LEHRBUCH DER MATHEMATIK

ELFTES SCHULJAHR

00914-8

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE OBERSCHULE

11. SCHULJAHR

AUSGABE 1953

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1960

Der Teil A wurde von Dr. Friedrich Holtmann, Dr. Johannes Kusch und Dr. Helmar Lehmann unter Mitwirkung von Dipl.-Math. Lothar Jantscher und Dr. Helmut Pachale verfaßt.
Der Teil B wurde von der Verlagsabteilung Mathematik nach Teilmanuskripten von Dr. Friedrich Holtmann und Dr. Werner Renneberg ausgearbeitet.
Der Teil C wurde von Dr. Gustav Beyrodt verfaßt.
Zeichnungen: Kurt Dornbusch

Fünfte, durchgesehene Auflage

Redaktionsschluß: 15. Oktober 1954

ES 11 D · Bestell-Nr. 00914-8
3,60 DM · Lizenz-Nr. 203 · 1000/60 (UN)
Satz: VEB Graphische Werkstätten, Leipzig III/18/97
Druck: Philipp Reclam jun. Leipzig III/18/170

A. Infinitesimalrechnung

I. Einführung in die Differentialrechnung

1. Funktionsbegriff, Definitionsbereich, Variable und Konstante

Belastet man eine Schraubenfeder, so verändert sich deren Länge. Experimentell kann man feststellen, daß innerhalb bestimmter Grenzen jeder Belastung der Feder eine bestimmte Länge entspricht. Man sagt, der Belastung sei eine Länge zugeordnet oder die Länge sei eine Funktion der Belastung.

Für viele solcher Zuordnungen (Funktionen) lassen sich mathematische Ausdrücke finden. Zum Beispiel gilt für den betrachteten Fall der Ausdruck

$$y = cx + l,$$

wobei x die Belastung, y die Länge bei Belastung, l die Länge der Feder ohne Belastung und c eine Materialkonstante bedeuten.

In den Lehrbüchern der Mathematik für das 9. und 10. Schuljahr wurden die folgenden Funktionen behandelt:

	Beispiel	Seite
9. Schuljahr		
Lineare Funktionen	$y = 2x - 3$	14 ff.
Quadratische Funktionen	$y = 3x^2 - 4x + 7$	25 ff.
Potenzfunktionen	$y = x^3$	49 ff.
Wurzelfunktionen	$y = \sqrt{x}$	69 ff.
Exponentialfunktionen	$y = 3^x$	100 ff.
Logarithmusfunktionen	$y = \lg x$	104 ff.
10. Schuljahr		
Trigonometrische Funktionen	$y = \sin x$	7 ff.

Was berechtigt uns, bei diesen so verschiedenen Beispielen in jedem einzelnen Falle von einer *Funktion* zu sprechen? In allen diesen Beispielen wird durch eine bestimmte Vorschrift einer veränderlichen Größe eine andere Größe zugeordnet. Dabei bezeichnet man im allgemeinen die unabhängige Veränderliche mit x, die zugeordnete (abhängige) Veränderliche mit y (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 7/8). Wir definieren also:

Wird jedem Wert einer (unabhängigen) Veränderlichen x, die einen bestimmten Bereich durchläuft, durch eine eindeutige Vorschrift ein bestimmter Zahlenwert der (abhängigen) Größe y zugeordnet, so heißt y eine Funktion von x.

Um diese Abhängigkeit der Größe y von der Veränderlichen x anzudeuten, schreiben wir

$$y = f(x),$$

das heißt, y ist eine Funktion[1]) von x (sprich: y gleich f von x). Dabei bedeutet f die Vorschrift, durch die y aus x gewonnen wird. Die Gesamtheit der Werte x, denen auf Grund der Vorschrift Funktionswerte y zugeordnet werden, bezeichnet man als den **Definitionsbereich** der betreffenden Funktion. Die Gesamtheit der Funktionswerte y nennt man den **Wertevorrat** der Funktion. Die Größe y kann auch für alle x denselben Wert annehmen. (Die Funktion ist dann konstant wie zum Beispiel die Funktion $y = 5$; in diesem Falle ist der Wertevorrat 5.)

Die veränderlichen Größen werden auch **Variable**[2]) genannt; es ist üblich, sie mit x, y, z, u, v, w, t zu bezeichnen. In besonderen Fällen werden auch andere Buchstaben verwendet. Größen, denen im Gegensatz zu den Veränderlichen während der Behandlung einer Aufgabe feste Werte zukommen, heißen **Konstanten.** Sie werden meist mit den ersten Buchstaben des Alphabets, zum Beispiel mit a, b, c, A, B, C, bezeichnet.

Zur Unterscheidung verschiedener Funktionen wählen wir statt des Zeichens $y = f(x)$ auch noch $y = F(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = f_1(x)$, $y = \varphi(x)$ oder andere.

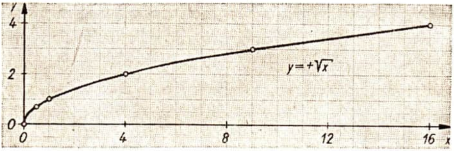

Abb. 1

Der annähernde Verlauf einer Funktion wird in vielen Fällen bereits dadurch erkennbar, daß für viele Werte von x die durch die Funktion $f(x)$ festgelegten zugehörigen Werte von y bestimmt und diese Werte in einer Wertetafel oder Wertetabelle zusammengefaßt werden. Die zu $x_1, x_2, \ldots$ gehörigen Werte der Funktion sind dann $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$ Um diese Zuordnung der y-Werte zu den x-Werten anschaulich, sichtbar zu machen, benutzen wir eine graphische Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, in dem die x-Werte als Abszissen, die zugehörigen Werte von $y = f(x)$ als Ordinaten zu diesen Abszissen abgetragen werden. Sämtliche so erhaltenen Wertepaare $(x; y)$ bestimmen Punkte, deren Gesamtheit die durch die Funktion $y = f(x)$ gegebene Kurve ausmacht.

---

[1]) Der Name Funktion als Bezeichnung dieser Abhängigkeit wurde zuerst von dem bedeutenden deutschen Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz eingeführt. Leibniz, geb. 1646 in Leipzig, war Jurist, Philosoph und Mathematiker. Seine mathematischen Untersuchungen führten zur Begründung der Differentialrechnung. Leibniz war der erste Präsident der 1700 auf seine Veranlassung gegründeten Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Durch seinen Briefwechsel mit Peter I. unterstützte er diesen bei den Vorbereitungen zur Gründung der Russischen Akademie der Wissenschaften. Leibniz war auch als Staatsmann tätig und starb 1716 in Hannover.

Der englische Physiker und Mathematiker Isaac Newton kam annähernd gleichzeitig, aber unabhängig von Leibniz, zu ähnlichen Überlegungen.

[2]) variabilis (lat.) heißt veränderlich.

Wertetafeln geben die Zuordnungen grundsätzlich nur punktweise an; dagegen umfassen Funktionen die Gesamtheit der Zuordnungen.

1. Es sind zur Wiederholung die folgenden Funktionen graphisch darzustellen:

a) $y = \frac{x}{3} + 2$; b) $y = \frac{x^2}{4} - 1$; c) $y = \cos x$.

2. Stellen Sie für die folgenden Funktionen Wertetabellen auf:

a) $y = +\sqrt{x}$ (Abb. 1); b) $y = -\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ (Abb. 2)!

Bestimmen wir für beide Funktionen den Definitionsbereich, so finden wir

beim Beispiel a) $x \geqq 0$,
beim Beispiel b) x zwischen -5 und $+5$ einschließlich der Grenzen, d. h. $-5 \leqq x \leqq +5$.

Die Funktionen können also nur dann gezeichnet werden, wenn x diesen Bedingungen genügt. Geben Sie für beide Funktionen den Wertevorrat an!

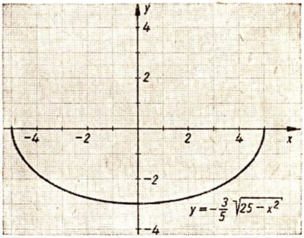

Abb. 2

Eine abhängige Variable kann auch von **mehreren** unabhängigen Variablen abhängen. Solche Funktionen werden entsprechend geschrieben als

$$z = f(x, y), \qquad t = \varphi(u, v, w)$$

(sprich: z gleich f von $x\ y$; t gleich φ von $u\ v\ w$) oder ähnlich.

Beispiele:

1. $z = 8x^2 - 5xy + 3y - 4$.
2. Das Volumen V eines Gases ist abhängig vom Druck p und von der Temperatur T. Der funktionale Zusammenhang kann also durch die Gleichung

$$V = f(p, T)$$

wiedergegeben werden.

3. Die Kraft K, die von zwei Magnetpolen mit den Polstärken e_1 und e_2 aufeinander ausgeübt wird, ist dem Produkt der beiden Polstärken direkt, dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung umgekehrt proportional (Coulombsches Gesetz). Dieses Gesetz kann als Funktion folgendermaßen geschrieben werden:

$$K = \varrho \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}.$$

Dabei bedeutet ϱ eine Konstante, deren Größe von der Wahl des Maßsystems abhängt. K ist also eine Funktion von e_1, e_2 und r. Wir schreiben dafür

$$K = f(e_1, e_2, r).$$

Wir werden uns im folgenden jedoch nur mit Funktionen von **einer** unabhängigen Veränderlichen beschäftigen.

Aufgaben

1. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar und bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertevorrat!

a) $y = 3x^3 - 5x + 2$ **b)** $y = \sqrt{1 - x}$ **c)** $y = -x$
d) $y = -x^2$ **e)** $y = -x^3$ **f)** $y = 2x\sqrt{3x}$
g) $y = \sqrt{5 - x}$ **h)** $y = \sin 2x$ **i)** $y = \sqrt{3x^2 - 10x}$
k) $y = \sqrt{16 - x^2}$ **l)** $y = \frac{3}{5}\sqrt{15 - x^2}$ **m)** $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

2. a) Der Druck p einer abgeschlossenen Gasmenge ist bei konstant gehaltenem Volumen von der Temperatur t abhängig:

$$p = p_0\left(1 + \frac{1}{273}\cdot t\right).$$

b) Das Volumen V einer abgeschlossenen Gasmenge ist bei konstant gehaltenem Druck von der Temperatur t abhängig (Gay-Lussacsches Gesetz für konstanten Druck):

$$V = V_0\left(1 + \frac{1}{273}\cdot t\right).$$

Es ist der Definitionsbereich der beiden Funktionen zu bestimmen und die Bedeutung von p_0 und V_0 anzugeben.

3. Wie hängt bei konstanter Temperatur das Volumen eines Gases von seinem Druck ab? Gesetz: $pV = p_0V_0$. Diese Abhängigkeit für $p_0 = 1$ at und a) $V_0 = 2\,\text{dm}^3$, b) $V_0 = 3\,\text{dm}^3$, c) $V_0 = 4\,\text{dm}^3$ ist graphisch darzustellen.

4. Wenn der Widerstand $R[\Omega]$ und die Zeitdauer t [s] konstant sind, hängt die elektrische Stromwärme Q [cal] nur noch von der Stromstärke J [A] ab:

$$Q = 0{,}24R\cdot t\cdot J^2\,[\text{cal}].$$

Stellen Sie für $R = 55\,\Omega$ und $t = 60$ s die Stromwärme Q als Funktion von J graphisch dar!

5. Eine mit der Geschwindigkeit v [cm s^{-1}] bewegte Masse von m [g] besitzt die kinetische Energie $E = \frac{m}{2}v^2$ [erg]. Stellen Sie E als Funktion der Geschwindigkeit v für a) $m = 12$, b) $m = 50$, c) $m = 60$ [g] graphisch dar!

6. Die folgenden Funktionen sind graphisch darzustellen.

a) $2x + 5y = 15$ **b)** $5x - 2y = 17$ **c)** $x^2 - y + 2 = 0$
d) $x^2 + y - 2 = 0$ **e)** $y^2 - 3x + 5 = 0$ **f)** $2y^2 + 4x - 3 = 0$
g) $2x^2 - 3x + y - 5 = 0$ **h)** $x^2 + 12x + y + 36 = 0$ **i)** $x^2 + 18x - y = 40$

7. Die folgenden Funktionen sind graphisch darzustellen.

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^3 + 3$ **c)** $y = x^3 + 6$
d) $y = (x - 3)^3$ **e)** $y = (x + 2)^3$ **f)** $y = x^3 + 2x^2 - x$
g) $y = x^3 - x^2 - 1$ **h)** $y = x^3 + 4{,}5x^2 - 10x - 5$ **i)** $y = x^3 - 3x + 7$

Anleitung: Stauchen Sie — wenn nötig — die Kurve durch Wahl einer kleineren Länge der Einheit auf der Ordinatenachse!

8. Die graphischen Bilder der folgenden Funktionen sind zu entwerfen.

a) $y = (x - 1)(x^2 - 1)$ **b)** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ **c)** $y = x(x + 1)(x - 3)$
d) $y = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ **e)** $y = (2x - 1)^3 - (x - 2)^3$ **f)** $y = x^4 - 2$
g) $y = x^4 - x^2 + 1$ **h)** $y = \frac{x^4 - 3x^2 + 4}{3}$ **i)** $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x}{2} - 8$

9. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar und bestimmen Sie ihre Definitionsbereiche!

a) $y = \pm\sqrt{x^2 - 11x + 30}$ **b)** $y = \pm\sqrt{x^2 + 3x - 21}$ **c)** $y = \pm\sqrt{20 + 5x - x^2}$
d) $y = \pm\sqrt{17 - 3x - x^2}$ **e)** $y = \pm\sqrt{10x - x^2}$ **f)** $y = \pm\sqrt{16 - x - 2x^2}$

2. Einteilung der Funktionen

Die in der Mathematik betrachteten Funktionen lassen sich nach folgenden Gesichtspunkten einteilen:

a) Rationale Funktionen

Wir betrachten die folgenden Funktionen:

1. $y = 3x^2 - 2$
2. $y = \dfrac{x^4 - 2x}{3}$
3. $y = \sqrt{5} \cdot x^3 - 26x^2 + 3x - 11$
4. $y = x(x-5)(3x+2)$
5. $y = (x+3)(x-4)^2 - 5x + 2$
6. $y = (2x+5)^2 \cdot (3x-2)^3$

Diese Funktionen haben entweder die Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

oder sie lassen sich ohne Division durch Ausdrücke mit x stets auf diese Form bringen. Dabei ist $n \geqq 0$, ganzzahlig. Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sind reelle Zahlen. Kann eine Funktion in dieser Form dargestellt werden, so bezeichnet man sie als **ganze rationale Funktion**. Bei ihr werden nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen in endlicher Anzahl — unter Ausschluß der Division — auf die Variable x angewendet.

Der höchste auftretende Exponent der Variablen x, bei dem der Koeffizient der Potenz verschieden von Null ist, heißt **Grad** der ganzen rationalen Funktion. Zum Beispiel ist die Funktion $y = 3x^3 - 4x^2 - 19x + 6$ dritten Grades, die Funktion $y = 0x^4 + 0x^3 + x^2 - 4$ dagegen zweiten Grades.

Nach dieser Definition hat eine ganze rationale Funktion, die sich auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert ($f(x) = c$), den Grad 0. Der ganzen rationalen Funktion $f(x) = 0$ wird kein Grad zugeordnet. Eine ganze rationale Funktion $y = f(x)$ wird auch **Polynom in x** genannt.

Weiterhin betrachten wir die folgenden Funktionen:

1. $y = \dfrac{1}{x^2}$
2. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^3 - 2x + 4}$
3. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = 1 + \dfrac{1}{x^2 - 2}$
4. $y = \dfrac{x^5 - 7x^3 - 5x^2 + 2}{x^3 + 4} = x^2 - 7 - \dfrac{9x^2 - 30}{x^3 + 4}.$

Diese Funktionen lassen sich sämtlich auf die Form

$$y = f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

bringen. Dabei sind

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$$

und

$$h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$$

ganze rationale Funktionen, und $h(x)$ ist nicht identisch Null (das heißt, der Wertevorrat der Funktion $h(x)$ besteht nicht nur aus dem Werte Null). Bei diesen Funktionen kommt die Variable x also auch im Nenner vor. Sie heißen **gebrochene rationale Funktionen**.

Ist m der Grad von $g(x)$ und n der Grad von $h(x)$, so heißt $f(x)$ **echt gebrochen**, wenn $m < n$ ist; sonst, das heißt, wenn $m \geqq n$ ist, heißt $f(x)$ **unecht gebrochen.**

Bei unecht gebrochenen rationalen Funktionen lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. Ist $n = 0$, so reduziert sich die unecht gebrochene rationale Funktion auf eine ganze rationale Funktion.
2. Ist $n \geqq 1$, so läßt sich die unecht gebrochene rationale Funktion durch Division des Zählers durch den Nenner in die Summe einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion aufspalten. Der echt gebrochene Anteil kann auch identisch Null sein, dann nämlich, wenn die Division ohne Rest aufgeht. Dabei ist zu beachten, daß diese Darstellung nur Gültigkeit an den Stellen hat, die nicht zugleich Nullstellen der Nennerfunktion sind.

Nach den bisherigen Betrachtungen läßt sich nunmehr jede ganze rationale Funktion auch als gebrochene rationale Funktion mit der Nennerfunktion $h(x) = c$ auffassen, wobei c eine von Null verschiedene Konstante ist.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}; \quad g(x) = x^3 + x^2 + x + 1; \quad h(x) = 3;$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3}.$$

b) Nichtrationale Funktionen

Alle Funktionen, die sich nachweislich nicht durch einen rationalen Ausdruck darstellen lassen, heißen **nichtrationale Funktionen.** Beispiele hierfür sind

1. $y = \sqrt{x}$
2. $y = \sqrt[3]{x^4 - 7x + 5}$
3. $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 6}{x + 4}}$
4. $y = x^{\frac{2}{3}} - 5$

Wurzelfunktionen (1.–4.)

5. $y = 3^x - 2$
6. $y = a^x$
7. $y = x^{3x}$

Exponentialfunktionen (5.–7.)

8. $y = {}^3\log x$
9. $y = \lg(x + 1)$

logarithmische Funktionen (8.–9.)

10. $y = \sin x$
11. $y = \operatorname{tg} 2x$

trigonometrische Funktionen (10.–11.)

12. $y = \lg\cos(3x - 8)$ logarithmische Funktion einer trigonometrischen Funktion

c) Algebraische und transzendente Funktionen

Neben der Einteilung der Funktionen in rationale und nichtrationale Funktionen gibt es die Einteilung in algebraische und transzendente Funktionen. Im Mathematikunterricht der Oberschule werden die folgenden algebraischen Funktionen behandelt:

1. rationale Funktionen;

Beispiele: 1. $y = 5x + 8$

2. $y = 3x^2$

3. $y = x^4 - 8x^2 + 16$

4. $y = \frac{x^5 + 7x + 3}{x^3 + 6}$

2. Wurzelfunktionen.

Beispiele: 1. $y = \sqrt{x}$

2. $y = -x + \sqrt{x} + 4$

3. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Beispiele für transzendente Funktionen sind:

1. $y = -\sin x$ 2. $y = 3\log x$ 3. $y = 6^x + 5$ 4. $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

Die algebraischen Funktionen können rational oder nichtrational sein. Die transzendenten Funktionen sind immer nichtrational.

3. Grenzwerte

a) Grenzwerte von Zahlenfolgen

Wir betrachten die Folge der Zahlen $a_1 = 0{,}3$; $a_2 = 0{,}33$; $a_3 = 0{,}333$; ... Dabei gibt der Index n die Anzahl der Dezimalen an. Man erkennt, daß die Werte der Folge ständig wachsen. Sie werden aber nicht beliebig groß. Zum Beispiel wird der Wert 0,4 sicher nicht überschritten. Sogar der Wert $\frac{1}{3}$ wird nicht überschritten.

Überlegen Sie, bis zu welcher Stelle der periodische Dezimalbruch 0,333 ... zu schreiben ist, damit der Fehler zwischen ihm und dem Wert $\frac{1}{3}$ kleiner als 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} ist!

Wir erkennen, daß die Differenz zwischen einem Glied der Folge und dem Wert $\frac{1}{3}$ um so kleiner ist, je größer der Index n des Gliedes ist. Die Differenz kann sogar beliebig klein gemacht werden, wenn man nur den Index genügend groß wählt. Es gibt also zu jeder positiven, sonst aber beliebig vorgegebenen Zahl ε ein Glied a_k, so daß für alle folgenden Glieder der Unterschied zum Wert $\frac{1}{3}$ kleiner als ε ist. Daher ist

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > k\,.$$

Man nennt $\frac{1}{3}$ den **Grenzwert** dieser Zahlenfolge, sagt, daß die Zahlenfolge gegen $g = \frac{1}{3}$ **konvergiert,** und schreibt $a_n \to g$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. (Sprich: limes[1]) *an* für n gegen unendlich gleich g.) Dabei bedeutet das Symbol $n \to \infty$, daß die Indexzahl n über alle Grenzen wächst.

Damit in der Zahlenfolge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{98}{99}, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots$ der Unterschied zum Grenzwert 1 kleiner als $\varepsilon = \frac{1}{10000}$ wird, muß die Folge bis zum 10000ten Glied fortgesetzt werden, denn erst $1 - \frac{10000}{10001}$ ist kleiner als $\frac{1}{10000}$. Zu jeder vorgegebenen positiven Zahl ε läßt sich also ein bestimmtes Glied in der Folge finden, von dem an diese Bedingung erfüllt ist.

Betrachten wir weiterhin die Zahlenfolgen

a) $\frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{6}; \ldots; \frac{n}{n+2}; \ldots;$

b) $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots; \frac{n+1}{n}; \ldots;$

c) $-\frac{1}{1}; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; +\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots; (-1)^n \cdot \frac{1}{n}; \ldots,$

[1]) limes (lat.) heißt Grenze.

so erkennen wir, daß die beiden ersten Folgen einem bestimmten Grenzwert, nämlich der Zahl 1, beliebig nahe kommen. Dabei durchläuft die Zahlenfolge a) Werte, die sämtlich kleiner sind als 1, während die der Folge b) sämtlich größer als 1 sind. Die Zahlenfolge c) nähert sich der Zahl 0, indem sie abwechselnd (dem absoluten Betrage nach) beliebig klein werdende positive und negative Werte durchläuft. Die Glieder von Zahlenfolgen können demnach dem Grenzwert auch von entgegengesetzten Seiten beliebig nahe kommen.

In einem weiteren Beispiel lassen wir a_n die Zahlenfolge 7; 14; 21; 28; ... durchlaufen. Offenbar strebt a_n keinem Grenzwert zu, denn die Glieder werden größer als jede beliebig vorgegebene positive Zahl N; wir sagen dann, a_n „wächst über alle Grenzen", das heißt, a_n konvergiert nicht, sondern **divergiert.** Wir schreiben dies $a_n \to \infty$ (sprich a_n gegen unendlich). Es ist zu beachten, daß „∞" keine Zahl ist, mit der man rechnen kann, sondern lediglich ein Symbol für den eben geschilderten Sachverhalt.

Geben Sie zwei Zahlenfolgen an, für die gilt a) $a_n \to +\infty$, b) $a_n \to -\infty$!

Bei der Zahlenfolge $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ...; $\frac{1}{n}$; ... können wir uns leicht überzeugen, daß sie mit zunehmendem n immer kleinere Werte annimmt, die aber niemals Null erreichen oder gar negativ werden. Sie wird eine **Nullfolge** genannt, das heißt, der gesuchte Grenzwert ist gleich Null. Man schreibt dies:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

b) Grenzwerte von Funktionen

Berechnen wir die Werte der Funktion $y = 2^{-x}$ für $x = 1; 2; 3; \ldots; 10; \ldots$ und stellen wir die Funktion graphisch dar, so ergibt sich die Abbildung 3. Sie läßt erkennen, daß mit wachsendem x der Wert für y abnimmt und einem bestimmten Grenzwert, nämlich dem Wert 0, zustrebt. Wir schreiben dies

$$\lim_{x\to\infty} 2^{-x} = 0.$$

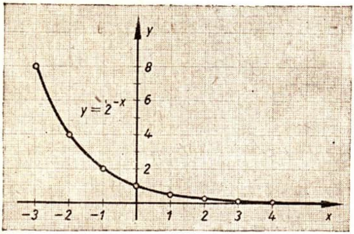

Abb. 3

Wir erkennen, daß der Funktionswert zwar dem Wert Null beliebig nahe kommt, ihn aber nicht erreichen kann.

Ein oft gebrauchter Grenzwert ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, den wir untersuchen wollen. Die Funktion $y = \frac{\sin x}{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. In der Abbildung 4 ist $OA = OC = r$ und $\sphericalangle AOC = x$, wobei vorausgesetzt wird, daß $x > 0$ ein spitzer Winkel ist. Wir vergleichen nun die Flächen der rechtwinkligen Dreiecke DOC und AOB mit der Fläche des Kreissektors AOC. Aus der Abbildung 4 ist ersichtlich, daß der Flächeninhalt des Kreissektors seiner Größe nach zwischen den beiden Dreiecksflächen liegt. Es gilt also die folgende Ungleichungskette:

$$\frac{r\cos x \cdot r\sin x}{2} < \frac{r^2 x}{2} < \frac{r \cdot r \operatorname{tg} x}{2}$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 193).

Dividieren wir jedes Glied durch $\frac{1}{2} r^2 \sin x$, so ergibt sich $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Für $x \to 0$ nähert sich $\cos x$ durch wachsende, $\frac{1}{\cos x}$ durch fallende Werte dem Wert 1. Da $\frac{x}{\sin x}$ stets zwischen $\cos x$ und $\frac{1}{\cos x}$ liegt, muß also auch $\frac{x}{\sin x}$ für $x \to 0$ gegen 1 streben. Demnach ist auch

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

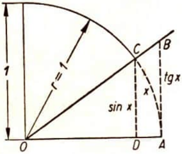

Abb. 4

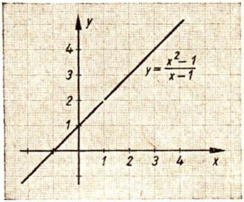

Abb. 5

Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert; sie hat an dieser Stelle eine Lücke. Wir schließen diese Lücke durch den Grenzwert 1.

Die Funktion $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert (Abb. 5), da dort sowohl der Zähler als auch der Nenner gleich Null sind. Um aber das Verhalten dieser Funktion an der Stelle $x = 1$ zu untersuchen, lassen wir x von beiden Seiten der Zahl 1 zustreben: $x \to 1$. Dabei ergeben sich folgende Funktionswerte:

$x = 0{,}9$	$f(0{,}9) = 1{,}9$	$x = 1{,}1$	$f(1{,}1) = 2{,}1$
$x = 0{,}99$	$f(0{,}99) = 1{,}99$	$x = 1{,}01$	$f(1{,}01) = 2{,}01$
$x = 0{,}999$	$f(0{,}999) = 1{,}999$	$x = 1{,}001$	$f(1{,}001) = 2{,}001$

Offensichtlich konvergiert $y = f(x)$ gegen 2, wenn x von beiden Seiten dem Wert 1 zustrebt: wenn $x \to 1$, dann $y \to 2$ oder

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Zu einer allgemeinen Untersuchung setzen wir in der betrachteten Funktion für x den Wert $1 + h$ ein, $(h \neq 0)$; es ergibt sich

$$y = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{1 + h - 1} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Wenn in $x = 1 + h$ die Variable x gegen 1 strebt, strebt h gegen 0, und wir erhalten für y

$$\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

Dabei kann h sowohl positive als auch negative Werte annehmen.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch auf die folgende Weise: Für alle $x \neq 1$ kann die Funktion $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ durch den Ausdruck $y = x + 1$ dargestellt werden. Diese lineare Funktion ist auch definiert für $x = 1$; sie hat dort den Wert $y = 2$. Es ist daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Die Funktion $\frac{x^2-1}{x-1}$ ist zunächst an der Stelle $x = 1$ nicht definiert, sie hat dort eine Lücke. Als Funktionswert an der Lücke wird dieser Grenzwert festgesetzt; die Lücke wird mit ihm geschlossen.

Allgemeiner können wir den Grenzwert von $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ für $x \to a$ untersuchen. Setzen wir $x = a$, so erhalten wir wieder einen Ausdruck, in dem sowohl der Zähler als auch der Nenner Null sind. Führen wir aber die Division für $x \neq a$ aus,

$$(x^n - a^n):(x-a) = x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1},$$

so ergibt sich

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + a\,x^{n-2} + a^2\,x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) = n\cdot a^{n-1}.$$

Es wird also für die Funktion $f(x) = \frac{x^n-a^n}{x-a}$ der Grenzwert na^{n-1} als Wert an der nicht definierten Stelle $x = a$ festgesetzt.

Betrachten wir die Funktionen

$$u(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} \quad \text{und} \quad v(x) = \frac{x^2-3x}{x-3}$$

an der Stelle $x = 3$, so sind diese dort zunächst nicht definiert. Es gelten aber die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = 3.$$

Bilden wir die Funktion

$$u(x) + v(x) = \frac{2x^2-7x+3}{x-3},$$

so ist diese an der Stelle $x = 3$ ebenfalls nicht definiert. Um den Grenzwert festzustellen, verfährt man wie oben und findet

$$\lim_{x\to 3}[u(x)+v(x)] = \lim_{x\to 3}(2x-1) = 5 = \lim_{x\to 3} u(x) + \lim_{x\to 3} v(x).$$

Allgemein gilt der folgende Satz, den wir aber hier nicht beweisen können:

Wenn $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} v(x)$ existieren, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a}[u(x)+v(x)]$, und es ist

$$\lim_{x\to a}[u(x)+v(x)] = \lim_{x\to a} u(x) + \lim_{x\to a} v(x). \tag{1}$$

Unter denselben Voraussetzungen gelten die folgenden Sätze:

$$\lim\,[u(x) - v(x)] = \lim u(x) - \lim v(x)\,, \tag{2}$$

$$\lim\,[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x)\,, \tag{3}$$

$$\lim\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)}\,, \text{ wenn } \lim v(x) \neq 0 \text{ ist.} \tag{4}$$

Die Sätze (1) und (3) lassen sich auf eine endliche Anzahl von Summanden beziehungsweise Faktoren ausdehnen. Zum Beispiel kann in Satz (1) jeder der beiden Summanden wieder die Summe zweier Grenzwerte sein (und so fort).

Diese Sätze gelten insbesondere auch dann, wenn eine der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ konstant ist [also $u(x) = c_1$ oder $v(x) = c_2$]. Es ist daher:

$$\lim_{h\to 0}(c + h) = c; \qquad \lim_{h\to 0}(c - h) = c;$$

$$\lim_{h\to 0}(c \cdot h) = 0; \qquad \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{c}\right) = 0, \text{ wenn } c \neq 0 \text{ ist;}$$

$$\lim_{h\to 0}(c^h) = 1, \text{ wenn } c \neq 0 \text{ ist;} \qquad \lim_{h\to 0}(h^c) = 0, \text{ wenn } c > 0 \text{ ist.}$$

Zu beachten ist, daß diese Grenzwerte nur Gültigkeit haben, wenn c eine Konstante ist.

Im besonderen wird auf den letzten Grenzwert hingewiesen. Beim Betrachten der Nullfolge $h = 10^{-3}; 10^{-4}; \ldots$ kann man sich leicht überzeugen, daß dann zum Beispiel $h^2 = 10^{-6}; 10^{-8}; \ldots; h^3 = 10^{-9}; 10^{-12}; \ldots$ noch besser gegen Null konvergieren.

Aufgaben

1. Welchen Grenzwerten nähert sich a_n, wenn es die nachstehenden Zahlenfolgen durchläuft?

a) 0,6; 0,66; 0,666; ... **b)** 0,4; 0,44; 0,444; ... **c)** 0,8; 0,88; 0,888; ...
d) 0,9; 0,99; 0,999; ... **e)** 1,7; 1,77; 1,777; ... **f)** 2,3; 2,33; 2,333; ...
g) 0,18; 0,1818; 0,181818; ... **h)** 0,45; 0,4545; 0,454545; ...
i) 0,037; 0,037037; 0,037037037; ...

2. Geben Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen an!

a) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ **b)** $\frac{5}{3}; \frac{6}{4}; \frac{7}{5}; \ldots$

c) $\frac{3{,}9}{5{,}1}; \frac{3{,}99}{5{,}01}; \frac{3{,}999}{5{,}001}; \ldots$ **d)** $\frac{1}{1\cdot 3}; \frac{-1}{2\cdot 4}; \frac{+1}{3\cdot 5}; \frac{-1}{4\cdot 6}; \ldots$

3. Geben Sie eine Zahlenfolge an, die den Grenzwert

a) 1 **b)** 5 **c)** 10 **d)** $\frac{3}{4}$ hat!

4. Es ist anzugeben, welches Glied der Zahlenfolge erreicht werden muß, damit von diesem Gliede an der Fehler kleiner als ε ist.

a) Aufgabe 1a: $\varepsilon = 10^{-3}$; 10^{-5} **b)** Aufgabe 1b: $\varepsilon = 10^{-2}$; 10^{-6}
c) Aufgabe 1c: $\varepsilon = 10^{-8}$; 10^{-10} **d)** Aufgabe 1d: $\varepsilon = 10^{-5}$; 10^{-10}

5. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^3}{n}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot 10^{-n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} a b^{-n}$.

Untersuchen Sie bei f) die Fälle $b > 1$; $b = 1$; $0 < b < 1$!

6. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -6} \frac{x^2-x-42}{x^2+x-30}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3\,\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$

Anleitung:

1. Lassen Sie x Zahlenfolgen durchlaufen, deren Glieder um 0,1; 0,01; 0,001; ... von der angegebenen Grenze entfernt sind!
2. Lassen Sie x Zahlenfolgen durchlaufen, deren Glieder um —0,1; —0,01; —0,001; ... von der angegebenen Grenze entfernt sind!

7. Die folgenden Grenzwerte sind zu bestimmen.

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x + \cos x)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{2n}{n-1}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} (3x-5)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (2\sin x - \cos x)$ **e)** $\lim\limits_{h\to 0} (2+h)$ **f)** $\lim\limits_{h\to 0} (3-h)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right)$ **h)** $\lim\limits_{h\to 0} (a-h)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cos x$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \operatorname{tg} x$ **l)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{x}$ **m)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

n) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{3}{h}$ **o)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ **p)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x}\right)$

q) $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{3}\right)^h$ **r)** $\lim\limits_{h\to 0} (10^{-3})^h$ **s)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$

t) $\lim\limits_{h\to 0} h^3$ **u)** $\lim\limits_{h\to 0} h^{\frac{1}{2}}$ **v)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$

8. Zu den Gliedern einer Nullfolge ist eine Konstante a (=3; 4; 5; ...) zu addieren. Welchen Grenzwert hat die neue Zahlenfolge?

9. Die Glieder einer Nullfolge sind von einer Konstanten a (=2; 5; 6; ...) zu subtrahieren. Welchen Grenzwert hat die neue Zahlenfolge?

10. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-x)^6-1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3+2x)^5-243}{9x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(4-2x)^5-(4+2x)^5}{x}$ **e)** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x-h)^3-x^3}{h}$ **f)** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+3h)^5-x^5}{h}$

g) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{16x^4-(2x-h)^4}{4h}$ **h)** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{27x^3-(3x+h)^3}{5h}$ **i)** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x-2h)^5-x^5}{4h}$

11. In der Abbildung 6 ist eine Folge von Kreisbogenzügen gezeichnet. Es ist der Grenzwert ihrer Längen zu bestimmen.

a) Betrachten Sie rein anschaulich, welchem Wert sich die Summe der immer kleiner werdenden Kreisbogenlängen nähert!

b) Führen Sie den Grenzübergang rechnerisch durch!

c) Setzen Sie $r = 1$!

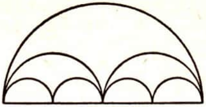

Abb. 6

4. Anstieg, Differenzenquotient, Ableitung

a) Anstieg

Aus einer Landkarte kann man ablesen, daß die Endpunkte einer geraden Straße von A nach B eine Horizontalentfernung von 700 m haben. Die Höhenzahlen sind für A 520 m und für B 590 m. Daraus errechnet sich ein Höhenunterschied von 70 m auf 700 m horizontaler Entfernung, so daß der Steigungswinkel sich ergibt aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{70}{700} = 0{,}1$ zu $\alpha \approx 6°$.

Zwei Punkte einer steilen Waldschneise sind auf einer Landkarte (Maßstab 1 : 25000) 2,4 cm voneinander entfernt. Ihr Höhenunterschied beträgt 225 m. Weisen Sie nach, daß der Steigungswinkel etwa 20,5° beträgt!

Unter dem **Steigungswinkel einer Geraden** in einem rechtwinkligen Koordinatensystem verstehen wir folgendes: Hat die Gerade einen Schnittpunkt S mit der x-Achse und dreht man den von S in Richtung der positiven x-Achse verlaufenden Strahl im mathematisch positiven Drehsinn um S, bis er das erste Mal auf die Gerade fällt, so bezeichnet man den überstrichenen Winkel als **Steigungswinkel der Geraden.** Hat die Gerade keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, so ordnet man der Geraden den Steigungswinkel 0 zu.

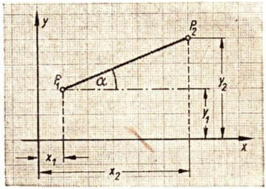

Abb. 7

Es sind die Punkte $P_1(2; 1)$ und $P_2(5; 6)$ gegeben. Verbindet man sie durch eine Gerade, so errechnet sich ihr Steigungswinkel durch $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6-1}{5-2} = \frac{5}{3} = 1{,}667$, so daß $\alpha \approx 59°$ beträgt. Für $P_1(2;\ 7)$ und $P_2(6;\ -1)$ ergibt sich $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1-7}{6-2} = \frac{-8}{4} = -2$ und $\alpha \approx 116{,}5°$. Allgemein gewinnt man den Steigungswinkel α aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, wobei $x_2 \neq x_1$ ist (Abb. 7). Man nennt $\operatorname{tg} \alpha$ das **Maß für den Anstieg** der Geraden oder kurz den Anstieg der Geraden[1]). Dieser Wert ist bei einem spitzen Winkel, das heißt bei einer **steigenden Geraden, positiv,** bei einem stumpfen Winkel, das heißt bei einer **fallenden Geraden, negativ** (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 16).

---

[1]) In der Technik wird in der Regel der Steigungswinkel durch das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, d. h. also durch seinen Sinus ermittelt, da es meist einfacher ist, die Hypotenuse zu messen. Der Sinus des Steigungswinkels wird als die Steigung der Geraden bezeichnet. Zur deutlichen Unterscheidung zwischen dem Sinus und dem Tangens des Steigungswinkels bezeichnen wir den Tangens als den Anstieg der Geraden.

Bei der Parabel $y = x^2$ bestimmen die Punkte $P_1(1;\,1)$ und $P_2(3;\,9)$ eine Sekante, das heißt eine Gerade, die diese Parabel in zwei Punkten schneidet. Ihr Anstiegsmaß beträgt $\operatorname{tg}\sigma = \frac{8}{2} = 4$, wobei σ der Steigungswinkel ist (Abb. 8).

b) Differenzenquotient

Der Punkt $P_0(3;\,1{,}8)$ liegt auf der Kurve der Funktion $y = \frac{1}{5}x^2$. Es gilt also die Gleichung $1{,}8 = \frac{3^2}{5}$. Um eine durch diesen Punkt gehende Sekante zu erhalten, verändern wir den x-Wert um Δx (sprich: Delta x). Wir erhalten dadurch einen Punkt P_1 mit den Koordinaten $P_1(3 + \Delta x;\, 1{,}8 + \Delta y)$. Diese Koordinaten erfüllen die Gleichung $1{,}8 + \Delta y = \frac{(3 + \Delta x)^2}{5}$. Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$\Delta y = \frac{1}{5}(3 + \Delta x)^2 - \frac{1}{5}3^2 = \frac{6}{5}(\Delta x) + \frac{1}{5}(\Delta x)^2.$$

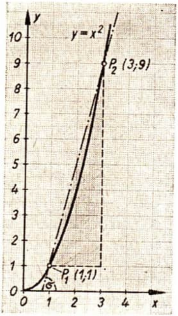

Abb. 8

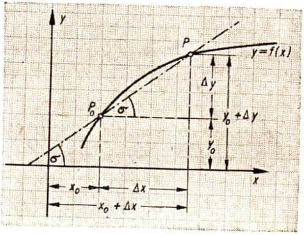

Abb. 9

Dividieren wir beide Seiten durch Δx, so erhalten wir in dem Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{5} + \frac{1}{5}\Delta x$ den Anstieg der Sekante. Entwerfen Sie eine Zeichnung!

Liegt auf einer Kurve $y = f(x)$ ein Punkt $P_0(x_0;\, y_0)$, so erfüllen seine Koordinaten die Gleichung $y_0 = f(x_0)$. Ein anderer Kurvenpunkt P hat die Koordinaten $(x_0 + \Delta x;\; y_0 + \Delta y)$, wobei also $\Delta x \neq 0$ ist. Für ihn gilt entsprechend $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Verbindet man diese beiden Punkte geradlinig (Abb. 9), so entsteht durch die gleichen Rechenoperationen wie beim vorigen Zahlenbeispiel der Anstieg der Sekante

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{(y_0 + \Delta y) - y_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Es gilt also

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\textbf{Ordinatendifferenz}}{\textbf{Abszissendifferenz}}.$$

Das Verhältnis dieser Differenzen, das heißt also ihren Quotienten, nennt man kurz **Differenzenquotient.**

Der Differenzenquotient ist der Anstieg der Sekante. Man schreibt dafür auch

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

wobei vorausgesetzt war, daß $\Delta x \neq 0$ ist.

c) Ableitung

Bei einem Kreis ist die Tangente in einem Punkt P_0 bestimmt als „Grenzlage" aller durch P_0 gehenden Sekanten, wenn deren zweiter Schnittpunkt P mit dem Kreise sich dem Punkte P_0 unbeschränkt nähert. Die entsprechende Tangente berührt den Kreis im Punkt P_0. Genauso definieren wir bei einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ die Tangente in einem Kurvenpunkte P_0 als Grenzlage der Sekanten durch P_0, sofern eine solche Grenzlage existiert (Abb. 10). Unter der Richtung einer Kurve in einem Kurvenpunkte P_0 verstehen wir die Richtung der Tangente in diesem Punkte an die Kurve.

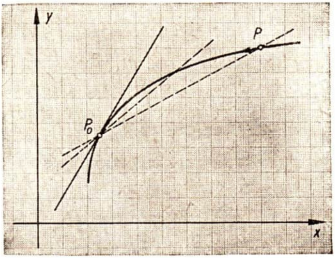

Abb. 10

An die Kurve $y = \frac{1}{5}x^2$ soll im Punkte $P_0\left(3; \frac{9}{5}\right)$ die Tangente gelegt werden. Um diese Aufgabe zu lösen, betrachten wir zunächst die Sekante, die durch P_0 und den Punkt $P(5; 5)$ geht. Der Anstieg dieser Sekante ist

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{5 - \frac{9}{5}}{5 - 3} = \frac{\frac{16}{5}}{2} = 1{,}6; \qquad \sigma \approx 58°.$$

Wandert nun der Punkt P auf der Kurve beliebig nahe an den Punkt P_0 heran, so ändert sich dabei auch der Anstieg der Sekante, wie die nachfolgende Tabelle zeigt (vgl. Abb. 11).

x_n	y_n	$\operatorname{tg}\sigma = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$	σ
5	5	$\frac{5 - 1{,}8}{5 - 3} = 1{,}6$	58°
4	3,2	$\frac{3{,}2 - 1{,}8}{4 - 3} = 1{,}4$	54° 28′
3,5	2,45	$\frac{2{,}45 - 1{,}8}{3{,}5 - 3} = 1{,}3$	52° 26′
3,1	1,922	= 1,22	50° 40′
3,01	1,81202	= 1,202	50° 15′
3,001	1,8012002	= 1,2002	50° 12′
↓	↓	↓	↓
3	1,8	1,2	50° 12′

Anscheinend streben bei Annäherung an $x_0 = 3$ die Werte von $\operatorname{tg}\sigma$ auch einem Grenzwert, nämlich dem Wert 1,2 zu. Die geometrische Veranschaulichung zeigt, daß bei dieser Annäherung an $x_0 = 3$ die Sekante sich der obenerwähnten Grenzlage, der Tangente, nähert. Daraus folgt, daß dieser Grenzwert gleich dem Tangens des Steigungswinkels ist, der zu der oben definierten Tangente gehört. Es gilt also

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}\tau.$$

Von jetzt an verstehen wir unter einer Tangente an eine Kurve im Punkte P diejenige Gerade durch P, deren Anstieg durch den Grenzwert des Differenzenquotienten im Punkte P gegeben ist.

Bestätigen Sie durch eine Tabelle und Zeichnung, daß $\operatorname{tg}\tau$ demselben Grenzwert 1,2 zustrebt, wenn der Punkt P_1 von $x_1 = 0$ über $x_n = 1;\ 2;\ 2{,}5;\ 2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999$ sich dem Punkte P_0 nähert!

Für einen beliebigen Punkt $P_0(x_0;\ y_0)$ der Kurve $y = \frac{1}{5}x^2$ erhalten wir den Anstieg der Tangente in der gleichen Weise. Liegen $P_0(x_0;\ y_0)$ und $P(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ auf der Kurve, so gelten die folgenden Gleichungen:

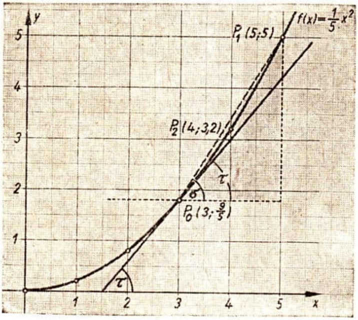

Abb. 11

$$y_0 = \frac{1}{5}x_0^2;$$

$$y_0 + \Delta y = \frac{1}{5}(x_0 + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = \frac{2}{5}x_0(\Delta x) + \frac{1}{5}(\Delta x)^2.$$

Durch Division mit Δx ergibt sich der Anstieg der Sekante als

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5}x_0 + \frac{1}{5}(\Delta x).$$

Um den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen zu können, muß man untersuchen, ob die Grenzwerte der einzelnen Summanden existieren. Beim ersten Summanden ist dies der Fall, da er von Δx unabhängig ist. Daher gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{5}x_0 = \frac{2}{5}x_0.$$

Für den zweiten Summanden ergibt sich

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{5}\Delta x = 0.$$

Also kann man nach Satz (1) von Seite 12 schreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{5}x_0 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{5}\Delta x &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{2}{5}x_0 + \frac{1}{5}\Delta x\right), \\ \frac{2}{5}x_0 + 0 \qquad\qquad &= \frac{2}{5}x_0. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\operatorname{tg}\tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5}x_0.$$

Das Ergebnis zeigt, daß zu jedem beliebigen Abszissenwert x_0 ein Wert $\operatorname{tg}\tau = \frac{2}{5}x_0$ gehört.

Der Anstieg ist also eine Funktion des Abszissenwertes des Berührungspunktes, der als beliebiger Punkt P auf der Kurve jetzt die Koordinaten $(x; y)$ erhalten soll. Deshalb ist für jeden beliebigen Punkt der Kurve $y = \frac{1}{5}x^2$ der Anstieg der Tangente in diesem Punkt gegeben durch den Ausdruck

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{2}{5} x .$$

Wir verstehen unter dem Anstieg einer Kurve an der Stelle x_0 den Anstieg der Tangente an die Kurve an der Stelle x_0. Auch der Anstieg der Kurve ist demnach eine Funktion der Variablen x.

Man nennt den Wert von $\operatorname{tg} \tau$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt dafür $f'(x_0)$ (sprich: f Strich von x_0). Besitzt die Funktion an der Stelle x_0 eine Ableitung, so sagt man, die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 **differenzierbar.**

Daß dies durchaus nicht immer der Fall sein muß, zeigt das Beispiel $y = |x|$. Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion und untersuchen Sie, ob man an der Stelle $x_0 = 0$ **eindeutig** die Tangente an die Kurve legen kann! Welche Folgerung ergibt sich daraus für die Ableitung an dieser Stelle?

Wir erkennen, daß $f'(x)$ eine Funktion von x ist, und nennen $f'(x)$ in Zukunft kurz die **Ableitung der Funktion** $f(x)$. Es gilt also

$$\operatorname{tg} \tau = f'(x) .$$

In Analogie zu $y = f(x)$ schreibt man auch $y' = f'(x)$.

Bildet man die Ableitung einer Funktion (oder kurz: leitet man eine Funktion ab), so sagt man auch, man differenziert diese Funktion.

Zusammenfassung: **Die Ableitung $y' = f'(x)$ einer Funktion $y = f(x)$ gibt den Anstieg der Tangente, das heißt den Anstieg der Kurve, als Funktion der Abszisse des Berührungspunktes an.**

Die Ableitung bezeichnet man mit $\operatorname{tg} \tau$, y' oder $f'(x)$. Sie wird gefunden durch

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Aufgaben

1. Es sind Geraden mit dem Anstieg

a) 1; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** -2; **e)** $-\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{3}{5}$;

g) $\frac{5}{3}$; **h)** $-\frac{3}{4}$; **i)** 5; **k)** -12; **l)** $0{,}02$; **m)** $-0{,}8$

zu zeichnen.

2. Bestimmen Sie durch den Differenzenquotienten den Anstieg der Strecke P_1P_2!

a) $P_1(3;\ 4)$ $P_2(1;\ 1)$ **b)** $P_1(26;\ 11)$ $P_2(13;\ 5)$
c) $P_1(10;\ 8)$ $P_2(-2;\ 3)$ **d)** $P_1(5;\ -3)$ $P_2(2;\ -6)$
e) $P_1(-5;\ -1)$ $P_2(6{,}3;\ 4{,}5)$ **f)** $P_1(-2{,}8;\ 5{,}7)$ $P_2(-6{,}9;\ -3{,}4)$

3. Bestimmen Sie zeichnerisch je drei Punkte, die auf der durch P_1 gehenden Geraden liegen, wenn diese mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt! Geben Sie die dazugehörigen Differenzenquotienten an!

a) $P_1(3{,}5;\ 4)$, $\alpha = 30°$ **b)** $P_1(-2;\ 2{,}5)$, $\alpha = 65°$
c) $P_1(2;\ 4)$, $\alpha = 120°$ **d)** $P_1(-3;\ 5)$, $\alpha = 150°$
e) $P_1(-5{,}3;\ -4)$, $\alpha = 75°$ **f)** $P_1(3{,}2;\ -2{,}1)$, $\alpha = 53°$

Begründen Sie, daß in diesem Falle beide Koordinatenachsen gleich lange Einheiten tragen müssen!

4. Es sind je drei Punkte zu bestimmen, die auf der durch P_1 gehenden Geraden mit dem Anstieg m liegen. Die zugehörigen Differenzenquotienten sind anzugeben.

a) $P_1\,(2{,}5;\ 3)$, $m = 2$ b) $P_1\,(3{,}7;\ -4)$, $m = 1{,}6$

c) $P_1\,(-5{,}2;\ 6)$, $m = -\frac{3}{4}$ d) $P_1\,(-2{,}3;\ 4)$, $m = 0{,}6$

e) $P_1\,(1{,}5;\ -3{,}6)$, $m = 2{,}5$ f) $P_1\,(-1{,}8;\ -2{,}1)$, $m = -1{,}3$

5. Die Ableitung der Potenzfunktion mit ganzzahligen positiven Exponenten

Wir bilden die Ableitung der Funktion $y = x^3$. Dazu gehen wir vom Anstieg der Sekante, also vom Differenzenquotienten aus. Da die Koordinaten der Punkte $(x;\ y)$ und $(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ die Gleichung $y = x^3$ befriedigen, ist der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$. Wird die Klammer ausgerechnet und dann der Bruch mit Δx gekürzt, so ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3\,x^2 + 3\,x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2.$$

Lassen wir Δx eine Nullfolge, $\Delta x \to 0$, durchlaufen und wenden wir auf die rechte Seite dieser Gleichung den Satz über den Grenzwert einer Summe an (vgl. Satz (1), S. 12), so erhalten wir

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3\,x^2 + \lim_{\Delta x \to 0} 3\,x\,(\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2.$$

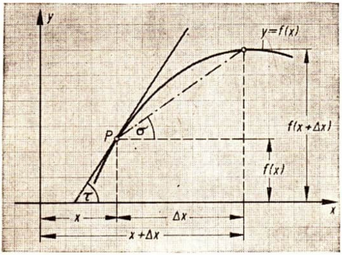

Abb. 12

Auf der rechten Seite ergibt der Grenzübergang beim ersten Summanden $3\,x^2$; der Grenzwert beim zweiten Summanden ist Null, weil Δx eine Nullfolge durchläuft (vgl. Abschnitt I, 3). Der dritte Ausdruck konvergiert ebenfalls gegen Null. Damit erhalten wir, da die linke Seite auf Grund der Definition als y' geschrieben werden kann,

$$y' = 3\,x^2.$$

Weisen Sie für die Funktion $y = x^2$ nach, daß die Ableitung $y' = 2\,x$ ist!

Wir wollen nun die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $\boldsymbol{y = f(x) = x^n}$ (n ganzzahlig, positiv) bilden und gehen dazu wieder vom Differenzenquotienten aus (vgl. Abb. 12).

Aus $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Um diesen Differenzenquotienten ausrechnen zu können, bringen wir ihn zunächst auf die Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}.$$

Klammern wir nunmehr im Zähler $(x + \Delta x)^n$, im Nenner $(x + \Delta x)$ aus, so entsteht

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n}{x+\Delta x} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{x+\Delta x}\right)^n}{1 - \frac{x}{x+\Delta x}} = (x+\Delta x)^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{x+\Delta x}\right)^n}{1 - \frac{x}{x+\Delta x}}.$$

Wir vergleichen den zweiten Faktor dieses Ausdrucks mit der Summenformel der geometrischen Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 136).

Ersetzen wir q durch $\frac{x}{x+\Delta x}$, so ergibt sich für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x+\Delta x)^{n-1} \cdot \left[1 + \frac{x}{x+\Delta x} + \left(\frac{x}{x+\Delta x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{x+\Delta x}\right)^{n-1}\right].$$

Durchläuft Δx eine Nullfolge, so strebt $(x + \Delta x)$ dem Werte x zu; jeder der n Summanden der Klammer nimmt den Grenzwert 1 an. Unter Beachtung des Satzes (3) über den Grenzwert des Produktes von Funktionen (vgl. S. 13) erhalten wir

$$y' = x^{n-1} \cdot n \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{y' = n\,x^{n-1}}.$$

Wenn $n = 1$ ist, so hat $y = x^1 = x$ die Ableitung $y' = 1$.

Welche geometrische Bedeutung hat dies? Bilden Sie mit dem Differenzenquotienten und durch Grenzübergang die Ableitung!

Beispiele:

$$y = x^4 \qquad y' = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3$$
$$y = x^6 \qquad y' = \qquad\qquad 6\,x^5$$

Zusammenfassung: **Funktionen der Form $y = x^n$ haben für jedes ganzzahlige, positive n die Ableitung $y' = n\,x^{n-1}$.**

6. Die Ableitung einer Konstanten

Die Funktion $y = f(x) = c$ hat, wenn c eine Konstante ist, für alle x-Werte den festen y-Wert c. Ihr Bild (Abb. 13) ist eine Parallele zur x-Achse im Abstande c. Die Ableitung bestimmen wir wieder durch einen Grenzübergang. Aus $f(x) = c$ und $f(x + \Delta x) = c$ folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

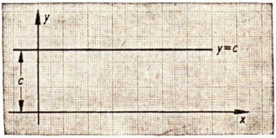

Abb. 13

Da der Differenzenquotient stets Null ist, kann die Ableitung als dessen Grenzwert auch nur Null sein. Damit ist auch der Steigungswinkel Null. Wir sehen, daß die Definition des Steigungswinkels einer zur x-Achse parallelen Geraden sinnvoll war.

Zusammenfassung: **Die Ableitung einer Konstanten ist Null.**

7. Die Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor

Wird eine Funktion $f(x)$, deren Ableitung $f'(x)$ bekannt ist, mit einem konstanten Faktor a multipliziert, so entsteht die neue Funktion $y = a\,f(x)$. Wir wollen untersuchen, ob deren Ableitung auch bestimmbar ist. Dazu bilden wir den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und führen den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durch:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\,f(x+\Delta x) - a\,f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x) = y'.$$

Zusammenfassung: **Bei der Differentiation bleibt ein konstanter Faktor unverändert als solcher erhalten.**

Beispiele:

$$y = 7\,x^4 \qquad y' = 7 \cdot 4\,x^{4-1} = 28\,x^3$$

$$y = b\,x^n \qquad y' = b\,n\,x^{n-1}.$$

8. Die Ableitung einer Summe von Funktionen

Wir betrachten zwei Funktionen, $u = 7x^2$ und $v = 5x$, bilden die Funktion $y = u + v = 7x^2 + 5x$ und suchen ihre Ableitung. Dazu gehen wir wieder vom Differenzenquotienten aus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{[7\,(x+\Delta x)^2 + 5\,(x+\Delta x)] - (7\,x^2 + 5\,x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{7\,x^2 + 14\,x\,(\Delta x) + 7\,(\Delta x)^2 + 5\,x + 5\,(\Delta x) - 7\,x^2 - 5\,x}{\Delta x}$$

$$= 14\,x + 7\,(\Delta x) + 5.$$

Durchläuft Δx eine Nullfolge, $\Delta x \to 0$, so gilt nach dem Satz über den Grenzwert von Summen

$$y' = 14x + 5.$$

Bilden wir andererseits die Ableitungen der einzelnen Funktionen u und v, so erhalten wir $u' = 14x$ und $v' = 5$. Demnach ist

$$u' + v' = 14x + 5.$$

Aus $y' = 14x + 5$ und $u' + v' = 14x + 5$ folgt $y' = u' + v'$. Diese Beziehung gilt zunächst nur für das betrachtete Beispiel. Ihre Gültigkeit soll nun allgemein bewiesen werden.

Es sei

$$y = u(x) + v(x)$$

mit differenzierbaren Summanden $u(x)$ und $v(x)$. Es existieren also

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\,(x+\Delta x) - u\,(x)}{\Delta x} \quad \text{und} \quad v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Wir bilden

$$u'(x) + v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta [u(x) + v(x)]}{\Delta x} = y'.$$

Zusammenfassung: **Die Ableitung einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden, das heißt, eine Summe darf gliedweise differenziert werden.**

Beweisen Sie entsprechend den folgenden Satz: Ist $y = u - v$, so ist $y' = u' - v'$!

Es läßt sich beweisen, daß die Summenregel $y' = u' + v'$ für endlich viele Summanden $u, v, w, \ldots$ erweitert werden kann. Gilt also $y = u + v + w + \cdots$ bei endlich vielen, differenzierbaren Summanden $u, v, w, \ldots$, so ist

$$y' = u' + v' + w' + \cdots$$

Aufgaben

1. Es ist die Funktion $y = f(x)$ zu zeichnen und der Differenzenquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 für $\Delta x = \pm 2; \pm 1; \pm 0{,}5; \pm 0{,}1; \pm 0{,}01$ zu bilden.

a) $f(x) = x^2; \quad x_0 = 1$ **b)** $f(x) = \frac{x^2}{3}; \quad x_0 = 2$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{10}; \quad x_0 = 5$

d) $f(x) = \frac{x^3}{9}; \quad x_0 = 2$ **e)** $f(x) = \frac{x^3}{12}; \quad x_0 = 3$ **f)** $f(x) = \frac{x^2 - x}{2}; \quad x_0 = 3$

g) $f(x) = \frac{x^2}{3} + 2x; \quad x_0 = 3$ **h)** $f(x) = \frac{x^3}{10} - \frac{x^2}{2}; \quad x_0 = 3$ **i)** $f(x) = \frac{x^3}{20} + \frac{x}{2}; \quad x_0 = 4$

2. Zeichnen Sie die Funktion $y = f(x) = \sin x$ (x im Bogenmaß) unter Benutzung der Tafel der natürlichen sin-Werte! Bestimmen Sie die Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ für $\Delta x = \pm 0{,}5; \pm 0{,}4; \pm 0{,}3; \pm 0{,}2; \pm 0{,}1; \pm 0{,}01$! Zeichnen Sie die zugehörigen Sekanten!
Anleitung: Auf beiden Achsen sind gleiche Einheiten zu wählen.

3. Für die Funktion $f(x)$ ist eine Formel für den Differenzenquotienten an der Stelle x_0 aufzustellen und daraus die Ableitung durch Grenzübergang zu bestimmen.

a) $f(x) = x^3; \quad x_0 = 1;\ 0{,}5;\ 1{,}5$ **b)** $f(x) = x^4; \quad x_0 = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2}$

c) $f(x) = x^5; \quad x_0 = 1;\ 0{,}5;\ 1{,}5$ **d)** $f(x) = \frac{x^3}{3}; \quad x_0 = 2;\ 3;\ \frac{4}{5}$

e) $f(x) = \frac{x^4}{8} - 1; \quad x_0 = 2;\ \frac{4}{3};\ 3$ **f)** $f(x) = x^2 - 2x; \quad x_0 = 3;\ -2;\ -3$

g) $f(x) = x^3 - x; \quad x_0 = 1;\ 0{,}8;\ 1{,}2$ **h)** $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 4; \quad x_0 = 2;\ -3;\ 4{,}5$

i) $f(x) = x^2 - 2; \quad x_0 = 1;\ -1;\ -2$

4. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ nach Aufstellung des Differenzenquotienten durch Grenzübergang die Ableitung!

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 5\,x^2$ c) $f(x) = \frac{x^2}{3}$

d) $f(x) = a\,x^2$ e) $f(x) = 5\,x^2 + 6$ f) $f(x) = 5\,x^2 - 3$

g) $f(x) = x^2 + 3\,x$ h) $f(x) = 8\,x^2 - 5\,x$

i) $f(x) = 7\,x^2 - 3\,x + 4$ k) $f(x) = 4\,x^3 + 2\,x - 4$

l) $f(x) = 5\,x^3 - 2\,x^2 + 8$ m) $f(x) = 7\,x^3 - 6\,x^2 + 5\,x - 4$

n) $f(x) = \sqrt{5}\,x^4 - 6\,x^2 + 3$ o) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$

p) $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 1$ q) $f(x) = \frac{x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + 4}{5}$

r) $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ s) $f(x) = a_0\,x^4 + a_1\,x^3 + a_2\,x^2 + a_3\,x + a_4$

5. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ nach Ausmultiplizieren, Aufstellung des Differenzenquotienten und Grenzübergang die Ableitung!

a) $f(x) = (x + 1)\,(x - 1)$ b) $f(x) = (x + 2)\,(5\,x + 3)$

c) $f(x) = (x - 3)\,(3\,x - 4)$ d) $f(x) = \left(\frac{x}{2} + 5\right)\left(\frac{x}{3} - 6\right)$

e) $f(x) = (x + a)\,(x + b)$ f) $f(x) = (5\,x^2 - 4)\,(x + 3)$

g) $f(x) = \left(2\,x^2 - \frac{1}{5}\right)(x + 2)$ h) $f(x) = 4\,x\left(5\,x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\right)$

i) $f(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,(d\,x + f)$

6. Für die Funktion $f(x)$ ist nach Aufstellung des Differenzenquotienten durch Grenzübergang die Ableitung zu bestimmen.

a) $f(x) = (x + 2)^2$ b) $f(x) = (x + 2)^3$ c) $f(x) = (x - 4)^3$

d) $f(x) = (x^2 - x)^2$ e) $f(x) = (x - 1)^5$ f) $f(x) = (1 - 5\,x)^3$

g) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\,x + 3\right)^2$ h) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\,x - \frac{2}{3}\right)^3$ i) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\,a\,x - \frac{3}{4}\,b\right)^3$

9. Die ganze rationale Funktion und ihre Ableitungen. Höhere Ableitungen einer Funktion

Jede ganze rationale Funktion kann nach Abschnitt 2 auf die Form

$$y = f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

gebracht werden. Dabei sind die einzelnen Summanden, wie wir erkannt haben, differenzierbare Funktionen. Also kann nach Abschnitt 8 die Differentiation gliedweise vorgenommen werden. Es gilt daher

$$y' = f'(x) = n\,a_n\,x^{n-1} + (n - 1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + (n - 2)\,a_{n-2}\,x^{n-3} + \cdots + 2\,a_2\,x + a_1.$$

Wir erkennen, daß y' wiederum eine ganze rationale Funktion von x, das heißt ein Polynom in x ist; also ist y' ebenfalls differenzierbar.

Ist $y' = f'(x)$ als Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ wieder differenzierbar, so bezeichnen wir $y' = f'(x)$ als erste Ableitung von $y = f(x)$. Die von $f'(x)$ abgeleitete Funktion heißt die zweite Ableitung von $f(x)$; man schreibt dafür $f''(x)$. Unter

$f'''(x)$ ist die Ableitung von $f''(x)$ zu verstehen, $f'''(x)$ wird die dritte Ableitung von $f(x)$ genannt. Entsprechend werden die weiteren Ableitungen definiert. Es ist also die n-te Ableitung einer Funktion $f(x)$ die Ableitung der $(n-1)$-ten Ableitung von $f(x)$.

Von der vierten Ableitung an schreibt man $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Die zweite Ableitung und alle weiteren Ableitungen bezeichnet man als **höhere Ableitungen.**

Die erste Ableitung jeder ganzen rationalen Funktion n-ten Grades $(n \geqq 1)$ ist eine ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades. Ist $n = 0$, das heißt, liegt die ganze rationale Funktion $f(x) = c \quad (c \neq 0)$ vor, so ist deren erste Ableitung identisch gleich Null. Dieser Ableitung kann kein Grad zugeordnet werden. Daraus folgt, daß die n-te Ableitung jeder ganzen rationalen Funktion n-ten Grades den Grad null hat, das heißt, sich auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert. Alle folgenden Ableitungen, also alle Ableitungen von der $(n+1)$-ten an, sind identisch gleich Null.

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste, zweite, dritte, ... Ableitung der Funktion $f(x)$!

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 18$ **b)** $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 12$

c) $f(x) = \frac{x^5}{10} - 3x^4 + \frac{x^2}{8} - 6$ **d)** $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2$

e) $f(x) = \frac{x^4}{20} - 3x^3 + 26x$ **f)** $f(x) = 0{,}4x^3 - 9{,}6x^2 + 75{,}6x$

g) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x - 11$ **h)** $f(x) = 3x^4 - \frac{4x^3}{3} - 8x^2 - 10$

i) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$ **k)** $f(x) = (x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)$

l) $f(x) = (5x^2 - 3)(5x^2 + 3)$ **m)** $f(x) = (a x^2 + b)(c x^2 + d x + e)$

2. Es ist der Wert der Funktion $f(x)$ und der der Ableitungen für die gegebenen Abszissenwerte zu ermitteln.

a) Aufgabe 1a: $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ **b)** Aufgabe 1b: $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$

c) Aufgabe 1c: $f(3)$, $f'(2)$, $f''(1)$ **d)** Aufgabe 1i: $f'(4)$, $f''(5)$, $f'''(6)$

3. Es ist eine ganze rationale Funktion dritten Grades zu bestimmen, von der bekannt sind

a) $f(0) = 2$, $f'(0) = -5$, $f''(0) = 16$, $f'''(x) = 6$;

b) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 3$, $f''(1) = 12$;

c) $f(1) = -6$, $f'(2) = 1$, $f''(3) = -8$, $f'''(x) = -6$;

d) $f(2) = -21$, $f'(3) = 13$, $f''(4) = 36$, $f''(6) = 60$.

Anleitung: Die Funktion ist in der Form $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ anzusetzen, die Ableitungen für die vorgeschriebenen Abszissen sind zu bilden und die unbekannten Koeffizienten a, b, c, d zu bestimmen.

4. Bestimmen Sie eine ganze rationale Funktion vierten Grades, von der bekannt sind

a) $f(0) = -4$, $f'(1) = 5$, $f''(2) = 42$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = 24$;

b) $f(1) = -9$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(1) = 0$, $f'''(2) = 24$;

c) $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, $f''(0) = 8$, $f'''(1) = 12$, $f^{(4)}(x) = 18$;

d) $f(0) = 17$, $f(-1) = 13$, $f'(-1) = 13$, $f'(-2) = 75$, $f''(-1) = -30$!

Anleitung: Benutzen Sie entsprechend Aufgabe 3 die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$!

5. Bestimmen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung die Winkel, welche die in den Punkten mit den Abszissen $x_0 = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4$ an die Kurve der Funktion $f(x)$ gelegten Tangenten mit der positiven Richtung der x-Achse bilden!

a) $f(x) = \frac{x^2}{12}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4$ c) $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{12}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + 1$ f) $f(x) = (x-2)^3$

6. Welchen Winkel bildet die Kurve der Funktion $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 6x$ im Punkte $(3; \ldots)$ mit der positiven Richtung der x-Achse?

7. In welchen Punkten hat die Kurve der Funktion $f(x) = (x+2)(x-7)(x-2)$ den Anstieg 2?

II. Anwendungen der Differentialrechnung

10. Steigen und Fallen der Kurven. Steigungsdreieck

Wenn wir den Verlauf der Funktion $y = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 2{,}1x + 5{,}4$ verfolgen wollen, entwerfen wir zunächst eine Wertetabelle. Außerdem zeichnen wir das graphische Bild der Funktion (Abb. 14).

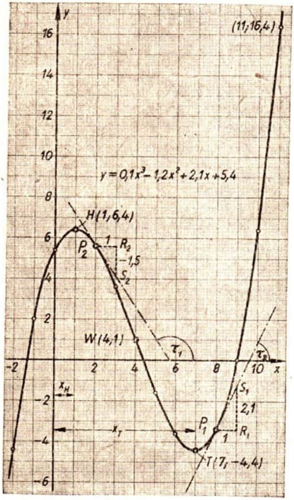

Abb. 14

Durchlaufen wir die Kurve in der Richtung der wachsenden x-Werte, so kommen wir vom dritten über den zweiten und ersten in den vierten und zurück in den ersten Quadranten. Dabei sehen wir, daß zwei Punkte sich durch ihre besondere Lage auszeichnen. Das Bild der Funktion zeigt, daß die Kurve bis zum Punkt H $(1; 6{,}4)$ steigt, von da bis zum Punkt T $(7; -4{,}4)$ fällt und danach wieder steigt.

Als Anstieg einer Kurve war bereits im Abschnitt 4 der Anstieg der Kurventangente definiert worden. Da der Anstieg der Tangente gleich der ersten Ableitung der Funktion ist, muß die Änderung des Anstiegs einer Kurve aus $y' = f'(x)$ erkennbar sein.

