MATHEMATIK 9

Vorbereitungsklassen

MATHEMATIK

Lehrbuch für Klasse 9

Vorbereitungsklassen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1967

Autoren:
Dietrich Richter — Kapitel A, B, C
Horst Lemke — Kapitel D, E, F
Ingeborg Birth, Otto Kegel, Werner Paulick,
Herbert Vockenberg — Kapitel a bis f
Dr. Hans Wußing — Geschichtliche Abschnitte

Redaktion:
Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Ursula Krüger (Red. Ass.)
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband: Werner Fahr
Graphiken: Manfred Behrendt
Typographie: Atelier, Volk und Wissen

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

1. Auflage
Ausgabe 1967
Lizenz-Nr. 203/1000/67 (SN)
ES 11 G
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)
Gesetzt aus der Bodoni
Redaktionsschluß: 7. Juni 1967
Bestell-Nr. 000951-1 · Preis: 3,40

Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das Randregister auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel. Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis F, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis f. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.
Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in Lerneinheiten untergliedert.
Innerhalb der Lerneinheiten werden die Beispiele, Übungen und Definitionen durch folgende Marken gekennzeichnet:

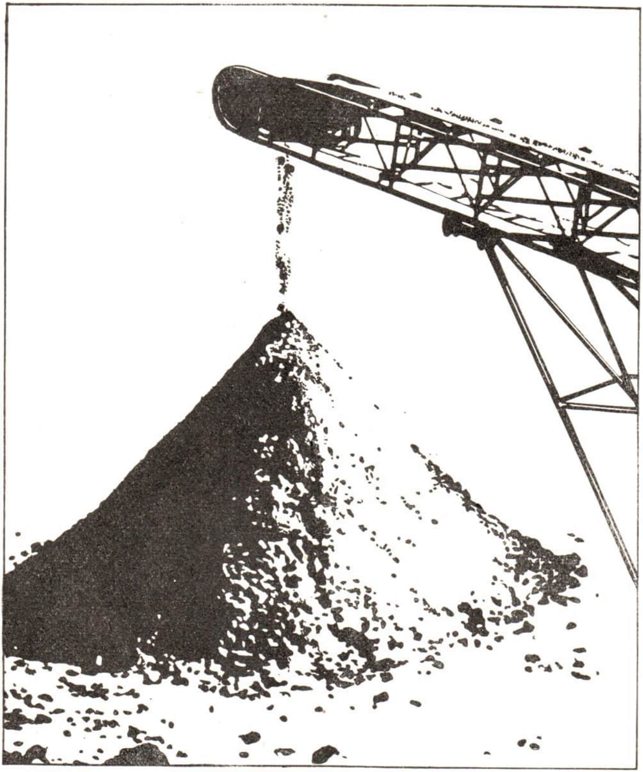
■ Beispiele,
● Übungen,
▶ Definitionen und Sätze.

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert.
Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Lerneinheit C 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels C,
Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D,
Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.

Die Aufgaben wurden folgendermaßen untergliedert: Nebeneinanderstehende Aufgaben, wie zum Beispiel die Aufgaben a **87** und a **88**, behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Die Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar über den einzelnen Aufgaben über die ganze Breite der jeweiligen Seite erstrecken, beziehen sich dann auf beide Aufgabengruppen.
Mit kursiver Numerierung wurden **zusätzliche Aufgaben** gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils jeweils unten befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den normalen, nur halbfett numerierten Aufgaben.



A

Mit einer Formel, einer Gleichung, können ganz verschiedene Erscheinungen der Wirklichkeit in wesentlichen Merkmalen erfaßt werden. So kann man mit Hilfe der Gleichung $V = \frac{1}{3} Ah$ die Volumina aller pyramiden- oder kegelförmigen Körper berechnen, ganz gleichgültig, ob es sich um die berühmte Cheopspyramide, um ein kegelförmiges Drehteil oder um diesen Schüttkegel handelt.

A. Das Rechnen mit Variablen

A

Der Mengenbegriff

1

„Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich … nicht von der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der ‚Materie‘, des ‚Naturgesetzes‘, die Abstraktion des ‚Wertes‘ usw., mit einem Wort alle wissenschaftlichen … Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, getreuer, vollständiger wider.“

LENIN:
Aus dem philosophischen Nachlaß.
Dietz Verlag, Berlin 1961, S. 89.

Diese Gedanken Lenins treffen auch auf die Mathematik zu, einer Wissenschaft, die in hohem Grade abstrahiert.
In Natur und Technik begegnen uns kegel- und pyramidenartige Gebilde in großer Vielfalt. Indem wir von Farbe, Material und anderen Eigenschaften absehen, gelangen wir zu mathematischen Körpern, die nur in unserem Denken existieren. Wir abstrahieren nun weiter von der Anzahl der Ecken der Grundfläche, vom Verhältnis einer Seitenkante zur Höhe usw. und gelangen zu einer Klasse von Körpern, deren Volumen mit Hilfe der Formel $V = \frac{1}{3} A \cdot h$ berechnet werden kann.
Wir machen mit Hilfe der Gleichung $V = \frac{1}{3} Ah$ eine Feststellung über die **Menge** aller Pyramiden und Kegel.
Der mathematische Begriff **Menge** unterscheidet sich von der Bedeutung des Wortes „Menge“ in der Umgangssprache. Man spricht z. B. von einer Menge Menschen, die auf einer Kundgebung waren, und meint, daß *sehr viele* Menschen dort gewesen seien. Man spricht davon, daß sich mit einer bestimmten Menge Wasserstoff nur eine bestimmte Menge Sauerstoff zu Wasser verbindet und meint damit *Quantitätsbeziehungen* zwischen den sich verbindenden Stoffen.

A

1 **In der Mathematik versteht man unter einer Menge die gedankliche Zusammenfassung wohlbestimmter und wohlunterschiedener Objekte der Realität oder des Denkens. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt.**

1
a) C sei die Menge der Chormitglieder einer Klasse.
b) E sei die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 7 und kleiner als 9 sind.
c) R sei die Menge der Schüler einer 9. Klasse, die über keine russischen Sprachkenntnisse verfügen.
d) N sei die Menge der natürlichen Zahlen.
e) P sei die Menge der Primzahlen.
f) Z sei die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner sind als 10.
g) K sei die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt P dieser Ebene gleichen Abstand haben.
h) L sei die Menge aller möglichen Kombinationen, die man erhält, wenn man aus den Zahlen 1 bis 90 je fünf Zahlen auswählt.

Die Menge P im Beispiel 1 enthält die Zahl 2. Wir sagen: „2 ist Element von P" und schreiben $2 \in P$. Die Menge P enthält nicht die Zahl 4. Wir sagen: „4 ist nicht Element von P" und schreiben $4 \notin P$.
Die Menge Z besteht aus den Zahlen 0, 2, 4, 6, 8. Wir schreiben dafür auch $Z = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
Die Menge E enthält nur ein Element, die Zahl 8. Wir nennen solche Mengen **Einermengen.** Wir schreiben: $E = \{8\}$.
Die Menge R enthält im allgemeinen kein Element. Wir sagen in solchen Fällen: „Die Menge ist leer" bzw. „Es handelt sich um **die leere Menge**".
Die Menge P ist in der Menge N enthalten, denn jede Primzahl ist eine natürliche Zahl. Man sagt P ist eine **Teilmenge** von N und schreibt: $P \subset N$.[1]

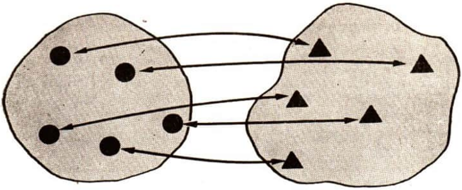
(1) Bilden Sie alle Teilmengen von $M = \{2, 4, 6\}$!
Bemerkung: Die Menge M selbst wird auch als Teilmenge hinzugenommen. Um den Unterschied zu den **echten Teilmengen** hervorzuheben, wird sie als **unechte Teilmenge** bezeichnet. Legt man nicht von vornherein fest, daß eine echte Teilmenge X von M gemeint ist, schreibt man $X \subseteqq M$.

Zwei Mengen, die genau dieselben Elemente enthalten, nennt man gleich.

(2) Weisen Sie die Gleichheit der folgenden Mengen M_1 und M_2 nach! M_1 sei die Menge aller durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen. M_2 sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar sind.

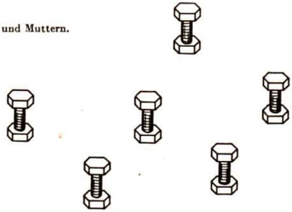
Mengen, die gleich viele Elemente besitzen, lassen sich umkehrbar eindeutig aufeinander abbilden. Das bedeutet: *Jedem Element der einen Menge wird genau ein Element der anderen Menge zugeordnet* und umgekehrt *jedem Element der anderen Menge wird genau ein Element der ersten Menge zugeordnet* (Bild A 1). Man kann also ohne zu zählen feststellen, ob zwei gegebene Mengen gleich viele Elemente haben oder nicht.

[1] Die Menge der natürlichen Zahlen wird künftig stets mit „N" bezeichnet.

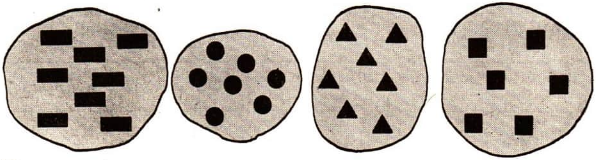


A 1

Bild A 2: Umkehrbar eindeutige Zuordnung von Schrauben und Muttern.



(3) Übertragen Sie das Bild A3 auf ein Blatt Papier, und vergleichen Sie mittels umkehrbar eindeutiger Zuordnung, welche von je zwei benachbarten Mengen mehr Elemente hat!



A 3

Aufgaben a 1 bis 4

Der Variablenbegriff

2

2 **DEFINITION: Eine Variable ist ein Zeichen für ein beliebiges Element einer vorgegebenen Menge. Diese Menge wird als *Variabilitätsbereich* dieser Variablen bezeichnet.**

Mit Hilfe von Variablen lassen sich auf der Grundlage des vorgegebenen Variabilitätsbereichs Mengen bilden.

2 **a)** Die geraden natürlichen Zahlen haben die Form $2 \cdot n$, $n \in N$.
b) Die ungeraden natürlichen Zahlen haben die Form $2n + 1$, $n \in N$.
c) Die natürlichen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen, haben die Form $3n + 2$, $n \in N$.

A

Mit Hilfe von Variablen lassen sich Gesetzmäßigkeiten für Zahlen und Naturgesetze übersichtlich darstellen.

3 **a)** Für alle Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

b) Für den elektrischen Widerstand eines Leiters aus Kupfer gilt

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A}, \varrho = 0{,}017 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}.$$

Mit Hilfe von Variablen lassen sich Problemstellungen, bei denen Beziehungen zwischen Zahlen die entscheidende Rolle spielen, übersichtlich fixieren und rationell lösen.

