ und $\overline{DE}$. Da $\overline{BE'} = \overline{AE}$ gilt, sind die Seiten $\overline{EE'}$ und $\overline{AB}$ gleich lang. Wir wählen die

D 49



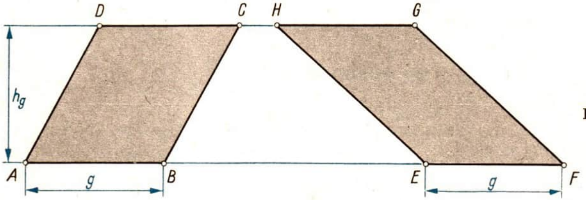
Seite $\overline{AB}$ als Grundseite des Parallelogramms. Die Seite $\overline{DE}$ des Rechtecks ist Höhe im Parallelogramm bezüglich der Seite $\overline{AB}$. Wir nennen $\overline{DE}$ eine zu $\overline{AB}$ gehörige Höhe.

D 49 a



42 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus der Länge einer Grundseite g und der Länge der zugehörigen Höhe h_g.**
$$A = g \cdot h_g$$

Als Grundseite kann jede Seite des Parallelogramms gewählt werden.
Das Bild D 50 zeigt zwei Parallelogramme *ABCD* und *EFGH*.



D 50

● Vergleiche die Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ und die Längen der zugehörigen Höhen! Was läßt sich über die Flächeninhalte der beiden Parallelogramme sagen? Zeige, daß sich beide Parallelogramme in kongruente Rechtecke verwandeln lassen!

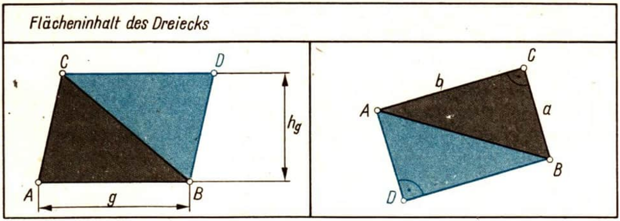
Aufgaben d 78 bis 81

D

Flächeninhalt von Dreiecken

28

Um den Flächeninhalt eines Dreiecks *ABC* zu bestimmen, ergänzen wir es zu einem Parallelogramm (Bild D 51).
Wir konstruieren die Parallele zu *AB* durch den Punkt *C* und die Parallele zu *AC* durch den Punkt *B*. Die beiden Dreiecke *ABC* und *DCB* sind kongruent und damit flächengleich. Der Flächeninhalt des Parallelogramms *ABCD* ergibt sich aus der Summe der Inhalte der beiden Dreiecke *ABC* und *DCB*, er ist also doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.
Wir wählen die Seite $\overline{AB}$ als Grundseite und bezeichnen sie mit *g*. Die zu $\overline{AB}$ gehörige Höhe im Parallelogramm ist gleichzeitig die zu $\overline{AB}$ im Dreieck *ABC* gehörige Höhe. Wir bezeichnen sie mit h_g. Für die Fläche A_P des Parallelogramms gilt $A_P = g \cdot h_g$.



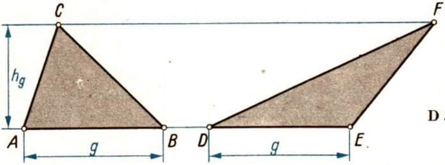
D 51

43 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus der Länge einer Grundseite g des Dreiecks und der Länge der zugehörigen Höhe h_g.**

$$A = \frac{g \cdot h_g}{2}.$$

Als Grundseite kann jede Seite des Dreiecks gewählt werden.

● Beweise, daß zwei Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in den Längen jeweils einer Seite und in den Längen der zugehörigen Höhen übereinstimmen (Bild D 52)!



D 52

Ein Dreieck ABC sei rechtwinklig. Die Seiten a und b des Dreiecks sollen auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen. Wir wählen a als Grundseite. Dann ist b die zu a gehörige Höhe. Für den Flächeninhalt A gilt in diesem Falle:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Aufgaben d 82 bis 95

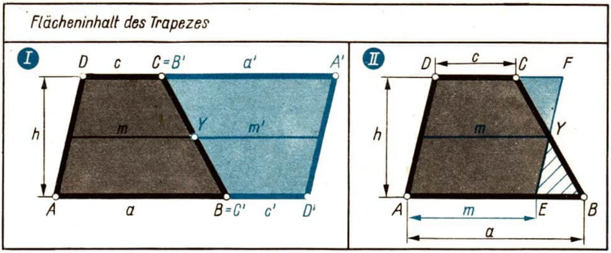
Flächeninhalt von Trapezen

29

Wenn man ein Trapez um den Mittelpunkt eines Schenkels mit einem Drehwinkel von 180° dreht, so bilden Original und Bild zusammen ein Parallelogramm.

● Begründe das!

Der Flächeninhalt eines Trapezes $ABCD$ mit der Mittellinie m, den Grundseiten a und c und der Höhe h soll ermittelt werden (Bild D 53, I).



D 53

Wir drehen das Trapez $ABCD$ um den Mittelpunkt Y des Schenkels $\overline{BC}$ mit einem Drehwinkel von 180°. Original und Bild ergänzen sich zu dem Parallelogramm $AD'A'D$, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$. Wir wählen die Seite $\overline{AD'}$ als Grundseite des Parallelogramms. Eine zugehörige Höhe ist h. Da $\overline{AD'} = a + c'$ und $c' = c$ gilt, erhalten wir den folgenden Satz:

44 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Trapezes mit den Grundseiten a und c und der Höhe h ist**

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h\,.$$

Wir können den Flächeninhalt eines Trapezes auch finden, indem wir durch den Mittelpunkt eines Schenkels die Parallele zu dem anderen Schenkel konstruieren (Bild D 53, II). Es ergibt sich dann $A = m \cdot h$. Da $m = \frac{a+c}{2}$ gilt, kommen wir zu dem gleichen Ergebnis.

Aufgaben d 96 bis 99

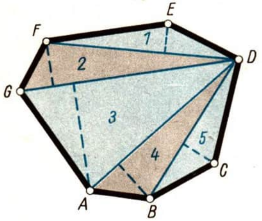
Flächeninhalt von Vielecken

30

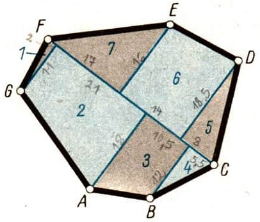
Die Berechnung des Flächeninhalts eines beliebigen Vielecks kann man entweder auf die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken (Dreiecksmethode) oder auf die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken und Trapezen (Trapezmethode) zurückführen.

Der Flächeninhalt eines Siebenecks soll nach der Dreiecksmethode ermittelt werden (Bild D 54).
Wir zerlegen das Siebeneck durch Diagonalen in die Dreiecke 1 bis 5, berechnen deren Flächeninhalte und bilden die Summe. Ist A der Flächeninhalt des Siebenecks und sind A_1 bis A_5 die Inhalte der Dreiecke 1 bis 5, so gilt:
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5\,.$

Der Flächeninhalt des im Bild D 54 dargestellten Siebenecks soll nach der Trapezmethode ermittelt werden (Bild D 55).
Wir zerlegen das Siebeneck durch eine geeignete Diagonale in ein Viereck und in ein Fünfeck. Von den Eckpunkten des Siebenecks, die nicht Endpunkte der



D 54



D 55

Diagonalen sind, konstruieren wir die Lote auf die Diagonale. Wir erhalten vier rechtwinklige Dreiecke und drei Trapeze. Ist A der Flächeninhalt des Siebenecks und sind A_1 bis A_7 die Inhalte der Teilflächen 1 bis 7, so gilt:

$A = A_1 + \ldots + A_7$.

In der Praxis wird diese Methode häufig bevorzugt, da hierbei weniger Einzelmessungen erforderlich sind als bei der Dreiecksmethode.

Der Umfang von Vielecken

31

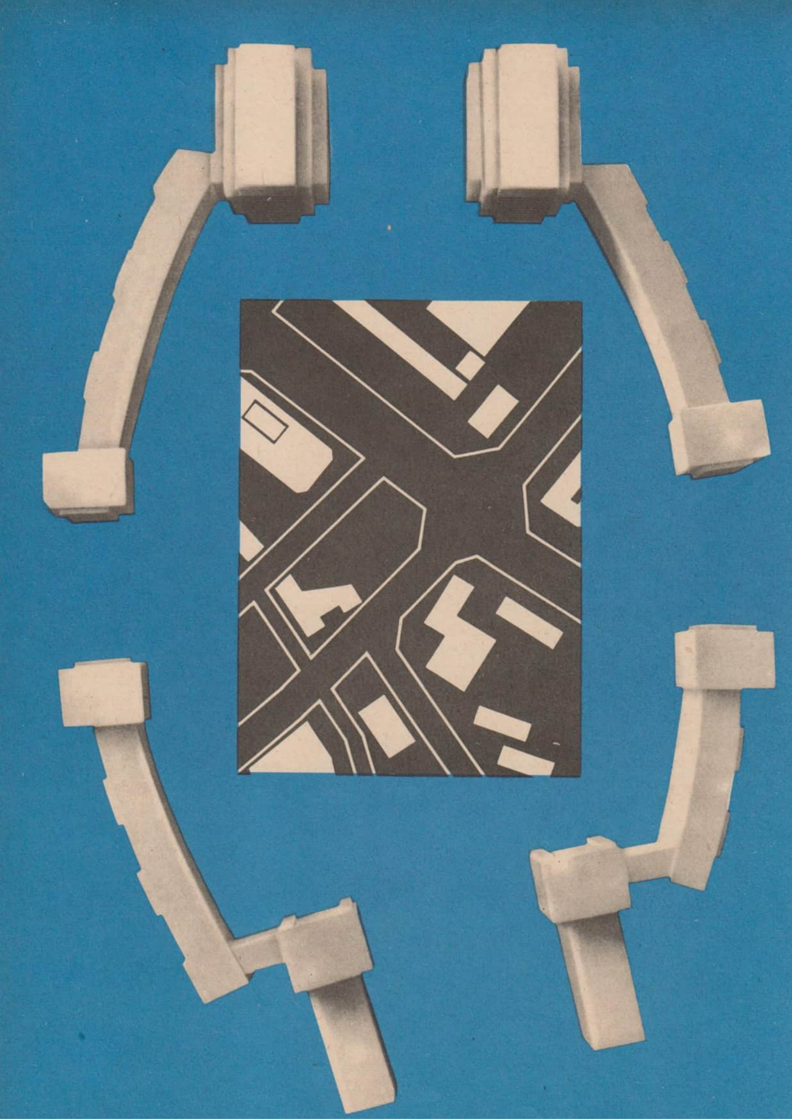
Unter dem **Umfang** eines Vielecks verstehen wir die Länge des geschlossenen Streckenzuges. Sie ergibt sich aus der Summe der einzelnen Streckenlängen. Ist das Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c gegeben und soll der Umfang u des Dreiecks berechnet werden, so addieren wir die Längen der drei Seiten. Wir schreiben dafür:

$u = a + b + c$.

Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sei c, ein Schenkel sei a. Der Umfang ergibt sich dann aus der Länge der Basis und dem Doppelten der Länge eines Schenkels. $u = c + 2a$.

Der Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist $u = 3a$.

Aufgaben d 100 bis 112



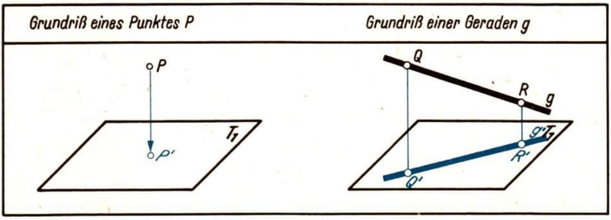
E. Darstellende Geometrie

Grundriß

1

Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist es, räumliche Gegenstände durch ebene Figuren so darzustellen, daß man die Gegenstände aus den Figuren wiedererkennen kann. Das geometrisch einfachste Verfahren, einen Körper auf eine Ebene abzubilden, ist das folgende: Wir fällen von jedem der Punkte P des Körpers aus das Lot auf eine Bildebene (die „Tafel") und fassen den Fußpunkt P' als das Bild des Raumpunktes P auf. Wird die Bildebene horizontal liegend angenommen, so nennen wir das Bild P' eines Punktes P den **Grundriß**. Das Bild E 1 zeigt den Grundriß P' eines Punktes P. Für die Konstruktion des Grundrisses eines ebenflächig begrenzten Körpers genügt es, die Bilder der Eckpunkte des Körpers zu ermitteln.

E 1 und 2



Eine Streichholzschachtel liege mit einer Begrenzungsfläche in der Grundrißebene T_1. Zeichne den Grundriß!

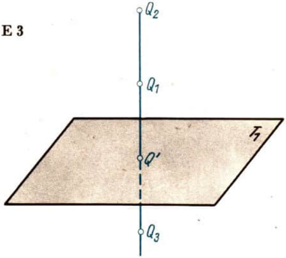
1 **SATZ: Der Grundriß eines Punktes ist wieder ein Punkt.**

Den Grundriß einer Geraden (Strecke) erhält man, indem man den Grundriß zweier Punkte der Geraden (der Endpunkte der Strecke) ermittelt und die Bildpunkte verbindet (Bild E 2). Sind die beiden Bildpunkte voneinander verschieden, so ist dadurch die Bildgerade (Bildstrecke) bestimmt.

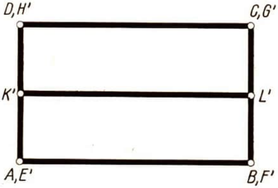
2 **SATZ: Der Grundriß einer Geraden (Strecke) ist im allgemeinen wieder eine Gerade (Strecke).**

Eine Ausnahme tritt dann ein, wenn die Gerade senkrecht auf der Grundrißebene steht. Der Grundriß der betreffenden Geraden ist dann ein Punkt.

E 3



E 4



Erkläre, warum es bei der vorigen Übung Eckpunkte der Streichholzschachtel gibt, die denselben Grundriß besitzen!

Das Bild E 3 zeigt den Grundriß Q' eines Punktes Q. Steht die Gerade Q_2Q_3 im Punkte Q' senkrecht auf T_1, so sind alle Punkte $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ dieser Geraden Originale mit demselben Bild Q'.
Der Punkt Q' ist auch Bild der Geraden Q_2Q_3.

Gib verschiedene Körper an, die den im Bild E 4 dargestellten Grundriß haben!

Aufgaben ė 1 bis 3

E

Grundriß mit Höhenmaßstab

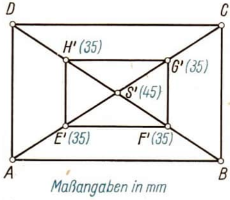
2

Der Grundriß eines Punktes bestimmt die räumliche Lage des Punktes nicht eindeutig. Zur eindeutigen Festlegung sind weitere Angaben erforderlich.

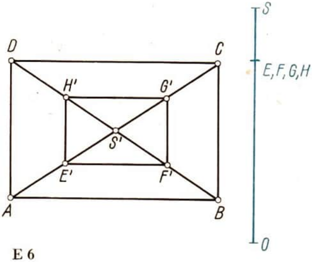
Überlege, wie du einen Punkt P im Gelände von deinem Standort aus eindeutig bestimmst!

Welche Angaben benötigst du zusätzlich, um aus dem Grundriß eines Punktes eindeutig auf die Lage des Punktes selbst schließen zu können?

Wenn man außer dem Bild eines Punktes auch den Abstand des Punktes von der Bildebene kennt, ist der Punkt eindeutig bestimmt. Dabei setzen wir voraus, daß alle betrachteten Punkte „oberhalb" der Grundrißebene liegen.
Um den Abstand eines Punktes *P* von der Grundrißebene anzugeben, gibt es mehrere Möglichkeiten.
1) Wir messen die Höhe eines Punktes in einer bestimmten Längeneinheit und fügen dem Bild die Maßzahl dieser Höhe bei.
Im Bild E 5 liegen die Punkte *A* bis *D* in der Grundrißebene. Die Punkte *E* bis *H* liegen 35 mm über der Grundrißebene. Der Punkt *S* hat eine Höhe von 45 mm. Punkte, die mit ihrem Grundriß zusammenfallen, versehen wir nicht mit einem Strich.



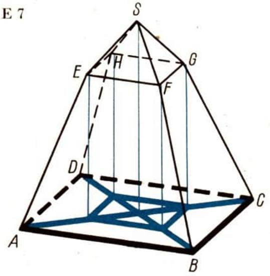
E 5

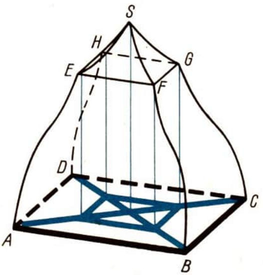


E 6

2) Wir fügen dem Grundriß eines Körpers einen Höhenmaßstab bei, auf dem die Höhen aller wichtigen Punkte des Körpers eingezeichnet sind.
Das Bild E 6 zeigt den Grundriß mit Höhenmaßstab desselben Körpers, der im Bild E 5 dargestellt ist.
Beide Darstellungen ermöglichen es, aus den Grundrissen eindeutig auf die Punkte zu schließen. Es ist jedoch nicht möglich, aus den beiden Darstellungen in eindeutiger Weise auf den Körper selbst zu schließen. Das Bild E 7 zeigt zwei Körper im Schrägbild, die denselben Grundriß haben. Die Bilder E 5 bzw. E 6 stellen den Grundriß beider Körper dar.

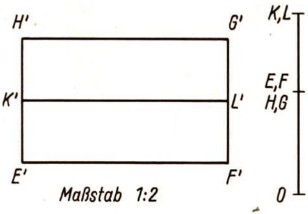
E 7





E

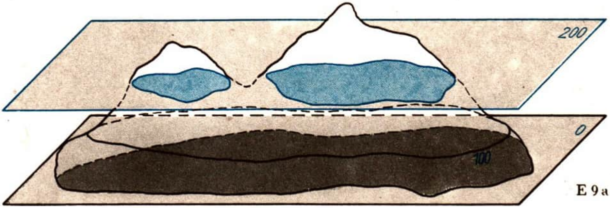
- Fertige ein Modell des in Bild E 8 im Grundriß dargestellten Körpers an! (Beachte dabei den Höhenmaßstab!) Die Begrenzungsflächen des Körpers sollen eben sein.
- Ein Haus mit rechteckigem Grundriß und Satteldach sei 10 m breit und 17 m lang. Der First sei 7,5 m hoch, die Traufen 5 m. Gib den Grundriß des Hauses mit Höhenmaßstab in einem geeigneten Maßstab an!



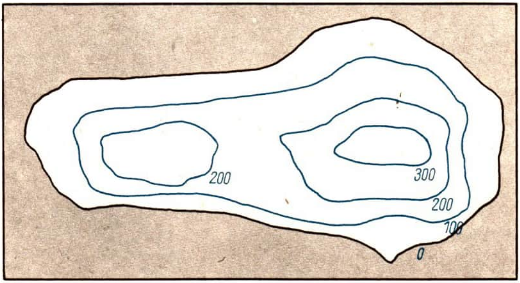
E 8

3

In manchen Landkarten werden die unterschiedlichen Höhen im Gelände folgendermaßen gekennzeichnet. Man denkt sich Geländepunkte gleicher Höhe durch eine sogenannte **Höhenlinie** verbunden. In einem geeigneten Maßstab wird der Grundriß dieser Höhenlinie in der Landkarte angegeben und mit der entsprechenden Höhenangabe versehen.



E 9a



E 9b

Das Bild E 9a zeigt ein Geländemodell im Schrägbild und das Bild E 9b den zugehörigen Grundriß.
Die Höhenlinien kann man sich so entstanden denken, daß Ebenen parallel zur Grundrißebene in bestimmten Höhen durch das Gelände gelegt werden. Diese **Höhenebenen** schneiden dann aus dem Gelände die **Höhenlinien** aus.

Aufgaben e 4 und 5

Aufriß

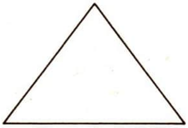
4

Bisher wurden die Körper auf eine Ebene abgebildet, die wir uns horizontal liegend vorgestellt haben. Die Bilder der Körper nannten wir Grundriß, wobei wir die Körper von „oben" betrachteten. Natürlich können wir die Körper auch auf eine anders gelegene Ebene abbilden. Jede beliebige Ebene kann als Bildebene gewählt werden.
Wir wollen jetzt eine Bildebene wählen, die senkrecht auf der Grundrißebene steht. Wenn die Grundrißebene horizontalliegend gedacht wird, so liegt die neu gewählte Bildebene vertikal. Wir nennen eine solche Ebene **Aufrißebene** oder **Aufrißtafel.** Das Bild eines Körpers, das in einer Aufrißebene erzeugt wird, nennen wir **Aufriß.** Der Aufriß wird nach derselben Vorschrift erzeugt wie der Grundriß:
Von geeigneten Punkten des Körpers, der abgebildet werden soll, werden die Lote auf die Aufrißebene gefällt. Die Fußpunkte der Lote sind die Bildpunkte.

Überlege, wie der Aufriß eines Schrankes (eines Kachelofens) aussieht! An welchen Zimmerwänden kann der Aufriß erscheinen?

Das Bild E 10 gibt den Aufriß eines Körpers wieder, der auf der Grundrißebene steht. Um was für einen Körper kann es sich handeln?

Auch aus dem Aufriß allein kann man nicht *in eindeutiger Weise auf den Körper schließen.*



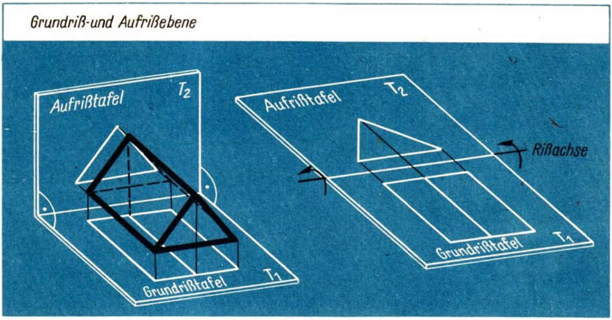
E 10

Aufgaben e 6 bis 9

Zweitafelprojektion

5

Das Bild E 11 veranschaulicht die gegenseitige Lage von Grund- und Aufrißebene. Damit wir den Aufriß in der Zeichenebene erhalten, denken wir uns die Aufrißtafel T_2 in die Grundrißtafel T_1 gedreht. Mit der gleichen Berechtigung könnte man sich die Grundrißtafel T_1 in die Aufrißtafel gedreht denken. In beiden Fällen ist die Schnittgerade beider Tafeln die Drehachse. Diese Drehachse nennen wir **Rißachse.**

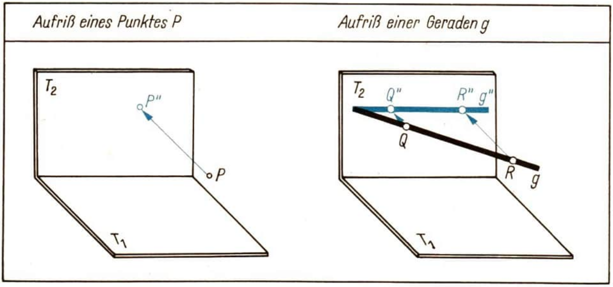


E 11

Da der Aufriß nach derselben Vorschrift wie der Grundriß erzeugt wird, gilt entsprechend den Sätzen E 1 und E 2:

3 **SATZ: Der Aufriß eines Punktes ist wieder ein Punkt. Der Aufriß einer Geraden (Strecke) ist im allgemeinen wieder eine Gerade (Strecke).**

Das Bild eines Punktes P wird im Aufriß mit P'' bezeichnet (Bild E 12).

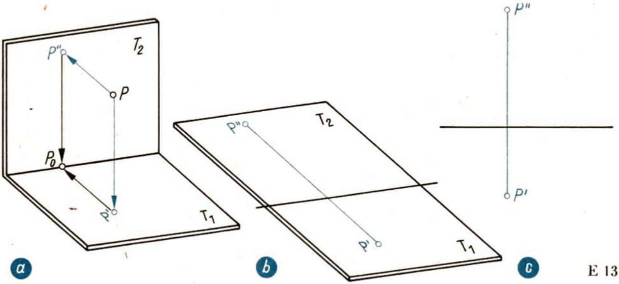


E 12

6

Aus dem Aufriß oder Grundriß allein läßt sich ohne weitere Angaben nicht in eindeutiger Weise auf den Körper schließen.
Um einen klareren Eindruck von einem abgebildeten Körper zu erhalten, verwendet man zur Darstellung das sogenannte **Zweitafelverfahren.** Ein Körper wird

sowohl in der Grundriß- als auch in der Aufrißtafel dargestellt. Grund- und Aufriß stellen gemeinsam das Zweitafelbild des Körpers dar.
Das Bild E 13a veranschaulicht Grund- und Aufriß eines Punktes P in der ursprünglichen Lage zu den Bildtafeln. P' ist der Grundriß, P'' der Aufriß des Punktes P. Der Punkt P_0 ist der gemeinsame Fußpunkt der Lote von P' und P'' auf die Rißachse.



E 13

Veranschauliche die gegenseitige Lage der Punkte P, P', P'' und P_0 an einem geeigneten Modell!
Unter welchen Bedingungen wird durch diese vier Punkte ein Rechteck bzw. ein Quadrat festgelegt? Welche Sonderfälle können eintreten?

Das Bild E 13b veranschaulicht Grund- und Aufriß des Punktes P aus Bild E 13a nach Drehung der Tafel T_2 um die Rißachse in die Grundrißtafel.

Veranschauliche dir den Drehvorgang an einem geeigneten Modell!

Wird die Aufrißtafel in die Grundrißtafel gedreht, liegen Grundriß P' und Aufriß P'' ein und desselben Punktes P auf der Geraden $P'P''$, die senkrecht zur Rißachse verläuft. Diese Gerade nennen wir **Ordnungslinie**.
Ordnungslinie und Rißachse stehen stets senkrecht aufeinander. Das Bild E 13c zeigt das Zweitafelbild eines Punktes P.

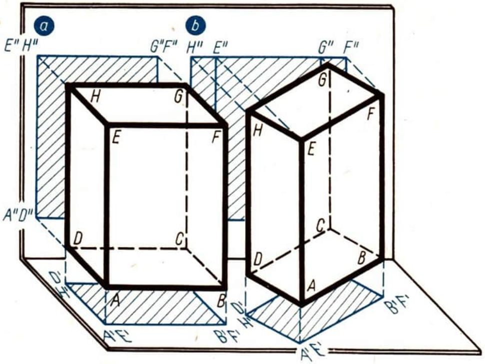
SATZ:

4 **Der Abstand des Grundrisses P' von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes P von der Aufrißtafel T_2 an.**
Der Abstand des Aufrisses P'' von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes P von der Grundrißtafel T_1 an.

E

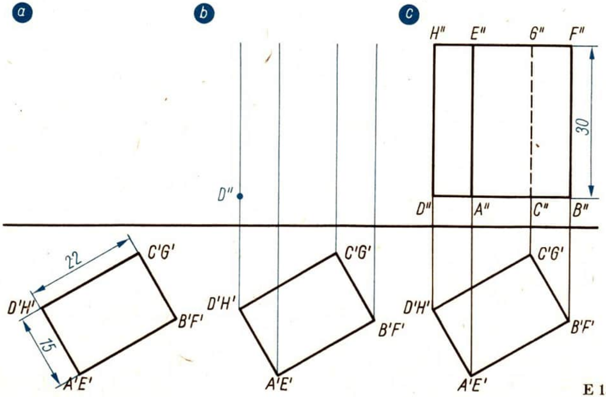
7

Auch im Zusammenhang mit der Darstellung eines Körpers in Grund- und Aufriß unterscheiden wir zwei Aufgabengruppen:
1) Vom Original zum Bild, 2) Vom Bild zum Original.
Zur ersten Gruppe gehört die folgende Aufgabe:

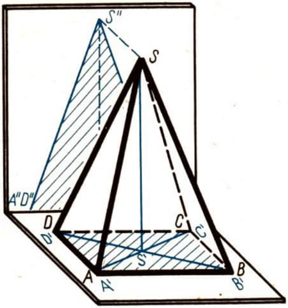


E 14

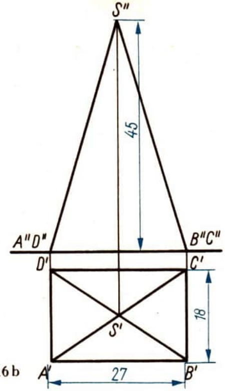
Es soll ein Quader im Grund- und Aufriß dargestellt werden.
Seine Kantenlängen betragen 1,5 cm; 2,2 cm; 3,0 cm.
Bei dieser Aufgabenstellung ist die Lage des gegebenen Quaders zu den Rißtafeln nicht festgelegt. Deshalb können wir uns diese Lage selbst aussuchen. Das Bild E 14 zeigt im Schrägbild zwei Möglichkeiten. Für die Grund-Aufriß-Darstellung wollen wir eine Lage wählen, die dem Schrägbild E 14 b entspricht.
Der Quader steht „über Eck" zur Aufrißtafel in einer geringen Höhe über der Grundrißtafel.



E 15



E 16 a



E 16 b

Die Grundfläche des Quaders denken wir uns parallel zur Grundrißtafel. Die Kanten $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ verlaufen dann senkrecht zur Grundrißtafel und parallel zur Aufrißtafel.

Wir konstruieren nun den Grundriß des Quaders. Er ist ein Rechteck, das zur Grund- bzw. Deckfläche des Quaders kongruent ist (Bild E 15a). Dann zeichnen wir die Ordnungslinien und legen einen Punkt des Aufrisses in beliebiger Höhe über der Rißachse auf der entsprechenden Ordnungslinie fest. (Die Höhe war ja in der Aufgabenstellung nicht festgelegt worden.) Im Bild E 15b wurde der Punkt D'' festgelegt. Durch die Wahl eines Bildpunktes im Aufriß sind alle weiteren Bildpunkte festgelegt.

Das Bild E 16 zeigt als weiteres Beispiel die Darstellung einer vierseitigen Pyramide im Grund- und Aufriß.

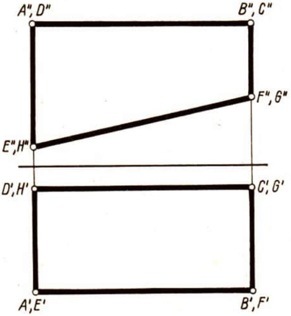
Von der Pyramide wird gefordert, daß die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten 2,7 cm und 1,8 cm ist und daß die Höhe 4,5 cm beträgt. Wir wählen uns die Lage der Pyramide so, daß sie mit ihrer Grundfläche auf der Grundrißtafel steht und daß die Seiten von 2,7 cm Länge parallel zur Rißachse verlaufen.

Zur zweiten Gruppe gehört die folgende Aufgabe:

Es soll ermittelt werden, was für ein Körper im Bild E 17 dargestellt ist.

Wir denken uns über den Bildpunkten im Grundriß die zugehörigen Höhen abgetragen, die wir dem Aufriß entnehmen. Dadurch können wir die Lage der Originalpunkte einzeln bestimmen.

E 17



Aufgaben e 10 bis 23

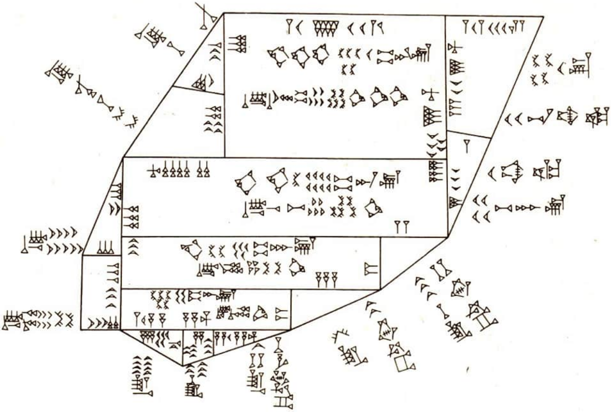


Bild E 18: Babylonischer Felderplan. Die Schriftzeichen in sogenannter Keilschrift bedeuten Zahlzeichen, die den Flächeninhalt der einzelnen Teilflächen angeben

Aus der Geschichte der Geometrie

Wenn Ihr Euch mit Strecken, Winkeln, Dreiecken, Flächen oder Körpern beschäftigt, so treibt Ihr Geometrie. Das Wort „Geometrie" ist schon sehr alt. Schon vor $2\frac{1}{2}$ Jahrtausenden bezeichneten die griechischen Gelehrten diesen Teil der Mathematik mit „Geometrie".