Der Anstieg ist positiv, wenn $0 < \tau < 90°$, das heißt $\operatorname{tg}\tau = y' > 0$ ist; er ist negativ, wenn $90° < \tau < 180°$, das heißt $\operatorname{tg}\tau = y' < 0$ ist (Abb. 15). Es müßte also in unserem Beispiel die erste Ableitung y' positiv sein für diejenigen x-Werte, die kleiner als 1 und größer als 7 sind, negativ für die x-Werte zwischen 1 und 7. Um dies nachzuprüfen, bilden wir von $y = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 2{,}1x + 5{,}4$ die erste Ableitung $y' = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 2{,}1$ und stellen diese Funktion nach Aufstellen der Wertetabelle graphisch dar (Abb. 16). Wir erkennen, daß die Kurve $f'(x)$ die x-Achse in $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$ schneidet,

x	$0{,}1\,x^3$	$-1{,}2\,x^2$	$+2{,}1\,x$	$+5{,}4$	y
-2	$-0{,}8$	$-4{,}8$	$-4{,}2$	5,4	$-4{,}4$
-1	$-0{,}1$	$-1{,}2$	$-2{,}1$	5,4	2,0
0	0	0	0	5,4	5,4
1	0,1	$-1{,}2$	2,1	5,4	6,4
2	0,8	$-4{,}8$	4,2	5,4	5,6
3	2,7	$-10{,}8$	6,3	5,4	3,6
4	6,4	$-19{,}2$	8,4	5,4	1,0
5	12,5	$-30{,}0$	10,5	5,4	$-1{,}6$
6	21,6	$-43{,}2$	12,6	5,4	$-3{,}6$
7	34,3	$-58{,}8$	14,7	5,4	$-4{,}4$
8	51,2	$-76{,}8$	16,8	5,4	$-3{,}4$
9	72,9	$-97{,}2$	18,9	5,4	0,0
10	100,0	$-120{,}0$	21,0	5,4	6,4
11	133,1	$-145{,}2$	23,1	5,4	16,4

und finden bestätigt, daß sie zwischen diesen Werten negativ und für größere und kleinere x-Werte positiv ist.

Diese Betrachtungen können wir verallgemeinern: Haben wir eine Funktion $y = f(x)$ als Kurve dargestellt, so ist der Anstieg an der Stelle x_0 positiv, wenn $f'(x_0) > 0$ ist, er ist an der Stelle x_0 negativ, wenn $f'(x_0) < 0$ ist.

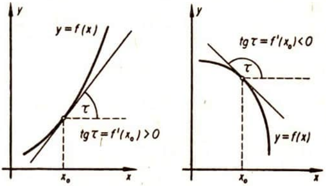

Abb. 15

Im Punkte $P_1(8; -3{,}4)$ der Stammfunktion $f(x)$ beträgt der Wert der ersten Ableitung $y' = 2{,}1$. Er gibt den Anstieg der Tangente und damit auch den Anstieg der Kurve im Punkt P_1 an. Da $y' = \operatorname{tg} \tau_1 = 2{,}1 = \frac{2{,}1}{1}$ ist, läßt sich im Punkte P_1 die Tangente durch Verwendung eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Ankathete 1 und der Gegenkathete 2,1 (vgl. Abb. 14) konstruieren; die beiderseitig verlängerte Hypotenuse ist die Tangente in P_1 an die Kurve. Für den Punkt P_2 (2; 5,6) von $f(x)$ mit dem Anstieg $y' = -1{,}5$ kann die Tangente mit Hilfe der Ankathete 1 und der Gegenkathete $-1{,}5$ (oder wegen größerer Zeichengenauigkeit auch aus der Ankathete 2 und der Gegenkathete -3) gezeichnet werden.

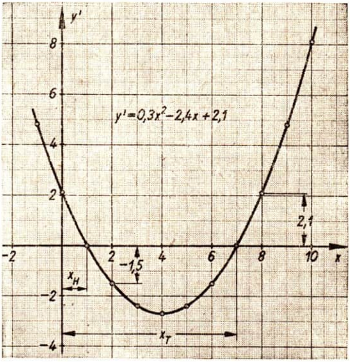

Abb. 16

Das Dreieck mit der Ankathete 1 bezeichnen wir als **Steigungsdreieck.** In jedem Punkte der Kurve läßt sich ein Steigungsdreieck zeichnen; die Länge seiner Gegenkathete hängt von der Lage des Punktes ab. Ist $f'(x)$ positiv, so ist die Gegenkathete in der Richtung der positiven Ordinatenachse anzutragen, ist $f'(x)$ negativ, so ist die Gegenkathete in der Richtung der negativen Ordinatenachse zu zeichnen. Der Winkel τ ist der Steigungswinkel der Tangente.

11. Extremwerte

Wir sehen, daß der Punkt H (1; 6,4) in der Abbildung 14 höher liegt als die von uns berechneten, ihm benachbarten Kurvenpunkte (0; 5,4) und (2; 5,6). Entsprechend liegt der Punkt T (7; $-4{,}4$) niedriger als die von uns berechneten Kurvenpunkte. Da wir nicht alle Punkte der Kurve berechnen können, ist es zunächst noch ungewiß, ob H wirklich der höchste beziehungsweise T wirklich der tiefste Punkt seiner Umgebung ist. Dabei verstehen wir unter Umgebung ein passend gewähltes Intervall, das $x_H = 1$ beziehungsweise $x_T = 7$ enthält.

Der Punkt H ist sicher der höchste Punkt seiner Umgebung, wenn für seine Abszisse x_H die Beziehung $f(x) < f(x_H)$ gilt, wobei x jeden Wert in dieser Umgebung von x_H annehmen kann. Entsprechend ist der Punkt T sicher der tiefste Punkt seiner Umgebung, wenn für seine Abszisse x_T die Beziehung $f(x) > f(x_T)$ gilt.

Ist der Punkt H der höchste Punkt seiner Umgebung, so sagen wir, die Funktion hat an der zu diesem Punkte gehörigen Abszisse x_H ein Maximum. Entsprechend sagen wir, daß an der Abszisse x_T des Punktes T ein Minimum vorliegt, wenn der Punkt der tiefste Punkt seiner Umgebung ist. Maxima und Minima werden auch gemeinsam als Extrema bezeichnet.

Wir definieren allgemein: Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle mit der Abszisse x_E ein Maximum, wenn

$$f(x) < f(x_E) \quad \text{ist,}$$

wobei x jeden Wert zwischen $x_E - h$ und $x_E + h$ annehmen kann. Dabei bedeutet h eine passend gewählte, mitunter sehr kleine, positive Zahl.

Entsprechend hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_E ein Minimum, wenn ein h gefunden werden kann, so daß für jedes zwischen $x_E - h$ und $x_E + h$ gelegene x gilt

$$f(x) > f(x_E).$$

Unser Beispiel zeigt, daß der Punkt H nur mit seiner Umgebung verglichen wird; außerhalb dieser Umgebung gibt es Punkte, die höher liegen, zum Beispiel der Punkt P_1 (11; 16,4). Das Maximum besteht also nur **relativ zu seiner Umgebung.** Entsprechendes gilt für den Punkt T. Hier liegt der Punkt P_2 (-2; $-4{,}4$) genau so tief wie der Punkt T. Dieses veranlaßt uns, die Extrema genauer **relative Extrema** zu nennen.

In der Abbildung 17 sind die Tangenten an den Stellen der Extrema parallel zur Abszissenachse, das heißt, ihr Anstieg $f'(x_E)$ ist gleich Null. Wir vermuten, daß für alle Extrema gilt:

$$f'(x_E) = 0.$$

Um die Richtigkeit dieser Vermutung zu beweisen, stellen wir zunächst eine Vorbetrachtung an. Ist an der Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0) > 0$, so hat die Tangente an der Stelle x_0 einen positiven Anstieg. Die Tangente ist als Grenzlage von Sekanten definiert; das heißt, der Anstieg der Tangente ist der Grenzwert der Anstiegsmaße der Sekanten. Es muß also um x_0 einen Bereich geben, in dem alle Sekanten positiven Anstieg haben. Daraus ergibt sich, daß für alle $x > x_0$ dieses Bereiches $f(x) > f(x_0)$ ist.

Ist x_E die Abszisse eines Maximums und nehmen wir an, daß $f'(x_E) > 0$ sei, so müßten nach der eben angestellten Vorbetrachtung für alle in der Nachbarschaft liegenden Werte $x > x_E$ die Funktionswerte $f(x) > f(x_E)$ sein. Das aber widerspricht der Voraussetzung, daß bei x_E ein Maximum vorliegt. Entsprechend gelangen wir zum Widerspruch, wenn wir annehmen, daß $f'(x_E) < 0$ sei. Demnach bleibt für $f'(x_E)$ nur der Wert Null übrig.

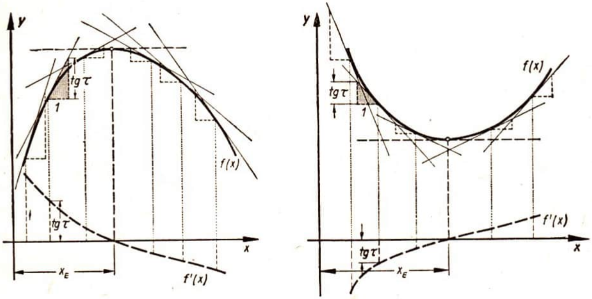

Abb. 17

Ein entsprechender indirekter Beweis läßt sich bei Betrachtung eines Minimums führen.

Zusammenfassung: Für jede Abszisse x_E eines Extremwertes der Funktion $f(x)$ muß die erste Ableitung $y' = f'(x_E)$ den Wert 0 haben.

Wir wollen nun untersuchen, ob aus der Tatsache, daß $f'(x_0) = 0$ ist, auf das Vorhandensein eines Extremwertes an der Stelle x_0 geschlossen werden kann. Wenn sich ein Beispiel finden läßt, bei dem $f'(x_0) = 0$ ist, aber an der Stelle x_0 kein Extremwert vorliegt, so läßt sich der eben bewiesene Lehrsatz nicht umkehren.

Die Funktion $y = x^3$ hat die Ableitung $y' = 3x^2$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist $y' = 0$. Die Funktion $f(x)$ hat aber an der Stelle $x = 0$ keinen Extremwert, denn für alle $x < 0$ ist $f(x)$ negativ; für alle $x > 0$ ist $f(x)$ positiv (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 50, Abb. 31).

Wir erkennen also, daß $f'(x) = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwertes an der Stelle x_0 darstellt. Wenn an der Stelle x_0 ein Extremwert vorliegt, muß demnach diese Bedingung erfüllt sein; jedoch kann nicht umgekehrt aus der Tatsache, daß $f'(x_0) = 0$ ist, geschlossen werden, daß ein Extremwert vorliegt, da, wie wir eben gesehen haben, $f'(x_0)$ auch in anderen Fällen gleich Null sein kann. Die **Bedingung** $f'(x_0) = 0$ ist demnach zwar **notwendig, aber nicht hinreichend** für das Vorhandensein eines Extremwertes an der Stelle x_0.

Um auch eine **hinreichende Bedingung** zu finden, betrachten wir wieder die Kurven

der Funktion $\quad y = f(x) \ = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 2{,}1\,x + 5{,}4$

und ihrer Ableitung $\quad y' = f'(x) = 0{,}3\,x^2 - 2{,}4\,x + 2{,}1.$

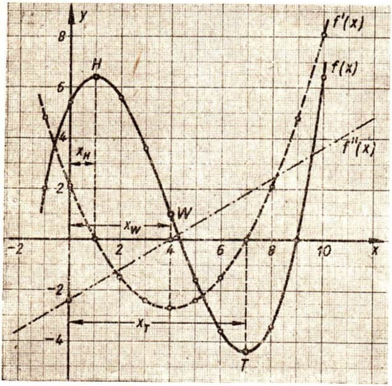

Abb. 18

Wir finden, daß an der Stelle x_H die Kurve $y' = f'(x)$ die x-Achse schneidet, ihr Anstieg ist an der Stelle x_H negativ. Da der Anstieg einer Kurve als deren Ableitung definiert ist, ist an dieser Stelle die Ableitung von y', das heißt die zweite Ableitung der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, negativ. Entsprechend stellen wir fest, daß an der Stelle x_T die Kurve $f'(x)$ von negativen zu positiven Werten übergeht; ihr Anstieg ist an der Stelle x_T positiv. An dieser Stelle ist die Ableitung von y', das heißt die zweite Ableitung der ursprünglichen Funktion, positiv.

Die zweite Ableitung hat den Wert $f''(x) = 0{,}6\,x - 2{,}4$. Wir stellen in einem xy-Koordinatensystem die folgenden Funktionen dar (Abb. 18):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 2{,}1\,x + 5{,}4, \\ f'(x) &= 0{,}3\,x^2 - 2{,}4\,x + 2{,}1, \\ f''(x) &= 0{,}6\,x \ - 2{,}4. \end{aligned}$$

Die gewonnenen Erkenntnisse können an dieser Abbildung unmittelbar nachgeprüft werden. Es ist also festgestellt worden:

1. An der Stelle x_H liegt ein Maximum vor; dort ist die erste Ableitung $f'(x_H) = 0$ und die zweite Ableitung $f''(x_H) < 0$.
2. An der Stelle x_T liegt ein Minimum vor; dort ist die erste Ableitung $f'(x_T) = 0$ und die zweite Ableitung $f''(x_T) > 0$.

Diese Feststellungen haben wir am betrachteten Beispiel getroffen. Wir müssen uns nun fragen, ob aus diesem Ergebnis eine hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums gefunden werden kann.

Tatsächlich läßt sich beweisen, daß immer dann an einer Stelle x_0 ein Maximum vorliegt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0, \\ f''(x_0) &< 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Bedingungen zusammen ergeben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Maximums.

Entsprechend läßt sich beweisen, daß immer dann an einer Stelle x_0 ein Minimum vorliegt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$f'(x_0) = 0,$$
$$f''(x_0) > 0.$$

Diese beiden Bedingungen zusammen ergeben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimums. Die allgemeinen Beweise lassen sich mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht führen.

Diese Bedingungen ermöglichen es uns in vielen Fällen, aus der Untersuchung der ersten und zweiten Ableitung ein Maximum oder ein Minimum zu bestimmen. Wenn wir die Extremwerte einer Funktion $f(x)$ bestimmen wollen, verfahren wir folgendermaßen:

Wir bilden die erste Ableitung $f'(x)$ und untersuchen die Bestimmungsgleichung $f'(x) = 0$ auf reelle Lösungen. Sind keine vorhanden, so hat $f(x)$ keine Extrema. Im anderen Falle bilden wir die zweite Ableitung $f''(x)$; wir setzen die als Lösungen von $f'(x) = 0$ gefundenen x-Werte nacheinander in die zweite Ableitung ein. Ist für einen solchen Wert die zweite Ableitung kleiner als Null, so gehört zu dieser Abszisse ein Maximum; ist sie größer als Null, so gehört zu der Abszisse ein Minimum.

Es kann aber auch bei einer Funktion $f(x)$ der Fall eintreten, daß für einen Wert x_0 sowohl $f'(x_0)$ als auch $f''(x_0)$ gleich Null sind. In diesem Fall können wir mit dem angegebenen Verfahren nicht entscheiden, ob an der Stelle x_0 ein Extremwert vorliegt. Es gibt dann entsprechende Untersuchungsverfahren, deren Behandlung aber über den Stoff der Oberschule hinausgeht. Ein solcher Fall liegt zum Beispiel bei der Funktion $y = x^4$ vor. Untersuchen Sie y' und y'' an der Stelle $x_0 = 0$!

Zusammenfassung:

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an einer Stelle $x = x_0$
1. ein Maximum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist,
2. ein Minimum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist.

Nicht zu entscheiden sind vorläufig diejenigen Sonderfälle, bei denen mit $f'(x) = 0$ zugleich $f''(x) = 0$ wird.

12. Konvexes und konkaves Verhalten einer Kurve. Wendepunkte

a) Konvexes und konkaves Verhalten

Zeichnen wir an die Kurve der Funktion

$$y = f(x) = x^3$$

in einem von Null verschiedenen, sonst aber beliebig gewählten Punkt $(x_0; y_0)$ die Tangente, so kann man eine Umgebung von x_0 derart wählen, daß entweder alle Kurvenpunkte oberhalb oder alle Kurvenpunkte unterhalb der Tangente liegen. Betrachtet man zum Beispiel den Punkt $(+1; +1)$ (vgl. Abb. 19), so liegen alle Kurvenpunkte oberhalb der Tangente, für die gilt $-2 < x < \infty$.

Beweis:

$$y = f(x) = x^3,$$
$$y' = f'(x) = 3x^2.$$

Die Tangente hat also im Punkt (1; 1) die Steigung + 3. Die allgemeine Gleichung der Geraden lautet $y = mx + b$ (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 16); setzen wir, da bereits die betrachtete Funktion $f(x)$ mit y bezeichnet wurde, in der Geradengleichung $\varphi(x)$ für y ein und setzen wir $m = f'(x_0)$ (Anstieg der Tangente), so erhalten wir als Gleichung der Tangente

$$\varphi(x) = 3x + b.$$

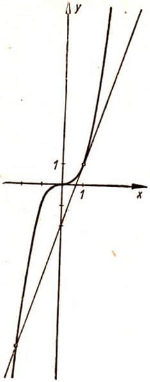

Abb. 19

Das Wertepaar $x_0 = 1$; $y_0 = 1$ muß die Gleichung befriedigen. Für b ergibt sich also die Bedingung

$$1 = 3 \cdot 1 + b.$$

Daraus folgt

$$b = -2.$$

Die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = x^3$ im Punkte (1; 1) lautet also

$$\varphi(x) = 3x - 2.$$

Um festzustellen, ob die Punkte oberhalb oder unterhalb der Tangente liegen, bilden wir die Differenz der Ordinaten $f(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h)$:

$$(1 + h)^3 - [3 \cdot (1 + h) - 2] = h^2(3 + h).$$

Für alle $h \neq 0$ und $h > -3$ ist diese Differenz positiv, das heißt, daß in dieser Umgebung von $x_0 = +1$ alle Punkte der Kurve oberhalb der Tangente liegen.

Führen Sie eine entsprechende Betrachtung an der Stelle $x_0 = -1$ durch!

Wenn in einer passenden Umgebung der Stelle x_0 der Funktion $f(x)$ alle Punkte der Kurve oberhalb der Tangente liegen, so sagt man, die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 von **unten** (gesehen) **konvex** (von oben konkav). Liegen dagegen alle Punkte der Kurve unterhalb der Tangente, so heißt sie dort von **unten konkav** (von oben konvex).

Analytisch drückt sich der Sachverhalt folgendermaßen aus: Die Tangente an die Kurve der Funktion $y = f(x)$ hat die Gleichung $\varphi(x) = mx + b$. Im Punkte x_0 hat die Tangente die Steigung $m = f'(x_0)$. Es gilt also

$$\varphi(x) = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Da die Tangente durch den Kurvenpunkt $(x_0; f(x_0))$ hindurchgeht, ergibt sich

$$\varphi(x_0) = f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Also ist

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

und damit ist die Gleichung der Tangente

$$\varphi(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

oder

$$\varphi(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Wir setzen $x = x_0 + h$ und bilden die Differenz D aus $f(x_0 + h)$ und $\varphi(x_0 + h)$:

$$D = f(x_0 + h) - [f'(x_0) \cdot h + f(x_0)].$$

Ist diese Differenz D für alle dem Betrage nach kleinen, von Null verschiedenen h positiv, so heißt die Funktion von unten konvex oder von oben konkav; ist sie negativ, so heißt die Funktion von unten konkav oder von oben konvex. Gilt sie nur für positive (negative) h, so heißt die Funktion nach rechts (links) hin von unten konvex oder konkav (je nach dem Vorzeichen der Differenz).

Es gilt der folgende Satz: **Existiert in jedem Punkt eines Bereichs die zweite Ableitung der Funktion $y = f(x)$ und ist $y'' = f''(x_0)$ positiv (negativ), so ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 von unten konvex (von unten konkav).**

Der Beweis dieses Satzes kann mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht geführt werden.

Als Spezialfall des Satzes ergibt sich: Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x_{\max}$ von unten konkav, an der Stelle $x_{\min}$ von unten konvex. Vorausgesetzt ist dabei, daß die erste und die zweite Ableitung an diesen Stellen existieren. Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, lassen sich über konvexes beziehungsweise konkaves Verhalten der Kurve ohne weitere Untersuchungen keine Aussagen machen.

b) Wendepunkt. Wendetangente

Wir untersuchen die Funktion $y = x^3 - x$ an der Stelle $x_0 = 0$. Die Ableitungen sind

$$f'(0) = -1$$

und

$$f''(0) = 0.$$

Die Gleichung der Tangente lautet hier

$$\varphi(x) = -x;$$

die Differenz D ergibt sich als

$$f(x) - \varphi(x) = x^3.$$

Diese Differenz ist für $x > 0$ positiv und für $x < 0$ negativ. Daraus erkennen wir, daß für jedes $x < 0$ die Kurve von unten konkav und für jedes $x > 0$ die Kurve von unten konvex ist. Am Punkte mit der Abszisse $x_0 = 0$ **wendet** sich die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere Seite der Tangente. Wir bezeichnen deshalb diesen Punkt als **Wendepunkt** (vgl. Abb. 20).

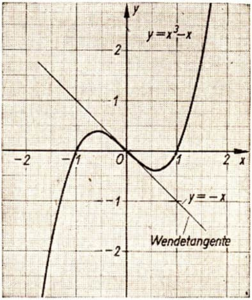

Abb. 20

Allgemein gilt: **Ein Punkt heißt Wendepunkt, wenn von seiner Abszisse x_W aus nach der einen Seite hin die Kurve konkav, nach der anderen Seite hin aber konvex ist. Hat die Funktion $f(x)$ einen Wendepunkt mit der Abszisse x_W, so ist notwendigerweise $f''(x_W) = 0$.**

Beweis:

Angenommen, $f''(x_W)$ wäre verschieden von Null, dann müßte je nach dem Vorzeichen von $f''(x_W)$ die Funktion nach beiden Seiten hin entweder konkav oder konvex sein. Dies widerspricht aber der Definition des Wendepunktes.

Die notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$ ist jedoch nicht hinreichend für die Existenz eines Wendepunktes, wie das Beispiel $y = f(x) = x^4$ zeigt.

Weisen Sie nach, daß die Tangente im Punkte (0; 0) die x-Achse $[\varphi(x) = 0]$ ist! Für die Differenz ergibt sich

$$D = f(x) - \varphi(x) = f(x) = x^4.$$

Sie ist für $x \neq 0$ stets positiv. Die Kurve ist hier konvex von unten, obgleich $f''(0) = 0$ ist.

Als eine weitere Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes gilt $f'''(x_W) \neq 0$. Die beiden Bedingungen

$$f''(x_W) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

sind zusammen hinreichend. Der Beweis dafür kann an dieser Stelle nicht geführt werden.

Es können aber auch Fälle eintreten, bei denen $f'''(x_W) = 0$ ist und dennoch an der Stelle x_W ein Wendepunkt vorliegt. Die Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$ ist also keine notwendige. Ist $f''(x_W) = 0$, so müssen in jedem Falle weitere Untersuchungen angestellt werden, wenn Aussagen getroffen werden sollen. In der Regel untersucht man dritte und höhere Ableitungen (falls diese vorhanden sind) nach entsprechenden Methoden; die Beweise hierzu gehen aber über den Lehrstoff der Oberschule hinaus.

Die Tangente im Wendepunkt heißt **Wendetangente**; sie durchsetzt die Kurve.

Hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_W einen Wendepunkt und ist die erste Ableitung $f'(x_W) = 0$, so hat die Tangente an die Kurve der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_W den Steigungswinkel Null, das heißt, sie verläuft parallel zur x-Achse (horizontal). Einen solchen Wendepunkt nennt man **Horizontalwendepunkt**.

Nach den Betrachtungen, die in den Abschnitten 10, 11 und 12 durchgeführt wurden, läßt sich nunmehr die folgende Zusammenfassung aufstellen:

Bedingungen			Folgerung
$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f(x)$
+	+		Anstieg positiv, von unten konvex; 
+	−		Anstieg positiv, von unten konkav; 
−	+		Anstieg negativ, von unten konvex; 
−	−		Anstieg negativ, von unten konkav; 
0	+		Minimum 
0	−		Maximum 
+	0	$\neq 0$	Anstieg positiv, Wendepunkt 
−	0	$\neq 0$	Anstieg negativ, Wendepunkt 
0	0	$\neq 0$	Horizontalwendepunkt 

Aufgaben

1. Bei den folgenden Funktionen sind Lage und Art der Extremwerte zu bestimmen.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x + 2$

c) $f(x) = 5 - 4x - x^2$ **d)** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 19$

e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ **f)** $f(x) = (x - 1)(2 - x)^2$

Die Funktionen sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen sind graphisch darzustellen.

2. Beweisen Sie, daß eine ganze rationale Funktion zweiten Grades keinen Wendepunkt haben kann! (Anleitung: Was kann man über die n-te Ableitung einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades aussagen?)

3. Beweisen Sie, daß die notwendige Bedingung $f'(x_E) = 0$ für das Vorhandensein eines Extremwertes an der Stelle x_E bei einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades zugleich hinreichend ist!

4. Begründen Sie, daß es genügt, für den Nachweis eines Wendepunktes bei einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades die zweite Ableitung zu untersuchen!

5. Für die folgenden Funktionen sind Art und Lage der Extremwerte sowie die Wendepunkte zu bestimmen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$
c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 10$
d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 11x - 4$
e) $f(x) = x^4 - 32x^2 + 5$
f) $f(x) = 5x^5 - 27x^3$

6. Wo liegen die Wendepunkte der folgenden Funktionen?

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$
b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x + 13$
c) $f(x) = x^3 - \frac{17}{3}x^2 + 6x - \frac{5}{3}$
d) $f(x) = x^6 + \frac{3}{2}x^4 - 78x^2 + 5x - 7$
e) $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{8}{3}x$
f) $f(x) = x^5 - 30x^3 + 5x - 10$

13. Kurvenuntersuchung von ganzen rationalen Funktionen

Während bisher die zu untersuchenden Funktionen nur nach Aufstellung einer Wertetabelle gezeichnet und damit in ihrem Verlauf verfolgt werden konnten, sind wir durch Heranziehung der Ableitungen jetzt in der Lage, die Untersuchungen der Kurve wesentlich zu vereinfachen und dabei exakte Aussagen über ihr Verhalten zu treffen.

Zu einer Kurvenuntersuchung gehören:

1. die Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen, das heißt die Feststellung der Schnittpunkte der Kurve mit der y-Achse und, wenn möglich, die Feststellung der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion);
2. das Verhalten im Unendlichen, das heißt die Untersuchung, ob sich y für absolut unbegrenzt wachsende x-Werte Grenzwerten nähert, beziehungsweise ob sich wenigstens Aussagen über das Verhalten des Vorzeichens von y treffen lassen;
3. die Bestimmung der ausgezeichneten Punkte, das heißt der Extrema und der Wendepunkte;
4. allgemeine Aussagen über den Kurvenverlauf, das heißt positiven oder negativen Anstieg, konvexes und konkaves Verhalten der Kurve.

1. Beispiel: Untersuchung der Funktion

$$y = f(x) = (x + 3)(x^2 - 9x + 12).$$

Diese ganze rationale Funktion bringen wir in die Form

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 36.$$

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Wenn der Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmt werden soll, ist $x = 0$ zu setzen. Es ergibt sich für y der Wert $+ 36$. Die Kurve schneidet die y-Achse bei $y = + 36$.

Zur Untersuchung, ob die Kurve Schnittpunkte mit der x-Achse hat und wo diese liegen, muß festgestellt werden, ob Abszissenwerte $x_1, x_2, \ldots$ existieren, für die sich der Funktionswert $y = 0$ ergibt. Wir bilden die Bestimmungsgleichung $(x + 3)(x^2 - 9x + 12) = 0$, deren Lösungen x_1, x_2 und x_3 die Abszissen der Kurvenschnittpunkte mit der x-Achse angeben.

Die zwei Gleichungen (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 33)

$$x + 3 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 9x + 12 = 0$$

haben die Lösungen

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \approx 7{,}37,$$

$$x_3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \approx 1{,}63.$$

Die Kurve der gegebenen Funktion schneidet die x-Achse in

$$x_1 = -3, \quad x_2 \approx 7{,}37 \quad \text{und} \quad x_3 \approx 1{,}63.$$

Die Schnittpunkte einer Kurve mit der x-Achse heißen die Nullstellen der Funktion. Sie sind Lösungen der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$.

b) Verhalten im Unendlichen

Um das Verhalten der Funktion im Unendlichen zu untersuchen, schätzen wir sie für absolut große x-Werte ab. Dazu ist es zweckmäßig, die höchste Potenz von x auszuklammern:

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right).$$

Wir lassen x zunächst immer größere Werte annehmen ($x \to +\infty$). Damit wächst auch x^3 unbegrenzt. Wir verwenden auch dafür das Zeichen lim und schreiben:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$$

Für den zweiten Faktor ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right) = 1,$$

woraus hervorgeht, daß die Funktion $f(x)$ für $x \to +\infty$ dasselbe Verhalten zeigt, wie die Funktion x^3 für $x \to +\infty$, das heißt $f(x)$ wächst mit $x \to +\infty$ über alle Grenzen:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right) = +\infty.$$

Wir betrachten nunmehr die Funktion $f(x)$ für $x \to -\infty$. Nimmt x negative Werte von beliebig großem Absolutbetrage an, so erhalten wir entsprechend

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right) = 1$$

und damit

$$\lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right) = -\infty.$$

Das Bild der Funktion liegt für $x \to -\infty$ im dritten Quadranten und für $x \to +\infty$ im ersten Quadranten.

c) Bestimmung der ausgezeichneten Punkte

Für die Bestimmung der Extrema werden die erste und die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ gebildet:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15; \qquad f''(x) = 6x - 12.$$

Für Extrema muß $f'(x_E) = 0$ sein. Aus der Bestimmungsgleichung (beachten Sie, daß x nunmehr keine Variable, sondern eine unbekannte, aber bestimmte Größe ist!)

$$3x^2 - 12x - 15 = 0$$

erhält man nach Division durch 3

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_4 = 5$ und $x_5 = -1$ mit den zugehörigen Ordinaten $y_4 = f(x_4) = -64$ und $y_5 = f(x_5) = 44$, die die Koordinaten der Extrema sind, wenn $f''(x_E) \neq 0$ ist.

Die Untersuchung der zweiten Ableitung $f''(x)$ an den Stellen x_4 und x_5 kann die Entscheidung geben, ob ein Extremwert vorliegt und von welcher Art dieser ist. Es ist $f''(x_4) = 30 - 12 = 18 > 0$; also gehört x_4 zu einem Minimum der Funktion $f(x)$; weiter ist $f''(x_5) = -6 - 12 = -18 < 0$; also gehört x_5 zu einem Maximum der Funktion $f(x)$. Die Funktion $f(x)$ hat demnach im Punkt $(5; -64)$ ein Minimum und im Punkt $(-1; 44)$ ein Maximum.

Wenn an der Stelle x_6 ein Wendepunkt vorhanden ist, muß (vgl. S. 33) $f''(x_6) = 0$ sein. Aus der Bestimmungsgleichung $6x - 12 = 0$ ergibt sich $x_6 = 2$ mit der zugehörigen Ordinate $y_6 = -10$. Dieser Punkt ist Wendepunkt, wenn $f'''(x_6) \neq 0$ ist. Wir untersuchen daher, ob auch die hinreichende Bedingung $f'''(x_6) \neq 0$ erfüllt ist:

$$f'''(x) = 6, \qquad f'''(x_6) = 6 \neq 0.$$

Also ist der Punkt $(2; -10)$ Wendepunkt der Funktion. Die Wendetangente hat die Steigung $f'(x_6) = -27$.

d) Anstieg, konvexes und konkaves Verhalten der Kurve

Außer den ausgezeichneten Punkten geben die Untersuchungen über den Anstieg sowie über konvexes und konkaves Verhalten der Kurve die Möglichkeit, den allgemeinen Verlauf der Funktionskurve zu erkennen. Dazu betrachten wir wieder die erste und die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$. Wir erkennen:

Für $-\infty < x < -1$ ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$, das heißt, der Anstieg ist positiv, die Kurve ist von unten konkav;

für $-1 < x < +2$ ist $f'(x) < 0$ und $f''(x) < 0$, das heißt, der Anstieg ist negativ, die Kurve ist von unten konkav;

für $+2 < x < +5$ ist $f'(x) < 0$ und $f''(x) > 0$, das heißt, der Anstieg ist negativ, die Kurve ist von unten konvex;

für $+5 < x < +\infty$ ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$, das heißt, der Anstieg ist positiv, die Kurve ist von unten konvex.

Die gewonnenen Erkenntnisse sind in der Abbildung 21 verwertet; sie lassen den ungefähren Kurvenverlauf erkennen, ohne daß die Kurve punktweise mit Hilfe der Wertetabelle gezeichnet wurde.

Bei den meisten Kurven wird dieses Untersuchungsverfahren ausreichen. Soll eine Kurve an gewissen Stellen genauer betrachtet werden, so muß die Wertetabelle — manchmal sogar mit Interpolation, zum Beispiel bei genauer Bestimmung der Nullstellen — zusätzlich herangezogen werden.

Weitere Ausführungen zur Bestimmung von Nullstellen

Da ganze rationale Funktionen sowohl in der Form einer algebraischen Summe als auch in der Form eines endlichen Produktes gegeben sein können, sind auch zwei Wege für ihre Nullstellenbestimmung vorhanden.

Wenn ganze rationale Funktionen in ihrer additiven Form auftreten, ist die Nullstellenbestimmung mit den bisherigen Hilfsmitteln im allgemeinen nur möglich, wenn die Funktion und damit die Bestimmungsgleichung den 2. Grad nicht übersteigt. Aus der Lehre der quadratischen Gleichungen ist bekannt, daß zum Beispiel die Gleichung $x^2 - 2x - 8 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ auch in der Form $(x - 4)(x + 2) = 0$ geschrieben werden kann. Entsprechend kann eine Gleichung dritten Grades mit den Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = -3$ und $x_3 = -1$ in der Form

$$(x - 2)(x + 3)(x + 1) = 0$$

oder in der Form

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

geschrieben werden. Es läßt sich zeigen, daß der Wurzelsatz von Vieta (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 46 u. 47) erweiterungsfähig ist und daß im besonderen das absolute Glied der kubischen Gleichung das negative Produkt der drei Lösungen ist. Dabei ist zu beachten, daß der Koeffizient von x^3 in der Normalform der kubischen Gleichung immer gleich 1 ist.

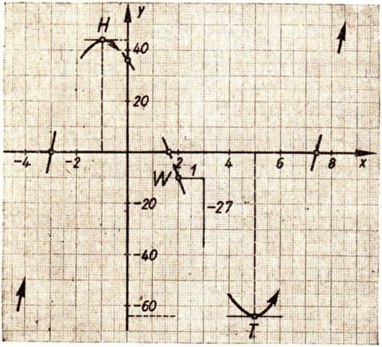

Abb. 21

Wird der Satz von Vieta auf Gleichungen n-ten Grades ausgedehnt, so läßt sich beweisen, daß das absolute Glied der Gleichung n-ten Grades das Produkt der n Lösungen der Gleichung ist und das Vorzeichen $(-1)^n$ besitzt. Dabei muß wieder beachtet werden, daß der Koeffizient von x^n in der Normalform einer Gleichung n-ten Grades immer gleich 1 ist.

Prüfen Sie den Satz von Vieta für $n = 4; 5; \ldots$ nach!

Sind die Lösungen einer Gleichung ganzzahlig, so sind diese in den Faktoren des absoluten Gliedes enthalten. Um solche Lösungen festzustellen, zerlegt man das absolute Glied in Faktoren und prüft nach, welche Faktoren die gegebene Gleichung befriedigen. Wenn x_1 ein solcher die Gleichung befriedigender Faktor des absoluten Gliedes ist, dividiert man die Gleichung durch $(x - x_1)$ und erhält eine neue, deren Grad um 1 niedriger ist als der Grad der gegebenen Gleichung. Wenn alle Lösungen ganzzahlig sind, ist es durch Wiederholung dieses Verfahrens möglich, alle Wurzeln der Gleichung zu gewinnen und diese dann in der Form $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$ zu schreiben.

Wenn zum Beispiel die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$$

bestimmt werden sollen, das heißt die Gleichung

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

zu lösen ist, liefert die Zerlegung des absoluten Gliedes -6 die ganzzahligen Faktoren ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Durch Probieren stellen wir fest, daß zum Beispiel $x_1 = -1$ die gegebene Gleichung befriedigt, die wir deshalb durch den Wurzelfaktor $x - x_1 = x + 1$ dividieren:

$$(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6) : (x + 1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Die Ausgangsgleichung können wir daher schreiben als

$$(x + 1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0.$$

Durch Fortsetzen des Verfahrens gewinnen wir aus der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

die weitere Wurzel $x_2 = 3$ und erhalten nach der Division

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3) = x^2 - 3x + 2.$$

Die kubische Gleichung läßt sich schreiben als

$$(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

und die Ausgangsgleichung als

$$(x + 1)(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Die restliche quadratische Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen $x_3 = +2$ und $x_4 = +1$. Es läßt sich somit die gegebene Gleichung in der Form

$$(x + 1)(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 0$$

und die zugehörige Funktion als

$$f(x) = (x + 1)(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

schreiben.

2. Beispiel: Untersuchung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x.$$

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Für $x = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y = 0$. Für $y = 0$ ergeben sich die Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x = 0 \quad \text{oder} \quad x\left(\frac{x^3}{4} - \frac{4x^2}{3} - \frac{3x}{2} + 18\right) = 0.$$

Hieraus folgt für $x = 0$ die Lösung $x_1 = 0$ und für $\frac{x^3}{4} - \frac{4x^2}{3} - \frac{3x}{2} + 18 = 0$ die Nullstelle x_2, für die gilt $-4 < x_2 < -3$, wie sich nach Aufstellung der Wertetabelle ergibt. Die beiden anderen Lösungen der kubischen Gleichung sind keine reellen Zahlen.

Die Funktion hat Nullstellen bei $x_1 = 0$ und bei x_2 mit $-4 < x_2 < -3$ und schneidet die y-Achse bei $y = 0$.

b) Verhalten im Unendlichen

Zur Untersuchung des Verhaltens der Funktion im Unendlichen bilden wir

$$f(x) = x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{18}{x^3}\right)$$

und erhalten

$$1.\ \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3x}-\frac{3}{2x^2}+\frac{18}{x^3}\right)=\frac{1}{4}$$

und folglich

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

$$2.\ \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3x}-\frac{3}{2x^2}+\frac{18}{x^3}\right)=\frac{1}{4}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Die Funktion nimmt für absolut sehr große (positive oder negative) x-Werte sehr große positive Werte an. Das Bild der Funktion $f(x)$ liegt für negative Werte mit sehr großen Absolutbeträgen von x im zweiten Quadranten und für sehr große positive Werte von x im ersten Quadranten.

c) Extrema und Wendepunkte

Die erste, zweite und dritte Ableitung sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 4x^2 - 3x + 18,\\ f''(x) &= 3x^2 - 8x - 3,\\ f'''(x) &= 6x - 8. \end{aligned}$$

Um Extrema zu finden, untersuchen wir zunächst die erste Ableitung:

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0.$$

Durch Probieren mit den Faktoren des absoluten Gliedes ergibt sich die Lösung $x_3 = -2$.

Die kubische Gleichung läßt sich jetzt, wie man sich überzeugen kann, schreiben als

$$(x+2)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

oder

$$(x+2)(x-3)^2 = 0.$$

Es ergeben sich also die Lösungen

$$x_3 = -2, \qquad x_4 = 3, \qquad x_5 = 3$$

mit den dazugehörigen Ordinatenwerten

$$y_3 = -27\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad y_4 = y_5 = 24\frac{3}{4}.$$

Setzen wir die Abszissenwerte in die zweite Ableitung ein, so ist

$$f''(x_3) = 12 + 16 - 3 = 25 > 0,$$

also gehört x_3 zu einem Minimum. Die Funktion $f(x)$ hat ein Minimum im Punkt $\left(-2;\ -27\frac{1}{3}\right)$.

Ferner ist $f''(x_{4;5}) = 27 - 24 - 3 = 0$. Ob an der Stelle $x_{4;5}$ ein Extremwert vorliegt, kann zunächst nicht entschieden werden, da zwar die Bedingung $f'(x_E) = 0$, aber nicht die andere Bedingung $f''(x_E) \neq 0$ erfüllt ist. Da für $x_{4;5}$ die zweite Ableitung $f''(x_{4;5}) = 0$ ist, ist eine Bedingung des Wendepunktes erfüllt. Durch Untersuchung der dritten Ableitung (vgl. S. 36) stellen wir fest, daß $x_{4;5}$ die Abszisse eines Horizontalwendepunktes ist, da $f'(x_{4;5}) = 0$ und $f'''(x_{4;5}) = 10 \neq 0$ ist. Die Wendetangente ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt (3; 24,75). Sie hat den Anstieg

$$f'(x_{4;5}) = 0.$$

Zur Feststellung, ob die Kurve noch weitere Wendepunkte besitzt, untersuchen wir die Bedingung $f''(x_W) = 0$. Aus $3x^2 - 8x - 3 = 0$ ergibt sich $x_6 = 3$ und $x_7 = -\frac{1}{3}$ mit $y_7 = -6\frac{37}{324}$.

Der erste Wendepunkt W_1 bei $x_6 = x_{4;5} = 3$ ist bereits bekannt. Auch an der Stelle x_7 liegt ein Wendepunkt vor, da $f'''(x_7) = -10 \neq 0$ ist. Der zweite Wendepunkt W_2 hat die Koordinaten $\left(-\frac{1}{3};\ -6\frac{37}{324}\right)$; die Wendetangente hat den Anstieg $f'(x_7) = +18\frac{14}{27}$.

d) Anstieg, konvexes und konkaves Verhalten der Kurve

Für $-\infty < x < -2$ ist $f'(x) < 0$ und $f''(x) > 0$, das heißt, der Anstieg ist negativ, die Kurve ist von unten konvex;

für $-2 < x < -\frac{1}{3}$ ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$, das heißt, der Anstieg ist positiv, die Kurve ist von unten konvex;

für $-\frac{1}{3} < x < 3$ ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$, das heißt, der Anstieg ist positiv, die Kurve ist von unten konkav;

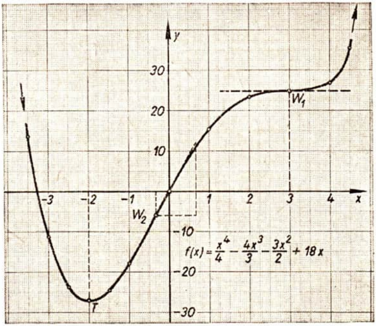

Abb. 22

für $3 < x < +\infty$ ist $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$, das heißt, der Anstieg ist positiv, die Kurve ist von unten konvex.

Die gewonnenen Erkenntnisse stimmen mit dem Kurvenbild überein, das nach der Wertetabelle gezeichnet wurde (vgl. Abb. 22).

Aufgaben

Untersuchen Sie den Kurvenverlauf der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \frac{(x-4)^2}{8}$

b) $f(x) = 4 - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $f(x) = -x^3 + 9x + 1$

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$

f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$

g) $f(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

h) $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

i) $f(x) = \frac{x^3}{4} - x^2 - 4x + 16$

14. Extremwertaufgaben

Vorbemerkung: Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich stets darum, absolute Extremwerte zu finden. Im allgemeinen fallen diese innerhalb der durch die Aufgabe gegebenen Definitionsbereiche mit den relativen Extremwerten zusammen. Wir werden daher stets die relativen Extrema bestimmen und die gefundenen Ergebnisse an Hand der Aufgabe überprüfen. An sich müßte stets der Nachweis geführt werden, daß in dem gegebenen Definitionsbereich keine größeren Funktionswerte als beim ermittelten Maximum beziehungsweise keine kleineren Funktionswerte als beim ermittelten Minimum auftreten. Bei den hier gestellten Aufgaben kann auf diesen Nachweis verzichtet werden, da bei ihnen im Definitionsbereich immer der relative Extremwert zugleich auch der absolute Extremwert ist.

1. Beispiel:

Aus einem rechteckigen Blechstück (16 cm lang und 10 cm breit) soll ein oben offener Kasten hergestellt werden, indem an den Ecken je ein Quadrat herausgeschnitten wird und die Ränder aufgebogen werden. Welche Maße muß der Kasten erhalten, damit sein Rauminhalt möglichst groß wird?

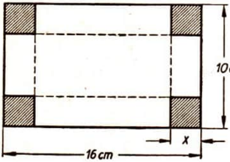

Abb. 23

Lösung:

Da die Maße und damit der Inhalt des Kastens von der Größe der abgeschnittenen Quadrate (Abb. 23) abhängig sind, führen wir die Länge der Quadratseite als Veränderliche x (gemessen in cm) ein. Der Inhalt des Kastens beträgt dann in cm^3

$$V = (16 - 2x)(10 - 2x)\,x.$$

Für die Veränderliche x unserer Aufgabe gilt der Definitionsbereich $0 < x < 5$, weil die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate größer als 0 und kleiner als $\frac{10}{2} = 5$ sein muß. Da in dem Ausdruck für V außer der Variablen x nur Konstanten auftreten, ist V eine Funktion von x allein:

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x \qquad (0 < x < 5).$$

Hiermit ist die Aufgabe, einen Kasten mit größtmöglichem Volumen herzustellen, auf das mathematische Problem zurückgeführt, von der Funktion $V(x)$ das Maximum zu bestimmen. Wir untersuchen, ob die Funktion im Definitionsbereich ein Maximum hat.

Wird $V(x)$ geometrisch dargestellt (Abb. 24; stellen Sie die Wertetabelle auf!), so haben wir auf der Kurve die Punkte zu suchen, in denen die Funktion relativ größte Werte besitzt, das heißt die Tangente an der Kurve waagerecht liegt. Da der Anstieg der Kurve und ihrer Tangente durch $V'(x)$ bestimmt ist, müssen wir die Punkte suchen, an denen der Anstieg, das heißt $V'(x)$, den Wert Null hat.

Für das Maximum der Funktion $V(x)$ sind die Bedingungen (vgl. S. 31) hinreichend:

$$V'(x) = 0 \quad \text{und} \quad V''(x) < 0.$$

Wir bestimmen:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160,$$
$$V''(x) = 24x - 104.$$

$V'(x)$ ist eine Funktion der Veränderlichen x. Aus ihr sollen die Abszissenwerte der Extrema bestimmt werden, so daß die Bedingung $V'(x_E) = 0$ erfüllt wird, das heißt, es ist die Bestimmungsgleichung $12x^2 - 104x + 160 = 0$ zu lösen.

Die Gleichung hat die Lösungen $x_1 = \frac{20}{3}$ und $x_2 = 2$.

Die Lösung x_1 ist hier sinnlos; x_1 gehört nicht dem oben festgestellten Definitionsbereich an und hat deshalb für unser Problem keine praktische Bedeutung. Für die weitere Untersuchung kommt also nur der Wert $x_2 = 2$ in Frage.

Um festzustellen, ob ein Maximum vorliegt, bilden wir

$$V''(x_2) = 24 \cdot 2 - 104 = -56 < 0.$$

Es zeigt sich, daß wir für $x_2 = 2$ das Maximum der Funktion $V(x)$ im Definitionsbereich erhalten haben.

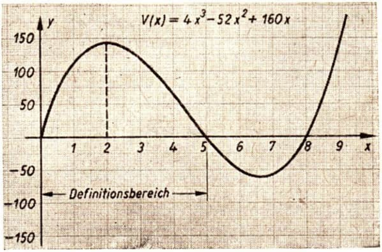

Abb. 24

Der Sinn der Vorbemerkung wird deutlich, wenn man einen anderen Definitionsbereich wählt und die Funktion an der Stelle $x_0 = 10$ untersucht. Der zugehörige Ordinatenwert ist $y = 400$.

Zur Herstellung des Kastens muß also an jeder Ecke des Bleches ein Quadrat von 2 cm Seitenlänge herausgeschnitten werden. Der Kasten hat demnach die Maße
12 cm $\times$ 6 cm $\times$ 2 cm und das größte Volumen $V = 12 \cdot 6 \cdot 2\ \text{cm}^3 = 144\ \text{cm}^3$.

2. Beispiel:

Einer Halbkugel vom Radius R ist der gerade Kreiskegel mit dem größten Rauminhalt so einzubeschreiben, daß die Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt und die Symmetrieachse des Kegels mit der der Halbkugel übereinstimmt (Abb. 25).

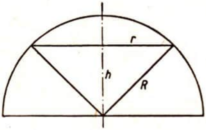

Abb. 25

Lösung:

Die Formel des Kegelvolumens ist $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, wenn r der Grundkreisradius und h die Höhe des Kegels ist. Dieser Ausdruck enthält zunächst die beiden unabhängigen Variablen r und h, und zwar r quadratisch, h dagegen nur linear. Aus Abbildung 25 ist ersichtlich, daß mit jeder Änderung von r eine Änderung von h verbunden ist und umgekehrt. Die Beziehung zwischen beiden Größen ist durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck gegeben:

$$r^2 + h^2 = R^2.$$

Um einen Wurzelausdruck zu vermeiden, drücken wir r als Funktion von h aus und setzen $r^2 = R^2 - h^2$ in die Formel des Kegelvolumens ein. Damit erhalten wir für das Volumen V, das in diesem Fall nur noch von der Veränderlichen h allein abhängt und somit eine Funktion von h ist,

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2) \cdot h = \frac{\pi}{3} R^2 h - \frac{\pi}{3} h^3.$$

Der Definitionsbereich der Veränderlichen h ist $0 < h < R$.

Durch Differenzieren erhalten wir

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} R^2 - \pi h^2,$$
$$V''(h) = -2\pi h.$$

Eine Bedingung für das Extremum ist $V'(h) = 0$; folglich wird

$$\frac{\pi}{3} R^2 - \pi h^2 = 0,$$

also

$$h^2 = \frac{R^2}{3} \quad \text{und} \quad h_{1;\,2} = \pm \frac{R}{3} \sqrt{3}.$$

Die Lösung $h_2 = -\frac{R}{3}\sqrt{3}$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches und kommt für unser Problem nicht in Frage.

Um festzustellen, ob $h_1 = +\frac{R}{3}\sqrt{3}$ die gesuchte Lösung ist, prüfen wir die zweite Ableitung:

$$V''(h_1) = -2\pi \cdot \frac{R}{3}\sqrt{3} < 0.$$

Also liegt für h_1 ein Maximum vor.

Der einbeschriebene Kegel hat das größte Volumen $\frac{2}{27}\pi R^3 \sqrt{3}$, wenn er den Grundkreisradius $r = \frac{R}{3}\sqrt{6}$ und die Höhe $h = \frac{R}{3}\sqrt{3}$ besitzt.

Aufgaben

1. Die Zahl n ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß das Produkt der beiden Zahlen möglichst groß wird.
a) $n = 40$; **b)** $n = 20$; **c)** $n = 64$; **d)** $n = a$

2. Es ist die Zahl **a)** 36; **b)** 25; **c)** 49; **d)** a
so in zwei positive Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt möglichst groß ist.

3. Es ist die Zahl 7 derart in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe aus den dritten Potenzen der Summanden ein Minimum ist!

4. Zerlegen Sie die Zahl **a)** 24; **b)** 50; **c)** a so in zwei positive Summanden, daß die Summe der Quadrate dieser Summanden einen kleinsten Wert hat!

5. Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang den größten Inhalt?

6. Welches unter allen Rechtecken mit dem gleichen Umfang u hat die kürzeste Diagonale?
Anleitung: Wählen Sie das Quadrat der Diagonale als abhängige Variable!

7. Die größere Seite a eines Rechtecks ist um den gleichen Betrag zu verkürzen, um den die kürzere Seite b zu verlängern ist. Wie groß ist die Verkürzung von a zu nehmen, damit der Inhalt des Rechtecks einen Höchstwert annimmt?

8. Auf einem Bauernhof soll ein rechteckiger Hühnerhof mit Drahtgeflecht so eingezäunt werden, daß er
a) frei steht, b) mit einer Seite an eine Mauer angrenzt, c) mit zwei Seiten an zwei rechtwinklig aufeinanderstoßende Mauern angrenzt. Welche Fläche kann man günstigenfalls abgrenzen, wenn 100 m Drahtgeflecht zur Verfügung stehen?

9. Einem spitzwinkligen Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h_a wird ein auf a stehendes Rechteck einbeschrieben. Wie groß ist die Höhe des Rechtecks zu nehmen, damit die Rechteckfläche am größten wird?
Anleitung: Stellen Sie mit Hilfe des Strahlensatzes die eine Rechteckseite als Funktion der anderen dar!

10. Es ist das einem Kreis einbeschriebene Rechteck zu bestimmen, das den größten Inhalt hat. *Anleitung:* Wählen Sie J^2 als abhängige Variable!

11. Einem Halbkreis ist das Rechteck mit dem größten Inhalt J einzubeschreiben! *Anleitung:* Eine Rechteckseite liegt auf dem Halbkreisdurchmesser.

12. Es ist nachzuweisen, daß das gleichseitige Dreieck unter allen möglichen gleichschenkligen Dreiecken mit dem gegebenen Umfang U den größten Flächeninhalt hat.

13. Bestimmen Sie unter allen Quadraten, die in ein gegebenes Quadrat einbeschrieben werden können, das mit dem kleinsten Inhalt!

14. Aus einem 72 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders von möglichst großem Inhalt hergestellt werden, bei welchem
   a) die eine Kante doppelt so groß ist wie eine andere,
   b) die eine Kante um 2 cm größer ist als eine andere.

15. Einer geraden quadratischen Pyramide (Grundkante $a = 10$ cm, Höhe $h = 12$ cm) soll ein gerades quadratisches Prisma von möglichst großer Oberfläche einbeschrieben werden.

16. Die Oberfläche eines Quaders mit quadratischer Grundfläche sei $O = 600\ \text{cm}^2$. Welche Maße müssen die Kanten haben, wenn das Volumen V ein Maximum sein soll?

17. Die Summe aus Grund- und Mantelfläche eines (oben offenen) Zylinders betrage $1000\ \text{cm}^2$. Wie groß sind bei maximalem Volumen Radius und Höhe des Zylinders?

18. Von allen Zylindern, die sich einem Kegel vom Radius $r = 12$ cm und der Höhe $h = 36$ cm einbeschreiben lassen, soll der mit dem größten Volumen bestimmt werden.

19. Aus einem Holzstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional der Breite b und dem Quadrat der Höhe h, also $T = c\,b\,h^2$ (c ist eine Materialkonstante).

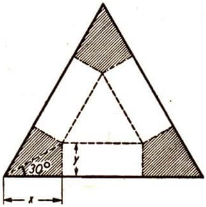

Abb. 26

20. Von einem gleichseitigen Dreieck sollen die in der Abbildung 26 schraffierten Eckflächen abgeschnitten werden. Das durch Aufklappen der überstehenden Rechtecke entstehende gerade Prisma soll den maximalen Rauminhalt erhalten.

15. Differentiale und Differentialquotient

Auf der Kurve der Funktion $y = f(x)$ liege der Punkt $P(x; y)$. Ein weiterer Punkt P_1 der Kurve habe die Abszisse $x + \Delta x$; ihr ist die Ordinate $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ zugeordnet. Dabei ist Δx in bekannter Weise (vgl. Abb. 27) eine von Null verschiedene Größe, die jeden beliebigen, von der Abszisse x unabhängigen Wert annehmen kann. Die Abbildung 27 zeigt, daß Δx die Ankathete des **Sekantendreiecks** und Δy die Gegenkathete oder der Zuwachs der Kurvenordinate ist, so daß $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \sigma$ den Anstieg der Sekante angibt. Nach Durchführung des Grenzüberganges erhalten wir in $\operatorname{tg} \tau = f'(x)$, der ersten Ableitung der Funktion $f(x)$, die Richtung der im Punkte P an die Kurve gelegten Tangente. Schneidet diese Tangente die Ordinatenlinie des Punktes P_1 in Q, so entsteht das **Tangentendreieck** PQR. Ihm entnehmen wir die Beziehung $\operatorname{tg} \tau = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{\Delta x}$.

Die Gegenkathete QR bezeichnen wir mit dy (sprich: de ypsilon) und nennen sie das **Differential** von $f(x)$. Demnach ergibt sich

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad dy = \operatorname{tg}\tau \cdot \Delta x.$$

Offensichtlich ist dy sowohl von der Abszisse x des Tangentenberührungspunktes als auch vom Abszissenzuwachs Δx abhängig. Da $\operatorname{tg}\tau = f'(x)$ ist, folgt auch

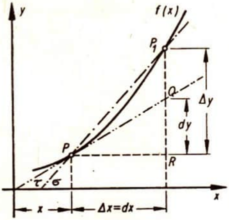

Abb. 27

$$f'(x) = \frac{dy}{\Delta x} \quad \text{und} \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Für die Funktion $y = x$ (Abb. 28) hat die Ableitung den Wert $y' = 1$. Ihr Differential dy ist daher $dy = 1 \cdot \Delta x$. Da $y = x$ ist, kann man für dy auch dx setzen und erhält für die Gegenkathete im Tangentendreieck das Differential

$$dx = 1 \cdot \Delta x.$$

Das Größenverhältnis zwischen der Gegenkathete dy der allgemeinen Funktion $y = f(x)$,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x,$$

und der Gegenkathete dx der Funktion $y = x$,

$$dx = 1 \cdot \Delta x,$$

ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{1 \cdot \Delta x} = f'(x),$$

wenn bei beiden Funktionen dasselbe Δx gewählt wird.

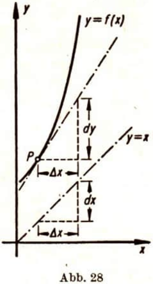

Abb. 28

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ ist also das Verhältnis zwischen der Gegenkathete im Tangentendreieck der Funktion $y = f(x)$ und der Gegenkathete im Tangentendreieck der Vergleichsfunktion $y = x$. Dabei sind beide Funktionen an derselben Abszisse x betrachtet worden; die Abszissenänderung Δx ist ebenfalls in beiden Fällen dieselbe (vgl. Abb. 28). Es ist also das Differential dy der Funktion $y = f(x)$, kürzer $df(x)$, das „$f'(x)$-fache" des Differentials dx der Funktion $y = x$:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Da nun Δx gleich dx ist, kann im Tangentendreieck der Funktion $y = f(x)$ die Strecke Δx durch das Differential dx der Funktion $y = x$ ersetzt werden. Damit ist die Ableitung $f'(x)$ das Verhältnis der Differentiale dy und dx:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Mit gleichem Recht kann auch in der Abbildung 27 die Bezeichnung Δx durch dx ersetzt werden, und es gilt wieder:

$$dy = f'(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Das Differential dy bezeichnet also den Zuwachs, den die Tangentenordinate erfährt, wenn die Variable x um dx vermehrt wird. Das Differential dy hängt also sowohl von der Abszisse x des Tangentenberührungspunktes als auch vom Abszissenzuwachs dx ab.

Bei den Begriffen der Differentiale ist zu beachten:

1. Das Differential dx ist eine beliebig veränderliche Größe.
2. Die Änderung der Kurvenordinate Δy ist im allgemeinen von der Änderung der Tangentenordinate dy verschieden. Beide hängen von der Kurvenstelle, das heißt von der Abszisse x, und von der Änderung der Abszisse $\Delta x = dx$ ab.

An einem Beispiel soll das verschiedene Verhalten von Δy und dy gezeigt werden: Für einige Werte $\Delta x = dx$ berechnen wir bei der Funktion $f(x) = x^2$ an dem Punkt mit der Abszisse $x = 1$, wo $f'(x) = 2$ ist, die Zunahmen der Kurven- und Tangentenordinaten und stellen sie in nachfolgender Tabelle zusammen.

$\Delta x = dx$	Zuwachs der Kurvenordinate $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	Zuwachs der Tangentenordinate $dy = f'(x)\,dx$
10	120	20
1	3	2
0,1	0,21	0,2
0,01	0,0201	0,02
0,001	0,002001	0,002

Wir erkennen: Je kleiner $\Delta x = dx$ gewählt wird, desto geringere Unterschiede bestehen zwischen Δy und dy.

Anwendung:

Beim Messen von Strecken, Winkeln, Temperaturen, elektrischen Größen usw. treten selbst bei größter Sorgfalt unvermeidbare Meß- und Ablesefehler auf. An Stelle eines exakten Wertes x erhält man einen mit einem Fehler Δx behafteten Wert $x + \Delta x$ (Δx positiv oder negativ). Im allgemeinen kann man Schranken angeben, innerhalb deren die Meßwerte liegen müssen.

In den Naturwissenschaften und in der Technik werden aus den beobachteten Werten meist andere Größen errechnet, die dann ebenfalls durch die Fehler mehr oder weniger stark beeinflußt sind. Die berechneten Größen y sind also von den gemessenen Werten x abhängig, das heißt, y ist eine Funktion von x, also $y = f(x)$. An Stelle der wirklichen Größen y werden sich die fehlerhaften Größen $y + \Delta y$ ergeben. Es besteht die Beziehung $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Man nennt Δx und Δy die **absoluten Fehler.** Den absoluten Fehler Δy kann man berechnen aus $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; er entspricht daher dem Ordinatenzuwachs der Funktion.

Bei der Messung der Kantenlänge eines Würfels ergebe sich beispielsweise $x = 5$ cm. Die Messung sei mit einem Fehler von $\Delta x = \pm\, 0{,}01$ cm behaftet. Um den absoluten Fehler für die Größe des Rauminhaltes zu gewinnen, berechnen wir $\Delta y = (x \pm 0{,}01)^3 - x^3$. Für $x = 5$ cm ergibt sich demnach der absolute Fehler

$$\Delta y = +\,0{,}751501 \text{ cm}^3 \quad \text{oder} \quad \Delta y = -\,0{,}748501 \text{ cm}^3.$$

Für die Berechnung des Volumens genügt es in diesem Fall, den Zahlenwert bis zur zweiten Dezimale genau zu bestimmen; wir runden also

$$\Delta y \approx \pm\, 0{,}75 \text{ cm}^3.$$

Da bei guten Messungen die Fehler Δx gegenüber den Meßwerten x klein bleiben, können — wie oben geschehen — die Potenzen von Δx vernachlässigt werden.

Nach der Definition der Ableitung ist $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Daher unterscheidet sich $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ von $f'(x)$ beliebig wenig, wenn man Δx hinreichend klein wählt. Also schreiben wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{oder} \quad \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx = dy.$$

Geometrisch bedeutet dies den Übergang vom Zuwachs Δy der Kurvenordinate zum Zuwachs dy der Tangentenordinate. Es empfiehlt sich daher, zur Vereinfachung der Fehlerrechnung im allgemeinen den absoluten Fehler Δy durch $dy = f'(x)\,dx$ zu ersetzen. Wir wenden dies auf unser Beispiel an:

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad dy = 3x^2\,dx \qquad \text{mit } dx = \pm\,0{,}01.$$

Wir erhalten demnach $dy = \pm\,0{,}75$.

In unserem Beispiel stimmt der Wert für dy mit dem gerundeten Wert für Δy überein.

Das Verhältnis absoluter Fehler Δy zu berechneter Größe y (falls $y \neq 0$ ist) bezeichnet man als **relativen Fehler,** den man häufig in Prozent angibt; auch hier gilt

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

In unserem Beispiel ist der relative Fehler

$$\frac{dy}{y} = \frac{\pm\,0{,}75}{125} = \pm\,0{,}006, \text{ das heißt } \pm\,0{,}6\%.$$

Wir haben in Abschnitt 4 gelernt: Der Grenzübergang $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ führt vom Anstieg der Sekante zum Anstieg der Tangente und ergibt die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Jetzt haben wir festgestellt: Der Anstieg der Tangente ist das Verhältnis der Differentiale dy und dx, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$. Dabei ist die Größe der Differentiale ohne Bedeutung, da ihr Verhältnis wie bei allen ähnlichen Dreiecken immer das gleiche bleibt:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Somit geben der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ dasselbe an, nämlich den Anstieg der Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkt.

Es gilt also:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Diese Gleichung ist die Definitionsgleichung von Leibniz. Er gab dem Grenzwert des Sekantenanstiegs den Namen **Differentialquotient,** schrieb ihn $\frac{dy}{dx}$ und deutete durch die Sprechweise „dy nach dx" an, daß bei der Quotientenbildung noch ein Grenzübergang vorzunehmen ist.

Auch für die höheren Ableitungen führte Leibniz eine entsprechende Schreibweise ein.

Da $y' = \frac{dy}{dx}$ ist, läßt sich y'' auch als $\frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ schreiben, wenn man den Zuwachs dx unverändert beibehält. Hierfür setzte Leibniz $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ (sprich: de zwei y nach de x Quadrat) und nannte $\frac{d^2 y}{dx^2}$ den zweiten Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$. Entsprechend schreibt man

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} \text{ usw.}$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie für die folgenden Ausdrücke die absoluten Fehler!

a) $(1 \pm \Delta x)^2$ **b)** $(2 \pm \Delta x)^3$ **c)** $(3 \pm \Delta x)^4$
d) $(4 \pm \Delta x)^3$ **e)** $(3 \pm \Delta x)^5$ **f)** $(2{,}5 \pm \Delta x)^4$

Anleitung zu a): Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 1$!

2. Es soll die Fläche y eines Quadrates bestimmt werden. Die Messung einer Seitenlänge ergab 20 cm; der Fehler dieser Messung beträgt 0,1 cm. Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler der Quadratfläche!

3. Die Kante eines Würfels ist zu 4,30 cm mit einem möglichen Fehler von 0,01 cm gemessen worden. Wieviel kann der absolute Fehler für den Rauminhalt des Würfels betragen?

4. Ein Meßzylinder mit dem Grundkreisradius 3 cm ist bis zu der gemessenen Höhe 12 cm mit Wasser gefüllt. Die Messung kann wegen der Benetzung der Wandung mit einem Fehler von 0,3 cm behaftet sein. Welcher absolute und relative Fehler ist dann bei der Berechnung des Rauminhaltes möglich?

16. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bewegungslehre

Um Bewegungen untersuchen zu können, messen wir zunächst den in einer Zeit t zurückgelegten Weg s des bewegten Körpers. Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir die in der Physik eingeführten Begriffe der **Geschwindigkeit** v und der **Beschleunigung** b mathematisch exakt erfassen.

a) Gleichförmige Bewegung

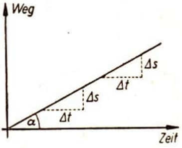

Abb. 29

Bewegt sich ein Körper so, daß der Quotient aus durchlaufener Strecke und benötigter Zeit immer konstant ist — das heißt, durchlaufene Strecke und benötigte Zeit sind proportional —, so nennen wir die Bewegung **gleichförmig** und den Quotienten die Geschwindigkeit des Körpers. Bezeichnet man mit s die Strecke, mit t die Zeit, so gilt $\frac{s}{t} = v$, wobei v die Geschwindigkeit angibt. Schreibt man diese Beziehung in der Form $s = v \cdot t$, so erscheint der Weg als lineare Funktion der Zeit, in der geometrischen Darstellung (Abb. 29) also als Gerade durch den Koordinatenursprung.

In der Abbildung ist der Weg als Funktion der Zeit gezeichnet, das heißt, für gleiche Zeitspannen Δt sind die gleichen Wege Δs abgetragen. Nachdrücklich wird darauf hingewiesen, daß die Abbildung 29 nur die Darstellung einer sich in der Natur abspielenden Bewegung ist, daß also die Zeit-Weg-Kurve n i c h t die B a h n k u r v e des Körpers ist.

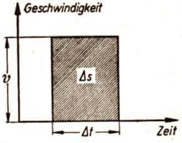

Abb. 30

Bei verschiedenen Geschwindigkeiten ist die Zeit-Weg-Gerade verschieden steil, das heißt, der Anstieg der Geraden ist ein Maß für die Geschwindigkeit v:

$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Wird die Geschwindigkeit in Abbildung 30 als Ordinate in Abhängigkeit von der Zeit gezeichnet, so ergibt sich, da die Geschwindigkeit v konstant ist, eine Parallele zur t-Achse im Abstande v. Da $\Delta s = v \cdot \Delta t$ gilt, ist die Maßzahl des Weges Δs in diesem Geschwindigkeitsdiagramm gleich der Maßzahl des Flächeninhalts, den das Rechteck mit den Seiten v und Δt hat.

b) Ungleichförmige Bewegung

α) Momentangeschwindigkeit

Gleichförmige Bewegungen kommen in der Natur sehr selten vor, das heißt, im allgemeinen ist der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nicht konstant, sondern er hängt ab von den Zeitpunkten der Messung. In diesem Fall nennen wir die Bewegung **ungleichförmig.**

Wir messen von einem bestimmten Zeitpunkt t_0 an eine Wegstrecke Δs, die in der zugehörigen Zeit Δt zurückgelegt wird, und bezeichnen nun den Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ als die **mittlere Geschwindigkeit** v_m des Körpers in der betrachteten Zeitspanne. Dieser Quotient ist nicht konstant, sondern von t_0 und Δt abhängig.

Um die Geschwindigkeit exakt zu definieren, verwenden wir immer kleinere Zeitspannen Δt und bilden die zugehörigen Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Haben diese Quotienten, also die mittleren Geschwindigkeiten, einen Grenzwert, so bezeichnen wir diesen als die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_0 oder auch als die **Momentangeschwindigkeit** v des Körpers zum Zeitpunkt t_0.

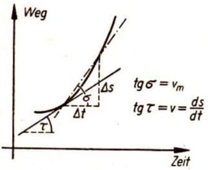

Abb. 31

Es gilt:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Denkt man diesen Grenzübergang (falls er möglich ist) in jedem Zeitpunkt t vorgenommen, so erscheint die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit (vgl. Abb. 31):

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Die Momentangeschwindigkeit v wird also als der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit definiert; er ist eine Funktion der Zeit.

Daß dieser Begriff der Geschwindigkeit den bei der gleichförmigen Bewegung dargelegten Begriff der Geschwindigkeit mit umfaßt, zeigt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(v \cdot t)}{dt} = v.$$

β) Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Betrachten wir zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 die Momentangeschwindigkeiten v_1 und v_2 eines Körpers und bilden wir den Differenzenquotienten $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$, so kann analog wie oben der Fall eintreten, daß für alle Zeitintervalle $t_2 - t_1$ der Quotient den gleichen Wert b annimmt:

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Dann heißt die Bewegung **gleichmäßig beschleunigt**, der Quotient b die **Beschleunigung.**

Bewegt sich ein Körper mit der gleichmäßigen Beschleunigung b, so beträgt seine Geschwindigkeit $v = b \cdot t$, wenn seine Bewegung aus dem Ruhezustand beginnt, das heißt zur Zeit $t_0 = 0$ auch $v_0 = 0$ ist.

In der Abbildung 32 ist die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit dargestellt. Bei verschiedenen Beschleunigungen ist die Zeit-Geschwindigkeit-Gerade verschieden steil; der Anstieg der Geraden ist also ein Maß für die Beschleunigung b:

$$\operatorname{tg}\beta = b = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Aus dem Physikunterricht ist uns das Zeit-Weg-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung,

$$s = \frac{b}{2} t^2,$$

bekannt. Da die Geschwindigkeit definiert ist als $\frac{ds}{dt}$, erkennt man, daß die erste Ableitung dieser Funktion $s' = v = bt$ mit der oben gefundenen Formel übereinstimmt. Man erkennt ferner, daß die Formel $s = \frac{b}{2} t^2$ den Inhalt des von der Zeitachse, der Geraden v und der Ordinate zum Zeitpunkt t gebildeten Dreiecks wiedergibt – ein Sachverhalt, der später seine Erklärung findet (Abb. 32).