4 Durch $a \cdot b$ kann man sehr verschiedenartige Begriffsbildungen erfassen.

a	b	$a \cdot b$
Länge der Seite eines Rechtecks	Länge der Seite eines Rechtecks	Flächeninhalt des Rechtecks
durchschnittlicher Lohn für einen Arbeitstag	Anzahl der Arbeitstage	Gesamtlohn
durchschnittliche Geschwindigkeit eines Autos	Fahrzeit	in der Fahrzeit zurückgelegter Weg
Elektrische Stromstärke in einem Gleichstromkreis	Elektrischer Widerstand in diesem Kreis	Elektrische Spannung
Leistung	Zeitspanne, während der diese Leistung besteht	Arbeit

An diesem Beispiel wird eine wesentliche Seite der Mathematik deutlich. Durch Abstraktion vom Konkret-Gegenständlichen der Realität gelangt man zum mathematisch Wesentlichen, das den verschiedensten praktischen Sachverhalten gemeinsam ist. Dieses mathematisch Wesentliche wird mit Hilfe der mathematischen Zeichen schriftlich fixiert.

Zur Bezeichnung von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten wurden die Variablen (große und kleine lateinische und griechische Buchstaben), die Ziffern, die Zeichen für die Rechenoperationen und verschiedene Arten von Klammern aneinandergereiht. Dies geschieht wie bei der Schriftsprache, bei der aus Buchstaben und Satzzeichen Wörter und Sätze gebildet werden.

5 $3;\quad 5 + 7;\quad \frac{5}{6};\quad (6 - 2) \cdot 8;\quad a + b;\quad b \cdot c;\quad (x + y) \cdot z;\quad a[2x(c - d)]$

Die Ziffern, die Variablen und solche Aneinanderreihungen wie im Beispiel A 5 heißen **Terme**.

Aufgaben a 5 bis 9

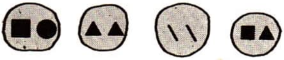
Die natürlichen Zahlen

3

Wir fassen alle Mengen, die gleich viele Elemente wie eine gegebene Menge besitzen, zu einer **Klasse** zusammen. Jede solche Klasse heißt eine **natürliche Zahl.**

6 Eine dieser Klassen, nämlich die natürliche Zahl 2, enthält z. B. folgende Mengen:
Die Menge der Messer einer Schere,
die Menge der Pole einer elektrischen Batterie,
die Menge der Räder eines Fahrrades.

A 4

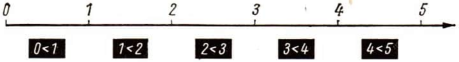


In dieser Klasse befinden sich auch die im Bild A4 dargestellten Mengen von Zeichen.

Bei dieser Klassenbildung interessiert uns also an jeder Menge nur die Anzahl ihrer Elemente.
Die Bezeichnung der Klassen, also der natürlichen Zahlen, erfolgt durch Zahlwörter und Zahlzeichen (Ziffern). Wir müssen immer streng zwischen dem Zeichen und dem Bezeichneten unterscheiden.
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Sie werden durch die Zeichen „0", „1", „2", „3", ... bezeichnet.

Ordnung: DEFINITION: Von zwei natürlichen Zahlen a, b ist a kleiner als b (in Zeichen $a < b$) genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x mit $x \neq 0$ gibt, für die gilt: $a + x = b$ (Bild A5). Läßt man auch die Gleichheit der beiden zu vergleichenden Zahlen a und b zu, so schreibt man $a \leqq b$.

A 5



$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 2 \quad 2 + 1 = 3 \quad 3 + 1 = 4 \quad 4 + 1 = 5$

Rechenoperationen: Im Bereich der natürlichen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar.
Die Multiplikation läßt sich auf die Addition zurückführen.

7 $3 \cdot 5 = \underbrace{5 + 5 + 5}_{3 \text{ Summanden } 5}$ Ergebnis: $3 \cdot 5 = 15$

Bezüglich der Addition ist 0 und bezüglich der Multiplikation ist 1 das **neutrale Element.**

8 **a)** $5 + 0 = 5; \quad a + 0 = a$ **b)** $5 \cdot 1 = 5; \quad a \cdot 1 = a$

Subtraktion und Division sind die **Umkehroperationen** von Addition bzw. Multiplikation, d. h., für alle Zahlen a, b gilt (unter der Voraussetzung, daß die Umkehroperation ausführbar ist):

$(a + b) - b = a \quad (a - b) + b = a \quad (a \cdot b) : b = a \quad (a : b) \cdot b = a$

A

DEFINITION: Die Zahl x, die der Gleichung $a + x = b$ genügt, heißt *Differenz* aus b und a und wird durch $b - a$ bezeichnet. Die Subtraktion ist eindeutig ausführbar genau dann, wenn $a \leq b$ ist. b heißt Minuend, a heißt Subtrahend.

DEFINITION: Die Zahl x, die der Gleichung $a \cdot x = b$ genügt, heißt *Quotient* aus b und a und wird mit $b : a$ bezeichnet. Die Division ist eindeutig ausführbar genau dann, wenn b ein Vielfaches von a und $a \neq 0$ ist. b heißt Dividend, a heißt Divisor.

4 **a)** Warum ist es notwendig, in dieser Definition die Einschränkung zu machen, daß der Divisor ungleich Null sein muß?
b) Weisen Sie nach, daß $30 : 7$ im Bereich der natürlichen Zahlen nicht gebildet werden kann!

SATZ: Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

	Addition	Multiplikation
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Monotonie der Addition und Multiplikation bezüglich der Ordnungs- und Gleichheitsrelation

Wenn gilt:	so gilt:	
$a < b$ $a = b$	$a + c < b + c$ $a + c = b + c$	$a \cdot c < b \cdot c; c > 0$ $a \cdot c = b \cdot c$

Aufgaben a 10 bis 22

Der Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen

4

5 Welche der Gleichungen sind im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar?

a) $5 \cdot x = 50$ **b)** $7 \cdot x = 18$ **c)** $25 + x = 30$ **d)** $17 + x = 15$

Um die Division unbeschränkt ausführbar zu machen, wird ein neuer Zahlenbereich konstruiert, der **Bereich der gebrochenen Zahlen.**

3 **DEFINITION: Ein *Bruch* ist ein *geordnetes Paar* natürlicher Zahlen a, b, ($b \neq 0$), das in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben wird.**
Dabei heißt a Zähler und b Nenner des Bruches.

A

Die Brüche spiegeln, bezogen auf praktische Probleme, gewisse Quantitäten wider: Teile und Vielfache der Teile einer bestimmten Einheit $\left(\frac{1}{2}\,\text{m}, \frac{3}{4}\,\text{kg}\right)$.

Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, spiegeln jeweils gleiche Quantitäten wider, z. B.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots, \frac{n}{2n}, \ldots$$

Es ist deshalb sinnvoll, diese als gleichwertig (äquivalent) anzusehen.

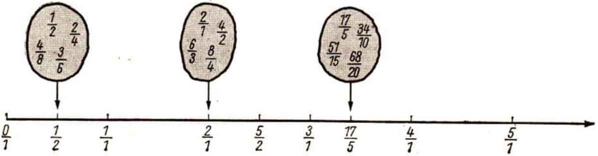
DEFINITION: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen äquivalent genau dann, wenn sie durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen[1].

SATZ: Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind äquivalent genau dann, wenn gilt: $a \cdot d = b \cdot c$.

4 **DEFINITION: Eine *gebrochene Zahl* ist die Klasse aller Brüche $\frac{a}{b}$, die mit einem gegebenen Bruch äquivalent sind.**

Zur Bezeichnung der gebrochenen Zahl kann man irgendeinen Bruch der Klasse (einen Repräsentanten) benutzen. Es ist oft zweckmäßig, denjenigen Bruch der Klasse zu wählen, der sich nicht mehr kürzen läßt.

Ordnung: DEFINITION: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < c \cdot b$. Entsprechend dieser Definition läßt sich jeder gebrochenen Zahl genau ein Punkt des Zahlenstrahls zuordnen (Bild A 6). Dagegen ist aber nicht jedem Punkt des Zahlenstrahls eine gebrochene Zahl zugeordnet.



A 6

5

Rechenoperationen: Bei der Definition der Rechenoperationen läßt man sich von folgenden Zielen leiten:

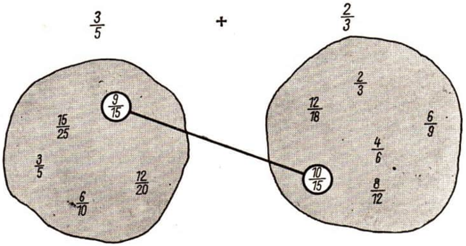
1. Die Division soll unbeschränkt ausführbar sein.
2. Subtraktion und Division sollen Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation sein.
3. Die Gesetzmäßigkeiten für die Rechenoperationen (Kommutativität usw.) sollen im neuen Bereich gelten.

[1] Das Wort „oder" wird in der Mathematik in dem Sinne benutzt, daß auch beides zutreffen kann, in unserem Falle also auch Erweitern und Kürzen gleichermaßen.
„Genau dann" ist die Kurzform für „dann und nur dann".

4. Die natürlichen Zahlen sowie die Rechenoperationen mit ihnen sollen im neuen Bereich enthalten sein.

DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden addiert, indem man in der jeweiligen Klasse Brüche mit gleichem Nenner sucht, diese nach der Vorschrift $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$ addiert und zur entsprechenden Klasse übergeht, in der der neue Bruch liegt.

9 Es ist die Summe $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ zu bilden (Bild A 7).



A 7

Wir suchen in den Klassen der beiden gebrochenen Zahlen Brüche mit einheitlichem Nenner und addieren diese:

$$\frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15}.$$

Wir gehen zur Klasse über, in der der neue Bruch liegt.

6 Weisen Sie nach, daß die Klasse $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right\}$ das neutrale Element bezüglich der Addition im Bereich der gebrochenen Zahlen ist!

Analog der Definition der Addition werden die anderen Rechenoperationen definiert.

Subtraktion	$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$	$\frac{b}{n} \leqq \frac{a}{n}$
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$b \neq 0;\ d \neq 0$
Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$b \neq 0;\ c \neq 0;$ $d \neq 0$

SATZ: Die Division ist unbeschränkt ausführbar, ausgenommen die Division durch Null.

Beweis: Es seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$ zwei gebrochene Zahlen. Dann ist auf Grund der Definition der Division gebrochener Zahlen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Damit ist die Division gebrochener Zahlen auf die Multiplikation natürlicher Zahlen zurückgeführt, die unbeschränkt ausführbar ist.

6

5 **SATZ: Der Bereich der natürlichen Zahlen ist ein Teilbereich der gebrochenen Zahlen.**

Unter Benutzung des Zeichens „R^*" für die Menge der gebrochenen Zahlen gilt: $N \subset R^*$.
Ohne einen Beweis zu führen, machen wir uns den Satz A 5 an Beispielen klar.

10 Die natürliche Zahl 3 wird der gebrochenen Zahl $\frac{3}{1}$ zugeordnet.

Die natürliche Zahl 25 wird der gebrochenen Zahl $\frac{25}{1}$ zugeordnet.

Jede natürliche Zahl a wird der entsprechenden gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ zugeordnet.

Beim Vergleichen und beim Rechnen verhalten sich die Zahlen in dem einen Bereich wie die ihnen zugeordneten in dem anderen.

11 **a)** $\begin{array}{ccc} 7 & < & 9 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{7}{1} & < & \frac{9}{1} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ccccc} 3 & + & 5 & = & 8 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{3}{1} & + & \frac{5}{1} & = & \frac{8}{1} \end{array}$

Wenn wir in Zukunft von natürlichen Zahlen sprechen, so betrachten wir sie stets als Teilbereich der gebrochenen Zahlen. Aus dieser Zuordnung $a \leftrightarrow \frac{a}{1}$ ergibt sich, daß wir sie nach Belieben mit Hilfe der alten Bezeichnungen (a) oder mit Hilfe der neuen $\left(\frac{a}{1}\right)$ darstellen können.
Für manche Rechnungen ist es vorteilhaft, die natürlichen Zahlen in der Bruchschreibweise darzustellen.