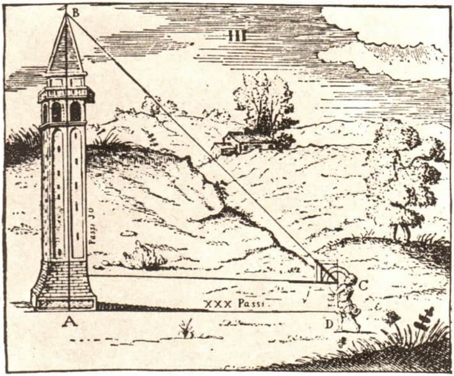
Wörtlich übersetzt heißt Geometrie soviel wie „Erdvermessung, Feldvermessung" (diese Wissenschaft nennen wir heute Geodäsie). Damit weist das Wort „Geometrie" auf den Ursprung der Mathematik hin. Die Griechen wußten, daß die Geometrie aus praktischen Bedürfnissen hervorgegangen ist. Sie hatten selbst aus Ägypten und Mesopotamien geometrische Kenntnisse übernommen. In Ägypten überschwemmte der Nil sehr oft die Felder und spülte die Grenzmarkierungen weg. Wenn das Hochwasser zurückgegangen war, mußten die Felder neu vermessen und abgesteckt werden. Hierzu benötigte man geometrische Kenntnisse und feldmesserische Methoden. Schon vor etwa 4 000 Jahren konnte man Dreiecke, Vierecke und verschiedene Körper berechnen. In Mesopotamien gab es ebenfalls weitentwickelte geometrische Kenntnisse, allerdings konnten sie auch dort nur von ganz wenigen Menschen ausgeübt werden.

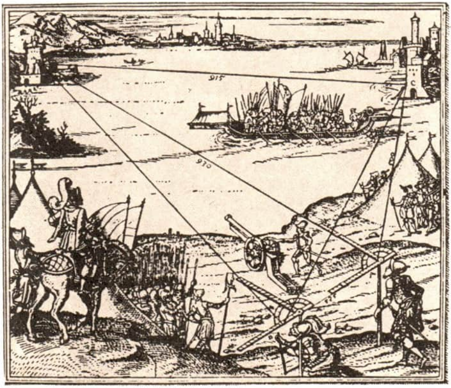
Man fand in den Ruinen der alten Städte unter anderem geometrische „Lehrbücher", Felderpläne (Bild E 18), Grundrisse von Städten und Anleitungen zur Flächenberechnung von Feldern, Segeln und noch vieles andere.

Die griechischen Gelehrten haben ungefähr um 500 v. u. Z. aus der Vielzahl der geometrischen Einzelkenntnisse eine wirkliche Wissenschaft geschaffen. Es wurde definiert, was unter Strecke, Trapez, Parallelogramm, Flächeninhalt, Kongruenz, Quader, Kegel usw. zu verstehen sei, und man ging dazu über, Lehrsätze aufzustellen und zu beweisen.

Einer der berühmtesten Mathematiker heißt EUKLEIDES. Er lebte etwa von 365 bis 300 v. u. Z. und verfaßte eine ausführliche Darstellung der Mathematik seiner Zeit, darunter auch der Geometrie. Dieses Werk hieß *Elemente*. Es ist ein recht schwieriges Buch, und es gibt für Euch noch viel von dem zu lernen, was schon EUKLEIDES wußte.
Dieses Buch ist viele Jahrhunderte immer wieder durch Abschreiben vervielfältigt worden, weil es als Leitfaden der Geometrieausbildung diente. So kommt es, daß der Text der *Elemente* erhalten geblieben ist.
Dieses berühmteste mathematische Lehrbuch hat, wie andere Mathematikbücher jener Zeit, die unruhigen Jahrhunderte, die nach dem Niedergang des alten Griechenland folgten, überstanden.

Bild E 19:
Bestimmung der Höhe eines Turmes mit dem Quadranten
Bild E 20:
Vermessungswesen beim Militär (1607)
Beachte die Verwendung der Meßlatten!





Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch/auff den Linien vñ Ziffern/ sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen/neben der extraction Radicum, vñ von den Proportionen/mit vilen lustigen Fragen vñ Auffgaben/etc. ¶ Deßgleichen ein vollkomner Bericht der Regel Falsi/mit newen Inventionibus/Demonstrationibus/ vnd vortheilen/so biß anher für vnmüglich geschetzt/gebessert/dergleichen noch nie an tag kommen. ¶ Vnd dann von der Geometria/ wie man mancherley Felder vnd ebne/auch allerley Corpora/Regularia vnd Irregularia/messen/Aream finden vñ rechnen sol. Alles durch Simon Jacob von Coburg/Bürger vnd Rechenmeister zu Franckfurt am Main/mit fleiß zusammen getragen/vnd jetzt erstmals getruckt.

Mit Röm. Keyser. Mt. Gnad vnd Freiheit nicht nachzutrucken.
Getruckt zu Franckfurt am Mayn/1565.

Bild E 21: Titelblatt eines Mathematikbuches aus dem Jahre 1565

Als man sich in der Renaissance auf die antiken Errungenschaften besann, erlebte auch dieses Buch eine „Wiedergeburt". Es war eine aufregende Zeit. Buchdruck und Schußwaffen setzten sich durch, die Bauern wehrten sich gegen die Unterdrückung durch die Feudalherren, Amerika und viele andere ferne Länder wurden entdeckt, unbekannte Tier- und Pflanzenarten lernte man kennen.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurden viele Maschinen erfunden und neue technische Verfahren entdeckt. Auch die Mathematik wurde vor viele neue praktische Probleme gestellt. Insbesondere mußten bessere Verfahren der Vermessung gefunden werden (Bild E 19). Sie wurden für militärische Zwecke, z. B. beim Richten der Geschütze und beim Bau von Befestigungen, aber auch bei der Orientierung auf hoher See und bei der Erschließung der neu entdeckten Länder benötigt (Bild E 20).

Die Geometrie hat sich daher gerade im 15. und 16. Jahrhundert rasch weiterentwickelt. Eine gegen früher weitaus größere Anzahl von Menschen benötigte gute geometrisch-mathematische Kenntnisse, so z. B. Kapitäne, Astronomen, Ingenieure, Feldmesser, Architekten, Markscheider. Mit Hilfe des Buchdrucks konnten die dringend benötigten alten und neuen mathematischen Kenntnisse genügend rasch verbreitet werden (Bild E 21).

E

Aufgaben

a

a) Teilbarkeit

1. Bestimme x so, daß jede Gleichung eine richtige Aussage wird! Stelle x als Differenz dar!

a)	b)	c)
$90 + x = 100$	$314 + x = 315$	$x + 113 = 1\,013$
$87 + x = 123$	$x + 12 = 13$	$217 + x = 1\,087$
$22 + x = 101$	$x + 431 = 464$	$365 + x = 2\,103$
$x + 14 = 73$	$211 + x = 213$	$x + 287 = 1\,009$
$x + 10 = 391$	$x + 43 = 50$	$x + 533 = 2\,530$

2. Addiert man zu einer gewissen Zahl 39, so erhält man 75. Wie heißt die Zahl?

3. Welche Zahl muß man zu 76 addieren, um 123 zu erhalten?

4. Welche Zahl muß jeweils zu 29 addiert werden, um a) 61, b) 87, c) 103, d) 135 und e) 290 zu erhalten?

5. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und fülle sie aus! Setze dabei für x eine passende Zahl ein! Gibt es keine passende Zahl, so setze in die letzten beiden Spalten einen Strich!

a	b	$a \lesseqgtr b$	$a + x = b$	$x = b - a$
30	63			
27	113			
12	88			
48	48			
32	18			
69	68			
73	74			

6. Für welche Gleichungen gibt es Zahlen x, die diese Gleichungen erfüllen, d. h. zu richtigen Aussagen werden lassen? Stelle gegebenenfalls diese Zahlen als Differenzen dar! (s. Aufgabe 1)

a)	b)	c)
$60 + x = 73$	$99 + x = 101$	$x + 22 = 22$
$43 + x = 32$	$x + 49 = 27$	$69 + x = 96$
$x + 27 = 27$	$143 + x = 143$	$x + 193 = 141$
$133 + x = 140$	$x + 91 = 19$	$29 + x = 29$
$x + 22 = 11$	$x + 45 = 54$	$x + 84 = 83$

7. Welche Zahl muß man von 187 subtrahieren, um 98 zu erhalten?

8. Kann man zu einer gewissen natürlichen Zahl x 75 addieren und 39 erhalten? (Begründe das Ergebnis!)

9. Welche Zahl muß man zu 69 addieren, um 69 zu erhalten?

10. Bestimme x so, daß jede Gleichung eine richtige Aussage wird! Stelle x als Quotient dar!

a)	b)	c)
$5 \cdot x = 240$	$x \cdot 6 = 750$	$13 \cdot x = 6\,500$
$6 \cdot x = 390$	$6 \cdot x = 270$	$x \cdot 14 = 4\,200$
$x \cdot 9 = 675$	$x \cdot 6 = 570$	$16 \cdot x = 1\,440$
$4 \cdot x = 372$	$8 \cdot x = 440$	$x \cdot 14 = 1\,120$
$x \cdot 8 = 600$	$x \cdot 7 = 406$	$x \cdot 13 = 1\,040$

11. Stelle fest, ob a ein Teiler von b ist! Trifft dies zu, so stelle b in der Form $a \cdot x$ dar!

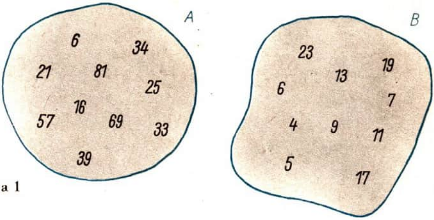
a)

a	5	3	7	2	3	4	6	90	8	9	7	3
b	45	18	12	12	12	12	12	18	56	36	63	72

b)

a	5	9	11	12	13	14	12	15	17	19	18	16
b	165	172	154	160	169	172	181	180	204	247	312	592

12. Ordne jeder Zahl b der Menge B diejenige Zahl a aus der Menge A zu, für die gilt $b \mid a$!



a 1

13. Bilde aus den in der Aufgabe **12** gegebenen Mengen A und B Paare $[b, a]$ mit $b < a$ oder $b = a$!

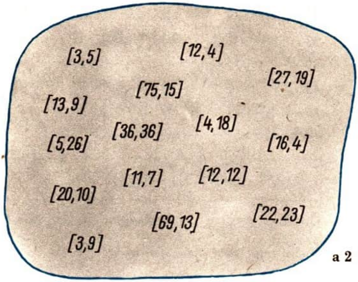
14. Bestimme die Teiler der folgenden Zahlen!

a)	b)	c)	d)	e)	f)
30	64	128	240	372	570
20	72	132	390	600	360
10	69	148	625	750	810
12	81	144	675	540	440
22	96	196	450	270	504

15. Gegeben ist eine Menge von Paaren. Wähle alle Paare $[a, b]$ aus mit $a < b$ oder $a = b$ (Bild a 2)!

16. Wähle aus der in Aufgabe **13** gegebenen Menge von Paaren solche Paare $[b, a]$ aus mit $b \mid a$!

17. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie! Setze dabei für x eine passende Zahl ein! Gibt es keine solche Zahl, so setze einen Strich!



a 2

a	b	$a \mid b$ (ja / nein)	$a \cdot x = b$	$x \mid b$ (ja / nein)
9	72	ja	$9 \cdot 8 = 72$	ja
7	98			
1	13			
22	9			
17	17			
39	3			
9	144			
13	169			
27	9			

18. a) 2 100 : 3
b) 4 200 : 6
c) 5 600 : 7
d) 8 100 : 9
e) 7 200 : 8
f) 3 000 : 2
g) 2 600 : 4
h) 3 600 : 8

19. a) 8 400 : 12
b) 9 800 : 14
c) 6 500 : 13
d) 6 400 : 16
e) 9 100 : 13
f) 9 600 : 16
g) 4 200 : 14
h) 8 400 : 14

20. a) 84 528 : 2
b) 87 453 : 3
c) 753 928 : 4
d) 721 895 : 5
e) 465 774 : 6
f) 164 192 : 7
g) 7 764 216 : 8
h) 277 947 : 9

21. a) 2 976 : 12
b) 4 984 : 14
c) 8 749 : 13
d) 3 088 : 16
e) 7 140 : 15
f) 7 008 : 12
g) 9 282 : 13
h) 7 854 : 14

22. a) 9 630 : 15
b) 8 608 : 16
c) 5 088 : 16
d) 8 957 : 13
e) 9 380 : 14
f) 7 680 : 12
g) 9 152 : 13
h) 6 544 : 16

23. a) 134 228 : 23
b) 17 612 : 37
c) 237 150 : 85
d) 505 940 : 41
e) 132 384 : 48
f) 359 959 : 59
g) 84 135 : 79
h) 410 290 : 89

24. a) 65 627 : 899
b) 248 651 : 403
c) 200 233 : 167
d) 676 053 : 147
e) 151 782 : 123
f) 427 981 : 139
g) 198 743 : 8 641
h) 675 906 : 4 598
i) 73 109 : 2 521
k) 241 289 : 2 389
l) 548 730 : 2 345
m) 211 019 : 2 371

25.

a) 4 720 : 17	**g)** 73 030 : 46		
b) 6 800 : 19	**h)** 13 805 : 57		
c) 7 375 : 13	**i)** 200 000 : 64		
d) 9 565 : 18	**k)** 365 420 : 83		
e) 10 000 : 37	**l)** 760 020 : 74		
f) 23 456 : 29	**m)** 680 541 : 34		

26.

a) 65 174 : 234	**g)** 800 235 : 766
b) 82 160 : 345	**h)** 956 430 : 972
c) 762 689 : 457	**i)** 1 372 514 : 735
d) 350 400 : 586	**k)** 1 000 000 : 2 360
e) 602 130 : 674	**l)** 2 630 450 : 3 425
f) 702 030 : 863	**m)** 4 780 521 : 4 138

27.

605 358	804 579	10 234 567	25 675 839

Dividiere jede der vorstehenden Zahlen durch **a)** 76, **b)** 387, **c)** 1 648, **d)** 3 469!

28. Wenn $a \mid b$, so $a < b$ oder $a = b$.

a) Gilt von dem genannten Satz die Umkehrung?

b) Formuliere die Umkehrung!

29. Bestimme alle Teiler der folgenden Zahlen!
Beispiel: 6 hat die Teiler 1; 2; 3; 6.

a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
12	24	64	96	240
15	28	72	90	180
18	26	48	80	160
21	32	63	92	150
14	36	84	98	360

30. Ordne die folgenden Zahlen **a)** nach ihrer Größe; **b)** nach der Anzahl ihrer Teiler!
150; 54; 211; 39; 48; 1; 45

31. Schreibe aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 50 alle die Zahlen heraus, die **a)** durch 2 teilbar sind, **b)** durch 3 teilbar sind, **c)** durch 6 teilbar sind!
Vergleiche die bei **a)**, **b)** und **c)** erhaltenen Mengen von Zahlen miteinander!

32. Suche aus der Menge der natürlichen Zahlen von 50 bis 100 alle Zahlen heraus, die **a)** durch 9 teilbar sind, **b)** durch 6 teilbar sind und **c)** durch 3 teilbar sind!

33. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Alle durch 9 teilbaren Zahlen sind auch durch 3 teilbar.

b) Alle durch 9 teilbaren Zahlen sind auch durch 6 teilbar.

c) Alle durch 6 teilbaren Zahlen sind auch durch 3 teilbar.

34. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Alle durch 3 teilbaren Zahlen sind auch durch 6 teilbar.

b) Alle durch 3 teilbaren Zahlen sind auch durch 9 teilbar.

c) Alle durch 6 teilbaren Zahlen sind gerade.

35. Wieviel natürliche Zahlen sind in folgenden Mengen enthalten?

a) Menge der durch 10 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

b) Menge der durch 8 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

c) Menge der durch 7 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

d) Menge der durch 5 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

e) Menge der durch 4 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

f) Menge der durch 2 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

36. Wieviel gerade Primzahlen gibt es? Begründe deine Antwort!

37. Schreibe alle Primzahlen auf, die

a) zwischen 1 und 10 b) zwischen 11 und 20 c) zwischen 21 und 30
d) zwischen 31 und 40 e) zwischen 41 und 50 f) zwischen 51 und 60
g) zwischen 61 und 70 h) zwischen 71 und 80 i) zwischen 81 und 90
k) zwischen 91 und 100 liegen!

Wieviele sind es jeweils?

l) Macht es etwas aus, ob man nach der Menge der Primzahlen zwischen 50 und 60 einschließlich oder ausschließlich fragt?

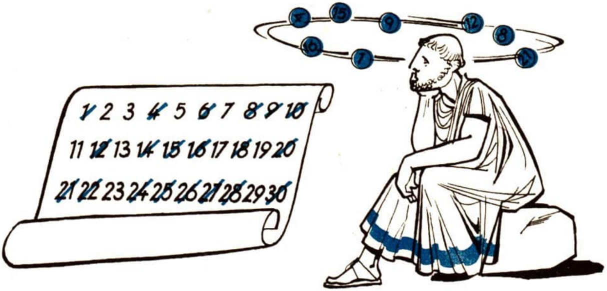
38. Wieviel verschiedene Primteiler haben die folgenden natürlichen Zahlen?
a) 12; b) 47; c) 63; d) 144; e) 64; f) 91; g) 101; h) 246

39. Ergänze folgende Tabelle!

Zahl	35	70	24	42	56	64	81	144
Anzahl der Primteiler								

40. Bestimme die Primzahlen, die zwischen den Zahlen 2 und 100 liegen!
Anleitung: a) Die erste Primzahl ist 2. Andere gerade Zahlen außer 2 können keine Primzahlen sein. Begründe das!

b) Wir schreiben nun die ungeraden Zahlen von 3 bis 9 in eine Zeile, in die nächste Zeile die ungeraden Zahlen von 11 bis 19, in die folgende Zeile die von 21 bis 29 usw. bis zu der Zeile 91 bis 99. Wir streichen nun jede ungerade Zahl durch, die ein Vielfaches einer schon vorhandenen ungeraden Zahl darstellt (zum Beispiel 9 in der ersten Zeile, weil $9 = 3 \cdot 3$ ist). Durch die Streichungen bleiben in der Folge der natürlichen Zahlen von 2 bis 100 nur noch die Primzahlen stehen. Die Zahlenfolge wird also „gesiebt". Der griechische Mathematiker Eratosthenes, der vor ungefähr 2 100 Jahren lebte, hat dieses Verfahren beschrieben. Man bezeichnet es deshalb als „Sieb des Eratosthenes".



a 3

41. Stelle fest, ob die folgenden Zahlen durch 2 (durch 10) teilbar sind!

a) 25 036 b) 19 747 c) 8 300 d) 63 528 e) 36 009 f) 53 044
g) 18 672 h) 528 320 i) 10 001 k) 2 003 l) 3 486 284 m) 9 007 675

Ordne die Zahlen in durch 2 teilbare und in durch 2 nicht teilbare Zahlen!

a

42. Stelle fest, welche der folgenden Zahlen durch 5 teilbar sind!

a) 17 375 b) 39 706 c) 48 250 d) 97 874 e) 66 555 f) 125 973
g) 306 025 h) 2 458 i) 17 625 k) 4 874 252 l) 90 120 m) 21 850

Ordne die Zahlen in durch 5 teilbare und in durch 5 nicht teilbare Zahlen!

43. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 4 und 8!

a) 48 b) 42 c) 64 d) 724 e) 956 f) 5 032
g) 6 420 h) 37 952 i) 3814 k) 49 534 l) 360 912 m) 73 718
n) 95 392 o) 524 598 p) 18 408 q) 24 607 348 r) 867 584 s) 5 781 976

44. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 3 und 9!

a) 81 b) 45 c) 72 d) 987 e) 2 469 f) 384
g) 51 h) 6 192 i) 36 477 k) 984 l) 28 655 m) 72 261
n) 6 321 o) 9 462 p) 361 263 q) 244 992 r) 5 931 792 s) 7 929

45. Welche der folgenden Zahlen sind durch 25 teilbar?

a) 76 000 b) 7 825 c) 89 360 d) 667 500
e) 34 567 f) 34 875 g) 356 465 h) 7 864 300

46. Bilde je zehn Zahlen, die

a) durch 2, b) durch 3, c) durch 4, d) durch 5, e) durch 8, f) durch 9,
g) durch 10, h) durch 25, i) durch 3 und 4 teilbar sind!

47. Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 oder 25 teilbar sind!

a) 3 678 b) 7 690 c) 14 586 d) 33 872 e) 67 924 f) 7 683 500
g) 23 456 100 h) 7 653 300 i) 8 896 500 k) 977 648 l) 7 653 000 m) 54 897 225

48. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Alle durch 25 teilbaren Zahlen sind auch durch 5 teilbar.
b) Alle durch 25 teilbaren Zahlen sind auch durch 10 teilbar.
c) Alle durch 10 teilbaren Zahlen sind auch durch 2 teilbar.
d) Alle durch 2 teilbaren Zahlen sind auch durch 10 teilbar.
e) Alle durch 10 teilbaren Zahlen sind auch durch 5 teilbar.
f) Alle durch 5 teilbaren Zahlen sind auch durch 10 teilbar.
g) Alle durch 8 teilbaren Zahlen sind auch durch 4 teilbar.
h) Alle durch 4 teilbaren Zahlen sind auch durch 8 teilbar.
i) Alle geraden Zahlen sind durch 8 teilbar.

49. a) In welchen Fällen ist eine Zahl durch 12 teilbar?
b) In welchen Fällen ist eine Zahl durch 15 teilbar?
c) In welchen Fällen ist eine Zahl durch 30 teilbar?

50. a) Ist jede durch 5 teilbare Zahl gerade?
b) Ist jede durch 20 teilbare Zahl gerade?

51. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 6!

a) 756 b) 2 847 c) 9 462 d) 5 344 e) 378 961
f) 214 872 g) 7 392 h) 30 462 i) 44 406 k) 97 360

52. Bilde a) fünf dreistellige, b) fünf vierstellige Zahlen, die durch 6 teilbar sind!

53. Schreibe die folgenden Produkte als Potenzen!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **c)** $7 \cdot 7 \cdot 7$ **d)** $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

e) $9 \cdot 9 \cdot 9$ **f)** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ **g)** $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$ **h)** $30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30$

54. Rechne die folgenden Potenzen aus!

2^3; 5^2; 3^2; 5^3; 8^3; 10^4; 2^5; 7^3; 3^4; 4^3; 3^5; 9^2; 7^2; 6^2; 2^6; 6^3; 3^6; 5^1; 4^5

55. Zerlege die natürlichen Zahlen von 2 bis 20 in ihre Primfaktoren!

56. Zerlege folgende Zahlen in Primfaktoren!

25; 27; 42; 45; 48; 54; 64; 81; 100

57. Bestimme die Primfaktoren der folgenden Zahlen!

a) 36; 56; 91; 90; 105; 126; 152; 168; 198; 225; 240

b) 306; 440; 504; 625; 720; 840; 900; 960; 1000

58. Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren die Teiler folgender Zahlen!

a) 180 **b)** 128 **c)** 372 **d)** 1400 **e)** 1440

59. Zerlege **a)** 180, **b)** 320 und **c)** 480 in Primfaktoren!
Gehe dabei jeweils von drei verschiedenen Ausgangszerlegungen aus und vergleiche die Ergebnisse!

Bestimme das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen in den Aufgaben **60** bis **65**!

60. **a)** 4 und 6; 5 und 8; 4 und 10; 4 und 18; 4 und 14

b) 8 und 9; 10 und 15; 8 und 12; 9 und 12; 12 und 15

c) 3 und 4; 3 und 5; 2 und 6; 3 und 8; 3 und 9

d) 4 und 5; 7 und 21; 2 und 11; 5 und 6; 4 und 13

e) 4 und 9; 9 und 13; 5 und 16; 7 und 13; 15 und 20

f) 12 und 15; 18 und 14; 10 und 125; 12 und 38; 8 und 18

g) 24 und 27; 14 und 35; 12 und 39; 15 und 36; 16 und 36

h) 21 und 35; 25 und 35; 27 und 36; 28 und 35; 30 und 36

i) 35 und 40; 12 und 40; 16 und 44; 18 und 48; 20 und 45

k) 24 und 28; 42 und 70; 45 und 54; 60 und 80; 78 und 130

61. **a)** 4, 9 und 24
b) 7, 12 und 21
c) 9, 10 und 30
d) 8, 24 und 30
e) 9, 12 und 18
f) 6, 9 und 21
g) 6, 8 und 10
h) 12, 16 und 20
i) 15, 20 und 30
k) 12, 18 und 24

62. **a)** 10, 18 und 24
b) 15, 20 und 24
c) 25, 30 und 40
d) 14, 20 und 25
e) 27, 36 und 54
f) 40, 24 und 15
g) 28, 35 und 20
h) 15, 40 und 48
i) 24, 32 und 60
k) 12, 18 und 24

63. **a)** 24, 36 und 48
b) 24, 36 und 60
c) 30, 45 und 75
d) 95, 38 und 57
e) 21, 56 und 35
f) 63, 18 und 14
g) 91, 52 und 78
h) 120, 180 und 72

64. **a)** 6, 8, 10 und 12
b) 6, 9, 12 und 15
c) 8, 10, 12 und 14
d) 6, 12, 18 und 24
e) 9, 15, 21 und 27
f) 12, 15, 18 und 24
g) 12, 16, 20 und 24
h) 12, 18, 24 und 30
i) 40, 64, 112 und 88

65. **a)** 6, 8, 10, 12 und 16 **b)** 6, 10, 15, 21 und 25 **c)** 9, 12, 15, 20 und 28

d) 10, 14, 18, 24 und 35 **e)** 16, 27, 12, 9 und 30 **f)** 5, 16, 15, 8 und 10

g) 66, 110 und 154 **h)** 42, 63 und 105 **i)** 160, 240 und 2 000

66. Bestimme alle gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen!

a) 28, 119 und 63 **b)** 36, 72, 81 und 126 **c)** 90, 150 und 180 **d)** 15, 32 und 49

Bestimme in den Aufgaben **67** bis **70** die gemeinsamen Teiler und gib an, welcher von ihnen der größte ist!

67. a) 12 und 18 b) 60 und 45 c) 21 und 28 d) 20 und 24 e) 72 und 63 f) 42 und 56 g) 80 und 64 h) 120 und 96

68. a) 12, 18 und 40 b) 26, 65 und 130 c) 16, 36 und 52 d) 48, 84 und 150 e) 24, 28, 36 und 84 f) 44, 56, 63 und 112

69. a) 18 und 54 b) 16 und 96 c) 24 und 72 d) 12 und 108 e) 13 und 182 f) 27 und 243 g) 43 und 516 h) 23 und 552

70. a) 11 und 27 b) 19 und 82 c) 23 und 47 d) 67 und 199 e) 41 und 164

71. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler durch Primfaktorenzerlegung!

a) 100, 125 und 180 b) 225, 280 und 342 c) 700, 750 und 875
d) 900, 990, 1000 und 1025 e) 3 685 500, 75 600 und 23 400
f) 5 083, 11 339 und 1 955 g) 264 600, 126 000, 3 780 und 3 538

72. Die folgenden Brüche sollen gekürzt werden, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind.

a) $\frac{4}{6}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{18}{45}$ b) $\frac{16}{24}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{24}{36}$; $\frac{26}{39}$; $\frac{35}{45}$; $\frac{36}{60}$

c) $\frac{48}{72}$; $\frac{54}{60}$; $\frac{56}{72}$; $\frac{54}{72}$; $\frac{63}{72}$; $\frac{81}{90}$ d) $\frac{84}{96}$; $\frac{96}{100}$; $\frac{96}{120}$; $\frac{100}{120}$; $\frac{100}{125}$; $\frac{175}{225}$

e) $\frac{225}{250}$; $\frac{216}{240}$; $\frac{240}{360}$; $\frac{250}{375}$; $\frac{270}{360}$; $\frac{300}{450}$ f) $\frac{35}{140}$; $\frac{77}{220}$; $\frac{51}{340}$; $\frac{13}{169}$; $\frac{45}{270}$; $\frac{103}{3090}$

g) $\frac{27}{999}$; $\frac{66}{440}$; $\frac{117}{1300}$; $\frac{300}{525}$; $\frac{1680}{2640}$; $\frac{1250}{1625}$ h) $\frac{450}{480}$; $\frac{327}{351}$; $\frac{840}{960}$; $\frac{264}{312}$; $\frac{128}{192}$; $\frac{501}{1002}$

b) Die gebrochenen Zahlen

1. Bestimme in den folgenden Paaren x so, daß die Brüche durch Kürzen auseinander hervorgehen! Gib die Kürzungsfaktoren an!

a) $\frac{1}{x}$ und $\frac{10}{30}$ b) $\frac{x}{5}$ und $\frac{75}{125}$ c) $\frac{x}{8}$ und $\frac{16}{64}$ d) $\frac{17}{x}$ und $\frac{34}{2}$ e) $\frac{35}{91}$ und $\frac{x}{13}$

f) $\frac{75}{125}$ und $\frac{3}{x}$ g) $\frac{999}{111}$ und $\frac{x}{3}$ h) $\frac{60}{100}$ und $\frac{12}{x}$ i) $\frac{28}{21}$ und $\frac{4}{x}$ k) $\frac{x}{39}$ und $\frac{3}{13}$

2. Den wievielten Teil bildet die größte zweistellige Zahl von der größten vierstelligen Zahl?

3. Den wievielten Teil von der kleinsten vierstelligen ungeraden Zahl bildet das Produkt der Zahlen 7 und 11?

4. Eine LPG säte auf 510 ha Roggen und auf 850 ha Weizen aus.

a) Den wievielten Teil des Ackers, auf dem Weizen gesät wurde, bildet der Acker, auf dem Roggen gesät wurde?

b) Den wievielten Teil des Ackers, auf dem Roggen und Weizen gesät wurde, bildet der Acker, auf dem Roggen gesät wurde?

5. a) Welcher Teil von 24 Stunden ist vergangen, wenn es jetzt 8 Uhr morgens ist?
b) Welcher Teil von 24 Stunden ist vergangen, wenn es jetzt 14 Uhr 40 Minuten ist?

