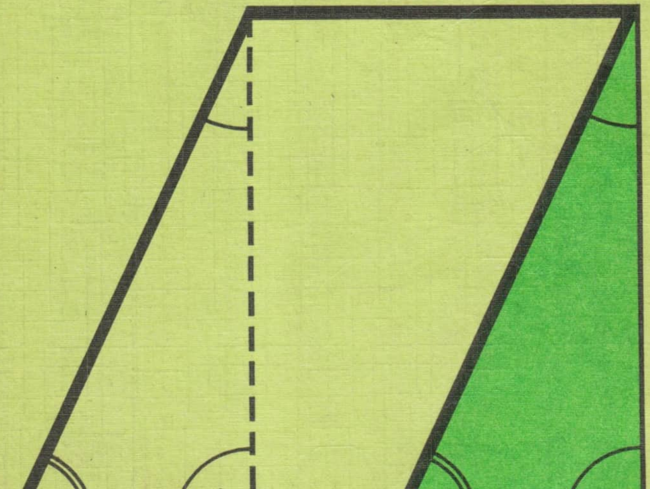
# Mathematik

6



## Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das Buch ist in vier Kapitel A, B, C und D gegliedert und diese weiter in Lehrbuchabschnitte, die mit blau gedruckten Überschriften eingeleitet werden.
Jedes Kapitel ist in Lerneinheiten, abgekürzt LE, eingeteilt, die jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert sind.
Eine Titelzeile über jeder Seite gibt darüber Auskunft, zu welchem Kapitel, zu welchem Lehrbuchabschnitt und zu welcher Lerneinheit diese Seite gehört.
In den Lerneinheiten werden die Beispiele, Aufträge und Merksätze durch folgende Marken am linken Rand des Textes gekennzeichnet:

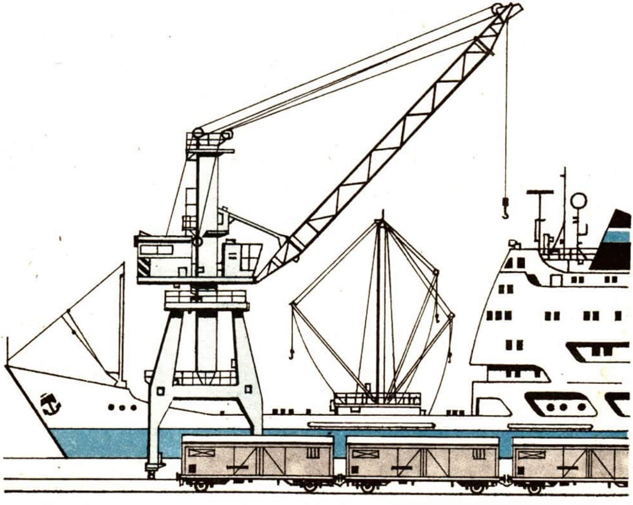
■ Beispiel; ● Auftrag; ▶ Merkstoff.

Beispiele, Aufträge und Merkstoffe sind jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert.
Verweise auf Abbildungen oder andere Textstellen beginnen mit einem schräggestellten Pfeil. So bedeutet zum Beispiel (↗ Auftrag B 8, S. ) „vgl. Auftrag 8 im Kapitel B auf Seite “.
Wenn sich bei einer Aufgabennummer ein senkrechter Pfeil befindet, zum Beispiel „5. ↑“, so bedeutet dieser Pfeil, daß weiter oben ein Aufgabentext zu beachten ist, der für mehrere Aufgaben gilt. Aufgaben, die zusätzlich durch einen Stern gekennzeichnet sind, zeichnen sich durch einen erhöhten Schwierigkeitsgrad aus.

# Mathematik

Lehrbuch für Klasse 6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1986



*Autorenkollektiv:* Dr. Manfred Dennert, Prof. Dr. sc. Brigitte Frank, Dr. Marianne Grassmann, Prof. Dr. Dieter Ilse (Kollektivleiter), Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. Günter Pietzsch, Dr. Manfred Rehm, Dr. Wolfgang Schulz, Dr. Edellinde Siury
unter Mitarbeit von Hans-Joachim Schubert

*Gutachter und Berater:* Dr. Peter Birnbaum, Joachim Bundermann, Dr. Günter Erbrecht, Rolf Förster, Reiner Franck, H. Gestewitz, Dr. Sigrun Gromann, Prof. Dr. Werner Jungk, Karlheinz Lehmann, Günter Liesenberg, Erika Schwerin

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.


3. Auflage
Ausgabe 1984
Lizenz-Nr. 203/1000/85 (UN 000606-3); Kartengenehmig.: VWV 10/85
LSV 0681
Redaktion: Karlheinz Martin
Zeichnungen: Jutta Wolff
Illustrationen: Karl-Heinz Wieland
Einband: Manfred Behrendt
Typografische Gestaltung: Atelier vwv, Karl-Heinz Bergmann
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Schrift: 10/11 Gill-Grotesk Mono
Redaktionsschluß: 19. Juni 1985
Bestell-Nr. 730 996 1
Schulpreis DDR: 2,30

# Inhalt

## A Teilbarkeit natürlicher Zahlen



## B Gebrochene Zahlen

# A Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Ein würfelförmiges Stück Zucker hat eine durchschnittliche Kantenlänge von 15 mm. Zur Verpackung sollen quaderförmige Schachteln hergestellt werden. Deren Kantenlängen sollen höchstens 50 mm, 80 mm und 110 mm betragen und diesen Werten möglichst nahe kommen. Wie lang müssen die Innenkanten einer Schachtel sein, wenn sie durch Zuckerstücke lückenlos ausgefüllt sein soll? Könnte man diese Schachtel auch durch Würfelzucker bei einer durchschnittlichen Kantenlänge von 10 mm lückenlos ausfüllen?
Aufgaben dieser Art führen uns auf Vielfache und Teiler natürlicher Zahlen. Mit ihnen werden wir uns in diesem Stoffgebiet etwas eingehender beschäftigen. Wenn dabei von *Zahlen* die Rede ist, so sollen stets natürliche Zahlen gemeint sein.

## Zur Wiederholung

**1.** Nenne den Nachfolger (Vorgänger) von
17; 331; 2 000; 2 055; 99; 1 000; 0; 738 641; $n$; $k + 5$; $x - 1$; $2 \cdot m$; $3 \cdot k$!

**2.** Welche natürlichen Zahlen haben keinen Nachfolger (Vorgänger)?

**3.** Vergleiche der Größe nach! Begründe, ohne auszurechnen!

**a)** 217; 127 **b)** 330; 330 + 1 **c)** 299; 300 − 1
**d)** 138 + 526; 526 + 138 **e)** 733 + 211; 735 + 211 **f)** 618 − 12; 619 − 13
**g)** 578 · 17; 18 · 578 **h)** 37 · 45; 45 · 37 **i)** 660 : 12; 540 : 12

**4.** Löse folgende Gleichungen!
Schreibe jeweils $x$ als Summe oder Differenz der beiden anderen vorkommenden Zahlen!

**a)** $90 + x = 100$ **b)** $x + 12 = 12$ **c)** $87 + x = 123$
**d)** $738 + x = 638$ **e)** $x + 14 = 73$ **f)** $x + x = 150$
**g)** $38 - x = 31$ **h)** $x - 17 = 12$ **i)** $174 - x = 174$
**k)** $x - 77 = 0$ **l)** $56 - x = 57$ **m)** $x - 77 = 77$

**5.** Rechne möglichst vorteilhaft! Welche Gesetze nutzt du dabei?

**a)** 138 + (16 + 12) **b)** 396 + 175 + 4 **c)** 153 + 18 + 22
**d)** (77 · 2) · 5 **e)** 18 · (9 · 5) **f)** 13 · 4 · 25
**g)** 32 · 4 **h)** 8 · 81 **i)** 29 · 7
**k)** 7 · 23 + 13 · 23 **l)** 35 · 17 + 17 · 5 **m)** 46 · 19 − 44 · 19

**6.** Ermittle alle natürlichen Zahlen $x$, für die gilt:
**a)** $5 \cdot x = 120$, **c)** $6 \cdot x = 750$, **e)** $13 \cdot x = 6\,500$, **g)** $6 \cdot x = 44$,
**b)** $x \cdot 5 = 0$, **d)** $1 \cdot x = 27$, **f)** $135 \cdot x = 135$, **h)** $x \cdot x = 25$!
Schreibe jeweils $x$ als Quotient!

**7.** Löse folgende Gleichungen! Schreibe $x$ als Produkt oder Quotient der beiden anderen vorkommenden Zahlen!
**a)** $72 : x = 9$ **c)** $7\,152 : x = 1$ **e)** $x : 7 = 8$ **g)** $0 : x = 5$
**b)** $x : 12 = 10$ **d)** $x : 17 = 0$ **f)** $28 : x = 8$ **h)** $128 : x = 8$

**8.** Schreibe als Potenz!
**a)** $2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $5 \cdot 5$ **c)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **d)** $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
**e)** Vervollständige!
Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus $n$ gleichen Faktoren schreibt man ________.
Die Zahl $a$ heißt ________, die Zahl $n$ heißt ________ der Potenz ________.

**9.** Berechne folgende Potenzen oder Produkte mit Potenzen!
**a)** $2^5$ **b)** $3^4$ **c)** $5^3$ **d)** $2^2 \cdot 3$ **e)** $3 \cdot 5^3$ **f)** $2^3 \cdot 3^2$

**10.** Löse folgende Gleichungen!
**a)** $10^6 = x$ **c)** $x^3 = 1\,000$ **e)** $10^x = 100$ **g)** $4^x = 16$
**b)** $x^4 = 81$ **d)** $x^2 = 25$ **f)** $2^x = 32$ **h)** $2 \cdot 3^x = 18$

**11.** Ermittle die Summen!
**a)** $7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$ **c)** $5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$
**b)** $10^5 + 10^3 + 10$ **d)** $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 12$

**12.** Schreibe als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen!
**a)** 55 709 **b)** 30 901 + 4 070 **c)** 12 345 + 76 543

**13.** Welche der Zahlen 12; 27; 33; 0; 68; 1; 49; 64; 60; 77 sind **a)** gerade, **b)** ungerade Zahlen? Begründe!

## Teilbarkeitssätze

### 1 Vielfache und Teiler

*Wir wissen:* Mit $3 \cdot 6 = 18$ gilt zugleich $18 : 6 = 3$ und $18 : 3 = 6$.

Dies kann man auch so aussprechen:

18 ist *das* Dreifache von 6,
6 ist *der* dritte Teil von 18,

18 ist *das* Sechsfache von 3,
3 ist *der* sechste Teil von 18.

Allgemeiner sagt man auch:

18 ist *ein* Vielfaches von 6,
6 ist *ein* Teiler von 18,
18 ist durch 6 teilbar,

18 ist *ein* Vielfaches von 3,
3 ist *ein* Teiler von 18,
18 ist durch 3 teilbar.

▶ 1

| | | |
|---|---|---|
| ***a* ist ein Vielfaches von *b*.** | | |
| ***b* ist ein Teiler von *a*.** | **bedeutet** | **Es gibt eine natürliche Zahl *n*, so daß $a = b \cdot n$ ist.** |
| ***a* ist durch *b* teilbar.** | | |

Für ***b* ist ein Teiler von *a*** schreibt man auch: $b \mid a$. Für ***b* ist kein Teiler von *a*** schreibt man häufig: $b \nmid a$.

■ 1 $6 \mid 30$ ist eine wahre Aussage; denn es gibt eine Zahl $n$ (nämlich $n = 5$), so daß $6 \cdot n = 30$ ist.
$6 \nmid 47$ ist ebenfalls eine wahre Aussage; denn es gibt keine Zahl $n$, so daß $6 \cdot n = 47$ ist. (Es ist $6 \cdot 7 < 47 < 6 \cdot 8$.)

**Beachte:** Im Gegensatz zur Umgangssprache sind das Nullfache und das Einsfache einer Zahl auch Vielfache dieser Zahl. Da das Nullfache jeder Zahl Null ist, ist Null Vielfaches jeder natürlichen Zahl, und jede natürliche Zahl ist Teiler von Null.
Im Beispiel A 1 wird von **Aussagen** gesprochen. In der Mathematik sind Aussagen solche Formulierungen, die entweder wahr oder falsch sind.

■ 2 Beispiele für Aussagen sind:
**a)** 24 ist durch 6 teilbar.
**b)** $7 \mid 50$
**c)** Für alle natürlichen Zahlen $a$ und $b$ gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$.
**d)** Es gibt eine Zahl $n$, für die $n \mid 17$ gilt.
**e)** Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets ungerade.

Die Formulierung „$a$ ist durch 3 teilbar“ ist keine Aussage, da sie weder wahr noch falsch ist. Erst wenn man für $a$ eine Zahl einsetzt, erhält man eine Aussage: „12 ist durch 3 teilbar“ ist wahr; „13 ist durch 3 teilbar“ ist falsch.
Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, muß man **beweisen**. Im Beispiel A 1 sind die beiden Aussagen $6 \mid 30$ und $6 \nmid 47$ bereits bewiesen worden.

● 1 Peter behauptet: „180 ist durch alle einstelligen Zahlen teilbar.“ Er begründet so:
$1 \mid 180$, denn $1 \cdot 180 = 180$;
$2 \mid 180$, denn $2 \cdot 90 = 180$;
$3 \mid 180$, denn $3 \cdot 60 = 180$; und so weiter. Hat er recht?

Peter macht nicht eine Aussage über *einen einzigen* Teiler der Zahl 180, sondern über *viele* Teiler. Man kann eine solche Aussage über viele Zahlen dadurch als falsch nachweisen, daß man von ihnen eine einzige angibt, für die diese Aussage falsch ist. (Man spricht dann von einem Gegenbeispiel.)

Die Wahrheit einer Aussage über *viele* Zahlen kann man **nicht beweisen**, indem man die Aussage für *einige* Beispiele als wahr nachweist. Wie man solche Aussagen beweist, lernen wir in Lerneinheit A 6 kennen.

● 2 Welche Aussagen aus Beispiel 2 sind falsch? Begründe!

### Aufgaben

1. **a)** Berechne das Dreifache von 7 (4; 15; 20; 25; 70; 82)!
   **b)** Berechne ein Drittel von 21 (54; 31; 3; 27; 0; 39)!
   **c)** Berechne das Einsfache von 37 (1; 0; 19; 25)!

2. Ergänze mündlich!
   **a)** 84 ist das Zweifache von ...
   **b)** 7 ist ein Achtel von ...
   **c)** Von ... ist 54 die Hälfte.
   **d)** 11 ist ein Elftel von ...
   **e)** Von ... ist 1 ein Achtel.
   **f)** 4 ist der ... Teil von 12.
   **g)** Von 25 ist 5 der ... Teil.
   **h)** 0 ist ein Fünftel von ...
   **i)** 18 376 ist das Einsfache von ...
   **k)** Das ...fache von 20 ist 100.

3. **a)** Gib drei Vielfache von 8 (13, 1, 25, 4) an, die kleiner als 100 sind!
   **b)** Ermittle zwei Teiler von 20 (14, 8, 11, 6)!

4. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
   **a)** 32 ist die Hälfte von 64.
   **b)** 18 ist ein Fünftel von 95.
   **c)** 32 ist ein Drittel von 96.
   **d)** 8 ist ein Siebentel von 54.

5. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
   **a)** 39 ist durch 13 teilbar. **b)** 17 ist durch 17 teilbar. **c)** $2 \mid 42$ **d)** $9 \mid 17$ **e)** $13 \mid 0$
   **f)** $17 \mid 34$ **g)** $16 \mid 8$ **h)*** $0 \mid 0$

6. Schreibe von den folgenden Zahlen diejenigen auf, die Vielfache von 4 (5, 6, 7, 8, 9) sind! 40; 19; 8; 9; 12; 0; 4; 10; 18; 5; 34; 14; 20; 2; 32; 15

7. Welche Formulierungen sind Aussagen?
   **a)** 21 ist durch 21 teilbar.
   **b)** 49 ist Vielfaches von 6.
   **c)** $3 \cdot b = 12$
   **d)** $t$ ist Teiler von 15.
   **e)** Es gibt eine Zahl $b$, so daß $4 \cdot b = 20$ ist.
   **f)** Die Hauptstadt der DDR hat neun Stadtbezirke.
   **g)** An welchem Fluß liegt Halle?

8.* Setze 4 und 10 für $x$ ein! Schreibe alle wahren Aussagen auf, die du so erhältst!
   **a)** $x$ ist durch 4 teilbar. **b)** 5 ist Teiler von $x + 1$. **c)** 30 ist durch $x$ teilbar.

## 2 Beschreibung von Vielfachen mit Hilfe von Variablen

*Wir haben bereits festgelegt:*
Eine natürliche Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.
Eine natürliche Zahl heißt ungerade, wenn sie nicht durch 2 teilbar ist.

**3** **a)** 14; 10; 56; 2; 0; 108 sind gerade Zahlen. Schreibe jede von ihnen als Produkt aus zwei Faktoren! Dabei sollen alle Produkte in einem Faktor übereinstimmen. (Dieser Faktor soll aber nicht 1 sein.)

**b)** Setze in $2 \cdot n$ für $n$ die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 1000 ein und rechne! Was für Zahlen entstehen?

Wenn eine Zahl gerade ist, so kann sie in der Form $2 \cdot n$ geschrieben werden. Wenn man in $2 \cdot n$ für $n$ Zahlen einsetzt, so erhält man stets gerade Zahlen.
Jede ungerade Zahl ist Nachfolger einer geraden Zahl und kann daher in der Form $2 \cdot n + 1$ geschrieben werden. Umgekehrt erhält man stets eine ungerade Zahl, wenn man in $2 \cdot n + 1$ für $n$ Zahlen einsetzt.

**4** **a)** Welche ungeraden Zahlen erhält man, wenn in $2 \cdot n + 1$ für $n$ eingesetzt werden: 7; 5; 28; 1; 0; 54?

**b)** Welches $n$ muß man in $2 \cdot n + 1$ einsetzen, um die Zahlen 1; 3; 5; 7; 9; 2001 zu erhalten?

Jede gerade Zahl läßt sich veranschaulichen durch eine Menge von Paaren (↗ Bild A 1).

Eine Veranschaulichung allein durch Paare ist für ungerade Zahlen nicht möglich (↗ Bild A 2).

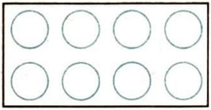


Bild A 1

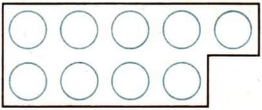


Bild A 2

**5** Übertrage die Tabellen in dein Heft und vervollständige sie!

**a)**

| $n$ | 4 | 3 | 5 | 20 | 11 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $7 \cdot n$ | | | | | | |

Welche Teiler haben **alle** ergänzten Zahlen gemeinsam?

**b)**

| $n$ | | 7 | | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 35 | 20 | 100 | 0 | 25 | 5 |

**Alle** Zahlen der *unteren* Zeile sind Vielfache einer Zahl, die größer als 1 ist. Nenne sie!

**c)** Lies und vervollständige zu Aussagen!
Setzt man in ... Zahlen für $n$ ein, so erhält man Vielfache von .... Jede durch ... teilbare Zahl läßt sich in der Form ... schreiben.

## Aufgaben

1. **a)** Zeichne den Teil des Zahlenstrahls, der die Zahlen 9 bis 19 enthält! Unterstreiche dann die geraden Zahlen blau, die ungeraden rot! Was stellst du fest?
**b)** Nenne alle geraden Zahlen zwischen 111 und 123!
**c)** Nenne alle ungeraden Zahlen zwischen 752 und 756!
**d)** Nenne zwei ungerade Zahlen, deren Differenz 16 (9) ist!
**e)** Nenne zwei gerade Zahlen, deren Differenz 11 (28) ist!

2. Im Bild A 3 soll $N_g$ alle geraden und $N_u$ alle ungeraden Zahlen enthalten.
   **a)** Worin liegen 1; 5; 8; 11; 12; 17; 28; 84; 100; 127?
   **b)** Nenne drei weitere Zahlen aus $N_g$ und drei Zahlen aus $N_u$!
   **c)** Nenne eine Zahl, die weder in $N_g$ noch in $N_u$ liegt!
   **d)** Nenne eine Zahl, die in $N_g$ und in $N_u$ liegt!

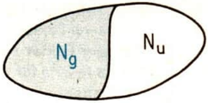


Bild A 3

3. Ordne die Zahlen 17; 22; 35; 2; 0; 7; 11; 26 in die *unteren* Zeilen der Tabellen ein! Vervollständige die Tabellen! Welche gemeinsame Eigenschaft haben jeweils die Zahlen in der unteren Zeile? Begründe!

| $n$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot n$ | | | | | |

| $n$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot n + 1$ | | | | |

4.* Bei den folgenden Zahlen sind Grundziffern durch $*$ ersetzt. Gib trotzdem an, welche Zahlen gerade sind!
$a = 2 \cdot 5{*}1{*} + 1$; $b = 2 \cdot 4{*}7{*}$; $c = 75{*}3 \cdot 2$
$d = 4 \cdot 4{*}6{*} + 1$; $e = 2 \cdot {*}{*} + 1$; $f = 3{*}4{*} \cdot 2$

5.* Welche der Zahlen $a$ bis $d$ sind ungerade Zahlen?
($k$, $m$, $n$ sollen irgendwelche natürliche Zahlen sein.)
$a = 2 \cdot k + 1$; $b = 2 \cdot k$; $c = m \cdot 2$; $d = 1 + 2 \cdot m$

6. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und vervollständige sie einschließlich der Tabellenköpfe!

**a)**

| $x$ | $2 \cdot x$ |
|---|---|
| 5 | |
| | 18 |
| 11 | |
| | 24 |

**b)**

| $k$ | $3 \cdot k$ |
|---|---|
| 5 | |
| | 24 |
| | 36 |
| 7 | |

**c)**

| $n$ | |
|---|---|
| 9 | 54 |
| 10 | 60 |
| 15 | |
| | 120 |

**d)**

| | |
|---|---|
| 6 | 24 |
| 9 | 36 |
| 16 | |
| | 60 |

Gib jeweils einen gemeinsamen Teiler der Zahlen in der zweiten Spalte an! (Er soll nicht gleich 1 sein.)

7. Zeichne drei Tabellen nach folgendem Muster und ordne, wenn möglich, die Zahlen 20; 33; 18; 23; 60; 49; 27; 39; 25; 100; 35 und 32 in die *rechten* Spalten der Tabellen ein! Vervollständige dabei auch die linken Spalten! (Einige Zahlen wurden als Beispiel schon eingeordnet.)

**a)**

| $n$ | $2 \cdot n$ |
|---|---|
| | 20 |

**b)**

| $n$ | $3 \cdot n$ |
|---|---|
| | 33 |

**c)**

| $n$ | $5 \cdot n$ |
|---|---|
| | 20 |

8. In welcher Form läßt sich jede Zahl schreiben, wenn sie durch **a)** 8, **b)** 17, **c)** 5, **d)** 2, **e)** 10 teilbar ist?

## 3 Teilbarkeit eines Produktes

*Wir wissen*, daß das Produkt $24 \cdot 15$ durch seine Faktoren 24 und 15 teilbar ist. Ohne das Produkt zu berechnen, können wir aber auch feststellen, daß es durch 6 und durch 5 teilbar ist, denn:

$$24 = \mathbf{6} \cdot 4 \qquad\qquad 15 = 3 \cdot \mathbf{5}$$

*also* $24 \cdot 15 = (\mathbf{6} \cdot 4) \cdot 15 = \mathbf{6} \cdot (4 \cdot 15)$ *also* $24 \cdot 15 = 24 \cdot (3 \cdot \mathbf{5}) = (24 \cdot 3) \cdot \mathbf{5}$

Das Produkt $24 \cdot 15$ ist also auch durch solche Zahlen teilbar, die Teiler der Faktoren sind. Allgemein gilt:

▶ 2 **Wenn bei einem Produkt mindestens ein Faktor durch $c$ teilbar ist, so ist auch das Produkt durch $c$ teilbar.**
**Kurz: Wenn $c \mid a$ oder $c \mid b$, so $c \mid a \cdot b$.**

Das Umgekehrte gilt jedoch nicht:
$10 \mid 24 \cdot 15$, aber $10 \nmid 24$ und $10 \nmid 15$.
Es gilt also **nicht**: Wenn $c \mid a \cdot b$, so $c \mid a$ oder $c \mid b$.
Mit Hilfe des Merksatzes A 2 kann man die Teilbarkeit einer größeren Zahl überprüfen, indem man sie in geeignete Faktoren zerlegt und deren Teilbarkeit überprüft.

■ 3 Die Zahl 210 ist durch 3 teilbar,
denn $210 = 21 \cdot 10$, und 21 ist durch 3 teilbar.

### Aufgaben

1. Begründe, daß das Produkt $a \cdot b$ durch $c$ teilbar ist, ohne es auszurechnen!

| $a \cdot b$ | $24 \cdot 13$ | $24 \cdot 13$ | $36 \cdot 14$ | $36 \cdot 14$ | $35 \cdot 49$ | $35 \cdot 56$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 6 | 13 | 7 | 12 | 7 | 4 |

2. Gib Teiler des Produkts **a)** $6 \cdot 7$, **b)** $5 \cdot 16$, **c)** $6 \cdot 14$, **d)** $35 \cdot 66$, **e)** $55 \cdot 26$ an, ohne es zu berechnen!

3. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
**a)** $10 \cdot n$ ist stets durch 2 teilbar.
**b)** $15 \cdot n$ ist stets durch 4 teilbar.

4. Prüfe durch Zerlegen in geeignete Faktoren, ob
**a)** 4 200 durch 6, **b)** 56 000 durch 7, **c)** 2 700 durch 4,
**d)** 27 000 durch 4, **e)** 6 900 durch 25, **f)** 30 000 durch 25 teilbar ist!

5.* Von zwei Zahlen $x$ und $y$ sei bekannt:
$x$ ist durch 4 teilbar; $y$ ist durch 15 teilbar.
Durch welche Zahlen ist das Produkt $x \cdot y$ gewiß teilbar?

6.* Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
**a)** Wenn $x$ und $y$ gerade Zahlen sind, so gilt: $4 \mid x \cdot y$.
**b)** Wenn $x$ und $y$ ungerade Zahlen sind, so gilt: $3 \mid x \cdot y$.

**7.** Ralf kauft 8 Farbstifte. Er weiß zwar, daß alle den gleichen Preis haben, kennt diesen aber nicht. Insgesamt soll er 2,85 M bezahlen. „Das kann nicht stimmen", meint er zur Verkäuferin und begründet: „Den Preis müßte man durch 2 teilen können." Hat er recht?

Bild A 4

**8.** Für eine Klassenfahrt hat jeder Teilnehmer 20 M zu bezahlen. Entscheide, ob man den Gesamtbetrag **a)** nur aus Fünfmarkstücken, **b)** nur aus Zehnmarkscheinen, **c)** nur aus Zwanzigmarkscheinen, **d)** nur aus Fünfzigmarkscheinen zusammensetzen kann!

**9.** Zerlege 24 so in zwei Faktoren, daß **a)** beide gerade sind, **b)** genau einer gerade ist, **c)** keiner gerade ist!

**10.** Zerlege 36 so in zwei Faktoren, daß **a)** beide durch 4 teilbar sind, **b)** genau einer durch 4 teilbar ist, **c)** keiner durch 4 teilbar ist!

## 4 Mengen von Teilern und Vielfachen

● **6** Bei den folgenden Aussagen wird „Menge" in unterschiedlicher Bedeutung verwendet. Vergleiche!
**a)** Die Menge der geraden Zahlen enthält die Zahl 38.
**b)** Unser Alphabet ist eine Menge von 26 Buchstaben.
**c)** Auf dem Sportplatz sind eine Menge Zuschauer.
**d)** Im Eimer ist eine Menge Wasser.

In der Mathematik verwendet man das Wort **Menge**, wenn man unterscheidbare Objekte zusammenfaßt. Man benutzt es **nicht** an Stelle von *viel*.

■ **4** Beispiele für Mengen sind:
Die Menge $T_{12}$ der Teiler von 12;
Die Menge $T_6$ der Teiler von 6;
Die Menge $Z$ der zweistelligen Zahlen, die durch 80 teilbar sind;
Die Menge $V_6$ der Vielfachen von 6.

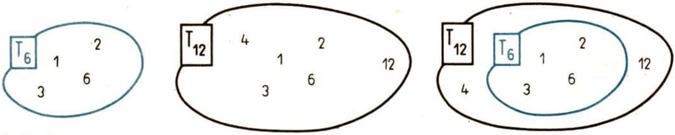
Man nennt diejenigen Objekte, die zu einer Menge gehören, die **Elemente** dieser Menge. Wir sagen zum Beispiel: *3 ist ein Element der Menge* $T_{12}$, und schreiben dafür: $3 \in T_{12}$.

● **7** Nenne einige Elemente der Mengen $T_{12}$, $T_6$, $Z$ und $V_6$!

Die Mengen $T_{12}$, $T_6$ und $Z$ kann man auch durch Aufzählen ihrer Elemente angeben. Dazu verwendet man geschweifte Klammern. Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge an, in der man die Elemente aufschreibt.

■ 5 $T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} = \{3; 2; 6; 1; 4; 12\}$
$T_6 = \{1; 2; 3; 6\} = \{2; 6; 3; 1\}$
$Z = \{80\}$

Die Menge $Z$ enthält nur ein einziges Element. Die Menge $V_6$ enthält dagegen unendlich viele Elemente; sie läßt sich nicht durch Aufzählung ihrer Elemente angeben.
Zwischen den Mengen $T_{12}$ und $T_6$ besteht ein Zusammenhang. Jedes Element von $T_6$ ist auch Element von $T_{12}$. Umgekehrt gibt es in $T_{12}$ Zahlen, die nicht zu $T_6$ gehören.
Wir sagen: $T_6$ ist eine **Teilmenge** von $T_{12}$. Wir schreiben: $T_6 \subset T_{12}$. Das **Mengendiagramm** im Bild A 5 veranschaulicht diese Beziehung.




## Aufgaben

Bild A 5

1. Bei welchen Aussagen wird *Menge* im Sinne einer Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte verwendet?
   **a)** Köpenick gehört zur *Menge* der Stadtbezirke Berlins.
   **b)** In der *Menge* der Vielfachen von 7 ist 28 enthalten.
   **c)** Fred hatte in der letzten Woche eine *Menge* Ärger.
   **d)** Ute nimmt statt Milch die gleiche *Menge* Wasser.

2. $M_1$ sei die Menge der Teiler von 16. $M_2$ sei die Menge der Vielfachen von 4, die kleiner als 19 sind. $M_3$ sei die Menge der durch 10 teilbaren Zahlen zwischen 12 und 29.
   **a)** Gib diese Mengen in der Schreibweise $M = \{\ \dots\ \}$ an!
   **b)** Welche Aussagen sind wahr? $16 \in M_1$, $18 \in M_2$, $20 \in M_3$, $12 \in M_2$, $12 \in M_1$, $10 \in M_3$

3. Gib die Menge der zweistelligen Zahlen z an, für die gilt:
   **a)** $z \mid 100$, **b)** $z \mid 36$, **c)** $25 \mid z$, **d)** $11 \mid z$!

4. Es sei $k$ die Menge der Punkte des Kreises und $g$ die Menge der Punkte der Geraden im Bild A 6. Welche Aussagen sind wahr?
   **a)** $P \in k$, $Q \in k$, $R \in k$, $S \in k$, $T \in k$
   **b)** $P \in g$, $Q \in g$, $R \in g$, $S \in g$, $T \in g$

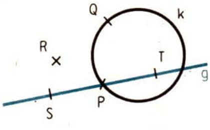



Bild A 6

5. Prüfe, welche Aussagen wahr sind!
   **a)** $\{6; 18; 30\} \subset \{6; 12; 18; 24; 30\}$ **c)** $\{2; 3; 5\} \subset \{3; 5; 2\}$
   **b)** $\{75; 60; 45\} \subset \{14; 30; 45; 60; 75\}$ **d)** $\{3; 5; 6; 7\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

6. Veranschauliche die Teilmengenbeziehungen aus Aufgabe 5 durch Mengendiagramme!

7. Welche Aussagen sind wahr?
   **a)** Die Menge der Vielfachen von 8 ist eine Teilmenge der Menge der Vielfachen von 4.

**b)** Die Menge aller zweistelligen Zahlen ist Teilmenge der Menge aller dreistelligen Zahlen.
**c)*** Die Menge aller geraden Zahlen ist Teilmenge der Menge aller Vielfachen von 3.

8. Es sei $N$ die Menge der natürlichen, $N_g$ die Menge der geraden, $N_u$ die Menge der ungeraden Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
**a)** $N_u \subset N$ **b)** $N \subset N_g$ **c)** $N_g \subset N$ **d)** $N_u \subset N_g$
Veranschauliche die wahren Aussagen in einem einzigen Mengendiagramm!

9.* Gib von $\{34; 35; 36; 37\}$ **a)** drei Teilmengen mit unterschiedlicher Anzahl von Elementen, **b)** alle Teilmengen mit drei Elementen an!

10.* **a)** Gib eine Menge mit möglichst wenig Elementen an, von der sowohl $\{2; 3; 4\}$ als auch $\{4; 5; 6\}$ Teilmengen sind!
**b)** Gib eine Menge mit möglichst vielen Elementen an, die Teilmenge von $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ und von $\{3; 4; 5; 6; 7\}$ ist!

11. **a)** Nenne acht Wörter, deren Buchstaben eine Teilmenge der Buchstabenmenge des Wortes BUCHREGAL bilden!
**b)*** Nenne ein Wort, für dessen Buchstabenmenge sowohl {D, E, R} als auch {D, I, E} Teilmengen sind!
**c)*** Nenne ein Wort, dessen Buchstabenmenge Teilmenge sowohl von {T, E, I, L} als auch von {V, I, E, L} ist!

12. **a)** Es sei $V_5$ die Menge der Vielfachen von 5 und $V_{10}$ die Menge der Vielfachen von 10. Welche Beziehung besteht zwischen $V_5$ und $V_{10}$?
**b)*** Was gilt für $V_a$ und $V_b$, wenn $a \mid b$ gilt?

## 5 Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Alle Teiler einer Zahl kann man in Form eines „Teilersterns" übersichtlich aufschreiben (↗ Bild A 7). Um keinen Teiler zum Beispiel von 20 zu übersehen, ermittelt man alle Paare von Zahlen, deren Produkt 20 ist.

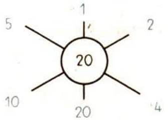


Bild A 7

● 8 Schreibe alle Teiler der Zahlen **a)** 21, **b)** 23, **c)** 25, **d)** 28, **e)** 1 übersichtlich auf! Gib jeweils auch die Anzahl der Teiler an!

Die Zahl 1 hat genau einen Teiler, nämlich 1 selbst. Jede andere natürliche Zahl hat mindestens zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst. Es gibt Zahlen mit genau zwei und solche mit mehr als zwei Teilern. Null hat sogar unendlich viele Teiler.

■ 6 **a)** $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ **b)** $3 = 1 \cdot 3$ **c)** $1 = 1 \cdot 1$ **d)** $0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = \ldots$

Jede natürliche Zahl läßt sich als Produkt von Teilern schreiben. Wenn *alle* Faktoren des Produktes größer als 1 sind, dann kann die Zahl selbst nicht als Faktor auftreten. In einem solchen Fall spricht man von einer **Zerlegung** der Zahl. Also ist $1 \cdot 12$ keine Zerlegung von 12, wohl aber $2 \cdot 6$ und $3 \cdot 4$.

| | |
|---|---|
| Gegebene Zahl: | 12 |
| Zerlegung in zwei Faktoren: | $2 \cdot 6$     $4 \cdot 3$ |
| Weitergehende Zerlegung: | $2 \cdot 2 \cdot 3$ |

Jede zerlegbare Zahl läßt sich in ein Produkt solcher Zahlen zerlegen, die sich nicht weiter zerlegen lassen. Solche Zahlen können als „Bausteine" für die anderen Zahlen angesehen werden. Sie sind größer als 1 und haben nur 1 und sich selbst als Teiler. Wir legen für diese Zahlen einen gemeinsamen Namen fest: **Primzahlen**. Eine solche Festlegung nennt man eine **Definition**.

▶ 3 **DEFINITION: Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die größer als 1 und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.**

Alle übrigen natürlichen Zahlen (außer 0 und 1) heißen **zusammengesetzte Zahlen.**

Man muß Definitionen von Aussagen unterscheiden. Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Definitionen sind dagegen Verabredungen, Festlegungen, Namensgebungen.
Wir kennen bereits Definitionen. Zum Beispiel wurde durch ▶ 1 die Teilbarkeit natürlicher Zahlen definiert. Auch die Kleiner-Beziehung läßt sich definieren:

$a$ heißt kleiner als $b$ ($a < b$), wenn es eine Zahl $x \neq 0$ gibt, so daß $a + x = b$ gilt.

● 9 **a)** Gib alle Primzahlen bis 15 an! **b)** Gib alle zusammengesetzten Zahlen bis 15 an! Schreibe sie als Produkte von Primzahlen!

Schreibt man eine zusammengesetzte Zahl als Produkt von Primzahlen, so spricht man von einer **Zerlegung in Primfaktoren.**

■ 7 **a)**
$$72 = 9 \cdot 8$$
$$72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$$
$$\underline{\underline{72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$$

**b)**
$$72 = 2 \cdot 36$$
$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 18$$
$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9$$
$$\underline{\underline{72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}}$$

Häufig kann man Primfaktorenzerlegungen durch Verwenden von Potenzen kürzer schreiben, zum Beispiel $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

## Aufgaben

1. Gib alle Teiler der folgenden Zahlen übersichtlich an!
**a)** 15 **b)** 16 **c)** 35 **d)** 19

2. Gib die Anzahl der Teiler von **a)** 9, **b)** 13, **c)** 30 an!

3. **a)** Udo meint: „Je größer eine Zahl ist, desto mehr Teiler hat sie.“ Ist seine Aussage wahr?
**b)** Ilka behauptet: „Jede Zahl, die größer als 1 ist, hat eine gerade Anzahl von Teilern.“ Ist ihre Aussage wahr?

4. Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
**a)** 1 hat genau einen Teiler.
**b)** Jede Zahl, die größer als 1 ist, hat mindestens zwei Teiler.
**c)** Jede Zahl hat einen Teiler.
**d)** Jede Zahl hat genau einen Teiler.

5. Ermittle alle Primzahlen von 15 bis 40!

6. Welche der folgenden Zahlen sind Primzahlen?
**a)** 7; 9; 17; 21; 27; 49; 75; 138 **b)** 19; 29; 39; 43; 56; 73; 77; 81

7. **a)** Gib alle geraden Primzahlen an!
**b)** Gib alle durch 11 teilbaren Primzahlen an!
**c)** Nenne alle durch 15 teilbaren Primzahlen!

8. Zerlege in Primfaktoren!
**a)** 44 **b)** 46 **c)** 75 **d)** 60 **e)** 49 **f)** 100 **g)** 140 **h)** 306 **i)** 96 **k)** 256

9. Ermittle alle Teiler von $n$, die kleiner als $n$ sind! (Dabei soll $n$ nicht berechnet werden.)
**a)** $n = 3 \cdot 7 \cdot 11$ **b)** $n = 3 \cdot 7 \cdot 7$ **c)** $n = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

10.* Welche der Zahlen **a)** $2 \cdot 11$, **b)** $2^2 \cdot 3 \cdot 11$, **c)** $3^2 \cdot 11$ sind Teiler von $z = 2 \cdot 3^4 \cdot 11$?

11. Die Zahlenwerte der Seitenlängen eines Rechtecks seien natürliche Zahlen. Kann der Zahlenwert **a)** des Umfangs, **b)** des Flächeninhalts eine Primzahl sein?

12. **a)** Axel sagt: „Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die höchstens zwei Teiler haben.“ Warum kann das keine Definition für „Primzahl“ sein? Versuche, daraus eine geeignete Definition herzustellen!
**b)** Beate sagt: „Primzahlen heißen die Zahlen 2; 3; 5; 7; 11; 13 und so weiter.“ Warum ist dies keine brauchbare Definition?

## 6 Teilbarkeit von Summen und Differenzen

*Wir wissen bereits:* Die Teilbarkeit der Zahl 2436 durch 3 kann man feststellen, indem man sie in geeignete Faktoren zerlegt, zum Beispiel in $12 \cdot 203$. Da 12 durch 3 teilbar ist, ist es auch 2436. Dabei stützt man sich auf die wahre Aussage:

*Wenn bei einem Produkt mindestens ein Faktor durch 3 teilbar ist, so ist auch das Produkt durch 3 teilbar.*

Oft ist es aber leichter, eine Zahl nicht in Faktoren, sondern in Summanden zu zerlegen. Das führt auf die Frage, ob eine entsprechende Aussage auch für Summen gilt.

● **10** **a)** Ersetze in der Aussage oben *Produkt* und *Faktor* durch *Summe* und *Summand*! Welche Aussage erhältst du?

**b)** Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie! Überprüfe, ob die von dir formulierte Aussage wahr ist!

| $a$ | $b$ | $3 \mid a$ | $3 \mid b$ | $3 \mid a+b$ |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 7 | ja | nein | |
| 14 | 18 | | | |
| 9 | 27 | | | |

Aus Auftrag A 10 läßt sich vermuten, daß die Aussage

*Wenn zwei Zahlen a und b durch 3 teilbar sind, dann ist ihre Summe $a + b$ durch 3 teilbar*

wahr ist.

Wir haben bereits erkannt, daß die Wahrheit einer solchen Aussage nicht durch Angeben einzelner Beispiele nachzuweisen ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Aussage für *alle* durch 3 teilbaren Zahlen $a$ und $b$ gilt; wir wollen sie **beweisen**.

Es wird **vorausgesetzt**: $a$ und $b$ sind durch 3 teilbar.

Es wird **behauptet**: $a + b$ ist durch 3 teilbar.

Wir überlegen:

1. Die Voraussetzung *a und b sind durch 3 teilbar* bedeutet:
   Es gibt Zahlen $x$ und $y$, so daß gilt: $a = 3 \cdot x$ und $b = 3 \cdot y$ (↗ Bild A 8).
2. Die Behauptung *a + b ist durch 3 teilbar* bedeutet:
   Es gibt eine Zahl z, so daß gilt: $a + b = 3 \cdot z$.

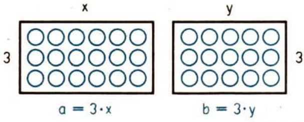



Bild A 8

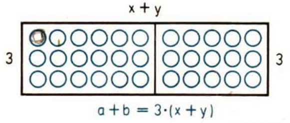



Bild A 9

3. Wir zeigen jetzt, daß aus der Voraussetzung die Behauptung folgt. Dazu bilden wir die Summe $a + b$ und formen sie um:

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \cdot x + 3 \cdot y \\ &= 3 \cdot (x + y) \\ &= 3 \cdot z \quad (\nearrow \text{ Bild A 9}) \end{aligned}$$

Damit haben wir unsere Vermutung bewiesen.

Wir wollen nun **Voraussetzung, Behauptung** und **Beweis** kurz und übersichtlich aufschreiben.

■ 8 Wenn $3 \mid a$ und $3 \mid b$, so $3 \mid a + b$.

**Voraussetzung:** $3 \mid a;\ 3 \mid b$

**Behauptung:** $3 \mid a + b$

**Beweis:**

| | |
|---|---|
| $3 \mid a;\ 3 \mid b$ | (Voraussetzung) |
| $a = 3 \cdot x;\ b = 3 \cdot y$ | (Teilerdefinition) |
| $a + b = 3 \cdot x + 3 \cdot y$ | |
| $a + b = 3 \cdot (x + y)$ | (Distributivgesetz) |
| $a + b = 3 \cdot z$ | ($x + y = z,\ z \in N$) |
| $3 \mid a + b$ | (Teilerdefinition) |

● 11 Beweise wie im Beispiel A 8:
**a)** Wenn $7 \mid a$ und $7 \mid b$, so $7 \mid a + b$,
**b)** Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$! $\quad n \neq 0$

Eine wichtige wahre Aussage nennt man in der Mathematik **Satz**.

▶ 4 **SATZ: Wenn zwei Zahlen *a* und *b* durch *n* teilbar sind, so ist auch ihre Summe *a* + *b* durch *n* teilbar.**

Umgekehrt gilt jedoch nicht:
*Wenn die Summe zweier Zahlen durch n teilbar ist, so sind die Zahlen selbst durch n teilbar.*
Zum Beispiel gilt für $17 + 13 = 30$ zwar $3 \mid 30$, nicht aber $3 \mid 17$ und $3 \mid 13$.
Wir wissen bereits aus Auftrag A 10: Wenn von zwei Zahlen $a$ und $b$ nur eine durch $n$ teilbar ist, so muß nicht $a + b$ durch $n$ teilbar sein. Tatsächlich gilt sogar stets:

▶ 5 **SATZ: Wenn $n \mid a$ und $n \nmid b$, so $n \nmid a + b$.**

Auf einen Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten. Auch künftig werden wir nicht alle Sätze beweisen.

● 12 Formuliere zu den Sätzen 4 und 5 entsprechende Sätze für die Teilbarkeit der Differenz zweier Zahlen!

Die neuen Sätze ermöglichen uns, die Teilbarkeit größerer Zahlen zu untersuchen.

■ 9 **a)** $7 \mid 721$, denn $721 = 700 + 21$ und $7 \mid 700$ und $7 \mid 21$.
**b)** $7 \nmid 725$, denn $725 = 700 + 25$ und $7 \mid 700$ und $7 \nmid 25$.
**c)** $7 \mid 693$, denn $693 = 700 - 7$ und $7 \mid 700$ und $7 \mid 7$.
**d)** $7 \nmid 695$, denn $695 = 700 - 5$ und $7 \mid 700$ und $7 \nmid 5$.

## Aufgaben

1. Nenne Teiler der Summen, ohne diese zu berechnen!
**a)** $15 + 21$ **b)** $9 + 12$ **c)** $10 + 15$ **d)** $20 + 36$ **e)** $24 + 36$

2. Überprüfe, ob $x + y$ durch $n$ teilbar ist! Begründe!
**a)** $x = 600,\ y = 78,\ n = 4$ **b)** $x = 78,\ y = 36,\ n = 6$
**c)** $x = 21,\ y = 22,\ n = 7$ **d)** $x = 7\,200,\ y = 56,\ n = 8$

3. Überprüfe die folgenden Aussagen! Begründe!
**a)** $5 \mid 65 + 70$ **c)** $4 \mid 210 + 38$ **e)** $9 \mid 900 - 80$
**b)** $3 \mid 270 + 25$ **d)** $7 \mid 560 - 35$ **f)** $6 \mid 420 - 54$

4. Welche der Zahlen 603; 214; 96; 3072; 4205 sind durch 3 teilbar? Begründe!

5. Welche der Zahlen 1428; 63006; 2828; 70777; 4915 sind durch 7 teilbar? Begründe!

6. Setze in $36 + n$ eine solche Zahl für $n$ ein, daß die Summe **a)** durch 12, **b)** nicht durch 6, **c)** durch 7 teilbar ist!

7.* Gib ein Zahlenpaar $(x, y)$ an, für das gilt:
**a)** $5 \mid x$, $5 \mid y$ und $5 \mid x + y$, **b)** $5 \mid x$, $5 \mid y$ und $5 \nmid x + y$,
**c)** $5 \mid x$, $5 \nmid y$ und $5 \mid x + y$, **d)** $5 \mid x$, $5 \nmid y$ und $5 \nmid x + y$,
**e)** $5 \nmid x$, $5 \nmid y$ und $5 \mid x + y$, **f)** $5 \nmid x$, $5 \nmid y$ und $5 \nmid x + y$!

8. Überprüfe die folgenden Aussagen! Begründe!
**a)** $24 + 48 + 36$ ist durch 6 teilbar. **b)** $81 + 9 + 17$ ist durch 9 teilbar.

9. Stelle fest, ob $z$ durch $n$ teilbar ist!
**a)** $z = 693$, $n = 7$ **b)** $z = 882$, $n = 9$ **c)** $z = 354$, $n = 6$

10. Ersetze * in 42*80 durch eine solche Ziffer, daß eine **a)** durch 7, **b)** durch 6 teilbare Zahl entsteht!

11. Berechne mündlich!
**a)** 177 : 3 **b)** 252 : 9 **c)** 445 : 5 **d)** 891 : 3 **e)** 343 : 7

12.* Ergänze die Tabelle! Formuliere jeweils eine Aussage dazu! Beweise sie! (Bei $a - b$ sei $b$ nicht größer als $a$.)

| $a$ | $b$ | $a + b$ | $a - b$ |
|---|---|---|---|
| gerade | gerade | | |
| gerade | ungerade | | |

13. Zerlege 24 so in zwei Summanden, daß **a)** beide gerade sind, **b)** nur ein Summand gerade ist, **c)** kein Summand gerade ist!

## 7 Teilbarkeitsregeln

Das Untersuchen auf Teilbarkeit kann man sich erleichtern durch Teilbarkeitsregeln. Wir kennen bereits Regeln für die Teilbarkeit einer Zahl durch 2, 5 und 10. Zum Beispiel ist 5738 durch 2 teilbar, weil 8 die letzte Grundziffer dieser Zahl ist. Statt *Grundziffer* sagt man oft auch kürzer *Ziffer*.

**Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist, ist durch 2 teilbar.**
**Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist, ist durch 5 teilbar.**
**Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 ist, ist durch 10 teilbar.**
**Alle anderen Zahlen sind nicht durch 2, 5 oder 10 teilbar.**

Diese und auch andere Regeln kann man mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen beweisen.

● **13** Überprüfe mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen, ob die Zahlen **a)** 7300, **b)** 7324, **c)** 7315 durch 4 teilbar sind!

*Hinweis:* Schreibe die Zahlen als Vielfache von 100 oder als Summen, bei der ein Summand ein Vielfaches von 100 und der andere kleiner als 100 ist!

▶ 6 **SATZ: Jede Zahl, deren letzte beide Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden, ist durch 4 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 4 teilbar.**

■ **10** Wir untersuchen, ob 52836 und 73439 durch 4 teilbar sind.

**a)** $4 \mid 52\,8\,36$, denn $4 \mid 36$   **b)** $4 \nmid 73\,4\,39$, denn $4 \nmid 39$

Auch für die Teilbarkeit durch 3 und 9 gibt es Regeln. In ihnen wird aber nichts über die letzten Ziffern einer Zahl ausgesagt, sondern über ihre **Quersumme**. Die Quersumme von 7251 ist $7 + 2 + 5 + 1 = 15$.

▶ 7 **SATZ: Jede Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist durch 3 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.**

▶ 8 **SATZ: Jede Zahl, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, ist durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.**

■ **11** Wir untersuchen, ob 5346 und 3728 durch 3 und durch 9 teilbar sind.

| 5346 hat die Quersumme | 3728 hat die Quersumme |
|---|---|
| $5 + 3 + 4 + 6 = 18$. | $3 + 7 + 2 + 8 = 20$. |
| $3 \mid 18$; also $3 \mid 5\,346$ | $3 \nmid 20$; also $3 \nmid 3\,728$ |
| $9 \mid 18$; also $9 \mid 5\,346$ | $9 \nmid 20$; also $9 \nmid 3\,728$ |

● **14** Begründe die folgende Aussage!

*Wenn eine Zahl a durch* ***6*** *teilbar ist, so ist a durch* ***2*** *und durch* ***3*** *teilbar.*

Wir wollen überlegen, ob auch das Umgekehrte gilt.

*Wenn eine Zahl a durch* ***2*** *und durch* ***3*** *teilbar ist, so ist a durch* ***6*** *(durch* $2 \cdot 3$*) teilbar.*

● **15** Ergänze die Tabelle! Überprüfe daran die Aussage!

| $a$ | 18 | 27 | 22 | 42 |
|---|---|---|---|---|
| $2 \mid a$ | ja | | | |
| $3 \mid a$ | ja | | | |
| $6 \mid a$ | ja | | | |

Aus den Ergebnissen des Auftrags A 15 läßt sich vermuten:

▶ 9 **SATZ: Jede Zahl, die durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 6 teilbar.**

Auf einen Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten.

■ 12 Wir untersuchen, ob 5478 und 5854 durch 6 teilbar sind.

| | |
|---|---|
| $2 \mid 5478$, denn 5478 endet auf 8. | $2 \mid 5854$, denn 5854 endet auf 4. |
| $3 \mid 5478$, denn | $3 \nmid 5854$, denn |
| $5 + 4 + 7 + 8 = 24$ und $3 \mid 24$. | $5 + 8 + 5 + 4 = 22$ und $3 \nmid 22$. |
| Also gilt: $6 \mid 5478$. | Also gilt: $6 \nmid 5854$. |

## Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlen sind **a)** durch 10, **b)** durch 100, **c)** durch 5, **d)** durch 2 teilbar? Begründe!
2 370; 43 765; 7 800; 776; 460; 37 000; 9 874; 1 395

2. Gib eine vierstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 schreiben läßt und
**a)** durch 2 teilbar ist, **b)** nicht durch 2 teilbar ist,
**c)** durch 5 teilbar ist, **d)** nicht durch 5 teilbar ist!

3.* **a)** Gib die größte und die kleinste fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 0, 2, 4, 7 und 9 schreiben läßt und durch 5 teilbar ist!
**b)** Gib die größte und die kleinste vierstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 5 und 7 schreiben läßt und durch 5 teilbar ist!

4. Eine vierstellige Zahl hat **a)** 0 als letzte Ziffer, **b)** 0 als letzte und vorletzte Ziffer. Nenne Teiler der Zahl!

5.* Begründe mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen, daß 7300 und 7375 durch 25 teilbar sind und daß 7323 nicht durch 25 teilbar ist! Formuliere eine Teilbarkeitsregel für 25!

6. Welche der folgenden Zahlen sind **a)** durch 4, **b)*** durch 25 teilbar?
5 716; 3 120; 9 815; 2 350; 4 980; 25 234; 29 940; 14 475

7. **a)** Gib eine fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 0, 1, 3, 5 und 6 schreiben läßt und durch 4 teilbar ist!
**b)*** Gib die größte und die kleinste fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 2, 3, 5, 7 und 8 schreiben läßt und durch 4 teilbar ist!

8. **a)** Nenne die kleinste durch 8 teilbare Zehnerpotenz!
**b)** Verwende das Ergebnis von a), um festzustellen, ob 27 320 (45 776; 73 641) durch 8 teilbar ist!
**c)** Formuliere entsprechend dem Satz A 6 eine Teilbarkeitsregel für 8!

9. Welche der folgenden Zahlen sind durch 3 teilbar?
517; 4 257; 8 721; 24 036; 20 188; 58 761; 213 421; 539 820

**10.** Welche der folgenden Zahlen sind durch 9 teilbar?
783; 3 481; 8 685; 11 201; 26 743; 87 444; 387 644; 564 291

**11.** Gib drei fünfstellige Zahlen an, die
**a)** durch 3 teilbar sind, **b)** nicht durch 3 teilbar sind,
**c)** durch 9 teilbar sind, **d)** nicht durch 9 teilbar sind!

**12.** Überprüfe die Teilbarkeit der folgenden Zahlen durch 2; 3; 4; 5; 9 und 10 mit Hilfe von Teilbarkeitsregeln!
**a)** 3 678 **b)** 14 586 **c)** 67 924 **d)** 23 456 100

**13.** Ersetze $*$ in $725{*}6$ durch eine solche Ziffer, daß eine **a)** durch 4, **b)** durch 5, **c)** durch 3, **d)** durch 9 teilbare Zahl entsteht!

**14.** Welche der folgenden Zahlen sind durch 6 teilbar?
**a)** 756 **b)** 2 847 **c)** 9 462 **d)** 5 344 **e)** 78 528

**15.*** Gib die kleinste und die größte vierstellige Zahl an, die durch 6 teilbar ist!

**16.** **a)** Überprüfe, ob es zum Satz A 9 eine entsprechende Teilbarkeitsregel für 8 gibt!
**b)*** Formuliere entsprechend Satz A 9 eine Teilbarkeitsregel für 12! Untersuche dazu einige Beispiele!

## Zusammenfassung

**Aussagen** sind entweder wahr oder falsch. Durch einen **Beweis** wird die Wahrheit einer Aussage nachgewiesen. Wichtige wahre Aussagen heißen **Sätze**. Läßt sich für eine Aussage ein Gegenbeispiel angeben, so ist sie als falsch nachgewiesen.
**Definitionen** sind dagegen Festlegungen.

*Beispiele für Definitionen:*
▶ 1 Definition für *Vielfaches*, *Teiler* und *teilbar*
▶ 3 Definition für *Primzahl*

*Beispiele für Sätze:*
▶ 2 Satz über die Teilbarkeit eines Produktes
▶ 4 Satz über die Teilbarkeit einer Summe
▶ 6 Teilbarkeitsregel für 4

*Kurzform für die behandelten Teilbarkeitsregeln:*

| | |
|---|---|
| $10 \mid n$ | wenn letzte Ziffer von $n$ gleich 0 ist |
| $2 \mid n$ | wenn letzte Ziffer von $n$ gleich 0, 2, 4, 6 oder 8 ist |
| $5 \mid n$ | wenn letzte Ziffer von $n$ gleich 0 oder 5 ist |
| $4 \mid n$ | wenn die letzten zwei Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden |
| $8 \mid n$ | wenn die letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden |
| $3 \mid n$ | wenn die Quersumme von $n$ durch 3 teilbar ist |
| $9 \mid n$ | wenn die Quersumme von $n$ durch 9 teilbar ist |
| $6 \mid n$ | wenn $2 \mid n$ und $3 \mid n$ gilt |

# Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler

## 8 Gemeinsame Teiler

● 16 Ermittle die Primfaktorenzerlegung von 630, indem du **a)** mit dem Primfaktor 2, **b)** mit dem Primfaktor 7, **c)** mit $10 \cdot 63$ beginnst!

Jede zusammengesetzte Zahl hat genau eine Primfaktorenzerlegung.
Wir zerlegen 198 und 385 in Primfaktoren:

$198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11,\qquad 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11.$

● 17 Nenne aufgrund der Primfaktorenzerlegung **a)** Teiler von 198, **b)** Teiler von 385, **c)** Teiler von 198 und 385!

Die Zahl 11 ist **gemeinsamer Teiler** von 198 und 385. Gemeinsame Teiler kann man auch mit Hilfe von Tabellen ermitteln.

■ 13 **a)**

| Teiler von 24 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | | 12 | | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teiler von 18 | 1 | 2 | 3 | | 6 | | 9 | | 18 | |

1, 2, 3, 6 sind gemeinsame Teiler von 24 und 18.

**b)**

| Teiler von 25 | 1 | | | 5 | | | | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teiler von 18 | 1 | 2 | 3 | | 6 | 9 | 18 | |

1 ist der einzige gemeinsame Teiler von 25 und 18.

Der **größte gemeinsame Teiler** (g. g. T.) von 24 und 18 ist 6. Der g. g. T. von 25 und 18 ist 1.
Zwei natürliche Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander **teilerfremd**. Die Zahlen 25 und 18 sind zueinander teilerfremd.

### Aufgaben

1. Ermittle alle gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen!
**a)** 12 und 15 **b)** 7 und 9 **c)** 6 und 60 **d)** 45 und 75

2. Gib alle Teiler von 24 an! Suche unter ihnen diejenigen heraus, die auch Teiler von **a)** 4, **b)** 7, **c)** 48, **d)** 36 sind!

3. Ermittle den g. g. T. der folgenden Zahlen!
**a)** 12 und 18 **b)** 45 und 60 **c)** 28 und 49 **d)** 36 und 55
**e)** 63 und 72 **f)*** 12, 18 und 15 **g)*** 25, 26 und 130

4. Kürze folgende Brüche so weit wie möglich!
**a)** $\frac{4}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{5}, \frac{6}{36}, \frac{27}{18}$ **b)** $\frac{8}{12}, \frac{54}{60}, \frac{0}{29}, \frac{72}{48}, \frac{36}{12}$

5. Schreibe von den folgenden Zahlenpaaren ($a$; $b$) diejenigen heraus, bei denen $a$ und $b$ zueinander teilerfremd sind!
(8; 22), (23; 47), (41; 164), (19; 58), (42; 63), (17; 82)

**6.** **a)** Herr Müller will an zwei Seiten seines Gartens aus gleich langen Holzgittern einen Zaun setzen. Die eine Seite ist 24 m, die andere 18 m lang. Der Zahlenwert der Gitterlänge ist eine natürliche Zahl. Welche Längen sind möglich?
**b)** Welche Längen sind möglich, wenn die Seiten 25 m und 18 m lang sind?

**7.** Im Bild A 10 bedeuten $T_{12}$ die Menge der Teiler von 12, $T_{28}$ die Menge der Teiler von 28. Einige Teiler sind durch Buchstaben ersetzt.
**a)** Für welche Zahlen stehen Buchstaben?
**b)** Schreibe die Menge $T$ der gemeinsamen Teiler von 12 und 28 heraus!
**c)** Welche Beziehung besteht zwischen $T$ und $T_{12}$?

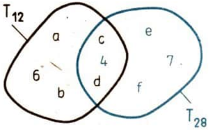


Bild A 10

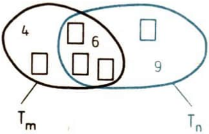


Bild A 11

**8.*** Das Diagramm im Bild A 11 für Teilermengen der Zahlen $m$ und $n$ enthält nicht alle Teiler. Man kann aber ersehen, wieviel Zahlen in jedes „Gebiet" gehören. Vervollständige das Diagramm! Gib die Zahlen $m$ und $n$ an!

## 9 Gemeinsame Vielfache

● **18** An einer Haltestelle verkehren zwei verschiedene Straßenbahnlinien; die eine hat einen Zugabstand von 8 Minuten, die andere von 12 Minuten. Um 6 Uhr fahren Züge beider Linien ab. Nach wieviel Minuten geschieht das zum ersten, zweiten, dritten, vierten Mal wieder?

Es gibt Zahlen, die Vielfache von 8 und zugleich von 12 sind. Solche Zahlen nennt man **gemeinsame Vielfache** von 8 und 12.

■ **14**

| Vielfache von 8 | 0 | 8 | | 16 | 24 | 32 | | 40 | 48 | 56 | | 64 | 72 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vielfache von 12 | 0 | | 12 | | 24 | | 36 | | 48 | | 60 | | 72 |

Gemeinsame Vielfache von 8 und 12 sind 0, 24, 48, 72, ...

● **19** Welche Zahl ist für jedes Paar von Zahlen ein gemeinsames Vielfaches? Begründe!

Unter den gemeinsamen Vielfachen von 8 und 12 ist 24 von besonderer Bedeutung, weil alle gemeinsamen Vielfachen auch Vielfache von 24 sind. Man nennt deshalb 24 **das kleinste gemeinsame Vielfache** (k. g. V.) von 8 und 12.[1])

[1]) *Bemerkung:* Man nennt 24 das *kleinste* gemeinsame Vielfache von 8 und 12, obwohl 0 auch ein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen ist. Null kann als k. g. V. auch auftreten, wenn mindestens eine der beiden Zahlen Null ist. Null ist dann das einzige gemeinsame Vielfache. Diese Fälle wollen wir beim k. g. V. künftig ausschließen.

▶ 10 **DEFINITION: Als kleinstes gemeinsames Vielfaches der natürlichen Zahlen $a$ und $b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) bezeichnet man das kleinste der gemeinsamen Vielfachen von $a$ und $b$, das verschieden von Null ist.**

● 20 Ermittle das k. g. V. von **a)** 10 und 15, **b)** 4 und 5, **c)** 6 und 18!
Wie groß kann das k. g. V. zweier Zahlen höchstens sein? Wie groß muß es mindestens sein?

| Wir ermitteln das k. g. V. zweier Zahlen $a$ und $b$, für die $a < b$ gilt, folgendermaßen: | |
|---|---|
| Wir bilden nacheinander die Vielfachen von $b$, bis wir zu demjenigen gelangen, das auch Vielfaches von $a$ ist. | ■ $a = 12$, $b = 15$<br>$12 \nmid 15$, $12 \nmid 30$, $12 \nmid 45$,<br>$12 \mid 60$<br>Das k. g. V. von 12 und 15 ist 60. |
| *Vereinfachungen* | |
| (1) Wenn $a \mid b$, dann ist $b$ das k. g. V.<br><br>(2) Wenn $a$ und $b$ teilerfremd sind, dann ist $a \cdot b$ das k. g. V. | ■ $a = 7$, $b = 28$<br>$7 \mid 28$<br>Das k. g. V. von 7 und 28 ist 28.<br>■ $a = 7$, $b = 9$<br>7 und 9 sind teilerfremd. Das k. g. V. von 7 und 9 ist $7 \cdot 9 = 63$. |

Das k. g. V. dreier Zahlen ermitteln wir schrittweise:

■ 15 Gesucht ist das k. g. V. von 4; 6 und 9.
Das k. g. V. von 4 und 6 ist 12; das k. g. V. von 12 und 9 ist 36. Also:
Das k. g. V. von 4; 6 und 9 ist 36.

■ 16 Gesucht ist das k. g. V. von 5; 12 und 15.
Das k. g. V. von 5 und 15 ist 15; das k. g. V. von 12 und 15 ist 60. Also:
Das k. g. V. von 5; 12 und 15 ist 60.

## Aufgaben

1. Berechne das k. g. V. von
**a)** 8; 20, **b)** 18; 9, **c)** 20; 30, **d)** 10; 7, **e)** 1; 5,
**f)** 15; 20, **g)** 15; 9, **h)** 3; 33, **i)** 24; 20, **k)** 27; 45,
**l)** 15; 50, **m)** 15; 60, **n)** 12; 28, **o)** 45; 35, **p)** 30; 50,
**q)** 6; 9; 12, **r)** 7; 12; 21, **s)** 8; 12; 15, **t)** 90; 15; 18!

2. Nenne jeweils zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$, für die gilt:
**a)** 50 ist ein gemeinsames Vielfaches von $x$ und $y$,
**b)** 60 ist ein gemeinsames Vielfaches von $x$ und $y$, aber nicht das k. g. V.
**c)** 40 ist das k. g. V. von $x$ und $y$!

**3.** $V_4$ sei die Menge der Vielfachen von 4, $V_{10}$ die Menge der Vielfachen von 10.

**a)** Ermittle das k. g. V. von 4 und 10! Wo muß es im Bild A 12 eingetragen werden?

**b)** Gib drei Zahlen an, die sowohl zu $V_4$ als auch zu $V_{10}$ gehören!

**c)** Die gemeinsamen Vielfachen von 4 und 10 sind Vielfache einer anderen Zahl. Wie heißt sie?

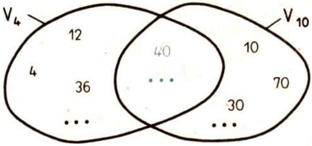


Bild A 12

**4.** Gib zwei natürliche Zahlen an, die **a)** 24, **b)** 15, **c)** 17, **d)** 20 als k. g. V. haben!

**5.** Ermittle Zahlen, die anstelle der Buchstaben stehen könnten!

| Zahl | *a* | *b* | 7 | 12 | 30 | 9 | *g* | *h* | *i* | *j* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl | 6 | 15 | *c* | *d* | *e* | *f* | 40 | 5 | 25 | 8 |
| k. g. V. | 18 | 30 | 20 | *d* | 30 | 72 | 20 | 65 | 100 | 6 |

**6.** Welche Aussagen können nicht wahr sein? Begründe!

**a)** Das k. g. V. von 70 und 280 ist 440.

**b)** Das k. g. V. von 135 und 28 ist 536.

**c)** Das k. g. V. von 72 und 45 ist 360.

**d)** Das k. g. V. von 27 und 32 ist 1368.

**7.** Schreibe das k. g. V. von $m$ und $n$ als Produkt von Primzahlpotenzen!

**a)** $m = 2 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ **b)** $m = 2 \cdot 3 \cdot 13$, $n = 3^2$

**c)** $m = 3 \cdot 11$, $n = 5 \cdot 13$ **d)** $m = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$

**8.*** Das k. g. V. von 8, 12 und $x$ sei 120.

**a)** Welche Primfaktoren muß $x$ unbedingt enthalten?

**b)** Welche Primfaktoren kann $x$ enthalten?

**c)** Gib eine Primzahl an, die kleiner als 10 und nicht Primfaktor von $x$ ist!

**9.** Eine Krankenhausstation bestellt Packungen mit je 50 Tabletten. In der Apotheke sind nur Packungen mit je 20 Tabletten vorhanden. In welchen Fällen kann die Belieferung genau in der gewünschten Anzahl erfolgen?

**10.** Claudia erzählt: „Im Ferienlager machten wir mit Bussen Ausflüge. Beim ersten Ausflug hatten wir Busse mit 24 Plätzen für die Fahrgäste, beim zweiten mit 16 Plätzen. Beide Male blieb kein Platz frei, und die Zahl der Fahrgäste war stets dieselbe. Sie lag zwischen 70 und 100.“ Wieviel Fahrgäste waren an jedem Ausflug beteiligt?