12 **a)** $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7} : \frac{3}{1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{7 \cdot 3} = \frac{4}{21}$

Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist jetzt auch die Division natürlicher Zahlen uneingeschränkt ausführbar:

$$3 : 4 = \frac{3}{1} : \frac{4}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

A

Diese für natürliche Zahlen beweisbare Tatsache wird als Vereinbarung für die Schreibweise von Quotienten auf alle gebrochenen Zahlen a und b mit der Einschränkung $b \neq 0$ übertragen: $a : b = \frac{a}{b}$.

> ZUSAMMENFASSUNG:
> Im Bereich der gebrochenen Zahlen sind Addition, Multiplikation und Division (außer durch Null) unbeschränkt ausführbar.
> Die Subtraktion $a - b$ ist ausführbar genau dann, wenn $b \leqq a$ ist.
> Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.
> Die für den Bereich der natürlichen Zahlen angeführten Gesetze der Rechenoperationen gelten auch im Bereich der gebrochenen Zahlen.

Aufgaben a 23 bis 43

Der Zahlenbereich der rationalen Zahlen

7

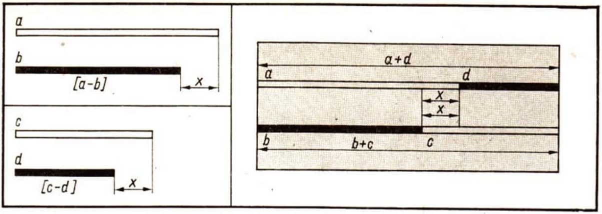
Um die Subtraktion unbeschränkt ausführbar zu machen, wird ein Zahlenbereich konstruiert, der als Teilbereich den Bereich der gebrochenen Zahlen umfaßt.
Differenzen gebrochener Zahlen: Die Differenz $a - b$ ist zunächst nur definiert für gebrochene Zahlen a und b mit $b \leqq a$. Dagegen ist z. B. $3 - 5$, $0 - \frac{8}{5}$, $\frac{12}{7} - \frac{15}{7}$ nicht definiert. Durch Differenzen $a - b$ ohne Einschränkung können gewisse praktische Sachverhalte sinnvoll widergespiegelt werden.

13 Bei einer Stahlwelle sei als Nennmaß für den Durchmesser $d_0 = 40{,}0$ mm vorgesehen. Die tatsächlichen Werte der Durchmesser zweier Werkstücke seien $d_1 = 40{,}1$ mm und $d_2 = 39{,}8$ mm. Definieren wir die Abweichung des Istmaßes vom Nennmaß als $[d - d_0]$, so erhalten wir für die beiden genannten Fälle die Abweichungen $[40{,}1 - 40{,}0]$ und $[39{,}8 - 40{,}0]$.

Durch diese Differenzen wird einerseits der absolute Wert der Abweichung (0,1 mm und 0,2 mm) zum Ausdruck gebracht, andererseits geht aus ihnen hervor, ob die Abweichung entweder auf einem zu kleinen Maß oder auf einem zu großen Maß beruht. Im ersten Fall steht die größere Zahl an zweiter, im zweiten an erster Stelle des Zahlenpaares.
Differenzen werden zum Aufbau des neuen Zahlenbereichs benutzt.

6 **DEFINITION: Eine Differenz ist ein geordnetes Paar gebrochener Zahlen a, b, das in der Form $[a - b]$ geschrieben wird.**

DEFINITION: Zwei Differenzen $[a - b]$ und $[c - d]$ heißen äquivalent genau dann, wenn gilt: $a + d = b + c$.
Im Bild A 8 wird das auf geometrische Art veranschaulicht.



A 8

7 **DEFINITION: Eine rationale Zahl ist die Klasse aller Differenzen $[a - b]$ (a, b sind gebrochene Zahlen), die mit einer gegebenen Differenz äquivalent sind.**

14 a) $\left\{[3 - 7], \left[\frac{3}{2} - \frac{11}{2}\right], [0 - 4] \ldots\right\}$

b) $\left\{[5 - 5], \left[\frac{6}{7} - \frac{6}{7}\right], [1{,}5 - 1{,}5], [0 - 0], \ldots\right\}$

c) $\left\{[6 - 2], [8 - 4], \left[\frac{38}{5} - \frac{18}{5}\right], [4 - 0], \ldots\right\}$

Es gibt genau eine Klasse, die die Differenz $[0 - 0]$ enthält. Diese Klasse besitzt die Eigenschaft der Null. Deshalb erhält diese Klasse auch das Zeichen 0. In jeder anderen Klasse gibt es genau eine Differenz, die die **gebrochene** Zahl 0 an erster oder zweiter Stelle enthält. Diese Differenz wird zur Bezeichnung der ganzen Klasse ausgewählt und ihrerseits noch kürzer bezeichnet:

$[0 - g] \underset{\text{Def}}{=} -g$; $[g - 0] \underset{\text{Def}}{=} +g$.

Die Variable g bezeichnet hierbei eine beliebige von Null verschiedene gebrochene Zahl.
Die Zeichen „$-$" und „$+$" bei den Bezeichnungen für die rationalen Zahlen „$-g$" und „$+g$" werden **Vorzeichen** der rationalen Zahlen genannt. Sie sind zu unterscheiden von den Operationszeichen für die Subtraktion und die Addition. Um keine Verwechslungen eintreten zu lassen, werden die Bezeichnungen für die rationalen Zahlen mitunter auch folgendermaßen gewählt: $(-g)$ und $(+g)$.

8

Rationale Zahlen der Form $(+g)$ nennen wir **positiv** und rationale Zahlen der Form $(-g)$ **negativ**, wobei wiederum g die Bezeichnung für irgendeine von Null verschiedene gebrochene Zahl ist.
Legt man fest, daß für Variablen $a, b, c, \ldots$ beliebige rationale Zahlen eingesetzt werden können, so kann z. B. die Variable a entweder eine positive rationale Zahl oder eine negative rationale Zahl oder die rationale Zahl 0 bedeuten.

Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen **zueinander entgegengesetzt.** Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt. Ist r irgendeine rationale Zahl, so wird die entgegengesetzte Zahl von r durch $-r$ bezeichnet.

SATZ: Für alle rationalen Zahlen r gilt: $-(-r) = r$

15 **a)** $-(+3) = -3$ **b)** $-\left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{3}{4}$ **c)** $-(-4{,}3) = +4{,}3$

DEFINITION: **Der absolute Betrag einer rationalen Zahl** (in Zeichen $|a|$) ist eine nichtnegative rationale Zahl, die nach folgender Vorschrift gebildet wird:

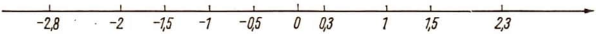
Ist $a > 0$, so ist $|a| = a$.
Ist $a = 0$, so ist $|a| = 0$.
Ist $a < 0$, so ist $|a| = -a$.

16 **a)** $|+2| = +2$ **b)** $|-3{,}2| = -(-3{,}2) = +3{,}2$ **c)** $|0| = 0$

SATZ: Einander entgegengesetzte Zahlen haben den gleichen Betrag.
Ordnung: Die rationalen Zahlen werden durch folgende DEFINITION geordnet.

1. Die Zahl 0 ist kleiner als jede positive rationale Zahl und größer als jede negative rationale Zahl.
2. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als jede positive rationale Zahl.
3. Von je zwei positiven rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Betrag größer ist.
4. Von je zwei negativen rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Betrag kleiner ist.

Diese Anordnung der rationalen Zahlen läßt sich auf der Zahlengeraden veranschaulichen (Bild A 9).



A 9

9

Rechenoperationen: Bei der Definition der Rechenoperationen läßt man sich wieder von folgenden Zielen leiten:

1. Die Subtraktion soll unbeschränkt ausführbar sein.
2. Subtraktion und Division sollen Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation sein.
3. Die Gesetzmäßigkeiten für die Rechenoperationen (Kommutativität usw.) sollen im neuen Bereich gelten.
4. Die gebrochenen Zahlen sollen im neuen Bereich enthalten sein.

Ohne auf Beweise einzugehen, stellen wir hier die Ergebnisse zusammen.
Da die Rechenoperationen so definiert werden, daß die 4. Forderung erfüllt ist, existiert im Bereich der rationalen Zahlen ein Teilbereich, in dem genauso gerechnet wird wie im Bereich der gebrochenen Zahlen.

Wir ordnen jeder gebrochenen Zahl die entsprechende rationale Zahl zu, z. B. der gebrochenen Zahl 3,5 die rationale Zahl (+3,5). Der gebrochenen Zahl 0 wird die rationale Zahl 0 zugeordnet. Wir ordnen also dem Bereich der gebrochenen Zahlen den Teilbereich der nichtnegativen rationalen Zahlen zu.
Nichtnegative rationale Zahlen werden also genauso addiert bzw. multipliziert wie die zugeordneten gebrochenen Zahlen. Das trifft auch auf die Subtraktion (falls diese im Bereich der gebrochenen Zahlen ausführbar ist) und auf die Division zu.

17 a)
$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3} & + & \frac{5}{1} & = & \frac{17}{3} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{2}{3}\right) & + & \left(+\frac{5}{1}\right) & = & \left(+\frac{17}{3}\right) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} & \cdot & \frac{5}{7} & = & \frac{15}{28} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{3}{4}\right) & \cdot & \left(+\frac{5}{7}\right) & = & \left(+\frac{15}{28}\right) \end{array}$$

Da sich die nichtnegativen Zahlen „rechnerisch“ nicht von den gebrochenen Zahlen unterscheiden, kann man die alten Bezeichnungen auf die nichtnegativen rationalen Zahlen übertragen.
Man kann vom Bereich der gebrochenen Zahlen als einem Teilbereich der rationalen Zahlen sprechen.
Da die natürlichen Zahlen ein Teilbereich der gebrochenen Zahlen sind, diese ihrerseits Teilbereich der rationalen Zahlen, sind folglich die natürlichen Zahlen auch Teilbereich der rationalen Zahlen.

Rechenregeln für die Addition:

Nichtnegative rationale Zahlen werden genauso addiert wie die zugeordneten gebrochenen Zahlen.
Zwei negative rationale Zahlen werden addiert, indem wir die absoluten Beträge addieren und dann zur entgegengesetzten Zahl übergehen.

18 $(-5) + (-3{,}2) = -(5 + 3{,}2) = -8{,}2$

Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem wir den kleineren Betrag vom größeren subtrahieren. Falls der dem Betrage nach größere Summand negativ ist, gehen wir dann noch zur entgegengesetzten Zahl über.

19 **a)** $(-2) + 5 = 5 - 2 = 3$

b) $(-7) + 5 = -(7 - 5) = -2$

c) $(-5) + 5 = 0$

Rechenregeln für die Subtraktion:

Auf Grund der 2. Forderung wird die Subtraktion als Umkehroperation der Addition definiert.
SATZ: Die Subtraktion ist im Bereich der rationalen Zahlen unbeschränkt ausführbar. Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:

$a - b = a + (-b)$.

Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die entgegengesetzte Zahl addiert.