6. Welcher Teil von 24 Stunden ist gleich der Zeitspanne von 10 Uhr bis 19 Uhr 36 Minuten?

7. Wie heißt der Bruch, dessen Zähler 75 ist und dessen Nenner das k. g. V. der Zahlen 300, 450 und 525 ist?

8. Stelle den Bruch dar, dessen Nenner das k. g. V. der Zahlen 20, 30, 75 und dessen Zähler 20 ist!

9. Bestimme in den folgenden Paaren von Brüchen x so, daß sie jeweils durch Erweitern auseinander hervorgehen! Gib die Erweiterungsfaktoren an!

a) $\frac{1}{2}$ und $\frac{x}{6}$ b) $\frac{2}{3}$ und $\frac{x}{60}$ c) $\frac{4}{5}$ und $\frac{x}{70}$ d) $\frac{3}{8}$ und $\frac{x}{96}$ e) $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{x}$

f) $\frac{2}{3}$ und $\frac{144}{x}$ g) $\frac{4}{5}$ und $\frac{132}{x}$ h) $\frac{3}{8}$ und $\frac{303}{x}$ i) $\frac{1}{2}$ und $\frac{x}{72}$ k) $\frac{3}{5}$ und $\frac{150}{x}$

l) $\frac{5}{6}$ und $\frac{x}{1206}$ m) $\frac{7}{8}$ und $\frac{847}{x}$ n) $\frac{14}{15}$ und $\frac{98}{x}$ o) $\frac{11}{12}$ und $\frac{x}{540}$ p) $\frac{16}{25}$ und $\frac{352}{x}$

10. Erweitere folgende Brüche derart, daß ihr Zähler 48 wird!

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{8}{9}$ f) $\frac{12}{13}$

11. Welche Brüche der folgenden Paare sind durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgegangen? Schreibe diese Paare auf und gib die Kürzungs- oder Erweiterungsfaktoren an!

a) $\frac{7}{11}$ und $\frac{91}{143}$ b) $\frac{16}{23}$ und $\frac{144}{207}$ c) $\frac{5}{3}$ und $\frac{50}{32}$ d) $\frac{27}{31}$ und $\frac{189}{217}$

e) $\frac{27}{19}$ und $\frac{3}{2}$ f) $\frac{23}{41}$ und $\frac{322}{576}$ g) $\frac{205}{15}$ und $\frac{100}{7}$ h) $\frac{37}{51}$ und $\frac{851}{1173}$

12. Vervollständige folgende Tabelle, in der jeder Bruch durch den g. g. T. von Zähler und Nenner gekürzt werden soll!

a)

Bruch	g. g. T.	gekürzter Bruch
$\frac{21}{27}$		
$\frac{56}{72}$		
$\frac{84}{108}$		
$\frac{98}{126}$		
$\frac{357}{459}$		

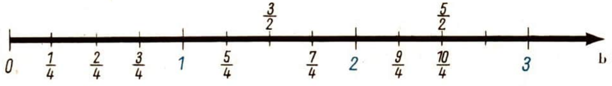
b)

Bruch	g. g. T.	gekürzter Bruch
$\frac{104}{72}$		
$\frac{39}{27}$		
$\frac{169}{117}$		
$\frac{1456}{1008}$		
$\frac{1950}{1350}$		

13. Kürze folgende Brüche so weit wie möglich!

a) $\frac{17 \cdot 3 \cdot 9}{6 \cdot 51 \cdot 15}$ b) $\frac{19 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11}{22 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 19}$ c) $\frac{15 \cdot 13 \cdot 6}{6 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 26}$ d) $\frac{49 \cdot 77 \cdot 56 \cdot 100}{33 \cdot 70 \cdot 42 \cdot 280}$

e) $\frac{37 \cdot 147 \cdot 63 \cdot 25}{111 \cdot 49 \cdot 100 \cdot 3}$ f) $\frac{64 \cdot 22 \cdot 49 \cdot 15}{60 \cdot 42 \cdot 16 \cdot 56}$ g) $\frac{76 \cdot 102 \cdot 130 \cdot 108}{162 \cdot 78 \cdot 68 \cdot 114}$



b 1

14. Gib zu jedem der im Bild b 1 eingezeichneten Punkte des Zahlenstrahls weitere Brüche an, die diesem Punkt zugeordnet sind!

15. A. Suche zu jedem der folgenden Brüche weitere Brüche, die mit ihm in derselben Klasse liegen!

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{70}{95}$ c) $\frac{8}{13}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{7}{9}$ f) $\frac{5}{13}$ g) $\frac{7}{19}$ h) $\frac{144}{200}$

B. Schreibe die gefundenen Brüche in einen Kreis!

C. Wieviel Brüche gehören zu einer Klasse?

16. Liegen die folgenden Brüche jeweils in einer Klasse?

a) $\frac{38}{84}$ und $\frac{50}{120}$ **b)** $\frac{304}{368}$ und $\frac{38}{46}$ **c)** $\frac{100}{240}$ und $\frac{7}{12}$ **d)** $\frac{231}{343}$ und $\frac{429}{637}$

e) $\frac{4}{8}$, $\frac{101}{200}$ und $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{70}{18}$, $\frac{350}{90}$ und $\frac{35}{9}$ **g)** $\frac{7}{12}$, $\frac{21}{36}$, $\frac{4}{6}$ und $\frac{42}{72}$

17. Liegen die Brüche, die in der Aufgabe **11** angegeben sind, jeweils in einer Klasse?

18. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche!

a) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{50}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$

b) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{19}{20}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{17}{25}$; $\frac{23}{50}$; $\frac{39}{50}$

c) $\frac{4}{25}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{40}$; $\frac{17}{40}$; $\frac{73}{125}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{11}{80}$; $\frac{17}{80}$; $\frac{9}{16}$

d) $\frac{5}{16}$; $\frac{11}{32}$; $\frac{37}{64}$; $\frac{11}{128}$; $\frac{99}{125}$; $\frac{23}{80}$; $\frac{81}{625}$; $\frac{19}{1600}$; $\frac{23}{40}$; $\frac{11}{256}$; $\frac{3}{1250}$; $\frac{9}{100}$; $\frac{1}{1024}$

19. Schreibe die folgenden Dezimalbrüche als gemeine Brüche und kürze, soweit es möglich ist!

a)	0,50;	0,25;	0,75;	0,4;	0,6;	0,35;	0,48
b)	0,05;	0,65;	0,64;	0,56;	0,84;	0,45;	0,32
c)	0,125;	0,675;	0,18;	0,655;	0,405 5;	0,936	
d)	0,864;	0,175;	0,625;	0,068;	0,005;	0,375 4	
e)	0,127 5;	0,245;	0,65;	0,984;	0,464;	0,125 2	
f)	0,288;	0,324;	0,52;	0,084;	0,375;	0,408 0	
g)	0,428 5;	0,031 2;	0,852 5;	0,006 4;	0,972 0;	0,482 75	
h)	0,945;	0,053 8;	0,605;	0,485 2;	0,362 75;	0,092 6	

20. Die gebrochene Zahl $\frac{1}{3}$ ist durch Brüche mit den Nennern 9, 6, 12, 27 und 30 darzustellen!

21. Die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ ist durch Brüche mit den Nennern 8, 12, 16, 24, 28 und 40 darzustellen!

22. Kann man die gebrochene Zahl $\frac{1}{5}$ durch Brüche mit den Nennern 7, 12, 16 und 32 darstellen?

23. Die gebrochene Zahl $\frac{2}{3}$ ist durch Brüche mit den Nennern 18; 27; 51 darzustellen.

24. Mache folgende Brüche gleichnamig!

a) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{2}{9}$ und $\frac{5}{36}$ **d)** $\frac{3}{7}$ und $\frac{7}{35}$ **e)** $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{5}$

f) $\frac{7}{16}$ und $\frac{3}{8}$ **g)** $\frac{11}{14}$ und $\frac{13}{140}$ **h)** $\frac{15}{16}$ und $\frac{25}{192}$ **i)** $\frac{7}{10}$ und $\frac{2}{9}$ **k)** $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{8}$

l) $\frac{3}{10}$ und $\frac{17}{9}$ **m)** $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{15}$ **n)** $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{60}$ und $\frac{9}{20}$ **o)** $\frac{11}{50}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{27}{100}$

p) $\frac{17}{20}$, $\frac{7}{150}$ und $\frac{43}{100}$

Bringe die Brüche in den Aufgaben **25** bis **28** auf den gemeinsamen Hauptnenner!

25. a) $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{7}$ **d)** $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{6}$ **e)** $\frac{7}{10}$ und $\frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{7}$ **g)** $\frac{7}{15}$ und $\frac{3}{4}$ **h)** $\frac{5}{11}$ und $\frac{2}{13}$ **i)** $\frac{6}{17}$ und $\frac{3}{10}$ **k)** $\frac{4}{15}$ und $\frac{7}{11}$

26. a) $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ **e)** $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{10}$

f) $\frac{7}{20}$ und $\frac{11}{30}$ **g)** $\frac{5}{18}$ und $\frac{23}{24}$ **h)** $\frac{15}{36}$ und $\frac{11}{24}$ **i)** $\frac{7}{150}$ und $\frac{19}{120}$ **k)** $\frac{11}{360}$ und $\frac{19}{144}$

27. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$
b) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{7}$
d) $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{10}{11}$
e) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ und $\frac{3}{7}$
f) $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{7}{9}$
g) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{15}$
h) $\frac{35}{8}$, $\frac{23}{9}$ und $\frac{24}{7}$
i) $\frac{21}{8}$, $\frac{15}{9}$ und $\frac{46}{15}$

28. a) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{12}$
b) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{1}{4}$
c) $\frac{7}{24}$, $\frac{5}{18}$ und $\frac{3}{40}$
d) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{20}$
e) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$ und $\frac{10}{21}$
f) $\frac{17}{20}$, $\frac{7}{150}$, $\frac{3}{40}$ und $\frac{43}{100}$
g) $\frac{17}{30}$, $\frac{43}{60}$, $\frac{19}{40}$ und $\frac{53}{72}$
h) $\frac{9}{50}$, $\frac{11}{360}$, $\frac{47}{80}$ und $\frac{19}{144}$

29. Bringe folgende Brüche auf den gemeinsamen Hauptnenner und kürze zuvor!

a) $\frac{20}{45}$, $\frac{14}{35}$ und $\frac{32}{44}$
b) $\frac{77}{176}$, $\frac{12}{144}$ und $\frac{75}{200}$
c) $\frac{15}{108}$, $\frac{70}{180}$ und $\frac{20}{225}$
d) $\frac{75}{90}$, $\frac{77}{99}$ und $\frac{15}{60}$
e) $\frac{10}{72}$, $\frac{96}{108}$ und $\frac{70}{1440}$
f) $\frac{405}{120}$, $\frac{350}{225}$ und $\frac{90}{51}$

b

30. Vergleiche folgende gebrochene Zahlen, indem du sie auf den Hauptnenner bringst!

a) $\frac{5}{6}$ und $\frac{45}{54}$ b) $\frac{27}{36}$ und $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ und $\frac{36}{96}$ d) $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$
e) $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ f) $\frac{2}{5}$ und $\frac{7}{10}$ g) $\frac{15}{19}$ und $\frac{21}{25}$ h) $\frac{4}{12}$ und $\frac{9}{27}$
i) $\frac{7}{28}$ und $\frac{11}{44}$ k) $\frac{5}{12}$ und $\frac{7}{16}$ l) $\frac{7}{16}$ und $\frac{9}{20}$ m) $\frac{7}{18}$ und $\frac{5}{14}$
n) $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$ o) $\frac{151}{201}$ und $\frac{3}{4}$ p) $\frac{13}{12}$ und $\frac{143}{132}$ q) $\frac{15}{18}$ und $\frac{70}{84}$

31. Welche der gebrochenen Zahlen $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{8}{9}$ ist die größte und welche die kleinste?

32. Ein Fußgänger kann von einer Siedlung zur Stadt in 6 Stunden laufen, ein anderer in 8 Stunden.

a) Welchen Teil der Entfernung geht jeder von ihnen in 5 Stunden?
b) Welcher Fußgänger geht eine größere Strecke in 5 Stunden?

33. Liegen die Brüche aus der Aufgabe **30** jeweils in einer Klasse?

34. Vergleiche folgende gebrochenen Zahlen miteinander! Welches ist die größere Zahl?

a) $\frac{5}{7}$ oder $\frac{9}{7}$ b) $\frac{8}{27}$ oder $\frac{23}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ oder $\frac{5}{11}$ d) $\frac{57}{98}$ oder $\frac{43}{98}$
e) $\frac{5366}{15899}$ oder $\frac{5366}{15901}$ f) $\frac{487}{987}$ oder $\frac{478}{987}$ g) $\frac{15}{901}$ oder $\frac{15}{900}$ h) $\frac{73}{502}$ oder $\frac{37}{502}$

35. Ordne die folgenden gebrochenen Zahlen der Größe nach! Beginne mit der kleinsten!

$\frac{27}{37}$; $\frac{16}{37}$; $\frac{14}{37}$; $\frac{25}{37}$; $\frac{6}{37}$; $\frac{13}{37}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{5}{37}$; $\frac{7}{37}$; $\frac{29}{37}$

36. Ordne die folgenden gebrochenen Zahlen der Größe nach! Beginne mit der größten!

$\frac{6}{23}$; $\frac{8}{23}$; $\frac{5}{23}$; $\frac{19}{23}$; $\frac{17}{23}$; $\frac{22}{23}$; $\frac{4}{23}$; $\frac{9}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{1}{23}$

37. Ordne die folgenden gebrochenen Zahlen nach der Größe!

a) Beginne mit der größten! $\frac{7}{9}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{7}{13}$; $\frac{7}{29}$; $\frac{7}{30}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{41}$; $\frac{7}{22}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{53}$
b) Beginne mit der kleinsten! $\frac{13}{15}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{13}{29}$; $\frac{13}{60}$; $\frac{13}{29}$; $\frac{13}{21}$; $\frac{13}{16}$; $\frac{13}{120}$; $\frac{13}{111}$; $\frac{13}{199}$

38. Ordne folgende gebrochene Zahlen nach der Größe! Beginne mit der kleinsten!

a) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{5}{5}$;

b) $\frac{1}{12}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{11}$

c) $\frac{4}{23}$; $\frac{11}{18}$; $\frac{29}{11}$; $\frac{7}{22}$; $\frac{14}{18}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{1}{23}$; $\frac{7}{18}$; $\frac{27}{11}$; $\frac{6}{23}$; $\frac{9}{18}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{15}{11}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{15}{18}$; $\frac{15}{12}$

b

39. Vervollständige folgende Tabelle!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$	Vergleich von $a \cdot b$ und $b \cdot c$	Vergleich von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	42	40	$42 > 40$	$\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$
$\frac{5}{13}$	$\frac{9}{17}$				
$\frac{9}{15}$	$\frac{11}{19}$				
$\frac{21}{36}$	$\frac{29}{41}$				
$\frac{48}{52}$	$\frac{60}{65}$				
$\frac{37}{51}$	$\frac{41}{59}$				
$\frac{201}{97}$	$\frac{171}{109}$				

40. Vergleiche die folgenden gebrochenen Zahlen miteinander, ohne die gegebenen Brüche gleichnamig zu machen!

a) $\frac{19}{102}$ und $\frac{40}{405}$ b) $\frac{96}{57}$ und $\frac{155}{100}$ c) $\frac{72}{81}$ und $\frac{184}{207}$ d) $\frac{50}{71}$ und $\frac{118}{121}$

e) $\frac{39}{102}$ und $\frac{2}{5}$ f) $\frac{10}{7}$ und $\frac{88}{72}$ g) $\frac{209}{113}$ und $\frac{95}{63}$ h) $\frac{215}{105}$ und $\frac{351}{189}$

41. Schreibe auf, welcher der drei Fälle $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$ für die natürlichen Zahlen der folgenden Tabelle gilt!

a	7	8	70	463	5 376	70 810
b	11	8	93	271	5 376	69 001

42. Ordne folgende gebrochene Zahlen nach ihrer Größe!

a) $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{7}{35}$; $\frac{10}{11}$ b) $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{16}{17}$

c) $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{16}{12}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{20}{23}$

43. Zeige, welche der folgenden gebrochenen Zahlen kleiner und welche größer als $\frac{1}{2}$ sind!

$\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{9}$

44. Stelle folgende gebrochene Zahlen am Zahlenstrahl dar! Vergleiche die Zahlen miteinander!

a) $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{9}{8}$ b) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{2}$

c) $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{20}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{21}{20}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{1}{10}$

45. a) Stelle $\frac{1}{10}$ und $\frac{9}{10}$ am Zahlenstrahl dar!

b) Stelle zehn weitere gebrochene Zahlen, die zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{9}{10}$ liegen, an demselben Zahlenstrahl dar!

c) Wieviel gebrochene Zahlen gibt es, die zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{9}{10}$ liegen?

46. a) Gib gebrochene Zahlen an zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$!

b) Wieviel gebrochene Zahlen gibt es, die zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ liegen?

47. Vergleiche folgende Dezimalbrüche miteinander, indem du sie gleichnamig machst! Welche ist die größte gebrochene Zahl?

a) 1,372 oder 1,732 1 b) 22,07 oder 22,703 c) 0,034 oder 0,003 49
d) 1,27 oder 1,027 e) 12,13 oder 12,091 f) 237,05 oder 237,501
g) 14,79 oder 14,97 h) 12,5 oder 12,49 i) 0,01 oder 0,001
k) 9,99 oder 9,999 l) 7,002 oder 7,01 m) 3,55 oder 3,505
n) 128,03 oder 128,029 o) 0,701 oder 0,702 p) 5,030 4 oder 5,040 3

48. Vergleiche folgende gebrochene Zahlen miteinander, indem du den Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelst!
Welche ist die größere gebrochene Zahl?

a) $\frac{7}{30}$ oder 0,25 b) 0,91 oder $\frac{9}{10}$ c) 0,6 oder $\frac{4}{5}$ d) $\frac{4}{8}$ oder 0,375
e) 0,95 oder $\frac{4}{5}$ f) 0,125 oder $\frac{1}{5}$ g) $\frac{11}{9}$ oder 1,24 h) 1,36 oder $\frac{5}{4}$
i) 2,55 oder $\frac{11}{4}$ k) $\frac{7}{9}$ oder 0,77 l) $\frac{3}{11}$ oder 0,255 m) $\frac{12}{19}$ oder 0,66
n) $\frac{136}{137}$ oder 0,99 o) $\frac{72}{75}$ oder 0,98 p) 0,004 oder $\frac{1}{240}$ q) 0,326 75 oder $\frac{4}{13}$

49. Vergleiche folgende gebrochene Zahlen miteinander, indem du den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelst! Welche ist die größere gebrochene Zahl?

a) $\frac{7}{8}$ oder 0,9 b) $\frac{3}{4}$ oder 0,76 c) $\frac{3}{2}$ oder 1,49 d) $\frac{11}{20}$ oder 0,54
e) $\frac{9}{16}$ oder 0,562 4 f) $\frac{12}{25}$ oder 0,48 g) $\frac{19}{80}$ oder 0,237 4 h) $\frac{17}{16}$ oder 1,007
i) 0,076 oder $\frac{3}{40}$ k) $\frac{3}{8}$ oder 0,5 l) $\frac{19}{80}$ oder 0,237 m) $\frac{13}{32}$ oder 0,41

50. a) Stelle 0,4 und 0,9 am Zahlenstrahl dar!

b) Gib zehn weitere gebrochene Zahlen in der Dezimalbruchschreibweise an, die zwischen 0,4 und 0,9 liegen!

51. Wieviel gebrochene Zahlen liegen zwischen 3,2 und 3,9? Gib zehn davon an!

52. Ordne folgende gebrochene Zahlen nach ihrer Größe!

a) 2,9; 2,034; 2,102; 2,701; 2,8; 2,902 1; 2,099; 2,391; 2,290 4; 2,199

b) 10,1; 10,11; 10,99; 10,39; 10,9; 10,89; 10,19; 10,119; 10,911; 10,399 1

53. Ordne folgende gebrochene Zahlen der Größe nach! Gib an, welche der folgenden gebrochenen Zahlen kleiner als 1 und welche der Zahlen größer als 1 sind!

$\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{5}$; 0,73; 1,899; 27,004; $\frac{143}{199}$; $\frac{0}{27}$; $\frac{1}{25}$; 0,075; 1,002 5; $\frac{87}{86}$; $\frac{111}{112}$; 12,5; $\frac{3}{1}$; 0,125; $\frac{7}{9}$

b

54. Welche der in der Aufgabe **53** angegebenen gebrochenen Zahlen sind durch echte Brüche dargestellt?

55. Welche der in der Aufgabe **53** angegebenen gebrochenen Zahlen sind durch unechte Brüche dargestellt?

Addiere folgende gebrochene Zahlen!

56. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{7}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ h) $\frac{2}{9}+\frac{3}{4}$ i) $\frac{1}{8}+\frac{5}{24}$ k) $\frac{5}{6}+\frac{5}{12}$

57. a) $\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{9}+\frac{5}{18}$ e) $\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$ f) $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}$ g) $\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$ h) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{6}+\frac{19}{24}$ k) $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}$

58. a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{12}+\frac{5}{8}$ c) $\frac{9}{10}+\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{8}+\frac{7}{16}$ e) $\frac{4}{5}+\frac{9}{20}$ f) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ g) $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ h) $\frac{2}{7}+\frac{4}{21}$ i) $\frac{4}{5}+\frac{17}{30}$ k) $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$

59. a) $\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{7}+\frac{3}{14}$ c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$ d) $\frac{8}{15}+\frac{23}{60}$ e) $\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$ f) $\frac{3}{10}+\frac{7}{40}$ g) $\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ i) $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}$ k) $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$

60. a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{8}+\frac{3}{7}$ e) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ f) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ g) $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$ h) $\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$ i) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ k) $\frac{1}{6}+\frac{5}{9}$

61.

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$	$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$	$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$	$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{8}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{15}$				
$\frac{23}{24}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{1}{4}$				

62. a) $\frac{5}{72}+\frac{7}{360}$ b) $\frac{7}{18}+\frac{8}{15}$ c) $\frac{1}{6}+\frac{23}{42}$ d) $\frac{1}{4}+\frac{11}{18}$ e) $\frac{59}{180}+\frac{4}{15}$

63. a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$ c) $\frac{19}{24}+\frac{25}{36}$ d) $\frac{9}{10}+\frac{11}{12}$ e) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$ f) $\frac{11}{15}+\frac{21}{25}$ g) $\frac{11}{15}+\frac{9}{25}$ h) $\frac{4}{9}+\frac{7}{15}$ i) $\frac{5}{8}+\frac{7}{10}$

64. a) $\frac{13}{28}+\frac{8}{25}$ b) $\frac{7}{18}+\frac{11}{15}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{19}$ d) $\frac{7}{10}+\frac{29}{50}$ e) $\frac{11}{12}+\frac{8}{15}$ f) $\frac{11}{20}+\frac{17}{35}$ g) $\frac{17}{20}+\frac{7}{12}$ h) $\frac{8}{21}+\frac{11}{14}$ i) $\frac{4}{9}+\frac{8}{15}$

65. a) $\frac{11}{30}+\frac{8}{9}$ b) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ c) $\frac{17}{30}+\frac{11}{45}$ d) $\frac{5}{8}+\frac{13}{15}$ e) $\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$ f) $\frac{23}{24}+\frac{7}{9}$ g) $\frac{15}{26}+\frac{17}{39}$ h) $\frac{5}{24}+\frac{9}{16}$ i) $\frac{4}{15}+\frac{3}{10}$

66. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ e) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ f) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ g) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ h) $\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$

67. a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{7}{10}$ e) $\frac{3}{8}+\frac{9}{11}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{10}+\frac{7}{8}+\frac{4}{5}$ f) $\frac{5}{12}+\frac{4}{9}+\frac{3}{8}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{7}$ g) $\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$

d) $\frac{3}{5}+\frac{9}{10}+\frac{11}{18}$ h) $\frac{7}{10}+\frac{9}{14}+\frac{2}{7}$

68. a) $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{11}{20}$

b) $\frac{11}{15}+\frac{17}{35}+\frac{8}{21}$

c) $\frac{11}{24}+\frac{19}{32}+\frac{27}{40}$

d) $\frac{11}{15}+\frac{18}{25}+\frac{4}{5}$

69. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{9}{20}+\frac{5}{8}+\frac{9}{10}$

b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{5}{12}+\frac{19}{30}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$

70. a) $\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+\frac{9}{14}+\frac{5}{12}+\frac{16}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}$

b) $\frac{11}{45}+\frac{7}{12}+\frac{19}{30}+\frac{3}{10}+\frac{5}{6}+\frac{13}{15}$

c) $\frac{5}{16}+\frac{5}{8}+\frac{31}{48}+\frac{8}{15}+\frac{3}{5}+\frac{11}{12}+\frac{11}{24}$

71. a) $1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ e) $15\frac{9}{10}+\frac{79}{100}$

b) $4\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ f) $1\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}$

c) $9\frac{1}{2}+\frac{5}{6}$ g) $4\frac{3}{5}+3\frac{1}{3}$

d) $12\frac{3}{8}+\frac{4}{5}$ h) $7\frac{2}{9}+5\frac{4}{5}$

72. a) $10\frac{5}{8}+5\frac{5}{6}$ e) $3\frac{1}{2}+15\frac{7}{15}$

b) $20\frac{5}{7}+18\frac{5}{9}$ f) $35\frac{13}{14}+18\frac{19}{21}$

c) $4\frac{3}{10}+5\frac{5}{12}$ g) $51\frac{8}{9}+38\frac{13}{15}$

d) $15\frac{9}{10}+12\frac{3}{8}$ h) $17\frac{11}{20}+15\frac{9}{35}$

73. a) $8\frac{14}{15}+38\frac{7}{24}$

b) $19\frac{9}{10}+24\frac{53}{100}$

c) $35\frac{19}{48}+19\frac{17}{60}$

d) $19\frac{13}{16}+83\frac{39}{40}$

74.

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{7}$	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{5}{12}$	$38\frac{9}{25}$	$15\frac{5}{7}$
$+3\frac{3}{4}$	$+29\frac{7}{12}$	$+15\frac{9}{10}$	$+9\frac{3}{8}$	$+5\frac{7}{10}$	$+\frac{19}{21}$
$+9\frac{2}{5}$	$+4\frac{5}{6}$	$+33\frac{11}{15}$	$+27\frac{2}{3}$	$+65\frac{11}{15}$	$+8\frac{34}{35}$
$+2\frac{1}{10}$	$+36\frac{3}{4}$	$+8\frac{4}{5}$	$+18\frac{11}{20}$	$+14\frac{5}{8}$	$+5\frac{17}{20}$
$+8\frac{9}{20}$	$+9\frac{1}{2}$	$+29\frac{13}{20}$	$+49\frac{1}{6}$	$+9\frac{19}{30}$	$+12\frac{3}{4}$

75. Addiere folgende Zahlen, indem du möglichst vorteilhaft rechnest!

a) $\frac{3}{4}+\frac{7}{9}+\frac{27}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+\frac{13}{4}$ b) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+\frac{13}{4}+\frac{31}{6}+7\frac{5}{12}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{15}+1\frac{5}{13}+3\frac{1}{5}+4\frac{3}{26}$

e) $\frac{1}{2}+\frac{3}{14}+\frac{3}{2}+\frac{5}{14}+\frac{3}{7}$ f) $4\frac{5}{16}+2\frac{1}{2}+\frac{23}{15}+\frac{3}{16}+5\frac{7}{15}$

76. Prüfe folgende Gleichungen!

a) $\frac{17}{24}+\frac{8}{15}+1\frac{7}{8}=\frac{3}{4}+\frac{11}{30}$ b) $\frac{19}{60}+\frac{17}{40}+\frac{11}{24}=\frac{5}{8}+\frac{23}{40}$

77. Führe die Addition aus und mache die Probe, indem du in anderer Reihenfolge addierst!

a) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}+\frac{3}{10}+\frac{9}{20}$ b) $\frac{2}{9}+\frac{5}{12}+\frac{4}{9}+\frac{7}{12}$ c) $\frac{4}{9}+\frac{5}{8}+\frac{7}{10}+\frac{7}{30}$

d) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}+\frac{7}{36}$ e) $\frac{5}{44}+\frac{1}{3}+\frac{2}{11}+\frac{5}{66}+\frac{13}{44}$ f) $\frac{17}{25}+\frac{47}{75}+\frac{341}{525}+\frac{92}{175}$

78. Überprüfe die Richtigkeit folgender Gleichungen und formuliere die mit diesen Gleichungen ausgedrückten Gesetze der Addition von gebrochenen Zahlen!

a) $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$ b) $\frac{8}{15}+\frac{7}{16}+\frac{7}{15}+2\frac{1}{16}=\left(\frac{8}{15}+\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{7}{16}+2\frac{1}{16}\right)$

c) $\left(\frac{15}{64}+\frac{17}{64}\right)+\frac{3}{64}=\left(\frac{15}{64}+\frac{3}{64}\right)+\frac{17}{64}$

79. Berechne auf zweierlei Art!

a) $3\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)$ b) $2\frac{7}{720} + \left(3\frac{31}{144} + \frac{53}{720}\right)$ c) $\left(4\frac{5}{9} + \frac{11}{36}\right) + 2\frac{4}{9}$

80. Bilde Paare von gebrochenen Zahlen, indem du je einen Bruch aus der Menge A und einen Bruch aus der Menge B in der Form $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ schreibst! Berechne jeweils die Summe $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$!

A

a) $\frac{17}{24}$	b) $\frac{12}{29}$	c) $\frac{14}{35}$
d) $1\frac{5}{9}$	e) $2\frac{8}{9}$	f) $5\frac{3}{8}$
g) $\frac{12}{7}$	h) $\frac{29}{10}$	i) $\frac{15}{14}$

B

$\frac{12}{15}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{22}$	$\frac{18}{21}$
$3\frac{1}{5}$	$7\frac{2}{3}$	$5\frac{3}{8}$	$2\frac{5}{9}$	$9\frac{8}{9}$
$\frac{15}{13}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$

Addiere die gebrochenen Zahlen in den Aufgaben **81** bis **84**!

81. a) 3,7 + 4,89 + 11,231 + 7,201 + 8,4
b) 11,93 + 9,712 + 4,3 + 0,02 + 0,1 + 10,002
c) 21,39 + 12,094 + 27,2 + 0,801 + 0,309 + 11,7
d) 121,978 + 112,03 + 0,002 + 70,77 + 11,001 + 119,910
e) 234,567 + 60,7 + 782,6 + 954,8 + 13,265 + 107,53
f) 459,37 + 2981,4 + 579,004 + 362,491 + 1,007 + 2777,5
g) 379,007 + 8,04 + 0,002 + 297,834 + 1000,125 + 7,334
h) 298,07 + 0,289 + 2,897 + 28,780 + 49,3 + 4,93 + 0,493

82. a) $\frac{3}{7} + 0{,}7$
b) $4\frac{1}{2} + 3{,}68$
c) $0{,}9 + \frac{2}{3}$
d) $12\frac{5}{7} + 4{,}5$
e) $0{,}6 + \frac{2}{5}$
f) $2{,}439 + \frac{3}{8}$
g) $1{,}7 + \frac{5}{6}$
h) $3\frac{5}{9} + 8{,}436$

83. a) $1{,}9 + \frac{7}{25}$
b) $9\frac{11}{50} + 2{,}6$
c) $3\frac{2}{3} + 0{,}89$
d) $0{,}39 + \frac{11}{13}$
c) $2{,}75 + \frac{5}{8}$
f) $0{,}476 + \frac{17}{20}$
g) $3\frac{7}{12} + 1{,}9$
h) $8{,}474 + 5\frac{17}{60}$

84. a) $12{,}7 + \frac{8}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}9$
b) $\frac{9}{7} + 11{,}5 + \frac{3}{2} + 121{,}93$
c) $\frac{7}{12} + 0{,}35 + 0{,}45 + \frac{9}{20} + \frac{7}{30}$
d) $\frac{1}{6} + \frac{7}{9} + 27{,}34 + 12{,}25$
e) $\frac{2}{15} + 1{,}47 + 3{,}24 + \frac{3}{26} + 7{,}89 + \frac{1}{2}$
f) $\frac{3}{4} + 0{,}24 + \frac{5}{12} + 7{,}38 + \frac{7}{36} + 11{,}75$
g) $\frac{17}{25} + 28{,}37 + \frac{47}{75} + 0{,}35 + \frac{94}{175} + 0{,}02$
h) $\frac{341}{525} + 1{,}85 + \frac{4}{9} + 0{,}07 + \frac{3}{64} + 2{,}15$

85. Die Summe $\left(5\frac{5}{8}\,\text{km} + 1\frac{4}{5}\,\text{km} + 520\,\text{m}\right)$ ist in Kilometern und Metern auszudrücken.

86. Die Summe $\left(2\frac{1}{2}\,\text{t} + 3\frac{3}{4}\,\text{dt} + 305\frac{2}{5}\,\text{kg}\right)$ ist in Kilogramm, Dezitonnen und Tonnen auszudrücken.

87. Ein Schüler, der sich zu Hause für den Unterricht am folgenden Tag vorbereitet, beschäftigte sich $\frac{3}{4}$ Stunden mit Mathematik, $\frac{5}{6}$ Stunden mit Deutsch und $\frac{1}{2}$ Stunde mit Geschichte. Wie lange war er beschäftigt?

b 2

88. Auf dem Gipfel eines Felsens, der die Höhe von $43\frac{2}{5}$ m über dem Meeresspiegel hat, wurde ein Leuchtturm gebaut. In einer Höhe von $22\frac{1}{2}$ m vom Fußpunkt des Leuchtturms befindet sich ein Scheinwerfer. Wie hoch ist dieser Scheinwerfer über dem Meeresspiegel gelegen?