**11.*** Auf einer Modelleisenbahnanlage mit Zweizugbetrieb verkehren ein Schnellzug und ein Güterzug. Der Schnellzug benötigt für eine Runde 15 s, der Güterzug 21 s. Beide Züge starten gleichzeitig am Bahnhof. Nach welcher Zeit durchfahren sie wieder gleichzeitig den Bahnhof? Wieviel Runden haben sie dann jeweils zurückgelegt? (↗ Bild A 13)

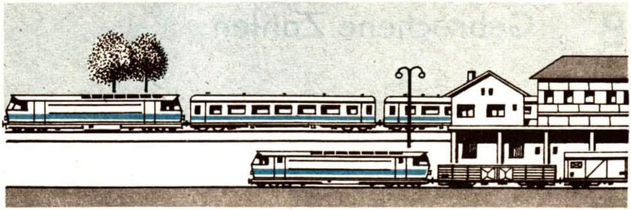


Bild A 13

## Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

**1.** **a)** Zerlege $m = 45$ und $n = 42$ in Primfaktoren!
**b)** Welche Zahlen sind gemeinsame Teiler von $m$ und $n$?
**c)** Gib für $m + n$ und $m - n$ alle Teiler an!
**d)** Gib für $m \cdot n$ alle Teiler an, die Primzahlen sind!
**e)** Nenne zwei Teiler von $m \cdot n$, die weder Teiler von $m$ noch Teiler von $n$ sind!
**f)** Gib das k. g. V. von $m$ und $n$ an!

**2.** Stelle die Teilbarkeit der Zahlen
**a)** 459; 798; 819; 2736 durch 3 (9; 6) fest,
**b)** 638; 856; 1028; 9632 durch 4 (8; 7) fest,
**c)*** 187; 341; 273; 442 durch 11 (13; 17) fest!

**3.*** Gib alle einstelligen Zahlen $n$ an, für die gilt:
**a)** $n \cdot n + n + 1$ ist durch 3, **b)** $n \cdot n + n + 3$ ist durch 2 teilbar!

**4.** Untersuche, ob die folgende Aussage wahr ist!
Für jede natürliche Zahl $n$ ist $n \cdot n + n + 11$ eine Primzahl.

**5.** Nenne alle Zahlen zwischen 40 und 50, die sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben lassen! Begründe! Welche von ihnen sind Primzahlen, welche Primzahlpotenzen?

**6.** $V_2$, $V_4$ und $V_6$ seien die Mengen der Vielfachen von 2, von 4 und von 6.
**a)** Gib je 3 Elemente von $V_2$, $V_4$, $V_6$ an!
**b)*** Was läßt sich über die Teilbarkeit von $x + y$ und $x \cdot y$ sagen, wenn (1) $x \in V_2$ und $y \in V_4$, (2) $x \in V_2$ und $y \in V_6$, (3) $x \in V_4$ und $y \in V_6$ sind?

**7.** Gib die größte und kleinste fünfstellige Zahl an, die
**a)** durch 3 teilbar ist, **b)** durch 9 teilbar ist!

**8.*** Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
Die Summe zweier ungerader Zahlen ist
**a)** eine ungerade Zahl, **b)** eine gerade Zahl.

# B Gebrochene Zahlen


**Bild B 1:** Silbermünze aus dem Jahre 1869


**Bild B 2:** Briefmarken, die im Jahre 1868 für den Norddeutschen Postbezirk ausgegeben wurden

Gebrochene Zahlen werden mit Hilfe gemeiner Brüche oder mit Hilfe von Dezimalbrüchen angegeben. Während früher im täglichen Leben die gemeinen Brüche eine große Rolle spielten, trifft man sie heute seltener an. Die Dezimalbrüche haben die gemeinen Brüche immer mehr verdrängt. Ganz besonders deutlich wird dieser Wandel bei der Angabe von Größen. Auf einer Münze aus dem Jahre 1869 finden wir die Prägung „$2\frac{1}{2}$ Silbergroschen" (↗ Bild B 1). Im Norddeutschen Postbezirk wurden im Jahre 1868 Briefmarken im Wert von $\frac{1}{4}$ Groschen, $\frac{1}{3}$ Groschen und $\frac{1}{2}$ Groschen eingeführt (↗ Bild B 2). Aber auch heute werden gemeine Brüche noch verwendet. Milch wird in Flaschen oder in Packungen mit $\frac{1}{2}$ l und $\frac{1}{4}$ l Inhalt verkauft. Der Rohrleger bezeichnet noch heute die Größe von Rohren, Muffen, Rohrverbindungen unter Anwendung des englischen Längenmaßes „ZOLL" (1 Zoll = 1″ = 25,4 mm) und sagt dann „Das Rohr hat einen Durchmesser von $\frac{3}{4}$ Zoll". Beim Fotografieren gibt man die verschiedenen Belichtungszeiten mit Hilfe gemeiner Brüche an: $\frac{1}{2}$ s, $\frac{1}{4}$ s, $\frac{1}{8}$ s, $\frac{1}{15}$ s, $\frac{1}{30}$ s, $\frac{1}{60}$ s, $\frac{1}{125}$ s. Im folgenden Kapitel werden wir lernen, wie man mit gebrochenen Zahlen in beiden Darstellungsformen rechnet.

# Ordnung gebrochener Zahlen

## 1 Brüche und gebrochene Zahlen

Zur Angabe ein und derselben Größe oder auch ein und derselben Warenmenge können verschiedene Brüche verwendet werden. Treten dabei Zehnerbrüche auf, so kann man diese auch als Dezimalbrüche schreiben.

● 1 Welche der folgenden Angaben sind gleichwertig?

**a)** 0,5 cm; $\frac{5}{10}$ cm **b)** eine halbe Torte; $\frac{6}{12}$ einer Torte

**c)** $\frac{3}{4}$ m; $\frac{750}{1000}$ m **d)** 0,5 kg; $\frac{1}{5}$ kg **e)** 0,4 l; $\frac{2}{5}$ l

Im Bild B 3 bezeichnen **alle** Brüche, die zu ein und demselben Punkt des Zahlenstrahls gehören, den Zahlenwert der Längen von $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AD}$.

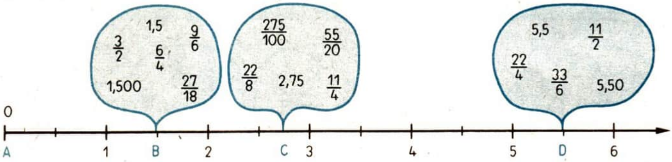



Bild B 3

● 2 Gib für jede der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ drei weitere Brüche an!

Wir fassen nun jeweils alle Brüche, die ein und denselben Punkt des Zahlenstrahls bezeichnen, zu einer Menge zusammen. Jede solche Menge nennen wir eine **gebrochene Zahl.**

*Wir wissen*, daß alle Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, zu ein und derselben gebrochenen Zahl gehören. Brüche, die nicht durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, stellen verschiedene gebrochene Zahlen dar. Es kann kein Bruch zu mehr als einer Menge gehören, und jeder Bruch gehört zu einer solchen Menge. (Man nennt in der Mathematik diese Mengen auch **Klassen von Brüchen.**)

● 3 Welche der folgenden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ gehören zu ein und derselben gebrochenen Zahl?

**a)** $\frac{5}{9}$; $\frac{15}{27}$ **b)** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{8}$ **c)** $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$ **d)** $\frac{8}{6}$; $\frac{12}{9}$ **e)** $\frac{5}{15}$; $\frac{1}{5}$

Bilde in jedem Fall die Produkte $m \cdot q$ und $n \cdot p$! Was stellst du fest?

Sind die Produkte $m \cdot q$ und $n \cdot p$ gleich, so stellen die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ die gleiche gebrochene Zahl dar. Gilt diese Beziehung nicht, so gehören die Brüche zu verschiedenen gebrochenen Zahlen.
Zur Angabe einer gebrochenen Zahl kann jeder in der betreffenden Menge liegende Bruch verwendet werden. So sagen wir zum Beispiel

kurz: *Die gebrochene Zahl* $\frac{5}{2}$ (oder auch $\frac{15}{6}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{25}{10}$; 2,5 ...)

anstelle von: *Die durch den Bruch* $\frac{5}{2}$ (oder $\frac{15}{6}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{25}{10}$; 2,5 ...) *gegebene gebrochene Zahl.*

Wir schreiben: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{25}{10} = \ \dots$

Manchmal sprechen wir auch von einer gebrochenen Zahl als gemeinem Bruch (bzw. als Dezimalbruch), wenn diese gebrochene Zahl durch einen Bruch (bzw. Dezimalbruch) gegeben ist.
Die Menge **aller** gebrochenen Zahlen wird mit $Q_+$ bezeichnet.
Da sich die natürlichen Zahlen als gemeine Brüche oder als Dezimalbrüche schreiben lassen, gehören sie zu den gebrochenen Zahlen.

■ 1

| $7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \dots;$ | $7 = 7{,}0 = 7{,}00 = 7{,}000 = \dots$ |
|---|---|

▶ 1 **Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen.** $N \subset Q_+$

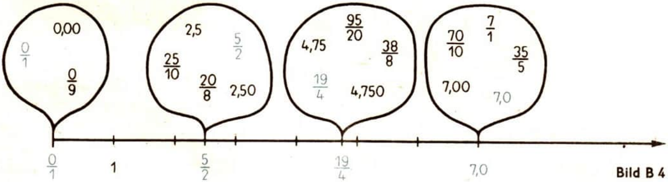



Bild B 4

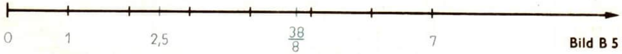



Bild B 5

Zur Darstellung gebrochener Zahlen am Zahlenstrahl können wir aus den Mengen im Bild B 4 je einen Bruch auswählen. Die gebrochenen Zahlen $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{1}$ usw. können dabei durch die natürlichen Zahlen 2; 3 usw. angegeben werden (↗ Bild B 5).

Zwei beliebige gebrochene Zahlen können stets auch durch zueinander **gleichnamige Brüche** dargestellt werden. So können $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ durch die gleichnamigen Brüche

$\frac{10}{24}$ und $\frac{9}{24}$ oder $\frac{20}{48}$ und $\frac{18}{48}$ oder $\frac{30}{72}$ und $\frac{27}{72}$ usw.

dargestellt werden. Dabei sind die Nenner gemeinsame Vielfache von 8 und 12.

$$\frac{5}{12} = \boxed{\frac{10}{24}} = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{20}{48}} = \frac{25}{60} = \boxed{\frac{30}{72}} = \dots$$

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{9}{24}} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \boxed{\frac{18}{48}} = \frac{21}{56} = \frac{24}{64} = \boxed{\frac{27}{72}} = \dots$$

■ 2 Stelle $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ durch gleichnamige Brüche dar!
*Wir überlegen:* Gemeinsame Vielfache von 2 und 3 sind 6, 12, 18, ...
$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ können also auch durch die gleichnamigen Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$ oder $\frac{6}{12}$ und $\frac{4}{12}$ usw. dargestellt werden.

■ 3 Stelle $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ durch gleichnamige Brüche dar!
*Wir überlegen:* 9 ist Vielfaches von 3.
$\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ können durch die gleichnamigen Brüche $\frac{2}{9}$ und $\frac{3}{9}$ angegeben werden.

Bei diesem Vorgehen haben wir $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ „gleichnamig gemacht".
Bisher standen Variable meistens für natürliche Zahlen. Von jetzt ab wollen wir Variable auch für gebrochene Zahlen verwenden. Soll für die Variable $a$ eine gebrochene Zahl eingesetzt werden, so könnte man zum Beispiel $\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{8}$, aber auch 1,847 oder 7,00 usw. einsetzen. Wir kennen damit zwei Variablengrundbereiche, nämlich $N$ und $Q_+$. Es muß jetzt also stets deutlich gesagt werden, ob eine Variable für eine natürliche Zahl oder für eine gebrochene Zahl steht.

## Aufgaben

**1.** Suche für die folgenden Brüche zugehörige Punkte auf dem Zahlenstrahl!
**a)** Bild B 6a: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{25}{24}$
**b)** Bild B 6b: $\frac{5}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{5}{4}$
Bei wie vielen der markierten Punkte wird nur ein Bruch eingetragen, bei wie vielen mehrere?

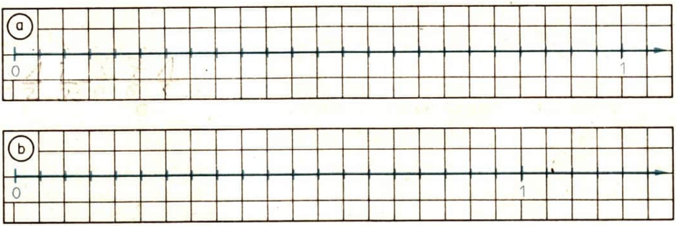



Bild B 6


Bild B 7

**2.** Nenne jeweils zwei gemeine Brüche, die an den im Bild B 7 durch Buchstaben bezeichneten Punkten stehen könnten!

**3.** Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich!

**a)** $\frac{15}{25}$ **c)** $\frac{88}{121}$ **e)** $\frac{12}{16}$ **g)** $\frac{7 \cdot 80}{8 \cdot 70}$ **i)*** $\frac{18 \cdot 8 \cdot 37}{185 \cdot 72}$

**b)** $\frac{64}{56}$ **d)** $\frac{105}{70}$ **f)** $\frac{11}{36}$ **h)*** $\frac{5 \cdot 370}{37 \cdot 50}$ **k)*** $\frac{17 \cdot 3 \cdot 9}{6 \cdot 51 \cdot 15}$

**4.** Erweitere folgende Brüche so, daß ihr Nenner 48 wird!

**a)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{6}{7}$ **e)** $\frac{8}{9}$ **g)** $\frac{48}{6}$ **i)** $\frac{101}{480}$ **l)** $\frac{25}{24}$ **n)** $\frac{11}{12}$

**b)** $\frac{9}{12}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{9}{8}$ **h)** $\frac{7}{4}$ **k)** $\frac{1}{32}$ **m)** $\frac{7}{96}$ **o)** $\frac{5}{3}$

**5.** Gib jeweils eine natürliche Zahl $n$ an, so daß die Brüche durch Kürzen auseinander hervorgehen! Durch welche Zahl wurde gekürzt?

**a)** $\frac{10}{30}$ und $\frac{1}{n}$ **d)** $\frac{75}{125}$ und $\frac{3}{n}$ **g)** $\frac{n}{12}$ und $\frac{100}{60}$ **k)** $\frac{0}{4}$ und $\frac{n}{12}$

**b)** $\frac{16}{64}$ und $\frac{n}{8}$ **e)** $\frac{n}{5}$ und $\frac{125}{75}$ **h)** $\frac{12}{n}$ und $\frac{132}{72}$ **l)** $\frac{6}{18}$ und $\frac{1}{n}$

**c)** $\frac{21}{28}$ und $\frac{42}{n}$ **f)** $\frac{34}{2}$ und $\frac{17}{n}$ **i)** $\frac{0}{4}$ und $\frac{0}{n}$ **m)** $\frac{6}{18}$ und $\frac{n}{35}$

**6.** Gib zu jedem Bruch mindestens drei weitere an, die zur gleichen gebrochenen Zahl gehören!

**a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 0,5 **c)** $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{12}{48}$ **e)** $\frac{28}{21}$ **f)** 5 **g)** 1,81 **h)** 0,6

**7.** Stellen die beiden Brüche jeweils die gleiche gebrochene Zahl dar? Begründe!

**a)** $\frac{7}{11}$ und $\frac{49}{77}$ **d)** $\frac{6}{8}$ und $\frac{9}{12}$ **g)** $\frac{9}{8}$ und $\frac{81}{64}$ **k)** $\frac{0}{5}$ und $\frac{3}{15}$

**b)** $\frac{12}{8}$ und $\frac{3}{2}$ **e)** $\frac{11}{121}$ und $\frac{2}{22}$ **h)** $\frac{8}{12}$ und $\frac{12}{22}$ **l)** $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{14}$

**c)** $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$ **f)** $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{9}$ **i)** $\frac{12}{16}$ und $\frac{9}{12}$ **m)** $\frac{0}{32}$ und $\frac{0}{4}$

**8.** Welche Brüche gehören jeweils zu ein und derselben gebrochenen Zahl?

**a)** $\frac{5}{4}, \frac{0}{2}, \frac{15}{12}, \frac{50}{45}, \frac{55}{44}$ **c)** $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{12}{16}, \frac{12}{15}, \frac{36}{48}$ **e)** $\frac{9}{12}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{12}{16}, \frac{99}{132}$

**b)** $\frac{7}{1}, \frac{21}{3}, \frac{63}{8}, \frac{1}{7}, \frac{77}{11}$ **d)** $\frac{5}{1}, \frac{20}{15}, \frac{40}{8}, \frac{55}{11}, \frac{0}{100}$ **f)** $\frac{12}{15}, \frac{16}{25}, \frac{25}{20}, \frac{8}{30}, \frac{132}{165}$

**9.** Welcher gemeine Bruch und welcher Dezimalbruch gehören zur gleichen gebrochenen Zahl? Präge dir diese Paare fest ein!

$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{5}$; 0,2; 0,5; 0,25; 0,1; 0,125

**10.** Kann die gebrochene Zahl $\frac{1}{3}$ durch einen Bruch mit dem Nenner **a)** 6, **b)** 8, **c)** 12, **d)** 15, **e)** 17 dargestellt werden?

**11.** Gib die gebrochene Zahl $\frac{2}{5}$ durch einen Bruch mit dem Zähler **a)** 6, **b)** 9, **c)** 12, **d)** 21, **e)** 1 an!

**12.** Erweitere $\frac{5}{7}$ so, daß ein Bruch mit dem Nenner **a)** 63, **b)** 15, **c)** 28 entsteht!

**13.** Mache gleichnamig!

**a)** $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{15}$ **d)** $\frac{1}{9}$ und $\frac{2}{7}$ **g)** $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ **k)** $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{8}$

**b)** $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ **e)** $\frac{4}{15}$ und $\frac{4}{30}$ **h)** $\frac{8}{11}$ und $\frac{55}{77}$ **l)** $\frac{3}{24}$ und $\frac{2}{16}$

**c)** $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$ **f)** $\frac{3}{14}$ und $\frac{3}{4}$ **i)** $\frac{7}{16}$ und $\frac{3}{64}$ **m)** $\frac{14}{15}$ und $\frac{15}{14}$

**14.** Gib die folgenden gebrochenen Zahlen durch gleichnamige Brüche mit dem Nenner 15 an!

**a)** $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{5}$
**c)** $\frac{3}{7}$ und $\frac{15}{30}$ **d)** $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$

**15.** Gib die folgenden gebrochenen Zahlen durch gleichnamige Brüche mit möglichst kleinem Nenner an!

**a)** $\frac{3}{7}$ und $\frac{7}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$
**c)** $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{2}$ **d)** $\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{12}$

## 2 Vergleichen und Ordnen gebrochener Zahlen

● **4** Trage $\frac{3}{2}$ und 2,5 auf dem Zahlenstrahl ein! Welche Zahl ist kleiner? Begründe!

Wie beim Vergleich von natürlichen Zahlen gilt auch für gebrochene Zahlen:

▶ **2** **DEFINITION: Von zwei gebrochenen Zahlen ist diejenige *kleiner*, die auf dem Zahlenstrahl weiter links liegt.**

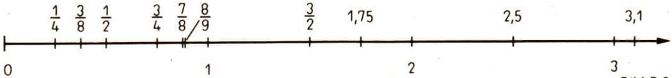


**Bild B 8**

Auf dem Zahlenstrahl im Bild B 8 können wir zum Beispiel ablesen:

$0 < \frac{1}{4}$; $1 > \frac{7}{8}$; $\frac{3}{4} < \frac{8}{9}$; $2{,}5 > \frac{3}{2}$.

Ordnet man die Zahlen aus dem Bild B 8 der Größe nach, so erhält man:

$0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9} < 1 < \frac{3}{2} < 1{,}75 < 2 < 2{,}5 < 3 < 3{,}1.$

Da wir nicht immer einen Zahlenstrahl benutzen können, überlegen wir uns einen gleichwertigen, aber kürzeren Weg. Dabei nutzen wir aus, daß wir gleichnamige Brüche und Dezimalbrüche schon vergleichen können.

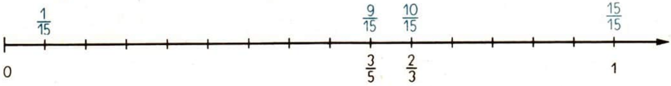
● **5** **a)** Ordne nach der Größe! Beginne mit dem kleinsten Bruch! $\frac{5}{17}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{22}{17}$, $\frac{0}{17}$, $\frac{17}{17}$
**b)** Vergleiche $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{6}$! **c)** Vergleiche $\frac{8}{10}$ mit $\frac{3}{5}$!

Jetzt wollen wir $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ miteinander vergleichen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \\ \frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \end{aligned}\right\} \quad \frac{9}{15} < \frac{10}{15}, \text{ also } \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

Dies zeigt sich auch am Zahlenstrahl (↗ Bild B 9).

**Bild B 9**



▶ 3

> **Zwei gebrochene Zahlen können miteinander verglichen werden, indem man zugehörige gleichnamige Brüche miteinander vergleicht.**

Wir vergleichen die gebrochenen Zahlen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ miteinander.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{9}{12}} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \boxed{\frac{18}{24}} = \frac{21}{28} = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{27}{36}} = \ldots$$

$$\frac{5}{6} = \boxed{\frac{10}{12}} = \frac{15}{18} = \boxed{\frac{20}{24}} = \frac{25}{30} = \boxed{\frac{30}{36}} = \frac{35}{42} = \ldots$$

Es gilt $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$, $\frac{18}{24} < \frac{20}{24}$ usw., also $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Das Produkt $4 \cdot 6$ liefert einen gemeinsamen Nenner, aber nicht den kleinsten. Der **kleinste gemeinsame Nenner** ist das k. g. V. der Nenner 4 und 6, nämlich die Zahl 12.

▶ 4

> **DEFINITION: Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt Hauptnenner (HN) dieser Brüche.**

Damit die Nenner der gleichnamigen Brüche nicht zu groß werden, ist es zweckmäßig, mit dem Hauptnenner zu arbeiten.

■ 4 $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$ sind miteinander zu vergleichen.

*Wir überlegen:*
8 ist nicht HN, denn $6 \nmid 8$.
16 ist nicht HN, denn $6 \nmid 16$.
24 ist HN, denn $8 \mid 24$ und $6 \mid 24$. $3 \cdot 8 = 24$ und $4 \cdot 6 = 24$.

$$\frac{7}{8} \overset{3}{=} \frac{21}{24}; \quad \frac{5}{6} \overset{4}{=} \frac{20}{24}; \quad \frac{21}{24} > \frac{20}{24}$$

Also: $\underline{\underline{\frac{7}{8} > \frac{5}{6}}}$.

Für gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt stets nur eine der drei Möglichkeiten

> $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ **oder** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **oder** $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Null ist die kleinste gebrochene Zahl.

■ 5 **a)** Die gemischte Zahl $3\frac{3}{4}$ bedeutet:

$$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}.$$

**b)** Den gemeinen Bruch $\frac{18}{7}$ können wir als gemischte Zahl schreiben:

$$\frac{18}{7} = \frac{14}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = \underline{\underline{2\frac{4}{7}}}.$$

In dieser Schreibweise kann man gebrochene Zahlen leichter vergleichen. Man erkennt zum Beispiel sofort, daß $14\frac{3}{8}$ zwischen 14 und 15 liegt, was aus der Darstellung $\frac{115}{8}$ nicht sofort ersichtlich ist.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie in manchen Fällen schnell verglichen werden kann.

■ 6 a) $\frac{5}{6} < \frac{9}{8}$, weil $\frac{5}{6} < 1$ und $\frac{9}{8} > 1$.  b) $\frac{15}{4} < \frac{36}{7}$, weil $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ und $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$.

c) $\frac{2}{5} > \frac{2}{9}$, weil $5 < 9$.  d) $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$, weil $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ und $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$.

Mit $4 < 7$ gilt auch $\frac{4}{1} < \frac{7}{1}$ und $\frac{8}{2} < \frac{21}{3}$. Beim Vergleichen können natürliche Zahlen durch zugehörige Brüche ersetzt werden.
Gebrochene Zahlen als Dezimalbrüche vergleichen wir wie bisher.

● 6 Ordne der Größe nach! Beginne mit dem kleinsten Bruch!
8,932; 20,1; 21,0; 83,2; 20,009; 111

## Aufgaben

1. Zeichne einen Zahlenstrahl und trage auf ihm die folgenden Zahlen ein!
a) $\frac{4}{12}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{3}$; 0,5  b) 0,9; $\frac{1}{4}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{7}{8}$; 0,25
Stelle, ausgehend von dem Zahlenstrahl, fünf Ungleichungen auf!

2. Vergleiche miteinander! Überlege, wie du am besten vorgehst!
a) $\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{7}$  b) $\frac{7}{11}$ und $\frac{5}{12}$  c) $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$  d) $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{7}$

3. Vergleiche!
a) $\frac{7}{5}$ und $\frac{19}{5}$  d) $\frac{7}{6}$ und $\frac{14}{12}$  g) $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{9}$  k) $\frac{7}{9}$ und $\frac{12}{18}$
b) $\frac{11}{12}$ und $\frac{8}{9}$  e) $\frac{10}{8}$ und $\frac{7}{4}$  h) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$  l) $\frac{12}{9}$ und $\frac{4}{3}$
c) $\frac{7}{3}$ und $\frac{9}{4}$  f) $\frac{9}{15}$ und $\frac{20}{15}$  i) $\frac{9}{5}$ und $\frac{11}{8}$  m) $\frac{8}{12}$ und $\frac{15}{12}$

4. Vergleiche, indem du die Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandelst!
a) $\frac{7}{30}$ und 0,25  b) $\frac{4}{5}$ und 0,95  c) 0,99 und $\frac{119}{120}$
d) $\frac{9}{10}$ und 0,91  e) $\frac{1}{5}$ und 0,125  f) 0,6 und $\frac{4}{5}$

5. Vergleiche, indem du die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche umwandelst!
a) $\frac{3}{2}$ und 1,49  b) $\frac{3}{4}$ und 0,76  c) $\frac{11}{20}$ und 0,54
d) 0,48 und $\frac{12}{25}$  e) $\frac{7}{8}$ und 0,9  f) 1,007 und $\frac{17}{16}$

Ordne der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

6.↑ a) $\frac{6}{5}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{6}{1}$  b) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{2}{4}$

7.↑ a) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{4}$  b) $\frac{1}{12}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{3}{10}$
c) $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{18}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{17}{16}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}$  d) $\frac{4}{5}$; $\frac{19}{9}$; 0,6; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{15}$

8.↑ a) 0,284; 0,078; 0,978; 0,0654  b) 2,[illegible]1; 8,21; 12,[illegible]; 18,2; 8,[illegible]2
c) 0,0481; 0,00184; 0,0841; 0,0814  d) 732; 7,325; 73,25; 0,732

Ordne der Größe nach! Beginne mit der größten Zahl!

9.↑ a) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{1}$  b) $\frac{97}{136}$; $\frac{41}{68}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{59}{85}$; $\frac{21}{34}$; $\frac{52}{17}$; $\frac{40}{51}$

10.↑ a) 0,021; 0,54; 0,054; 0,21
b) 5,91; 9,15; 9,51; 19,5; 59,1
c) 1,035; 0,135; 1,305; 1,503
d) 0,987; 0,9087; 9,807; 987

11. Schreibe als gemeine Brüche!
a) $4\frac{3}{5}$ b) $6\frac{2}{4}$ c) $11\frac{1}{10}$ d) $7\frac{24}{34}$ e) $9\frac{8}{9}$ f) $2\frac{9}{17}$ g) $3\frac{5}{12}$

12. Schreibe als gemischte Zahlen und vergleiche!
a) $\frac{17}{5}$ und $\frac{6}{4}$ c) $\frac{31}{3}$ und $\frac{81}{18}$ e) $\frac{7}{3}$ und $\frac{15}{7}$
b) $\frac{13}{7}$ und $\frac{12}{6}$ d) $\frac{27}{2}$ und $\frac{37}{3}$ f) $\frac{41}{8}$ und $\frac{84}{15}$

13. Was ist mehr
a) $\frac{5}{7}$ von 21 *l* oder $\frac{1}{2}$ von 30 *l*?
c) $\frac{1}{2}$ von 5 *l* oder $\frac{1}{2}$ von 4 *l*?
b)* $\frac{3}{4}$ von 7 km oder $\frac{2}{3}$ von 8 km?
d) $\frac{3}{8}$ von 20 kg oder $\frac{6}{8}$ von 40 kg?

14. Gib jeweils eine gebrochene Zahl an, die kleiner ist als
a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{10000}$, c) 0,0008, d) $\frac{1}{15}$, e) 0,000 001!

15. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
a) $10 < \frac{250}{250}$ c) $9{,}5 < 9{,}49$ e) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$ g) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ i) $\frac{1}{5} < 0{,}2$
b) $10 < 11$ d) $9{,}5 < 9{,}51$ f) $\frac{8}{9} < \frac{9}{10}$ h) $0{,}2 > \frac{1}{4}$ k) $0{,}3 < \frac{1}{3}$

16.* Welche natürlichen Zahlen $n$ erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $\frac{3}{5} < \frac{n}{5} < \frac{8}{5}$ c) $\frac{3}{5} < \frac{4}{n} < \frac{5}{3}$ $(n \neq 0)$ e) $\frac{9}{11} < \frac{n}{2} < \frac{8}{9}$
b) $\frac{4}{7} < \frac{n}{3} < \frac{5}{8}$ d) $\frac{2}{9} < \frac{n}{9} < \frac{7}{9}$ f) $\frac{4}{7} < \frac{5}{n} < \frac{3}{4}$ $(n \neq 0)$

## 3 Wieviel Zahlen liegen zwischen 19 und 20?

● 7 a) Gib eine natürliche Zahl an, die kleiner als 20 ist und die sich möglichst wenig von 20 unterscheidet!
b) Gib eine natürliche Zahl an, die größer als 20 ist und die sich möglichst wenig von 20 unterscheidet!

● 8 a) Gegeben sind die gebrochenen Zahlen $20\frac{1}{4}$, $20\frac{2}{3}$, $20\frac{1}{5}$ und $20\frac{4}{7}$. Welche dieser Zahlen unterscheidet sich am wenigsten von 20?
Gib drei weitere gebrochene Zahlen an, die größer sind als 20 und sich noch weniger als die von dir ermittelte Zahl von 20 unterscheiden!
b) Welche der Zahlen 19,89; 19,94; 19,9 und 19,909 unterscheidet sich am wenigsten von 20? Gib drei weitere Zahlen an, die kleiner sind als 20 und sich noch weniger von 20 unterscheiden!

Jede natürliche Zahl hat eine ganz bestimmte Zahl zum Nachfolger. **Zwischen** einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl.
Im Bereich der gebrochenen Zahlen können wir jedoch nicht vom Nachfolger einer Zahl sprechen.

Jemand behauptet: $\frac{8}{10}$ ist Nachfolger von $\frac{7}{10}$.

Das ist falsch, denn wenn man $\frac{7}{10}$ zu $\frac{70}{100}$ und entsprechend $\frac{8}{10}$ zu $\frac{80}{100}$ erweitert, so erkennt man sofort, daß zum Beispiel

$$\frac{71}{100},\ \frac{72}{100},\ \frac{73}{100},\ \frac{74}{100},\ \frac{75}{100}\left(=\frac{3}{4}\right),\ \frac{76}{100},\ \frac{77}{100},\ \frac{78}{100},\ \frac{79}{100}$$

**zwischen** $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ liegen (↗ Bild B 10).

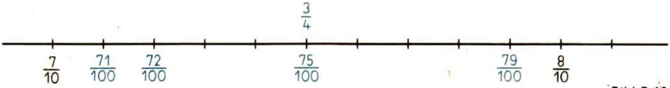



Bild B 10

● **9** Nenne gebrochene Zahlen, die zwischen $\frac{71}{100}$ und $\frac{70}{100}$ liegen!

Wie man zwei gebrochene Zahlen $a$ und $b$ auch wählt, immer findet man gebrochene Zahlen, die zwischen $a$ und $b$ liegen. Im Bereich der gebrochenen Zahlen gibt es zu 19 *keine nächstgrößere Zahl.*

## Aufgaben

**1.** Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und fülle sie so aus, daß gilt $c < x < d$!

**a)**

| $c$ | $x$ | $d$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ |
| | $\frac{9}{10}$ | $\frac{14}{15}$ |
| 0,2 | $\frac{1}{4}$ | |

**b)**

| $c$ | $x$ | $d$ |
|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | $\frac{\ }{5}$ | $\frac{6}{5}$ |
| $\frac{4}{7}$ | $\frac{\ }{2}$ | $\frac{5}{8}$ |
| 0,7 | | 0,8 |

**c)**

| $c$ | $x$ | $d$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{3}$ |
| $\frac{7}{10}$ | $\frac{12}{11}$ | |
| | 0,2 | $\frac{1}{4}$ |

**d)**

| $c$ | $x$ | $d$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | | $\frac{2}{8}$ |
| $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{\ }$ | $\frac{5}{5}$ |
| 0,44 | | 0,45 |

**2.** Gib mindestens fünf gebrochene Zahlen $x$ an, für die $y < x < z$ gilt, wenn

**a)** $y = \frac{1}{5}$ und $z = \frac{1}{4}$, **c)** $y = 1{,}4$ und $z = 1{,}5$, **e)** $y = \frac{1}{4}$ und $z = \frac{1}{2}$,

**b)** $y = \frac{1}{100}$ und $z = \frac{1}{10}$, **d)** $y = 0{,}2$ und $z = 0{,}22$, **f)** $y = 0{,}2$ und $z = \frac{1}{4}$!

**3.** Zu der gebrochenen Zahl $\frac{2}{15}$ sollen zwei gleichnamige Zehnerbrüche gefunden werden, zwischen denen $\frac{2}{15}$ liegt. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Es ist $\frac{2}{15} < \frac{2}{10}$, denn $10 < 15$.

Ferner ist $\frac{1}{10} < \frac{2}{15}$, denn $\frac{1}{10} = \frac{3}{30}$ und $\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$.

Also: $\frac{1}{10} < \frac{2}{15} < \frac{2}{10}$.

Löse die entsprechenden Aufgaben für die folgenden gebrochenen Zahlen!

**a)** $\frac{2}{11}$ **b)** $\frac{7}{19}$ **c)** 1,4 **d)** $\frac{2}{97}$ **e)** 2,75 **f)** $\frac{1}{3}$ **g)** $\frac{1}{4}$

**4.** Setze in $\frac{n}{n+1}$ der Reihe nach für $n$ die Zahlen 1, 2, 3, 4, 10, 49, 75 und 100 ein! Ordne dann die gebrochenen Zahlen der Größe nach und vergleiche sie mit 1!

5. Gib jeweils drei gebrochene Zahlen an, die zwischen $y$ und $z$ liegen, wenn

a) $y = 0$ und $z = \frac{1}{4}$, f) $y = \frac{1}{10}$ und $z = 0$,

b) $y = 0{,}3$ und $z = 0{,}45$, g) $y = 1{,}41$ und $z = 1{,}42$,

c) $y = \frac{2}{3}$ und $z = \frac{1}{3}$, h) $y = 0{,}2$ und $z = \frac{1}{5}$,

d) $y = 0{,}7$ und $z = \frac{3}{4}$, i) $y = 1{,}42$ und $z = 1{,}41$,

e) $y = 0{,}5$ und $z = \frac{1}{3}$, k) $y = \frac{1}{4}$ und $z = 0{,}2$!

6.* Gib diejenige Zahl an, die in der Mitte liegt zwischen

a) 0,75 und 0,76, b) $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$, d) $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$!

7.* Gib $n$ so an, daß sich $\frac{1}{n}$

a) von 0 um weniger als $\frac{1}{1000}$, b) von $\frac{1}{4}$ um weniger als $\frac{1}{8}$ unterscheidet!

## 4 Kleiner, gleich oder größer

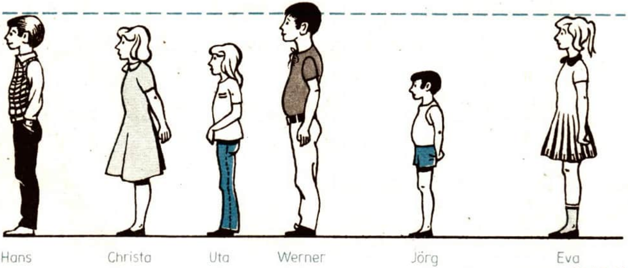



Bild B 11

● 10 Vergleiche die Körpergröße aller Kinder im Bild B 11 mit der von Hans!

Werner ist größer als Hans. Alle anderen sind **nicht** größer als Hans; sie sind **kleiner als er oder genauso groß wie er.**

Manchmal ist es zweckmäßig, die Zeichen „$<$“ und „$=$“ zu einem Zeichen zusammenzufassen. Man schreibt zum Beispiel

$$2{,}5\ \text{cm} \leqq a \leqq 2{,}7\ \text{cm},$$

wenn man folgendes ausdrücken will: Die Länge $a$ kann 2,5 cm oder 2,7 cm betragen oder einen Wert annehmen, der zwischen 2,5 cm und 2,7 cm liegt.

Man sagt dazu: $a$ ist größer oder gleich 2,5 cm und kleiner oder gleich 2,7 cm.

Anstelle von

„Die Subtraktion $a - b$ ($a, b \in N$) ist ausführbar, wenn $a > b$ oder $a = b$“

können wir mit Hilfe des Zeichens „$\geqq$" für „größer oder gleich" schreiben „Die Subtraktion $a - b$ ($a, b \in N$) ist ausführbar, wenn $a \geqq b$".
Im Bild B 12 sind alle **natürlichen Zahlen** $n$ markiert, für die gilt: $1 \leqq n \leqq 10$.


Bild B 12

● **11** Zeichne einen Zahlenstrahl! Markiere auf ihm alle natürlichen Zahlen $n$, für die gilt $2 \leqq n < 9$! Beschreibe dieselbe Menge, indem du zweimal das Zeichen „<" verwendest!

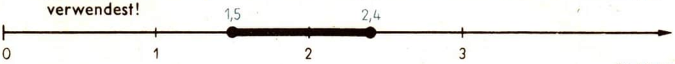



Bild B 13

Im Bild 13 sind alle **gebrochenen Zahlen** $x$ veranschaulicht, für die gilt: $1{,}5 \leqq x \leqq 2{,}4$.

## Aufgaben

**1.** Veranschauliche auf dem Zahlenstrahl die Menge aller gebrochenen Zahlen $x$, für die gilt: $1 \leqq x \leqq \frac{6}{5}$!

**2.** Für welche der folgenden natürlichen Zahlen $n$ ist $13 \leqq n$ eine wahre Aussage?
**a)** 10 **b)** 17 **c)** 13 **d)** 14

**3.** Für welche der folgenden gebrochenen Zahlen $x$ ist $x \leqq 1{,}5$ eine wahre Aussage?
**a)** 0 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** 1,499

**4.** **a)** Gib die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ mit $12 \leqq n < 27$ an!
**b)** Gib weitere Möglichkeiten zur Beschreibung dieser Menge an!

**5.** Gib alle natürlichen Zahlen $n$ an, die
**a)** $n \leqq 9$, **b)** $n < 11$, **c)** $7 < n \leqq 15$
zu einer wahren Aussage machen! Gib in jedem Fall die kleinste und die größte der dabei auftretenden Lösungen an!

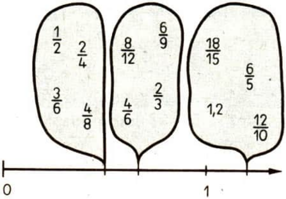
**6.** $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ seien die Mengen derjenigen natürlichen Zahlen, die
(1) $10 \leqq n \leqq 100$, (2) $10 \leqq n < 100$, (3) $10 < n \leqq 100$, (4) $10 < n < 100$
zu wahren Aussagen machen. Wie unterscheiden sich diese Mengen voneinander? Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen ihnen?

**7.** $M$ sei die Menge aller natürlichen Zahlen $x$, für die gilt: $29 \leqq x \leqq 31$.
$K$ sei die Menge aller gebrochenen Zahlen $x$, für die gilt: $29 \leqq x \leqq 31$.
**a)** Nenne alle Elemente von $M$!
**b)** Nenne zwei Elemente von $K$, die keine natürlichen Zahlen sind!
**c)** Veranschauliche $M$ und $K$ am Zahlenstrahl!

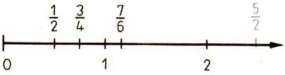
**8.** Setze in 29 ... $n$ ... 31 Zeichen ein, so daß für **a)** genau eine natürliche Zahl, **b)** zwei natürliche Zahlen, **c)** drei natürliche Zahlen eine wahre Aussage entsteht!

## Zusammenfassung

Brüche, die ein und denselben Punkt des Zahlenstrahls bezeichnen, werden zu einer **gebrochenen Zahl** zusammengefaßt.
Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, stellen die gleiche gebrochene Zahl dar.




I Die kleinere von zwei gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlenstrahl jeweils links von der größeren.
Für zwei gebrochene Zahlen $a$ und $b$ gilt stets einer der Fälle:
$a = b$, $a < b$, $a > b$.
0 ist die kleinste gebrochene Zahl.




II Gebrochene Zahlen werden verglichen, indem man Brüche vergleicht, durch die sie gegeben sind.

(1) Brüche mit gleichem Nenner:
Zähler vergleichen!
Der kleinere von zwei Zählern gehört zur kleineren gebrochenen Zahl.

$\frac{7}{11} < \frac{9}{11}$, denn $7 < 9$

$\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$, denn $4 > 2$

(2) Brüche mit unterschiedlichen Nennern:
Gleichnamig machen und dann die Zähler vergleichen!

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, denn $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$

(3) Dezimalbrüche:
Von links beginnend die Stellen einzeln vergleichen!

$12{,}258 > 12{,}257$

$0{,}4315 < 0{,}4328$

III Zu zwei gebrochenen Zahlen $a$ und $b$ mit $a < b$ gibt es stets gebrochene Zahlen $x$ mit
$a < x < b$.

$\frac{7}{10} < \frac{71}{100} < \frac{72}{100} < \ldots < \frac{79}{100} < \frac{8}{10}$

## Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen

Das Rechnen mit Brüchen wird schon in den ältesten bekannten Aufzeichnungen mit mathematischem Inhalt beschrieben. So enthält das Rechenbuch des Ahmes, das auch „Papyrus Rhind" genannt wird und vor etwa 4000 Jahren in Ägypten entstand, Regeln für das Rechnen mit Stammbrüchen. Stammbrüche nennt man alle Brüche mit dem Zähler 1, also $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... Andere Brüche werden in diesem Buch als Summen aus Stammbrüchen dargestellt. (Vgl. dazu mit der Aufgabe 20 in Lerneinheit B 8, S. 53.)

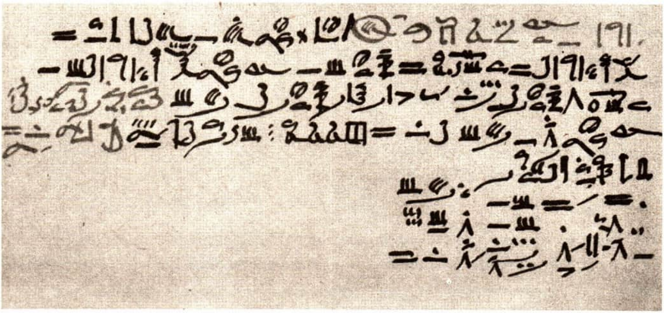


Bild B 14: Seite aus dem Papyrus Rhind, einem altägyptischen Schriftstück

Von den Ägyptern übernahmen die Araber die Regeln über das Rechnen mit Brüchen, und während der arabischen Eroberungszüge im Mittelalter gelangten diese Kenntnisse auch nach Europa.
Da zuerst nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, war eine sehr einfache Bezeichnungsweise möglich: die Ägypter setzten nur einen Punkt über die Ziffer und bezeichneten so den Stammbruch, der die betreffende Ziffer zum Nenner hat $\left(\dot{5} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{5}\right)$. Die Schreibweise mit Hilfe des Bruchstrichs findet man erstmals in einem Rechenbuch von Leonardo Fibonacci, einem italienischen Mathematiker aus Pisa, der im Jahre 1202 das berühmte Buch „Liber abaci" schrieb. Aber erst zum Ende des 15. Jahrhunderts war diese Schreibweise allgemein üblich geworden.
Dezimalbrüche in der heutigen Schreibweise wurden noch später eingeführt. Der Schweizer Mathematiker Jost Bürgi (1552–1632) führte die Darstellungsform ein, nachdem das Beharren auf der Zahldarstellung mit Hilfe römischer Ziffern überwunden war. Die Belange der Praxis waren es, die dem dekadischen Positionssystem und der Verwendung arabischer Ziffern zum Durchbruch verhalfen. Der holländische Ingenieur Simon Stevin (1548–1620) verwendete in seinen Schriften eine Dezimalbruchdarstellung, die als Vorläufer unserer Schreibweise angesehen werden kann. Er schrieb z. B. den Dezimalbruch 237,578 in der Form 237(0)5(1)7(2)8(3). Damit war es ihm möglich, schwierige Rechnungen mit Brüchen auf Rechnungen mit natürlichen Zahlen zurückzuführen.

## 5 Addition gebrochener Zahlen

Bild B 15

Im Kühlschrank stehen zwei Flaschen Apfelsaft. In der einen Flasche ist $\frac{1}{2}$ *l* und in der anderen $\frac{1}{3}$ *l* Apfelsaft. Der Inhalt beider Flaschen soll in einen Krug mit einem Fassungsvermögen von 1 *l* umgefüllt werden. Ist das möglich? Zur Beantwortung dieser Frage lösen wir die Aufgabe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

● **12** Addiere die folgenden Brüche!
**a)** $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$ **b)** $\frac{7}{24} + \frac{11}{24}$ **c)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Wir führen die Addition gebrochener Zahlen auf die Addition gleichnamiger Brüche zurück.

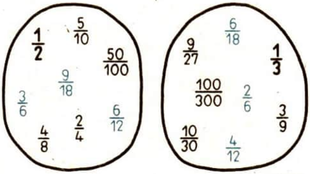



Bild B 16

Anstelle der oben gestellten Aufgabe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ können wir auch rechnen (↗ Bild B 16):

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \ldots$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \ldots$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} = \ldots$

● **13** Berechne für alle drei Aufgaben die Summe! Vergleiche die Ergebnisse!

Die Summe der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist die gebrochene Zahl $\frac{5}{6}$. Es sind also zusammen $\frac{5}{6}$ *l* Apfelsaft in den beiden Flaschen. Da $\frac{5}{6} < 1$ ist, paßt der Inhalt beider Flaschen in den Krug.

■ **7** $\frac{7}{12} + \frac{5}{8}$

Auch hier arbeiten wir mit dem Hauptnenner. *Wir überlegen:*
12 ist nicht Hauptnenner, denn $8 \nmid 12$.
24 ist Hauptnenner:
$2 \cdot 12 = \boxed{24}$ und $3 \cdot 8 = \boxed{24}$.

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{8} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{14 + 15}{24} = \underline{\underline{\frac{29}{24}}}$$

▶ **5** **Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1] werden addiert, indem man**
**1. diese Brüche gleichnamig macht und**
**2. die gleichnamigen Brüche addiert.**

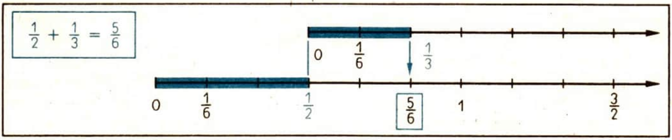



Bild B 17

[1]) Anstatt „Addition gebrochener Zahlen als gemeine Brüche" sagen wir manchmal kürzer „Addition gemeiner Brüche".

Die Addition kann man veranschaulichen (↗ Bild B 17).
Zu zwei gebrochenen Zahlen gibt es stets genau eine gebrochene Zahl als deren Summe.

■ 8 a) $\frac{3}{5} + \frac{16}{15}$

*Wir überlegen:*
15 ist Hauptnenner, denn $5 \mid 15$.
$5 \cdot 3 = 15;\quad \frac{3}{5} \overset{\cdot 3}{\cong} \frac{9}{15}$

$\frac{3}{5} + \frac{16}{15} = \frac{9+16}{15} = \frac{25}{15} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}} = \underline{\underline{1\frac{2}{3}}}$

b) $\frac{7}{4} + \frac{27}{12}$

*Wir überlegen:*
$\frac{27}{12}$ kann durch 3 gekürzt werden.
$\frac{27}{12} \overset{:3}{\cong} \frac{9}{4}$

$\frac{7}{4} + \frac{27}{12} = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7+9}{4} = \underline{\underline{\frac{16}{4}}} = \underline{\underline{4}}$

c) $\frac{5}{9} + \frac{3}{5}$

*Wir überlegen:*
9 und 5 haben keinen gemeinsamen Teiler.
Hauptnenner ist das Produkt $5 \cdot 9 = 45$.
$\frac{5}{9} \overset{\cdot 5}{\cong} \frac{25}{45}$ und $\frac{3}{5} \overset{\cdot 9}{\cong} \frac{27}{45}$

$\frac{5}{9} + \frac{3}{5} = \frac{25+27}{45} = \underline{\underline{\frac{52}{45}}} = \underline{\underline{1\frac{7}{45}}}$

Die uns bekannte Addition von Dezimalbrüchen können wir jetzt auf die Addition von Zehnerbrüchen zurückführen.

■ 9

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ +\ 1{,}25 \\ \hline 1{,}85 \end{array}$$

$0{,}6 + 1{,}25 = \frac{6}{10} + \frac{125}{100} = \frac{60+125}{100}$
$= \frac{185}{100} = \underline{\underline{1{,}85}}$

## Aufgaben

Berechne!

1.↑ a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3} + \frac{3}{8}$ g) $\frac{3}{5} + \frac{3}{2}$ i) $\frac{5}{6} + \frac{8}{24}$
b) $\frac{3}{7} + \frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$ f) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}$ h) $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$ k) $\frac{7}{9} + \frac{5}{18}$

2.↑ a) $\frac{7}{27} + \frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{20} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ g) $\frac{7}{20} + \frac{9}{10}$ i) $\frac{4}{13} + \frac{2}{26}$
b) $\frac{7}{9} + \frac{7}{27}$ d) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{6} + \frac{11}{22}$ h) $\frac{15}{30} + \frac{7}{2}$ k) $\frac{5}{7} + \frac{1}{35}$

3.↑ a) $\frac{6}{9} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{24} + \frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{15} + \frac{4}{30}$ d) $\frac{5}{7} + \frac{0}{14}$ e) $\frac{18}{42} + \frac{4}{7}$

4.↑ a) $\frac{2}{5} + \frac{7}{20}$ b) $\frac{9}{12} + \frac{5}{15}$ c) $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{4} + 0{,}8$ e) $\frac{5}{7} + \frac{3}{4}$

5.↑ a) $0{,}67 + 0{,}76$ b) $7{,}03 + 2{,}25$ c) $0{,}33 + 1{,}7$ d) $11{,}2 + 8{,}53$

6.↑ a) $\frac{1}{4} + 0{,}2$ c) $0{,}1 + \frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{5} + 0{,}25$ g) $\frac{1}{4} + 0{,}75$ i) $0{,}3 + \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2} + 0{,}25$ d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ f) $0{,}5 + \frac{1}{2}$ h) $\frac{2}{5} + 0{,}4$ k) $0{,}9 + \frac{4}{5}$

**7.** Berechne die Summen und kürze soweit wie möglich!

**a)** $\frac{3}{20} + \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{4} + \frac{11}{20}$ **c)** $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ **d)*** $\frac{7}{51} + \frac{6}{34}$ **e)** $\frac{39}{40} + \frac{49}{50}$

**8.** Ermittle alle natürlichen Zahlen $x$ und $y$, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

**a)** $\frac{x}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$ **c)** $\frac{3}{2} + \frac{y}{4} = \frac{10}{5}$ **e)** $\frac{4}{5} + \frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ **g)** $\frac{x}{y} + \frac{2}{7} = 1$

**b)** $\frac{4}{5} + \frac{x}{5} = \frac{8}{10}$ **d)** $\frac{x}{5} + \frac{3}{5} = 1$ **f)** $\frac{2}{3} + \frac{y}{9} = \frac{6}{9}$ **h)** $\frac{x}{20} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$

**9.** Für welche gebrochenen Zahlen sind folgende Gleichungen wahre Aussagen?

**a)** $0{,}2 + b = 0{,}7$ **c)** $0{,}8 + a = 0{,}804$ **e)** $a + 0{,}5 = 0{,}75$

**b)** $0{,}3 + a = 0{,}36$ **d)** $b + 0{,}4 = 0{,}07$ **f)** $b + 0{,}20 = 0{,}200$

**10.** Gib je fünf gebrochene Zahlen für $x$ an, so daß gilt

**a)** $\frac{3}{8} + x < 1$, **c)** $\frac{29}{33} + x < 1$, **e)** $\frac{78}{77} + x < 1$,

**b)** $\frac{5}{8} + x < 1$, **d)** $\frac{99}{100} + x < 1$, **f)** $\frac{8}{9} + x < 1$!

**11.** Stelle $\frac{5}{8}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{12}\right)$ als Summe **a)** von zwei gleichnamigen Brüchen, **b)** von zwei ungleichnamigen Brüchen dar!

**12.*** In der folgenden Summe tritt jede der Grundziffern 0 bis 9 einmal auf. Wie groß ist $x$?

**a)** $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = x$ **b)** $78\frac{3}{5} + 21\frac{46}{90} = x$

**13.** Gib drei Paare natürlicher Zahlen $(x; y)$ an, für die gilt:

**a)** $\frac{1}{2} + \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$, **b)** $\frac{8}{15} + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, **c)** $\frac{2}{3} + \frac{x}{y} < 1$!

## 6 Subtraktion gebrochener Zahlen

Auch die Subtraktion gebrochener Zahlen wird auf die Subtraktion gleichnamiger Brüche zurückgeführt. Anstelle von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ können wir rechnen:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Die Differenz der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist die gebrochene Zahl $\frac{1}{6}$.
Wie bei den natürlichen Zahlen ist auch bei den gebrochenen Zahlen die Subtraktion die Umkehrung der Addition.

Mit $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ gilt auch $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

▶ 6

**Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1]) werden subtrahiert, indem man:**
**1. diese Brüche gleichnamig macht und**
**2. die gleichnamigen Brüche subtrahiert.**

[1]) Man sagt meistens kürzer: „Gemeine Brüche werden subtrahiert, indem man ..."

$$\frac{6}{5} - \frac{3}{10} = x$$

oder $x + \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

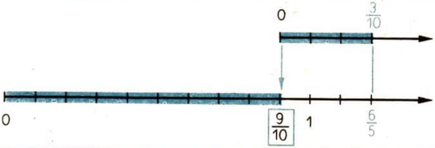



Bild B 18

Die Subtraktion kann man veranschaulichen (↗ Bild B 18).

**10** **a)** $\frac{7}{5} - \frac{3}{10}$

*Wir überlegen:*
Der Hauptnenner von 5 und 10 ist 10.

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{10} = \frac{14}{10} - \frac{3}{10} = \frac{14-3}{10} = \underline{\underline{\frac{11}{10}}}$$

**b)** $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

*Wir überlegen:*
Der Hauptnenner von 6 und 8 ist 24.
$4 \cdot 6 = 24$ und $3 \cdot 8 = 24$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{20-9}{24} = \underline{\underline{\frac{11}{24}}}$$

**c)** $\frac{7}{15} - \frac{6}{30}$

*Wir überlegen:*

$\frac{6}{30}$ kann gekürzt werden: $\frac{6}{30} \overset{:2}{=} \frac{3}{15}$.

$$\frac{7}{15} - \frac{6}{30} = \frac{7}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7-3}{15} = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$$

● **14** Berechne $m - n$ für
**a)** $m = \frac{4}{9}$; $n = \frac{12}{18}$, **b)** $m = \frac{5}{6}$; $n = \frac{2}{3}$, **c)** $m = \frac{3}{4}$; $n = 0{,}75$!

Genau wie bei den natürlichen Zahlen ist auch im Bereich der gebrochenen Zahlen die Subtraktion $a - b$ nur dann ausführbar, wenn $a \geqq b$.

## Aufgaben

Berechne zur Wiederholung!

1.↑ **a)** $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{25}{3} - \frac{8}{3}$ **c)** $\frac{37}{2} - \frac{19}{2}$ **d)** $\frac{27}{6} - \frac{41}{6}$ **e)** $\frac{18}{7} - \frac{18}{7}$

2.↑ **a)** $0{,}7 - 0{,}3$ **b)** $0{,}75 - \frac{1}{2}$ **c)** $10{,}8 - 7{,}5$ **d)** $0{,}8 - \frac{3}{5}$

Berechne!

3.↑ **a)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{8}$ **e)** $\frac{8}{9} - \frac{7}{18}$ **g)** $\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$ **i)** $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$
**b)** $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{9}{10} - \frac{7}{20}$ **f)** $\frac{4}{6} - \frac{11}{22}$ **h)** $\frac{3}{5} - \frac{9}{20}$ **k)** $\frac{5}{12} - \frac{5}{6}$

4.↑ **a)** $\frac{11}{12} - \frac{1}{3}$ **c)** $\frac{5}{18} - \frac{11}{12}$ **e)** $\frac{3}{4} - 0{,}6$ **g)** $1{,}2 - \frac{1}{2}$
**b)** $\frac{7}{12} - \frac{3}{8}$ **d)** $\frac{8}{24} - \frac{9}{45}$ **f)** $6{,}7 - \frac{15}{4}$ **h)** $\frac{3}{4} - 0{,}5$

5* Die Länge eines Rechtecks betrage $3\frac{1}{2}$ cm. Die Breite dieses Rechtecks ist um $\frac{2}{5}$ cm geringer. Zeichne dieses Rechteck! Berechne den Umfang!

**6.** Berechne die Differenzen und kürze soweit wie möglich!

**a)** $\frac{5}{12} - \frac{7}{9}$ **d)** $\frac{12}{15} - \frac{7}{20}$ **g)** $\frac{8}{5} - \frac{11}{4}$ **k)** $\frac{35}{45} - \frac{28}{9}$

**b)** $\frac{15}{25} - \frac{2}{15}$ **e)** $\frac{7}{18} - \frac{5}{12}$ **h)** $\frac{4}{5} - \frac{5}{16}$ **l)** $\frac{19}{15} - \frac{11}{12}$

**c)** $\frac{11}{12} - \frac{10}{15}$ **f)** $\frac{150}{24} - \frac{200}{32}$ **i)** $\frac{29}{6} - \frac{12}{8}$ **m)** $\frac{12}{13} - \frac{15}{17}$

**7.** Ermittle alle natürlichen Zahlen *m* und *n*, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

**a)** $\frac{m}{3} - \frac{2}{3} = 1$ **d)** $\frac{m}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ **g)** $\frac{5}{6} - \frac{n}{3} = \frac{1}{2}$ **k)** $\frac{7}{5} - \frac{m}{10} = \frac{14}{10}$

**b)** $\frac{3}{4} - \frac{n}{2} = \frac{1}{4}$ **e)** $\frac{n}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ **h)** $\frac{m}{2} - \frac{n}{2} = 1$ **l)** $\frac{1}{2} - \frac{m}{n} = 0$

**c)** $\frac{m}{4} - \frac{4}{8} = 0$ **f)** $\frac{m}{2} - \frac{3}{4} = 0$ **i)** $\frac{1}{2} - \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$ **m)** $\frac{7}{8} - \frac{1}{m} = \frac{5}{8}$

**8.** Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!

**a)** $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{4}$ **c)*** $\frac{1}{2} - x = \frac{2}{3}$ **e)** $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ **g)*** $x - \frac{7}{8} = \frac{15}{16}$

**b)** $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}$ **d)*** $\frac{1}{2} - x = 0{,}4$ **f)** $\frac{2}{3} + x = \frac{3}{4}$ **h)*** $x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

**9.** Gib je fünf gebrochene Zahlen $x$ an, so daß gilt:

**a)** $\frac{13}{6} - x > 2$, **c)*** $\frac{7}{3} - x > 2$, **e)** $x - \frac{80}{31} > 2$,

**b)** $\frac{8}{3} - x > 2$, **d)*** $x - \frac{5}{3} > 2$, **f)** $\frac{201}{100} - x > 2$!

**10.*** Gib eine gebrochene Zahl $x$ an, die sich

**a)** von $\frac{1}{3}$ um weniger als $\frac{1}{9}$,

**b)** von $\frac{1}{8}$ um weniger als $\frac{1}{100}$ unterscheidet!

## 7 Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition

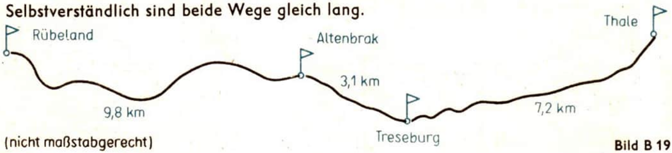
Eine Schulklasse wandert von Rübeland über Treseburg (Mittagspause) nach Thale. Die Länge des gewanderten Weges ergibt sich als:

$$9{,}8 \text{ km} + 3{,}1 \text{ km} + 7{,}2 \text{ km} = 20{,}1 \text{ km}$$ (↗ Bild B 19).

Eine andere Schulklasse wandert von Thale über Treseburg (Mittagspause) nach Rübeland. Die Länge des von dieser Schulklasse gewanderten Weges ergibt sich als:

$$7{,}2 \text{ km} + 3{,}1 \text{ km} + 9{,}8 \text{ km} = 20{,}1 \text{ km}.$$

Selbstverständlich sind beide Wege gleich lang.




(nicht maßstabgerecht) Bild B 19

Wie für die Addition natürlicher Zahlen gelten auch im Bereich der gebrochenen Zahlen folgende Gesetze:

▶ 7 **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen $a$ und $b$ gilt:**
**$a + b = b + a$** **(Kommutativgesetz)**

■ 11 $\boxed{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}} = \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\boxed{6+3}}{8} = \frac{\boxed{3+6}}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{8} + \frac{3}{4}}$

▶ 8 **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen $a$, $b$ und $c$ gilt:**
**$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$** **(Assoziativgesetz)**

Jetzt können wir sofort mehr als zwei gebrochene Zahlen addieren.

■ 12 **a)** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

*Wir überlegen:*
8 ist nicht Hauptnenner, denn $3 \nmid 8$
12 ist HN; $6 \cdot 2 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+8+9}{12} = \underline{\underline{\frac{23}{12}}}$

**b)** $\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10}$

*Wir überlegen:*
20 ist nicht HN, denn $3 \nmid 20$.
30 ist HN; $6 \cdot 5 = 30$, $10 \cdot 3 = 30$, $15 \cdot 2 = 30$

$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10} = \frac{12+40+45+21}{30} = \frac{118}{30} = \underline{\underline{\frac{59}{15}}}$

Durch die Anwendung dieser Gesetze können sich Rechenvorteile ergeben.

■ 13 **a)** $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}$
$= \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \frac{1}{3} = \underline{\underline{2\frac{1}{3}}}$

**b)** $0{,}81 + 2{,}47 + 1{,}19 = (0{,}81 + 1{,}19) + 2{,}47 = 2 + 2{,}47 = \underline{\underline{4{,}47}}$

**c)** $2\frac{2}{5} + 6\frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{5} + 6 + \frac{1}{3}$
$= 2 + 6 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{6+5}{15} = \underline{\underline{8\frac{11}{15}}}$

Kürzer schreiben wir:
$2\frac{2}{5} + 6\frac{1}{3} = 8\frac{11}{15}$ Nebenrechnung: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$

**Für die Subtraktion gelten die Gesetze ▶ 7 und ▶ 8 nicht.**

■ 14 **a)** $\frac{7}{2} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) =$
$\frac{7}{2} - \quad \frac{1}{2} \quad = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$

Nebenrechnung: $\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6-1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

**b)** $\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{10} =$
$\frac{29}{10} \quad - \quad \frac{1}{10} = \underline{\underline{\frac{14}{5}}}$

Nebenrechnung[1]: $\frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{35-6}{10} = \frac{29}{10}$

[1]) Hier können, wie bei natürlichen Zahlen, die Klammern weggelassen werden:
$\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{10} = \frac{7}{2} - \frac{3}{5} - \frac{1}{10}$.

Wir vergleichen die Ergebnisse der Beispiele 14a und b und stellen fest, daß sie verschieden sind: $\frac{14}{5} < 3$.
Traten beim Rechnen mit natürlichen Zahlen mehrere Subtrahenden auf, so haben wir diese in einem ersten Rechenschritt addiert. Wir rechneten zum Beispiel

$$121 - 26 - 35 = 121 - (26 + 35) = 121 - 61 = 60.$$

Ebenso kann man die folgende Aufgabe lösen:

■ **15** $\frac{7}{2} - \frac{3}{5} - \frac{1}{10} =$

$\frac{7}{2} - \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{2} - \frac{7}{10}$

$= \frac{35 - 7}{10} = \frac{28}{10} = \underline{\underline{\frac{14}{5}}}$

Nebenrechnung:

$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{6 + 1}{10} = \frac{7}{10}$

● **15** Berechne und vergleiche die Ergebnisse miteinander!

a) $\frac{5}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{12}$
b) $\frac{5}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right)$
c) $\frac{5}{3} - \frac{5}{6} + \frac{1}{12}$
d) $\frac{5}{3} - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{12}\right)$

**Wir merken uns:** Stets müssen zuerst die Rechenoperationen innerhalb der Klammer ausgeführt werden!

## Aufgaben

**1.** Berechne und kürze so weit wie möglich!

a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{1}$ g) $\frac{3}{8} + \frac{9}{11} + \frac{1}{4}$ k) $\frac{11}{25} + \frac{7}{15} + \frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$ h) $\frac{9}{10} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ l) $\frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$

c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}$ f) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} + \frac{7}{10}$ i) $\frac{6}{7} + \frac{7}{6} + \frac{41}{42}$ m) $\frac{11}{24} + \frac{17}{36} + \frac{7}{9}$

**2.***↑ a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{7}{15} + \frac{9}{20} + \frac{5}{8} + \frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12} + \frac{19}{30} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{7} + \frac{1}{6} + \frac{9}{14} + \frac{5}{12} + \frac{16}{21} + \frac{1}{3} + \frac{7}{8}$

**3.**↑ a) $2\frac{3}{4} + 7\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5}$ b) $1\frac{9}{10} + 9\frac{1}{10}$ c) $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $11\frac{7}{8} - 1\frac{3}{4}$

**4.**↑ a) $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5}$ c) $\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right)$

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8}$

**5.**↑ a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 0{,}75$ c) $\frac{2}{3} - \frac{11}{12} + \frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{3} - \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{4}\right)$

b) $0{,}5 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{7} - \left(\frac{1}{14} + \frac{25}{28}\right)$ f) $\frac{5}{7} - \frac{1}{14} - \frac{25}{28}$

**6.** Für welche gebrochenen Zahlen $x$ gilt

a) $x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{7}$, b) $\frac{5}{9} + \frac{7}{10} = x + \frac{5}{9}$, c) $\left(\frac{5}{7} + \frac{4}{9}\right) + x = \frac{5}{7} + \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{7}\right)$,

d) $\frac{3}{8} + \left(x + \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{7}$, e) $x + \frac{4}{9} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9}$?

**7.** Berechne!

a) $\frac{21}{12} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{39}{18} - \frac{50}{45} - \frac{11}{36} - \frac{81}{90}$ c) $\frac{5}{12} - \frac{3}{8} - \frac{1}{32} - \frac{1}{96}$

**8.*** Setze Klammern, so daß eine wahre Aussage entsteht!

**a)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{7} + \frac{3}{42} = \frac{10}{21}$ **c)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

**b)** $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{41}{60}$ **d)** $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6} = \frac{7}{24}$

**9.** Die Summe zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{47}{60}$. Der eine Summand sei **a)** $\frac{33}{60}$, **b)** $\frac{5}{12}$, **c)** $\frac{8}{36}$, **d)** $\frac{4}{15}$, **e)** $\frac{11}{40}$.
Wie groß ist der andere Summand?

**10.** Ermittle die Zahl, die um **a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** $\frac{3}{4}$, **d)** $\frac{7}{8}$, **e)** $\frac{11}{5}$ kleiner als $\frac{5}{2}$ ist!

**11.** Schreibe mit Klammern! Rechne aus!

**a)** Addiere zur Summe der Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{5}{6}$ die Zahl $\frac{4}{7}$!

**b)** Subtrahiere $\frac{1}{2}$ von der Summe der Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{5}$!

**c)** Addiere zu $\frac{2}{5}$ die Differenz der Zahlen $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{10}$!

**d)** Subtrahiere $\frac{1}{6}$ von der Differenz der Zahlen $\frac{7}{12}$ und $\frac{1}{8}$!

**e)** Addiere $\frac{1}{3}$ zur Differenz der Zahlen $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{5}$!

**12.** Vergleiche die Summen und Differenzen der Größe nach, ohne sie auszurechnen!

**a)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{7}{4}$ **b)** $\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$; $\frac{3}{5} + \frac{5}{4}$

**c)** $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{8}$; $6\frac{1}{10} + 2\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{7}{3} - \frac{1}{5}$; $\frac{10}{3} - \frac{1}{5}$

**e)** $5\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}$; $4\frac{9}{10} - 3\frac{1}{2}$ **f)*** $\frac{8}{9} - \frac{2}{7}$; $\frac{9}{8} - \frac{4}{7}$

**13.** Für welche gebrochenen Zahlen $x$ gilt

**a)** $x + 0 = x$, **c)** $x - 0 = \frac{1}{7}$, **e)** $x - x = 0$, **g)** $0 - x = 0$,

**b)** $0 + x = \frac{3}{5}$, **d)** $x - 0 = x$, **f)** $x - x = \frac{7}{10}$, **h)** $0 - x = \frac{4}{5}$?

## 8 Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen

*Wir können bereits* Dezimalbrüche schriftlich addieren und subtrahieren.