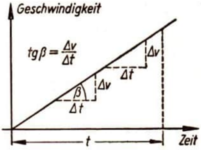

Abb. 32

Wenden wir auch hier wieder die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ an, so finden wir bestätigt

$$v = \frac{d\left(\frac{b}{2} t^2\right)}{dt} = b\,t.$$

γ) Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung, Momentanbeschleunigung

Im allgemeinen bewegt sich ein Körper derart, daß sich seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiträumen nicht um gleiche Beträge ändert. Der Körper befindet sich in **ungleichmäßig beschleunigter** Bewegung. Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist jetzt nicht mehr konstant, sondern von der Zeitspanne Δt und vom Zeitpunkt t_0 abhängig. Man bezeichnet ihn deshalb als die **mittlere Beschleunigung** b_m in der betrachteten Zeitspanne.

Um die Beschleunigung exakt zu definieren, verwenden wir immer kleinere Zeitspannen Δt und bilden die zugehörigen mittleren Beschleunigungen $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Haben diese für $\Delta t \to 0$ einen Grenzwert, so bezeichnen wir ihn als die Beschleunigung des Körpers zum Zeitpunkt t_0 oder auch als die **Momentanbeschleunigung** b des Körpers zum Zeitpunkt t_0. Es gilt:

$$b(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Denkt man diesen Grenzübergang (falls er möglich ist) in jedem Zeitpunkt t vorgenommen, so erscheint die Beschleunigung b als Funktion der Zeit (Abb. 33):

$$b(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

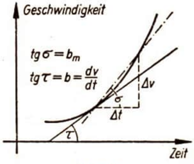

Abb. 33

Die Momentanbeschleunigung b wird als der erste Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit definiert; er ist eine Funktion der Zeit.

Da aber $v = \frac{ds}{dt}$ ist, gilt auch

$$b(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Die Momentanbeschleunigung b ist der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

Die Definitionen der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe der Differentialrechnung gestatten eine präzise Erfassung der Bewegungsvorgänge, da sich nur durch die Grenzbetrachtungen der Differentialrechnung die Gesetze der Bewegung mit beliebiger Genauigkeit beschreiben lassen.

Als Beispiel erwähnen wir das Gesetz des freien Falles. Es gilt

$$s = \frac{g}{2} t^2.$$

Da die Geschwindigkeit eines Körpers $v = \frac{ds}{dt}$ ist, finden wir bestätigt

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{2} t^2\right) = g t.$$

Die Beschleunigung eines Körpers ist $b = \frac{dv}{dt}$, also finden wir bestätigt

$$b = \frac{d}{dt}(g t) = g.$$

Aufgaben

1. Ein Radfahrer bewegt sich auf einer ebenen Landstraße mit der Geschwindigkeit $v = 18$ km/h, ein Lastkraftwagen auf der gleichen Landstraße mit $v = 54$ km/h. Es sind beide Zeit-Weg-Diagramme zu zeichnen.
2. Zeichnen Sie nach Berechnung des Differentialquotienten das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für den senkrechten Wurf eines Balles nach oben: $s = vt - \frac{g t^2}{2}$, ($v = 20$ m/s; $g = 10$ m/s²)! Wie hoch steigt der Ball?
3. Zeichnen Sie nach Berechnung des Differentialquotienten das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für den senkrechten Wurf nach unten;

$$s = v t + \frac{g t^2}{2}, \quad (v = 5\ \text{m/s};\ g = 10\ \text{m/s}^2)!$$

III. Einführung in die Integralrechnung

17. Das bestimmte Integral

Die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken, Vierecken und regelmäßigen Vielecken ist bekannt.

Den Inhalt eines krummlinig begrenzten, ebenen Flächenstückes kann man angenähert feststellen, indem man die Figur mit einem quadratischen Netz (durchsichtiges Millimeterpapier) überdeckt und die innerhalb der Begrenzung liegenden Quadrate zählt. Zu den Aufgaben der **Integralrechnung** gehört die Berechnung von Flächenstücken, die von Kurven oder Kurventeilen eingeschlossen sind.

Wir beginnen mit einem Beispiel, das planimetrisch nachgeprüft werden kann.

1. Beispiel:

Es soll der Inhalt der Fläche bestimmt werden, die von der Geraden $y = mx + b$, der x-Achse und den Senkrechten zur x-Achse in den Punkten $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ eingeschlossen wird (Abb. 34), wobei a, b und m größer als Null sind. Den Abschnitt dieser Senkrechten zwischen x-Achse und Kurve bezeichnen wir in Zukunft kurz als Ordinaten.

Wir teilen die Strecke OA in n gleiche Teile und berechnen zu den einzelnen Abszissen die Ordinaten:

x	0	$\frac{a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	$\dots$	$\frac{ka}{n}$	$\dots$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{na}{n}$
y	b	$\frac{a}{n}m+b$	$\frac{2a}{n}m+b$	$\dots$	$\frac{ka}{n}m+b$	$\dots$	$\frac{(n-1)a}{n}m+b$	$\frac{na}{n}m+b$

Berechnen wir die Fläche des Rechtecks $OBCD$, so erhalten wir $\frac{a}{n}b$. Entsprechend lassen sich die Flächeninhalte sämtlicher unter der Geraden $mx+b$ liegenden Rechtecke über der Strecke OA berechnen, und wir erhalten als Summe der n Rechtecke die untere Rechtecksumme F_u:

$$\begin{aligned}F_u &= \frac{a}{n}b + \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}m+b\right)+\cdots\\&\quad+\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}m+b\right)+\cdots\\&\quad+\frac{a}{n}\left(\frac{(n-1)a}{n}m+b\right)\\&=\left(\frac{a}{n}b\right)n+\left(\frac{a^2}{n^2}m\right)[1+2\\&\quad+\cdots+k+\cdots+(n-1)].\end{aligned}$$

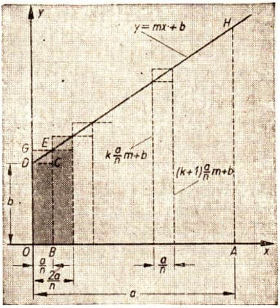

Abb. 34

Die Summe $[1+2+\cdots+k+\cdots+(n-1)]$ schreibt man kürzer als $\sum_{k=1}^{n-1} k$ (sprich: Summe aller k von 1 bis $n-1$). Sie läßt sich als Summe einer arithmetischen Folge angeben als $\frac{n(n-1)}{2}$ (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 124). Also ergibt sich

$$F_u = \left(\frac{a}{n}b\right)n + \left(\frac{a^2}{n^2}m\,\frac{n(n-1)}{2}\right) = ab + \frac{a^2}{2}m\,\frac{n-1}{n} = ab + \frac{a^2}{2}m\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Berechnen wir nunmehr die Fläche des Rechtecks $OBEG$, so erhalten wir $\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}m+b\right)$ und als Summe der entsprechenden n Rechtecke die obere Rechtecksumme F_o:

$$\begin{aligned}F_o &= \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}m+b\right)+\frac{a}{n}\left(\frac{2a}{n}m+b\right)+\cdots+\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}m+b\right)+\cdots+\frac{a}{n}\left(\frac{na}{n}m+b\right)\\&=\left(\frac{a}{n}b\right)n+\frac{a^2}{n^2}m\,(1+2+\cdots+k+\cdots+n).\end{aligned}$$

Für $(1+2+\cdots+k+\cdots+n)$ ergibt sich entsprechend $\frac{n(n+1)}{2}$; also wird

$$F_o = \left(\frac{a}{n}b\right)n + \frac{a^2}{n^2}m\,\frac{n(n+1)}{2} = ab + \frac{a^2}{2}m\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Der Inhalt F der zu berechnenden Trapezfläche $OAHD$ liegt zwischen F_u und F_o; es besteht die Ungleichung

$$F_u < F < F_o$$

oder

$$ab + \frac{a^2}{2}m\left(1 - \frac{1}{n}\right) < F < ab + \frac{a^2}{2}m\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Der Unterschied zwischen der unteren Rechtecksumme F_u und der oberen Rechtecksumme F_o wird bei zunehmender Verfeinerung der Unterteilung ($n \to \infty$) beliebig klein. Für jeden der beiden Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ergibt sich der Wert 1.

Die linke und die rechte Seite der Ungleichung streben dem gleichen Wert $\left(ab + \frac{a^2}{2}m\right)$ zu; der Wert von F muß also diesem gleich sein:

$$F = ab + \frac{a^2}{2}m.$$

Berechnen wir zur Kontrolle den Flächeninhalt des Trapezes $OAHD$ nach der Formel der Planimetrie, so erhalten wir aus den Seiten $OD = b$, $AH = ma + b$ und der Höhe $OA = a$ für die Fläche

$$F = \frac{OD + AH}{2} \cdot OA = \frac{b + ma + b}{2} \cdot a = ab + \frac{a^2}{2}m.$$

Wir erkennen, daß die beiden Ergebnisse übereinstimmen.

Ist in der Funktion $y = f(x) = mx + b$ der Koeffizient m gleich Null, so ist $y = b$, das heißt, die Gerade liegt parallel zur x-Achse. Die von der Kurve der Funktion $y = b$, der x-Achse und den Ordinaten zu $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ eingeschlossene Fläche hat also die Form eines Rechtecks.

Für diesen Fall erhält der für F gefundene Ausdruck $\left(ab + \frac{a^2}{2}m\right)$ wegen $m = 0$ den Wert ab. Wir erkennen, daß er mit der aus der Planimetrie bekannten Flächeninhaltsformel des Rechtecks übereinstimmt.

Entsprechend erhält man für $b = 0$ als Inhalt der von der Kurve $y = mx$, der x-Achse und den Ordinaten zu $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ eingeschlossenen Fläche $F = \frac{a^2}{2}m$. Dieses Ergebnis stimmt wiederum überein mit der bekannten Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks.

Führen Sie die Herleitungen entsprechend dem Beispiel 1 durch!

2. Beispiel:

Es soll das Flächenstück berechnet werden, das von der Parabel $y = x^2 + 3$, der positiven x-Achse und den Ordinaten zu den Abszissen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ eingeschlossen wird (Abb. 35). Wir unterteilen wieder die Strecke OA in n gleiche Teile und berechnen zu den einzelnen Abszissen die Ordinaten:

x	0	$\frac{a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	$\cdots$	$\frac{ka}{n}$	$\cdots$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{na}{n}$
y	3	$\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3$	$2^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3$	$\cdots$	$k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3$	$\cdots$	$(n-1)^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3$	$n^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3$

Die untere Rechtecksumme F_u beträgt

$$F_u = \frac{a}{n}\cdot 3 + \frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \cdots + \frac{a}{n}\cdot\left[k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \cdots + \frac{a}{n}\cdot\left[(n-1)^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right]$$

$$= n\cdot 3\,\frac{a}{n} + \frac{a^3}{n^3}\,[1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + (n-1)^2].$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(2\,n-1)$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 128; daselbst $n-1$ an Stelle von n eingesetzt) ergibt sich

$$F_u = 3\,a + \frac{a^3}{6}\,\frac{n\,(n-1)\,(2\,n-1)}{n^3}$$

$$= 3\,a + \frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

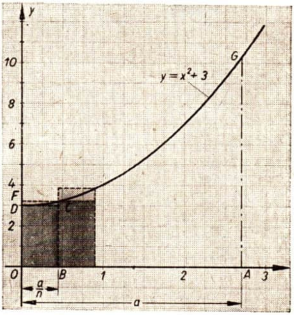

Abb. 35

Die obere Rechtecksumme F_o beträgt entsprechend

$$F_o = \frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \frac{a}{n}\left[2^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \cdots + \frac{a}{n}\left[k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \cdots + \frac{a}{n}\left[n^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right]$$

$$= n\,\frac{a}{n}\cdot 3 + \frac{a^3}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2)\,.$$

Wegen $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$ ergibt sich

$$F_o = 3a + \frac{a^3}{6}\,\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{n^3} = 3\,a + \frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Der Flächeninhalt F der von den Strecken DO, OA, AG und dem Parabelbogen GD eingeschlossenen Fläche liegt zwischen F_u und F_o:

$$F_u < F < F_o$$

oder

$$3\,a + \frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < F < 3\,a + \frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Bei Verfeinerung der Unterteilung der Strecke OA, $n \to \infty$, und Benutzung der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 \pm \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\left(2 \pm \frac{1}{n}\right) = 2$$

erhalten wir für die Fläche F den Ausdruck

$$F = 3\,a + \frac{a^3}{6}\cdot 2 = 3\,a + \frac{a^3}{3}.$$

Wir betrachten jetzt eine stetige[1]) nicht negative Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall von $x_0 = 0$ bis $x_n = a$ mit $a > 0$. Dieses Intervall denken wir uns mittels der Teilpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}$ in n gleiche Teilintervalle J_k von der Länge $\Delta x = \frac{a}{n}$ zerlegt (Abb. 36). Nun suchen wir in jedem Intervall J_k das absolute Minimum m_k, das heißt den kleinsten Ordinatenwert, und das absolute Maximum M_k, das heißt den größten Ordinatenwert der Funktion $f(x)$. Das größte Rechteck über dem Intervall J_k, das ganz unterhalb der Kurve liegt, das **untere** Rechteck, hat dann den Flächeninhalt $m_k \cdot \Delta x$, das kleinste Rechteck, das die Kurve einschließt, das **obere** Rechteck, hat den Flächeninhalt $M_k \cdot \Delta x$. Die Summe aller unteren Rechtecke hat den Wert

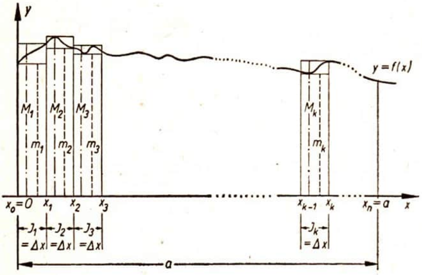

Abb. 36

$$F_u = m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + \cdots + m_k \cdot \Delta x + \cdots + m_n \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \frac{a}{n}.$$

Die Summe aller oberen Rechtecke hat den Wert

$$F_o = M_1 \cdot \Delta x + M_2 \cdot \Delta x + \cdots + M_k \cdot \Delta x + \cdots + M_n \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \frac{a}{n}.$$

Der Inhalt der von der Kurve, der x-Achse und den Ordinaten zu 0 und a eingeschlossenen Fläche muß offensichtlich zwischen diesen beiden Werten liegen. Wird die Unterteilung der Strecke a immer feiner, wächst also n und damit die Streifenzahl über alle Grenzen, so strebt Δx gegen 0. Existieren dabei für die beiden Zahlenfolgen F_u und F_o Grenzwerte und sind diese einander gleich, gilt also

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x,$$

so heißt dieser gemeinsame Grenzwert der unteren und oberen Rechtecksumme **das bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ zwischen den „Grenzen" 0 und a. Geometrisch stellt es den Inhalt der zwischen der Kurve der Funktion $f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten zu 0 und a gelegenen Fläche dar.

Sieht man von der eingangs geforderten Einschränkung ab, daß $y = f(x)$ nicht negativ ist, das heißt, kann die Funktion im betrachteten Intervall auch oder nur negative Werte annehmen, so läßt sich dennoch der Summationsprozeß durchführen. Zu be-

[1]) Eine Funktion ist sicher dann stetig, wenn ihr Kurvenbild keine Unterbrechung erleidet. Diese aus der Anschauung gewonnene Erklärung erfordert noch eine wissenschaftliche Definition, die über den Lehrstoff der Oberschule hinausgeht.

achten ist jedoch dabei, daß für negative Ordinatenwerte das Produkt, welches den Flächeninhalt der Rechtecke angibt, ebenfalls negativ wird. Der Flächeninhalt erhält damit ein Vorzeichen (Abb. 37). Falls die Grenzwerte für F_u und F_o auch hier existieren und einander gleich sind, nennen wir auch diesen gemeinsamen Grenzwert das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und a. Geometrisch stellt es wie oben den Inhalt der zwischen der Kurve der Funktion $f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten zu 0 und a gelegenen Fläche dar, wobei die unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke mit negativem Vorzeichen behaftet sind. Ist also $f(x)$ im Intervall 0 bis a sowohl negativ als auch positiv, so gibt das bestimmte Integral eine Differenz an, die aus den Absolutbeträgen der oberhalb und unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke gebildet ist.

Man kann beweisen, daß für alle stetigen Funktionen der gemeinsame Grenzwert existiert.

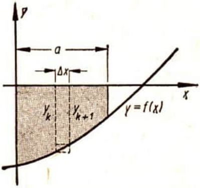

Abb. 37

Für das bestimmte Integral hat Leibniz das Zeichen $\int\limits_0^a$ eingeführt und geschrieben

$$F_o^a = \int\limits_0^a f(x)\,dx$$

(sprich: Integral von 0 bis a f von x de x).

Das Zeichen $\int$ ist ein langgezogenes lateinisches S; es deutet an, daß ein Summationsprozeß vorgenommen wird. Die Funktion $f(x)$ wird **Integrand** genannt; 0 und a heißen die **untere** und **obere Integrationsgrenze**. Das Differential dx gibt an, daß x die Integrationsvariable ist; diese Schreibweise wird später verständlich werden.

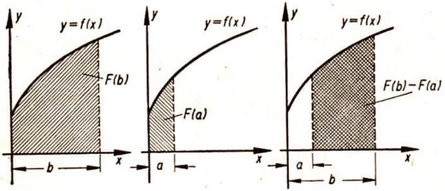

Abb. 38

Wenden wir die neue symbolische Schreibweise auf die bereits durchgerechneten Beispiele $f(x) = b$, $f(x) = mx$, $f(x) = mx + b$, $f(x) = x^2 + 3$ an, so erhalten wir

$$\int\limits_0^a b\,dx = a\,b, \qquad \int\limits_0^a m\,x\,dx = \frac{a^2}{2}\cdot m,$$

$$\int\limits_0^a (m\,x + b)\,dx = \frac{a^2}{2}\cdot m + a\,b, \qquad \int\limits_0^a (x^2 + 3)\,dx = \frac{a^3}{3} + 3\,a\,.$$

Soll nunmehr ein Flächenstück F_a^b zwischen den positiven Integrationsgrenzen $x_0 = a$ und $x_n = b$ berechnet werden (Abb. 38), wobei $a < b$ ist, so muß man

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x$$

bilden, symbolisch geschrieben

$$F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Diese Fläche F_a^b kann als Differenz der Flächen F_0^b und F_0^a aufgefaßt werden, so daß

$$F_a^b = F_0^b - F_0^a \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \text{ ist.}$$

Zusammenfassung: Der Inhalt des Flächenstücks, das eingeschlossen wird von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten, die zwei beliebigen, aber festen Integrationsgrenzen a und b zugeordnet sind, ist durch das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b gegeben:

$$\boldsymbol{F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Dabei wird unter dem Inhalt des Flächenstücks die Differenz verstanden, die aus den Absolutbeträgen der oberhalb und unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke gebildet wird.

Wir haben bisher die unabhängige Veränderliche meist mit x bezeichnet. Wir können aber auch einen anderen Buchstaben dafür wählen, etwa ξ. Die gegebene Funktion $y = f(x)$ lautet dann $y = f(\xi)$. Dadurch wird an der Zuordnungsvorschrift f zwischen der unabhängigen Variablen und der davon abhängigen Variablen nichts geändert. Auch auf die Rechnungen und Grenzübergänge, die zum bestimmten Integral geführt haben, hat diese Umbenennung der Unabhängigen keinen Einfluß. Es ist nur zu beachten, daß der Zuwachs von ξ mit $\Delta\xi$ bezeichnet wird. Auf den Wert des Integrals hat es mithin keinen Einfluß, wenn wir schreiben

$$F_a^b = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Mit der gleichen Berechtigung können wir auch andere Integrationsvariable einführen, zum Beispiel:

$$F_a^b = \int_a^b f(u)\,du \quad \text{oder} \quad F_a^b = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Zusammenfassung: Der Wert des bestimmten Integrals F_a^b ist vom Namen der Integrationsvariablen unabhängig.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie unter Verwendung von unterer und oberer Rechtecksumme das Flächenstück, das von der Geraden $y = mx$, der positiven x-Achse und der Ordinate $x = a$ eingeschlossen wird!

a) $m = 2, \quad a = 3$ **b)** $m = \frac{1}{2}, \quad a = 5$

c) $m = 0{,}6, \quad a = 5$ **d)** $m = 0{,}2, \quad a = 10$

2. Unter Verwendung von unterer und oberer Rechtecksumme ist das Flächenstück zu bestimmen, das von der Geraden $y = m x + b$, der positiven x-Achse und den Ordinaten zu den Abszissen $x = 0$ und $x = a$ eingeschlossen wird.

a) $m = 2;\quad b = 1;\quad a = 4$ b) $m = \frac{1}{2};\quad b = 2;\quad a = 6$

c) $m = -\frac{1}{2};\quad b = 4;\quad a = 6$ d) $m = -\frac{1}{3};\quad b = 3;\quad a = 9$

3. Berechnen Sie unter Verwendung von unterer und oberer Rechtecksumme das Flächenstück, das von der Parabel $y = x^2 + b$, der positiven x-Achse und den Ordinaten zu den Abszissen $x = 0$ und $x = a$ eingeschlossen wird!

a) $b = 1;\quad a = 3$ b) $b = 2;\quad a = 2$ c) $b = 0;\quad a = 3$ d) $b = 3;\quad a = 1$

18. Die Flächenfunktion

Der Wert eines bestimmten Integrals der Funktion $y = f(x)$ ist, wie die Herleitungen gezeigt haben, von den Integrationsgrenzen abhängig. Betrachten wir in dem Integral $\int\limits_0^a f(x)\,dx$ die obere Grenze, die Abszisse a, als veränderlich, so ist die Fläche F von dieser Abszisse abhängig; diese Abszisse wollen wir — wie üblich — mit x bezeichnen. Die durch das Integral bestimmte Fläche F ist dann eine Funktion von x (Abb. 39), die zunächst nur für $x > 0$ definiert ist. Zur Unterscheidung der Integrationsgrenze x von der Integrationsvariablen x ist es zweckmäßig, daß diese anders bezeichnet wird. Da eine Umbenennung der Integrationsvariablen x zum Beispiel in ξ auf den Wert des Integrals ohne Einfluß ist, können wir schreiben

$$\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi = F(x).$$

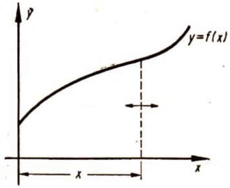

Abb. 39

Das Integral

$$\int\limits_0^a (x^2 + 3)\,dx = \frac{a^3}{3} + 3a$$

stellt die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = x^2 + 3$, der Abszissenachse, der Ordinatenachse und der festen oberen Grenze $x = a$ dar. Nehmen wir jetzt die obere Integrationsgrenze als veränderlich an, so ergibt sich entsprechend bei derselben Funktion mit veränderlicher oberer Grenze x

$$\int\limits_0^x (\xi^2 + 3)\,d\xi = \frac{x^3}{3} + 3x.$$

Dieser Ausdruck stellt in der gleichen Weise wieder eine Fläche dar, deren Größe von der oberen Grenze x abhängig, also eine Funktion ist, die wir als **Flächenfunktion** $F(x)$ bezeichnen können. Die Richtigkeit der Beziehungen

$$\int\limits_a^x (\xi^2 + 3)\,d\xi = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - \left(\frac{a^3}{3} + 3a\right)$$

und

$$\int_d^x (\xi^2 + 3)\, d\xi = \left(\frac{x^3}{3} + 3\,x\right) - \left(\frac{d^3}{3} + 3\,d\right)$$

ergibt sich aus der Beziehung

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^b f(x)\, dx - \int_0^a f(x)\, dx.$$

Wir stellen fest: Die entstandenen Integrale, die nur verschiedene untere Integrationsgrenzen besitzen, unterscheiden sich durch eine additive Konstante, die man **Integrationskonstante** nennt. Diese Feststellung gilt allgemein.

Die untere Integrationsgrenze beeinflußt also nur den Wert der Integrationskonstanten. Legt man auf die Kenntnis dieser Konstanten keinen Wert, so läßt man die Grenzen unbezeichnet und schreibt die Flächenfunktion $\int f(\xi)\, d\xi$; es gilt dann

$$\int f(\xi)\, d\xi = F(x) + C,$$

wobei C die jetzt nicht näher bekannte Integrationskonstante ist. Nunmehr bestehen keine Bedenken, die Flächenfunktion in der Form

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

zu schreiben, wobei C die Integrationskonstante bedeutet.

19. Beziehung zwischen der Integralrechnung und der Differentialrechnung

Da die Flächenfunktion $\int f(x)\, dx$ eine Funktion $F(x)$ ist, läßt sich von ihr ein Differentialquotient bilden.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß $F(x)$ die Ableitung $f(x)$ hat, daß also gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Dazu stellen wir zunächst eine Zwischenbetrachtung an. Wählen wir für x einen festen Wert b und bilden wir das Integral

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi,$$

so stellt dieses — wie bekannt — den Inhalt der von der Kurve der Funktion $f(\xi)$, der ξ-Achse und den Ordinaten zu a und b begrenzten Fläche dar. Dieses Integral hat einen wohlbestimmten Wert, der sich durch ein Rechteck darstellen läßt mit den Seiten $(b - a)$ — der Länge des Intervalls — und h, einer Ordinate, die offenbar zwischen dem kleinsten und dem größten Wert der Funktion $f(\xi)$ im Intervall a bis b liegt. (Der durch $\int_a^b f(\xi)\, d\xi$ dargestellte Inhalt muß zwischen dem kleinsten umbeschriebenen und dem größten einbeschriebenen Rechteck liegen, deren Höhen gleich dem absoluten Maximum beziehungsweise dem absoluten Minimum der Funktion $f(\xi)$ im Intervall a bis b sind.) Demnach schneidet die Kurve der Funktion $f(\xi)$ mindestens einmal die Parallele zur ξ-Achse im Abstand h (Abb. 40). Diese Stelle bezeichnen wir mit x_0. Für sie gilt $a < x_0 < b$. Wir haben also gefunden

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi = f(x_0) \cdot (b - a).$$

Betrachten wir nunmehr von der Funktion $f(x)$ das Integral $\int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x)$ und erteilen wir der oberen Grenze einen Zuwachs Δx, so ist das Integral $\int\limits_a^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi = F(x+\Delta x)$. Der Flächenzuwachs $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$ ist offenbar gleich der Differenz

$$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_a^{x} f(\xi)\,d\xi = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi.$$

Nach unserer Vorbetrachtung läßt sich $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi$ ersetzen durch $f(x_0)\,\Delta x$, wobei $x < x_0 < (x+\Delta x)$ ist. Mithin ist

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x_0)\cdot\Delta x \qquad \text{oder} \qquad \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist der Differenzenquotient der Flächenfunktion $F(x)$. Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ geht der Differenzenquotient in die Ableitung $F'(x)$ der Funktion $F(x)$ über; gleichzeitig geht x_0 gegen x. Damit wird die rechte Seite zu $f(x)$. Es ist also

$$F'(x) = f(x).$$

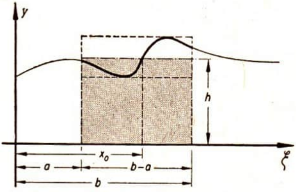

Abb. 40

Wir stellen fest: Die Ableitung der Flächenfunktion $F(x)$ ist die ursprüngliche Funktion $f(x)$, die als **Integrand** bezeichnet wurde. Damit erhalten wir die

Zusammenfassung: **Die Funktion $f(x)$ integrieren heißt, eine Funktion $F(x)$ so zu bestimmen, daß deren Ableitung $f(x)$ ist.**

Es gilt demnach:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

und

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Beispiel:

Aus $f(x) = x^2 + 3$ ergibt sich $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$; dann ist nach den Regeln der Differentialrechnung

$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 + 3.$$

Zu $y = f(x)$ gehört als Flächenfunktion $F(x) = \int f(x)\,dx$. Dann ist wieder $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ gibt es nur eine allgemeine Flächenfunktion $F(x)$, die aber eine unbestimmte additive Konstante enthält.

Wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, haben Funktionen mit einer additiven Konstanten denselben Differentialquotienten. So ist zum Beispiel

$$\int (x^2+3)\,dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C$$

die allgemeine Flächenfunktion, da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + 3x + C\right) = x^2 + 3$$

ist. Prüfen Sie durch Differentiation die Richtigkeit!

20. Das unbestimmte Integral

Wir haben gesehen, daß die Flächenfunktion $F(x)$ ein Integral $\int f(x)\,dx$ ist, das eine unbestimmte Konstante C enthält. Wegen dieser Konstanten C bezeichnet man $\int f(x)\,dx$ als **unbestimmtes Integral.** Gibt man der unbestimmten additiven Konstanten des unbestimmten Integrals einen bestimmten Wert, so heißt die dadurch entstandene Funktion $F(x)$ eine **Stammfunktion** zu $f(x)$. Da man für C beliebig viele Werte wählen kann, gibt es also zu $f(x)$ beliebig viele Stammfunktionen. Das unbestimmte Integral mit seiner unbestimmten additiven Konstanten verkörpert die Gesamtheit aller Stammfunktionen.

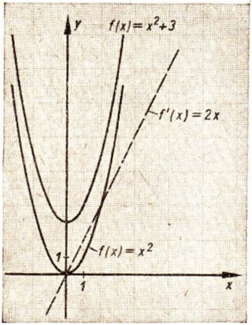

Abb. 41

Beweisen Sie aus

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x)$$

die Richtigkeit der Beziehung

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C!$$

Die Abbildung 41 stellt als Integranden die abgeleitete Funktion $y' = f'(x) = 2x$ und zwei ihrer Stammfunktionen $y = f(x) + C$ dar.

Allgemein gilt: **Zu jeder integrierbaren Funktion $f(x)$ gibt es ein unbestimmtes Integral und beliebig viele Stammfunktionen:**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C; \quad \frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x).$$

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) = 3x$ mehrere Stammfunktionen $F(x)$ und stellen Sie diese graphisch dar!

Wie unterscheiden sich die Kurvenbilder der verschiedenen Stammfunktionen? Welche gemeinsamen Eigenschaften haben sie? Vergleichen Sie die Kurvenbilder und die dazugehörigen Funktionen miteinander!

21. Integration der Funktion $f(x) = x^n$

Nachdem wir festgestellt haben, daß das Integrieren (Ermittlung des unbestimmten Integrals) die Umkehrung des Differenzierens ist, gehen wir bei der Aufstellung der Rechenregeln für die Integralrechnung von denen der Differentialrechnung aus. Es ist daher bereits möglich, für einige Funktionen die unbestimmten Integrale zu bilden.

Im Falle der ganzen rationalen Funktion ist uns bekannt, daß jede abgeleitete Funktion den Grad $(n - 1)$ hat, wenn die Ausgangsfunktion n-ten Grades ist. Ist

$$f(x) = x^n,$$

so schließen wir, daß $F(x)$ den Grad $(n + 1)$ hat, und setzen daher zunächst

$F(x) = c x^{n+1}$, wobei c ein noch zu bestimmender Faktor ist. Es gilt also:

$$F'(x) = c(n+1)\,x^n.$$

Wenn dieser Ansatz brauchbar ist, muß

$$F'(x) = f(x)$$

sein, das heißt, es muß gelten

$$c(n+1)\,x^n = x^n.$$

Da diese Gleichung für alle x-Werte Gültigkeit haben soll, muß $c(n+1) = 1$ sein. Daraus folgt

$$c = \frac{1}{n+1}.$$

Setzen wir $F(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, so ergibt die Differentiation $F'(x) = f(x) = x^n$. Da die Ableitung einer beliebigen Konstanten C gleich Null ist, ist außer der Funktion $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ jede Funktion $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$.

Zusammenfassung: Zu der ganzen rationalen Funktion $f(x) = x^n$ existieren unendlich viele Stammfunktionen:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ist insbesondere $n = 0$, das heißt, reduziert sich die Funktion $f(x)$ auf die Konstante 1, so gilt

$$\int x^0\,dx = \int 1\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = \frac{x^1}{1} + C = x + C.$$

Für $\int 1\,dx$ schreibt man gewöhnlich $\int dx$.

Beispiele:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C; \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = x^3,$$

$$\int 7x\,dx = 7\cdot\frac{x^2}{2} + C; \qquad \frac{d}{dx}\left(7\cdot\frac{x^2}{2} + C\right) = 7x.$$

Aufgaben

1. a) $\int x^5\,dx$ **b)** $\int x\,dx$ **c)** $\int x^2\,dx$ **d)** $\int x^3\,dx$

e) $\int \frac{x^3\,dx}{3}$ **f)** $\int 7x^6\,dx$ **g)** $\int 3x^2\,dx$ **h)** $\int 5\,dx$

2. Es sind alle Funktionen $f(x)$ zu bestimmen, deren erste Ableitung $f'(x)$ gegeben ist.

a) $f'(x) = 2x$ **b)** $f'(x) = 5x$ **c)** $f'(x) = 16x$

d) $f'(x) = 6x^2$ **e)** $f'(x) = \frac{x^2}{3}$ **f)** $f'(x) = 3x^4$

22. Integrationsregeln

Besitzt $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$, gilt also $F'(x) = f(x)$, so hat auch $a f(x)$ eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

Beweis:

Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, das heißt $\int f(x)\,dx = F(x)$. Dann gilt

$$a \int f(x)\, dx = a F(x).$$

Hieraus folgt durch beiderseitige Differentiation:

$$\frac{d}{dx}[a F(x)] = a F'(x) = a f(x).$$

Das bedeutet aber, daß $a F(x) = a \int f(x)\, dx$ eine Stammfunktion der Funktion $a f(x)$ ist oder daß gilt

$$a \int f(x)\, dx = \int [a f(x)]\, dx.$$

Zusammenfassung: **Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gezogen werden.**

Besitzen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ Stammfunktionen, so hat auch ihre Summe (Differenz) eine Stammfunktion, und es ist

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt $\int f(x)\, dx = F(x)$ und $\int g(x)\, dx = G(x)$

oder $f(x) = F'(x)$ und $g(x) = G'(x)$.

Durch Addition (Subtraktion) ergibt sich

$$f(x) \pm g(x) = F'(x) \pm G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) \pm G(x)].$$

Das bedeutet aber, $[F(x) \pm G(x)]$ ist eine Stammfunktion von $[f(x) \pm g(x)]$ oder $F(x) \pm G(x) = \int [f(x) \pm g(x)]\, dx$.

Da nach Voraussetzung $F(x) = \int f(x)\, dx$ und $G(x) = \int g(x)\, dx$ ist, folgt

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Dieser Beweis läßt sich in entsprechender Weise für endlich viele Summanden führen.

Zusammenfassung: **Das unbestimmte Integral einer Summe (Differenz) von Funktionen ist gleich der Summe (Differenz) der unbestimmten Integrale dieser Funktionen.**

Beispiele:

1. $\int (x^2 - 3)\, dx = \int x^2 dx - \int 3\, dx = \int x^2 dx - 3 \int dx = \frac{x^3}{3} - 3x + C.$

Durch Differentiation wird bestätigt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 3x + C\right) = x^2 - 3.$$

Spezielle Werte für C können zum Beispiel $C = +5$ oder $C = +3$ sein:

$$\int (x^2 - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x + 5$$

oder

$$\int (x^2 - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x + 3.$$

Prüfen Sie durch Differentiation die Richtigkeit!

Der Integrand und zwei seiner Stammfunktionen sind in Abbildung 42 dargestellt.

2. $\int (3\,x^5 - 4\,x^2 + 7)\,d\,x = \int 3\,x^5\,d\,x - \int 4\,x^2\,d\,x + \int 7\,dx$

$$= 3\int x^5 d\,x - 4\int x^2\,d\,x + 7\int dx$$

$$= 3\,\frac{x^6}{6} - 4\,\frac{x^3}{3} + 7\,\frac{x}{1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,x^6 - \frac{4}{3}\,x^3 + 7\,x + C.$$

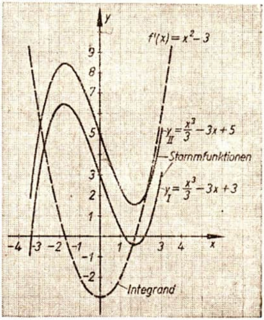

Abb. 42

Es sei bemerkt, daß so viele Integrationskonstanten entstehen, wie die Summe Glieder hat. Sie werden zum Schluß in eine einzige Konstante zusammengefaßt.

Aufgaben

1. a) $\int (3 + 2\,x)\,d\,x$ **b)** $\int (5 - 7\,x + 6\,x^2)\,d\,x$

c) $\int (x - x^3)\,d\,x$ **d)** $\int (a + b\,x + c\,x^2)\,d\,x$

e) $\int \left(\sqrt{a}\cdot x + \sqrt[3]{b}\right) d\,x$

f) $\int (a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n)\,d\,x$

g) $\int \left(1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^4\right) d\,x$

h) $\int (x + 1)^2\,d\,x$ **i)** $\int (x^2 + 2)^3\,d\,x$ **k)** $\int (1 + 2\,x + 3\,x^2)^2\,d\,x$

2. Bestimmen Sie Funktionen $f(x)$, deren erste Ableitung $f'(x)$ gegeben ist!

a) $f'(x) = x^2 - 3$ **b)** $f'(x) = 7\,x^3 - 5$ **c)** $f'(x) = 2\,x^3 - 3\,x$

d) $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ **e)** $f'(x) = (x - 2)\,(x + 3)$ **f)** $f'(x) = (2\,x - 3)\,(3\,x - 2)\,(x + 1)$

23. Auswertung des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,d\,x$ (vgl. Abb. 43) gibt den Inhalt der Fläche an, die, wenn $f(x) > 0$ ist, von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten zu $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird (vgl. S. 58). Dieser Flächeninhalt ist als Differenz zweier Flächenstücke bestimmt worden; es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\,x = \int\limits_0^b f(x)\,d\,x - \int\limits_0^a f(x)\,d\,x.$$

Fügt man in Abbildung 43 zwischen $x = 0$ und $x = a$ noch eine Ordinate zu $x = m$ ein, so ergibt sich

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\,x = \int\limits_m^b f(x)\,d\,x - \int\limits_m^a f(x)\,d\,x\,, \qquad 0 < m < a < b.$$

Aus dem Integral mit fester unterer und oberer Grenze ist die Differenz zweier Integrale geworden, deren obere Grenzen die alten Grenzen a und b sind, während ihre unteren Grenzen zwar gleich, aber zwischen 0 und a beliebig wählbar sind.

In Abschnitt 18 ist gezeigt worden, daß $\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi = F(x)$ eine Funktion ist, deren Wert von der oberen Grenze bestimmt wird. Es gilt also

$$\int\limits_0^b f(x)\,dx = F(b) \quad \text{und} \quad \int\limits_0^a f(x)\,dx = F(a).$$

Die oben eingeführte beliebige untere Integrationsgrenze m bewirkt nur die Hinzufügung einer Integrationskonstanten (vgl. S. 60), so daß wir schreiben können

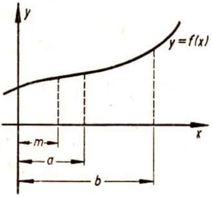

Abb. 43

$$\int\limits_m^b f(x)\,dx = F(b) + C$$

und

$$\int\limits_m^a f(x)\,dx = F(a) + C.$$

Aus der Gleichung

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_m^b f(x)\,dx - \int\limits_m^a f(x)\,dx$$

folgt nunmehr

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,dx &= [F(b) + C] - [F(a) + C]\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

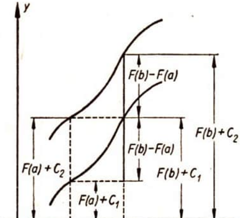

Abb. 44

Betrachten Sie diese Zusammenhänge auch an der Abbildung 44!

Es ist üblich, die Gleichung auch in der Form

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

zu schreiben.

Zusammenfassung: Man erhält den Wert eines bestimmten Integrals einer Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b, also im Intervall $a \leqq x \leqq b$, indem man zuerst ein unbestimmtes Integral (Stammfunktion) der Funktion $f(x)$ sucht, an Stelle der Veränderlichen x erst die obere Grenze, dann die untere Grenze einsetzt und schließlich den zweiten Wert vom ersten subtrahiert.

Beispiel (vgl. Abb. 45):

$$\int\limits_{+1}^{+3} (x^2 - x + 2)\,dx.$$

Wir integrieren zunächst

$$\int (x^2 - x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

In dieses unbestimmte Integral werden nacheinander die obere Grenze $+3$ und die untere Grenze $+1$ eingesetzt. Wir erhalten

$$\int_{+1}^{+3} (x^2 - x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C\right]_{+1}^{+3}$$

$$= \left[\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 6 + C\right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 + C\right]$$

$$= \left[9 - \frac{9}{2} + 6 + C\right] - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + C\right] = 8\frac{2}{3}.$$

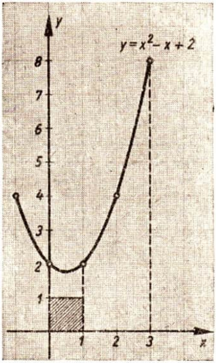

Abb. 45

Die Integrationskonstante C, die für das unbestimmte Integral bezeichnend ist, fällt bei der Subtraktion der Ausdrücke in den Klammern weg; deshalb kann man sie von vornherein bei der Rechnung unberücksichtigt lassen.

Das bestimmte Integral hat sich also als ein fester, bestimmter Zahlwert ergeben. Diese Zahl ist der Inhalt der Fläche, die zwischen der Kurve der Funktion $f(x) = x^2 - x + 2$, der x-Achse und den Ordinaten zu $x = +1$ und $x = +3$ liegt (vgl. Abb. 45; die Einheit des Flächenmaßes ist eingezeichnet).

Wie im verwendeten Beispiel dient das unbestimmte Integral bei den meisten Anwendungen als Hilfsfunktion zur Ermittlung des bestimmten Integrals.

Ist $a < b < c$ und bildet man in den Intervallen a bis b und b bis c die Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_b^c f(x)\,dx,$$

so gilt auf Grund der geometrischen Deutung des Integralbegriffs

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Demzufolge gilt auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

denn für $c = b$ ergibt sich

$$\int_a^c f(x)\,dx \pm \int_c^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Durchläuft man bei der Bildung der Rechtecksummen das zwischen a und b liegende Intervall $(a < b)$ von b nach a, so muß man den Δx das negative Vorzeichen geben. Es kehren sich also in den Summen die Vorzeichen um. Daher gilt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Auch dies läßt sich aus den obigen Formeln herleiten, denn für $a = c$ ergibt sich

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx.$$

Zusammenfassung: Ein bestimmtes Integral, bei dem obere und untere Grenze gleich sind, hat den Wert Null.

Vertauscht man in einem bestimmten Integral die untere und die obere Grenze, so nimmt das Integral entgegengesetztes Vorzeichen an.

Aufgaben

Ermitteln Sie die Werte der folgenden bestimmten Integrale durch Ausrechnen und vergleichen Sie sie mit den durch Abzählen der Quadratmillimeter gefundenen Werten!

a)	$\int_0^4 x\,dx$	$\int_2^5 x^2\,dx$	$\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$
b)	$\int_0^3 5x^3\,dx$	$\int_2^4 x^3\,dx$	$\int_3^5 x^3\,dx$
c)	$\int_1^3 (2x+1)\,dx$	$\int_2^4 (x^3+1)\,dx$	$\int_0^2 (3x^2+2x)\,dx$
d)	$\int_0^4 (x^3-x^2+1)\,dx$	$\int_1^2 (x^3-x)\,dx$	$\int_1^2 (x^5+1)\,dx$
e)	$\int_{-3}^{-1} (2x+7)\,dx$	$\int_{-2}^{0} (5x+15)\,dx$	$\int_{-4}^{-1} \left(-\frac{x}{2}+1\right)dx$
f)	$\int_{-7}^{-5} (-0{,}4x-2)\,dx$	$\int_{-4}^{-1} (x^2+3)\,dx$	$\int_{-3}^{-1} (x^2-1)\,dx$
g)	$\int_0^2 (3x-7)\,dx$	$\int_1^3 (2x-9)\,dx$	$\int_{-2}^{4} (0{,}3x-4)\,dx$
h)	$\int_{-1}^{3} (-3x-4)\,dx$	$\int_0^2 (x^2-5)\,dx$	$\int_{-2}^{0} (x^2-5)\,dx$
i)	$\int_{-2}^{+2} (x^3-5)\,dx$	$\int_1^3 (-3x^2+x+1)\,dx$	$\int_{-2}^{0} (-x^2+7)\,dx$

24. Das Vorzeichen des bestimmten Integrals

a) Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse

Wir wollen nochmals auf Grund der vorangegangenen Betrachtungen das Vorzeichen des Flächeninhalts untersuchen. Liegt das zu betrachtende Stück der Kurve der Funktion $y = f(x)$ im ersten oder zweiten Quadranten (Abb. 46), so haben die Ordinaten $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht negative Werte. Da beim Durchlaufen der x-Achse in positiver Richtung die Δx ebenfalls immer positiv sind, haben die Flächeninhalte $m_k \cdot \Delta x$ beziehungsweise $M_k \cdot \Delta x$ der unteren und oberen Rechtecke (vgl. Abschnitt 17) ebenfalls nicht negatives Vorzeichen. Da beim Grenzübergang zum bestimmten Integral das Vorzeichen nicht beeinflußt wird, hat auch das bestimmte Integral kein negatives Vorzeichen. Das Integral liefert das Flächenstück mit positivem Vorzeichen (sofern das Integral nicht gleich 0 ist; das kann aber nur eintreten, wenn die Funktion $f(x) \equiv 0$ ist).

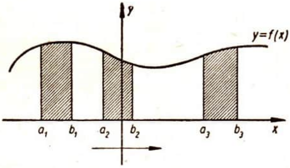

Abb. 46

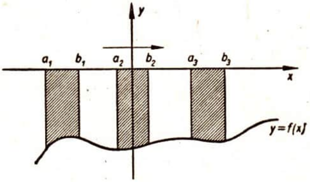

Abb. 47

Beispiel:

$$\int_{-2}^{-1} (2x + 5)\, dx = [x^2 + 5x]_{-2}^{-1} = (1 - 5) - (4 - 10) = 2.$$

Stellen Sie die Funktion auf Millimeterpapier graphisch dar und prüfen Sie das Ergebnis nach!

Verläuft das zu betrachtende Kurvenstück unterhalb der x-Achse (Abb. 47), so sind die Ordinaten $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht positiv. Da die x-Achse wieder in positiver Richtung durchlaufen wird, also $\Delta x > 0$ ist, werden alle Produkte $m_k \cdot \Delta x$ und $M_k \cdot \Delta x$ nicht positiv. Darum wird nach vollzogenem Grenzübergang auch der Wert des bestimmten Integrals negativ (falls es nicht gleich 0 ist — vgl. oben). Das Integral liefert also den Inhalt des Flächenstücks mit negativem Vorzeichen.

Beispiele:

$$\int_{-3}^{1} \left(\frac{x}{2} - 1{,}5\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - 1{,}5\,x\right]_{-3}^{+1} = \left(\frac{1}{4} - 1{,}5\right) - \left(\frac{9}{4} + 4{,}5\right) = -8,$$

$$\int_{3}^{5} (-x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{3}^{5} = \left(-\frac{25}{2} + 10\right) - \left(-\frac{9}{2} + 6\right) = -4.$$

Stellen Sie die Funktionen auf Millimeterpapier dar und prüfen Sie die Ergebnisse nach!

Schneidet im Intervall $a \leqq x \leqq b$ das Kurvenstück die x-Achse (Abb. 48) im Punkt mit der Abszisse x_e von oben kommend, so daß $a < x_e < b$ ist, so ergibt

$\int\limits_a^{x_e} f(x)\,dx$ den Inhalt des Flächenstücks AED mit positivem Vorzeichen und

$\int\limits_{x_e}^{b} f(x)\,dx$ den Inhalt des Flächenstücks EBC mit negativem Vorzeichen.

Wird $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ berechnet, so entsteht die Differenz der oberhalb und unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke; im Sonderfall kann es eintreten, daß das Ergebnis den Wert 0 hat. Soll dagegen das Flächenstück zwischen der Kurve und der x-Achse ermittelt werden, so muß, wenn zwischen den Integrationsgrenzen eine Nullstelle der Funktion liegt, für jedes Teilintervall die Fläche bestimmt und die Summe der absoluten Beträge der Teilintegrale genommen werden.

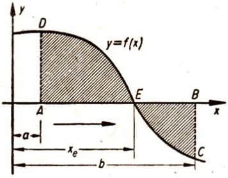

Abb. 48

1. Beispiel:

Die Funktion $y = f(x) = 2x - 4$ hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Es soll das Flächenstück zwischen Kurve und x-Achse innerhalb der Integrationsgrenzen $x = -2$ und $x = 3$ bestimmt werden. Wir bilden die Integrale

$$\int\limits_{-2}^{+2} (2x - 4)\,dx = [x^2 - 4x]_{-2}^{+2} = -16$$

und

$$\int\limits_2^3 (2x - 4)\,dx = [x^2 - 4x]_2^3 = +1.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$F = |F_{-2}^{+2}| + |F_2^3| = |-16| + |+1| = 17.$$

Dagegen liefert $\int\limits_{-2}^{3} (2x - 4)\,dx = -15$ nicht den gesuchten Flächeninhalt.

Was bedeutet dieses Ergebnis geometrisch? Stellen Sie die Funktion auf Millimeterpapier graphisch dar und prüfen Sie das Ergebnis nach!

2. Beispiel:

Zur Bestimmung des Flächeninhalts zwischen der Kurve der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$$

und der x-Achse innerhalb der Integrationsgrenzen $x = -3$ und $x = 4$ muß geschrieben werden

$$F = \left|\int\limits_{-3}^{-2} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_1^3 f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_3^4 f(x)\,dx\right|,$$

weil die Funktion $f(x)$ bei $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ und $x = 3$ Nullstellen hat.

Zusammenfassung: Durch das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ erhält, wenn $a < b$ ist, ein über der x-Achse liegendes Flächenstück das positive, ein unter der x-Achse liegendes Flächenstück das negative Vorzeichen. Liegt zwischen den Integrationsgrenzen a und b eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ und soll der Absolutbetrag der Fläche ermittelt werden, so muß über die Teilintervalle integriert werden.

b) Vertauschung der Integrationsgrenzen. Umlaufsinn

Aus der Festsetzung

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

ergibt sich, wenn die Integrationsgrenzen vertauscht werden, eine Umkehrung des Vorzeichens, das zum Flächeninhalt gehört. Geometrisch bedeutet das, daß die Δx negative Werte haben und demzufolge die Produkte $m_k \cdot \Delta x$ und $M_k \cdot \Delta x$ ihre Vorzeichen umkehren.

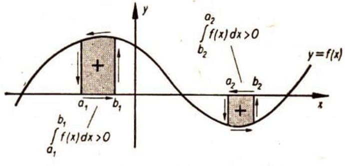

Abb. 49

Danach hat ein unter der x-Achse gelegenes Flächenstück positives Vorzeichen, wenn die obere Integrationsgrenze a kleiner als die untere Integrationsgrenze b ist.

Prüfen Sie dies am Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$ für $a = -3$ und $b = -1$ nach, das heißt, bilden Sie das Integral

$$\int\limits_{-1}^{-3} x^3\,dx!$$

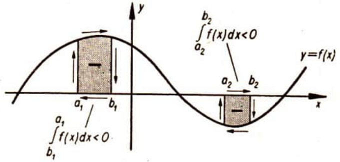

Abb. 50

Zusammenfassung: Legt man dem Rand des Flächenstücks einen **Umlaufsinn** bei, so ergibt sich für ein positives Flächenstück ein positiver Umlaufsinn (entgegen dem Uhrzeiger, vgl. Abb. 49), für ein negatives Flächenstück ein negativer Umlaufsinn (mit dem Uhrzeiger, vgl. Abb. 50).

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Werte der folgenden bestimmten Integrale und deuten Sie das Ergebnis an der graphischen Darstellung!

a) $\int\limits_{-3}^{2} (2x - 1)\,dx$ b) $\int\limits_{-2}^{5} (-0{,}8x + 2)\,dx$ c) $\int\limits_{0}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

d) $\int\limits_{0}^{3} (-x^2 + 4)\,dx$ e) $\int\limits_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 2)\,dx$ f) $\int\limits_{-2}^{0} (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$

g) $\int\limits_{-4}^{4} (2x+1)\,dx$

h) $\int\limits_{1}^{5} \left(\frac{x^2}{4}+2\right) dx + \int\limits_{-5}^{3} \left(\frac{x^2}{4}+2\right) dx$

i) $\int\limits_{-2}^{3} (0{,}6\,x-3)\,dx + \int\limits_{3}^{-5} \left(\frac{3}{5}\,x-3\right) dx$

k) $\int\limits_{-2}^{1} (x-1)\,dx + \int\limits_{1}^{3} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

2. Die Kurven

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 + x - 2$ c) $f(x) = x^2 + x - 6$

schneiden die x-Achse in je zwei Punkten. Berechnen Sie die von dem Parabelbogen und der x-Achse eingeschlossenen Flächen!

3. Die Kurven

a) $f(x) = x^3 - 7x + 6$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ c) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

schneiden die x-Achse in je drei Punkten. Es sind die von der Kurve und der x-Achse begrenzten endlichen Flächen zu berechnen.

4. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen

a) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

und berechnen Sie die von den Kurven und der x-Achse begrenzten endlichen Flächen!

5. Die Werte der folgenden bestimmten Integrale sind zu ermitteln und die Ergebnisse zu deuten.

a) $\int\limits_{5}^{2} x^2\,dx$ b) $\int\limits_{4}^{2} 3x^2\,dx$ c) $\int\limits_{3}^{1} (2x+1)\,dx$

d) $\int\limits_{-5}^{-7} (-0{,}4\,x-2)\,dx$ e) $\int\limits_{2}^{0} (x^3-x)\,dx$ f) $\int\limits_{4}^{2} (-x^2+4)\,dx$

6. Wie groß ist das Segment, das von der Parabel $y = x^2 + 2$ durch die Gerade $y = x + 4$ abgeschnitten wird?

7. Von einem beliebigen Punkte $P_1(x_1;\ y_1)$ der Kurven $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; ... sind Lote auf die Koordinatenachsen zu fällen. In welchem Verhältnis teilen die zugehörigen Kurven die von diesen Loten und den Achsen gebildeten Rechtecke?
Welches Gesetz kann aus den Ergebnissen hergeleitet werden?

8. Zeichnen Sie die Kurven $y = 10 + x(6 - x^2)$ und $y = 10 + x(3 - 2x)$ unter Bestimmung ihrer Extremwerte und Wendepunkte! In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven? Berechnen Sie die von ihnen gemeinsam begrenzte Fläche!

IV. Fortsetzung der Differentialrechnung

25. Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen

Es sei die Funktion $f(x)$ in der Form $y = (5x^3 + 2x^2 - 3)\,(7x^2 + 2)$ gegeben, und es soll deren Differentialquotient bestimmt werden. Die Lösung der Aufgabe ist mit den bisherigen Mitteln (Multiplikation der Klammerausdrücke und Differentiation der ganzen rationalen Funktion) möglich. Da dieses Verfahren in anderen Fällen schwieriger und zum Beispiel bei dem Produkt $f(x) = x \cdot \sin x$ sogar unmöglich ist, soll im folgenden ein anderer Weg gezeigt werden.

Bezeichnen wir die einzelnen Faktoren, die Funktionen von x sind, mit $u(x)$ und $v(x)$, so gilt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Zum Abszissenwert x gehört der Funktionswert

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ und zu einem anderen Abszissenwert $x + \Delta x$ der Funktionswert

$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x).$$

Der Differenzenquotient hat den Wert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Damit man die Differenzenquotienten der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ erhält, ist es zweckmäßig, daß man im Zähler $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$ erst subtrahiert und dann wieder addiert, wodurch der Wert des Zählers keine Veränderung erfährt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

oder
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Die nunmehr auftretenden Quotienten sind die Differenzenquotienten der Funktionen $v(x)$ und $u(x)$. Wird der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ vollzogen, so werden aus den Differenzenquotienten die Differentialquotienten. Gleichzeitig strebt $u(x + \Delta x)$ nach $u(x)$. Damit ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \cdot \frac{dv}{dx} + v(x) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir erkennen, daß für das Produkt zweier Funktionen $y = u \cdot v$ die **Produktregel**

$$y' = u v' + v u'$$

gilt.

Beispiel:

$$y = (5x^3 + 2x^2 - 3)(7x^2 + 2)$$

$$u(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3, \qquad v(x) = 7x^2 + 2.$$

Die Ableitungen sind

$$u'(x) = 15x^2 + 4x, \qquad v'(x) = 14x.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= (5x^3 + 2x^2 - 3) \cdot 14x + (7x^2 + 2)(15x^2 + 4x) \\ &= 175x^4 + 56x^3 + 30x^2 - 34x. \end{aligned}$$

Wird die Funktion $y = (5x^3 + 2x^2 - 3)(7x^2 + 2)$ ausmultipliziert, so erhält man die Funktion
$$y = 35x^5 + 14x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 6,$$

die den gleichen Differentialquotienten hat.

Zusammenfassung: Für die Differentiation des Produktes zweier Funktionen, also für $y = u(x) \cdot v(x)$, gilt die Formel $y' = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$, oder in einprägsamerer Form
$$\boldsymbol{y' = u'v + uv'}.$$

Besteht die gegebene Funktion $y = f(x)$ aus drei Faktoren $u(x)$, $v(x)$ und $w(x)$, gilt also $y = u \cdot v \cdot w$, so läßt sich die gewonnene Regel in folgender Weise verwenden. Zunächst werden die beiden Faktoren $u \cdot v$ als ein Faktor aufgefaßt (wir deuten dies durch die Klammer an). Es gilt also

$$y = (u \cdot v) \cdot w, \qquad y' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w',$$

wobei unter $(u \cdot v)'$ die Ableitung der Klammer verstanden wird.

Berechnen wir $(u \cdot v)'$ ebenfalls mit der Produktregel, so ergibt sich $u' \cdot v + u \cdot v'$, und wir erhalten schließlich

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

In entsprechender Weise ergibt sich auch die Ableitung eines Produkts aus mehr als drei Funktionen.

Beispiel:

Bei der Funktion

$$y = 2x^2(3x+1)(x^2-4)$$

sind

$$u = 2x^2, \qquad v = 3x+1, \qquad w = x^2 - 4.$$

Die Ableitungen sind

$$u' = 4x, \qquad v' = 3, \qquad w' = 2x;$$

damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= 4x \cdot (3x+1)(x^2-4) + 2x^2 \cdot 3 \cdot (x^2-4) + 2x^2 \cdot (3x+1) \cdot 2x \\ &= 30x^4 + 8x^3 - 72x^2 - 16x. \end{aligned}$$

Schreibt man die Ausgangsfunktion nicht in Produktform, sondern ordnet sie nach fallenden Potenzen von x, so führt die Differentiation zum gleichen Ergebnis.

In besonderen Fällen kann es vorkommen, daß die Faktoren $u, v, \ldots$ untereinander gleich sind. Dann läßt sich die Funktion schreiben als $y = [u(x)]^n$, wobei n die Anzahl der gleichen Faktoren angibt.

Beispiel:

$$y = (5x^2+3)^4 = (5x^2+3)(5x^2+3)(5x^2+3)(5x^2+3).$$

Wird die Differentiation nach der Produktregel für mehrere Funktionen durchgeführt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y' = {} & 10x \cdot (5x^2+3)(5x^2+3)(5x^2+3) \\ & + (5x^2+3) \cdot 10x \cdot (5x^2+3)(5x^2+3) \\ & + (5x^2+3)(5x^2+3) \cdot 10x \cdot (5x^2+3) \\ & + (5x^2+3)(5x^2+3)(5x^2+3) \cdot 10x \\ y' = {} & 4(5x^2+3)^3 \cdot 10x. \end{aligned}$$

Wenden wir das im Beispiel durchgeführte Verfahren auf die Funktion $y = [u(x)]^n$ an, so erhalten wir entsprechend

$$y' = [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x) + [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x) + \cdots + [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

oder, da diese Summe n Summanden enthält,

$$y' = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x).$$

Was ergibt sich, wenn die Funktion $u(x) = x$ ist?

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung der folgenden Produkte nach zwei Verfahren!

a) $f(x) = (x+1)(x-1)$ **b)** $f(x) = (x-3)(x-4)$ **c)** $f(x) = (x^2+5)(x^3-x^2)$

d) $f(x) = (x^2+a)(x^2+b)$ **e)** $f(x) = x^2(4x-3)$ **f)** $f(x) = x(x-5)(x^2+3)$

g) $f(x) = (3x^2+2x-4)(x-2)(x^2-1)$ **h)** $f(x) = (1-x)(1-x^2)x^3$

i) $f(x) = \left(\frac{m^2}{2} - m\,x + x^2\right)\left(\frac{m^2}{2} + m\,x + x^2\right)$ k) $f(x) = (x^2 - 2)^2$

l) $f(x) = (3 - 2\,x)^2$ m) $f(x) = (x^2 - 7)^3\,(3\,x + 2)$

2. Leiten Sie den Differentialquotienten von $y = a \cdot f(x)$ mit der Produktregel ab!

3. Es ist zu untersuchen, an welchen Stellen die folgenden Funktionen Extremwerte und Wendepunkte besitzen.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2}\,(4\,x - 7)$ b) $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 5\right)(x^2 - 1)$ c) $f(x) = (2\,x - 3)^3$

26. Die Ableitung der Funktion einer Funktion (mittelbare Funktion)

In der Funktion $y = (a\,x^2 + b)^3$ kann man das Binom ausrechnen. Es besteht aber auch die Möglichkeit, diese Funktion in anderer Weise zu betrachten. Die dritte Potenz ist nicht unmittelbar von der unabhängigen Veränderlichen x, sondern von einer Funktion von x, nämlich von $a\,x^2 + b$, gebildet worden. Bezeichnen wir den Ausdruck $a\,x^2 + b$ mit z, also $z = a\,x^2 + b$, so ist $y = z^3$, das heißt, z ist eine Funktion der Variablen x; die Variable y ist aber wiederum abhängig von z und deshalb eine **Funktion einer Funktion von x.**

Man bezeichnet y in einem solchen Falle als **mittelbare Funktion** von x. Es ist zweckmäßig, die Funktion $z = a\,x^2 + b$ die **innere Funktion** $\varphi(x)$ und die Funktion $y = z^3$ die **äußere Funktion** $f(z)$ zu nennen. In der symbolischen Schreibweise hat dann die Funktion einer Funktion die Form

$$y = f[\varphi(x)].$$

Im folgenden werden zunächst nur ganze rationale Funktionen als innere Funktionen verwendet. Es sind aber auch andere (algebraische und transzendente) Funktionen als solche möglich. Das gleiche gilt auch für äußere Funktionen. Es ist zum Beispiel

$y = \sqrt[3]{a\,x^2 + b\,x + c}$	eine Wurzelfunktion der ganzen rationalen Funktion $a\,x^2 + b\,x + c$;
$y = \log\,(5\,x^2 + 7)$	eine logarithmische Funktion der ganzen rationalen Funktion $5\,x^2 + 7$;
$y = e^{\sin x}$	eine Exponentialfunktion der trigonometrischen Funktion $\sin x$;
$y = \lg[\operatorname{tg}(3\,x + 5)]$	eine logarithmische Funktion der trigonometrischen tg-Funktion, deren Argument die ganze rationale Funktion $3\,x + 5$ ist.

Zur Untersuchung der Eigenschaften solcher mittelbarer Funktionen ist es zweckmäßig, den Differentialquotienten heranzuziehen. Es soll zunächst das Beispiel

$$y = (a\,x^2 + b\,x + c)^3$$

betrachtet werden. Führen wir für $a\,x^2 + b\,x + c$ eine neue Veränderliche z ein, so sind

1. $z = a\,x^2 + b\,x + c$, 2. $y = z^3$.

Wir erteilen der Variablen x den Zuwachs Δx. Dabei wählen wir Δx so, daß der sich daraus ergebende Zuwachs Δz verschieden von Null ist, um später den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ bilden zu können. (Da $z = a\,x^2 + b\,x + c$ eine Parabel darstellt, ist eine entsprechende Wahl von Δx möglich.) Das von z abhängige y ändert sich damit um Δy. Es gilt dann

3. $z + \Delta z = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c,$ 4. $y + \Delta y = (z + \Delta z)^3.$

Die Differenzenquotienten sind daher

5. $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{a\,(x + \Delta x)^2 + b\,(x + \Delta x) + c - a\,x^2 - b\,x - c}{\Delta x} = 2\,a\,x + a \cdot \Delta x + b;$$

6. $$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = 3\,z^2 + 3\,z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2.$$

Aus beiden Differenzenquotienten wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch Multiplikation gewonnen:

7. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = [3\,z^2 + 3\,z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2] \cdot (2\,a\,x + a \cdot \Delta x + b).$$

Durchläuft Δx eine Nullfolge, $\Delta x \to 0$, so geht Δz und damit auch Δy gegen 0. Wird der Grenzübergang durchgeführt, so entstehen aus den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ die Differentialquotienten $\frac{d\,y}{d\,z}$ und $\frac{d\,z}{d\,x}$.

Unter Verwendung des Satzes (3) über Grenzwerte (vgl. S. 13) ergibt sich

8. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} [3\,z^2 + 3\,z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (2\,a\,x + a \cdot \Delta x + b);$$

9. $$\frac{d\,y}{d\,x} = 3\,z^2 \cdot (2\,a\,x + b).$$

Es zeigt sich, daß der gesuchte Differentialquotient das Produkt aus dem Differentialquotienten $3z^2$ der äußeren Funktion $y = z^3$ und dem Differentialquotienten $(2ax + b)$ der inneren Funktion $z = ax^2 + bx + c$ ist. Setzen wir für z den ursprünglichen Wert wieder ein, so erhalten wir

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 3\,(a\,x^2 + b\,x + c)^2\,(2\,a\,x + b).$$

Wir führen die Herleitung des Differentialquotienten nunmehr für die beliebige Funktion einer Funktion $y = f[\varphi(x)]$ durch. Entsprechend dem obigen Beispiel gilt nun für einen beliebigen Kurvenpunkt mit der Abszisse x:

1. $z = \varphi(x),$ 2. $y = f(z)$

und für einen Kurvenpunkt mit der Abszisse $x + \Delta x$

3. $z + \Delta z = \varphi(x + \Delta x),$ 4. $y + \Delta y = f(z + \Delta z).$

Bei den von uns betrachteten Funktionen ist Δz für genügend kleine Δx-Werte niemals gleich Null.

Die Differenzenquotienten sind dann

5. $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}, \qquad 6. \quad \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Aus beiden Differenzenquotienten wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Produkt endlicher Größen gewonnen:

7. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Differenzenquotient der zusammengesetzten Funktion (Funktion von einer Funktion). Auf der rechten Seite steht das Produkt aus dem Differenzenquotienten der äußeren Funktion und dem Differenzenquotienten der inneren Funktion.

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ muß zwangsläufig auch $\Delta z \to 0$ streben und damit wiederum $\Delta y \to 0$ gehen, so daß entsteht

8. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \qquad \text{oder}$$

9. $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(z)}{dz} \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{dx}; \qquad \frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \frac{d\,f(z)}{dz} \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{dx}.$$

Zusammenfassung: Der Differentialquotient der Funktion einer Funktion $y = f[\varphi(x)] = f(z)$ ist gleich dem Produkt aus dem Differentialquotienten $\frac{d\,f(z)}{dz}$ der äußeren Funktion und dem Differentialquotienten $\frac{d\,\varphi(x)}{dx}$ der inneren Funktion:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}.$$

Man bezeichnet diese Regel als **Kettenregel.**

Für mehr als zwei Funktionen, zum Beispiel $y = f(z)$, $z = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$, also $y = f(\varphi[\psi(x)])$, gilt entsprechend $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Es sei darauf hingewiesen, daß die in der Kettenregel auftretenden Faktoren die Differentialquotienten der ineinandergeschachtelten Funktionen sind.

Beispiele:

1. $y = (5x^2 + 3)^4$. Wird der in der Klammer stehende Ausdruck mit z bezeichnet, so ist

$$y = z^4 \qquad \text{mit} \quad z = 5x^2 + 3,$$
$$\frac{dy}{dz} = 4z^3, \qquad \frac{dz}{dx} = 10x,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 4z^3 \cdot 10x.$$

Wird für z der Wert $5x^2 + 3$ wieder eingesetzt, so ergibt sich $\frac{dy}{dx} = 4(5x^2+3)^3 \cdot 10x$.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem letzten Beispiel des Abschnittes 25!

2. $y = (3x - 1)(0{,}6x^2 + 7x - 4)^3$. Wir setzen

$u = 3x - 1$ und $v = (0{,}6x^2 + 7x - 4)^3$;

dann ist $u' = 3$ und $v' = 3(0{,}6x^2 + 7x - 4)^2 \cdot (1{,}2x + 7)$ (mit Anwendung der Kettenregel).

Aus der Produktregel ergibt sich

$$y' = (0{,}6x^2 + 7x - 4)^3 \cdot 3 + (3x - 1) \cdot 3(0{,}6x^2 + 7x - 4)^2 \cdot (1{,}2x + 7)$$
$$= 3(0{,}6x^2 + 7x - 4)^2 (4{,}2x^2 + 26{,}8x - 11).$$

3. $y = [u(x)]^n$. Aus $y = z^n$ mit $z = u(x)$ folgt

$$\frac{dy}{dz} = n \cdot z^{n-1}, \qquad \frac{dz}{dx} = u'(x).$$

Daraus ergibt sich $\frac{dy}{dx} = n \cdot z^{n-1} \cdot u'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$.

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der letzten Gleichung in Abschnitt 25!

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = (7x^3 + 5)^4$ **b)** $f(x) = (8x^2 - 3)^5$ **c)** $f(x) = (a x^3 + b)^3$

d) $f(x) = (a - b x^2)^2$ **e)** $f(x) = (3 + 4x^2 - x^3)^3$ **f)** $f(x) = (a x^3 + b x^2 + c x + d)^3$

g) $f(x) = (5x^2 + 3)^2 (3x^2 - 6)^3$ **h)** $f(x) = (7x^2 - 3)^2 \left(\frac{11}{x} + 6\right)^3 \cdot 4x^3$

i) $f(x) = (a x^n + b)^m (c x^3 + b x)^{m-4}$

2. Leiten Sie den Differentialquotienten von $y = (x^m)^n$ mit der Kettenregel **ab!**

Anleitung: Setzen Sie $x^m = z$!

27. Die Ableitung der Wurzelfunktion

Um den Differentialquotienten der Funktion $y = \sqrt[3]{2x}$ zu bestimmen, potenzieren wir beide Seiten der Funktion; wir erhalten $y^3 = 2x$. Jede Seite der Gleichung fassen wir als Funktion auf; rechts steht eine lineare Funktion von x, links ist y^3 eine Funktion von y, also eine mittelbare Funktion von x. Differenzieren wir die Funktionen auf jeder Seite der Gleichung, dann müssen die Differentialquotienten ebenfalls gleich sein[1]). Es ist $\frac{d(2x)}{dx} = 2$ und $\frac{dy^3}{dx} = \frac{dy^3}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot y'$ (nach der Kettenregel). Es ergibt sich also (unter der Voraussetzung, daß $y = \sqrt[3]{2x} \neq 0$ ist):

$$3y^2 y' = 2 \quad \text{oder} \quad y' = 2 \cdot \frac{1}{3y^2}, \quad \text{das heißt} \quad y' = \frac{2}{3(\sqrt[3]{2x})^2}.$$

Entsprechend bestimmen wir den Differentialquotienten der Funktion $y = \sqrt[q]{x}$. Nach dem Potenzieren erhalten wir $y^q = x$. Dabei ist y^q eine Funktion von y, das selbst wieder eine Funktion von x ist. Durch Differentiation der beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = 1 \quad \text{oder} \quad y' = \frac{1}{q \cdot y^{q-1}},$$

das heißt

$$y' = \frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}}.$$

Wird die Funktion $y = \sqrt[q]{x}$ in der Form $y = x^{\frac{1}{q}}$ und ihr Differentialquotient in der Form

$$y' = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

geschrieben, so erkennen wir, daß für die Ableitung der Funktion $y = x^{\frac{1}{q}}$ dieselbe Formel gilt wie für die Ableitung $y' = n x^{n-1}$ der ganzen rationalen Funktion $y = x^n$.