89. Bestimme die Zahl, die um $3\frac{7}{15}$ größer als $5\frac{11}{12}$ ist!

90. Bestimme die Zahl, die um $13\frac{9}{34}$ größer als $107\frac{13}{51}$ ist!

91. Die Traktorenbrigade einer LPG mußte ein Feld pflügen. Am ersten Tag pflügte die Brigade $\frac{2}{15}$, am zweiten 0,15 und am dritten $\frac{7}{30}$ des gesamten Feldes um. Welchen Teil des ganzen Feldes pflügte die Brigade in 3 Tagen um?

92. Ein Kahn fuhr in der ersten Stunde $6\frac{3}{4}$ km, in der zweiten 1,5 km mehr als in der ersten, und in der dritten Stunde fuhr er $\frac{5}{8}$ km mehr als in der zweiten Stunde. Welche Strecke fuhr der Kahn in den drei Stunden?

93. Aus einem Benzinbehälter wurden in den ersten Kraftwagen $25\frac{1}{2}$ l gefüllt, in den zweiten $3\frac{3}{4}$ l mehr. Im Behälter blieb noch soviel, wie in den zweiten Wagen gefüllt wurde. Wieviel Liter Benzin waren zu Anfang in dem Behälter?

94. Ein Stein, der in einen Brunnen geworfen wurde, fiel in der ersten Sekunde $4\frac{9}{10}$ m und in jeder folgenden Sekunde $9\frac{4}{5}$ m mehr als in der vorhergehenden. Welche Tiefe hatte der Brunnen, wenn der Stein das Wasser im Brunnen nach 3 Sekunden traf?

95. Zwei Wanderer laufen einander von zwei Punkten aus entgegen. Der erste könnte diese Entfernung zwischen diesen beiden Punkten in 8 h zurücklegen und der zweite in 6 h. Um welchen Teil der gesamten Strecke nähern sie einander in einer Stunde?

96. Ein Manuskript wurde zum Abschreiben an vier Stenotypistinnen vergeben. Die erste Stenotypistin könnte das gesamte Manuskript allein in 12 Stunden abschreiben, die zweite in 15 Stunden, die dritte in 10 Stunden und die vierte in 9 Stunden. Welchen Teil des Manuskripts konnten sie zusammen während einer Stunde abschreiben?

97. a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}$ d) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$ f) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ h) $\frac{19}{24}-\frac{5}{8}$ i) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$ k) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

98. a) $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ c) $\frac{4}{15}-\frac{1}{5}$ d) $\frac{7}{9}-\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{15}-\frac{1}{45}$ f) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$ g) $\frac{4}{5}-\frac{4}{15}$ h) $\frac{3}{7}-\frac{4}{21}$ i) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}$ k) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$

99. a) $\frac{4}{9}-\frac{7}{27}$ b) $\frac{3}{8}-\frac{3}{12}$ c) $\frac{11}{12}-\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{8}-\frac{19}{24}$ e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ f) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$ g) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ h) $\frac{8}{9}-\frac{1}{3}$ i) $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$ k) $\frac{4}{5}-\frac{3}{20}$

100. a) $\frac{9}{10}-\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{8}-\frac{7}{36}$ c) $\frac{10}{11}-\frac{9}{10}$ d) $\frac{5}{9}-\frac{3}{16}$ e) $\frac{19}{20}-\frac{13}{15}$ f) $\frac{8}{13}-\frac{4}{11}$ g) $\frac{19}{30}-\frac{11}{20}$ h) $\frac{15}{17}-\frac{3}{4}$ i) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$ k) $\frac{7}{15}-\frac{7}{18}$

101. a) $\frac{7}{10}-\frac{9}{23}$ b) $\frac{9}{10}-\frac{2}{15}$ c) $\frac{8}{11}-\frac{5}{7}$ d) $\frac{8}{15}-\frac{7}{20}$ e) $\frac{19}{20}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{15}{28}-\frac{11}{21}$ g) $\frac{11}{15}-\frac{9}{25}$ h) $\frac{43}{48}-\frac{23}{36}$ i) $\frac{19}{25}-\frac{22}{45}$ k) $\frac{9}{10}-\frac{11}{32}$

102. a) $\frac{49}{60}-\frac{13}{24}$ b) $\frac{17}{30}-\frac{13}{25}$ c) $\frac{15}{26}-\frac{17}{39}$ d) $\frac{47}{48}-\frac{5}{16}$ e) $\frac{15}{16}-\frac{9}{20}$ f) $\frac{19}{30}-\frac{11}{18}$ g) $\frac{11}{12}-\frac{6}{11}$ h) $\frac{37}{60}-\frac{8}{45}$

103. a) $1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{3}-\frac{4}{5}$ c) $4\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}$ d) $12\frac{2}{5}-8\frac{4}{7}$ e) $8\frac{11}{12}-5\frac{5}{8}$ f) $4\frac{1}{3}-\frac{5}{6}$ g) $4\frac{3}{8}-\frac{7}{10}$ h) $5\frac{3}{5}-2\frac{7}{8}$

104. a) $25\frac{4}{9}-14\frac{11}{16}$ b) $15\frac{11}{20}-10\frac{22}{25}$ c) $2\frac{2}{5}-\frac{7}{10}$ d) $12\frac{5}{9}-\frac{8}{15}$ e) $9\frac{3}{10}-4\frac{7}{15}$ f) $33\frac{11}{40}-20\frac{18}{25}$ g) $12\frac{5}{8}-5\frac{7}{12}$ h) $5\frac{1}{9}-\frac{1}{8}$

105. a) $18\frac{7}{20}-\frac{19}{30}$ b) $8\frac{7}{12}-3\frac{8}{9}$ c) $41\frac{9}{11}-38\frac{7}{8}$ d) $18\frac{7}{15}-5\frac{5}{12}$ e) $56\frac{5}{18}-29\frac{7}{30}$ f) $34\frac{5}{18}-\frac{7}{12}$ g) $11\frac{5}{8}-7\frac{4}{7}$ h) $94\frac{16}{25}-68\frac{17}{20}$

106. a) $\begin{array}{r} 212\frac{4}{5} \\ -\ 89\frac{3}{8} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 531\frac{11}{32} \\ -\ 248\frac{17}{24} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 681\frac{11}{15} \\ -\ 474\frac{17}{20} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 1039\frac{5}{18} \\ -\ 679\frac{17}{24} \end{array}$

107. a) $\frac{29}{33}-\frac{13}{44}$ b) $\frac{11}{14}-\frac{15}{28}$ c) $\frac{49}{85}-\frac{11}{170}$ d) $\frac{15}{246}-\frac{9}{410}$ e) $\frac{3}{31}-\frac{3}{62}$ f) $16\frac{19}{144}-10\frac{7}{60}$ g) $10\frac{59}{63}-8\frac{37}{45}$ h) $30\frac{7}{99}-25\frac{5}{121}$

108. Ist die ausgeführte Rechnung richtig?

$$11\frac{8}{9}-2\frac{7}{8}=11\frac{8}{9}-3+\frac{1}{8}=8\frac{8}{9}+\frac{1}{8}=8\frac{64+9}{72}=8\frac{73}{72}=9\frac{1}{72}$$

109. a) $\left(15\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}\right)-6\frac{1}{4}$ b) $\left(24\frac{19}{26}+15\frac{9}{10}\right)-4\frac{7}{10}$ c) $12\frac{4}{5}-\left(3\frac{1}{5}+4\frac{3}{10}\right)$ d) $17\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{5}+6\frac{7}{8}\right)$ e) $43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-\frac{9}{2}\right)$ f) $11\frac{13}{15}-\left(9\frac{3}{4}-3\frac{2}{15}\right)$

110. a) $13\frac{3}{4}+7\frac{1}{2}+12\frac{5}{8}+6\frac{5}{9}-4\frac{7}{12}$ b) $7\frac{2}{3}+4\frac{5}{16}-8\frac{7}{12}+2\frac{3}{8}-2\frac{5}{24}$

c) $20\frac{4}{5}-8\frac{9}{20}-7\frac{3}{4}+15\frac{17}{60}+9\frac{11}{15}$ d) $14\frac{4}{9}-8\frac{13}{24}-3\frac{5}{8}+7\frac{7}{18}-5\frac{11}{12}$

111. a) $5\frac{5}{7}+13\frac{3}{4}+9\frac{13}{20}-6\frac{4}{5}-11\frac{9}{14}$
b) $15\frac{4}{5}+3\frac{3}{4}-9\frac{7}{10}-3\frac{19}{20}+8\frac{6}{25}$
c) $9\frac{7}{10}+25\frac{3}{8}-4\frac{7}{12}+8\frac{8}{9}+18\frac{5}{6}$
d) $31\frac{2}{3}+13\frac{1}{4}-19\frac{3}{5}+23\frac{8}{9}-17\frac{1}{10}$

112. a) $3-\frac{5}{6}+1\frac{7}{12}+3-\frac{4}{5}$
b) $4\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{15}-\frac{7}{60}$
c) $25\frac{7}{9}-\frac{3}{4}-\frac{5}{12}-2-\frac{11}{18}$
d) $18\frac{3}{4}+16\frac{3}{5}-25\frac{5}{8}+17\frac{7}{10}$

113. Berechne die Ergebnisse und ordne sie der Größe nach!
a) $12\frac{3}{4}-6\frac{5}{6}-4\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$
b) $12\frac{3}{4}-\left(6\frac{5}{6}-4\frac{1}{2}\right)+1\frac{2}{3}$
c) $12\frac{3}{4}-\left(6\frac{5}{6}-4\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right)$
d) $12\frac{3}{4}-\left[6\frac{5}{6}-\left(4\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right)\right]$

114. Welche gebrochenen Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?
a) $x+\frac{3}{10}=5\frac{7}{10}$ d) $x-\frac{11}{90}=\frac{5}{18}$
b) $\frac{5}{18}+x=\frac{7}{20}$ e) $6\frac{11}{24}-x=5\frac{5}{18}$
c) $\frac{33}{56}+x=\frac{25}{42}$ f) $\frac{123}{144}+x=6\frac{121}{360}$

b

115. a) 7 100,12 — 238,561 b) 456,789 — 68,75 c) 870,003 — 678,95
d) 6 887,45 — 2 344,44 e) 9 876,543 — 8 617,45 f) 2 634,451 — 887,596

116. a) 32 604,01 — 785,432 b) 7 000,00 — 68,937 c) 3 100,205 — 768,934
d) 130 450,1 — 783,654 e) 6 573,04 — 194,18 f) 2 304,080 — 1 976,543

117. a) 23 456,7 — 6,07 — 7,826 — 9,548 — 132,65 — 107,654 — 29,876
b) 62 345,6 — 427,45 — 53,48 — 2,67 — 165,749 — 9,8 — 48,888
c) 123 550,1 — 163,973 — 382,54 — 96,419 — 73,9 — 17,345 — 876,4

118. a) 299 659,1 — 738,904 — 2,9 — 613,017 — 546,828 — 46,37 — 977,75
b) 103 504,01 — 4 673,892 — 794,608 — 768,32 — 2 304,059 — 7,821
c) 150 000,0 — 319,458 — 9,732 — 8,34 — 7,6 — 7 234,56 — 654,73

119. a) 2 640,5 + 103,907 + 78,0 — 116,546 + 3,765
b) 89,705 + 63,0 — 75,20 + 156,007 — 16,662
c) 1 234,56 — 77,865 — 19,753 + 1 345,67 — 21,926
d) 6 756,2 — 84,546 + 7 837,2 — 925,04 + 136,458

120. a) $13{,}4-\frac{7}{3}$ b) $\frac{4}{5}-0{,}02$ c) $2{,}8-\frac{7}{8}$ d) $23{,}96-\frac{11}{7}$
e) $11{,}07-\frac{19}{16}$ f) $22{,}93-\frac{7}{360}$ g) $6\frac{5}{6}-2{,}3$ h) $7\frac{8}{9}-3{,}45$
i) $\frac{8}{7}-0{,}04$ k) $\frac{121}{360}-0{,}25$ l) $1\frac{2}{3}-1{,}55$ m) $\frac{33}{56}-0{,}035$

121. a) $25{,}3-3\frac{4}{5}+\frac{14}{15}-10{,}7-3\frac{1}{90}+7{,}5-0{,}75$
b) $105{,}0-12{,}35-28\frac{6}{7}-\frac{19}{21}+34{,}3+103\frac{2}{3}-72{,}48$
c) $\frac{19}{33}-0{,}11+17{,}55-8\frac{3}{4}+4{,}125-3\frac{1}{3}-0{,}02$

122. Der Minuend beträgt $19\frac{5}{6}$, die Differenz $3\frac{4}{9}$. Wie heißt der Subtrahend?

123. Die Differenz beträgt $33\frac{1}{5}$, der Subtrahend ist $12\frac{9}{10}$. Wie heißt der Minuend?

124. Ein Summand ist $44\frac{3}{4}$, die Summe ist $131\frac{5}{8}$. Wie heißt der andere Summand?

125. Von welcher Zahl muß man $14\frac{1}{2}$ subtrahieren, wenn man $91\frac{4}{5}$ übrigbehalten will?

126. Vermindert man eine Zahl um $96\frac{7}{18}$, so erhält man $4\frac{1}{36}$. Wie heißt die Zahl?

127. Vermehrt man eine Zahl um $81\frac{21}{34}$, so erhält man $332\frac{3}{34}$. Wie heißt die Zahl?

128. Berechne a) die Summe, b) die Differenz der beiden Zahlen $78\frac{29}{54}$ und $47\frac{11}{30}$!

129. Vergleiche die Summe der beiden Zahlen $9\frac{11}{30}$ und $7\frac{8}{25}$ mit ihrer Differenz!

b

130. Im Schulgarten sollen 3 Beete mit Kohl bepflanzt werden. Für das erste Beet brauchen die Schüler $1\frac{1}{4}$ Schock, für das zweite $\frac{1}{2}$ Schock und für das dritte $\frac{3}{4}$ Schock Kohlpflanzen. Wieviel Schock Kohlpflanzen brauchen die Schüler für die drei Beete? (1 Schock = 60 St.)

131. Im Schulgarten werden von einem Beet $12\frac{1}{2}$ kg Gurken geerntet. Auf einem anderen Beet von der gleichen Größe war besser gedüngt worden. Deshalb konnten von diesem Beet $18\frac{1}{4}$ kg Gurken geerntet werden.

132. Auf einem Tomatenbeet werden an drei aufeinanderfolgenden Tagen $2\frac{1}{2}$ kg, $2\frac{3}{4}$ kg und $1\frac{1}{4}$ kg Tomaten geerntet. Wieviel Kilogramm Tomaten werden an den drei Tagen insgesamt geerntet?

133. Eine Pioniergruppe wanderte an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $13\frac{3}{4}$ km, $15\frac{1}{2}$ km, $2\frac{1}{2}$ km $14\frac{3}{4}$ km und $12\frac{1}{4}$ km.

Eine andere Gruppe war an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $57\frac{1}{2}$ km gewandert.

134. Mit Unterstützung des Patenbetriebes wollen die Pioniere einer Klasse ihren Klassenraum streichen. Es werden $\frac{3}{4}$ kg hellblaue, $1\frac{1}{8}$ kg hellgraue und $2\frac{1}{2}$ kg hellrote Farbe benötigt. Berechne den Gesamtbedarf!

135. Von einem Ballen Mantelstoff, auf dem noch $17\frac{1}{2}$ m sind, werden nacheinander $2\frac{1}{4}$ m, $3\frac{1}{2}$ m, $4\frac{3}{4}$ m, $2\frac{1}{2}$ m und $3\frac{3}{4}$ m verkauft.

136. Ein Schiff lief in der ersten Stunde $9\frac{1}{2}$ Seemeilen, in der zweiten $11\frac{3}{4}$ Seemeilen und in der dritten Stunde $13\frac{1}{4}$ Seemeilen. Wieviel Seemeilen legte das Schiff in den drei Stunden zurück? (1 Seemeile = 1 852 m).

137. Scherzaufgabe: Ein Araber hinterließ seinen 3 Söhnen bei seinem Tode 23 Kamele. Er hatte in seinem Testament bestimmt, daß sein jüngster Sohn die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der älteste ein Achtel aller Kamele bekommen sollte. Die Söhne sahen keine Möglichkeit einer solchen Teilung. Sie klagten ihre Not einem alten Nachbarn. Er sagte: „Ich will euch mein einziges Kamel geben, dann habt ihr 24 und könnt teilen.“ Prüfe, ob das Testament überhaupt erfüllt werden kann!

138. Um wieviel ist die Summe der Zahlen $2\frac{1}{2}$ und $1\frac{3}{8}$ größer als die Differenz dieser Zahlen?

139. Um wieviel ist die Differenz der Zahlen 3,75 und $\frac{3}{2}$ kleiner als ihre Summe?

140. Eine Leine mit einer Länge von $17\frac{17}{20}$ m wurde in zwei Teile getrennt. Die Länge des einen Teiles ist $6\frac{3}{5}$ m. Um wieviel ist der zweite Teil der Leine länger als der erste?

141. In einen Behälter führen zwei Rohre. Das erste füllt den Behälter in 4 Stunden, und durch das zweite Rohr fließt alles Wasser aus dem gefüllten Behälter in 5 Stunden ab. Welcher Teil des Behälters wird im Verlaufe einer Stunde gefüllt, wenn beide Rohre gleichzeitig geöffnet werden?

142. Wie ändert sich die Summe zweier Zahlen, wenn:

a) zu einem Summanden $\frac{3}{7}$ hinzugefügt wird?

b) zum ersten Summanden $7\frac{3}{8}$ und zum zweiten $3\frac{11}{12}$ hinzugefügt werden?

c) vom ersten Summanden $\frac{7}{24}$ und vom zweiten $\frac{5}{6}$ subtrahiert werden?

d) vom ersten Summanden $6\frac{13}{15}$ subtrahiert werden und zum zweiten $\frac{7}{30}$ addiert werden?

143. Wie ändert sich die Differenz zweier Zahlen, wenn:

a) der Minuend um $\frac{2}{5}$ vergrößert wird?

b) der Subtrahend um $7\frac{1}{3}$ verkleinert wird?

c) Zum Minuenden $14\frac{1}{9}$ und zum Subtrahenden $\frac{7}{45}$ hinzugefügt werden?

d) Zum Minuenden $3\frac{9}{10}$ addiert werden und vom Subtrahenden $5\frac{5}{6}$ subtrahiert werden?

144. Die Summe zweier Zahlen wurde um $5\frac{1}{2}$ vermindert, wobei von einem Summanden $3\frac{2}{3}$ subtrahiert wurden. Wie änderte sich der zweite Summand?

145. Die Differenz zweier Zahlen wurde um 5 vermindert, wobei der Subtrahend um $3\frac{2}{5}$ vergrößert wurde. Wie änderte sich der Minuend?

146. Ein Radfahrer fuhr 47 km in 5 Stunden, und ein Reiter ritt 43 km in 6 Stunden. Wieviel Kilometer legte der Radfahrer in der Stunde mehr als der Reiter zurück?

147. In ein Bassin führen drei Rohre. Durch eines kann es in 6 Stunden gefüllt werden, durch das andere in 8 Stunden, und durch das dritte fließt alles Wasser aus dem Bassin in 9 Stunden ab. Welcher Teil des Bassins ist in einer Stunde gefüllt, wenn alle drei Rohre gleichzeitig geöffnet sind?

148. Berechne für die Paare in Aufgabe **80**, wenn es möglich ist, die Differenzen $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$!

149. Die Fischfangflotte unserer Republik konnte ihre Fangergebnisse ständig erhöhen. (Zahlenangaben in Tausend t)

1950	1955	1960	1963	1964
26,6	62,2	106,8	177,2	209,0

a) Berechne jeweils den Anstieg gegenüber 1950!

b) Berechne jeweils den Anstieg gegenüber der vorausgehenden Angabe!

c) Stelle den Sachverhalt graphisch dar!

150. Auf das Eisenbahnanschlußgleis eines Industriebetriebes werden fünf Eisenbahnwaggons, die mit Steinkohle beladen sind, geschoben. Die einzelnen Ladungen betragen:

Waggon	1	2	3	4	5
t	15,75	12,09	18,78	14,65	14,82

a) Wieviel Tonnen beträgt die Ladung aller fünf Waggons?

b) Wieviel Tonnen hat der größte der Waggons mehr geladen als jeder der anderen?

151. Die folgende Übersicht zeigt den Anstieg in der Förderung von Rohbraunkohle in den Kohlengruben der Deutschen Demokratischen Republik.

1950	1955	1960	1963	1964
137 Mill. t	200,6 Mill. t	225,5 Mill. t	254,2 Mill. t	257 Mill. t

a) Wieviel Millionen Tonnen Kohle wurden in den Jahren 1963 und 1964 zusammen gefördert?

b) Berechne jeweils den Anstieg gegenüber 1950!

c) Stelle den Sachverhalt in einer graphischen Darstellung dar!

152. a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{15}$ c) $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}$ d) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{11}$ e) $\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{7}$ f) $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{6}$ g) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{15}$ h) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{11}$ i) $\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{11}$ k) $\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{7}$

153. a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$ b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{13}$ c) $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}$ d) $\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{17}$ e) $\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{10}$ f) $\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}$ g) $\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{7}$ h) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{5}$ i) $\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}$ k) $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}$

154. a) $\frac{2}{13}\cdot\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{11}$ c) $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{13}\cdot\frac{6}{7}$ f) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$ h) $\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}$ i) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}$ k) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$

155. a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}$ d) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}$ f) $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}$ g) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}$ h) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}$ i) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ k) $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{10}$

156. a) $\frac{8}{21}\cdot 30$ b) $\frac{11}{16}\cdot 24$ c) $\frac{11}{12}\cdot 60$ d) $\frac{9}{10}\cdot 15$ e) $\frac{7}{36}\cdot 48$ f) $\frac{10}{27}\cdot 90$ g) $\frac{5}{18}\cdot 45$ h) $\frac{8}{25}\cdot 30$ i) $\frac{15}{34}\cdot 51$ k) $\frac{5}{6}\cdot 12$

157. a) $\frac{19}{45}\cdot 15$ b) $\frac{16}{17}\cdot 68$ c) $\frac{7}{15}\cdot 33$ d) $\frac{6}{7}\cdot 49$ e) $\frac{2}{15}\cdot 80$ f) $\frac{7}{8}\cdot 24$ g) $\frac{17}{20}\cdot 35$ h) $\frac{7}{9}\cdot 63$ i) $\frac{13}{14}\cdot 28$ k) $\frac{9}{20}\cdot 65$

158. a) $\frac{14}{25}\cdot 30$ b) $\frac{8}{25}\cdot 45$ c) $\frac{8}{9}\cdot 33$ d) $\frac{3}{25}\cdot 5$ e) $\frac{5}{102}\cdot 17$ f) $\frac{11}{108}\cdot 18$ g) $\frac{7}{12}\cdot 9$ h) $\frac{13}{18}\cdot 15$ i) $\frac{25}{78}\cdot 65$ k) $\frac{5}{8}\cdot 4$

159. a) $\frac{17}{30}\cdot 6$ b) $\frac{6}{91}\cdot 13$ c) $\frac{14}{15}\cdot 12$ d) $\frac{23}{30}\cdot 25$ e) $\frac{13}{51}\cdot 34$ f) $\frac{11}{15}\cdot 5$ g) $\frac{7}{90}\cdot 15$ h) $\frac{9}{121}\cdot 11$ i) $\frac{29}{60}\cdot 27$ k) $\frac{5}{28}\cdot 28$

160. a) $\frac{6}{55}\cdot 44$ b) $\frac{20}{21}\cdot 7$ c) $\frac{15}{133}\cdot 7$ d) $\frac{13}{48}\cdot 12$ e) $\frac{15}{16}\cdot 12$ f) $\frac{17}{26}\cdot 13$ g) $\frac{19}{48}\cdot 36$ h) $\frac{7}{9}\cdot 39$ i) $\frac{7}{18}\cdot 24$ k) $\frac{7}{18}\cdot 22$

161. a) $\frac{61}{87}\cdot 54$ b) $\frac{9}{64}\cdot 28$ c) $\frac{15}{32}\cdot 24$ d) $\frac{9}{16}\cdot 24$ e) $\frac{17}{24}\cdot 30$ f) $\frac{5}{16}\cdot 34$ g) $\frac{7}{15}\cdot 25$ h) $\frac{11}{15}\cdot 35$ i) $\frac{9}{49}\cdot 42$ k) $\frac{11}{20}\cdot 30$

162. a) $\frac{22}{27}\cdot 24$
b) $\frac{13}{66}\cdot 39$
c) $\frac{17}{21}\cdot 49$
d) $\frac{7}{33}\cdot 55$
e) $\frac{13}{35}\cdot 25$
f) $\frac{3}{14}\cdot 21$
g) $\frac{9}{14}\cdot 36$
h) $\frac{31}{42}\cdot 56$
i) $\frac{8}{9}\cdot 42$
k) $\frac{29}{81}\cdot 54$

163. a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{8}$
b) $\frac{7}{12}\cdot\frac{36}{37}$
c) $\frac{4}{21}\cdot\frac{63}{65}$
d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$
e) $\frac{25}{38}\cdot\frac{39}{50}$
f) $\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{27}$
g) $\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{13}$
h) $\frac{5}{17}\cdot\frac{51}{53}$
i) $\frac{38}{39}\cdot\frac{5}{19}$
k) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{15}$

164. a) $\frac{28}{51}\cdot\frac{85}{96}$
b) $\frac{11}{15}\cdot\frac{25}{44}$
c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{12}$
d) $\frac{6}{13}\cdot\frac{39}{40}$
e) $\frac{28}{29}\cdot\frac{5}{14}$
f) $\frac{9}{11}\cdot\frac{32}{45}$
g) $\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{9}$
h) $\frac{22}{75}\cdot\frac{25}{33}$
i) $\frac{4}{9}\cdot\frac{18}{25}$
k) $\frac{57}{59}\cdot\frac{2}{19}$

165. a) $\frac{6}{11}\cdot\frac{77}{85}$
b) $\frac{26}{27}\cdot\frac{16}{39}$
c) $\frac{16}{17}\cdot\frac{51}{64}$
d) $\frac{12}{17}\cdot\frac{51}{82}$
e) $\frac{21}{38}\cdot\frac{19}{49}$
f) $\frac{13}{25}\cdot\frac{15}{52}$
g) $\frac{13}{32}\cdot\frac{48}{65}$
h) $\frac{21}{44}\cdot\frac{22}{49}$
i) $\frac{33}{34}\cdot\frac{17}{22}$
k) $\frac{42}{55}\cdot\frac{33}{70}$

166. a) $\frac{24}{35}\cdot\frac{55}{84}$
b) $\frac{48}{65}\cdot\frac{13}{32}$
c) $\frac{16}{45}\cdot\frac{55}{64}$
d) $\frac{45}{56}\cdot\frac{14}{75}$
e) $\frac{26}{45}\cdot\frac{35}{39}$
f) $\frac{38}{49}\cdot\frac{91}{114}$
g) $\frac{41}{45}\cdot\frac{6}{41}$
h) $\frac{28}{51}\cdot\frac{34}{49}$
i) $\frac{14}{17}\cdot\frac{34}{35}$
k) $\frac{19}{60}\cdot\frac{40}{57}$

167. a) $15\frac{5}{7}\cdot 4$
b) $10\frac{5}{9}\cdot 36$
c) $13\frac{13}{19}\cdot 7$
d) $4\frac{11}{14}\cdot 15$
e) $6\frac{2}{3}\cdot 13$
f) $19\frac{5}{8}\cdot 12$
g) $12\frac{3}{5}\cdot 12$
h) $6\frac{5}{12}\cdot 15$
i) $7\frac{18}{25}\cdot 35$

168. a) $18\frac{4}{7}\cdot 9$
b) $11\frac{7}{12}\cdot 7$
c) $5\frac{7}{11}\cdot 9$
d) $7\frac{11}{14}\cdot 9$
e) $3\frac{7}{12}\cdot 13$
f) $5\frac{13}{20}\cdot 11$
g) $5\frac{5}{6}\cdot 10$
h) $20\frac{9}{10}\cdot 9$
i) $2\frac{7}{19}\cdot 38$

169. a) $6\frac{13}{18}\cdot 15$
b) $7\frac{2}{3}\cdot 8$
c) $3\frac{3}{8}\cdot 14$
d) $6\frac{7}{9}\cdot 21$
e) $17\frac{2}{9}\cdot 3$
f) $5\frac{3}{17}\cdot 34$
g) $5\frac{3}{14}\cdot 21$
h) $18\frac{16}{49}\cdot 5$
i) $3\frac{7}{9}\cdot 6$

170. a) $14\frac{4}{5}\cdot 5$
b) $17\frac{3}{8}\cdot 40$
c) $4\frac{5}{6}\cdot 18$
d) $14\frac{8}{49}\cdot 7$
e) $8\frac{8}{15}\cdot 10$
f) $45\frac{5}{8}\cdot 14$
g) $15\frac{6}{7}\cdot 21$
h) $3\frac{2}{7}\cdot 14$
i) $17\frac{2}{15}\cdot 3$

171. a) $8\frac{3}{26}\cdot 13$
b) $23\frac{11}{20}\cdot 14$
c) $5\frac{11}{13}\cdot 13$
d) $7\frac{3}{10}\cdot 25$
e) $24\frac{7}{36}\cdot 4$
f) $14\frac{5}{8}\cdot 12$
g) $7\frac{5}{18}\cdot 12$
h) $65\frac{5}{8}\cdot 4$
i) $4\frac{5}{6}\cdot 9$

172. a) $8\frac{7}{10}\cdot 15$
b) $7\frac{15}{16}\cdot 20$
c) $7\frac{5}{8}\cdot 12$
d) $21\frac{3}{4}\cdot 14$
e) $3\frac{9}{16}\cdot 24$
f) $5\frac{7}{8}\cdot 14$
g) $12\frac{5}{8}\cdot 12$
h) $4\frac{11}{13}\cdot 18$
i) $25\frac{14}{15}\cdot 10$

173. a) $5\frac{7}{12}\cdot 18$
b) $19\frac{4}{9}\cdot 10$
c) $6\frac{12}{13}\cdot 7$
d) $5\frac{7}{12}\cdot 16$
e) $9\frac{7}{24}\cdot 15$
f) $8\frac{8}{33}\cdot 22$
g) $7\frac{7}{9}\cdot 15$
h) $10\frac{11}{18}\cdot 20$
i) $5\frac{14}{15}\cdot 12$

174. a) $1\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$
b) $3\frac{9}{10}\cdot\frac{31}{39}$
c) $7\frac{9}{13}\cdot\frac{67}{100}$
d) $5\frac{1}{11}\cdot\frac{9}{14}$
e) $1\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}$
f) $3\frac{7}{11}\cdot\frac{39}{40}$
g) $9\frac{4}{15}\cdot\frac{137}{139}$
h) $9\frac{1}{7}\cdot\frac{19}{24}$
i) $2\frac{3}{8}\cdot\frac{17}{19}$

175. a) $7\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}$
b) $9\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{22}$
c) $2\frac{4}{9}\cdot\frac{13}{22}$
d) $6\frac{5}{12}\cdot\frac{61}{77}$
e) $6\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$
f) $8\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}$
g) $\frac{3}{8}\cdot 3\frac{1}{5}$
h) $\frac{4}{9}\cdot 1\frac{5}{13}$
i) $\frac{2}{25}\cdot 16\frac{2}{3}$

176. a) $\frac{5}{9}\cdot 6\frac{3}{4}$
b) $\frac{7}{12}\cdot 4\frac{4}{5}$
c) $\frac{7}{75}\cdot 13\frac{7}{11}$
d) $\frac{10}{13}\cdot 5\frac{1}{5}$
e) $\frac{5}{7}\cdot 5\frac{1}{4}$
f) $\frac{3}{16}\cdot 2\frac{2}{23}$
g) $\frac{8}{9}\cdot 4\frac{1}{2}$
h) $\frac{9}{11}\cdot 7\frac{6}{7}$
i) $\frac{3}{8}\cdot 3\frac{3}{7}$

177. a) $\frac{8}{35} \cdot 6\frac{4}{11}$ b) $\frac{8}{15} \cdot 7\frac{4}{11}$ c) $\frac{5}{24} \cdot 5\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{18} \cdot 2\frac{1}{13}$ e) $5\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{40}$

178. a) $8\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{35}$ b) $\frac{11}{12} \cdot 3\frac{3}{5}$ c) $2\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{12}$ d) $\frac{5}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$ e) $\frac{14}{25} \cdot 5\frac{5}{6}$

179. a) $9\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{21}$ b) $3\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{30}$ c) $6\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13}$ d) $11\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{40}$ e) $2\frac{3}{11} \cdot \frac{4}{15}$

180. a) $\frac{5}{24} \cdot 2\frac{2}{17}$ b) $\frac{3}{14} \cdot 9\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{16} \cdot 9\frac{3}{5}$ d) $\frac{9}{14} \cdot 2\frac{1}{8}$ e) $\frac{2}{9} \cdot 3\frac{5}{6}$

181. Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$	$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{8}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{15}$				
$\frac{23}{24}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{3}{2}$				
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{11}$				

182. Berechne auf zwei verschiedene Arten!

a) $\left(1\frac{11}{24} + 1\frac{13}{36}\right) \cdot 9$ b) $10\left(5\frac{7}{10} - 3\frac{3}{4}\right)$ c) $\frac{4}{9}\left(\frac{69}{80} + \frac{20}{3}\right)$ d) $\frac{7}{3}\left(\frac{6}{11} + \frac{2}{9}\right)$
e) $\frac{8}{7}\left(\frac{49}{16} + \frac{21}{19}\right)$ f) $8\frac{7}{15}\left(11\frac{3}{4} + 9\frac{7}{8}\right)$ g) $\frac{5}{6}\left(1\frac{1}{6} + \frac{3}{10}\right)$

183. Zerlege folgende gebrochene Zahlen in zwei Faktoren! Nenne mindestens zwei Möglichkeiten!

a) $\frac{15}{8}$ b) $\frac{24}{35}$ c) $\frac{21}{32}$ d) $\frac{16}{27}$ e) $\frac{10}{21}$ f) $\frac{56}{15}$ g) $\frac{18}{39}$ h) $\frac{26}{35}$ i) $\frac{39}{28}$ k) $\frac{48}{55}$ l) $\frac{27}{64}$
m) $\frac{81}{256}$ n) $\frac{243}{512}$ o) $\frac{65}{128}$

184. a) 0,3 · 0,4 b) 0,6 · 0,9 c) 0,12 · 0,5 d) 0,16 · 0,6 e) 0,27 · 0,3

185. a) 0,12 · 0,12 b) 0,14 · 0,14 c) 0,15 · 0,16 d) 0,25 · 0,24 e) 0,36 · 0,25

186. a) 0,125 · 0,5 b) 0,375 · 0,25 c) 0,625 · 0,8 d) 0,75 · 0,125 e) 0,875 · 0,375

187. a) 31,5 · 2,31 b) 62,8 · 4,06 c) 8,75 · 9,60 d) 9,06 · 8,04 e) 8,08 · 9,09

188. a) 15,208 · 16,3 b) 24,475 · 36,4 c) 32,06 · 48,08 d) 10,01 · 30,11 e) 59,97 · 60,03

Multipliziere folgende gebrochene Zahlen!
Welche Brüche mußt du umwandeln, um die Multiplikation durchführen zu können?