■ **16 a)**

$$\begin{array}{r} 221{,}47 \\ +\ 45{,}23 \\ +\ 101{,}7 \\ \hline \underline{\underline{368{,}40}} \end{array}$$

**b)** $221{,}47 - 45{,}23 - 101{,}7 = \underline{\underline{74{,}54}}$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 45{,}23 \\ +101{,}7 \\ \hline 146{,}93 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 221{,}47 \\ -146{,}93 \\ \hline 74{,}54 \end{array}$$

In manchen Aufgaben treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf. In diesem Fall müssen Brüche umgewandelt werden.

● **16** **a)** Wandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche um!
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{6}$

**b)** Wandle die folgenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche um!
0,25; 0,2; 2,5; 1,125; 3,4; 0,6

● **17** Zerlege die Zahlen 10, 100 und 1000 in Primfaktoren!

Die Nenner von Zehnerbrüchen haben **nur** die Primfaktoren 2 und 5. Treten im Nenner eines Bruches andere Primfaktoren auf, so können wir diesen Bruch **nicht** in einen Zehnerbruch umwandeln.[1])

In der Aufgabe
$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \boxed{0{,}6} + \frac{4}{5}$
können wir den einzigen auftretenden Dezimalbruch leicht in einen gemeinen Bruch umwandeln und dann rechnen:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \boxed{\frac{3}{5}} + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{2+1+3+4}{5} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2.}}$$

Bei diesem Beispiel könnte man auch alle gemeinen Brüche in Dezimalbrüche umwandeln und dann rechnen:
$0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}8 = \underline{\underline{2{,}0.}}$

Für die Aufgabe
$\frac{7}{3} + \boxed{1{,}6} + \frac{4}{5} + \boxed{2{,}8}$
gibt es nur eine Lösungsmöglichkeit:
*Wir müssen alle Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandeln*, denn $\frac{7}{3}$ kann noch nicht als Dezimalbruch geschrieben werden.

$$\frac{7}{3} + \boxed{\frac{16}{10}} + \frac{4}{5} + \boxed{\frac{28}{10}}$$

*Wir überlegen:* Hauptnenner ist 30, denn $30 = 3 \cdot 10$ und $30 = 5 \cdot 6$.

*Wir rechnen:*
$$\frac{7}{3} + \frac{16}{10} + \frac{4}{5} + \frac{28}{10}$$
$$= \frac{70 + 48 + 24 + 84}{30} = \frac{226}{30} = \underline{\underline{\frac{113}{15}}}$$

■ **17** $\frac{2}{5} + 3{,}87 + \frac{9}{8} + 0{,}004$

$\frac{2}{5} = 0{,}4$
$\frac{9}{8} = 1{,}125$

$$\begin{array}{r} 0{,}4 \\ +\ 3{,}87 \\ +\ 1{,}125 \\ +\ 0{,}004 \\ \hline 5{,}399 \end{array}$$

Also: $\frac{2}{5} + 3{,}87 + \frac{9}{8} + 0{,}004 = \underline{\underline{5{,}399}}$

● **18** Berechne! Überlege dabei, wie du geschickt vorgehst!

**a)** $\frac{1}{2} - 0{,}25 + \frac{2}{3} + 0{,}75$ **c)** $121{,}41 - \left(\frac{27}{4} + 0{,}25\right) - 101{,}07$

**b)** $38{,}5 - 7\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$ **d)** $\frac{7}{1} + 0{,}5 - \frac{3}{2} + 5$

Treten Dezimalbrüche als Ergebnis von Messungen auf, so handelt es sich um **Näherungswerte**. Wird mit diesen Näherungswerten gerechnet, muß man bekanntlich überlegen, wie genau das Ergebnis sein kann.

[1]) Wir gehen wieder davon aus, daß Zähler und Nenner der gegebenen Brüche teilerfremd sind. ($\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ ist ja durchaus in einen Dezimalbruch umwandelbar.)

■ **18** Die Pioniere Ralf, Torsten, Arnim und Andreas haben Altpapier zur Schule mitgebracht. Sie hatten die Papierbündel zu Hause mit verschiedenen Arten von Waagen gewogen und erhielten folgende (unterschiedlich genaue) Ergebnisse: 18 kg; 5,6 kg; 3,62 kg und 4,7 kg. Wie groß ist die Gesamtmasse? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die einzelnen Näherungswerte addieren.
18 kg + 5,6 kg + 3,62 kg + 4,7 kg = 31,92 kg
Die Stellen nach dem Komma täuschen eine nicht mögliche Genauigkeit vor. Die erste Masse ist nur auf Kilogramm genau angegeben, also kann das Ergebnis auch nur auf Kilogramm genau angegeben werden.
Die Pioniergruppe sammelte rund 32 kg Altpapier.

● **19** Peter bringt noch drei alte Hefte mit, die zusammen eine Masse von 117 g haben. Wie ändert sich das Sammelergebnis der Gruppe im Beispiel B 18?

■ **19** Ein rechteckiger Garten mit 35 m Länge und 33 m Breite soll eingezäunt werden. An einer Ecke des Gartens steht eine 6,45 m lange und 4,15 m breite Garage, so daß der Zaun nicht das ganze Grundstück umschließen muß. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?
Für den Umfang des Gartens erhalten wir:
$u = 2 \cdot 35\ \text{m} + 2 \cdot 33\ \text{m} = 136\ \text{m}$.
Davon sind Länge und Breite der Garage zu subtrahieren:
136 m − 6,45 m − 4,15 m = 125,40 m.
Schauen wir uns alle Ausgangswerte an, so muß die Antwort lauten:
Es werden 126 m Zaun benötigt.

● **20** Begründe, warum nicht auf 125 m gerundet wurde!

## Aufgaben

**1.** Wandle in einen Dezimalbruch um!
**a)** $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{21}{10}$; $3\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{9}{5}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{21}{2}$; $\frac{7}{9}$; $7\frac{1}{4}$; $3\frac{3}{4}$

**2.** Vergleiche!
**a)** $\frac{23}{8}$ und 3 **c)** $\frac{38}{7}$ und 6 **e)** 2,4 und $\frac{12}{2}$ **g)** 3,2 und $\frac{14}{3}$
**b)** 4 und $\frac{32}{5}$ **d)** $\frac{28}{5}$ und 4,5 **f)** $\frac{9}{4}$ und 2,2 **h)** $\frac{21}{6}$ und 3,6

**3.** Berechne!
**a)** $4{,}5 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)$ **d)** $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - 0{,}25$ **g)** $23{,}95 - \frac{7}{2} - 4{,}321$
**b)** $3{,}4 - \left(\frac{9}{2} - 3\right)$ **e)** $1{,}25 - \frac{5}{9} - 0{,}8$ **h)** $14{,}7 - \frac{3}{5} + 0{,}035$
**c)** $\frac{1}{3} + 0{,}7 - 0{,}003$ **f)** $\frac{3}{2} - \frac{1}{5} + 0{,}7$ **i)** $2{,}8 + \frac{1}{3} - 1{,}2$

**4.** Berechne $84 - x$ und $x + 6{,}546$, wenn
**a)** $x = 30{,}4$; **b)** $x = 2{,}454$; **c)** $x = 83{,}98$; **d)** $x = 91{,}5$!

**5.*** Setze Klammern so, daß das Ergebnis richtig ist!
**a)** $61{,}5 - 2{,}5 - \frac{3}{2} = 60{,}5$ **b)** $84{,}7 - 5{,}4 - 7{,}6 - 4{,}6 = 76{,}3$

**6.** Berechne!

**a)** $68{,}7 - (44{,}7 + 0{,}375)$
**b)** $(90{,}4 + 65{,}4) - 90{,}8$
**c)** $18{,}6 - 7{,}35 - 4{,}5$
**d)** $(504 - 47{,}9) + (58{,}7 - 49)$
**e)** $7{,}654 + (37 - 22{,}9) + 0{,}345$
**f)** $3{,}15 - (25{,}4 - 24{,}965)$

**7.** Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!

**a)** $\frac{2}{5} - 0{,}4 + x = 1$
**b)** $1{,}9 - \frac{7}{4} + w = 1$
**c)** $\frac{3}{2} - 0{,}8 + y = 1$
**d)** $\frac{3}{4} - 0{,}6 + z = 1$
**e)** $1{,}2 - \frac{1}{5} + v = 1$
**f)** $4{,}1 + a = 20{,}3 - 4{,}9$
**g)** $10 - m + 4{,}3 = 10{,}7$
**h)** $x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 1$
**i)** $2{,}5 - k - \frac{5}{4} = 1{,}25$

**8.*** Berechne!

**a)** $56{,}24 - (27{,}11 - (43{,}76 - 27{,}11))$
**b)** $537 - (47{,}23 + (32{,}77 + 0{,}13))$
**c)** $8{,}7 + (100 - (12{,}91 - 11{,}97))$

**9.** Welche Summe ist größer? Entscheide ohne zu rechnen!

**a)** $3{,}72 + 0{,}89 + 5{,}21$ oder $3{,}84 + 0{,}98 + 5{,}64$
**b)** $21{,}4 + 8{,}3 + 6{,}1$ oder $20{,}7 + 8{,}1 + 5{,}73$
**c)** $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ oder $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$

**10.** Ergänze folgende magische Quadrate so, daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale 3 beträgt!

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{1}{3}$ | |
| | 1 | |
| | | $\frac{5}{21}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{74}{42}$ | | |
| $\frac{1}{7}$ | 1 | |
| | | |

**11.** Ergänze folgende magische Quadrate so, daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale 1 beträgt!

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | | |
| | $\frac{1}{3}$ | |
| | $\frac{5}{9}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{5}{12}$ | $\frac{2}{9}$ | |
| | | |
| | | $\frac{1}{4}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{1}{5}$ | |
| $\frac{4}{15}$ | | |
| $\frac{3}{10}$ | | |

Berechne!

**12.**↑ **a)** $2{,}3 + 3{,}77 + 3{,}23 + 1{,}82$
**b)** $5{,}7 + 3{,}89 + 11{,}2 + 7{,}23$
**c)** $4{,}93 + 9{,}712 + 4{,}3 + 7{,}2$
**d)** $1{,}39 + 4{,}94 + 27{,}2 + 7{,}801 + 6{,}309$
**e)** $18{,}28 + 19{,}84 + 9{,}43 + 5{,}55 + 10{,}02$
**f)** $0{,}021 + 0{,}0021 + 0{,}21 + 0{,}00021$

**13.**↑ **a)** $2{,}88 - 0{,}33 - 1{,}47$
**b)** $0{,}044 - 0{,}23 - 0{,}009 - 0{,}019$
**c)** $33{,}4 - 28{,}7 - 2{,}87 - 0{,}287$
**d)** $2{,}074 - 1{,}382 - 0{,}377 - 0{,}298$
**e)** $15{,}008 - 7{,}403 - 0{,}0201 - 3{,}004$
**f)** $2700{,}4 - 328{,}9 - 1999{,}8 - 32{,}07$

**14.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

**a)** $0{,}6 - \frac{3}{10} + 1{,}75 = 2$
**b)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} + 0{,}25 < 1$

c) $3{,}7 - \frac{1}{4} - 2{,}65 > 1$ d) $2{,}375 + \frac{3}{4} - 1{,}5 - \frac{3}{10} = 1{,}3$

e) $7{,}3 - \frac{2}{3} + 0{,}5 > 6$ f) $3{,}7 - \frac{6}{15} - 0{,}55 + 4{,}75 > 7{,}5$

**15.** **a)** Überprüfe, ob $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{2}$; 0,8 Lösungen der Ungleichungen $\frac{5}{2} + u - \frac{1}{3} < 2$ und $z + 1{,}7 - \frac{3}{5} < 2{,}1$ sind?

**b)** Gib für jede der Ungleichungen drei weitere gebrochene Zahlen an, die Lösung der Ungleichung sind!

**c)*** Beschreibe für jede der Ungleichungen alle gebrochenen Zahlen, die Lösung der jeweiligen Ungleichung sind! Nenne die kleinste (größte) Zahl, die die jeweilige Ungleichung erfüllt!

**16.** Bei der Wahl des Gruppenrates ist ein Fünftel der Pioniere krank und ein weiteres Viertel fehlt aus anderen Gründen. Kann in diesem Fall gewählt werden, wenn bei der Wahl mindestens die Hälfte der Pioniere anwesend sein muß?

**17.** Von einem Ballen mit 30 m Stoff werden zuerst 2,60 m und dann $3\frac{3}{4}$ m verkauft. Wieviel Meter Stoff sind dann noch auf dem Ballen?

**18.** Zwei Wanderer laufen einander von zwei Orten aus entgegen. Der erste legt die Entfernung zwischen den beiden Orten in 8, der zweite in 6 Stunden zurück. Um welchen Teil der gesamten Strecke nähern sie sich einander in einer Stunde?

**19.** Zwei Radfahrer starten von einem Ort aus gleichzeitig. Der erste erreicht das gemeinsame Ziel in 9, der zweite in 6 Stunden. Um welchen Teil der gesamten Strecke ist der zweite Radfahrer dem ersten nach einer Stunde voraus?

**20.** Auf der Seite 41 wurde über die Darstellung der Brüche im alten Ägypten berichtet. Im erwähnten „Papyrus Rhind“ aus dem 17. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung gibt es eine Tabelle, in der Brüche der Form $\frac{2}{n}$ als Summen von Stammbrüchen angegeben werden. (*Stammbrüche* heißen Brüche mit dem Zähler 1).

Beispiele: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$; $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$; $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$;
$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$

**a)** Sind diese Beispiele wahre Aussagen?

**b)*** In einem Buch über die Geschichte der Mathematik findet man folgende Zerlegung:
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} = \frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}$. Überprüfe diese Feststellung!

**21.** Eine LPG hat sich auf den Obstanbau spezialisiert. Sie hat folgende Anbauflächen: 71,5 ha Äpfel; 10,6 ha Sauerkirschen; 7,75 ha Süßkirschen; 5,1 ha Pflaumen und 5,18 ha Erdbeeren. Auf wieviel Hektar wird insgesamt Obst angebaut? Überlege, wie du das Ergebnis runden mußt!

**22.** Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Im einzelnen werden folgende Massen angegeben: 7,5 kg; 4,64 kg; 12 kg; 2,5 kg und 1,75 kg. Gib die gesammelte Menge Altpapier in Kilogramm an!

**23.** Die Straßenfront eines 47 m breiten Grundstücks soll neu eingezäunt werden. Die 1,25 m breite Tür und das 4,30 m breite Tor sollen wieder verwendet werden. An dieser Straßenfront befinden sich außerdem sechs je 40 cm breite Pfeiler. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?

**24.** Die Länge zweier Stäbe wurde mit einem Lineal mit Millimetereinteilung gemessen. Die Länge des ersten Stabes liegt zwischen 13,2 und 13,3 cm und die Länge des zweiten Stabes zwischen 21,4 und 21,5 cm.

**a)** Wie lang sind beide Stäbe zusammen?

**b)** Wie groß ist der Längenunterschied zwischen ihnen höchstens, wie groß mindestens?

**25.** Ein Museumswärter sagt: „Als ich vor 11 Jahren hier anfing zu arbeiten, wurde gesagt, daß diese Mumie 4000 Jahre alt ist. Dann ist sie jetzt also 4011 Jahre alt.“ Was sagst du dazu?

**26.** Übertrage in dein Heft und fülle aus!

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $x-y$ | $y+x$ | $y-x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4\frac{1}{5}$ | 2,6 | | | | |
| 5,6 | | | $\frac{5}{2}$ | | |
| | 4,2 | 3,9 | | | |
| | $5\frac{1}{4}$ | | 4,5 | | |
| $\frac{14}{3}$ | | 1,6 | | | |

**27.*** Es seien $x$ und $y$ gebrochene Zahlen, für die $x < y$ gilt.

**a)** Können $y + x$ und $y - x$ gleich groß sein?

**b)** Gib für $x$ und $y$ Zahlen an, so daß $x + y - \frac{5}{2}$ zwischen $x$ und $y$ (nicht zwischen $x$ und $y$) liegt!

**28.*** Kann für gebrochene Zahlen $x$ und $y$ die Beziehung $x - y = y - x$ gelten?

## Zusammenfassung

| **Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen** | |
|---|---|
| **Es treten nur gemeine Brüche auf**<br>1. Gleichnamig machen<br>2. Zähler der gleichnamigen Brüche addieren<br>3. Gemeinsamen Nenner beibehalten | $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$<br><br>$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4-3}{8} = \frac{1}{8}$ |

| | |
|---|---|
| II **Es treten nur Dezimalbrüche auf**<br>1. Dezimalbrüche so aufschreiben, daß Komma unter Komma steht<br>2. Addieren bzw. subtrahieren wie bei natürlichen Zahlen<br>3. Im Ergebnis Komma so setzen, daß es unter den Kommas der Summanden steht | $\begin{array}{r} 44{,}97 \\ +\ 21{,}3 \\ +\ \ 4{,}753 \\ \hline 71{,}023 \end{array}$ $\begin{array}{r} 44{,}97 \\ -\ 26{,}053 \\ \hline 18{,}917 \end{array}$ |
| III **Es treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf**<br>Entweder alle gebrochenen Zahlen als gemeine Brüche schreiben oder alle gebrochenen Zahlen als Dezimalbrüche schreiben.<br>Dann wie bei I bzw. wie bei II weiterrechnen. | $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0{,}75$<br>$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$<br>oder<br>$= 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75 = 1{,}50$<br><br>$1{,}5 - \frac{2}{3} - 0{,}25$<br>$= \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$<br>$= \frac{18 - 8 - 3}{12} = \frac{7}{12}$ |

- Die Addition gebrochener Zahlen ist immer ausführbar. Zu je zwei gebrochenen Zahlen gibt es genau eine gebrochene Zahl als deren Summe.
  Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.
- Die Subtraktion ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer ist als der Minuend.
- Die Brüche mit dem Nenner 1 können bei der Addition und Subtraktion durch die entsprechenden natürlichen Zahlen ersetzt werden.

## Multiplikation und Division gebrochener Zahlen

### 9 Multiplikation gebrochener Zahlen

● 21 Gegeben seien zwei Quadrate mit 1 m bzw. $\frac{1}{2}$ m Seitenlänge (↗ Bild B 20). Vergleiche die Flächeninhalte der beiden Quadrate miteinander!
Welche Zahl könnte das Ergebnis der Multiplikation $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ sein? (Hinweis: Denke daran, daß du Dezimalbrüche schon multiplizieren kannst! Berechne auch $0{,}5 \cdot 0{,}5$!)

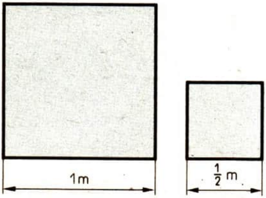



Bild B 20

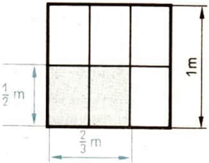



Bild B 21

Es ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit $a = \frac{2}{3}$ m und $b = \frac{1}{2}$ m zu bestimmen. Aus dem Bild B 21 können wir entnehmen, daß der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks $\frac{2}{6}$ m² beträgt. Es muß also gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}.$$

● 22 Welche Regel für die Multiplikation gebrochener Zahlen vermutest du?

Um diese Regel zu begründen, wollen wir die Multiplikation gebrochener Zahlen auf die Multiplikation natürlicher Zahlen zurückführen. Es gilt: $5 \cdot 4 = 20$.

Führt man die Multiplikation $5 \cdot 4$ mit anderen Darstellungen der Faktoren aus, soll das Ergebnis natürlich wieder 20 sein.

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \ldots$$
$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \ldots$$

Also rechnen wir: $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} = 20 = \frac{20}{1}$

Es soll auch gelten: $\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{2} = 20.$

Multipliziert man hier die Zähler miteinander, so erhält man $10 \cdot 8 = 80$. Damit das Produkt 20 ist, werden wir (wie oben bei $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$) auch die Nenner miteinander multiplizieren.

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2 \cdot 2} = \frac{80}{4} = \underline{\underline{20}}$$

Genauso rechnet man

$$\frac{20}{4} \cdot \frac{12}{3} = \frac{20 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{240}{12} = \underline{\underline{20}}$$

Man legt deshalb fest:

▶ 9 **Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1]) werden multipliziert, indem man:**
**1. die Zähler dieser Brüche multipliziert und**
**2. die Nenner dieser Brüche multipliziert.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad (a, b, c, d \in N;\ b, d \neq 0)$$

[1]) Man sagt meistens kürzer: „Gemeine Brüche werden multipliziert, indem man ..."

Zu zwei gebrochenen Zahlen gibt es stets genau eine gebrochene Zahl als deren Produkt. Vor dem Ausrechnen der Produkte kürzen wir soweit wie möglich. Gemischte Zahlen wandelt man vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

**20** a) $\frac{56}{9}\cdot\frac{15}{8}=\frac{\overset{7}{\cancel{56}}\cdot\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{1}{\cancel{8}}}=\frac{7\cdot 5}{3\cdot 1}=\underline{\underline{\frac{35}{3}}}$

b) $7\frac{4}{5}\cdot 1\frac{8}{13}=\frac{39}{5}\cdot\frac{21}{13}=\frac{\overset{3}{\cancel{39}}\cdot 21}{5\cdot\underset{1}{\cancel{13}}}=\frac{3\cdot 21}{5}=\underline{\underline{\frac{63}{5}}}=\underline{\underline{12\frac{3}{5}}}$

(Jede unterstrichene Darstellung wird als richtiges Ergebnis gewertet.)

**21** a) $7\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot 4}{1\cdot 3}=\underline{\underline{\frac{28}{3}}}$ Kürzer: $7\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot 4}{3}=\underline{\underline{\frac{28}{3}}}$

b) $\frac{2}{7}\cdot 4=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2\cdot 4}{7\cdot 1}=\underline{\underline{\frac{8}{7}}}$ Kürzer: $\frac{2}{7}\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{7}=\underline{\underline{\frac{8}{7}}}$

Also: Multipliziert man eine gebrochene Zahl mit einer natürlichen Zahl, so kann man schneller rechnen.

**23** Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft, fülle sie aus und vergleiche!

| | | | |
|---|---|---|---|
| Das Doppelte von 9 ist ...<br>Das Siebenfache von $\frac{1}{2}$ ist ... | | $2\cdot 9=$<br>$7\cdot\frac{1}{2}=$ | |
| $\frac{1}{3}$ von 3 ist 1<br>$\frac{2}{3}$ von 3 sind ...<br>$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ *l* ist ... | $\frac{1}{3}\cdot 3=1$<br>$\frac{2}{3}\cdot 3=$<br>$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$ | $\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind ...<br>$\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind ...<br>$\frac{1}{9}$ von 18 km sind ... | $\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}=$<br>$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{7}=$<br>$\frac{1}{9}\cdot 18=$ |

Wir erkennen: $\frac{a}{b}$ von $c$ ist das gleiche wie $\frac{a}{b}\cdot c$.

## Aufgaben

Berechne!

1.↑ a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{5}$ e) $\frac{9}{4}\cdot\frac{11}{7}$ g) $\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{13}$ i) $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}$ l) $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{2}$
b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{11}$ f) $\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{10}$ h) $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{2}$ k) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}$ m) $\frac{4}{9}\cdot\frac{27}{2}$

2.↑ a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}$ e) $3\cdot\frac{5}{2}$ g) $7\cdot 1\frac{1}{2}$ i) $\frac{5}{2}\cdot 3$
b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{5}$ f) $\frac{9}{11}\cdot\frac{33}{12}$ h) $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$ k) $\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{3}$

3. Kürze soweit wie möglich, bevor du multiplizierst!
a) $\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{33}\cdot\frac{1}{3}$ g) $\frac{16}{7}\cdot\frac{28}{64}$ k) $\frac{35}{48}\cdot\frac{36}{25}$ n) $\frac{7}{3}\cdot 5\frac{1}{4}$
b) $\frac{9}{18}\cdot\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{14}\cdot\frac{70}{55}$ h) $\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{24}$ l) $\frac{12}{17}\cdot\frac{34}{60}$ o) $\frac{12}{18}\cdot\frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{17}{51}$ f) $\frac{9}{12}\cdot\frac{96}{81}$ i) $\frac{15}{26}\cdot\frac{65}{75}$ m) $\frac{8}{25}\cdot\frac{15}{22}$ p) $\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{11}$

4. Gib zwei gebrochene Zahlen $z$ ($z \neq 0$) an, für die gilt:
a) $\frac{1}{2}\cdot z<\frac{1}{2}$, b) $3\cdot z<3$!

**5.** Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und fülle sie aus!

| $x$ | $y$ | $y \gtreqless 1$ | $x \cdot y$ | $x \cdot y < x$ | $x \cdot y > x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | $\frac{3}{2}$ | $y > 1$ | 15 | nein | ja |
| 10 | $\frac{1}{2}$ | $y < 1$ | | | |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | | | 5 | nein | ja |

**6.** Welche natürliche Zahl $n$ macht jeweils die folgende Gleichung zu einer wahren Aussage?

**a)** $\frac{3}{5} \cdot \frac{n}{4} = \frac{21}{20}$ **c)** $\frac{9}{8} \cdot \frac{n}{4} = \frac{9}{8}$ **e)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{n} = \frac{1}{3}\ (n \neq 0)$

**b)** $\frac{4}{7} \cdot \frac{n}{3} = \frac{19}{21}$ **d)** $\frac{n}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0$ **f)** $\frac{8}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ (n \neq 0)$

**7.** Überprüfe! Es gibt **gebrochene Zahlen** $x$ und $y$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), so daß gilt: $x \cdot y < x$.

**8.** Überprüfe! Es gibt **natürliche Zahlen** $x$ und $y$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), so daß gilt: $x \cdot y < x$.

**9.** Welche natürliche Zahl $n$ erfüllt die Gleichung?

**a)** $\frac{5}{7} \cdot \frac{n}{9} = \frac{35}{63}$ **b)** $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{n} = \frac{28}{20}$ **c)** $\frac{18}{15} \cdot \frac{4}{n} = \frac{24}{100}$

**10.** Für welche gebrochene Zahl $x$ entsteht eine wahre Aussage?

**a)** $\frac{5}{7} \cdot x = 1$ **b)** $\frac{3}{2} \cdot x < 1$ **c)** $\frac{5}{3} \cdot x = 0$ **d)** $\frac{7}{8} \cdot x = \frac{7}{8}$

**11.** Löse folgende Gleichungen!

**a)** $\frac{7}{4} \cdot x = 1$ **b)** $\frac{7}{11} \cdot x = 0$ **c)** $\frac{17}{20} \cdot y = \frac{17}{20}$ **d)** $z \cdot 0 = \frac{17}{11}$

**12.** Gib alle natürlichen Zahlen $m$ an, für die gilt:

**a)** $m \cdot \frac{[illegible]}{2} < 2$, **b)** $\frac{7}{5} \cdot m < \frac{31}{5}$, **c)** $m \cdot \frac{4}{7} > 1$, **d)** $m \cdot \frac{7}{11} < 4{,}5$,

**e)** $\frac{m}{4} \cdot m < 4$, **f)** $\frac{m}{9} \cdot m < 9$, **g)** $\frac{m}{5} \cdot m > 7$, **h)*** $2 < \frac{m}{9} \cdot m < 9$!

**13.** Löse die folgenden Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!

**a)** $\frac{3}{8} \cdot x = 1$ **b)** $1{,}5 \cdot x = 1$ **c)** $y \cdot 0{,}5 = 1$

**d)** $\frac{3}{5} \cdot x = 1$ **e)*** $\frac{7}{4} \cdot x = 5$ **f)** $x \cdot 11 = \frac{7}{11}$

Bild B 22

**14.** Der Schall legt in einer Sekunde einen Weg von $\frac{1}{3}$ km zurück. Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn nach dem Blitz noch **a)** 3 s, **b)** $5\frac{1}{2}$ s, **c)** 12 s, **d)** 2,5 s bis zum Ertönen des Donners vergehen? (↗ Bild B 22)

**15.** Berechne $x^2$!

a) $x = 5$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = \frac{7}{4}$ d) $x = 2{,}5$ e) $x = \frac{3}{74}$ f) $x = \frac{12}{11}$

**16.** Wieviel ist

a) $\frac{2}{3}$ von 18 kg, d) $\frac{3}{10}$ von 4 t, g) $\frac{6}{7}$ von 7 kg,

b) $\frac{3}{4}$ von 2 h, e) $\frac{5}{12}$ von 1 h, h) $\frac{2}{3}$ von 90 kg,

c) $\frac{4}{5}$ von 3 m, f) $\frac{3}{5}$ von 6 km, i) $\frac{4}{5}$ von 25 M?

**17.*** Bestimme $n$ so, daß eine wahre Aussage entsteht!

a) $\frac{3}{n}$ von 24 sind 18 b) $\frac{n}{4}$ von 32 sind 24 c) $\frac{5}{7}$ von $n$ sind 30

**18.*** Gib Paare natürlicher Zahlen $(m, n)$ an, so daß wahre Aussagen entstehen!

a) $\frac{m}{n}$ von 60 sind 30 b) $\frac{m}{n}$ von 121 sind 11 c) $\frac{3}{4}$ von $m$ ist $n$

## 10 Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

● **24** In einem Konfektionsbetrieb sollen an einem Tag 150 Blusen genäht werden. Für eine Bluse benötigt man 2,25 m Stoff (90 cm breit). Wieviel Meter Stoff werden an einem Tag verbraucht?

*Wir wissen bereits*, daß Dezimalbrüche wie natürliche Zahlen multipliziert werden. Im Ergebnis setzt man dann das Komma so, daß das Produkt so viele Dezimalstellen hat wie beide Faktoren zusammen.

■ **22** $27{,}25 \cdot 4{,}7$ Überschlag: $30 \cdot 5 = 150$ Ergebnis: $27{,}25 \cdot 4{,}7 = \underline{\underline{128{,}075}}$

Nebenrechnung:
$$\begin{array}{r} \underline{2725 \cdot 47} \\ 10900 \\ \underline{19075} \\ 128075 \end{array}$$

Dieses aus der Klasse 5 bekannte Verfahren können wir durch die Multiplikation von Zehnerbrüchen begründen.

$$27{,}25 \cdot 4{,}7 = \frac{2725}{100} \cdot \frac{47}{10} = \frac{2725 \cdot 47}{100 \cdot 10} = \frac{2725 \cdot 47}{1000} = \frac{128075}{1000} = \underline{\underline{128{,}075}}$$

Dezimalbrüche sind oft Näherungswerte, die man im Ergebnis von Messungen erhält. Rechnet man mit solchen Näherungswerten, muß man sich gründlich überlegen, wie genau das Ergebnis sein kann.

Der Flächeninhalt der rechteckigen Grundfläche eines Zimmers soll berechnet werden. Für Länge $l$ und Breite $b$ wurden 4,4 m bzw. 3,6 m gemessen.

Berechnen wir den Flächeninhalt mit diesen Werten, so erhalten wir:

$A = 4{,}4\ \text{m} \cdot 3{,}6\ \text{m}$ Überschlag: $4 \cdot 4 = 16$

$= 15{,}84\ \text{m}^2$

Als sinnvolles Ergebnis gibt man $A \approx \mathbf{16}\ \text{m}^2$ an.
Wie unsinnig die Angabe 15,84 m² für den Flächeninhalt ist, erkennt man auch, wenn man beachtet, zwischen welchen Werten die genauen Werte von $l$ und $b$ liegen. Setzen wir voraus, daß die Strecken gemessen und auf Dezimeter gerundet wurden, gilt für die genauen Werte $l$ und $b$:

$$4{,}35\ \text{m} \leqq l < 4{,}45\ \text{m} \quad \text{bzw.} \quad 3{,}55\ \text{m} \leqq b < 3{,}65\ \text{m}.$$

Für den Flächeninhalt bedeutet das:

$$4{,}35\ \text{m} \cdot 3{,}55\ \text{m} \leqq A < 4{,}45\ \text{m} \cdot 3{,}65\ \text{m}$$
$$15{,}4425\ \text{m}^2 \leqq A < 16{,}2425\ \text{m}^2$$

Auch hieraus erkennen wir, daß eine vernünftige Antwort lautet: Der Flächeninhalt beträgt rund 16 m².

## Aufgaben

**1.** Rechne im Kopf!

**a)** $0{,}8 \cdot 4$ **c)** $2 \cdot 0{,}27$ **e)** $0{,}8 \cdot 0{,}1$ **g)** $\frac{1}{2} \cdot 2{,}5$ **i)** $\frac{9}{10} \cdot 0{,}9$
**b)** $5 \cdot 0{,}5$ **d)** $0{,}4 \cdot 0{,}4$ **f)** $0{,}1 \cdot 1{,}27$ **h)** $7 \cdot 0{,}7$

**2.** Löse folgende Gleichungen! Mache eine Probe!

**a)** $\frac{2}{5} \cdot x = \frac{6}{25}$ **b)** $0{,}3 \cdot y = \frac{21}{40}$ **c)** $z \cdot \frac{7}{2} = 3{,}5$

**3.** Schreibe nur einen Überschlag auf!

**a)** $14{,}5 \cdot 0{,}18$ **b)** $0{,}37 \cdot 97{,}8$ **c)** $25{,}1 \cdot 3{,}98 \cdot 1{,}05$ **d)** $0{,}27 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}9$

**4.** Multipliziere 143,25 (9,7031) der Reihe nach mit 10; 100; 1 000; 0,1; 0,01; 0,001!

**5.** Bei der Aufgabe $7{,}67 \cdot 35{,}8$ erhalten fünf Schüler folgende Ergebnisse:
**a)** 274,586; **b)** 2 745,86; **c)** 274,86; **d)** 274,588; **e)** 27,4586.
Welche Ergebnisse sind gewiß falsch? Begründe!

**6.** Berechne folgende Produkte! Denke an einen Überschlag!

**a)** $2{,}9 \cdot 0{,}074$ **d)** $1{,}88 \cdot 0{,}06789$ **g)** $15{,}74 \cdot 0{,}73$ **k)** $3{,}074 \cdot 0{,}71$
**b)** $0{,}84 \cdot 2{,}79$ **e)** $12{,}9 \cdot 3{,}4$ **h)** $12{,}25 \cdot 0$ **l)** $0{,}76 \cdot 100$
**c)** $24{,}15 \cdot 3{,}73$ **f)** $4{,}6 \cdot 2{,}54$ **i)** $0{,}055 \cdot 0{,}22$ **m)** $50 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}2$

**7.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

**a)** $27{,}9 \cdot 0{,}028 < 1$ **d)** $0{,}98 \cdot 0{,}99 > 1$
**b)** $54{,}3 \cdot 0{,}021 > 15{,}4 \cdot 0{,}074$ **e)** $0{,}67 \cdot 0{,}98 < 3{,}7 \cdot 0{,}17$
**c)** $0{,}052 \cdot 6{,}74 < 0{,}073 \cdot 230{,}8$ **f)*** $4{,}2 \cdot 0{,}83 < 0{,}81 \cdot 8{,}05$

**8.** Berechne $x^2$!

**a)** $x = 12{,}3$ **b)** $x = 1{,}02$ **c)** $x = 0{,}1$ **d)** $x = 0{,}05$ **e)** $x = 421{,}5$

**9.** Gib den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den gemessenen Seitenlängen 4,5 cm und 5,7 cm auf cm² genau an!

**10.** Der Fußboden eines Zimmers mit rechteckiger Grundfläche soll gestrichen werden. Eine Dose Farbe reicht für fünf bis sechs Quadratmeter. Für Länge und Breite des Zimmers wurden 5,4 m bzw. 3,6 m gemessen. Wieviel Dosen werden benötigt?

**11.** Die Kantenlänge eines Würfels wurde mit 12,6 cm bis auf 0,1 cm genau gemessen.
**a)** Zwischen welchen Werten liegt das Volumen des Würfels?
**b)** Gib ein zweckmäßig gerundetes Ergebnis an!

## 11 Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen

Wie für die Multiplikation natürlicher Zahlen gelten auch für die Multiplikation gebrochener Zahlen folgende Gesetze:

▶ 10 **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen $a$ und $b$ gilt:**
**$a \cdot b = b \cdot a$.** **(Kommutativgesetz)**

Als Beispiel rechnen wir:

■ 23 **a)** $\boxed{\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \boxed{\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}}$

**b)** $1{,}2 \cdot 0{,}5 = \frac{12}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{10} \cdot \frac{12}{10} = 0{,}5 \cdot 1{,}2$

▶ 11 **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen $a$, $b$ und $c$ gilt:**
**$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$.** **(Assoziativgesetz)**

Hinweis: Wenn Variable nur für natürliche Zahlen benutzt werden, müssen wir z. B. das Assoziativgesetz der Multiplikation folgendermaßen formulieren:

Für alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ gilt:

$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

In dieser Darstellungsweise wird nicht sichtbar, daß dieses Gesetz auch für die Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung gilt.

■ 24 Bei der Berechnung des Flächeninhalts des im Bild B 23 dargestellten (zusammengesetzten) Rechtecks können wir zwei Wege gehen:

*1. Weg:*
$A = 2{,}3\ \text{cm} \cdot (2{,}6\ \text{cm} + 1{,}2\ \text{cm})$
$A = 2{,}3\ \text{cm} \cdot 3{,}8\ \text{cm}$
$\underline{\underline{A = 8{,}74\ \text{cm}^2}}$

*2. Weg:*
$A = (2{,}3\ \text{cm} \cdot 2{,}6\ \text{cm}) + (2{,}3\ \text{cm} \cdot 1{,}2\ \text{cm})$
$A = 5{,}98\ \text{cm}^2 + 2{,}76\ \text{cm}^2$
$\underline{\underline{A = 8{,}74\ \text{cm}^2}}$

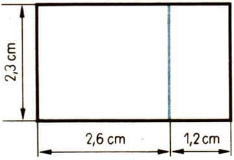



Bild B 23

Im Beispiel B 24 führen beide Wege zum gleichen Resultat; es gilt also:

$2{,}3 \cdot (2{,}6 + 1{,}2) = 2{,}3 \cdot 2{,}6 + 2{,}3 \cdot 1{,}2$.

Allgemein gilt der folgende Satz:

▶ 12 **SATZ: Für beliebige gebrochene Zahlen $a$, $b$ und $c$ gilt stets:**
**$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. (Distributivgesetz)**

■ 25 $\boxed{\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right)} = \boxed{\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9}}$

Denn:

$$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{36 + 10}{45}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{46}{45} = \frac{322}{135}$$

und:

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{15} + \frac{14}{27} = \frac{252 + 70}{135} = \frac{322}{135}$$

Manchmal können wir uns das Rechnen erleichtern, indem wir das Distributivgesetz anwenden.

■ 26 a) $\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{5} = 1 + \frac{16}{35} = \underline{\underline{1\frac{16}{35}}}$

b) $23{,}78 \cdot 7{,}3 + 76{,}22 \cdot 7{,}3 = (23{,}78 + 76{,}22) \cdot 7{,}3$
$= 100 \cdot 7{,}3 = \underline{\underline{730}}$

● 25 Rechne die Aufgabe aus Beispiel B 26 b, *ohne* daß du das Distributivgesetz anwendest!

■ 27 $0{,}75 \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \left(0{,}75 + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{7} = 1 \cdot \frac{3}{7} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$

Bei dieser Anwendung des Distributivgesetzes sagt man auch: Wir klammern in einer Summe den gemeinsamen Faktor der Summanden aus.

● 26 Berechne!

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$ c) $2{,}7 \cdot 3{,}8 - 2{,}7 \cdot 1{,}9$

Auch bei Subtraktionsaufgaben können wir gemeinsame Faktoren ausklammern.

■ 28 a) $(7 - 4{,}8) \cdot 20{,}2 - 31{,}44 = 2{,}2 \cdot 20{,}2 - 31{,}44$
$= 44{,}44 - 31{,}44 = \underline{\underline{13}}$

b) $12{,}2 + 2{,}5 \cdot 3 - 1{,}2 \cdot 2{,}6 = 12{,}2 + 7{,}5 - 3{,}12$
$= 19{,}7 - 3{,}12 = \underline{\underline{16{,}58}}$

● 27 Berechne folgende Produkte!

a) $\frac{7}{3} \cdot 1$ b) $0{,}27 \cdot 1{,}0$ c) $0{,}89 \cdot 0$ d) $\frac{48}{7} \cdot \frac{2}{4} - \frac{48}{7} \cdot \frac{1}{2}$ e) $1 \cdot 0{,}77$

▶ 13 **Für jede gebrochene Zahl $a$ gilt:**
**$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.**

## Aufgaben

**1.** Berechne!
**a)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ **b)** $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{8}{51} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{0}{31}$

**2.** Berechne das Ergebnis auf zwei Wegen!
**a)** $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)$ **b)** $\frac{11}{13} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)$ **c)** $\frac{8}{11} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{8}\right)$ **d)** $\frac{17}{91} \cdot \left(\frac{12}{30} - \frac{4}{10}\right)$

**3.** Gib das Produkt sowohl als Dezimalbruch als auch als möglichst weit gekürzten gemeinen Bruch an!
**a)** $0{,}3 \cdot 0{,}5$ **c)** $15{,}7 \cdot 0{,}18$ **e)** $33{,}2 \cdot 0{,}072$ **g)** $0{,}85 \cdot 1{,}4$
**b)** $0{,}7 \cdot 0{,}15$ **d)** $0{,}24 \cdot 0{,}25$ **f)** $0{,}0084 \cdot 13{,}7$ **h)** $0{,}75 \cdot 1{,}2$

Berechne!

**4.↑** **a)** $0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8$ **c)** $81{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 4{,}5$ **e)** $0{,}1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}001$
**b)** $1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1$ **d)** $0{,}2 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}02$ **f)** $17{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}04$

**5.↑** **a)** $0{,}23 \cdot 1{,}7 \cdot \frac{5}{7}$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{6}{5}$ **e)** $0{,}5^3$
**b)** $\frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{1}{5} \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}5$ **f)** $0{,}02^2$

**6.** Mache nur einen Überschlag!
**a)** $2{,}8 \cdot 4{,}7 \cdot 6{,}3$ **c)** $26{,}3 \cdot 0{,}076 \cdot 7{,}2$ **e)** $7{,}3 \cdot 0{,}064 \cdot 4{,}7$
**b)** $0{,}46 \cdot 5{,}5 \cdot 9{,}7$ **d)** $5{,}3 \cdot 0{,}0036 \cdot 7{,}3$ **f)** $0{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}03$

**7.** Berechne!
**a)** $\frac{3}{10} + 0{,}7 \cdot 0{,}5$ **b)** $1{,}2 - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}$ **c)** $\left(\frac{3}{10} + 0{,}7\right) \cdot 0{,}5$ **d)** $\left(1{,}2 - \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

**8.** Übertrage den folgenden Tabellenkopf in dein Heft!
Setze dann für $x$ die Zahlen
**a)** 0,1, **b)** 0,5, **c)** $\frac{2}{3}$ 1,3, **d)** $\frac{4}{5}$ 4,5, **e)** 3,4, **f)** $\frac{14}{10}$ ein und rechne!

| $x$ | $633 \cdot x + 637 \cdot x$ | $583 \cdot x - 283 \cdot x$ | $2{,}3 \cdot x + x$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**9.** Löse folgende Gleichungen!
**a)** $4 \cdot x + 4 \cdot x = 400$ **b)** $\frac{1}{2} \cdot x + 0{,}5 \cdot x = 12\frac{1}{2}$

Berechne!

**10.↑** **a)** $0{,}18 \cdot (8{,}5 + 163{,}48) - 10{,}63$ **c)** $19{,}5 + 7{,}5 \cdot (4{,}73 + 2{,}27)$
**b)** $45{,}41 - 5{,}41 \cdot (2{,}8 + 2{,}27)$ **d)** $12{,}5 - 3{,}5 \cdot (6{,}35 - 2{,}31)$

**11.** Berechne $4{,}7 \cdot x - 2{,}5 \cdot y$ für:
**a)** $x = 2{,}5$; $y = 2{,}7$ **b)** $x = 2{,}5$; $y = 4{,}7$ **c)** $x = 1{,}2$; $y = 5$!

**12.** Berechne!
**a)** $2{,}1 \cdot 7{,}6 + 3{,}9 \cdot 7{,}6$ **c)** $6{,}5 \cdot 8{,}2 - 3{,}5 \cdot 8{,}2$ **e)** $(0{,}4 + 0{,}03) \cdot 0{,}6$
**b)** $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{12}$ **d)** $\left(\frac{7}{3} - \frac{14}{12}\right) \cdot \frac{3}{7}$ **f)** $2 + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4}$
**g)** $2{,}4 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 1{,}5$

**13.*** Setze Klammern so, daß das Ergebnis richtig ist!

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = 0$ d) $0{,}2 \cdot 12 - 3{,}8 = 1{,}64$

**14.** Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus! Was stellst du fest?

| $a$ | $b$ | $a \cdot b$ |
|---|---|---|
| 27,4 | 9,8 | |
| $2 \cdot 27{,}4$<br>27,4 | 9,8<br>$2 \cdot 9{,}8$ | |
| $3 \cdot 27{,}4$<br>27,4 | 9,8<br>$3 \cdot 9{,}8$ | |

**15.** Wie groß ist
a) das 2,9fache von 21,55,
b) das 9,2fache der Summe von 4,21 und 6,79,
c) die Differenz von $27{,}5 \cdot 8{,}9$ und $6{,}6 \cdot 7{,}2$?

**16.** Für welche $x$ gilt:
a) $x \cdot x = 0{,}25$, b) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{49}$, c) $x \cdot x \cdot x = 0{,}001$, d) $x \cdot x \cdot x = 1$?

Berechne und kürze soweit wie möglich!

**17.**↑ a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{5}{3}$ c) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$ e) $\left(\frac{11}{13} - \frac{11}{13}\right) \cdot 5\frac{1}{3}$ g) $\frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{7}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{3}$ d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{18}{13}$ f) $\left(3\frac{2}{5} - \frac{8}{15}\right) \cdot \frac{15}{43}$ h) $\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{5} - \frac{5}{11}$

**18.**↑ a) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right)$ e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{8} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

**19.** Stelle ohne zu berechnen fest, welches der beiden Produkte jeweils größer ist!

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{6}$ und $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6}$ c) $3{,}5 \cdot 0{,}03$ und $0{,}03 \cdot 3{,}52$

b) $\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{6}$ und $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{2}$ d) $2{,}6 \cdot 0{,}008$ und $2{,}58 \cdot 0{,}0075$

**20.** Schreibe kürzer (ohne Worte) und berechne das Ergebnis!
a) Addiere zu 0,43 das Produkt aus 2,74 und 0,3!
b) Subtrahiere 4,2 vom Produkt der Zahlen 0,73 und 22,2!

**21.** Zu welcher Zahl muß man 25,4 addieren, um das 2,5 fache von 15,1 zu erhalten?

## Zusammenfassung

| **Multiplikation gebrochener Zahlen** | |
|---|---|
| I **Es treten nur gemeine Brüche auf**<br>1. Zähler der Brüche multiplizieren<br>2. Nenner der Brüche multiplizieren | $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{8}{63}}}$ |

| | |
|---|---|
| **II Es treten nur Dezimalbrüche auf**<br>1. Multiplizieren wie natürliche Zahlen<br>2. Komma im Ergebnis so setzen, daß das Produkt so viel Dezimalstellen hat, wie beide Faktoren zusammen | $1{,}52 \cdot 47{,}3$ Ü.: $2 \cdot 50 = 100$<br>Nebenrechnung<br>$\begin{array}{r} \underline{1{,}52 \cdot 47{,}3} \\ 608 \\ 1064\phantom{0} \\ \underline{456\phantom{00}} \\ 71{,}896 \end{array}$<br>$1{,}52 \cdot 47{,}3 = \underline{\underline{71{,}896}}$ |
| **III Es treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf**<br>1. Umwandeln, daß nur eine Form auftritt<br>2. Produkt nach I oder II berechnen | $0{,}75 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$<br>$1{,}11 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}11 \cdot 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}555}}$ |

Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist immer ausführbar. Zu je zwei gebrochenen Zahlen gibt es genau eine gebrochene Zahl als Produkt.
Es gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

## 12 Division gebrochener Zahlen

● **28** Löse folgende Divisionsaufgaben im Bereich der natürlichen Zahlen!
**a)** 255 : 5 **b)** 27 : 4 **c)** 32 : 8 **d)** 8 : 3 **e)** 9 : 15

● **29** Es werden 3 Äpfel auf 4 Kinder gleichmäßig verteilt. Wieviel bekommt jedes Kind?

● **30** Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!
**a)** $\frac{1}{7} \cdot x = 1$ **b)** $\frac{2}{3} \cdot y = 1$ **c)** $3 \cdot t = 1$ **d)** $0 \cdot z = 1$

▶ **14** **$\frac{b}{a}$ heißt die zu $\frac{a}{b}$ reziproke Zahl.**[1]

Man sagt auch: $\frac{b}{a}$ ist **das Reziproke von** $\frac{a}{b}$ $(a \neq 0)$.

Beim Rechnen mit dem Reziproken ist beachtenswert:

(1) Das Produkt aus einer beliebigen gebrochenen Zahl und der zu ihr reziproken Zahl ist 1.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

(2) Multipliziert man eine beliebige Zahl $x$ zuerst mit $\frac{a}{b}$ und dann mit $\frac{b}{a}$, so erhält man wieder $x$.

$$\left(x \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = x \cdot \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot a}\right) = x \cdot 1 = x$$

[1]) Reziprok stammt von dem lateinischen Wort „reciprocus", was so viel wie „wechselweise" bedeutet.

Wie bei den natürlichen Zahlen soll auch bei den gebrochenen Zahlen die Division die Umkehrung der Multiplikation sein. Die Aufgabe

$$\boxed{\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \frac{x}{y}}$$

zu lösen bedeutet, eine gebrochene Zahl $\frac{x}{y}$ zu finden, so daß gilt:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{x \cdot 4}{y \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

Da $2 \cdot 4 = 8$ und $5 \cdot 3 = 15$, können wir in diesem Beispiel die Lösung der Divisionsaufgabe angeben:

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}, \text{ denn } \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

Wie kann aber die Aufgabe

$$\boxed{\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{x}{y}}$$

gelöst werden? Wir müssen eine gebrochene Zahl $\frac{x}{y}$ finden, für die gilt:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{3}{4} = \frac{x \cdot 3}{y \cdot 4} = \frac{2}{5}.$$

Da 2 kein Vielfaches von 3 und 5 kein Vielfaches von 4 ist, muß $\frac{x}{y}$ so beschaffen sein, daß sich beim Multiplizieren mit $\frac{3}{4}$ die 3 und die 4 kürzen lassen und $\frac{2}{5}$ stehen bleibt. Das ist erfüllt bei:

$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3}, \text{ denn } \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{2}{5}.$$

Also ist $\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$ Lösung der Divisionsaufgabe $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$. Damit gilt:

$$\frac{2}{5} : \boxed{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5} \cdot \boxed{\frac{4}{3}}.$$

● 31 Schau dir die hervorgehobenen Zahlen genau an! Welche Beziehung besteht zwischen ihnen?

Allgemein wird festgelegt:

▶ 15

**Zwei gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ werden dividiert, indem man:**
**1. das Reziproke des Divisors bildet und**
**2. den Dividenden mit diesem Reziproken multipliziert.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$$

■ 29 a) $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{12}{35}}}$ Kontrolle: $\frac{12}{35} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$ Kontrolle: $\frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}$

**c)** $3 : \frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$ Kontrolle: $\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 3$

**d)** $0 : \frac{4}{5} = 0 \cdot \frac{5}{4} = \underline{\underline{0}}$ Kontrolle: $0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{0 \cdot 4}{5} = 0$

Für jede von Null verschiedene gebrochene Zahl $a$ gilt: $0 : a = 0$.
Natürliche Zahlen können durch zugehörige Brüche ersetzt werden. Dagegen darf man auch im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht durch 0 dividieren.

$\frac{4}{7} : 0 = a$ lösen würde bedeuten, genau eine gebrochene Zahl $a$ zu finden, für die gilt: $a \cdot 0 = \frac{4}{7}$.

Eine solche gebrochene Zahl gibt es nicht. Für jede gebrochene Zahl $a$ gilt $a \cdot 0 = 0 \neq \frac{4}{7}$ (↗ ▶ 13, S. 62).

$0 : 0 = a$ lösen würde heißen, genau **eine** gebrochene Zahl $a$ zu finden, für die gilt: $a \cdot 0 = 0$.
Das gilt aber für alle gebrochenen Zahlen.

In einem Mathematiklehrbuch der Sowjetunion wird den Schülern die *Einschränkung der Division* durch das nebenstehende Bild mitgeteilt. Übersetze den Text, der an der gezeichneten Tafel steht, und merke ihn gut (делить – dividieren)!


Bild B 24 „делить нельзя!" Eine Abbildung aus einem sowjetischen Lehrbuch

*Wir wissen jetzt!*

- Jede gebrochene Zahl (außer 0) hat genau ein Reziprokes.
- Zwei beliebige gebrochene Zahlen haben genau ein Produkt.

Also:

**Zwei beliebige gebrochene Zahlen haben stets genau eine gebrochene Zahl als Quotient, sofern der Divisor verschieden von Null ist.**

Vor dem Berechnen eines Quotienten kürzen wir soweit wie möglich. Gemischte Zahlen werden in unechte Brüche umgewandelt.

■ 30 **a)** $\frac{2}{35} : \frac{4}{7} = \frac{2}{35} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$ Kontrolle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}} \cdot 7} = \frac{2}{35}$

**b)** $2\frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5} = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$ Kontrolle: $\frac{24}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

■ 31 $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2 = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = \frac{7}{9} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$

## Aufgaben

Berechne und kontrolliere jeweils das Ergebnis!

1.↑ **a)** $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$ **c)** $\frac{11}{12} : \frac{1}{6}$ **d)** $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ **e)** $\frac{0}{56} : \frac{18}{31}$

2.↑ **a)** $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{8} : \frac{9}{12}$ **c)** $\frac{9}{12} : \frac{1}{8}$ **d)** $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ **e)** $\frac{25}{55} : \frac{65}{77}$

3.↑ **a)** $\frac{45}{23} : \frac{9}{46}$ **b)** $\frac{0}{4} : \frac{3}{8}$ **c)** $\frac{63}{54} : \frac{18}{21}$ **d)** $\frac{112}{77} : \frac{28}{33}$ **e)** $\frac{63}{56} : \frac{36}{32}$

4.↑ **a)** $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15}$ **b)** $2\frac{3}{4} : \frac{22}{7}$ **c)** $\frac{33}{5} : \frac{22}{10}$ **d)** $\frac{2}{5} : \frac{8}{5}$ **e)** $\frac{5}{3} : 2\frac{2}{9}$

5.↑ **a)** $\frac{5}{3} : 6$ **b)** $\frac{2}{9} : 14$ **c)** $4 : \frac{8}{9}$ **d)** $15 : \frac{6}{7}$ **e)** $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$

6.↑ **a)** $\frac{7}{9} : \frac{5}{8}$ **b)** $\frac{12}{7} : \frac{9}{14}$ **c)** $\frac{15}{2} : \frac{8}{5}$ **d)** $0 : \frac{3}{2}$

7. Für welche natürlichen Zahlen $n$ sind folgende Gleichungen wahre Aussagen?
**a)** $\frac{2}{3} : \frac{n}{5} = \frac{10}{21}$ **b)** $\frac{5}{4} : \frac{3}{n} = \frac{25}{12}$ **c)*** $\frac{n}{10} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ **d)*** $\frac{4}{n} : \frac{5}{21} = \frac{13}{5}$

8. **a)** Dividiere 12 der Reihe nach durch 12; 8; 6; 4; 3; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$!
**b)** Berechne $\frac{1}{2}$ von 12 (und weiter $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}$ von 12)!

9. Fülle folgende Tabelle aus für
**a)** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, **c)** $x = \frac{11}{5}$, $y = \frac{7}{3}$, **e)** $x = \frac{7}{20}$, $y = \frac{4}{15}$,
**b)** $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{4}{5}$, **d)** $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{5}{12}$, **f)** $x = \frac{5}{12}$, $y = \frac{3}{8}$!

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $x-y$ | $y-x$ | $x \cdot y$ | $x:y$ | $y:x$ | $y^2$ | $x:y \lesseqgtr y:x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

10. Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
**a)** Zu jeder gebrochenen Zahl $x$ gibt es eine gebrochene Zahl $y$ mit $x \cdot y = 1$.
**b)** Zu jeder von Null verschiedenen gebrochenen Zahl $x$ gibt es eine gebrochene Zahl $y$ mit $x \cdot y = 1$.
**c)** Zu jeder natürlichen Zahl $n$ ($n > 0$) gibt es eine natürliche Zahl $m$ mit $n \cdot m = 1$.

11. Gib je zwei gebrochene Zahlen an, für die gilt:
**a)** $\frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}$, **b)** $7 : t > 7$, **c)** $\frac{3}{2} : z > \frac{3}{2}$,
**d)** $\frac{3}{4} : x < \frac{3}{4}$, **e)** $\frac{7}{5} : x > \frac{7}{5}$, **f)** $x : \frac{7}{5} < x$!

12. Überprüfe:
**a)** Es gibt gebrochene Zahlen $x$ und $y$, so daß gilt: $x : y > x$.
**b)** Es gibt natürliche Zahlen $n$ und $m$, so daß gilt: $n : m > n$.

13. Dividiere die Summe von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ durch das Produkt dieser Zahlen!

14. Welche Zahl muß für $x$ eingesetzt werden, damit eine wahre Aussage entsteht?
**a)** $\frac{4}{5} : x = \frac{2}{5}$ **b)** $\frac{10}{17} : x = \frac{5}{17}$ **c)** $\frac{6}{11} : x = \frac{2}{55}$ **d)** $\frac{3}{4} : x = \frac{1}{16}$
**e)** $x : \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ **f)** $x : 5 = \frac{2}{11}$ **g)** $x : \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$ **h)** $x : 4 = \frac{1}{7}$

**15.** Löse folgende Gleichungen!

a) $x : \frac{2}{5} = \frac{15}{4}$ b) $\frac{2}{3} : x = \frac{2}{3}$ c) $\frac{x}{2} : \frac{7}{5} = \frac{15}{14}$ d) $x : x = 1$

**16.*** Setze für $*$ ein Rechenzeichen ein, so daß eine wahre Aussage entsteht!

a) $\frac{2}{3} * \frac{7}{8} = \frac{7}{12}$ b) $\frac{9}{32} * \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ c) $3\frac{1}{5} * 1\frac{1}{4} = 4$

**17.** Berechne!

a) $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8}\right) : \frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{8}\right) : \frac{9}{8}$ c) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3}\right) : 0{,}5$

## 13 Bruchstrich und Divisionszeichen

Im Bereich der natürlichen Zahlen sind viele Divisionsaufgaben, wie z. B. die Aufgabe 27 : 4, nicht lösbar. Im Bereich der gebrochenen Zahlen sind auch diese Aufgaben lösbar.

■ **32** a) $27 : 4 = \frac{27}{1} : \frac{4}{1} = \frac{27}{1} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$ b) $8 : 3 = \frac{8}{1} : \frac{3}{1} = \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

c) Beachte, daß auch $35 : 7 = \frac{35}{1} : \frac{7}{1} = \frac{35}{1} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\underline{5}}$ gilt!

● **32** Stelle für 32 : 8, 205 : 50, 7 : 14, 21 : 3, $\frac{42}{4} : \frac{3}{2}$ eine Tabelle nach folgendem Muster auf!

| Aufgabe | Lösung in $N$ | Lösung in $Q_+$ |
|---|---|---|
| | | |

Was stellst du fest?

Im Beispiel B 32 haben wir gesehen, wie man jede *Division natürlicher Zahlen* (außer durch Null) in $Q_+$ ausführen kann. Andererseits können wir jede gebrochene Zahl als Quotient natürlicher Zahlen schreiben.

▶ **16** **Für beliebige natürliche Zahlen $a$ und $b$ mit $b \neq 0$ gilt: $a : b = \frac{a}{b}$.**

Da wir einen Bruch beliebig erweitern oder kürzen können, dürfen wir auch in einem Quotienten natürlicher Zahlen den Dividenden und den Divisor mit derselben (von 0 verschiedenen) Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (außer durch 0) dividieren, ohne daß sich das Ergebnis ändert.

■ **33** a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30}$ und $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 20 : 30$

b) $\frac{24}{6} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1}$ und $24 : 6 = 12 : 3 = 4 : 1 = 4$

c) $7 : 4 = 14 : 8 = 70 : 40$

Manchmal schreibt man auch Divisionsaufgaben mit gebrochenen Zahlen in Form eines Bruchs.

■ 34 a) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right):2 = \left(\frac{3+4}{12}\right):2 = \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}$

b) $\frac{1,4}{0,7} = 1,4:0,7 = 14:7 = \underline{\underline{2}}$

c) $\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{8}} = \frac{7}{3}:\frac{4}{8} = \frac{7}{3}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$  d) $\dfrac{2}{\frac{1}{3}} = 2:\frac{1}{3} = 2\cdot\frac{3}{1} = \underline{\underline{6}}$

▶ 17 **Für beliebige gebrochene Zahlen $x$ und $y$ mit $y \neq 0$ gilt: $\dfrac{x}{y} = x:y$.**

Ist eine (oder sind beide) der gebrochenen Zahlen $x$ und $y$ als gemeiner Bruch gegeben, wie im Beispiel B 34, so spricht man von einem **Doppelbruch**. Bei Doppelbrüchen muß der Bruchstrich, der $x$ von $y$ trennt, deutlich erkennbar sein.

● 33 Berechne und vergleiche die nebenstehenden Brüche miteinander! $\dfrac{\frac{7}{2}}{4}$ und $\dfrac{7}{\frac{2}{4}}$

Man erweitert einen Bruch $\frac{x}{y}$, bei dem $x$ oder $y$ (oder beide) gebrochene Zahlen sind, genauso wie bisher.

■ 35 a) $\frac{7}{2}:\frac{14}{3} = \frac{1}{2}:\frac{2}{3}$  b) $\frac{5}{2}:\frac{2}{3} = 5:\frac{4}{3}$

c) $13,753 : 2,145 = 137,53 : 21,45 = 1375,3 : 214,5 = 13753 : 2145$

● 34 Berechne $\frac{a+b}{2}$ für a) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{4}$, b) $a = 5$; $b = \frac{6}{5}$,

c) $a = 3$; $b = 4$, d) $a = 6$; $b = 3$, e) $a = 5$; $b = 3\frac{1}{2}$!

Markiere auf einem Zahlenstrahl jeweils den Punkt, der $\frac{a+b}{2}$ entspricht (↗ Bild B 25)!

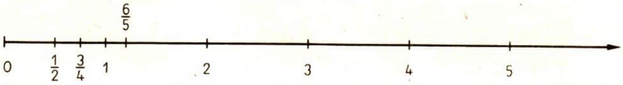



Bild B 25

Für zwei beliebige gebrochene Zahlen $a$ und $b$ mit $a \neq b$ gilt stets: $\frac{a+b}{2}$ liegt zwischen $a$ und $b$. Ist $a < b$, so gilt

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

*Wir wissen bereits*, daß $\frac{a+b}{2}$ das **arithmetische Mittel** der Zahlen $a$ und $b$ ist. Auch mit Hilfe des arithmetischen Mittels können wir zeigen, daß z. B. $\frac{8}{10}$ nicht Nachfolger von $\frac{7}{10}$ ist.

$$\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{10}\right):2 = \frac{15}{10}:2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Es gilt: $\frac{7}{10} < \frac{3}{4} < \frac{8}{10}$.

Bilden wir das arithmetische Mittel von $\frac{7}{10}$ und $\frac{3}{4}$, so erhalten wir eine gebrochene Zahl, die zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{3}{4}$ liegt:

$$\left(\frac{7}{10} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \left(\frac{14}{20} + \frac{15}{20}\right) : 2 = \frac{29}{20} : 2 = \frac{29}{40},$$

und es gilt: $\frac{7}{10} < \frac{29}{40} < \frac{3}{4}$.

Auf diese Weise können wir zu zwei gegebenen gebrochenen Zahlen beliebig viele gebrochene Zahlen finden, die zwischen ihnen liegen. Man sagt auch: Die gebrochenen Zahlen liegen überall dicht.

## Aufgaben

**1.** Berechne!

**a)** $3 : \frac{4}{5}$ **c)** $3 : \frac{14}{15}$ **e)** $8 : \frac{7}{9}$ **g)** $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ **i)** $\frac{1}{4} : \frac{3}{8}$ **l)** $\frac{2}{3} : 2$

**b)** $9 : \frac{2}{3}$ **d)** $2 : \frac{3}{8}$ **f)** $5 : \frac{3}{4}$ **h)** $\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ **k)** $\frac{1}{2} : 2$ **m)** $\frac{4}{5} : 2$

**2.** Berechne aus den folgenden Zahlenangaben nacheinander
$x \cdot y$, $x \cdot z$, $x \cdot y \cdot z$, $x : y$, $x : z$, $(x + y) \cdot z$, $(x - y) \cdot z$, $(x + y) : z$, $x + y \cdot z$, $x + y : z$!

**a)** $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{7}{8}$, $z = \frac{1}{3}$ **c)** $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{5}{8}$, $z = \frac{2}{3}$

**b)** $x = \frac{7}{12}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{2}{15}$ **d)** $x = \frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{36}$, $z = \frac{7}{18}$

**3.** Berechne!

**a)** $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ **c)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ **e)** $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ **g)** $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$ **i)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{2}$ **l)** $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

**b)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}}$ **d)** $\dfrac{\frac{15}{16}}{\frac{16}{15}}$ **f)** $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$ **h)** $\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{12}{39}}$ **k)** $\dfrac{4}{\frac{7}{8}}$ **m)** $\dfrac{\frac{3}{2}}{1}$

**4.** Karin behauptet: „Es gibt gebrochene Zahlen $a$ und $b$, für die $a : b = b : a$ ist.“ Hat Karin recht? Gib einige Beispiele an!

**5.** Gib mindestens drei gebrochene Zahlen $x$ an, für die gilt:

**a)** $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ **e)** $\frac{25}{7} < x < \frac{24}{9}$

**b)** $\frac{7}{12} < x < \frac{8}{12}$ **d)** $\frac{15}{4} < x < \frac{9}{2}$ **f)** $2\frac{1}{2} < x < 2\frac{2}{3}$

**6.** Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{3}{4}$. Der Dividend sei

**a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{1}{4}$, **c)** $\frac{2}{3}$, **d)** $\frac{4}{3}$, **e)** $\frac{5}{8}$, **f)** 4, **g)** 9.

Wie groß ist der Divisor?

**7.** Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{7}{8}$. Der Divisor sei

**a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** $\frac{2}{3}$, **d)** $\frac{7}{4}$, **e)** $\frac{14}{5}$, **f)** 14, **g)** 8.

Wie groß ist der Dividend?

8. Gib für jede der folgenden gebrochenen Zahlen zwei Multiplikations- und zwei Divisionsaufgaben an, bei denen diese Zahl als Ergebnis auftritt!
a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{3}{11}$ c) $\frac{4}{21}$ d) 9 e) $\frac{1}{2}$

Berechne und kürze soweit wie möglich!

9.↑ a) $\frac{3}{4}:6$ b) $6:\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}:2$ d) $5:\frac{1}{2}$ e) $20:\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{3}:4$

10.↑ a) $\frac{5}{8}\cdot 6\cdot\frac{4}{15}$ b) $\left(\frac{5}{8}:\frac{3}{4}\right):\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{8}:\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{12}\right)$ d) $\frac{5}{12}\cdot 8\cdot\frac{9}{25}$

11.↑ a) $\left(\frac{3}{4}:5\right):\frac{9}{10}$ b) $\left(\frac{4}{7}:\frac{8}{3}\right):\frac{7}{6}$ c) $\frac{4}{7}:\left(\frac{8}{3}:\frac{7}{6}\right)$ d) $24:\left(\frac{6}{5}:\frac{4}{3}\right)$

12.↑ a) $\frac{5}{3}:\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{20}$ b) $\left(\frac{5}{6}:7\right):\frac{20}{21}$ c) $35:\left(\frac{7}{4}:\frac{8}{3}\right)$ d) $\left(36:\frac{9}{4}\right):\frac{8}{3}$

13.↑ a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{7}{12}$ b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{6}$ c) $\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{12}\right):\frac{62}{81}$ d) $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right):\frac{13}{18}$

14.↑ a) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{17}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{14}}{\frac{9}{14}}$ d) $\dfrac{\frac{7}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{86}{75}}$

15.↑ a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):\frac{2}{15}$ b) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\frac{3}{25}$ c) $\left(\frac{8}{13}-\frac{2}{3}\right):\frac{39}{26}$ d) $\left(\frac{13}{2}-6\right):\frac{17}{19}$

16.↑ a) $\dfrac{5-\frac{3}{7}}{8}$ b) $\dfrac{6-\frac{2}{5}}{7}$ c) $\frac{15}{4}:2-\frac{4}{7}$ d) $\frac{11}{18}:5-\frac{9}{4}$

17.↑ a) $5-\frac{3}{4}:\frac{15}{16}$ b) $\frac{3}{4}:\frac{15}{16}-5$ c) $4-\frac{2}{3}:\frac{8}{27}$ d) $\frac{2}{3}:\frac{8}{27}-4$

18.↑ a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ c) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$ e) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$ f) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$

## 14 Division von Dezimalbrüchen

● 35 Dividiere a) $\frac{3}{2}:\frac{5}{6}$, b) $\frac{7}{8}:\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$, d) 0,5 : 0,25!