In gleicher Weise läßt sich der Differentialquotient der Funktion $y = \sqrt[q]{x^p}$ oder $y = x^{\frac{p}{q}}$ bestimmen. Nach dem Potenzieren lautet die Abhängigkeit $y^q = x^p$. Die

---

[1]) Weisen Sie nach, daß bei gleichen Differentialquotienten die Stammfunktionen nicht gleich zu sein brauchen!

Differentiation auf beiden Seiten der Gleichung nach x ergibt unter Verwendung der Kettenregel auf der linken Seite

$$q \cdot y^{q-1}\, y' = p \cdot x^{p-1} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{p\, x^{p-1}}{q\, y^{q-1}},$$

das heißt

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q}\, x^{p-1-\left(p-\frac{p}{q}\right)},$$

oder

$$y' = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Wir haben nunmehr bewiesen: **Das Bildungsgesetz des Differentialquotienten für die Funktion $y = x^n$**

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

gilt für ganze und gebrochene positive Exponenten n.

Beispiele:

1.
$$y = \sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}},$$

$$y' = \frac{4}{7}\, x^{\frac{4}{7}-1} = \frac{4}{7}\, x^{-\frac{3}{7}} = \frac{4 \cdot x^{\frac{4}{7}}}{7 \cdot x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{4}{7}}} = \frac{4}{7x} \sqrt[7]{x^4}.$$

Begründen Sie eingehend jeden Schritt dieses Rechnungsganges!

2. $\quad y = \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}}, \qquad y' = \frac{1}{3}\,(2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2, \qquad y' = \frac{2}{3}\,(2x)^{-\frac{2}{3}}.$

Beachten Sie die Kettenregel! Dieses Ergebnis ist mit dem Ergebnis am Anfang dieses Abschnitts zu vergleichen.

3. $\quad y = 2x\sqrt{3x}.$

a) $y = 2\sqrt{3x^3} = 2\,(3x^3)^{\frac{1}{2}},$

$y' = 2 \cdot \frac{1}{2}\,(3x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 9x^2 = 3\sqrt{3x};$

b) $y = 2\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}},$

$y' = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3x};$

c) $u = 2x, \qquad v = (3x)^{\frac{1}{2}},$

$u' = 2, \qquad v' = \frac{3}{2}\,(3x)^{-\frac{1}{2}},$

$$y' = (3x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + 2x \cdot \frac{3}{2}\,(3x)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3x} + 3x\,\frac{\sqrt{3x}}{3x} = 3\sqrt{3x}.$$

Geben Sie an, nach welchen Differentiationsverfahren die Ergebnisse in a), b) und c) gewonnen wurden!

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{a\,x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{a\,x}{b^2}}$ e) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

g) $f(x) = \frac{c^2\,d}{\sqrt[3]{a\,x^2}}$ h) $f(x) = \sqrt{12 - x^2}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 6\,x^2}$

k) $f(x) = \sqrt[3]{(7\,x + 5)^2}$ l) $f(x) = \sqrt{(5\,x + 4)\,(2\,x^2 - 3)}$ m) $f(x) = (2\,x - 3)\sqrt{7\,x^2 - 4}$

2. Einer Kugel mit dem Radius r soll der Zylinder einbeschrieben werden, der die größte Mantelfläche besitzt. Es ist der Radius des Zylinders zu bestimmen.

3. Welche Maße besitzt der Zylinder mit maximaler Oberfläche, der einer Kugel vom Radius $r = 5$ cm einbeschrieben wird?

4. Zum Bau eines an den Stirnwänden offenen Schuppens sollen zwei senkrecht aufzustellende Bretterwände mit der Höhe $a = 3{,}5$ m durch zwei Wellbleche von der Breite $b = 4{,}65$ m ein Satteldach erhalten. Die Bleche sollen außen jeweils 15 cm überstehen. Welchen Abstand müssen die senkrechten Wände haben, damit das Fassungsvermögen des Schuppens am größten wird?
Anleitung: Es ist der größte Querschnitt der Stirnwand zu berechnen.

5. Welche Größe muß die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit gegebener Fläche F annehmen, wenn der Umfang des Dreiecks am kleinsten werden soll?

6. Einem Kreis mit dem Halbmesser r ist ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben. Bestimmen Sie die Längen seiner Seiten, wenn der Umfang ein Maximum werden soll!

7. An zwei geraden Straßen, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden, liegen die Orte A 30 km bzw. B 45 km von der Kreuzung entfernt. Von A fährt ein Radfahrer mit der Geschwindigkeit $v_1 = 10$ km h^{-1} zur Kreuzung. Zur gleichen Zeit startet ein zweiter Radfahrer von B, der die Geschwindigkeit $v_2 = 12$ km h^{-1} hat. Wann haben beide Radfahrer den geringsten Abstand voneinander?

28. Die Ableitung der reziproken Funktion

Zu der Funktion $f(x) = 7\,x^4 + 3$ ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{7\,x^4 + 3}$ die sogenannte **reziproke Funktion**; zwischen beiden besteht also die Beziehung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Um den Differentialquotienten der Funktion $y = \frac{1}{f(x)}$ zu bestimmen, bilden wir zunächst für zwei Nachbarpunkte der Kurve mit den Abszissen $x + \Delta x$ und x die Differenz der Ordinaten $\frac{1}{f(x + \Delta x)}$ und $\frac{1}{f(x)}$. Sie ist der Ordinatenzuwachs Δy:

$$\Delta y = \frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)},$$

$$\Delta y = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)} = -[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}.$$

Der Differenzenquotient ist dann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}.$$

Durchläuft Δx eine Nullfolge, $\Delta x \to 0$, so wird der erste Quotient der rechten Seite zur Ableitung der Funktion $f(x)$, und im Nenner des zweiten Quotienten tritt das Quadrat der Funktion $f(x)$ auf:

$$\frac{dy}{dx} = -f'(x) \cdot \frac{1}{[f(x)]^2} \quad \text{oder} \quad y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Es zeigt sich, daß die Differentiation der reziproken Funktion $\frac{1}{f(x)}$ zurückgeführt worden ist auf die Differentiation der Funktion $f(x)$.

Beispiele:

1. $y = \frac{1}{2x+3}$. Aus $f(x) = 2x + 3$ folgt $f'(x) = 2$ und damit $y' = -\frac{2}{(2x+3)^2}$.

2. $y = \frac{3}{x-5}$. Aus $f(x) = \frac{1}{3}(x-5)$ folgt $f'(x) = \frac{1}{3}$ und damit

$$y' = -\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-5}{3}\right)^2} = -\frac{3}{(x-5)^2}.$$

Bilden Sie die Ableitung der Funktion $y = x^{-n}$ unter Verwendung der Regel für die reziproke Funktion, wenn $f(x) = x^n$ gesetzt wird! Prüfen Sie am Ergebnis, ob die Regel für die Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ auch für negative Exponenten n gilt!

Zusammenfassung: Die Ableitung der Funktion $y = \frac{1}{f(x)}$ ist

$$y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Das Bildungsgesetz für die Ableitung der Funktion $y = x^n$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

gilt für ganze und gebrochene, positive und negative Exponenten n.

29. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Sind die beiden Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gegeben, so ist ihr Quotient $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, wenn $v(x)$ nicht identisch Null ist. Schreiben wir diese Funktion als $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$, so können wir auf sie die Produktregel und dabei außerdem für den zweiten Faktor die Regel für die reziproke Funktion anwenden. Besitzt $u(x)$ die Ableitung $u'(x)$ und $\frac{1}{v(x)}$ die Ableitung $-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$, so ergibt sich für

$$f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot u'(x) + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}\right)$$

$$= \frac{u'(x)}{v(x)} \cdot \frac{v(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{v(x)\,u'(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Formen wir den Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ um in $f(x) \cdot v(x) = u(x)$ und wenden wir bei der Differentiation dieser Gleichung auf der linken Seite die Produktregel an, so erhalten wir

$$v(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot v'(x) = u'(x).$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x) \cdot v'(x)}{v(x)} \qquad \text{mit } v(x) \neq 0.$$

Ersetzen wir hierin $f(x)$ durch $\frac{u(x)}{v(x)}$, so ergibt sich wieder

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Beispiele:

1.
$$y = \frac{x-5}{x}.$$

Wir setzen $u(x) = x - 5$ und $v(x) = x$; die Differentialquotienten sind dann $u'(x) = 1$, $v'(x) = 1$.

Damit ergibt sich

$$y' = \frac{x \cdot 1 - 1\,(x-5)}{x^2} = \frac{5}{x^2}.$$

Differenzieren Sie die Funktion $y = 1 - \frac{5}{x}$ auch mit den Regeln für die Potenzfunktion oder die reziproke Funktion!

2.
$$y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{2x + 1}$$

$$u(x) = 2x^2 - 2x + 3, \qquad v(x) = 2x + 1,$$
$$u'(x) = 4x - 2, \qquad v'(x) = 2,$$
$$y' = \frac{(2x+1)(4x-2) - (2x^2 - 2x + 3) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4(x^2 + x - 2)}{(2x+1)^2}.$$

Zusammenfassung: Für die Differentiation des Quotienten zweier Funktionen, also für $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, gilt unter der Voraussetzung, daß $v(x)$ nicht identisch Null ist,

$$y' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$

oder in einprägsamerer Form

$$\boldsymbol{y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Man bezeichnet diese Regel als **Quotientenregel.**

Vergleichen Sie den Zähler dieser Form mit der Kurzform der Produktregel auf Seite 73!

Im Spezialfall kann $u(x) = 1$ und $v(x) = x^{\frac{p}{q}}$ sein, so daß

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = x^{-\frac{p}{q}}$$

ist. Beweisen Sie erneut mit Hilfe der Quotientenregel, daß die Formel $y' = n \cdot x^{n-1}$ für $y = x^n$ auch für negative (ganze und gebrochene) Exponenten n gilt!

Aufgaben

1. Es ist die erste Ableitung der folgenden Funktionen zu bestimmen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{1}{(x^2+5)(x-3)}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-3)(x+2)}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{4x^3}$ h) $f(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{2x-1}$ i) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-4}$

2. Es ist die erste Ableitung der folgenden Funktionen zu bestimmen.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x-4}{4x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ e) $f(x) = \dfrac{x+a}{ax+b}$ f) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{1+x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-7x+12}$ h) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2-5x+14}$ i) $f(x) = \dfrac{x^4-ax^3+b}{bx^4}$

k) $f(x) = \left(\dfrac{a-x^2}{a+x^2}\right)^3$ l) $f(x) = \left(\dfrac{x-6}{x+5}\right)^2$ m) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{(x+2)(x-5)}$

n) $f(x) = \dfrac{5-2x^2+4x^3}{(x^2-2)(x+4)^2}$ o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{24-x^3}{25+x^2}}$ p) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3x+8}{2x-9}}$

q) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^3-16}}{7x^2+11}$ r) $f(x) = \dfrac{b+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{b-x}}$ s) $f(x) = \dfrac{3x^4-2x}{2x+\sqrt{x^2+x-1}}$

3. Zwei neu errichtete Werke sollen aus einer geradlinig verlaufenden Hochspannungsleitung mit Strom versorgt werden. An welcher Stelle der Hochspannungsleitung müßte die gemeinsame Transformatorenstation gebaut werden, wenn die Summe der beiden Leitungen von der Transformatorenstation zu den Werken möglichst klein werden soll?

Das Werk A hat von der Hochspannungsleitung den Abstand 5 km, das Werk B den Abstand 2 km. Die Fußpunkte der von den Werken auf die Leitung gefällten Lote sind voneinander 7,2 km entfernt. Es ist eine Skizze zu entwerfen.

4. Von einem Wasserwerk aus soll zu den Wirtschaftsgebäuden einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft eine Wasserleitung gebaut werden. Außerdem soll ein abseits der Hauptleitung gelegenes Nebengehöft der Produktionsgenossenschaft mit Wasser versorgt werden. Das Gelände ermöglicht ein geradliniges Verlegen der Leitungen.

Das Nebengehöft ist von der Hauptleitung 1,1 km entfernt; der Fußpunkt des vom Nebengehöft auf die Hauptleitung gefällten Lotes hat vom Wirtschaftsgebäude die Entfernung 0,6 km. Die Hauptleitung ist 5,5 km lang. Es ist eine Skizze zu entwerfen.

Da ein wesentlicher Teil der anfallenden Arbeiten in Gemeinschaftsarbeit durchgeführt wird, werden die Kosten für die Hauptleitung auf 28,— DM je Meter, für die entlastete Hauptleitung (von der Abzweigung bis zu den Wirtschaftsgebäuden) auf 23,— DM je Meter und für die Nebenleitung auf 13,— DM je Meter veranschlagt. Es ist zu berechnen, an welcher Stelle der Hauptleitung die Abzweigung vorgenommen werden müßte, wenn die Kosten möglichst niedrig sein sollen.

V. Die gebrochene rationale Funktion

30. Null- und Unendlichkeitsstellen

Die allgemeine Form der gebrochenen rationalen Funktion ist (vgl. Abschnitt 2)

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}.$$

Darin sind die Zählerfunktion $g(x)$ und die Nennerfunktion $h(x)$ ganze rationale Funktionen.

Die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der gebrochenen rationalen Funktion $f(x)$ hängen von den Nullstellen und dem Verhalten im Unendlichen der Zähler- und der Nennerfunktion ab.

Beispiel:

Die Funktion $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 7x + 10}$ hat die Zählerfunktion $g(x) = x - 3$ und die Nennerfunktion $h(x) = x^2 - 7x + 10$. Die Zählerfunktion $g(x)$ wird Null für $x_1 = 3$. An dieser Stelle hat die Nennerfunktion $h(x)$ den Wert $h(x_1) = -2$. Die gegebene Funktion $f(x)$ hat demnach an der Stelle $x_1 = 3$ den Wert $f(x_1) = \frac{0}{-2} = 0$.

Wir nennen $x_1 = 3$ eine **Nullstelle der gebrochenen rationalen Funktion** $f(x)$.

Die Nennerfunktion $h(x)$ hat an den Stellen $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$ den Wert Null. Die Zählerfunktion $g(x)$ ist an diesen Stellen $g(x_2) = -1$ beziehungsweise $g(x_3) = 2$. Die gegebene Funktion $f(x)$ hat bei Annäherung an die Stellen $x_2 = 2$ beziehungsweise $x_3 = 5$ demnach Werte, die über alle Grenzen wachsen.

Wir nennen $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$ **Unendlichkeitsstellen oder Pole der gebrochenen rationalen Funktion** $f(x)$.

Zusammenfassung: Eine gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$ ist. Sie hat an der Stelle x_1 gewiß eine Unendlichkeitsstelle (Pol), wenn $g(x_1) \neq 0$ und $h(x_1) = 0$ ist. Ist an einer Stelle x_2 sowohl $g(x_2) = 0$ als auch $h(x_2) = 0$, so kann man zunächst über das Verhalten von $f(x)$ keine Aussage treffen; es muß dann untersucht werden, ob für $f(x)$ an der Stelle x_2 ein Grenzwert existiert.

31. Verhalten im Unendlichen

Untersuchen wir das Verhalten der gebrochenen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 7x + 10}$$

für absolut sehr große Werte der Variablen x, so erkennen wir, daß der Absolutbetrag der Zählerfunktion $g(x)$ für $x \to \pm\infty$ über alle Grenzen wächst. Für die Nennerfunktion $h(x)$ gilt das gleiche. Wir stellen daher fest, daß der Wert der gegebenen Funktion $f(x)$ für absolut sehr große Abszissen x noch nicht angegeben werden kann. Zu diesem Zwecke soll eine allgemeine Untersuchung durchgeführt werden.

a) Ist in der gebrochenen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}, \qquad a_m \neq 0,\ b_n \neq 0,$$

die Zählerfunktion von höherem Grad als die Nennerfunktion, also $m > n$ (unecht gebrochene rationale Funktion), so dividieren wir Zähler und Nenner durch x^n und erhalten

$$f(x) = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \cdots + a_m x^{m-n}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \cdots + b_n}.$$

Für $x \to +\infty$ wächst im Zähler mindestens das letzte Glied $a x^{m-n}$ und damit der ganze Zähler über alle Grenzen, während der Nenner den Grenzwert b_n annimmt.

Es ist daher

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, wobei das Vorzeichen von dem Vorzeichen des Bruches $\frac{a_m}{b_n}$ abhängt;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, wobei das Vorzeichen nicht nur von dem Vorzeichen des Bruches $\frac{a_m}{b_n}$, sondern auch davon abhängt, ob $(m - n)$ gerade oder ungerade ist.

b) Ist $m < n$ (echt gebrochene rationale Funktion), so dividieren wir Zähler und Nenner durch x^m und erhalten

$$f(x) = \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a^2}{x^{m-2}} + \cdots + a_m}{\frac{b_0}{x^m} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_2}{x^{m-2}} + \cdots + b_n x^{n-m}}.$$

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Zähler dem endlichen Wert a_m, während der Nenner über alle Grenzen wächst. Über das Vorzeichen des Nenners brauchen wir keine Aussage zu machen. Es ist daher

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

c) Ist $n = m$ (unecht gebrochene rationale Funktion), so dividieren wir Zähler und Nenner durch x^n und erhalten

$$f(x) = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \cdots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \cdots + b_n}.$$

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Zähler dem endlichen Wert a_n, der Nenner dem endlichen Wert b_n. Es ist daher

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}.$$

Bei den Untersuchungen der Fälle b) beziehungsweise c) ergibt sich, daß der Funktionswert $f(x)$ dem Wert 0 beziehungsweise dem Wert $\frac{a_n}{b_n}$ zustrebt, wenn die Veränderliche x absolut sehr große Werte annimmt. In der graphischen Darstellung nähert sich die Kurve im Falle b) immer mehr der x-Achse. Im Falle c) nähert sich der Funktionswert dem Wert $\frac{a_n}{b_n}$, also die Kurve einer Parallelen zur x-Achse im Abstand $\frac{a_n}{b_n}$. Geraden, die neben einer sich ins Unendliche erstreckenden Kurve herlaufen und deren Abstand von der Kurve schließlich kleiner als jede noch so kleine Strecke wird, nennt man **Asymptoten.** Im Falle b) ist dies die x-Achse, im Falle c) die Parallele dazu im Abstand $\frac{a_n}{b_n}$.

Zusammenfassung: Zur Untersuchung einer gebrochenen rationalen Funktion auf Unendlichkeitsstellen dividiert man Zähler und Nenner durch die höchste Potenz von x, die sowohl im Zähler als auch im Nenner enthalten ist; dann führt man den Grenzübergang $x \to \pm\infty$ durch.

Beispiele:

1. Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 5}{x^2 + 2} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Da der Grad $m = 3$ der Zählerfunktion größer ist als der Grad $n = 2$ der Nennerfunktion, dividieren wir Zähler und Nenner durch x^2 und erhalten

$$f(x) = \frac{x + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = -\infty.$$

Für absolut sehr große x-Werte nimmt also die Funktion $f(x)$ ebenfalls absolut sehr große Werte an.

2. Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{4 - 3x + 2x^2}{1 - x + x^2 - x^3} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Da der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners, dividieren wir Zähler und Nenner durch x^2 und erhalten

$$f(x) = \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - x}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - x} = 0.$$

Die Kurve nähert sich **asymptotisch** der x-Achse.

Überlegen Sie, ob die Annäherung an die x-Achse durch positive oder negative Funktionswerte erfolgt!

3. Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Nach Division durch x^2 ergibt sich aus $f(x) = \dfrac{2 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$, daß $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ ist.

Die Kurve nähert sich der Geraden, die im Abstand 2 parallel zur x-Achse verläuft. Diese Gerade ist die **Asymptote.**

Welche Aussagen lassen sich über die Annäherung der Kurve an die Asymptote machen? Untersuchen Sie nunmehr selbst das Beispiel zu Anfang dieses Abschnitts!

32. Kurvenuntersuchungen

Die Kurvenuntersuchungen für gebrochene rationale Funktionen erfolgen in der gleichen Weise wie für ganze rationale Funktionen, bei denen die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen, das Verhalten im Unendlichen, die Lage der ausgezeichneten Punkte und das allgemeine Verhalten der Kurve behandelt wurden (vgl. Abschnitt 13). Hinzugefügt werden noch die Betrachtungen über die Unendlichkeitsstellen (Pole) der Funktion.

1. Beispiel:

Wir untersuchen (vgl. Abb. 51) den Verlauf der Kurve der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x - 1}.$$

a) Schnittpunkte mit den Achsen

Der Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse ergibt sich für $x = 0$. Wir erhalten $y = 0$. Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse ergeben sich, wenn die Zählerfunktion $g(x) = x^3 - x^2 - 6x$ gleich Null gesetzt wird. Dabei muß die Nennerfunktion $h(x)$ an den Nullstellen von $g(x)$ verschieden von Null sein.

Aus der Gleichung $x^3 - x^2 - 6x = 0$ oder $x(x^2 - x - 6) = 0$ folgt

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 3 \qquad \text{und} \qquad x_3 = -2.$$

Die Nennerfunktion $h(x)$ ist an diesen Stellen von Null verschieden. Die Nullstellen der Funktion $f(x)$ liegen also bei den Abszissen $x_1 = 0$; $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.

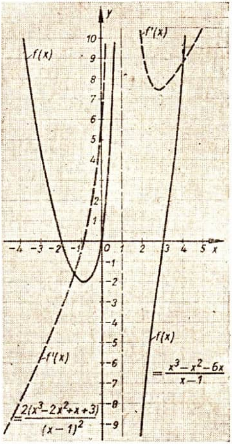

Abb. 51

b) Verhalten im Unendlichen

Um das Verhalten im Unendlichen zu ermitteln, wenden wir die Ergebnisse des Abschnittes 31 an. Da der Grad der Nennerfunktion niedriger ist als der der Zählerfunktion, müssen Zähler und Nenner durch die höchste Potenz des Nenners, also durch x dividiert werden. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Aus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - x - 6}{1 - \frac{1}{x}} = \infty$ folgt, daß die Kurve der Funktion für absolut sehr große x-Werte Funktionswerte annimmt, die über alle Grenzen wachsen.

c) Lage der ausgezeichneten Punkte

Zur Berechnung der ausgezeichneten Punkte, das heißt der Maxima, Minima und Wendepunkte, benötigen wir die Ableitungen der gegebenen Funktion $f(x)$. Unter

Verwendung der Quotientenregel (vgl. Abschnitt 29) ergeben sich

$$f'(x) = \frac{2\,(x^3 - 2\,x^2 + x + 3)}{(x-1)^2} \quad \text{sowie} \quad f''(x) = \frac{2\,(x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 7)}{(x-1)^3}.$$

An den Abszissen der Extremwerte der Funktion $f(x)$ muß $f'(x)$ gleich Null sein. Da aber $f'(x)$ wiederum eine gebrochene rationale Funktion ist, brauchen wir nur den Zähler von $f'(x)$ zu untersuchen und festzustellen, ob an dessen Nullstellen der Nenner verschieden von Null ist. Es besteht daher die Aufgabe, die Gleichung

$$x^3 - 2\,x^2 + x + 3 = 0$$

zu lösen, was auf graphischem Wege geschehen kann.

Führen Sie dies als Übungsaufgabe durch und prüfen Sie, ob $(x-1)^2$ für die erhaltenen Werte von Null verschieden ist!

Wir stellen die Wertetabelle der Funktion $f'(x)$ auf und geben der Vollständigkeit halber die von $f(x)$ ebenfalls an. Die Werte für $x = +1$ werden durch eine spätere Betrachtung ermittelt.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
y'	-12	$-9{,}8$	$-7{,}8$	$-5{,}6$	$-3{,}3$	$-0{,}5$	$+6$		$+10$	$+7{,}5$	$+8{,}7$	$+10{,}4$	$+12{,}2$
y	$+31$	$+20$	$+11{,}2$	$+4{,}5$	0	-2	0		-8	0	$+8$	$+17{,}5$	$+28{,}8$

Aus der Abbildung 51 ergibt sich, daß die Nullstelle für $f'(x)$ in der Nähe von $x = -1$ liegt. Aus der Tabelle liest man ab, daß eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 2\,x^2 + x + 3 = 0$ zwischen 0 und -1, und zwar sehr nahe bei -1 liegt. Ein Näherungswert ist daher etwa $-0{,}9$. Unterscheidet sich nun der wahre Wert um die kleine Größe δ vom Näherungswert, so ist $x_4 = -0{,}9 + \delta$. Es kommt nun darauf an, δ zu bestimmen. Es ist

$$(-0{,}9 + \delta)^3 - 2\,(-0{,}9 + \delta)^2 + (-0{,}9 + \delta) + 3 = 0,$$

$$-0{,}249 + 7{,}03\delta - 4{,}7\,\delta^2 + \delta^3 = 0.$$

Da δ klein ist, können die Glieder δ^2 und δ^3 vernachlässigt werden (vgl. Abschnitt 3). Man erhält dann

$$7{,}03\delta - 0{,}249 \approx 0,$$

$$\delta \approx +0{,}035.$$

Der verbesserte Wert von x_4 ist demnach

$$x_4 = -0{,}9 + 0{,}035 = -0{,}865.$$

Der zugehörige Ordinatenwert ist $y_4 = -2{,}03$. Wird x_4 in $f''(x)$ eingesetzt, so ergibt sich $f''(x_4) = 1{,}93 > 0$, das heißt bei $x_4 = -0{,}865$, $y_4 = -2{,}03$ liegt ein Minimum.

Stellt man die Wertetabelle für y'' auf, so erkennt man, daß in der Nähe von $x_2 = 3$ eine Nullstelle von $f''(x)$ liegt. Ein besserer Wert ist $x_5 = 2{,}82$. An der Stelle $x_5 = 2{,}82$, $y_5 = -1{,}35$ hat die Kurve einen Wendepunkt, da $f'''(x_5)$ verschieden von Null ist.

Prüfen Sie dies nach! Am Wendepunkt muß y' einen Extremwert haben; prüfen Sie auch dieses an der Kurve (vgl. Abb. 51) und an der Wertetabelle für y' nach!

d) Unendlichkeitsstellen (Pole)

Zur Bestimmung der Unendlichkeitsstellen müssen die Abszissenwerte gesucht werden, für die die Nennerfunktion $h(x) = x - 1$ den Wert Null hat und der Zähler von Null verschieden ist. Aus $x_6 - 1 = 0$ folgt $x_6 = +1$.

Für diesen Wert hat der Zähler den Wert -6. Die Unendlichkeitsstelle der Funktion $f(x)$ liegt demnach beim Abszissenwert $+1$. Da es wertvoll ist, zu wissen, wie die Funktion bei $x \to 1$ dem Unendlichen zustrebt, sollen zwei Grenzwertbetrachtungen vorgenommen werden. Um uns von links der Stelle $x = 1$ zu nähern, setzen wir zunächst für x die Zahl $1 - \delta$ ein, $\delta > 0$, und lassen dann $\delta \to 0$ streben. Es ergibt sich

$$f(1 - \delta) = \frac{(1-\delta)^3 - (1-\delta)^2 - 6(1-\delta)}{(1-\delta) - 1}$$
$$= \frac{-\delta^3 + 2\delta^2 + 5\delta - 6}{-\delta} = \delta^2 - 2\delta - 5 + \frac{6}{\delta},$$

woraus folgt, daß

$$\lim_{\delta \to 0} f(1 - \delta) = \lim_{\delta \to 0}\left(\delta^2 - 2\delta - 5 + \frac{6}{\delta}\right) = +\infty \text{ ist.}$$

Um uns von rechts der Stelle $x = 1$ zu nähern, setzen wir zunächst für x die Zahl $1 + \delta$ ein, $\delta > 0$, und lassen dann wiederum $\delta \to 0$ streben. Es ergibt sich

$$f(1 + \delta) = \frac{(1+\delta)^3 - (1+\delta)^2 - 6(1+\delta)}{(1+\delta) - 1} = \frac{\delta^3 + 2\delta^2 - 5\delta - 6}{\delta}$$
$$= \delta^2 + 2\delta - 5 - \frac{6}{\delta}.$$

woraus folgt, daß

$$\lim_{\delta \to 0} f(1 + \delta) = \lim_{\delta \to 0}\left(\delta^2 + 2\delta - 5 - \frac{6}{\delta}\right) = -\infty \text{ ist.}$$

Wir erkennen, daß bei der Annäherung von links an den Pol $x_6 = +1$ die Funktion $f(x)$ sehr große positive Werte annimmt, während sie bei der Annäherung von rechts negativen Werten von sehr großem Absolutbetrag zustrebt.

Aus unseren Grenzbetrachtungen ergibt sich also, daß die Funktion $f(x)$ für $x \to 1$ zwei verschiedenen Werten, nämlich $+\infty$ und $-\infty$, zustrebt; der Funktionswert an der Stelle $x = 1$ ist nicht angebbar. Wird die Kurve in Richtung wachsender x-Werte durchlaufen, so wird sie bei $x = 1$ gewissermaßen einen Sprung von $+\infty$ nach $-\infty$ machen; die Kurve kann also nicht in einem Zuge gezeichnet werden, sie erleidet eine Unterbrechung. Die Funktion ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert; demnach ist sie an dieser Stelle unstetig.

e) Anstieg, konkaves und konvexes Verhalten der Kurve

Aus der Wertetabelle für y' ist zu ersehen, daß der Anstieg der durch die Funktion $f(x)$ gegebenen Kurve im Intervall $-\infty < x < -0{,}86$ an jeder Stelle negativ ist, im Intervall $-0{,}86 < x < +\infty$ dagegen positiv. Im Intervall $-\infty < x < +1$ ist sie, wie aus der Wertetabelle für y'' zu entnehmen ist, an jeder Stelle von unten konvex; im Intervall $1 < x < 2{,}82$ ist sie von unten konkav und im Intervall $2{,}82 < x < +\infty$ wieder von unten konvex.

Beim Überschreiten der Unstetigkeitsstelle $x_6 = 1$ geht diese Funktion von konvexem zu konkavem Verhalten über. An einer Unstetigkeitsstelle erfolgt häufig der Wechsel von konkavem zu konvexem Verhalten oder umgekehrt; dennoch kann nicht gesagt werden, daß an diesen Stellen ein Wendepunkt vorliege.

Die Gerade $x = 1$ ist (in Anlehnung an die Betrachtungen im Abschnitt **31**) ebenfalls eine Asymptote.

2. Beispiel:

Wir untersuchen (vgl. Abb. 52) die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

a) Für $x_0 = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse bei $y_0 = \frac{1}{4}$.

Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse ergeben sich aus der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ als $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$; da für diese Werte die Nennerfunktion $h(x) \neq 0$ ist, liegen die Nullstellen der Funktion $f(x)$ also bei -1 und $+1$.

b) Um das Verhalten im Unendlichen zu ermitteln, werden Zähler und Nenner der Funktion durch x^2 dividiert. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

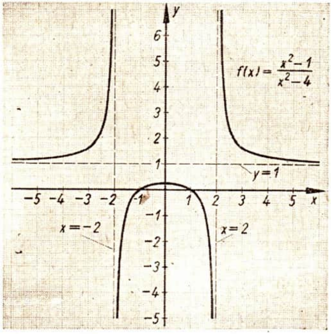

Abb. 52

Aus der Grenzbetrachtung

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

folgt, daß sich die Kurve der Funktion $f(x)$ für absolut sehr große Werte dem Wert 1 nähert. Die Gerade $y = 1$ ist also eine Asymptote der Kurve.

c) Aus $y' = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$ und $y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$ ergibt sich, daß bei $x_3 = x_0 = 0$ und $y_3 = y_0 = \frac{1}{4}$ die Kurve ein Maximum besitzt. Wendepunkte sind nicht vorhanden, da $18x^2 + 24 = 0$ keine reellen Lösungen hat.

d) Die Abszissen der Unendlichkeitsstellen gewinnen wir aus der Gleichung $x^2 - 4 = 0$ als $x_4 = -2$ und $x_5 = +2$. Das Kurvenbild (vgl. Abb. 52) zeigt — wie durch eine Wertetabelle nachgeprüft werden kann —, daß die Kurve der Funktion $f(x)$ bei -2 und $+2$ Unstetigkeitsstellen besitzt. Die Asymptoten haben die Gleichungen $x = -2$ und $x = +2$. Die Kurve besitzt also drei Asymptoten.

e) Für $-\infty < x < -2$ hat der erste Differentialquotient y' stets positive Werte, der zweite Differentialquotient y'' (beachten Sie besonders den Nenner!) ebenfalls stets positive; der Anstieg der Kurve ist also stets positiv, die Kurve ist von unten konvex.

Für $-2 < x < 0$ ist $y' > 0$ und $y'' < 0$ (der Nenner von y'' ist negativ); der Anstieg der Kurve ist positiv, die Kurve ist von unten konkav.

Für $0 < x < +2$ ist $y' < 0$ und $y'' < 0$; der Anstieg der Kurve ist negativ, die Kurve ist von unten konkav.

Für $+2 < x < +\infty$ ist $y' < 0$ und $y'' > 0$; der Anstieg der Kurve ist negativ, die Kurve ist von unten konvex.

33. Extremwertaufgaben

Einer Halbkugel mit dem Radius r (Längeneinheiten) werden Kegel so umbeschrieben, daß deren Grundflächen in der Ebene der Grundfläche der Halbkugel liegen. Es sollen die Maße des Kegels gefunden werden, der den kleinsten Rauminhalt hat.

Die Abbildung 53 zeigt einen Achsenschnitt durch Halbkugel und Kegel. Bei Rotation um SM entsteht aus dem Dreieck ASB der gesuchte Kegel und aus dem Halbkreis die gegebene Halbkugel mit dem Radius r. Die Mantellinien des Kegels berühren die Halbkugel in einem Kreis durch T parallel zur Grundfläche. Als unabhängige Veränderliche x (Längeneinheiten) soll die Höhe des Kegels eingeführt werden, während der Grundkreisradius des Kegels zunächst mit y bezeichnet wird. Damit ergibt sich das Volumen des Kegels zu

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot x.$$

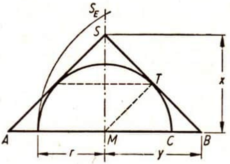

Abb. 53

Da bei Veränderung von x auch y sich abhängig ändert, muß eine Beziehung zwischen ihnen bestehen. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke STM und SMB (2 gleiche Winkel) folgt

$$TM:SM = MB:SB$$
$$r:x = y:\sqrt{x^2+y^2},$$
$$x^2 y^2 = r^2(x^2+y^2),$$
$$y^2 = \frac{r^2 x^2}{x^2 - r^2}.$$

Für $x \leqq r$ wird der Nenner negativ oder Null und auch die geometrische Fragestellung sinnlos; deshalb betrachten wir die aufzustellende Funktion nur für $x > r$. Wird der Ausdruck für y^2 in die Volumengleichung eingesetzt, so erhalten wir V als Funktion von x allein:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^3}{x^2 - r^2}.$$

Überlegen Sie, warum es einfacher ist, in der Volumenformel y^2 durch x als x durch y^2 zu ersetzen!

Das Volumen ist von der Höhe x abhängig, und da diese Variable nur in dem Bruch auftritt, genügt es, die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - r^2}$ auf ihre Extrema zu untersuchen. Wir bilden deshalb die erste und die zweite Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3r^2x^2}{(x^2-r^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2r^2x^3 + 6r^4x}{(x^2-r^2)^3}.$$

Die Abszissen der Extremwerte müssen Nullstellen der Funktion $f'(x)$ sein. Da diese eine gebrochene rationale Funktion ist, genügt es nach Abschnitt 30 zunächst, die Zählerfunktion $x^4 - 3r^2x^2$ gleich Null zu setzen.

Aus $x^2(x^2 - 3r^2) = 0$ folgt $x_{1;2} = 0,$

$$x_{3;4} = \pm r\sqrt{3}.$$

Da x_1, x_2 und x_4 kleiner als r sind, bleibt als mögliche Lösung nur $x_3 = r\sqrt{3}$. Für diesen Wert ist die Nennerfunktion verschieden von Null.

Wegen
$$f''(x_3) = \frac{6\,r^5\sqrt{3} + 6\,r^5\sqrt{3}}{8\,r^6} = \frac{3}{2r}\sqrt{3} > 0$$
ergibt sich für x_3 ein Minimum des Volumens.

Der Inhalt des gesuchten kleinsten Kegels beträgt $V = \frac{\pi}{2}\cdot r^3\sqrt{3}$ (Volumeneinheiten). Sein Grundkreisradius ist $\frac{r}{2}\sqrt{6}$ (Längeneinheiten).

Um die Form des Kegels zu erkennen, konstruieren wir seine Höhe. Sie ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $2r$. Schlägt man um C mit $2r$ als Radius den Kreis, so schneidet er die Senkrechte MS in S_E (vgl. Abb. 53).

Dann ist $S_E M$ die gesuchte Höhe x_3. Die von S_E an den Kreis gelegten Tangenten ergeben mit der Grundlinie des Dreiecks den Achsenschnitt des kleinsten Kegels.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen!

a) $y = \frac{1 - x}{x^2}$ b) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 3}$ c) $y = \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 5}$

d) $y = \frac{x + 7}{x - 1}$ e) $y = \frac{(4x - 11)(5x - 8)}{(3x + 8)(x - 4)}$ f) $y = \frac{6x + 2}{4x + 7}\cdot\frac{4x - 7}{6x - 2}$

g) $y = \frac{3x(1 + 2x)}{x - 8}$ h) $y = \frac{16x - 8}{9x - 3}\cdot\frac{1}{25x + 5}$

2. Bestimmen Sie die Unendlichkeitsstellen der unter 1. angeführten Funktionen!

3. Es sind die Null- und Unendlichkeitsstellen der folgenden Funktionen zu bestimmen.

a) $y = \frac{(3x - 2)(8x + 4)}{(15x + 45)(8x - 9)}$ b) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ c) $y = \frac{3x^2 + 21x + 30}{x^2 - 5x + 6}$

d) $y = \frac{1}{(x - 3)^2}$ e) $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{7}$ f) $y = \frac{16x - 4}{2}\cdot\frac{3}{18x - 9}$

4. Es ist zu untersuchen, wie sich die folgendenFunktionen für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ verhalten.

a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = \frac{1}{x^2 - 8}$ c) $y = \frac{x^2 - 5}{x^4 - 10}$

d) $y = \frac{5 - x^2}{10 - x^4}$ e) $y = \frac{x^2 - 3}{x}$ f) $y = \frac{(x + 3)(x - 6)(x - 5)}{x + 4}$

g) $y = \frac{3 - x^3}{x - 1}$ h) $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 27}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$ i) $y = \frac{x^2 + 5}{5x^2 - 1}$

5. Bilden Sie gebrochene rationale Funktionen, die an den vorgegebenen Stellen a, b, c Nullstellen und an den Stellen α, β, γ Pole haben! Zeichnen Sie die Kurven dieser Funktionen!

a)	$a = +4$	$\alpha = +1$	$\beta = -1$		
b)	$a = -2$	$b = +2$	$\alpha = -1$		
c)	$a = 0$	$b = -3$	$c = +2$	$\alpha = -2$	$\beta = +1$
d)	$a = 0$	$b = -2{,}5$	$\alpha = +1$	$\beta = +2$	$\gamma = +3$
e)	$a = +3$	$b = -3$	$\alpha = +2$	$\beta = -1$	
f)	$a = +1$	$b = +4$	$\alpha = -2$	$\beta = -3$	$\gamma = +6$
g)	$a = +1$	$b = +1$	$c = +1$	$\alpha = -1$	$\beta = -1$
h)	$a = -2$	$b = -2$	$\alpha = +2$	$\beta = +2$	$\gamma = +2$

Stellen Sie selbst weitere Aufgaben!

6. Die folgenden Funktionen sind auf Extremwerte zu untersuchen.

a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x-3}$ b) $y=\dfrac{x-6}{x^2+x-6}$

7. Untersuchen Sie, ob die Ableitung der Funktion $y=\dfrac{12}{x^2}$ den Wert Null annehmen kann! Welche Aussage läßt sich über Extremwerte machen?

8. Es ist der Kurvenverlauf der folgenden Funktionen zu untersuchen.

a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}$

d) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ e) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^3+2x^2-13x-6}$ f) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^4-13x^2+36}$

g) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-4}$ h) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^3}$ i) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

9. Das Ohmsche Gesetz lautet $J=\dfrac{U}{R}$. Es ist die Stromstärke J als Funktion des Widerstandes R für die feste Spannung $U=10$ Volt graphisch darzustellen. Auch das Bild der Ableitung ist zu bestimmen und der Zusammenhang der beiden Funktionen zu untersuchen.

10. Einem Halbkreis mit dem Radius r ist ein Trapez so einzubeschreiben, daß eine der parallelen Seiten der Durchmesser des Halbkreises ist. Berechnen Sie die Länge der anderen parallelen Seite, wenn der Umfang des Trapezes ein Maximum ist!

VI. Transzendente Funktionen

34. Die trigonometrischen Funktionen und ihre Ableitungen

Im Lehrbuch der Mathematik für das 10. Schuljahr (Abschnitt 7, S. 49) wurde auf die Bedeutung des Bogenmaßes der Winkel hingewiesen. In der folgenden Untersuchung der trigonometrischen Funktionen sollen die Winkel grundsätzlich im Bogenmaß gemessen werden. Während diese Funktionen bisher vornehmlich für trigonometrische Rechnungen verwendet wurden, sollen sie jetzt mit Hilfe der Differentialrechnung untersucht werden.

a) Ableitung der Funktion $f(x)=\sin x$

Der Differenzenquotient $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ hat, wenn $f(x)=\sin x$ ist, den Wert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}.$$

Der Zähler dieses Bruches wird umgeformt. Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 93).

Dividiert man Zähler und Nenner durch 2, so ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Durchläuft Δx eine Nullfolge ($\Delta x \to 0$), so strebt auch $\frac{\Delta x}{2} \to 0$, und es geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten über; wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Der erste Grenzwert strebt dem Wert $\cos x$ zu, während der zweite Grenzwert nach den Untersuchungen im Abschnitt 3 den Wert 1 hat. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{\frac{d \sin x}{dx} = \cos x}\,.$$

b) Ableitung der Funktion $f(x) = \cos x$

Zwischen der sin-Funktion und der cos-Funktion bestehen für jedes Argument x die Beziehungen

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Wiederholen Sie den Abschnitt 5c) im Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 33!

Differenzieren wir die erste Gleichung und beachten, daß die rechte Seite eine Funktion einer Funktion ist (vgl. Abschnitt 26), so erhalten wir

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1.$$

Unter Benutzung der Gleichung $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ ergibt sich

$$\boldsymbol{\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x}\,.$$

c) Ableitung der Funktionen $f(x) = \operatorname{tg} x$ und $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Im Lehrbuch der Mathematik für das 10. Schuljahr, S. 15 wurde festgestellt, daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

ist. Wird die erste Gleichung nach der Quotientenregel (vgl. Abschnitt 29) differenziert, so entsteht

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Wegen der Beziehung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich

$$\boldsymbol{\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}}\,.$$

Wird dagegen in $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ der Zähler durch den Nenner dividiert, so folgt

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 17).

Differenzieren wir beide Seiten der Gleichung $\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x = 1$ (links nach der Produktregel), so entsteht

$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \mathrm{ctg}\,x + \mathrm{tg}\,x \cdot \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = 0, \qquad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\cos^2 x \cdot \mathrm{tg}\,x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Es ist zu untersuchen, ob die Division durch $\cos^2 x$ für jeden Wert von x möglich ist. Beweisen Sie, daß

$$\frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$$

ist!

Zusammenfassung: Die Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen enthalten wieder trigonometrische Funktionen.

Beispiele:

1. $f(x) = \sin^3 x$.
   Die Ableitung dieser Funktion soll auf zwei Wegen gewonnen werden.
   a) Wird für $f(x) = \sin x \cdot \sin x \cdot \sin x$ die Produktregel angewendet, so finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cdot \sin x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \sin x \cdot \cos x \\ &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

   b) Bei der Anwendung der Kettenregel ergibt sich, indem man $z = \sin x$ setzt, unmittelbar

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

Prüfen Sie, welche der beiden Herleitungen schneller zum Ziele führt!

2. $f(x) = 3 \sin x - 2\,\mathrm{tg}\,4x$

$$f'(x) = 3 \cos x - \frac{2}{\cos^2 4x} \cdot 4 = 3 \cos x - \frac{8}{\cos^2 4x}.$$

3. $f(x) = \sqrt{\mathrm{ctg}\,b x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\mathrm{ctg}\,b x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 b x}\right) b = -\frac{b\sqrt{\mathrm{ctg}\,b x}}{2\,\mathrm{ctg}\,b x \cdot \sin^2 b x} = -\frac{b\sqrt{\mathrm{ctg}\,b x}}{2 \sin b x \cdot \cos b x} = -\frac{b \cdot \sqrt{\mathrm{ctg}\,b x}}{\sin 2 b x}.$$

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ **b)** $f(x) = \mathrm{tg}\,x - 2 \cos x$ **c)** $f(x) = 2x + \sin 3x$

d) $f(x) = \mathrm{ctg}\,5x$ **e)** $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\,(x + 1)$ **f)** $f(x) = a \cos \frac{x}{3}$

g) $f(x) = \sin^2 x$ **h)** $f(x) = \sin x^2$ **i)** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

k) $f(x) = 3 \cos x^3$ **l)** $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ **m)** $f(x) = \cos x \cdot \mathrm{ctg}\,x$

n) $f(x) = \frac{\sin x}{5 + 2 \cos x}$ **o)** $f(x) = \mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}\,x$ **p)** $f(x) = \frac{2}{\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x}$

q) $f(x) = x \cdot \cos x$ r) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ s) $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x}$

t) $f(x) = \sqrt{2\,m^2 x + 3\cos^2 x}$ u) $f(x) = \frac{5\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$ v) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

w) $f(x) = \cos^4 x - 3\sin^2 2\,x + \sin^4 x$ x) $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$ y) $f(x) = \sin 2\,x \cos 3\,x$

2. Es sind die ersten acht Ableitungen von $f(x) = \sin x$ zu bilden.
3. Es sind die siebente und die zehnte Ableitung von $f(x) = \cos x$ zu bilden.
4. Differenzieren Sie beide Seiten der Gleichung $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und deuten Sie das Ergebnis (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 56)!
5. Differenzieren Sie beide Seiten der Gleichung $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und deuten Sie das Ergebnis (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 56)!
6. Beide Seiten der Gleichung $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ sind nach α (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 57) zu differenzieren.
7. Ersetzen Sie in der Gleichung von Aufgabe 6 den Winkel α durch den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$, stellen Sie die neue Gleichung auf und differenzieren Sie beide Seiten nach α (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 57)!

35. Kurvenuntersuchungen der trigonometrischen Funktionen

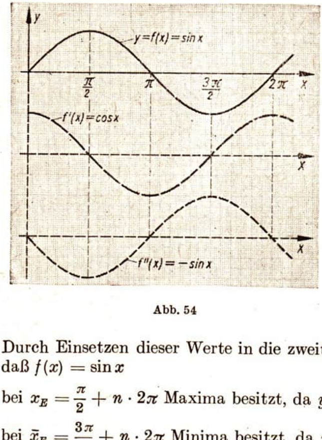

Abb. 54

a) Untersuchung der Funktion sin *x*

Um die Eigenschaften der Funktion $f(x) = \sin x$ zu untersuchen, bilden wir die erste Ableitung $y' = \cos x$ und die zweite Ableitung $y'' = -\sin x$. Wir stellen alle drei Funktionen in Abbildung 54 graphisch dar.

Die Sinusfunktion hat unendlich viele Nullstellen bei $x = n\pi$, wobei $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ ist. Sie besitzt keine Unendlichkeitsstellen und ist stetig.

Die Nullstellen der ersten Ableitung $y' = \cos x$ liegen (wegen der Periodizität) bei

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \qquad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die zweite Ableitung, $y'' = -\sin x$, erkennen wir, daß $f(x) = \sin x$

bei $x_E = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ Maxima besitzt, da $y'' < 0$ ist,

bei $\bar{x}_E = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ Minima besitzt, da $y'' > 0$ ist, $(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

Die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \sin x$ liegen an den Nullstellen der Funktion $y'' = -\sin x$, also an den Nullstellen der Funktion $f(x)$. Für alle $x = n\pi$ mit $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ nimmt die Funktion $f(x) = \sin x$ den Wert Null an, während ihre dritte Ableitung $f'''(x) = -\cos x$ für alle diese Werte von Null verschieden ist. An den Stellen $x = n\pi$ hat demnach die Funktion $f(x) = \sin x$ Wendepunkte.

Erläutern Sie die Lage der Nullstellen und ausgezeichneten Punkte an der Abbildung 54! Führen Sie die gleiche Kurvenuntersuchung für $f(x) = \cos x$ durch und stellen Sie die verwendeten Funktionen graphisch dar.

b) Untersuchung der Funktion tg$x$

Die Untersuchung der Eigenschaften der Funktion $f(x) = \operatorname{tg} x$ verlangt die Bildung der ersten Ableitung

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

der zweiten Ableitung

$$y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

und der dritten Ableitung

$$y''' = 2 \cdot \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^4 x}$$
$$= 2 \cdot \frac{3 - 2 \cos^2 x}{\cos^4 x}.$$

Die Abbildung 55 enthält die Darstellung der Funktionen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$, die unter Verwendung der folgenden Wertetabelle gezeichnet worden sind:

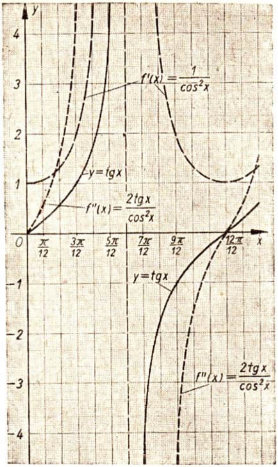

Abb. 55

	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\cos x$	1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26	0	– 0,26	– 0,50	– 0,71	– 0,87	– 0,97
$\frac{1}{\cos^2 x}$	1	1,07	1,32	2,00	4,00	14,80		14,80	4,00	2,00	1,32	1,07
$2 \operatorname{tg} x$	0	0,54	1,16	2,00	3,46	7,46		– 7,46	– 3,46	– 2,00	– 1,16	– 0,54
$\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$	0	0,58	1,53	4,00	13,80	110		– 110	– 13,80	– 4,00	– 1,53	– 0,58

Die tg-Funktion hat unendlich viele Nullstellen, und zwar bei

$$x = n\pi \quad \text{mit} \quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots$$

Sie besitzt unendlich viele Pole bei $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ mit $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots$ Für alle anderen Werte von x ist sie stetig.

Die erste Ableitung $\frac{1}{\cos^2 x}$ besitzt keine Nullstellen, weil der Zähler nicht null und der Nenner nicht unendlich werden kann; deshalb hat die tg-Funktion keine Extremwerte. Die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \operatorname{tg} x$ liegen an den Nullstellen der Funktion $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, also an den Nullstellen der tg-Funktion, da der Nenner nicht unendlich werden kann; das heißt

$$x_W = n\pi \quad \text{mit} \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

An allen diesen Stellen ist $f'''(x_W) > 0$.

Erläutern Sie die Lage der Nullstellen und Wendepunkte an der Abbildung 55! Führen Sie die gleiche Kurvenuntersuchung mit Aufstellung einer Wertetabelle und Zeichnung für $f(x) = \operatorname{ctg} x$ durch!

36. Anwendung auf Kreisbewegung

Ein Massenpunkt P bewege sich gleichförmig im positiven Drehsinn auf einem Kreis, durch dessen Mittelpunkt M die Koordinatenachsen gelegt sind (vgl. Abb. 56). Zur Zeit $t = 0$ befindet sich P in P_0. Der Radius $MP_0 = r$ drehe sich in der Zeit t um den Winkel φ. Man nennt $\omega = \frac{\varphi}{t}$ die **Winkelgeschwindigkeit.** In der Zeit t überstreicht dann der Radius den Winkel $\varphi = \omega t$. Wird der Punkt P auf die beiden Koordinatenachsen projiziert, so entstehen die Fußpunkte Q und R. Beim Umlauf des Punktes P führen die Punkte Q und R eine Hin- und Herbewegung aus. Sie besitzen vom Ursprung die Entfernungen

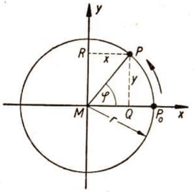

Abb. 56

$$MQ = x \qquad \text{und} \qquad MR = y;$$
$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t.$$

Aus diesen Wegen der Punkte Q und R können wir, wie bereits in Abschnitt 16 ausgeführt wurde, durch Differentiation nach der Zeit t ihre Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnen, nämlich

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\,\omega\sin\omega t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = r\,\omega\cos\omega t,$$
$$b_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\,\omega^2\cos\omega t = -\omega^2\cdot x,$$
$$b_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\,\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\cdot y.$$

Eine derartige geradlinige Bewegung, wie sie die Punkte Q und R ausführen, bei der die Beschleunigung proportional zur Entfernung von der Mittellage ist, nennt man **harmonische Bewegung**. Da nach dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik $K = mb$ die Kraft proportional der Beschleunigung ist, muß bei der harmonischen Bewegung die Kraft der jeweiligen Entfernung des schwingenden Punktes von der Mittellage proportional sein.

Die Kräfte $K_x = -m\omega^2 x$ und $K_y = -m\omega^2 y$ haben die entgegengesetzten Richtungen wie die jeweiligen Entfernungen x und y aus der Mittellage, nach der sie immer hinweisen. Dies kommt auch durch das auftretende Minuszeichen zum Ausdruck; die Kräfte heißen deshalb auch rücktreibende Kräfte.

Diese Schwingungen sind für die verschiedensten Zweige der Physik und Technik wichtig; sie treten zum Beispiel auf bei den Schwingungen einer Feder, bei Schwingungen, die zu Wellenbewegungen führen, und bei elektrischen Schwingungen.

Berechnen Sie als Übung die Zentripetalbeschleunigung b des gleichförmig auf dem Kreise sich bewegenden Massenpunktes P aus den Komponenten b_x und b_y!

Aufgaben

1. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $f(x) = \cos x$ und stellen Sie die Kurve der Funktion mit ihren ersten beiden Ableitungen graphisch dar!
2. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $f(x) = \operatorname{ctg} x$ und stellen Sie die Kurve der Funktion mit ihren ersten beiden Ableitungen graphisch dar!
3. Die Eigenschaften der folgenden Funktionen sind festzustellen.

   a) $f(x) = \cos^2 x$ b) $f(x) = \sin^2 x$

   c) $f(x) = \sin x \cos x$ d) $f(x) = 1 + \sin 2x$
4. Bestimmen Sie den Kurvenverlauf der Funktion $f(x) = \sin x + \sin 2x$ durch Aufstellen der Wertetabelle für die Funktion und ihre Ableitungen! Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion!
5. Bestimmen Sie den Kurvenverlauf der Funktion $f(x) = \sin x + \sin 2x$ durch Addition der Funktionswerte der Funktionen $\varphi(x) = \sin x$ und $\psi(x) = \sin 2x$! Führen Sie das gleiche bei den Ableitungen durch und untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion!
6. Es sind die folgenden Funktionen wie in den Aufgaben 4 und 5 zu untersuchen.

   a) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4}$ b) $f(x) = \sin 2x - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{2}$ c) $f(x) = \cos 2x - \frac{1}{2}\sin x$

   d) $f(x) = \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ e) $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ f) $f(x) = x + \sin x$
7. Eine freie elastische Schwingung wird durch die Gleichung $y = a \sin\frac{2\pi t}{T}$ beschrieben, wobei t die Zeit und T die Schwingungsdauer ist. Es ist zu bestimmen, wann die Entfernungen aus der Ruhelage, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung Extremwerte annehmen.

37. Extremwertaufgaben

1. Beispiel:

Zwischen dem Kurs eines Segelbootes und der Windrichtung liege der Winkel α. Welchen Winkel müssen die Segel zur Fahrtrichtung erhalten, damit die Windkraft am besten ausgenutzt wird?

Aus der Abbildung 57 ist ersichtlich, daß das Segel mit der Fahrtrichtung den Winkel x bildet, der so gewählt werden soll, daß die Antriebskraft T in der Kursrichtung ein Maximum wird. Von der Windkraft W wirkt nur die zum Segel senkrechte Komponente, die Druckkraft D. Von dieser wieder ist nur die Komponente T wirksam, die in der Fahrtrichtung liegt.

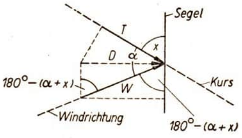

Abb. 57

Bezeichnet W die Größe der Windkraft, dann ist die Druckkraft

$$D = W \sin[180° - (\alpha + x)] = W \sin(\alpha + x).$$

Der Winkel zwischen Antriebskraft T und Druckkraft D beträgt $90° - x$. Deshalb ist die Antriebskraft T

$$T = D\cos(90° - x) = W\sin(\alpha + x)\sin x.$$

Will man das Maximum von T bestimmen, so ist es hinreichend, daß man die Funktion $f(x) = \sin(\alpha + x)\cdot\sin x$ auf ihr Maximum untersucht. Zu diesem Zwecke bilden wir die erste und die zweite Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = \sin(\alpha + x)\cdot\cos x + \cos(\alpha + x)\cdot\sin x = \sin(\alpha + 2x)$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 55),

$$f''(x) = 2\cos(\alpha + 2x).$$

Da die notwendige Bedingung für einen Extremwert $f'(x) = 0$ ist, ergibt sich

$$\sin(\alpha + 2x) = 0,$$

woraus folgt

$$\alpha + 2x_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha + 2x_2 = 180°;$$

man erhält

$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}; \qquad x_2 = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Zur Entscheidung darüber, ob x_1 und x_2 Extrema ergeben, prüfen wir $f''(x_{1;\,2})$:
$f''(x_1) = 2\cos(\alpha - \alpha) = 2 > 0$, das heißt für $x_1 = -\frac{\alpha}{2}$ ergibt sich ein Minimum;
$f''(x_2) = 2\cos(\alpha + 180° - \alpha) = -2 < 0$, das heißt für $x_2 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ergibt sich ein Maximum.

Damit hat auch die Antriebskraft T für $x_2 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ihr Maximum. Dieser Fall tritt ein, wenn das Segel auf der Winkelhalbierenden zwischen Kurs- und Windrichtung senkrecht steht.

Diese Lösung kann auf die Praxis nur angenähert angewendet werden, da berücksichtigt werden muß, daß das Segel nicht starr ist.

2. Beispiel:

Mitten über einem kreisförmigen Arbeitstisch von 1 m Durchmesser ist eine Lampe zu befestigen. In welcher Höhe muß sie angebracht werden, damit die Beleuchtung eines Arbeitsplatzes am Rande des Tisches am stärksten ist?

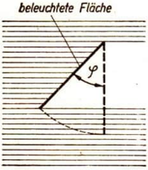

Abb. 58

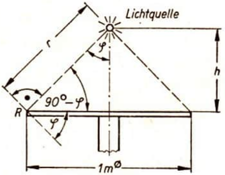

Abb. 59

Die Beleuchtungsstärke B einer beleuchteten Fläche (vgl. Abb. 58) wird berechnet als $B = \frac{L}{r^2} \cdot \cos\varphi$ (Lux), wobei L, gemessen in NK, die Lichtstärke, r in m die Entfernung zwischen Lichtquelle und beleuchteter Fläche und $(90° - \varphi)$ der Winkel zwischen Lichtstrahlrichtung und beleuchteter Fläche ist.

Eine durch einen Randpunkt R des Arbeitstisches (vgl. Abb. 59) senkrecht zur Lichtrichtung geneigte Fläche würde voll beleuchtet werden. Da jedoch die Arbeitsfläche mit dieser senkrechten Ebene den Winkel φ einschließt, der die gleiche Größe hat wie der Winkel zwischen der Vertikalen und der Strahlenrichtung, so kann an dem Rand des Tisches nur ein Teil des Lichtes wirken. Als unabhängige Veränderliche wird der Winkel φ eingeführt. Dann ist $r = \frac{0{,}5}{\sin\varphi}$ (m).

Die Beleuchtungsstärke ist $B = \frac{L \sin^2 \varphi}{0{,}5^2} \cos\varphi$ (Lux). Zur Bestimmung des Extrems von B reicht es aus, das Extrem von $f(\varphi) = \sin^2\varphi \cos\varphi$ zu ermitteln.

Wir bilden $$f'(\varphi) = 2 \sin\varphi \cos^2\varphi - \sin^3\varphi$$

und $$f''(\varphi) = 2 \cos^3\varphi - 7 \sin^2\varphi \cos\varphi.$$

Aus $f'(\varphi) = 0$ ergibt sich $\sin\varphi\,(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0$ mit den Lösungen $\sin\varphi_1 = 0$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = +\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi_3 = -\sqrt{2}$. Die erste Lösung bedingt $\varphi_1 = 0$, das heißt, die Lampe befindet sich in unendlicher Entfernung über dem Tisch. Offensichtlich liegt bei $\varphi_1 = 0$ ein Minimum vor, was sich durch Einsetzen in $f''(\varphi)$ bestätigt. Die dritte Lösung $\operatorname{tg}\varphi_3 = -\sqrt{2}$ scheidet ebenfalls aus, da φ ein spitzer Winkel sein muß.

Aus $\operatorname{tg}\varphi_2 = +\sqrt{2}$ ergibt sich mit Benutzung der Formeln

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik für das 10. Schuljahr, S. 17 mit Abb. 17)

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zur Entscheidung darüber, ob ein Extremum vorliegt, prüfen wir $f''(\varphi_2)$:

$$f''(\varphi_2) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} - 7 \cdot \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0.$$

Zur Lösung φ_2 gehört also ein Maximum der untersuchten Funktion $f(\varphi)$ und damit auch der Beleuchtungsstärke B.

Da $h = \frac{0{,}5}{\operatorname{tg}\varphi}$ ist, ergibt sich $h = \frac{0{,}5}{\sqrt{2}} = 0{,}25\sqrt{2} \approx 0{,}35$ (m). Bringt man die Lampe 0,35 m hoch über der Mitte des Tisches von 1 m Durchmesser an, so ist die Beleuchtung am Arbeitsplatz am stärksten. Die Lichtstrahlen treffen den Rand der horizontalen Tischplatte unter dem Winkel 35° 16′.

Aufgaben

1. Für eine Viehtränke soll eine oben offene Rinne aus zwei je a cm breiten Brettern so gebaut werden, daß sie möglichst viel Wasser faßt. Welchen Winkel müssen die Bretter einschließen?

2. Zum Bau einer zunächst seitlich offenen Futterkrippe stehen drei je 0,80 m lange und 0,35 m breite Bretter für Boden und Längswände zur Verfügung. Unter welchem Winkel müssen die Schrägwände gegen den waagerechten Boden stehen, damit das Fassungsvermögen der Krippe möglichst groß wird? Geben Sie das größte Fassungsvermögen an! Bestimmen Sie die Maße der Seitenwände!

3. Aus vier gleich breiten Brettern ist eine oben offene Rinne so zu bauen, daß die beiden äußeren Bretter senkrecht stehen. Unter welchem Winkel müssen die beiden anderen Bretter zusammenstoßen, damit der Querschnitt der Rinne möglichst groß ist?

4. Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein gleichschenkliges Dreieck. Der Öffnungswinkel $2x$ des Kegels ist so zu bestimmen, daß der Rauminhalt bei einer Länge der Mantellinien $s = 12$ cm ein Maximum wird!

5. Lösen Sie die Aufgabe 4 allgemein für die Länge s der Mantellinie!

6. Es ist das kleinste gleichschenklige Dreieck mit dem gegebenen Inkreisradius ϱ zu bestimmen. Anleitung: Es ist der halbe Basiswinkel als unabhängige Variable zu wählen.
7. Von allen Kegeln mit derselben Mantelfläche F ist der mit dem größten Rauminhalt gesucht.
8. Aus einem gegebenen Kreis (Radius r) soll der Kreissektor ausgeschnitten werden, der — zusammengerollt — den Mantel des Kegels mit größtem Rauminhalt ergibt.
9. Von allen Kegeln mit konstantem Volumen V ist der gesucht, für dessen Mantel am wenigsten Material verbraucht wird.

38. Funktion, Umkehrfunktion und ihre Ableitungen; inverse Funktion

In der Funktion $y = f(x) = 3x - 2$ ist x die unabhängige und y die abhängige Variable. Jedem Wert von x ist ein bestimmter Wert von y zugeordnet. Kehren wir diese Zuordnung der Variablen um, das heißt, wird y die unabhängige und x die von y abhängige Variable, so erhalten wir eine neue Funktion $x = \varphi(y) = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. Diese neue Funktion $\varphi(y)$ bezeichnen wir als **Umkehrfunktion** der Funktion $f(x)$. Wir erkennen, daß in ihr jedem Wert von y genau ein x-Wert zugeordnet ist.

Beide Funktionen $f(x)$ und $\varphi(y)$ geben in der graphischen Darstellung im gleichen x- und y-Koordinatensystem dasselbe Bild.

Zeichnen Sie die Funktionen im gleichen Koordinatensystem!

Wollen wir zur Funktion $y = f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$, die eine Parabel darstellt, die Umkehrfunktion bilden, so müssen wir untersuchen, ob die umgekehrte Zuordnung existiert und ob sie dann eindeutig ist. Es muß also geprüft werden, ob zu einem beliebig vorgegebenem y-Wert ein x-Wert existiert, der der Gleichung $y = \frac{x^2}{4} + 1$ genügt, und ob dieser Wert eindeutig bestimmt ist. Zu dieser Untersuchung lösen wir die Gleichung nach x auf und erhalten $x = \pm 2\sqrt{y-1}$. Wir stellen fest:

1. Die Zuordnung existiert nur für y-Werte, die größer oder gleich 1 sind.
2. Allen y-Werten, die größer als 1 sind, werden zwei x-Werte zugeordnet.

Diese doppelte Zuordnung ergibt zwei Funktionen $\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$, die definiert werden durch

$$x = \varphi_1(y) = +2\sqrt{y-1}, \quad y \geqq 1$$

und

$$x = \varphi_2(y) = -2\sqrt{y-1}, \quad y \geqq 1.$$

Wir erkennen, daß $\varphi_1(y)$ stets größer oder gleich Null und $\varphi_2(y)$ stets kleiner oder gleich Null ist. Die Funktion $\varphi_1(y)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = \frac{x^2}{4} + 1$ für $x \geqq 0$ (rechte Hälfte der Parabel), die Funktion $\varphi_2(y)$ ist die Umkehrfunktion derselben Funktion für $x \leqq 0$ (linke Hälfte der Parabel).

Betrachten wir eine der beiden Parabelhälften von $y = \frac{x^2}{4} + 1$, zum Beispiel die rechte, so erkennen wir weiter, daß für wachsende x-Werte auch die Funktionswerte y stets wachsen; also kann es keine zwei verschiedene x-Werte x_1 und x_2 geben, für die die Funktion denselben y-Wert annimmt, für die demnach $y = f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Daraus folgt, daß jedem y-Wert höchstens ein x-Wert zugeordnet ist. Eine entsprechende Betrachtung kann man für die linke Parabelhälfte anstellen. Dort erkennen wir, daß für kleiner werdende x die Funktionswerte größer werden.

Es gilt also für die rechte Hälfte:

$$\text{ist} \quad x_1 < x_2, \qquad \text{so ist} \qquad f(x_1) < f(x_2);$$

für die linke Hälfte:

$$\text{ist} \quad x_1 < x_2, \qquad \text{so ist} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

Gilt für eine Funktion die erste (zweite) dieser beiden Beziehungen, so heißt die Funktion **wachsend (fallend)**.

Zusammenfassung: Wachsende (fallende) Funktionen nehmen jeden ihrer Werte nur einmal an, sind also eindeutig und können daher umgekehrt werden. Bei diesen Funktionen gilt also in jedem Fall

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y \neq 0, \text{ wenn } \Delta x \neq 0 \text{ ist.}$$

Ist die Ableitung einer Funktion in einem bestimmten Intervall stets positiv (negativ), so ist die Funktion in diesem Intervall sicher stets wachsend (fallend).

Im folgenden wollen wir Funktionen nur in den Intervallen betrachten, in denen die Ableitung entweder stets positiv oder stets negativ ist.

Zur Funktion $y = f(x)$ mit der unabhängigen Veränderlichen x und der davon abhängigen Veränderlichen y gehört die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ mit der unabhängigen Veränderlichen y und der davon abhängigen Veränderlichen x. Beide Funktionen werden im xy-Koordinatensystem durch dieselbe Kurve dargestellt (Abb. 60).

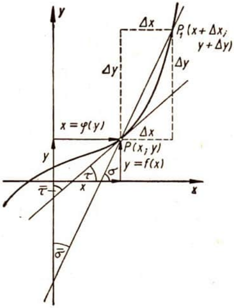

Abb. 60

Sind $P(x; y)$ und $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ zwei Punkte auf der Kurve, so gilt

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Der Differenzenquotient ist der Tangens des Steigungswinkels der Sekante durch P und P_1 (gegen die positive Richtung der x-Achse, der Achse der unabhängigen Veränderlichen):

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die gleichen Punkte P und P_1 befriedigen auch die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$, so daß gilt

$$x = \varphi(y) \quad \text{und} \quad x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y).$$

Der Differenzenquotient der Funktion $\varphi(y)$ ist

$$\operatorname{tg}\bar{\sigma} = \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Er liefert den Tangens des Steigungswinkels $\bar{\sigma}$ der Sekante durch P und P_1 gegen die positive Richtung der y-Achse, der Achse der unabhängigen Veränderlichen bei der Umkehrfunktion (vgl. Abb. 60). Zwischen den Winkeln σ und $\bar{\sigma}$ besteht die Beziehung $\sigma + \bar{\sigma} = 90^\circ$ und daher

$$\operatorname{tg}\bar{\sigma} = \operatorname{tg}(90^\circ - \sigma) = \operatorname{ctg}\sigma \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\bar{\sigma} = \frac{1}{\operatorname{tg}\sigma}.$$

Führt man den Grenzübergang $P_1 \to P$ durch, dann geht die Sekante in die Tangente im Punkt P über. Aus den Steigungswinkeln σ beziehungsweise $\bar{\sigma}$ der Sekante werden die Steigungswinkel τ beziehungsweise $\bar{\tau}$ der Tangente, denn es gilt

$$\operatorname{tg}\tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{beziehungsweise} \quad \operatorname{tg}\bar{\tau} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}.$$

Die Komplementwinkelbeziehung bleibt dabei erhalten, so daß

$$\operatorname{tg}\bar{\tau} = \frac{1}{\operatorname{tg}\tau}$$

gilt; $\operatorname{tg}\tau$ ist der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, also $\frac{dy}{dx}$, und $\operatorname{tg}\bar{\tau}$ der Differentialquotient der Umkehrfunktion $\varphi(y)$, also $\frac{dx}{dy}$. Wir erhalten somit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Dieselbe Beziehung erhält man durch Berechnung. Es wird

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}.$$

Mit $\Delta y \to 0$ geht auch $\Delta x \to 0$, so daß der Nenner dieses Bruches gegen $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ geht. Also existiert

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Der schon in Abschnitt 15 gebrachte Hinweis, daß $\frac{dy}{dx}$ ein Quotient ist, gewinnt hier wieder an Bedeutung. Wir sehen also, daß die Schreibweise von Leibniz außerordentlich geschickt gewählt war.