189. a) $\frac{2}{3} \cdot 0{,}7$ b) $\frac{1}{8} \cdot 6{,}7$ c) $\frac{1}{3} \cdot 2{,}8$ d) $\frac{3}{4} \cdot 0{,}25$ e) $\frac{3}{5} \cdot 6{,}35$

190. a) $\frac{5}{6} \cdot 1{,}2$ b) $\frac{7}{8} \cdot 0{,}93$ c) $\frac{6}{7} \cdot 2{,}78$ d) $\frac{11}{4} \cdot 4{,}47$ e) $\frac{2}{9} \cdot 1{,}14$

191. a) $\frac{12}{11} \cdot 13{,}25$ b) $\frac{7}{16} \cdot 17{,}3$ c) $\frac{3}{25} \cdot 27{,}84$ d) $\frac{7}{12} \cdot 21{,}9$ e) $\frac{11}{15} \cdot 0{,}23$

192. Bilde Paare $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ von gebrochenen Zahlen, indem du je einen Bruch der Menge A und einen Bruch der Menge B wählst!
Berechne dann das Produkt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$!

A

a) 2	b) $3\frac{3}{5}$	c) $\frac{15}{8}$
d) $0{,}56$	e) $2{,}9$	f) $0{,}06$
g) $\frac{12}{21}$	h) $\frac{27}{27}$	i) $4\frac{2}{3}$

B

$\frac{12}{15}$	$\frac{3}{5}$	2	$\frac{81}{10}$	$2\frac{1}{2}$
$0{,}56$	$2{,}5$	$1{,}0$	$0{,}27$	$3{,}11$
$5\frac{1}{5}$	$3\frac{3}{4}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{9}$

193. a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$ c) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{9} : \frac{7}{12}$ g) $\frac{5}{7} : \frac{5}{14}$ h) $\frac{4}{9} : \frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$ k) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

194. a) $\frac{2}{5} : \frac{4}{15}$ b) $\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{8} : \frac{3}{16}$ f) $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$ g) $\frac{1}{5} : \frac{7}{10}$ h) $\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ i) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$ k) $\frac{5}{6} : \frac{2}{7}$

195. a) $\frac{7}{12} : \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{9} : \frac{7}{18}$ c) $\frac{11}{28} : \frac{3}{7}$ d) $\frac{40}{63} : \frac{8}{9}$ e) $\frac{8}{15} : \frac{3}{5}$ f) $\frac{12}{13} : \frac{6}{7}$ g) $\frac{9}{16} : \frac{3}{8}$ h) $\frac{15}{56} : \frac{3}{8}$ i) $\frac{4}{39} : \frac{9}{13}$ k) $\frac{59}{90} : \frac{5}{18}$

196. a) $\frac{15}{28} : \frac{5}{7}$ b) $\frac{5}{6} : \frac{25}{72}$ c) $\frac{3}{4} : \frac{5}{12}$ d) $\frac{19}{40} : \frac{3}{16}$ e) $\frac{2}{3} : \frac{8}{27}$

197. a) $1\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ b) $4\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$ c) $3\frac{7}{27} : \frac{4}{27}$ d) $10\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$ e) $\frac{6}{7} : 5\frac{1}{7}$ f) $5\frac{4}{9} : \frac{7}{9}$ g) $4\frac{8}{19} : \frac{14}{19}$ h) $6\frac{1}{12} : \frac{7}{12}$ i) $\frac{1}{4} : 17\frac{3}{4}$ k) $5\frac{5}{16} : \frac{7}{16}$

198. a) $6\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$ b) $2\frac{4}{11} : \frac{2}{11}$ c) $2\frac{5}{11} : \frac{9}{11}$ d) $2\frac{14}{17} : \frac{16}{17}$ e) $3\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$ f) $3\frac{11}{20} : \frac{9}{20}$ g) $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ h) $3\frac{1}{3} : \frac{7}{10}$ i) $10\frac{2}{3} : \frac{16}{17}$ k) $1\frac{4}{9} : \frac{1}{5}$

199. a) $3\frac{1}{3} : \frac{10}{21}$ b) $2\frac{1}{12} : \frac{5}{9}$ c) $4\frac{2}{3} : \frac{1}{7}$ d) $3\frac{1}{5} : \frac{4}{7}$ e) $5\frac{3}{5} : \frac{7}{25}$ f) $1\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ g) $8\frac{4}{5} : \frac{11}{15}$ h) $6\frac{3}{4} : \frac{9}{16}$ i) $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ k) $\frac{1}{2} : 2\frac{3}{7}$

200. a) $\frac{7}{48} : 2\frac{11}{12}$ b) $\frac{5}{6} : 1\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{8} : 3\frac{1}{3}$ d) $\frac{64}{75} : 2\frac{14}{25}$ e) $\frac{7}{9} : 1\frac{2}{3}$ f) $\frac{9}{20} : 1\frac{3}{5}$ g) $\frac{7}{12} : 3\frac{5}{6}$ h) $\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}$ i) $\frac{3}{7} : 2\frac{4}{5}$ k) $\frac{4}{9} : 2\frac{2}{15}$

201. a) $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$ b) $6\frac{2}{3} : 1\frac{2}{3}$ c) $15\frac{3}{4} : 2\frac{1}{4}$ d) $8\frac{1}{3} : 3\frac{1}{3}$ e) $5\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3}$ f) $12\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$ g) $2\frac{3}{5} : 18\frac{1}{5}$ h) $15\frac{2}{5} : 2\frac{1}{5}$

202. a) $3\frac{1}{5} : \frac{3}{5}$ b) $22\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$ c) $3\frac{1}{8} : 1\frac{7}{8}$ d) $20\frac{5}{8} : 3\frac{1}{8}$ e) $1\frac{4}{9} : 2\frac{7}{9}$ f) $37\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$ g) $5\frac{5}{6} : 1\frac{1}{6}$ h) $3\frac{5}{9} : 4\frac{4}{9}$

203. a) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$
b) $1\frac{1}{10}:1\frac{5}{6}$
c) $1\frac{1}{14}:1\frac{1}{7}$
d) $1\frac{1}{3}:2\frac{1}{5}$
e) $1\frac{2}{4}:1\frac{1}{6}$
f) $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}$
g) $1\frac{2}{7}:1\frac{1}{2}$
h) $1\frac{2}{5}:1\frac{1}{3}$

204. a) $5\frac{2}{5}:4\frac{1}{2}$
b) $1\frac{1}{9}:1\frac{1}{4}$
c) $1\frac{1}{7}:1\frac{1}{4}$
d) $9\frac{3}{4}:6\frac{1}{2}$
e) $2\frac{1}{3}:1\frac{1}{6}$
f) $7\frac{1}{9}:1\frac{1}{3}$
g) $7\frac{1}{2}:3\frac{4}{7}$
h) $2\frac{2}{5}:3\frac{1}{6}$

205. a) $3\frac{3}{5}:3\frac{3}{4}$
b) $12\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$
c) $3\frac{1}{3}:3\frac{1}{6}$
d) $4\frac{4}{5}:1\frac{2}{3}$
e) $25\frac{5}{6}:3\frac{2}{3}$
f) $4\frac{2}{7}:1\frac{1}{2}$
g) $4\frac{1}{6}:1\frac{3}{8}$
h) $9\frac{3}{8}:4\frac{1}{6}$

206. a) $\frac{5}{12}:\frac{20}{33}$
b) $\frac{3}{10}:\frac{4}{5}$
c) $\frac{15}{34}:\frac{10}{17}$
d) $\frac{7}{9}:\frac{3}{5}$
e) $4\frac{2}{3}:\frac{7}{9}$
f) $16\frac{2}{5}:\frac{5}{12}$
g) $3\frac{1}{5}:\frac{3}{4}$
h) $7\frac{7}{8}:\frac{21}{32}$

207. a) $5\frac{1}{3}:3\frac{1}{5}$
b) $1\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}$
c) $3\frac{1}{3}:1\frac{3}{5}$
d) $4\frac{2}{7}:1\frac{1}{4}$
e) $11\frac{1}{4}:3\frac{1}{8}$
f) $6\frac{4}{9}:14\frac{1}{2}$
g) $19\frac{5}{6}:1\frac{7}{15}$
h) $12\frac{4}{5}:12\frac{1}{4}$

208. a) $\frac{1}{2}:5$
b) $\frac{2}{3}:3$
c) $\frac{3}{4}:5$
d) $\frac{1}{6}:4$
e) $\frac{2}{9}:5$
f) $\frac{8}{9}:3$
g) $\frac{3}{5}:8$
h) $\frac{5}{8}:9$
i) $\frac{2}{3}:5$
k) $\frac{4}{25}:3$

209. a) $\frac{11}{12}:6$
b) $\frac{27}{28}:2$
c) $\frac{5}{7}:2$
d) $\frac{3}{8}:4$
e) $\frac{2}{7}:5$
f) $\frac{11}{14}:9$
g) $\frac{5}{9}:8$
h) $\frac{7}{8}:4$
i) $\frac{5}{12}:6$
k) $\frac{5}{13}:11$

210. a) $\frac{7}{8}:5$
b) $\frac{7}{9}:8$
c) $\frac{9}{10}:5$
d) $\frac{3}{7}:4$
e) $\frac{11}{12}:9$
f) $\frac{3}{13}:7$
g) $\frac{5}{8}:11$
h) $\frac{7}{12}:3$
i) $\frac{4}{5}:7$
k) $\frac{6}{11}:5$

211. a) $\frac{4}{5}:12$
b) $\frac{5}{12}:15$
c) $\frac{21}{25}:14$
d) $\frac{27}{32}:36$
e) $\frac{5}{6}:15$
f) $\frac{24}{25}:16$
g) $\frac{5}{9}:15$
h) $\frac{24}{25}:12$
i) $\frac{18}{19}:27$
k) $\frac{8}{9}:56$

212. a) $\frac{9}{11}:12$
b) $\frac{7}{11}:14$
c) $\frac{9}{10}:6$
d) $\frac{18}{25}:27$
e) $\frac{14}{15}:49$
f) $\frac{10}{13}:25$
g) $\frac{15}{16}:25$
h) $\frac{44}{57}:33$
i) $\frac{24}{25}:36$
k) $\frac{16}{17}:48$

213. a) $\frac{18}{23}:45$
b) $\frac{5}{7}:20$
c) $\frac{6}{7}:33$
d) $\frac{24}{29}:16$
e) $\frac{7}{9}:49$
f) $\frac{4}{5}:16$
g) $\frac{16}{17}:64$
h) $\frac{17}{18}:34$
i) $\frac{3}{8}:24$
k) $\frac{12}{13}:42$

214. a) $\frac{24}{25}:48$
b) $\frac{5}{7}:35$
c) $\frac{25}{27}:75$
d) $\frac{12}{17}:16$
e) $\frac{11}{19}:99$
f) $\frac{14}{15}:42$
g) $\frac{25}{34}:65$
h) $\frac{22}{25}:44$
i) $\frac{21}{23}:70$
k) $\frac{7}{9}:49$

215. a) $\frac{6}{11}:36$
b) $\frac{19}{20}:38$
c) $2\frac{1}{4}:5$
d) $6\frac{1}{3}:5$
e) $9\frac{1}{4}:10$
f) $5\frac{1}{3}:3$
g) $5\frac{1}{3}:5$
h) $8\frac{1}{5}:10$
i) $2\frac{1}{3}:4$
k) $10\frac{1}{2}:13$

216. a) $10\frac{1}{3}:20$
b) $4\frac{1}{4}:4$
c) $7\frac{1}{3}:9$
d) $15\frac{1}{2}:25$
e) $3\frac{3}{4}:5$
f) $3\frac{6}{7}:9$
g) $4\frac{7}{12}:5$
h) $5\frac{1}{11}:14$
i) $7\frac{1}{2}:5$
k) $3\frac{1}{3}:2$

217. a) $3\frac{3}{7}:8$
b) $3\frac{5}{9}:4$
c) $2\frac{2}{9}:5$
d) $11\frac{5}{9}:13$
e) $8\frac{3}{4}:7$
f) $5\frac{1}{11}:8$
g) $6\frac{3}{4}:6$
h) $6\frac{6}{11}:8$
i) $8\frac{1}{6}:7$
k) $7\frac{1}{8}:19$

218. a) $9\frac{9}{10} : 11$ b) $6\frac{1}{8} : 7$ c) $5\frac{1}{4} : 7$ d) $3\frac{4}{15} : 7$ e) $5\frac{3}{5} : 7$ f) $10\frac{2}{7} : 12$ g) $4\frac{3}{8} : 7$ h) $4\frac{1}{11} : 9$ i) $7\frac{1}{4} : 58$ k) $3\frac{3}{4} : 45$

219. a) $5\frac{5}{8} : 27$ b) $14\frac{2}{7} : 75$ c) $10\frac{1}{5} : 17$ d) $5\frac{2}{3} : 68$ e) $7\frac{3}{5} : 57$ f) $10\frac{4}{5} : 72$ g) $11\frac{1}{9} : 60$ h) $1\frac{2}{13} : 5$ i) $2\frac{1}{2} : 15$ k) $8\frac{1}{4} : 44$

220. a) $12\frac{2}{3} : 95$ b) $8\frac{1}{3} : 25$ c) $3\frac{1}{8} : 5$ d) $6\frac{1}{4} : 20$ e) $5\frac{4}{9} : 70$ f) $16\frac{2}{3} : 40$ g) $6\frac{3}{4} : 18$ h) $7\frac{1}{7} : 10$ i) $29\frac{3}{8} : 5$ k) $87\frac{1}{9} : 16$

221. a) $72\frac{1}{3} : 14$ b) $80\frac{2}{5} : 24$ c) $125\frac{5}{8} : 60$ d) $43\frac{3}{7} : 4$ e) $68\frac{1}{3} : 5$ f) $50\frac{2}{5} : 16$ g) $53\frac{3}{4} : 25$ h) $258\frac{1}{11} : 51$ i) $69\frac{7}{8} : 13$ k) $75\frac{1}{9} : 4$

222. a) $92\frac{6}{7} : 15$ b) $79\frac{1}{3} : 28$ c) $110\frac{2}{5} : 96$ d) $100\frac{4}{5} : 18$ e) $90\frac{5}{6} : 5$ f) $68\frac{2}{5} : 18$ g) $98\frac{5}{14} : 24$ h) $356\frac{7}{10} : 87$ i) $3 : \frac{4}{5}$ k) $9 : \frac{7}{8}$

223. a) $11 : \frac{5}{8}$ b) $3 : \frac{14}{15}$ c) $2 : \frac{3}{8}$ d) $8 : \frac{7}{9}$ e) $14 : \frac{5}{9}$ f) $13 : \frac{1}{2}$

224. a) $14 : \frac{9}{10}$ b) $7 : \frac{5}{6}$ c) $6 : \frac{7}{15}$ d) $11 : \frac{5}{6}$ e) $10 : \frac{7}{9}$ f) $5 : \frac{2}{3}$

225. a) $12 : \frac{7}{9}$ b) $16 : \frac{9}{10}$ c) $7 : \frac{5}{12}$ d) $5 : \frac{4}{9}$ e) $6 : \frac{7}{10}$ f) $9 : \frac{2}{3}$

226. a) $2 : \frac{11}{12}$ b) $10 : \frac{5}{16}$ c) $12 : \frac{3}{5}$ d) $1 : \frac{7}{15}$ e) $10 : \frac{8}{15}$ f) $7 : \frac{5}{6}$

227. a) $8 : \frac{4}{5}$ b) $12 : \frac{7}{8}$ c) $8 : \frac{4}{9}$ d) $18 : \frac{9}{20}$ e) $5 : \frac{15}{17}$ f) $2 : \frac{11}{13}$

228. Rechne die nachstehenden Aufgaben aus und schreibe sie mit ihren Lösungen übersichtlich untereinander!
Dividiere 12 nacheinander durch 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$!
Vergleiche die Folge der Divisoren und der Quotienten!

229. In einen Gemüseladen wurden 40 Kisten Tomaten gebracht. In 25 Kisten waren je $10\frac{1}{2}$ kg Tomaten und in den übrigen je $12\frac{2}{5}$ kg. Wieviel Kilogramm Tomaten wurden in den Laden gebracht?

230. In einen Laden brachte man 602 kg Äpfel. Am ersten Tage wurden $\frac{3}{14}$ der gebrachten Äpfel verkauft, am zweiten $\frac{5}{11}$ vom Rest und am dritten Tag $\frac{5}{6}$ der Äpfel, die nach den ersten beiden Verkaufstagen übriggeblieben waren. Wieviel Äpfel verblieben im Laden nach drei Tagen?

231. Ein Zug fuhr 450 km. Auf waagerechter Strecke legte er $\frac{8}{9}$ der gesamten Entfernung zurück, auf Steigungen $\frac{7}{15}$ vom Rest, und auf der übrigen Strecke war Gefälle. Wieviel Kilometer fuhr der Zug auf Gefälle?

232. Zwei Radfahrer fuhren gleichzeitig von zwei Punkten aus einander entgegen. Der erste Radfahrer kann die Entfernung zwischen den beiden Punkten in 6 Stunden zurücklegen, der zweite in 5 Stunden. Welcher Teil der Strecke trennt die beiden Radfahrer voneinander 2 Stunden nach der Abfahrt?

233. Ein Schnellzug und ein Postzug fuhren von zwei Punkten aus gleichzeitig einander entgegen. Der Postzug ist auf der Entfernung zwischen den beiden Punkten 12 Stunden unterwegs und der Schnellzug $\frac{3}{4}$ der Zeit des Postzuges.
Welcher Teil der Strecke liegt 3 Stunden nach der Abfahrt zwischen beiden Zügen?

b

234. Ein Auto fuhr in 4 Stunden 180 km. In der ersten Stunde fuhr es $\frac{4}{15}$ der gesamten Strecke, in der zweiten $\frac{5}{8}$ derjenigen, die es in der ersten Stunde durchfahren hatte, in der dritten die Hälfte der Strecke, die es in den ersten beiden Stunden zusammen durchfahren hatte und in der vierten Stunde die restliche Strecke. Wieviel Kilometer fuhr das Auto in der vierten Stunde?

235. In die erste Schule gehen 840 Schüler, in die zweite $\frac{1}{7}$ mehr als in die erste, in die dritte $\frac{5}{6}$ der Zahl der Schüler der zweiten Schule und in die vierte $\frac{3}{10}$ der Zahl der Schüler der ersten drei Schulen zusammen. Wieviel Schüler gehen insgesamt in diese vier Schulen?

236. Berechne das Dreifache **a)** der Summe, **b)** der Differenz von $7\frac{3}{10}$ und $4\frac{8}{15}$!

237. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich den 6. Teil davon nehme, erhalte ich $3\frac{5}{6}$. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

238. Petra hat im vergangenen Monat an 17 Tagen je $\frac{3}{4}$ l und an 13 Tagen je $1\frac{1}{4}$ l Milch geholt. Wieviel Liter Milch hat Petra im vergangenen Monat insgesamt gekauft?

239. Wenn man eine Zahl durch 3 teilt, erhält man $3\frac{5}{8}$. Wie heißt die Zahl?

240. Die 153 Schüler einer Landschule wollen zur Winterfütterung unseres Wildes beitragen. Jeder von ihnen verpflichtete sich, im Herbst $\frac{3}{4}$ kg Eicheln und $1\frac{1}{4}$ kg Kastanien zu sammeln.

a) Wieviel Kilogramm Eicheln und wieviel Kilogramm Kastanien sollen insgesamt gesammelt werden?

b) Nach Abschluß der Sammelaktion ergab sich, daß insgesamt $148\frac{1}{2}$ kg Eicheln und $248\frac{3}{4}$ kg Kastanien gesammelt wurden. Vergleiche Verpflichtung und Sammelergebnis!

241. Wir wollen in unseren Heften keine Seiten beschmieren oder frei lassen. Klaus hat von den 28 Seiten seines Rechenheftes $3\frac{1}{3}$ Seiten nicht ausgenutzt.

a) Wieviel Seiten würden verschwendet werden, wenn alle 36 Schüler der Klasse so nachlässig gearbeitet hätten?

b) Wieviel Hefte ergäbe das?

242. 1 kg Rohkaffee wiegt nach dem Brennen nur noch $\frac{4}{5}$ kg.

a) Wieviel Kilogramm wiegen 3 kg Rohkaffee nach dem Brennen? Berechne auch den Gewichtsverlust!

b) Es werden $\frac{3}{4}$ dt Rohkaffee gebrannt.

243. 1 kg Mehl ergibt $1\frac{1}{3}$ kg Brot.

a) Wieviel Kilogramm Brot kann man aus 63 kg Mehl backen?

b) Wieviel Brote sind das, wenn ein Brot 1500 g wiegt?

244. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft erntete von 172 ha Getreideanbaufläche durchschnittlich $26\frac{1}{2}$ dt Getreide je Hektar.

a) Wieviel Dezitonnen Getreide erntete sie insgesamt?

b) Etwa $\frac{2}{3}$ der Ernte konnten sofort gedroschen und abgeliefert werden. Wie groß war die abgelieferte Getreidemenge?

245. Für die sechs Braunbären eines Tierparks lagert im Vorratsraum Futter für $4\frac{1}{2}$ Tage. Wieviel Tage könnte ein Bär mit dieser Futtermenge gefüttert werden?

246. Zwei Gärtner graben einen Garten in $1\frac{3}{4}$ Tagen um. Wie lange würde ein Gärtner dazu brauchen?

247. In einem Werkstück sollen Bohrungen angebracht werden. In welcher Zeit kann ein Arbeiter 70 Werkstücke bearbeiten, wenn je Werkstück eine Zeit von $1\frac{1}{2}$ min gebraucht wird?

248. Eine Dampfmaschine verbraucht in einer Stunde $\frac{3}{10}$ l Schmieröl. Wieviel Liter Schmieröl werden in 3, 4, 5, 7, 9 und 10 Stunden verbraucht?

249. a) 0,8 : 2 b) 2,4 : 2 c) 0,08 : 2 d) 0,018 : 2 e) 72 : 12 f) 7,2 : 12
g) 0,72 : 12 h) 0,072 : 12

250. a) 0,4 : 2 b) 8,1 : 3 c) 0,48 : 4 d) 7,5 : 5 e) 0,78 : 6 f) 0,98 : 7
g) 10,4 : 8 h) 11,7 : 9 i) 14,4 : 12 k) 1,68 : 2

251. a) 0,76 : 19 b) 0,135 : 15 c) 1,12 : 4 d) 1,26 : 14 e) 0,144 : 16 f) 0,078 : 6
g) 0,112 : 7 h) 0,084 : 12 i) 0,136 : 17 k) 0,168 : 14

252. a) 9,1 : 13 b) 0,95 : 19 c) 1,35 : 15 d) 2,88 : 12 e) 12,8 : 16 f) 0,225 : 25
g) 0,64 : 16 h) 1,17 : 13 i) 1,54 : 14 k) 0,084 : 12 l) 13,6 : 17 m) 0,216 : 24
n) 1,69 : 13 o) 4,65 : 15 p) 5,61 : 11

253. a) 0,28 : 4 b) 2,36 : 4 c) 5,792 : 8 d) 8,316 : 4 e) 5,895 : 9 f) 1,652 : 7
g) 4,0579 :7 h) 0,059427 : 9 i) 6,3 : 5 k) 7,246 : 5

254. a) 0,5924 : 5 b) 0,6258 : 5 c) 14,6 : 4 d) 1,35 : 4 e) 9,504 : 3 f) 0,18764 : 4
g) 91,25 : 8 h) 57,123 : 8 i) 4,9567 : 8 k) 0,88025 : 8

255. Dividiere die folgenden Zahlen durch 10 (100, 1 000, 10 000)!

a) 5 734,5 b) 930,21 c) 684,34 d) 12 487,6 e) 90 345,38 f) 82 163,459
g) 13,4 h) 16,17 i) 28,537 k) 6,2 l) 9,173 m) 0,3
n) 0,18 o) 0,613 p) 0,004 q) 0,103 r) 0,156 s) 0,070 3
t) 0,145 u) 2,076

256. a) 73 kg : 2 b) 49,374 t : 3 c) 375,68 MDN : 4 d) 3 498 MDN : 5
e) 789,36 MDN : 6 f) 660,24 ha : 7 g) 53,28 dt : 8 h) 277,830 kg : 9
i) 478,94 hl : 7 k) 940,527 m³ : 9 l) 4,062 t : 3 m) 345,68 a : 8

257. a) 112,68 : 18 b) 40,32 : 24 c) 6,507 : 27 d) 91,35 : 29
e) 76,88 : 31 f) 171,99 : 39 g) 12,138 : 42 h) 2,116 8 : 48

258. a) 6,2 : 25 b) 9,5 : 16 c) 38,24 : 32 d) 57,168 : 64
e) 105,3 : 45 f) 8,61 : 56 g) 248,16 : 75 h) 73 : 25
i) 373 : 25 k) 301 : 16 l) 17 : 64 m) 2 914 : 50

259. a) 74,936 : 0,04 b) 53,988 : 0,006 c) 52,325 : 0,7 d) 5,608 : 0,08
e) 4,041 : 0,09 f) 10,101 : 0,003

260. a) 0,569 874 : 0,2 b) 437,568 9 : 0,3 c) 9 348,75 : 0,5 d) 94 738,74 : 0,6
e) 0,038 458 : 0,7 f) 537,648 : 0,8 g) 0,006 873 57 : 0,9 h) 56 793 480 : 0,2
i) 761 952 : 0,03

261. a) 8 745 835 : 0,005 b) 3 749 585 : 0,07 c) 5 597 838 : 0,000 9 d) 793,547 6 : 0,02
e) 7 643 264 : 0,4 f) 293,847 6 : 0,006

262. a) 3,114 : 0,9 b) 2,58 : 0,6 c) 12,6 : 0,018 d) 0,084 : 0,12
e) 0,175 : 2,5 f) 0,112 : 1,4 g) 16,8 : 0,24 h) 0,135 : 0,45
i) 0,96 : 1,6 k) 0,57 : 1,9 l) 2,07 : 0,023 m) 1,04 : 2,6

263. a) 2,64 : 2,4 b) 15,3 : 0,17 c) 0,305 : 6,1 d) 0,546 : 0,42
e) 1,33 : 1,9 f) 0,148 : 7,4 g) 1,92 : 1,2 h) 0,154 : 0,22
i) 7,56 : 5,4 k) 0,364 : 0,28 l) 27,2 : 1,36 m) 0,068 : 0,34

264. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche! Rechne bis zur Wiederkehr der Periode!

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{1}{13}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{2}{7}$ g) $\frac{5}{9}$ h) $\frac{8}{13}$ i) $\frac{5}{7}$
k) $\frac{5}{11}$ l) $\frac{1}{17}$ m) $\frac{4}{19}$

Verwandle die Brüche in den Aufgaben **265** bis **269** in Dezimalbrüche! Brich ab bei der Wiederkehr der Periode!