Wollen wir Dezimalbrüche dividieren, formen wir diese Dezimalbrüche in Zehnerbrüche um und wenden die Regel für die Division gemeiner Brüche an.

| Wir lösen die Aufgabe 3,78 : 1,8. |
|---|

$$3{,}78:1{,}8=\frac{378}{100}:\frac{18}{10}=\frac{378}{100}\cdot\frac{10}{18}=\frac{378\cdot 10}{100\cdot 18}=\frac{21}{10}=2{,}1$$

| Wir lösen die Aufgabe 3,7 : 0,9. |
|---|

$$3{,}7:0{,}9=\frac{37}{10}:\frac{9}{10}=\frac{37}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{37}{9}.$$

Dieses Ergebnis können wir noch nicht als Dezimalbruch schreiben.

Läßt sich der Quotient wie bei der Aufgabe 3,78 : 1,8 als Zehnerbruch und damit auch als Dezimalbruch darstellen, so ist ein bequemerer Lösungsweg möglich.

| Wir lösen die Aufgabe 17,5 : 4. |
|---|

Überschlag: 16 : 4 = 4

*Weg über gemeine Brüche*

$$17{,}5 : 4 = \frac{175}{10} : 4 = \frac{175}{10 \cdot 4}$$

Wegen der 4 erweitern wir zunächst mit 100 und kürzen dann durch 4.

$$\frac{175}{10 \cdot 4} = \frac{175 \cdot 100}{10 \cdot 4 \cdot 100} = \frac{175 \cdot 25}{1000} = \frac{4375}{1000} = \underline{\underline{4{,}375}}$$

*Bequemer Weg (schriftliche Rechnung)*

ohne Komma

17500 : 4 = 4375
 15
  30
   20
    0

mit Komma

17,500 : 4 = 4,375
 1 5
  30
   20
    0

Wir können die Division 17,5 : 4 auch ausführen, ohne den Dezimalbruch zu erweitern. Es reicht, wenn wir die Nullen bei den entsprechenden Teildivisionen schreiben.

**36 a)** 17,5 : 4
Überschlag: 16 : 4 = 4
17,5 : 4 = 4,375
 15
  30 ←
   20 ←
    0

Also: 17,5 : 4 = $\underline{\underline{4{,}375}}$

**b)** 13 : 8
Überschlag: 16 : 8 = 2
13 : 8 = 1,625
 50 ←
  20 ←
   40 ←
    0

Also: $\frac{13}{8} = \underline{\underline{1{,}625}}$

Ist auch der Divisor ein Dezimalbruch, so können wir genauso vorgehen. Vor dem Rechnen beseitigen wir das Komma im Divisor, indem wir den Quotienten mit 10, 100, 1000, ... erweitern.

**37 a)** 5,25 : 1,5
Überschlag: 6 : 2 = 3
Wir erweitern den Quotienten mit 10:
5,25 : 1,5 = 52,5 : 15.
Jetzt können wir wie im Beispiel 36 a) weiterrechnen:
52,5 : 15 = $\underline{\underline{3{,}5}}$
 7 5
   0

**b)** 4,97 : 12,425
Überschlag: 5 : 10 = 0,5
Wir multiplizieren den Dividenden und den Divisor mit 1000 und rechnen dann weiter wie im Beispiel 36 b):
4,97 : 12,425 = 4970 : 12425
4970 : 12425 = $\underline{\underline{0{,}4}}$
49700
    0

▶ 18

**Bei der Division von Dezimalbrüchen gehen wir folgendermaßen vor:**
1. **Überschlag machen.**
2. **Das Komma im Divisor beseitigen (Dividenden und Divisor mit 10, 100, 1000, ... multiplizieren).**
3. **Die Division wie mit natürlichen Zahlen ausführen.**
4. **Im Quotienten ein Komma setzen, wenn die Einer des Dividenden dividiert worden sind.**

Besonders einfach ist die Division durch 10, 100, 1000 usw.

$1721{,}8 : 10 = 172{,}18$
$1721{,}8 : 100 = 17{,}218$
$1721{,}8 : 1000 = 1{,}7218$

Man dividiert einen Dezimalbruch durch 10, 100, 1000 usw., indem man das Komma in diesem Dezimalbruch um 1, 2, 3 usw. Stellen nach links versetzt.
Treten Dezimalbrüche in Anwendungsaufgaben auf, so müssen wir gerade bei Divisionsaufgaben überlegen, was für eine Zahl das Ergebnis sein muß.

■ 38 Aus einem 3,0 cm breiten, rechteckigen Materialrest aus Blech sollen Scheiben mit einem Durchmesser von 2,6 cm ausgestanzt werden. Dabei soll zwischen den Scheiben ein 2 mm breiter Steg bleiben (↗ Bild B 26).

a) Kann man aus einem 1,89 m langen Streifen 60 Scheiben ausstanzen?
Hier reicht ein grober Überschlag aus, um diese Frage zu beantworten.
$2{,}6\text{ cm} + 0{,}2\text{ cm} = 2{,}8\text{ cm} \approx 3\text{ cm}$ und
$60 \cdot 3\text{ cm} = 180\text{ cm} < 189\text{ cm}$.
Es können also 60 Scheiben hergestellt werden.

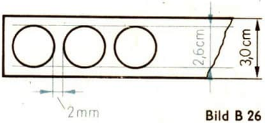


Bild B 26

b) Wieviel Scheiben kann man aus diesem Stück höchstens herstellen?
Dazu müssen wir rechnen: $x \cdot 2{,}8\text{ cm} = 189\text{ cm}$, $x = 189\text{ cm} : 2{,}8\text{ cm}$
Nebenrechnung: $1890 : 28 = 67{,}5$
Es können höchstens 67 Scheiben hergestellt werden.

● 36 Begründe, warum nicht auf 68 gerundet wurde!

## Aufgaben

1. Nenne die kleinste Zehnerpotenz, die Vielfaches von 4; 5; 20; 8; 40; 9; 10; 15 ist!

Berechne!

2.↑ a) 0,4 : 0,2 b) 0,7 : 0,35 c) 13,2 : 3,3 d) 11,4 : 0,4 e) 7,5 : 0,5

3.↑ a) 0,84 : 1,2 b) 0,77 : 7,7 c) 0,84 : 0,012 d) 0,28 : 0,07 e) 0,0054 : 0,72

4.↑ a) 1,35 : 4,5 b) 2,88 : 1,2 c) 3,45 : 1,5 d) 0,48 : 0,016 e) 4,8 : 0,016

**5.** Ermittle im Kopf!
**a)** 1,8 : 0,2 **b)** 0,36 : 0,18 **c)** 3,9 : 3 **d)** 0,25 : 2,5

**6.** Mache einen Überschlag!
**a)** 48,9 : 15,7 **b)** 36,48 : 8,25 **c)** 2,75 : 0,64 **d)** 317,4 : 0,972

Berechne!

**7.↑** **a)** 2,64 : 2,4 **c)** 0,546 : 0,42 **e)** 6,96 : 1,2 **g)** 748,8 : 3,6
**b)** 15,3 : 0,17 **d)** 11,25 : 1,5 **f)** 8,903 : 0,29 **h)** 1,92 : 1,2

**8.↑** **a)** 15,4 : 0,22 **c)** 7,48 : 34 **e)** 381,6 : 0,24 **g)** 720 : 1 200
**b)** 21,06 : 2,7 **d)** 7,2 : 0,012 **f)** 50,82 : 56 **h)** 0,84 : 0,084

**9.** **a)** Welche Zahl ist um 2 größer als ihre Hälfte?
**b)** Welche Zahl ist um 1,5 größer als ein Drittel dieser Zahl?

**10.*** Berechne!

**a)** $\frac{8{,}4 \cdot 1{,}2}{10{,}3 + 1{,}7}$ **b)** $\frac{2{,}5 \cdot 4{,}7}{9{,}64 + 0{,}36}$ **c)** $\frac{\frac{1{,}4}{58}}{\frac{1{,}8}{0{,}29}}$ **d)** $\frac{\frac{2{,}5}{12}}{\frac{7{,}5}{48}}$

**11.** Berechne jeweils das arithmetische Mittel!
**a)** 12; 13 **c)** 12; 13; 14; 15 **e)** 0,42; 0,24; 0,35; 0,53
**b)** 17; 18 **d)** 17; 18; 19; 20 **f)** 18,7; 18,8; 18,6; 18,7; 18,7

**12.** Auf beiden Seiten einer 930 m langen Straße sollen im Abstand von 7,5 m Bäume gepflanzt werden. Wieviel Bäume werden benötigt?

**13.** Masse und Volumen eines Körpers wurden mit 11,5 g bzw. 5,2 cm³ bestimmt. Berechne die Dichte dieses Körpers! Aus welchem Material könnte der Körper bestehen?

**14.** Ein Beutel Rasensamen reicht für 15 m². Wieviel Beutel benötigt man für eine 230 m² große Fläche?

**15.** Aus welchem Metall kann ein 8,8 cm³ großer Würfel bestehen, der eine Masse von 74,8 g hat?

**16.** Für das Streichen eines 24,8 m² großen Fußbodens wurden 2,5 kg Farbe verbraucht. Wieviel Quadratmeter können mit 1 kg Farbe gestrichen werden?

## Zusammenfassung

| **Division gebrochener Zahlen** | |
|---|---|
| **I Es treten nur gemeine Brüche auf**<br>Den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multiplizieren | $\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{21}{20}}}$ |

| | |
|---|---|
| **II Es treten nur Dezimalbrüche auf** | |
| 1. Durch Erweitern des Quotienten mit 10, 100, ... das Komma im Divisor beseitigen | $5{,}25 : 1{,}5 = 52{,}5 : 15$ |
| 2. Dividieren wie natürliche Zahlen | $52{,}5 : 15 = 3{,}5$<br>$\underline{\ \ }75$<br>$\underline{\ \ }0$ |
| 3. Im Quotienten das Komma setzen, wenn Einer des Dividenden dividiert sind | $5{,}25 : 1{,}5 = \underline{\underline{3{,}5}}$ |
| Eine weitere Möglichkeit<br>1. Umwandeln der Dezimalbrüche in Zehnerbrüche | $3{,}7 : 0{,}9 = \frac{37}{10} : \frac{9}{10}$ |
| 2. Nach Regel I dividieren | $= \frac{37}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{37}{9}$ |

Die Division gebrochener Zahlen – außer durch 0 – ist stets ausführbar.
Wir haben damit einen Zahlenbereich, in dem man uneingeschränkt addieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null) kann.

# Gemeine Brüche und Dezimalbrüche

## 15 Endliche und unendliche Dezimalbrüche

● **37** **a)** Wandle in einen gemeinen Bruch um: 0,5; 0,2; 0,75; 2,75; 0,125!

**b)** Schreibe als Dezimalbruch: $\frac{4}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{4}{25}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{2}{9}$!

Wir wollen $\frac{3}{8}$ als Dezimalbruch schreiben. Wir erweitern $\frac{3}{8}$ mit 125:

$$\frac{3}{8} \overset{\cdot 125}{=} \frac{375}{1000} = \underline{\underline{0{,}375}}.$$

Man kann diese Dezimalbruchdarstellung auch erhalten, wenn man den gemeinen Bruch als Quotienten schreibt und diesen nach der Regel für die Division von Dezimalbrüchen dividiert.

$\frac{3}{8} = 3 : 8$

```
3 : 8 = 0,375
30
 60
  40
   0
```

$\frac{3}{8} = \underline{\underline{0{,}375}}$

Entsprechend erhält man für den Bruch:

$\frac{113}{40} = 113 : 40$

```
113 : 40 = 2,825
 330
  100
   200
     0
```

Genauso verfahren wir im folgenden Beispiel B 39 mit dem Bruch $\frac{2}{9}$; denn $2 : 9 = \frac{2}{9}$ können wir nicht als Zehnerbruch schreiben.

■ **39** $\frac{2}{9} = 2 : 9$

$2 : 9 = 0{,}222\ldots$
$20$
$20$
$20$
$2$

Dieser Prozeß bricht nie ab, denn man erhält bei jeder Teildivision den Rest 2. In jeder folgenden Dezimalstelle erscheint wieder eine 2. Die drei Punkte hinter der letzten geschriebenen 2 sollen das andeuten.

Die gebrochene Zahl $\frac{2}{9}$ kann also noch nicht als Dezimalbruch geschrieben werden. Man kann sich aber $\frac{2}{9}$ beliebig weit mit Dezimalbrüchen nähern (↗ Bild B 28).

Es gilt, wie auch am Zahlenstrahl zu sehen ist:

$0{,}2 < \frac{2}{9} < 0{,}3$

$0{,}22 < \frac{2}{9} < 0{,}23$

$0{,}222 < \frac{2}{9} < 0{,}223$

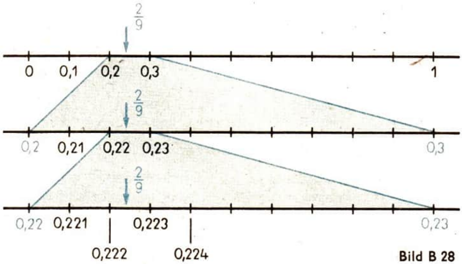



Bild B 28

● **38** Wie groß kann in jedem Fall die Differenz zwischen $\frac{2}{9}$ und den angegebenen Dezimalbrüchen höchstens sein?

Man erkennt:

Jeder der Dezimalbrüche 0,2; 0,22; 0,222 usw. ist **kleiner** als $\frac{2}{9}$.
Das ändert sich auch nicht, wenn immer mehr Dezimalstellen 2 berücksichtigt werden.

Jeder der Dezimalbrüche 0,3; 0,23; 0,223 usw. ist **größer** als $\frac{2}{9}$. Jeder Dezimalbruch, der nur eine Dezimalstelle besitzt, die größer als 2 ist, ist größer als $\frac{2}{9}$.

Jeder Dezimalbruch, der nur **endlich viele** Dezimalstellen 2 hat, ist kleiner als $\frac{2}{9}$.

Man sagt deshalb:
$\frac{2}{9}$ kann erst durch **unendlich** viele Dezimalstellen 2 angegeben werden und schreibt:

$$\boxed{\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots}$$

Jeder der Dezimalbrüche 0,2; 0,22; 0,222 usw. ist ein Näherungswert für $\frac{2}{9}$.

Man bezeichnet 0,222... als **unendlichen Dezimalbruch**. Die Dezimalbrüche, mit denen wir bisher gerechnet haben, bezeichnet man zur besseren Unterscheidung als **endliche Dezimalbrüche**.

● 39 Unter welchen Gesichtspunkten kann man folgende Dezimalbrüche sortieren?
25,2; 0,75348; 151; 0,123123123...; 273,22222...; 0,3750; 8,888...; 0,00031; 0,112123123412345123456...; 5500

Wir können jetzt jeden gemeinen Bruch in einen (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruch umwandeln.

■ 40 Es ist $\frac{17}{12}$ als Dezimalbruch zu schreiben.

$$\begin{array}{l} 17 : 12 = 1{,}4166\ldots \\ \underline{\phantom{0}}\;50 \\ \;\;\underline{\phantom{0}}\;20 \\ \;\;\;\;\underline{\phantom{0}}\;80 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{\phantom{0}}\;80 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;8 \end{array}$$

Von der vierten Teildivision an tritt immer wieder der Rest 8 auf. Wir erhalten einen unendlichen Dezimalbruch, bei dem von der dritten Dezimalstelle an nur noch die Ziffer 6 auftritt.

Also: $\frac{17}{12} = \underline{\underline{1{,}4166\ldots}}$

■ 41 Es ist $\frac{75}{11}$ als Dezimalbruch zu schreiben.

$$\begin{array}{l} 75 : 11 = 6{,}8181\ldots \\ \underline{\phantom{0}}\;90 \\ \;\;\underline{\phantom{0}}\;20 \\ \;\;\;\;\underline{\phantom{0}}\;90 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{\phantom{0}}\;20 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;9 \end{array}$$

Führen wir weitere Teildivisionen aus, so erhalten wir abwechselnd die Reste 9 und 2. Wir erhalten einen unendlichen Dezimalbruch, bei dem sich die Ziffern 8 und 1 wiederholen.

## Aufgaben

1. Welche der folgenden gebrochenen Zahlen kann man als endlichen Dezimalbruch darstellen, welche nicht? Begründe deine Antwort!
**a)** $\frac{9}{16}$ **b)** $\frac{2}{21}$ **c)** $\frac{3}{12}$ **d)** $\frac{18}{27}$ **e)** $\frac{1}{512}$ **f)** $\frac{6}{30}$

2. Wandle alle gemeinen Brüche aus Aufgabe 1 in Dezimalbrüche um!

3. Wandle in einen gemeinen Bruch um und kürze soweit wie möglich!
**a)** 0,75 **b)** 2,02 **c)** 0,99 **d)** 27,5 **e)** 0,2 **f)** 1,6 **g)** 4,005

4. Bilde Paare (gemeiner Bruch; Dezimalbruch), so daß beide zur gleichen Zahl gehören!
$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{8}$; 0,4; 0,666...; 0,375; 0,333...; 0,444...; 0,25

5. Schreibe als Dezimalbruch!
**a)** $\frac{10}{3}$ **b)** $\frac{7}{5}$ **c)** $\frac{35}{6}$ **d)** $\frac{75}{55}$ **e)** $\frac{9}{7}$ **f)** $\frac{35}{7}$ **g)** $\frac{5}{12}$ **h)** $\frac{12}{5}$ **i)** $\frac{17}{11}$

## 16 Periodische Dezimalbrüche

Die unendlichen Dezimalbrüche aus den Beispielen B 40 und 41 haben eine gemeinsame Eigenschaft: *Von einer Stelle an wiederholt sich eine Ziffer bzw. eine Gruppe von Ziffern ständig.*
Diese Gruppe sich wiederholender Ziffern heißt **Periode**.

● 40 Gib jeweils die Periode an!
**a)** 0,333... **c)** 21,43737... **e)** 7,03480348...
**b)** 0,666... **d)** 555,55 **f)** 0,112123123412345...

Ein unendlicher Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt **periodischer Dezimalbruch**.
Nach der Anzahl der Ziffern in einer Periode spricht man von einer 1, 2, 3, ... bzw. *n*-stelligen Periode. So ist die Periode in den Dezimalbrüchen 0,22... und 0,4166... einstellig und in den Dezimalbrüchen 6,8181... sowie 2,12727... zweistellig.
Für 0,22... schreibt man auch $0,\overline{2}$ (lies: Null-Komma-Zwei, Periode Zwei).
Für 2,12727... schreibt man $2,1\overline{27}$ (lies: Zwei-Komma-eins-zwei-sieben, Periode zwei-sieben).
Wir können jeden gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ durch Ausrechnen des Quotienten $a : b$ in einen endlichen oder unendlichen Dezimalbruch umwandeln. Man kann auch jeden endlichen und jeden periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umwandeln. Endliche Dezimalbrüche können wir sofort als Zehnerbrüche schreiben und wenn möglich kürzen. Auf die Umwandlung periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche wird hier nicht eingegangen.
Wir können jetzt jede gebrochene Zahl in Form eines (endlichen oder periodischen) Dezimalbruchs angeben.

● 41 Wandle in einen periodischen Dezimalbruch um! Merke dir das Ergebnis gut!
**a)** $\frac{1}{3} =$ **b)** $\frac{2}{3} =$ **c)** $\frac{1}{9} =$ **d)** $\frac{1}{6} =$

Jetzt kann auch das Ergebnis **jeder** Division von Dezimalbrüchen als Dezimalbruch angegeben werden, was bisher nicht möglich war.

■ 42 Es ist zu berechnen 3,7 : 0,9.

37 : 9 = 4,11...
 10
  1

Also: $3,7 : 0,9 = \underline{\underline{4,\overline{1}}}$

### Aufgaben

**1.** Suche die periodischen Dezimalbrüche heraus!
Gib jeweils die Periode an!
**a)** 0,6161616... **c)** 2,252552555255552... **e)** $\frac{1}{3}$ **g)** 27,4371437437
**b)** 555,5500 **d)** 1,121312131213... **f)** $\frac{3}{4}$

2. Gib für die folgenden unendlichen Dezimalbrüche an, welche Ziffer in der 4.; 7.; 12.; 15. und 20. Dezimalstelle steht!

**a)** $0{,}\overline{123}$ **c)** $5{,}\overline{34217}$ **e)** 2,4040040004... **g)** 0,6
**b)** $0{,}12\overline{3}$ **d)** $0{,}\overline{6}$ **f)** 127,1122334411... **h)** $\frac{2}{3}$

3.* Gib einen Dezimalbruch mit zweistelliger Periode an, der in der 7. Stelle eine 7 und in der 9. Stelle eine 9 hat!

4. Vergleiche!
**a)** $0{,}\overline{6}$ mit 0,66648 **c)** 0,09009... mit $0{,}\overline{009}$
**b)** 4,161717 mit $4{,}\overline{167}$ **d)** $0{,}\overline{234}$ mit 0,234...

Berechne!
5.↑ **a)** 0,28 : 0,35 **d)** 2,7 : 0,022 **g)** 8,44 : 0,22
**b)** 0,28 : 0,42 **e)** 0,72 : 0,14 **h)** 3,77 : 0,15
**c)** 7,2 : 0,45 **f)** 6,28 : 5,12 **i)** 17,24 : 0,15

6.↑ **a)** 4,581 : 2,7 **c)** 7398 : 1,8 **e)** 1,649 : 0,17
**b)** 6,289 : 0,33 **d)** 43,72 : 1,5 **f)** 3,4 : 6,8

7.↑ **a)** $15{,}2 \cdot 14{,}8 \cdot 5{,}3$ **c)** $12{,}8 \cdot 13{,}2 \cdot 4{,}7$ **e)** $3{,}217 \cdot 4{,}028 \cdot 5{,}034$
**b)** $4{,}02 \cdot 5{,}4 \cdot 6$ **d)** $5{,}03 \cdot 4{,}4 \cdot 8$ **f)** $8{,}043 \cdot 4{,}021 \cdot 2{,}010$

8.↑ **a)** (3,288 : 4,11) : 2 **c)** (2,877 : 4,11) : 3,5 **e)** 24,3 : (8,1 : 3,0)
**b)** 3,288 : (4,11 : 2) **d)** 2,877 : (4,11 : 3,5) **f)** 36,0 : (7,2 : 5,0)

9.↑ **a)** $(12 - 11\frac{4}{9}) \cdot 55{,}8 - 5\frac{4}{5} : (10 - 8{,}75)$
**b)** $(204{,}02 : 40{,}4 - 3{,}2 \cdot 1{,}2) \cdot 6\frac{1}{2} + 7 : 2\frac{1}{3}$

10.↑ **a)** $\frac{17{,}13 + 4{,}55}{5{,}42}$ **b)** $\frac{25{,}98 + 5{,}62}{6{,}32}$ **c)** $\frac{5{,}28}{4{,}33} + \frac{7{,}08}{5{,}44}$ **d)** $\frac{8{,}44}{5{,}07} + \frac{11{,}07}{4{,}54}$

## 17 Näherungswerte; zuverlässige Ziffern

● 42 **a)** Runde auf Vielfache von 10 die Zahlen 741; 9245; 47,12; 9,75!
**b)** Nenne alle natürlichen Zahlen, die beim Runden auf Vielfache von 10 zu 3260 führen! Gib diese Zahlen $x$ in der Form $a \leqq x < b$ an!

Wir wissen, daß Schätzwerte; Zahlen, die beim Runden entstehen; Meßwerte und Ergebnisse von Rechnungen, in die solche Werte eingehen, immer nur **Näherungswerte** sind. Manchmal wird auch ein unendlicher periodischer Dezimalbruch durch einen endlichen Näherungswert ersetzt.

● 43 Bei welchen der folgenden Angaben treten Näherungswerte auf?
**a)** Im Stadion waren 20000 Zuschauer.
**b)** In unserem Haus wohnen 43 Mieter.
**c)** Ich habe noch 93 Pfennige.

**d)** Die Entfernung zwischen Berlin und Rostock beträgt 230 km.
**e)** A-Dorf hat 361 Einwohner.
**f)** Im Jahre 1981 wurden in der DDR 126 Tausend Neubauwohnungen fertiggestellt und 60 Tausend Wohnungen modernisiert.
**g)** In einer Kreisstadt wurden 149 Wohnungen modernisiert.

Sind Näherungswerte Ergebnisse von Messungen, sind uns die genauen Werte **nicht** bekannt. Auch bei größter Sorgfalt kann man mit jedem Meßinstrument (z. B. einem Lineal, einem Meßband, einem Meßschieber) nur mit einer bestimmten Genauigkeit messen.
Beim Einkaufen können wir auf manchen Verpackungen Angaben folgender Art erkennen: Rahmbutter 250 g ± 4 g; Florena Creme 60 g ± 2,5 g; Haarwäsche 160 ml ± 4 ml.
Im ersten Falle bedeutet das, daß zwischen 246 g und 254 g Butter in einer Packung enthalten sind. Dafür schreibt man auch, wenn mit $m$ die genaue Masse bezeichnet wird:

$$246\text{ g} \leqq m \leqq 254\text{ g} \quad \text{oder} \quad m = (250 \pm 4)\text{ g}.$$

Wird bei einem Näherungswert eine solche mögliche Abweichung nicht angegeben, so setzen wir voraus, daß der Näherungswert durch Runden entstanden ist (die Meßgenauigkeit nicht größer als der Rundungsfehler ist).
Wird für $l$ der Näherungswert 2,4 cm angegeben, so soll das bedeuten

$$2{,}35\text{ cm} \leqq l \leqq 2{,}45\text{ cm}.$$

In diesem Fall sagt man auch, der Näherungswert 2,4 hat **zwei zuverlässige Ziffern.**

■ **43**

| Näherungswert | Anzahl der zuverlässigen Ziffern[1]) | Bedingung für den genauen Wert $x$ |
|---|---|---|
| 0,8 | 1 | $0{,}75 \leqq x \leqq 0{,}85$ |
| 3,6 | 2 | $3{,}55 \leqq x \leqq 3{,}65$ |
| 0,108 | 3 | $0{,}1075 \leqq x \leqq 0{,}1085$ |
| 0,002 | 1 | $0{,}0015 \leqq x \leqq 0{,}0025$ |

Für die Zahl 400 kann ohne weitere Angaben nicht festgestellt werden, wieviel zuverlässige Ziffern vorliegen. So ist z. B. die Angabe 400 g, wenn zuvor von 396 g auf 400 g gerundet wurde, ein Näherungswert mit 2 zuverlässigen Ziffern. Wurde dagegen von 430 g auf 400 g gerundet, so handelt es sich um einen Näherungswert mit nur einer zuverlässigen Ziffer.
Die gebrochene Zahl $\frac{1}{3}$ kann durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $0{,}\overline{3}$ angegeben werden.

■ **44** 0,3 ist der mit einer zuverlässigen Ziffer angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$, denn $0{,}25 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}35$

0,33 ist der mit zwei zuverlässigen Ziffern angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$, denn $0{,}325 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}335$ (↗ Bild B 29)

[1]) Die Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden nicht mitgezählt.

0,333 ist der mit drei zuverlässigen Ziffern angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$,
denn $0{,}3325 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}3335$

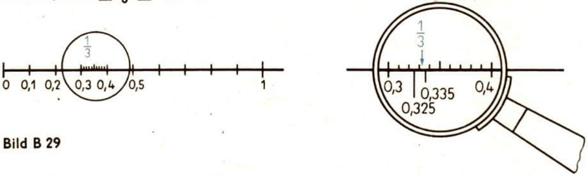



Bild B 29

● 44 Gib für $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$ einen Näherungswert mit einer (3, 4, 5, 6) zuverlässigen Ziffer(n) an!

Der Näherungswert 7,9 hat *zwei zuverlässige Ziffern*. Für den genauen Wert $x$ gilt:
$7{,}85 \leqq x \leqq 7{,}95$ (↗ Bild B 30; blauer Teil).


Bild B 30

Der Näherungswert 7,90 hat *drei zuverlässige Ziffern*. Für den genauen Wert $y$ gilt:
$7{,}895 \leqq y \leqq 7{,}905$ (↗ Bild B 30).
Bei Näherungswerten dürfen nicht noch nachträglich Nullen angehängt werden, da dadurch die Anzahl der zuverlässigen Ziffern und damit die Genauigkeit geändert wird.

## Aufgaben

Runde auf Vielfache von 10 (100)! Wie groß ist jeweils der Rundungsfehler?

1.↑ **a)** 8 248 **b)** 7 473 **c)** 1 157 **d)** 1 035 **e)** 4 144 **f)** 4 145 **g)** 7 998

2.↑ **a)** 464 **b)** 10 706 **c)** 999 **d)** 849 **e)** 851 **f)** 27 043 **g)** 31 450

3. **a)** Nenne alle natürlichen Zahlen, die beim Runden auf Vielfache von 10 zu 840 führen!
   **b)** Gib diese Zahlen in der Form $a \leqq x < b$ an!
   **c)** Veranschauliche diese Zahlen am Zahlenstrahl!

4. Runde auf eine (zwei) Stelle(n) nach dem Komma!
   **a)** 0,574 **b)** 0,534 **c)** 27,2 **d)** 4,449 **e)** 7,3450 **f)** 6,799 **g)** 8,992

5. Welche der folgenden Werte täuschen eine nicht mögliche Genauigkeit vor?
   **a)** Der Fichtelberg ist 121 435 cm hoch.
   **b)** Die Entfernung Berlin – Dresden beträgt 180 km.
   **c)** Ein Trabant wiegt leer 615 321 g.
   **d)** Die Nummer meines Fahrrades ist 452 341.
   **e)** Eine Unterrichtsstunde dauert 45 min.

6. Nenne alle natürlichen Zahlen $x$, für die gilt:
**a)** $3\,820 < x < 3\,830$ **b)** $1\,170 \leqq x \leqq 1\,180$, **c)** $2\,240 \leqq x \leqq 2\,250$!

7. Gib an, zwischen welchen Werten $x$ jeweils liegt, wenn folgende Näherungswerte für $x$ ermittelt wurden: **a)** mit dem Meßband 0,21 m, **b)** mit dem Lineal 0,214 m, **c)** mit dem Meßschieber 0,2136 m!

8. Zwischen welchen Zahlen liegt $x$, wenn folgende Näherungswerte mit zuverlässigen Ziffern gegeben sind?
**a)** 0,34 **b)** 2,05 **c)** 0,0434 **d)** 49 **e)** 49,0 **f)** 1 201

9. Runde auf zwei (drei) zuverlässige Ziffern!
**a)** 0,4735 **b)** 0,0243 **c)** 1,0345 **d)** 1 253 **e)** 0,007349 **f)** 203,5

10. Gib für $\frac{1}{6}$ einen Näherungswert mit 2 (3, 4, 5) zuverlässigen Ziffern an!

11. Es wird die Aufgabe gestellt, für $\frac{2}{3}$ einen Näherungswert mit vier zuverlässigen Ziffern anzugeben. Klaus gibt 0,6666 und Peter gibt 0,6667 an. Wer hat recht?

12. Gib für $\frac{3}{8}$ einen Näherungswert mit einer (2, 3, 4) zuverlässigen Ziffer(n) an!

13. Gib an, zwischen welchen Zahlen $x$ liegt, wenn folgende Näherungswerte für $x$ gegeben sind!

**a)** 5,4 **b)** 5,40 **c)** 5,400 **d)** 5
Veranschauliche den Sachverhalt jeweils am Zahlenstrahl!

## 18 Addition und Subtraktion von Näherungswerten

Im Beispiel B 18 auf Seite 51 wurde folgende Aufgabe gelöst:

Eine Pioniergruppe hat Altpapier gesammelt. Da verschiedene Waagen benutzt wurden, werden im einzelnen folgende Massen angegeben: 18 kg; 5,6 kg; 3,62 kg und 4,7 kg. Wie groß ist die Gesamtmasse?

Um diese Frage zu beantworten, hatten wir die einzelnen Näherungswerte addiert.

$$18 \text{ kg} + 5{,}6 \text{ kg} + 3{,}62 \text{ kg} + 4{,}7 \text{ kg} = 31{,}92 \text{ kg}$$

Wir können jetzt genauer begründen, warum die Stellen nach dem Komma eine nicht mögliche Genauigkeit vortäuschen. Der Näherungswert 18 kg bedeutet für die genaue Masse $m_1$:

$$17{,}5 \text{ kg} \leqq m_1 \leqq 18{,}5 \text{ kg}.$$

Für die genauen Werte der anderen Massen gilt:

$$5{,}55 \text{ kg} \leqq m_2 \leqq 5{,}65 \text{ kg},$$
$$3{,}615 \text{ kg} \leqq m_3 \leqq 3{,}625 \text{ kg},$$
$$4{,}65 \text{ kg} \leqq m_4 \leqq 4{,}75 \text{ kg}.$$

Rechnen wir mit den kleinst- und den größtmöglichen Werten, so erhalten wir für die Gesamtmasse $m$:

$$31{,}315 \text{ kg} \leqq m \leqq 32{,}525 \text{ kg}.$$

Eine genauere Angabe kann über *m* nicht gemacht werden. Um nicht immer diesen Weg gehen zu müssen, überlegen wir uns einen bequemeren Weg, der uns zu einem **Näherungswert** für die Summe führt.
Bei dem ersten Näherungswert (18 kg) steht die **letzte zuverlässige Ziffer** in der **Einerstelle**. (Beim zweiten und vierten Näherungswert sind die Zehntel noch zuverlässig und beim dritten Näherungswert noch die Hundertstel.) Das Ergebnis wird auf **Einer** gerundet.
Die Pioniergruppe hat rund 32 kg Altpapier gesammelt.
Für die Addition und Subtraktion von Näherungswerten merken wir uns:

▶ 19 **Regel 1:**
- **Suche denjenigen Näherungswert heraus, bei dem die *letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links* steht!**
- **Runde das Ergebnis auf diese Stelle!**

■ 45 **a)**
$$\begin{array}{r} 0{,}78\text{ m} \\ +\ 0{,}7\ \ \text{ m} \\ +\ 2{,}45\text{ m} \\ \hline 3{,}93\text{ m} \approx \underline{\underline{3{,}9\text{ m}}} \end{array}$$

**b)**
$$\begin{array}{r} 16{,}4\ \ \text{ cm} \\ -\ \ 6{,}2\ \ \text{ cm} \\ -\ \ 3{,}75\text{ cm} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6{,}2\ \ \text{ cm} \\ +\ 3{,}75\text{ cm} \\ \hline 9{,}95\text{ cm} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}40\text{ cm} \\ -\ \ 9{,}95\text{ cm} \\ \hline 6{,}45\text{ cm} \\ \approx\ \ \underline{\underline{6{,}5\ \ \text{ cm}}} \end{array}$$

■ 46 Von den folgenden Zahlen sei bekannt, daß es sich um Näherungswerte handelt.

$$\begin{array}{r} 12{,}428\phantom{21} \\ +\ \ 0{,}543\,21 \\ +\ \ 2{,}4\phantom{4321} \\ +\ 13\phantom{{,}54321} \\ \hline 28{,}371\,21 \approx \underline{\underline{28}} \end{array}$$

Treten so große Unterschiede in der Genauigkeit der Eingangswerte wie in diesem Beispiel auf, so kann man die genaueren Näherungswerte schon vor der Rechnung runden.

bequemer:

$$\begin{array}{r} 12{,}4 \\ +\ \ 0{,}5 \\ +\ \ 2{,}4 \\ +\ 13\phantom{{,}4} \\ \hline 28{,}3 \approx \underline{\underline{28}} \end{array}$$

Man rundet so, daß die gerundeten Werte eine Stelle mehr haben, als das Ergebnis nach der Regel 1 hat.

## Aufgaben

**1.** Herr Müller will einen Tisch und eine Liege kaufen. Ihm werden Tische zwischen 200 M und 350 M und Liegen zwischen 450 M und 630 M angeboten. Zwischen welchen Beträgen liegt der Gesamtkaufpreis für Tisch und Liege?

**2.** Berechne die Summe folgender Näherungswerte!
**a)** 12,37 + 125,2 + 0,44 + 1,256
**b)** 212,21 + 12,1 + 103 + 1,8
**c)** 0,987 + 2,24 + 0,0382 + 32,10

**3.** Berechne folgende Differenzen von Näherungswerten!
**a)** 454,25 − 12,2 − 9,75 − 121
**b)** 91,7 − 10,95 − 0,855 − 9,71
**c)** 474 − 38,97 − 0,075 − 91

4. Für $x, y, u, v$ sind Näherungswerte 3,75; 4,982; 3,8461; 23 gegeben. Berechne
**a)** $x + y + v$, **b)** $v - x - y - u$, **c)** $x + y - u$, **d)** $v - x - y$!

5. Ein rechteckiger Garten mit 21,7 m Länge und 42,5 m Breite soll eingezäunt werden. An einer Ecke des Grundstücks steht ein 3,55 m breiter und 5,15 m langer Geräteschuppen. Das Gartentor von 3,25 m Breite soll wieder verwendet werden. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?

6. Der Fahrer eines LKW überprüft vor Antritt der Fahrt, ob mit den zu transportierenden Gütern die Ladefähigkeit von 10 t überschritten wird. Auf den Verpackungen der einzelnen Güter findet er folgende Angaben: 7,9 t; 1,24 t; 0,63 t; 0,235 t. Darf er diese vier Güter transportieren?

## 19 Multiplikation und Division von Näherungswerten

Der Flächeninhalt eines rechteckigen Gartens soll ermittelt werden. Für Länge und Breite wurden 32,4 m bzw. 22,3 m gemessen. Für den Flächeninhalt erhält man mit diesen gemessenen Werten:

$A = 32{,}4\ \text{m} \cdot 22{,}3\ \text{m} = 722{,}52\ \text{m}^2$ Überschlag: $30 \cdot 20 = 600$

Denken wir daran, daß für die genauen Werte $l$ und $b$ gilt:

$32{,}35\ \text{m} \leqq l \leqq 32{,}45\ \text{m}$ und $22{,}25\ \text{m} \leqq b \leqq 22{,}35\ \text{m}$,

erhalten wir für den genauen Wert des Produkts $l \cdot b$:

$$32{,}35\ \text{m} \cdot 22{,}25\ \text{m} \leqq l \cdot b \leqq 32{,}45\ \text{m} \cdot 22{,}35\ \text{m}$$
$$719{,}7875\ \text{m}^2 \leqq l \cdot b \leqq 725{,}2575\ \text{m}^2$$

Das Ergebnis 722,52 m² täuscht für den Flächeninhalt eine nicht mögliche Genauigkeit vor. Die Eingangswerte haben je **drei zuverlässige** Ziffern. Wir runden das Ergebnis auf **drei** Ziffern: *Der Flächeninhalt des Gartens beträgt rund* ***723*** *m².*

Für die **Multiplikation** und **Division** von Näherungswerten merken wir uns:

▶ 20

> **Regel 2:**
> **– Suche den Näherungswert mit der *geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern* heraus!**
> **– Runde das Ergebnis auf diese Anzahl von Ziffern!**
> **Die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden dabei nicht mitgezählt.**

● 45 Überprüfe, ob der Näherungswert 723 m² drei zuverlässige Ziffern hat!

■ 47 Es sind die Näherungswerte 1,51 und 7,4 miteinander zu multiplizieren.

$1{,}51 \cdot 7{,}4$ Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 1{,}51 \cdot 7{,}4 \\ \hline 1057\phantom{0} \\ 604 \\ \hline 11{,}174 \end{array}$$

Da 7,4 nur zwei zuverlässige Ziffern hat, ist das Ergebnis auf 11 zu runden:
$1{,}51 \cdot 7{,}4 \approx \underline{\underline{11}}.$

**48** Für die Näherungswerte 16,4 und 2,5 soll der Quotient berechnet werden.

16,4 : 2,5 Nebenrechnung: 164 : 25 = 6,56

```
164 : 25 = 6,56
150
 140
 125
  150
  150
    0
```

Der Quotient muß nach Regel 2 auf zwei Ziffern gerundet werden.

$16{,}4 : 2{,}5 \approx \underline{\underline{6{,}6}}$

**49** Das Volumen eines Quaders ist zu berechnen. Seine Länge beträgt 17,5 cm, die Breite ist halb so groß wie die Länge, und die Höhe ist halb so groß wie die Breite.

Lösung: $a = 17{,}5$ cm; $b = 17{,}5 \text{ cm} : 2 = 8{,}75$ cm; $c = 8{,}75 \text{ cm} : 2 = 4{,}375$ cm

$V = 17{,}5 \text{ cm} \cdot 8{,}75 \text{ cm} \cdot 4{,}375 \text{ cm}$

Wir wissen, daß das Ergebnis auf drei Ziffern gerundet werden muß.

Berechnen wir zunächst

$a \cdot b = 17{,}5 \text{ cm} \cdot 8{,}75 \text{ cm}$

Überschlag: $17 \cdot 10 = 170$ Nebenrechnung: 17,5 · 8,75

```
17,5 · 8,75
1400
 1225
   875
153,125
```

Dieses Zwischenergebnis runden wir auf 153,1; also so, daß es eine Ziffer mehr hat, als die Regel 2 verlangt. Dann rechnen wir weiter:

$(a \cdot b) \cdot c = 153{,}1 \text{ cm}^2 \cdot 4{,}375 \text{ cm}$

Überschlag: $150 \cdot 4 = 600$ Nebenrechnung: 153,1 · 4,375

```
153,1 · 4,375
6124
  4593
  10717
    7655
669,8125
```

Für das Volumen des Quaders erhalten wir also: $V \approx \underline{\underline{670 \text{ cm}^3}}$.

Um ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten und unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, merken wir uns:

▶ 21

**Regel 3:**
**Behalte in allen Zwischenergebnissen jeweils eine Stelle bzw. Ziffer mehr bei, als die Regel 1 oder 2 empfehlen!**

Wenn in einer Aufgabe periodische Dezimalbrüche auftreten, so müssen wir diese runden, bevor wir rechnen können. In diesem Fall können wir die Genauigkeit der Näherungswerte immer weiter verbessern, indem wir mehr Dezimalstellen berücksichtigen. Haben wir uns für einen Näherungswert entschieden, richten wir uns nach den Regeln 1 bis 3.

■ 50 Das Produkt $7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36}$ soll berechnet werden.

**a)** Wählen wir für beide periodischen Dezimalbrüche Näherungswerte mit zwei zuverlässigen Ziffern, so erhalten wir:

$7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36} \approx 7,3 \cdot 1,4$ Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} \underline{7,3 \cdot 1,4} \\ 73 \\ \underline{292} \\ 10,22 \end{array}$$

Da das Ergebnis in diesem Fall nach Regel 2 auf zwei Ziffern zu runden ist, erhalten wir:

$7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36} \approx \underline{\underline{10}}$

**b)** Wählen wir Näherungswerte mit drei zuverlässigen Ziffern, so erhalten wir:

$7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36} \approx 7,33 \cdot 1,36$ Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} \underline{7,33 \cdot 1,36} \\ 733 \\ 2199 \\ \underline{4398} \\ 9,9688 \end{array}$$

Also: $7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36} \approx \underline{\underline{9,97}}$

● 46 Berechne das Produkt $7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36}$ mit Hilfe von Näherungswerten mit vier zuverlässigen Ziffern!

Erkennt man zu periodischen Dezimalbrüchen gehörende gemeine Brüche, so ist es einfacher, mit diesen gemeinen Brüchen zu rechnen.

■ 51 Für die Zahlen aus dem Beispiel B 50 gilt:

$7,\bar{3} = \frac{22}{3}$ und $1,\overline{36} = \frac{15}{11}$.

Damit gilt für das Produkt

$7,\bar{3} \cdot 1,\overline{36} = \frac{22}{3} \cdot \frac{15}{11} = \underline{\underline{10}}.$

## Aufgaben

1. Berechne folgende Produkte bzw. Quotienten von Näherungswerten!
   **a)** $2,503 \cdot 12,4$ **c)** $103 \cdot 20,5$ **e)** $44,9 : 12$
   **b)** $0,0074 \cdot 15,1$ **d)** $0,00401 \cdot 1,764$ **f)** $0,009 : 3,7$

2. Für $x$, $y$, $u$, $v$ sind die Näherungswerte 437,8; 22,49; 8,03; 0,074 gegeben. Berechne unter Anwendung der Regeln 1 bis 3!
   **a)** $(x + y + u) \cdot v$ **b)** $(x - u) \cdot y$ **c)** $x \cdot u - u \cdot v$ **d)** $(u - v + y) \cdot x$

3. Miß Länge und Breite deines Tisches und berechne den Flächeninhalt!

4. Miß Länge und Breite der Grundfläche eines Zimmers und berechne deren Flächeninhalt!

5. Die Masse der 14 Blätter eines Rechenheftes wurde mit einer Briefwaage bestimmt. Der abgelesene Wert lag zwischen 33 g und 34 g. Welche Masse hat ein Blatt dieses Heftes? Gib das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an!

**6.** Familie Meier will im Wohnzimmer und im Kinderzimmer den Fußboden neu streichen. Beide Zimmer haben eine rechteckige Grundfläche. Das Wohnzimmer ist 4,5 m lang und 4,2 m breit. Das Kinderzimmer ist 4,2 m lang und 3,8 m breit. Wieviel Büchsen Farbe werden benötigt, wenn eine Büchse für 6 bis 7 $m^2$ reicht?

**7.** Ein Zimmer hat folgende Abmessungen: 8,4 m; 5,4 m; 3,7 m. Ermittle den Rauminhalt!

**8.** Die Kantenlänge eines Würfels wurde mit 8,3 cm gemessen. Berechne Oberfläche und Volumen dieses Würfels!

**9.** Ein Körper hat ein Volumen von 6,3 $cm^3$ und eine Masse von 14,3 g. Berechne die Dichte dieses Körpers! Aus welchem Material könnte er bestehen?

**10.** Bei einem erwachsenen Menschen beträgt ungefähr:
die Länge des Kopfes $\frac{1}{8}$, die Länge des Oberkörpers $\frac{1}{3}$, die Brustweite $\frac{1}{6}$, die Handlänge $\frac{1}{10}$, die Länge des Unterarms $\frac{1}{4}$, die Fußlänge $\frac{1}{6}$, die Schulterbreite $\frac{1}{4}$ der Gesamtlänge.

**a)** Berechne nach diesen Angaben die Länge der einzelnen Körperteile eines Menschen, der 1,80 m groß ist!

**b)** Miß deine Körpergröße! Errechne damit die Länge der einzelnen Körperteile und vergleiche mit gemessenen Werten!

**11.** Berechne das Durchschnittsalter einer Fußballmannschaft, wenn vier Spieler 22 Jahre, drei Spieler 21 Jahre, ein Spieler 24 Jahre, ein Spieler 25 Jahre und zwei Spieler 23 Jahre alt sind!

**12.** Eine GPG baut auf 2,5 ha Erdbeeren an. Es wurden 206 dt Erdbeeren geerntet. Wie groß war der Hektarertrag?

**13.** Berechne! Runde die Ergebnisse so, daß sie die gleiche Anzahl von Stellen haben wie die jeweiligen endlichen Dezimalbrüche! Überlege gut, welchen Näherungswert du jeweils für den periodischen Dezimalbruch wählst!

**a)** $3{,}75 + 12{,}\overline{81}$ **b)** $4{,}5\overline{25} + 43{,}6$ **c)** $12{,}5 \cdot 6{,}\overline{8}$ **d)** $9{,}47 : 0{,}\overline{75}$

**14.** **a)** Arbeite mit 4ziffrigen Näherungswerten!
$37{,}57 + 38{,}\overline{48}$; $131{,}8 - 12{,}\overline{8}$

**b)** Arbeite mit 3ziffrigen Näherungswerten für die periodischen Dezimalbrüche!
$3{,}\overline{85} \cdot 2{,}74$; $0{,}\overline{8} \cdot 33{,}2\overline{57}$; $37{,}4\overline{82} : 0{,}38$

**c)** Arbeite mit 3ziffrigen Näherungswerten für die periodischen Dezimalbrüche!
$4{,}\overline{27} + 12{,}4$; $12{,}8 \cdot 6{,}\overline{54}$; $13{,}\overline{58} : 4{,}4$

**15.** Berechne!

**a)** $1{,}\overline{2} \cdot 4{,}5$ **c)** $\frac{3}{8} \cdot 3{,}\overline{6}$ **e)** $37{,}\overline{7} : 3{,}\overline{7}$

**b)** $1{,}\overline{3} \cdot \frac{9}{4}$ **d)** $(27{,}\overline{6} - 6{,}\overline{6}) \cdot 2{,}\overline{3}$ **f)** $1{,}2 \cdot (4{,}\overline{1} + 3{,}\overline{5})$

## Zusammenfassung

> Für das Rechnen mit Näherungswerten merken wir uns:
>
> **Regel 1:** Bei Addition und Subtraktion von Näherungswerten
> – denjenigen Näherungswert heraussuchen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht,
> – Ergebnis auf diese Stelle runden!
>
> **Regel 2:** Bei der Multiplikation und Division von Näherungswerten
> – Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraussuchen,
> – Ergebnis auf diese Anzahl von Ziffern runden!
>
> **Regel 3:** Behalte in allen Zwischenergebnissen eine Stelle bzw. Ziffer mehr bei, als die Regeln 1 oder 2 besagen!
>
> **Empfehlung:** – Suche nach Regel 1 oder 2 denjenigen Näherungswert heraus, der die Genauigkeit des Ergebnisses bestimmt!
> – Runde genaue Werte und andere Näherungswerte vor dem Rechnen so, daß sie eine Stelle bzw. Ziffer mehr als dieser Näherungswert haben!

## Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

**1.** Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegt:
**a)** 9,97, **b)** 10,001, **c)** $\frac{12}{2}$, **d)** 37,5549, **e)** $\frac{7}{5}$, **f)** 0,8483, **g)** $\frac{7}{3}$ ?

**2.** Wie groß muß $x$ sein, damit
**a)** $(x - 3{,}24) \cdot 2$ gleich 8 ist; **b)** $(x + 0{,}4) : 2$ gleich 1,57 ist?

**3.** Setze für den Stern solche Grundziffern ein, daß die entstehenden Zahlen durch 3 teilbar sind! Welche der Zahlen sind auch durch 9 teilbar?
**a)** *724 **b)** 5*36 **c)** 111* **d)** 91*8

**4.** Zerlege jede der folgenden Zahlen in ein Produkt mit drei gleichen Faktoren!
8; 27; 64; 125; 1 000 000

**5.** Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, wenn sein Umfang
**a)** 16 cm, **b)** 72 cm, **c)** 10 cm beträgt?

**6.** Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, bei dem die eine Seite um 3 cm länger ist als die andere und dessen Umfang
**a)** 14 cm, **b)** 26 cm, **c)** 20 cm beträgt?

**7.** Berechne!
**a)** $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{188}{101}\right) \cdot \frac{5}{4}$ **b)** $\frac{9}{4} \cdot \left(2{,}89 \cdot \frac{4}{9}\right)$

**8.** **a)** Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 13,05. Die eine Zahl ist um 4 größer als die andere. Um welche Zahlen handelt es sich?
**b)** Eine Zahl ist um 0,8 kleiner als eine andere. Das arithmetische Mittel dieser beiden Zahlen ist 2,7. Nenne die beiden Zahlen!

**9.** Gib jeweils alle natürlichen Zahlen an, für die gilt:
**a)** $1 < x < 15$ **b)** $x + 5 = 17$ **c)** $7 \leqq m \leqq 12$
**d)** $1\,095 < n \leqq 1\,100$ **e)** $15 - (7 - x) = 8$ **f)** $0 \leqq y < 7$
Veranschauliche die Lösungen von a, c und f am Zahlenstrahl!

**10.** Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 36 cm². Wieviel verschiedene Rechtecke mit diesem Flächeninhalt gibt es, wenn die Seitenlängen durch natürliche Zahlen angegeben werden? Welches hat den kleinsten Umfang?

**11.** Wieviel verschiedene Rechtecke mit einem Umfang von 20 cm gibt es, wenn die Seitenlängen durch natürliche Zahlen angegeben werden? Welches hat den größten Flächeninhalt?

## Wir suchen eine Zahl

**12.** Wenn man eine Zahl mit 7 multipliziert und zum Ergebnis 11,45 addiert, erhält man 100. Wie lautet diese Zahl?

**13.** Das Siebenfache welcher Zahl ist um 16,3 größer als 197,2?

**14.** Von welcher Zahl ist das Dreifache um 18,9 kleiner als 60?

**15.** Wenn man eine Zahl durch 5, das Ergebnis dann durch 3 dividiert und dann 0,42 addiert, erhält man 1. Wie lautet diese Zahl?

**16.** Das Produkt von drei Faktoren ist 26,1738. Der erste Faktor ist 15,72, der zweite Faktor 0,45. Gib den dritten Faktor an!

**17.** Peter ist $11\frac{3}{4}$ Jahre alt. Er fragt seinen Vater: „Wie alt bist du eigentlich?" Der Vater antwortet: „Wenn du dein Alter verdreifachst, dann durch 4 dividierst, $\frac{13}{16}$ Jahre subtrahierst und zum Schluß 30 Jahre addierst, dann weißt du es."

**18.** Ich denke mir eine Zahl. Ihr fünfter Teil ist gleich dem Sechsfachen von $1\frac{2}{3}$. Wie heißt diese Zahl?

**19.** Schreibe mit Klammern! Berechne das Ergebnis!
**a)** Addiere zu 0,75 die Differenz von $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{8}$!
**b)** Subtrahiere 2,5 von der Differenz der Zahlen $\frac{7}{3}$ und $3\frac{1}{2}$!
**c)** Vermindere die Summe von $3\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ um 2,8!
**d)** Addiere die Summe und die Differenz von $\frac{4}{5}$ und 0,5!

## Wandern zu Fuß und mit dem Rad

**20.** Macht mein Vater 20 Schritte, ist er eine Strecke von 16 m gegangen. Mache ich 10 Schritte, lege ich einen Weg von 6 m zurück. Um wieviel ist ein Schritt von mir kürzer als einer meines Vaters?

**21.** Heinz wandert in einer Stunde durchschnittlich 4,5 km. Wie weit kommt er in:
**a)** $1\frac{1}{2}$ h, **b)** $2\frac{1}{3}$ h und **c)** 0,75 h?

**22.** Für den 3 km langen Weg zur Stadt benötigen zwei Schüler $\frac{1}{2}$ h. Wie lange benötigen 3 Schüler für denselben Weg?

**23.** Ein Wanderer macht 4500 Schritte. Wie lang ist der zurückgelegte Weg, wenn seine Schrittlänge rund 75 cm beträgt?
Wie viele Schritte muß ein Schüler der 6. Klasse machen, um die gleiche Strecke zurückzulegen, wenn seine Schrittlänge rund 50 cm beträgt?

**24.** Dieter gab auf einer Klassenfahrt erst die Hälfte von seinem Geld und dann ein Drittel vom Rest aus und behielt am Schluß 1,50 M übrig. Fritz gab von seinem Geld erst ein Fünftel und dann ein Drittel aus und behielt 2,10 M übrig. Wieviel Geld hatte jeder der Schüler zu Beginn der Klassenfahrt bei sich?

## Aus Garten und Küche

**25.** Ein Buddelkasten ist 5,1 m lang, 3,3 m breit und hat 35 cm hohe Seitenwände. Er ist umgeben von einem 50 cm breiten Plattenweg.
**a)** Die Seitenwände sollen innen und außen gestrichen werden. Wie groß ist die zu streichende Fläche?
**b)** Wieviel Büchsen Farbe werden benötigt, wenn man mit einer Büchse 5 bis 6 m² streichen kann?
**c)** Auf den Seitenwänden werden Bretter angebracht, so daß rings um den Buddelkasten eine durchgehende Sitzbank entsteht. Reichen dafür drei 5 m lange Bretter?
**d)** Wieviel Kubikmeter Sand muß man anfahren lassen, um den Buddelkasten ganz (zu dreiviertel) zu füllen?
**e)** Zeichne die Grundfläche des Buddelkastens im Maßstab 1 : 100!

**26.** Helmut sammelt an vier aufeinanderfolgenden Tagen Pilze. Am ersten Tag findet er unter anderem 8 Steinpilze. An jedem der folgenden Tage findet er 1,5mal so viele Steinpilze wie am vorangegangenen Tag. Wie viele Steinpilze hat er an den vier Tagen insgesamt gefunden?

**27.** Von fünf Pflaumenbäumen wurden rund 250 kg Pflaumen geerntet. Aus $\frac{3}{5}$ dieser Menge wurde Pflaumenmus gekocht. Die Masse des Pflaumenmuses beträgt $\frac{3}{10}$ der Masse der frischen Pflaumen. Wieviel Kilogramm Pflaumenmus wurden eingekocht?

**28.** Zu einem Gericht Rotkohl werden für drei Personen benötigt:
$\frac{3}{4}$ kg Rotkohl, $\frac{1}{4}$ l Wasser, $\frac{1}{8}$ l Weinessig, 20 g Zucker, 100 g Schmalz, 5 g Salz, 3 Nelken, eine Zwiebel und zwei Äpfel.

Es soll **a)** für eine Person, **b)** für sechs Personen, **c)** für zehn Personen gekocht werden.

Wieviel benötigt man in jedem Fall von den einzelnen Zutaten?

**29.** 1 kg Mehl ergibt $1\frac{1}{3}$ kg Brot.
**a)** Wieviel Kilogramm Brot kann man aus 63 kg Mehl backen?
**b)** Wie viele Brote sind das, wenn ein Brot 1,5 kg wiegt?

**30.** Ein Bäcker würde bei einem täglichen Verbrauch von 70 kg Mehl mit seinem Vorrat 17 Tage auskommen. Wie lange kommt er mit demselben Vorrat aus, wenn er 90 kg täglich verbraucht?

## Transport

**31.** Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Traktor fahren, um 15 km
**a)** in $\frac{5}{6}$ h, **b)** in $\frac{5}{3}$ h zurückzulegen?

**32.** Ein Radfahrer legt in einer Stunde 12 km zurück, ein PKW sechsmal soviel und ein Schnellzug in einer Minute 1,5 km. Welche Strecke wird jeweils in acht Stunden zurückgelegt?

**33.** A-Dorf und B-Stadt sind rund 7,5 km voneinander entfernt. Aus A-Dorf geht ein Fußgänger nach B-Stadt. Gleichzeitig fährt ein Bus aus B-Stadt nach A-Dorf ab. Der Fußgänger geht mit einer Geschwindigkeit von $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Bus, wenn er dem Fußgänger 15 min nach der Abfahrt begegnet?

**34.** Ein LKW mit einer Ladefähigkeit von 10 t soll beladen werden. Auf den bereitstehenden Kisten sind folgende Angaben zu lesen:
2,6 dt auf vier Kisten; 75 kg auf fünf Kisten; 1,2 t auf zwei Kisten; 190 kg auf 30 Kisten.
Können alle diese Kisten auf einmal transportiert werden?

**35.** Morgens fährt aus einer Stadt ein Autobus los. Er fährt mit einer Geschwindigkeit von $43{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. 0,7 h später fährt ein LKW aus der gleichen Stadt ab. Das gemeinsame 151,2 km von der Stadt entfernte Ziel erreichen beide gleichzeitig. Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der LKW?

## Zum Knobeln

**36.** Auf einer Baustelle arbeiten vier Maurer. Nach ihrem Alter befragt antwortet einer: „Wir sind alle vier verschieden alt. Zusammen sind wir 129 Jahre alt. Drei von uns haben eine Quadratzahl von Jahren hinter sich, ebenso hatten drei von uns vor 15 Jahren als Alter eine Quadratzahl.“ Wie alt war jeder der Maurer, als die Frage gestellt wurde?

**37.*** Tante Erika kommt zu Besuch und bringt Äpfel mit. Zuerst bekommt Holger einen Apfel und $\frac{1}{6}$ vom verbleibenden Rest. Dann Susanne zwei Äpfel und $\frac{1}{6}$ vom dann verbleibenden Rest. Danach Uwe drei Äpfel und $\frac{1}{6}$ vom nun verbleibenden Rest usw. Zum Schluß stellt sich heraus, daß alle Kinder gleichviel Äpfel bekommen haben. Wieviel Kinder waren es, und wieviel Äpfel hat jedes Kind erhalten?

# C Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

## Einführung in die Gleichungslehre

### 1 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

Mit Hilfe von Gleichungen haben wir schon oft praktische Probleme lösen können. Betrachten wir zur Erinnerung die folgende Aufgabe aus Klasse 5:

Lutz kauft drei gleiche Tafeln Schokolade. Er zahlt mit einem Fünfzigmarkschein und erhält 38 M zurück. Wieviel kostet eine Tafel?
Wenn wir den Preis für eine Tafel mit $x$ annehmen, so können wir die folgende Gleichung schreiben:
$3 \cdot x + 38\text{ M} = 50\text{ M}.$

Wir wollen uns nun etwas näher mit Gleichungen beschäftigen und hören zunächst, wie sich Hans und Marion über die Beispiele C 1 a bis f unterhalten:

■ 1 **a)** $1\,212 + 387 = 1\,599$ **b)** $17 - 3 = 13{,}5$ **c)** $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = y$

**d)** Für alle gebrochenen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

**e)** Wenn $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ die Größen der Innenwinkel in einem Dreieck sind, dann ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

**f)** $A = 3{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}0\text{ cm}$

Hans: „Die Beispiele sind sehr verschieden. Es handelt sich aber in jedem Falle um Gleichungen."

Marion: „Das stimmt nicht, denn b) ist doch keine Gleichung. Auf der linken Seite steht ja nicht das gleiche wie auf der rechten Seite."

Hans: „Das ist für mich keine Begründung, denn in c) steht auch nicht auf beiden Seiten das gleiche. Trotzdem ist c) eine Gleichung."

Wir wollen nun genau festlegen, was eine Gleichung ist, damit kein Streit entstehen kann.
So verschieden die Beispiele C 1 a bis f auch sind, immer tritt ein Gleichheitszeichen auf, das die linke Seite und die rechte Seite der jeweiligen Gleichung verbindet.
Wir sehen uns nun die beiden Seiten genauer an. In den Beispielen C 1 a, b, c und d sind

**Zahlen** mit Hilfe von **Ziffern** oder Buchstaben, den **Variablen**, beschrieben. Ziffern, Variablen und „sinnvolle" Zusammensetzungen von ihnen mit Hilfe der Rechenzeichen $+, -, \cdot, :$, des Bruchstrichs, des Kommas oder der Potenzschreibweise nennen wir **Terme**. Manchmal benutzen wir auch Klammern zum Aufschreiben von Termen.

Terme sind zum Beispiel $3$; $x$; $2^4$; $\frac{2}{3}$; $\frac{a-b}{2}$; $3 + 4{,}5$; $a \cdot (2 + x)$; $\frac{s}{t}$.
Dagegen sind z. B. $x -$; $4 \cdot =$; $6 \mid 12$; $(3 -$; $: 4{,}2 -$; $; 4 = 9$; $P(2; 5)$ keine Terme.

▶ 1 **DEFINITION: Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so entsteht eine Gleichung.**

■ 2 **a)** $3 \cdot x = \frac{7}{2}$ ist eine Gleichung.

Begründung: $\frac{7}{2}$ ist als sinnvolle Zusammensetzung von zwei Ziffern und einem Bruchstrich ein Term. $3 \cdot x$ ist auch ein Term, da eine Ziffer und eine Variable durch das Rechenzeichen $\cdot$ verbunden sind. Beide Terme sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden.

**b)** $3 + 4 = 7 : 12$ ist eine Gleichung, denn links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen Terme.

**c)** $1 \mid a$ ist keine Gleichung, denn es tritt kein Gleichheitszeichen auf.

In den Beispielen C 1 e und f stehen die Variablen nicht für Zahlen, sondern für Größen. Die Definition C 1 erfaßt diese Gleichungen nicht. Trotzdem werden wir unser Wissen über Gleichungen auch auf solche Beispiele anwenden.
Manchmal sind zwei Terme durch eines der Zeichen $<$, $>$ oder $\neq$ verbunden.

■ 3 **a)** $3 + 8 < 12$ **b)** $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{3}$ **c)** $x - 5{,}2 > 13$ **d)** $\frac{6}{7} > \frac{8}{5}$ **e)** $5 \cdot a < 37$

▶ 2 **DEFINITION: Werden zwei Terme durch eines der Zeichen $<$, $>$ oder $\neq$ verbunden, so entsteht eine Ungleichung.**

## Aufgaben

1. Beschreibe die folgenden Zusammenhänge durch eine Gleichung!
   **a)** Das Fünffache einer Zahl $a$ beträgt 35.
   **b)** Wenn man zu einer Zahl 4 addiert, so erhält man 10,3.
   **c)** Der fünfte Teil einer Zahl $b$ beträgt $\frac{1}{2}$.
   **d)** Die Hälfte einer Zahl ist 0,3 .
   **e)** Das Doppelte einer Zahl $x$ ist 13.
   **f)** Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten $a$ und $b$ beträgt 24 cm.
   **g)** Ein Traktor legt (bei geradlinig gleichförmiger Bewegung) in 15 s einen Weg von 75 m zurück.
   **h)** Der Pollen der Kiefer ist bei 600facher Vergrößerung 1,8 cm lang.

2. Entscheide, ob ein Term vorliegt oder nicht!
a) $3 + 4$ b) $1{,}7 \cdot x$ c) $\frac{a}{b}$ d) $-\left(-\frac{1}{2}\right.$ e) $2 =$ f) $4 : 0{,}2$ g) $a \mid b$

3. Entscheide, ob eine Gleichung bzw. Ungleichung vorliegt!
a) $3 + a = 21$ d) $\frac{17}{14} = \frac{21}{5}$ g) $12 < t < 21{,}5$ k) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
b) $\frac{a + 3{,}4}{2} = \frac{3}{2}$ e) $12 \cdot a \neq 3{,}5 \cdot b$ h) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9}$ l) $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$
c) $4 \mid 8$ f) $\left(2^3 + \frac{1}{3}\right) \cdot x = \frac{1}{2}$ i) $12{,}4 < \frac{1}{2}$ m) $a \leqq 10$

## 2 Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen

● 1 Untersuche, ob a) $5 + 7 = 12$, b) $3 = 7$, c) $4 \neq 3 + 2$, d) $4 + x = 5{,}4$, e) $0{,}9 \cdot x > 2$ wahre oder falsche Aussagen sind!

Treten in einer Gleichung oder Ungleichung keine Variablen auf, so handelt es sich entweder um eine wahre oder um eine falsche Aussage.
Treten in einer Gleichung oder Ungleichung Variable auf, so entsteht eine Aussage, wenn man anstelle der Variablen Ziffern schreibt. In diesem Fall sagt man:
*Für die Variablen werden Zahlen eingesetzt.*
Im folgenden werden nur Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen betrachtet.

■ 4 Wir setzen in die Gleichung $4 + x = 5{,}5$ und in die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$ für die Variable $x$ Zahlen ein.

| $x$ | $4 + x = 5{,}5$ | $0{,}9 \cdot x > 2$ |
|---|---|---|
| 0 | $4 + 0 = 5{,}5$ falsch | $0{,}9 \cdot 0 > 2$ falsch |
| 1,5 | $4 + 1{,}5 = 5{,}5$ wahr | $0{,}9 \cdot 1{,}5 > 2$ falsch |
| 3 | $4 + 3 = 5{,}5$ falsch | $0{,}9 \cdot 3 > 2$ wahr |
| 4,5 | $4 + 4{,}5 = 5{,}5$ falsch | $0{,}9 \cdot 4{,}5 > 2$ wahr |

Wir sagen:
Die Zahl 1,5 erfüllt die Gleichung $4 + x = 5{,}5$.
Die Zahlen 3 und 4,5 erfüllen die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$.
Dagegen erfüllt zum Beispiel die Zahl 3 nicht die Gleichung $4 + x = 5{,}5$, und die Zahlen 0 und 1,5 erfüllen nicht die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$.

Wir sagen: Eine Zahl **erfüllt** eine Gleichung bzw. Ungleichung, wenn die betreffende Gleichung oder Ungleichung durch das Einsetzen dieser Zahl zu einer wahren Aussage wird.