A

[20] a) $7 - 3 = 4$

b) $-7 - 3 = -7 + (-3) = -(7 + 3)$
$= -10$

c) $7 - (-3) = 7 + (+3) = 7 + 3$
$= 10$

d) $-7 - (-3) = -7 + (+3)$
$= -(7-3) = -4$

10

Rechenregeln für die Multiplikation

Nichtnegative rationale Zahlen werden genauso multipliziert wie die zugeordneten gebrochenen Zahlen.
Zwei negative rationale Zahlen werden multipliziert, indem wir die absoluten Beträge multiplizieren.

[21] $(-3) \cdot (-5) = 3 \cdot 5 = 15$

Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem wir die absoluten Beträge multiplizieren und dann zur entgegengesetzten Zahl übergehen.

[22] $(-3) \cdot 5 = -(3 \cdot 5) = -15$

DEFINITION: Zwei rationale Zahlen a und b heißen **zueinander reziprok** genau dann, wenn ihr Produkt gleich 1 ist: $a \cdot b = 1$.

[23] a) 3 und $\frac{1}{3}$, denn $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

b) $-\frac{7}{5}$ und $-\frac{5}{7}$, denn $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = +\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) = +\frac{35}{35} = 1$

Rechenregeln für die Division:

Auf Grund der 2. Forderung wird die Division als Umkehroperation der Multiplikation definiert.
Hieraus folgt, daß sich die reziproke Zahl einer Zahl a in der Form $\frac{1}{a}$ darstellen läßt, denn die reziproke Zahl zu a ist laut Definition Lösung der Gleichung $a \cdot x = 1$.
SATZ: Die Division ist im Bereich der rationalen Zahlen (außer durch Null) unbeschränkt ausführbar.

Für alle rationalen Zahlen a, b ($b \neq 0$) gilt: $\quad a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

Durch eine rationale Zahl wird dividiert, indem man mit der entsprechenden reziproken Zahl multipliziert.

[24] a) $3 : 5 = 3 \cdot \frac{1}{5}$
$= \frac{3}{5}$

b) $(-3) : (-5) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$
$= +\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

c) $3 : (-5) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)$
$= -\frac{3}{5}$

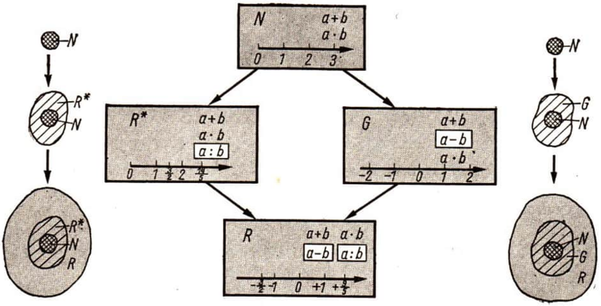
d) $(-3) : 5 = (-3) \cdot \frac{1}{5} = -\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)$
$= -\frac{3}{5}$

Der Bereich der ganzen Zahlen ist der Teilbereich der rationalen Zahlen, der aus den Zahlen ..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ... besteht.

Im Bereich der ganzen Zahlen sind die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar.
Die Menge der rationalen Zahlen wird mit R bezeichnet, die Menge der ganzen Zahlen mit G.

Aufgaben a 44 bis 59

Überblick über den Aufbau der Zahlenbereiche



A 10

Monotonie

11

---

(7) Addieren Sie auf beiden Seiten der folgenden Ungleichungen die danebenstehenden Zahlen, und untersuchen Sie, ob die Ergebnisse in der gleichen Relation stehen oder nicht!

a) $3 < 5$	6	**b)** $\frac{26}{3} < \frac{27}{2}$	$-\frac{5}{2}$
c) $0{,}5 < 1{,}2$	$3{,}4$	**d)** $12 > -\frac{1}{2}$	4
e) $15 > 10{,}7$	$-2{,}2$	**f)** $-4 < 7{,}5$	$-\frac{3}{4}$
g) $-6 < -2{,}5$	5	**h)** $3 > 1{,}5$	-8

A

8 **Monotoniegesetz der Addition**

Für alle rationalen Zahlen a, b, x gilt:

Wenn $a < b$, so $a + x < b + x$ (und $a - x < b - x$).

Man kann auf beiden Seiten einer Ungleichung die gleiche Zahl addieren bzw. von beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahieren, ohne daß das Relationszeichen in der Ungleichung geändert werden muß. Den Beweis führen wir hier nicht.

(8) Multiplizieren Sie beide Seiten der folgenden Ungleichungen mit den danebenstehenden Zahlen, und untersuchen Sie, ob die Ergebnisse in der gleichen Relation stehen oder nicht!

a) $3 < 5$	6	**b)** $\frac{4}{5} < 3$	$-\frac{1}{2}$
c) $3 < 5$	-6	**d)** $-1 < 0$	-3
e) $5 > \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	**f)** $-4 < -2$	$\frac{1}{3}$

9 **Monotoniegesetz der Multiplikation**

Für alle rationalen Zahlen a, b, x gilt:

Wenn $x > 0$ und $a < b$, so ist $a \cdot x < b \cdot x$ $\left(\text{und } \frac{a}{x} < \frac{b}{x}\right)$.

Wenn $x < 0$ und $a < b$, so ist $a \cdot x > b \cdot x$ $\left(\text{und } \frac{a}{x} > \frac{b}{x}\right)$.

Man kann beide Seiten einer Ungleichung mit der gleichen positiven Zahl multiplizieren bzw. durch die gleiche positive Zahl dividieren, ohne daß das Relationszeichen in der Ungleichung geändert werden muß.
Führt man diese Operationen mit einer negativen Zahl aus, so muß das Relationszeichen $<$ in $>$ bzw. $>$ in $<$ verändert werden.
Den Beweis führen wir nicht.

10 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen liegen die Zahlen bezüglich der Ordnungsrelation „dicht", d. h., zwischen je zwei Zahlen liegt eine[1] weitere Zahl.[2]**

Beweis: Es seien a und b ($a < b$) zwei rationale Zahlen. Wir behaupten, daß das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ eine solche im Satz geforderte Zahl ist, die zwischen a und b liegt, für die also gilt $a < \frac{a+b}{2} < b$!

Aus $a < b$ folgt auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation:

$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2}.$$

Auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition rationaler Zahlen

[1] Im mathematischen Sprachgebrauch wird „ein" im Sinne von „mindestens ein" benutzt. Meint man „ein und kein weiteres", so muß man sagen „genau ein".

[2] Man kann sich leicht überlegen, daß diese Behauptung gleichwertig damit ist, daß zwischen je zwei Zahlen beliebig viele weitere Zahlen liegen.

folgt weiter: oder auch:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \qquad \frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{b}{2}+\frac{b}{2}.$$

Für beide Ungleichungen schreiben wir:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{b}{2}+\frac{b}{2}$$

$$a<\frac{a+b}{2}<b.$$

Da $\frac{a+b}{2}$ wieder eine rationale Zahl ist, ist die Behauptung bewiesen.

Addition und Subtraktion von Summen

12

Klammern dürfen weggelassen werden, wenn sie eine Summe einschließen, die selbst als Summand auftritt, weil auf Grund der Assoziativität der Addition das Ergebnis von der Reihenfolge der Addition unabhängig ist.

$$\boxed{(a+b)+c=a+b+c \qquad a+(b+c)=a+b+c}$$

Werden mehr als zwei Zahlen sowohl durch Addition als auch durch Subtraktion verknüpft, so kann man durch Anwendung der Regel für die Subtraktion rationaler Zahlen $a-b=a+(-b)$ die gegebene Aufgabe auf Summen zurückführen.

$$\underline{(a+b)-c}=(a+b)+(-c)=a+b+(-c)=\underline{a+b-c}$$

$$\underline{a+(b-c)}=a+[b+(-c)]=a+b+(-c)=\underline{a+b-c}$$

$$\boxed{(a+b)-c=a+b-c \qquad a+(b-c)=a+b-c}$$

Schließen die Klammern den Subtrahenden einer Differenz ein, so muß man beim Weglassen der Klammern die Vorzeichen bei den Gliedern in der Klammer wechseln. Hierbei wird noch die Vereinbarung getroffen, daß man ein Pluszeichen vor eine Zahl setzen darf.

$$\boxed{\begin{array}{ll} a-(b+c)=a-b-c & a-(b-c)=a-b+c \\ a-(-b+c)=a+b-c & a-(-b-c)=a+b+c \end{array}}$$

Wir begründen hier nur die erste der vier Gleichungen, nämlich

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

A

Entsprechend der Definition der Subtraktion als Umkehroperation der Addition genügt die Differenz $a - (b + c)$ der Gleichung

$(b + c) + x = a.$

Es ist zu zeigen, daß auch $a - b - c$ dieser Gleichung genügt. Auf Grund der bisher gemachten Feststellungen über das Weglassen von Klammern und die Unabhängigkeit des Ergebnisses von der Reihenfolge der Ausführung der Addition bzw. Subtraktion gilt:

$$\begin{aligned}(b + c) + (a - b - c) &= b + c + a - b - c\\ &= b - b + c - c + a\\ &= 0 + 0 + a\end{aligned}$$

$$(b + c) + (a - b - c) = a$$

Zusammenfassend können wir folgende Vereinbarung für die Zeichen + und − vor einer Klammer treffen:

11 **Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht, so kann die Klammer weggelassen werden.**
Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, so muß man beim Auflösen der Klammer die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die entgegengesetzten verändern.

Aufgaben a 60 bis 63

Ausklammern und Ausmultiplizieren

13

Zur kürzeren Formulierung weiterer Vereinbarungen bezeichnen wir künftig die Addition und die Subtraktion als *Rechenoperationen erster Stufe* und die Multiplikation und Division als *Rechenoperationen zweiter Stufe.*
Weiterhin wird vereinbart, daß die Operationen zweiter Stufe stärker binden als die Operationen erster Stufe, d. h., daß zum Beispiel in $a + b \cdot c$ die Multiplikation zuerst auszuführen ist. Soll von dieser Vereinbarung abgewichen werden, so bedient man sich wieder der Klammern.

$a + b \cdot c$; $(a + b) \cdot c$; $a \cdot b - c$; $a \cdot (b - c)$

Mit Hilfe des Distributionsgesetzes können wir die Klammern beseitigen.

12 **Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:**

$$\overset{\text{Ausmultiplizieren}}{\longrightarrow}$$

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

$$\underset{\text{Ausklammern}}{\longleftarrow}$$

Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert.

25 $-2a(3b-5c) = (-2a)\cdot 3b - (-2a)\cdot 5c$
$$= -6ab - (-10ac)$$
$$= -6ab + 10ac$$

A

Durch mehrmaliges Anwenden des Distributionsgesetzes lassen sich auch Summen mit mehr als zwei Summanden in dieser Weise mit einer Zahl multiplizieren.

$$a\cdot(b+c+d) = a\cdot[(b+c)+d]$$
$$= a\cdot(b+c) + a\cdot d$$
$$= ab + ac + ad$$

26 In den folgenden Summen werden jeweils gemeinsame Faktoren ausgeklammert.

a) $3\cdot a + x\cdot a = (3+x)\cdot a$ **b)** $-3x - 3 = (-3)\cdot x + (-3)\cdot 1 = (-3)\cdot(x+1)$

c) $4y + \frac{1}{3}xy + ay = \left(4 + \frac{1}{3}x + a\right)\cdot y$

Die Terme $2ab$, $5ab$, $7ab$ unterscheiden sich nur durch die Koeffizienten, die bei ab stehen. Solche Summanden lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

27 **a)** $2ab + 5ab + 7ab = (2+5+7)\cdot ab = 14ab$

b) $57a + 3b - \frac{15}{2}b + 3a = (57+3)a + \left(3 - \frac{15}{2}\right)b = 60a - \frac{9}{2}b$

Aufgaben a 64 bis 69

Multiplikation von Summen

14

---

13 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d gilt:**

Ausmultiplizieren →

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

← Ausklammern

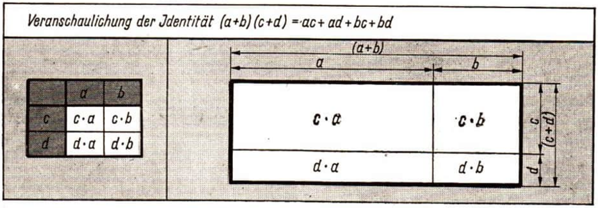
Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summand der einen Klammer mit jedem Summand der anderen Klammer multipliziert.