265. a) $\frac{7}{18}$ b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{13}{18}$ d) $\frac{17}{18}$ e) $\frac{1}{12}$ f) $\frac{5}{12}$ g) $\frac{7}{12}$ h) $\frac{11}{12}$

266. a) $\frac{1}{30}$ b) $\frac{7}{30}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{17}{30}$ e) $\frac{2}{15}$ f) $\frac{8}{15}$ g) $\frac{11}{15}$ h) $\frac{13}{15}$

267. a) $\frac{5}{22}$ b) $\frac{13}{22}$ c) $\frac{17}{22}$ d) $\frac{8}{33}$ e) $\frac{25}{33}$ f) $\frac{5}{36}$ g) $\frac{13}{36}$ h) $\frac{11}{24}$

268. a) $\frac{19}{24}$ b) $\frac{7}{48}$ c) $\frac{13}{60}$ d) $\frac{29}{60}$ e) $\frac{37}{60}$ f) $\frac{31}{90}$ g) $\frac{47}{90}$ h) $\frac{67}{90}$

269. a) $\frac{53}{60}$ b) $\frac{49}{90}$ c) $\frac{2}{37}$ d) $\frac{3}{14}$ e) $\frac{5}{37}$ f) $\frac{8}{21}$ g) $\frac{11}{37}$ h) $\frac{17}{28}$

270. Verwandle die folgenden Brüche in Dezimalbrüche! Runde auf Hunderttausendstel!

a) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{13}{21}$ c) $\frac{17}{23}$ d) $\frac{22}{23}$ e) $\frac{12}{29}$ f) $\frac{18}{31}$ g) $\frac{12}{39}$ h) $\frac{25}{39}$
i) $\frac{19}{27}$ k) $\frac{8}{69}$ l) $\frac{5}{13}$ m) $\frac{9}{14}$ n) $\frac{16}{21}$ o) $\frac{7}{39}$ p) $\frac{9}{13}$ q) $\frac{25}{29}$
r) $\frac{30}{31}$ s) $\frac{9}{17}$ t) $\frac{4}{7}$ u) $\frac{20}{21}$ v) $\frac{19}{23}$ w) $\frac{19}{33}$ x) $\frac{9}{49}$ y) $\frac{35}{121}$

271. Runde die folgenden Ergebnisse auf drei Stellen nach dem Komma!

a) 54,6 : 0,52 b) 11,9 : 1,75 c) 8,432 : 1,7 d) 12,54 : 6,6
e) 642,8 : 0,87 f) 3,54 : 1,5 g) 2,496 : 0,483 h) 32,204 : 7,13

272. a) 7,92 : 14,4 b) 455,6 : 0,134 c) 72 : 0,576 d) 0,54 : 0,216
e) 368,1 : 0,075 f) 1,8 : 0,288 g) 178,54 : 0,346

273. a) $0{,}84 : \frac{2}{5}$ b) $2{,}46 : \frac{16}{25}$ c) $1\frac{4}{9} : 0{,}7$ d) $19\frac{5}{7} : 2{,}8$
e) $3{,}825 : \frac{1}{2}$ f) $5\frac{13}{20} : 0{,}625$ g) $6{,}6 : \frac{2}{3}$ h) $3{,}9 : 1\frac{5}{12}$
i) $8\frac{3}{4} : 0{,}45$ k) $2\frac{3}{4} : 3{,}51$ l) $0{,}665 : \frac{7}{9}$ m) $8\frac{17}{30} : 5{,}25$

274. a) 73,35 : 225 b) 305,36 : 347 c) 983,5 : 562 d) 1 066,8 : 635
e) 575,12 : 728 f) 17,327 2 : 968 g) 1 : 125 h) 3 : 125
i) 111 : 625 k) 4,05 : 225 l) 15,974 : 326 m) 49,47 : 51

275. a) 219,45 m : 57 b) 409,92 MDN : 42 c) 246,895 kg : 67 d) 314,57 dt : 83
e) 241,08 hl : 84 f) 1 215,95 MDN : 83

276. a) 349,848 kg : 86 b) 844,87 dt : 97 c) 262,35 hl : 53 d) 287,28 MDN : 38
e) 630,176 kg : 94 f) 711,56 dt : 94

277. a) 367,664 t : 176 b) 6 538,68 ha : 738 c) 353,925 t : 143 d) 317,184 m³ : 354
e) 182,646 m³ : 417 f) 1 310,531 2 m² : 352

278. a) 15 895,76 ha : 652 b) 7 494,16 ha : 829 c) 1 700,11 ha : 197 d) 2 309,624 m³ : 536
e) 447,283 2 m² : 182 f) 1 358,156 6 m² : 479

279. Dividiere 12 498,935 kg durch
a) 3, b) 74, c) 68, d) 187, e) 830, f) 274!

280. a) 722,436 km : 156 b) 2 143,38 ha : 417 c) 8 130 kg : 120 d) 11 t : 120
e) 87 216 MDN : 600 f) 531,042 t : 749

281. a) 7 680 ha : 170 b) 5 006,391 kg : 137 c) 6 537,84 hl : 284 d) 974,85 MDN : 785
e) 33 t : 220 f) 7 125,306 t : 491

282. a) 592,2 t : 140 b) 2 244,48 a : 672 c) 45 m³ : 250

Verwandle in den Aufgaben **283** bis **285** vor dem Dividieren die Maßangaben in Dezimalbrüche!

283. a) 674 m 88 cm : 76 b) 726 km 750 m : 85 c) 638 km 166 m : 94 d) 41 a 86 m² : 13
e) 63 ha 84 a : 19 f) 504 a 75 m² : 75

284. a) 1 870 hl 8 l : 384 b) 654 hl 15 l : 89 c) 490 hl 86 l : 54 d) 172 t 95 kg : 231
e) 877 kg 713 g : 307 f) 638 t 166 kg : 94

285. a) 250 m³ 299 dm³ : 137 b) 169 dm³ 848 cm³ : 126 c) 628 cm³ 788 mm³ : 732

286. Wenn ich eine Zahl mit 7 multipliziere und zum Ergebnis noch 11,45 addiere, erhalte ich 100. Nenne die Zahl!

287. Führe folgende Multiplikationen durch, indem du die periodischen Dezimalbrüche
1. auf eine Stelle nach dem Komma,
2. auf zwei Stellen nach dem Komma und
3. auf drei Stellen nach dem Komma rundest!

b

Vergleiche die Ergebnisse jeder Multiplikation!

a) $1{,}\overline{6} \cdot 1{,}9$ b) $2{,}\overline{7} \cdot 1{,}38$ c) $2{,}\overline{3} \cdot 2{,}7$ d) $3{,}\overline{1} \cdot 4{,}6$ e) $5{,}\overline{2} \cdot 7{,}8$

f) $6{,}\overline{4} \cdot 3{,}9$ g) $4{,}\overline{6} \cdot 0{,}73$ h) $5{,}\overline{1} \cdot 2{,}98$ i) $17{,}\overline{4} \cdot 3{,}04$ k) $6{,}\overline{6} \cdot 2{,}43$

l) $8{,}\overline{91} \cdot 1{,}8\overline{3}$ m) $5{,}\overline{73} \cdot 2{,}9\overline{1}$ n) $7{,}\overline{83} \cdot 4{,}2\overline{6}$ o) $10{,}\overline{12} \cdot 3{,}0\overline{5}$ p) $8{,}\overline{69} \cdot 0{,}4\overline{2}$

Führe in den Aufgaben **288** und **289** folgende Divisionen durch, indem du die periodischen Dezimalbrüche
1. auf eine Stelle nach dem Komma,
2. auf zwei Stellen nach dem Komma und
3. auf drei Stellen nach dem Komma rundest!

Die Quotienten gib auf 3 Stellen nach dem Komma genau an!

288. a) $3{,}\overline{6} : 0{,}4$ b) $7{,}\overline{5} : 0{,}5$ c) $7{,}\overline{6} : 0{,}3$ d) $9{,}\overline{8} : 2{,}6$ e) $1{,}\overline{8} : 2{,}9$

f) $2{,}\overline{9} : 1{,}\overline{3}$ g) $4{,}\overline{7} : 2{,}\overline{6}$ h) $3{,}\overline{8} : 2{,}\overline{3}$

289. a) $4{,}\overline{1} : 2{,}\overline{3}$ b) $9{,}\overline{5} : 4{,}\overline{1}$ c) $2{,}\overline{01} : 1{,}\overline{05}$ d) $12{,}\overline{34} : 2{,}\overline{71}$ e) $13{,}\overline{25} : 1{,}\overline{09}$

f) $7{,}\overline{28} : 10{,}\overline{31}$ g) $17{,}\overline{06} : 1{,}\overline{03}$

290. Dividiere die Summe der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

291. Dividiere das Produkt der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

292. Drei Faktoren ergeben das Produkt 26,1738. Der erste Faktor heißt 15,72, der zweite 0,45. Wie heißt der dritte Faktor?

293. a) Zu welcher Zahl muß ich 1,2 addieren, um 3,5 zu erhalten?
b) Von welcher Zahl muß 1,2 subtrahiert werden, damit sich 3,6 ergibt?
c) Mit welcher Zahl muß ich 1,2 multiplizieren, um das Produkt 3,6 zu erhalten?
d) Welche Zahl ergibt durch 1,2 dividiert den Quotienten 3,6?
e) Durch welche Zahl ist 3,6 zu dividieren, damit 1,2 im Ergebnis erscheint?
Wähle selbst zwei Dezimalbrüche und bilde entsprechende Aufgaben zu a) bis e)!

294. Ich denke mir sechs Zahlen ...
a) Wenn ich die erste Zahl durch 2,5 teile, erhalte ich 3,9.
b) Die zweite Zahl mit 3,8 multipliziert ergibt als Produkt 134,5086.
c) Wenn ich zur dritten Zahl 3,79 addiere, fehlen noch 2,86 an 10.
d) Wird das Dreifache der vierten Zahl um 13,9 vermehrt, so ergibt das gerade 100.
e) Wenn man die fünfte Zahl durch 3,7 und dann das Ergebnis durch 0,8 dividiert, erhält man 3,45.
f) Der Unterschied zwischen dem 5,8fachen und dem 5fachen der sechsten Zahl beträgt 3,2.

295. Ein Klassenzimmer in einem Schulneubau ist 8,45 m lang, 6,80 m breit und 3,60 m hoch. Es ist für 36 Schüler eingerichtet. Wieviel Kubikmeter Raum stehen für jede Person zu Verfügung? (Vergiß den Lehrer nicht!)

296. Eine Rasenfläche von 5 800 m² Größe soll erneuert werden. Wieviel Kilogramm Grassamen müssen besorgt werden, wenn für eine Fläche von einem Ar 1,850 kg Grassamen benötigt werden?

297. Eine Tischtennisplatte hat etwa die folgenden Maße: 2,74 m Länge und 1,53 m Breite. Welche Spielfläche ergibt sich? Runde!

298. Ein volkseigener Erfassungs- und Aufkaufbetrieb hatte in der ersten Oktoberwoche die folgenden Kartoffeleingänge und -ausgänge:

Tag	Eingänge in dt	Ausgänge in dt	Bestand in dt
	—	—	116,0
1. 10. 19..	173,2	195,1	
2. 10. 19..	199,1	207,1	
3. 10. 19..	223,4	232,3	
4. 10. 19..	182,5	178,9	
5. 10. 19..	248,9	227,7	
6. 10. 19..	234,5	219,2	

a) Wie groß war der Bestand am Ende eines jeden Tages?

b) Wie hoch waren insgesamt die Kartoffeleingänge und die Kartoffelausgänge?

c) Wieviel Dezitonnen Kartoffeln wurden durchschnittlich jeden Tag ein- und ausgeliefert?

299. Berechne für die Paare in Aufgabe **192** die Quotienten $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$!

300. a) $5\frac{1}{9} - 3\frac{7}{12} + 4\frac{2}{9}$ b) $3\frac{1}{4} : 1\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ c) $4\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} - \frac{8}{9}$

301. a) $\frac{8}{9} + 11 \cdot 8\frac{15}{16}$ b) $5{,}7 \cdot 16{,}2 + 2{,}7$ c) $5{,}7\,(16{,}2 + 2{,}7)$

302. a) $\frac{9}{8} : \left(11 + 8\frac{5}{16}\right)$ b) $(1{,}238 + 2{,}762) \cdot 0{,}1$ c) $12\frac{2}{3} - 61\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}$

303. a) $\left(12\frac{2}{3} + 61\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4}$ b) $\left(61\frac{1}{2} + 12\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{4}$ c) $61\frac{1}{2} : \frac{1}{4} + 12\frac{2}{3}$

304. a) $61\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{4} + 12\frac{2}{3}\right)$ b) $61\frac{1}{2} : \left(12\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$ c) $61\frac{1}{2} : 12\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

305. Ein erfahrener Arbeiter fertigt in 1 Stunde 18 Einzelteile, ein unerfahrener $\frac{2}{3}$ dieser Menge. Wieviel Einzelteile stellt ein erfahrener Arbeiter an einem 7stündigen Arbeitstag mehr her?

306. In drei Garagen bringt man 460 Wagen unter. Die Anzahl der Wagen, die in der ersten Garage untergestellt sind, macht $\frac{3}{4}$ der Anzahl der Wagen in der zweiten aus, und in der dritten Garage stehen $1\frac{1}{2}$ mal soviel Wagen wie in der ersten.
Wieviel Wagen sind in jeder Garage untergebracht?

307. In einem Werk, das drei Abteilungen hat, arbeiten 6 000 Arbeiter. In der zweiten Abteilung arbeiten $\frac{2}{3}$ der Anzahl, die in der ersten arbeiten. Die Anzahl der Arbeiter in der dritten Abteilung macht $\frac{5}{6}$ der Anzahl der Arbeiter in der zweiten aus.
Wieviel Arbeiter arbeiten in jeder Abteilung?

308. Aus einem Petroleumbehälter flossen zuerst $\frac{2}{5}$, dann $\frac{1}{3}$ des ganzen Petroleums aus. Danach blieben im Behälter 8 t Petroleum übrig.
Wieviel Tonnen Petroleum waren anfänglich in dem Behälter?

309. Radfahrer fuhren im Verlaufe von drei Tagen ein Rennen. Am ersten Tage fuhren sie $\frac{4}{15}$ des ganzen Weges, am zweiten $\frac{2}{5}$ und am dritten Tage die restlichen 100 km.
Welche Strecke legten die Radfahrer in drei Tagen zurück?

b

310. Der Quotient zweier Zahlen ist 1,2. Bestimme den neuen Quotienten, wenn:

a) der Dividend mit 0,5 multipliziert wird und der Divisor unverändert bleibt;
b) Dividend und Divisor mit 0,4 multipliziert werden;
c) der Dividend mit 0,9 und der Divisor mit 3 multipliziert werden;
d) der Dividend durch 6 und der Divisor durch 0,2 dividiert werden!

311. Der Dividend wurde mit 2,4 multipliziert. Wie muß der Divisor verändert werden,

a) damit der Quotient den 7,2fachen Wert annimmt,
b) damit der Quotient nur den vierten Teil des Wertes hat,
c) damit der Quotient sich nicht verändert!

b

312. Die Arbeitsbreite einer Mähmaschine mit Traktor beträgt 2,1 m. Welche Fläche ernten drei Mähmaschinen mit Traktor in 6 Stunden Arbeit ab, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit des Traktors 4,5 km in der Stunde beträgt?
(Runde das Ergebnis auf eine Genauigkeit von 1 ha!)

313. Eine Personenzuglokomotive verbraucht auf 5 km Strecke 0,75 t Wasser. Der Wassertank des Tenders faßt 16,5 t Wasser. Für wieviel Kilometer reicht das Wasser, wenn der Tank zu 0,9 seines Fassungsvermögens gefüllt war?

314. Auf 100 Haushalte in der DDR entfielen 1958 86,8 Rundfunkempfänger, 5,1 Fernsehempfänger, 2,1 elektrische Kühlschränke und 1,6 elektrische Waschmaschinen. Bis zum Jahre 1964 konnte eine Steigerung auf 92,9 Rundfunkempfänger, 45,2 Fernsehempfänger, 21,8 Kühlschränke und 24,1 Waschmaschinen erreicht werden. (Bei den Runkfunkgeräten ist die Anzahl der angemeldeten Geräte gemeint. Es ist in vielen Haushalten mehr als ein Gerät vorhanden.)

a) Um wieviel Geräte stieg der Bestand je 100 Haushalte für jede Erzeugnisart?
b) Wieviel Fernsehgeräte waren demnach im Jahre 1964 in einer Ortschaft mit 125 Haushalten, in einer Kleinstadt mit 9 000 Haushalten und in einer Großstadt mit 40 000 Haushalten vorhanden?
c) Auf das Wievielfache stieg der Bestand je 100 Haushalte für jede Erzeugnisart?

315. Unter dem jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch versteht man den durchschnittlichen Verbrauch einer Person während eines Jahres.
In der DDR veränderte sich der Pro-Kopf-Verbrauch von 1955 bis 1964 folgendermaßen:

a) Bei Fleisch stieg er von 45,0 kg auf das 1,29fache.
b) Bei Geflügel stieg er von 2,4 kg auf das 1,54fache.
c) Bei Kartoffeln sank er von 174,6 kg auf das 0,9fache.
d) Bei Eiern stieg er von 116 St. auf das 1,76fache.
e) Bei Mehl und Nährmitteln fiel er von 121,6 kg auf das 0,81fache.
f) Bei Zucker stieg er von 27,4 kg auf das 1,12fache.

Wie hoch war der Verbrauch jeweils im Jahre 1964?

316. In der folgenden Übersicht wird die landwirtschaftliche Nutzfläche, die von den LPG bewirtschaftet wird, der Anzahl wichtiger Maschinen gegenübergestellt.

	1960	1962	1964
Landwirtschaftliche Nutzfläche	5 408 780 ha	5 473 115 ha	5 459 080 ha
Traktoren	43 170	53 205	101 806
Mähdrescher	3 241	4 146	11 213
Kartoffelvollerntemaschinen	3 228	3 266	5 352

Auf wieviel Hektar kam in den einzelnen Jahren je eine Maschine? (Rechne auf eine Dezimalstelle genau!)

c) Winkelbeziehungen, Symmetrie

1. Ziehe durch einen beliebig angenommenen Punkt drei verschiedene Geraden!
Wieviel Geraden kann man durch einen Punkt ziehen?

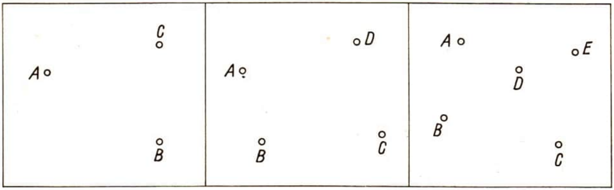
2. Ziehe durch zwei gegebene Punkte eine Gerade!
Wieviel Geraden kann man durch zwei Punkte ziehen?
Wieviel krumme Linien kann man durch zwei Punkte ziehen?

3. Durch zwei gegebene Punkte sind zwei verschiedene Linien gezogen. Können beide Linien Geraden sein? Begründe deine Antwort!

4. Gegeben sind drei Punkte (Bild c 1); ziehe durch je zwei von ihnen eine Gerade! Wieviel solcher Geraden kann man ziehen?

5. Im Bild c 2 sind vier Punkte gegeben. Ziehe durch jedes Punktepaar eine Gerade!
Wieviel Geraden können insgesamt gezogen werden?

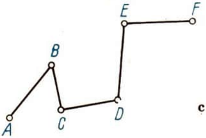
c 1 bis 3



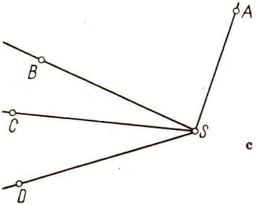
6. Im Bild c 3 sind fünf Punkte gegeben. Ziehe durch jedes Punktepaar eine Gerade!
Wieviel Geraden können insgesamt gezogen werden?

7. Ziehe von einem beliebigen Punkt aus drei verschiedene Strahlen! Wieviel Strahlen kann man von einem Punkt aus ziehen?

8. Wieviel Strahlen entstehen, wenn sich zwei beliebige Geraden in einem Punkt P schneiden?
Wie heißt der Anfangspunkt dieser Strahlen?



c 4



c 5

9. Wieviel Strecken sind im Bild c 4 insgesamt dargestellt? Nenne sie!

10. Nenne alle Winkel, die im Bild c 5 dargestellt sind, und miß deren Größe!

11. Zeichne Winkel von 23°, 35°, 46°, 68°, 92°, 100°, 113°, 146°, 152°, 179°!

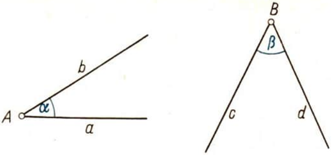
12. Zeichne zwei Winkel $\alpha = 63°$ und $\beta = 42°$! Konstruiere
a) $\alpha + \beta$, **b)** $\alpha - \beta$! Vergleiche die Ergebnisse! Beschreibe die Konstruktion!

13. Gegeben sind zwei Winkel (Bild c 6). Miß beide Winkel und konstruiere $\alpha + \beta$!

14. Wie heißen die Winkel α, für die folgendes gilt:

a) $0° < \alpha$ und $\alpha < 90°$,

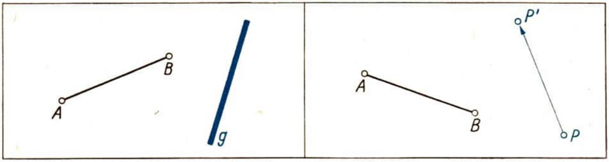
b) $90° < \alpha$ und $\alpha < 180°$.



c 6

15. Zeichne die Winkel $\alpha = 23°$, $\beta = 68°$, $\gamma = 122°$, $\delta = 97°$!
Konstruiere **a)** $\alpha + \beta$; **b)** $\beta + \delta$; **c)** $\gamma - \delta$; **d)** $\alpha + \gamma$; **e)** $\gamma - \beta$; **f)** $\delta - \alpha$!

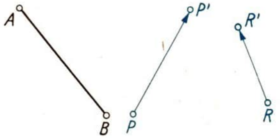
16. Verschiebe die Strecke $\overline{AB}$ im Bild c 7 in Richtung der gegebenen Geraden!



c 7 und 8

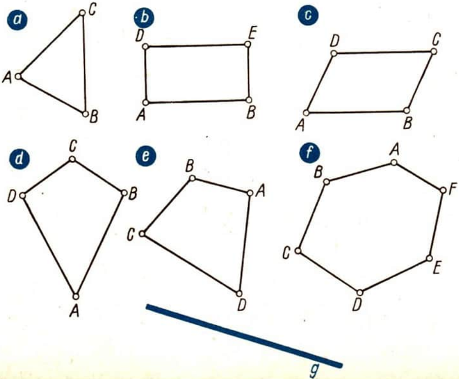
17. Verschiebe die im Bild c 8 angegebene Strecke nach der gegebenen Vorschrift $\overrightarrow{PP'}$!

18. Verschiebe die im Bild c 9 gegebene Strecke $\overline{AB}$ zuerst nach der Vorschrift $\overrightarrow{PP'}$ und die Strecke $\overline{A'B'}$ nach der Vorschrift $\overrightarrow{RR'}$!



c 9

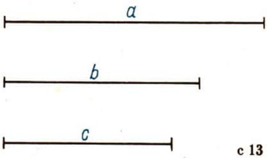
Führe im nächsten Fall die Verschiebungen der Strecke $\overline{AD}$ in anderer Reihenfolge aus und vergleiche die Ergebnisse!



c 10

c 11

c 12



c 13

19. Verschiebe die im Bild c 10 gegebenen Figuren in Richtung der gegebenen Geraden!

20. Verschiebe die im Bild c 10 gegebenen Figuren nach der Vorschrift $\overrightarrow{PP'}$ im Bild c 11!

21. Verschiebe die im Bild c 10 gegebenen Figuren nach der Vorschrift $\overrightarrow{QQ'}$ im Bild c 12!

22. Führe die in den Aufgaben 20 und 21 geforderten Verschiebungen nacheinander und in verschiedenen Reihenfolgen durch! Vergleiche die Ergebnisse!

23. Drehe die im Bild c 10 gegebenen Figuren um jeweils

a) 80° und

b) 150°!

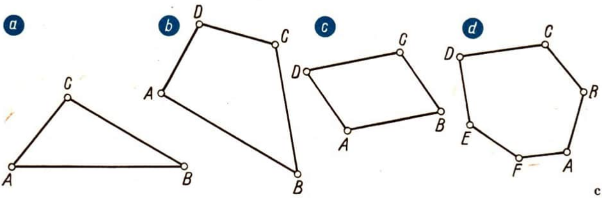
Drehe jeweils um die festen Punkte *B*!

24. Zeichne eine Strecke, die gleich der Strecke *a* ist (Bild c 13)!

25. Zeichne eine Strecke, die gleich der Summe der Strecken *a* und *b* ist (Bild c 13)!

26. Zeichne eine Strecke, die gleich der Summe der Strecken *a*, *b* und *c* ist (Bild c 13)!

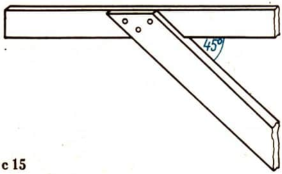
27. Zeichne eine Strecke, die gleich der Differenz der Strecken *a* und *c* ist (Bild c 13)!



c 14

28. Vergleiche im Bild c 14 die Länge der Seiten einer jeden Figur miteinander!

29. Das Bild c 15 zeigt ein Gehrungsmaß, das vom Tischler zum Anreißen und Prüfen von Gehrungen (45°-Winkel) benötigt wird. Gib an, wie groß der Nebenwinkel ist, und fertige dazu eine Skizze an!



c 15

30. Der gemeinsame Schenkel zweier Nebenwinkel α und β wird gedreht. Der Winkel α soll die in der Tabelle angegebenen Werte annehmen. Ermittle zunächst durch Zeichnen und Messen die entsprechende Größe des Nebenwinkels! Prüfe die gemessenen Werte durch Rechnen nach! (Fertige die nachstehende Tabelle im Heft an!)

α	10°	18°	32°	50°	84°	95°	115°	125°	144°	162°
β gemessen										
β berechnet										

31. Zwei Nebenwinkel sind einander gleich. Wie groß ist dann jeder?

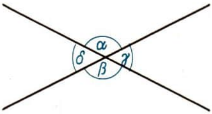
32. Zwei Geraden schneiden einander und bilden die Winkel α, β, γ und δ. Der Winkel α soll nacheinander die Werte 10°, 20°, 30°, . . ., 180° annehmen (Bild c 16).

a) Untersuche mit Hilfe eines Modells, wie sich die Größe der vier Winkel verändert!

b) Berechne für jeden Wert von α die Werte der Winkel β, γ und δ! Stelle die berechneten Werte in einer Tabelle zusammen!

α	10°	20°	30°	40°	50°	usw.
β						
γ						
δ						

c 16



c) Drehe bei einem Modell aus 2 Pappstreifen einen Pappstreifen nach Schätzung nacheinander um 10° vom anderen Streifen weg! Prüfe die geschätzte Einstellung jedesmal durch Messen nach!

d) Schätze und miß bei fünf verschiedenen Stellungen der Pappstreifen die Größe des Winkels δ und berechne die Größe der anderen Winkel!

33. a) Welche Winkel am Schnittpunkt der vier Geraden im Bild c 17 sind Scheitelwinkel?

b) Welche Winkel sind einander gleich?

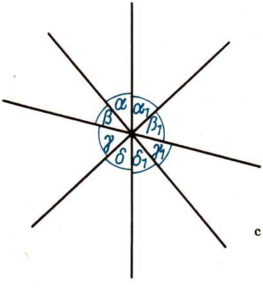
c) Welche Winkel ergeben zusammen 180°?

d) Miß die Größe der einzelnen Winkel!

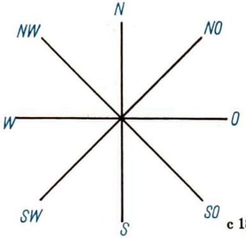
34. Das Bild c 18 stellt die acht Haupthimmelsrichtungen dar.

a) Nenne Scheitelwinkel!

b) Stelle die Größe der einzelnen Winkel fest!



c 17



c 18

35. Zeichne einen Winkel $\alpha = 43°$! Verlängere beide Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus!

a) Berechne die Größe der drei anderen Winkel!

b) Miß die drei Winkel und vergleiche die gemessenen Größen mit den errechneten!

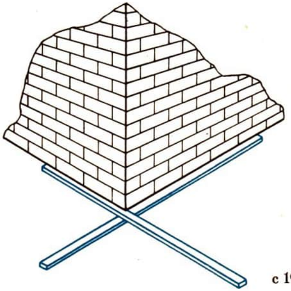
36. Zeichne einen Winkel $\beta = 107°$! Verlängere ebenfalls seine Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus und berechne sowie miß die Größe der entstandenen drei Winkel!

37. Der Winkel, den zwei Mauern miteinander bilden, soll gemessen werden. Benutze dazu zwei Stäbe (Bild c 19)! Wo kannst du den Winkel messen?

38. Miß die Winkel an deinem Zeichendreieck mit dem Winkelmesser! Konstruiere unter Verwendung von Dreieck und Lineal einen Winkel von

a) 135°, **b)** 150°, **c)** 120°!

39. Bringe einen Streifen mit einer Geraden entsprechend dem Bild c 21 zum Schnitt und bezeichne die Winkel mit griechischen Buchstaben!



c 19

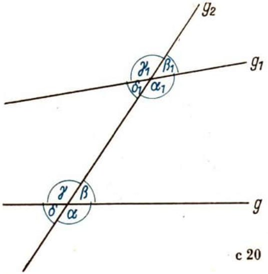
a) Unterstreiche dann die Buchstaben farbig, wobei für gleich große Winkel die gleiche Farbe zu verwenden ist!

b) Begründe die Gleichheit mit Hilfe der bekannten Sätze!

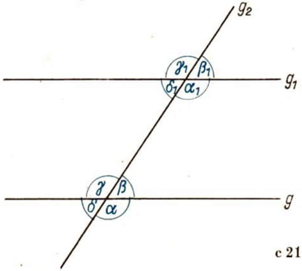
40. Zeichne Winkel an geschnittenen Geraden entsprechend dem Bild c 20 und miß die Größe der zusammengehörenden Paare Wechselwinkel, Stufenwinkel und entgegengesetzt liegender Winkel!

41. Zeichne Winkel an einem geschnittenen Streifen entsprechend dem Bild c 21 und miß die Größe der zusammengehörenden Paare Wechselwinkel, Stufenwinkel und entgegengesetzt liegender Winkel!

42. Überprüfe die Ergebnisse aus **41** und **42** an Hand der entsprechenden Sätze!



c 20



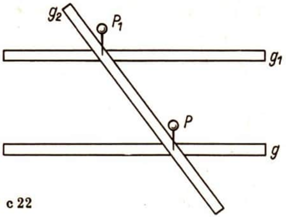
c 21

43. Fertige ein Modell entsprechend Bild c 22, indem du je zwei Stäbe in den Punkten P und P_1 beweglich miteinander verbindest!

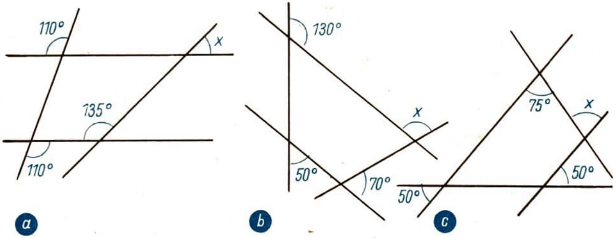
a) Beobachte, wie sich die Winkel verändern, wenn du g_2 drehst und g sowie g_1 parallellaufen läßt! Was stellst du fest?

b) Was ergibt sich, wenn g_2 senkrecht auf g und g_1 steht?

c) Beobachte, wie sich die Winkel verändern, wenn du g_2 drehst und g und g_1 nicht parallellaufen läßt!



c 22



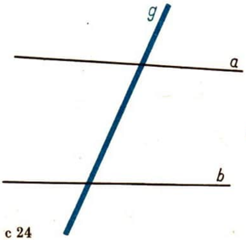
c 23

44. Ermittle die Größe der Winkel x in den Bildern c 23 a bis c!

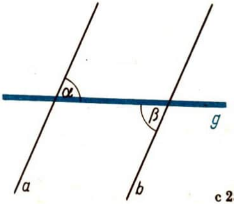
45. Die Geraden a und b werden durch eine dritte Gerade geschnitten (Bild c 24). Entscheide, ob die Geraden a und b zueinander parallel sind!
Hinweis: Erkläre, welche Winkel man dazu messen muß!

46. Im Bild c 25 ist $\alpha = 72°$, und β beträgt den 1,5ten Teil seines Nebenwinkels. Stelle fest, ob die Geraden a und b zueinander parallel sind!

47. Beweise, daß zwei verschiedene Geraden, die zu einer dritten Geraden parallel verlaufen, zueinander parallel sind!
Hinweis: Ziehe eine Gerade, die die drei gegebenen Geraden schneidet!

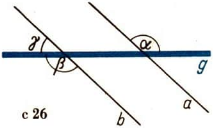


c 24



c 25

48. Im Bild c 26 ist $\alpha = 160°$ und die Differenz $\beta - \gamma = 20°$.
Stelle fest, ob die Geraden a und b einen Streifen bilden!



c 26

49. Sammle verschiedene Blätter und untersuche, ob sie achsensymmetrisch sind!

50. Nenne weitere Beispiele aus der Natur, bei denen Achsensymmetrie besteht!

51. Gibt es in deinem Heimatkreis Gebäude, bei denen die Skizze der Fassade eine achsensymmetrische Figur ergibt? Versuche, die Giebelwand eines solchen Hauses aufzuzeichnen! Schneide die Figur aus und zeichne die von dir angenommene Symmetrieachse ein! Prüfe durch Umklappen, ob die Figur achsensymmetrisch ist!

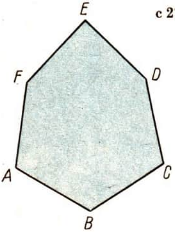
52. **a)** Zeichne ein beliebiges Dreieck, schneide es aus und stelle fest, ob es achsensymmetrisch ist!
b) Zeichne mit dem Zirkel einen Kreis! Lege durch den Mittelpunkt des Kreises eine Gerade! Schneide die Kreisfläche aus und klappe sie um diese Gerade!

53. Die Bilder c 27 bis c 32 geben verschiedene geometrische Figuren wieder, die auf Achsensymmetrie zu untersuchen sind. Pause die Abbildungen auf dünnes Papier! Gib durch Falten die Symmetrieachsen an!