● 2 Gib für jede der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen Zahlen an, die diese erfüllen!
a) $2 \cdot x = 6$ c) $\frac{1}{2} \cdot t = 5$ e) $2{,}5 \cdot b > \frac{1}{2}$ g) $u + 2 = 2 \cdot u$
b) $a = a + 1$ d) $2 \cdot x < 0$ f) $2 \cdot a + 2 = 2 \cdot (a + 1)$ h) $2 \cdot c = c^2$

Manche Gleichungen bzw. Ungleichungen werden von *keiner* Zahl erfüllt (↗ Auftrag 2 b und d), andere von *nur einer* Zahl (↗ Auftrag 2 a, c und g) und wieder andere von *mehreren* Zahlen (↗ Auftrag 2 e, f und h).

Wir formulieren: Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit einer Variablen lösen bedeutet, *alle* Zahlen zu finden, die die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung *erfüllen*. Jede solche Zahl heißt eine **Lösung** der gegebenen Gleichung oder Ungleichung. Die Menge aller Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung heißt deren **Lösungsmenge**.

● **3** **a)** Welche natürlichen Zahlen erfüllen die Gleichung $2 \cdot x = 5$?
**b)** Welche gebrochenen Zahlen erfüllen die Gleichung $2 \cdot x = 5$?

Die Lösungsmenge einer Gleichung kann sich ändern, wenn man den Zahlenbereich ändert, aus dem für die Variable eingesetzt werden kann. Deshalb legen wir für eine Gleichung oder Ungleichung einen **Grundbereich der Variablen** fest.
Wir verabreden: Wenn kein Grundbereich der Variablen angegeben ist, ist immer der Bereich $Q_+$ der gebrochenen Zahlen gemeint.
Wenn, wie im Auftrag 3a), eine Gleichung von keiner Zahl erfüllt wird, dann enthält die Lösungsmenge dieser Gleichung kein Element. Sie ist die **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
Zur Angabe der Lösungsmenge einer Gleichung benutzen wir auch die Mengenschreibweise. Zum Beispiel gilt für den Auftrag 3 a) $L = \emptyset$ und für den Auftrag 3 b) $L = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

## Aufgaben

**1.** Setze zwischen die folgenden Terme $T_1$ und $T_2$ eines der Zeichen $<$, $>$ oder $=$, so daß eine wahre Aussage entsteht!

**a)**

| $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|
| $5 + 4$ | $11$ |
| $\frac{34}{12}$ | $\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$ |
| $2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8}$ | $\frac{36}{7} - \frac{16}{5}$ |

**b)**

| $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|
| $4 + 3$ | $13$ |
| $\frac{5}{2} + \frac{2}{3}$ | $\frac{38}{12}$ |
| $1{,}83 + 0{,}5$ | $1{,}14 + 1{,}07$ |

**2.** Setze in die folgenden Gleichungen für $x$ nacheinander die Zahlen $2$; $\frac{1}{2}$; $4$; $7$; $0$; $1{,}2$ und $0{,}4$ ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

**a)** $3 \cdot x = 12$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot x = 2$ **e)** $6{,}1 + x = 4{,}9$ **g)** $\frac{3}{2} \cdot x = 0{,}6$
**b)** $4 \cdot x = 8$ **d)** $\frac{1}{4} \cdot x = 1$ **f)** $5{,}1 + x = 6{,}3$ **h)** $\frac{3}{4} \cdot x = 0{,}3$

**3.** Setze in die folgenden Ungleichungen für $a$ nacheinander die Zahlen $\frac{3}{4}$; $1$; $0$; $\frac{1}{5}$; $1{,}5$; $\frac{7}{3}$; $3$; $2{,}5$ ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

**a)** $1 < a$ **c)** $a + 3{,}5 < 1$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot a < 1$ **g)** $3 \cdot a > 2{,}25$
**b)** $2 < a$ **d)** $a + 3{,}0 < 10$ **f)** $\frac{4}{3} \cdot a > 1{,}5$ **h)** $2 \cdot a > 1{,}5$

4. Löse die folgenden Gleichungen!

a) $3 \cdot t + 5 = 23$ c) $\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$ e) $0 \cdot a = 7$

b) $(d - 3) \cdot 4 = 28$ d) $\frac{3}{4} : v = \frac{3}{8}$ f) $c \cdot 3{,}4 = 0$

Haben die folgenden Gleichungen und Ungleichungen Lösungen im angegebenen Grundbereich? Gib die Lösungsmengen an! Dabei sei mit $N_g$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, mit $N_u$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen und mit $N_p$ die Menge der Primzahlen bezeichnet.

5.↑ a) $3 \cdot x = 7;\ x \in N$ d) $4 \cdot x = 16;\ x \in N_p$ g) $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{27}{12};\ x \in N$

b) $3 \cdot x = 7;\ x \in Q_+$ e) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{12}{9};\ x \in Q_+$ h) $4 \cdot x = \frac{3}{7};\ x \in Q_+$

c) $4 \cdot x = 16;\ x \in N$ f) $3 \cdot x = \frac{4}{7};\ x \in Q_+$

6.↑ a) $x - 3 = 1;\ x \in N_g$ c) $12 > 4 \cdot x;\ x \in N_u$ e) $2 \cdot x < 20;\ x \in N_p$

b) $x + 3 = 1;\ x \in N_u$ d) $4 \cdot x < 3;\ x \in N_g$ f) $7 \cdot x = 7;\ x \in N_p$

7. Gib je zwei Gleichungen an, die folgende Lösungsmengen haben!

a) $L = \{2\}$ b) $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ c) $L = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ d) $L = \{0{,}8\}$ e) $L = \{0\}$

8. Vergleiche die Lösungsmengen der Gleichungen $2 \cdot x = 12$; $x \cdot 2 = 12$; $12 = 2 \cdot x$ und $12 = x \cdot 2$!

## 3 Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$

Wir werden jetzt unsere Erfahrungen im Lösen von Gleichungen zusammenfassen und den Lösungsweg für einen häufig auftretenden Gleichungstyp vereinheitlichen.

*Aufgabe:* Die Zahl 221 ist in ein Produkt zu zerlegen, wobei ein Faktor 17 ist. Wie lautet der andere Faktor?
Es ist also die Gleichung $17 \cdot x = 221$ zu lösen. Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, ergibt sich $x = 221 : 17$, also $x = 13$.
Da $17 \cdot 13 = 221$ eine wahre Aussage und $13 \in Q_+$ ist, haben wir die Lösung der Gleichung gefunden.

● 4 Löse die Gleichungen **a)** $19 \cdot x = 247$, **b)** $3 \cdot x = 7{,}5$ und **c)** $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{5}$ durch entsprechende Überlegungen!

Wir vergleichen die Gleichungen
(1) $17 \cdot x = 221$ und (2) $x = 221 : 17$
und stellen fest: Die Gleichung (2) geht aus der Gleichung (1) dadurch hervor, daß man beide Seiten der Gleichung (1) durch 17 dividiert. Wir sagen: Die Gleichung (1) wurde zur Gleichung (2) umgeformt.
Dieses Umformen erfolgte mit dem Ziel, die Lösung der Gleichung (1) zu finden. Die Lösung ist aus der Gleichung (2) leichter abzulesen, denn die Variable steht allein auf einer Seite. Man sagt: Die Gleichung wurde nach der Variablen aufgelöst oder Die Variable wurde isoliert.

● 5 Dividiere beide Seiten der Gleichung $17 \cdot x = 221$ der Reihe nach durch 13, durch 221, durch 1 sowie durch 17 und stelle fest, ob dadurch die Variable isoliert wird!

■ 5 Die Gleichung $0{,}6 \cdot t = 0{,}75$ $(t \in Q_+)$ soll gelöst werden.
Die Variable ist isoliert, wenn beide Seiten der Gleichung durch 0,6 dividiert werden. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} 0{,}6 \cdot t &= 0{,}75 \qquad | : 0{,}6 \\ (0{,}6 \cdot t) : 0{,}6 &= 0{,}75 : 0{,}6 \\ t &= 1{,}25 \end{aligned}$$

*Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} 0{,}75 : 0{,}6 = \\ 7{,}5 : 6 = 1{,}25 \\ \underline{6} \\ \ 15 \\ \underline{\ 12} \\ \ \ 30 \\ \underline{\ \ 30} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

Um festzustellen, ob die gebrochene Zahl 1,25 auch die Ausgangsgleichung erfüllt, setzen wir für die Variable $t$ die Zahl 1,25 ein und erhalten:
$0{,}6 \cdot 1{,}25 = 0{,}75$.
Das ist eine wahre Aussage. Also ist die Zahl 1,25 tatsächlich die Lösung der Gleichung $0{,}6 \cdot t = 0{,}75$. Es gilt $\underline{\underline{L = \{1{,}25\}}}$.

Das Einsetzen der errechneten Zahl in die Ausgangsgleichung dient als **Probe** zur Kontrolle der Rechnung.

■ 6 Die Gleichung $y \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{23}$ soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} y \cdot \tfrac{3}{4} &= \tfrac{15}{23} \qquad \Big| : \tfrac{3}{4} \\ \left(y \cdot \tfrac{3}{4}\right) : \tfrac{3}{4} &= \tfrac{15}{23} : \tfrac{3}{4} \\ y &= \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{23} \cdot \frac{4}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ y &= \tfrac{20}{23} \end{aligned}$$

*Probe:* $\frac{20}{23} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{23}$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{20}} \cdot 3}{23 \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{15}{23}$$

Das ist eine wahre Aussage. Wir können schreiben $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$.

Statt durch $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$ können wir die Lösung im Beispiel C 6 nach der Bestätigung durch die Probe auch dadurch kennzeichnen, daß wir die Gleichung $y = \frac{20}{23}$ zweimal unterstreichen.
Also $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$ oder $\underline{\underline{y = \frac{20}{23}}}$.

■ 7 $0 \cdot a = 2{,}5$ $(a \in Q_+)$
Da die Division durch Null nicht ausführbar ist, versagt unsere Methode. Wir können die Gleichung dennoch lösen: Es ist $L = \emptyset$; denn multipliziert man irgendeine Zahl mit 0, so ergibt sich immer 0 und nie 2,5.

■ 8 a) $\frac{1}{7} \cdot v = 2{,}4$

Wir rechnen:

$$\frac{1}{7} \cdot v = 2{,}4 \qquad \Big| : \frac{1}{7}$$
$$\left(\frac{1}{7} \cdot v\right) : \frac{1}{7} = 2{,}4 : \frac{1}{7}$$
$$v = 2{,}4 \cdot \frac{7}{1}$$
$$\underline{\underline{v = 16{,}8}}$$

*Probe:* $\frac{1}{7} \cdot 16{,}8 = 2{,}4$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{7} \cdot 16{,}8 = \frac{1 \cdot 168}{7 \cdot 10} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

b) $\frac{v}{7} = 2{,}4$

Wir rechnen:

$$\frac{v}{7} = 2{,}4 \qquad \Big| \cdot 7$$
$$\frac{v}{7} \cdot 7 = 2{,}4 \cdot 7$$
$$\underline{\underline{v = 16{,}8}}$$

*Probe:* $\frac{16{,}8}{7} = 2{,}4$

Nebenrechnung:

16,8 : 7 = 2,4
<br>28
<br>0

Dem Beispiel C 8 kann man entnehmen, daß stets $\frac{1}{7} \cdot v = \frac{v}{7}$ ist.

▶ 3

**Wir lösen eine Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0$) folgendermaßen:**
**(1) Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch $a$.**
**(2) Wir erhalten $x = b : a$ oder, anders geschrieben, $x = \frac{b}{a}$ als einzige Lösung.**
**(3) Wir bestätigen das Ergebnis durch die Probe.**

Wir lösen eine Gleichung, in der Größen vorkommen.

■ 9 Von einem Rechteck sind der Flächeninhalt $A = 14{,}7\ \text{cm}^2$ und die Seite $a = 4{,}2$ cm bekannt. Wie lang ist die Seite $b$?

Gegeben: $A = 14{,}7\ \text{cm}^2$; $a = 4{,}2$ cm Gesucht: $b$ (in cm)

*Lösung:*

$$A = a \cdot b$$
$$14{,}7\ \text{cm}^2 = 4{,}2\ \text{cm} \cdot b \qquad \Big| : 4{,}2\ \text{cm}$$
$$\frac{14{,}7\ \text{cm}^2}{4{,}2\ \text{cm}} = b$$
$$\underline{\underline{b = 3{,}5\ \text{cm}}}$$

*Probe:*
$14{,}7\ \text{cm}^2 = 4{,}2\ \text{cm} \cdot 3{,}5\ \text{cm}$
*Antwortsatz:* Die Seite $b$ hat die Länge 3,5 cm.

*Nebenrechnung:*
14,7 : 4,2 =
<br>147 : 42 = 3,5
<br>210
<br>0

4,2 · 3,5
<br>126
<br>210
<br>14,70

### Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen!

**1.**↑ **a)** $4 \cdot x = 128$ **b)** $7 \cdot a = \frac{49}{2}$ **c)** $0{,}25 \cdot z = 24$ **d)** $2{,}7 \cdot x = 21{,}6$
**e)** $\frac{1}{2} \cdot x = 38$ **f)** $\frac{x}{2{,}1} = 0{,}15$ **g)** $3 \cdot x = 0$ **h)** $0 \cdot x = 7{,}2$

**2.**↑ **a)** $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{8}$ **b)** $u \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{8} = 4 \cdot x$ **d)** $1{,}2 = 3 \cdot t$

**3.***↑ **a)** $1{,}2 \cdot x = 2{,}4 \cdot 3{,}5$ **b)** $0 \cdot t = 7{,}6 \cdot 0$ **c)** $1{,}2 \cdot 2{,}4 = 0{,}6 \cdot u$ **d)** $3 \cdot t = 12{,}5 - 3{,}5$

**4.** Stelle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ auf, die folgende Lösungsmengen haben!
**a)** $L = \{2\}$ **b)** $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ **c)** $L = \left\{\frac{13}{5}\right\}$ **d)** $L = \{0\}$ **e)** $L = \{0{,}33\}$ **f)** $L = \emptyset$

**5.*** Wie groß muß $a$ in $a \cdot x = 12{,}6$ sein, damit die Gleichung die Lösung 2 hat?

**6.*** Wie groß muß $b$ in $3{,}5 \cdot x = b$ sein, damit die Gleichung die Lösung 4 hat?

**7.** Ein Rechteck mit der Seite $a = 40$ m hat den Flächeninhalt $A = 2000\ \text{m}^2$. Wie lang ist die Seite $b$?

**8.** In Aufgabe 1 aus Lerneinheit C 1 sind Gleichungen aufzustellen. Löse diese Gleichungen!

## 4 Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$

■ **10** Ein Auto legt eine Strecke von $s = 60$ km mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit $v = 75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Wie lange ist das Auto unterwegs?

*Gegeben:* $v = 75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $s = 60$ km *Gesucht:* Zeit $t$ (in h)

*Lösung:*
$$v = \frac{s}{t}$$
$$75\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\ \text{km}}{t}$$

Die Variable $t$ steht im Nenner. Wenn wir diese Gleichung mit $t$ multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung der Form $a \cdot t = b$.

$$75\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = \mathbf{60\ km} \quad \Big| : 75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$t = \frac{60\ \text{km}}{75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$
$$\underline{\underline{t = 0{,}8\ \text{h}}}$$
$$t = \mathbf{48\ min}$$

*Nebenrechnung:*
$60 : 75 = 0{,}8$
$\underline{0}$
$\underline{600}$
$0$

$0{,}8\ \text{h} = 0{,}8 \cdot 60\ \text{min}$
$= 48\ \text{min}$

$\frac{60}{0{,}8} = \frac{600}{8} = 75$

*Probe:* $75\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\ \text{km}}{0{,}8\ \text{h}}$

*Antwortsatz:* **Das** Auto ist 0,8 h, **das** heißt 48 min unterwegs.

Im Beispiel C 10 trat eine Gleichung vom Typ $\frac{a}{x} = b$ auf. Wir lösen nun die Gleichung $\frac{3}{x} = 9$. Die Zahl 0 ist keine Lösung der Gleichung, denn $\frac{3}{0}$ ist nicht definiert. Daher können wir $x \neq 0$ voraussetzen. Durch Multiplikation mit $x$ auf beiden Seiten der Gleichung entsteht $3 = 9 \cdot x$. Das ist eine Gleichung der Form $b = a \cdot x$, die wir lösen können. Die Lösungsmenge ist $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

■ 11 a) $\frac{0{,}17}{x} = 5$

$$\frac{0{,}17}{x} = 5 \qquad | \cdot x \; (x \neq 0)$$
$$\frac{0{,}17}{x} \cdot x = 5 \cdot x$$
$$0{,}17 = 5 \cdot x \qquad | : 5$$
$$\frac{0{,}17}{5} = x$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}034}}$$

Probe: $\frac{0{,}17}{0{,}034} = 5$

$$\frac{0{,}17}{0{,}034} = \frac{\overset{5}{\cancel{170}}}{\underset{1}{\cancel{34}}} = 5$$

b) $\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : x$

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : x \qquad | \cdot x \; (x \neq 0)$$
$$\frac{5}{4} \cdot x = \frac{4}{5} \qquad | : \frac{5}{4}$$
$$x = \frac{4}{5} : \frac{5}{4}$$
$$\underline{\underline{x = \frac{16}{25}}}$$

Probe: $\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : \frac{16}{25}$

$$\frac{4}{5} : \frac{16}{25} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{5}{4}$$

■ 12 a) $\frac{\frac{2}{5}}{x} = 0$

$$\frac{\frac{2}{5}}{x} = 0 \qquad | \cdot x \; (x \neq 0)$$
$$\frac{2}{5} = 0 \cdot x$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, denn für jede Zahl $x$ ist $0 \cdot x = 0$.
$\underline{\underline{L = \emptyset}}$

b) $\frac{0}{x} = \frac{1}{2}$

$$\frac{0}{x} = \frac{1}{2} \qquad | \cdot x \; (x \neq 0)$$
$$0 = \frac{1}{2} \cdot x \qquad | : \frac{1}{2}$$
$$x = 0$$

Das kann nicht sein, denn es muß ja $x \neq 0$ gelten.
Also ist $\underline{\underline{L = \emptyset}}$.

● 6 Löse die Gleichung $\frac{0}{x} = 0$!

▶ 4

**Wir lösen eine Gleichung $\frac{a}{x} = b$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ folgendermaßen:**

**(1) Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit $x$ $(x \neq 0)$.**
**(2) Wir dividieren nun beide Seiten der entstandenen Gleichung $a = b \cdot x$ durch $b$.**
**(3) Wir erhalten dann $x = \frac{a}{b}$ oder, anders geschrieben, $x = a : b$ als einzige Lösung.**
**(4) Wir bestätigen das Ergebnis durch die Probe.**

### Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen!

**1.**↑ **a)** $\frac{4}{x} = 12$ **c)** $\frac{0{,}4}{x} = 1{,}2$ **e)** $\frac{4}{3} : x = \frac{3}{2}$ **g)** $0{,}72 = 0{,}28 : x$

**b)** $\frac{0}{x} = 1{,}4$ **d)** $\frac{3}{x} = 0$ **f)** $\frac{\frac{2}{3}}{x} = \frac{49}{2}$ **h)** $\frac{1{,}2}{x} = \frac{4}{3}$

**2.***↑ **a)** $\frac{2}{x} = \frac{3}{4} \cdot 1{,}2$ **b)** $12 - 3{,}5 = \frac{5}{x}$ **c)** $12 \cdot \frac{1}{t} = 24$ **d)** $3{,}5 \cdot \frac{2}{t} = 18$

**3.** Stelle Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ auf, die folgende Lösungsmengen haben!

**a)** $L = \{3\}$ **b)** $L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ **c)** $L = \{0\}$ **d)** $L = \{1{,}75\}$ **e)** $L = \emptyset$

**4.*** Wie groß muß $a$ in $\frac{a}{x} = 4{,}8$ sein, damit die Gleichung die Lösung 3 hat?

**5.*** Wie groß muß $b$ in $\frac{2{,}5}{x} = b$ sein, damit die Gleichung die Lösung 5 hat?

**6.** Ein Radfahrer fährt $2\frac{1}{2}$ h mit der Geschwindigkeit $v = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welche Strecke legt er zurück?

**7.** Welche der folgenden Gleichungen kann mit einem der beiden behandelten Lösungsverfahren ▶ 3 bzw. ▶ 4 gelöst werden?

**a)** $7{,}6 \cdot x = 12$ **d)** $2 - x = 17{,}8$ **g)** $\frac{3}{4} \cdot x = x - 2$ **k)** $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{x}$

**b)** $12 = 0 \cdot a$ **e)** $\frac{1{,}2}{u} = \frac{3}{4}$ **h)** $x^2 + 2 = 5$ **l)** $0 = x \cdot 0$

**c)** $0{,}9 + t = 1{,}7$ **f)** $\frac{2 \cdot v}{3} = \frac{4}{6}$ **i)** $3 \cdot 36 = s \cdot \frac{5}{12}$ **m)** $z \cdot 3{,}5 = 31{,}5$

## Proportionalität und Verhältnisgleichungen

### 5 Darstellen von Zusammenhängen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

*Wir wissen bereits:* Geordnete Zahlenpaare kann man graphisch als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen. So stellt im Bild C 1 der Punkt $P$ das Zahlenpaar (3; 4) dar. Die Zahlen 3 und 4 heißen **Koordinaten** des Punktes $P$ (3; 4). 3 heißt **Abszisse** von $P$, 4 heißt **Ordinate** von $P$. Entsprechend werden der $x$-Strahl als **Abszissenachse** und der $y$-Strahl als **Ordinatenachse** bezeichnet. Beide Strahlen nennt man auch **Koordinatenachsen**. Der Punkt mit den Koordinaten (0; 0) wird **Koordinatenursprung** genannt. Dieser Punkt wird mit $O$ (0; 0) bezeichnet.[1]

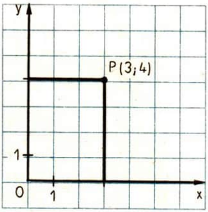


Bild C 1

[1]) Das $O$ ergibt sich aus dem lateinischen Wort origo (Ursprung).

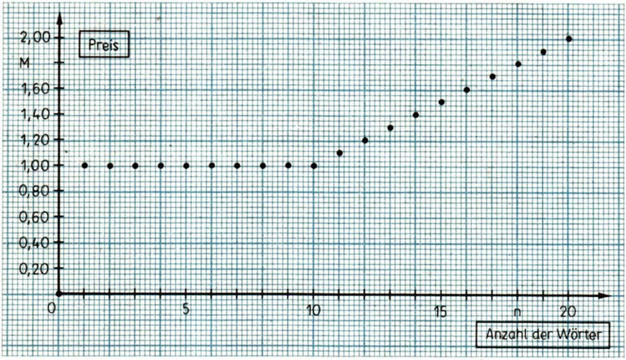
● 7 **a)** Wo liegen alle Punkte, deren Abszisse 1 ist? Wo liegen alle Punkte mit der Ordinate 3? Wo liegen alle Punkte mit der Abszisse 0?

**b)** Zeichne die Punkte $P_1$ (3; 5), $P_2$ (1; 7) und $P_3$ (5; 3) in ein Koordinatensystem! Zeichne mehrere Linien, die durch diese drei Punkte gehen! Markiere auf jeder Linie einen weiteren Punkt und gib seine Koordinaten an!

Die Darstellung von geordneten Zahlenpaaren durch Punkte in einem Koordinatensystem ist besonders zweckmäßig, um bestimmte Zusammenhänge zu veranschaulichen.

■ 13 Für ein Telegramm im Ortsverkehr ist bis zu 10 Wörtern 1 Mark zu bezahlen; für jedes weitere Wort 0,10 M.
Das Bild C 2 zeigt eine Veranschaulichung dieses Zusammenhangs. Dabei wurde die Anzahl der Wörter auf der Abszissenachse abgetragen. Der davon abhängige Preis in Mark wurde auf der Ordinatenachse abgetragen.
Die Punkte liegen bis zur Wortanzahl 10 auf einer Parallelen zur Abszissenachse. Von der Wortanzahl 10 an liegen die Punkte auf einer Geraden, die durch den Punkt $O$ (0; 0) geht.

Bild C 2




Im Beispiel C 13 war es nicht sinnvoll, die Punkte in der graphischen Darstellung miteinander durch eine Linie zu verbinden, denn es gibt zum Beispiel kein Telegramm mit 5,5 Wörtern. Im folgenden Beispiel ist das anders.

■ 14 *Jeder Zahl $x$ wird die Zahl $x^2$ zugeordnet.* Dieser Sachverhalt soll in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden.
Bei dieser Zuordnung entstehen geordnete Zahlenpaare $(x;\ x^2)$. Einige solcher Paare sind: (1; 1), (2; 4), (0; 0), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Die Punkte, die diesen Zahlenpaaren entsprechen, wurden im Bild C 3 in ein Koordinatensystem eingezeichnet.
Man kann diese Punkte durch eine gekrümmte Linie so verbinden, daß auch für weitere Zahlen die Quadrate näherungsweise abgelesen werden können (↗ Bild C 4).

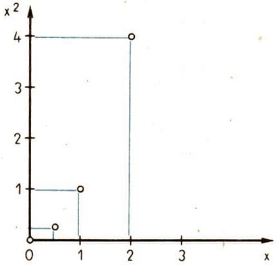



Bild C 3

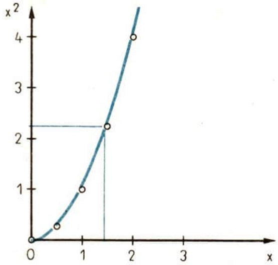



Bild C 4

## Aufgaben

**1.** Bilde alle möglichen geordneten Zahlenpaare $(x; y)$, wenn $x$ Element der Menge $M$ und $y$ Element der Menge $N$ ist!

**a)** $M = \{3; 0{,}4; \frac{2}{3}\}$; $N = \{2; \frac{1}{2}\}$ **b)** $M = \{2; 0{,}8; \frac{3}{4}\}$; $N = \{3; \frac{1}{3}\}$

**2.** Stelle die in den Aufgaben 1a und b ermittelten Zahlenpaare in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar!

**3.** Gib für die im Bild C 5 dargestellten Punkte jeweils Abszisse und Ordinate an!

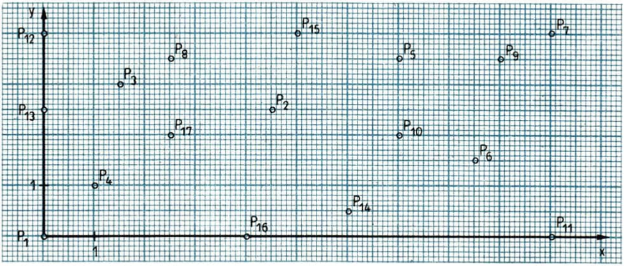



Bild C 5

**4.** Stelle die folgenden Zusammenhänge in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar! Beschreibe dein Ergebnis!

**a)** Wir betrachten Quadrate. Der Länge einer Quadratseite wird der Umfang desselben Quadrates zugeordnet.

**b)** Wir betrachten Quadrate. Der Länge einer Quadratseite wird der Flächeninhalt desselben Quadrates zugeordnet.

**c)** Der nebenstehenden Tabelle kann man die Gebühren für einen Brief im Ortsverkehr in Abhängigkeit von der Masse entnehmen.

| Briefe | Gebühr |
|---|---|
| bis 20 g | 0,10 M |
| über 20 g bis 250 g | 0,20 M |
| über 250 g bis 500 g | 0,30 M |

**d)** Jeder Zahl sei das um 1 vergrößerte Doppelte dieser Zahl zugeordnet.

5. In den Bildern **a)** C 6 und **b)** C 7 sind jeweils drei Zusammenhänge graphisch dargestellt. Lies aus der graphischen Darstellung Paare zusammengehöriger Zahlen ab! Beschreibe den Verlauf der Linien!

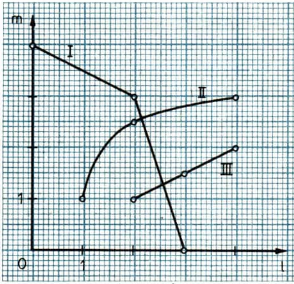



Bild C 6

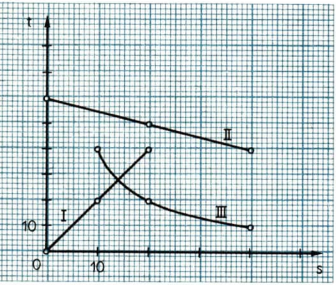



Bild C 7

## 6 Beispiele für direkte Proportionalität

Frau Meier ist Kassiererin in einem Getränkeladen. Um die Kunden schneller bedienen zu können, hat sie sich die folgende Preistabelle angefertigt, wobei sie das Flaschenpfand mitgerechnet hat.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Brause | 0,62 | 1,24 | 1,86 | 2,48 | 3,10 | 3,72 | 4,34 | 4,96 | 5,58 | 6,20 |
| Bier | 0,78 | 1,56 | 2,34 | 3,12 | 3,90 | 4,68 | 5,46 | 6,24 | 7,02 | 7,80 |

● 8 **a)** Erkläre die Tabelle!
**b)** Peter kauft 17 Flaschen Brause. Herr Lehmann kauft 6 Flaschen Bier. Wieviel muß jeder bezahlen?

Durch Frau Meiers Übersicht wird jeder Zahl im Tabellenkopf eine Zahl in der Zeile für Brause und eine Zahl in der Zeile für Bier zugeordnet. Wir werden nun diese Zahlen in der angegebenen Reihenfolge herausschreiben und erhalten auf diese Weise zwei **Zahlenfolgen:**
0,62; 1,24; 1,86; 2,48; 3,10; 3,72; 4,34; ... bzw.
0,78; 1,56; 2,34; 3,12; 3,90; 4,68; 5,46; ...

Zum Beispiel ist 1,86 das dritte Glied in der ersten Zahlenfolge und 0,78 das erste Glied in der zweiten Zahlenfolge.
Die Tabelle von Frau Meier zeigt: Je mehr Flaschen Brause man kauft, desto mehr muß man bezahlen. Wenn man *n* Flaschen Brause kauft, muß man $n \cdot 0{,}62$ M bezahlen. Wenn man *m* Flaschen Bier kauft, muß man $m \cdot 0{,}78$ M bezahlen. Man sagt:
Der Preis für Brause in Flaschen ist **direkt proportional zur** Anzahl der Flaschen, oder auch (bezogen auf das Bier):
Zwischen dem Preis für Bier in Flaschen und der Anzahl der Flaschen besteht **direkte Proportionalität.**

Verschiedene Gegenstände aus Kupfer werden untersucht. In einer Tabelle sind die Werte für das Volumen *V* und für die Masse *m* erfaßt.

| $V$ in $cm^3$ | 2,5 | 0,6 | 4,0 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $m$ in g | 22,5 | 5,3 | 35,6 | 179 |

Der Quotient aus Masse und Volumen gibt die *Dichte* eines Körpers an. Für Körper aus dem gleichen Material ist der Quotient $\frac{m}{V}$ konstant. Masse und Volumen von Körpern aus gleichem Material stehen also in einem bestimmten Zusammenhang. Man sagt: Sie sind **zueinander direkt proportional.**

● **9** Ermittle aus der Tabelle die Quotienten $\frac{m}{V}$! Wie erklärst du dir die Ergebnisse?

Peter kann sich die Malfolge mit der Sieben nicht merken. Sein großer Bruder gibt ihm die folgende Tabelle zum Ausfüllen:

| $a$ | 3 | 5 | 6 | 2 | 7 | 12 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | | | | | | | 56 | 28 | 77 | 63 |

Peter ergänzt die Tabelle mit Hilfe der Formel $b = 7 \cdot a$. Man sagt auch hier: Zwischen *b* und *a* besteht **direkte Proportionalität.**

● **10** Ermittle die fehlenden Werte in der vorstehenden Tabelle! Trage dann die Punkte, die den geordneten Paaren $(a;\, b)$ zugeordnet sind, in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein!

Betrachten wir in den Beispielen die Zahlen in den Tabellen (ohne Rücksicht darauf, ob es sich um Geldbeträge, Volumina oder Massen handelt), so können wir feststellen:
- Es wurden jeweils (mindestens) zwei Zahlenfolgen aufgeschrieben.
- Dabei stehen stets zusammengehörige Glieder untereinander.
- Für jede Tabelle kann man eine Gleichung der Form $b = k \cdot a$ finden, wobei $k \neq 0$ eine feste Zahl ist und *b*, *a* zusammengehörige Glieder sind.

▶ **5** **DEFINITION:** ***Zahlenfolgen*** **heißen** ***zueinander direkt proportional,*** **wenn es eine Zahl $k \neq 0$ gibt, so daß sich jedes Glied der einen Folge aus dem entsprechenden Glied der anderen Folge durch Multiplikation mit $k$ ergibt.**
**Diese Zahl $k$ heißt** ***Proportionalitätsfaktor.***

Liegt ein solcher Zusammenhang vor, so sprechen wir kürzer auch von *zueinander proportionalen Zahlenfolgen.*

■ **15** Als Zahlenfolge I wählen wir 2, 4, 6, 8, 10,
als Zahlenfolge II wählen wir 4, 8, 12, 16, 20 und
als Zahlenfolge III wählen wir 3, 5, 7, 9, 11.
Dann gilt:
Die Zahlenfolgen I und II sind zueinander direkt proportional, denn jedes Glied der Zahlenfolge II ergibt sich aus dem entsprechenden Glied der Zahlenfolge I durch Multiplikation mit 2.
Natürlich ergibt sich auch jedes Glied der Zahlenfolge I aus dem entsprechenden Glied der Zahlenfolge II durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$. (Deshalb konnte in der Definition C 5 das Wort „zueinander" verwendet werden.)
Die Zahlenfolgen I und III sind dagegen nicht zueinander proportional, denn es gilt z. B. $3 = 1{,}5 \cdot 2$ und $5 = 1{,}25 \cdot 4$.

Um festzustellen, ob zwei Zahlenfolgen zueinander direkt proportional sind oder nicht, können wir auch die Quotienten zusammengehöriger Glieder untersuchen. Wir dividieren dabei jedes Glied der zweiten Zahlenfolge durch das entsprechende Glied der ersten Zahlenfolge. Dabei benutzen wir folgendes Schema:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | | | | |
| II | | | | |
| $\frac{\text{II}}{\text{I}}$ | | | | |

Sind alle Quotienten gleich, so sind die beiden Zahlenfolgen zueinander proportional und der Proportionalitätsfaktor ist durch die Quotienten gegeben. In diesem Fall sagt man auch: *Zwischen den Zahlenfolgen besteht Proportionalität.*
Sind auch nur zwei dieser Quotienten voneinander verschieden, so sind die Zahlenfolgen nicht zueinander proportional. In diesem Fall gibt es keinen Proportionalitätsfaktor.
Bei Beispielen aus der Praxis sind wir wegen auftretender Meßfehler großzügiger und sprechen noch von Proportionalität, wenn sich die Quotienten nur geringfügig unterscheiden (↗ Auftrag C 9).

● **11** Wie lautet der Proportionalitätsfaktor im Falle **a)** der Preistabelle, **b)** der Dichtebestimmung von Kupfer (↗ Auftrag C 9) und **c)** der Malfolge der 7?

## Aufgaben

Stelle fest, ob die Zahlenfolgen I und II zueinander proportional sind! Begründe deine Feststellungen! Gib für die zueinander direkt proportionalen Zahlenfolgen einen Proportionalitätsfaktor an!

**1.**↑ **a)** I 1; 2; 3; 4; 5; 6
II 3; 6; 9; 12; 15; 18

**b)** I 2; 3,5; 5; 6,5; 8
II 3; 5,25; 7,5; 9,75; 12

**2.** **a)** I 1; 2; 3; 4; 5; 6
II 2; 4; 6; 8; 10; 12

**b)** I 2; 4,5; 7; 9,5; 12
II 3; 6,75; 10,5; 14,25; 18

c) I 2; 4; 6; 8 ; 10
II 18; 9; 6; 4,5; 3,6

d) I $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{11}$
II $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{11}{13}$

e) I 3; 5; 7; 9; 11
II 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{14}{3}$; 6; $\frac{22}{3}$

c) I 2; 4; 6; 8; 10
II 12; 6; 4; 3; 2,4

d) I $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{11}{10}$
II $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{10}{11}$

e) I 2; 5; 8; 11; 14
II 3; $\frac{15}{2}$; 12; $\frac{33}{2}$; 21

**3.** Bilde zu der Zahlenfolge I 3; 5; 7; 9; 11 eine Zahlenfolge II so, daß Proportionalität mit dem Proportionalitätsfaktor **a)** 5, **b)** 2,5, **c)** $\frac{3}{4}$, **d)** 0,6 vorliegt!

**4.** Ergänze die folgenden Tabellen, wobei direkte Proportionalität zwischen I und II vorausgesetzt wird!

**a)**

| I | 1,2 | 2,5 | $\frac{1}{2}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II | | | 2 | 8 | $\frac{3}{4}$ |

**b)**

| I | 4 | 5 | 7 | | | 6,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 8 | | | 18 | 15 | |

**5.*** Vergleiche die Definition 5 aus diesem Kapitel mit der Definition 3 aus Kapitel D!

## 7 Darstellen von Proportionalität in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

● **12** Stelle fest, ob Proportionalität besteht!

**a)**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |

**b)**

| $a$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 | 4 | 7 | 9 | 15 |

Wenn wir jedem Glied der jeweils zuerst genannten Zahlenfolge aus Auftrag C 12 das darunter stehende Glied der anderen Zahlenfolge zuordnen, so entstehen Zahlenpaare.

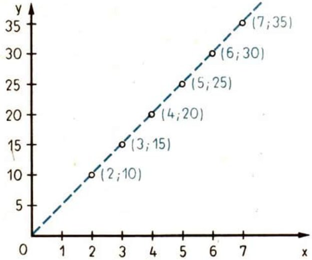



Bild C 8

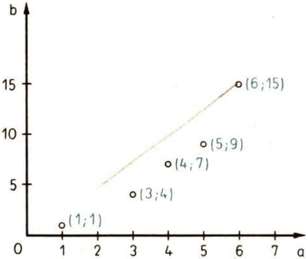



Bild C 9

Die Zahlenpaare der Tabelle a) wurden im Bild C 8, die der Tabelle b) im Bild C 9 in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dargestellt.
Im Fall a) liegt direkte Proportionalität vor (Proportionalitätsfaktor: $k = 5$), und die Punkte liegen auf einer Geraden, die durch den Punkt $O$ (0; 0) geht.
Im Fall b) liegt keine Proportionalität vor, und die Punkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden durch den Punkt $O$ (0; 0).

▶ 6 **Allgemein gilt für Zuordnungen: Liegen alle Punkte auf einer Geraden durch den Punkt O (0; 0), so liegt Proportionalität vor, sonst nicht.**

### Aufgaben

1. In den Aufgaben 1 a) bis c) in Lerneinheit C 6 auf Seite 107 f. sind jeweils zwei Zahlenfolgen gegeben, die gliedweise einander zugeordnet sind. Stelle die auf diese Weise ermittelten Zahlenpaare in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar!
2. In den Bildern C 6 und C 7 (↗ Seite 105) sind Zusammenhänge graphisch dargestellt. In welchen Fällen liegt direkte Proportionalität vor, in welchen nicht? Bestätige deine Antwort auch rechnerisch!

## 8 Proportionalität in der Praxis

Bei der Ermittlung der Dichte von Kupfer in Lerneinheit C 6 (↗ Seite 106) wurde folgende Tabelle aufgestellt.

| $V$ in cm³ | 2,5 | 0,6 | 4,0 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $m$ in g | 22,5 | 5,3 | 35,6 | 179 |

Wir berücksichtigen zunächst nur die Zahlenwerte und bilden die Quotienten:

$$\frac{22{,}5}{2{,}5} = 9; \quad \frac{5{,}3}{0{,}6} \approx 8{,}8; \quad \frac{35{,}6}{4{,}0} = 8{,}9; \quad \frac{179}{20} = 8{,}95.$$

Die Ergebnisse unterscheiden sich durch Meßfehler voneinander. Allerdings sind die Unterschiede gering. Wir stellen deshalb für die Zahlenfolgen direkte Proportionalität fest. Dieses Ergebnis übertragen wir auf den Rauminhalt $V$ und die Masse $m$ von Körpern aus Kupfer.
Wir sagen: Für Körper aus Kupfer ist die Masse $m$ proportional zum Volumen $V$.
Mit Hilfe des Zeichens $\sim$ (lies: proportional zu) ergibt sich kurz $m \sim V$.
Zwei Besonderheiten sind zu beachten:

(1) Der Proportionalitätsfaktor $\varrho$ ist jetzt keine Zahl, sondern eine Größe mit der Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Also gilt:

$$m = \varrho \cdot V \text{ oder } m = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot V, \text{ und } \varrho \text{ ist die Dichte.}$$

(2) Wir haben unsere Erfahrungen mit vier Körpern aus Kupfer auf **alle** möglichen Körper aus Kupfer übertragen. Eine solche Verallgemeinerung ist im allgemeinen un-

zulässig. Hier allerdings machen wir keinen Fehler, denn durch viele Experimente ist in der Physik bestätigt, daß zwischen der Masse und dem Volumen direkte Proportionalität besteht. Das gilt nicht nur für Körper aus Kupfer.

### Aufgaben

**1.** In der folgenden Tabelle ist angegeben, wieviel Zucker aus verschiedenen Mengen Zuckerrüben gewonnen wurde.

| Zuckerrüben in dt | 24 | 72 | 108 | 150 |
|---|---|---|---|---|
| Zucker in dt | 4 | 12 | 18 | 25 |

**a)** Zeige, daß direkte Proportionalität vorliegt!
**b)** Hat der Proportionalitätsfaktor eine Einheit?
**c)** Läßt sich die direkte Proportionalität auf weitere Mengen Zuckerrüben übertragen?

**2.** Untersuche, ob bei folgenden Sachverhalten direkte Proportionalität vorliegt!
**a)** Menge einer Ware und der zu bezahlende Preis
**b)** Sprungweite eines Schülers und seine Anlauflänge
**c)** Energieverbrauch und Kosten für die Energie
**d)** Anzahl der Würfe mit einem Würfel und der dabei erreichten Augenzahl

## 9 Umgekehrte Proportionalität

Wir untersuchen die nachstehenden Zahlenfolgen I und II auf Proportionalität.

| I | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | |
| $\frac{II}{I}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | | | | | keine Proportionalität |
| I · II | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

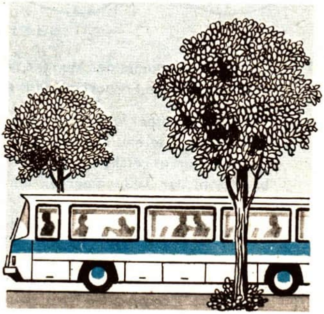
Das Produkt zweier zusammengehöriger Folgenglieder ist in diesem Beispiel immer 10. Eine solche Beziehung nennt man **umgekehrte Proportionalität.**[1])

▶ 7 **DEFINITION:** ***Zahlenfolgen*** **heißen** ***umgekehrt proportional zueinander,*** **wenn das Produkt zweier einander entsprechender Glieder immer gleich einer Zahl $c \neq 0$ ist.**

[1]) Mitunter läßt man im Falle direkter Proportionalität das Wort *direkt* auch weg.

Auch die umgekehrte Proportionalität tritt häufig in der Praxis auf.
Zwei Städte liegen 60 km voneinander entfernt. Legt man diese Entfernung mit einem Omnibus zurück, der mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von $60 \frac{km}{h}$ fährt, so benötigt man 1 h für diese Strecke. Fährt man auf einem Moped und hält die Geschwindigkeit $30 \frac{km}{h}$ ein, so benötigt man 2 h. Ein Radfahrer würde bei der Geschwindigkeit $15 \frac{km}{h}$ sogar 4 Stunden benötigen.
Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit an, die man benötigt, um die Strecke von 60 km zurückzulegen.

| Geschwindigkeit $v$ in $\frac{km}{h}$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeit $t$ in h | 6 | 4 | 3 | 2 | 1,5 | 1,2 | 1 |
| $v \cdot t$ in km | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |



In unserem Beispiel ist immer $v \cdot t = 60\,km$, und daher ist die Zeit $t$ umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit $v$.
Lösen wir die Gleichung

$$v \cdot t = 60\ km$$

nach $t$ auf, so erhalten wir

$$t = 60\ km \cdot \frac{1}{v}, \text{ also}$$

$$t \sim \frac{1}{v}.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist hier eine Längenangabe.

● 13 Erkläre mit Hilfe der Gleichungen $v \cdot t = 60\ km$ und $t = 60\ km \cdot \frac{1}{v}$ den Namen *umgekehrte Proportionalität*!

Auch die umgekehrte Proportionalität kann man graphisch darstellen. Das Bild C 10 zeigt das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für unser Beispiel. Die Punkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden, sondern auf einer gekrümmten Linie.

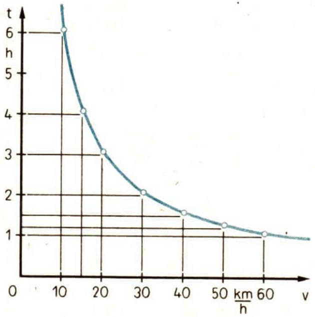



Bild C 10

### Aufgaben

Untersuche, ob die folgenden Zahlenfolgen zueinander umgekehrt proportional sind!

**1.**↑ **a)** I 5 ; 4 ; 2 ; 1; 0,5; 0,1
II 0,2; 0,25; 0,5; 1; 2 ; 10

**b)** I 2 ; 4; 6; 8; 10 ; 20
II 0,25; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{16}$; 0,05; $\frac{1}{40}$

**c)** I 3; 7; 4; 6; 18
II 2; $\frac{14}{3}$; $\frac{8}{3}$; 4; 12

**2.**↑ **a)** I 5 ; 4 ; 2; 1; 0,4; 0,2
II 0,4; 0,5; 1; 2; 5 ; 10

**b)** I 2 ; 6; 10 ; 20; 40; 60
II 0,25; $\frac{1}{12}$; 0,05; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{120}$

**c)** I 5; 9; 3; $\frac{24}{5}$; 24
II 1; $\frac{9}{5}$; 15; 24; $\frac{24}{5}$

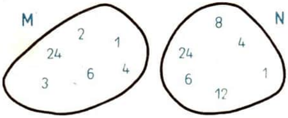



Bild C 11

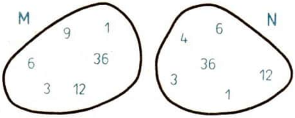



Bild C 12

**3.** Ordne die Elemente der Mengen *M* und *N* im Bild **a)** C 11, **b)** C 12 einander so zu, daß umgekehrte Proportionalität entsteht!

**4.** Entscheide, ob bei folgenden Sachverhalten umgekehrte Proportionalität vorliegt!
**a)** Rübenmenge und die Anzahl der Tiere, für die in einer bestimmten Zeit dieser Futtervorrat reicht
**b)** Anzahl der Teilnehmer an einem Wettkampf und Anzahl der ausgegebenen Medaillen
**c)** Anzahl der Schüler, die den Schulgarten umgraben, und dafür benötigte Zeit

## 10 Weitere Eigenschaften der direkten bzw. umgekehrten Proportionalität

Peter, Carola und Klaus unterhalten sich über Proportionalität.

Peter: „Mir ist aufgefallen: Wenn zwei Zahlenfolgen direkt proportional zueinander sind, dann wachsen beide oder beide fallen."

Carola: „Mir ist aufgefallen: Wenn zwei Zahlenfolgen umgekehrt proportional zueinander sind, dann wächst eine und die andere fällt."

Klaus: „Na, prima, dann ist Proportionalität ganz einfach festzustellen. Wenn beide Zahlenfolgen wachsen oder fallen, dann liegt direkte Proportionalität vor; wenn eine wächst und eine fällt, dann liegt umgekehrte Proportionalität vor."

Peter: „Das stimmt nicht. Die beiden Zahlenfolgen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| *b* | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

wachsen beide, aber direkte Proportionalität liegt nicht vor, denn $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{3}$."

Carola: „Auch für die umgekehrte Proportionalität stimmt nicht, was Klaus sagt, denn in

| $a$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |

wächst eine Zahlenfolge und die andere fällt, aber alle Produkte sich entsprechender Glieder sind verschieden."

Klaus: „Dann nützen eure Beobachtungen nichts."

Peter: „Doch, wenn nicht beide Zahlenfolgen wachsen oder beide Zahlenfolgen fallen, dann kann keine direkte Proportionalität vorliegen."

Carola: „Und wenn nicht eine Zahlenfolge wächst und die andere fällt, dann kann keine umgekehrte Proportionalität vorliegen."

● **14** Warum hat Klaus nicht recht?

● **15** Gib eine Begründung für die Aussagen

**a)** Wenn $a \sim b$, so $b \sim a$, **b)** Wenn $a \sim \frac{1}{b}$, so $b \sim \frac{1}{a}$!

Klaus: „Ist das nicht merkwürdig? Wenn man das Volumen eines Körpers verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., so verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... sich die Masse des Körpers."

Peter: „Das ist doch immer so, wenn direkte Proportionalität vorliegt."

Carola: „Dann gilt auch: Wenn das Volumen halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... wird, so wird auch die Masse halbiert, gedrittelt, geviertelt, ..."

Klaus: „Gibt es für die umgekehrte Proportionalität etwas entsprechendes?"

Carola: „Ja, wenn in einem Rechteck die eine Seite verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... wird, muß die andere Seite halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... werden, damit der Flächeninhalt gleich bleibt."

## Aufgaben

In den Aufgaben 1 bis 4 sind jeweils die Glieder zweier Zahlenfolgen durch eine Tabelle einander zugeordnet, und es wird eine Behauptung aufgestellt. Äußere dich zu der Behauptung und ihrer Begründung!

**1.↑**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

$y \sim x$; denn je größer $x$ ist, desto größer ist auch $y$.

**2.↑**

| $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 24 | 12 | 8 | 6 | 4 |

$t \sim \frac{1}{s}$; denn je größer $s$ wird, desto kleiner wird $t$.

**3.↑**

| $m$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 30 | 24 | 18 | 12 | 6 |

$n \sim \frac{1}{m}$; denn je kleiner $m$ wird, desto größer wird $n$.

**4.↑**

| $u$ | 8 | 7 | 6 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 20 | 17,5 | 15 | 10 | 5 |

$v \sim u$; denn je kleiner $u$ wird, desto kleiner wird auch $v$.

5.* Untersuche die beiden Zahlenfolgen auf direkte bzw. umgekehrte Proportionalität!

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| II | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| II | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## 11 Verhältnisse

Der Pik Kommunismus ist 7495 m hoch und der Fichtelberg ist 1214 m hoch (↗ Bild C13). Wir vergleichen die Höhen der beiden Berge auf zwei verschiedene Arten:
Da $7495 - 1214 = 6281$ ist, ist der Pik Kommunismus 6281 m höher als der Fichtelberg.
Da $\frac{7495}{1214} \approx 6{,}17 \approx 6$ ist, ist der Pik Kommunismus etwa sechsmal so hoch wie der Fichtelberg.
Den Quotienten $\frac{7495}{1214}$ bzw. $7495 : 1214$ (lies: 7495 zu 1214) nennen wir das **Verhältnis** der Zahlen 7495 und 1214.
Man sagt auch: Die Höhe des Pik Kommunismus verhält sich zur Höhe des Fichtelberges ungefähr wie $6 : 1$.
Es ist üblich, Verhältnisse mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen anzugeben. Das erreichen wir durch zweckmäßiges Kürzen bzw. Erweitern.

Bild C 13 Fichtelberg, mit 1214 m höchster Berg auf dem Gebiet der Deutschen Demokratischen Republik

■ 16 **a)** Wir bilden das Verhältnis der Zahlen 5,6 und 8,4.

$$5{,}6 : 8{,}4 = \frac{5{,}6}{8{,}4} = \frac{56}{84} = \frac{2}{3} = 2 : 3$$

**b)** Wir bilden das Verhältnis der Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$.

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} \overset{\cdot 3}{=} \frac{4}{5} = 4 : 5$$

■ 17 Der Schall legt in 1 s etwa 300 m zurück, das Licht hingegen etwa 300000 km. In welchem Verhältnis stehen die Geschwindigkeiten?
Wir rechnen in gleiche Einheiten um
(z. B. 300 m = 0,3 km) und bilden das Verhältnis

$$\frac{0{,}3}{300\,000} = \frac{3}{3\,000\,000} = \frac{1}{1\,000\,000} = 1 : 1\,000\,000.$$

Die beiden Geschwindigkeiten verhalten sich wie 1 zu 1000000.

▶ 8 **Größen mit gleicher Einheit können miteinander verglichen werden, indem das Verhältnis der Zahlenwerte gebildet wird.**

Manchmal werden auch Größen mit unterschiedlichen Einheiten zueinander ins Verhältnis gesetzt.


Bild C 14

■ 18 Welches Land ist dichter bewohnt, die VR Polen oder die ČSSR (↗ Bild C 14)?
Wir vergleichen die Einwohnerzahl und die Fläche für jedes Land, indem wir sie ins Verhältnis setzen.

VR Polen

$$\frac{35\,600\,000}{313\,000} \approx 114 : 1$$

ČSSR

$$\frac{15\,300\,000}{128\,000} \approx 120 : 1$$

Das so gebildete Verhältnis gibt die Bevölkerungsdichte an. Die Bevölkerungsdichte ist eine Größe mit der Einheit Einwohner je Quadratkilometer.
Man sagt auch: Auf jeden Quadratkilometer kommen im Durchschnitt in der VR Polen 114 Einwohner und in der ČSSR 120 Einwohner. Also ist die ČSSR dichter bewohnt.

### Aufgaben

Bilde das Verhältnis der folgenden Zahlen!

**1.↑** **a)** 6 und 4 **b)** $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{7}$ **c)** $\frac{34}{12}$ und $\frac{17}{3}$ **d)** 0,72 und 0,48

**2.↑** **a)** 4 und 6 **b)** $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{39}{16}$ und $\frac{13}{4}$ **d)** 0,84 und 0,36

**3.** In welchem Maßstab ist eine Landkarte angefertigt, wenn für Streckenlängen das Folgende gilt?

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| auf der Karte | 3 cm | 4 cm | 2,5 cm | 12 mm |
| in Wirklichkeit | 6 km | 100 m | 500 m | 12 km |

**4.** Eine Karte ist im Maßstab 1 : 10000 angefertigt.
**a)** Wie lang sind in Wirklichkeit Strecken, die auf der Karte 15 mm (2,3 cm; 15 cm) lang sind?
**b)** Wie lang sind Strecken auf der Karte, die in Wirklichkeit 300 m (12 km; 1,9 km; 10 m) lang sind?

**5.** Nach einer Altstoffaktion wird abgerechnet.

| Klasse | 6a | 6b | 7a | 7b |
|---|---|---|---|---|
| Betrag in M | 112,50 | 100,80 | 100 | 108 |
| Anzahl der Schüler | 25 | 24 | 20 | 27 |

Welche Klasse hat das beste Ergebnis?

## 12 Verhältnisse bei zueinander direkt proportionalen und bei zueinander umgekehrt proportionalen Zahlenfolgen

● **16** Die beiden Zahlenfolgen

| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 |

sind zueinander direkt proportional. Bilde jeweils das Verhältnis der zusammengehörigen Glieder 30 und 1, 60 und 2, 90 und 3 usw.! Was stellst du fest?

Um eine weitere Eigenschaft zueinander direkt proportionaler Zahlenfolgen kennenzulernen, bilden wir das Verhältnis aus zwei Gliedern der Zahlenfolge I sowie das Verhältnis der ihnen entsprechenden Glieder aus Zahlenfolge II im Auftrag C 16.

a) $\frac{2}{4}$ und $\frac{60}{120}$
b) $\frac{8}{5}$ und $\frac{240}{150}$

a) b)

| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 |

In beiden Fällen gehen die Verhältnisse durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervor, so daß gilt

a) $\frac{2}{4} = \frac{60}{120}$,

b) $\frac{8}{5} = \frac{240}{150}$.

● **17** Bilde auf die gleiche Weise weitere Verhältnisse!

● **18** Die beiden Zahlenfolgen

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 24 |
| II | 36 | 18 | 12 | 9 | 6 | 4 | 3 | 1,5 |

sind zueinander umgekehrt proportional.
Bilde jeweils das Verhältnis der zusammengehörigen Glieder 36 und 1, 18 und 2, 12 und 3 usw.! Was stellst du fest?

● **19** Bilde, wie im folgenden angedeutet, das Verhältnis aus zwei Gliedern der ersten Zahlenfolge und vergleiche es mit dem Verhältnis aus den beiden ihnen zugeordneten Gliedern der zweiten Folge! Was stellst du fest?

a) b)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 24 |
| II | 36 | 18 | 12 | 9 | 6 | 4 | 3 | 1,5 |

Zu gleichen Verhältnissen kommt man, wenn in einem der beiden in Auftrag 19 gebildeten Verhältnisse die Reihenfolge der Glieder umgekehrt wird. So ist z. B.

a) $\frac{2}{4} = \frac{9}{18}$, b) $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

a) b)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 24 |
| II | 36 | 18 | 12 | 9 | 6 | 4 | 3 | 1,5 |

## Aufgaben

**1.** Zeige, daß die beiden Zahlenfolgen I und II in

**a)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 3,5 | $\frac{11}{2}$ | 8 |
| II | 7 | $\frac{49}{4}$ | 19,25 | 28 |

zueinander proportional sind!

**b)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 4 | 5 | $\frac{25}{2}$ |
| II | 25 | 12,5 | 10 | 4 |

zueinander umgekehrt proportional sind!

Bilde Verhältnisse, die jeweils gleich sind!

2. a) Besteht zwischen den beiden Zahlenfolgen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | 0,9 | 1,8 | 2,7 | 3,6 |
| II | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 |

direkte oder umgekehrte Proportionalität?

b) Bilde mit Gliedern der beiden Zahlenfolgen gleiche Verhältnisse!

## 13 Anwendungen zur direkten und umgekehrten Proportionalität

Bei der Untersuchung von Anwendungsbeispielen werden wir künftig zwei Fälle unterscheiden.

(1) Wir wissen bereits, daß bei dem betreffenden Sachverhalt direkte oder umgekehrte Proportionalität vorliegt (↗ Beispiel C 23), oder wir nehmen es zur Vereinfachung an (↗ Beispiel C 19).

(2) Wir müssen einen Sachverhalt erst daraufhin überprüfen, ob direkte oder umgekehrte Proportionalität vorliegt (↗ Beispiele C 20 und C 21).

■ 19 Ein PKW fährt eine längere Strecke auf der Autobahn. Seine Geschwindigkeit ist nahezu gleichbleibend (konstant) und beträgt $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welche Strecke fährt der PKW in 20 Minuten?

Zu jedem Zeitpunkt $t$ der Fahrzeit hat der PKW eine ganz bestimmte Strecke $s$ zurückgelegt.

Wir sagen: Der Fahrzeit $t$ ist die Fahrstrecke $s$ zugeordnet.

Da wir gleichbleibende Geschwindigkeit voraussetzen (in Wirklichkeit handelt es sich dabei nur um einen Durchschnittswert), besteht Proportionalität zwischen $s$ und $t$, also $s \sim t$.

Der Proportionalitätsfaktor ist $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Damit wird die Proportionalität durch die Gleichung $s = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$ ausgedrückt.

Für $t = 20\text{ min} = \frac{1}{3}\text{ h}$ ergibt sich wegen $90 \cdot \frac{1}{3} = 30$ für den Weg $s = 30\text{ km}$.

In 20 Minuten fährt der PKW ungefähr 30 km.

● 20 Überlege dir, warum die Umrechnung (von min in h) im Beispiel C 19 wichtig ist!

■ 20 Bei einem Versuch wurde eine Schraubenfeder aus Stahl unterschiedlich belastet. Es ergab sich folgende Tabelle:

| Belastung $F$ in N | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Verlängerung $s$ in cm | 1,5 | 3,0 | 4,6 | 6,1 | 9,2 | 13,1 |

Wir prüfen, ob Proportionalität vorliegt. Dazu werden die Verhältnisse $\frac{s}{F}$ für zusammengehörige Meßwerte gebildet:

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{15}{5} = 3; \qquad \frac{3,0}{1,0} = 3; \qquad \frac{4,6}{1,5} = \frac{46}{15} \approx \frac{45}{15} = 3;$$

$$\frac{6,1}{2,0} = \frac{61}{20} \approx \frac{60}{20} = 3; \qquad \frac{9,2}{3,0} = \frac{92}{30} \approx \frac{90}{30} = 3; \qquad \frac{13,1}{4,0} = \frac{131}{40} \approx \frac{132}{40} = 3,3$$

Für die Meßwerte bis 3,0 N ergibt sich Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist etwa $3\,\frac{\text{cm}}{\text{N}}$. Mit 4,0 N wurde die Feder offensichtlich überlastet, die Feder dehnte sich viel stärker aus.
Nun gehört im Bereich von 0,5 N bis 3,0 N zu *jeder* Belastung $F$ eine Verlängerung s, und wir erhalten $s \sim F$ oder auch $s = 3\,\frac{\text{cm}}{\text{N}} \cdot F$.
Dieses Ergebnis ist natürlich nicht durch die wenigen Messungen bewiesen, sondern die Messungen bestätigen eine durch viele Experimente gefundene Gesetzmäßigkeit.

■ 21 Wir untersuchen Rechtecke mit dem Flächeninhalt $A = 144\ \text{cm}^2$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen $a$ und $b$?

Wir wissen: $a \cdot b = A$, also $a \cdot b = 144\ \text{cm}^2$.
Das Produkt der Seitenlängen aller Rechtecke mit dem Flächeninhalt $A = 144\ \text{cm}^2$ ist immer gleich. Es liegt also umgekehrte Proportionalität vor: $b \sim \frac{1}{a}$ und $a \sim \frac{1}{b}$.

## Aufgaben

1. Peter ist 12 Jahre alt, seine Schwester Ute schon 24 Jahre, also doppelt so alt wie Peter.
   **a)** Wie alt waren beide vor 6 Jahren? Wievielmal so alt wie Peter war Ute damals?
   **b)** Ist das Alter von Ute proportional zu Peters Alter? Bestimme den Proportionalitätsfaktor, wenn das zutrifft!

2. Ein PKW fährt von einem Ort zu einem anderen Ort mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Er benötigt für die Fahrt 3 h. Ein LKW, der im Durchschnitt nur $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, benötigt für die gleiche Strecke 4,5 h.
   **a)** Sind Fahrzeit und Geschwindigkeit (direkt oder umgekehrt) proportional zueinander?
   **b)** Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

3.* Gegeben seien gleichschenklige Dreiecke $ABC$ mit $a = b$. Der Winkel $\gamma$ betrage 30° bzw. 40° bzw. 50°.
   **a)** Berechne für jedes Dreieck den Winkel $\alpha$!
   **b)** Untersuche, ob die Größe des Winkels $\alpha$ direkt oder umgekehrt proportional ist zur Größe des Winkels $\gamma$!

4. Peter hat drei Glaswürfel mit den Kantenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm. Er will untersuchen, ob zwischen der Masse dieser Würfel und ihren Kantenlängen Proportionalität besteht. Als Massen ermittelt er 20 g, 67,5 g und 160 g. Zu welchem Ergebnis wird Peter kommen?

5. Ein Automat stellt Werkstücke her. Zwischen der Arbeitszeit und der Anzahl der produzierten Werkstücke besteht direkte Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist **a)** 43 Stück pro Stunde, **b)** 47 Stück pro Stunde. Wieviel Werkstücke werden in 3; 8; 7,5; 15; 24 Stunden produziert?

**6.** Im Klassenschrank lag ursprünglich ein Vorrat von 50 Heften. Je nach Bedarf wurden davon Hefte an Schüler ausgegeben.

| Anzahl der Hefte im Schrank | 45 | 40 | 30 | 26 | 21 | 15 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der ausgegebenen Hefte | 5 | 10 | 20 | 24 | 29 | 35 | 40 |

Liegt hier direkte oder umgekehrte Proportionalität vor?

## Zusammenfassung

### Vergleich der direkten und der umgekehrten Proportionalität

**Direkte Proportionalität**

| $a$ | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 10 | $\frac{25}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 6 | 12 | 18 | 21 | 60 | 75 |

Je *größer* die Werte von $a$ sind, desto *größer* sind die Werte von $b$.
Werden die Werte von $a$ verdoppelt, verdreifacht usw., so werden auch die entsprechenden Werte von $b$ verdoppelt, verdreifacht usw.
Werden die Werte von $a$ halbiert, gedrittelt usw., so werden auch die entsprechenden Werte von $b$ halbiert, gedrittelt usw.
Die Werte von $b$ ergeben sich aus den entsprechenden Werten von $a$ durch Multiplikation mit $k$ ($k \neq 0$)

$$b = k \cdot a.$$

Die Werte von $a$ ergeben sich aus den entsprechenden Werten von $b$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{k}$

$$a = \frac{1}{k} \cdot b.$$

Die *Verhältnisse* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor $k$ bzw. $\frac{1}{k}$.

$$\frac{b}{a} = k \qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{k}$$

$b \sim a$ und $a \sim b$

**Umgekehrte Proportionalität**

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 5 | 7,5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 18 | 9 | 4,5 | $\frac{9}{5}$ | 1,2 | 0,9 |

Je *größer* die Werte von $x$ sind, desto *kleiner* sind die Werte von $y$.
Werden die Werte von $x$ verdoppelt, verdreifacht usw., so werden die entsprechenden Werte von $y$ halbiert, gedrittelt usw.
Werden die Werte von $x$ halbiert, gedrittelt usw., so werden die entsprechenden Werte von $y$ verdoppelt, verdreifacht usw.
Die Werte von $y$ ergeben sich aus den Reziproken der entsprechenden Werte von $x$ durch Multiplikation mit $c$ ($c \neq 0$)

$$y = c \cdot \frac{1}{x}.$$

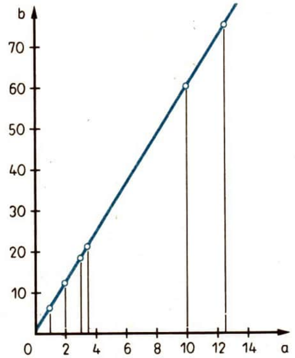
Die Werte von $x$ ergeben sich aus den Reziproken der entsprechenden Werte von $y$ durch Multiplikation mit $c$

$$x = c \cdot \frac{1}{y}.$$

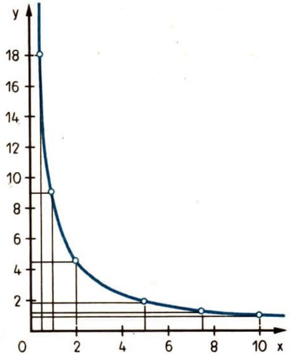
Die *Produkte* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor $c$.

$$x \cdot y = c$$

$y \sim \frac{1}{x}$ und $x \sim \frac{1}{y}$




Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von *a* ist gleich dem Verhältnis der zugeordneten Werte von *b*.
Alle Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden, die durch den Koordinatenursprung geht.




Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von *x* ist gleich dem reziproken Verhältnis der zugeordneten Werte von *y*.
Alle Punkte liegen auf einer gekrümmten Linie.

## 14 Verhältnisgleichungen

In der folgenden Tabelle sind zwei Zahlenfolgen I und II dargestellt, die zueinander direkt proportional sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | • | 5 | 10 |
| II | 1,5 | 3,75 | 7,5 |

Wir wollen die unleserliche Zahl ermitteln, indem wir Verhältnisse bilden.

So muß zum Beispiel

$$\frac{x}{10} = \frac{1,5}{7,5}$$

oder in anderer Schreibweise

$$x : 10 = 1,5 : 7,5$$

gelten. Wir lesen: *x* (verhält sich) zu 10 wie 1,5 zu 7,5.
Eine solche Gleichung wird **Verhältnisgleichung** (oder *Proportion*) genannt.
Um die Gleichung

$$\frac{x}{10} = \frac{1,5}{7,5} \quad \text{bzw.} \quad x : 10 = 1,5 : 7,5$$

zu lösen, brauchen wir keine neuen Regeln zu lernen, sondern nur unser Wissen über Gleichungen anzuwenden.

Da jedes Verhältnis als Quotient zweier Zahlen eine Zahl ist und $\frac{x}{10} = \frac{1}{10} \cdot x$ ist, erhalten wir eine Gleichung der Form

$a \cdot x = b$ mit $a = \frac{1}{10}$ und $b = \frac{1{,}5}{7{,}5}$.

Daher rechnen wir

$$\frac{x}{10} = \frac{1{,}5}{7{,}5} \qquad | \cdot 10$$
$$x = \frac{1{,}5 \cdot 10}{7{,}5}$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

*Probe:*

$$\frac{2}{10} = \frac{1{,}5}{7{,}5}$$

*Nebenrechnung:*

$$\frac{2}{10} \overset{:2}{=} \frac{1}{5} \overset{\cdot 1{,}5}{=} \frac{1{,}5}{7{,}5}$$

● **21** Begründe, warum die Gleichung $6 : x = 18 : 3$ von der Form $\frac{a}{x} = b$ ist! Gib $a$ und $b$ an! Welche Lösung hat die Gleichung?