Beweis: $(a+b)\cdot(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$
$$= ac + ad + bc + bd$$

9 Geben Sie Erläuterungen zu den Veranschaulichungen im Bild A 11!

28 Es ist auszumultiplizieren

a) $(x+y)(c-d) = xc - xd + yc - yd$



A 11

Nach lexikographischer Anordnung[1] lautet das Ergebnis:

$cx + cy - dx - dy$

b) $(-4 + 3y - a)(2a + 4 - 2y) = -8a - 16 + 8y + 6ay + 12y - 6y^2$
$-2a^2 - 4a + 2ay$
$= -12a - 16 + 20y + 8ay - 6y^2 - 2a^2$

Lexikographisch geordnet: $-2a^2 - 12a + 8ay - 6y^2 + 20y - 16$

29 Es ist auszuklammern:

a) $3a - 6am + 8bmn - 4bn = 3a(1 - 2m) - 4bn(1 - 2m)$
$= (1 - 2m) \cdot (3a - 4bn)$

Probe: $(1 - 2m) \cdot (3a - 4bn) = 3a - 4bn - 6am + 8bmn$

b) $45r^3s^2 - 39r^2s^3 - 75r^2s + 65rs^2 + 33rs - 55$
$= 3rs(15r^2s - 13rs^2 + 11) - 5(15r^2s - 13rs^2 + 11)$
$= (3rs - 5)(15r^2s - 15rs^2 + 11)$

Man kann die Regel für die Multiplikation zweier Summen auf die Multiplikation von mehr als zwei Summen übertragen.

30 $(A + B)(a + b)(\alpha + \beta) = (Aa + Ab + Ba + Bb)(\alpha + \beta)$
$= Aa\alpha + Ab\alpha + Ba\alpha + Bb\alpha + Aa\beta + Ab\beta + Ba\beta + Bb\beta$

Aufgaben a 70 bis 77

Die binomischen Formeln

15

14 **SATZ: Für alle Zahlen a, b gilt:**

$$\boxed{\begin{array}{l}(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2\end{array}}$$

[1] Die lexikographische Anordnung erfolgt folgendermaßen:
a) In jedem Glied werden die vorkommenden Variablen in der Reihenfolge des Alphabets geschrieben.
b) Die Glieder werden nach den vorkommenden Variablen in der Reihenfolge des Alphabets geordnet.
c) Alle Glieder mit der gleichen Variablen werden nach fallenden Potenzen dieser Variablen geordnet.

10 a) Beweisen Sie diese Formeln!
b) Weisen Sie durch ein Zahlenbeispiel nach, daß nicht für alle Zahlenpaare (a, b) gilt: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, und untersuchen Sie, für welche Zahlenpaare die Gleichung erfüllt ist!

Die Berechnung des Quadrats einer Differenz kann auf die Formel für das Quadrat einer Summe zurückgeführt werden:

$$(x - y)^2 = [x + (-y)]^2 = x^2 + 2x \cdot (-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

31 a)
$$\begin{array}{ccccccccc} \left(\frac{1}{3}x + 5y\right)^2 & = & \left(\frac{1}{3}x\right)^2 & + & 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 5y & + & (5y)^2 & = & \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{3}xy + 25y^2 \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 & = & \boldsymbol{a}^2 & + & 2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & + & \boldsymbol{b}^2 & & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccccc} (3a - 2{,}5b)^2 & = & (3a)^2 & + & 2 \cdot 3a \cdot (-2{,}5b) & + & (-2{,}5b)^2 & = & 9a^2 - 15ab + 6{,}25b^2 \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 & = & \boldsymbol{a}^2 & + & 2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & + & \boldsymbol{b}^2 & & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccccc} (5x + 3a)\,(5x - 3a) & = & (5x)^2 & - & (3a)^2 & = & 25x^2 - 9a^2 \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) & = & \boldsymbol{a}^2 & - & \boldsymbol{b}^2 & & \end{array}$$

Aufgaben a 78 bis 84

Die quadratische Ergänzung

16

11 Formen Sie folgende Summen in Produkte aus zwei Summen um, indem Sie die binomischen Formeln anwenden!

a) $p^2 - 2pq + q^2$ b) $\frac{1}{4}r^2 - 16$ c) $25 - a^2$

d) $\frac{9}{25} - \frac{6}{5}x + x^2$ e) $9x^2 + 6ax + a^2$ f) $64x^2 + 16bx + b^2$

Terme, die sich in die Form $(a + b)^2$ bzw. $(a - b)^2$ bringen lassen, bezeichnen wir als **vollständige Quadrate.**
Manchmal ist es notwendig, Terme zu vollständigen Quadraten zu ergänzen, man sagt, die **quadratische Ergänzung** zu bilden.

32 Der Term $a^2 + 6a$ soll so ergänzt werden, daß ein vollständiges Quadrat entsteht.
Wir vergleichen den vorliegenden Term mit der Struktur eines vollständigen Quadrats:

$$\begin{array}{l} a^2 + 6a \\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ \boldsymbol{a}^2 + \overbrace{2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 \\ \updownarrow \quad \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \quad \updownarrow \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = (a + 3)^2 \end{array}$$

Die quadratische Ergänzung ist also $b^2 = 3^2 = 9$.

Die Pascalsche Figur

17

(12) Berechnen Sie möglichst zweckmäßig $(a+b)^n$ für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$!

Wenn man gleichartige Summanden zusammenfaßt und lexikographisch anordnet, dann erkennt man ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten dieser Terme in a oder b.

$a+b$						1		1					
$(a+b)^2$					1		2		1				
$(a+b)^3$				1		3		3		1			
$(a+b)^4$			1		4		6		4		1		
$(a+b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

Nach seinem Entdecker wird dieses Bildungsgesetz PASCALsche Figur genannt.

Aufgaben a 85 bis 102

Erweitern und Kürzen

18

Vereinbarung: Wird ein Quotient mit einem Bruchstrich als Divisionszeichen geschrieben, so bezeichnen wir diese Darstellung des Quotienten auch als Bruch, den Dividenden als Zähler und den Divisor als Nenner des Bruches.

15 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, e ($b \neq 0$, $e \neq 0$) gilt:**

$$\overset{\text{Erweitern}}{\longrightarrow}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot e}{b \cdot e}}$$

$$\underset{\text{Kürzen}}{\longleftarrow}$$

33 a) $\dfrac{\frac{3}{4}x}{\frac{5}{4}y} = \dfrac{\frac{3}{4}x \cdot 4}{\frac{5}{4}y \cdot 4} = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot x}{\frac{5}{4} \cdot 4 \cdot y} = \dfrac{3x}{5y}$

b) $\dfrac{20ax}{40bx} = \dfrac{20x \cdot a}{20x \cdot 2b} = \dfrac{a}{2b}$

c) $\dfrac{5a}{25ab} = \dfrac{5a \cdot 1}{5a \cdot 5b} = \dfrac{1}{5b}$

Division einer Summe durch eine Zahl

19

16 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, x ($x \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{(a + b + c) : x = a : x + b : x + c : x}$$

in anderer Schreibweise:

$$\boxed{\frac{a + b + c}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}}$$

Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem jeder Summand durch diese Zahl dividiert wird.

34 **a)** $(3ab + 12a + 15a^2) : 3a = \frac{3ab}{3a} + \frac{12a}{3a} + \frac{15a^2}{3a}$

$$= \frac{3a \cdot b}{3a \cdot 1} + \frac{3a \cdot 4}{3a \cdot 1} + \frac{3a \cdot 5a}{3a \cdot 1}$$

$$= \frac{b}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5a}{1}$$

$$= b + 4 + 5a$$

b) $(24xy - 21y^2) : (-3y) = [24xy + (-21y^2)] : (-3y)$

$$= \frac{24xy}{-3y} + \frac{-21y^2}{-3y}$$

$$= \frac{8x}{-1} + \frac{-7y}{-1}$$

$$= -8x + 7y$$

13 Führen Sie die Proben selbst aus!

Aufgaben a 103 bis 106

Division von Summen durch Summen

20

35 $(6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1$

$$\begin{array}{l} (6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1 \\ \underline{-(6x^2 + 4x)} \\ \qquad\quad 3x + 2 \\ \qquad \underline{-(3x + 2)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Probe: $(3x + 2) \cdot (2x + 1) = 6x^2 + 3x + 4x + 2 = 6x^2 + 7x + 2$

Das Wesentliche des im Beispiel 35 gezeigten Verfahrens kann man in Form einer Vorschrift (eines Algorithmus) ausdrücken.

a) Wir suchen ein Glied $[6x^2]$ des Dividenden, das durch ein Glied $[3x]$ des Divisors „teilbar" ist[1]:

$$(6x^2) : (3x) = \frac{3x \cdot 2x}{3x \cdot 1} = 2x.$$

b) Wir bilden das Produkt aus dem unter a) erhaltenen Quotienten $[2x]$ und dem Divisor $[3x + 2]$:

$$(3x + 2) \cdot (2x) = 6x^2 + 4x.$$

c) Wir subtrahieren dieses Produkt vom Dividenden:

$$(6x^2 + 7x + 2) - (6x^2 + 4x) = 3x + 2.$$

Es sind nun zwei Fälle möglich:

Fall 1: Die Differenz ist gleich Null.
Fall 2: Die Differenz ist ungleich Null (wie in unserem Beispiel).
Im Fall 1 ist die Aufgabe gelöst. Im Fall 2 kann das Verfahren im Zyklus a) bis c) fortgesetzt werden. Nun können wiederum zwei Fälle eintreten:

Fall 2.1.: Nach endlich vielen Schritten ist die Differenz gleich Null (wie in unserem Beispiel).

Fall 2.2.: Das Verfahren bricht nicht ab, weil die Differenz nie gleich Null wird. In diesem Fall wird das Verfahren an einer Stelle abgebrochen, bei der sichtbar wird, daß ein weiteres Anwenden des Algorithmus zu keinem Ende führt. In diesem Fall sprechen wir von „Division mit Rest".

36 **a)** $(3ab - 3a - 4b + 4) : (3a - 4)$ (Beispiel zu Fall 2.1.)