Zusammenfassung: Besitzt die Funktion $y = f(x)$ eine stets positive (stets negative) Ableitung $y' = f'(x)$, so ist sie umkehrbar. Die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ ist dann auch differenzierbar, und es gilt:

$$x' = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Die Ableitungen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind zueinander reziprok.

Beispiele:

1. $y = 3x - 2$, $\qquad x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}$,

$\frac{dy}{dx} = 3$, $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$;

2. $y = \frac{x^2}{4} + 1\,,$ $\qquad x = 2\sqrt{y-1} = 2\,(y-1)^{\frac{1}{2}}\,,$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}\,,$ $\qquad \frac{dx}{dy} = 2 \cdot \frac{1}{2}\,(y-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{y-1}}.$

Beachten Sie, daß $\sqrt{y-1} = \frac{x}{2}$ ist!

In Abbildung 61a ist die Kurve der Funktion $y = f(x)$ in einem xy-Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist x die unabhängige und y die abhängige Variable. Wollen wir also einen Punkt $P(x; y)$ auf der Kurve gewinnen, so müssen wir zuerst den x-Wert festlegen (Abb. 61a) und dann in der Ordinatenrichtung um den zugehörigen, durch die Funktionsgleichung bestimmten y-Wert zur Kurve gehen. Geben wir umgekehrt den y-Wert vor, so gelangen wir von dem festgelegten Punkt auf der y-Achse zum Punkt $P(y; x)$, wenn wir um den y zugeordneten Wert x in der Abszissenrichtung gehen. Dieser x-Wert ist durch die Funktionsgleichung $x = \varphi(y)$ bestimmt (Abb. 61b). Wir haben also die Umkehrfunktion in einem $y\,x$-Koordinatensystem dargestellt, in dem die Abszissenachse vertikal und die Ordinatenachse horizontal liegen. Da es aber allgemein üblich ist, die unabhängige Variable mit x und die abhängige Variable mit y zu bezeichnen, wechseln wir bei der Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ die Bezeichnungen der Variablen, wodurch wir $y = \varphi(x)$ erhalten. Das bedeutet, daß wir in unserem Koordinatensystem die Bezeichnungen der Achsen wechseln (Abb. 61c). Wir haben jetzt ein $x\,y$-Koordinatensystem, bei dem die Abszissenachse vertikal und die Ordinatenachse horizontal liegt. Da man ferner die Abszissenachse gewöhnlich horizontal legt, vertauschen wir nunmehr die Achsen (Abb. 61d). Geometrisch ist dies eine Spiegelung an der Geraden $y = x$. Dieser Spiegelung ist jeder Punkt des Koordinatensystems, also auch die Gesamtheit der Kurvenpunkte $y = \varphi(x)$ unterworfen. Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß die Änderung der Variablenbezeichnungen (Schritt von Abb. 61b zu Abb. 61c) und die Spiegelung (Schritt von Abb. 61c zu Abb. 61d) keine Änderung der Funktion zur Folge haben, daß vielmehr die Funktion dieselbe bleibt. Dies kommt auch durch das Beibehalten des Funktionszeichens φ zum Ausdruck. Um jedoch die Teilschritte zu unterscheiden, führen wir für $y = \varphi(x)$ die Bezeichnung **inverse Funktion** ein.

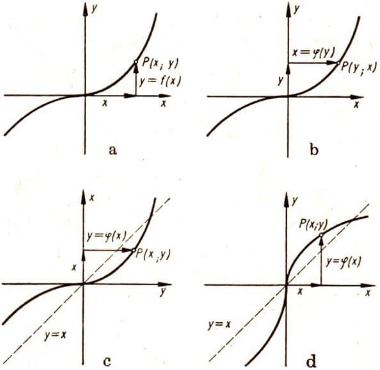

Abb. 61

Wenn wir in der Ausgangsfunktion $y = f(x)$ zuerst die Variablen vertauschen, erhalten wir $x = f(y)$. Kehren wir nunmehr diese Funktion um, so ergibt sich die gleiche inverse Funktion $y = \varphi(x)$.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} y = f(x) & \xrightarrow{\text{umkehren}} & x = \varphi(y) \\ y = \frac{3}{2}x + 1 & & x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \\ \Big\downarrow \text{vertauschen} & & \Big\downarrow \text{vertauschen} \\ x = f(y) & \xrightarrow{\text{umkehren}} & y = \varphi(x) \\ x = \frac{3}{2}y + 1 & & y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{array}$$

39. Die zyklometrischen Funktionen und ihre Ableitungen

In der Trigonometrie kommt häufig die Aufgabe vor, zu einem beliebig vorgegebenen Winkel x den zugehörigen Sinuswert zu berechnen. Gegeben sei der Winkel $x = 30° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{6}$; gesucht wird der Sinuswert $y = \sin\frac{\pi}{6}$. Die Aufgabe kann allgemein geschrieben werden als $y = \sin x$; hierbei ist der willkürlich vorgegebene Winkel x die unabhängige Veränderliche, der davon abhängige Sinuswert wird mit y bezeichnet.

Bei goniometrischen Gleichungen besteht die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Sinuswert einen zugehörigen Winkel zu bestimmen. Gegeben sei der Sinuswert $x = 0{,}707\ldots\left(= \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; gesucht wird der Bogen y, so daß $\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Aus der Definition der Sinusfunktion wissen wir, daß die zugehörigen y-Werte gegeben werden durch

$$y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{und} \quad \overline{y} = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{mit } n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

Diese zweite Aufgabe kann allgemein geschrieben werden als $x = \sin y$; hierbei ist x der in den Grenzen zwischen -1 und $+1$, $-1 \leqq x \leqq +1$, willkürlich vorgegebene Sinuswert und y der ihm zugeordnete Bogen.

Um die inverse Funktion von $y = f(x) = \sin x$ zu untersuchen, führen wir zunächst die Spiegelung an der Geraden $y = x$ durch (Abb. 62). Am Bild erkennen wir, daß die inverse Funktion $y = \varphi(x)$ nur im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ definiert ist, da außerhalb dieses Intervalls keine Funktionswerte $\varphi(x)$ existieren. Das steht mit der analytischen Deutung im Einklang, denn die Funktion $y = f(x) = \sin x$ kann keinen Wert annehmen, dessen Absolutbetrag größer als 1 ist. Wir erkennen weiter am Bild, daß durch Spiegelung der Funktion $y = f(x) = \sin x$ im Definitionsintervall jedem x-Wert unendlich viele y-Werte zugeordnet sind.

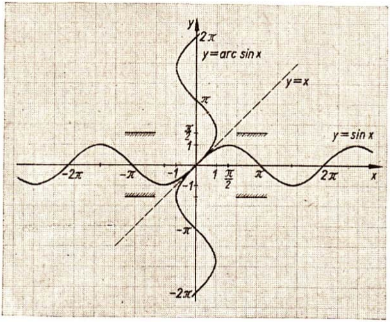

Abb. 62

Eine inverse Funktion können wir aber nur für solche Intervalle bilden, in denen die Funktion $f(x)$ entweder wächst oder fällt. Wir schneiden also aus der Funktion $y = f(x) = \sin x$ das Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ heraus, in dem $f(x)$ wächst, und bilden davon die inverse Funktion. Man schreibt dafür $\boldsymbol{y = \operatorname{arc} \sin x}$ (sprich: y gleich arcus sinus x). Dies ist die Abkürzung von arcus cuius sinus est x, das heißt der (Kreis-)Bogen, dessen Sinus (der Wert) x ist.

Die entsprechende Überlegung können wir an allen Intervallen vornehmen, in denen die Funktion $y = f(x) = \sin x$ entweder nur wächst oder nur fällt. Das aber sind die Intervalle von der Länge π, die sich rechts und links an das Grundintervall fortlaufend anschließen. Entsprechend schließen die zu diesen Intervallen gehörenden Spiegelungen oben und unten an die Spiegelung der Funktion im Grundintervall an.

Die zum Grundintervall gehörende inverse Funktion nennt man den **Hauptwert des arcus sinus.**

Entsprechende Funktionen gibt es bei den übrigen trigonometrischen Funktionen; bei allen wird der (Kreis-)Bogen gesucht. Man nennt sie deshalb **Kreisfunktionen** oder **zyklometrische Funktionen.**

Wir stellen zusammen:

Trigonometrische Funktionen	Zyklometrische Funktionen	
$y = \sin x$	$y = \operatorname{arc} \sin x$	(Abb. 62)
$y = \cos x$	$y = \operatorname{arc} \cos x$	(Abb. 63)
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	(Abb. 64)
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	(Abb. 65).

Aus den Abbildungen 62 bis 65 ist ersichtlich, daß die zyklometrischen Funktionen unendlich vieldeutig sind, weil es zu jedem möglichen vorgegebenen x-Wert unendlich viele zugehörige y-Werte gibt. Diese Vieldeutigkeit hat man ausgeschaltet, indem man ähnlich wie in der Trigonometrie (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 35) Hauptwerte festsetzte. Der Wertevorrat dieser Hauptwerte muß alle Werte des Grundintervalls umfassen, aber jeden nur einmal. Der Bereich der Hauptwerte ist also

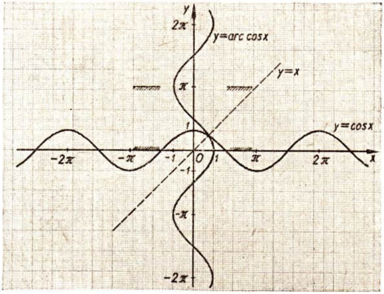

Abb. 63

für $y = \operatorname{arc} \sin x$ der Bereich zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$,

für $y = \operatorname{arc} \cos x$ der Bereich zwischen 0 und π,

für $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ der Bereich zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$,

für $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ der Bereich zwischen 0 und π.

Für viele Zwecke ist es notwendig, die Ableitungen der zyklometrischen Funktionen zu kennen.

a) Die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$

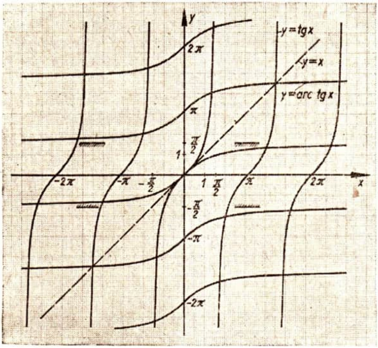

Abb. 64

Auf Grund der vorangegangenen Ausführungen läßt sich die Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$ auch als Umkehrfunktion $x = \sin y$ schreiben. Der Differentialquotient dieser trigonometrischen Funktion ist $\frac{dx}{dy} = \cos y$. In Abschnitt 38 wurde festgestellt, daß zwischen den Differentialquotienten einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion die reziproke Beziehung besteht, die sich schreiben läßt als $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

Daher ist der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Wegen $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ und $\sin y = x$ ergibt sich $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Es folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

also

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Im Bereich der Hauptwerte ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen.

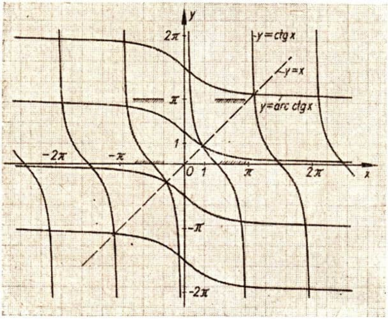

Abb. 65

b) Die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arc} \cos x$

Für

$$y = \operatorname{arc} \cos x$$

ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

also

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Leiten Sie dies **her!**

Für den Bereich der Hauptwerte hat die auftretende Wurzel wieder das positive Vorzeichen.

c) Die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Für $y = \operatorname{arc\,tg} x$ schreiben wir wieder die Umkehrfunktion $x = \operatorname{tg} y$, die den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ hat. Dann ist $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$.

Wegen der Beziehung $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$ (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 17) und $\operatorname{tg} y = x$ ergibt sich

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Es folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{also} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

d) Die Ableitung der Funktion $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

Für $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{also} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Leiten Sie dies unter Verwendung der Beziehung $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ ab (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 10. Schuljahr, S. 17)!

Zusammenfassung: Die zyklometrischen Funktionen sind wie die trigonometrischen Funktionen in Kurven darstellbar und gehen aus ihnen durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor. Während in den Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen wieder trigonometrische Funktionen auftreten, zeigt sich bei den Differentialquotienten der zyklometrischen Funktionen eine derartige Eigenschaft nicht; in ihnen treten keine trigonometrischen oder zyklometrischen Funktionen auf.

Beispiele:

1.
$$f(x) = \arcsin 2x,$$
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}};$$

2.
$$f(x) = 2x \cdot \operatorname{arc\,tg} bx,$$
$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} bx + \frac{2bx}{1 + b^2 x^2};$$

3.
$$f(x) = \operatorname{arc\,cos}^2 ax,$$
$$f'(x) = (2 \arccos ax) \cdot \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}.$$

Aufgaben

Es sind die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen zu bilden.

a) $f(x) = \arcsin 4x$ **b)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{6}$ **c)** $f(x) = \arcsin (1 - x)$

d) $f(x) = 3 \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ **e)** $f(x) = x \arccos 2x$ **f)** $f(x) = \arccos \frac{x}{1 - x}$

g) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + x}{1 - x}$ **h)** $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$ **i)** $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

k) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,ctg} x}$ **l)** $f(x) = \frac{\arcsin x - 1}{\arccos x + 1}$ **m)** $f(x) = 3 \operatorname{arc\,tg} 4x - 4 \operatorname{arc\,ctg} 3x$

40. Die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion und ihre Ableitungen

a) Die Exponentialfunktion a^x und ihre Umkehrung

Im Lehrbuch der Mathematik für das 9. Schuljahr (S. 100) wurde die Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ eingeführt. Was a^x für rationale Werte von x bedeutet, ist demnach bekannt. Entsprechend muß man a^x für irrationale Werte von x auf die Weise erklären, daß man zunächst die Zahl x durch eine rationale Zahl annähert und mit dieser die Potenz bildet. Man denke sich die irrationale Zahl x durch eine Folge von rationalen Zahlen r_n angenähert (etwa durch eine Folge von endlichen Dezimalbrüchen; Beispiel: $x = \sqrt{2}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1{,}4$, $r_3 = 1{,}41$, $r_4 = 1{,}414, \ldots$), das heißt also $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Wir bilden jetzt die Potenzen $a^{r_1}; a^{r_2}; a^{r_3}; \ldots$, die wir sämtlich ausrechnen können, da die Exponenten rationale Zahlen sind. Man kann beweisen, daß die Zahlenfolge a^{r_n} $(n = 1; 2; 3; \ldots)$ einen Grenzwert hat. Für diesen Grenzwert schreiben wir a^x. Demnach gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = a^x.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ in speziellen Fällen auch rational sein kann, stimmt diese Festsetzung für rationale Werte von x mit der ursprünglichen Definition der Exponentialfunktion $y = a^x$ überein. Damit ist jeder reellen Zahl x ein Funktionswert y zugeordnet. Wir haben also die Funktion $y = a^x$ für alle reellen Zahlen x definiert. Die Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten. Der Beweis dafür wird mit Hilfe der Sätze über Grenzwerte von Summen und Produkten geführt.

Weiter läßt sich beweisen, daß für $a > 1$ die folgende Behauptung gilt: Ist $x_1 < x_2$, so ist $a^{x_1} < a^{x_2}$. Nach Abschnitt 38 kann demnach die Funktion $y = a^x$ umgekehrt werden. Die Umkehrfunktion nennen wir $x = {}^a\!\log y$, die inverse Funktion ist dann $y = {}^a\!\log x$ $(x > 0$; vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 102). Setzt man $a = 10$, so erhält man die dekadischen Logarithmen, die man gewöhnlich mit dem Symbol lg bezeichnet. Die für die dekadischen Logarithmen bekannten Rechengesetze können nunmehr für die Basis a verallgemeinert werden; der Beweis wird analog dem für dekadische Logarithmen geführt (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 111).

b) Die Ableitung der Logarithmusfunktion und der Exponentialfunktion

Um die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = {}^a\!\log x$ zu bilden, gehen wir vom Differenzenquotienten aus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{}^a\!\log(x + \Delta x) - {}^a\!\log x}{\Delta x}.$$

Nach den Logarithmengesetzen ist

$${}^a\!\log(x + \Delta x) - {}^a\!\log x = {}^a\!\log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = {}^a\!\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Mithin gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{}^a\!\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot {}^a\!\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Nun ist (ebenfalls nach den Logarithmengesetzen)

$$\frac{x}{\Delta x} \cdot {}^a\!\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = {}^a\!\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

und demnach

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot {}^{a}\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Will man nun den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ vornehmen, so muß man untersuchen, ob $\lim\limits_{\Delta x \to 0} {}^{a}\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ existiert. Dazu genügt es, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ zu betrachten. Die Untersuchung erfordert jedoch Hilfsmittel, die über den Unterrichtsstoff der Oberschule hinausgehen. Es sei deshalb ohne Beweis angegeben, daß der Grenzwert existiert. Er ist eine transzendente Zahl, die man mit e bezeichnet: $e = 2{,}71828\ldots$ Durch Einsetzen einiger spezieller, wachsender Werte $\frac{x}{\Delta x}$ $\left(\text{z. B. } \frac{x}{\Delta x} = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots;\ 10;\ 100;\ 1000;\ 10000;\ 100000\right)$ kann man mit logarithmischer Rechnung die Annäherung des Ausdrucks $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ an $e = 2{,}71828\ldots$ nachweisen. Die folgende Tabelle gibt diese Annäherung wieder:

$\frac{x}{\Delta x}$	$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$	Differenz	$\frac{x}{\Delta x}$	$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$	Differenz
1	2,0		8	2,56578 ...	0,01928 ...
2	2,25	0,25	9	2,58118 ...	0,01540 ...
3	2,37037 ...	0,12037 ...	10	2,59375 ...	0,01257 ...
4	2,44141 ...	0,07104 ...	100	2,70483 ...	
5	2,48832 ...	0,04691 ...	1000	2,71706 ...	
6	2,52162 ...	0,03330 ...	10000	2,71824 ...	
7	2,54650 ...	0,02488 ...	100000	2,71826 ...	
		0,01928 ...			

Es ist also

$$\boldsymbol{y' = \frac{d\,{}^{a}\log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^{a}\log e}.$$

Setzt man in der Funktion $y = {}^{a}\log x$ für a den Wert e ein, so erhält man die Funktion $y = {}^{e}\log x$. Die Ableitung y' ist dann

$$y' = \frac{d\,{}^{e}\log x}{dx} = \frac{1}{x}\,{}^{e}\log e\,.$$

Nun ist aber ${}^{a}\log a = 1$ und mithin auch ${}^{e}\log e = 1$. Daraus folgt:

$$\boldsymbol{y' = \frac{d\,{}^{e}\log x}{dx} = \frac{1}{x}}.$$

Aus $\frac{d\,{}^{e}\log x}{dx} = \frac{1}{x}$ folgt $\int \frac{1}{x}\,dx = {}^{e}\log x + C$.

Bildet man das bestimmte Integral $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$, so ergibt sich (da ${}^{e}\log 1 = 0$ ist)

$$\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx = \left[{}^{e}\log x\right]_1^e = {}^{e}\log e - {}^{e}\log 1 = 1 - 0 = 1.$$

Die Beziehung

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$

ermöglicht es, die Zahl e mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Dazu teilen wir die Abszisse von $x_0 = 1$ bis zu einem beliebigen Punkt x_n in n gleiche Teile von der Länge Δx und bilden die untere Rechtecksumme F_u sowie die obere Rechtecksumme F_o. Dabei ist $x_k = 1 + k \cdot \Delta x$ und mithin $f(x_k) = \frac{1}{1 + k \cdot \Delta x}$. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist ferner bei der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ der Funktionswert $f(x_k)$ das absolute Minimum im k-ten Intervall und der Funktionswert $f(x_{k-1})$ das absolute Maximum im k-ten Intervall. Es gilt also:

$$F_u = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k \cdot \Delta x} \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta x}{1 + k \cdot \Delta x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{\Delta x} + k}$$

und

$$F_o = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (k-1) \cdot \Delta x} \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{\Delta x} + (k-1)}.$$

Wir wählen im besonderen $\Delta x = \frac{1}{4}$ und berechnen die Summen:

$$F_u = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4+n}; \qquad F_o = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3+n}.$$

Es zeigt sich, daß bereits beim achten Summanden die Summe F_u größer als 1 wird; da aber die Fläche $F = 1$ für gleiche x-Werte größer als die Summe F_u ist, muß die Zahl e kleiner als x_8 sein. Da andererseits die Summe F_o beim sechsten Summanden noch kleiner als 1 und die Fläche $F = 1$ für gleiche x-Werte kleiner als die Summe F_o ist, muß die Zahl e größer als x_6 sein. Es gilt also:

$$x_6 < e < x_8,$$
$$(1 + 6 \cdot \Delta x) < e < (1 + 8 \cdot \Delta x),$$
$$2{,}5 < e < 3.$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ strebt sowohl F_u als auch F_o gegen $F = 1$. Die Zahl e kann man daher mit beliebiger Genauigkeit annähern, wenn man nur hinreichend kleine Werte für Δx wählt. Tatsächlich erhält man auf diese Weise $e = 2{,}71828\ldots$

Bilden wir nun die Ableitung der Funktion $y = a^x$, so gehen wir von der Umkehrfunktion $x = {}^a\log y$ aus. Es ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \text{und} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}\,{}^a\log e.$$

Mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{y}\,{}^a\log e} = \frac{y}{{}^a\log e} = \frac{a^x}{{}^a\log e}.$$

Setzen wir wieder $a = e$, so ergibt sich die Ableitung der Funktion $y = e^x$ als

$$y' = \frac{e^x}{{}^e\log e} = e^x.$$

Wir erkennen, daß die Ableitung y' der Funktion $y = e^x$ gleich der Funktion selbst ist. Für die Funktion $y = e^x$ gilt also:

$$y' = y.$$

Diese Eigenschaft und die Tatsache, daß die transzendente Funktion $y = {}^e\log x$ als Ableitung die rationale Funktion $\frac{1}{x}$ hat, machen die Zahl e besonders geeignet als Basis für ein Logarithmensystem. Man bezeichnet deshalb die Logarithmen mit der Basis e als **natürliche Logarithmen** und kürzt ab **log nat** (logarithmus naturalis) oder **ln.** Es ist also:

$${}^e\log x = \ln x.$$

c) Der Zusammenhang zwischen $\ln x$ und ${}^a\log x$

Nach den Rechengesetzen für Logarithmen folgt aus $y = a^x$, wenn man die Gleichung auf beiden Seiten logarithmiert

zur Basis e: $\qquad \ln y = x \ln a;$

zur Basis a: $\qquad {}^a\log y = x\,{}^a\log a = x \cdot 1 = x.$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$\ln y = {}^a\log y \cdot \ln a$$

und nach Division durch $\ln a$

$${}^a\log y = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Diese beiden Beziehungen ermöglichen die Umrechnung des natürlichen Logarithmus in den Logarithmus einer Basis a und umgekehrt. Insbesondere ist für $a = 10$ die Möglichkeit gegeben, natürliche und dekadische Logarithmen umzurechnen:

$$\ln y = \lg y \cdot \ln 10, \qquad \lg y = \frac{\ln y}{\ln 10}.$$

Es ist $\frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342\ldots$ Man bezeichnet $\frac{1}{\ln 10}$ mit M und nennt M den Modul der dekadischen Logarithmen. Demnach ist $\ln 10 = \frac{1}{M} = 2{,}3025\ldots$

Aus ${}^a\log y = \frac{\ln y}{\ln a}$ folgt ferner für $y = e$:

$${}^a\log e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

Die im Abschnitt b) entwickelten Ableitungen können nunmehr folgendermaßen geschrieben werden:

y	y'
${}^a\log x$	$\frac{1}{x} \cdot {}^a\log e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\frac{a^x}{{}^a\log e} = a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = {}^a\log b\,x$ b) $f(x) = {}^a\log a\,x$ c) $f(x) = \ln b\,x$

d) $f(x) = \ln \frac{c}{x}$ e) $f(x) = {}^a\log x^n$ f) $f(x) = {}^a\log (a\,x^2 + b)$

g) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ h) $f(x) = {}^a\log \sin x$ i) $f(x) = \ln \sin 2\,x$

k) $f(x) = (\ln x)^3$ l) $f(x) = \ln \frac{a+x}{x} \cdot \ln \frac{x}{a-x}$ m) $f(x) = ({}^3\log 3\,x)^3$

n) $f(x) = \ln \operatorname{arc} \cos x$ o) $f(x) = \ln \operatorname{ctg} \frac{b}{x}$ p) $f(x) = \ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{x-a}$

q) $f(x) = {}^a\log \operatorname{ctg} x - {}^a\log \cos x$ r) $f(x) = \ln \frac{b^2 - x^2}{c\,x}$ s) $f(x) = \ln \sqrt{1 - x^2}$

2. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

a) $f(x) = a^{2x}$ b) $f(x) = a^x \cdot x^a$ c) $f(x) = a^x - a^{-x}$ d) $f(x) = \frac{c^x}{x^c}$

e) $f(x) = \ln a^x$ f) $f(x) = e^{3x}$ g) $f(x) = e^{5x+2}$ h) $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x - 3}$

i) $f(x) = x\,e^x$ k) $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$ l) $f(x) = \sqrt{e^{ax+b}}$ m) $f(x) = e^{\sin x}$

41. Zusammenfassung der Differentiationsregeln

Um einen geschlossenen Überblick über die bisher gewonnenen Ergebnisse zu ermöglichen, werden die Differentiationsregeln zusammengestellt. Dabei bedeuten $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, u, v, w differenzierbare Funktionen.

Funktion	Differentialquotient (Ableitung)	
$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$	(1)
$y = a \cdot f(x)$	$\frac{dy}{dx} = a \cdot f'(x)$	(2)
$y = f(x) + g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$	(3)
$y = u \cdot v$	$\frac{dy}{dx} = u'v + u\,v'$	(4)
$y = u \cdot v \cdot w$	$\frac{dy}{dx} = u'v\,w + u\,v'w + u\,v\,w'$	(5)
$y = \frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$	(6)
$y = f[\varphi(x)]$, mit $\varphi(x) = z$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$	(7)
$y = \frac{1}{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$	(8)

Funktion	Differentialquotient (Ableitung)	
$x = \varphi(y)$, mit $y = f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$	(9)
$y = x^n$	$\dfrac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ gültig für n ganz und gebrochen, positiv und negativ	(10)
$y = [u(x)]^n$	$\dfrac{dy}{dx} = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$	(11)
$y = \sin x$	$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$	(12)
$y = \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$	(13)
$y = \operatorname{tg} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	(14)
$y = \operatorname{ctg} x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$	(15)
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	(16)
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	(17)
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$	(18)
$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	(19)
$y = {}^a\log x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\, {}^a\log e = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	(20)
$y = \ln x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$	(21)
$y = a^x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^x}{{}^a\log e} = a^x \cdot \ln a$	(22)
$y = e^x$	$\dfrac{dy}{dx} = e^x$	(23)

Es wird darauf hingewiesen, daß die Herleitung der Differentiationsregeln (2) bis (9) sowie (11) sich nicht auf bestimmte Funktionen (z. B. ganze rationale Funktionen) beschränkt, da diese Regeln für allgemeine Funktionen mit dem Grenzübergang zum Differentialquotienten gewonnen wurden. Sie haben also für alle differenzierbaren (algebraischen und transzendenten) Funktionen Gültigkeit.

VII. Weitere Integrationsmethoden

42. Grundintegrale

Im Abschnitt 19 wurde der Zusammenhang der Integralrechnung mit der Differentialrechnung geklärt. Danach folgt aus der Gleichung $F(x) = \int f(x)\,dx$ die Beziehung

$$\frac{d\,[F(x)]}{d\,x} = f(x).$$

Es ist uns daher möglich, Funktionen zu integrieren, die wir als Ableitungen gewisser anderer Funktionen erkannt haben.

Im Abschnitt 21 wurde gezeigt, daß

$$\int x^n\,d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

gilt, da $\quad \frac{d}{d\,x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n \quad$ ist.

Da die hier benutzte Differentiationsformel für jeden rationalen Exponenten $n + 1$ außer für $n + 1 = 0$ gilt, ist also diese Integrationsformel für alle $n \neq -1$ verwendbar. Mit dieser Integrationsformel sind wir in der Lage, alle ganzen Potenzfunktionen ($n \geqq 0$, ganz), die gebrochenen Potenzfunktionen ($n < -1$, ganz) und die Wurzelfunktionen ($n \neq -1$, rational) zu integrieren.

Im Falle $n = -1$ ist der Integrand $f(x) = \frac{1}{x}$. Nun wissen wir, daß $\frac{1}{x}$ die Ableitung der Funktion $\ln x$ ist. Ist in der Funktion $\ln x$ die Variable x negativ, so ist, wie man mit Hilfe der Substitution $-x = \xi$ nachweisen kann (vgl. S. 118), $\frac{d \ln(-x)}{d\,x} = \frac{1}{x}$. Daraus folgt, daß $\frac{d \ln|x|}{d\,x} = \frac{1}{x}$ ist und mithin

$$\int \frac{d\,x}{x} = \ln|x| + C.$$

Ebenso findet man vermittels Bestätigung durch Differentiation weitere Grundintegrale. Wir erhalten die nebenstehende Tabelle.

In den Formeln (9) und (10) macht sich die Bedeutung der Integrationskonstanten C besonders bemerkbar. Die Integrationskonstante ändert sich, wenn man eine andere Lösungsfunktion für das betreffende Integral wählt. Würde man die Integrationskonstante unberücksichtigt lassen, so ergäbe sich zum Beispiel die Beziehung $\operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x$, während in Wirklichkeit die Beziehung $\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Beweis: Es sei zum Beispiel $\operatorname{arc\,sin} x = Z_1$, $\operatorname{arc\,cos} x = Z_2$ (Z_1 im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq Z_1 \leqq \frac{\pi}{2}$; Z_2 im Intervall $0 \leqq Z_2 \leqq \pi$), das heißt $\sin Z_1 = x$, $\cos Z_2 = x$, also $\sin Z_1 = \cos Z_2$. Daraus folgt, daß Z_1 und Z_2 Komplementwinkel sind, also ist

$$Z_1 + Z_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2},$$

das heißt also

$$\operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x + \frac{\pi}{2}.$$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x)$
1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}(\ln\lvert x\rvert + C) = \frac{1}{x}$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = a^x$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{ctg} x + C) = \frac{1}{\sin^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dx}(\arcsin x + C_1) \\ \frac{d}{dx}(-\arccos x + C_2) \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C_1 \\ -\operatorname{arc\,ctg} x + C_2 \end{cases}$	$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} x + C_1) \\ \frac{d}{dx}(-\operatorname{arc\,ctg} x + C_2) \end{array}\right\} = \frac{1}{1+x^2}$

43. Allgemeine Integrationsmethoden

Wir haben bereits bei der Integration der ganzen rationalen Funktion von zwei allgemeinen Integrationsregeln Gebrauch gemacht (vgl. S. 64):

1. Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten, er kann vor das Integralzeichen gesetzt werden:
$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$
2. Eine Summe von endlich vielen Funktionen $f(x)$, $g(x)$, ... wird integriert, indem man die Summe der Integrale der Summanden bildet:
$$\int (f(x) + g(x) + \cdots)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \cdots.$$

Beide Integrationsregeln ließen sich aus den entsprechenden Regeln der Differentialrechnung ableiten. Die Anwendung dieser Regeln ist aber praktisch nur dann möglich, wenn die Funktionen des Integranden von der Variablen x unmittelbar abhängen und die Einzelintegrale uns schon anderweitig (etwa aus einer Sammlung von Differentialquotienten) bekannt sind. Beide Voraussetzungen sind aber häufig nicht erfüllt. Für solche Funktionen wie $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sin x}$, $\sqrt{1-x^2}$ und andere Funktionen, die uns häufig in der Mathematik begegnen, können wir die Integrale noch nicht angeben, da wir nicht ohne weiteres wissen, aus welchen Funktionen sie durch Differentiation hervorgegangen sind. Es muß also unsere nächste Aufgabe sein, zu untersuchen, ob für weitere Funktionen — insbesondere für die angegebenen — Stammfunktionen ermittelt werden können.

Oft ist das Argument der Funktion selbst wieder eine Funktion von x. So ist $(2+3x)^7$ eine Potenzfunktion einer linearen Funktion, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$ die Sinusfunktion einer linearen Funktion, e^{-ax^2+b} die Exponentialfunktion einer quadratischen Funktion. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß Funktionen zu integrieren sind, die zwar einfache Argumente besitzen, die uns aber nicht als Ableitungen anderer Funktionen bekannt sind — wie etwa $\log x$, $\arcsin x$, $\frac{1}{1-x^2}$.

Bei den folgenden Betrachtungen wird im allgemeinen die Integrationskonstante C zur Vereinfachung nicht mehr angeführt. Es wird aber darauf hingewiesen, daß sie bei jedem unbestimmten Integral auftritt und deshalb hinzugedacht werden muß.

a) Substitutionsmethode

Ein Hilfsmittel zur Entwicklung weiterer Integrationsmethoden ist die Einführung einer neuen Veränderlichen in das Integral (**Substitution**). Ist zum Beispiel der Integrand $\sin^3 x \cos x$ vorgelegt und soll das unbestimmte Integral

$$y = \int \sin^3 x \cos x \, dx$$

gebildet werden, so erkennen wir, daß der Integrand aus zwei Faktoren besteht, von denen der erste eine mittelbare Funktion $f[t(x)]$ ist mit $t(x) = \sin x$, während der andere die Ableitung $t'(x)$ darstellt. Das vorgelegte Integral läßt sich also in der Form

$$y = \int t^3 \cdot t' \, dx$$

schreiben. Nun erinnern wir uns der Kettenregel der Differentialrechnung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Wir erkennen, daß der Integrand eine Struktur hat, die der rechten Seite der Kettenregel entspricht; denn es ist

$$\frac{dt}{dx} = t', \text{ während man } t^3 \text{ als } \frac{dy}{dt} \text{ auffassen kann.}$$

Man kann also das Integral

$$\int t^3 \cdot t' \, dx$$

ermitteln, indem man das Integral

$$\int t^3 \, dt$$

bildet. Das eben entwickelte Verfahren nennt man die **Substitutionsmethode der Integralrechnung**, weil in den Integranden eine neue Variable t substituiert wird. Im Beispiel $y = \int \sin^3 x \cos x \, dx$ bildet man also das Integral

$$\int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}.$$

Zusammenfassung: Wenn der Integrand ein Produkt ist, dessen einer Faktor eine mittelbare Funktion $f[t(x)]$ und dessen anderer Faktor die Ableitung $t'(x)$ der inneren Funktion ist, bildet man das Integral $\int f(t) \, dt$ mit $t = t(x)$. Es gilt dann

$$\boldsymbol{\int f(t) \cdot t' \, dx = \int f(t) \, dt.}$$

Beispiel:

$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$; der Integrand ist das Produkt aus der Quadratwurzel der logarithmischen Funktion und deren Ableitung.

Substitution: $t = \ln x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$; mithin ist

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t \cdot \sqrt{t} = \frac{2}{3} \ln x \cdot \sqrt{\ln x}.$$

In vielen Fällen kann man die Formel

$$\int f[t(x)] \cdot t'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

in umgekehrter Richtung verwenden, nämlich dann, wenn ein vorgelegtes unbestimmtes Integral $F(x) = \int f(x)\, dx$ auszuwerten ist. Wir führen durch eine geeignete Substitution $x = \varphi(t)$ eine neue Variable ein. Erhalten wir ein auswertbares unbestimmtes Integral $\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt = G(t)$, so läßt sich aus $G(t)$ die Stammfunktion zu $\int f(x)\, dx$ gewinnen. Es ist

$$F(x) = \int f(x)\, dx = G[\psi(x)],$$

wobei $\psi(x)$ die Umkehrfunktion zur Substitution $\varphi(t)$ ist. Man hat sich dabei davon zu überzeugen, ob zu jedem x eindeutig ein Wert t erklärt ist, ob sich also die Substitution $x = \varphi(t)$ eindeutig umkehren läßt, das heißt, ob die Umkehrfunktion $t = \psi(x)$ tatsächlich für alle in Frage kommenden Werte von x erklärt ist. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt \quad \text{mit} \quad t = \psi(x)$$

die entsprechende Substitutionsformel. Ist der Integrand $f(x)$ eine mittelbare Funktion, so setzen wir die innere Funktion, falls sie umkehrbar ist, gleich der neuen Integrationsvariablen t und gewinnen daraus die geeignete Substitution $x = \varphi(t)$.

Beispiele:

1. $\int (a + b\,x)^n\, dx$; wir setzen $a + b\,x = t$ und erhalten daraus die Substitution

$$x = \frac{1}{b}(t - a) = \varphi(t)$$

und deren Ableitung: $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{b}$;

also gilt: $\int (a + b\,x)^n\, dx = \int t^n \cdot \frac{1}{b}\, dt = \frac{1}{b} \cdot \int t^n\, dt$

$$= \frac{t^{n+1}}{b\,(n+1)} = \frac{(a + b\,x)^{n+1}}{b\,(n+1)}.$$

2. $\int \sin(\alpha\,x + \beta)\, dx$; wir setzen $\alpha\,x + \beta = t$ und erhalten daraus die Substitution

$$x = \frac{1}{\alpha}(t - \beta) = \varphi(t)$$

und deren Ableitung: $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha}$;

also gilt:

$$\int \sin(\alpha\,x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \int \sin t\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cos t = -\frac{1}{\alpha} \cdot \cos(\alpha\,x + \beta).$$

Wendet man die Substitutionsmethode auf das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ an, so ist zu berücksichtigen, daß sich auch die Grenzen des Integrals ändern. Der Integrationsbereich $a \leqq x \leqq b$ des bestimmten Integrals ist zugleich der Definitionsbereich der eindeutigen Umkehrfunktion $t = \psi(x)$ mit $\psi(a) = t_1$ und $\psi(b) = t_2$. Variiert x zwischen a und b, so variiert t zwischen $t_1 = \psi(a)$ und $t_2 = \psi(b)$. Also ist

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\psi(a)=t_1}^{\psi(b)=t_2} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Zweckmäßig wird man also die Grenzen erst dann einsetzen, wenn man in das Integral wieder die ursprüngliche Variable eingesetzt hat.

Aus diesen Beispielen erkennen wir, daß die Substitutionsmethode dann gut anzuwenden ist, wenn zwischen der alten Integrationsvariablen x und der neuen (Substitutions-) Variablen t ein linearer Zusammenhang besteht.

Nicht immer ist bei einem gegebenen Integranden die Anwendung dieser Regeln sogleich ersichtlich. Vielmehr bedarf es oft noch einer arithmetischen oder goniometrischen Umformung des Integranden, ehe man die Anwendbarkeit der Substitutionsmethode erkennt.

Beispiele:

1. $\int \frac{dx}{4+3x^2}$; wir formen den Integranden um: $\frac{1}{4+3x^2} = \frac{1}{4\left(1+\frac{3x^2}{4}\right)}$.

Nun substituieren wir $\frac{3}{4}x^2 = t^2$. Wir erhalten $x = \frac{2t}{\sqrt{3}}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Es ergibt sich

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} t = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right).$$

2. $\int \operatorname{tg} x\,dx$; es ist $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; wir haben also den reziproken Wert der Cosinusfunktion, multipliziert mit dem negativen Wert ihrer Ableitung, vor uns.

Setzen wir $\cos x = t$, so ist $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, also $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{-\sin x}$, somit

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int\frac{\sin x}{t}\cdot\frac{1}{-\sin x}\,dt = -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|.$$

b) Partielle Integration

Trotz der vielen Anwendungsmöglichkeiten führt die Substitutionsmethode nicht immer zum Ziel. Es sei etwa das Integral $\int x\ln x\,dx$ zu bestimmen. Unter den Funktionen in der Tabelle der Grundintegrale kommt dieser Integrand nicht vor. Die Substitutionsmethode ist aber auch nicht anwendbar, da sich der Integrand nicht als geeignet zusammengesetzte Funktion auffassen läßt. Für sich allein elementar integrierbar wäre der erste Faktor x des Integranden. Es ist nämlich

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2, \quad \text{da} \quad x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \text{ ist.}$$

Der Integrand $x\ln x$ läßt sich also auch auffassen als das Produkt $\ln x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$. Für Integranden dieser Art, das heißt für Integranden, die einen elementar integrierbaren Teil enthalten, läßt sich unter Umständen eine Lösung des ganzen Integrals angeben.

Wir erinnern uns der Produktregel der Differentialrechnung

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv',$$

wobei u und v Funktionen von x waren.

Die Integration ergibt

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

oder

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Besteht ein Integrand aus zwei Faktoren, von denen der eine elementar integrierbar ist, so wird man mit dieser Regel immer dann eine Lösung erhalten, wenn das rechte Integral keine neuen Schwierigkeiten enthält.

Beispiele:

1. $\int x \ln x\,dx$; wir setzen $u = \ln x$, $v' = x$,

dann ist $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{2}x^2$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\int x \ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \\ &= \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1).\end{aligned}$$

Prüfen Sie das Ergebnis durch Differentiation!

Durch diese Integrationsmethode ist das neue Integral $\int u'v\,dx$ in unserem Beispiel vereinfacht worden. Wir nennen diese Methode **partielle Integration**. Die Anwendung dieser Methode setzt demnach die Möglichkeit einer geeigneten Faktorenzerlegung des Integranden voraus, so daß man ein zweites Integral erhält, das entweder direkt oder mit anderen Methoden zu lösen ist.

2. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$; wir setzen $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $v' = 1$,

also $u' = \frac{1}{1+x^2}$, $v = x$.

Dann ist $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Das neue Integral ist durch die Substitution $1 + x^2 = t$ zu lösen. Es ist $\frac{dt}{dx} = 2x$, also

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

mithin

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Es zeigt sich, daß es gelegentlich genügt, den Faktor 1 als integrierbaren Bestandteil abzuspalten.

Manchmal kann man durch gleichzeitige Behandlung zweier ähnlicher Integrale mit partieller Integration zum Ziel kommen:

3. Es sei $J_1 = \int \sin^2 x\, dx$, $\qquad J_2 = \int \cos^2 x\, dx$.

In J_1 setzen wir $\qquad \sin x = u, \qquad \sin x = v'$;

also $\qquad \cos x = u', \qquad -\cos x = v$.

Dann ist
$$J_1 = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$
$$= -\sin x \cos x + J_2$$

oder $\qquad J_1 - J_2 = -\sin x \cos x. \qquad$ (I)

Ferner ist $\qquad J_2 = \int \cos^2 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, dx = x - J_1$

oder $\qquad J_1 + J_2 = x. \qquad$ (II)

Aus den beiden Gleichungen (I) und (II) folgt:

$$2J_1 = x - \sin x \cos x, \qquad J_1 = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x);$$
$$2J_2 = x + \sin x \cos x, \qquad J_2 = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$$

Im allgemeinen führt nur eine Faktorenzerlegung zu brauchbaren Ergebnissen. Dabei ist es häufig entscheidend, welcher Faktor als v' gewählt wird.

Prüfen Sie dies am Beispiel $y = x \sin x$ durch die folgende Wahl von u und v':

1. $u = x, \quad v' = \sin x$; $\qquad$ **2.** $u = \sin x, \quad v' = x$!

Aufgaben

1. a) $\int \sqrt{x}\, dx$ $\quad$ b) $\int x\sqrt{x}\, dx$ $\quad$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\quad$ d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

2. a) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$ $\quad$ b) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$ $\quad$ c) $\int x\sqrt[3]{x}\, dx$ $\quad$ d) $\int x\sqrt[3]{x^2}\, dx$

3. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad$ c) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ $\quad$ d) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}}$

Zu den Integranden sind Funktionsskizzen zu entwerfen.

4. a) $\int \frac{dx}{2x^2}$ $\quad$ b) $\int \frac{2\,dx}{x^3}$ $\quad$ c) $\int \frac{3\,dx}{x^7}$ $\quad$ d) $\int \frac{8\,dx}{3x^5}$

5. a) $\int x^{\frac{1}{3}}\, dx$ $\quad$ b) $\int x^{-\frac{2}{3}}\, dx$ $\quad$ c) $\int x^{-\frac{4}{5}}\, dx$ $\quad$ d) $\int x^{\frac{2}{7}}\, dx$

6. a) $\int \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}\, dx$ $\quad$ b) $\int \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}}\, dx$ $\quad$ c) $\int \frac{1}{4} x^{-\frac{2}{5}}\, dx$ $\quad$ d) $\int -\frac{2}{3} x^{-\frac{7}{3}}\, dx$

Bilden Sie ähnliche Aufgaben!

7. a) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx$ $\quad$ b) $\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{3}{x^3}\right) dx$ $\quad$ c) $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

8. a) $\int -\left(\frac{7}{x^8} + \frac{5}{x^6} + \frac{3}{x^4}\right) dx$ $\quad$ b) $\int \left(\frac{8}{x^7} - \frac{9}{x^6} + \frac{10}{x^{16}}\right) dx$ $\quad$ c) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}\right) dx$

Bringen Sie Integrand und Ergebnis in Quotientenform und leiten Sie eine Rechenregel daraus ab!

9. a) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^5}\,dx$ b) $\int \frac{1 - 3x^4 + 8x^6}{x^{10}}\,dx$ c) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx$

Unter welchen Voraussetzungen läßt sich also auch eine gebrochene rationale Funktion mit der Tabelle der Grundintegrale integrieren?

10. a) $\int (1 + x)^{n+1}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{(a - bx)^n}$ c) $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$ d) $\int e^{2x}\,dx$

11. a) $\int \ln x\,dx$ b) $\int x \cos x\,dx$ c) $\int x e^x\,dx$ d) $\int (\ln x)^2\,dx$

12. a) $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{x}}\,dx$

Die Integranden sind mittels goniometrischer Beziehungen umzuwandeln.

13. a) $\int (\cos x + \sin x)\,dx$ b) $\int \frac{\sin x}{2}\,dx$ c) $\int -\cos x\,dx$

14. a) $\int (x + \sin x)\,dx$ b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \cos x\right)dx$ c) $\int \left(2\sin x - \frac{1}{x^2}\right)dx$

15. a) $\int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ b) $\int \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ c) $\int \left(\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

16. a) $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx$ b) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx$ c) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx$

Skizzieren Sie den Verlauf der den Integranden zugeordneten Kurven!

17. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C_1 = -\operatorname{arc}\cos x + C_2$

b) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C_1 = -\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x + C_2$

1. Welche Beziehung besteht zwischen C_1 und C_2?
2. Es sind die durch die Integranden dargestellten Kurven zu zeichnen.

Bringen Sie die folgenden Integranden und Ergebnisse in Quotientenform und leiten Sie eine Regel ab! Vergleichen Sie mit Aufgabe 8! Fassen Sie beide Ergebnisse zusammen!

18. a) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1 - x^2}}$

19. a) $\int \frac{2\,dx}{1 + x^2}$ b) $\int \frac{dx}{2 + 2x^2}$ c) $\int \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$

20. a) $\int \left(\frac{1}{x} + x\right)dx$ b) $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)dx$ c) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$

21. a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x}\right)dx$ b) $\int \left(\frac{a}{x} + bx\right)dx$

22. a) $\int (a^x + b^x)\,dx$ b) $\int (a^x + x^a)\,dx$ c) $\int (x^a + b^x)\,dx$

Die nachfolgenden bestimmten Integrale sind auszuwerten.

Es sind graphische Darstellungen des Integranden im Integrationsbereich anzufertigen.

23. a) $\int\limits_{-1}^{+1} x^{2n}\,dx$ b) $\int\limits_{-1}^{+1} x^{2n+1}\,dx$ c) $2\cdot\int\limits_{0}^{+1} x^{2n+1}\,dx$ ($n > 0$, ganz)

24. a) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ b) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ c) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^4}$ d) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4}$

25. a) $\int\limits_{1}^{4} \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$ b) $\int\limits_{-3}^{-1} \left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$ c) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

26. a) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt[3]{x^2}\,dx$ b) $\int\limits_{-3}^{+3} \sqrt[3]{x^2}\,dx$ c) $\int\limits_{-3}^{+3} \sqrt[3]{x}\,dx$ d) $\int\limits_{0}^{+1} \sqrt{x}\,dx$

27. a) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt[4]{x^3}\,dx$ b) $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt[3]{x^4}\,dx$ c) $\int\limits_{25}^{100} x\sqrt{x}\,dx$ d) $\int\limits_{-4}^{+5} \sqrt[5]{x^3}\,dx$

28. a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{13x^2\sqrt[4]{x}}{2}\,dx$ b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3\,dx}{\sqrt{x}}$ c) $\int\limits_{0,5}^{2,5} \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\int\limits_{3}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

29. a) $\int\limits_{0}^{64} \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ b) $\int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ c) $\int\limits_{1}^{27} \left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

30. a) $\int\limits_{0}^{\pi} (x+\sin x)\,dx$ b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x+\frac{\cos x}{2}\right)dx$ c) $\int\limits_{0}^{1} \sin x\,dx$

31. a) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ b) $\int\limits_{0}^{\frac{3}{4}} (\sin x+\cos x)\,dx$ c) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x+b\cos x)\,dx$

32. a) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ b) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x}$ c) $\int\limits_{3}^{12} \frac{dx}{x}$ d) $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{x}$ e) $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x}$

f) $\int\limits_{a}^{ma} \frac{dx}{x}$ g) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$ h) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x}$ i) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x}$ k) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x}$

Fassen Sie das Ergebnis von f) in Worte!

33. a) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$ b) $\int\limits_0^a e^x\,dx$ c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^x\,dx$ d) $\int\limits_{-1}^0 e^x\,dx$ e) $\int\limits_0^{\lg e} e^x\,dx$ f) $\int\limits_0^{\ln a} e^x\,dx$

34. a) $\int\limits_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$ b) $\int\limits_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx.$

In welcher Beziehung stehen die beiden Integranden zueinander? Sie ähneln in gewisser Weise den Kreisfunktionen und heißen Hyperbelfunktionen. Man bezeichnet sie auch mit

$$\mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathfrak{Cof}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(gelesen: sinus hyperbolicus bzw. cosinus hyperbolicus).

Es ist zum Beispiel $\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$. Zeichnen Sie die Kurven mit Hilfe der Tabelle 15, Seite 24 in Schülkes Tafeln!

VIII. Anwendung der Integralrechnung

Bei der Untersuchung der Kurven treten zwei wesentlich verschiedene Gruppen von geometrischen Eigenschaften beziehungsweise Größen auf. Die eine Gruppe von Eigenschaften beschreibt das Verhalten der Kurve im kleinen, das heißt das Verhalten der Kurve in unmittelbarer Nachbarschaft (Umgebung) eines einzelnen ihrer Punkte. Die Behandlung dieser Aufgaben gelingt mit Hilfe der Differentialrechnung und ihres grundlegenden Begriffs, des Differentialquotienten. Eigenschaften dieser Art sind die Extremwerte einer Kurve, Konvexität oder Konkavität, die Wendepunkte und ähnliches. Die andere Gruppe von Eigenschaften befaßt sich mit dem Verhalten der Kurve im großen, also mit ihrem Gesamtverlauf. Zu dieser Gruppe gehören Begriffe wie die von der Kurve teilweise oder ganz begrenzte Fläche, ihre Bogenlänge usw. Analytisch werden diese der Kurve zugeordneten Größen mit Hilfe der Integralrechnung ermittelt.

Auch auf die Probleme der Mechanik findet die Integralrechnung Anwendung, zum Beispiel auf die Bewegungslehre, auf die Berechnung der Arbeit, des Trägheitsmomentes und des Schwerpunktes.

Alle in den folgenden Abschnitten zur Ableitung der Formeln durchgeführten Grenzprozesse erfordern einen strengen Beweis, für den die Hilfsmittel jedoch noch fehlen. Die Formeln sind auch nicht für beliebige Funktionen gültig. Es läßt sich aber zeigen, daß es genügt, für die Funktionen die Existenz der Ableitung und deren Stetigkeit vorauszusetzen. Diese Eigenschaften haben alle von uns behandelten Funktionen in den betrachteten Intervallen.

44. Geometrische Anwendungen

a) Flächenberechnung

Ausgangspunkt der Integraldefinition war der Flächeninhalt (vgl. S. 56). Ein Flächenstück F, das von einem Kurvenbogen der Funktion $y = f(x)$, von dessen Endordinaten und dem zugehörigen Stück der Abszissenachse begrenzt ist, wird gegeben durch

$$F = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad (a < b).$$

Dieser Ausdruck gibt die Summe der mit einem Vorzeichen behafteten Flächenstücke an. Werden die einzelnen Summanden errechnet, so läßt sich auch die Summe der Absolutbeträge ermitteln (vgl. dazu Abschnitt 24).

Im allgemeinen wird man es bei der Flächeninhaltsbestimmung nicht mit derart speziell berandeten Flächenstücken zu tun haben, wie wir sie bei der Definition des bestimmten Integrals benutzt haben. Die Flächen werden vielmehr allseitig von einer gekrümmten, sich nicht überschneidenden Kurve berandet sein.

Eine Funktion $y = f(x)$, die eine solche geschlossene Randkurve liefert, ist mindestens zweideutig (vgl. den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ oder $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$). Wir betrachten eine Funktion, die sich in zwei eindeutige Funktionen (vgl. Abb. 66) $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ $[f_1(x) \geqq f_2(x)]$ zerlegen läßt, deren jede einen Zweig der Kurve liefert. Die gemeinsamen Punkte der Funktionen sind die Endpunkte $x = a$ und $x = b$ des gemeinsamen Definitionsbereichs. Für sie gilt

$$f_1(a) = f_2(a) \quad \text{und} \quad f_1(b) = f_2(b).$$

Hat man a und b gefunden, so kann man $f(x)$ in die Zweige $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zerlegen, und es ist

$$F = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

der Flächeninhalt der von der geschlossenen Kurve $y = f(x)$ berandeten Fläche.

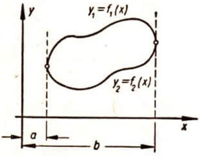

Abb. 66

Die Funktion $y = 2 + x^2 \pm \sqrt{1 - x^2}$ wird durch eine geschlossene, in der oberen Halbebene gelegene Kurve dargestellt (Abb. 67). Sie ist zweideutig, ihre eindeutigen Zweige sind $f_1(x) = 2 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ beziehungsweise $f_2(x) = 2 + x^2 - \sqrt{1 - x^2}$ (wobei für die Wurzel der Hauptwert zu nehmen ist). Die Integrationsgrenzen sind offenbar $a = -1$ und $b = +1$.

Also ist

$$F = \int_{-1}^{+1} [f_1(x) - f_2(x)]\,dx = 2\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

$$\left(\text{Substitution: } x = \sin t,\ \frac{dx}{dt} = \cos t\right)$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \Big[t + \sin t \cos t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \qquad \text{mit } t = \arcsin x$$

(vgl. S. 121),

$$F = \pi.$$

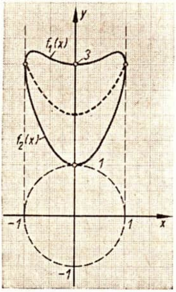

Abb. 67

b) Bogenlänge (Rektifikation der Kurve)

Die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve führt ebenfalls auf eine Integration. Der elementare Prozeß beim Ausmessen einer Länge besteht darin, daß man diese mit geradlinigen Meßstäben vergleicht. Dies geschieht in der Weise, daß man die Meßstäbe auf der zu messenden Länge abträgt und abzählt, wie oft dieses Verfahren möglich ist. Will man zu feineren Meßergebnissen kommen, so ist es nötig, daß man je nach Bedarf zu immer kürzeren Meßstäben übergeht. Entsprechend diesen anschaulichen Vorstellungen werden wir auch die Länge einer beliebigen Kurve definieren.

Wir schreiben der zu untersuchenden Kurve einen geradlinigen Streckenzug (Polygonzug) ein und messen dessen Länge. Sie ist von der Art des gewählten Polygons (etwa seiner Eckenzahl) abhängig. Wiederholen wir dieses Verfahren beliebig oft, wobei wir die Anzahl der Ecken der einbeschriebenen Polygone über alle Grenzen wachsen lassen, während die längste Polygonseite gleichzeitig gegen Null strebt, so werden diese Polygone die Kurve immer besser annähern. Die Länge der Polygonzüge strebt dabei einem Grenzwert zu, der ein Maß für die Länge der Kurve ist. Diese Definition der Kurvenlänge enthält zwei unausgesprochene Voraussetzungen, nämlich 1. daß der betrachtete Grenzwert existiert und 2. daß er von der besonderen Wahl der Polygonfolge unabhängig ist. Nur unter diesen Voraussetzungen, deren Erfüllung wir mit **Rektifizierbarkeit** einer Kurve bezeichnen, werden wir von der Länge einer Kurve sprechen können. Wir begnügen uns hier mit der Feststellung, daß alle uns begegnenden Kurven tatsächlich die genannten Voraussetzungen erfüllen.

Die Kurve sei gegeben durch die Funktion $y = f(x)$, die wir im Intervall $a \leqq x \leqq b$ betrachten; ihre Ableitung bezeichnen wir mit $y' = f'(x)$. Das Intervall teilen wir durch die Punkte $x_1 = a$; x_2; x_3; $\ldots$; $x_n = b$ in $n-1$ gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n-1}$. Über diesen Teilpunkten des Intervalls mögen die Eckpunkte des der Kurve einbeschriebenen Streckenzuges liegen (vgl. Abb. 68). Die Länge L_n des einbeschriebenen Polygons ist dann:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x .$$

Da nach Voraussetzung $y = f(x)$ im ganzen Intervall differenzierbar ist, also $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_k}{\Delta x}$ für jedes k existiert und $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = s$ die gesuchte Bogenlänge sein soll, so muß sich ergeben:

$$s = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

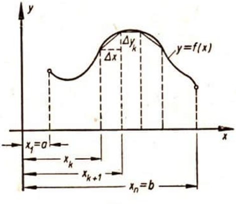

Abb. 68

Bei beliebiger veränderlicher oberer Grenze ist s eine Funktion von x gemäß der Beziehung

$$s(x) = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad \text{bzw.} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} .$$

c) Volumen eines Rotationskörpers

Die Anwendungen der Integralrechnung erstrecken sich nicht nur auf geometrische Eigenschaften der Ebene, sondern auch auf solche des Raumes.

Die Funktion $y = f(x)$ sei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und nicht negativ. Lassen wir die in diesem Intervall unter der Kurve liegende Fläche (Abb. 69) um die x-Achse rotieren (angedeutet durch den Doppelquerstrich an der x-Achse), so beschreibt sie einen Körper. Er wird seiner Entstehung nach **Rotationskörper** genannt. Die erzeugende Kurve, die **Profilkurve** des Drehkörpers, und die ihr kongruenten Kurven auf dem Drehkörper heißen die **Meridiane** des Rotationskörpers, die von den Punkten der Kurve beschriebenen Kreise seine **Breitenkreise.**

Die Ordinaten in den Endpunkten des Intervalls beschreiben Kreisflächen; sie sind die Deckflächen des durch die Drehung entstandenen Körperstumpfes.

Ist die rechte Deckfläche durch einen beliebigen Wert x bestimmt, so ist der Inhalt V des Rotationskörpers eine Funktion von x, also $V = V(x)$. Mit einer Änderung seiner Achsenlänge $(x - a)$ um Δx ändert sich auch $V(x)$ um einen Betrag $\Delta V(x)$. Im Intervall von x bis $(x + \Delta x)$ hat die Funktion $f(x)$ ein absolutes Minimum y_m und ein absolutes Maximum y_M. In ΔV läßt sich eine größte zylindrische Scheibe vom Inhalt $\pi y_m^2 \Delta x$ einbeschreiben und um ΔV eine kleinste vom Inhalt $\pi y_M^2 \Delta x$ umbeschreiben. Es gilt also für ΔV die folgende Abschätzung:

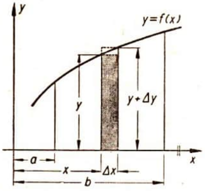

Abb. 69

$$\pi y_m^2 \Delta x \leqq \Delta V \leqq \pi y_M^2 \Delta x$$

oder

$$\pi y_m^2 \leqq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqq \pi y_M^2.$$

Mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ gehen y_m und y_M gegen den Funktionswert y an der Stelle x, das heißt aber, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V'(x)$ existiert und hat den Wert

$$V'(x) = \pi y^2.$$

Hieraus folgt für $V(x)$ nach der Definition des unbestimmten Integrals

$$V(x) = \pi \int y^2 \, dx$$

und damit für den Inhalt des Körpers zwischen $x = a$ und $x = b$

$$V_a^b = \pi \int\limits_a^b y^2 \, dx.$$

Die Drehung kann selbstverständlich auch um die y-Achse erfolgen. Die Überlegungen sind den vorangegangenen analog. Der Körperinhalt ist jetzt eine Funktion $V(y)$ mit der Eigenschaft

$$V'(y) = \pi \cdot x^2, \quad \text{also} \quad V(y) = \pi \int x^2 \, dy \quad \text{beziehungsweise} \quad V_c^d = \pi \int\limits_c^d x^2 \, dy.$$

Liegt x nicht als Funktion von y vor, sondern y als eine Funktion von x, so substituieren wir $y = f(x)$, das heißt

$$V = \pi \int\limits_a^b x^2 \cdot f'(x) \, dx \quad \text{mit} \quad f(a) = c \quad \text{und} \quad f(b) = d.$$

Beispiel:

a) Der obere Halbbogen der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die x-Achse:

es ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, oder $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, mithin

$$V = \pi \int\limits_{-a}^{+a} y^2 \, dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \int\limits_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \, dx = \left[\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

b) Der rechte Halbbogen der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die y-Achse:

es ist $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, oder $x = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$,

$$\text{also} \quad V = \pi \int_{-b}^{+b} x^2\,d\,y = \pi \frac{a^2}{b^2} \int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)\,d\,y = \left[\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)\right]_{-b}^{+b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Vergleichen Sie die beiden Rotationskörper, die man Rotationsellipsoide nennt! Unter welcher Bedingung sind sie volumengleich?

d) Die Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die Kurve $y = f(x)$ liefert bei der Rotation um die x-Achse (Abb. 70) eine Rotationsfläche, die Mantelfläche des Rotationskörpers. Wir erklären (entsprechend den Verhältnissen bei der Bestimmung der Bogenlänge) den Flächeninhalt M des Mantels durch einen Grenzwert. Der Kurve werde ein Sehnenpolygon einbeschrieben. Durch Rotation um die x-Achse erzeugt es eine aus Kegelstumpfmänteln zusammengesetzte Fläche; ihr Flächeninhalt sei $M(n)$. Läßt man die Anzahl n der Eckpunkte des einbeschriebenen Sehnenpolygons über alle Grenzen wachsen und dabei gleichzeitig alle Sehnenlängen gegen Null streben, so streben die Flächeninhalte $M(n)$ gegen einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$. Durch diesen Grenzwert definieren wir den Flächeninhalt M der zur Kurve $y = f(x)$ gehörigen Rotationsfläche: $M = \lim\limits_{n\to\infty} M(n)$. Wir berechnen also die einbeschriebene Fläche $M(n)$. Die $M(n)$ aufbauenden Kegelstumpfmäntel lassen sich bestimmen als Produkte aus ihren Seitenlinien $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2}$ und den Umfängen $2\pi f(\xi_k)$ ihrer mittleren Kreisquerschnitte, wobei $x_k < \xi_k < x_{k+1}$ ist und $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Also gilt für die Näherungsfläche

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2\pi f(\xi_k) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x.$$

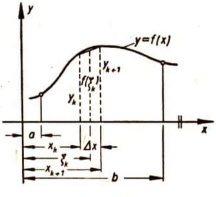

Abb. 70

Wird die Einteilung des Intervalls immer feiner, strebt also $n \to \infty$ und damit gleichzeitig $\Delta x \to 0$, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} M(n) = \lim_{\Delta x \to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x,$$

und es ist

$$\lim_{n\to\infty} M(n) = M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,d\,x.$$

Beachten wir, daß $\sqrt{1+y'^2} = \frac{ds}{dx}$ oder $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ ist, so ergibt sich nach der Substitution $x = x(s)$ das Integral

$$M = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} y\,ds,$$

wobei y als Funktion $y(s)$ aufzufassen ist.

Beispiel: Mantelfläche des Rotationsparaboloids.

$$y^2 = 2px; \qquad M = 2\pi \int_0^{x_0} y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx; \qquad yy' = p, \qquad y' = \frac{p}{y};$$

$$1 + y'^2 = \frac{y^2+p^2}{y^2}, \qquad \text{also} \qquad y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2+p^2} = \sqrt{p(2x+p)};$$

$$M = 2\pi\sqrt{p}\int_0^{x_0} \sqrt{2x+p}\,dx = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left[(2x+p)\cdot\sqrt{2x+p}\right]_0^{x_0},$$

$$M = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,(2x_0+p)\cdot\sqrt{2x_0+p} - \frac{2}{3}\pi p^2.$$

Berechnen Sie das Integral für $x = \sqrt{2py}$!

Aufgaben

1. Von einer Parabel $y^2 = 2px$ wird durch eine Senkrechte zur Parabelachse im Abstand a vom Scheitel der Parabel ein Segment abgeschnitten. Welche Abszisse b muß eine Parallele zur Ordinate in a haben, damit das zwischen a und b gelegene Flächenstück der Parabel gleich dem Parabelsegment ist?
2. In $P_0(x_0; y_0)$ ist an die Parabel $y^2 = 2px$ eine Tangente gelegt. Wie groß ist das von der x-Achse, der Tangente (vgl. Abschnitt 12) und dem Parabelbogen berandete Flächenstück? Suchen Sie nach einem gleich großen Flächenstück! Welcher Parabelsatz über Schnitt von Tangente und y-Achse ergibt sich daraus?
3. Die Parabel $y^2 = 2x$ wird von der Geraden $y = x - 4$ geschnitten. Berechnen Sie das von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück!
4. Es ist der Inhalt des Einheitskreises mit Hilfe der Integralrechnung zu bestimmen. (Benutzen Sie die Substitution $x = \cos t$!)
5. Bestimmen Sie die Größe des vom Kreise $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = \frac{9}{4}x$ berandeten (kleineren) Flächenstücks! Fertigen Sie eine Zeichnung an!
6. Bestimmen Sie Kreissegment und Kreissektor des Einheitskreises, wenn $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ ist $\left(F = 2\cdot\int_a^b y\,dx\right)$! Wie groß ist der Öffnungswinkel des Kreissektors?
7. Der Inhalt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist zu bestimmen. (Substitution $x = a\cdot\cos t$.)
8. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten gespiegelt. Wie groß ist das von beiden Parabeln begrenzte Flächenstück?
9. Die kubische Parabel $y = ax^3$ wird an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten gespiegelt. Wie groß ist das von beiden Parabeln begrenzte Flächenstück? (Beachten Sie auch den dritten Quadranten!)
10. Die gleichseitige Hyperbel $xy = 1$ wird von der Geraden $8(x + y) = 65$ geschnitten. Wie groß ist der Flächeninhalt des Hyperbelsegmentes? (Es ist eine Skizze zu entwerfen.)

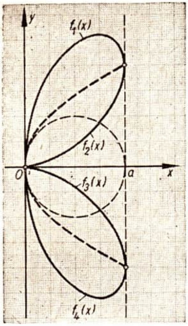

Abb. 71

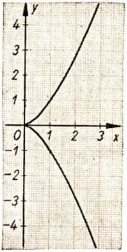

Abb. 72

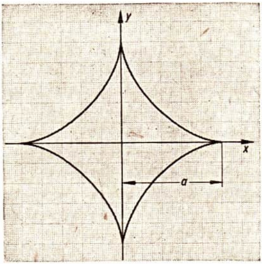

Abb. 73

11. Der Ausdruck $y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{ax - x^2}$ stellt je nach der Kombination der Wurzelzeichen vier verschiedene Kurvenbögen dar. Die Abbildung 71 gibt die vier eindeutigen Funktionen an. Wie kann man sich jeden Kurvenbogen entstanden denken? Beweisen Sie durch eine allgemeine Überlegung, daß der Inhalt jedes Blattes der Figur gleich dem des „Leitkreises" ist!

12. Es ist die Bogenformel auf die **Neilsche (halbkubische) Parabel** $y = x\sqrt{x}$ anzuwenden (Abb. 72).

13. Bestimmen Sie den Umfang der **Astroide** (Sternkurve) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ und vergleichen Sie ihn mit der Strecke $2a$ (Abb. 73)!

14. a) Berechnen Sie das Gewicht eines eisernen Zylinders (Wichte 7,86) mit der Höhe h (erzeugende Gerade $y = a$)!
b) Berechnen Sie den Inhalt eines Kegels mit der Höhe h (erzeugende Gerade $y = mx$)!
c) Berechnen Sie den Inhalt des Kegelstumpfes zwischen $x = 0$ und $x = 5$, wenn die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 3$ die erzeugende Mantellinie ist!

15. Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der aus $y = e^x$ durch Rotation um die x-Achse entsteht, für $x = 0$ bis $x = 1$.

16. Berechnen Sie das Volumen des durch Rotation um die x-Achse aus der Sinuskurve $y = \sin x$ hervorgehenden Drehkörpers für die Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$!

17. Zu berechnen ist das Gewicht des von
a) der Parabel $y = x^2$, b) der Parabel $y = x^3$, c) der Parabel $y = x^{\frac{3}{2}}$, d) der Parabel $y = x^{\frac{2}{3}}$ erzeugten Rotationskörpers, wenn die Grenzen 0 und x_0 sind, die Kurve 1. um die x-Achse, 2. um die y-Achse rotiert und die Wichte des Fertigungsmaterials 2,72 ist.

18. Berechnen Sie das Volumen des von der Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ erzeugten Rotationskörpers (vgl. Aufgabe 13)!

19. Die Kurve $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3 - x)$ (Abb. 74) hat eine im Endlichen gelegene Schleife. Bestimmen Sie ihren Flächeninhalt F, ihren Umfang U, ihr Volumen V_x bei Rotation um die x-Achse und ihr Volumen V_y bei Rotation um die y-Achse!

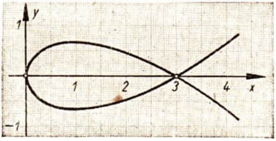

Abb. 74

20. a) Die Abbildung 75 zeigt den Achsenschnitt einer Vase, der aus Geraden, Kreisbögen und Parabelbögen zusammengesetzt ist. Die Scheiteltangente der Parabel und die Rotationsachse sind parallel. Bestimmen Sie in zwei Schritten aus den angegebenen Abmessungen ihr Fassungsvermögen!

b) Ein Faß kann als Teil eines Rotationsellipsoids aufgefaßt werden. Die Endflächen haben im Lichten einen Durchmesser von 60 cm. Der Durchmesser der größten Weite ist 80 cm. Das Faß ist 1 m lang. Wieviel Liter faßt es?