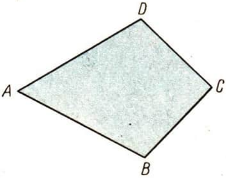
54. Zeichne einen Kreis und schneide ihn aus! Wieviel Symmetrieachsen gibt es?

55. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und stelle ein zweites zu ihm achsensymmetrisch gelegenes Dreieck $A'B'C'$ her!

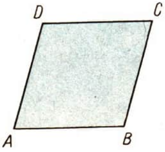
c 27



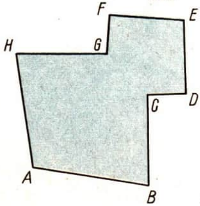
c 28



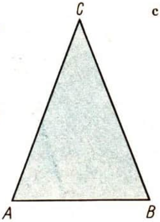
c 29



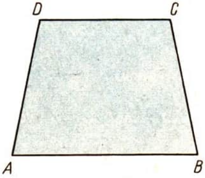
c 30



c 31



c 32



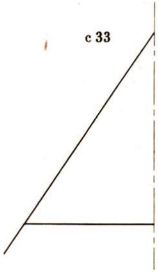
56. Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ und eine Symmetrieachse s! Zeichne die zu $\overline{AB}$ in bezug auf die Symmetrieachse s achsensymmetrische Strecke $\overline{A'B'}$!

57. Zeichne einen Punkt P und eine Symmetrieachse s! Suche den zu P in bezug auf die Symmetrieachse s achsensymmetrischen Punkt P'!

58. Übertrage **a)** das Bild c 27, **b)** das Bild c 28, **c)** das Bild c 29 auf Zeichenpapier und konstruiere jeweils die Symmetrieachse!

59. Übertrage das Bild c 33 (Dachgiebel) auf dein Zeichenblatt und konstruiere die rechte achsensymmetrisch gelegene Teilfigur!

c 33



60. Zeichne eine Strecke $\overline{DE}$ von **a)** 4 cm, **b)** 5,8 cm Länge! Wähle jeweils eine Symmetrieachse s und konstruiere die in bezug auf s achsensymmetrische Strecke $\overline{D'E'}$!

Anleitung: Konstruiere bei **a)** zunächst die symmetrischen Punkte D', E'! In der Aufgabe **b)** ist die symmetrische Strecke $\overline{D'E'}$ mit Hilfe eines symmetrischen Punktes und dem Winkel zwischen der Symmetrieachse und der Verlängerung der Strecke $\overline{DE}$ zu konstruieren.

61. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade s, die nicht durch M geht! Konstruiere den achsensymmetrisch gelegenen Kreis in bezug auf die Gerade s!

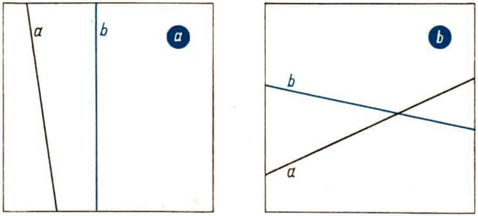
C

Anleitung: Konstruiere zunächst den zu M symmetrischen Punkt M'! Schlage um M' einen Kreis mit dem Radius des gegebenen Kreises!

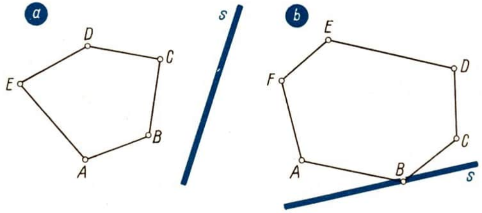
62. Zeichne den Grundriß einer quadratischen Pyramide $A'B'C'D'$, deren Grundkante 4,3 cm lang ist! Konstruiere die Symmetrieachsen dieser Figur!

63. Spiegele die Gerade a an der Geraden b (Bild c 34)!

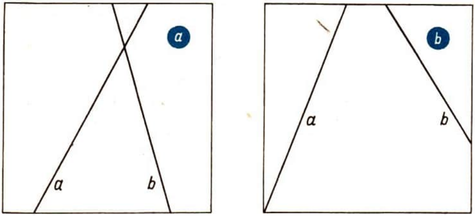
64. Spiegele die Figur im Bild c 35 an der Geraden s!



c 34



c 35



c 36

65. Zeichne drei axialsymmetrische Figuren!

66. Wieviel Symmetrieachsen enthält ein Würfel?

67. Konstruiere die Symmetrieachse zu den beiden Geraden a und b (Bild c 36)!
Bemerkung: Die Umrandungen in den Bildern c 34 und c 36 stellen den Zeichenblattrand dar!

68. Es sind die Strecken $a = 3{,}0$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 13{,}0$ cm, $d = 4{,}9$ cm und $e = 1$ cm zu halbieren.

a) Bestimme zunächst durch Schätzen die Mittelpunkte der Strecken!
b) Halbiere die Strecken durch Konstruktion! Prüfe die Konstruktion durch Messen nach! Vergleiche die Konstruktion mit der geschätzten Teilung!
c) Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

69. **a)** Teile eine Strecke $a = 13{,}7$ cm der Reihe nach in 2, 4, 8 gleiche Teile!
b) Gib eine Konstruktionsbeschreibung!

70. Konstruiere mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck ein Rechteck mit den Seiten $a = 6{,}7$ cm und $b = 3{,}3$cm! Halbiere die Seiten des Rechtecks zunächst durch Schätzen und dann durch Konstruktion!

71. Zeichne ein Paar Scheitelwinkel!

a) Halbiere nacheinander beide!
Fasse das Ergebnis in einem Satz zusammen!
b) Gib eine Konstruktionsbeschreibung!

72. Zeichne ein Paar Nebenwinkel!

a) Halbiere beide Winkel!
b) Erkläre das Ergebnis in einem Satz!

73. Teile durch wiederholtes Halbieren einen rechten Winkel in acht gleiche Teile!

a) Miß mit dem Winkelmesser nach!
b) Beschreibe die Konstruktion!

74. Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal Winkel von

a) 45°, **b)** 135°, **c)** 22,5°, **d)** 67,5°!

Prüfe die Konstruktion mit dem Winkelmesser nach!
Anleitung: Konstruiere zunächst einen rechten Winkel, indem du von einem Punkt auf eine Gerade das Lot fällst! Teile den rechten Winkel, bis der geforderte Winkel erreicht ist bzw. setze Winkel zusammen!
Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

C

75. Zeichne ein Dreieck *EFG* und fälle das Lot von jedem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite!
Anmerkung: Verlängere gegebenenfalls die Dreieckseiten!

76. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt *M*! Teile die Kreisfläche mit Hilfe von Zirkel und Lineal in vier gleich große Teile!

77. Konstruiere ein Rechteck mit den Seiten $a = 4$ cm und $b = 6$ cm unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Gib eine Konstruktionsbeschreibung!
Anleitung: Wende die Konstruktion der Senkrechten an! Verlängere dazu die Seite $\overline{AB}$ über die Endpunkte hinaus!

78. Überlege, ob man einige der fünf Grundkonstruktionen auch mit Hilfe des Zeichendreiecks ausführen kann!
Prüfe an Hand von Zeichnungen nach, ob die Konstruktion mit dem Zirkel oder dem Zeichendreieck schneller und besser vorgenommen werden kann!

79. Konstruiere die Parallelen zu einer Geraden *g* im Abstand von **a)** 4 cm, **b)** 3,2 cm, **c)** 2,6 cm, 5,2 cm mit Hilfe von Zirkel und Lineal!
Anleitung: Nimm zwei Punkte auf der Geraden *g* an und errichte in ihnen jedesmal die Senkrechte auf *g*! Trage dann die Abstände der Parallelen ab und zeichne die Gerade!

C

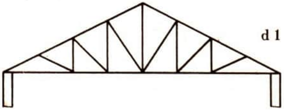
80. **a)** Konstruiere ein Rechteck mit Hilfe von Zirkel und Lineal!
Die Seiten des Rechtecks sollen eine Länge von 3,6 cm bzw. 5,4 cm haben.
b) Konstruiere in diesem Rechteck die vier Winkelhalbierenden!

81. Zeichne ein Dreieck *GHI* und konstruiere die Mittelsenkrechten seiner Seiten!

82. Überlege, wie zwei Winkel liegen müssen, wenn sie die Symmetrieachse gemeinsam haben sollen! Fertige eine entsprechende Konstruktion an und überprüfe an Hand deiner Zeichnung die Überlegung!

d) Planimetrie

1. Das Bild d 1 stellt einen Dachbinder dar, wie er häufig in Lagerhäusern und Scheunen verwendet wird. Was für Dreiecke treten bei diesem Dachbinder auf?



d 1

2. Was für Dreiecke treten in dem Bild D 23 auf Seite 89 auf? Bedenke, daß manche Dreiecke verzerrt erscheinen!

3. An welchen Bauten oder Gegenständen deiner Umgebung findest du Dreiecksformen? Nenne jeweils den Gegenstand, den Verwendungszweck und die Art des Dreiecks!

4. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck und bezeichne die Eckpunkte, Seiten und Winkel!
   a) Addiere jeweils zwei Seiten des Dreiecks und vergleiche die Summe mit der übrigbleibenden dritten Seite!
   b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, derartige Vergleiche durchzuführen?
   c) Subtrahiere jeweils zwei!

5. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck und bezeichne die Eckpunkte, Seiten und Winkel!
   a) Addiere jeweils zwei Seiten des Dreiecks und vergleiche die Summe mit der übrigbleibenden dritten Seite!
   b) Wieviel Möglichkeiten gibt es, derartige Vergleiche durchzuführen?

6. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und ein rechtwinkliges Dreieck und bezeichne die Eckpunkte, Seiten und Winkel!

   a) Addiere jeweils zwei Seiten des Dreiecks und vergleiche die Summe mit der übrigbleibenden dritten Seite!

   b) Wieviel Möglichkeiten gibt es, derartige Vergleiche durchzuführen?

7. Zeichne ein beliebiges Dreieck, bezeichne die Eckpunkte, Seiten und Winkel, und miß die Winkel und Seiten!

   Ordne a) die Winkel und b) die Seiten der Größe nach! c) Welche Seite liegt dem größten Winkel gegenüber? d) Welcher Winkel liegt der kleinsten Seite gegenüber?

8. Zeichne zwei beliebige Dreiecke, bezeichne die Eckpunkte, Seiten und Winkel und miß die Winkel und Seiten!

   Ordne a) die Winkel und b) die Seiten eines jeden Dreiecks der Größe nach! c) Vergleiche paarweise die Winkel und Seiten beider Dreiecke und stelle Ungleichungen auf! d) Konstruiere jeweils die Differenz zweier Dreieckseiten und vergleiche diese Differenz mit der dritten Seite! e) Wieviel solcher Ungleichungen lassen sich von jedem Dreieck aufstellen?

9. Begründe, warum du aus folgenden Angaben keine Dreiecke konstruieren kannst?

   a) $a = 3$ cm; $b = 2$ cm; $c = 8$ cm b) $a = 6$ cm; $b = 3$ cm; $c = 10$ cm

   c) $a = 4{,}5$ cm; $b = 3{,}4$ cm; $c = 8{,}2$ cm

10. Überlege, ob aus den folgenden Strecken Dreiecke konstruiert werden können!

    a) $a = 8$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm b) $a = 8$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm

    c) $a = 8$ cm; $b = 2$ cm; $c = 5$ cm

    Begründe deine Antwort!

11. Gegeben sind die Gerade MN und die Punkte A und B, die auf verschiedenen Seiten von dieser Geraden liegen. Auf der Geraden MN ist ein Punkt C so zu ermitteln, daß die Summe der Entfernungen $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ so klein wie möglich ist.

12. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus

    a) $a = b = 3$ cm und $c = 5$ cm,

    b) $a = 4{,}2$ cm und $b = c = 3{,}8$ cm,

    c) $a = c = 3{,}1$ cm und $b = 5{,}6$ cm!

    d) Gib zu einer Konstruktion die Beschreibung!

    e) Ergänze die Konstruktion von durch die Seitenhalbierende der Seite c! Konstruiere außerdem die Symmetrieachse! Es ist ferner noch die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze zu konstruieren. Was stellst du fest?

13. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck aus einer gegebenen Seite von der Länge

    a) 4 cm, b) 2,8 cm und c) 3,6 cm!

    d) Gib zu einer Konstruktion die Beschreibung!

    e) Konstruiere zu einem Dreieck die Symmetrieachsen!

14. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus $a = b = 10$ cm und $c = 6$ cm auf Karton! Konstruiere die Symmetrieachse zu diesem Dreieck!

15. In einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt.

    a) $\alpha = 43°$; $\beta = 64°$ b) $\gamma = 113°$; $\beta = 24°$

    c) $\beta = 74°$; $\gamma = 83°$ d) $\alpha = 14°$; $\beta = 63°$

    Berechne jeweils den dritten Innenwinkel und die drei Außenwinkel!

16. Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck! Führe an dieser Figur die Beweise für die Sätze

a) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Satz D 2) **b)** $\gamma_1 = \alpha + \beta$ (Satz D 3)!

17. **a)** In der folgenden Tabelle ist die Größe der Winkel α und β angegeben. Zu errechnen ist γ.

α	20°	31°	54°	83°	90°	90°	74°	60°	40°	90°	110°	110°
β	85°	77°	45°	25°	47°	53°	90°	60°	100°	90°	125°	35°
$\alpha+\beta$												
γ												

b) Erläutere besondere Fälle, die sich bei der Berechnung des Winkels γ ergeben!

c) Nenne die Arten der Dreiecke, die die angegebenen Winkel enthalten!

18. Mit Hilfe von zwei Zeichendreiecken sind ohne Verwendung eines Winkelmessers die folgenden Winkel zu zeichnen: **a)** 75°, **b)** 105°.

Hinweis: Verwende ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck und ein ungleichseitiges rechtwinkliges Dreieck! Beachte den Satz über Nebenwinkel!

19. Konstruiere die Summe zweier Winkel aus folgenden Angaben!

a) $\alpha = 53°$; $\beta = 71°$ **b)** $\beta = 74°$; $\gamma = 92°$ **c)** $\alpha = 64°$; $\gamma = 97°$

Miß die Größe des dritten Winkels mit Hilfe eines Winkelmessers!

Kontrolliere die gemessenen Werte durch Berechnen!

20. Zeichne ein beliebiges Dreieck *ABC* mit den Winkeln α, β, γ! Konstruiere zu jedem Dreieckswinkel je einen Nebenwinkel!

21. Errechne nach der Tabelle in Aufgabe **17** die Außenwinkel der verschiedenen Dreiecke!

22. Welche Beziehung besteht zwischen einem Innenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks und dem Außenwinkel an der Spitze?

d

23. Kann ein Außenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ein rechter, ein spitzer, ein stumpfer Winkel sein?

24. Wenn einer der Außenwinkel eines Dreiecks spitz ist, was für Winkel sind dann die übrigen Außenwinkel des Dreiecks? Begründe die Antwort!

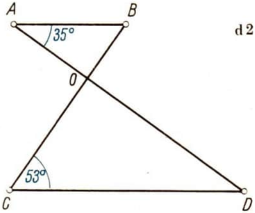
25. Ein Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 68°. Ermittle die Winkel an der Basis des Dreiecks!

26. Ein Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 162°. Ermittle einen Außenwinkel an der Basis des Dreiecks!

27. Zwei Innenwinkel eines Dreiecks betragen 62° und 105°. Ermittle die Summe ihrer Außenwinkel!

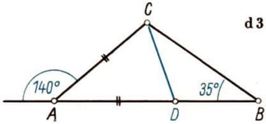
28. Die Summe zweier Außenwinkel eines Dreieckes beträgt 258°. Wie groß ist der Innenwinkel des Dreiecks, der zu keinem von ihnen ein Nebenwinkel ist?

29. In der Figur im Bild d 2 sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel zueinander, die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CB}$ schneiden einander im Punkt *O*. Ermittle den Winkel *BOD*!



d 2

30. In einem Dreieck (Bild d 3) ist die Strecke $\overline{DC}$ so gezogen, daß $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt. Der Außenwinkel α_1 beträgt 140°, und der Winkel β beträgt 35°. Beweise, daß $\overline{DC} = \overline{DB}$ gilt!



d 3

31. Eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreiecks schneidet und zur dritten Seite parallel verläuft, schneidet ein Teildreieck ab. Beweise, daß jeder Winkel des Teildreiecks kongruent ist zu einem Winkel des ursprünglichen Dreiecks!

32. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren. Gegeben ist nur ein Stück.

a) $c = 6{,}3$ cm　　b) $\gamma = 68°$

33. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren. Gegeben sind zwei Stücke.

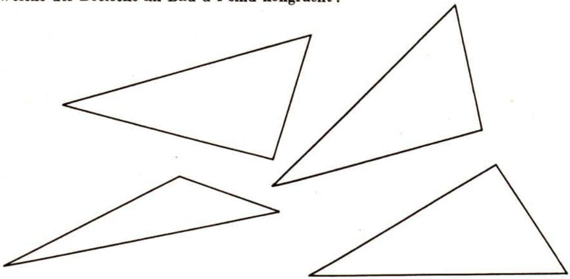
a) $c = 5{,}4$ cm; $\alpha = 35°$　　b) $a = 3$ cm; $b = 4{,}8$ cm　　c) $\alpha = 48°$; $\beta = 65°$

34. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 4{,}8$ cm; $\alpha = 53°$; $b = 4{,}5$ cm!

a) Beschreibe die Konstruktion!

b) Konstruiere noch ein Dreieck nach diesen Angaben! Was stellst du fest?

35. Welche der Dreiecke im Bild d 4 sind kongruent?



d 4

36. Konstruiere zu den verschiedenen Dreiecken im Bild d 4 noch je ein kongruentes!

37. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $c = 4{,}8$ cm; $\alpha = 60°$; $b = 4{,}8$ cm　　b) $\beta = 32°$; $a = 5{,}2$ cm; $c = 4{,}1$ cm

c) $a = 7{,}5$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $\gamma = 90°$　　d) $b = 4{,}3$ cm; $c = 6{,}7$ cm; $\alpha = 112°$

e) $\gamma = 72°$; $a = 4$ cm; $b = 8$ cm

f) Miß die Winkel und kontrolliere die Winkelsumme!

g) Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an!

38. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $b = 6$ cm; $\alpha = 20°$; $\gamma = 30°$　　b) $a = 7$ cm; $\beta = 43°$; $\gamma = 81°$

c) $c = 4{,}8$ cm; $\alpha = 35°$; $\gamma = 112°$　　d) $b = 3$ cm; $\alpha = 64°$; $\beta = 37°$

e) Nenne die Arten der entstandenen Dreiecke!

39. Konstruiere ein Dreieck aus $c = 4$ cm; $\alpha = 43°$; $\beta = 10°$ (20°, 30° ...)!
Miß in jedem Fall bei wachsendem Winkel β die Seiten a und b!

40. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 6$ cm **b)** $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 5$ cm
c) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 4$ cm **d)** $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 3$ cm
e) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 2$ cm
f) Was ergibt sich bei den Konstruktionen?

41. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $a = 8$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm **b)** $a = 7{,}3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 7{,}3$ cm
c) $a = 6{,}7$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $c = 5{,}1$ cm!
d) Wieviel Stücke brauchten in der Aufgabe **b)** nur gegeben zu werden, wenn die Art des Dreiecks genannt wäre? Wie hätte dann die Aufgabe lauten müssen?

Konstruiere in den Aufgaben **42** bis **44** Dreiecke ABC aus drei gegebenen Stücken!

42. **a)** $c = 5{,}2$ cm; $b = 4{,}3$ cm; $\alpha = 124°$ **b)** $a = 3{,}6$ cm; $b = 4{,}8$ cm; $c = 6{,}5$ cm
c) $b = 5{,}3$ cm; $\beta = 46°$; $\gamma = 105°$ **d)** $a = 4$ cm; $b = 4$ cm; $c = 6$ cm
e) $a = 3{,}8$ cm; $c = 5{,}9$ cm; $\gamma = 84°$ **f)** $a = 5{,}2$ cm; $b = 2{,}5$ cm; $\beta = 42{,}7°$

43. **a)** $a = 8{,}7$ cm; $b = 6{,}3$ cm; $\beta = 24{,}9°$ **b)** $b = 4{,}9$ cm; $c = 3{,}1$ cm; $\gamma = 57{,}2°$
c) $c = 6{,}4$ cm; $a = 3{,}9$ cm; $\alpha = 47{,}9°$ **d)** $a = 2{,}9$ cm; $b = 6{,}3$ cm; $\alpha = 67{,}4°$
Begründe die Ergebnisse der Konstruktionen!

44. **a)** $a = 7{,}2$ cm; $\alpha = 47{,}2°$; $\beta = 100°$ **b)** $b = 4{,}4$ cm; $\beta = 27{,}9°$; $\gamma = 97{,}4°$
c) $c = 4{,}9$ cm; $\beta = 67{,}3°$; $\gamma = 53{,}1°$ **d)** $\alpha = 42{,}9°$; $\beta = 63{,}4°$; $b = 7{,}1$ cm
e) $\beta = 101{,}3°$; $\gamma = 27{,}2°$; $c = 6{,}4$ cm
Begründe die Ergebnisse der Konstruktionen!

45. **a)** Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Stücken $c = 8{,}4$ cm; $\alpha = 63°$; $\gamma = 54°$! Konstruiere weiterhin die Höhe h_c, die Symmetrieachse zu den Eckpunkten A und B und beschreibe die Konstruktion!
b) Konstruiere ein weiteres Dreieck ABC aus den unter **a)** gegebenen Stücken! Konstruiere in diesem Dreieck die Winkelhalbierende des Winkels γ, die Symmetrieachse zu den Eckpunkten A und B und beschreibe die Konstruktion!
c) Schneide die beiden Dreiecke aus und klappe jeweils um die Symmetrieachse! Was stellst du fest?
d) Lege die beiden Dreiecke übereinander und vergleiche Gestalt und Größe miteinander!

d

46. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 47$ mm, $c = 6$ cm und $\gamma = 106°$! Konstruiere die drei Höhen des Dreiecks!

47. **a)** Ein Dreieck ABC ist zu konstruieren aus $a = b = c = 5{,}8$ cm! Konstruiere die Höhen des Dreiecks! Schneide das Dreieck aus und drehe es um die Höhen! Was stellst du fest? Miß die Länge der Höhen!
b) Konstruiere ein zweites Dreieck nach den angegebenen Stücken in Aufgabe **a)**! Schneide auch dieses Dreieck aus, lege beide Dreiecke übereinander und vergleiche!

48. Konstruiere gleichschenklige Dreiecke mit der Basis $\overline{AB} = c = 5$ cm und den Höhen $h_c = 1$ cm (2 cm, 3 cm, 4 cm)! Wie ändern sich die Winkel des Dreiecks, wenn h_c größer wird? *Anleitung:* Konstruiere zunächst die Basis und ermittle den Fußpunkt der Höhe!

49. Konstruiere in den Dreiecken (Aufgabe **42** bis **44**)

a) die Höhen,
b) die Mittelsenkrechten,
c) die Winkelhalbierenden!

50. Welche Größe haben die Strecken bzw. Winkel, die in den Dreiecken (Planfiguren) in den Bildern d 5 bis d 8 blau gekennzeichnet sind?

Anleitung: Konstruiere die Dreiecke aus den angegebenen Stücken und entnimm die gesuchten Werte der Zeichnung!

51. In einem Dreieck *ABC* sind gegeben:

a) a **b)** γ **c)** β, b

Welche Stücke sind jeweils außer den gegebenen erforderlich, um ein Dreieck genau zu bestimmen? (Es sind mehrere Möglichkeiten vorhanden. Berücksichtige auch die Besonderheit des Kongruenzsatzes ssw!)

52. Stelle in einer Tabelle alle Kombinationsmöglichkeiten von Verschiebungen in Richtung einer Geraden, Drehungen um einen Punkt und Spiegelungen an einer Geraden zusammen!

53. Ein Turmdach von der Gestalt einer geraden regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll mit Metallplatten neu gedeckt werden. Die Kantenlänge der Grundfläche der Turmspitze beträgt 6,70 m, der Winkel an der Basis einer solchen Seitenfläche beträgt 74°.

a) Konstruiere die Zeichnung für eine Platte! Wähle den Maßstab 1 : 100!

b) Konstruiere eine Symmetrieachse in der Zeichnung!

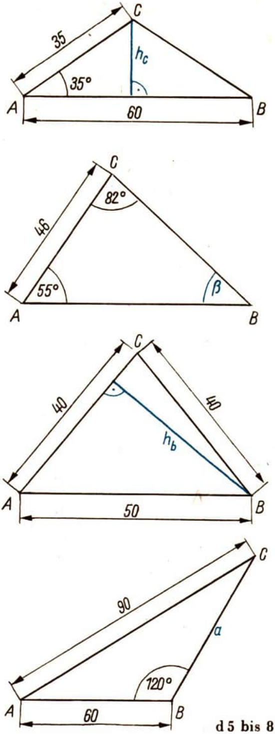
54. Eine LPG hat eine dreieckige Pferdekoppel. Eine Seite wurde mit 125 m gemessen. Ihr gegenüberliegender Eckpunkt ist der Scheitel eines Winkels von 84°. Eine andere Seite ist 96 m lang. Konstruiere die Zeichnung dieser Koppel im Maßstab 1 : 1 000!

55. Drei Straßen schließen das Wiesenstück *ABC* einer LPG ein. Der Straßenabschnitt $\overline{AB}$ hat eine Länge von 1,4 km, desgleichen der Abschnitt $\overline{AC}$. Der Straßenabschnitt $\overline{BC}$ hat eine Länge von 0,7 km. Konstruiere das Dreieck, das von den Straßen gebildet wird, im Maßstab 1 : 20 000! Miß die Größe der Winkel!

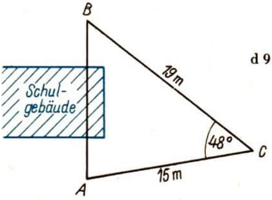
56. Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen sich ein Gebäude befindet. Von einem dritten Punkt wird die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden.

a) Entnimm dem Bild d 9 die Maße, zeichne das Dreieck *ABC* in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Länge von $\overline{AB}$!

b) Suche im Gelände zwei Punkte, zwischen denen ein Hindernis liegt! Ermittle die Entfernung der beiden Punkte!



d 5 bis 8

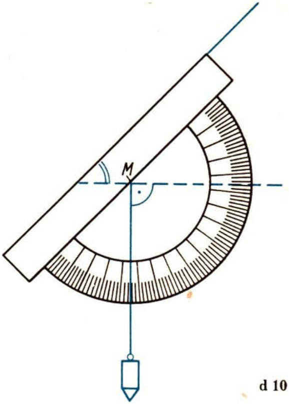


d 9

d

57. Unter der „Sonnenhöhe“ versteht man den Winkel, den die Sonnenstrahlen mit einer waagerechten Ebene bilden. Die Sonnenhöhe kann man folgendermaßen messen: Man stellt einen Stab senkrecht auf den Erdboden, mißt seine Länge und die Länge seines Schattens. Diese beiden Strecken schließen einen rechten Winkel ein. Nun kann man das Dreieck in einem geeigneten Maßstab konstruieren und aus der Zeichnung die Größe des Winkels, die Sonnenhöhe, entnehmen.
Miß die Sonnenhöhe um 13,00 Uhr, 14,00 Uhr, 15,00 Uhr, 16,00 Uhr, und stelle die Werte in einer Tabelle zusammen!

58. Stelle den im Bild d 10 dargestellten Winkelpeiler aus einem Winkelmesser und einem Lot her! Mit diesem Gerät kann man zum Beispiel den Winkel messen, den die Peilrichtung zu einer Turmspitze mit der waagerechten Richtung einschließt.



d 10

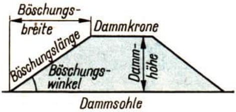
59. Miß mit Hilfe des in der Aufgabe **58** beschriebenen Winkelpeilers den Winkel, unter dem du **a)** die obere Kante eines Fensters, **b)** die Spitze eines Turmes, **c)** die Spitze eines Telegrafenmastes in bezug auf die waagerechte Richtung siehst!

60. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez aus den folgenden gegebenen Stücken:
$a = 5{,}2$ cm; $b = 3{,}8$ cm; $\alpha = 73°$! (AB parallel zu CD) Konstruiere die Symmetrieachse und untersuche die Symmetrieeigenschaften des Trapezes!

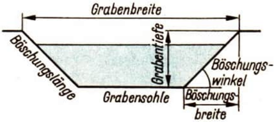
61. Konstruiere ein Trapez aus den gegebenen Stücken $a = 5$ cm, $d = 3{,}4$ cm, $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$! Beschreibe die Konstruktion!

d

62. Für den Bau eines Dammes ist eine Zeichnung herzustellen. Es sind die folgenden Stücke bekannt: Dammsohle 13 m, Dammkrone 4 m, Dammhöhe 3,4 m (Bild d 11). Fertige die Konstruktion im geeigneten Maßstab an! (Bedenke: Die Höhe kann überall eingezeichnet werden!)



d 11



d 12

63. Gräben und Kanäle haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (Bild d 12). Die Angaben für die folgenden Kanalbauten sind vorhanden:

a) Grabenbreite 5,4 m,	Grabentiefe 2,6 m,	Böschungslänge 3,2 m
b) Grabensohle 3,2 m,	Grabentiefe 2,2 m,	Böschungswinkel 152°

Fertige die Konstruktionszeichnungen an!
Gib eine Konstruktionsbeschreibung!

64. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus den folgenden Stücken! (AB ist parallel zu CD, wir schreiben $AB \parallel CD$.)

a)	$c = 4{,}5$ cm;	$h = 3$ cm;	$\alpha = 85°$;	$\beta = 80°$
b)	$a = 5$ cm;	$b = 3{,}3$ cm;	$c = 2{,}2$ cm;	$h = 3$ cm
c)	$a = 5$ cm;	$b = 4$ cm;	$c = 3$ cm;	$\alpha = 80°$
d)	$a = 5$ cm;	$b = 3$ cm;	$c = 4$ cm;	$d = 3{,}3$ cm
e)	$a = 6$ cm;	$b = 4$ cm;	$c = 4{,}5$ cm;	$f = \overline{BD} = 6$ cm
f)	$a = 4$ cm;	$d = 3{,}5$ cm;	$e = \overline{AC} = 5{,}5$ cm	$f = 7{,}5$ cm

Gib zu Aufgabe **f)** eine Konstruktionsbeschreibung!

65. Durch den Bau eines Entwässerungsgrabens soll ein Moor trockengelegt werden. Der Graben soll eine Grabensohle von 3,5 m, eine Grabentiefe von 2,3 m und einen Böschungswinkel von 60° haben. Der Querschnitt ist zu konstruieren.

66. Ermittle alle Winkel eines Vierecks $ABCD$, in dem gilt:
$AB \parallel CD$, $\sphericalangle ABC = 138°$, $\sphericalangle CDA = 52°$!

67. Berechne aus dem gegebenen Winkel eines Parallelogramms alle Winkel dieses Parallelogramms!

a) $\alpha = 63°$ **b)** $\gamma = 112°$ **c)** $\alpha = 94°$ **d)** $\beta = 120°$ **e)** $\delta = 90°$

68. Konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Parallelogramm $ABCD$!

a)	**b)**	**c)**	**d)**
$a = 5{,}0$ cm	$a = 3{,}8$ cm	$c = 4{,}9$ cm	$a = 5{,}4$ cm
$b = 6{,}5$ cm	$b = 4{,}9$ cm	$d = 3{,}2$ cm	$d = 6{,}0$ cm
$\alpha = 62°$	$\beta = 112°$	$\gamma = 78°$	$\delta = 142°$

69. Konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Parallelogramm!

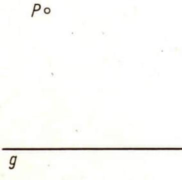
a)	**b)**	**c)**	**d)**
$a = 5$ cm	$a = 5$ cm	$a = 5{,}0$ cm	$b = 6$ cm
$b = 6$ cm	$e = 4$ cm	$e = 8{,}0$ cm	$e = 12$ cm
$e = 4$ cm	$\beta = 45°$	$f = 6{,}4$ cm	$f = 5$ cm

e)	**f)**	**g)**
$a = 5{,}2$ cm	$a = 2{,}3$ cm	$e = 6{,}5$ cm
$e = 5{,}9$ cm	$b = 4{,}9$ cm	$f = 3{,}5$ cm
$h = 3{,}1$ cm	$h_1 = 4{,}2$ cm	$h = 2{,}0$ cm

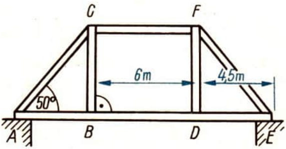
Gib zu **a)**, **d)** und **g)** je eine Konstruktionsbeschreibung!