1. *Lösungsweg*

$$\begin{array}{rrrrrl}
(3ab & -\,3a & -\,4b & +\,4) & : (3a - 4) = b - 1 \\
-(3ab & & -\,4b) & & \\
\hline
0 & -\,3a & +\,0 & +\,4 & \\
-(& -\,3a & & +\,4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Probe:
$(3a - 4) \cdot (b - 1) = 3ab - 3a - 4b + 4$

2. *Lösungsweg*

$$\begin{array}{rrrrl}
(3ab & -\,3a & -\,4b & +\,4) & : (3a - 4) = -1 + b \\
-(& -\,3a & & +\,4) & \\
\hline
3ab & +\,0 & -\,4b & +\,0 & \\
-(3ab & & -\,4b &) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

[1] Natürlich ist im Bereich der rationalen Zahlen die Division (außer durch Null) unbeschränkt ausführbar. „Teilbar" bedeutet hier, daß die Variable x nicht im Nenner eines Bruches stehen soll.

b) $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$ (Beispiel zu Fall 2.1.)

$$\begin{array}{l}
\underline{-(a^3 - a^2b)} \\
\qquad a^2b - b^3 \\
\quad \underline{-(a^2b - ab^2)} \\
\qquad\qquad ab^2 - b^3 \\
\qquad\quad \underline{-(ab^2 - b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(14) Berechnen Sie auch $(a^n - b^n) : (a - b)$ für $n = 4$ und $n = 5$!

37 Beispiel zu Fall 2.2.:

$$(3x^2 + 8x + 6) : (3x + 2) = x + 2 + \frac{2}{3x + 2}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(3x^2 + 2x)} \\
\qquad 6x + 6 \\
\quad \underline{-(6x + 4)} \\
\qquad\qquad 2
\end{array}$$

Probe: $(3x + 2)(x + 2) + 2 = 3x^2 + 6x + 2x + 4 + 2 = 3x^2 + 8x + 6$

Aufgaben a 107 bis 111

Der g. g. T. und das k. g. V.

21

Wir suchen gemeinsame Teiler der Zahlen 56 und 84.
Es sind dies die Zahlen: 1; 2; 4; 7; 14; 28.
Unter allen gemeinsamen Teilern der Zahlen 56 und 84 ist die Zahl 28 der **größte gemeinsame Teiler,** der g. g. T.
Schneller läßt sich der größte gemeinsame Teiler nach folgendem Algorithmus ermitteln:

$$\left.\begin{array}{ll}
56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 & \\
84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 & \\
\hline
\text{g. g. T.:} \qquad 2^2 \cdot 7 = 28 &
\end{array}\right\}$$

Wir suchen von den Potenzen mit gleicher Basis, die in allen Zerlegungen auftreten, die mit dem kleinsten Exponenten heraus.[1]

Wir übertragen das Verfahren sinngemäß auf beliebige Terme.

38 **a)** Es soll der größte gemeinsame Teiler von $12a^2bc$ und $4ab^2c$ ermittelt werden.

$$\begin{array}{l}
12a^2bc = 2^2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \\
\;\;4ab^2c = 2^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot c \\
\hline
\text{g. g. T.: } 2^2 \cdot a \cdot b \cdot c = 4abc
\end{array}$$

[1] Dabei betrachten wir die Primfaktoren 3 und 7 als Potenzen 3^1 bzw. 7^1.

A

b) Es ist der g. g. T. von $9a^2 - 12ab + 4b^2$, $9a^2 - 4b^2$ und $3a - 2b$ gesucht.

$$\begin{array}{ll} 9a^2 - 12ab + 4b^2 & = (3a - 2b)^2 \\ 9a^2 - 4b^2 & = (3a + 2b)(3a - 2b) \\ 3a - 2b & = 3a - 2b \\ \hline \text{g. g. T.:} & \quad 3a - 2b \end{array}$$

Wir suchen gemeinsame Vielfache der Zahlen 6, 8 und 12.
Es sind dies die Zahlen: 24; 48; 72; ...; $24n$; ... mit $n > 0$ und n natürlich.
Unter allen gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6, 8 und 12 ist die Zahl 24 das **kleinste gemeinsame Vielfache,** das k. g. V. Schneller läßt sich das k. g. V. nach folgendem Algorithmus ermitteln:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \qquad = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \\ \hline \text{k. g. V.: } 2^3 \cdot 3 = 24 \end{array}\right\}$$

Wir suchen von den Potenzen mit gleicher Basis jeweils die mit dem größten Exponenten heraus.[1]

Wir übertragen das Verfahren sinngemäß auf beliebige Terme.

39 **a)** Es soll das k. g. V. von $3a^2b$, $12ab^2$ und $8abc$ ermittelt werden.

$$\begin{array}{rl} 3a^2b & = 3 \cdot a^2 \cdot b \\ 12ab^2 & = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \\ 8abc & = 2^3 \cdot a \cdot b \cdot c \\ \hline \text{k.g.V.: } & 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c = 24a^2b^2c \end{array}$$

b) Es soll das k. g. V. von $a^2 - b^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ ermittelt werden.

$$\begin{array}{rl} a^2 - b^2 & = (a + b)(a - b) \\ a^2 + 2ab + b^2 & = (a + b)(a + b) \\ \hline \text{k. g. V.:} & = (a + b)(a + b)(a - b) \end{array}$$

Aufgaben a 112 bis 127

Addition und Subtraktion von Quotienten

22

Beim Aufbau des Bereichs der gebrochenen Zahlen in der Lerneinheit A4 haben wir die Rechenoperationen mit den gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ... kennengelernt. Dabei bedeuteten a, b, c, d, ... natürliche Zahlen.

Stehen aber im Zähler und Nenner rationale Zahlen, so muß gezeigt werden, daß die für Brüche (geordnete Paare natürlicher Zahlen) *definierten Rechenvorschriften* als *Gesetze* für das Rechnen mit Quotienten rationaler Zahlen gelten. Wir gehen auf die Beweise nicht ein.

[1] Auch hier gilt die Fußnote von S. 29.

17 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c ($c \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

Quotienten werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man sie gleichnamig macht, die Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von Brüchen bezeichnet man als **Hauptnenner** dieser Brüche.

40 **a)** $\frac{b}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{b+3}{2a}$

b) $\frac{-3}{a} + \frac{5b}{ac} = \frac{-3 \cdot c}{a \cdot c} + \frac{5b}{ac} = \frac{-3c + 5b}{ac}$

c) $\frac{8a}{15b} - \frac{3}{20b^2}$

Ermittlung des Hauptnenners:

$$\begin{array}{l} 15b \;=\; 3 \cdot 5 \cdot b \\ 20b^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \\ \hline \text{HN:} \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b^2 = 60b^2 \end{array}$$

$$\frac{8a}{15b} - \frac{3}{20b^2} = \frac{8a \cdot 4b}{60b^2} - \frac{3 \cdot 3}{60b^2} = \frac{32ab - 9}{60b^2}$$

Aufgaben a 128 bis 136

Multiplikation von Quotienten

23

---

18 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d ($b \neq 0$, $d \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Quotienten werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.

Vor dem Ausmultiplizieren werden die einzelnen Quotienten $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{c}{d}$ nach Möglichkeit gekürzt.

41 **a)** $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{6xy}{z} = \frac{2x \cdot 6xy}{3y \cdot z} = \frac{2x \cdot 2x}{z} = \frac{4x^2}{z}$

b) $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x \cdot y}{1 \cdot z} = \frac{xy}{z}$

c) $\frac{n^3}{5m} \cdot 15mn = \frac{n^3}{5m} \cdot \frac{15mn}{1} = \frac{n^3 \cdot 15mn}{5m \cdot 1} = \frac{n^3 \cdot 3n}{1} = 3n^4$

Aufgaben a 137 bis 142

Division von Quotienten

24

19 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$$

Durch einen Quotienten wird dividiert, indem man mit dem Reziproken dieses Quotienten multipliziert.

42 **a)** $\frac{a}{5} : \frac{a^2x}{20} = \frac{a}{5} \cdot \frac{20}{a^2x} = \frac{a \cdot 20}{5 \cdot a^2x} = \frac{4}{ax}$ **b)** $x : \frac{p}{q} = \frac{x}{1} : \frac{p}{q} = \frac{x}{1} \cdot \frac{q}{p} = \frac{qx}{p}$

c) $\frac{x}{y} : a = \frac{x}{y} : \frac{a}{1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{a} = \frac{x \cdot 1}{y \cdot a} = \frac{x}{ay}$

15 Beweisen Sie

a) $1 : \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$, **b)** $(-1) : \frac{p}{q} = -\frac{q}{p}$, **c)** $\frac{p}{q} : (-1) = -\frac{p}{q}$!

Aufgaben a 143 bis 148

Doppelbrüche

25

Verwendet man als Divisionszeichen nur den Bruchstrich, so können sogenannte **Doppelbrüche** entstehen.

43 **a)** $\frac{a}{2} : \frac{b}{c} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{c}}$ **b)** $x : \frac{y}{z} = \frac{x}{\frac{y}{z}}$ **c)** $\frac{r}{s} : b = \frac{\frac{r}{s}}{b}$

44 **a)** $\frac{\frac{a^2b}{20x}}{\frac{35ab}{75x}} = \frac{a^2b}{20x} : \frac{35ab}{75x} = \frac{a^2b}{20x} \cdot \frac{75x}{35ab} = \frac{a^2b \cdot 75x}{20x \cdot 35ab} = \frac{a \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{3a}{28}$

b) $\frac{1 + \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{4}} = \frac{\frac{2}{2} + \frac{a}{2}}{\frac{4}{4} + \frac{a}{4}} = \frac{\frac{a+2}{2}}{\frac{a+4}{4}} = \frac{a+2}{2} \cdot \frac{4}{a+4} = \frac{2(a+2)}{a+4}$

Aufgaben a 149 und 150

Entsprechend der Definition der Ordnungsrelation gilt für je zwei rationale Zahlen a, b $(a \neq b)$ genau einer der beiden Fälle $a < b$ oder $a > b$.
Um von zwei gegebenen Zahlen zu entscheiden, welcher Fall zutrifft, kann man die Differenz beider Zahlen bilden. Aus dem Monotoniegesetz folgt nämlich unmittelbar folgende Tatsache: $a < b$ genau dann, wenn $a - b < 0$.

45 a) Die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15}$. Die Differenz $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$ ist negativ, also ist $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

b) Die Zahlen $-\frac{2}{3}$ und $-\frac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

$\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{15}$. Die Differenz $-\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right)$ ist positiv, also ist $-\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$.

c) $-\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

Entsprechend der Definition der Ordnungsrelation ist jede negative Zahl kleiner als jede positive Zahl, also ist $-\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

16 Stellen Sie für folgende Zahlenpaare $[a; b]$ zuerst fest, welche der Relationen $a < b$ oder $a > b$ gilt! Bilden Sie dann die Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, und stellen Sie fest, ob $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ oder $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ gilt!

$[4; 7]$; $\left[\frac{2}{7}; \frac{3}{8}\right]$; $[-3; -2]$; $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right]$; $[-5; 2]$; $[1; -1]$

Bei dieser Übung kommt folgende Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck:
1. Haben zwei Zahlen a, b gleiches Vorzeichen, so ändert sich beim Übergang zu ihren Reziproken die Ordnungsrelation (aus $<$ wird $>$ und umgekehrt).
2. Haben zwei Zahlen a, b unterschiedliches Vorzeichen, so bleibt die Ordnungsrelation beim Übergang zu ihren reziproken Zahlen erhalten.