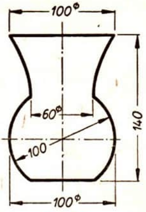

Abb. 75

21. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Mantels für den Kegel mit der Höhe h, der durch Rotation der Geraden $y = mx$ (Erzeugende) a) um die x-Achse, b) um die y-Achse entsteht! Bestätigen Sie die stereometrische Formel $M = \pi rs$!

22. Es ist der Flächeninhalt des Kegelstumpfmantels zu bestimmen, der durch Rotation der Erzeugenden $y = -\frac{1}{2}x + 3$ um die x-Achse in den Grenzen $x = 0$ und $x = 5$ entsteht. Die stereometrische Formel $M = \pi (R + r) \cdot s$ ist zu bestätigen.

23. Berechnen Sie die Oberfläche des durch Rotation aus der Astroide entstandenen Körpers (vgl. Aufgabe 18)!

45. Physikalische Anwendungen

a) Schwerpunktbestimmung

Liegen in einer x-y-Ebene n Massenpunkte mit den Massen m_i und den Koordinaten $(x_i; y_i)$, wobei $i = 1; 2; \ldots; n$ ist, so versteht man unter der Gesamtmasse M des Systems die Summe der Massen aller n Massenpunkte, das heißt also

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Die Koordinaten des **Schwerpunktes** S, des Punktes, in dem man sich die Gesamtmasse vereinigt denken kann, seien $(\xi; \eta)$. Für die **statischen Momente** des k-ten Massenpunktes bezüglich der y-Achse beziehungsweise der x-Achse gilt

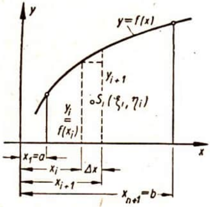

Abb. 76

$$d_y = m_k x_k; \qquad d_x = m_k y_k .$$

Somit ergeben sich die statischen Momente des Systems zu

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i; \qquad D_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i .$$

Das statische Moment ist aber gleich dem Produkt aus Gesamtmasse und zugehöriger Schwerpunktskoordinate, das heißt also $D_y = \xi M$ und $D_x = \eta M$. Somit ergibt sich

$$\xi M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad \text{und} \qquad \eta M = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i .$$

Diese Gleichungen heißen die **Momentengleichungen.** Ist im besonderen $m_i = 1$

für alle i, so ist M zahlenmäßig gleich n. Für ξ und η ergeben sich dann die Zahlengleichungen

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

Das bedeutet also, ξ und η sind in diesem Falle die arithmetischen Mittel der Abszissen beziehungsweise Ordinaten der Punkte $P_i(x_i;\ y_i)$.

1. Schwerpunkt einer Fläche

Wir wollen nun überlegen, wie wir die Schwerpunktskoordinaten für kontinuierlich ausgebreitete Massen errechnen können. Wir betrachten die über dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ gelegene, von der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ in den Endpunkten des Intervalls berandete Fläche und denken sie uns gleichmäßig mit Masse von der Dichte $\mu = 1$ belegt (Abb. 76). Die Gesamtmasse M ist dann zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt der belegten Fläche, also

$$M = \int_a^b f(x)\,dx,$$

denn es ist $M = \mu F$ und $\mu = 1$.

In die Fläche wird ein Treppenpolygon einbeschrieben durch Unterteilung der Intervallänge $b - a$ in n gleiche Teile $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; die Teilpunkte seien $x_1 = a$, $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$. Der Schwerpunkt S_i des i-ten Rechteckes liegt auf dem Schnittpunkt seiner Diagonalen und hat die Koordinaten $\xi_i = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$, $\eta_i = \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)$, wobei $f(\bar{x}_i)$ das absolute Minimum im i-ten Intervall ist. Die Masse dieses Rechteckes ist $m_i = f(\bar{x}_i)\,\Delta x$. Der gemeinsame Schwerpunkt aller Rechtecke habe die Koordinaten $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$; $\overline{M}$ sei die Masse der Näherungsfläche des Polygons.

Dann ist nach den Momentengleichungen

$$\bar{\xi}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\xi_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\bar{x}_i)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x,$$

$$\bar{\eta}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\eta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

oder

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x}{\overline{M}} + \frac{1}{2}\Delta x; \qquad \bar{\eta} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x}{\overline{M}}.$$

Läßt man nun $n \to \infty$, das heißt $\Delta x \to 0$ streben, so strebt der Schwerpunkt $(\bar{\xi};\ \bar{\eta})$ der Näherungsfläche gegen eine Grenzlage, die den Schwerpunkt $(\xi;\ \eta)$ der Fläche darstellt. Ferner strebt die Summe $\sum_{i=1}^{n} m_i = \overline{M}$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x \text{ gegen } \int_a^b x\,y\,dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x \text{ gegen } \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx.$$

Wir setzen also

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b x\,y\,dx}{F}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{F} \quad \text{mit} \quad F = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

als Koordinaten des Flächenschwerpunktes fest.

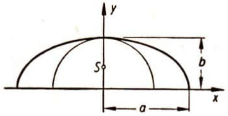

Abb. 77

Beispiel:

Der Schwerpunkt einer durch die Hauptachse halbierten Ellipse ist zu bestimmen (Abb. 77).

Es ist $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

also

$$\text{a)} \quad F = \int\limits_{-a}^{+a} y\,dx = \frac{1}{2}\pi\,a\,b;$$

$$\text{b)} \quad D_y = \int\limits_{-a}^{+a} x\,y\,dx = \frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{+a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{b}{2a}\int\limits_0^0 \sqrt{t}\,dt = 0 \quad \text{mit } a^2 - x^2 = t;$$

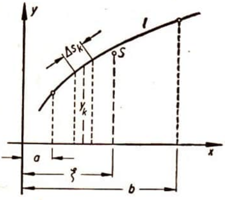

Abb. 78

$$\text{c)} \quad D_x = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a} y^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{3}\,a\,b^2.$$

Also ist

$$\xi = \frac{D_y}{F} = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{D_x}{F} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Die Lage des Schwerpunktes ist also unabhängig von der Länge der halbierenden Hauptachse, gilt also auch für den Kreis mit dem Halbmesser b.

2. Die Guldinschen Regeln

Auch für Kurven kann man einen Schwerpunkt angeben. Man denkt sich die Massen kontinuierlich auf der Kurve verteilt. Dann gelten ebenfalls die Momentengleichungen (vgl. S. 132/133).

Bei jedem Rotationskörper besteht ein Zusammenhang zwischen der Maßzahl seines Inhaltes und der Lage des zur erzeugenden Fläche gehörenden Schwerpunktes. Entsprechendes gilt für Rotationsflächen. Die Beziehungen sind unter dem Namen Guldinsche Regeln bekannt.

Erste Regel: **Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Kurve und dem vom Kurvenschwerpunkt zurückgelegten Wege.**

Zweite Regel: **Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Flächenschwerpunktes.**

1. Die Länge der rotierenden (erzeugenden) Kurve (Abb. 78) sei l; ihr Schwerpunkt S habe von der Rotationsachse den Abstand η. Die Kurve sei durch einen gebrochenen Streckenzug mit den Längen Δs_k angenähert. Dabei sei y_k die Ordinate der Mitte von Δs_k.

Dann gilt nach dem Momentensatz:

$$\eta \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta s_k \qquad \text{oder} \qquad 2\pi\eta \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\, y_k \cdot \Delta s_k.$$

Wenn Δs_k gegen 0 strebt, gilt

$$\lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi\, y_k \Delta s_k = \int_0^l 2\pi\, y\, ds \qquad \text{und} \qquad \lim_{\Delta s_k \to 0} 2\pi\eta \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = 2\pi\eta \cdot l,$$

also

$$2\pi\eta \cdot l = \int_0^l 2\pi\, y\, ds.$$

Nach der Inhaltsformel für Mantelflächen von Rotationskörpern ist die rechte Seite die Rotationsfläche, die bei der Drehung um die x-Achse entsteht; also ist

$$2\pi\eta \cdot l = O.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für die Drehung um die y-Achse.

2. Die rotierende Fläche sei F, ihr Schwerpunkt S habe die Koordinaten $(\xi; \eta)$ (Abb. 79). Wir betrachten ein Flächenelement ΔF_k von der Breite Δx. Angenähert läßt es sich ersetzen durch das ihm einbeschriebene Rechteck von der Breite Δx und der Höhe $\bar{y}_k = f(\bar{x}_k)$, wobei $f(\bar{x}_k)$ das absolute Minimum im k-ten Intervall bedeutet. Im Falle einer stets wachsenden Funktion ist $\bar{y}_k = y_k$ (vgl. Abb. 79); wenn dagegen die Funktion stets fällt, ist $\bar{y}_k = y_{k+1}$. Der Schwerpunkt S_k hat die Koordinaten

$$\xi_k = x_k + \frac{\Delta x}{2}, \qquad \eta_k = \frac{\bar{y}_k}{2};$$

die in S_k vereinigt gedachte Masse ist $\Delta m_k = \bar{y}_k \Delta x$, wenn die Massendichte wieder $\mu = 1$ ist. Nach dem Momentensatz gilt dann

$$\bar{\eta} \cdot \bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{y}_k}{2} \cdot \bar{y}_k \Delta x,$$

wenn $\bar{F}$ die Fläche des Treppenpolygons, $\bar{\eta}$ die Ordinate ihres Schwerpunktes $\bar{S}$ ist, oder

$$2\pi\bar{\eta} \cdot \bar{F} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{(\bar{y}_k)^2}{2} \Delta x.$$

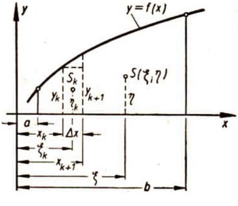

Abb. 79

Lassen wir $n \to \infty$, das heißt $\Delta x \to 0$ streben, so strebt die rechte Seite gegen $\int_a^b \pi y^2\, dx$, $\bar{F}$ gegen $F = \int_a^b y\, dx$, das heißt, $\bar{\eta}$ strebt gegen eine Grenzlage η, die wir als die Schwerpunktkoordinate der Fläche definieren. Also ist

$$2\pi\eta F = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

oder

$$2\pi\eta\cdot F = V.$$

Meist werden O und V leichter zu berechnen sein als die Schwerpunktkoordinaten. Dann können die Guldinschen Regeln zur Schwerpunktberechnung dienen.

Beispiel:

Ein Halbkreis rotiert um seinen Durchmesser. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes von Halbkreisbogen und Halbkreisfläche!

a) Wir legen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Kreises. Der Halbkreisbogen erzeugt bei der Rotation die Kugeloberfläche $O = 4\pi r^2$. Die Abszisse ξ seines Schwerpunktes ist aus Symmetriegründen Null. Für seine Ordinate gilt:

$2\pi\eta\cdot l = O$ oder $2\pi\eta\cdot\pi r = 4\pi r^2$, das heißt $\eta = \frac{2r}{\pi}$.

b) Die Halbkreisfläche $F = \frac{1}{2}\pi r^2$ erzeugt bei der Rotation die Vollkugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt auf der y-Achse, also ist $\xi = 0$; für η ergibt die Guldinsche Regel:

$$2\pi\eta\cdot F = V \qquad \text{oder} \qquad 2\pi\eta\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

das heißt

$$\eta = \frac{4r}{3\pi}$$

(vgl. mit der Ellipse).

3. Körperschwerpunkte

Auch die Schwerpunktsbestimmung der Rotationskörper ist mit einem analogen Ansatz möglich. Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ rotiere um die x-Achse und erzeuge dabei einen Rotationskörper mit dem Volumen $V = \pi\int_a^b y^2\,dx$. Wir setzen die Massendichte des Körpers wieder zu $\mu = 1$ an; dann ist die Gesamtmasse M des Körpers zahlenmäßig gleich V. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers auf der x-Achse; es ist also nur die Schwerpunktsabszisse ξ zu bestimmen. Wir zerlegen den Körper in Scheiben der Dicke Δx, deren Masse $\overline{M} = \pi\overline{y}^2\,\Delta x$ ist, wobei $\overline{y} = f(\overline{x})$ mit $x < \overline{x} < x + \Delta x$ ist. Nach dem Momentensatz ist dann

$$\xi M = \lim_{\Delta x\to 0}\sum \overline{x}\cdot\pi\overline{y}^2\,\Delta x,$$

das heißt

$$\xi = \frac{\int_a^b x y^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

Beispiel:

Bestimmung der Schwerpunktlage einer Halbkugel. Die Halbkugel wird durch die Rotation des vom Kreisbogen $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $(0 \leqq x \leqq r)$, bestimmten Kreisquadranten um die x-Achse erzeugt. Also ist

$$\xi = \frac{\int\limits_0^r x\,(r^2 - x^2)\,d\,x}{\int\limits_0^r (r^2 - x^2)\,d\,x} = \frac{\frac{1}{4}\,r^4}{\frac{2}{3}\,r^3} = \frac{3}{8}\,r\,.$$

b) Berechnung der Arbeit

Wie uns aus dem Physikunterricht bekannt ist, wird zur Überwindung einer konstanten Kraft K in ihrer Richtung längs des Weges s die Arbeit $A = K \cdot s$ benötigt. Wir wollen diesen einfachen Fall verallgemeinern. Die Kraft K soll längs des geradlinigen Weges s eine Funktion von s sein, $K = K(s)$. Zur Überwindung längs eines Wegelementes $\varDelta s$ ist dann eine Arbeit $\varDelta A = K(\bar{s}) \cdot \varDelta s$ nötig, wobei $K(\bar{s})$ ein „mittlerer" Wert der Kraft K ist $(s < \bar{s} < s + \varDelta s)$. Im Grenzfall erhält man für die gesamte Arbeit

$$A = \lim_{\varDelta s \to 0} \sum \varDelta A = \lim_{\varDelta s \to 0} \sum K(\bar{s})\,\varDelta s$$

oder

$$A = \int\limits_{s_1}^{s_2} K(s)\,d\,s\,.$$

Beispiel:

In einem von einer elektrischen Ladung e erzeugten elektrischen Felde herrscht im Abstand r von der Ladung die elektrische Feldstärke $F = \frac{e}{r^2}$. Eine zweite (gleichnamige) elektrische Ladung e' erfährt in diesem Felde eine Abstoßung $K = -e' \cdot F = -\frac{e\,e'}{r^2}$ (Coulombsches Gesetz), wenn die Entfernung der Ladungen r ist. Um die Ladung e' vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 $(r_2 < r_1)$ von e zu bringen, ist die Arbeit

$$A = \int\limits_{r_1}^{r_2} K(r)\,dr = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{e\,e'}{r^2}\,dr = +\,e\,e'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig.

Ist $e' = 1$ die Einheitsladung und ist $e' = 1$ aus sehr großem Abstand $(r_1 \to \infty)$ bis auf den Abstand r_2 herangeführt worden, so erfordert dies die Arbeit

$$\lim_{r_1 \to \infty} \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{e}{r^2}\right) dr = \lim_{r_1 \to \infty} e\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{e}{r_2}.$$

Man nennt diesen Wert das Potential der Ladung e im Abstand r_2. Das Potential P einer Ladung e im Abstand r ist also $P = \frac{e}{r}$.

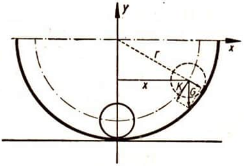

Abb. 80

Die Formel $A = \int\limits_{s_1}^{s_2} K(s)\, ds$ gilt auch dann, wenn der Weg s nicht geradlinig, sondern eine beliebige Kurve ist, vorausgesetzt, daß die Richtung der in den Wegpunkten s erklärten Kraft mit der Tangentenrichtung der Wegkurve zusammenfällt.

Beispiel:

In einer halbkugelförmigen Schale liegt ein Körper vom Gewicht G. Er wird (reibungslos) in der Schale bewegt. Welche Arbeit ist nötig, um ihn längs eines Großkreisbogens auf die Höhe des Mittelpunktes zu bringen (Abb. 80) ? Die auf den Körper wirkende Kraft G zerlegt sich in eine zum Kreis tangentiale Komponente K, die seine Bewegung bestimmt und die zu überwinden ist, und eine (uns hier nicht weiter interessierende) normale Komponente. Die Lage des Körpers auf der Schale ist durch die Koordinaten x und y bestimmt. Nun ist $K : G = x : r$, also $K = \frac{G}{r} \cdot x$. Ferner ist $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ und, da $y^2 = r^2 - x^2$ ist, gilt $\frac{ds}{dx} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.
Also ist

$$A = \int K(s)\, ds = \int\limits_0^r \frac{G}{r} \cdot x \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = G \int\limits_0^r \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Substituieren wir t für $r^2 - x^2$, so ergibt sich

$$A = -\frac{G}{2} \int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[-G \cdot \sqrt{t}\,\Big]_0^r = +G \cdot r.$$

Das Ergebnis besagt, daß die Arbeit allein abhängig ist von dem Höhenunterschied r zwischen Anfangslage und Endlage des bewegten Körpers.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten eines von der Sinuslinie und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks!

2. Mit Hilfe der Guldinschen Regeln ist die Lage des Schwerpunktes **a)** des Bogens, **b)** des Gesamtumfanges, **c)** der Fläche eines Halbkreises zu berechnen.

3. Bestimmen Sie die Schwerpunktkoordinaten **a)** des Gesamtumfanges, **b)** der Fläche eines halben Kreisringes mit den Radien r_1 und r_2!

4. Von der Parabel $y^2 = 2px$ wird durch die Gerade $x = a$ ein Segment abgeschnitten. Bestimmen Sie die Schwerpunktkoordinaten **a)** für ein Halbsegment, **b)** für das ganze Segment!

5. Ein Kreis mit dem Halbmesser r rotiert um eine Gerade seiner Ebene. Der Kreismittelpunkt hat von der Geraden den Abstand R ($R > r$). Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers (Torus) sind zu berechnen.

Anleitung: Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes der erzeugenden Elemente und benutzen Sie die Guldinschen Regeln!

6. Am Zylinder ist die Schwerpunktformel für Rotationskörper (erzeugende Gerade $y = a$) zu prüfen.

7. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes für einen geraden Kegel, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt und dessen Achse die x-Achse ist, wenn er durch die Gerade $y = mx$ erzeugt wird und die Höhe h besitzt!

8. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes für einen durch die Gerade $y = mx + b$ $(m > 0; b > 0)$ erzeugten Kegelstumpf mit der Höhe h! (Der erste Grundkreis ist durch $x = 0$ bestimmt.)

9. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die x-Achse. Es ist die Schwerpunktlage des halben Rotationsellipsoids mit $0 \leqq x \leqq a$ zu bestimmen.

10. Die Parabel $y^2 = 2px$ rotiert um die x-Achse. Es ist die Schwerpunktlage für das erzeugte Paraboloid mit der Höhe h zu bestimmen.

11. Die Parabel $y^2 = 2x$ rotiert um die x-Achse. Auf das sich bis $x = 8$ erstreckende Paraboloid wird ein gerader Kegel aufgesetzt mit der Spitze auf der x-Achse. Die Höhe des Kegels ist gleich seinem Grundkreisradius. Es ist das Volumen des Körpers und die Lage seines Schwerpunktes zu bestimmen.

12. Bilden Sie die Differenz der in Aufgabe 11 genannten Teilkörper und bestimmen Sie das Volumen und die Schwerpunktlage des Restkörpers!

13. Auf der Oberfläche der Erde hat die Fallbeschleunigung den Wert $g = 981$ cm s^{-2}. Sie ändert sich mit zunehmender Höhe h über der Erdoberfläche. Nach dem Gravitationsgesetz ist die auf einen Massenpunkt m ausgeübte Anziehung $m\,g = f \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$, wenn M die Masse der Erde, R ihr Radius und f die Gravitationskonstante ist. In der Höhe h ist die Anziehungskraft $m \cdot g(h) = f \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$. Daraus folgt für die Fallbeschleunigung $g(h)$ in beliebiger Höhe h

$$g(h) = g \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad (R = 6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm}).$$

Welche Arbeit ist nötig, um eine Masse $m = 1$ g (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) bis zum Abstand D von der Erdoberfläche zu bringen? Gegen welchen Grenzwert strebt die Arbeit, wenn D über alle Grenzen wächst? Dabei ist der Einfluß aller anderen Himmelskörper außer acht zu lassen.

14. Berechnen Sie die Inhalte der von der Kurve $y = x^3 - 4x$ und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücke und die durch Rotation um die x-Achse entstandenen Rotationsvolumina! Welchen Abstand haben die Schwerpunkte der Flächenstücke von der x-Achse?

15. Kesselbaunieten haben die Form eines Zylinders mit aufgesetzten Kugelkappen. Wir bezeichnen den Durchmesser des Zylinders mit d, die Länge des Zylinders mit l, die Höhe der Kugelkappe mit h und den Durchmesser der Kugelkappe mit D. Nach den DIN-Vorschriften stehen die Abmessungen in den nachfolgend angegebenen Verhältnissen zueinander:

$$D : d = 1{,}8 : 1, \qquad h : d = 0{,}7 : 1, \qquad l : d = 5 : 1.$$

Fertigen Sie die Schnittzeichnung einer solchen Kesselbauniete an und berechnen Sie das Gewicht von 1000 Stück mit der Länge $l = 16$ mm! Fertigungsmaterial: Eisen mit der Wichte 7,5.

16. **a)** Ein kugelförmiger Wasserbehälter mit dem Radius r sei bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Es ist die Wassermenge und die Lage des Schwerpunktes der Flüssigkeit zu berechnen.

b) Die Aufgabe a) ist unter der Voraussetzung zu lösen, daß h der Reihe nach die Werte $\frac{1}{3}r$, $\frac{1}{2}r$, $\frac{2}{3}r$, $\frac{3}{4}r$, $\frac{5}{4}r$, $\frac{4}{3}r$, $\frac{3}{2}r$, $\frac{5}{3}r$, $\frac{7}{4}r$, $2r$ annimmt!

c) Die Aufgabe b) ist für $r = 2{,}5$ m zu lösen.

IX. Zusammenstellung der wichtigsten Integrationsregeln

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \int dx = x + C$$

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx = aF(x) + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\int f(t)\,t'\,dx = \int f(t)\,dt\,; \qquad \frac{dt}{dx} = t'$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_m^b f(x)\,dx - \int_m^a f(x)\,dx \qquad 0 < m < a < b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,; \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) - F(a)$$

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = f(x_0)\,(b-a) \qquad a < x_0 < b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)=t_1}^{\psi(b)=t_2} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,; \qquad t = \psi(x)\,; \qquad a \leqq x \leqq b$$

B. Analytische Geometrie der Ebene

Werden die Eigenschaften geometrischer Gebilde (z. B. Kurven, Flächen, Ebenen) mit Hilfe rechnerischer (analytischer) Verfahren untersucht, so spricht man von analytischer Behandlung der Geometrie oder kurz von der **analytischen Geometrie.** Wir können die Untersuchungen in der Ebene oder im Raume durchführen. Im Mathematikunterricht der Oberschule beschränken wir uns jedoch auf die analytische Geometrie der Ebene. In den folgenden Abschnitten wird diese Einschränkung nicht ausdrücklich erwähnt, sie muß jedoch beachtet werden.

Zur Durchführung der Untersuchungen werden die Punkte der Ebene umkehrbar eindeutig auf die Menge der in einem geeigneten Bezugssystem möglichen Zahlenpaare abgebildet, so daß jedem Punkt ein und nur ein Zahlenpaar und jedem Zahlenpaar ein und nur ein Punkt entspricht. Ein derartiges Bezugssystem haben wir bereits in der Infinitesimalrechnung als Koordinatensystem kennengelernt, bei dem jeder Punkt P durch die Koordinaten x und y, also das Zahlenpaar $(x\,;\,y)$, bestimmt ist. Aus der Menge aller Punkte wird nun die Gesamtheit der Punkte ausgewählt, die den zu untersuchenden Gebilden angehören. Dazu stellt man eine geeignete Gleichung auf, der die Wertepaare eines jeden derartigen Punktes genügen. So ist zum Beispiel bereits bekannt, daß die Gleichung

$$y = mx + b$$

eine Gerade darstellt (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 15). Jedes zu einem Punkte auf der Geraden gehörende Zahlenpaar $(x\,;\,y)$ befriedigt die Gleichung.

Die so erhaltenen Gleichungen geben funktionale Zuordnungen wieder. Aus den Eigenschaften dieser Funktionen kann man Schlüsse auf die Eigenschaften der geometrischen Gebilde ziehen; zum Beispiel kann man die Lage von Kurven zueinander, die Schnittpunkte und die Winkel zwischen ihnen ermitteln. Da diese Kurven oder Teile von ihnen in speziellen Fällen die Berandungen von Flächen sein können, ist es durch derartige Untersuchungen auch möglich, Aussagen über Flächeninhalte zu machen.

In vielen Fällen führen die analytischen Methoden rascher zum Ziele als die Methoden der synthetischen Geometrie (bei der auf Berechnungen verzichtet wird), in anderen Fällen liefern sie genauere Ergebnisse als Konstruktionen. Gewisse Gebiete der Geometrie wurden überhaupt erst durch analytische Verfahren erschlossen.

Bereits bei altgriechischen Mathematikern, z. B. bei Appolonius von Perge (3. Jh. v. u. Z.), findet man Methoden, die dem Wesen der analytischen Geometrie entsprechen. Später wurden sie von dem Franzosen Pierre Fermat (1601 bis 1665) wieder angewandt. Systematisch, exakt und im wesentlichen erschöpfend hat sie der bedeutende französische Philosoph und Mathematiker René Descartes dargestellt (latinisierte Form des Namens: Cartesius), der deshalb als der Schöpfer der analytischen Geometrie bezeichnet wird. Er lebte von 1596 bis 1650. Die Entwicklung dieser mathematischen Disziplin wurde wesentlich durch den Aufschwung der Astronomie im 16. und

17. Jahrhundert (Kepler, Kopernikus u. a.) gefördert; andererseits wirkten die neuen mathematischen Hilfsmittel mit ihren vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten befruchtend auf die Entwicklung einer neuen Mechanik durch Newton. Der Deutsche Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716), der Engländer Isaac Newton (1643 bis 1727) und der Schweizer Leonhard Euler (1707 bis 1783) haben die Gedanken von Descartes weiterentwickelt und der analytischen Geometrie die gegenwärtige Struktur gegeben.

I. Analytische Geometrie der Geraden

1. Punkt und Strecke

a) Der Punkt im Koordinatensystem

In einer Ebene soll die Lage eines Punktes P eindeutig bestimmt werden.

Wir errichten zwei in der Ebene aufeinander senkrecht stehende Geraden und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit O. Dann legen wir die Längeneinheit fest und tragen sie vom Punkt O aus (dem Nullpunkt) auf beiden Geraden ab. Nun bezeichnen wir die eine Achse als x-Achse, die andere als y-Achse. Jede der beiden Achsen besteht aus einem positiven und einem negativen Strahl mit dem Anfangspunkt O. Im allgemeinen wählt man die Bezeichnung der Achsen so, wie es die Abbildung 81 zeigt.

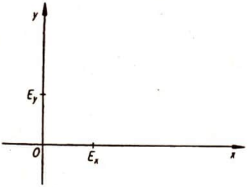

Abb. 81

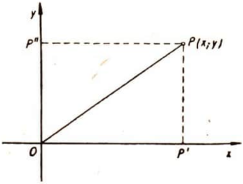

Abb. 82

Da bei unseren Betrachtungen auch Winkel auftreten, ist es nötig, den positiven Drehsinn festzulegen. Ein Strahl, der zunächst mit der positiven x-Achse zusammenfalle, werde um den Punkt O so gedreht, daß er bei einem Drehwinkel von 90° mit der positiven y-Achse zur Deckung kommt. Durch diese Bewegung des Strahls wird der positive Drehsinn in der Ebene bestimmt.

Von dem gegebenen Punkt P aus fällen wir jetzt Lote auf die beiden Achsen (Abb. 82). Ihre Fußpunkte P' und P'' begrenzen auf den Achsen Abschnitte, denen reelle Zahlen entsprechen. Sie werden mit x und y bezeichnet und heißen die **Koordinaten** des Punktes P. Man schreibt dafür $P(x; y)$. Auf diese Weise werden jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen x und y zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar $(x; y)$ eindeutig ein Punkt.

Man nennt O den **Koordinatenanfangspunkt.** Die x-Achse nennt man im allgemeinen **Abszissenachse**, die y-Achse **Ordinatenachse.** Da sich die beiden Achsen unter einem rechten Winkel schneiden, nennt man dieses System ein **rechtwinkliges Koordinatensystem.** Es wird auch als **Cartesisches Koordinatensystem** bezeichnet.

Man kann die Einschränkung fallen lassen, daß die beiden Achsen aufeinander senkrecht stehen. Man erhält dann ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Auch in diesem Falle wird der Punkt P parallel zu den Achsen projiziert, und die Eindeutigkeit der Zuordnung von Punkt und Zahlenpaar bleibt erhalten.

b) Die Strecke

Länge einer Strecke. In einem rechtwinkligen xy-Koordinatensystem sei ein Punkt P durch seine Koordinaten x und y, kurz $P(x; y)$, gegeben. Die Länge der Strecke $\overline{OP}$ ist gesucht (Abb. 83). P' sei die senkrechte Projektion von P auf die x-Achse. Das Dreieck $OP'P$ ist rechtwinklig. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei für die Länge einer Strecke zunächst nur der Hauptwert der Wurzel Bedeutung hat.

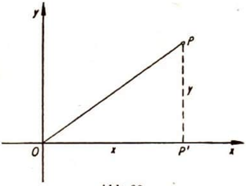

Abb. 83

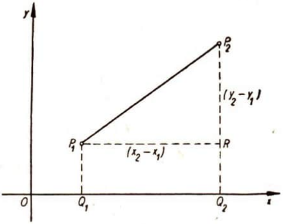

Abb. 84

Es seien jetzt zwei Punkte, $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, gegeben (Abb. 84). Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$. Die Projektionen der Punkte P_1 und P_2 auf die x-Achse seien Q_1 bzw. Q_2. Die Parallele zur x-Achse durch P_1 schneidet $\overline{P_2Q_2}$ in R. Das Dreieck P_1RP_2 ist rechtwinklig. Seine Katheten sind $\overline{P_1R} = \overline{Q_1Q_2} = x_2 - x_1$ und $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich als gesuchte Länge

$$\boldsymbol{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Die Herleitung dieser Formel hat nur Gültigkeit für Punkte im ersten Quadranten; die Formel dagegen ist, wie wir später erkennen werden, für jede Lage der Punkte P_1 und P_2 gültig.

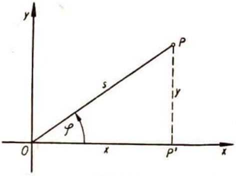

Abb. 85

Richtung einer Strecke. P sei ein Punkt mit den Koordinaten x und y (Abb. 85). Die Strecke $\overline{OP}$ werde von O nach P durchlaufen; damit ist ihr eine Richtung zugeordnet. Man schreibt $\overrightarrow{OP}$ und spricht: Strecke von O nach P.

Unter dem **Richtungswinkel** φ der gerichteten (orientierten) Strecke $\overrightarrow{OP}$ versteht man denjenigen Winkel, um den man einen beweglichen Strahl mit dem Anfangspunkt in O, ausgehend von der positiven x-Achse, im positiven Drehsinn drehen muß, bis er mit $\overrightarrow{OP}$ zusammenfällt. Der Richtungswinkel der Strecke $\overrightarrow{OP}$, das heißt die Richtung der Strecke $\overrightarrow{OP}$ in bezug auf das $x;y$-Koordinatensystem, kann nun durch die Koordinaten $(x;y)$ des gegebenen Punktes P bestimmt werden. P' sei die senkrechte Projektion von P auf die x-Achse. In dem rechtwinkligen Dreieck $OP'P$ ist, wenn s die Länge der Strecke $\overrightarrow{OP}$ bedeutet,

$$\cos\varphi = \frac{x}{s}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{s}.$$

Falls φ aus diesen Gleichungen bestimmt wird, soll unter dem Richtungswinkel der Strecke $\overrightarrow{OP}$ stets der Hauptwert des Winkels, das heißt ein Winkel zwischen 0° und 360°, verstanden werden.

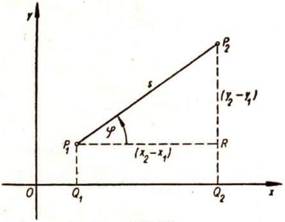

Abb. 86

Entsprechend kann man auch die Richtung der Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ in bezug auf das $x;y$-Koordinatensystem durch die Koordinaten der Endpunkte $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ ausdrücken (Abb. 86).

Der Richtungswinkel φ der gerichteten Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ ist derjenige Winkel, um den man einen Strahl mit dem Anfangspunkt in O, von der positiven x-Achse ausgehend, im positiven Drehsinn drehen muß, bis er mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ gleichgerichtet ist. Die Parallele zur x-Achse durch P_1 schneidet $\overline{P_2Q_2}$ in R. In dem rechtwinkligen Dreieck P_1RP_2 ist, wenn s die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ bedeutet,

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{s}, \qquad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich eindeutig der Hauptwert des Winkels φ.

c) Die Koordinaten des Teilpunktes einer Strecke

Der Punkt $T(\xi;\eta)$ teile die Strecke $\overrightarrow{OP}$ im Verhältnis $\dfrac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TP}} = \lambda$. Das Teilverhältnis λ hat einen negativen Wert, wenn T auf $\overrightarrow{OP}$ liegt (innere Teilung), dagegen einen positiven Wert, wenn T auf der Verlängerung von $\overrightarrow{OP}$ liegt (äußere Teilung).

Die Koordinaten ξ und η des Teilpunktes T sollen durch die Koordinaten $(x;y)$ des Punktes P und durch λ ausgedrückt werden. Die Projektionen der Punkte P und T auf die x-Achse seien P' bzw. T' (Abb. 87). Nach dem Strahlensatz ist

$$\frac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TP}} = \frac{\overrightarrow{T'O}}{\overrightarrow{T'P'}} = \frac{-\xi}{x-\xi} = \lambda.$$

Die Proportion gilt auch dann, wenn T auf der Verlängerung von $\overrightarrow{OP}$ liegt. In diesem Falle ist λ positiv, da die Strecken gleichgerichtet sind. Man spricht dann von äußerer Teilung und nennt T den äußeren Teilpunkt der Strecke $\overrightarrow{OP}$ (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 174). Aus der letzten Gleichung berechnen wir die Abszisse des Teilpunktes T als $\xi = \frac{-\lambda x}{1-\lambda}$ und finden in entsprechender Weise als Ordinate des Teilpunktes T $\eta = \frac{-\lambda y}{1-\lambda}$. Der Teilpunkt T der Strecke $\overrightarrow{OP}$ hat also die Koordinaten

$$\xi = \frac{-\lambda x}{1-\lambda}; \qquad \eta = \frac{-\lambda y}{1-\lambda}.$$

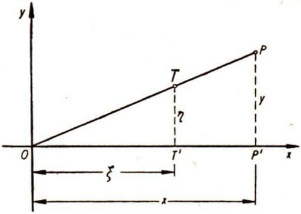

Abb. 87

Bewegt sich T auf der Verlängerung von $\overrightarrow{OP}$ von P weg, so nähert sich λ dem Wert 1. Für $\lambda \to 1$ wachsen ξ und η über alle Grenzen.

Für den Mittelpunkt $M(x_m; y_m)$ der Strecke $\overrightarrow{OP}$ hat das Teilverhältnis den Wert $\lambda = -1$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind

$$x_m = \frac{x}{2}, \qquad y_m = \frac{y}{2},$$

wobei für ξ und η die Bezeichnungen x_m und y_m gewählt wurden.

Wir wollen nun die Koordinaten ξ und η des Teilpunktes T einer beliebigen, nicht notwendig durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ durch die Koordinaten der Endpunkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ und durch das Teilverhältnis $\frac{\overrightarrow{TP_1}}{\overrightarrow{TP_2}} = \lambda$ bestimmen. Wieder ist λ bei innerer Teilung negativ, bei äußerer Teilung positiv. Die drei Punkte P_1, P_2 und T mögen sämtlich dem ersten Quadranten angehören (Abb. 88). Die Projektionen der Punkte P_1, P_2, T seien Q_1, Q_2, T'. Die Parallele zur x-Achse durch P_1 schneide TT' in R, die Parallele zur x-Achse durch T treffe P_2Q_2 in S. Die Dreiecke P_1RT und TSP_2 sind ähnlich. Wir finden

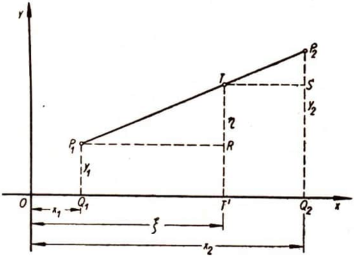

Abb. 88

$$\frac{\overrightarrow{TP_1}}{\overrightarrow{TP_2}} = \frac{\overrightarrow{RP_1}}{\overrightarrow{TS}} = \frac{\overrightarrow{T'Q_1}}{\overrightarrow{T'Q_2}} = \frac{-(\xi - x_1)}{x_2 - \xi} = \lambda.$$

Aus der letzten Gleichung berechnet man die Abszisse des Teilpunktes T zu

$$\boldsymbol{\xi = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}}.$$

Entsprechend ergibt sich als Ordinate des Teilpunktes T

$$\boldsymbol{\eta = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}}.$$

Die Herleitung dieser Formel hat nur Gültigkeit für Punkte im ersten Quadranten; die Formel dagegen ist, wie wir später erkennen werden, für jede Lage der Punkte P_1, P_2 und T gültig.

Für $\lambda = -1$ erhält man aus diesen Gleichungen die Koordinaten x_m und y_m des Punktes M, der die Strecke P_1P_2 halbiert:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Aus diesen Formeln erkennt man, daß die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke die arithmetischen Mittel aus den Koordinaten ihrer Endpunkte sind.

d) Parallelverschiebung des xy-Koordinatensystems

Die Koordinaten des Punktes P in einem rechtwinkligen xy-Koordinatensystem sollen auf ein neues, parallel zu ihm liegendes $x'y'$-Koordinatensystem mit gleicher Achsenteilung bezogen werden (Abb. 89). O' habe im xy-Koordinatensystem die Koordinaten a und b. Dann lautet der analytische Ausdruck für die Parallelverschiebung

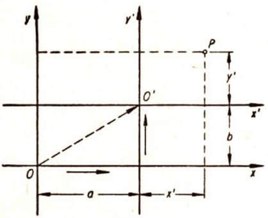

Abb. 89

$$x = x' + a,$$
$$y = y' + b$$

und umgekehrt

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b.$$

Wir erkennen jetzt, daß die Formeln für die Länge und für den Teilpunkt einer Strecke allgemeingültig sind; denn es läßt sich immer eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems so durchführen, daß die entsprechenden Punkte im ersten Quadranten des neuen Koordinatensystems liegen. Dabei bleiben die Differenzen der entsprechenden Koordinaten unverändert.

e) Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Ein Dreieck $P_1P_2P_3$ ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ bestimmt. Sein Flächeninhalt F soll durch diese Koordinaten dargestellt werden. Zunächst werde angenommen, daß die drei Punkte im ersten Quadranten liegen (Abb. 90).

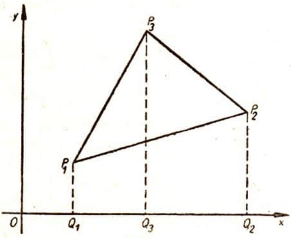

Abb. 90

Die Projektionen der Punkte P_1, P_2, P_3 auf die x-Achse seien Q_1, Q_2, Q_3. Der Flächeninhalt F des Dreiecks ergibt sich als Summe aus den Flächeninhalten der Trapeze $P_3Q_3Q_2P_2$ und $P_1Q_1Q_3P_3$, vermindert um den Flächeninhalt des Trapezes $P_1Q_1Q_2P_2$:

$$F = F_1 + F_2 - F_3.$$

Das erste Trapez hat als parallele Seiten die Ordinaten y_3 und y_2, als Höhe die Differenz zwischen den Abszissen der Punkte P_3 und P_2, also $x_2 - x_3$. Sein Flächeninhalt ist daher

$$F_1 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3).$$

Entsprechend erhält man die Flächeninhalte des zweiten und dritten Trapezes

$$F_2 = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2).$$

Somit ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ als

$$F = \frac{1}{2}[(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)]$$

oder

$$\boldsymbol{F = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].}$$

Liegen die Punkte P_1, P_2 und P_3 nicht sämtlich im ersten Quadranten, so ist die Gleichung dennoch gültig, wie sich durch Parallelverschiebung beweisen läßt.

Beispiel: Die Eckpunkte des Dreiecks seien $P_1(2;3)$, $P_2(8;5)$, $P_3(5;7)$. Der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{1}{2}[2\cdot(-2) + 8\cdot 4 + 5\cdot(-2)] = \frac{1}{2}(-4 + 32 - 10) = 9.$$

Vorzeichen des Flächeninhaltes. Bei der Berechnung des Flächeninhaltes haben wir das Dreieck $P_1P_2P_3$ im positiven Sinne umlaufen. Gehen wir jetzt von P_1 aus zuerst nach P_3 und dann nach P_2, das heißt, betrachten wir P_3 als zweiten, P_2 als dritten Punkt, so wird dabei das Dreieck im negativen Sinne umlaufen. Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_3P_2$ ergibt sich für unser Zahlenbeispiel zu

$$F = \frac{1}{2}[2\cdot 2 + 5\cdot 2 + 8\cdot(-4)] = \frac{1}{2}[4 + 10 - 32] = -9.$$

Allgemein hat man, wenn man den Umlaufssinn wechselt, in der Formel für den Flächeninhalt x_2 mit x_3 bzw. y_2 mit y_3 zu vertauschen, und man erhält als Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_3P_2$

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \frac{1}{2}[x_1(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_3)]\\ &= \frac{1}{2}[-x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_3 - y_1) - x_3(y_1 - y_2)]\\ &= -\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = -F.\end{aligned}$$

Man findet also absolut denselben Wert wie vorher, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Zusammenfassung:

In der analytischen Geometrie ist der Flächeninhalt F eines Dreiecks positiv oder negativ, je nachdem, ob das Dreieck im positiven oder negativen Sinne umlaufen wird (vgl. Teil A, Infinitesimalrechnung, Abschnitt 24b).

Aufgaben

1. Die Länge s der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ ist zu berechnen.

a) $P_1(1; 2)$,	$P_2(4; 6)$	**d)** $P_1(-1; -2)$,	$P_2(0; 8)$
b) $P_1(9; 14)$,	$P_2(4; 2)$	**e)** $P_1(0; 0)$,	$P_2(0; 8)$
c) $P_1(3; 8)$,	$P_2(-3; 8)$	**f)** $P_1(1{,}4; 33{,}1)$	$P_2(16{,}4; -2{,}9)$

Tragen Sie die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ in ein Koordinatensystem ein und überprüfen Sie das Ergebnis durch Messung!

2. Es sind der Richtungs- und der Steigungswinkel der Strecke $\overrightarrow{P_1 P_2}$ in Aufgabe 1 analytisch und durch Messung zu bestimmen.

3. Die Koordinaten des Teilpunktes T, der die Strecke $\overrightarrow{OP}$ mit $P(8; -3)$ im Teilverhältnis a) $\lambda = -5$; b) $\lambda = 3$ teilt, sind zu ermitteln.

4. Wie lautet die Gleichung der Geraden $y = 3x + 7$, wenn das Koordinatensystem der Parallelverschiebung $x = x' - 2$, $y = y' - 4$ unterliegt?

5. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks zu berechnen, dessen Punkte die folgenden Koordinaten haben.

a) $P_1(+1; +1)$,	$P_2(+5; +4)$,	$P_3(+3; +6)$
b) $P_1(+3; +4)$,	$P_2(-3; +4)$,	$P_3(-3; -4)$
c) $P_1(-1; -1)$,	$P_2(-2; +1)$,	$P_3(+1; -2)$

Die Dreiecke sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu zeichnen und die Flächeninhalte durch Ausmessen zu kontrollieren.

2. Die Gerade

a) Die allgemeine Gleichung der Geraden

Gegeben sei die Gleichung

$$Ax + By + C = 0,$$

wobei A, B und C zunächst verschieden von Null sein sollen. Die Gleichung läßt sich folgendermaßen umformen:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

(vgl. dazu Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, S. 15). Setzt man hierin $-\frac{A}{B} = m$ und $-\frac{C}{B} = b$, so erkennt man, daß in diesem Fall die Gleichung $Ax + By + C = 0$ die implizite Form der Geradengleichung ist. Umgekehrt läßt sich auch jede Gleichung $y = mx + b$ umformen in $mx - y + b = 0$. Damit ist sie auf die Form $Ax + By + C = 0$ zurückgeführt.

Man bezeichnet die Gleichung $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ als die **allgemeine Gleichung der Geraden.** Wir lassen jetzt die oben gemachte Einschränkung bezüglich der Koeffizienten fallen. Für $A = 0$ ergibt sich eine Parallele zur x-Achse, für $B = 0$ eine Parallele zur y-Achse. Es können jedoch nicht A und B gleichzeitig Null sein, da in einer Geradengleichung mindestens eine Variable enthalten sein muß. Für $A = B = 0$ ist jedoch diese Bedingung nicht erfüllt.

b) Die Normalform der Geradengleichung

Wie wir gezeigt haben, läßt sich aus der allgemeinen Gleichung der Geraden mit $B \neq 0$ die Gleichung

$$y = mx + b$$

herleiten (vgl. Abb. 91). Diese Form nennt man die **(Cartesische) Normalform der Geradengleichung** (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr). Dabei ist 1. $m = \operatorname{tg} \alpha$ der Anstieg der Geraden und 2. b der Abschnitt auf der y-Achse. Man nennt m auch den Richtungsfaktor und b die Verschiebung der Geraden.

Beweis zu 1.

Vergrößert man die Abszisse um 1 Einheit, so wächst die Ordinate um m Einheiten. Da die Koordinaten senkrecht aufeinanderstehen, ist m die Gegenkathete im Steigungsdreieck mit der Ankathete 1; also ist m der Tangens des Steigungswinkels.

Beweis zu 2.

Für $x_0 = 0$ erhält man $y_0 = b$. Daraus folgt, daß der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse vom Nullpunkt den Abstand b hat.

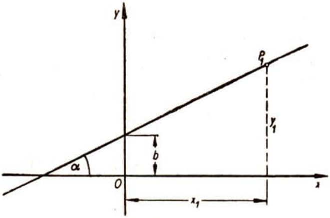

Abb. 91

Ist in der allgemeinen Gleichung $A = 0$, so ergibt sich für die Normalform der Geradengleichung $m = 0$, man erhält also $y = b$. Die Gleichung stellt geometrisch eine Gerade dar, die parallel zur x-Achse im Abstande b verläuft. Für den Spezialfall $b = 0$ fällt die Gerade mit der x-Achse zusammen.

Für $B = 0$ erhält man $Ax + C = 0$ und für die Normalform $0 = mx + b$ oder $x = -\frac{b}{m} = c$. Die Gleichung stellt geometrisch eine Gerade dar, die parallel zur y-Achse im Abstande c verläuft. Für den Spezialfall $c = 0$ fällt die Gerade mit der y-Achse zusammen.

Ist schließlich $C = 0$, so ergibt sich $y = mx$ für die Normalform der Gleichung. Da die Verschiebung der Geraden Null ist, verläuft die Gerade durch den Nullpunkt.

Für den Steigungswinkel α der Geraden $y = mx + b$ gilt:

Ist $m = 0$,	so ist $\alpha = 0$;	die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.
Ist $0 < m < 1$,	so ist $0 < \alpha < 45°$;	in diesen Fällen ($m > 0$) verläuft
ist $m = 1$,	so ist $\alpha = 45°$;	die Gerade in der Richtung vom
ist $m > 1$,	so ist $45° < \alpha < 90°$	dritten zum ersten Quadranten.
Für $m \to \infty$ geht $\alpha \to 90°$;		die Gerade nähert sich einer Lage parallel zur y-Achse.
Ist $m < -1$,	so ist $90° < \alpha < 135°$;	in diesen Fällen ($m < 0$) verläuft die
ist $m = -1$,	so ist $\alpha = 135°$;	Gerade in der Richtung vom zweiten
ist $-1 < m < 0$,	so ist $135° < \alpha < 180°$;	zum vierten Quadranten.

c) Die Punktrichtungsgleichung der Geraden

Wir wollen nun den Fall untersuchen, bei dem die Gerade durch einen festen Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und den Steigungswinkel α bestimmt ist (vgl. Abb. 91). Dann gilt für jeden von $P_1(x_1; y_1)$ verschiedenen Punkt $P(x; y)$ der Geraden:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tg} \alpha = m.$$

Daraus ergibt sich die **Punktrichtungsgleichung der Geraden** zu

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

oder zu

$$\boldsymbol{y = mx - mx_1 + y_1.}$$

Vergleicht man diese Form der Gleichung mit der Normalform, so erkennt man, daß $-mx_1 + y_1 = b$ ist.

Bei der Wahl des Punktes P waren nur die beiden Einschränkungen gemacht worden, daß er auf der Geraden liegt und nicht mit P_1 zusammenfällt. Die Abszisse x kann daher jeden Wert im Definitionsbereich und damit die Ordinate y jeden Wert im Wertevorrat der Funktion annehmen. Deshalb bezeichnet man x und y als variable Koordinaten und $P(x; y)$ als variablen Punkt.

Die zur Herleitung der Punktrichtungsgleichung notwendige Einschränkung $P \neq P_1$ kann nunmehr fallengelassen werden, denn die Koordinaten des Punktes P_1 befriedigen die Gleichung.

d) Die Zweipunktegleichung der Geraden

Bekanntlich ist eine Gerade durch zwei feste, nicht zusammenfallende Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ bestimmt (vgl. Abb. 92). Für jeden von P_1 und P_2 verschiedenen Punkt $P(x; y)$ der Geraden gilt auf Grund des Strahlensatzes unter der Voraussetzung $x_1 \neq x_2$:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Diese Gleichung nennen wir die **Zweipunktegleichung** der Geraden. Man schreibt sie häufig auch in der Form $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Es ist also

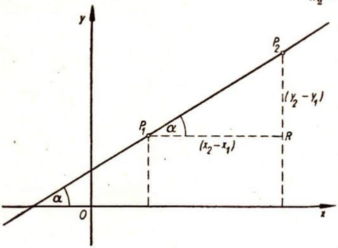

Abb. 92

$$y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1,$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Wir erkennen, daß $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

und $\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = b$ ist.

Sind die Punkte P_1 und P_2 so gegeben, daß entweder $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$ ist, so liegen P_1 und P_2 auf einer Parallelen zur y-Achse im Abstand x_1 bzw. auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand y_1. Die Gleichung der Geraden lautet dann $x = x_1$ bzw. $y = y_1$.

Die zur Herleitung der Zweipunktegleichung notwendige Einschränkung $P \neq P_1$ und $P \neq P_2$ kann nunmehr fallengelassen werden; denn die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 befriedigen die Gleichung.

e) Der geometrische Ort

Definition: **Ein geometrischer Ort ist die Gesamtheit aller der Punkte, die einer gegebenen Bedingung genügen.**

Beispiel:

Für jeden Punkt auf der Symmetralen zur Strecke $\overline{AB}$ gilt $\overline{PA} = \overline{PB}$. Für jeden nicht auf der Symmetralen liegenden Punkt P gilt $\overline{PA} \neq \overline{PB}$. Die Streckensymmetrale (Mittelsenkrechte) ist daher der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen die Abstände von den beiden Endpunkten der Strecke einander gleich sind.

Die von uns behandelten geometrischen Örter sind im allgemeinen Kurven. In vielen Fällen kann man den geometrischen Ort durch eine Gleichung darstellen. Ist die Aufgabe gestellt, einen geometrischen Ort zu finden, so kommt es darauf an, eine Gleichung aufzustellen, der die Wertepaare $(x; y)$ eines jeden Punktes auf dem geometrischen Ort genügen. Dazu nimmt man einen Punkt $P(x; y)$ an, der keine spezielle Lage haben darf, und stellt für seine Koordinaten die Gleichung auf. Da P in allgemeiner Lage gewählt war, kann seine Abszisse x alle Werte des Definitionsintervalls durchlaufen.

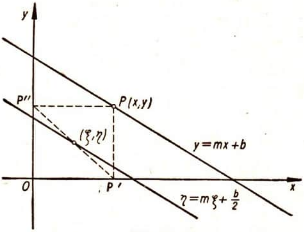

Abb. 93

Beispiel:

Gegeben sei die Gerade $y = mx + b$; auf ihr liege ein variabler Punkt P. Gesucht ist der geometrische Ort aller der Punkte, die die Verbindungsstrecken der Projektionen von P auf die Achsen halbieren (Abb. 93).

Hat der Punkt P die Koordinaten x und y, so sind die Koordinaten seiner Projektionen $P'(x; 0)$ und $P''(0; y.)$ Der Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke (vgl. Abschnitt 1c) hat dann die Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{2} \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{y}{2}$$

oder

$$\xi = \frac{x}{2} \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{mx + b}{2}.$$

Da $x = 2\xi$ ist, ergibt sich

$$\eta = m\xi + \frac{b}{2}.$$

Man erkennt, daß der geometrische Ort eine zur gegebenen Geraden parallele Gerade ist.

Aufgaben

1. Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, für die gegeben ist

a) $m = \frac{1}{2}$, $b = 3$, **b)** $m = -1$, der Abschnitt 5 auf der positiven x-Achse,

c) $m = -4$, der Punkt $P_1(0; -1{,}5)$ auf der Geraden, **d)** $\alpha = 45°$; $b = 4{,}3$.

Überlegen Sie, wie man die Geraden zeichnen kann, ohne die Gleichungen aufzustellen!

2. Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt P_1 verläuft und für die gegeben ist

a) $m = 2{,}5$, $P_1(3; 4)$ **b)** $m = 1$, $P_1(-6; -6)$
c) $m = -1{,}5$, $P_1(-8; -9)$ **d)** $m = -1$, $P_1(0; 0)$.

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

3. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 ist zu bestimmen.

a) $P_1(+5; +6)$, $P_2(+7; +8)$ **b)** $P_1(-4; -3)$, $P_2(+4; +3)$
c) $P_1(+3; +3)$, $P_2(-3; +3)$ **d)** $P_1(+3; +3)$, $P_2(+3; -3)$
e) $P_1(+3; +3)$, $P_2(-3; -3)$ **f)** $P_1(+3; -3)$, $P_2(-3; +3)$
g) $P_1(+1{,}5; +4{,}6)$, $P_2(+2{,}0; +4{,}3)$ **h)** $P_1(-2{,}8; -3{,}7)$, $P_2(-3{,}7; -2{,}8)$

4. Es ist der geometrische Ort der Punkte zu bestimmen, deren Abstand von den Achsen des Koordinatensystems

a) eine konstante Summe s, **b)** eine konstante Differenz d, **c)** ein konstantes Verhältnis $m:n$

hat! Durch Zeichnung ist nachzuprüfen, ob für spezielle Werte die Bedingung erfüllt ist!

5. Die Geradengleichungen der Aufgabe 2 sind in die allgemeine Form der Geradengleichung überzuführen.

6. Die Geradengleichungen der Aufgabe 3 sind in die allgemeine Form der Geradengleichung überzuführen.

7. Es ist die Gleichung der Geraden zu bestimmen, die durch die Punkte $P_1(a; 0)$ und $P_2(0; b)$ verläuft. Geben Sie die Lage der beiden Punkte an und zeichnen Sie die Gerade! Formen Sie die Gleichung so um, daß auf einer Seite der Gleichung 1 steht! Die so entstandene Form der Gleichung nennt man **Abschnittsgleichung der Geraden**. Diese Bezeichnung ist zu begründen.

8. Führen Sie die Geradengleichungen

a) $Ax + By + C = 0$, **b)** $y = mx + b$

in die Abschnittsgleichungen über!

Untersuchen Sie diese Gleichungen für die Fälle, in denen eine der konstanten Größen gleich Null ist! Unter welcher Bedingung ist die Abschnittsgleichung nicht anwendbar?

9. Die folgenden Geradengleichungen sind in die Normalform überzuführen.

a) $3x + 4y + 5 = 0$ **b)** $-7x + 9y - 3 = 0$
c) $-2{,}4x - 1{,}8y + 0{,}5 = 0$ **d)** $1{,}4x + 3{,}25\,y - 1{,}8 = 0$
e) $3{,}875\,x - 4 = 0$ **f)** $0{,}14 - 0{,}1\,y = 0$.

10. Wo schneiden die folgenden Geraden die Koordinatenachsen?

a) $17x + 10y - 34 = 0$ **b)** $-9x - 8{,}5y + 17 = 0$
c) $y = 2{,}1\,x - 14$ **d)** $y = -11{,}7\,x + 7{,}5$
e) $\frac{x}{4{,}3} + \frac{y}{6{,}5} = 1$ **f)** $\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{3\sqrt{2}} = 1$

Der Anstieg der Geraden ist zu bestimmen.

3. Zwei Geraden

a) Der Schnittpunkt zweier Geraden

Beispiel:

Es soll der **Schnittpunkt** der beiden Geraden bestimmt werden, die durch die Gleichungen $3x + y - 7 = 0$ und $2x - y - 3 = 0$ gegeben sind. Da der Schnittpunkt P_0 mit den unbekannten Koordinaten $(x_0; y_0)$ auf beiden Geraden liegt (Abb. 94), müssen diese Koordinaten beide Gleichungen befriedigen; es gilt also

$$3x_0 + y_0 - 7 = 0 \quad \text{und} \quad 2x_0 - y_0 - 3 = 0.$$

Dieses Gleichungssystem kann nach den Lösungsverfahren für Gleichungen mit zwei Unbekannten gelöst werden. Die Lösungen $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ sind die Koordinaten des Schnittpunktes $P_0(2;1)$.

Es seien zwei Geraden durch die Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

gegeben, wobei die Koeffizienten von x und y vorerst verschieden von Null sein sollen. Die Koordinaten des Schnittpunktes $P_0(x_0; y_0)$ sind die Lösungen der beiden Gleichungen:

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0$$

und

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0.$$

Man erhält dann für x_0 und y_0 die Ausdrücke

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, x_0 = B_1 C_2 - B_2 C_1$$

und $$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, y_0 = A_2 C_1 - A_1 C_2.$$

Ist $(A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$, so sind die Gleichungen eindeutig lösbar. Es existiert also ein Schnittpunkt. Aus $(A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$ folgt

$$A_1 B_2 \neq A_2 B_1$$

und wegen $B_1 \neq 0$ und $B_2 \neq 0$ weiterhin

$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}.$$

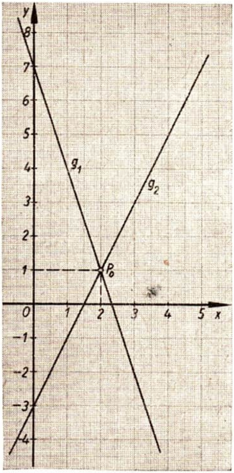

Abb. 94

Sind also die Richtungsfaktoren der beiden Geraden voneinander verschieden, so existiert ein Schnittpunkt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, sind also die Richtungsfaktoren der beiden Geraden gleich, das heißt, gilt

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

so gibt es keinen Schnittpunkt; die beiden Geraden laufen parallel oder fallen zusammen.

Für den Fall, daß in einer Gleichung oder in beiden Gleichungen einer der beiden Koeffizienten von x und y gleich Null ist, haben entsprechende Relationen Gültigkeit.

b) Der Schnittwinkel zweier Geraden

Sind zwei Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen

$$y = m_1 x + b_1 \qquad \text{und} \qquad y = m_2 x + b_2$$

gegeben, so bestimmen $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ und $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ die Winkel α_1 und α_2, die die Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bilden. Als **Schnittwinkel** zweier Geraden g_1 und g_2 bezeichnet man den Winkel, der von der Geraden g_1 überstrichen wird, wenn man sie im positiven Drehsinn um den Schnittpunkt bis zur Deckung mit der Geraden g_2 dreht. Für den Schnittwinkel φ der Geraden (Abb. 95) ergibt sich dann

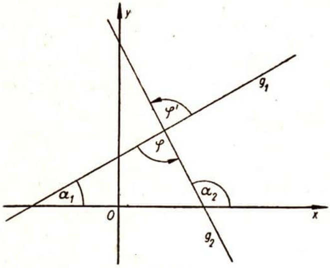

Abb. 95

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

und folglich

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

oder $$\boldsymbol{\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}}.$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß $\varphi \neq 90°$ ist. Dieser Fall wird später betrachtet.

c) Parallele Geraden

Da für parallele Geraden $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, ist also auch $m_1 = m_2$. Umgekehrt kann man sagen: Gilt für zwei Geraden mit dem Anstieg m_1 bzw. m_2 die Relation $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, so sind die Geraden parallel.

Beispiel:

Die Geraden $4x - 2y + 15 = 0$ und $6x - 3y + 17 = 0$ laufen parallel, da für beide Geraden sich derselbe Anstieg $m = 2$ ergibt.

d) Zwei zueinander senkrechte Geraden

Sind die gegebenen Geraden zueinander senkrecht, so ist $\varphi = 90°$. Für diesen Wert ist $\operatorname{tg} \varphi$ nicht definiert. Wir bilden deshalb $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1}$. Für $\varphi = 90°$ ist $\operatorname{ctg} \varphi = 0$; mithin gilt

$$1 + m_1 \cdot m_2 = 0, \qquad m_1 \cdot m_2 = -1$$

oder $$\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}.$$

Beispiel:

Der Anstieg der Geraden $3x + 5y + 10 = 0$ ist $m_1 = -\frac{3}{5}$.

Die Gerade $10x - 6y + 11 = 0$ hat den Anstieg $m_2 = \frac{5}{3}$.

Die beiden Geraden stehen also aufeinander senkrecht.

Aufgaben

1. Der Schnittpunkt der Geraden ist zu bestimmen.

a) $y = \frac{5}{3}x - 1$ $\quad y = -\frac{4}{5}x + 6\frac{2}{5}$ **b)** $x + y - 2 = 0$ $\quad x + 3y - 10 = 0$

c) $5x - 2y + 10 = 0$ $\quad 5x - 7y - 15 = 0$ **d)** $3y - 4x + 13 = 0$ $\quad 11x + 7y - 104 = 0$

e) $2x - 3y + 5 = 0$ $\quad 3x - 4{,}5y + 6 = 0$ **f)** $2x - 3y + 5 = 0$ $\quad 3y - 2x + 2 = 0$

g) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $\quad 4x - 2y - 1 = 0$ **h)** $0{,}8x + 0{,}4y - 1{,}2 = 0$ $\quad 2x + y - 3 = 0$

i) $y = \frac{3}{4}x - 3$ $\quad y - 2x + 6\frac{3}{4} = 0$ **k)** $y = mx + b$ $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Die Rechnungen sind durch Zeichnungen nachzuprüfen. Welche Anforderungen an die Genauigkeit der Zeichnungen kann man stellen?

2. Die Gleichungen der Seiten a, b, c eines Dreiecks sind:

$$y = 7 - 3x, \qquad x = 3y - 1, \qquad x + 7y + 11 = 0.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken des Dreiecks! Bestimmen Sie die Gleichungen für die Seitenhalbierenden des Dreiecks und deren Schnittpunkt! Die Berechnung ist durch Konstruktion nachzuprüfen.

3. Der Schnittwinkel der Geraden ist zu bestimmen.

a) $y = -2x + 16$ $\quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$ **b)** $2y - x = 1$ $\quad 3y = 4x + 2$

c) $3x - y + 5 = 0$ $\quad 7x - y - 2 = 0$ **d)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ $\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

4. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind:

a) $A(-2;4)$, $\quad B(2;-3)$, $\quad C(3;5)$

b) $A(-4;-5)$, $\quad B(7;-3)$, $\quad C(3;5)$

c) $A(-18;0)$, $\quad B(6;0)$, $\quad C(0;18)$.

Die Winkel des Dreiecks sind zu bestimmen.

5. Die Seiten a, b und c eines Dreiecks werden gebildet von den Geraden

a) $8x + 3y - 83 = 0$, $\quad 6x - 5y + 3 = 0$, $\quad x + 4y - 14 = 0$

b) $3x + 4y - 52 = 0$, $\quad 4x - y - 6 = 0$, $\quad x - 5y + 8 = 0$

c) $419x + 513y + 718 = 0$, $\quad 807x - 629y - 205 = 0$, $\quad 635x + 421y - 316 = 0$.

Die Koordinaten der Eckpunkte und die Winkel des Dreiecks sind zu bestimmen.

6. Durch den Punkt $(3;5)$ sollen Geraden gezogen werden, die mit der Geraden $2x - 3y - 7 = 0$ den Winkel 45° bilden. Die Gleichungen der Geraden sind zu bestimmen.
Anleitung: Setzen Sie die gesuchte Gerade nach der Punktrichtungsgleichung an! Benutzen Sie die Formel für den Schnittwinkel und lösen Sie diese nach dem Richtungsfaktor der gesuchten Geraden auf! Beachten Sie, daß die Aufgabe zwei Lösungen hat!

7. Die Gleichung der Parallelen durch $P_1(x_1;y_1)$ zu der gegebenen Geraden g ist zu bestimmen.

a) $P_1(5;3)$ $\quad 2x - 3y - 12 = 0$ **b)** $P_1(-2;-3)$ $\quad 5x + 6y - 27 = 0$

c) $P_1(2;3)$ $\quad 9x + 10y - 80 = 0$ **d)** $P_1(4;-1)$ $\quad 2x - y + 5 = 0$

e) $P_1(5;7)$ $\quad 2x + 3y + 8 = 0$ **f)** $P_1(5;+13)$ $\quad 3x - y - 2 = 0$

g) $P_1(-2;2)$ $\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ **h)** $P_1(x_1;y_1)$ $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

8. Die Gleichung des Lotes von $P_1(x_1; y_1)$ auf die gegebene Gerade g ist zu bestimmen.

a) $P_1(2;3)$	$7x - 5y - 2 = 0$	b) $P_1(3;5)$	$6x + 5y - 11 = 0$
c) $P_1(-3;4)$	$10x - 9y + 11 = 0$	d) $P_1(5;13)$	$9x - 3y + 5 = 0.$

9. Gegeben sind die Punkte $P_1(4;3)$ und $P_2(22;6)$. In welchem Punkt und unter welchem Winkel muß ein von P_1 ausgehender Strahl die x-Achse treffen, damit er unter demselben Winkel nach P_2 reflektiert wird? Die Aufgabe ist analytisch und durch Konstruktion zu lösen. (Spiegelungsgesetz. Es ist zu beachten, daß die Steigungen der Strahlen $+m$ und $-m$ sind.)

10. Die gleiche Aufgabe ist für die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zu lösen.

11. Es sind die folgenden Sätze der Planimetrie analytisch zu beweisen:
 a) Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
 b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
 c) Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.
 d) Die Streckensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
 Anleitung: Es ist ein möglichst günstiges Koordinatensystem festzulegen.

12. Beim Drehen ist die Schnittgeschwindigkeit v (m/min) eine Funktion der Umdrehungszahl n (1/min) und des Durchmessers d(m) des Werkstückes gemäß der Formel $v = d \cdot \pi \cdot n$. Durch welche Kurve wird die Funktion bei festem n dargestellt?
 a) Es ist in einem $d;v$-Koordinatensystem die Funktion für $n_1 = 30$ darzustellen. Die d-Achse soll Durchmesser von 0 bis 400 mm enthalten, die v-Achse Schnittgeschwindigkeiten von 0 bis 120 m/min.
 b) Ebenso sind die Funktionen für: $n_2 = 37{,}5$; $n_3 = 47{,}5$; $n_4 = 60$; $n_5 = 75$; $n_6 = 95$; $n_7 = 118$; $n_8 = 150$ in demselben Koordinatensystem zu zeichnen.
 c) Beim Schnelldrehen werden hohe Umdrehungszahlen und somit hohe Schnittgeschwindigkeiten erreicht. Es ist ein Nomogramm für die Umdrehungszahlen $n_1 = 1000$; $n_2 = 1460$; $n_3 = 1500$; $n_4 = 2400$ aufzustellen. Aus dem Nomogramm soll die Schnittgeschwindigkeit für n_3, $d = 350$ mm; n_2, $d = 110$ mm; n_4, $d = 320$ mm abgelesen werden.

II. Analytische Geometrie des Kreises

4. Der Kreis

Definition: **Der Kreis ist der geometrische Ort aller der Punkte, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben.**

a) Die Mittelpunktsgleichung des Kreises

Wir wählen den festen Punkt M als Mittelpunkt des Kreises so, daß er mit dem Koordinatenanfangspunkt O zusammenfällt (Abb. 96). Dann haben alle Punkte des geometrischen Ortes von O die konstante Entfernung r. Es sei P ein beliebiger Punkt des Kreises. Fällen wir von ihm aus die Lote auf die Achsen, so erhalten wir die Koordinaten $OQ = x$ und $QP = y$ des Punktes P. Die Verbindung OP ist gleich r. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Wir haben diese Beziehung für einen beliebigen Punkt P auf der Peripherie des Kreises gefunden, sie gilt also für alle Punkte des Kreises. Für Punkte, die nicht auf der Peripherie des Kreises liegen, gilt $x^2 + y^2 \neq r^2$. Somit stellt die Beziehung

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$

die Gleichung des Kreises dar. Da der Mittelpunkt des Kreises mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, wird diese Gleichung **Mittelpunktsgleichung des Kreises** genannt.

b) Die allgemeine Gleichung des Kreises

Der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r sei jetzt der Punkt $M(c; d)$ des Koordinatensystems. Wir nehmen eine Parallelverschiebung des Systems vor, derart,

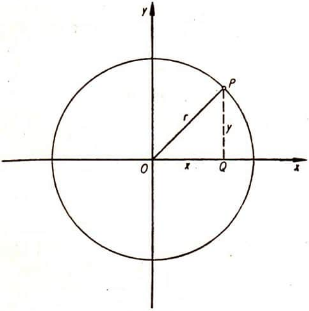

Abb. 96

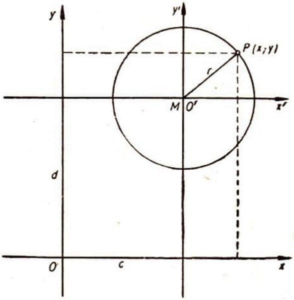

Abb. 97

daß der Koordinatenanfangspunkt O' mit dem Mittelpunkt $(c; d)$ des Kreises zusammenfällt (vgl. Abb. 97). Für die Koordinatentransformation ergibt sich

$$x' = x - c \qquad y' = y - d.$$

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises geht dadurch wegen

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

über in

$$\boldsymbol{(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2}.$$

Man bezeichnet diese Gleichung als **allgemeine Kreisgleichung.**

c) Die Kreisgleichung als spezielle Form der quadratischen Gleichung

Wir wollen die allgemeine Form der quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten unter bestimmten Bedingungen untersuchen. Weitere Untersuchungen dieser Gleichung werden in den folgenden Kapiteln durchgeführt.