70. Konstruiere durch den Punkt P im Bild d 13 eine Parallele zu g, indem du zunächst ein Parallelogramm konstruierst, welches P als einen Eckpunkt enthält!

71. Das Bild d 14 zeigt die Balkenkonstruktion an einer Brücke. Entnimm der Zeichnung die Maße und führe die Konstruktion aus! Welche Figuren erkennst du an der Zeichnung?



d 13

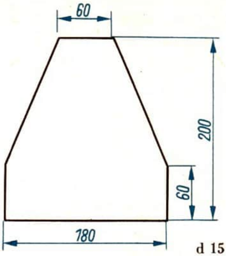


d 14

d

72. Auf einer Blechtafel ist das im Bild d 15 gezeichnete Werkstück anzureißen. Entnimm der Abbildung die Maße und fertige die Zeichnung an!

Anleitung: Zerlege die Zeichnung in dir bekannte Figuren und konstruiere entsprechend! Hilfslinien ziehe dünn aus!



d 15

73. Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus den folgenden Stücken!

a) $a = 4{,}2$ cm; $b = 2{,}1$ cm; $\alpha = 44°$
b) $a = 3{,}3$ cm; $\alpha = 110°$; $\gamma = 120°$
c) $a = 5{,}5$ cm; $e = 3{,}2$ cm; $\alpha = 48°$
d) $e = 5{,}0$ cm; $f = 2{,}4$ cm; $\alpha = 41°$

Beschreibe die Konstruktion in Aufgabe **b)** und **d)**!

74. Konstruiere Rhomben aus den angegebenen Stücken!

a) $a = 6{,}4$ cm; $\alpha = 62°$ **b)** $b = 5{,}2$ cm; $\gamma = 130°$
c) $a = 4{,}0$ cm; $\alpha = 90°$ **d)** $d = 3{,}5$ cm; $e = 6{,}0$ cm

75. Es sind die folgenden Stücke für die Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ gegeben.

a) $a = 4{,}5$ cm; $b = 4{,}0$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 75°$; $\gamma = 99°$
b) $a = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $\alpha = 91°$; $\beta = 95°$; $\gamma = 99°$
c) $a = 4{,}3$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $f = 4{,}9$ cm; $\alpha = 53°$; $\beta = 111°$

76. Aus einer Metallplatte, die ein unregelmäßiges Viereck darstellt, soll eine rechteckige Platte geschnitten werden. Die Platte hat die Seitenlängen
$a = 35$ cm, $b = 48$ cm, $c = 31$ cm, $d = 23$ cm und den Winkel $\delta = 121°$.

a) Konstruiere das Viereck $ABCD$!
b) Zeichne danach die Schnittlinien ein, durch die aus der Platte ein möglichst großes Rechteck entsteht!

d

77. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus den folgenden Stücken:
$a = 4{,}4$ cm; $b = 3{,}3$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $f = 6{,}5$ cm; $\alpha = 60°$!
Beschreibe die Konstruktion!

78. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms für

a) $g = 24{,}0$ cm; $h_g = 19{,}0$ cm **b)** $g = 36{,}0$ cm; $h_g = 12{,}5$ cm
c) $g = 4{,}5$ cm; $h_g = 2{,}4$ cm **d)** $g = 38{,}5$ cm $h_g = 22{,}7$ cm
e) $g = 142{,}5$ cm; $h_g = 82{,}4$ cm **f)** $g = 4{,}5$ cm; $h_g = 137{,}0$ cm
g) $g = 82{,}75$ m; $h_g = 7{,}28$ m **h)** $g = 7{,}5$ cm; $h_g = 5{,}4$ cm?

79. Zeichne ein Parallelogramm mit den Seiten $a = 6$ cm und $b = 4$ cm, die einen Winkel von 60° einschließen! Bestimme die beiden Höhen und berechne den Flächeninhalt auf zweierlei Art! Vergleiche die beiden Ergebnisse!

80. Berechne aus den Maßen den Flächeninhalt der Parallelogramme!

a) $a = 4{,}8$ cm; $h_a = 3{,}2$ cm **b)** $c = 7{,}0$ cm; $h_c = 4{,}0$ cm
c) $a = 5{,}2$ cm; $h_a = 10{,}8$ cm **d)** $b = 3{,}7$ cm; $h_b = 4{,}1$ cm
e) $a = 3\frac{1}{2}$ m, $h_a = 1\frac{3}{4}$ m **f)** $d = 3{,}73$ m; $h_a = 1{,}88$ m

81. Berechne den Umfang eines Parallelogramms, von dem gegeben sind:

a) $a = 13{,}6$ mm; $b = 29{,}7$ mm **b)** $a = 154{,}8$ mm; $b = 237{,}5$ mm!

82. Begründe mit Hilfe der Kongruenzkriterien, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90°$) durch $A = \frac{a \cdot b}{2}$ berechnet werden kann!

83. Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke mit den angegebenen Maßen!

a) $a = 37$ mm; $h_a = 42$ mm **b)** $c = 128$ mm; $h_c = 84$ mm
c) $b = 65$ mm; $h_b = 29$ mm **d)** $b = 60$ mm; $h_b = 50$ mm
e) $h_b = 43$ mm; $b = 20$ mm **f)** $a = 124$ mm; $h_a = 49$ mm
g) $h_c = 28$ mm; $c = 40$ mm **h)** $b = 54$ mm; $h_b = 45$ mm

84. Gib den Flächeninhalt der Dreiecke in den Aufgaben **83a** bis **h** in Quadratzentimetern und in Quadratdezimetern an!

85. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 11$ cm, $b = 8$ cm und $c = 6$ cm und bestimme die Längen der drei Höhen aus der Zeichnung! Berechne den Inhalt aus jeder Dreieckseite und der zugehörigen Höhe und vergleiche die Ergebnisse! Sprich das Ergebnis der Untersuchung in einem Satz aus!

86. Zeichne ein Dreieck aus $a = 60$ mm, $b = 80$ mm, $c = 90$ mm! Zeichne die drei Höhen und berechne die Flächeninhalte auf dreierlei Art! Vergleiche die Ergebnisse!

87. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den folgenden Angaben!

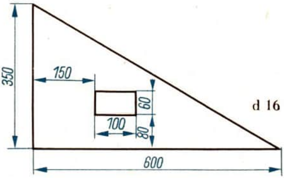
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
c	15 cm	64 cm	27,4 cm	7,28 m	36,7 cm	2,775 m
h_c	22 cm	55 cm	22,5 cm	87,5 m	44,8 cm	3,808 m

88. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den folgenden Angaben!

a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}4$ cm, $\gamma = 90°$ **b)** $c = 3{,}0$ cm, $b = 4{,}0$ cm, $\alpha = 90°$ **c)** $a = 0{,}5$ cm, $c = 0{,}3$ cm, $\beta = 90°$ **d)** $a = 6{,}4$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $\gamma = 90°$

89. **a)** Der dreieckige Teil an der Giebelfläche eines Hauses ist 10,50 m breit und 2,75 m hoch. Berechne seinen Flächeninhalt!
b) Diese Fläche soll verputzt werden. Wie hoch werden die Kosten, wenn für das Verputzen 4,50 MDN je Quadratmeter berechnet werden?

90. Im Werkunterricht wird ein Werkstück hergestellt, dessen Fläche im Bild d 16 dargestellt ist. Berechne den Flächeninhalt!



d 16

91. Ein dreieckiges Feld (Seite 295 m, zugehörige Höhe 183 m) soll mit Kunstdünger gedüngt werden. Wieviel Dezitonnen werden benötigt, wenn je Hektar 3 Dezitonnen genommen werden sollen?

92. Zeichne mehrere Dreiecke, die in einer Seite und dem Flächeninhalt übereinstimmen!

93. Berechne den Umfang eines Dreiecks mit den angegebenen Maßen!

a) $a = 85$ mm; $b = 73$ mm; $c = 47$ mm **b)** $a = 123$ mm; $b = 66$ mm; $c = 138$ mm

94. Berechne den Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks mit den angegebenen Maßen!

a) Schenkellänge 88 mm; Basislänge 139 mm
b) Schenkellänge 97 mm; Basislänge 28 mm

95. Berechne den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seitenlänge

a) $s = 47$ mm, b) $s = 113$ mm, c) $s = 56$ mm beträgt!

96. Wie groß ist der Flächeninhalt der Trapeze mit folgenden Seiten?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a	13 cm	25 cm	54 cm	127 cm	79 mm	8,45 m	35,97 m
c	9 cm	19 cm	46 cm	73 cm	58 mm	3,67 m	19,48 m
h	16 cm	15 cm	33 cm	59 cm	37 mm	5,43 m	23,75 m

97. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze!

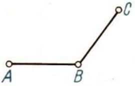
	Große Grundseite	Kleine Grundseite	Höhe
a)	6,0 cm	25 mm	1,00 dm
b)	2,50 dm	64,0 cm	280 mm
c)	2,000 m	13,00 dm	480 mm
d)	14 cm	27 cm	0,75 m
e)	1,30 m	2,40 m	1,80 m
f)	270,0 dm	36,00 m	18,00 m

98. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Deiches, dessen Sohle 44 m, dessen Krone 16 m und dessen Höhe 11 m beträgt?

99. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Kanals, der oben 13,80 m, unten 10,40 m breit und der 3,80 m tief ist?

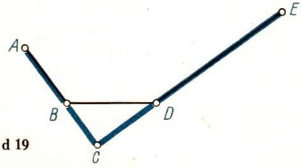
100. In den Bildern d 17 und d 18 ist je ein Streckenzug dargestellt. Aus wieviel Strecken besteht jeder Streckenzug?
Nenne sie!

d 17

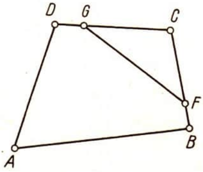


d 18

101. Beweise, daß der Streckenzug *ABDE* im Bild d 19 kürzer ist als der Streckenzug *ACE*!

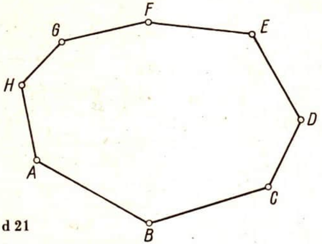


d 19

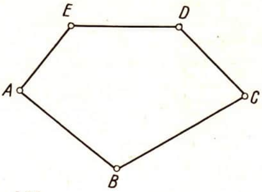


d 20

102. Im Bild d 20 sind die beiden Vielecke *ABCD* und *ABFGD* dargestellt. Welches dieser Vielecke hat den größten Umfang? Begründe deine Antwort!



d 21



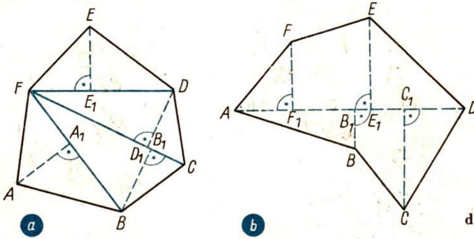
d 22

103. Gib in der im Bild d 21 dargestellten Figur

a) drei beliebige innere Punkte,
b) drei beliebige Randpunkte und
c) drei beliebige äußere Punkte an!
d) Verbinde jeden inneren Punkt mit einem äußeren Punkt!

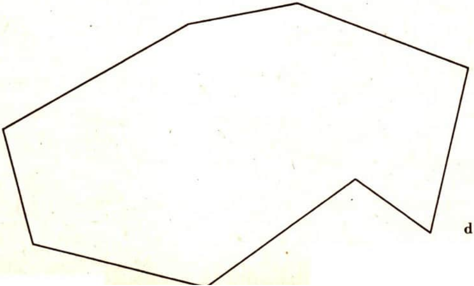
104. Im Bild d 22 ist ein Vieleck dargestellt. Miß alle Innenwinkel dieses Vielecks!

105. Ermittle den Flächeninhalt der Vielecke in den Bildern d 23 a und b!



d 23

106. Pause das Bild d 24 auf durchsichtiges Papier! Bestimme den Flächeninhalt des Vielecks **a)** nach der Dreiecksmethode, **b)** nach der Trapezmethode!
Vergleiche die Ergebnisse!



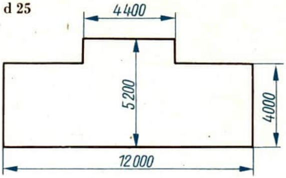
d 24

107. Der Fußboden eines Krankenzimmers soll mit Fußbodenbelag belegt werden. Die Grundfläche des Krankenzimmers zeigt das Bild d 25.

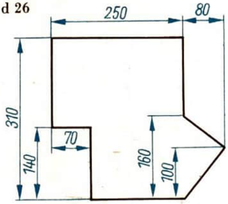
a) Wieviel Quadratmeter Fußbodenbelag müssen verlegt werden?

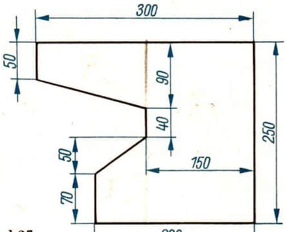
b) Wieviel Meter Umrandungsleisten werden benötigt?

d 25



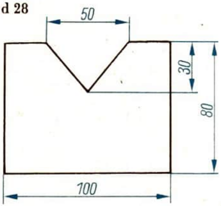
d 26

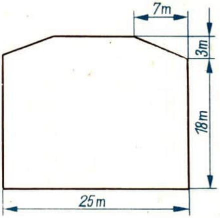




d 27

d 28





d 29

108. Berechne jeweils den Flächeninhalt der in den Bildern d 26, d 27 und d 28 gezeigten Bleche! (Die Maße sind in Millimetern angegeben.)

109. Das Bild d 29 zeigt die Giebelfläche eines Hauses.

a) Berechne den Flächeninhalt der Giebelfläche!

b) Wieviel Mark kostet das Verputzen dieser Fläche, wenn je Quadratmeter 4,50 MDN berechnet werden?

110. Von einem Feld wurden 192 dt Kartoffeln geerntet. Das Feld ist dreieckig, eine Seite ist 160 m lang, die gegenüberliegende Ecke ist 120 m von dieser Seite entfernt.

a) Entwirf eine Skizze!

b) Berechne den Flächeninhalt des Feldes!

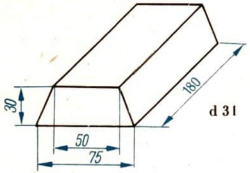
c) Berechne den Hektarertrag an Kartoffeln!

111. Das Bild d 30 zeigt den Grundriß einer Weide.

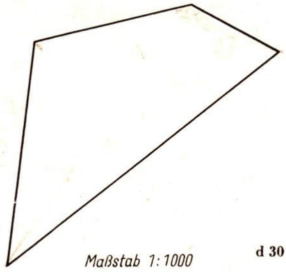
a) Miß die Seiten u. berechne ihre wahre Größe!

b) Welche Fläche nimmt die Weide ein?

c) Wieviel Meter elektrischer Weidezaun werden für die Einfassung gebraucht?



d 31



d 30

112. Berechne den Querschnitt eines Führungsstückes! Entnimm die Maße dem Bild d 31!

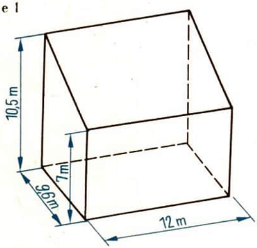
e) Darstellende Geometrie

1. Zeichne die Grundrisse der in den Bildern e 1 und e 2 dargestellten Häusermodelle im Maßstab 1 : 200!

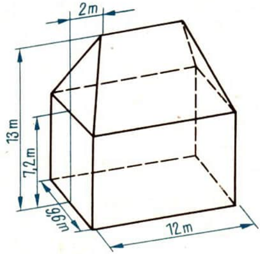
2. Zeichne den Grundriß der im Bild e 3 dargestellten gefrästen Platte in natürlicher Größe!

3. Zeichne den Grundriß der im Bild e 4 dargestellten Schwalbenschwanzführung in natürlicher Größe! (Die Maßangaben bedeuten Millimeter.)

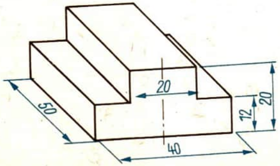
e 1



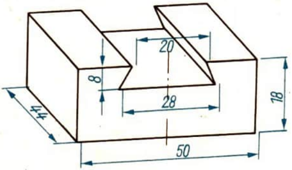
e 2



e 3

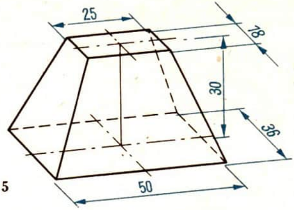


e 4



4. **Das Bild e 5 zeigt eine abgestumpfte Pyramide. Bezeichne die Ecken und konstruiere**
   a) **den Grundriß mit Höhenzahlen,**
   b) **den Grundriß mit Höhenmaßstab!**

5. **Bezeichne in den Bildern e 1 und e 2 die Ecken und konstruiere in einem geeigneten Maßstab**
   a) **den Grundriß mit Höhenzahlen,**
   b) **den Grundriß mit Höhenmaßstab!**



e 5

6. **Zeichne den Aufriß der Häusermodelle in den Bildern e 1 und e 2 jeweils von zwei verschiedenen Seiten.**

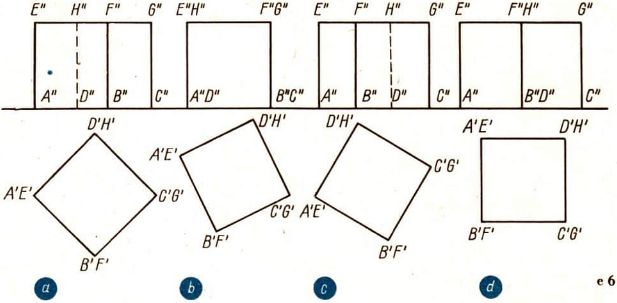
7. **Zeichne den Aufriß des Körpers im Bild e 3, wenn**
   a) **die Kante von 50 mm Länge parallel zur Aufrißtafel liegt,**
   b) **die Kante von 40 mm Länge parallel zur Aufrißtafel liegt!**

8. **Zeichne den Aufriß des Körpers im Bild e 4 so, daß der Querschnitt der trapezförmigen Aussparung gut sichtbar ist!**

9. **Zeichne einen Aufriß von der im Bild e 5 dargestellten abgestumpften Pyramide!**

10. **Stelle einen Quader so auf die Grundrißtafel, daß eine Seitenfläche parallel zur Aufrißtafel liegt („Parallelstellung")! Zeichne Grundriß und Aufriß und bezeichne beide Risse!**

11. **Zeichne die beiden Risse des Quaders in Aufgabe 10, wenn er**
    a) **auf der Grundrißtafel steht und mit einer Fläche an der Aufrißtafel anliegt;**
    b) **mit einer Fläche an der Aufrißtafel anliegt, aber um 1 cm von der Grundrißtafel abgehoben ist;**
    c) **sich in Parallelstellung befindet, seine Grundfläche jedoch von der Grundrißtafel einen Abstand von 1,5 cm und eine Seitenfläche von der Aufrißtafel einen Abstand von 2 cm hat!**



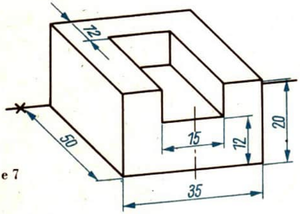
e 6

12. **In den Bildern e 6 a bis d sind verschiedene Grundrisse und Aufrisse eines auf der Grundrißtafel stehenden Würfels gezeichnet, aber falsch angeordnet. Welche Risse gehören zusammen?**

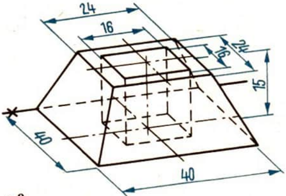
13. Zeichne Grundriß und Aufriß der im Bild e 5 dargestellten abgestumpften Pyramide in natürlicher Größe!

14. Zeichne Grundriß und Aufriß der in den Bildern e 7, e 8 und e 9 dargestellten Werkstücke (natürliche Größe, mit Rißachse)!

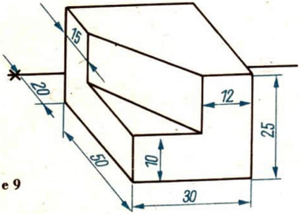
15. Stelle einen Quader mit den Kantenlängen 3,2 cm, 4,4 cm und 6 cm jeweils in der gleichen Lage **a)** durch Grundriß und Aufriß, **b)** durch Grundriß mit Höhenmaßstab dar!



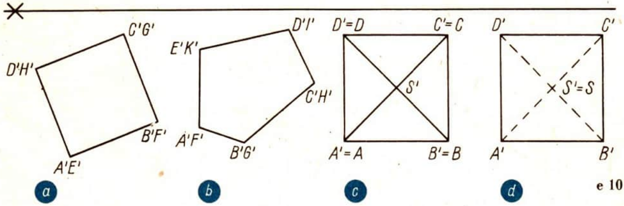
e 7



e 8



e 9



e 10

16. Übertrage die in den Bildern e 10 dargestellten Grundrisse in dein Heft und konstruiere jeweils die Aufrisse!

Es ist

a) ein auf der Grundrißtafel stehender Würfel,

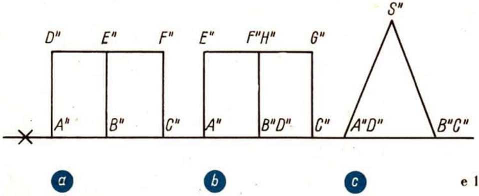
b) ein auf der Grundrißtafel stehendes fünfseitiges gerades Prisma von 4,5 cm Höhe,

c) eine Pyramide von 5 cm Höhe,

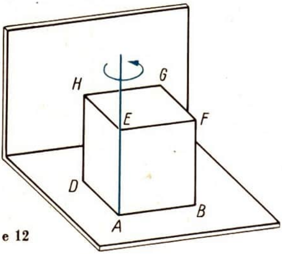
d) eine Pyramide von 4 cm Höhe.

17. Übertrage die in den Bildern e 11 dargestellten Aufrisse in dein Heft und konstruiere jeweils die Grundrisse! Es ist

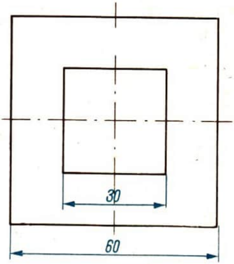
a) ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche,
b) ein Würfel,
c) eine quadratische Pyramide.



e 11



e 12



e 13

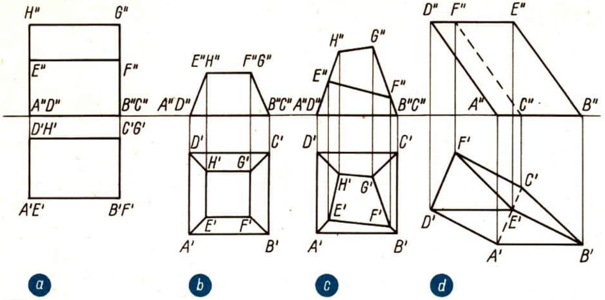
18. Ein Würfel *ABCDEFGH* mit der Kantenlänge 3 cm steht auf der Grundrißtafel in Parallelstellung. Der Abstand einer Seitenfläche von der Aufrißtafel beträgt 2 cm. Er wird um seine linke vordere Kante entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht (Bild e 12). Zeichne Grundriß und Aufriß des Würfels.

a) in der Ausgangsstellung,
nach einer Drehung von **b)** 30°, **c)** 45°, **d)** 60°, **e)** 90°!

19. Von einem Würfel mit einer Ausfräsung ist der Grundriß gegeben (Bild e 13). Zeichne den zugeordneten Aufriß (Maßstab 1 : 2)!

20. Stelle die in den Bildern e 14 a bis d in Grundriß und Aufriß gegebenen Körper durch den Grundriß mit Höhenmaßstab dar!

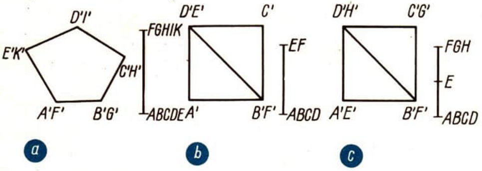
21. Eine 6 cm hohe Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 4 cm Seitenlänge ist, wird in 3 cm Höhe abgestumpft. Der Körper steht auf der Grundrißtafel. Zeichne den Grundriß mit Höhenmaßstab!



e 14

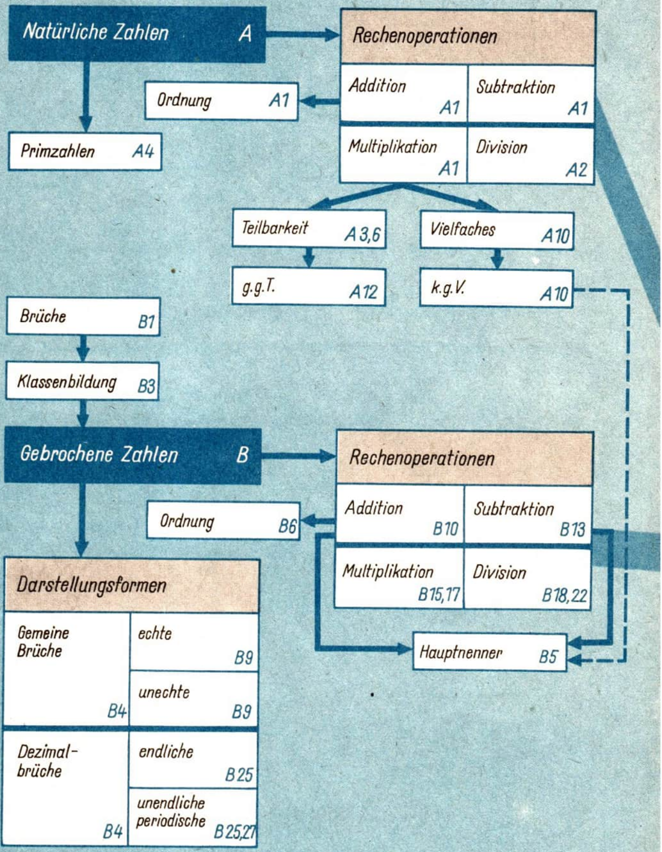
22. Ein Würfel von 3 cm Kantenlänge ist 1,5 cm von der Grundrißtafel abgehoben. Zeichne den Grundriß mit Höhenmaßstab!

23. Zeichne zu den im Bild e 15 im Grundriß mit Höhenmaßstab dargestellten Körpern Grundriß und Aufriß!

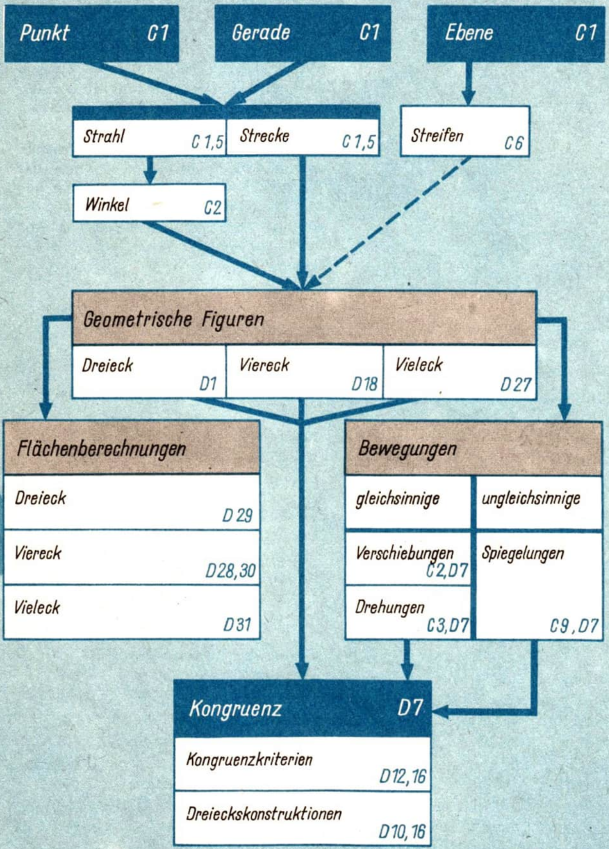


e 15

ARITHMETIK


Natürliche Zahlen A
Rechenoperationen
Addition A1
Subtraktion A1
Multiplikation A1
Division A2
Ordnung A1
Primzahlen A4
Teilbarkeit A 3,6
Vielfaches A10
g.g.T. A12
k.g.V. A10
Brüche B1
Klassenbildung B3
Gebrochene Zahlen B
Rechenoperationen
Addition B10
Subtraktion B13
Multiplikation B15,17
Division B18,22
Ordnung B6
Hauptnenner B5
Darstellungsformen
Gemeine Brüche B4
echte B9
unechte B9
Dezimalbrüche B4
endliche B25
unendliche periodische B25,27

GEOMETRIE



Punkt C1
Gerade C1
Ebene C1
Strahl C 1,5
Strecke C 1,5
Streifen C 6
Winkel C2
Geometrische Figuren
Dreieck D1
Viereck D18
Vieleck D27
Flächenberechnungen
Dreieck D 29
Viereck D28,30
Vieleck D31
Bewegungen
gleichsinnige
ungleichsinnige
Verschiebungen C2,D7
Drehungen C3,D7
Spiegelungen C9, D7
Kongruenz D7
Kongruenzkriterien D12,16
Dreieckskonstruktionen D10,16

Z

Register

A

B

C

D

E

Z

Wie findest du was?

Angenommen, Du willst wissen, was eine gemischte Zahl ist. Du suchst das Stichwort und findest: Gemischte Zahl **B** Seite 32. Der Buchstabe **B** sagt Dir, daß Du die Information im Kapitel **B** findest. Du suchst mit Hilfe der Marken auf der linken Seite das Kapitel **B** und schlägst die Seite 32 auf.
Manche Wörter stehen auch in Wortverbindungen, z. B. Winkelsumme. Du suchst das Wort „Winkel“, dann die Zeile „-summe“ und findest: Kapitel **D**, Seite 81 (▷ 2). Mit der Angabe ▷ 2 erhältst Du gleich einen Hinweis auf den Satz, der mit diesem Stichwort in Zusammenhang steht.

A

B

C

D

E

Z

Quellennachweis

Bild B 19: Reproduktion aus: B. L. van der Waerden: *Science awakening.* Groningen 1954. S. 32; Bild B 21: Reproduktion aus: D. E. Smith: *History of Mathematics.* Vol. II. New York [II]1958. S. 75; Bild B 20: Reproduktion aus: K. Menninger: *Zahlwort und Ziffer.* 2. Aufl. Göttingen 1958. S. 101; Bild B 22: Reproduktion aus: D. E. Smith: *Rara arithmetica.* Boston/London 1908. S. 37; Bild B 23: Reproduktion aus dem Original: J. Köbel: *Rechenbüchlein.* Augsburg 1514; Bild B 24: Reproduktion aus: D. E. Smith: *History of Mathematics.* Vol. II New York, [II]1958. S. 227; Bild E 18: Reproduktion aus: A. Eisenlohr: *Ein altbabylonischer Felderplan.* Leipzig 1896; Bild E 19: Reproduktion aus: O. Fabrio: *L'Uso delle Squadra Mobile.* Trent, 1752; Bild E 20: Reproduktion aus: D. E. Smith: *History of Mathematics.* Vol. I. New York, [II]1958, S. 361; Bild E 21: Reproduktion des Originaltitelblattes

Bei Empfang und Abgabe des Lehrbuches vom Schüler auszufüllen				
Lfd. Nr.	Name	Schuljahr	Zustand des Buches	
			bei Empfang	bei Abgabe
1		19__/__	neu	
2		19__/__		
3		19__/__		
4		19__/__		

00 06 01– 3