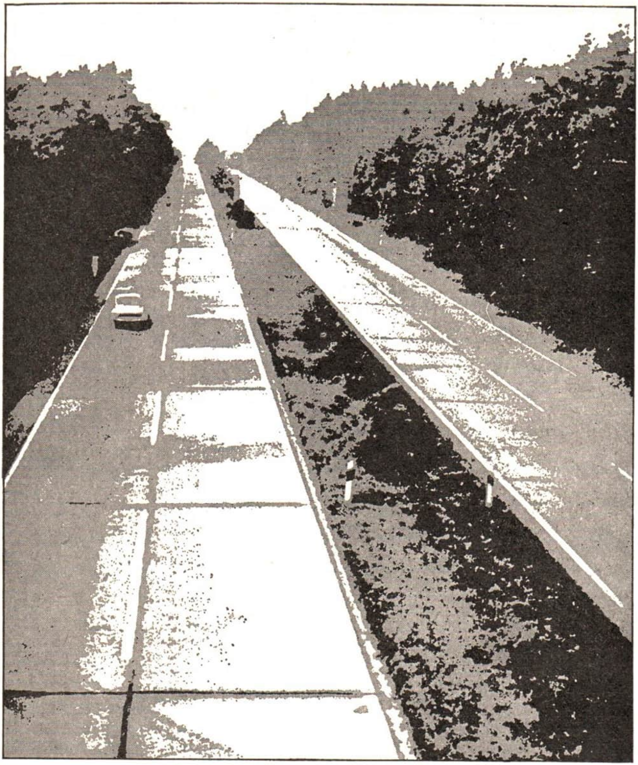
Diese Gesetzmäßigkeit läßt sich noch in anderer Weise ausdrücken:

20 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b $(a \neq 0, b \neq 0)$ gilt:**

1. Ist $a \cdot b > 0$, so folgt aus $a < b$ die Ungleichung $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2. Ist $a \cdot b < 0$, so folgt aus $a < b$ die Ungleichung $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Bei der Formulierung des Satzes wurden die folgenden Tatsachen ausgenutzt:
$a \cdot b > 0$ genau dann, wenn $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$ und $b < 0$,
$a \cdot b < 0$ genau dann, wenn $a > 0$ und $b < 0$ oder $a < 0$ und $b > 0$.



B

Auf lineare Funktionen stößt man bei der Untersuchung zahlreicher Probleme in Natur und Technik. Hierzu gehören zum Beispiel alle Vorgänge, denen Proportionalität zugrunde liegt. Ein Kraftfahrer fährt auf der Autobahn häufig lange Strecken mit annähernd konstanter Geschwindigkeit v. In diesem Fall ist der zurückgelegte Weg s eine lineare Funktion der Fahrzeit t: $s = vt$.

B. Lineare Funktionen, Gleichungen

Seite

Der Funktionsbegriff

1

In der Praxis gibt es viele Sachverhalte, denen folgendes gemeinsam ist: Jedem Element einer Menge X wird **genau ein** Element einer Menge Y zugeordnet. Hierbei können X und Y gemeinsame Elemente enthalten.

1 **a)** Die nachstehende Tabelle enthält den Beginn einer Aufstellung, aus der die Fahrpreise für Rückfahrkarten bei $33\frac{1}{3}$ % Ermäßigung für die 2. Klasse der Deutschen Reichsbahn bei gewissen Entfernungen entnommen werden können.

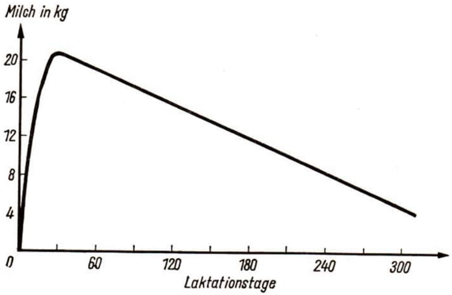
Entfernung in km	1 bis 3	4	5	6	7	8	9	10
Preis in MDN	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,80	1,90	2,00	2,20	2,20	2,40	2,40

Menge X: Entfernungen von 1 km bis 22 km (mit ganzzahliger Maßzahl)
Menge Y: Die zugehörigen Fahrpreise in MDN
Hier gibt eine Tabelle die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

b) Mit Hilfe der Gleichung $s = \frac{g}{2} t^2 \left(g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)$ kann zu jeder in Sekunden gemessenen Zeitspanne t die in dieser Zeit beim freien Fall im Vakuum zurückgelegte Wegstrecke s in Metern berechnet werden.
Menge X: Die Zeitspannen in einem bestimmten Beobachtungszeitraum
Menge Y: Gewisse Längen
Hier gibt eine Gleichung die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

c) Manchmal werden in der Praxis Kurven zur graphischen Veranschaulichung gewisser Zusammenhänge vorgegeben. So wurden z. B. durch Messungen Durchschnittswerte ermittelt, die die Beschreibung des Laktationsverlaufs[1] einer 4000-l-Kuh durch die im Bild B 1 dargestellte Zeichnung ermöglichen.



B 1

Auf Grund dieser graphischen Darstellung kann ein Viehzüchter zu jedem gewünschten Zeitpunkt nach Laktationsbeginn die zugehörige Milchmenge ablesen und Vergleiche mit den Leistungen seiner Kühe vornehmen.
Menge X: Diese 300 Ablesetage
Menge Y: Die diesen Tagen bei der Ablesung zugeordneten Milchmengen
Hier gibt eine graphische Darstellung die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

Mathematisch wesentlich ist an diesen Sachverhalten folgendes:

1. Den Elementen der Menge X werden die Elemente von Y **eindeutig** zugeordnet, d. h., jedem Element der Menge X ist **genau ein** Element der Menge Y zugeordnet. Die Richtung der Zuordnung wird durch Pfeile zum Ausdruck gebracht oder durch die Reihenfolge, in der die Elemente stehen.

   $x_1 \to y_1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $[x_1;\ y_1]$

2. In allen geordneten Paaren tritt jedes Element von X (also jedes Element an erster Stelle des Paares) genau einmal auf. Andernfalls würden einem gewissen Element von X zwei Elemente von Y zugeordnet sein.

Diese wesentlichen Eigenschaften werden im Funktionsbegriff erfaßt.

---

[1] Als Laktationsperiode bezeichnet man den Zeitraum, in dem Milch abgesondert wird. Bei der Kuh erstreckt sich die Laktationsperiode durchschnittlich über 300 Tage.

1 **DEFINITION: Eine Funktion ist eine Menge geordneter Paare $[x; y]$, die man erhält, wenn jedem Element einer Menge X ($x \in X$) *genau ein* Element einer Menge Y($y \in Y$) zugeordnet wird.**
Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion. Die Elemente von X heißen *Argumente*.
Die Menge Y heißt *Wertevorrat* der Funktion. Die Elemente von Y heißen *Funktionswerte*.

Es gibt mehrere Möglichkeiten der **Darstellung von Funktionen.** Hierzu gehören Wertetabellen, graphische Darstellungen, Gleichungen und Wortvorschriften. Die einzelnen Möglichkeiten weisen Vorteile und Nachteile auf. Deshalb benutzt man oft mehrere Darstellungsformen gleichzeitig.

B

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$

2

Das mathematisch Wesentliche der folgenden Sachverhalte liegt darin, daß die Veränderung des Funktionswertes proportional zur Veränderung des Arguments erfolgt.

a) $s = v \cdot t$; $v =$ const. — Der zurückgelegte Weg ist proportional der Zeit.

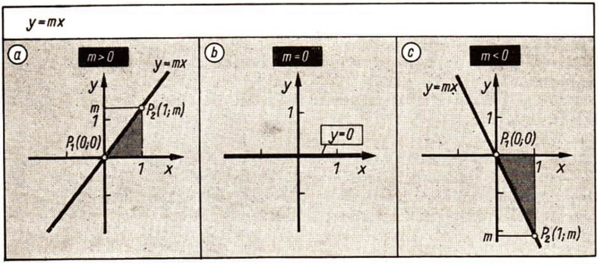
b) $U = R \cdot I$; $R =$ const. — Die Spannung an den Enden eines stromdurchflossenen Leiters ist proportional der Stromstärke I.

c) $R = \left(\frac{\varrho}{A}\right) \cdot l$; $A =$ const., $\varrho =$ const. — Der elektrische Widerstand eines Drahtes ist proportional seiner Länge.
ϱ: spezifischer Widerstand.

Es handelt sich um drei lineare Funktionen, die sämtlich durch Gleichungen der Form

$y = m \cdot x$ ($m =$ const.)

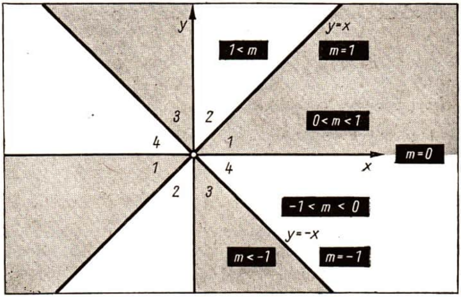
dargestellt werden können.
Statt „Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$“ werden wir der Einfachheit wegen sagen: „die Funktionen $y = mx$“. Entsprechend sagen wir statt „die Funktion mit der Gleichung $y = 5x$“ künftig nur „die Funktion $y = 5x$“.
Natürlich muß zwischen den folgenden Begriffen streng unterschieden werden:
Die **Funktion** f ist eine gewisse Menge geordneter Paare $[x; y]$.
Die **Gleichung** $y = f(x)$ ist eine Zuordnungsvorschrift, mit deren Hilfe man die Paare ermitteln kann.
Der **Funktionswert** an einer Stelle x_0 ist eine Zahl, die mit y_0 oder $f(x_0)$ bezeichnet wird.
Die graphische Darstellung jeder der Funktionen $y = mx$ ist eine Gerade.
Die Gerade geht durch die Punkte $P(0; 0)$ und $P(1; m)$, denn die Koordinaten dieser Punkte genügen der Funktionsgleichung: $0 = m \cdot 0$; $m = m \cdot 1$. Für den Fall $m = 0$ fällt die Gerade mit der x-Achse zusammen (Bild B2).
Durch das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten der Länge m bzw. 1 ist die Neigung der Geraden gegen die x-Achse festgelegt. Dabei ist zu beachten, daß



B 2

die Gerade im Fall $m > 0$ steigt und im Fall $m < 0$ fällt. Das genannte rechtwinklige Dreieck nennt man **Steigungsdreieck** der Geraden, der Parameter m heißt **Anstieg** der Geraden.
Man kann als Steigungsdreieck jedoch auch jedes andere rechtwinklige Dreieck benutzen, dessen Katheten sich wie $m : 1$ verhalten.

(1) Die Ebene wird durch die Koordinatenachsen und die Geraden, die zu den Gleichungen $y = x$ und $y = -x$ gehören, in vier Teilmengen 1, 2, 3, 4 zerlegt (Bild B 3).



B 3

Untersuchen Sie, in welchen Gebieten die Bilder der Funktionen mit folgenden Gleichungen liegen![1]

a) $y = \frac{1}{2}x$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x$ **c)** $y = -2x$ **d)** $y = 8x$ **e)** $y = -5x$ **f)** $y = 0{,}5x$

Aufgaben b 1 bis 3

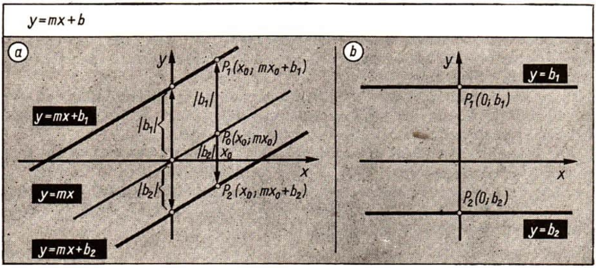
[1] Wenn keine Einschränkungen vorgenommen werden, sollen Definitionsbereich und Wertevorrat jeweils als unbegrenzt vorausgesetzt werden.