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten lautet:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Ist hierin $C = 0$ und $A = B$, so erhält sie die Form

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Wir setzen $A \neq 0$ voraus, dividieren durch A und erhalten

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = -\frac{F}{A}.$$

Nun bilden wir die quadratischen Ergänzungen:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A},$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Diese Relation ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{D}{2A};\ -\frac{E}{2A}\right)$ und dem Radius $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$, wenn der Wurzelausdruck nicht negativ ist. Wir erkennen also, daß die Gleichung

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

einen Kreis darstellt, wenn die Bedingungen $A \neq 0$ und $D^2 + E^2 \geqq 4AF$ erfüllt sind. Man bezeichnet auch diese Gleichung als die allgemeine Gleichung des Kreises, da sie durch Umformung aus der Gleichung $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ hervorgeht und umgekehrt auch in diese übergeführt werden kann.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r und zeichnen Sie ihn!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
M	0 ; 0	0 ; 0	0 ; 6	10 ; 0	2 ; − 3	2,5 ; 1,5	− 2 ; − 5	3 ; 0
r	4	1,732	12	14	5,831	3	7	3,7

2. Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(r;0)$ und dem Radius r ist zu bestimmen.

3. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch den Ursprung geht und dessen Mittelpunkt gegeben ist.

a) $M(3;4)$ **b)** $M(-12;5)$ **c)** $M(-1;-7)$ **d)** $M(4;-13)$
e) $M(-3{,}5;-6)$ **f)** $M(0;6)$ **g)** $M(a;a)$ **h)** $M(0;c)$

Der Kreis ist zu zeichnen.

4. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises!

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$
c) $x^2 + (y - 2)^2 = 18$ **d)** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$ **f)** $x^2 + y^2 - 5x - 3y - 40{,}5 = 0$
g) $x^2 + y^2 - 16x = 0$ **h)** $4x^2 + 4y^2 - 8x + 48y + 99 = 0$
i) $x^2 + y^2 + 6y = 0$ **k)** $y^2 = 10x - x^2$
l) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 41 = 0$ **m)** $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$

5. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $(1;4)$ hat, soll durch den Punkt $P_1(5;6)$ gehen. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen und der Kreis zu zeichnen.

5. Kreis und Gerade

a) Die Gleichung der Sekante

Gegeben seien ein Kreis mit dem Radius r und zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, die auf der Peripherie des Kreises liegen (Abb. 98). Die Punkte P_1 und P_2 bestimmen eine Sekante. Nach Abschnitt I, 2d ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

die Gleichung der Sekante durch die Punkte P_1 und P_2.

b) Die Gleichung der Tangente

Wir erkennen, daß in der Sekantengleichung der Bruch

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

der Anstieg der Sekante ist. Kommt der Punkt P_2 auf der Peripherie des Kreises dem Punkte P_1 beliebig nahe, so geht die Sekante in die Tangente und der Anstieg

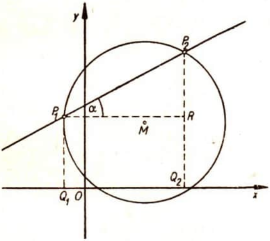

Abb. 98

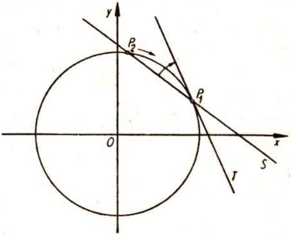

Abb. 99

der Sekante in den Anstieg der Tangente über (vgl. Abb. 99). Will man den Anstieg der Tangente an den Kreis im Punkt P_1 ermitteln, so muß man den Grenzübergang $x_2 \to x_1$ durchführen. Dazu muß man einen Ausdruck finden, der den Grenzübergang ermöglicht. Wir erhalten ihn durch die folgende Überlegung:

Die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 befriedigen die Kreisgleichung. Es gilt also

$$y_1^2 = r^2 - x_1^2$$

und

$$y_2^2 = r^2 - x_2^2 .$$

Subtrahiert man die erste von der zweiten Gleichung, so erhält man

$$y_2^2 - y_1^2 = -(x_2^2 - x_1^2),$$

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} .$$

Nunmehr kann der Grenzübergang vorgenommen werden:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} \left(- \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right) = - \frac{x_1}{y_1},$$

da mit $x_2 \to x_1$ auch $y_2 \to y_1$ geht.

Damit erhält die Tangentengleichung die Form

$$y - y_1 = - \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

oder

$$x x_1 + y y_1 = x_1^2 + y_1^2 .$$

Da $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ist, erhält man schließlich

$$\boldsymbol{x x_1 + y y_1 = r^2}$$

als **Gleichung der Tangente** an den Kreis.

Hat die Gleichung des Kreises die allgemeine Form

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2,$$

so erhält man durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems die allgemeine Gleichung der Kreistangente im Punkte P_1:

$$\boldsymbol{(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2.}$$

Eine Tangente vom Punkte $P_0(x_0 ; y_0)$ aus an den Kreis $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ findet man durch die folgende Überlegung:

1. Da die Koordinaten x_0 und y_0 des Punktes P_0 die Tangentengleichung befriedigen, gilt

$$(x_0 - c)(x_1 - c) + (y_0 - d)(y_1 - d) = r^2.$$

2. Da der Berührungspunkt $P_1(x_1 ; y_1)$ die Kreisgleichung befriedigt, gilt

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 = r^2.$$

Damit hat man ein quadratisches Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gefunden, dessen Lösungen, falls sie vorhanden sind, die Werte x_1 und y_1 ergeben. Zur Auflösung dieses Systems eliminiert man eine Unbekannte, indem man die lineare Gleichung nach dieser Unbekannten auflöst und den so erhaltenen Ausdruck in die quadratische Gleichung einsetzt (Einsetzungsverfahren, auch Substitutionsmethode genannt). Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Das System hat keine (reelle) Lösung. Es existiert kein Berührungspunkt und demnach keine Tangente (der Punkt P_0 liegt innerhalb des Kreises).

2. Das System hat eine Doppellösung. Es existiert ein Berührungspunkt und demnach eine Tangente (der Punkt P_0 liegt auf dem Kreis).

3. Das System hat zwei (reelle) Lösungen. Es existieren zwei Berührungspunkte und demnach zwei Tangenten (der Punkt P_0 liegt außerhalb des Kreises).

c) Schnittpunkte von Kreis und Gerade

Gegeben seien der Kreis

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

und die Gerade

$$y = mx + b.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kurven müssen beide Gleichungen befriedigen. Es gilt also für einen Schnittpunkt $P_1(x_1; y_1)$:

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 = r^2$$

und

$$y_1 = m x_1 + b.$$

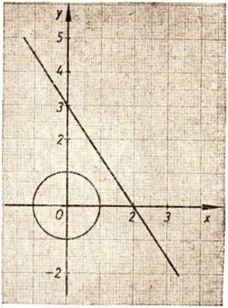

Abb. 100

Dieses Gleichungssystem löst man zweckmäßig durch Anwendung der Substitutionsmethode. Je nachdem, ob es keine, eine oder zwei (reelle) Lösungen hat, haben der Kreis und die Gerade keinen, einen oder zwei gemeinsame Punkte. Im ersten Fall schneidet die Gerade den Kreis nicht, im zweiten ist sie Tangente und im dritten Fall Sekante.

Beispiele:

1. Für den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ und die Gerade $y = -1{,}5x + 3$ (Abb. 100) erhält man die folgende Gleichung für x_1:

$$3{,}25 x_1^2 - 9x_1 + 8 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine (reellen) Wurzeln; es ist nämlich

$$x_1 = \frac{9 \pm \sqrt{-23}}{6{,}5}.$$

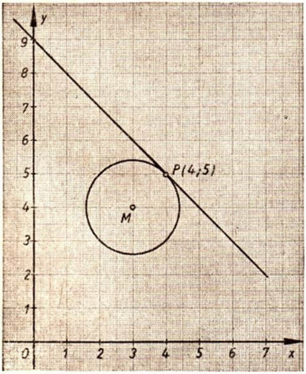

Abb. 101

2. Die Gleichung in x_1 für den Kreis $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$ und die Gerade $y = -x + 9$ (Abb. 101) ergibt sich zu

$$x_1^2 - 8x_1 + 16 = 0.$$

Sie hat die Doppelwurzel $x_1 = 4$. Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der Gleichungen (zweckmäßig die Geradengleichung) erhält man $y_1 = 5$. Die Gerade $y = -x + 9$ ist demnach Tangente an den Kreis im Punkte $P(4; 5)$.

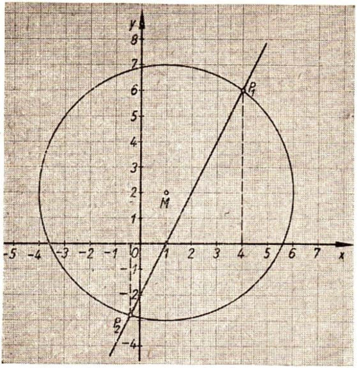

Abb. 102

3. Für die Gleichung des Kreises $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$ und die Geradengleichung $y=2x-2$ (Abb. 102) erhält man durch die Gleichung

$$5x_1^2-18x_1-8=0$$

zwei Wertepaare. Die Gerade ist Sekante des Kreises und schneidet diesen in den Punkten $P_1(4;6)$ und $P_2(-0{,}4;-2{,}8)$.

Aufgaben

1. Die Gleichung des Kreises durch die Punkte $P_1(-5;6)$ und $P_2(8;-4)$, dessen Mittelpunkt a) auf der x-Achse, b) auf der y-Achse liegt, ist zu bestimmen.
2. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch die Punkte $P_1(10;9)$ und $P_2(4;-5)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $3x-2y-17=0$ liegt.
3. Es ist die Gleichung des Kreises durch P_1, P_2 und P_3 zu bestimmen.

	a)	b)	c)	d)
P_1	$(0;0)$	$(-1;2)$	$(0;4)$	$(1;2)$
P_2	$(5;0)$	$(3;-6)$	$(10;2)$	$(4;1)$
P_3	$(3;4)$	$(16;-15)$	$(-2;-6)$	$(9;6)$

4. Die Gleichungen der Kreise durch $P_1(1;2)$ und $P_2(-3;6)$ mit dem Radius $r=4$ sind aufzustellen.
5. Es ist zu untersuchen, ob das Viereck $A(-3;0)$ $B(1;8)$ $C(5;6)$ $D(4;-1)$ ein Sehnenviereck ist.
6. Es ist die Länge der Sehne zu bestimmen, die der Kreis aus der Geraden ausschneidet. Prüfen Sie durch Konstruktion nach!

   a) $x^2+y^2=9$ $\qquad 20x-15y-21=0$
   b) $x^2+y^2=36$ $\qquad 4x-3y+24=0$
   c) $x^2+y^2=100$ $\qquad 4x+3y-50=0$
7. Die Lage der Geraden zum Kreis ist zu untersuchen.

   a) $x^2+y^2=89$ $\qquad 3x+13y-89=0$
   b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ $\qquad 3x-2y-6=0$
8. Berechnen Sie die Längen der Sehnen, die der Kreis $x^2+y^2-4x+8y-44=0$ auf den Achsen ausschneidet!
9. Bestimmen Sie den zum Kreise $4x^2+4y^2+40x-28y+5=0$ konzentrischen Kreis, der die x-Achse (y-Achse) berührt!
10. Die fehlende Koordinate und die Gleichung der Tangente im Punkte P_1 sind zu bestimmen.

    a) $P_1(2;y_1>0)$ $\qquad x^2+y^2=53$
    b) $P_1(-5;y_1>0)$ $\qquad x^2+y^2=169$

c) $P_1(8\,;\,y_1 < 0)$ $\qquad x^2 + y^2 = 100$

d) $P_1(5\,;\,y_1)$ $\qquad x^2 + y^2 = 30$

e) $P_1(7\,;\,y_1)$ $\qquad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$

f) $P_1(-2\,;\,y_1)$ $\qquad 5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$

g) $P_1(8\,;\,y_1)$ $\qquad x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$

h) $P_1(x_1\,;\,1)$ $\qquad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$

11. Es ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten zu bestimmen, die an den Kreis $x^2 + y^2 - 20x + 8y - 53 = 0$ in den Schnittpunkten mit der Geraden $x - y - 7 = 0$ gelegt werden. Prüfen Sie durch Konstruktion!

12. Es sind die Schnittwinkel des Kreises $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 100$ mit den Koordinatenachsen zu ermitteln.

13. Vom Punkt P_0 sind an den Kreis die Tangenten zu legen.

a) $P_0(5\,;\,-10)$ $\qquad x^2 + y^2 = 25$ $\qquad$ b) $P_0\left(-2\frac{7}{9}\,;\,8\frac{1}{3}\right)$ $\qquad x^2 + y^2 = 25$

c) $P_0(7\,;\,3)$ $\qquad x^2 + y^2 = 29$ $\qquad$ d) $P_0(-8\,;\,3)$ $\qquad x^2 + y^2 = 16$

e) $P_0(-2\,;\,5)$ $\qquad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$

f) $P_0(-21\,;\,23)$ $\qquad x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

g) $P_0(0\,;\,10)$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

h) $P_0(3\,;\,5)$ $\qquad x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0.$

Die Tangentenlänge (Strecke $\overline{P_0 P_1}$, wenn P_1 der Berührungspunkt ist) ist zu berechnen.

14. Es ist analytisch zu beweisen, daß der Peripheriewinkel im Halbkreis 90° beträgt.

6. Zwei Kreise

a) Schnittpunkte zweier Kreise

Es seien die beiden Kreise

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

und

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = \varrho^2$$

gegeben. Es sollen die Punkte gesucht werden, in denen die Kreise einander schneiden.

Wir nehmen an, daß ein Punkt $P_1(x_1\,;\,y_1)$ existiert, der ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist. Dieser Punkt gehört dann beiden Kreisen an, seine Koordinaten müssen also beiden Gleichungen genügen. Mithin gilt

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

und

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 = \varrho^2.$$

Wir haben damit ein System quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten gefunden. Zur Auflösung subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten und erhalten damit eine Gleichung, die nur noch lineare Glieder enthält. Diese Gleichung lösen wir nach y_1 auf und setzen den so erhaltenen Ausdruck in eine der beiden Kreisgleichungen ein. Die dadurch entstandene quadratische Gleichung in x_1 hat entweder keine (reelle) Wurzel, eine Doppelwurzel oder zwei voneinander verschiedene (reelle) Wurzeln. Durch Einsetzen von x_1 in eine der Gleichungen erhalten wir für y_1 ebenfalls keine (reelle) Wurzel, eine Doppelwurzel oder zwei voneinander verschiedene (reelle) Wurzeln.

Liegen für x_1 oder y_1 oder für x_1 und y_1 keine (reellen) Wurzeln vor, so schneiden die Kreise einander nicht.

Liegen für x_1 und y_1 Doppelwurzeln vor, so berühren die Kreise einander.

Liegen für x_1 oder y_1 oder für x_1 und y_1 zwei voneinander verschiedene (reelle) Wurzeln vor, so schneiden die Kreise einander.

Sind die beiden Kreise konzentrisch, so gilt $a = c$ und $b = d$, und die Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu einem Widerspruch. Die Annahme, daß ein Punkt P_1 existiert, der ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist, ist also falsch.

Beispiele:

1. Die Kreise $x^2 + y^2 = 7^2$ und $x^2 + (y - 11)^2 = 3^2$ haben keine gemeinsamen Punkte, schneiden also einander nicht. Für x_1 erhält man die Gleichung
$$x_1 = \pm\sqrt{-\frac{2205}{484}} = \pm\frac{21}{22}\sqrt{-5}\,.$$

2. Zwei zueinander konzentrische Kreise sind
$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \text{ und } (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4^2.$$
Die Subtraktion führt zum Widerspruch.

3. Der Kreis $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ hat mit dem Kreis $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$ den Punkt $P\,(0; 0)$ gemein. Dieser Punkt ist offenbar der einzige gemeinsame; die Gleichung für x_1 ergibt sich nämlich zu $x_1^2 = 0$. Somit ist $x_1 = 0$ Doppelwurzel. Auch für y_1 ergibt sich die Doppelwurzel 0. Die beiden Kreise berühren demnach einander im Punkte $P\,(0; 0)$.

4. Für die Kreise $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ und $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 2$ lautet die Gleichung in x_1:
$$13\,x_1^2 - 46\,x_1 + 40 = 0.$$
Die Kreise schneiden einander in $P_1\,(2; 6)$ und in $P_2\left(\frac{20}{13}; \frac{82}{13}\right)$.

b) Schnittwinkel zweier Kreise

Unter dem Schnittwinkel zweier Kreise verstehen wir den Winkel, der durch die Tangenten an die beiden Kreise im Schnittpunkt gebildet wird (Abb. 103).

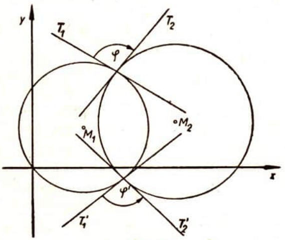

Abb. 103

Es seien die beiden einander schneidenden Kreise
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
und
$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = \varrho^2$$
gegeben; $P_1(x_1; y_1)$ sei ein Schnittpunkt. Nach Abschnitt II, 5b haben die beiden Tangenten an die Kreise im Punkte P_1 die Gleichungen
$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$
und
$$(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = \varrho^2.$$

Durch Umformung in die Normalform erhält man daraus

$$y = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}x + \frac{a(x_1 - a) + b(y_1 - b) + r^2}{y_1 - b}$$

und

$$y = -\frac{x_1 - c}{y_1 - d}x + \frac{c(x_1 - c) + d(y_1 - d) + \varrho^2}{y_1 - d}.$$

Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß die Nenner von Null verschieden sind. Wir stellen fest, daß $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b} = m_1$ und $-\frac{x_1 - c}{y_1 - d} = m_2$ die Richtungskoeffizienten der beiden Tangenten sind. Nach Abschnitt I, 3b ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, wobei φ der Schnittwinkel der Tangenten und mithin der Kreise ist. Es gilt also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\frac{x_1 - a}{y_1 - b} - \frac{x_1 - c}{y_1 - d}}{1 + \frac{(x_1 - a)(x_1 - c)}{(y_1 - b)(y_1 - d)}} = \frac{(x_1 - a)(y_1 - d) - (x_1 - c)(y_1 - b)}{(x_1 - a)(x_1 - c) + (y_1 - b)(y_1 - d)}.$$

Wir erkennen, daß diese Gleichung auch für die anfangs ausgeschlossenen Fälle gültig ist. In den Fällen, in denen der Nenner dieses Ausdruckes gleich Null ist, kann durch eine entsprechende Herleitung $\operatorname{ctg}\varphi$ gebildet werden. Es ergibt sich dann $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, das heißt, der Schnittwinkel beträgt $90°$.

In den meisten Fällen ist es zweckmäßiger, m_1 und m_2 mit den gegebenen Zahlenwerten auszurechnen und in die Formel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ einzusetzen, als die letzte Formel für $\operatorname{tg}\varphi$ zu verwenden.

Da nicht festgelegt ist, welcher der beiden Anstiege mit m_1 oder m_2 bezeichnet ist, läßt sich von vornherein nicht aussagen, ob man durch diese Rechnung den Schnittwinkel oder seinen Supplementwinkel erhält. Es muß also noch eine Betrachtung darüber angestellt werden, ob φ größer oder kleiner als $90°$ ist. Die beiden zum Punkt P_1 gezogenen Radien r und ϱ bilden mit der Verbindungsgeraden z der Kreismittelpunkte (der Zentralen) ein Dreieck. Der Winkel, unter dem die Radien r und ϱ in diesem Dreieck aufeinanderstoßen, ist der Supplementwinkel des Schnittwinkels, was leicht zu beweisen ist (Abb. 104). Liegt der Schnittpunkt P der beiden Kreise auf dem Thaleskreis über z, so stoßen die Radien senkrecht aufeinander (Abb. 105).

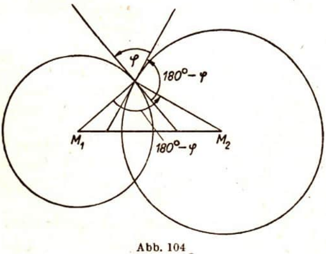

Abb. 104

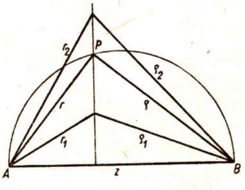

Abb. 105

Es gilt also in diesem Falle $r^2 + \varrho^2 = z^2$. Ist $r_1 + \varrho_1 < r + \varrho$, so stoßen r_1 und ϱ_1 stumpfwinklig aufeinander. In diesem Fall ist auch $r_1^2 + \varrho_1^2 < r^2 + \varrho^2$. Demnach ist die Beziehung $r_1^2 + \varrho_1^2 < z^2$ ein Kriterium dafür, daß die Radien unter einem stumpfen Winkel aufeinanderstoßen und mithin der Schnittwinkel φ der beiden Kreise ein spitzer Winkel ist. Entsprechend kann man schließen: Ist $r_2^2 + \varrho_2^2 > z^2$, so ist φ ein stumpfer Winkel.

Beispiel:

Wie wir erkannt hatten, ist $P_1\,(2;6)$ ein Schnittpunkt der beiden Kreise $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ und $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 2$. Die Tangenten an die Kreise in diesem Punkte sind dann $(x+1)\cdot 3 + (y-2)\cdot 4 = 25$ und $(x-1)\cdot 1 + (y-5)\cdot 1 = 2$. Demnach ist der Anstieg der ersten Tangente $m_1 = -\frac{3}{4}$ und der Anstieg der zweiten Tangente $m_2 = -1$. Für den Schnittwinkel φ ergibt sich dann die Beziehung $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{7}$. Wählt man dagegen $m_1 = -1$ und $m_2 = -\frac{3}{4}$, so erhält man entsprechend $\operatorname{tg}\varphi = +\frac{1}{7}$. Es muß also noch festgestellt werden, welcher von beiden Werten den Schnittwinkel angibt. Die Mittelpunkte der Kreise sind $M_1\,(-1;+2)$ und $M_2\,(+1;+5)$. Ferner ist $r^2 = 25$ und $\varrho^2 = 2$ sowie $z^2 = 2^2 + 3^2$. Daraus ergibt sich die Ungleichung $25 + 2 > 2^2 + 3^2$, die Tangenten schneiden also einander unter einem stumpfen Winkel. Wegen der Beziehung $-\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(2R - \varphi)$ ergibt sich der Schnittwinkel $171{,}87°$.

Aufgaben

1. Die Lage der beiden Kreise ist zu untersuchen.

a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$
$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 45$

b) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$
$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 9$

c) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$

d) $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 36$
$(x-6)^2 + (y-15)^2 = 4$

e) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 18$
$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 32$

f) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 20$
$(x-5)^2 + (y+9)^2 = 36.$

2. Der Schnittwinkel der beiden Kreise $x^2 + y^2 = 16$ und $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ ist zu berechnen.

3. Berechnen Sie bei den Kreisen in Aufgabe 1, die gemeinsame Punkte haben, die Schnittwinkel! Prüfen Sie die Ergebnisse durch Konstruktion nach!

4. Bei einer Maschine soll mit Hilfe von Reibrollen die Kraft von der treibenden Welle W_1 über die Welle W_2 auf die getriebene Welle W_3 übertragen werden. Die treibende Rolle hat einen Durchmesser $d_1 = 300$ mm. Der Abstand $M_1 M_3$ beträgt 250 mm. Die Umdrehungszahl in der Minute soll bei der Welle W_2 das Doppelte und bei der Welle W_3 das Vierfache der Welle W_1 betragen.

Zu bestimmen sind die Radien der Rollen auf W_2 und W_3 sowie die Koordinaten von M_2. Berechnen Sie die Höhe des Getriebekastens, wenn seine Grundfläche und seine Deckfläche parallel verlaufen und der Abstand der Rollen vom Gehäuse 2 cm beträgt.
Eine Konstruktionszeichnung ist anzufertigen.

Anleitung: Man wähle M_1 als Nullpunkt des Koordinatensystems und die Gerade durch M_1 und M_3 als x-Achse.

III. Analytische Geometrie der Kegelschnitte

Dreht man von zwei einander unter einem spitzen Winkel schneidenden Geraden die eine so um die andere Gerade, daß der Schnittwinkel φ stets derselbe ist, so

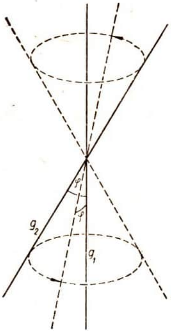

Abb. 106

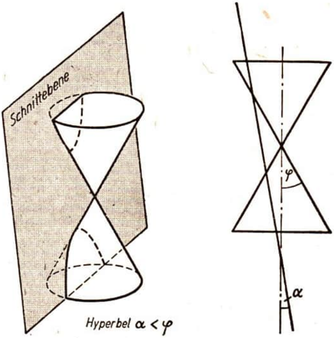

Abb. 107

entstehen zwei Kreiskegel mit gemeinsamer Spitze, gemeinsamer Achse und gleichem Öffnungswinkel (Winkel zwischen Mantellinien, die in einer Ebene mit der Achse liegen — Abb. 106). Bringt man diesen Doppelkegel mit einer Ebene zum Schnitt, so werden die Schnittflächen von Kurven berandet, die man als **Kegelschnitte** bezeichnet. Die Form des Kegelschnittes ist abhängig von der Lage der Schnittebene zur Kegelachse und zur Kegelspitze.

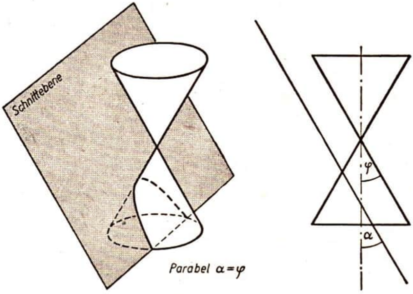

Abb. 108

Wir bezeichnen den kleinsten Winkel zwischen der Kegelachse und der Schnittebene mit α und betrachten zunächst die Fälle, bei denen die Kegelspitze nicht in der Schnittebene liegt. Diese Kegelschnitte sind Kurven, die uns von früheren Untersuchungen her bekannt sind. Ist $\alpha < \varphi$, so erhalten wir eine Hyperbel (Abb. 107). Für $\alpha = \varphi$ ergibt sich eine Parabel (Abb. 108)

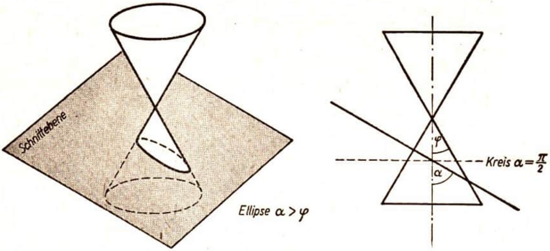

Abb. 109

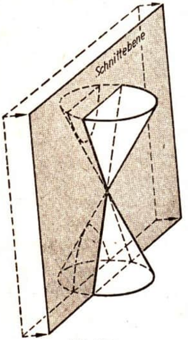

Abb. 110

und für $\alpha > \varphi$ eine Ellipse (speziell für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ein Kreis — Abb. 109).

Die Kegelschnitte werden in den folgenden Abschnitten als geometrische Örter definiert. Auf den Beweis, daß die so definierten Kurven mit den ebenen Schnitten eines Kreiskegels übereinstimmen, wollen wir verzichten.

Gehört die Spitze des Kegels der Schnittebene an, so erhält man für $\alpha < \varphi$ eine Schnittfläche, die von einem Geradenpaar (zwei Mantellinien) begrenzt wird (Abb. 110). Geht $\alpha \to \varphi$, so strebt der Winkel zwischen diesen Geraden gegen Null. Für $\alpha = \varphi$ fallen die Geraden aufeinander, das heißt, die Ebene berührt den Kegel in einer Geraden (Abb. 111). Ist $\alpha > \varphi$, so haben der Kegel und die Ebene nur noch einen gemeinsamen Punkt (die Kegelspitze — Abb. 112). Man bezeichnet diese „Schnitte" als entartete Kegelschnitte. Sie werden bei den folgenden Betrachtungen nicht behandelt, so daß unter Kegelschnitten stets die nicht entarteten Kegelschnitte zu verstehen sind.

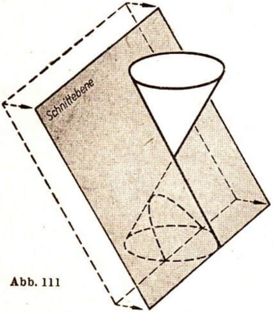

Abb. 111

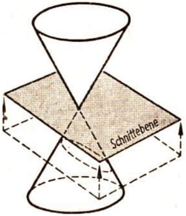

Abb. 112

7. Die Ellipse

Definition: **Die Ellipse ist der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten stets denselben Wert hat.**

Die festen Punkte heißen **Brennpunkte der Ellipse**, ihren Abstand voneinander bezeichnen wir mit $2e$, die konstante Summe mit $2a$.

a) Die Gleichung der Ellipse

Die beiden Brennpunkte einer Ellipse seien $F_1(-e; 0)$ und $F_2(+e; 0)$. Ist $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt auf der Ellipse, so gilt auf Grund der Definition (vgl. Abb. 113)

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2}+\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a.$$

Diese Gleichung formen wir um:

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(e-x)^2+y^2},$$

$$e^2+2ex+x^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}+e^2-2ex+x^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}=4a^2-4ex,$$

$$a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}=a^2-ex,$$

$$a^2(e^2-2ex+x^2+y^2)=a^4-2a^2ex+e^2x^2,$$

$$a^2e^2-2a^2ex+a^2x^2+a^2y^2=a^4-2a^2ex+e^2x^2,$$

$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2=a^2(a^2-e^2).$$

Um die Gleichung weiter zu vereinfachen, setzen wir $a^2-e^2=b^2$. Dadurch ergibt sich

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

oder

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

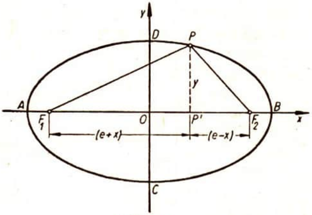

Abb. 113

Diese drei Formen derselben Gleichung bestimmen eine Ellipse, deren Mittelpunkt (der Halbierungspunkt der Strecke F_1F_2) im Koordinatenursprung liegt. Man bezeichnet die Gleichung daher als **Mittelpunktsgleichung der Ellipse.**
Transformieren wir das Koordinatensystem durch Parallelverschiebung, so ergibt sich analog der Transformation beim Kreis

$$\boldsymbol{\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1}$$

als eine **allgemeine Gleichung der Ellipse**, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

b) Die Halbachsen der Ellipse. Symmetrieeigenschaften

Es seien $F_1(-e; 0)$ und $F_2(+e; 0)$ die Brennpunkte einer Ellipse und $P_1(0; +y_1)$ sowie $P_2(0; -y_1)$ zwei Punkte auf ihr (Abb. 114). Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Da $x_1 = 0$ ist, erhält man für $+y_1$ den Wert b. Ferner gilt

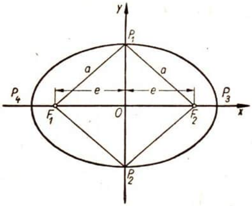

Abb. 114

$$\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = e$$

und

$$\overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2} = 2a.$$

Da F_1 und F_2 auf der x-Achse symmetrisch zur y-Achse liegen und P_1 ein Punkt auf der y-Achse ist, folgt aus der letzten Gleichung

$$\overline{F_1P_1} = \overline{P_1F_2} = a.$$

Aus diesen Beziehungen läßt sich die Gleichung

$$a^2 - e^2 = b^2$$

aufstellen. Diese Gleichung war die Definitionsgleichung für b (vgl. Abschnitt III, 7a).

Eine entsprechende Betrachtung kann man für den Punkt P_2 durchführen. Man erhält $-y_1 = -b$. Jede Sehne durch den Mittelpunkt einer Ellipse bezeichnet man als Durchmesser der Ellipse. Da P_1, O und P_2 auf einer Geraden liegen (der y-Achse) und O der Mittelpunkt der Ellipse ist, ist $P_1P_2 = 2b$ ein Durchmesser der Ellipse, und zwar der kleinste. Man bezeichnet deshalb b als die **kleine Halbachse** (Nebenachse).

Wir betrachten jetzt die auf der Ellipse liegenden Punkte $P_3(+x_3; 0)$ und $P_4(-x_3; 0)$. Durch Einsetzen des Wertes $y_3 = 0$ in die Ellipsengleichung erhält man für $+x_3$ den Wert $+a$. Dieses Ergebnis erhält man auch durch die folgende Überlegung: Es ist

$$\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = e$$

und demnach

$$2e + 2\overline{F_2P_3} = 2a$$

oder

$$e + \overline{F_2P_3} = a.$$

Eine entsprechende Betrachtung kann man für den Punkt P_4 durchführen. Da P_3, O und P_4 auf einer Geraden liegen und O der Mittelpunkt der Ellipse ist, ist $\overline{P_3P_4} = 2a$ ein weiterer Durchmesser der Ellipse, und zwar der größte. Man bezeichnet ihn als **große Halbachse** (Hauptachse).

Ist die Ellipse nicht in der Mittelpunktslage gegeben, so sind diese Ausführungen unter Berücksichtigung der erforderlichen Transformation ebenfalls gültig, da sich jede Ellipse durch eine geeignete Koordinatentransformation in die Mittelpunktslage überführen läßt.

Aus der Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ folgt, daß die Ellipse in Mittelpunktslage symmetrisch in bezug auf beide Koordinatenachsen ist; denn für jeden Wert von x ergeben sich innerhalb des Definitionsbereiches zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werte von y, und für zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werte von x erhält man denselben y-Wert. Wie aus der Gleichung zu erkennen ist, existieren y-Werte nur für $|x| \leqq a$; alle diese Werte bleiben endlich.

Bei einer Parallelverschiebung der Ellipse unterliegen auch die Symmetrieachsen der Transformation. In den vorangegangenen Betrachtungen war vorausgesetzt, daß die Brennpunkte F_1 und F_2 auf der x-Achse symmetrisch zur y-Achse liegen. Es kann auch der Fall eintreten, daß die Brennpunkte F_1 und F_2 auf der y-Achse symmetrisch zur x-Achse liegen. Behält man die Bezeichnungen der Halbachsen bei (a große, b kleine Halbachse), so ergibt sich durch eine entsprechende Herleitung als Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

mit $a > b$. Bezeichnet man dagegen die auf der x-Achse liegende Halbachse mit a, die auf der y-Achse liegende mit b, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a < b$. Dementsprechend gilt dann $b^2 - e^2 = a^2$. Bei den folgenden Betrachtungen wird die Hauptachse stets mit $2\,a$ bezeichnet.

c) Konstruktion der Ellipse

Für die Konstruktion einer Ellipse seien die Stücke a und e gegeben.

Der Abstand der beiden Brennpunkte ist durch $2e$ bestimmt. Man nimmt auf einer Strecke von der Länge $2a$ einen beliebigen Teilpunkt T so an, daß die Strecke in zwei Teilstrecken g und h mit $g \geqq a - e$ zerlegt wird. Dann schlägt man um F_1 den Kreis mit g und um F_2 den Kreis mit h (Abb. 115). Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind Ellipsenpunkte.

Beweis: Ein Schnittpunkt sei P_1. Dann ist

$$\overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2} = g + h = 2a.$$

Entsprechend gilt für den zweiten Schnittpunkt P_2

$$\overline{F_1P_2} + \overline{P_2F_2} = g + h = 2a.$$

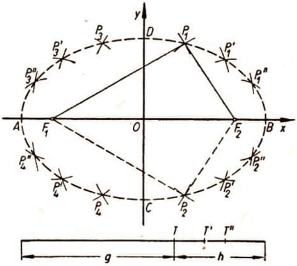

Abb. 115

Durch immer neue Wahl von T kann man auf diese Art beliebig viele Ellipsenpunkte konstruieren. Zum Beispiel kann man wegen der Symmetrieeigenschaften der Ellipse auch um F_2 den Kreis mit g und um F_1 den Kreis mit h schlagen.

Da die drei Größen a, b und e ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a bestimmen (vgl. Abschnitt III, 7b), kann man die Konstruktion immer ausführen, wenn zwei dieser Größen gegeben sind. Sind zum Beispiel b und e gegeben, so findet man a als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten e und b.

Bedingung für die Konstruierbarkeit der Ellipse ist $a > e$.

d) Die lineare Exzentrizität der Ellipse

Den Wert $\overline{F_1 O} = \overline{O F_2} = e$ bezeichnet man als die lineare Exzentrizität der Ellipse. Aus der Beziehung

$$a^2 - e^2 = b^2$$

folgt, daß a gegen b strebt, wenn e gegen Null geht. Es ist leicht einzusehen (und an der Gleichung der Ellipse nachzuweisen), daß sich damit die Form der Ellipse immer mehr der Form des Kreises nähert. Für $e = 0$ fallen die beiden Brennpunkte der Ellipse in einem Punkt zusammen. Damit ergibt sich der Kreis als Spezialfall der Ellipse mit

$$a = b = r.$$

Aufgaben

1. Es ist die Mittelpunktsgleichung der folgenden Ellipsen zu bestimmen:

a) $a = 10$,	$b = 6$;	**b)** $a = 15$,	$b = 12$;	**c)** $a = 4{,}5$,	$b = 3$;
d) $a = 12$,	$b = 13$;	**e)** $a = 3$,	$b = 5$;	**f)** $a = 10$,	$e = 8$;
g) $a = 20$,	$e = 16$;	**h)** $b = 12$,	$e = 16$;	**i)** $b = 15$,	$e = 25$.

Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und die der Brennpunkte an!

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht! Der Mittelpunkt der Ellipse liege im Koordinatenursprung.

a) $P_1(4; 2)$,	$P_2(1; 4)$	**b)** $P_1(-3{,}6; -3{,}2)$,	$P_2(4{,}8; -2{,}4)$
c) $P_1(3; 2{,}4)$,	$P_2(-4; 1{,}8)$	**d)** $P_1(3; 25)$,	$P_2(1{,}4; 30)$

Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und die der Brennpunkte an!

3. Einem Rechteck mit den Seiten 16 cm und 7,2 cm ist die Ellipse umbeschrieben, deren Brennpunkte in den Mittelpunkten der kleineren Seiten liegen. Es ist die Gleichung der Ellipse zu bestimmen.

4. Die Halbachsen der Ellipse sind zu bestimmen.

a) $x^2 + 4y^2 = 64$ **b)** $9x^2 + 16y^2 = 324$

c) $25x^2 + 16y^2 = 400$ **d)** $64x^2 + 225y^2 = 14400$

Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und die der Brennpunkte an!

5. Der Mittelpunkt einer Ellipse sei M. Ihre Hauptachsen liegen parallel zu den Koordinatenachsen. Es ist die Ellipsengleichung zu bestimmen.

a) $M(2; 3)$,	$a = 5$,	$b = 3$	**b)** $M(-2; 3)$,	$a = 5$,	$b = 3$
c) $M(0; 3)$,	$a = 52$,	$b = 32$	**d)** $M(4; 7)$,	$a = 7$,	$b = 7$
e) $M(5; 0)$,	$a = 5$,	$b = 2$	**f)** $M(-5; 2)$,	$a = 5$,	$b = 4$
g) $M(-5; -7)$,	$a = 4$,	$b = 9$	**h)** $M(0; 0)$,	$a = 6$,	$b = 8$

6. Die Halbachsen der Ellipse sind zu bestimmen.

a) $3x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

b) $4x^2 + 9y^2 + 18y + 8 = 0$

c) $9x^2 + 25y^2 + 72x - 50y - 56 = 0$

d) $9x^2 + 16y^2 - 36x - 128y + 148 = 0$

e) $x^2 + 2y^2 + 2x - 6y - 23 = 0$

f) $25x^2 + 4y^2 - 200x - 40y + 400 = 0$.

Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes, die der Scheitel und die der Brennpunkte an!

7. Es ist mit Hilfe der Differentialrechnung zu beweisen, daß $2\,b$ der kleinste Durchmesser der Ellipse ist.

   Anleitung: Man nehme einen variablen Punkt P auf der Ellipse an und stelle das Quadrat der Strecke $\overline{OP}$ als Funktion von x dar.

8. Neuere Messungen sowjetischer Geodäten haben ergeben, daß der Erdäquator kein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Nach diesen Messungen beträgt der mittlere Äquatorradius 6378245 m. Die Differenz zwischen der großen und der kleinen Halbachse ist 213 m. Wie groß ist die lineare Exzentrizität?

8. Die Hyperbel

Definition: **Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten stets denselben Wert hat.**

Die festen Punkte heißen **Brennpunkte der Hyperbel**, ihren Abstand voneinander bezeichnen wir mit $2e$, die konstante Differenz mit $2a$.

a) Die Gleichung der Hyperbel

Die beiden Brennpunkte der Hyperbel seien $F_1(-e; 0)$ und $F_2(+e; 0)$. Ist $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt auf der Hyperbel, so gilt auf Grund der Definition (vgl. Abb. 116)

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

Durch zweimaliges Quadrieren (vgl. Abschnitt III, 7a) erhält man daraus nach Umformung:

$$x^2(e^2-a^2)-a^2y^2=a^2(e^2-a^2).$$

Nunmehr setzen wir

$$e^2-a^2=b^2.$$

Dadurch ergibt sich

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

oder

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

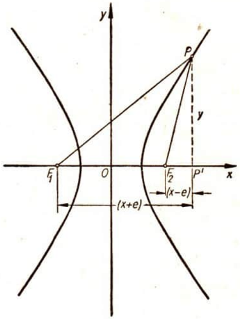

Abb. 116

Diese drei Formen derselben Gleichung heißen **Mittelpunktsgleichung der Hyperbel** (vgl. Abschnitt III, 7a). Transformieren wir das Koordinatensystem durch Parallelverschiebung, so ergibt sich analog den Transformationen bei Kreis und Ellipse

$$\boldsymbol{\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=1}$$

als eine **allgemeine Gleichung der Hyperbel**, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

b) Konstruktion der Hyperbel

Es seien F_1 und F_2 die Brennpunkte der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gesucht sei ein beliebiger Hyperbelpunkt P.

Man schlägt um einen der beiden Brennpunkte — etwa F_1 — den Kreis mit dem Radius $2a$. Von F_2 aus legt man die Tangenten an den Kreis, die diesen in den Punkten T_1 und T_2 berühren. Sodann verbindet man einen beliebigen Punkt Q auf dem kleineren Bogen zwischen T_1 und T_2 mit F_1 und F_2. Auf $\overline{QF_2}$ errichtet man die Mittelsenkrechte. Der Schnittpunkt derselben mit der Verlängerung von $\overline{F_1Q}$ ist ein Hyperbelpunkt P.

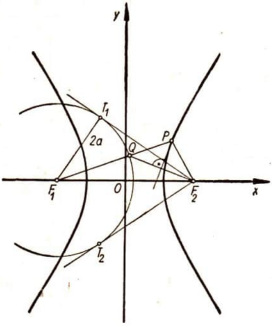

Abb. 117

Beweis:

Für jeden so konstruierten Punkt P gilt (Abb. 117)

$$\overline{PQ} = \overline{PF_2}.$$

Demnach ist

$$\overline{PF_1} - \overline{PQ} = \overline{QF_1},$$
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a.$$

Durch Wiederholung der Konstruktion kann man bei stets anderem Q beliebig viele Punkte des einen Hyperbelastes konstruieren. Liegt Q auf dem größeren Bogen zwischen T_1 und T_2, so erhält man für jede Lage von Q einen Punkt auf dem anderen Ast der Hyperbel.

c) Die Achsen und die Scheitelpunkte der Hyperbel

Nähert sich der Punkt Q der Geraden durch F_1 und F_2, so nähert sich der Punkt P ebenfalls dieser Geraden. Liegt Q auf dieser Geraden, so halbiert der Punkt P_1 die Strecke $\overline{QF_2}$ (Abb. 118). Es gelten dann die folgenden Beziehungen:

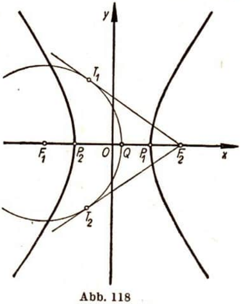

Abb. 118

$$\overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2} = 2e$$
$$\overline{F_1P_1} - \overline{P_1F_2} = 2a.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$\overline{P_1F_2} = e - a.$$

Wir bezeichnen nun den Halbierungspunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$ mit O. Da $\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = e$ ist, folgt

$$\overline{OP_1} = \overline{OF_2} - \overline{P_1F_2} = a.$$

Durch entsprechende Konstruktion kann man den Hyperbelpunkt P_2 auf der Geraden $\overline{F_1F_2}$ bestimmen. Es gilt auch hier

$$\overline{OP_2} = a.$$

Man bezeichnet $\overline{P_1P_2} = 2a$ als **Hauptachse** der Hyperbel. Als **Nebenachse** bezeichnet man die zu $\overline{P_1P_2}$ in O senkrecht stehende Gerade. Sie schneidet die Hyperbel nicht.

Entfernt sich der Punkt Q von der Geraden $\overline{F_1F_2}$, so wird der Winkel, unter dem sich die durch F_1 und Q bestimmte Gerade und die Mittelsenkrechte auf QF_2 schneiden, immer kleiner; der Punkt P entfernt sich sowohl von der Hauptachse als auch von der Nebenachse. Fällt schließlich Q mit T_1 oder T_2 zusammen, so verlaufen die beiden Geraden parallel, es existiert kein Schnittpunkt P im Endlichen.

Die Konstruktion der Hyperbelpunkte kann sowohl von F_1 als auch von F_2 aus durchgeführt werden. Daraus folgt, daß die Hyperbel aus zwei getrennten Teilen (Ästen) besteht, die sich von P_1 und P_2 aus beiderseits ins Unendliche erstrecken. Die Punkte P_1 und P_2 bezeichnet man als die **Scheitelpunkte** der Hyperbel.

Bei der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

fällt die Hauptachse mit der x-Achse zusammen, bei der Hyperbel

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

fällt die Hauptachse mit der y-Achse zusammen. Der Beweis dafür ergibt sich aus der Herleitung der Hyperbelgleichung.

d) Asymptoten der Hyperbel

Wir bringen die Gerade $y = mx$ mit der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ zum Schnitt. Dadurch erhalten wir

$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 = a^2b^2$$

oder

$$x^2(b^2 - a^2m^2) = a^2b^2,$$

$$x = \frac{ab}{\pm\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Wir erkennen, daß die Existenz der Schnittpunkte bei festem a und b von der Größe m abhängt (Abb. 119). Für

$$|m| < \frac{b}{a}$$

gilt

$$a^2m^2 < b^2;$$

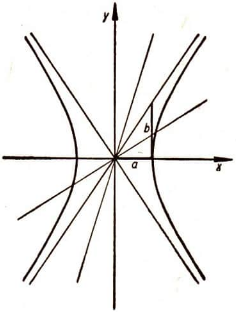

Abb. 119

der Wurzelausdruck ist positiv, es existieren zwei Schnittpunkte. Für

$$|m| > \frac{b}{a}$$

gilt

$$a^2m^2 > b^2;$$

der Wurzelausdruck ist negativ, es existieren keine Schnittpunkte.

Strebt $|m|$ von unten gegen $\frac{b}{a}$, so strebt $a^2 m^2 \to b^2$, der Wurzelausdruck strebt, da a und b ungleich Null sind, gegen Null und damit $x \to \pm\infty$. Die Geraden $y = \pm mx$ gehen damit in die Grenzlagen $y = \pm \frac{b}{a} x$ über. Man bezeichnet diese Geraden als Asymptoten der Hyperbel

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

e) Lineare Exzentrizität

Auch bei der Hyperbel bezeichnet man analog der Ellipse den Wert $\overline{F_1 O} = \overline{O F_2} = e$ als die lineare Exzentrizität. Zum Unterschied zur Ellipse, bei der stets $a > e$ ist, gilt bei der Hyperbel $e > a$. Da a eine positive Größe ist, kann demnach e niemals gleich Null sein.

Ist in der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = b^2$ oder, da $b^2 = e^2 - a^2$ ist, $a = \frac{e}{2}\sqrt{2}$, so spricht man von einer gleichseitigen Hyperbel. Ihre Asymptoten genügen der Gleichung

$$y = \pm x.$$

f) Die Ellipsen- und die Hyperbelgleichung als spezielle Form der quadratischen Gleichung

In der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung (vgl. Abschnitt II, 4c)

$$A x^2 + B y^2 + C x y + D x + E y + F = 0$$

seien die Koeffizienten A und B verschieden von Null, und C sei gleich Null.

Wir dividieren die Gleichung

$$A x^2 + B y^2 + D x + E y + F = 0$$

durch AB und erhalten

$$\frac{x^2}{B} + \frac{D}{AB} x + \frac{y^2}{A} + \frac{E}{AB} y = -\frac{F}{AB}.$$

Durch quadratische Ergänzung ergibt sich

$$\frac{x^2}{B} + \frac{D}{AB} x + \frac{D^2}{4A^2B} + \frac{y^2}{A} + \frac{E}{AB} y + \frac{E^2}{4AB^2} = \frac{D^2 B + E^2 A - 4ABF}{4A^2B^2},$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{B} + \frac{\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2}{A} = \frac{D^2 B + E^2 A - 4ABF}{4A^2B^2}.$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung verschieden von Null, so erhält man

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2B + E^2A - 4ABF}{4A^2B}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2}{\frac{D^2B + E^2A - 4ABF}{4AB^2}} = 1.$$

Sind in dieser Gleichung beide Nenner positiv, so stellt sie eine Ellipse dar, deren

Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen; ist einer der Nenner positiv, der andere negativ, so handelt es sich um eine Hyperbel. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes hat die Koordinaten $M\left(-\frac{D}{2A};\ -\frac{E}{2B}\right)$.

Aufgaben

1. Es ist die Gleichung der Hyperbel zu bestimmen, für die gegeben ist:

a) $a = 4,\quad b = 3;$ **b)** $a = 2,\quad b = 3;$

c) $a = 3,\quad b = 2;$ **d)** $a = 2{,}3,\quad b = 2;$

e) $b = 5,\quad e = 8;$ **f)** $a = 4,\quad e = 5.$

Die Hauptachse falle mit der x-Achse und der Mittelpunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammen. Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und die der Brennpunkte an!

2. Es ist die Gleichung der Hyperbel zu bestimmen, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht. Der Mittelpunkt liege im Koordinatenursprung.

a) $P_1(5;3)\quad P_2(8;-10)$ **b)** $P_1(8;10\sqrt{2})\quad P_2(4;-5\sqrt{3})$

c) $P_1\left(4;8\frac{1}{3}\right)\quad P_2\left(7\frac{1}{2};-13\right)$ **d)** $P_1(5;0)\quad P_2(7;2\sqrt{6})$

Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte an! Die Hyperbel ist zu konstruieren.

3. Die Halbachsen der folgenden Hyperbeln sind zu bestimmen.

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ **b)** $5x^2 - 4y^2 = 20$

c) $18x^2 - 22y^2 = 1$ **d)** $10x^2 - 15y^2 = 3$

Die Koordinaten der Scheitel und die der Brennpunkte sind anzugeben. Die Hyperbeln sind zu konstruieren.

4. Es ist die Gleichung der Hyperbel zu bestimmen, für die gegeben ist:

a) $M(5;4),\quad a = 8,\quad b = 5;$ **b)** $M(2;5),\quad a = 4,\quad b = 7;$

c) $M(5;-4),\quad a = 7,\quad b = 10;$ **d)** $M(-2;-3),\quad a = 7,\quad b = 9.$

Die Hauptachse liege zur x-Achse parallel.

5. Bestimmen Sie die Halbachsen der folgenden Hyperbeln!

a) $9x^2 - 16y^2 - 90x - 64y + 17 = 0$ **b)** $25x^2 - 64y^2 - 300x - 256y - 956 = 0$

c) $216x^2 - 144y^2 - 72x - 72y - 5 = 0$ **d)** $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes, die der Scheitel und die der Brennpunkte an!

6. Es sind für die Hyperbeln in **a)** Aufgabe 1a, **b)** Aufgabe 3a, **c)** Aufgabe 5a, **d)** Aufgabe 5d die Gleichungen der Asymptoten zu bestimmen.

9. Die Parabel

Definition: **Die Parabel ist der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen der Abstand von einem festen Punkt gleich dem Abstand von einer festen Geraden ist.**

Der feste Punkt heißt **Brennpunkt der Parabel**, seinen Abstand von der Geraden bezeichnen wir mit p. Die Gerade heißt Leitlinie der Parabel.

a) Die Konstruktion der Parabel

Gegeben seien der Brennpunkt F und die Leitlinie l einer Parabel (Abb. 120). Gesucht sei ein beliebiger Parabelpunkt P. Auf Grund der Definition ergibt sich die folgende Konstruktionsmethode:

Man schlägt um F einen Kreis mit dem Radius $r \geqq \frac{p}{2}$ und zieht zu l in der Halbebene, der F angehört, eine Parallele im Abstand r. Die Schnittpunkte der Parallelen mit dem Kreis sind Parabelpunkte P.

Beweis:

Nach Konstruktion ist der Abstand des Punktes P von l gleich $\overline{PF}$.

Eine weitere Konstruktionsmethode findet man durch die folgende Überlegung.

Man wählt auf l einen beliebigen Punkt L und errichtet auf LF die Mittelsenkrechte. Durch L zieht man zu $\overline{DF}$ die Parallele. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Mittelsenkrechten ist ein Parabelpunkt P.

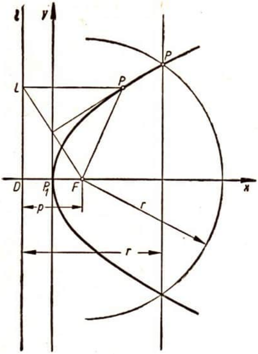

Abb. 120

Beweis:

Nach Konstruktion ist $\overline{PL} = \overline{PF}$.

Durch immer neue Wahl von r bzw. L kann man bei beiden Methoden beliebig viele Parabelpunkte konstruieren. Sämtliche Parabelpunkte liegen in der Halbebene, der F angehört.

Beweis:

Angenommen, ein Parabelpunkt P läge in der Halbebene, der F nicht angehört. Dann wäre sein Abstand von l stets kleiner als der Abstand $\overline{PF}$. Das widerspricht aber der Definition der Parabel.

Wie man an der ersten Konstruktion leicht erkennt, liegen alle Parabelpunkte symmetrisch zur Geraden durch D und F. Diese Gerade heißt daher Achse der Parabel.

Fällt man von F auf l das Lot mit dem Fußpunkt D, so ist der Halbierungspunkt dieses Lotes ein Parabelpunkt P_1 (Abb. 120).

Beweis:

Es ist
$$\overline{FP_1} = \overline{P_1D}.$$

Diesen Punkt P_1 auf dem Lot $\overline{FD}$ bezeichnet man als Scheitel der Parabel. Die Strecke
$$\overline{FD} = p$$
heißt Halbparameter der Parabel.

b) Die Gleichung der Parabel

Wir legen die Parabel so in ein $x;y$-Koordinatensystem, daß der Scheitel mit dem Ursprung O und die Achse der Parabel mit der x-Achse zusammenfallen (Scheitelpunktslage). Dann hat der Brennpunkt F (Abb. 121) die Koordinaten $\left(+\frac{p}{2}; 0\right)$.

Ist P ein beliebiger Punkt der Parabel, L der Fußpunkt des von P auf die Leitlinie gefällten Lotes und B der Fußpunkt des von P auf die x-Achse gefällten Lotes, so ist

$$\overline{OB} = x \quad \text{und} \quad \overline{PB} = y.$$

Ferner ist $\overline{OF} = \frac{p}{2}$ und $\overline{FP} = \overline{PL} = x + \frac{p}{2}$.

Außerdem ist $\overline{FB} = \overline{OB} - \overline{OF} = x - \frac{p}{2}$. Daraus folgt

$$y = \pm \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{2px}$$

oder

$$\boldsymbol{y^2 = 2px.}$$

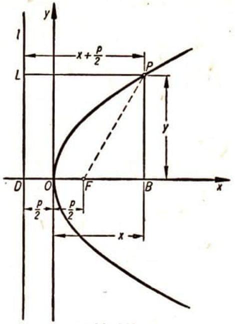

Abb. 121

Diese Gleichung bezeichnet man als **Scheitelgleichung der Parabel.** An ihr erkennt man:

1. Ist $x = 0$, so ist auch $y = 0$; die Parabel geht durch den Ursprung.
2. Für negative Werte von x ergibt sich kein Wert für y; die Parabel existiert nur für $x \geqq 0$.
3. Für jeden Wert von $x > 0$ erhält man zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werte von y; die Parabel liegt symmetrisch zur x-Achse.
4. Für $x \to \infty$ geht $y \to \pm\infty$.

Bei diesen Betrachtungen zu Punkt 2 bis 4 war $p > 0$ vorausgesetzt. Ist $p < 0$, so kommt man zu entsprechenden Ergebnissen. Die Parabel liegt dann im zweiten und dritten Quadranten.

Auch die Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 = 2py}$$

stellt eine Parabel in Scheitelpunktslage dar. Wir erkennen, daß in ihr die Variablen vertauscht sind. Geometrisch bedeutet das, daß die Parabel $y^2 = 2px$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt wurde. Die Parabel $x^2 = 2py$ liegt für $p > 0$ im ersten und zweiten Quadranten, für $p < 0$ im dritten und vierten Quadranten. Ihre Achse fällt mit der y-Achse zusammen.

Liegt der Scheitelpunkt der Parabel nicht im Ursprung, ist aber die Achse parallel zu einer der Koordinatenachsen, so kann man durch eine Parallelverschiebung die Parabel in Scheitelpunktslage bringen. An Stelle der Koordinaten x und y treten dann die Koordinaten $(x - c)$ und $(y - d)$. Die Parabelgleichung geht damit in die Form

$$\boldsymbol{(y - d)^2 = 2p\,(x - c)}$$

oder — entsprechend —

$$\boldsymbol{(x - c)^2 = 2p\,(y - d)}$$

über.

Gelten in der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

die Relationen $\quad A = 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0 \quad \text{und} \quad D \neq 0,$

so stellt die Gleichung eine Parabel dar.

Beweis:

Nach der getroffenen Voraussetzung gilt:

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$y^2 + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y + \frac{F}{B} = 0,$$

$$y^2 \qquad + \frac{E}{B}y \qquad = -\frac{D}{B}x - \frac{F}{B}.$$

Durch quadratische Ergänzung ergibt sich

$$y^2 + \frac{E}{B}y + \frac{E^2}{4B^2} = -\frac{D}{B}x - \frac{F}{B} + \frac{E^2}{4B^2},$$

$$\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 = -\frac{D}{B}\left(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4BD}\right).$$

Diese Gleichung ist aber die allgemeine Gleichung einer Parabel, deren Achse parallel zur x-Achse liegt.
Ebenso stellt die allgemeine quadratische Gleichung eine Parabel dar, wenn $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$ und $E \neq 0$ sind. Der Beweis wird entsprechend geführt. In diesem Fall liegt die Parabelachse parallel zur y-Achse.

Aufgaben

1. Es ist die Scheitelgleichung der Parabel zu bestimmen, bei der die Achse

a) die x-Achse und $2p = 5$, **b)** die x-Achse und $2p = 4{,}5$,
c) die x-Achse und $2p = -6$, **d)** die x-Achse und $2p = -10$,
e) die y-Achse und $2p = 4{,}67$, **f)** die y-Achse und $2p = 25$,
g) die y-Achse und $2p = -3{,}5$, **h)** die y-Achse und $2p = -12$ ist.

Die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichung der Leitlinie sind anzugeben.

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit

a) der Achse $y = +3$, der Abszisse des Scheitels $a = 2$ und dem Halbparameter $p = 4$;
b) der Achse $y = -5$, der Abszisse des Scheitels $a = 4$ und dem Halbparameter $p = 3{,}5$;
c) der Achse $x = +5$, der Ordinate des Scheitels $b = 3$ und dem Halbparameter $p = 2{,}2$;
d) der Achse $x = -3$, der Ordinate des Scheitels $b = -8$ und dem Halbparameter $p = 3{,}2$!

Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes an!

3. Die Parabel $y^2 = 2px$ soll durch den Punkt P_0 mit den Koordinaten

a) $(2;4)$ **b)** $(1{,}2;-3)$ **c)** $(4;4)$ **d)** $(4;-8)$
e) $(-4;2)$ **f)** $(2;25)$ **g)** $(2;3)$ **h)** $(-25;-10)$

gehen. Der Halbparameter ist zu bestimmen.

4. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel,

a) die durch den Punkt $(7;4)$ geht, die Achse $y = 8$ und die Scheitelabszisse $a = 3$ hat;
b) die durch den Punkt $(5;-5)$ geht, die Achse $y = +3$ und die Scheitelabszisse $a = -3$ hat;
c) die durch den Punkt $(-11;4)$ geht, die Achse $x = -5$ und die Scheitelordinate $b = -2$ hat;
d) die den Halbparameter $p = 5$, die Achse $y = 5$ und die Scheitelabszisse $a = 4$ hat.

Die Koordinaten des Brennpunktes sind anzugeben. Die Parabel ist zu konstruieren.

5. Es ist die Gleichung der Parabel zu bestimmen, deren Achse der x-Achse parallel ist und die durch die Punkte

a) $(-3;1)$, $(2;4)$, $(-6;-2)$ **b)** $(23;-5)$, $(3;-2)$, $(7;1)$

c) $(9;10)$, $(9;-2)$, $(3;4)$ **d)** $(7;2)$, $(7{,}4;4)$, $(17;12)$

geht.

Die Koordinaten des Brennpunktes sind anzugeben. Die Parabel ist zu konstruieren.

6. Es ist die Gleichung der Parabel zu bestimmen, deren Achse der y-Achse parallel ist und die durch die Punkte

a) $(-3;-2)$, $(3;1)$, $(9;10)$ **b)** $(-2;4)$, $(16;4)$, $(1;-1)$

geht.

10. Die Scheitelgleichung der Kegelschnitte

Die Mittelpunktsgleichungen von Ellipse und Hyperbel weisen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit auf. Dagegen läßt sich für die Parabel keine Mittelpunktsgleichung aufstellen. Es soll nun untersucht werden, ob sich für die Ellipse und die Hyperbel eine Darstellungsform finden läßt, die der Parabelgleichung entspricht. Diese Untersuchung werde zunächst an der Ellipse durchgeführt. Man transformiert die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

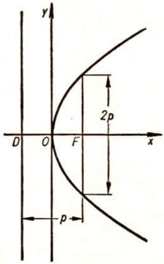

Abb. 122

durch Parallelverschiebung in Scheitelpunktslage (linker Scheitel im Nullpunkt) und erhält damit

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

oder — nach y^2 aufgelöst —

$$y^2=\frac{2b^2x}{a}-\frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck $\frac{b^2}{a}$ durch p, so erhält man

$$\boldsymbol{y^2=2px-\frac{p}{a}x^2}.$$

Daß die Festsetzung $\frac{b^2}{a}=p$ sinnvoll ist, ergibt sich aus der folgenden Betrachtung:

Auf Grund der Definition der Parabel ist die Sehne, die im Brennpunkt senkrecht auf der Achse steht, gleich $2p$ (Abb. 122). Errichtet man im Brennpunkt F_1 der Ellipse ebenfalls die Senkrechte und sind $P_{1;2}$ Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der Ellipse, so ist

$$\overline{F_1P_1}=y_1 \quad\text{und}\quad \overline{F_1P_2}=y_2.$$

Die Punkte $P_{1;2}$ haben die gleiche Abszisse $x_{1;2}=-e$. Setzen wir diesen Wert in die Ellipsengleichung $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ein, so erhalten wir

$$y_{1;2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2}.$$

Da aber $a^2-e^2=b^2$ ist, ergibt sich

$$y_1=\frac{b^2}{a}\quad\text{und}\quad y_2=-\frac{b^2}{a}.$$

Es ist also $2p$ auch bei der Ellipse die Länge der Sehne, die im Brennpunkt senkrecht auf der Achse steht (vgl. Abb. 123).

Die Gleichung des Kreises in Scheitellage ist

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Die Länge der im Mittelpunkt (Brennpunkt des Kreises) senkrecht auf der Achse stehenden Sehne ist $2r$. Demnach gilt $p = r$ und mithin

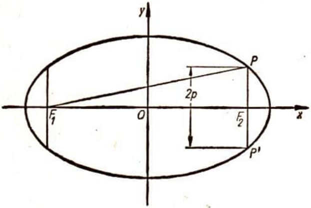

Abb. 123

$$y^2 = 2px - x^2.$$

Diese Gleichung zeigt uns wieder, daß der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist $\left(\text{mit } \frac{p}{a} = 1 \text{ und demnach } r = p = a.\right)$

Durch eine analoge Betrachtung findet man als Scheitelgleichung der Hyperbel (rechter Scheitel im Nullpunkt)

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Auch hier ist $2p$ die Länge der im Brennpunkt senkrecht stehenden Sehne, wie sich durch eine entsprechende Herleitung ergibt.

Wir erkennen, daß die Scheitelgleichungen aller Kegelschnitte auf dieselbe Grundform

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2$$

zurückgehen. Steht in diesem Ausdruck das negative Rechenzeichen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Ist $\frac{p}{a} = 0$, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. Für das positive Rechenzeichen ergibt sich eine Hyperbel. Man bezeichnet $2p$ als den Parameter des Kegelschnittes. Der bei der Einführung der Parabel verwendete Ausdruck Halbparameter für p findet damit seine Erklärung.

Aufgaben

1. Stellen Sie die Mittelpunkts- und die Scheitelgleichung der Ellipse auf, für die gegeben ist:

a) $a = 3,\quad b = 6,$ **b)** $b = 1{,}5,\quad p = 0{,}75,$
c) $a = 4,\quad p = 1,$ **d)** $a = 5,\quad e = 3.$

2. Stellen Sie die Mittelpunkts- und die Scheitelgleichung der Hyperbel auf, für die gegeben ist:

a) $b = 1{,}6,\quad p = 1{,}28,$ **b)** $a = 8,\quad e = 10,$
c) $a = 3{,}2,\quad p = 2{,}56,$ **d)** $e = 15{,}3,\quad b = 5{,}1.$

3. Die Mittelpunkts- und die Scheitelgleichung des Kreises mit

a) $r = 5,$ **b)** $r = 3{,}7,$ **c)** $r = 4{,}8,$ **d)** $r = 1$

sind aufzustellen.

4. In einem Kegelschnitt sei $a = p$. Es ist die Art des Kegelschnittes zu bestimmen.

5. Es sind die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ und der Kreis $x^2 + y^2 = e^2$ zum Schnitt zu bringen, wobei e die lineare Exzentrizität der Hyperbel sei.

11. Kegelschnitt und Gerade

a) Die Gleichung der Sekante

Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Soll durch zwei Punkte eines Kegelschnittes eine Sekante gelegt werden, so müssen diese beiden Punkte gegeben sein. Die Gleichung der Sekante kann dann als die Zweipunktegleichung der Geraden aufgestellt werden (vgl. Abschnitt I, 2d). Sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei Punkte eines Kegelschnittes, so ergibt sich also die Gleichung der Sekante zu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Diese Überlegung hat für alle Kegelschnitte Gültigkeit.

b) Die Gleichung der Tangente

Läßt man den Punkt P_2 gegen den Punkt P_1 gehen, so geht $x_2 \to x_1$ und $y_2 \to y_1$. Die Sekante durch P_1 und P_2 geht damit in eine Grenzlage über und wird somit zur Tangente (vgl. Teil A Infinitesimalrechnung, S. 17). Bei diesem Grenzübergang gehen Zähler und Nenner des Anstiegs gegen Null. Will man die Gleichung der Tangente aufstellen, so muß man für den Anstieg der Sekante einen Ausdruck finden, der den Grenzübergang ermöglicht.

1. Die Gleichung der Tangente an eine Ellipse

Soll an die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ die Tangente gelegt werden, so findet man deren Anstieg durch die folgende Überlegung:
Die Koordinaten des Punktes P_1 befriedigen die Gleichung der Ellipse; es gilt also

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Ist $P_2(x_2; y_2)$ der zweite Schnittpunkt einer Sekante durch P_1, so gilt entsprechend

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen erhält man

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0.$$

Wir formen diese Gleichung um:

$$\frac{1}{a^2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \frac{1}{b^2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0,$$

$$\frac{1}{b^2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -\frac{1}{a^2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Damit hat man für den Anstieg der Sekante einen Ausdruck gefunden, bei dem man den Grenzübergang vornehmen kann:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1}\left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right) = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Diesen Wert setzt man in die Sekantengleichung ein. Man erhält:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Damit ist die Gleichung der Tangente gefunden. Im allgemeinen formt man diese Gleichung um:

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = -b^2 x x_1 + b^2 x_1^2,$$
$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

Es ist

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2,$$

also folgt

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

2. Die Gleichung der Tangente an die Hyperbel

Auf dieselbe Weise läßt sich die Gleichung der Tangente an die Hyperbel herleiten. Es ist lediglich auf den Vorzeichenwechsel gegenüber der Ellipsengleichung zu achten. Man erhält auf diese Weise als Gleichung der Tangente:

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Wir erkennen: Die Struktur der Tangentengleichung entspricht bei Ellipse und Hyperbel der Struktur der betreffenden Kurvengleichung. Die bei den Kurvengleichungen festgestellte bemerkenswerte Ähnlichkeit trifft auch auf die Tangentengleichungen zu.

3. Die Gleichung der Tangente an die Parabel

Die Gleichung der Tangente an die Parabel erhält man durch eine analoge Betrachtung. Die Punkte P_1 und P_2 seien Punkte der Parabel. Es gelten also die Beziehungen

$$y_1^2 = 2 p x_1,$$
$$y_2^2 = 2 p x_2.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$y_2^2 - y_1^2 = 2 p (x_2 - x_1),$$
$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2 p (x_2 - x_1),$$
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 p}{y_2 + y_1}.$$

Nun wird der Grenzübergang vorgenommen:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{2 p}{y_2 + y_1} = \frac{p}{y_1}$$

Man setzt diesen Wert in die Sekantengleichung ein und erhält

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Dieser Ausdruck kann wie folgt umgeformt werden:

$$y y_1 - y_1^2 = px - px_1,$$

$$y y_1 = px - px_1 + y_1^2.$$

Wegen

$$y_1^2 = 2px_1$$

ergibt sich

$$y y_1 = px - px_1 + 2px_1,$$

also

$$\boldsymbol{yy_1 = p(x + x_1).}$$

Auch diese Tangentengleichung entspricht der Struktur der zugehörigen Kurvengleichung. Man kann diese nämlich in der Form $y \cdot y = p(x + x)$ schreiben.