■ **22** Wir lösen die Verhältnisgleichung $\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{7} : x$. Es handelt sich um eine Gleichung der Form $\frac{a}{x} = b$, wobei $a = \frac{5}{7}$ und $b = \frac{20}{3} : \frac{4}{3} = 5$ ist. Es ergibt sich:

$$5 = \frac{5}{7} : x \qquad | \cdot x \ (x \neq 0)$$
$$5 \cdot x = \frac{5}{7} \qquad | \cdot \frac{1}{5}$$
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{7}}}$$

*Probe:*

$$\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{7} : \frac{1}{7}$$

*Nebenrechnung:*

$$\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{4} = 5$$
$$\frac{5}{7} : \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{1} = 5$$

## Aufgaben

**1.** Prüfe, ob die folgenden Verhältnisgleichungen wahre Aussagen sind!

**a)** $\frac{2{,}4}{1{,}6} = \frac{2{,}1}{1{,}4}$ **b)** $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3{,}3}{0{,}11} = \frac{3}{0{,}1}$ **d)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$

Entscheide, ob die folgenden Verhältnisgleichungen von der Form $a \cdot x = b$ oder der Form $\frac{a}{x} = b$ sind! Löse die Verhältnisgleichungen!

**2.**↑ **a)** $x : 15 = 4 : 12$ **b)** $\frac{8}{x} = \frac{24}{3}$ **c)** $\frac{x}{12} = \frac{5}{15}$ **d)** $6 : x = 18 : 6$

**3.**↑ **a)** $8 : 1 = 2 : x$ **b)** $\frac{5}{8} : x = \frac{5}{28} : \frac{8}{63}$ **c)** $4 : 9 = x : 36$ **d)** $\frac{3}{7} : x = \frac{3}{15} : \frac{7}{40}$

## 15 Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen

Viele Probleme, bei denen direkte oder umgekehrte Proportionalität eine Rolle spielt, lassen sich mit Hilfe von Verhältnisgleichungen lösen.

■ 23 Bei einer Schraubenfeder aus Stahl besteht zwischen der Belastung $F$ und der zugehörigen Verlängerung $s$ Proportionalität (↗ Beispiel C 20).
Die Belastung von 2,0 N ergab bei einer Feder eine Verlängerung von 8,0 cm. Welche Verlängerung würde eine Kraft von 1,3 N bewirken?

| Belastung $F$ in N | 2,0 | 1,3 |
|---|---|---|
| Verlängerung $s$ in cm | 8,0 | $x$ |

$$\frac{2{,}0}{8{,}0} = \frac{1{,}3}{x} \qquad | \cdot x \ (x \neq 0)$$
$$\frac{2{,}0}{8{,}0} \cdot x = 1{,}3 \qquad | \cdot \frac{8{,}0}{2{,}0}$$
$$x = 1{,}3 \cdot 4$$
$$\underline{\underline{x = 5{,}2}}$$

*Antwortsatz:* Die Belastung von 1,3 N bewirkt bei dieser Schraubenfeder eine Verlängerung von 5,2 cm.

Wir hätten aus der Tabelle auch andere Verhältnisgleichungen aufstellen können, die zum Ergebnis führen. Zum Beispiel:

$$\frac{1{,}3}{2{,}0} = \frac{x}{8{,}0} \quad \text{oder} \quad \frac{8{,}0}{x} = \frac{2{,}0}{1{,}3} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{1{,}3} = \frac{8{,}0}{2{,}0}.$$

Dagegen führt die Verhältnisgleichung $\frac{1{,}3}{2{,}0} = \frac{8{,}0}{x}$ nicht zum richtigen Ergebnis.

● 22 Überlege, welche Verhältnisgleichung sich besonders einfach umformen läßt!

■ 24 Eine quaderförmige Platte aus Gußstahl von 45 mm Dicke hat eine Masse von 35 kg. Für solche Platten ist die Masse zur Dicke direkt proportional. Die Platte wird auf 40 mm Dicke abgehobelt. Wie groß ist dann ihre Masse?

*Ansatz:*

| Dicke in mm | 45 | 40 |
|---|---|---|
| Masse in kg | 35 | $x$ |

*Überschlag:* Die Dicke wird etwa um ein Zehntel verringert. Also nimmt auch die Masse um etwa ein Zehntel ab, d. h. um etwa 3,5 kg.

*Verhältnisgleichung:*

$$40 : 45 = x : 35 \qquad | \cdot 35$$
$$\frac{40 \cdot 35}{45} = x$$
$$x = \frac{280}{9}$$

*Nebenrechnung:*

$$\frac{40 \cdot 35}{45} = \frac{8 \cdot 35}{9} = \frac{280}{9} = 31{,}\overline{1}$$

*Antwortsatz:* Die Platte wiegt nach dem Abhobeln 31 kg.

■ **25** Ein Radfahrer legt bei der Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 $\frac{km}{h}$ die Entfernung zwischen zwei Städten in 5 h zurück. Wieviel Stunden benötigt ein anderer Radfahrer für diese Strecke, wenn er mit der Durchschnittsgeschwindigkeit 20 $\frac{km}{h}$ fährt?

Hier besteht zwischen der Geschwindigkeit und der benötigten Zeit umgekehrte Proportionalität (↗ LE 9, S. 111).

*Ansatz:*

| Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ | 15 | 20 |
|---|---|---|
| Zeit in h | 5 | $x$ |

*Überschlag:* Die Geschwindigkeit wird auf das $\frac{4}{3}$fache erhöht. Also wird nur etwa das $\frac{3}{4}$fache der Zeit benötigt. $\frac{3}{4} \cdot 5 \approx 4$

*Lösung:* $x : 5 = 15 : 20 \quad | \cdot 5$

$$x = \frac{15 \cdot 5}{20}$$

$$x = 3{,}75$$

*Antwortsatz:* Der schnellere Radfahrer benötigt für diese Strecke nur $3\frac{3}{4}$ h.

● **23** Bilde für das Beispiel C 25 weitere Verhältnisgleichungen, die zum richtigen Ergebnis führen!

## Aufgaben

**1.** Viele Zweitaktmotoren benötigen ein Gemisch aus Benzin und Öl im Verhältnis 50:1.

**a)** Wieviel Liter Benzin müssen mit 1,5 l Öl gemischt werden?
**b)** Wieviel Liter Öl müssen mit 120 l Benzin gemischt werden?
**c)** Beantworte die Fragen a) und b) für den Fall, daß ein Zweitaktmotor ein Gemisch aus Benzin und Öl im Verhältnis 33:1 erfordert!

**2.** Welchen Höhenunterschied überwindet eine Treppe, deren Stufen eine Höhe von 15 cm und eine Breite von 35 cm haben, bei einer waagerechten Entfernung von 2,45 m?

**3.** 55 kWh Elektroenergie kosten 4,40 M. Wieviel Mark kosten 75 kWh?

**4.** Für 800 Hefte benötigt man 68,8 kg Papier.

**a)** Wieviel Kilogramm Papier werden für 1 200 Hefte verbraucht?
**b)** Wieviel Kilogramm Papier werden gespart, wenn eine Schule 300 Hefte weniger verbraucht?

**5.** Ein Demonstrationszug zum 1. Mai habe eine Länge von 120 m, wenn die Teilnehmer in Zwölferreihen marschieren. Wie lang wäre der Zug, wenn die Teilnehmer **a)** in Sechserreihen, **b)** in Zehnerreihen, **c)** in Reihen zu 18 und **d)** in Dreierreihen marschieren würden?

**6.** 5 Schüler graben im Schulgarten ein Versuchsfeld in 12 h um. In welcher Zeit schaffen diese Arbeit bei gleicher Durchschnittsleistung
**a)** 6 Schüler, **b)** 10 Schüler,
**c)** 4 Schüler, **d)** 8 Schüler,
**e)** 50 Schüler?

**7.** 4 Schüler graben die Hälfte des Schulgartens in insgesamt 18 h um. Die andere Hälfte des Gartens soll in
**a)** 8 h, **b)** 9 h,
**c)** 6 h, **d)** 10 h
umgegraben sein. Wieviel Schüler müssen bei gleicher Durchschnittsleistung graben?

**8.** In welcher Zeit durchfährt ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von
**a)** $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **b)** $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **c)** $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Strecke von 11 km?

**9.** Welche Strecke legt ein Fußgänger bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von
**a)** $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **b)** $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **c)** $2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $3\frac{1}{2}$ h zurück?

**10.** In einen Teich werden Seerosen eingepflanzt, die sich so schnell vermehren, daß die von ihnen bedeckte Fläche sich jedes Jahr verdoppelt. Nach 5 Jahren ist nur noch die Hälfte des Teichs frei. Nach wieviel Jahren ist der Teich ganz mit Seerosen bedeckt?

**11.** In einen mit siedendem Wasser gefüllten Topf werden 2 Eier gelegt. Sie sind nach 6 min hart gekocht. Wie lange würde es dauern, bis 8 Eier hart gekocht sind?

**12.** Ein Schüler geht 10 Jahre zur Schule, bis er seine Abschlußprüfung machen kann. In dieser Zeit wird er von insgesamt 20 Lehrern unterrichtet. Wie lange müßte er zur Schule gehen, um von 100 Lehrern unterrichtet zu werden?

**13.** Wasser von 20 °C wird in einem offenen Topf erhitzt. Nach 4 min ist die Temperatur auf 60 °C gestiegen. Welche Temperatur hat das Wasser (bei gleichmäßigem Erhitzen) nach insgesamt 6 min und nach 12 min?

**14.** Aus 5 dt Leinsamen können 165 kg Öl gewonnen werden.
**a)** Ermittle die erforderliche Leinsamenmenge für 3 dt Öl!
**b)** Wieviel Kilogramm Öl können aus 2 dt Leinsamen gewonnen werden?

**15.** Ein Arbeiter erhält einen Zeitlohn von 4,70 M je Stunde. Wie hoch ist sein Lohn für eine 40stündige Arbeit? Wie lange hat er für 23,00 M gearbeitet?

**16.** Ein Autorennfahrer fährt bei einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit eine Strecke von 400 km in $2\frac{1}{2}$ h. Wieviel Kilometer hatte er nach 2 h zurückgelegt? Ermittle die durchschnittliche Fahrzeit für 450 m!

**17.** Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 min zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 134 benötigt für die gleiche Strecke 40 min. Ermittle für jedes der beiden Flugzeuge die Flugzeit für folgende Strecken!
**a)** 300 km **b)** 600 km **c)** 1 000 km **d)** 500 km **e)** 800 km **f)** 900 km

**18.** Lege die Angaben aus Aufgabe 17 zugrunde und berechne, welche Strecke jedes Flugzeug in folgenden Flugstunden zurücklegt!
**a)** 3 h **b)** 5 h **c)** 8 h **d)** 2 h **e)** 4 h **f)** 6 h

**19.** Gib sechs Rechtecke mit den Seiten $a$ und $b$ an, die den Flächeninhalt $A = 18\ m^2$ haben! Welche Beziehung besteht zwischen $a$ und $b$?
Formuliere diese Beziehung in Form einer Gleichung!

## Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

Löse die folgenden Gleichungen!

**1.↑** **a)** $3 \cdot x = 69$ **d)** $9 \cdot b = \frac{63}{2}$ **g)** $5 \cdot \frac{1}{k} = 10$ **k)** $\frac{0{,}6}{x} = 0{,}25$
**b)** $\frac{x}{7} = 4{,}5$ **e)** $3{,}57 \cdot x = 0$ **h)** $0{,}5 \cdot w = 48$ **l)** $\frac{y}{7{,}82} = 10{,}5$
**c)** $\frac{6}{x} = 36$ **f)** $\frac{3{,}6}{x} = \frac{5}{3}$ **i)** $2{,}3 \cdot x = 18{,}4$ **m)** $\frac{5}{3} \cdot z = \frac{17}{11}$

**2.↑** **a)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}5}{t} = 1{,}8$ **d)** $\frac{4{,}7}{a} = 1{,}25$ **g)** $2{,}4 = 3 \cdot t$ **k)** $c \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$
**b)** $0 \cdot x = 13{,}4$ **e)** $\frac{11}{9} : x = \frac{5}{9}$ **h)** $\frac{5}{6} \cdot b = 0{,}5$ **l)** $0 \cdot 5{,}6 = 2 \cdot t$
**c)** $\frac{7}{9} = 3 \cdot x$ **f)** $\frac{\frac{8}{3}}{x} = 0{,}16$ **i)** $\frac{\frac{4}{7}}{t} = \frac{13}{18}$

**3.*↑** **a)** $5{,}99 \cdot 0 = 0 \cdot x$ **d)** $0{,}54 = 0{,}21 : t$ **g)** $\frac{0}{x} = \frac{1}{2}$
**b)** $4 \cdot t = 21{,}5 - 1{,}5$ **e)** $\frac{4}{a} = 0$ **h)** $\frac{3}{x} = \frac{5}{8} \cdot 4{,}2$
**c)** $13{,}5 + 2{,}5 = \frac{4}{x}$ **f)** $2{,}4 \cdot x = 1{,}2 \cdot 3{,}5$

**4.** Prüfe, ob die folgenden Gleichungen natürliche Zahlen als Lösungen haben! Begründe deine Entscheidungen, ohne die Gleichungen zu lösen!
**a)** $2 \cdot a = 4577$ **d)** $\frac{36\,243}{b} = 3$ **g)** $\frac{82\,584}{y} = 9$ **k)** $12 \cdot z = 53\,436$
**b)** $2 \cdot a = 4\,576$ **e)** $4 \cdot x = 6\,728$ **h)** $\frac{462\,354}{z} = 6$ **l)** $\frac{621\,456}{x} = 8$
**c)** $\frac{5\,238}{a} = 4$ **f)** $3 \cdot x = 4\,524$ **i)** $10 \cdot x = 2\,358$ **m)** $\frac{56\,274}{c} = 12$

**5.** Ein Personenkraftwagen verbraucht auf einer Fahrt von 100 km im Durchschnitt 8,5 l Benzin. Wie groß ist bei diesem durchschnittlichen Verbrauch der Verbrauch an Benzin auf einer Fahrt von **a)** 140 km, **b)** 370 km, **c)** 200 km?

**6.** Ein Mähdrescher vom Typ E 512 mäht eine Fläche von 3 ha in $2\frac{1}{2}$ h.
**a)** Welche Fläche mäht er im Durchschnitt in 1 h?
**b)** Wie lange braucht er, um eine Fläche von 1 ha zu mähen?

**7.** Ein Hektar Zuckerrüben muß in der Wachstumszeit mindestens 4000000 l Wasser bekommen. Wieviel Liter Niederschläge je Quadratmeter sind das?

**8.** Ein Gestüt ist mit 63 Pferden besetzt, sein Futtervorrat reicht für 72 Tage. 9 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt das Futter?

**9.** Aus 20 l Milch läßt sich 1,1 kg Butter erzeugen.
**a)** Wieviel Kilogramm Butter kann man aus 78 l Milch erzeugen?
**b)** Wieviel Liter Milch benötigt man, um 3 kg Butter zu erzeugen?

**10.** Eine Brigade von 9 Monteuren hatte Maschinen aufzustellen. Sie erfüllte diesen Auftrag in 45 h.
**a)** In welcher Zeit kann der Auftrag bei gleicher Durchschnittsleistung von 15 Monteuren erledigt werden?
**b)** Welche Zeit würden bei gleicher Durchschnittsleistung 7 Monteure dafür benötigen?

**11.** Mit 12 gleichartigen Drehmaschinen kann eine Serie von Kleinmaschinenteilen in 22 h gefertigt werden.
**a)** Wieviel Stunden dauert die Fertigung, wenn 2 Drehmaschinen wegen notwendiger Reparaturen für diesen Auftrag ausfallen?
**b)** Um wieviel Stunden verschiebt sich der Abschluß der Fertigung?

**12.** Ein Rechteck mit der Seite $b = 12$ mm hat den Flächeninhalt $A = 540\ \text{mm}^2$. Wie lang ist die Seite $a$?

**13.** Zwischen der Länge von senkrecht in der Erde stehenden Stäben und der jeweiligen Länge ihres Schattens besteht bei gleichem Sonnenstand direkte Proportionalität. Eine 3 m hohe Stange wirft um 10 Uhr einen 4 m langen Schatten. Wie hoch ist ein Baum, dessen Schatten zur gleichen Zeit
**a)** 16 m, **b)** 21 m lang ist?

**14.** Eine Douglasie kann bis 800 Jahre alt, bis 100 m hoch und bis 4 m dick werden. Sie ist schlagreif mit etwa 80 Jahren bei 30 m Höhe. Besteht Proportionalität zwischen dem Alter und der Höhe von Douglasien?

**15.** Das Bild C 17 stellt das von einem Lieferwagen zu befahrende Gebiet dar; der Anfangspunkt ist A.

Der Lieferwagen fährt an den einzelnen Wochentagen folgende Routen:

| | |
|---|---|
| Montag: | A – G – B – A |
| Dienstag: | A – G – E – D – B – A |
| Mittwoch: | A – G – F – C – B – A |
| Donnerstag: | A – B – C – B – A |
| Freitag: | A – G – E – D – B – G – A |

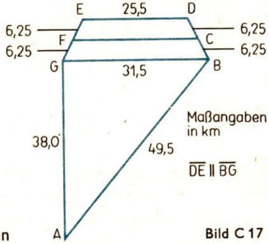



Bild C 17

**a)** Berechne die Längen der Lieferwege an den einzelnen Wochentagen und für die gesamte Woche!
**b)** Der Lieferwagen verbraucht auf einer Strecke von 100 km durchschnittlich 20 l Kraftstoff. Berechne den Kraftstoffverbrauch für die einzelnen Wochentage und die gesamte Woche!
**c)** Die Strecke $\overline{DB}$ kann in annähernd gleichförmiger Bewegung zurückgelegt werden. Die Fahrzeit beträgt 15 min. Wie groß ist die Geschwindigkeit?

# D Planimetrie

## Zur Wiederholung

### 1 Ebene Figuren

Viele Gegenstände kann man gut beschreiben, wenn man einige häufig vorkommende geometrische Figuren kennt (↗ Bild D 1). Man unterscheidet ebene Figuren und nichtebene Figuren.

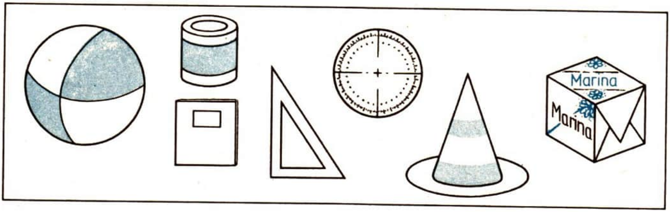
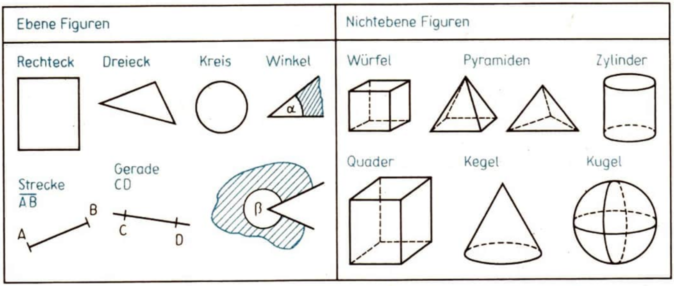



Bild D 1

Liegen alle Punkte einer geometrischen Figur in einer Ebene, so nennt man sie **ebene Figur**. Zum Beispiel sind Dreiecke, Kreise und Rechtecke ebene Figuren, Körper wie Quader und Zylinder dagegen nicht (↗ Bild D 2). Untersucht man Figuren einer Ebene, so spricht man von ebener Geometrie oder **Planimetrie.**[1])

Schon vor 2500 Jahren bezeichneten griechische Gelehrte die Untersuchungen der Lage von Strecken, Winkeln, ebenen Figuren und die Messung ihrer Längen bzw. Flächeninhalte mit dem Wort Geometrie. Sie selbst hatten Kenntnisse aus Ägypten wie auch Mesopotamien (dem Gebiet des heutigen Staates Irak) übernommen. In diesen Ländern traten Jahr für Jahr Überschwemmungen auf, wodurch die Grenzmarkierungen der am Ufer gelegenen Äcker regel-

[1]) Planimetrie (lat.-griech., Flächenmessung); Geometrie (griech., Erdmessung)




mäßig weggespült wurden. Nach dem Rückgang des Hochwassers mußten dann Landvermesser diese Felder unter Berücksichtigung der bestehenden Besitzverhältnisse neu vermessen. So hatten Naturereignisse und die damit verbundene Notwendigkeit der Vermessung von Feldern zur Herausbildung geometrischer Erkenntnisse geführt und im weiteren die wissenschaftliche Arbeit angeregt.

● **1** Der Fußboden eines Zimmers soll vollständig mit Teppichfliesen ausgelegt werden. Die Fliesen sind quadratisch, ihre Seitenlänge beträgt 30 cm (↗ Bild D 3; wegen der besseren Erkennbarkeit wurden die Teppichfliesen stark vergrößert). Wieviel Teppichfliesen werden benötigt?

In der Planimetrie vergleicht man Figuren miteinander. So kann man z. B. zwei der betrachteten Teppichfliesen genau aufeinander legen (sie miteinander zur Deckung bringen).

● **2** Das Bild D 4 zeigt ein Kuchenblech mit Keksen.

**a)** Welche der Kekse lassen sich genau aufeinander legen, also zur Deckung bringen?

**b)** Wieviel verschiedene Formen wurden zum Ausstechen der Kekse verwendet?

In der ebenen Geometrie untersucht man auch Eigenschaften von Figuren.

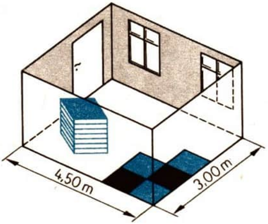



Bild D 3

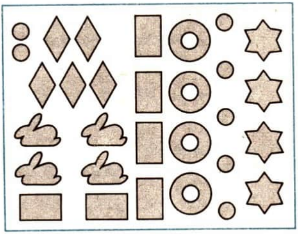


Bild D 4

● 3 **a)** Welche der Figuren im Bild D 4 lassen sich zeichnen, indem man ausschließlich Strecken zeichnet?

**b)** Welche der Figuren im Bild D 4 sind axialsymmetrisch?

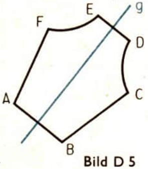


Bild D 5

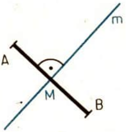


Bild D 6

*Wir wissen:* Eine Figur ist axialsymmetrisch, wenn bei einer Spiegelung an einer geeigneten Geraden diese Figur sich selbst als Bild hat (↗ Bild D 5).
Strecken sind besonders einfache axialsymmetrische Figuren. Die Symmetrieachse $m$ der Strecke $\overline{AB}$ im Bild D 6 schneidet $\overline{AB}$ im Punkt $M$, dem **Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.** Er ist von $A$ und $B$ gleich weit entfernt, d. h., es ist $\overline{AM} = \overline{MB}$. $m$ steht außerdem auf der Geraden $AB$ senkrecht. Man nennt $m$ die **Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.**

● 4 Wieviel Symmetrieachsen hat ein gleichseitiges Dreieck?

## Aufgaben

1. Gib fünf ebene und fünf nichtebene geometrische Figuren an!

2. **a)** Gib die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ im Bild D 7 durch geordnete Zahlenpaare an!
   **b)** Gib ebenso drei Punkte an, die zwischen $A$ und $C$ liegen!
   **c)** Gib zwei Punkte an, die auf $AC$ liegen, aber nicht auf $\overline{AC}$!
   **d)** Miß die Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$!

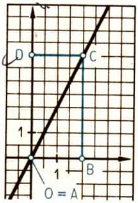


Bild D 7

3. Zeichne Strecken folgender Längen!
   **a)** $\overline{RS} = 5{,}8$ cm **b)** $\overline{KL} = 1{,}35$ dm **c)** $\overline{CD} = 7{,}0$ cm **d)** $\overline{PQ} = 43$ mm

4. Zeichne die Winkel $\alpha = 152°$, $\beta = 41°$, $\gamma = 90°$ und $\delta = 130°$! Welcher dieser Winkel ist ein spitzer, ein stumpfer bzw. ein rechter Winkel?

5. **a)** Zeichne ein Dreieck $ABC$! Zeichne durch $C$ die Parallele zur Geraden $AB$!
   **b)** Zeichne ein Rechteck $ABCD$! Zeichne einen Punkt $P$ so, daß $DP \parallel AC$ ist!

6. Entscheide und begründe für die Figuren im Bild D 8, ob jeweils $M$ Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist!

7. Entscheide und begründe für die Figuren im Bild D 9, ob jeweils $m$ Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ ist!

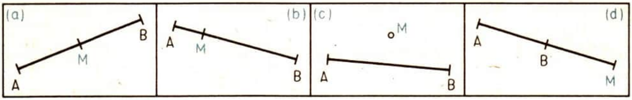



Bild D 8

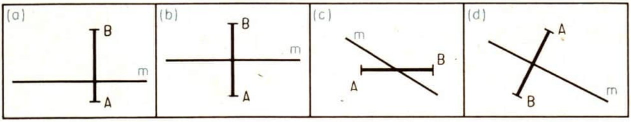



Bild D 9

8. Zeichne eine 6,2 cm lange Strecke $\overline{AB}$ und ihre Mittelsenkrechte *m*!

9. Zeichne einen Kreis mit dem Radius 5,0 cm und Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* auf der Kreislinie! Verbinde jeweils zwei der Punkte durch eine Gerade! Wieviel Geraden hast du gezeichnet?

## 2 Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

Muster auf Tapeten, Teppichen und Wandfliesen erhält man häufig dadurch, daß man die Bilder einer Figur bei Verschiebungen, Spiegelungen bzw. Drehungen aneinanderreiht (↗ Bild D 10).

● 5 Beschreibe, wie man im Bild D 10 jeweils aus der Teilfigur 1 die Teilfigur 2 bzw. die Teilfigur 4 erhalten kann!

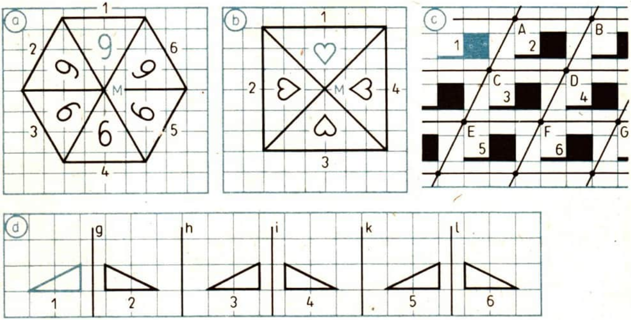



Bild D 10

Die uns bereits bekannten Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen einer Ebene sind Beispiele für **Abbildungen**. Außer Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen gibt es noch andere Abbildungen. Durch das Licht einer Lampe werfen Gegenstände Schatten. Im Bild D 11 ist der Schatten des Spaziergängers sein Bild bei einer Abbildung, die man **Projektion** nennt.

Bild D 11

● 6 Beschreibe für das Bild D 12, wie du die Bilder der Eckpunkte finden würdest
**a)** vom 5-Eck *ABCDE* bei der Spiegelung an der Geraden *g*,
**b)** vom Rechteck *ABCD* bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$,
**c)** vom Quadrat *ABCD* bei der Drehung um *M* um 90°!

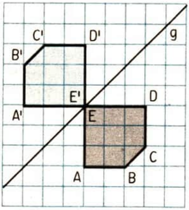



Bild D 12a

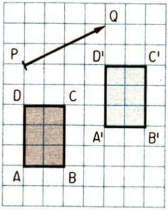



Bild D 12b

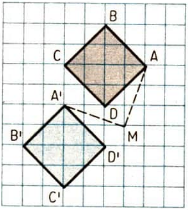



Bild D 12c

Bei einer **Verschiebung** sind alle Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, ... gleich lang und gleich gerichtet.
Bei der **Spiegelung** an einer Geraden *g* ist *g* Mittelsenkrechte zu jeder Strecke $\overline{PP'}$ (falls *P* nicht zu *g* gehört), und für jeden Punkt *Q* von *g* ist $Q' = Q$.
Bei der **Drehung** um einen Punkt *M* mit dem Drehwinkel $\alpha$
- ist jeder Punkt *P* und sein Bild *P'* vom Drehzentrum *M* gleich weit entfernt ($\overline{MP} = \overline{MP'}$),
- hat der Winkel, der vom Strahl *MP* bei Linksdrehung bis zur Lage des Strahls *MP'* überstrichen wird, die Größe $\alpha$,
- und es ist $M' = M$.

● 7 **a)** Ermittle das Bild des Sechsecks *ABCDEF* (↗ Bild D 13) bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$! Ergänze in der zugehörigen Tabelle die fehlenden Zahlenpaare!

| Punkt | Bildpunkt |
|---|---|
| *P* (2; 7) | *Q* (6; 10) |
| *A* ( ) | *A'* (6; 5) |
| *B* ( ) | *B'* ( ) |
| ... | ... |

**b)** Verfahre entsprechend für Bild D 14 und die Drehung um 90° um *M*!

**c)** Verfahre entsprechend für das Bild D 15 und die Spiegelung an *g*!

▶ 1

> **SATZ: Bei Spiegelungen (Verschiebungen, Drehungen) hat**
> **(1) jeder Punkt *X* genau einen Bildpunkt *X'* und**
> **(2) jeder Punkt *Y'* genau einen Originalpunkt *Y*.**

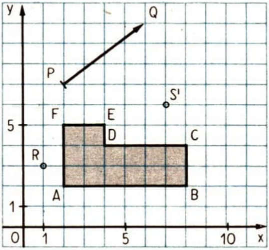



Bild D 13

Wegen der Eigenschaft (1) nennt man Spiegelungen (Verschiebungen, Drehungen) auch **eindeutige Abbildungen**. Die Eigenschaft (2) drückt aus, daß auch umgekehrt jeder Punkt *Y'* Bild von genau einem (Original-) Punkt *Y* ist. Nicht alle Abbildungen haben beide Eigenschaften. So ist die Projektion (↗ Bild D 11) zwar eine eindeutige Abbildung (jeder Stelle des Geländers, des Spaziergängers, ... entspricht genau eine Stelle des Schattens), aber umgekehrt ist fast jeder Punkt des Schattens Bild von mehreren Stellen des Geländers bzw. des Spaziergängers. Die Projektion hat deshalb nicht die Eigenschaft (2); sie ist nicht **umkehrbar eindeutig** (nicht „eineindeutig").

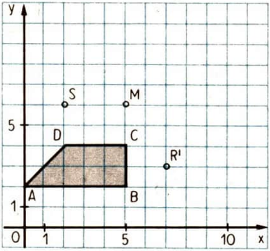



Bild D 14

## Aufgaben

**1.** Gib die Koordinaten der Bildpunkte von *A*, *B*, *C*, *D*, *E* und *F* aus dem Bild D 16 bei folgenden Abbildungen an!

**a)** Spiegelung an *g*

**b)** Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$

**c)** Drehung um *C* um 90°

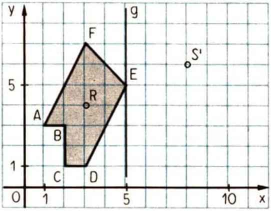



Bild D 15

**2.** Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte *A* (2; 1), *B* (4; 2), *C* (5; 6), *D* (1; 7), *E* (8; 1) und *F* (8; 8)! Ermittle das Bild des Vierecks *ABCD* bei den folgenden Abbildungen!

**a)** Verschiebung $\overrightarrow{AC}$

**b)** Spiegelung an *EF*

**c)** Drehung um *C* um 90°

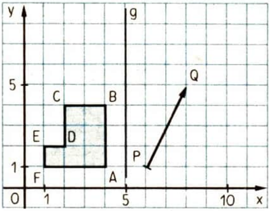



Bild D 16

3. Zeichne ein Quadrat *ABCD* mit einer Seitenlänge von 3,0 cm! Ermittle das Bild des Quadrates bei den folgenden Abbildungen!
   **a)** Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ **b)** Drehung um *B* um 100°
   **c)** Spiegelung an der Geraden *g*, die durch *A* geht und parallel zu *BD* ist.

4. Zeichne ein Dreieck *EFG* mit einem rechten Winkel bei *E*! Zeichne das Bild des Dreiecks bei den folgenden Abbildungen!
   **a)** Verschiebung $\overrightarrow{EF}$ **b)** Drehung um *E* um 150°
   **c)** Spiegelung an der Geraden *h*, die durch *E* geht und parallel zu *FG* ist.

## 3 Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

● 8 Entscheide für das Bild D 17 a–c jeweils, ob eine Drehung, Verschiebung oder Spiegelung vorliegt!

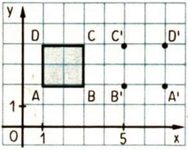



Bild D 17a

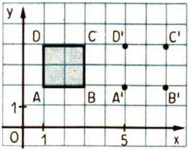



Bild D 17b

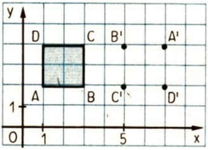



Bild D 17c

Das Bild eines Vierecks bei einer Verschiebung, Drehung oder Spiegelung können wir bekanntlich zeichnen, wenn wir die Bilder der Eckpunkte des Vierecks kennen (wie z. B. im Bild D 17), denn es gilt:

▶ 2 **SATZ: Bei jeder Verschiebung, Drehung und Spiegelung ist das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{A'B'}$.**
**Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ sind gleich lang.**

Bei der Konstruktion von Bildfiguren kann man aber auch andere Eigenschaften dieser Abbildungen ausnutzen.

● 9 Ute hat das Bild des Dreiecks *ABC* bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ gezeichnet (↗ Bild D 18). Wie hat sie *B'* gefunden? Welche Eigenschaften der Verschiebung hat sie verwendet?

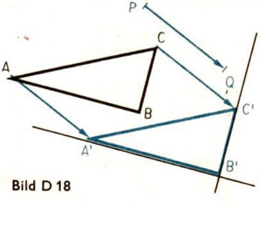



Bild D 18

Die betrachteten Abbildungen haben einige Eigenschaften gemeinsam.

● 10 Welche der folgenden Eigenschaften haben Verschiebungen, Drehungen bzw. Spiegelungen? Welche Eigenschaften haben sie gemeinsam? Betrachte dazu das Bild D 19!

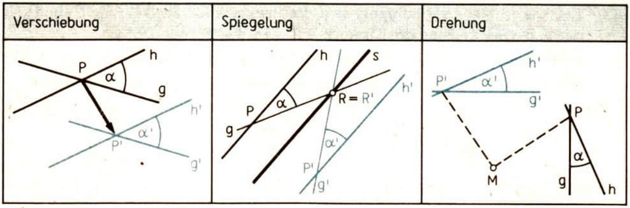



Bild D 19

(1) Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade.
(2) Jede Gerade ist zu ihrer Bildgeraden parallel.
(3) Sind Geraden $g$ und $h$ zueinander parallel, so sind auch ihre Bildgeraden $g'$ und $h'$ zueinander parallel.
(4) Jeder Winkel $\alpha$ hat als Bild einen zu ihm gleich großen Winkel $\alpha'$.
(5) Sind Geraden $g$ und $h$ zueinander senkrecht, so sind auch ihre Bildgeraden $g'$ und $h'$ zueinander senkrecht.
(6) Jede Gerade ist zu ihrer Bildgeraden senkrecht.

## Aufgaben

1. Zeichne die Punkte $A\,(2;1)$, $B\,(5;1)$, $C\,(5;4)$ und $D\,(3;4)$ in ein Koordinatensystem! Gibt es eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung, für die folgendes gilt?
**a)** $A'\,(6;2)$, $B'\,(9;2)$ **b)** $A'\,(2;3)$, $C'\,(3;4)$
**c)** $B'\,(6;1)$, $D'\,(8;4)$ **d)** $C'\,(5;4)$, $D'\,(5;6)$

2. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm! Konstruiere das Bild von $ABCD$ bei den folgenden Abbildungen und begründe jeweils dein Vorgehen!
**a)** Spiegelung an $AC$ **b)** Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ **c)** Drehung um $A$ mit dem Drehwinkel 90°

3. Stadtwappen sind oft axialsymmetrische Figuren. Das Bild D 20 zeigt eine Hälfte des Wappens von Saßnitz.
Zeichne das vollständige Wappen in dein Heft! Was stellt es dar? Welche Eigenschaften der Spiegelung hast du verwendet?

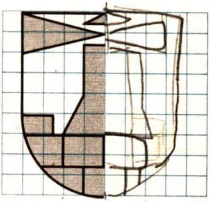


Bild D 20

4. Welche der folgenden Eigenschaften haben Verschiebungen, Spiegelungen bzw. Drehungen? Welche Eigenschaft haben sie gemeinsam?
(1) Das Bild eines Strahls ist stets ein Strahl.

(2) Das Bild eines Kreises ist stets ein Kreis.
(3) Es gibt eine Gerade, die auf sich selbst abgebildet wird.
(4) Es gibt Punkte, die sich selbst als Bild haben.

5. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A\ (3;\ 4)$, $B\ (1;\ 3)$, $C\ (4;\ 1)$, $D\ (6;\ 2)$ und $E\ (6;\ 6)$! Zeichne das Dreieck $ABC$ und die Gerade $DE$!
Ermittle das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks $ABC$ bei der Spiegelung an der Geraden $DE$!
Ermittle danach das Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{DE}$!
Vergleiche die Dreiecke $ABC$ und $A''B''C''$ miteinander!

## Bewegung und Kongruenz

### 4 Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

● 11 Beschreibe, wie man im Bild D 21 die Teilfigur 1 abbilden kann auf die Teilfigur
**a)** 3, **b)** 5, **c)** 6!

Im Bild D 21 findet man keine Spiegelung, Verschiebung oder Drehung, die die Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 abbildet. Führt man jedoch die Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ und die Spiegelung an $m$ nacheinander aus, dann wird die Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 abgebildet.

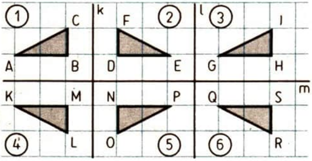



Bild D 21

| Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ | | Spiegelung an $m$ | | Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ und der Spiegelung an $m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkt | Bildpunkt | Punkt | Bildpunkt | Punkt | Bildpunkt |
| $A$ | $G$ | $G$ | $Q$ | $A$ | $Q$ |
| $B$ | $H$ | $H$ | $S$ | $B$ | $S$ |
| $C$ | $I$ | $I$ | $R$ | $C$ | $R$ |

Durch Nacheinanderausführung von Spiegelungen, Verschiebungen oder Drehungen erhält man Abbildungen, die auch jedem Punkt eindeutig einen Bildpunkt zuordnen und die ebenfalls umkehrbar eindeutig sind.

● **12** Nenne jeweils das Bild der Punkte *A*, *B*, *C* und *D* (↗ Bild D 22) bei der Nacheinanderausführung **a)** der Verschiebung $\overrightarrow{AE}$ und der Spiegelung an *g*, **b)** der Spiegelung an *g* und der Verschiebung $\overrightarrow{AE}$! Lege jeweils eine Tabelle an! Was stellst du fest?

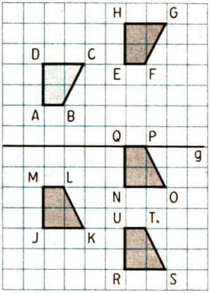


Bild D 22

## Aufgaben

**1.** Beschreibe für die Bilder D 23 a–c, wie durch Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen die Figur *U* jeweils auf die Figur *V* abgebildet werden kann! Lege Tabellen an!

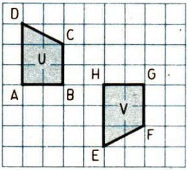


Bild D 23a

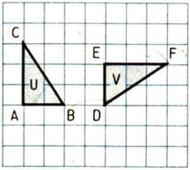


Bild D 23b

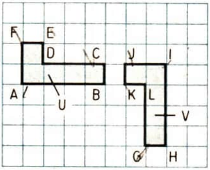


Bild D 23c

**2.** Zeichne die Punkte *A* (1; 1), *B* (3; 1), *C* (1; 4), *D* (3; 3), *E* (5; 1) und *F* (5; 6) in ein Koordinatensystem!
Ermittle das Bild des Dreiecks *ABC* bei der folgenden Abbildung! Lege Tabellen an!

**a)** Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AD}$ und der Spiegelung an *EF*

**b)** Nacheinanderausführung der Spiegelung an *EF* und der Verschiebung $\overrightarrow{AD}$

**3.** Zeichne unter Benutzung der Lochschablone die Punkte *P* (4), *Q* (5), *R* (10), *S* (14) und *T* (15)! Zeichne das Bild des Dreiecks *PQR* bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung an *ST* und der Verschiebung $\overrightarrow{QR}$!

**4.*** Beschreibe, wie durch Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen
**a)** das Fünfeck $F_1$ auf das Fünfeck $F_3$ (↗ Bild D 24),
**b)** das Viereck $F_1$ auf das Viereck $F_4$ (↗ Bild D 25)
abgebildet wird! Lege jeweils eine Tabelle an!

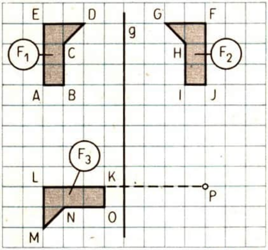



Bild D 24

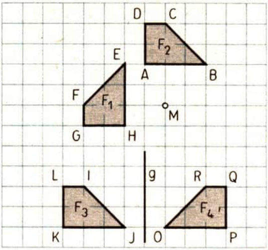



Bild D 25

## 5 Bewegung und Kongruenz von Figuren

*Wir kennen* **(1)** Verschiebungen, **(2)** Spiegelungen, **(3)** Drehungen und **(4)** Abbildungen, die man erhält, wenn man Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen nacheinander ausführt.

Wendet man eine der Abbildungen (1) bis (4) auf eine Figur $F$ an, dann sieht die Bildfigur $F'$ genauso aus wie die Originalfigur $F$. Würde man $F$ ausschneiden, dann könnte $F$ mit $F'$ zur Deckung gebracht werden.

Entsprechenden Sachverhalten begegnen wir im täglichen Leben:

Fahrbahnmarkierungen werden mit Hilfe von Schablonen aufgetragen. Für gleichartige Markierungen braucht man die Schablone nur auf der Fahrbahn zu bewegen.

Beim Zuschneiden der Stoffteile für eine Jacke braucht man für die Vorderteile und die Ärmel jeweils nur ein Schnittmuster (↗ Bild D 26). Warum?

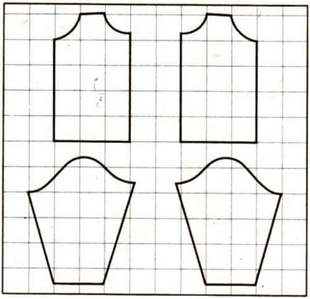


Bild D 26

In der Mathematik nennt man die Abbildungen (1), (2), (3) und (4) Bewegungen. Ferner legt man fest:

▶ 3

**DEFINITION: Eine Figur $F_1$ heißt kongruent (deckungsgleich) zu einer Figur $F_2$, wenn es eine Bewegung gibt, die $F_1$ auf $F_2$ abbildet.**

Man schreibt dafür kurz $F_1 \cong F_2$ (lies: $F_1$ ist kongruent zu $F_2$).

■ **1** Für die Figuren im Bild D 27 gilt beispielsweise:

**a)** Figur 2 $\cong$ Figur 4, denn die Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ bildet die Figur 2 auf die Figur 4 ab (es gibt also eine Bewegung, die Figur 2 auf Figur 4 abbildet).

**b)** Figur 2 $\cong$ Figur 8, denn die Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ und der Spiegelung an $m$ bildet die Figur 2 auf die Figur 8 ab.
Ähnlich kann begründet werden, daß Figur 4 $\cong$ Figur 2 und Figur 8 $\cong$ Figur 2 ist.

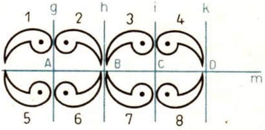



**Bild D 27**

Allgemein gilt: Wenn $F_1 \cong F_2$, so auch $F_2 \cong F_1$. Man liest deshalb $F_1 \cong F_2$ auch „$F_1$ und $F_2$ sind einander kongruent".

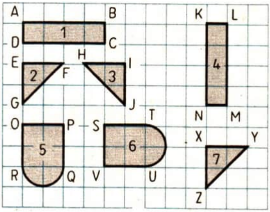



**Bild D 28**

● **13** **a)** Begründe, daß im Bild D 27 die Figuren 1 und 7 (1 und 8; 2 und 7) einander kongruent sind!

**b)** Welche der Figuren im Bild D 28 sind einander kongruent? Gib zugehörige Bewegungen an!

**Bild D 30**

Wir haben nur Bewegungen einer Ebene kennengelernt. Man kann auch räumliche Bewegungen betrachten und die Kongruenz für räumliche Figuren erklären.

Industrieroboter (↗ Bild D 29) müssen ein bestimmtes Bauteil $F$ millimetergenau an die dafür vorgesehene Stelle $F'$ bringen. Dazu muß dieses Bauteil beispielsweise im Raum verschoben und gedreht werden. Zur Herstellung gleichartiger Trinkgläser, Vasen, Gehwegplatten, Autoteile usw. verwendet man in der Industrie oft vorgefertigte Formen (↗ Bild D 30).

Mit räumlichen Bewegungen und räumlicher Kongruenz werden wir uns nicht befassen. Im weiteren wollen wir untersuchen, wie man schnell und sicher erkennen kann, ob zwei gegebene ebene Figuren zueinander kongruent sind oder nicht.

## Aufgaben

**1.** Gib Bewegungen an, bei denen die Figuren 2 bis 6 Bilder der Figur 1 sind (↗ Bild D 31)!

**2.** **a)** Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $A$ (8), $B$ (10), $C$ (15), $D$ (14) und $E$ (18)! Zeichne das Rechteck $ABCD$!

**b)** Ermittle das Bild von $ABCD$ bei der Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ und der Spiegelung an $DE$!

**c)** Vergleiche $ABCD$ mit der Bildfigur!

**3.** Im Bild D 32 gilt jeweils $F_1 \cong F_2$. Begründe!

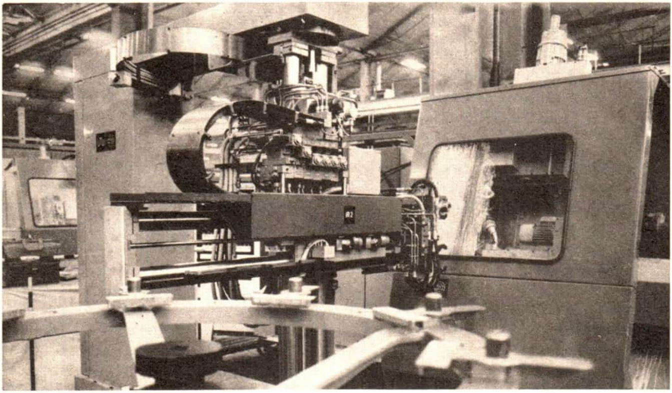


Bild D 29 Industrieroboter in der Berliner Werkzeugmaschinenfabrik Marzahn

4 a) Welche Figur im Bild D 33 ist kongruent zum Viereck 1?
b) Welche Bewegung bildet das Viereck 1 auf diese Figur ab? Überlege vorher, welcher Punkt das Bild des Punktes *A* (*B*, *C*, *D*) sein wird!
c) Löse die Aufgabe für Figur 3!

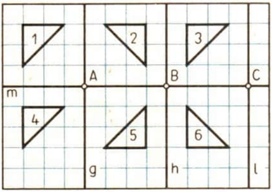



Bild D 31

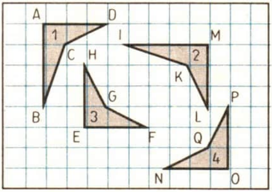



Bild D 33

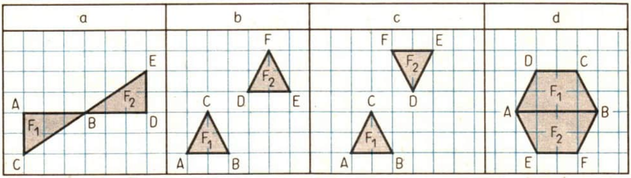



Bild D 32

## 6 Eigenschaften von Bewegungen

In der Lerneinheit D 3 haben wir gemeinsame Eigenschaften der Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen kennengelernt:

– Jede Strecke hat als Bild eine gleich lange Strecke.
– Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind parallele Geraden.

Bewegungen haben diese Eigenschaften auch.

● **14** Prüfe, ob folgende Eigenschaften für jede Bewegung gelten!
   **a)** Die Bildgeraden zweier zueinander senkrechter Geraden sind stets zueinander senkrecht.
   **b)** Eine Strecke und ihr Bild sind stets zueinander parallel.

Wenn wir das Bild einer Figur bei einer Bewegung konstruieren, nutzen wir Eigenschaften dieser Bewegungen aus.

■ **2** Gesucht ist das Bild des Rechtecks *ABCD* bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung an *g* und der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ (↗ Bild D 34). Nach der Abbildungsvorschrift braucht man z. B. nur *A″*, *B″* und *C″* zu ermitteln, denn *D″* ist der Schnittpunkt der Parallelen zu *B″C″* durch *A″* und der Parallelen zu *A″B″* durch *C″*.

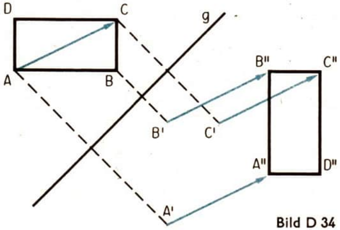


Bild D 34

● **15** Im Beispiel D 2 würde es genügen, nur *A″* und *B″* nach der Abbildungsvorschrift zu konstruieren. Wie könnte man dann vorgehen?

Mit Hilfe gemeinsamer Eigenschaften aller Bewegungen kann man oft schnell feststellen, daß zwei gegebene Figuren nicht kongruent zueinander sein können. Dazu ist zu überlegen, daß es keine Bewegung gibt, die eine der Figuren auf die andere abbildet.

■ **3** Es soll begründet werden, daß die Rechtecke $F_1$ und $F_2$ im Bild D 35 einander nicht kongruent sind. Die Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ sind gleich lang. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ (bzw. $\overline{CD}$ und $\overline{GH}$) sind jedoch nicht gleich lang. Es kann also keine Bewegung geben, die $F_1$ auf $F_2$ abbildet.

Bild D 36

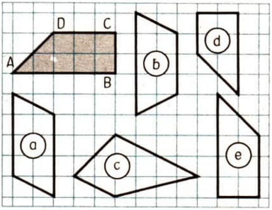
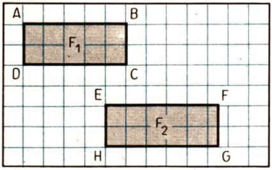



Bild D 35



● **16** Untersuche, welche der Vierecke (a) bis (e) Bild des Trapezes $ABCD$ bei einer Bewegung sind (↗ Bild D 36)! Begründe!

Strecken und Winkel sind spezielle Figuren. Für Strecken haben wir festgestellt:

*Bei einer Bewegung hat jede Strecke als Bild eine zu ihr gleich lange Strecke.*

Umgekehrt gilt auch:

*Wenn zwei Strecken gleich lang sind, dann gibt es stets eine Bewegung, die die eine Strecke auf die andere abbildet.*

Dafür können wir nun auch sagen:

▶ 4 **SATZ: Einander kongruente Strecken sind gleich lang, und gleich lange Strecken sind einander kongruent.**

Als Lösung der Aufgabe „Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = a = 3$ cm!“ kann man viele Strecken dieser Länge zeichnen, aber alle diese Strecken sind einander kongruent.
Ebenso gilt für Winkel:

▶ 5 **SATZ: Einander kongruente Winkel sind gleich groß, und gleich große Winkel sind einander kongruent.**

Bei zwei gegebenen Strecken bzw. Winkeln kann man demnach auch durch Messen feststellen, ob sie einander kongruent sind oder nicht.
Auch für andere Figuren kann man solche Entscheidungshilfen („Kriterien“) finden. Beispielsweise sind zwei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 3$ cm immer kongruent zueinander. Für gleichseitige Vierecke (Fünfecke, Sechsecke, ...) gilt das jedoch nicht immer (↗ Bild D 37).

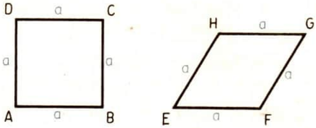



Bild D 37

## Aufgaben

**1.** Im Bild D 38 ist $g \parallel h$. Ermittle das Bild $D$ des Punktes $B$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$! Begründe dein Vorgehen! Gib mehrere Möglichkeiten an!

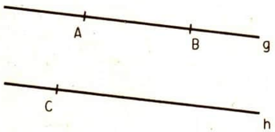



Bild D 38

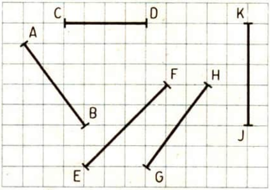



Bild D 39

2. a) Welche Strecke im Bild D 39 ist zur Strecke $\overline{AB}$ kongruent? Begründe deine Behauptung!
   b) Welche Strecken sind länger (kürzer) als $\overline{AB}$? Lege eine Tabelle an!

3. $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien Strecken gleicher Länge, und es gelte $AB \parallel CD$. Nenne mehrere Bewegungen, die $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ abbilden!

4. Gib Eigenschaften an, die zwar für jede Verschiebung gelten, jedoch nicht für jede Bewegung!

5. Begründe mit Hilfe der nachfolgend zusammengestellten Eigenschaften von Bewegungen die folgenden Aussagen!
   a) Die Bilder von zueinander senkrechten Strecken sind wieder senkrecht zueinander.
   b) Ist $g$ Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, so ist $g'$ Mittelsenkrechte der Bildstrecke $\overline{A'B'}$.

## Zusammenfassung

**Bewegung** nennt man jede Verschiebung, Drehung bzw. Spiegelung sowie jede Nacheinanderausführung derartiger Abbildungen.

Zwei Figuren $F_1$ und $F_2$ heißen **kongruent zueinander** ($F_1 \cong F_2$), wenn es eine Bewegung gibt, die $F_1$ auf $F_2$ abbildet.

### Eigenschaften der Bewegungen

| **Original** | **Bild** |
|---|---|
| Gerade $g = AB$ | Gerade $g' = A'B'$ |
| Strecke $\overline{AB}$ | Strecke $\overline{A'B'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ |
| Winkel $\alpha$ | Winkel $\alpha'$; $\alpha = \alpha'$ |
| Geraden $g$ und $h$, $g \parallel h$ | Geraden $g'$ und $h'$, $g' \parallel h'$ |
| Geraden $g$ und $h$, $g \perp h$ | Geraden $g'$ und $h'$, $g' \perp h'$ |
| Dreieck bzw. Viereck $F$ | Dreieck bzw. Viereck $F'$ |
| Kreis $K$ um $M$ mit dem Radius $r$ | Kreis $K'$ um $M'$ mit dem Radius $r'$ |

## Beziehungen zwischen Winkeln

# 7 Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Gehen von einem Punkt zwei Strahlen aus, so gibt es zwei Winkel, die diese Strahlen als Schenkel haben (↗ Bild D 40). Ist nichts anderes vermerkt, so wollen wir künftig stets Winkel betrachten, die kleiner als 180° sind. Solche Winkel sind bereits durch die Angabe ihrer Schenkel festgelegt. Ist $B$ der Scheitel des Winkels $\alpha$ (↗ Bild D 40 a) und liegt $A$ auf einem seiner Schenkel, $C$ auf dem anderen, so schreibt man für $\alpha$ auch $\sphericalangle\, ABC$ oder $\sphericalangle\, CBA$.

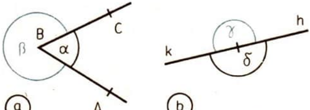



Bild D 40

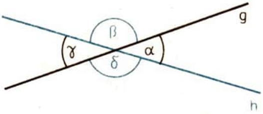



Bild D 41

● 17 Zeichne zwei einander schneidende Geraden $g$ und $h$! Bezeichne wie im Bild D 41 die Winkel und ermittle ihre Größe!

$\alpha$ und $\beta$ heißen **Nebenwinkel**:
$\alpha$ ist Nebenwinkel von $\beta$,
$\beta$ ist Nebenwinkel von $\alpha$.

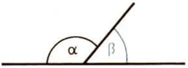



Bild D 42

Zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ mit gemeinsamem Scheitel sind Nebenwinkel, wenn
(1) ein Schenkel von $\alpha$ und ein Schenkel von $\beta$ eine Gerade bilden und
(2) der andere Schenkel von $\alpha$ auch der andere Schenkel von $\beta$ ist.

$\alpha$ und $\gamma$ heißen **Scheitelwinkel**:
$\alpha$ ist Scheitelwinkel von $\gamma$,
$\gamma$ ist Scheitelwinkel von $\alpha$.

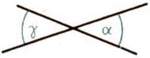



Bild D 43

Zwei Winkel $\alpha$ und $\gamma$ mit gemeinsamem Scheitel sind Scheitelwinkel, wenn jeder Schenkel von $\alpha$ mit einem Schenkel von $\gamma$ eine Gerade bildet.

● 18 **a)** Nenne alle Paare von Winkeln aus dem Bild D 41, die Scheitelwinkel sind!
**b)** Nenne alle Paare von Winkeln aus dem Bild D 41, die Nebenwinkel sind!

▶ 6 **SATZ (Scheitelwinkelsatz): Wenn $\alpha$ und $\gamma$ Scheitelwinkel sind, so ist $\alpha \cong \gamma$.**

● 19 Im Bild D 41 sind $\alpha$ und $\gamma$ Scheitelwinkel, und es gilt $\alpha \cong \gamma$. Somit gibt es eine Bewegung, die $\alpha$ auf $\gamma$ abbildet. Gib eine solche Bewegung an!

▶ 7

> **SATZ (Nebenwinkelsatz): Wenn $\alpha$ und $\beta$ Nebenwinkel sind, so ist $\alpha + \beta = 180°$.**

● 20 **a)** Wie oft muß man im Auftrag D 17 nur messen, wenn man den Nebenwinkelsatz anwendet?

**b)** Prüfe, ob die folgende Aussage wahr ist:
Wenn $\alpha + \beta = 180°$, so sind $\alpha$ und $\beta$ Nebenwinkel!

Vertauscht man in einem Satz die Voraussetzung mit der Behauptung, so spricht man von der **Umkehrung** dieses Satzes. Veranschaulichen wir dies in einer Tabelle:

| | **Voraussetzung** | **Behauptung** |
|---|---|---|
| **SATZ:** | $\alpha$ und $\beta$ sind Nebenwinkel | $\alpha + \beta = 180°$ |
| **UMKEHRUNG:** | $\alpha + \beta = 180°$ | $\alpha$ und $\beta$ sind Nebenwinkel |

Wie das Beispiel zeigt, ist die Umkehrung einer wahren Aussage nicht immer wahr. Deshalb muß stets geprüft werden, ob die Umkehrung gilt.

● 21 Bilde zu den folgenden Aussagen die Umkehrung! Entscheide, welche der erhaltenen Aussagen wahr ist!

**a)** Wenn $x = 3$ und $y = 2$, so $x + y = 5$.

**b)** Wenn $\alpha = 90°$ und $\beta = 90°$, so $\alpha + \beta = 180°$.

**c)** Wenn $4 \mid a$, so $2 \mid a$.

**d)** $g$, $h$, $\alpha$ und $\beta$ liegen zueinander wie im Bild D 41.
Wenn $\alpha$ ein rechter Winkel ist, so ist $\alpha \cong \beta$.

## Aufgaben

1. Begründe, weshalb man die Winkelpaare $(\alpha, \beta)$ und $(\gamma, \delta)$ im Bild D 44 nicht als Nebenwinkel bezeichnen darf!

2. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei **a)** stumpf, **b)** spitz, **c)** ein Rechter. Was für ein Winkel ist jeweils der andere?

3. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei **a)** viermal so groß wie der andere, **b)** fünfmal so groß wie der andere. Gib die Größe jedes dieser Winkel an!

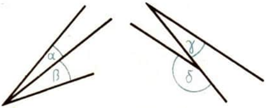



Bild D 44

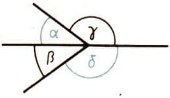



Bild D 45

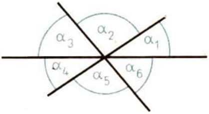



Bild D 46

4. Im Bild D 45 gelte $\alpha \cong \beta$. Was kannst du über $\gamma$ und $\delta$ aussagen?

5. Zeichne einen Winkel $\alpha$ der angegebenen Größe und einen Nebenwinkel $\beta$ von $\alpha$! Gib die Größe von $\beta$ an!

| $\alpha$ | 28° | 74° | 90° | 115° |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | | | | |

6. Zwei Geraden schneiden einander und bilden die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ (↗ Bild D 41).
Die Größe von $\alpha$ ist bekannt. Wie groß sind die anderen Winkel?

| $\alpha$ | 65° | 110° | 135° | 160° |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | | | | |
| $\gamma$ | | | | |
| $\delta$ | | | | |

7. Stelle für das Bild D 46 alle Scheitelwinkelpaare zusammen!

8. **a)** Zeichne einen spitzen Winkel und sein Bild bei der Drehung um seinen Scheitelpunkt um 180°! Was stellst du fest?
**b)** Zeichne einen rechten Winkel und sein Bild bei der Spiegelung an einem seiner Schenkel! Was stellst du fest?

9. Bilde die Umkehrung des Scheitelwinkelsatzes! Prüfe, ob sie wahr ist!

## 8 Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen

● 22 Die Größen der Winkel in den Bildern D 47 und D 48 sollen ermittelt werden. Wie oft muß man dafür wenigstens messen?

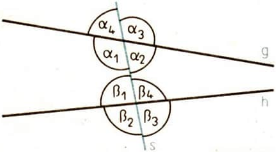


Bild D 47

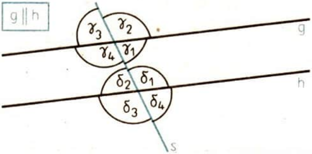


Bild D 48

Die Winkel im Bild D 47 entstehen dadurch, daß zwei Geraden ($g$ und $h$) von einer dritten ($s$) geschnitten werden. Liegen dann zwei der Winkel so zueinander wie $\alpha$ und $\beta$ im Bild D 49 a, so heißen sie **Stufenwinkel**. Außer dem Paar ($\alpha$; $\beta$) gibt es noch drei weitere Paare von Stufenwinkeln im Bild D 49 a. Sie sind entsprechend gekennzeichnet.

● 23 **a)** Bei Stufenwinkeln liegen die Schenkel auf den „geschnittenen Geraden" ($g$ und $h$) auf derselben Seite der „schneidenden Geraden" ($s$). Dies ist auch bei den Winkeln $\gamma$ und $\delta$ im Bild D 49 b der Fall. $\gamma$ und $\delta$ sind jedoch keine Stufenwinkel. Was ist bei ihnen anders als bei $\alpha$ und $\beta$ im Bild D 49 a?
**b)** Gib alle Paare von Stufenwinkeln im Bild D 47 an!

Im Auftrag D 22 muß man beim Bild D 47 mindestens zwei Winkel messen. Bei der Figur im Bild D 48 kommt man jedoch mit einer einzigen Messung aus, denn es gilt der

**Stufenwinkelsatz**: Gegeben sind zwei Stufenwinkel $\alpha$ und $\beta$ mit $g$ und $h$ als geschnittenen Geraden und $s$ als schneidender Geraden.
Wenn $g \parallel h$ ist, so ist $\alpha \cong \beta$.

Bild D 49

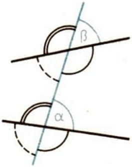



Bild D 49a

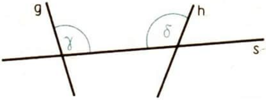



Bild D 49b

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, eine Bewegung anzugeben, die $\alpha$ auf $\beta$ abbildet. Wegen der Parallelität von $g$ und $h$ kann man die Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ anwenden (↗ Bild D 50).

*Voraussetzung:* $g \parallel h$
*Behauptung:* $\alpha \cong \beta$
*Beweis:* Bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ gilt:
$A$ hat als Bild $B$ 
$g$ hat als Bild $h$ } (Eigenschaft der Verschiebung)
$AB$ hat als Bild $AB$ (Gerade in Verschiebungsrichtung)
Also hat $\alpha$ als Bild $\beta$.
Folglich ist $\alpha \cong \beta$, was zu beweisen war.

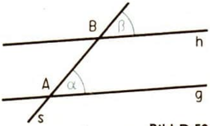



Bild D 50

Wir merken uns den Stufenwinkelsatz in einer Kurzform:

▶ 8 **SATZ: Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.**

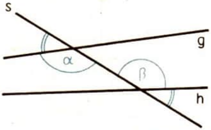



Bild D 51

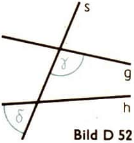



Bild D 52

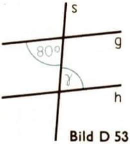



Bild D 53

Liegen zwei Winkel an geschnittenen Geraden so wie $\alpha$ und $\beta$ im Bild D 51, so bezeichnet man sie als **Wechselwinkel**. Insgesamt gibt es auch hier vier Paare, von denen im Bild D 51 noch ein weiteres Paar gekennzeichnet ist.

● 24 **a)** Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen bei Wechselwinkeln auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden. Auch bei den Winkeln $\gamma$ und $\delta$ im Bild D 52 ist dies so. Jedoch ist $(\gamma; \delta)$ kein Wechselwinkelpaar. Was ist hier anders als beim Wechselwinkelpaar $(\alpha; \beta)$ im Bild D 51?

**b)** Im Bild D 53 ist $g \parallel h$. Wie groß ist der Winkel $\gamma$? Begründe! (Hinweis: Benutze dabei den Scheitelwinkel- und den Stufenwinkelsatz!)

Allgemein gilt der **Wechselwinkelsatz**:

Gegeben sind zwei Wechselwinkel $\alpha$ und $\gamma$ mit $g$ und $h$ als geschnittenen Geraden und $s$ als schneidender Gerader.

Wenn $g \parallel h$ ist, so ist $\alpha \cong \gamma$.

Ein Beweis dieses Satzes kann wie die Begründung im Auftrag D 24b) erfolgen:

*Voraussetzung:* $g \parallel h$

*Behauptung:* $\alpha \cong \gamma$

*Beweis:* (↗ Bild D 54)

Aus $g \parallel h$ folgt

(1) $\alpha \cong \beta$ (Stufenwinkelsatz)

(2) $\beta \cong \gamma$ (Scheitelwinkelsatz)

Aus (1) und (2) folgt $\alpha \cong \gamma$, was zu beweisen war.

Wir merken uns den Wechselwinkelsatz in einer Kurzform:

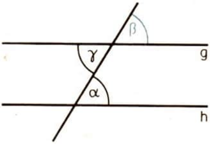



Bild D 54

▶ 9 **SATZ: Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.**

● 25 Bilde die Umkehrung **a)** des Stufenwinkelsatzes, **b)** des Wechselwinkelsatzes! Benutze jeweils die Wenn-so-Form!

▶ 10 **Die Umkehrungen des Stufenwinkel- und des Wechselwinkelsatzes sind wahre Aussagen.**

● 26 Begründe deine Antwort!

**a)** Im Bild D 55 ist $\alpha = \beta = 60°$. Wie liegen die Geraden $g$ und $h$ zueinander?

**b)** Im Bild D 56 ist $\alpha = 70°$ und $\beta = 110°$. Wie liegen $r$ und $s$ zueinander?

**c)** Im Bild D 57 sind $g$ und $h$ zueinander parallel und $\alpha = 55°$. Wie groß sind $\beta, \gamma, \delta$ und $\varepsilon$?

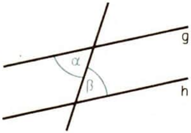



Bild D 55

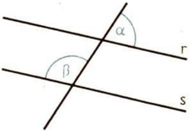



Bild D 56

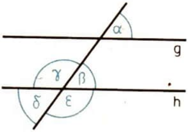



Bild D 57

Die im Bild D 57 gezeichneten Winkel $\alpha$ und $\varepsilon$ nennt man auch **entgegengesetzt liegende Winkel**. Sind $g$ und $h$ parallel zueinander, dann gilt $\alpha + \varepsilon = 180°$.

## Aufgaben

1. Stelle für das Bild D 58 **a)** Stufenwinkelpaare, **b)** Wechselwinkelpaare zusammen!

2. Zeichne ein Dreieck $ABC$! Zeichne die Parallele zu $AB$ durch den Punkt $C$! Kennzeichne **a)** Stufenwinkel, **b)** Wechselwinkel!

**3.** Bezeichne und berechne alle Winkel **a)** im Bild D 59, **b)** im Bild D 60!

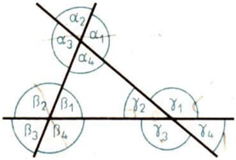



Bild D 58

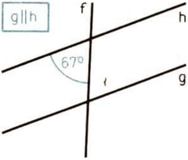



Bild D 59

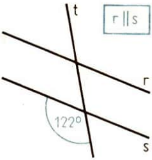



Bild D 60

**4.** Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
**a)** Haben zwei Winkel einen Schenkel gemeinsam, so sind sie Nebenwinkel.
**b)** Haben zwei Winkel einen Scheitel gemeinsam, so sind sie Scheitelwinkel.
**c)** Werden zwei Geraden von einer dritten (in verschiedenen Punkten) geschnitten, so entstehen Stufen- und Wechselwinkel.
**d)** Sind zwei Stufenwinkel gleich groß, so sind die geschnittenen Geraden nicht zueinander parallel.

**5.*** Im Bild D 61 ist $\alpha = 72°$; $\beta$ ist 1,5mal so groß wie jeder seiner Nebenwinkel. Beweise, daß die Geraden $g$ und $h$ zueinander parallel sind!

**6.** Im Bild D 62 ist $\alpha = 100°$; $\gamma$ ist um 20° kleiner als $\beta$. Begründe, daß $a \parallel b$ ist!

**7.** Begründe, daß die Geraden $c$ und $d$ im Bild D 63 parallel sind!

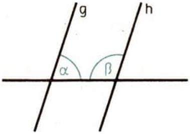



Bild D 61

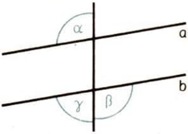



Bild D 62

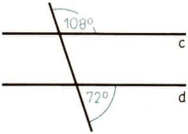



Bild D 63

**8.** Ermittle für die Bilder **a)** D 64, **b)** D 65, **c)** D 66 die Größe von $\alpha$! Begründe!

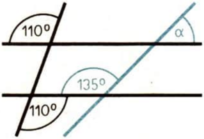



Bild D 64

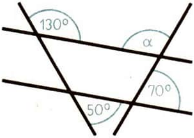



Bild D 65

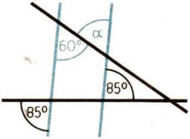
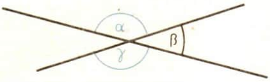
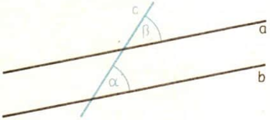
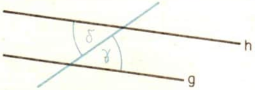



Bild D 66

## Zusammenfassung

| | |
|---|---|
|  | **Scheitelwinkelsatz:** $\alpha \cong \gamma$<br>**Nebenwinkelsatz:** $\alpha + \beta = 180°$ |
|  | **Stufenwinkelsatz:** Wenn $a \parallel b$, so $\alpha \cong \beta$.<br>**Umkehrung des Stufenwinkelsatzes:** Wenn $\alpha \cong \beta$, so $a \parallel b$. |
|  | **Wechselwinkelsatz:** Wenn $g \parallel h$, so $\gamma \cong \delta$.<br>**Umkehrung des Wechselwinkelsatzes:** Wenn $\gamma \cong \delta$, so $g \parallel h$. |

## Dreiecke

In alten Zeiten wurden die Häuser vielfach in Fachwerkbauweise errichtet. Starke Balken, die miteinander verbunden wurden, bildeten ein stabiles Gerüst. Die dabei entstehenden „Fächer“ wurden mit Ziegeln oder auch nur mit Lehm ausgefüllt. Auf diese Weise war es möglich, stabile mehrstöckige Häuser zu errichten. Die Balken wurden so gefügt, daß vor allem an den Häuserecken, an den Giebeln und auch im Mittelteil Dreiecke entstanden; denn Dreiecke verhindern das seitliche Verrutschen der Balkenkonstruktion.
Nicht nur bei Fachwerkhäusern, auch bei Gittermasten, Brücken und anderen Bauwerken sorgen Dreiecke für Stabilität.
Wir wollen uns in den folgenden Lerneinheiten näher mit Dreiecken beschäftigen.

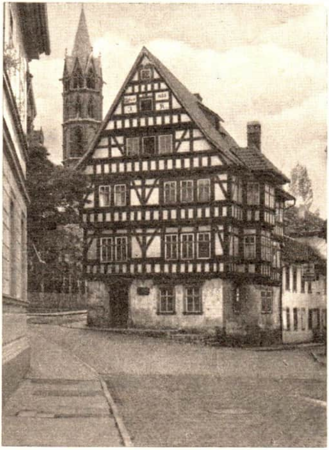


Bild D 67: Altes Fachwerkhaus in Arnstadt/Thüringen

# 9 Einteilung der Dreiecke

Häufig bezeichnet man Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel eines Dreiecks wie im Bild D 68, und man sagt zum Beispiel: „Die Seite *a liegt* dem Winkel $\alpha$ *gegenüber*" oder „Der Winkel $\alpha$ *liegt* der Seite *a gegenüber*" und auch „Der Seite *a liegen* die Winkel $\beta$ und $\gamma$ *an*".

● **27** Nenne **a)** den Scheitelwinkel und **b)** die Nebenwinkel von $\alpha$ im Bild D 68!

Jeder Nebenwinkel eines Innenwinkels eines Dreiecks heißt **Außenwinkel** dieses Dreiecks.

● **28** Nenne alle Außenwinkel des Dreiecks *ABC* (↗ Bild D 68)!

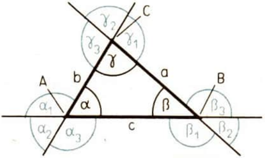


Bild D 68

Wir kennen bereits eine Einteilung der Dreiecke nach den Längen der Seiten.

| **Einteilung der Dreiecke nach den Seiten** | | |
|---|---|---|
| | **gleichschenklig** (ein Paar gleich langer Seiten) | |
| **unregelmäßig** (alle Seiten paarweise verschieden lang) | **nicht gleichseitig** (nicht alle Seiten gleich lang) | **gleichseitig** (alle Seiten gleich lang) |
|  |  |  |

Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist eine Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke, denn jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig (↗ Bild D 69).

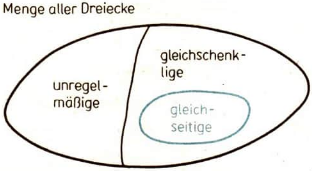


Bild D 69

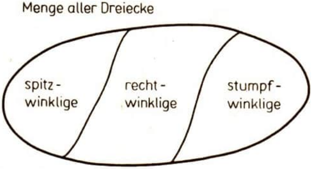
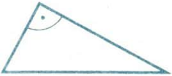
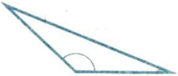


Bild D 70

Man kann die Dreiecke auch nach ihren Winkeln einteilen.
Ein Dreieck ist entweder spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig (↗ Bild D 70).

| Einteilung der Dreiecke nach den Innenwinkeln | | |
|---|---|---|
| spitzwinklig | rechtwinklig | stumpfwinklig |
|  |  |  |
| alle Innenwinkel spitz | ein rechter Innenwinkel | ein stumpfer Innenwinkel |

## Aufgaben

1. Teile die im Bild D 71 dargestellten Dreiecke **a)** nach den Winkeln, **b)** nach den Seiten ein! (Nimm zur Überprüfung der Seitenlängen den Zirkel zu Hilfe!)

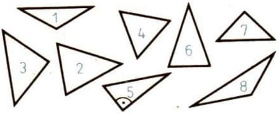



Bild D 71

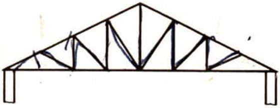


Bild D 72

2. Das Bild D 72 zeigt einen Dachbinder, wie er häufig in Lagerhäusern und Scheunen verwendet wird. Bezeichne die auftretenden Dreiecke und teile sie **a)** nach Seiten, **b)** nach Winkeln ein!

3. Zeichne ein unregelmäßiges rechtwinkliges Dreieck!

4. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
   **a)** Ein rechtwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.
   **b)** Wenn ein Dreieck unregelmäßig ist, so ist es stumpfwinklig.
   **c)** Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es nicht gleichschenklig.
   **d)** Ein stumpfwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.
   **e)** Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist es spitzwinklig.
   **f)** Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist es nicht stumpfwinklig.

5.* Es gibt Dreiecke, die spitzwinklig und unregelmäßig sind. Deshalb steht im ersten Feld der Tabelle „ja". Fülle entsprechend die anderen Felder aus!

| | unregelmäßig | gleichschenklig | gleichseitig |
|---|---|---|---|
| spitzwinklig | ja | | |
| rechtwinklig | | | |
| stumpfwinklig | | | |

6. Bilde die Umkehrung des folgenden Satzes und untersuche, ob sie gilt: *Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichschenklig.*

7.* Aus drei Streichhölzern kann man ein gleichseitiges Dreieck legen.
**a)** Wieviel Streichhölzer benötigt man mindestens für sechs gleichseitige Dreiecke, die zu diesem Dreieck kongruent sind? Lege eine solche Figur! Lege dann 4 Streichhölzer so um, daß vier gleichseitige Dreiecke entstehen, von denen je zwei zueinander kongruent sind!
**b)** Sechs Streichhölzer reichen aus, um vier gleichseitige Dreiecke zu bilden, die zu diesem Dreieck kongruent sind. Wie ist das möglich?

8. Karlheinz sagt: „Ein Dreieck ist spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem, ob sein größter Winkel ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist." Was meinst du dazu?

## 10 Sätze über die Winkel eines Dreiecks

● 29 An eine Hauswand soll eine 3 m lange Leiter gestellt werden. Aus Sicherheitsgründen soll der Anstellwinkel $\alpha$ (↗ Bild D 73) nicht kleiner als 50° und nicht größer als 70° sein.
Wie hoch reicht die Leiter höchstens? Wie groß ist dann der Winkel $\beta$ an der Hauswand?
Ist es möglich, $\beta$ ebenfalls zwischen 50° und 70° zu wählen?
Untersuche diese Fragen anhand einer maßstäblichen Zeichnung!

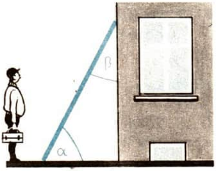


Bild D 73

So wie im rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel nicht unabhängig voneinander wählbar sind, so besteht in jedem Dreieck ein Zusammenhang zwischen den drei Innenwinkeln.[1])

▶ 11 **SATZ (Innenwinkelsatz): In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 180°.**

Wenn man zeigt, daß $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ (↗ Bild D 74) geeignet zusammengesetzt einen gestreckten Winkel ergeben, so ist der Satz bewiesen. $\gamma$ und einer seiner Nebenwinkel ergeben zusammen einen gestreckten Winkel. Diesen Nebenwinkel kann man mittels der Parallelen durch $C$ zu $AB$ in Winkel $\delta$ und $\varepsilon$ zerlegen. Es läßt sich zeigen, daß $\alpha = \varepsilon$ und $\delta = \beta$ ist. Dazu benutzen wir die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen.

[1]) Dieser Zusammenhang war bereits im antiken Griechenland bekannt. Er findet sich zum Beispiel bei Eukleides (365–300 v. u. Z.), heute auch Euklid genannt. Er verfaßte eine ausführliche Darstellung der Mathematik seiner Zeit, die noch im 19. Jahrhundert im Schulunterricht benutzt wurde.

*Voraussetzung:* $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sind Innenwinkel des Dreiecks.
*Behauptung:* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
*Beweis:* Sind $\varepsilon$ und $\delta$ die Winkel, die durch die Parallele entstehen, so gilt:

$\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$ (gestreckter Winkel)
$\delta = \beta$ (Wechselwinkelsatz)
$\varepsilon = \alpha$ (Stufenwinkelsatz)

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, was zu beweisen war.

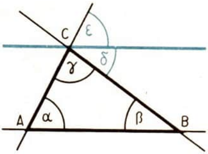


Bild D 74

● 30 Begründe, daß ein Dreieck höchstens einen rechten bzw. höchstens einen stumpfen Innenwinkel haben kann!

Anhand von Bild D 74 kann man auch den nachfolgenden Satz beweisen:

▶ 12 **SATZ (Außenwinkelsatz): Die Größe jedes Außenwinkels eines Dreiecks ist gleich der Summe der Größen der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.**

● 31 Begründe folgende Behauptung! Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

## Aufgaben

1. Berechne für ein Dreieck den dritten Innenwinkel!
**a)** $\alpha = 57°, \beta = 75°$ **b)** $\beta = 23°, \gamma = 109°$ **c)** $\alpha = 90°, \gamma = 43°$

2. Wie groß sind jeweils die Innenwinkel, wenn folgendes bekannt ist?
**a)** $\alpha = 74°$ und $\beta = \gamma$ **b)** $\alpha = 36°$ und $\beta = 2\gamma$ **c)** $\alpha = \beta = \gamma$

3. Wie groß sind die Außenwinkel eines Dreiecks, wenn zwei Innenwinkel bekannt sind?
**a)** $\alpha = 42°, \gamma = 83°$ **b)** $\beta = 77°, \gamma = 59°$ **c)** $\alpha = 21°, \beta = 113°$

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Außenwinkel **a)** 141°, **b)** 127° groß. Wie groß sind die Innenwinkel?

5. Wie groß ist der Winkel *BMD* im Bild D 75a, wenn $AB \parallel CD$ gilt?

6.* Im Bild D 75b ist $\gamma \cong \delta$. Begründe, daß $\alpha \cong \beta$!

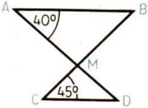


Bild D 75a

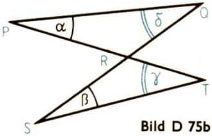


Bild D 75b

7. Berechne alle Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks *ABC*, wenn folgendes gilt:
**a)** $\gamma = 46°; \beta_1 = 73°$, **b)** $\beta = 38°; \alpha_1 = 81°$, **c)** $\alpha_1 = 110°; \gamma = 55°$!

8. In einem Dreieck sei ein Außenwinkel **a)** spitz, **b)** stumpf. Was für Winkel sind dann die anderen Außenwinkel? Begründe!

# 11 Gleichschenklige Dreiecke

● 32 **a)** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck $AMC$ mit $\overline{AM} = 3$ cm, $\overline{MC} = 4$ cm und $\sphericalangle AMC = 90°$!

**b)** Spiegle das Dreieck $AMC$ an der Geraden $MC$! Bezeichne das Bild von $A$ mit $B$! Was für eine Figur erhältst du?

**c)** Begründe, daß $\sphericalangle ACM \cong \sphericalangle MCB$ ist!

*Wir wissen schon:* Gleichschenklige Dreiecke sind axialsymmetrisch (↗ Bild D 76). Die Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte zur Basis. Sie zerlegt den Winkel an der Spitze in zwei kongruente Winkel; sie halbiert ihn.
Allgemein nennt man einen Strahl, der vom Scheitelpunkt eines Winkels ausgeht und diesen halbiert, **Winkelhalbierende** dieses Winkels.

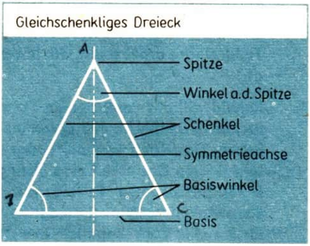


Bild D 76

● 33 Zu den Winkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sind im Bild D 77 die Winkelhalbierenden $l$, $m$ und $n$ gezeichnet. Wie groß sind die Teilwinkel?

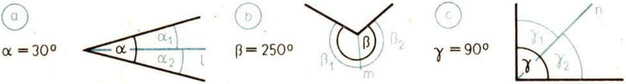


Bild D 77

Weil gleichschenklige Dreiecke axialsymmetrisch sind, sind ihre Basiswinkel kongruent. Das wird häufig benötigt.

▶ 13 **SATZ (Basiswinkelsatz): In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.**

**Gleichseitige Dreiecke** sind auch gleichschenklig. Bei ihnen kann jede Seite als Basis angesehen werden; sie haben sogar drei Symmetrieachsen.

● 34 Begründe, daß in jedem gleichseitigen Dreieck jeder Innenwinkel 60° groß ist!

## Aufgaben

1. Kann ein Außenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks **a)** an der Spitze, **b)** an der Basis ein rechter (spitzer, stumpfer) Winkel sein?

2. Wie groß sind die Außenwinkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks?

3. Berechne jeweils die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks!
a) Basiswinkel: 76° b) Basiswinkel: 29°
c) Winkel an der Spitze: 44° d) Winkel an der Spitze: 108°

4. Begründe, daß bei einem gleichschenkligen Dreieck die Außenwinkel an der Basis gleich groß sind!

5.* In einem gleichschenkligen Dreieck *ABC* ist ein Außenwinkel 150° groß. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Größe der Innenwinkel? Gib sie alle an!

6. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck! Zeichne eine Symmetrieachse ein! Was für Teildreiecke erhältst du? Gib jeweils die Größen der Innenwinkel der Teildreiecke an!

7. Ronald will aus Papier einen Turm mit quadratischer Grundfläche und pyramidenförmigem Dach bauen. Das Dach wird aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt (↗ Bild D 78). Berechne für die folgenden Größen der Basiswinkel die Winkel an der Spitze! Welche sind für Ronalds Vorhaben nicht geeignet?
a) 50° b) 30° c) 70° d) 45°

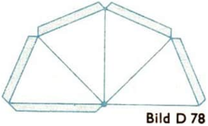


Bild D 78

## 12 Seiten-Winkel-Beziehungen

Der Basiswinkelsatz besagt: Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, so sind die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Es gelten auch die folgenden Sätze:

▶ 14 **SATZ: In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.**

▶ 15 **SATZ: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber.**

● 35 a) Begründe die folgende Aussage! In jedem rechtwinkligen Dreieck ist diejenige Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, länger als jede der beiden anderen Seiten.
b) Welcher Punkt auf der Geraden *g* im Bild D 79 hat von *P* den kleinsten Abstand? Begründe!

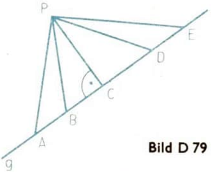


Bild D 79

Die Strecke $\overline{PC}$ im Bild D 79 bezeichnet man als **Lot** von *P* auf *g*, die Länge dieses Lotes heißt **Abstand des Punktes *P* von der Geraden *g*.**

## Aufgaben

1. In einem gleichschenkligen Dreieck $ABC$ ist ein Basiswinkel 50° groß.
   **a)** Berechne die anderen Winkel!
   **b)** Formuliere Aussagen über die Seiten!

2. In einem Dreieck $ABC$ gilt: $\alpha = 30°$, $c = 4$ cm, $b = 5$ cm. Formuliere eine Aussage über $\gamma$ und $\beta$!

3. **a)** In einem Dreieck $ABC$ ist $\alpha = 35°$ und $\beta = 105°$. Ermittle $\gamma$! Formuliere Aussagen über die Seiten!
   **b)** In einem Dreieck $ABC$ gilt $a = b = 5$ cm und $c = 6$ cm. Vergleiche die Innenwinkel miteinander!
   Welche Sätze hast du zur Lösung benutzt?

4. **a)** In einem gleichschenkligen Dreieck $ABC$ ist $\alpha = 45°$. Formuliere Aussagen über die Winkel und Seiten!
   **b)** In jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist jeder der beiden Basiswinkel 45° groß. Begründe diese Aussage!

5. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks $ABC$ ist 120° groß. Was für ein Dreieck ist das?

6. Bilde die Umkehrung des Basiswinkelsatzes! (Benutze die Wenn-so-Form auf Seite 156!) Ist sie wahr?

7. Ergänze die folgende Tabelle!

| Dreieckswinkel | | | Seitenbeziehung | | | Dreiecksarten nach | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $a \gtreqless b$ | $a \gtreqless c$ | $b \gtreqless c$ | Winkeln | Seiten |
| 72° | 65° | | | | | | |
| | 75° | 30° | | | | | |
| 31° | | 59° | | | | | |
| | 100° | | | | | | gleichschenklig |
| | | | | | | | gleichseitig |
| 56° | | | | $a = c$ | | | |

8. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $A$ (6), $B$ (7) und $C$ (12)! Ermittle den Abstand des Punktes $B$ von der Geraden $AC$!

9. Untersuche, ob folgende Aussagen gelten!
   **a)** Wenn in einem Dreieck der Winkel $\alpha$ größer ist als der Winkel $\beta$, dann ist auch $a$ größer als $b$.
   **b)** Wenn in einem Dreieck der Winkel $\alpha$ doppelt so groß ist wie $\beta$, dann ist auch $a$ doppelt so groß wie $b$.

# 13 Dreiecksungleichung

● **36** Eine Warenlieferung von Arlsheim nach Carlsburg kann über Biendorf oder Duserow erfolgen (↗ Bild D 80).

**a)** Welche Möglichkeit wird der Kraftfahrer wohl wählen? Begründe!

**b)** Wie müßte eine Straße gebaut werden, damit der Weg möglichst kurz ist?

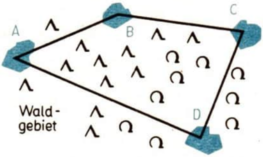



Bild D 80

Sind $a$, $b$ und $c$ die Längen der Seiten eines Dreiecks, so gelten folgende Ungleichungen:
$a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a.$

▶ **16** **SATZ (Dreiecksungleichung): In jedem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.**

## Aufgaben

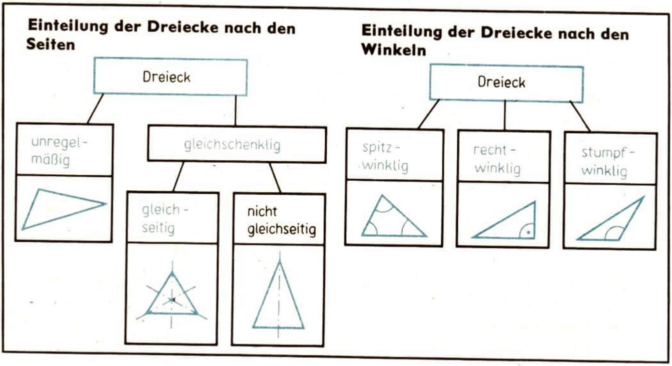
**1.** Gibt es Dreiecke mit folgenden Seitenlängen?

**a)** $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm
**b)** $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $c = 4$ cm
**c)** $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6$ cm
**d)** $a = 4$ cm, $b = 9$ cm, $c = 3$ cm

**2.** Gib für die dritte Seite eine Länge so an, daß die Dreiecksungleichungen erfüllt sind!

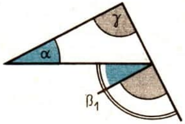
**a)** $a = 3{,}2$ cm; $b = 7{,}5$ cm **b)** $a = 3{,}8$ cm; $c = 3{,}8$ cm **c)** $c = 2{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm

## Zusammenfassung

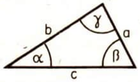


**Innenwinkelsatz:** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

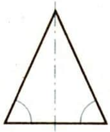

**Außenwinkelsatz:** $\beta_1 = \alpha + \gamma$

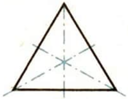



**Dreiecksungleichung:**
$a + b > c$, $a + c > b$, $c + b > a$




**Winkel-Seiten-Beziehung:**
Wenn $a > b$, so $\alpha > \beta$,
wenn $\alpha > \beta$, so $a > b$.
**Basiswinkelsatz:**
Wenn $a = b$, so $\alpha = \beta$.
**Umkehrung des Basiswinkelsatzes:**
Wenn $\alpha = \beta$, so $a = b$.





## Kongruenz von Dreiecken

### 14 Ausführbarkeit von Konstruktionen

Bei jeder Konstruktion soll die erhaltene Figur vorgegebene Eigenschaften haben. Als Hilfsmittel für das Konstruieren verwenden wir Zirkel, Lineal, Zeichendreiecke und Winkelmesser.

● **37** Konstruiere Rechtecke *ABCD* mit folgenden Eigenschaften:
**a)** $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm,
**b)** $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm; $\overline{BC} = b = 3{,}0$ cm,
**c)** $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm; $\overline{BC} = b = 3{,}0$ cm; $\overline{AC} = e = 4{,}5$ cm!

Ist eine Konstruktion überhaupt ausführbar, so kann man zwei Fälle unterscheiden:
- Zwei konstruierte Figuren sind stets kongruent zueinander. Man nennt dann die Konstruktion eindeutig ausführbar.
- Es lassen sich Figuren konstruieren, die nicht zueinander kongruent sind. Die Konstruktion ist zwar ausführbar, aber nicht eindeutig ausführbar.

■ 4 Es ist ein Dreieck $ABC$ zu konstruieren, dessen Seite $\overline{AB}$ eine Länge von 4 cm und dessen Winkel $\alpha$ eine Größe von 30° haben soll.
Ein solches Dreieck können wir folgendermaßen konstruieren (↗ Bild D 81):

1. Wir zeichnen eine 4 cm lange Strecke und bezeichnen die Endpunkte mit $A$ beziehungsweise $B$.
2. Wir tragen an den Strahl $AB$ einen Winkel von 30° an.
3. Auf dem zweiten Schenkel dieses Winkels wählen wir einen Punkt $C$.

Das Dreieck $ABC$ hat die verlangten Eigenschaften.

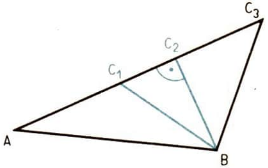



Bild D 81

Die im Beispiel D 4 geforderte Konstruktion ist nicht eindeutig ausführbar, denn es lassen sich Dreiecke zeichnen, die nicht zueinander kongruent sind.
Wenn nur eine Seite und ein dieser Seite anliegender Winkel gegeben sind, läßt sich ein Dreieck nicht eindeutig konstruieren.

● 38 Begründe mit Hilfe des Bildes D 82, daß sich ein Dreieck auch dann nicht eindeutig konstruieren läßt, wenn folgendes gegeben ist:
**a)** zwei Seiten, **b)** zwei Winkel, **c)** eine Seite und der gegenüberliegende Winkel!

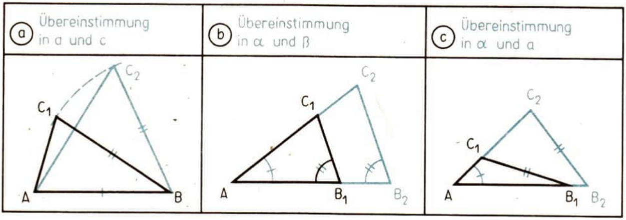



Bild D 82

**Ein Dreieck ist mit zwei gegebenen Stücken nicht eindeutig konstruierbar.**

## Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe von Lineal und Winkelmesser folgende Figuren:
   **a)** ein Dreieck $ABC$ mit $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$,
   **b)** ein Dreieck $ABC$ mit $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$,
   **c)** ein gleichseitiges Dreieck,
   **d)** ein Rechteck $ABCD$, bei dem $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie $\overline{BC}$,
   **e)** eine Strecke $\overline{PQ} = 4$ cm und ihre Mittelsenkrechte!

   Überlege bei jeder Aufgabe, ob die Konstruktion ausführbar und ob sie sogar eindeutig ausführbar ist!

2. Belege durch je zwei Beispiele, daß die Konstruktion eines Dreiecks mit den angegebenen Stücken zwar ausführbar, aber nicht eindeutig ausführbar ist!
**a)** $\overline{BC} = 5$ cm, $\beta = 40°$ **b)** $\overline{BC} = 6$ cm, $\alpha = 30°$
**c)** $\beta = 100°, \gamma = 30°$ **d)** $a = b = 6$ cm

3. Es soll ein Quadrat konstruiert werden. Gib dafür Stücke vor, so daß die Konstruktion
**a)** ausführbar, aber nicht eindeutig ausführbar,
**b)** eindeutig ausführbar,
**c)** nicht ausführbar ist!

## 15 Eigenschaften zueinander kongruenter Dreiecke

Bauzeichner und Konstrukteure zeichnen häufig Dreiecke in die Baupläne ein. Dabei müssen Seiten und Winkel so vorgegeben werden, daß die Dreiecke eindeutig konstruierbar sind. Zwei gegebene Stücke reichen dafür bekanntlich nicht aus. Wir gehen nun der Frage nach, ob drei gegebene Stücke ausreichen. Bei dieser Untersuchung stützen wir uns auf die Eigenschaften einander kongruenter Dreiecke. Für zwei kongruente Dreiecke (↗ Bild D 83) gibt es eine Bewegung, die das Dreieck *ABC* auf das Dreieck *DEF* abbildet. Die Tabelle gibt die Bilder der Eckpunkte des Dreiecks *ABC* bei dieser Bewegung an.

| Bewegung, die △ *ABC* auf △ *DEF* abbildet | | | |
|---|---|---|---|
| **Punkt** | *A* | *B* | *C* |
| **Bildpunkt** | *F* | *D* | *E* |

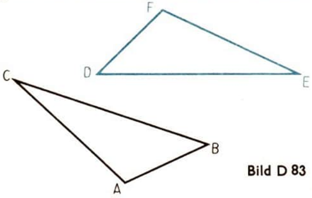


Bild D 83

● **39** Begründe, warum nur diese Zuordnung in Frage kommt! Gib in einer weiteren Tabelle die Bilder der Seiten (Winkel) des Dreiecks *ABC* an!
Wie läßt sich diese Bewegung aus Verschiebungen, Spiegelungen oder Drehungen zusammensetzen?

● **40** Es gibt auch eine Bewegung, die umgekehrt das Dreieck *DEF* auf das Dreieck *ABC* abbildet.
Stelle für diese Bewegung entsprechende Tabellen auf!

Man spricht bei zueinander kongruenten Dreiecken (und auch anderen einander kongruenten Figuren) von **einander zugeordneten** oder **einander entsprechenden** Punkten, Seiten und Winkeln. Zu jeder Seite des Dreiecks *ABC* gibt es also eine kongruente und damit gleich lange Seite des Dreiecks *DEF* und umgekehrt. Entsprechendes gilt für die Winkel.
Winkel und Seiten des Dreiecks tragen auch die gemeinsame Bezeichnung **Stücke des Dreiecks.** So kann man sagen, daß die *Dreiecke ABC und DEF in allen Stücken übereinstimmen.*

Allgemein gilt:

▶ 17 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke einander kongruent sind, so stimmen sie in allen Stücken überein.**

■ 5 Es ist zu prüfen, ob zwei Dreiecke $KLM$ und $PQR$ mit den im Bild D 84 angegebenen Stücken einander kongruent sind.

Wegen der Seiten-Winkel-Beziehung ist im Dreieck $KLM$ $\overline{ML} = 2{,}2$ cm die längste Seite, im Dreieck $PQR$ die Seite $\overline{PR}$. Dabei ist $\overline{PR} > 2{,}2$ cm.

Die Dreiecke $KLM$ und $PQR$ stimmen also nicht in allen Stücken überein. Wären sie kongruent, so müßten sie aber in allen Stücken übereinstimmen. Folglich sind die Dreiecke $KLM$ und $PQR$ nicht zueinander kongruent.

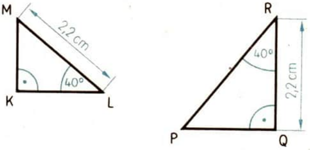



Bild D 84

## Aufgaben

1. Die gleichschenkligen Dreiecke im Bild D 85 sind einander kongruent. Es gibt zwei Bewegungen, die das Dreieck $ABC$ auf das Dreieck $DEF$ abbilden.
   **a)** Gib für jede dieser Abbildungen die Bilder von $A$, $B$ und $C$ in Form einer Tabelle an!
   **b)** Gib an, wie sich jede der Bewegungen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzen läßt!

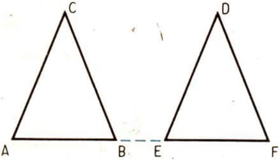



Bild D 85

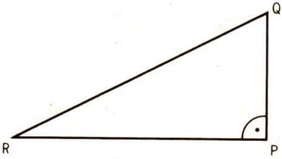



Bild D 86

2. Ein Dreieck $ABC$ ist zum Dreieck $PQR$ (Bild D 86) kongruent. Ferner ist $\beta = 90°$ und $c > a$. Gib die Größe aller Seiten und Innenwinkel des Dreiecks $ABC$ an!

3. Begründe, daß die Dreiecke im Bild D 87 nicht kongruent sind!

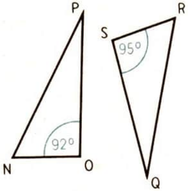



Bild D 87

**4.*** Das Dreieck *ABC* im Bild D 88 ist unregelmäßig, und es ist $AD \perp BC$. Sind die rechtwinkligen Teildreiecke einander kongruent? Begründe!

**5.** Die Trapeze im Bild D 89 sind einander kongruent. Gib alle Paare einander entsprechender Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel an!

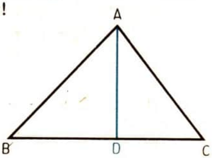



Bild D 88

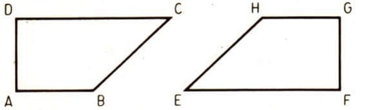



Bild D 89

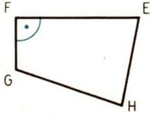



Bild D 90

**6.** Ein Viereck *ABCD* ist kongruent zum Viereck *EFGH* (↗ Bild D 90). Der Innenwinkel bei *A* ist stumpf, und der Innenwinkel bei *D* ist ein rechter Winkel. Gib die Größe aller Seiten und Innenwinkel des Vierecks *ABCD* an!

## 16 Der Kongruenzsatz (sws)

Bei Dreiecken, von denen drei Stücke bekannt sind, gibt es folgende Möglichkeiten.

Bild D 91

| a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|
| Drei Winkel und keine Seite | Eine Seite und zwei Winkel | | Zwei Seiten und ein Winkel | | Drei Seiten und kein Winkel |
| (www) | (wsw) | (sww) | (sws) | (ssw) | (sss) |

Betrachten wir zunächst den Fall a:
Sind von einem Dreieck nur die drei Innenwinkel bekannt, so kann es nicht eindeutig konstruiert werden.

● **41** Begründe das mit Hilfe des Bildes D 82 b!

Wir wenden uns nun dem Fall d zu (↗ Bild D 91).

**6** Es soll ein Dreieck $ABC$ konstruiert werden, von dem die Seiten $a$, $b$ und der Winkel $\gamma$ gegeben sind.

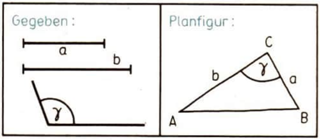


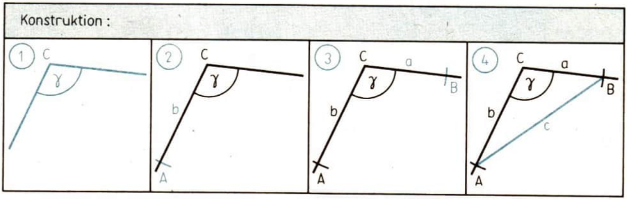

Bild D 92a

*Konstruktionsbeschreibung (↗ Bild D 92b):*

1. Wir zeichnen einen Winkel $\gamma$ der geforderten Größe mit dem Scheitel $C$.
2. Wir tragen auf einem Schenkel von $\gamma$ von $C$ aus $b$ ab und erhalten $A$.
3. Wir tragen auf dem anderen Schenkel von $C$ aus $a$ ab und erhalten $B$.
4. Wir verbinden $A$ und $B$.

Das Dreieck $ABC$ hat die verlangten Eigenschaften.

Bild D 92b




Im Beispiel D 6 sind die Stücke $a$, $b$ und $\gamma$ durch Strecken entsprechender Länge und durch einen Winkel entsprechender Größe gegeben. Man kann die Stücke aber auch durch Größenangaben mit Zahlenwert und Einheit geben.

**42** **a)** Konstruiere ein Dreieck $ABC$ mit $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm und $\alpha = 50°$!
**b)** Was vermutest du über die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks $ABC$?

**18** **KONGRUENZSATZ (sws): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Diesen Kongruenzsatz kann man mit Hilfe von Eigenschaften der Bewegungen beweisen.

*Voraussetzung:*
Für Dreiecke $ABC$ und $PQR$ gilt $\overline{AC} \cong \overline{PR}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ und $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle PRQ$ (↗ Bild D 93).

*Behauptung:*
$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

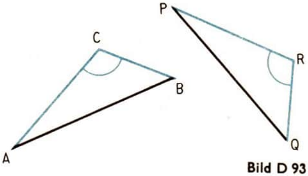



Bild D 93

*Beweis:*

(1) Es gibt eine Bewegung, für die gilt:

a) $C$ wird abgebildet auf $R$,
b) Strahl $CA$ wird abgebildet auf Strahl $RP$,
c) Strahl $CB$ wird abgebildet auf Strahl $RQ$.

$\left.\right\}$ $(\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle PRQ)$

(2) Bei dieser Bewegung gilt:

a) $A$ wird abgebildet auf $P$, $(\overline{AC} \cong \overline{PR})$
b) $B$ wird abgebildet auf $Q$. $(\overline{BC} \cong \overline{QR})$

(3) Also gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, *was zu beweisen war.*

Wegen des Kongruenzsatzes (sws) ist die im Beispiel D 6 (bzw. im Auftrag D 42) geforderte Konstruktion eindeutig ausführbar.

## Aufgaben

**1.** Konstruiere ein Dreieck $ABC$ mit den folgenden Stücken! Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Miß die Winkel und gib die Dreiecksart an!

**a)** $a = 5{,}7$ cm, $c = 4{,}9$ cm, $\beta = 73°$ **c)** $\gamma = 90°$, $a = 4{,}5$ cm, $b = 60$ mm
**b)** $b = 7{,}2$ cm, $c = 6{,}8$ cm, $\alpha = 85°$ **d)** $a = 77$ mm, $\beta = 90°$, $c = 5{,}3$ cm

**2.** Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $P$ (1), $Q$ (2), $R$ (5) und $S$ (4)!
Konstruiere ein Dreieck $ABC$ mit $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{BC} = \overline{QS}$ und $\beta = \sphericalangle PRQ$!
Begründe die eindeutige Ausführbarkeit der Konstruktion! Miß alle Seiten und Winkel des Dreiecks $ABC$!

**3.** Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen sich ein Gebäude befindet. Von einem dritten Punkt werden die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden.
Entnimm die Maße der Planfigur im Bild D 94! Zeichne das Dreieck im Maßstab 1:100! Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Wie lang ist $\overline{AB}$ in Wirklichkeit?

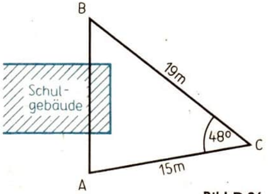



Bild D 94

**4.** Die im Beispiel D 6 geforderte Konstruktion kann man auch durchführen, indem man zuerst die Seite $\overline{AC}$ zeichnet.
Konstruiere das Dreieck $ABC$ auf diese Weise! Beschreibe dein Vorgehen!

## 17 Weitere Kongruenzsätze

Wir beschäftigen uns nun mit der Konstruktion eines Dreiecks, von dem eine Seite und die beiden dieser Seite anliegenden Winkel gegeben sind (Fall b, ↗ Bild D 91).

■ **7** Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden, von dem die Stücke *c*, $\alpha$ und $\beta$ gegeben sind.

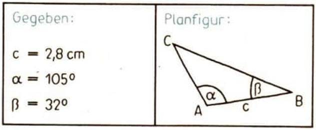


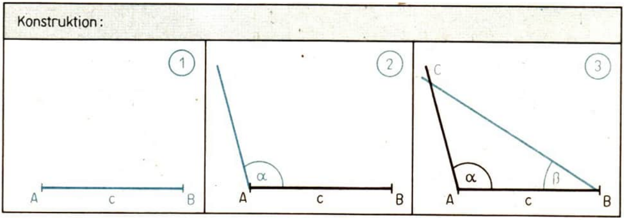

Bild D 95a

*Konstruktionsbeschreibung (↗ Bild D 95b):*

1. Wir zeichnen $\overline{AB}$ mit der Länge *c*.
2. An $\overline{AB}$ tragen wir im Punkt *A* den Winkel $\alpha$ an.
3. An $\overline{AB}$ tragen wir im Punkt *B* den Winkel $\beta$ an.
   (Das Antragen von $\alpha$ und $\beta$ geschieht nach der gleichen Seite der Geraden *AB*).
   Den Schnittpunkt der freien Schenkel von $\alpha$ und $\beta$ bezeichnen wir mit *C*.

Das Dreieck *ABC* hat die verlangten Eigenschaften.

Bild D 95b




● **43** **a)** Wie müßte man vorgehen, wenn man die Konstruktion mit einem der beiden Winkel beginnt?

**b)** Kann man auch ein Dreieck *ABC* mit $c = 5{,}3$ cm, $\alpha = 105°$ und $\beta = 82°$ konstruieren? Begründe!
(Welche Bedingungen müssen die gegebenen Stücke erfüllen, damit die Konstruktion ausführbar ist?)

**c)** Was vermutest du über die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks im Beispiel D 7?

Ein Dreieck ist aus einer gegebenen Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln stets eindeutig konstruierbar, wenn die gegebenen Winkel zusammen kleiner als 180° sind.

▶ **19** **KONGRUENZSATZ (wsw): Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Dieser Kongruenzsatz läßt sich ähnlich beweisen wie der Kongruenzsatz (sws), worauf wir verzichten.

● 44 Die Dreiecke $ABC$ und $PQR$ im Bild D 96 stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein. Gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$? Begründe! Wie müßte ein Kongruenzsatz (sww) formuliert werden?

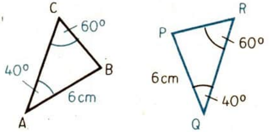


Bild D 96

Der folgende Kongruenzsatz läßt sich auch mit Eigenschaften von Bewegungen beweisen, worauf wir verzichten.

▶ 20 **KONGRUENZSATZ (sss): Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Aus diesem Kongruenzsatz folgt die Eindeutigkeit der Konstruktion eines Dreiecks mit drei gegebenen Seiten; damit ist der Fall f (↗ Bild D 91) überprüft.

■ 8 Es soll ein Dreieck $ABC$ konstruiert werden, von dem $a$, $b$ und $c$ gegeben sind.

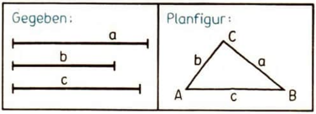


Bild D 97

*Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild D 97):*
Wenn man die Seite $c$ zeichnet, so erhält man die Eckpunkte $A$ und $B$.
Der Punkt $C$ soll von $A$ die Entfernung $b$ haben; also muß $C$ auf dem Kreis um $A$ mit dem Radius $b$ liegen.
Der Punkt $C$ soll von $B$ die Entfernung $a$ haben; also muß $C$ auf dem Kreis um $B$ mit dem Radius $a$ liegen.
Folglich muß $C$ Schnittpunkt dieser beiden Kreise sein.

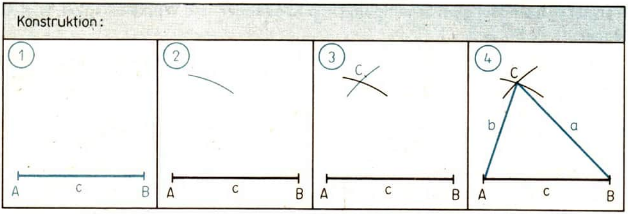


Bild D 98

● **45** **a)** Beschreibe die Konstruktion anhand des Bildes D 98!

**b)** Konstruiere ein Dreieck $PQR$ mit $\overline{PQ} = 7{,}0$ cm, $\overline{PR} = 5{,}0$ cm und $\overline{QR} = 4{,}0$ cm und beschreibe die Konstruktion!

**c)** Welche Bedingungen müssen die gegebenen Seiten erfüllen, damit die Konstruktion ausführbar ist?

Von den im Bild D 91 angezeigten Möglichkeiten bleibt nur noch der Fall e zu untersuchen.

■ **9** Es ist ein Dreieck $ABC$ zu konstruieren, von dem $a$, $b$ und $\beta$ gegeben sind.

Gegeben:

$a = 1{,}7$ cm
$b = 2{,}5$ cm
$\beta = 73°$

Planfigur:

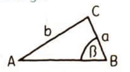



**Bild D 99**

*Lösungsüberlegung*
*(↗ Planfigur im Bild D 99):*
Wenn man die Seite $a$ zeichnet, so erhält man die Punkte $B$ und $C$. $A$ muß erstens auf dem freien Schenkel von $\beta$ liegen. Zweitens muß $A$ auf einem Kreis um $C$ mit dem Radius $b$ liegen. Also muß $A$ Schnittpunkt des freien Schenkels von $\beta$ und dieses Kreises sein.

● **46** Beschreibe die Konstruktion anhand des Bildes D 100!

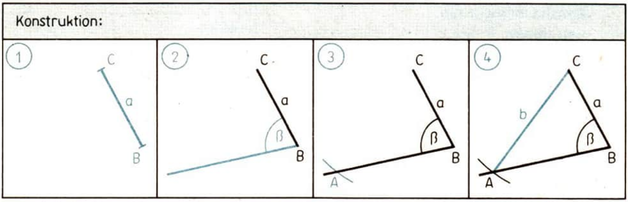



**Bild D 100**

Das Bild D 101 enthält noch einmal das Ergebnis der Konstruktion mit eingetragenen Maßen für die gegebenen Stücke. Es zeigt:
$A$ ergibt sich eindeutig als Schnittpunkt von Kreisbogen und Winkelschenkel, weil $\overline{AC} = b$ länger ist als $\overline{BC} = a$.
Ist die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite jedoch kürzer als die andere gegebene Seite, so kann es zwei nicht kongruente Lösungen der Aufgabe geben, aber auch gar keine.

● **47** Bei einer bestimmten Länge von $b$ erhält man trotz $b < a$ eine einzige Lösung. Ermittle aus dem Bild D 101, bei welcher Länge von $b$ das der Fall ist!

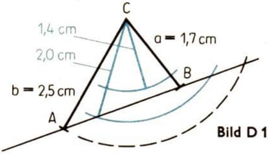



**Bild D 101**

Gesichert ist die Eindeutigkeit der Konstruktion, wenn der gegebene Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt. Dies kommt in folgendem Kongruenzsatz zum Ausdruck:

▶ 21 **KONGRUENZSATZ (sSW): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir hier.

## Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck $ABC$ mit folgenden Stücken!
Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an! Ermittle die Größe der restlichen Seiten und Winkel!
**a)** $a = 5{,}2$ cm; $\beta = 64°$; $\gamma = 56°$ **c)** $a = 4{,}5$ cm; $b = 6{,}1$ cm; $c = 5{,}3$ cm
**b)** $a = 3{,}6$ cm; $\alpha = 92°$; $\beta = 48°$ **d)** $a = 6{,}3$ cm; $b = 5{,}1$ cm; $c = 7{,}2$ cm

2. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $A$ (5), $B$ (6), $C$ (15) und $D$ (12)!
Konstruiere ein Dreieck $PQR$ mit folgenden Stücken!
**a)** $\overline{PQ} = \overline{AC}$, $\overline{QR} = \overline{BD}$, $\sphericalangle PQR = \sphericalangle ABC$ **b)** $\overline{PQ} = \overline{AC}$, $\overline{QR} = \overline{BC}$, $\overline{PR} = \overline{AD}$

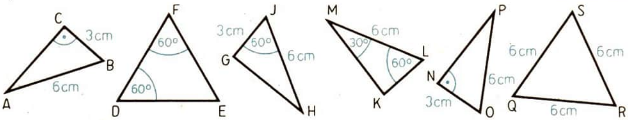
3. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck $XYZ$ mit folgenden Stücken!
**a)** $x = 3{,}6$ cm, $y = z = 5{,}1$ cm **c)** $x = y = z = 55$ mm
**b)** $y = 2{,}8$ cm, $x = z = 4{,}3$ cm **d)** $x = y = z = 1{,}00$ dm

4. Entscheide, ob sich ein Dreieck $ABC$ mit folgenden Stücken konstruieren läßt! Begründe!
**a)** $a = 7{,}0$ cm; $\alpha = 73°$; $\beta = 115°$ **e)** $a = 4{,}3$ cm; $b = 2{,}4$ cm; $c = 7{,}0$ cm
**b)** $a = 8{,}4$ cm; $\beta = 115°$; $\gamma = 15°$ **f)** $a = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}8$ cm; $c = 11{,}0$ cm
**c)** $a = 5{,}0$ cm; $b = 4{,}3$ cm; $c = 6{,}2$ cm **g)** $a = 4{,}0$ cm; $b = 6{,}2$ cm; $\alpha = 95°$
**d)** $b = 6{,}8$ cm; $\beta = 86°$; $\gamma = 98°$ **h)** $b = 5{,}2$ cm; $\beta = 92°$; $\gamma = 96°$

5. Konstruiere ein Dreieck $ABC$ mit folgenden Stücken!
Untersuche, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist! Begründe!
**a)** $b = 6{,}0$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\gamma = 40°$ **c)** $a = 65$ mm; $b = 75$ mm; $\beta = 48°$
**b)** $a = 70$ mm; $c = 55$ mm; $\alpha = 90°$ **d)** $a = 3{,}0$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $\alpha = 30°$

6.* Von sechs Dreiecken sind die in den Planfiguren (↗ Bild D 102) angegebenen Stücke bekannt. Gib an, welche der Dreiecke einander kongruent sein müssen! Begründe!

**Bild D 102**



## 18 Erste Anwendungen der Kongruenzsätze

● **48** Schon in Klasse 5 haben wir gelernt, wie man einen Winkel $\alpha$ mit dem Zirkel an einen Strahl $s$ anträgt (↗ Bild D 103). Erläutere, warum man dabei im Grunde den Kongruenzsatz (sss) anwendet!

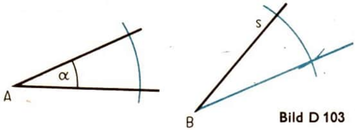



Bild D 103

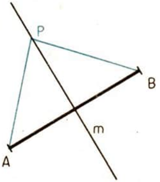



Bild D 104

Wir wissen, daß die Mittelsenkrechte $m$ einer Strecke $\overline{AB}$ eine Symmetrieachse von $\overline{AB}$ ist. Deshalb hat jeder Punkt $P$ auf $m$ von $A$ und $B$ den gleichen Abstand (↗ Bild D 104).

▶ **22** **SATZ: Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ liegt, so sind $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ einander kongruent.**

● **49** Begründe diesen Satz!

Alle Punkte der Zeichenebene, die nicht auf $m$ liegen, haben von $A$ und $B$ verschiedene Entfernungen. Deshalb gilt sogar der folgende Satz:

▶ **23** **SATZ: Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte (der Zeichenebene), die von $A$ und $B$ gleich weit entfernt sind.**

● **50** **a)** Begründe folgenden Sachverhalt mit Hilfe eines Kongruenzsatzes: Liegen zwei Punkte $A$ und $B$ auf einer Parallelen zu einer Geraden $g$, so haben $A$ und $B$ den gleichen Abstand von $g$! (Benutze das Bild D 105!)

**b)** Welches ist die Menge aller Punkte, die von einer Geraden $g$ den gleichen Abstand $d$ haben?

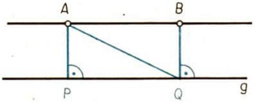
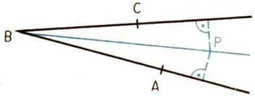



Bild D 105

Bild D 106




Analog zum Satz D 22 gilt (↗ Bild D 106):

▶ **24** **SATZ: Wenn ein Punkt auf der Winkelhalbierenden eines Winkels $ABC$ liegt, so hat er von den Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand.**

● 51 Mit welchem Kongruenzsatz kann man den Satz D 24 begründen?

Dem Satz D 23 entsprechend gilt auch:

▶ 25 **SATZ: Die Menge aller Punkte des Winkels *ABC*, die von den Strahlen *BA* und *BC* gleich weit entfernt sind, ist die Winkelhalbierende.**

## Aufgaben

1. **a)** Wir erkennen ohne zu messen, daß die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ im Quadratraster (↗ Bild D 107) gleich lang sind. Begründe!
   **b)*** Welchen Satz wenden wir außerdem noch an, wenn wir bemerken, daß $AB \parallel PQ$ ist?

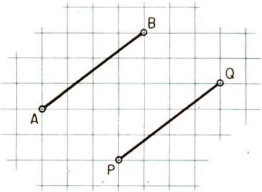



Bild D 107

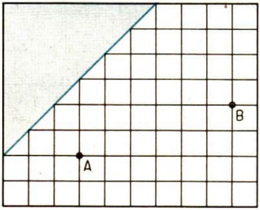



Bild D 108

2. Kinder aus zwei Ferienlagern (*A* und *B* im Bild D 108; Maßstab 1:100 000) wollen eine Wanderung zum Seeufer machen und sich dort treffen. Der Treffpunkt soll so gewählt werden, daß er von beiden Orten gleich weit entfernt ist. Wie findet man auf der Karte diese Stelle? Wie weit ist der Treffpunkt von den Orten entfernt?

3. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte *A* (12), *B* (17) und *C* (15)! *A*, *B* und *C* geben die Lage dreier einzeln liegender Häuser auf einer Karte im Maßstab 1:10000 an! Für die drei Häuser soll eine gemeinsame Postabholestelle eingerichtet werden, die von den drei Häusern gleich weit entfernt ist.
   Wo muß die Abholestelle angelegt werden? Wie weit ist sie von jedem der Häuser entfernt?

# 19 Geometrische Grundkonstruktionen

Als Bestandteile komplizierterer Konstruktionen sind oft auszuführen
(1) Halbieren einer Strecke,
(2) Halbieren eines Winkels,
(3) Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,
(4) Errichten der Senkrechten zu einer Geraden *g* durch einen Punkt von *g*.

Wie man diese Grundkonstruktionen mit Hilfe von Lineal, Winkelmesser und Zeichendreiecken bewältigt, wissen wir bereits. Sie lassen sich aber auch allein mit Zirkel und Lineal (ohne Benutzung der Meßskale) ausführen. Die dabei benutzten Verfahren, die bereits im antiken Griechenland vor über 2000 Jahren bekannt waren, lassen sich mit Hilfe der Dreieckskongruenzsätze begründen.
Die Konstruktion (1) steht in engem Zusammenhang mit Satz D 23. Man konstruiert eigentlich die Mittelsenkrechte der gegebenen Strecke und erhält damit gleichzeitig deren Mittelpunkt. Wir kennen das Verfahren schon als Konstruktion der Symmetrieachse zweier Punkte $A$ und $B$.

■ 10 Die Strecke $\overline{AB}$ soll halbiert werden.
*Konstruktionsbeschreibung*
*(↗ Bild D 109):*

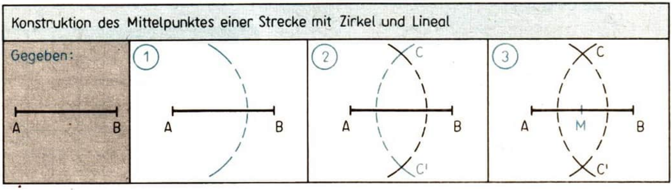



Bild D 109

(1) Wir zeichnen um $A$ einen Kreisbogen mit einem Radius $r$, wobei $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ sein muß.
(2) Mit dem gleichen Radius zeichnen wir um $B$ einen Kreis. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind $C$ und $C'$.
(3) Wir ermitteln den Schnittpunkt $M$ der Geraden $CC'$ mit $\overline{AB}$.

$M$ ist der gesuchte Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

*Begründung:*

| | |
|---|---|
| $\triangle\ ACC' \cong \triangle\ BCC'$ | $(\overline{AC} \cong \overline{BC},\ \overline{AC'} \cong \overline{BC'},\ \overline{CC'} \cong \overline{CC'}$; (sss)) |
| $\sphericalangle\ ACC' \cong \sphericalangle\ BCC'$ | (entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken) |
| $\triangle\ ACM \cong \triangle\ BCM$ | $(\overline{AC} \cong \overline{BC},\ \sphericalangle\ ACC' \cong \sphericalangle\ BCC',\ \overline{CM} \cong \overline{CM}$; (sws)) |
| $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ | (entsprechende Seiten in einander kongruenten Dreiecken) |

$M$ ist also Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

● 52 Erläutere mit Hilfe des Bildes D 110, wie man die besprochene Konstruktion zur Streckenhalbierung verändern kann! Wenn die Strecke $\overline{AB}$ dicht am Rande des Zeichenblattes liegt, kann man so vorgehen.

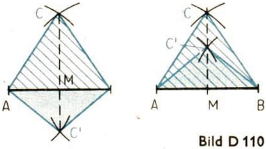



Bild D 110

Beim Halbieren einer Strecke haben wir es gewissermaßen mit zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zu tun (↗ Bild D 110). Die Gerade $CC'$ ist dabei Symmetrieachse beider Dreiecke. Dieser Figur begegnen wir auch bei den anderen Grundkonstruktionen, wenn wir sie allein mit Zirkel und Lineal ausführen.

● **53** Beschreibe, wie mit Zirkel und Lineal die Grundkonstruktionen ausgeführt werden (↗ Bilder D 111 bis 113)!

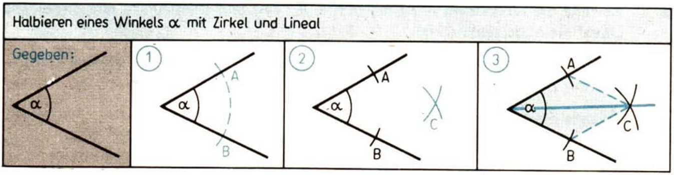



Bild D 111

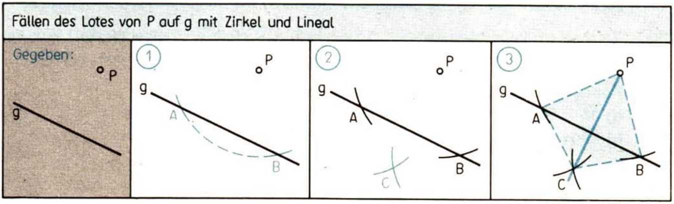



Bild D 112

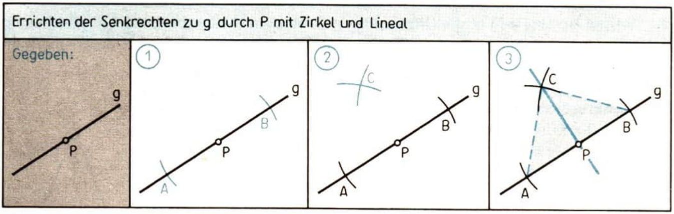



Bild D 113

### Aufgaben

1. Zeichne Strecken der angegebenen Länge! Ermittle den Mittelpunkt der Strecke durch Schätzen! Konstruiere den Mittelpunkt mit Zirkel und Lineal! Vergleiche!
**a)** $\overline{AB} = 4{,}3$ cm **b)** $\overline{CD} = 66$ mm **c)** $\overline{EF} = 5{,}6$ cm

2. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $A$ (9), $B$ (15) und $C$ (6)! Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$!

3. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = 7{,}5$ cm ($\overline{CD} = 8{,}1$ cm) und konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechten!

4. Zeichne die Winkel **a)** $\alpha = 58°$, **b)** $\beta = 64°$, **c)** $\gamma = 150°$, **d)** $\delta = 160°$ und konstruiere mit Zirkel und Lineal die Winkelhalbierenden!

5. Zeichne eine Gerade $g$ und einen Punkt $P$ auf $g$!
**a)** Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Senkrechte zu $g$ durch $P$!
**b)** Konstruiere mit Lineal und Zeichendreieck die Senkrechte zu $g$ durch $P$!

6. Zeichne eine Gerade $g$ und einen Punkt $P$, der nicht auf $g$ liegt! Zeichne die Senkrechte durch $P$ zu $g$ **a)** mit Zirkel und Lineal, **b)** mit Lineal und Zeichendreieck!

7. Zeichne ein Paar Nebenwinkel (Scheitelwinkel)! Halbiere beide Winkel! Wie liegen die erhaltenen Winkelhalbierenden zueinander? Begründe deine Aussage!

8. Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ mit folgenden Stücken!
**a)** $\overline{AB} = 2{,}7$ cm; $\overline{BC} = 4{,}5$ cm **c)** $\overline{AB} = 5{,}0$ cm; $\overline{AC} = 6{,}5$ cm
**b)** $\overline{AB} = 35$ mm; $\overline{BC} = 35$ mm **d)** $\overline{AB} = 38$ mm; $\overline{BD} = 72$ mm

## 20 Besondere Linien in Dreiecken

Wir wissen bereits, daß in gleichschenkligen Dreiecken die Symmetrieachse gleichzeitig **Mittelsenkrechte** zur Basis ist (↗ Bild D 114). Die **Winkelhalbierende** des Winkels an der Spitze liegt auf der Symmetrieachse.
Für die anderen Seiten kann man auch die Mittelsenkrechten und für die Basiswinkel ebenfalls die Winkelhalbierenden einzeichnen. Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende bezeichnet man häufig so, wie es im Bild D 114 ausgeführt wurde. Derartige besondere Linien gibt es für alle Dreiecke.

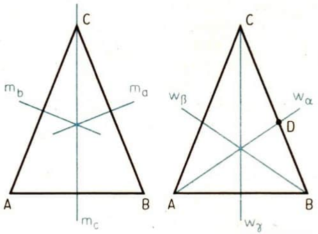


Bild D 114

54 **a)** Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck $ABC$ und konstruiere seine Mittelsenkrechten $m_a$, $m_b$ und $m_c$!

**b)** Verfahre ebenso mit einem stumpfwinkligen (rechtwinkligen) Dreieck! Was stellst du fest?

26 **SATZ: Die Mittelsenkrechten jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe der Sätze D 22 und D 23.

*Voraussetzung:* $m_a$, $m_b$ und $m_c$ sind die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $ABC$ (↗ Bild D 115).

*Behauptung:* $m_a$, $m_b$ und $m_c$ schneiden einander in einem Punkt.

*Beweis:* $m_a$ und $m_b$ schneiden einander in einem Punkt $M$.

$\overline{MB} \cong \overline{MC}$ (Satz D 22 für $m_a$)

$\overline{MC} \cong \overline{MA}$ (Satz D 22 für $m_b$)

$\overline{MB} \cong \overline{MA}$

Deshalb gehört $M$ zu $m_c$. (Satz D 23 für $m_c$)

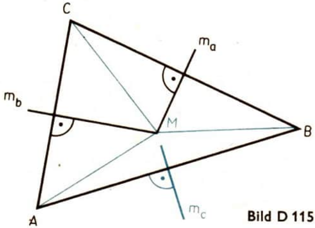



Bild D 115

Also schneiden $m_a$, $m_b$ und $m_c$ einander in einem Punkt $M$, *was zu beweisen war.*

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind Geraden. Winkelhalbierende haben wir bisher immer als Strahlen aufgefaßt, z. B. ist im Bild D 114 $w_\alpha$ der Strahl $AD$. Häufig versteht man unter $w_\alpha$ auch die Strecke $\overline{AD}$. Man kann dann von der Länge einer Winkelhalbierenden sprechen.

Auch bei zwei anderen Arten besonderer Linien in Dreiecken handelt es sich um Strecken.

Verbindet man einen Eckpunkt eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, so erhält man eine **Seitenhalbierende** dieses Dreiecks. Zum Beispiel ist $s_c$ Seitenhalbierende im Dreieck $ABC$ (↗ Bild D 116).

Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks das Lot auf die durch die gegenüberliegende Seite bestimmte Gerade, so erhält man eine **Höhe**. Für das Dreieck im Bild D 116 sind beispielsweise $h_b$ und $h_c$ Höhen.

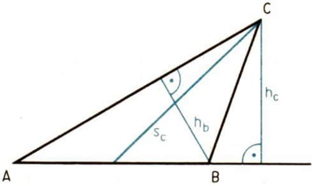



Bild D 116

▶ 27 **SATZ: Die Winkelhalbierenden jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

● 55 Begründe den Satz D 27 mit Hilfe der Sätze D 24 und D 25!

Auf den Beweis der folgenden zwei Sätze verzichten wir.

▶ 28 **SATZ: Die Seitenhalbierenden jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

▶ 29 **SATZ: Die Geraden, auf denen die Höhen eines Dreiecks liegen, schneiden einander stets in einem Punkt.**

## Aufgaben

1. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$! Konstruiere dann jeweils einen Punkt $P$ mit $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$!
Wie kannst du die Genauigkeit deiner Konstruktion mit dem Zirkel überprüfen?

2. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$! Konstruiere dann jeweils die drei Winkelhalbierenden!
Was läßt sich über den Abstand des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden zu den Seiten sagen? Begründe!

3. Ein prismenförmiges Bauteil (↗ Bild D 117) soll transportiert werden. Es darf auf jeder Fläche gelagert werden. Kann dieses Teil auf einem Wagen durch eine Einfahrt transportiert werden, wenn die Ladefläche des Wagens 1 m über der Straßendecke liegt und die maximale Durchfahrtshöhe der Einfahrt 2,80 m beträgt? Untersuche die Frage mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung!

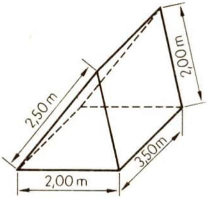


Bild D 117

4. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck und konstruiere die drei Höhen!

5.* Zeichne ein Dreieck $ABC$ und durch die Eckpunkte jeweils die Parallelen zur gegenüberliegenden Seite!
Bezeichne die Schnittpunkte der Parallelen mit $P$, $Q$ und $R$! Konstruiere für das Dreieck $ABC$ die Höhen!
Was sind die durch die Höhen bestimmten Geraden im Dreieck $PQR$? Begründe!

6. Zeichne auf dicke Pappe ein Dreieck!
Konstruiere den Schnittpunkt $S$ der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks! Schneide das Dreieck aus und setze das Dreieck im Punkt $S$ (dem „Schwerpunkt") auf eine Stecknadelspitze! Was stellst du fest?

## 21 Konstruktionen von Dreiecken, bei denen eine Höhe gegeben ist

■ **11** Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden, in dem $c = 4{,}0$ cm, $h_c = 3{,}0$ cm und $\alpha = 70°$ ist.
*Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild D 118):*
Den Höhenfußpunkt bezeichnen wir mit *D*. Das Teildreieck *ADC* kann eindeutig konstruiert werden. (Warum?) Der dritte Eckpunkt *B* des gesuchten Dreiecks liegt auf dem Strahl *AD* im Abstand 4 cm von *A*.

● **56** Konstruiere das Dreieck *ABC* und beschreibe dein Vorgehen!

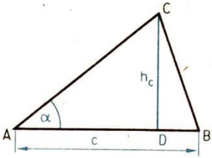



Bild D 118

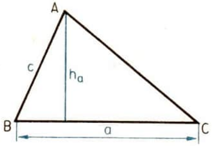



Bild D 119

Auch bei Dreiecken, von denen eine Winkelhalbierende oder Seitenhalbierende gegeben ist, kann man ähnlich verfahren. Im Beispiel D 11 haben wir zuerst ein Teildreieck des gesuchten Dreiecks konstruiert. Bei einem etwas anderen Vorgehen bemerkt man leichter, wenn eine Aufgabe mehrere Lösungen hat.

■ **12** Es ist ein Dreieck *ABC* mit $a = 6{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm und $h_a = 3{,}6$ cm zu konstruieren.
*Lösungsüberlegung (↗ Bild D 119):* Beginnt man die Konstruktion mit der Seite *a*, so erhält man die Punkte *B* und *C*. *A* muß auf dem Kreis um *B* mit dem Radius *c* liegen. Außerdem muß *A* auf einer Parallelen zu *BC* im Abstand $h_a$ liegen.

● **57** Führe die Konstruktion aus und beschreibe sie!
Begründe, daß es zwei Lösungen gibt!

### Aufgaben

**1.** Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit den angegebenen Stücken! Überlege, ob die Konstruktion ausführbar und ob sie sogar eindeutig ausführbar ist!

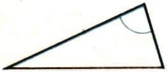
**a)** $b = 6{,}4$ cm; $\alpha = 54°$; $h_b = 5{,}2$ cm
**b)** $a = 5{,}8$ cm; $\beta = 66°$; $h_a = 5{,}2$ cm
**c)** $a = 3{,}3$ cm; $b = 4{,}4$ cm; $h_c = 2{,}9$ cm
**d)** $c = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}3$ cm; $h_a = 4{,}4$ cm
**e)** $b = 8{,}0$ cm; $\alpha = 45°$; $h_a = 5{,}0$ cm
**f)** $c = 8{,}0$ cm; $\beta = 30°$; $h_b = 5{,}5$ cm

**2.*** Konstruiere ein Dreieck mit $a = 6{,}0$ cm, $\beta = 80°$ und $s_a = 5{,}2$ cm! Überlege, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

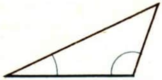
**Zusammenfassung**

**Zwei Dreiecke sind einander kongruent,**

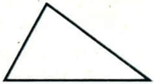
(a) wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (sws),



(b) wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen (wsw),



(c) wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (sss),



(d) wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen (sSW).

**Für alle Dreiecke gilt: Es schneiden einander in jeweils einem gemeinsamen Punkt: (a) die Mittelsenkrechten, (b) die durch die Höhen bestimmten Geraden, (c) die Seitenhalbierenden und (d) die Winkelhalbierenden.**

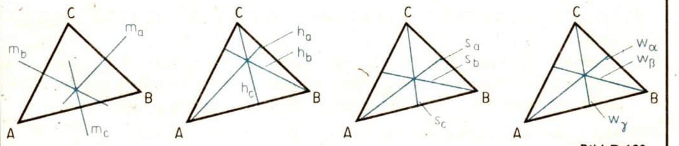



Bild D 120

## Vierecke und Vielecke

# 22 Vielecke

Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. sind spezielle Vielecke. Ein **Vieleck** entsteht, wenn man einen „geschlossenen" Streckenzug zeichnet. Ein solcher Streckenzug geht von einem Punkt aus und führt zu ihm wieder zurück. Die Strecken heißen **Seiten**, ihre Endpunkte **Eckpunkte** des Vielecks. Vielecke nennt man auch ***n*-Ecke**; dabei ist *n* die Anzahl der Eckpunkte.