4. Die Tangenten der Kegelschnitte bei Parallelverschiebung

Sind die Kegelschnitte derart parallel verschoben, daß die Transformation

$$x' = x - c \quad \text{und} \quad y' = y - d$$

durchzuführen ist, so nehmen die Tangentengleichungen die folgenden Formen an: für die Ellipse

$$\boldsymbol{\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} + \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1,}$$

für die Hyperbel

$$\boldsymbol{\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} - \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1,}$$

für die Parabel

$$\boldsymbol{(y-d)(y_1-d) = p(x + x_1 - 2c).}$$

5. Die von einem Punkte aus an einen Kegelschnitt gelegte Tangente

Die Gleichung der durch den beliebigen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gelegten Kegelschnittstangente findet man durch die folgende Überlegung (vgl. Abb. 124):

1. Die Koordinaten des Punktes P_0 müssen der Tangentengleichung des Kegelschnitts genügen.

2. Ferner müssen die Koordinaten des Berührungspunktes P_1 die Kurvengleichung befriedigen.

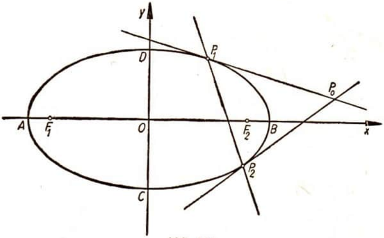

Abb. 124

Aus diesen beiden Bedingungen erhält man ein quadratisches Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, dessen Lösung die Koordinaten des Berührungspunktes ergibt. Hat das System keine Lösung, so gibt es von P_0 aus keine Tangente an die Kurve; hat das System eine Lösung, so existiert eine Tangente an die Kurve, das heißt, P_0 fällt mit P_1 zusammen und liegt auf der Kurve. Erhält man schließlich zwei Lösungen, so gibt es von P_0 aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt.

c) Die Berührungssekante

Unter der Berührungssekante versteht man die Gerade, die durch die Berührungspunkte zweier Tangenten desselben Kegelschnittes verläuft (vgl. Abb. 124). Sind die Tangenten parallel (was bei der Parabel ausgeschlossen ist), so ist der Abschnitt zwischen den beiden Tangenten, die Berührungssehne, ein Durchmesser des Kegelschnitts.

Die Gleichung der Berührungssekante erhält man, indem man die Berührungspunkte ermittelt und mit diesen Punkten die Zweipunktegleichung der Geraden aufstellt. Die Länge der Berührungssehne ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras zu

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

wenn $x_1; y_1$ und $x_2; y_2$ die Koordinaten der Berührungspunkte P_1 und P_2 sind.

Aufgaben

1. Es sind die Koordinaten der Schnittpunkte von Ellipse und Gerade zu bestimmen.

a)	$x^2 + 4y^2 = 16$	$3x - y + 2 = 0$
b)	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$	$10x - 9y - 75 = 0$
c)	$5x^2 + 2y^2 = 40$	$x - y - 10 = 0$
d)	$25x^2 + 36y^2 = 900$	$5x + 6y - 30 = 0$
e)	$64x^2 + 36y^2 = 2304$	$4x - 3y - 24 = 0$
f)	$16x^2 + 25y^2 = 400$	$4x - 5y - 4 = 0$
g)	$4x^2 + y^2 = 100$	$2x - y - 2 = 0$
h)	$9x^2 + 25y^2 = 900$	$3x + 35y - 150 = 0$

2. Es sind die Schnittpunkte der Ellipse $25x^2 + 49y^2 + 150x - 196y - 799 = 0$ mit den Koordinatenachsen zu bestimmen.

3. Die Schnittpunkte der Ellipse $9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 9 = 0$ mit der Geraden $3x - 2y - 3 = 0$ sind zu bestimmen.

4. Geben Sie die Bedingungen an, für die die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $Ax + By + C = 0$ zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam hat!

5. Bestimmen Sie für die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 64$ die Länge der Sehne, die durch die Mittelpunkte der positiven Halbachsen geht!

6. Es ist zu untersuchen, welche Lage die Ellipse und die Gerade zueinander haben.

a)	$36x^2 + 100y^2 = 25$	$18x + 40y - 25 = 0$
b)	$3x^2 + 5y^2 = 30$	$x - 5y + 5 = 0$
c)	$25x^2 + 16y^2 = 400$	$5x + 3y - 25 = 0$

7. Für die Ellipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$ sind die Gleichungen der Tangenten zu bestimmen, die den Sehnen durch die Scheitelpunkte parallel laufen.

8. Die Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ und die Gerade $x - y = b$ sind gegeben. Bestimmen Sie den Wert b so, daß die Gerade die Ellipse berührt!

9. An die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$ sind in den Punkten $P_1(8; > 0)$ und $P_2(6; > 0)$ die Tangenten gelegt. Es sind deren Schnittpunkt P_3 und der Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zu bestimmen.

10. Die Schnittwinkel der folgenden Kurven sind zu bestimmen.

a) $25y^2 - 48x = 0$	$9x^2 + 25y^2 = 225$
b) $9x^2 + 4y^2 = 100$	$8x^2 + 9y^2 = 176$
c) $9y^2 = 16x$	$x^2 + 9y^2 = 225$
d) $x^2 + y^2 - 7y + 6 = 0$	$x^2 + 4y^2 = 20$
e) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$	$5x^2 + y^2 = 36$

11. Die Gleichungen der Tangenten von $P_0\,(5\,;8)$ aus an die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sind aufzustellen.

12. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten, die von $P_0(-1\,;6)$ aus an die Ellipse $9x^2 + 25y^2 - 72x + 150y + 144 = 0$ gezogen werden können!

13. Von dem Punkt $\left(16\frac{2}{3}\,;0\right)$ aus sind an die Ellipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1$ die beiden **Tangenten** gezogen. Ihr Schnittwinkel ist zu berechnen.

14. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Hyperbel mit der Geraden sind zu bestimmen.

a) $x^2 - 4y^2 = 144$	$11x - 14y - 108 = 0$
b) $x^2 - y^2 = 64$	$9x - 7y - 48 = 0$
c) $9x^2 - 4y^2 = 36$	$6x - 3y - 8 = 0$
d) $25x^2 - 9y^2 = 225$	$25x + 12y - 45 = 0$
e) $x^2 - 4y^2 = 4$	$2x - y + 3 = 0$
f) $9x^2 - 25y^2 = 225$	$24x + 35y + 60 = 0$

15. Untersuchen Sie, welche Lage Hyperbel und Gerade zueinander haben!

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$	$\frac{x}{10} + \frac{y}{6} + 1 = 0$
b) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$	$\frac{x}{9} - \frac{y}{12} + 1 = 0$
c) $x^2 - y^2 = 64$	$5x - 3y + 32 = 0$
d) $16x^2 - 5y^2 = 80$	$4x - y + 1 = 0$

16. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$ mit der Geraden $x + y - 2 = 0$!

17. Die Schnittpunkte der Hyperbel $16x^2 - 25y^2 + 64x - 336 = 0$ mit der x-Achse sind zu ermitteln. Untersuchen Sie auch die Lage der Hyperbel zur y-Achse!

18. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel $\frac{(x-3)^2}{6} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$ mit der Geraden $20x - 21y - 162 = 0$!

19. Zu bestimmen sind die Schnittpunkte der Hyperbel $18x^2 - y^2 + 12x = 0$ mit der Geraden $3x - y - 6 = 0$.

20. Welches sind die Bedingungen für r und s, für die die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$ zwei, einen oder keinen Schnittpunkt hat?

21. Bestimmen Sie für die Hyperbel $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ die Gleichungen der Tangenten, die parallel der Geraden $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ laufen!

22. Bestimmen Sie für den Punkt $(-10; >0)$ der Hyperbel $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ die Gleichungen der Tangente!

23. Bestimmen Sie für die Hyperbel $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$ die Gleichung der Tangenten, die auf der Geraden $24x + 25y - 75 = 0$ senkrecht stehen!

24. Schnittpunkte und Schnittwinkel der Kurven sind zu berechnen.

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ $\quad 5y^2 = 12x$ $\qquad$ **b)** $4x^2 - 9y^2 = 36$ $\quad 5x^2 = 24y$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ **d)** $x^2 - 10y^2 = 15$ $\quad 4x^2 + y^2 = 101$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ $\quad 9x^2 + 9y^2 = 25$ $\qquad$ **f)** $x^2 + y^2 = 25$ $\quad y = x$

Berechnen Sie die Länge der gemeinsamen Sehne!

25. Die gleichseitige Hyperbel mit der Achse $2a$ und der Kreis mit dem Radius $2a$ sind konzentrisch. Schnittpunkte und Schnittwinkel sind zu bestimmen!

26. Die Gleichungen der Asymptoten sind für die folgenden Hyperbeln zu bestimmen.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad$ **b)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad$ **c)** $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{36} = 1$ $\quad$ **d)** $25x^2 - 144y^2 = 3600$

27. Die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden sind zu bestimmen!

a) $y^2 = 6x$ $\quad 6x - y - 12 = 0$ $\qquad$ **b)** $y^2 = 4x$ $\quad 3x - 5y + 25 = 0$

c) $y^2 = 18x$ $\quad 3x - 4y + 24 = 0$ $\qquad$ **d)** $y^2 = 18x$ $\quad 3x - 4y + 16 = 0$

e) $y^2 = 24x$ $\quad 6x - 5y + 25 = 0$ $\qquad$ **f)** $2x^2 + 16x + y + 34 = 0$ $\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{15} + 1 = 0$

In den folgenden Aufgaben sei A der Scheitelpunkt der Parabel.

g) $A(7; -14)$, $F(7; -13{,}75)$ $\quad x + y - 13 = 0$

h) $A(12; -6)$, $F(9; -6)$ $\quad 2x + 3y - 18 = 0$

28. Die Lage der Geraden zur Parabel ist zu untersuchen.

a) $y^2 = 14x$ $\quad x - y + 8 = 0$ $\qquad$ **b)** $y^2 = 12x$ $\quad 3x - 2y + 4 = 0$

c) $y^2 = 12x$ $\quad 2x + y = 0$ $\qquad$ **d)** $y^2 = 5x$ $\quad 5x - 12y + 36 = 0$

e) $x^2 = 14y$ $\quad 4x + 8y + 7 = 0$ $\qquad$ **f)** $2x^2 = 11y$ $\quad x + 2y + 4 = 0$

29. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Tangente an die Parabel $y^2 = 16x$, die der Geraden

a) $x - 2y - 14 = 0$, $\quad$ **b)** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$, $\quad$ **c)** $x + 2y - 4 = 0$

parallel läuft!

30. Die Gleichung der im Punkt P_1 an die Parabel gelegten Tangente ist zu bestimmen.

a) $P_1(2{,}5; -5)$ $\quad y^2 = 10x$ $\qquad$ **b)** $P_1(1{,}75; 3{,}5)$ $\quad y^2 = 7x$

c) $P_1(1{,}5; 3)$ $\quad y^2 = 6x$ $\qquad$ **d)** $P_1(5; <0)$ $\quad (y-5)^2 = 7(x+2)$

e) $P_1(-8; y_1)$ $\quad y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$

f) $P_1(x_1; 1{,}375)$ $\quad x^2 - 6x - 10y - 11 = 0$

31. Es sind die Tangenten vom Punkte P_1 aus an die Parabel zu legen.

a) $P_1(3; 5)$ $\quad y = \sqrt{6x}$ $\qquad$ **b)** $P_1(-1; -1)$, $\quad y^2 = x$

c) $P_1(-2{,}75; -3)$ $\quad x^2 = 3y + 3$ $\qquad$ **d)** $P_1(1{,}4; 1{,}4)$ $\quad y^2 + 3y = x + 3$

32. Schnittpunkt und Schnittwinkel der in den Punkten P_1 und P_2 an die Parabel gelegten Tangenten sind zu bestimmen.

a) $P_1(2; > 0)$	$P_2(8; > 0)$	$y^2 = 18x$
b) $P_1(4; < 0)$	$P_2(16; > 0)$	$4y^2 - 25x = 0$
c) $P_1(> 0; 5)$	$P_2(< 0; 0{,}8)$	$5x^2 - 16y = 0.$

33. Die Abbildung 125 zeigt die Skizze für eine Kanalbrücke mit einigen Maßangaben. Der Bogen stellt eine Parabel dar.
Es sollen eine Zeichnung angefertigt und die Längen der Streben berechnet werden.

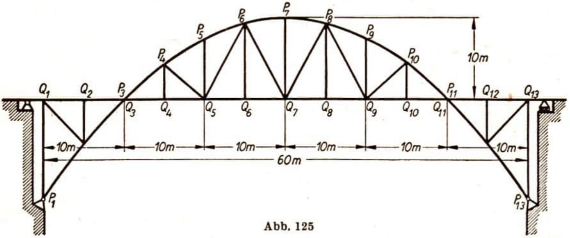

Abb. 125

Anleitung: Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem (welche ist die günstigste Lage?), stellen Sie dann die Gleichung der Parabel auf!

12. Herleitung optischer Gesetze mit Hilfe der analytischen Geometrie

Bei der Untersuchung des Strahlenganges am parabolischen Hohlspiegel geht man in der Regel von parallel einfallenden Strahlen aus. Wir wollen jedoch auf analytischem Wege untersuchen, wie Brennstrahlen bei einem parabolischen Hohlspiegel reflektiert werden.

Der Achsenschnitt eines solchen Spiegels genügt der Gleichung $y^2 = 2px$. Der Brennpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, der Reflexionspunkt sei $P(x; y)$.

Der Anstieg der Tangente ist $m_1 = \frac{p}{y}$, der Anstieg des Brennstrahls $m_2 = \frac{y}{x - \frac{p}{2}} = \frac{2y}{2x - p}$.

Wir bezeichnen den Schnittwinkel mit φ (Abb. 126).

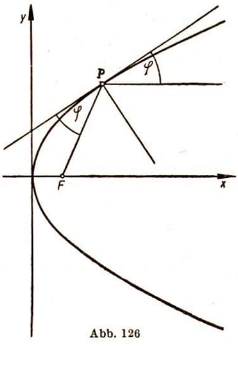

Abb. 126

Es ist
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{2y}{2x - p} - \frac{p}{y}}{1 + \frac{2py}{(2x - p)y}}$$
$$= \frac{\frac{2y^2 - 2px + p^2}{(2x - p)y}}{\frac{(2x - p)y + 2py}{(2x - p)y}}.$$

Dabei müssen die Stellen $x = 0$ und $x = \frac{p}{2}$ zunächst ausgeschlossen werden. Unter diesen Einschränkungen folgt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2y^2 - 2px + p^2}{2xy - py + 2py} = \frac{2y^2 - 2px + p^2}{2xy + py}.$$

Nun ist $y^2 = 2px$, also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4px - 2px + p^2}{2xy + py} = \frac{2px + p^2}{2xy + py} = \frac{p(2x + p)}{y(2x + p)} = \frac{p}{y}.$$

(Es ist stets $x > 0$, wenn $p > 0$ ist und $x < 0$, wenn $p < 0$ ist. Daher gilt stets $2x + p \neq 0$).

Will man nun den Anstieg m_3 des reflektierten Strahles ermitteln, der die Tangente unter dem gleichen Winkel φ schneidet (Abb. 126), so setzt man in die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}$$

den Wert $\frac{p}{y}$ für $\operatorname{tg}\varphi$ und den Wert $\frac{p}{y} = m_1$ als Anstieg der Tangente ein. Löst man die Gleichung nach m_3 auf, so erhält man damit den gesuchten Anstieg:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\, m_1 m_3 = m_1 - m_3$$

$$m_3 + \operatorname{tg}\varphi \cdot m_1 m_3 = m_1 - \operatorname{tg}\varphi$$

$$m_3(1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot m_1) = m_1 - \operatorname{tg}\varphi$$

$$m_3\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = \frac{p}{y} - \frac{p}{y} = 0.$$

Da $1 + \frac{p^2}{y^2} \geqq 1$, also von Null verschieden ist, ergibt sich $m_3 = 0$.
Der Brennstrahl wird also parallel zur x-Achse reflektiert.

Ist $x = 0$, so ist P der Scheitelpunkt der Parabel. Die Tangente steht im Scheitelpunkt senkrecht auf der Achse. Der Brennstrahl fällt mit der Achse zusammen und wird in sich selbst reflektiert. Ist $x = \frac{p}{2}$, so ist $y = p$, und der Brennstrahl steht senkrecht auf der Achse. Für den Anstieg der Tangente ergibt sich $m_1 = 1$. Demnach schneidet die Tangente den Brennstrahl unter einem Winkel von 45°. Auch in diesem Fall wird also der Brennstrahl parallel zur Achse reflektiert.

Damit haben wir allgemein bewiesen: **Beim parabolischen Hohlspiegel werden vom Brennpunkt ausgehende Strahlen parallel zur Achse des Spiegels reflektiert.**

Dieses auf analytischem Wege gewonnene Ergebnis stimmt mit den in der Physik experimentell gewonnenen Erkenntnissen überein.

Aufgaben

1. Es ist nachzuweisen, daß beim sphärischen Hohlspiegel alle Mittelpunktsstrahlen in sich selbst reflektiert werden.

2. In der Physik wird als Brennpunkt des sphärischen Hohlspiegels der Halbierungspunkt zwischen Scheitelpunkt und Mittelpunkt des Hohlspiegels bezeichnet.
Der Winkel zwischen Achse und Radius zum Reflexionspunkt sei φ. Es ist nachzuweisen, daß bei parallel einfallenden Strahlen der Abstand zwischen dem Schnittpunkt des reflektierten Strahls mit der Achse und dem Brennpunkt eine Funktion des Winkels φ ist. Für welche Winkel φ ist der Abstand kleiner als 0,001 r, so daß er praktisch vernachlässigt werden kann?

   Anleitung: Es ist die Gleichung des reflektierten Strahls aufzustellen und der Schnittpunkt mit der Spiegelachse zu bestimmen. Die Abszisse des Reflexionspunktes ist sodann trigonometrisch auszudrücken. Für x gilt nach der gegebenen Bedingung $x_b - h \leqq x \leqq x_b + h$, wobei x_b die Abszisse des Brennpunktes und $h = 0{,}001 r$ ist.

IV. Polarkoordinaten

13. Zusammenhang zwischen Cartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

Bisher wurden die Kegelschnitte in einem rechtwinkligen xy-Koordinatensystem (Cartesisches Koordinatensystem) dargestellt. Es gibt jedoch noch andere Möglichkeiten zur Festlegung von Punkten in der Ebene. Zum Beispiel ist jeder vom Ursprung verschiedene Punkt in der Ebene eindeutig bestimmt durch Angabe seines Abstandes von einem festen Punkt, dem Ursprung des Systems, und der Richtung, unter der er von diesem Punkt aus gesehen wird. Zur Festlegung der Richtung benötigt man eine Bezugsgerade, die durch den Ursprung geht. Ein derartiges System nennt man **Polarkoordinatensystem** (Abb. 127), den Ursprung O **Pol** des Systems und die Bezugsgerade **Achse** des Systems. Ist P ein Punkt der Ebene, so heißt $\overrightarrow{OP}$ **Radiusvektor** des Punktes P, der Winkel zwischen Radiusvektor und Achse **Anomalie** oder **Abweichung**. Radiusvektor und Anomalie sind die Polarkoordinaten. Zur Festlegung eines solchen Polarkoordinatensystems treffen wir die folgenden Festsetzungen:

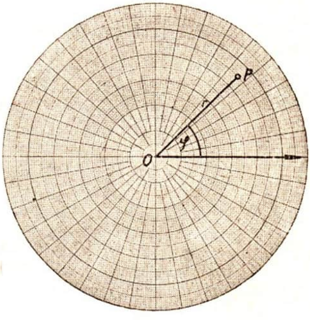

Abb. 127

Der Pol liege im Ursprung eines rechtwinkligen xy-Koordinatensystems, die Achse falle mit der positiven x-Achse zusammen, die Anomalie werde im positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeiger) im Bogenmaß gemessen. Wir bezeichnen den Radiusvektor mit r und die Anomalie mit φ. Dann bestehen zwischen den Cartesischen Koordinaten $x; y$ des Punktes P ($P \neq O$) und den Polarkoordinaten $\varphi; r$ desselben

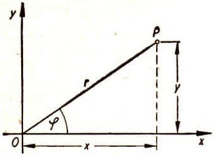

Abb. 128

Punktes P die folgenden Beziehungen (vgl. Abb. 128):

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

oder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und, da $\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ ist,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}.$$

Diese Beziehungen ermöglichen die Umrechnung Cartesischer Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt.

Aufgaben

1. Transformieren Sie die folgenden Punkte von einem Cartesischen Koordinatensystem in ein Polarkoordinatensystem!

   a) $P(3;4)$ b) $P(7;2)$ c) $P(-3;5)$ d) $P(2{,}5;-1{,}8)$ e) $P(-0{,}75;-0{,}5)$

2. Übertragen Sie die folgenden Punkte von einem Polarkoordinatensystem in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

   a) $P\left(\frac{\pi}{2};5\right)$ b) $P\left(\frac{\pi}{4};10\right)$ c) $P\left(\frac{\pi}{2};7\right)$ d) $P(0;3)$.

14. Die Geradengleichung in Polarkoordinaten

Gegeben sei eine Gerade in allgemeiner Lage in einem Polarkoordinatensystem. Ihr Abstand vom Ursprung sei d, der Winkel zwischen der Achse des Systems und dem vom Ursprung auf die Gerade gefällten Lote sei β. Ist P ein beliebiger Punkt der Geraden, $\overline{OP} = r$ und φ der Winkel zwischen der Achse und r, so gilt

$$r = \frac{d}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

Da φ als Variable größer als β werden kann, ist es möglich, daß die Differenz $(\beta - \varphi)$ negativ wird. Dies bleibt aber ohne Einfluß auf die Gleichung, da stets $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ist.

Wird φ als die unabhängige Variable angenommen, so ist r eindeutig bestimmt, und es gilt für den Definitionsbereich

$$-\frac{\pi}{2} < (\beta - \varphi) < +\frac{\pi}{2}.$$

Für $(\beta - \varphi) \to \pm\frac{\pi}{2}$ geht $\cos(\beta - \varphi) \to 0$ und mithin $r \to \infty$. Für $(\beta - \varphi) < -\frac{\pi}{2}$ und $(\beta - \varphi) > +\frac{\pi}{2}$ ist $\cos(\beta - \varphi)$ negativ, das heißt, r wird negativ. Geometrisch hat dies keinen Sinn; analytisch bedeutet es, daß die Richtung von r umgekehrt wird.

Die Gleichung $r = \frac{d}{\cos(\beta - \varphi)}$ kann auch in der Form $r \cdot \cos(\beta - \varphi) = d$ geschrieben werden. Diese Form ist auch sinnvoll für den Spezialfall, daß die Gerade durch den Ursprung verläuft, das heißt also, daß $d = 0$ ist. Es gilt dann

$$r \cos(\beta - \varphi) = 0.$$

Diese Relation hat nur Gültigkeit für $\cos(\beta - \varphi) = 0$ und $r \neq 0$ ($r = 0$ ist ausgeschlossen — vgl. Abschnitt IV, 13). Das bedeutet aber, daß

$$\beta - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\varphi = \beta \mp \frac{\pi}{2}$$

ist. Für diese Werte kann r jeden Wert annehmen. Die Gleichung der Geraden durch den Ursprung ist daher

$$\varphi = \beta \mp \frac{\pi}{2}$$

oder — allgemeiner —

$$\varphi = c,$$

wobei c eine Konstante, der Winkel zwischen der Geraden und der Achse des Systems, ist.

15. Die Kegelschnittsgleichungen in Polarkoordinaten

Gesucht sei der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen der Abstand von einem gegebenen Punkt F_1 zum Abstand von einer gegebenen Geraden l in einem festen, gegebenen Verhältnis $\varepsilon \geqq 0$ steht. Wir fällen von F_1 auf l das Lot. Der Fußpunkt sei L. Die Verlängerung von $\overline{LF_1}$ über F_1 hinaus sei die Achse, $F_1 = O$ der Pol eines Polarkoordinatensystems. Ist P ein Punkt auf dem gesuchten geometrischen Ort, so ist $\overline{PF_1} = \overline{PO} = r$ der Radiusvektor. Die Abweichung ist φ. Ferner bezeichnen wir mit L_1 den Fußpunkt des von P auf l und mit Q den Fußpunkt des von P auf die Achse gefällten Lotes (vgl. Abb. 129).

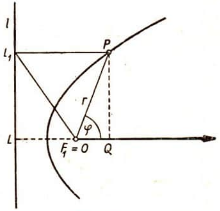

Abb. 129

Auf Grund der Definition des geometrischen Ortes gilt

$$\varepsilon = \frac{r}{\overline{PL_1}} = \frac{r}{\overline{LF_1} + \overline{F_1Q}} = \frac{r}{\overline{LF_1} + r\cos\varphi},$$

$$\overline{LF_1}\,\varepsilon + \varepsilon\, r \cos\varphi = r.$$

Demnach gilt

$$\overline{LF_1}\,\varepsilon = r\,(1 - \varepsilon\cos\varphi).$$

Ist $\varepsilon \cos\varphi \neq 1$, so gilt

$$r = \frac{\overline{LF_1}\,\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Bezeichnet man nun F_1 als den Brennpunkt des geometrischen Ortes und definiert man den Halbparameter p des geometrischen Ortes analog zu den Kegelschnitten als die halbe Länge der im Brennpunkt senkrecht auf der Achse stehenden Sehne, so ist r für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{oder für } \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$ gleich p. Für diese Werte von φ wird $\cos\varphi = 0$.

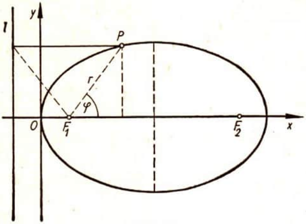

Abb. 130

Es gilt demnach

$$p = r = \overline{LF_1}\,\varepsilon.$$

Man kann also die Gleichung $r = \frac{\overline{LF_1}\,\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ in der Form

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

schreiben.

Wir wollen nunmehr die Gleichung $r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ in ein rechtwinkliges xy-Koordinatensystem transformieren, dessen x-Achse mit der Achse des Polarkoordinatensystems zusammenfällt und dessen Ursprung ein Schnittpunkt des geometrischen Ortes mit der Achse ist (Abb. 130). Zu diesem Zwecke ermitteln wir zunächst die Schnittpunkte. Für $\varphi = \pi$ erhalten wir $\cos\varphi = -1$ und mithin $r = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Da $\varepsilon \geqq 0$ vorausgesetzt war, existiert dieser Wert für r immer, welchen zulässigen Wert die Größe ε auch annimmt. Für $\varphi = 0$ dagegen ergibt sich $\cos\varphi = 1$; wir sehen, daß bei $\varepsilon = 1$ kein Radiusvektor für $\varphi = 0$ existiert.

Nunmehr transformieren wir die Gleichung: Es ist

$$x - \frac{p}{1+\varepsilon} = r\cos\varphi \qquad \text{oder} \qquad \cos\varphi = \frac{x - \frac{p}{1+\varepsilon}}{r}.$$

Daraus folgt

$$r = \frac{p}{1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right)},$$

$$r - \varepsilon\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right) = p$$

oder

$$r = p + \varepsilon\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right).$$

Quadrieren wir die Gleichung, so erhalten wir

$$r^2 = p^2 + 2p\varepsilon\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Ferner ist auf Grund des pythagoreischen Lehrsatzes

$$y^2 = r^2 - \left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2,$$

wobei beachtet werden muß, daß r hier keine Konstante, sondern eine von x abhängige Variable ist.

Durch Einsetzen ergibt sich

$$y^2 = p^2 + 2p\varepsilon\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Bringt man die rechte Seite auf den Nenner $(1+\varepsilon)^2$, so erhält man:

$$y^2 = \frac{p^2(1+\varepsilon)^2 + 2p\varepsilon(x+\varepsilon x - p)(1+\varepsilon) + \varepsilon^2(x+\varepsilon x-p)^2 - (x+\varepsilon x - p)^2}{(1+\varepsilon)^2},$$

$$y^2 = \frac{p^2(1+2\varepsilon+\varepsilon^2) + 2p\varepsilon(x+\varepsilon x - p + \varepsilon x + \varepsilon^2 x - \varepsilon p)}{(1+\varepsilon)^2}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2(x^2+\varepsilon^2x^2+p^2+2\varepsilon x^2 - 2\varepsilon p x - 2px) - (x^2+\varepsilon^2x^2+p^2+2\varepsilon x^2 - 2\varepsilon p x - 2px)}{(1+\varepsilon)^2},$$

$$y^2 = \frac{p^2 + 2\varepsilon p^2 + \varepsilon^2p^2 + 2\varepsilon p x + 2\varepsilon^2 p x - 2\varepsilon p^2 + 2\varepsilon^2 p x + 2\varepsilon^3 p x - 2\varepsilon^2 p^2 + \varepsilon^2 x^2 + \varepsilon^4 x^2}{(1+\varepsilon)^2}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2p^2 + 2\varepsilon^3x^2 - 2\varepsilon^3 p x - 2\varepsilon^2 p x - x^2 - \varepsilon^2x^2 - p^2 - 2\varepsilon x^2 + 2\varepsilon p x + 2px}{(1+\varepsilon)^2},$$

$$y^2 = 2px\cdot\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} + x^2\cdot\frac{\varepsilon^4+2\varepsilon^3-2\varepsilon-1}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Nun ist $\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} = 1$ und

$$\frac{\varepsilon^4+2\varepsilon^3-2\varepsilon-1}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} = (\varepsilon^2-1) = -(1-\varepsilon^2).$$

Somit ergibt sich schließlich

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$-(1-\varepsilon^2) = \mp\frac{p}{a},$$

so erkennen wir, daß die Gleichung

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$$

mit der in dem Abschnitt III, 10 hergeleiteten Gleichung

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2$$

identisch ist. Aus $-(1-\varepsilon^2) = \mp\frac{p}{a}$ folgt dann

$$-1+\varepsilon^2 = \mp\frac{p}{a}, \qquad \varepsilon^2 = 1\mp\frac{p}{a}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1\mp\frac{p}{a}}.$$

Wegen $\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$ ergibt sich

$$\varepsilon = \sqrt{1\mp\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2\mp b^2}{a^2}}.$$

Nun ist $a^2 \mp b^2 = e^2$. Also gilt

$$\varepsilon = \frac{e}{a},$$

wobei das positive Vorzeichen der Wurzel zu wählen ist, da $\varepsilon \geqq 0$ vorausgesetzt ist. Gilt unter der Wurzel das negative Rechenzeichen, das heißt also, ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so ist $\varepsilon < 1$. Dabei ist $\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$ nach Definition stets kleiner als 1, da $a > b$ vorausgesetzt war. Für den Kreis, also $\frac{b}{a} = 1$, ist $\varepsilon = 0$. Gilt das positive Rechenzeichen, ist also der Kegelschnitt eine Hyperbel, so ist $\varepsilon > 1$. Strebt $\frac{p}{a} \to 0$, liegt also eine Parabel vor, so gilt $\varepsilon = 1$. Wir erkennen daran, daß in der allgemeinen Kegelschnittsgleichung

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

der Wert von ε für die Art des Kegelschnittes entscheidend ist. Man nennt ε die **numerische Exzentrizität** des Kegelschnitts.

Da wir die Scheitelgleichung der Kegelschnitte in Cartesischen Koordinaten aus der Gleichung

$$\boldsymbol{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}}$$

hergeleitet haben, ist letztere die Gleichung eines Kegelschnittes in Polarkoordinaten. Wir bezeichnen sie als **Polargleichung der Kegelschnitte.** Ein Kegelschnitt läßt sich demnach auch definieren als der geometrische Ort aller der Punkte, bei denen das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt (einem Brennpunkt) und einer festen Geraden (der zugehörigen Leitlinie) den konstanten Wert ε hat.

Aufgaben

1. Die Art der folgenden Kegelschnitte ist zu ermitteln.

a) $r = \frac{26 \cos \varphi}{1 - 1{,}5 \cos^2 \varphi}$ **b)** $r = \frac{\cos \varphi}{3 - 2 \cos^2 \varphi}$ **c)** $r = 6 \cos \varphi$

d) $r = 6 \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}$ **e)** $r^2 + 2r \cos \varphi - 8 = 0$ **f)** $r^2 \sin^2 \varphi - r(8 \sin \varphi + 6 \cos \varphi) + 28 = 0$

Anleitung: Transformieren Sie zunächst die Kurven in ein Cartesisches Koordinatensystem!

2. Die Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 1600$ ist in Polarkoordinaten zu transformieren.

Anleitung: Verschieben Sie zunächst die Ellipse in Scheitellage und ermitteln Sie dann p und ε!

3. Der Kegelschnitt $r = \frac{2}{1 + 0{,}5 \cos \varphi}$ ist in Cartesische Koordinaten zu transformieren.

4. Der Kegelschnitt $r = \frac{3}{1 + 2 \cos \varphi}$ ist in einem rechtwinkligen $x\,y$-Koordinatensystem in Mittelpunktslage darzustellen.

5. Gegeben seien eine Gerade g und auf ihr ein Punkt O. Gesucht ist der geometrische Ort aller der Punkte P, bei denen $\overline{PO}$ gleich dem Bogen zwischen g und der Geraden durch P und O ist. Der geometrische Ort ist

a) in Cartesischen Koordinaten,

b) in Polarkoordinaten

darzustellen. Welche Darstellung ist einfacher?

c) Es sind einige spezielle Punkte des geometrischen Ortes in den Koordinatensystemen festzulegen. Die Kurve ist näherungsweise zu zeichnen. Sie heißt Archimedische Spirale.

C. Kombinatorik

I. Einführung in die Kombinatorik

Wir wollen zunächst an einigen Beispielen erläutern, um welches Teilgebiet der Mathematik es sich bei der Kombinatorik handelt.

1. Beispiel:

In welchen voneinander verschiedenen Anordnungen können sich drei Personen A, B und C nebeneinander aufstellen?

Zwei Personen A und B können in der Reihenfolge oder Anordnung AB oder BA stehen. Von drei Personen kann jede einmal an erster Stelle stehen, während die beiden anderen ihre Stellung je einmal wechseln können. Damit ergeben sich insgesamt die folgenden 6 Anordnungen:

$$\begin{array}{lll} A\,B\,C & B\,A\,C & C\,A\,B \\ A\,C\,B & B\,C\,A & C\,B\,A. \end{array}$$

2. Beispiel:

In welchen verschiedenen Verbindungen können sich fünf Personen A, B, C, D, E in Gruppen zu je drei Personen aufstellen, wenn auf ihre Reihenfolge keine Rücksicht genommen wird?

Es ergeben sich folgende 10 Verbindungen:

$$\begin{array}{llll} A\,B\,C & A\,C\,D & B\,C\,D & C\,D\,E. \\ A\,B\,D & A\,C\,E & B\,C\,E & \\ A\,B\,E & A\,D\,E & B\,D\,E & \end{array}$$

3. Beispiel:

In welchen voneinander verschiedenen Reihenfolgen (Anordnungen) können sich fünf Personen A, B, C, D, E in Gruppen zu je drei Personen aufstellen?

Mit A an erster Stelle finden wir 12 Aufstellungen

$$\begin{array}{lll} A\,B\,C & A\,B\,E & A\,C\,E \\ A\,C\,B & A\,E\,B & A\,E\,C \\ A\,B\,D & A\,C\,D & A\,D\,E \\ A\,D\,B & A\,D\,C & A\,E\,D \end{array}$$

und entsprechend je 12 Aufstellungen mit B, C, D bzw. E an erster Stelle, also insgesamt 60 Aufstellungen.

In jedem der Beispiele ist nach der Anzahl der verschiedenen Zusammenstellungen gefragt, die sich nach bestimmten, jedoch von Fall zu Fall wechselnden Bedingungen bilden lassen. Mit Hilfe der Kombinatorik kann man aus einer wohlabgegrenzten

Menge von Dingen die Anzahl aller Zusammenstellungen von Dingen dieser Menge finden, die nach gewissen Voraussetzungen ausführbar oder wenigstens denkbar sind. Dabei können die Voraussetzungen stets genau angegeben werden, aber von Fall zu Fall verschieden sein. Die Anzahl der Zusammenstellungen soll durch einen möglichst einfachen mathematischen Ausdruck dargestellt werden. Zuweilen muß jedoch noch der Weg angegeben werden, auf dem die möglichen Zusammenstellungen gebildet und gesetzmäßig geordnet werden können.

Erklärung 1: Jedes einzelne der Dinge, die in einer Aufgabe der Kombinatorik betrachtet werden, heißt **Element.**

Die Elemente werden durch Buchstaben (A, B, . . ., a, b, . . .) oder durch Ziffern (1, 2, . . ., 9, 0) bezeichnet.

Erklärung 2: Zusammenstellungen, z. B. aus den Elementen $a\ b\ c\ d$, werden als verschieden angesehen, wenn sie

a) nicht genau die gleichen Elemente enthalten (z. B. $a\ b\ d$ und $a\ b\ c$);

b) gleiche Elemente enthalten, diese aber nicht in gleicher Anzahl (z. B. $a\ a\ b\ c\ c$ und $a\ b\ b\ c\ c$).

Erklärung 3: Zusammenstellungen (z. B. aus den Elementen $a\ b\ c\ d$), die aus den gleichen Elementen bei gleicher Häufigkeit, aber verschiedener Reihenfolge dieser Elemente bestehen (z. B. $a\ b\ b\ c$ und $b\ a\ c\ b$), gelten als gleich, wenn man die Anordnung nicht berücksichtigt, als ungleich, wenn man die Anordnung berücksichtigt (vgl. Beispiel 3).

1. Permutationen

Erklärung: Ist eine endliche Anzahl von Elementen gegeben, so nennt man jede Zusammenstellung sämtlicher gegebener Elemente in irgendeiner Anordnung eine **Permutation** der gegebenen Elemente. Zwei verschiedene Permutationen der gleichen Elemente unterscheiden sich durch die Anordnungen der Elemente.

Im Einführungsbeispiel 1 handelt es sich um Permutationen.

1. Grundaufgabe:

Es ist die Anzahl der Permutationen von n voneinander verschiedenen Elementen zu bestimmen.

Ist ein Element 1 vorhanden, so gibt es nur eine Anordnung. Ihre Anzahl ist somit

$$1.$$

Sind zwei Elemente 1 und 2 gegeben, so gibt es die Permutationen

$$1\,2 \quad \text{und} \quad 2\,1.$$

Ihre Anzahl beträgt

$$2 = 1 \cdot 2.$$

Sind drei Elemente 1, 2 und 3 gegeben, so gibt es die Permutationen

$$\begin{array}{ccc} 1\,2\,3 & 2\,1\,3 & 3\,1\,2 \\ 1\,3\,2 & 2\,3\,1 & 3\,2\,1. \end{array}$$

Ihre Anzahl beträgt

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ (vgl. Einführungsbeispiel 1).}$$

Aus vier Elementen 1, 2, 3 und 4 bildet man die Permutationen

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

mit der Anzahl

$$24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Wir vermuten: Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt

$$\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot} \boldsymbol{n}. \tag{I}$$

Beweis:

Wir nehmen an, daß die Anzahl der Permutationen von n Elementen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

ist.

Für $n = 1; 2; 3; 4$ Elemente ist diese Formel sicher richtig.

Wir müssen nun zeigen, daß die Formel auch für $n+1$ Elemente gilt, wenn sie für n Elemente Gültigkeit hat. Sind nämlich $(n+1)$ verschiedene Elemente gegeben, so kann man die Permutationen in $(n+1)$ Arten einteilen, indem man jedesmal die mit dem gleichen Element beginnenden Permutationen zu einer Art vereinigt. Die Permutationen jeder einzelnen Art erhält man dadurch, daß man auf das die Art kennzeichnende Element alle Permutationen der übrigen Elemente folgen läßt. Die Anzahl dieser Permutationen ist jedesmal gleich der Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen, also nach der Annahme gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Folglich enthalten die $(n+1)$ verschiedenen Arten zusammen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)$$

Permutationen.

Da der Satz für ein bestimmtes n, in unserem Falle $n = 4$, Elemente richtig ist, folgt, daß er für jedes folgende n ebenfalls gilt.

Erläuterung: Wir hatten in unserem Beispiel die Permutationen für $n = 4$ aufgestellt und bewiesen, daß ihre Anzahl $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ beträgt. Für $(n+1) = 5$ kann man nun $(n+1) = 5$ verschiedene Gruppen bilden, indem man jedesmal die mit dem gleichen Element beginnenden Permutationen zu einer Art vereinigt. Dann bleiben außer dem Anfangselement jedesmal noch $n = 4$ Elemente übrig, mit denen sich, wie nachgewiesen, je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Permutationen bilden lassen. Wir haben mithin $5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ Permutationen erhalten.

Als Beispiel sei noch eine der erwähnten 5 Gruppen angeführt, nämlich die dritte Gruppe:

3 1245	3 2145	3 4125	3 5124
3 1254	3 2154	3 4152	3 5142
3 1425	3 2415	3 4215	3 5214
3 1452	3 2451	3 4251	3 5241
3 1524	3 2514	3 4512	3 5412
3 1542	3 2541	3 4521	3 5421.

Das Beweisverfahren, das hier erstmalig angewendet wurde, nennt man **Schluß von n auf $(n + 1)$** oder **Beweis durch vollständige Induktion.**

Der Schluß von n auf $(n + 1)$, ein unentbehrliches Hilfsmittel der Mathematik, wird angewendet, wenn ein Satz oder ein Gesetz etwa aus den Anfangswerten (wie im vorliegenden Fall) schon bekannt ist und seine Allgemeingültigkeit bewiesen werden soll. Er wird auf die folgende Weise durchgeführt:

1. Wir nehmen an, daß der Satz für irgendein n Gültigkeit hat.
2. Wir beweisen, daß er unter dieser Voraussetzung auch für die nächstfolgende Anzahl $n + 1$ gilt. Damit ist bewiesen, daß er unter dieser Voraussetzung für jedes folgende n gilt.
3. Es muß nun noch bewiesen werden, daß die getroffene Voraussetzung richtig ist, das heißt, die Richtigkeit des Satzes muß für ein bestimmtes n nachgewiesen werden. Ist der Satz für $n = 1$ richtig, so folgt, daß er für jedes beliebige n gilt.

Die zunächst noch unbekannte Anzahl der Permutationen P_n kann aber auch auf folgendem Wege gefunden werden. Beim Schluß von n auf $(n + 1)$ haben wir die Beziehung

$$P_{n+1} = (n + 1)\, P_n \tag{1}$$

erkannt. Direkt haben wir festgestellt:

Ist n irgendeine oberhalb von 1 gelegene ganze Zahl, so gelten wegen (1) die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= 2\, P_1 \\ P_3 &= 3\, P_2 \\ &\;\vdots \\ P_{n-1} &= (n-1)\, P_{n-2} \\ P_n &= n\, P_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n\, P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_{n-1}$$

und damit nach Division durch $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_{n-1}$

$$\boldsymbol{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n.} \tag{3) = (I}$$

Dieses Verfahren wird als **Rekursionsverfahren** und die Formel (1) als Rekursionsformel bezeichnet. Die letzte der Formeln (2) gibt die Größe von P_n an, wenn P_{n-1} schon bekannt ist. In dieser Weise erhalten wir beim Zurückgehen bis zu dem bekannten Anfangswert P_1 die Möglichkeit, P_n selbst zu bestimmen.

Erklärung: Das Produkt der n ersten ganzen positiven Zahlen wird durch den Ausdruck $n!$ (sprich n Fakultät) dargestellt, so daß gilt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n\,!$$

Die Formel (I) kann demnach kürzer geschrieben werden:

$$\boldsymbol{P_n = n!} \tag{I'}$$

Die Kurzzeichen $0!$ und $1!$ bedeuten beide nach Definition die Zahl 1.

Bemerkung: Das Zeichen $n!$ gilt weder für negative noch für gebrochene Zahlen n.

Sind mehrere verschiedene Elemente gegeben, so ist zwischen ihnen sehr oft von vornherein eine bestimmte Reihenfolge festgesetzt, z. B. durch die Bezeichnung der Elemente mit den Ziffern 1, 2, 3, ... oder durch die Buchstaben a, b, c, ... oder auch durch andere Vorschriften. Eine solche Anordnung heißt die **natürliche Anordnung.** In ihr ist das Element 2 höher als das Element 1 oder das Element a niedriger als das Element b, wenn b in der natürlichen Anordnung hinter a steht.

Ist nun eine endliche Anzahl verschiedener Elemente gegeben, zwischen denen eine solche natürliche Anordnung besteht, so lassen sich die aus diesen Elementen gebildeten Permutationen ebenfalls anordnen. In dieser Anordnung steht von zwei verschiedenen Permutationen stets diejenige voran, deren erstes Element das niedrigere ist. Sind jedoch die ersten beiden Elemente gleich, so steht diejenige voran, deren zweites Element das niedrigere ist usf. Diese Anordnung von Permutationen nennt man **lexikographische Anordnung,** da die Permutationen wie Wörter in einem Wörterbuch aufeinanderfolgen. So sind beispielsweise die Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 bei der Lösung der 1. Grundaufgabe lexikographisch geordnet. Zur Aufstellung einer lexikographischen Anordnung geht man von der natürlichen Anordnung aus. Man vertauscht zunächst die letzten beiden Glieder. Die weiteren Anordnungen findet man nach der folgenden Regel: Man sucht in der letzten Permutation von hinten nach vorn fortschreitend das erste Element, das niedriger ist als ein hinter ihm stehendes, und ersetzt dieses Element durch das nächsthöhere unter den ihm folgenden. Die ihm vorangehenden Glieder läßt man unverändert, während die restlichen Elemente in der natürlichen Anordnung folgen.

2. Grundaufgabe:

Es seien n Elemente gegeben, unter denen α Elemente einer ersten Art, β Elemente einer zweiten Art, γ Elemente einer dritten Art enthalten sind. Die Anzahl der Permutationen ist zu bestimmen.

Es seien die Elemente

$$a\,a \qquad b\,b\,b \qquad c\,c\,c\,c\,c$$

mit

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 3 \qquad \gamma = 5 \qquad \text{gegeben.}$$

Bringt man an den gleichen Elementen unterscheidende Merkmale, etwa Indizes, an, so erhält man 10 verschiedene Elemente

$$a_1\,a_2 \qquad b_1\,b_2\,b_3 \qquad c_1\,c_2\,c_3\,c_4\,c_5$$

mit 10! Permutationen. Nimmt man an den ersten Elementen die unterscheidenden Merkmale fort, so fallen stets je zwei Permutationen in eine zusammen, also z. B.

$$b_1\,c_1\,a_1\,b_2\,c_2\,b_3\,a_2\,c_3\,c_4\,c_5$$

und

$$b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,c_2\,b_3\,a_1\,c_3\,c_4\,c_5,$$

da $\quad a_1 = a_2 = a \quad$ ist.

Für die Elemente $\quad a\,a\,b_1\,b_2\,b_3\,c_1\,c_2\,c_3\,c_4\,c_5$

ist daher die Anzahl der Permutationen

$$\frac{10!}{2!}.$$

Nimmt man die Unterscheidungen der Elemente b fort, so fallen 3! Permutationen entsprechend der eben durchgeführten Überlegung heraus, nämlich die, in denen die Elemente $b_1\, b_2\, b_3$ untereinander vertauschbar werden. Für die Elemente

$$a\, a\, b\, b\, b\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5$$

ist daher die Anzahl der Permutationen

$$\frac{10!}{2! \cdot 3!}.$$

Werden nun noch die unterscheidenden Merkmale der Elemente c fortgenommen, so fallen 5! Permutationen heraus. Für die Elemente

$$a\, a\, b\, b\, b\, c\, c\, c\, c\, c$$

ist daher die Anzahl der Permutationen

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}.$$

Allgemein gilt: Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung gleicher Elemente beträgt

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n). \qquad \text{(II)}$$

Dieser Ausdruck in Bruchform ist stets eine ganze Zahl, da die Anzahl der Permutationen nur ganzzahlig sein kann.

2. Kombinationen

Erklärung 1: Werden aus n Elementen k Elemente herausgegriffen ($k < n$, k und n ganzzahlig) und in irgendeiner Anordnung nebeneinandergestellt, so nennen wir diese Anordnung eine Kombination k-ter Ordnung oder k-ter Klasse. In den Einführungsbeispielen 2 und 3 haben wir solche Kombinationen kennengelernt.

Erklärung 2: Berücksichtigt man bei zwei Kombinationen gleicher Elemente die Anordnung, so spricht man von Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung (Beispiel 3) oder von Variationen, sonst von Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung (Beispiel 2) oder einfach von Kombinationen. Zwei Zusammenstellungen gleicher Elemente in verschiedener Anordnung stellen also zwei verschiedene Variationen, aber die gleiche Kombination dar.

Erklärung 3: Treten in Variationen bzw. in Kombinationen nur verschiedene Elemente auf, so spricht man von Variationen bzw. von Kombinationen ohne Wiederholung (Beispiel 2 und 3), sonst von Variationen bzw. von Kombinationen mit Wiederholung.

a) Variationen und Kombinationen ohne Wiederholung

Grundaufgabe:

Gegeben ist eine positive ganze Zahl $k < n$. Die Anzahl der Variationen bzw. der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen soll bestimmt werden.

Lösung der Grundaufgabe für Variationen

Die Variationen zur ersten Klasse der n verschiedenen Elemente $1, 2, \cdots, n$ stimmen mit diesen Elementen überein. Ihre Anzahl ist n. Die Variationen derselben

Elemente zur zweiten Klasse sind

1 2	1 3	1 4	$\cdots$	$1\,n$
2 1	2 3	2 4	$\cdots$	$2\,n$
.	.	.	$\cdots$	.
.	.	.	$\cdots$	.
.	.	.	$\cdots$	.
$n\,1$	$n\,2$	$n\,3$	$\cdots$	$n\,(n-1)$.

(Lies: eins zwei, eins drei, ..., eins n, usw.)

In den Zeilen stehen $(n-1)$ Variationen nebeneinander und in den Spalten n Variationen untereinander. Ihre Anzahl ist $n\,(n-1)$. Die Glieder 1 1, 2 2, ..., $n\,n$ treten bei dieser Aufgabe nicht auf, da eine Wiederholung der Elemente in den einzelnen Gliedern nicht gestattet ist. So folgt zum Beispiel auf 4 3 das Glied 4 5.

Die Variationen zur dritten Klasse sind

1 2 3	1 2 4	$\cdots$	$1\,2\,n$
1 3 2	1 3 4	$\cdots$	$1\,3\,n$
.	.	$\cdots$	.
.	.	$\cdots$	.
.	.	$\cdots$	.
$1\,n\,2$	$1\,n\,3$	$\cdots$	$1\,n\,(n-1)$
2 1 3	2 1 4	$\cdots$	$2\,1\,n$
.	.	$\cdots$	.
.	.	$\cdots$	.
.	.	$\cdots$	.
$n\,(n-1)\,1$	$n\,(n-1)\,2$	$\cdots$	$n\,(n-1)\,(n-2)$

Die Variationen in gleichen Zeilen haben gleiche Anfangselemente. Sie unterscheiden sich nur durch die an letzter Stelle stehenden Elemente. Da weder die an erster noch die an zweiter Stelle stehende Ziffer wiederholt werden darf, enthält jede Zeile mithin $(n-2)$ Variationen.

Wie die Aufstellung erkennen läßt, stehen in jeder Spalte $n\cdot(n-1)$ Variationen. Infolgedessen erhalten wir insgesamt $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ Variationen zur dritten Klasse.

Allgemein gilt: Die Anzahl der Variationen zur k-ten Klasse beträgt bei n verschiedenen Elementen:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-[k-1]). \qquad \text{(III)}$$

Die Richtigkeit dieser Aussage läßt sich durch vollständige Induktion beweisen.

Lösung der Grundaufgabe für Kombinationen

Bei der Untersuchung über die Anzahl der möglichen Kombinationen stützen wir uns auf die Untersuchung über die Anzahl der möglichen Variationen.

Wenn wir die Kombinationen der 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 zur zweiten Klasse a) mit und b) ohne Berücksichtigung der Anordnung betrachten, so erhalten wir

im Fall a) (Variationen) und im Fall b) (Kombinationen)

1 2	1 3	1 4	1 5		1 2	1 3	1 4	1 5
2 1	2 3	2 4	2 5			2 3	2 4	2 5
3 1	3 2	3 4	3 5				3 4	3 5
4 1	4 2	4 3	4 5					4 5
5 1	5 2	5 3	5 4					

Nach (III) sind es im Falle a) $5 \cdot 4 = 20$ Variationen; im Falle b) zählen wir 10 Kombinationen. Bezeichnen wir die Anzahl der Kombinationen von 5 Elementen zur zweiten Klasse ohne Wiederholung mit $x_{5,2}$, so erkennen wir die Beziehung

$$2 \cdot x_{5,2} = 5 \cdot 4$$

oder

$$x_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}.$$

Bilden wir aus denselben Elementen die Kombinationen zur dritten Klasse, so erhalten wir

im Falle a)			und	im Falle b)		
1 2 3	1 2 4	1 2 5		1 2 3	1 2 4	1 2 5
1 3 2	1 3 4	1 3 5			1 3 4	1 3 5
1 4 2	1 4 3	1 4 5				1 4 5
1 5 2	1 5 3	1 5 4				
2 1 3	2 1 4	2 1 5				
2 3 1	2 3 4	2 3 5			2 3 4	2 3 5
2 4 1	2 4 3	2 4 5				2 4 5
2 5 1	2 5 3	2 5 4				
3 1 2	3 1 4	3 1 5				
3 2 1	3 2 4	3 2 5				
3 4 1	3 4 2	3 4 3				
3 5 1	3 5 2	3 5 4				3 5 4
4 1 2	4 1 3	4 1 5				
.	.	.				
.	.	.				
.	.	.				
4 5 1	4 5 2	4 5 3				
5 1 2	5 2 3	5 1 4				
.	.	.				
.	.	.				
.	.	.				
5 4 1	5 4 2	5 4 3				

Nach (III) sind es im Falle a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Variationen, während wir im Falle b) 10 Kombinationen zählen. Bezeichnen wir die Anzahl der Kombinationen von 5 Elementen zur dritten Klasse mit $x_{5,3}$, so erkennen wir die Beziehung

$$6\, x_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \qquad \text{oder} \qquad x_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Unmittelbar erkennen wir, daß die Anzahl der Variationen bzw. der Kombinationen von 5 Elementen zur ersten Klasse 5 beträgt und daß diese die Elemente selbst sind, es ist also $x_{5,1} = 5$.

Die Zahl der Kombinationen von 5 Elementen zur vierten Klasse läßt sich leicht ermitteln; es sind die 5 Kombinationen

1 2 3 4   1 2 3 5   1 2 4 5   1 3 4 5   2 3 4 5,

während nach (III) die Anzahl der Variationen von 5 Elementen zur vierten Klasse

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ beträgt. Damit erkennen wir die Beziehung $x_{5,4} = 5$. Es ist aber $5 \cdot 24 = 120$, so daß folgt

$$24 \cdot x_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \qquad \text{oder} \qquad x_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Zur fünften Klasse gibt es aus 5 Elementen ohne Wiederholung nur eine Kombination, aber $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Variationen. Es ist also $x_{5,1} = 1$ und damit $120\, x_{5,1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ oder $x_{5,1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Zusammenstellung der Kombinationen aus 5 Elementen zur

ersten Klasse:	$1 \cdot x_{5,1}$	$= 5$	$x_{5,1} = \frac{5}{1}$	$= 5$
zweiten Klasse:	$1 \cdot 2\, x_{5,2}$	$= 5 \cdot 4$	$x_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$	$= 10$
dritten Klasse:	$1 \cdot 2 \cdot 3\, x_{5,3}$	$= 5 \cdot 4 \cdot 3$	$x_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$= 10$
vierten Klasse:	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, x_{5,4}$	$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$	$x_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$= 5$
fünften Klasse:	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, x_{5,5}$	$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	$x_{5,5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$	$= 1.$

Allgemein gilt: Die Anzahl der Kombinationen von n verschiedenen Elementen zur k-ten Klasse ist gegeben durch

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}. \tag{IV}$$

Auf den Beweis für die Richtigkeit der Aussage (IV) soll wegen seiner Schwierigkeit hier verzichtet werden.

Für den Bruch $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$, der uns noch häufig begegnen wird, führen wir das Kurzzeichen $\binom{n}{k}$ — sprich n über k — ein.

Erklärung: Ist n eine beliebige, k dagegen eine natürliche Zahl, so ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{n}{k}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet $\binom{n}{k}$ einen Bruch, dessen Nenner das Produkt der ersten k ganzen positiven Zahlen (also $k!$) und dessen Zähler ebenfalls ein Produkt von k Faktoren ist, von denen der erste gleich n und jeder folgende um eine Einheit kleiner ist als der vorhergehende.

Beispiele: $\qquad \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10; \qquad \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$

Definition: Das Kurzzeichen $\binom{n}{0}$ bedeutet stets die Zahl 1, insbesondere gilt auch $\binom{0}{0} = 1$.

Das Kurzzeichen $\binom{n}{1}$ ist stets die Zahl n. Die Zahl k im Nenner ist, abgesehen von der besonderen Festsetzung für die 0, stets eine positive ganze Zahl. Die Zahl n

unterliegt keiner Beschränkung und kann negative und nicht ganzzahlige Werte annehmen.

Beispiele:

$$\binom{-5}{3} = \frac{(-5)(-6)(-7)}{1\cdot 2\cdot 3} = -35$$

$$\binom{\frac{3}{4}}{3} = \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{5}{128}.$$

Eigenschaften des Kurzzeichens $\binom{n}{k}$:

1. Wenn n eine nicht negative ganze Zahl[1]) und k größer als n ist, so gilt

$$\binom{n}{k} = 0. \tag{5}$$

Beispiel für $n = 5$, $k = 7$:

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\,(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}.$$

Im Zähler tritt stets der Faktor 0 auf.

2. Wenn n und k nicht negative ganze Zahlen sind und k nicht größer als n ist, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \tag{6}$$

Beweis:

Es seien n und k positive ganze Zahlen und n größer als k, dann kann man

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k\cdot(k+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-[k+1])\cdot(n-k)\cdot(n-[k-1])\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(k-1)\cdot k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k)}$$

dadurch vereinfachen, daß man den Bruch entweder mit $(n-k)!$ kürzt und damit $\binom{n}{k}$ erhält, oder mit $k!$ kürzt und damit $\binom{n}{n-k}$ erhält. Von den im Zähler stehenden n Faktoren werden beim zweiten Kürzen die ersten k Faktoren gestrichen. Im Nenner hatten wir aber ebenfalls $k + (n-k) = n$ Faktoren. Folglich haben Zähler und Nenner nach dem Kürzen gleiche Faktorenzahl. Im Zähler ist der größte Faktor n, jeder folgende ist stets um 1 kleiner als der vorhergehende, während im Nenner der Wert $(n-k)!$ stehenbleibt. Nach (4) hat dann aber der so gekürzte Bruch den Wert $\binom{n}{n-k}$.

Ist $k = 0$ oder sind k und n beide gleich 0, so setzt man für $\binom{n}{k}$ in Übereinstimmung mit (6) stets den Wert 1 fest.

3. Es gilt stets

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{7}$$

---

[1]) Das heißt, n ist eine positive ganze Zahl oder Null.

Beweis:

Für jede positive Zahl k gilt

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

und damit

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right) = \binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{(n+1)\,n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-[k+1])}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Speziell ergibt sich für $k=0$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{0+1} = \binom{n+1}{0+1}$$

$$1 + n = n+1.$$

Anmerkung: Es seien n Elemente gegeben, aus denen die Kombinationen zur k-ten Klasse gebildet werden sollen. Ihre Anzahl sei $x_{n,k}$. Multiplizieren wir diese Zahl mit der Anzahl der Anordnungen, in die k Elemente gebracht werden können, also mit $k!$, so gibt das Produkt die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse. Es ist

$$k!\,x_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])$$

oder

$$x_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

b) Variationen und Kombinationen mit Wiederholung

Grundaufgabe:

Es sei k eine positive ganze Zahl kleiner als n. Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt wiederholbaren Elementen soll ermittelt werden, und zwar die Anzahl

a) der Variationen,
b) der Kombinationen.

Lösung der Grundaufgabe für Variationen

Aus n Elementen 1, 2, 3, ... lassen sich n Variationen erster Klasse bilden. Ihre Anzahl beträgt n.

Zur zweiten Klasse lassen sich mit Wiederholung folgende Variationen bilden:

$$\begin{array}{ccccc}
11 & 12 & 13 & \cdots & 1n \\
21 & 22 & 23 & \cdots & 2n \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
n1 & n2 & n3 & \cdots & nn.
\end{array}$$

In jeder Zeile und in jeder Spalte stehen n Variationen, so daß insgesamt $n\cdot n = n^2$ Variationen möglich sind.

Allgemein gilt: Die Anzahl der Variationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ist gleich

$$n^k. \qquad \text{(V)}$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion erfolgen.

Lösung der Grundaufgabe für Kombinationen

Soll die Anordnung nicht berücksichtigt werden, so erhalten wir in der zweiten Klasse folgende Kombinationen mit unbeschränkter Wiederholung

$$\begin{array}{ccccc}
1\,1 & 1\,2 & 1\,3 & \cdots & 1\,n \\
 & 2\,2 & 2\,3 & \cdots & 2\,n \\
 & & 3\,3 & \cdots & 3\,n \\
 & & & \cdots & . \\
 & & & \cdots & . \\
 & & & \cdots & . \\
 & & & & n\,n
\end{array}$$

Wir sehen, daß die Anzahl der Kombinationen in der ersten Zeile n beträgt, in der zweiten $(n-1)$ usw., insgesamt also

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1,$$

die Summe der n ersten natürlichen Zahlen, die wir als

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

kennengelernt hatten (vgl. Lehrbuch der Mathematik für das 10. Schuljahr, S. 124).

Hierfür können wir auch

$$\frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2} = \binom{n+1}{2}$$

schreiben.

Allgemein gilt: Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ist gleich

$$\binom{n+k-1}{k} \qquad \text{(VI)}$$

Der Beweis dieses Satzes geht über den Lehrstoff der Oberschule hinaus.

Aufgaben

1. Es ist $n!$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$ zu berechnen.

2. Wieviel verschiedene Anordnungen können aus den Elementen 1, 1, 2, 3 gebildet werden? Stellen Sie diese in lexikographischer Anordnung zusammen!

3. Wieviel verschiedene Anordnungen sind unter 6 Elementen möglich, wenn sich unter ihnen **a)** 2, **b)** 3, **c)** 4, **d)** 5 gleiche Elemente befinden?

4. Bilden Sie alle Variationen und alle Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 (lexikographische Anordnung).
Prüfen Sie die Ergebnisse durch Berechnung der Anzahl!

5. Bilden Sie alle Variationen und alle Kombinationen mit Wiederholung zur zweiten Klasse der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 (lexikographische Anordnung).
Prüfen Sie die Ergebnisse durch Berechnung der Anzahl!

6. Wieviel Variationen und Kombinationen zur dritten Klasse sind bei 5 Elementen möglich
a) ohne Wiederholung, **b)** mit Wiederholung?

7. Wieviel Kombinationen zur vierten Klasse sind bei 5 Elementen möglich, wenn die Bedingungen der Aufgabe 6 vorausgesetzt werden?

8. Es ist $\binom{n}{k}$ **a)** für $n = 5$, $k = 0, 1, \cdots, 5$, **b)** für $n = 7$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 7$ zu berechnen.

9. Weisen Sie die Richtigkeit der Gleichung $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für **a)** $n = 6, k = 2$, **b)** für $n = 10$, $k = 3$ nach!

10. Weisen Sie die Richtigkeit der Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ **a)** für $n = 5$, $k = 2$, **b)** für $n = 7$, $k = 3$ nach!

11. Es ist $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} + \binom{9}{4} = \binom{10}{5}$ zu bestätigen.

12. Wieviel verschiedene Zusammenstellungen von je 4 Buchstaben kann man aus den 25 Buchstaben des Alphabets bilden, wenn ein und derselbe Buchstabe in jeder Zusammenstellung mehrmals auftreten darf?

13. Das Morsealphabet besteht aus zwei verschiedenen Elementen, Punkt und Strich. Wieviel Zeichen lassen sich aus diesen Elementen bilden, wenn ein Zeichen nicht mehr als 5 Elemente besitzt?

14. Eine Selbstwähl-Fernsprechanlage arbeitet mit 5-stelligen Ziffernfolgen, die aus den Ziffern 1, 2, 3, ..., 9, 0 gebildet werden. Wieviel Anschlüsse kann die Anlage aufnehmen, wenn alle mit 0 beginnenden 5-stelligen Ziffernfolgen für Anschlüsse nicht verwendet werden und die zweistelligen mit 0 beginnenden Ziffernfolgen für Amts- und Sonderanschlüsse (z. B Auskunft, Notruf) vorgesehen sind?

15. Wieviel dreiziffrige Zahlen, in denen keine Ziffer sich wiederholt, kann man mit den Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9 bilden?

16. Wieviel dreiziffrige Zahlen, in denen dieselbe Ziffer wiederholt auftreten kann, kann man mit den Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9 bilden?

17. Wieviel gerade Linien gibt es, die je zwei von **a)** 5, **b)** 6, **c)** n Punkten verbinden?

18. In wieviel Punkten können sich **a)** 3, **b)** 4, **c)** 5, **d)** n Gerade höchstens schneiden?

19. **a)** Wieviel Ecken und **b)** wieviel Diagonalen und Diagonalpunkte hat ein ebenes vollständiges n-Seit?

c) Übertragen Sie die allgemeine Formel 1. auf das vollständige 4-Seit, 2. auf das vollständige 5-Seit, 3. auf das vollständige 6-Seit!

20. **a)** Wieviel Seiten und **b)** wieviel Diagonalpunkte und Diagonalen hat ein ebenes vollständiges n-Eck?

c) Übertragen Sie die allgemeine Formel 1. auf das vollständige 4-Eck, 2. auf das vollständige 5-Eck, 3. auf das vollständige 6-Eck!

21. In einer Ebene seien n Punkte gegeben. Es sei n mindestens gleich 4, und es werde vorausgesetzt, daß keine 3 dieser Punkte auf ein und derselben Geraden und keine 4 auf ein und demselben Kreis liegen. Dann bestimmen je 3 der Punkte einen Kreis. Wieviel verschiedene Kreise werden so erhalten?

Es sei **a)** $n = 4$, **b)** $n = 5$, **c)** $n = 6$. Geben Sie an, wieviel Kreise jeweils möglich sind!

22. Wieviel Würfe, die verschiedene Augenzahlen ergeben, sind **a)** mit zwei, **b)** mit drei Würfeln möglich?

23. Wieviel Würfe, bei denen die Würfel ungleiche Augenzahlen ergeben, sind **a)** mit zwei, **b)** mit drei Würfeln möglich?

II. Der binomische Lehrsatz für ganze (positive) Exponenten

Eine Summe aus zwei Summanden, das heißt ein Ausdruck der Form $a + b$, wird ein Binom genannt. Wir haben gelernt, daß für beliebige Werte von a und b die Gleichungen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

gelten. Höhere Potenzen können wir durch Multiplikation der vorhergehenden Potenz mit $a + b$ berechnen. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)^4\cdot(a+b)\\ &= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4\\ &\quad\;\; + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5\\ \hline &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

An dieses Ergebnis können wir sofort die Berechnung von $(a + b)^6$ anschließen und so schließlich zu jeder vorgeschriebenen Potenz fortschreiten.

Wir erkennen, daß die Entwicklung $(a + b)^n$ alle Glieder enthält, deren Exponenten die Summe n besitzen, also

$$a^n b^0,\ a^{n-1}b^1,\ a^{n-2}b^2,\ \ldots,\ a^{n-k}b^k,\ \ldots,\ a^1 b^{n-1},\ a^0 b^n.$$

Es handelt sich jetzt darum, die noch unbekannten Koeffizienten zu bestimmen.

Ordnen wir die bisher bekannten Koeffizienten in Zeilen, so erhalten wir die als **Pascalsches Dreieck** bezeichnete Anordnung, in der jede Zahl innerhalb des Randes gleich der Summe der beiden darüberstehenden Zahlen ist.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Die Bestimmung einer vorgeschriebenen Potenz ist jetzt noch an die Kenntnis aller vorhergehenden Potenzen gebunden. Unsere Aufgabe ist aber nur dann gelöst, wenn wir alle Koeffizienten zu jedem Wert $a^{n-k}b^k$ unmittelbar aus n und k angeben können.

In der Kombinatorik hatten wir die Größe

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$$

kennengelernt. Wenn wir diese Zahlen $\binom{n}{k}$ für $n = 4$ und $n = 5$ auswerten, so erhalten wir bei Beachtung von $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{4}{0}=1,\quad \binom{4}{1}=4,\quad \binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6,\quad \binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4,\quad \binom{4}{4}=1$$

und

$$\binom{5}{0}=1,\ \binom{5}{1}=5,\ \binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10,\ \binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10,\ \binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5,\binom{5}{5}=1.$$

Wir nehmen daher an, daß

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}a\,b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n \quad \text{(I)}$$

ist. Die Richtigkeit der Aussage beweisen wir durch die vollständige Induktion.

Beweis:

Die Gleichung (I) ist richtig für $n = 1$.
Wenn der binomische Lehrsatz für $n = k$ richtig ist, so gilt

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\cdots+\binom{k}{k-1}a\,b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $a + b$, so erhalten wir für die Potenz $(a + b)^{k+1}$ die Summe

$$\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^k b+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k}a\,b^k$$
$$+\binom{k}{0}a^k b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k}{k-2}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k-1}a\,b^k+\binom{k}{k}b^{k+1}.$$

Nun ist aber

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{1},\quad \binom{k}{1}+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{2},\ \ldots,\ \binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k},$$

da nach (I, 7) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ ist und weiter die Gleichungen

$\binom{k}{0}=1=\binom{k+1}{0}$ sowie $\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1}$ gelten.

Daraus ergibt sich

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^k b+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\cdots$$
$$+\binom{k+1}{k}a\,b^k+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}.$$

Für $n = k + 1$ erhalten wir also die Gleichung (1), was zu beweisen war.
Die in dem binomischen Lehrsatz auftretenden Zahlenkoeffizienten

$$\binom{n}{0},\quad \binom{n}{1},\quad \binom{n}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{n}$$

heißen deshalb **Binomialkoeffizienten.** Wir hatten sie, ohne diese Bezeichnung einzuführen, bereits in der Kombinatorik kennengelernt.

In Kurzform schreiben wir den binomischen Lehrsatz als

$$(a+b)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^\nu. \quad \text{(II)}$$

Setzt man in Gleichung (I) $a = b = 1$, so erhält man

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}. \tag{1}$$

Setzt man $a = 1$, $b = -1$, so erhält man

$$(1 - 1)^n = 0^n = 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots (-1)^n \binom{n}{n}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$$2^n + 0^n = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right].$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots \tag{3}$$

Durch Subtraktion erhält man aus (1) und (2)

$$2^n - 0^n = 2\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\right].$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \tag{4}$$

Demnach ist

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Die Gleichungen (1) bis (4) gelten für jeden positiven ganzzahligen Wert von n.

Aufgaben

1. Stellen Sie den binomischen Lehrsatz für $(a - b)^n$ auf!

2. Wie heißt das 5. Glied in der Entwicklung

a) $(a + b)^7$, **b)** $(a - b)^8$?

3. Wie heißen die Koeffizienten von a^4b^5 und von a^2b^7 in der Entwicklung $(a + b)^9$?

4. Wie heißen die größten Koeffizienten in der Entwicklung

a) $(a + b)^7$, **b)** $(a + b)^{10}$?

5. Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes auf 6 Dezimalstellen genau

a) $1{,}1^{10}$, **b)** $1{,}01^{10}$, **c)** $1{,}001^{10}$, **d)** $1{,}02^{25}$,

e) $0{,}9^{10}$, **f)** $0{,}98^{15}$, **g)** $0{,}997^{19}$, **h)** $0{,}9995^{30}$!

INHALTSVERZEICHNIS

A. Infinitesimalrechnung

B. Analytische Geometrie der Ebene

C. Kombinatorik