● 58 **a)** Was für Zahlen kommen für $n$ bei einem $n$-Eck in Betracht?
**b)** Bei dem Vieleck im Bild D 121 sind 6 Punkte $A$ bis $F$ als Endpunkte von Strecken gekennzeichnet. Dennoch handelt es sich nicht um ein Sechseck, sondern es ist ein Fünfeck. Erläutere!

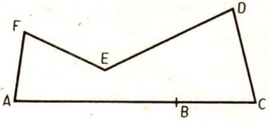


Bild D 121

Auch die Figuren im Bild D 122 sind geschlossene Streckenzüge. Man kann sie zum Beispiel von $A$ aus über $B$, $C$, ... so durchlaufen, daß man zu $A$ zurückgelangt. Trotzdem bezeichnen wir sie nicht als Vielecke. Bei Vielecken dürfen nämlich nur aufeinanderfolgende Strecken Punkte gemeinsam haben, und zwar den gemeinsamen Endpunkt.

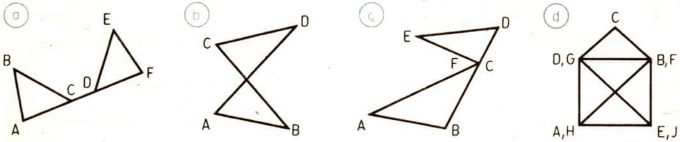


Bild D 122

Fügt man zur Menge der Punkte eines Vielecks (also einer „Vieleckslinie") noch die von diesem Vieleck umschlossenen „inneren" Punkte hinzu, so erhält man eine Vielecksfläche (↗ Bild D 123).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Vielecklinien |  |  |  |  | ... |
| Vieleckflächen |  |  |  |  | ... |

Bild D 123

Häufig bezeichnet man nicht nur Vieleckslinien, sondern auch Vielecksflächen kürzer als Vielecke, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, was gemeint ist. Spricht man beispielsweise vom Flächeninhalt eines Rechtecks, so ist mit „Rechteck" eine Rechtecksfläche gemeint. Manchmal muß man jedoch die ausführliche Bezeichnung verwenden. So haben zum Beispiel im Bild D 124 die Dreieckslinien $ABC$ und $PQR$ genau zwei Punkte gemeinsam, die Dreiecksflächen hingegen unendlich viele.

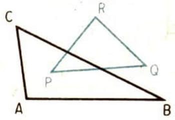


Bild D 124

Dreiecke haben besondere Bedeutung, weil sich alle Vielecke in Dreiecke zerlegen lassen. Das kann durch Diagonalen geschehen. **Diagonale** eines Vielecks heißt jede Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, die nicht Seite ist.
Liegen alle Diagonalen eines Vielecks innerhalb des Vielecks, so nennen wir das Vieleck **konvex**. Dreiecke sind ebenfalls konvex. Bei allen anderen Vielecken gibt es sowohl konvexe als auch nicht konvexe (↗ Bild D 125).

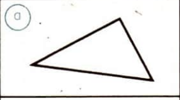
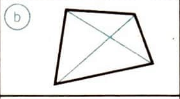
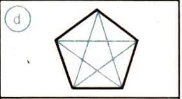
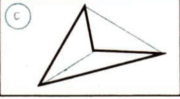
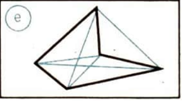
| | Dreiecke | Vierecke | Fünfecke |
|---|---|---|---|
| | keine Diagonalen | zwei Diagonalen | fünf Diagonalen |
| konvex |  |  |  |
| nicht konvex | |  |  |

Bild D 125

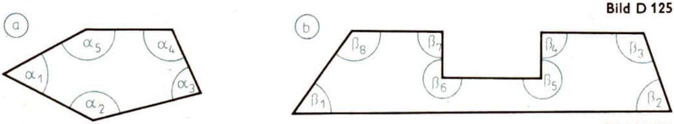



Bild D 126

● 59 **a)** Zeichne ein konvexes 6-Eck mit allen Diagonalen!
**b)** Zeichne ein nicht konvexes 6-Eck mit allen Diagonalen!

Jeder Eckpunkt eines Vielecks ist Scheitelpunkt eines Innenwinkels dieses Vielecks (↗ Bild D 126). Bei konvexen Vielecken ist jeder Innenwinkel kleiner als 180°. Bei nicht konvexen Vielecken ist wenigstens ein Innenwinkel größer als 180°.

## Aufgaben

1. Das Bild D 127 zeigt Kristalle. Was für Vielecke treten als Begrenzungsflächen auf?

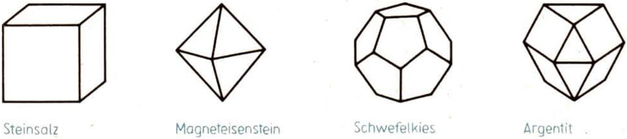



Bild D 127

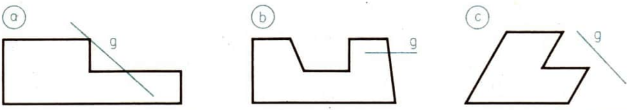



Bild D 128

2. Wieviel Punkte haben die Vielecklinie und die Gerade $g$ im Bild D 128 gemeinsam?

3. Zeichne ein $n$-Eck und eine Gerade mit $k$ gemeinsamen Punkten!
**a)** $n = 3, k = 0$ **c)** $n = 3, k = 2$ **e)** $n = 4, k = 2$ **g)** $n = 4, k = 4$
**b)** $n = 3, k = 1$ **d)** $n = 3, k = 3$ **f)** $n = 4, k = 3$ **h)** $n = 5, k = 3$

4. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A$ (0; 0), $B$ (6; 0), $C$ (4; 4), $D$ (8; 10) und $E$ (0; 10)! Zeichne das Fünfeck $ABCDE$! Welche Innenwinkel sind spitze, rechte bzw. stumpfe Winkel? Miß alle Innenwinkel des Fünfecks! Ist das Fünfeck konvex?

5. Zeichne ein axialsymmetrisches Sechseck!
(Hinweis: Zeichne zunächst die Symmetrieachse!)

6. Zeichne **a)** ein konvexes, **b)** ein nicht konvexes Viereck mit zwei rechten Innenwinkeln!

7.* **a)** Wieviel Diagonalen gehen von jeder Ecke eines 5-Ecks (6-Ecks, 7-Ecks) aus?
**b)** Wieviel Diagonalen hat ein 5-Eck (6-Eck, 7-Eck) insgesamt?
**c)** Wieviel Diagonalen hat ein 10-Eck?

## 23 Vierecke — ihre Diagonalen und Innenwinkel

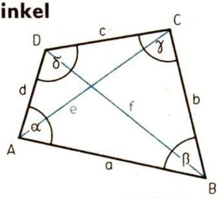


Bild D 129

Die Eckpunkte, Winkel, Seiten und Diagonalen eines Vierecks werden meist wie im Bild D 129 bezeichnet. Man sagt, daß im Viereck $ABCD$ die Seiten $a$ und $b$ **einander benachbart** sind, ebenso die Winkel $\alpha$ und $\beta$. Die Seiten $a$ und $c$ liegen **einander gegenüber**, desgleichen die Winkel $\alpha$ und $\gamma$. Man spricht auch kurz von Nachbarseiten und Nachbarwinkeln sowie von Gegenseiten und Gegenwinkeln.
Wir wissen, daß bei Dreiecken durch die (Längen der) drei Seiten auch die (Größen der) Innenwinkel festgelegt werden (Kongruenzsatz (sss)). Bei Vierecken ist das nicht so. Die Vierecke im Bild D 130 stimmen in den Seiten überein, sind aber nicht einander kongruent.
Aus vier Stäben eines Metallbaukastens kann ein „Gelenkviereck" montiert werden. Ein solches Viereck ist nicht stabil. Stabilität erreicht man durch einen fünften Stab als Diagonale. Daraus wird die Bedeutung des Dreiecks als „starre Figur" für viele technische Belange, etwa für das Bauwesen, ersichtlich.

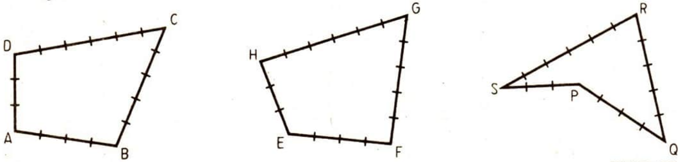


Bild D 130

● 60 Auch durch Festhalten eines Winkels kann man aus einem Gelenkviereck eine starre Figur gewinnen (↗ Bild D 131). Begründe die Starrheit dieser Figur unter Zuhilfenahme von Kongruenzsätzen für Dreiecke!

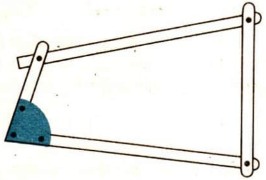


Bild D 131

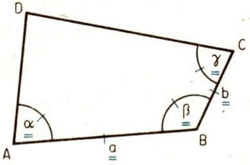



Bild D 132

■ 13 Es ist ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Stücken zu konstruieren: $a = 6{,}0$ cm; $b = 5{,}5$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 134°$; $\gamma = 78°$.
*Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild D 132):*
Das Dreieck $ABC$ ist nach dem Kongruenzsatz (sws) eindeutig konstruierbar. (Dabei braucht die Dreieckseite $\overline{AC}$ als Diagonale des Vierecks nicht eingezeichnet zu werden.)
Den vierten Eckpunkt $D$ erhält man durch geeignetes Antragen der Winkel $\alpha$ und $\gamma$.

● 61 Führe die Konstruktion zum Beispiel D 13 aus und beschreibe sie! Ist die Konstruktion eindeutig ausführbar?

Für die eindeutige Konstruktion eines Vierecks sind wenigstens fünf Stücke erforderlich.

● 62 Läßt sich ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Stücken (eindeutig) konstruieren?
**a)** $a = 7$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 90°$; $\delta = 90°$
**b)** $a = 7$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 90°$; $\delta = 50°$

Wie bei Dreiecken haben die (Größen der) Innenwinkel bei Vierecken immer die gleiche Summe. Wie groß diese Summe ist, erkennt man am Rechteck.

▶ 30 **SATZ: In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 360°.**

● 63 Beweise den Satz D 30!
Beachte: Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, und es gibt nicht nur konvexe Vierecke!

## Aufgaben

1. Eine Strecke $\overline{PQ}$ kann im Gelände nicht direkt vermessen werden. Ermittle die gesuchte Streckenlänge durch eine maßstäbliche Zeichnung
**a)** im Bild D 133,
**b)** im Bild D 134!

Skizzen nicht maßstabgerecht

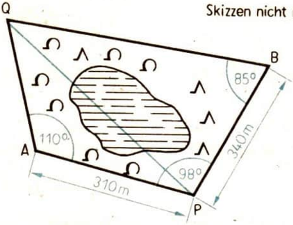



Bild D 133

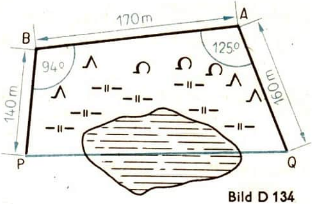



Bild D 134

2. Konstruiere ein Viereck *ABCD* mit folgenden Stücken!
**a)** $a = 4{,}5$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 78°$; $\delta = 115°$
**b)** $b = 5{,}2$ cm; $c = 4{,}2$ cm; $\beta = 135°$; $\gamma = 120°$; $\delta = 32°$
Erläutere, warum die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

3. Konstruiere ein konvexes Viereck *ABCD* mit $a = 4{,}5$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $\beta = 50°$!
Konstruiere ein nicht konvexes Viereck *ABCD* mit den gleichen Stücken!
Zeichne die Diagonalen in beide Vierecke ein!

4. Konstruiere Vierecke *ABCD*, von denen jeweils die folgenden Stücke gegeben sind!
Überdenke jedesmal, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!
**a)** $b = 5{,}5$ cm; $c = 3{,}4$ cm; $d = 4{,}6$ cm; $\gamma = 105°$; $\delta = 98°$
**b)** $a = 3{,}2$ cm; $b = 2{,}8$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 90°$; $\delta = 65°$
**c)** $a = 4{,}4$ cm; $c = 1{,}5$ cm; $d = 2{,}5$ cm; $\alpha = 65°$; $\delta = 73°$
**d)** $a = 2{,}5$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $\beta = 128°$; $\gamma = 93°$
**e)** $a = 3{,}6$ cm; $b = 4{,}3$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $d = 2{,}4$ cm; $\gamma = 90°$

5. Konstruiere Vierecke *ABCD*, von denen jeweils die folgenden Stücke gegeben sind!
Überdenke jedesmal, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!
**a)** $b = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}5$ cm; $\beta = 82°$; $\gamma = 105°$; $\delta = 30°$
**b)** $a = 4{,}2$ cm; $d = 2{,}3$ cm; $e = 2{,}9$ cm; $\alpha = 102°$; $\beta = 51°$
**c)** $c = 3{,}5$ cm; $e = 5{,}0$ cm; $f = 5{,}8$ cm; $\gamma = 95°$; $\delta = 112°$
**d)** $d = 5{,}6$ cm; $e = 4{,}6$ cm; $f = 5{,}4$ cm; $\alpha = 66°$; $\delta = 51°$

6. Ermittle jeweils die fehlenden (Größen der) Innenwinkel im Viereck *ABCD*! Ist das Viereck konvex? Begründe!
**a)** $\alpha = 73°$; $\beta = 128°$; $\gamma = 125°$
**b)** $\alpha = 43°$; $\gamma = 24°$; $\delta = 67°$
**c)** $\beta = 85°$; $\gamma = 205°$; $\alpha = \delta$
**d)** $\alpha = 14°$; $\gamma = 52°$; $\beta = \delta$
**e)** $\delta = 90°$; $\alpha = \beta = \gamma$
**f)** $\gamma = 51°$; $\alpha = \beta = \delta$

## 24 Parallelogramme

*Wir wissen bereits:* Parallelogramme sind spezielle Vierecke. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß jede Seite zu ihrer Gegenseite parallel ist.

▶ 31 **DEFINITION: *Parallelogramm* heißt jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten.**

Parallelogramme werden durch jede Diagonale in zwei zueinander kongruente Dreiecke zerlegt (↗ Bild D 135).

● 64 **a)** Begründe anhand des Bildes D 135, daß im Parallelogramm *ABCD* gilt:
$\triangle ABC \cong \triangle ACD$!

**b)** Untersuche auch die Dreiecke *ABD* und *BCD* auf Kongruenz!

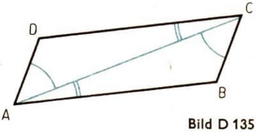


Bild D 135

Aus der Kongruenz der Teildreiecke ergeben sich Eigenschaften aller Parallelogramme.

▶ 32 **SATZ *(Eigenschaften der Parallelogramme)* Für alle Parallelogramme gilt:**
**a) Je zwei Gegenseiten sind gleich lang.**
**b) Je zwei Gegenwinkel sind gleich groß.**
**c) Je zwei Nachbarwinkel haben die Summe 180°.**

Eigentlich sind das drei verschiedene Sätze. Sie konnten zusammengefaßt werden, weil sie die gleiche Voraussetzung haben. Gesondert und außerdem in Wenn-so-Form ausgesprochen lautet der erste Satz:

*V* sei ein Viereck.
Wenn *V* ein Parallelogramm ist,
so hat *V* zwei Paare gleich langer Gegenseiten.

● 65 Sprich auch die anderen beiden Sätze von ▶ D 32 gesondert und in Wenn-so-Form aus!

Vom ersten dieser Sätze gilt auch die Umkehrung:

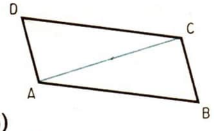
▶ 33 **SATZ: *V* sei ein Viereck.**
**Wenn *V* zwei Paare gleich langer Gegenseiten hat, so ist *V* ein Parallelogramm.**

Man kann den Satz D 33 auch so aussprechen:

Jedes Viereck mit zwei Paaren gleich langer Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

**Beweis von Satz D 33:**

Bild D 136




*Voraussetzung*: Im Viereck *ABCD* gilt
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (↗ Bild D 136)
*Behauptung*: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$
*Beweis*: Wir zeichnen die Diagonale $\overline{AC}$. Dann gilt

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; (sss))
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD$ (entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken)

$AB \parallel CD$ (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)

Nun fehlt noch der Nachweis der Parallelität von *AD* und *BC*.

66 **a)** Welche Winkel sind dafür zu betrachten? Vervollständige den Beweis von Satz D 33!
**b)** Formuliere auch Umkehrungen zu den Sätzen D 32 b) und c)! Überdenke, ob auch sie wahr sind!

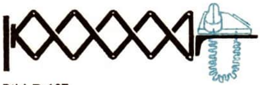


Bild D 137

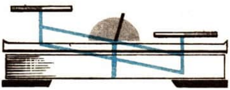


Bild D 138

Der Satz D 33 liegt den sogenannten Gelenkparallelogrammen zugrunde. Sie finden in der Praxis Anwendung (↗ Bild D 137 und 138).
Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms *ABCD* zerlegen dieses in zwei Paare kongruenter Dreiecke (↗ Bild D 139). Daraus ergibt sich der folgende Satz:

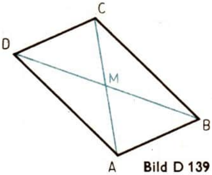



Bild D 139

▸ 34 **SATZ: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.**

67 **a)** Begründe den Satz D 34!
**b)** Sprich den Satz D 34 in „Wenn-so"-Form aus!
Bilde die Umkehrung und überlege, ob sie wahr ist!

Die Sätze D 32 bis D 34 kann man bei der Konstruktion von Parallelogrammen nutzen.

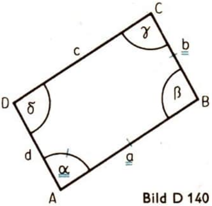



Bild D 140

14 Es ist ein Parallelogramm zu konstruieren, in dem
$a = 5{,}0$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $\alpha = 75°$ ist.
*Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild D 140):*
Das Dreieck *ABD* läßt sich gemäß dem Kongruenzsatz (sws) eindeutig konstruieren, wenn die Seite *d* bekannt ist. Nach Satz D 32 a) ist $b = d$. Also ist mit *b* auch *d* gegeben und

kann zur Konstruktion benutzt werden. Damit sind die drei Eckpunkte $A$, $B$, $D$ des Parallelogramms festgelegt. Den vierten Eckpunkt $C$ kann man durch Parallelenkonstruktion erhalten.

● 68 a) Führe die Konstruktion zum Beispiel D 14 aus und beschreibe sie! Ist sie eindeutig ausführbar?
b) Wie kann man $C$ anders als durch Zeichnen von Parallelen erhalten?
c) Man kann auch zuerst die drei Eckpunkte $A$, $B$, $C$ festlegen. Welchen Teil des Satzes D 32 muß man dann anwenden? Durchdenke noch andere Möglichkeiten!

### Aufgaben

1. Im Parallelogramm $ABCD$ sei jeweils der folgende Winkel bekannt. Berechne die übrigen Winkel!
**a)** $\alpha = 68°$ **b)** $\beta = 74°$ **c)** $\beta = 124°$ **d)** $\gamma = 95°$
**e)** $\gamma = 118°$ **f)** $\delta = 60°$ **g)** $\alpha = 75°$ **h)** $\delta = 45°$

2. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Dann gibt es eine Bewegung, die $ABCD$ auf sich selbst abbildet und bei der $C$ das Bild von $A$ ist. Gib die Bilder der Eckpunkte $B$, $C$ und $D$ an! Welches Bild haben die Seite $a$ und der Winkel $\beta$? Was ist das für eine Bewegung?

3. Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$! Verlängere die Seite $\overline{AB}$ über $B$ hinaus und die Seite $\overline{AD}$ über $D$ hinaus jeweils um sich selbst! Bezeichne die Endpunkte der Verlängerungen mit $E$ und $F$! Ist $C$ der Mittelpunkt von $\overline{EF}$?
Ist das bei jedem Parallelogramm so? Begründe!

4.* Beweise den folgenden Satz: Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten einander parallel und gleich lang sind, so ist es ein Parallelogramm!

5. Konstruiere Parallelogramme $ABCD$ mit folgenden Stücken!
**a)** $a = 2{,}4$ cm; $b = 4{,}8$ cm; $\beta = 74°$ **c)** $a = 5{,}8$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $e = 4{,}5$ cm
**b)** $c = 3{,}6$ cm; $d = 2{,}6$ cm; $\delta = 110°$ **d)** $b = 2{,}5$ cm; $e = 4{,}7$ cm; $\beta = 98°$
Gib die restlichen Stücke an! Erläutere, warum die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

## 25 Besondere Parallelogramme

Wir wissen bereits, daß Rechtecke besondere Parallelogramme und Quadrate spezielle Rechtecke sind (↗ Bild D 141).

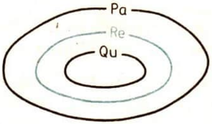


Bild D 141

Entsprechend kann man für eine Definition des Rechtecks den Begriff *Parallelogramm* benutzen, für eine Definition des Quadrats den Begriff *Rechteck*:

Rechtecke sind Parallelogramme, deren Innenwinkel sämtlich rechte Winkel sind.
Quadrate sind Rechtecke, deren vier Seiten gleich lang sind.

● **69** Warum genügt es, bei der Definition des Rechtecks das Vorhandensein (mindestens) eines rechten Winkels als Innenwinkel zu fordern?

▶ **35** **DEFINITIONEN:**
**a)** ***Rechteck* heißt jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel als Innenwinkel.**
**b)** ***Quadrat* heißt jedes Rechteck mit gleich langen Nachbarseiten.**

Da Rechtecke besondere Parallelogramme sind, haben sie alle Eigenschaften, die in Lerneinheit D 24 herausgestellt wurden. Darüber hinaus läßt sich bei ihnen noch eine Aussage über die Länge der Diagonalen machen.

▶ **36** **SATZ: In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.**

● **70** **a)** Beweise den Satz D 36 über den Nachweis der Kongruenz zweier Dreiecke im Rechteck *ABCD* (↗ Bild D 142)!
**b)** Welche besondere Eigenschaft haben die Diagonalen von Quadraten noch zusätzlich?

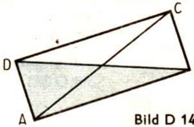
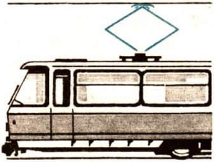


Bild D 142

Über die Eigenschaften hinaus, die alle Parallelogramme haben, gilt für Quadrate:
Nachbarseiten sind gleich lang.
Innenwinkel sind rechte Winkel.
Für Rechtecke als besondere Parallelogramme ist nur eine dieser Eigenschaften charakteristisch. Parallelogramme, bei denen lediglich die erste besondere Eigenschaft der Quadrate gefordert wird, heißen **Rhomben** (Singular: *der Rhombus*).

▶ **37** **DEFINITION: *Rhombus* heißt jedes Parallelogramm mit gleich langen Nachbarseiten.**

● **71** Konstruiere ein Viereck *ABCD*, in dem $a = b = c = d = 4$ cm ist! Was für ein Viereck erhältst du?



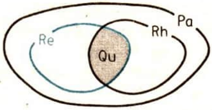


Bild D 144

Statt Rhomben als Parallelogramme mit gleich langen Nachbarseiten zu definieren, kann man sie auch als Vierecke mit vier gleich langen Seiten charakterisieren. (Warum?)

● **72** Erläutere das Bild D 144, in dem *Rh* die Menge aller Rhomben bedeutet!

Bei Quadraten stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Diese Eigenschaft haben sogar alle Rhomben.

▶ **38** **SATZ: In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.**

Für den Beweis dieses Satzes genügt es zu zeigen, daß im Rhombus *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M* (↗ Bild D 145) die Winkel *AMB* und *BMC* kongruent, also gleich groß sind. (Warum?)

*Voraussetzung:* Viereck *ABCD* ist Rhombus, *M* Schnittpunkt von *AC* und *BD* (↗ Bild D 145)

*Behauptung:* $\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle BMC$

*Beweis:*

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (Rhombuseigenschaft nach Definition)

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander, Satz D 34)

$\overline{BM} \cong \overline{BM}$

$\triangle ABM \cong \triangle BCM$ (Kongruenzsatz (sss))

$\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle BMC$ (Entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken), was zu beweisen war.

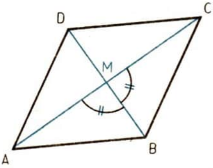



Bild D 145

## Aufgaben

**1.** a) Falte ein Blatt Papier und schneide zwei kongruente Dreiecke aus! Lege aus ihnen ein Parallelogramm!

b) Wieviel verschiedene (d. h. einander nicht kongruente) Parallelogramme kann man aus zwei unregelmäßigen (aus zwei gleichschenkligen, aber nicht gleichseitigen, aus zwei gleichseitigen) Dreiecken legen?
Begründe!

c) Wie müssen die Dreiecke beschaffen sein, damit man ein Rechteck (einen Rhombus, ein Quadrat) erhält?

**2.** Wenn man auf dem „Polylux" zwei farbige Folienstreifen so übereinanderlegt, daß sie einander kreuzen, sieht man ein Parallelogramm.

a) Wie müssen die Streifen beschaffen sein, damit ein Rhombus entsteht?

b) Beide Folienstreifen seien 5 cm breit. Wie lang sind die Seiten des erzeugten Parallelogramms dann mindestens (höchstens)?

**3.*** Das Bild D 146 zeigt eine Figur aus 24 Streichhölzern. Es sollen 6 Streichhölzer entfernt werden, so daß drei Quadrate übrigbleiben.

**4.*** Schneide aus einem gefalteten Stück Papier mit einem einzigen Schnitt einen Rhombus! Wie muß der Schnitt geführt werden, damit ein Quadrat entsteht?

5. Ein Kleingärtner will aus Beton quaderförmige Begrenzungssteine gießen. Er hat sich dafür eine Gußform aus vier Brettern zusammengenagelt (↗ Bild D 147). Wie kann er möglichst einfach kontrollieren, ob die Form rechtwinklig ist?

6. Konstruiere Rhomben $ABCD$ mit folgenden Stücken!
**a)** $a = 4{,}6$ cm; $\alpha = 64°$ **b)** $b = 5{,}4$ cm; $\gamma = 120°$
**c)** $b = 3{,}7$ cm; $e = 6{,}0$ cm **d)** $e = 5{,}2$ cm; $f = 3{,}6$ cm

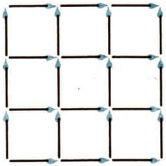


Bild D 146

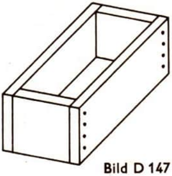


Bild D 147

## 26 Trapeze

▶ 39 **DEFINITION: *Trapez* heißt jedes Viereck mit zwei parallelen Seiten.**

● 73 Zeichne eine Darstellung der Beziehungen zwischen Vierecksarten wie im Bild D 144 (↗ Lerneinheit D 25), die außerdem noch die Menge $Tr$ der Trapeze erfaßt!

Ist ein Trapez kein Parallelogramm, so bezeichnet man die nicht zueinander parallelen Gegenseiten als **Schenkel** des Trapezes (↗ Bild D 148). Jedes Lot von einem Punkt einer der parallelen Seiten auf die andere (bzw. die durch sie bestimmte Gerade) bezeichnet man als **Höhe** des Trapezes. Meist zeichnet man sie wie im Bild D 148 von einem Eckpunkt aus.

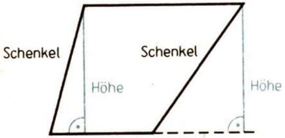



Bild D 148

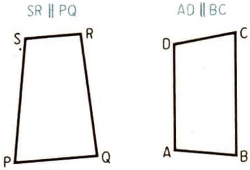



Bild D 149

● 74 Das Bild D 149 zeigt zwei Trapeze, die keine Parallelogramme sind.
**a)** Gib die Schenkel dieser Trapeze an!
**b)** Sabine behauptet: „In jedem Trapez haben Innenwinkel, die ein und demselben Schenkel anliegen, die Summe 180°.“ Stimmt das? Begründe!
Untersuche die entsprechende Aussage für Parallelogramme!

Für die Konstruktion von Trapezen können wie bei Dreiecken recht unterschiedliche Stücke vorgegeben sein.

● 75 **a)** Konstruiere ein Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) mit
$a = 6{,}5$ cm; $b = 3{,}8$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 65°$!
**b)** Erläutere, warum die Konstruktion nicht eindeutig ausführbar ist!
**c)** Was erhält man, wenn man $b = d = 3{,}5$ cm statt $b = 3{,}8$ cm in a) wählt?

Das Bild D 150 zeigt ein Trapez, das zwei gleich lange, aber einander nicht parallele Gegenseiten hat. Es ist ein **gleichschenkliges Trapez**.

● 76 **a)** Wie kann man das gleichschenklige Trapez im Bild D 150 zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzen?
**b)** Untersuche die gleichschenkligen Trapeze auf Axialsymmetrie! Was gilt für ihre Innenwinkel?

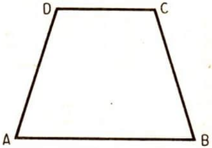


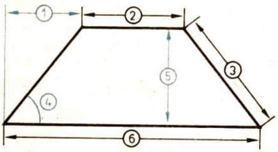
Bild D 150

## Aufgaben

1. Von einem Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) sind zwei Winkel bekannt. Ermittle die anderen beiden!
**a)** $\alpha = 75°$; $\beta = 81°$ **b)** $\alpha = 64°$; $\gamma = 88°$ **c)** $\beta = 90°$; $\delta = 112°$

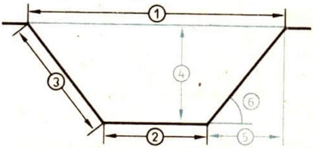
2. Konstruiere Trapeze $ABCD$ ($AB \parallel CD$) mit folgenden Stücken!
**a)** $a = 6{,}1$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 63°$
**b)** $a = 7{,}3$ cm; $d = 4{,}0$ cm; $\alpha = 61°$; $\beta = 105°$
**c)** $a = 8{,}8$ cm; $h = 3{,}2$ cm; $\gamma = 65°$; $\delta = 95°$
**d)** $b = 3{,}5$ cm; $c = 3{,}2$ cm; $\beta = 28°$; $e = 1{,}7$ cm

3. Dämme haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (↗ Bild D 151). Fertige für folgende Abmessungen maßstäbliche Zeichnungen an!
**a)** Dammsohle 13,0 m; Dammkrone 4,0 m; Dammhöhe 3,4 m
**b)** Dammsohle 14,0 m; Dammhöhe 3,2 m; Böschungswinkel 35°
**c)** Böschungslänge 7,0 m; Dammkrone 4,3 m; Böschungswinkel 38°




① Böschungsbreite ② Dammkrone ③ Böschungslänge ④ Böschungswinkel ⑤ Dammhöhe ⑥ Dammsohle

Bild D 151




① Grabenbreite ② Grabensohle ③ Böschungslänge ④ Grabentiefe ⑤ Böschungsbreite ⑥ Böschungswinkel

Bild D 152

4. Gräben und Kanäle haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (↗ Bild D 152).

Fertige für folgende Kanalbauten maßstäbliche Zeichnungen an!
**a)** Grabenbreite 5,4 m; Grabentiefe 2,6 m; Böschungslänge 3,2 m
**b)** Grabensohle 3,2 m; Grabentiefe 2,2 m; Böschungswinkel 28°
**c)** Grabenbreite 20,0 m; Grabensohle 8,5 m; Böschungslänge 7,2 m

**5.** In einem Trapez *ABCD* ($AB \parallel CD$) seien *E* und *F* die Mittelpunkte der Schenkel. Die Strecke $\overline{EF}$ bezeichnet man als **Mittellinie** des Trapezes. Von *E* und *F* seien die Lote auf *AB* und *CD* gefällt. Fußpunkte seien *U, V, W, X* (↗ Bild D 153).
**a)** Begründe die folgenden Kongruenzbeziehungen:
$\triangle AUE \cong \triangle DVE$; $\triangle BWF \cong \triangle CXF$!
**b)** Erläutere, wieso aus diesen Beziehungen folgt, daß die Mittellinie $\overline{EF}$ parallel zu $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist!

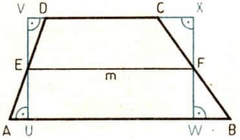



Bild D 153

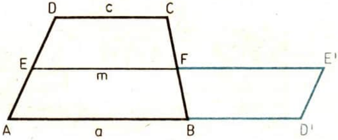



Bild D 154

**6.** In einem Trapez *ABCD* ($AB \parallel CD$) sei die (Länge der) Mittellinie mit *m* bezeichnet. Begründe anhand des Bildes D 154, daß zwischen *m* und den (Längen der) Seiten *a* und *c* die Beziehung $m = \frac{a+c}{2}$ besteht!

**7.*** Zeichne einen Kreis mit beliebigem Radius und in ihm zwei zueinander parallele Sehnen! Verbinde die Endpunkte der Sehnen so miteinander, daß du ein Viereck erhältst! Was für ein Viereck ist das? Ist das stets so?
Begründe!

## 27 Drachenvierecke

Eine weitere Art von Vierecken hat ihren Namen nach einem beliebten Kinderspielzeug, das schon mindestens seit dem 15. Jahrhundert bekannt ist und vermutlich aus China stammt (↗ Bild D 155).

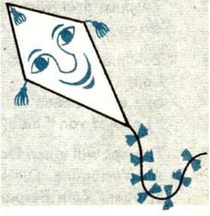


Bild D 155

● **77** Erläutere, warum die folgenden Erklärungsversuche nicht nur Figuren erfassen, die wie Drachen aussehen! (Benutze Bild D 156!)
**a)** Drachenviereck heißt jedes Viereck, das zwei gleich große Gegenwinkel hat.
**b)** Drachenviereck heißt jedes Viereck, das zwei Paare gleich lange Nachbarseiten hat.

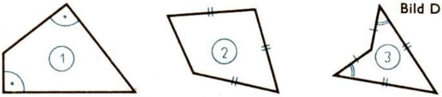


Bild D 156

▶ 40

> **DEFINITION:** ***Drachenviereck*** **heißt jedes konvexe Viereck, bei dem jede Seite eine gleich lange Nachbarseite hat.**

● 78 **a)** Gib alle dir bekannten Vierecksarten an, die Drachenvierecke sind!
**b)** Konstruiere ein Drachenviereck *ABCD* mit $a = b = 4{,}2$ cm; $\alpha = 115°$; $\beta = 50°$!
**c)** Suche nach besonderen Eigenschaften, die jedes Drachenviereck hat! (Denk an den Bau eines Drachens!)

▶ 41

> **SATZ: In jedem Drachenviereck sind zwei Gegenwinkel gleich groß, und die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.**
> **Die Diagonale, die die Scheitelpunkte gleich großer Gegenwinkel verbindet, wird von der anderen Diagonalen halbiert.**

Für den Beweis dieses Satzes kann man sich auf folgendes stützen (↗ Bild D 157):
Jedes Drachenviereck wird von einer Diagonalen in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt. (Warum?)
Die Mittelsenkrechte dieser Diagonalen ist gemeinsame Symmetrieachse beider Dreiecke. Auf ihr liegt die andere Diagonale. Auf eine ausführliche Darstellung des Beweises verzichten wir.

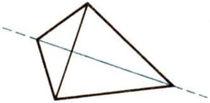


Bild D 157

## Aufgaben

**1.** Konstruiere Drachenvierecke *ABCD* mit folgenden Stücken!
**a)** $a = 2{,}2$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $\beta = 145°$
**b)** $b = 6{,}1$ cm; $c = 2{,}8$ cm; $f = 7{,}0$ cm
**c)** $e = 10{,}2$ cm; $\alpha = 124°$; $\gamma = 42°$
Durchdenke jedesmal, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

**2.** Zeichne drei verschiedene (d. h. nicht einander kongruente) Drachenvierecke, deren Diagonalen 4 cm und 6 cm lang sind!

**3.** Zeichne ein Viereck, das kein Drachenviereck ist und für dessen Diagonalen e und *f* gilt
**a)** e und *f* stehen aufeinander senkrecht,
**b)** e wird von *f* halbiert!

**4.** Thomas will einen Drachen bauen. Er hat zwei Leisten von 80 cm und 54 cm Länge zur Verfügung. Die kürzere Querleiste will er 20 cm von der Spitze entfernt anbringen. Zum Bespannen hat er einen Bogen Papier, der 90 cm lang und 52 cm breit ist. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung fest, ob das Papier ausreicht!

# 28 Axialsymmetrie bei Vierecken

Die Zusammenfassung auf der 3. Umschlagseite des Buches enthält eine Übersicht vom beliebigen Viereck bis zum Quadrat als speziellstem Fall.

● **79** **a)** Welche Vierecke sind axialsymmetrisch?
**b)** Wieviel Symmetrieachsen hat ein Quadrat?

Bei den Drachenvierecken wurde bereits auf Achsensymmetrie verwiesen (↗ Satz D 41). Wichtige Eigenschaften der Drachenvierecke kann man sich über die Axialsymmetrie gut merken. Auch das gleichschenklige Trapez ist eine axialsymmetrische Figur (↗ Auftrag D 76).

● **80** **a)** Christina behauptet: „Jedes Trapez, das achsensymmetrisch ist, ist ein gleichschenkliges Trapez."
Welche besonderen Parallelogramme müßte man auch als gleichschenklige Trapeze ansehen, wenn sie recht hätte?
**b)** Erläutere die Übersicht im Bild D 158!

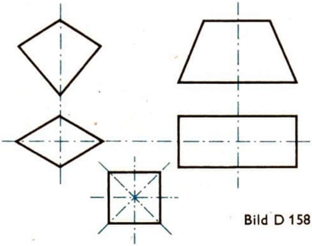


Bild D 158

## Aufgaben

**1.** Untersuche, ob die folgenden Aussagen wahr sind!
**a)** Halbiert in einem Trapez eine Diagonale die andere, so ist es ein Parallelogramm.
**b)** Wird ein Viereck durch eine seiner Diagonalen in kongruente Dreiecke zerlegt, so ist es ein Parallelogramm.
**c)** Hat ein Viereck eine Symmetrieachse, die durch gegenüberliegende Eckpunkte geht, so ist es ein Drachenviereck.
**d)** Hat ein Viereck zwei Symmetrieachsen, die durch Eckpunkte gehen, so ist es ein Rhombus.

**2.** Ergänze so, daß wahre Aussagen entstehen!
**a)** Hat ein Parallelogramm eine Symmetrieachse, die durch die Mittelpunkte zweier Gegenseiten geht, so ist es ein ...
**b)** Hat ein Rechteck eine Symmetrieachse, die durch einen Eckpunkt geht, so ist es ein ...
**c)** Hat ein Viereck drei gleich lange Seiten und eine Symmetrieachse, die durch einen Eckpunkt geht, so ist es ein ...

3. Welche Parallelogramme sind zugleich axialsymmetrische Trapeze und Drachenvierecke?

4.* Axialsymmetrie bei einem Viereck bedeutet, daß es eine Spiegelung gibt, bei der das Viereck sich selbst als Bild hat. Untersuche, welche Vierecke durch eine Drehung mit dem Drehwinkel 180° auf sich selbst abgebildet werden (welche Vierecke „zentralsymmetrisch" sind)! Ermittle auch das Drehzentrum (das „Symmetriezentrum")!

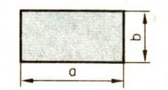
## Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

## 29 Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

● 81 Ein Zimmer von 6,00 m Länge und 4,00 m Breite soll vollständig mit Auslegware ausgestattet werden. Die gewählte Auslegware wird in Rollen von 2,00 m Breite geliefert. Ein Meter von einer solchen Rolle kostet 100 Mark.
**a)** Wieviel Mark kostet die Auslegware für das Zimmer?
**b)** Wie hoch sind die Materialkosten für das Auslegen eines Quadratmeters?
**c)** Wieviel Meter Scheuerleisten benötigt man?

Für viele praktische Fragestellungen muß man den Flächeninhalt von Rechtecken ermitteln.

▶ 42 **SATZ: Für jedes Rechteck ist sein Flächeninhalt $A = a \cdot b$.**
**Dabei sind *a* und *b* die Längen benachbarter Seiten.**




● 82 Wie kann man den Umfang eines Rechtecks ermitteln?

■ 15 Hat ein Rechteck Seiten mit den Längen 4,50 m und 3,20 m, so ist sein Flächeninhalt
$A = 4{,}50\ \text{m} \cdot 3{,}20\ \text{m} = \underline{\underline{14{,}4\ \text{m}^2}}$.
Bei der Angabe des Flächeninhalts von 14,4 m² unterscheiden wir den Zahlenwert (hier 14,4) und die Einheit (hier m²).

● 83 In welchen Einheiten können wir den Flächeninhalt auch angeben?

Sind die Seitenlängen eines Rechtecks $a = 4$ cm und $b = 3$ cm, so gibt sein Flächeninhalt 12 cm² die Anzahl der Einheitsquadrate mit der Seitenlänge 1 cm an, die das Rechteck ausfüllen (↗ Bild D 159).

Bild D 159

Die Zahlenwerte der Seitenlängen eines Rechtecks können jedoch irgendwelche gebrochenen Zahlen (z. B. $a = \frac{5}{6}$ m und $b = 0{,}54$ m) sein. Auch in solchen Fällen berechnen wir den Flächeninhalt nach der Formel $A = a \cdot b$.

### Aufgaben

1. Eine quaderförmige Transportkiste ist 1,2 m lang, 75 cm breit und 60 cm hoch. Boden und Seitenwände werden, um Beschädigungen des Transportgutes zu vermeiden, vollständig mit starkem Papier ausgekleidet. Wieviel Quadratmeter Papier werden insgesamt für 20 solcher Kisten benötigt?

2. Die Verpackung eines Fernsehgerätes ist aus Wellpappe und hat folgende Maße: Länge 0,65 m, Breite 35 cm, Höhe 5,0 dm. Wieviel Quadratmeter Pappe werden insgesamt für die Verpackung von 30 Fernsehgeräten benötigt?

3. Ergänze die folgenden Tabellen! Dabei ist $A$ der Flächeninhalt und $u$ der Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a$ und $b$.

**a)**

| $a$ | $b$ | $u$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 56 cm | 0,20 m | | |
| | 21,0 m | | 420 m² |
| 0,410 km | | | 360 ha |
| 72 mm | | 200 mm | |

**b)**

| $a$ | $b$ | $u$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 42 cm | 2,1 dm | | |
| 25 m | | | 900 m² |
| | 0,350 km | | 153 ha |
| | 640 mm | 5,00 m | |

4. Fußballfelder sind 45 m bis 90 m breit und 90 m bis 120 m lang. Welchen Flächeninhalt hat ein Fußballfeld **a)** mindestens, **b)** höchstens?

5. $a_1$ und $b_1$ sind die Seitenlängen eines Rechtecks, $a_2$ und $b_2$ die eines zweiten Rechtecks. Welche Beziehung besteht zwischen den Flächeninhalten $A_1$ und $A_2$, wenn folgendes gilt:
**a)** $a_1$ und $a_2$ sind gleich, $b_2$ doppelt so groß wie $b_1$,
**b)** $a_1$ ist doppelt so groß wie $a_2$, $b_1$ und $b_2$ sind gleich,
**c)** $a_1$ ist doppelt so groß wie $a_2$, $b_1$ ist dreimal so groß wie $b_2$?

## 30 Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

■ 16 Der Flächeninhalt $A$ des Vielecks im Bild D 160 ist zu berechnen.
**a)** Das Vieleck kann in zwei Rechtecke zerlegt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten (↗ Bild D 161).
**b)** Man kann das Vieleck aber auch zu einem Rechteck ergänzen und den Flächeninhalt $A$ so ermitteln (↗ Bild D 162).

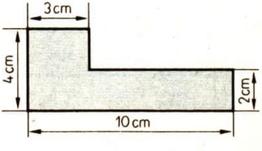



Bild D 160


Bild D 161

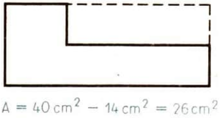



Bild D 162

● **84** Ein Garten hat die dem Bild D 163 zu entnehmende Gestalt.
**a)** Wie groß ist sein Flächeninhalt?
**b)** Wie lang ist die gesamte Umzäunung?

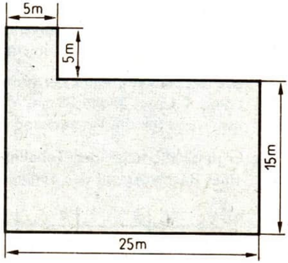



Bild D 163

Der Umfang eines Vielecks ergibt sich als Summe der Längen aller Seiten. Beliebigen Vielecken ist ebenfalls eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet.
Dabei gilt:

▶ **43** **SATZ: Kongruente Vielecke haben denselben Flächeninhalt (↗ Bild D 164).**

▶ **44** **SATZ: Ist ein Vieleck *V* in zwei oder mehr Vielecke zerlegt, so ist der Inhalt von *V* gleich der Summe der Inhalte der Teilvielecke (↗ Bild D 165).**

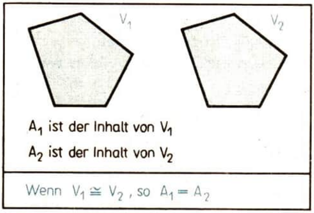



Bild D 164

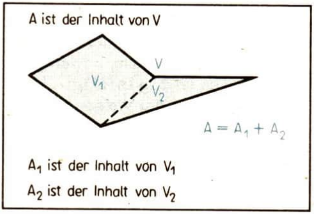



Bild D 165

Die Vielecke im Bild D 166 kann man nicht in Rechtecke zerlegen. Um auch für solche Vielecke den Flächeninhalt berechnen zu können, beschäftigen wir uns zunächst mit der Ermittlung des Flächeninhalts von Dreiecken.

● **85** Wie würdest du dann den Flächeninhalt der Vielecke im Bild D 166 ermitteln?

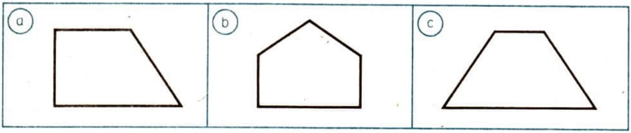



Bild D 166

## Aufgaben

**1.** Ermittle jeweils den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figuren!

**a)** 6-Eck (Bild D 167) mit $a = 10{,}5$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm und $d = 7{,}0$ cm

**b)** 6-Eck (Bild D 167) mit $a = 12{,}2$ dm, $b = 5{,}5$ dm, $c = 4{,}0$ dm und $d = 15{,}5$ dm

**c)** 8-Eck (Bild D 168) mit $a = 3{,}5$ cm, $b = 5{,}0$ cm, $c = 12{,}0$ cm, $d = 3{,}0$ cm und $e = 6{,}5$ cm

**d)** 8-Eck (Bild D 168) mit $a = 6{,}2$ dm, $b = 5{,}0$ dm, $c = 18{,}2$ dm, $d = 4{,}5$ dm und $e = 9{,}5$ dm

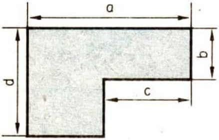



Bild D 167

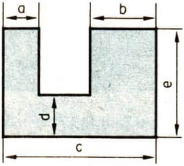



Bild D 168

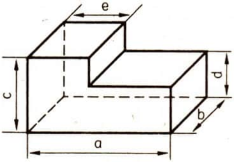



Bild D 169

**2.** Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 167 soll $50\ \mathrm{m}^2$ groß sein, $a = 10$ m, $d = 8$ m und $b = 3$ m. Wie groß muß $c$ sein?

**3.** Für den Versand von Maschinen werden Holzkisten angefertigt (↗ Bild D 169). Dabei ist

$a = 5{,}00$ m, $b = 2{,}00$ m, $c = 2{,}10$ m, $d = 1{,}10$ m und $e = 2{,}00$ m.

**a)** Wieviel Quadratmeter Holz braucht man für eine solche Kiste?

**b)** Wieviel Holz wäre für eine quaderförmige Kiste mit den Abmessungen $a$, $b$ und $c$ erforderlich?

**c)** Wieviel Quadratmeter Holz spart man bei der Herstellung von 50 Versandkisten?

**4.** Zeichne die angegebenen Vielecke in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm! Ermittle Umfang und Flächeninhalt

**a)** des Vielecks *ABCDEF* mit *A* (1; 1), *B* (6; 1), *C* (6; 5), *D* (3; 5), *E* (3; 3), *F* (1; 3),
**b)** des Vierecks *ABCD* mit *A* (0; 0), *B* (4; 0), *C* (4; 6), *D* (0; 6)!

5. Wir wissen: Wenn Vielecke $V_1$ und $V_2$ kongruent sind, so haben die Vielecke $V_1$ und $V_2$ denselben Flächeninhalt. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

## 31 Der Flächeninhalt von Dreiecken

● **86** Ermittle den Flächeninhalt der rechtwinkligen Dreiecke im Bild D 170! Jedes Kästchen soll eine Seitenlänge von 1 cm haben.

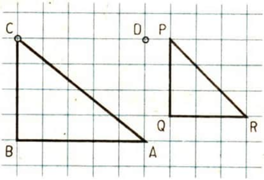
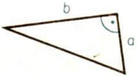



Bild D 170

▶ **45** **SATZ: Für jedes rechtwinklige Dreieck ist sein Flächeninhalt**
$$A = \frac{a \cdot b}{2}.$$
**Dabei sind *a* und *b* die Längen der dem rechten Winkel anliegenden Seiten.**




Eine Beweisidee können wir dem Bild D 171 entnehmen.
*Voraussetzung:* Dreieck *ABC* ist rechtwinklig. Die Seiten, die dem rechten Winkel anliegen, haben die Längen *a* und *b*.
*Behauptung:* $A = \frac{a \cdot b}{2}$,
wobei *A* der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* ist.
*Beweis:* Wir können das Dreieck *ABC* wie im Bild D 171 zu einem Rechteck ergänzen.

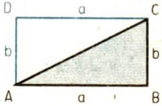



Bild D 171

| | |
|---|---|
| $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ | ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, (sss)) |
| $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ haben denselben Flächeninhalt *A*. | (Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz D 43) |
| *ABCD* hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. | (Flächeninhalt des Rechtecks, Satz D 42) |
| $A + A = a \cdot b$ | (Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz D 44) |
| Also gilt: $A = \frac{a \cdot b}{2}$, | was zu beweisen war. |

● 87 Ermittle den Flächeninhalt der Dreiecke $ABC$ und $PQR$ im Bild D 172! Jedes Kästchen soll eine Seitenlänge von 1 cm haben.

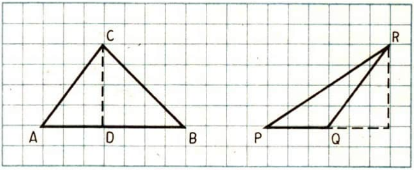
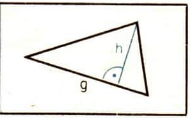



Bild D 172

▶ 46

**SATZ: Für jedes Dreieck ist sein Flächeninhalt $A = \frac{g \cdot h}{2}$.**

**Dabei ist $g$ die Länge einer beliebigen Seite und $h$ die Länge der zugehörigen Höhe.**




*Voraussetzung:* $g$ ist die Länge einer Seite, $h$ die Länge der zugehörigen Höhe eines Dreiecks $ABC$.

*Behauptung:* $A = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei $A$ der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ ist.

*Beweis:* Für die Lage der Höhe $h$ zur Seite $g$ des Dreiecks $ABC$ sind drei Fälle möglich.

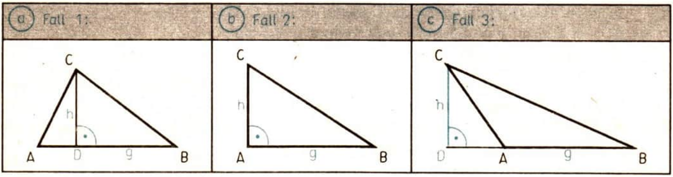



Bild D 173

Wir betrachten hier nur den Fall 1:
Der Flächeninhalt des Dreiecks $ADC$ sei $A_1$, der des Dreiecks $BCD$ sei $A_2$. Dann gilt

(1) $A = A_1 + A_2$ (Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz D 44)

(2) $A_1 = \frac{\overline{AD} \cdot h}{2}$ und $A_2 = \frac{\overline{DB} \cdot h}{2}$ (Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, Satz D 45)

(3) $A = \frac{\overline{AD} \cdot h}{2} + \frac{\overline{DB} \cdot h}{2}$ ((1) und (2))

$= \frac{\overline{AD} \cdot h + \overline{DB} \cdot h}{2}$

$= \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot h}{2}$ (Distributivgesetz)

$= \frac{g \cdot h}{2}$, *was zu beweisen war.*

● **88** Begründe den Satz D 46 **a)** für den Fall 2, **b)** für den Fall 3!

In einem stumpfwinkligen Dreieck kann man also auch jede der beiden kürzeren Seiten als „Grundseite" $g$ wählen.

● **89** Im Bild D 174 ist $g$ parallel zur Geraden $AB$. Vergleiche die Flächeninhalte der Dreiecke $ABC$, $ABD$ und $ABE$!
Begründe deine Aussage!

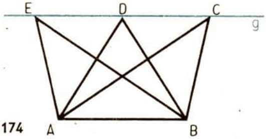



Bild D 174

## Aufgaben

**1.** Zeichne ein Dreieck $ABC$ in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm)! Ermittle den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks!
**a)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(4;\,1)$, $C\,(1;\,3)$ **b)** $A\,(1;\,3{,}5)$, $B\,(3;\,3{,}5)$, $C\,(3;\,0)$

**2.** Zeichne folgende Dreiecke und ermittle jeweils den Flächeninhalt und den Umfang!
**a)** $\gamma = 90°$, $b = 6$ cm, $a = 3$ cm **b)** $\beta = 90°$, $b = 7{,}5$ cm, $a = 3{,}4$ cm

**3.** Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 175!
**a)** $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}0$ cm, $c = 6{,}0$ cm **c)** $a = 5{,}3$ m, $b = 2{,}0$ m, $c = 3{,}3$ m
**b)** $a = 5{,}5$ dm, $b = 2{,}0$ dm, $c = 7{,}5$ dm **d)** $a = 2{,}0$ km, $b = 2{,}5$ km, $c = 3{,}0$ km

**4.** Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 176!
**a)** $a = 2{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $d = 2{,}5$ cm
**b)** $a = 1{,}5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 3{,}0$ cm, $d = 4{,}0$ cm

**5.** **a)** Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 175 soll 22 cm², $b = 5{,}5$ cm und $c = 6{,}0$ cm sein. Wie groß muß $a$ sein?
**b)** Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 176 soll 25 cm², $a = 2{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm und $c = 4{,}0$ cm sein. Wie groß muß $d$ sein?

**6.** Zeichne Dreiecke mit folgenden Stücken! Ermittle den Umfang und den Flächeninhalt!
**a)** $a = 3{,}0$ cm, $c = 6{,}0$ cm, $\alpha = 30°$ **b)** $c = 8{,}0$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 40°$
**c)** $c = 9{,}0$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$ **d)** $c = 5{,}5$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 50°$

**7.** Deute die Dreiecke aus Aufgabe 6 als Zeichnungen im Maßstab 1 : 500! Ermittle Umfang und Flächeninhalt der Originaldreiecke!

**8.** Ergänze die Tabelle! $g$ ist die Länge einer Seite, $h$ die Länge der zugehörigen Höhe und $A$ der Flächeninhalt des Dreiecks.

| $A$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|
| | 1,7 m | 0,8 m |
| | 31,6 cm | 60,4 cm |
| 46 cm² | 20 cm | |
| 10,2 ha | | 0,35 km |
| | 2 dm | 0,8 m |
| | 2 m | 1 m |

**9.** Wann gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks *ABC* die Formel $A = \frac{a \cdot c}{2}$ ?

**10.** Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild D 177!

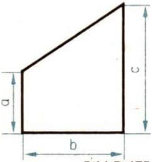


Bild D 175

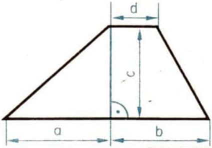


Bild D 176

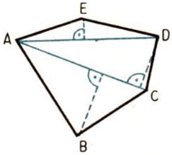


Bild D 177

**11.** Das Bild D 178 zeigt den Grundriß eines Gartens im Maßstab 1 : 1 000.
**a)** Berechne den Flächeninhalt in Quadratmetern!
**b)** Der Garten soll einen Zaun aus Maschendraht erhalten. Wieviel Meter Maschendraht sind zu bestellen?

**12.** Begründe, daß die Vielecke in den Bildern D 179 und D 180 denselben Flächeninhalt haben!

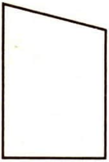


Bild D 178

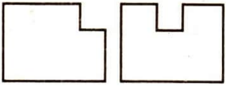


Bild D 179

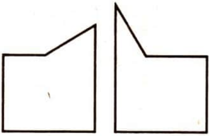


Bild D 180

## 32 Der Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen

● **90** Zeichne mit Hilfe der Lochschablone das Trapez *ABCD* mit *A* (22), *B* (24), *C* (18) und *D* (17)! Ermittle seinen Flächeninhalt!

Den Flächeninhalt eines Vierecks (↗ Bild D 181) kann man folgendermaßen ermitteln:
1. Man zerlegt das Viereck in Dreiecke und ermittelt deren Flächeninhalte.
2. Man berechnet die Summe dieser Inhalte und erhält den gesuchten Flächeninhalt.

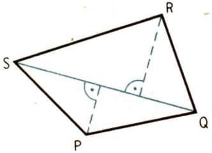


Bild D 181

Für ein Trapez $ABCD$ (↗ Bild D 182) ergibt sich dabei:

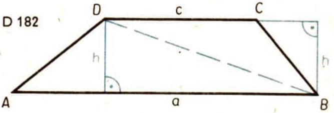
$\triangle\, ABD$ hat den Flächeninhalt $A_1 = \frac{a \cdot h}{2}$
$\triangle\, BCD$ hat den Flächeninhalt $A_2 = \frac{c \cdot h}{2}$ (Satz D 46)

$ABCD$ hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{c \cdot h}{2}$$ (Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz D 44)

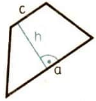
$$A = \frac{a \cdot h + c \cdot h}{2} = \frac{(a+c)\,h}{2}$$ (Distributivgesetz)

Bild D 182




Damit haben wir den folgenden Satz erhalten:

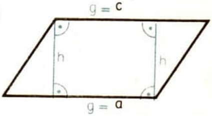
▶ 47 **SATZ: Für jedes Trapez ist sein Flächeninhalt $A = \frac{(a+c)\,h}{2}$. Dabei sind $a$ und $c$ die Längen paralleler Seiten, $h$ die Länge einer zugehörigen Höhe.**



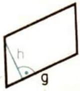

Ist ein Trapez sogar Parallelogramm (↗ Bild D 183), so sind gegenüberliegende Seiten stets gleich lang. Wir können $g = a = c$ setzen und erhalten für den Flächeninhalt $A$ des Parallelogramms:

$$A = \frac{(g+g) \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{2} = g \cdot h\,.$$

Bild D 183




▶ 48 **SATZ: Für jedes Parallelogramm ist der Flächeninhalt $A = g \cdot h$. Dabei ist $g$ die Länge einer beliebigen Seite, $h$ die Länge einer zugehörigen Höhe.**



## Aufgaben

1. Zeichne die folgenden Vierecke *ABCD* in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm)! Ermittle ihren Umfang und Flächeninhalt!
   **a)** $A\,(4;\,1)$, $B\,(10;\,1)$, $C\,(5;\,4)$, $D\,(1;\,4)$
   **b)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(4;\,0)$, $C\,(4;\,4)$, $D\,(1;\,4)$
   **c)** $A\,(3;\,0)$, $B\,(7;\,4)$, $C\,(3;\,4)$, $D\,(1;\,2)$
   **d)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(5;\,1)$, $C\,(8;\,4)$, $D\,(4;\,4)$

2. Zeichne Vierecke mit folgenden Stücken! Ermittle den Flächeninhalt und Umfang dieser Vierecke!
   **a)** $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 6{,}4$ cm, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$
   **b)** $a = 4{,}0$ cm, $b = 2{,}0$ cm, $d = 3{,}0$ cm, $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$
   **c)** $a = 7{,}0$ cm, $b = 4{,}0$ cm, $\alpha = 130°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 130°$

3. Ermittle den Flächeninhalt des Originalvielecks im Bild D 184 (Maßstab 1 : 100)!

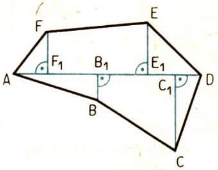


Bild D 184

4. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Deiches, dessen Sohle 44 m, dessen Krone 16 m und dessen Höhe 11 m beträgt?

5. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Kanals, der oben 13,80 m, unten 10,40 m breit und der 3,80 m tief ist?

6. Das Titelbild auf dem Buchdeckel dieses Lehrbuches zeigt ein Rechteck und ein weiteres, mit starken Linien gezeichnetes Parallelogramm. Begründe, daß diese Figuren denselben Flächeninhalt haben!

7. Ermittle den Flächeninhalt der im Bild D 185 dargestellten Wandfläche eines Treppenflurs!

8. Das Bild D 186 zeigt den Grundriß eines neu anzulegenden Parks im Maßstab 1 : 10000.
   **a)** Berechne den Flächeninhalt in Hektar!
   **b)** Am äußeren Rand entlang soll eine Hecke gepflanzt werden. Wieviel Meter Hecke ergibt das?

9. Das Bild D 187 zeigt die Giebelseite eines Hauses. Die Wand muß neu mit Farbe gestrichen werden.
   Wieviel Mark kostet der Anstrich, wenn man einschließlich aller Nebenarbeiten für das Quadratmeter 2,45 M berechnen muß?

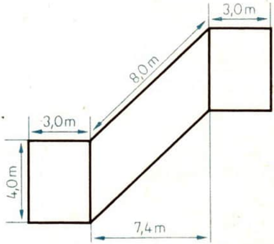


Bild D 185

10. Berechne den Flächeninhalt der im Bild D 188 angegebenen Bleche (Maße in Millimeter)!

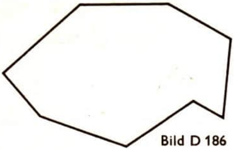


Bild D 186

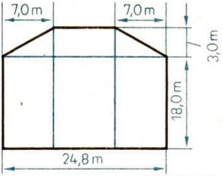



Bild D 187

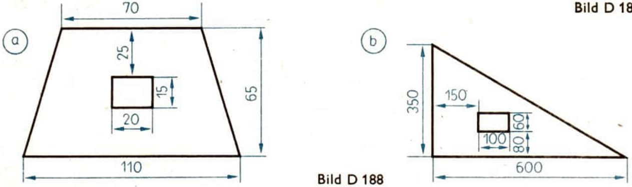



Bild D 188

**11.** Eine dreieckige Weidefläche (eine Seite 310 m; zugehörige Höhe 185 m) wird mit 8,7 dt Mineraldünger bestreut.

**a)** Entwirf eine Skizze!

**b)** Berechne den Flächeninhalt in Hektar!

**c)** Wieviel Dezitonnen Dünger wurden je Hektar gestreut?

**12.** Vergleiche für die Drachenvierecke im Bild D 189 die Flächeninhalte und die Längen der Diagonalen!

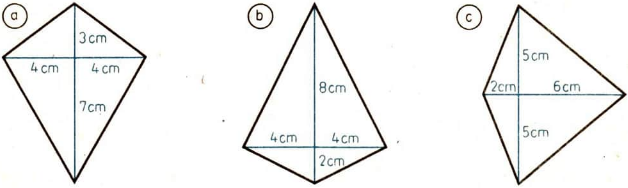



Bild D 189

## Aufgaben zur Übung und Wiederholung

**1.** Es gibt zwei verschiedene Bewegungen, die einen Rhombus *ABCD* so auf sich abbilden, daß *A* als Bildpunkt *C* hat. Vervollständige für diese Bewegungen die Tabellen!

| Punkt | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| Bildpunkt | *C* | | | |

| Punkt | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| Bildpunkt | *C* | | | |

**2.** Unter welcher Bedingung sind die angegebenen Figuren einander kongruent?

**a)** zwei Kreise **c)** zwei Dreiecke **e)** zwei Geraden
**b)** zwei Quadrate **d)** zwei Strecken **f)** zwei Winkel

**3.** Zeichne ein rechtwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck! Ergänze die Figur durch ihr Bild bei der angegebenen Bewegung!

**a)** Spiegelung an der längsten Seite
**b)** Spiegelung an einer der kürzeren Seiten
**c)** Drehung um den Mittelpunkt der längsten Seite, Drehwinkel 180°
**d)** Drehung um den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten, Drehwinkel 180°

Was für eine Gesamtfigur entsteht jeweils? Was würde man bei einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck erhalten?

**4.** Von dem Dreieck $ABC$ im Bild D 190 sind bekannt: $\overline{AD} \cong \overline{EB}$, $\sphericalangle\, CDE \cong \sphericalangle\, DEC$. Was für ein Dreieck ist $ABC$? Begründe!

**5.** $P$, $Q$, $R$ und $S$ sind die Mittelpunkte der Seiten des Quadrats $ABCD$ (↗ Bild D 191). Begründe, daß $PQRS$ ebenfalls ein Quadrat ist!

**6.** Ermittle die Länge der im Gelände nicht zugänglichen Strecke $\overline{PQ}$ durch eine maßstäbliche Zeichnung! (↗ Bild D 192)

**7.** Von dem im Bild D 193 skizzierten Viereck $ABCD$ sind durch Messung die angegebenen Winkelgrößen und $\overline{BD} = 250$ m ermittelt worden.

**a)** Ordne die gezeichneten Strecken der Größe nach!
**b)** Ist das Viereck $ABCD$ ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Drachenviereck?
**c)** Ermittle mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung die Längen von $\overline{AC}$ und den gezeichneten Strecken, den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$!

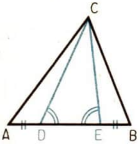



Bild D 190

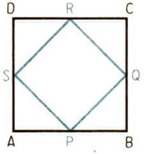



Bild D 191

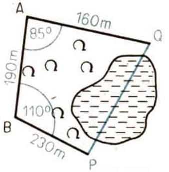



Bild D 192

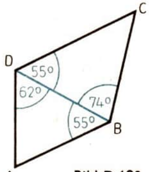



Bild D 193

**8.** Zeichne ein Dreieck! Vergleiche die Differenz der Längen zweier Seiten mit der Länge der dritten! Was stellst du fest?

**9.*** Für ein Dreieck $ABC$ ist $a = 4{,}2$ cm und $b = 2{,}6$ cm.
Was kann man über die Länge der dritten Seite sagen?

# R Register

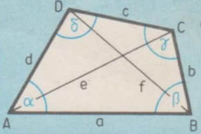
Im folgenden Register findest du alphabetisch geordnet Stichwörter mit Seitenangaben, die dir das Aufsuchen von Begriffen und wichtigen Merksätzen erleichtern. Steht hinter der Seitenziffer noch ein „f.“, so bedeutet das, daß sich die Erklärungen zu diesem Stichwort bis zur folgenden Seite erstrecken. Folgt der Seitenziffer das Zeichen „ff.“, so erstrecken sich die Erklärungen sogar über mehrere der folgenden Seiten.

## Quellenverzeichnis

Bild B 1 und B 14: Foto Seifert, Berlin; Bild B 2: Foto Dargel, Berlin; Bild B 14: Bildarchiv Volk und Wissen; Bild C 13 und D 67: Deutsche Fotothek Dresden; Bild D 29: Zentralbild

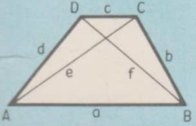
# Vierecke

## Viereck *(konvex)*



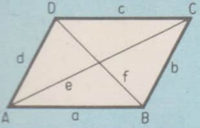

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$
$= 360°$

## Trapez



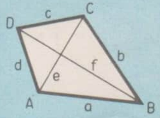

$a \parallel c$
$\alpha + \delta = \beta + \gamma$
$(= 180°)$

## Parallelogramm



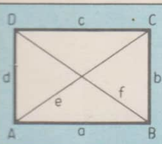

$a \parallel c, b \parallel d$
$a = c, b = d$
$\alpha = \gamma, \beta = \delta$
$e, f$ halbieren einander

## Drachenviereck



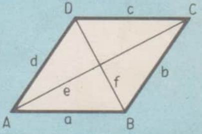

$a = b\ ,\ c = d$
$\alpha = \gamma$
$e \perp f$
$f$ halbiert $e$

## Rechteck



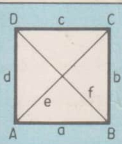

$\alpha = \beta = \gamma = \delta$
$= 90°$
$e = f$

## Rhombus




$a = b = c = d$

## Quadrat



Kurzwort: 000606 Lehrb.Mathe Kl6
Schulpreis DDR: 2,30