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + b$

3

Setzen wir in der Gleichung $y = mx + b$ für $b = 0$, so erhalten wir die linearen Funktionen $y = mx$.
Umgekehrt erhalten wir den Funktionswert $y_0 = mx_0 + b$ zu irgendeinem Argument x_0, indem wir zu mx_0 die Zahl b addieren. Graphisch bedeutet das (Bild B4) eine Verschiebung des Punktes $P_0(x_0;\, mx_0)$ um b Einheiten in der positiven Richtung der y-Achse, wenn $b > 0$ ist, und um $|b|$ Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse, wenn $b < 0$ ist.

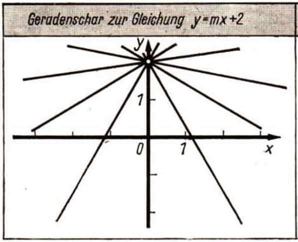
B 4



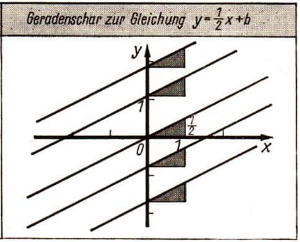
② Beweisen Sie, daß die Funktion $y = mx + b$ die y-Achse im Punkt $P(0;\, b)$ schneidet!

In der Gleichung $y = mx + b$ sind m und b auch Variable, aber sie unterscheiden sich in ihrer Bedeutung von den Variablen x und y.
Die sogenannten **Parameter** m und b sind frei wählbar. Wir sprechen deshalb von *den* Funktionen $y = mx + b$. Stellt man sich m und b in einem bestimmten Zusammenhange beliebig, aber fest gewählt vor, so spricht man von *der* Funktion $y = mx + b$.
Wählen wir beispielsweise $b = 2$, so erhalten wir $y = mx + 2$ mit nur einem Parameter, nämlich m. Lassen wir nun m variieren, so erhalten wir die **Schar** aller Geraden durch den Punkt $P(0;\, 2)$ (Bild B5).

B 5

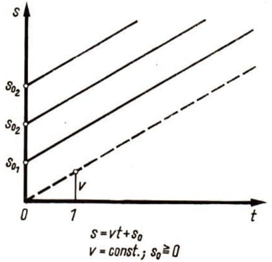


B 6

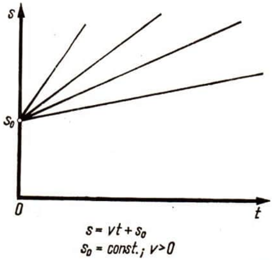


Wählen wir $m = \frac{1}{2}$ und lassen b variieren, so erhalten wir eine Schar paralleler Geraden mit dem Anstieg $m = \frac{1}{2}$ (Bild B6).

2 Die Gleichung $s = v \cdot t + s_0$ kann zur Bestimmung der Entfernung benutzt werden, die ein mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegender Körper von einem bestimmten Punkt P_0 zu einem bestimmten Zeitpunkt t besitzt. s_0 ist dabei die Entfernung, die er zum Zeitpunkt $t = 0$ von diesem Punkt bereits besaß. In diesem Beispiel sind v und s_0 Parameter.
Ist $v =$ const. und wird s_0 variiert, so bedeutet das, daß sich irgendwelche Körper mit gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedenem Ausgangspunkt bezüglich P_0 auf einer geradlinigen Strecke bewegen. Graphisch wird dieser Sachverhalt durch die Schar paralleler Halbgeraden dargestellt (Bild B7). Daß die Geraden einander nicht schneiden, drückt den Sachverhalt aus, daß sich zwei verschiedene Körper bei gleicher Geschwindigkeit nie einholen, sondern sich in gleichem Abstand zueinander bewegen.
Ist $s_0 =$ const. und wird der Parameter v verändert, so bedeutet das, daß sich irgendwelche Körper vom gleichen Anfangspunkt, aber mit unterschiedlicher Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Strecke bewegen.
Graphisch wird dieser Sachverhalt durch die Schar von Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt $P_0(0; s_0)$ dargestellt (Bild B8).
Je länger die Bewegung der Körper dauert, desto größer werden die Entfernungen der Körper voneinander. Dieser Umstand schlägt sich im Bild so nieder, daß die Halbgeraden auseinanderstreben.



B 7



B 8

Aufgaben b 4 bis 6

Die Bilder linearer Funktionen

4

Zum Nachweis, daß das Bild einer linearen Funktion eine Gerade ist, müssen folgende Sätze bewiesen werden:

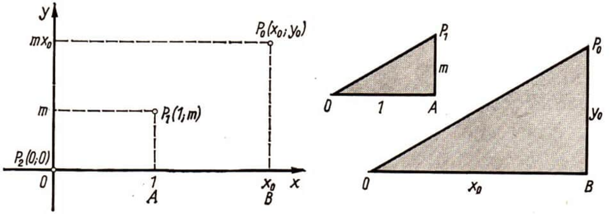
2 **SATZ 1: Die einer Funktion $y = mx$ entsprechenden Punkte der Ebene liegen auf einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt.**

SATZ 2: Alle Punkte einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt (außer der y-Achse) sind Bilder einer linearen Funktion $y = mx$.

Der Satz 1 allein reicht nicht aus. Er würde noch die Möglichkeit offenlassen, daß durch die geordneten Paare der Funktion $y = mx$ nicht alle Punkte der Geraden erfaßt werden.
Der Satz 2 allein reicht ebenfalls nicht aus. Er würde noch die Möglichkeit offenlassen, daß auch noch Bildpunkte der linearen Funktion außerhalb der Geraden liegen.
Erst die Sätze 1 und 2 zusammengenommen berechtigen zu der Behauptung, daß das Bild der Funktion $y = mx$ eine Gerade ist.
Beweis für Satz 1: Die Punkte $P_2\,(0; 0)$ und $P_1\,(1; m)$ sind Bildpunkte der Funktion $y = mx$.
Wir zeigen, daß die Gerade durch diese beiden Punkte die Behauptung des Satzes erfüllt, daß also auch alle weiteren Bildpunkte der Funktion auf dieser Geraden liegen.
Bild B9: Wir wählen einen Fall, in dem m positiv ist.[1] Sei $P_0\,(x_0; y_0)$ ein beliebiger Bildpunkt der Funktion mit positiven Koordinaten[2]. Für seine Koordinaten gilt

$$\frac{y_0}{x_0} = m.$$

B 9



Die Dreiecke OBP_0 und OAP_1 sind folglich ähnlich, denn sie stimmen im rechten Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten überein.

$$\frac{\overline{P_0B}}{\overline{OB}} = \frac{y_0}{x_0} = m; \qquad \frac{\overline{P_1A}}{\overline{OA}} = \frac{m}{1} = m.$$

Also sind auch die Winkel AOP_1 und BOP_0 gleich, d. h., die Seite $\overline{OP_1}$ liegt auf $\overline{OP_0}$, und das bedeutet, daß O, P_1 und P_0 auf einer Geraden liegen.
Da P_0 irgendein Bildpunkt der Funktion war, ist die Behauptung bewiesen, daß alle Bildpunkte auf der genannten Geraden liegen.
Beweis für Satz 2: Es sei g eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt, die nicht identisch mit der y-Achse ist. Die y-Koordinate des Punktes mit der x-Koordinate 1 bezeichnen wir mit m.
Sei $P_0\,(x_0; y_0)$ irgendein anderer Punkt der Geraden. Wir wählen wie beim Beweis von Satz 1 den Fall, daß die gegebene Gerade steigt und der beliebige Punkt P_0 im ersten Quadranten liegt. Bei vollständigem Beweis müssen selbst-

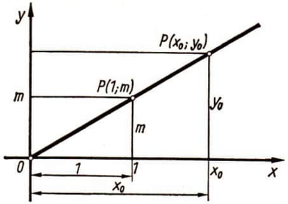
[1] Ist m negativ, verläuft der Beweis analog.
[2] Für einen beliebigen Punkt des dritten Quadranten verläuft die Überlegung analog.

verständlich alle anderen Fälle auch noch untersucht werden.
Auf Grund des Strahlensatzes gilt (Bild B10):

$$\frac{y_0}{m} = \frac{x_0}{1}$$

$$y_0 = m \cdot x_0,$$

d. h., die Koordinaten irgendeines Punktes der Geraden genügen der Gleichung $y = mx$.



B 10

Der Schnittpunkt mit der x-Achse $P_x(x_0; 0)$:

Für alle Punkte der x-Achse ist die y-Koordinate gleich Null. Also finden wir das Argument x_0, dem der Funktionswert $y_0 = 0$ zugeordnet ist, indem wir in der Gleichung für y die Zahl 0 einsetzen: $0 = mx_0 + b$.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse $P_y(0; y_0)$:

Für alle Punkte der y-Achse ist die x-Koordinate gleich Null. Also finden wir den Funktionswert y_0, der dem Argument $x_0 = 0$ zugeordnet ist, indem wir in der Gleichung für x die Zahl 0 einsetzen: $y_0 = m \cdot 0 + b$.

Aufgaben b 7 bis 15

Kongruenztransformationen

5

Bewegen sich alle Punkte einer Ebene auf zueinander parallelen Geraden im gleichen Richtungssinn um eine gleich lange Strecke, so sprechen wir von einer **Verschiebung** der Ebene. Zur Festlegung einer Verschiebung wird ein Pfeil angegeben, der mit seiner Länge, seiner Richtung und seiner Pfeilspitze die Verschiebungsweite sowie die Verschiebungsrichtung mit Richtungssinn angibt.
Wir werden nun Bilder von linearen Funktionen $y = mx + b$ in der Ebene verschieben. Dabei werden wir untersuchen, wie solche Verschiebungen in den Gleichungen der zugehörigen Funktionen zum Ausdruck kommen.

(3) Verschieben Sie die Gerade, die zur Funktion $y = 2x + 5$ gehört
a) um 2 Einheiten in der positiven Richtung der y-Achse,
b) um 3 Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse!

Wie heißen die Gleichungen der Funktionen, die durch die neuen Geraden dargestellt werden? Welchen Einfluß hat eine Verschiebung in Richtung der y-Achse auf die Gleichung linearer Funktionen?

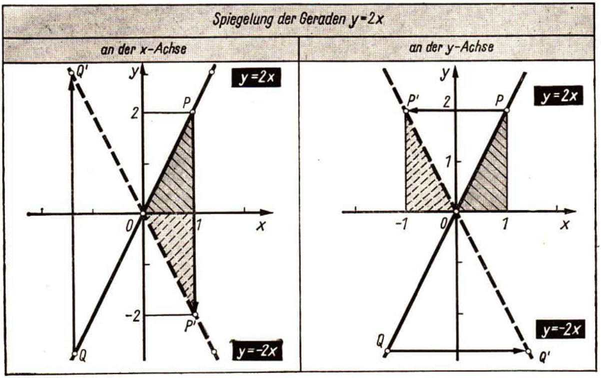
Bei **Spiegelungen** an einer Geraden liegen das Urbild und das Bild symmetrisch zu einer Geraden, der **Symmetrieachse.**
Verschiebungen und Spiegelungen bezeichnet man als **Kongruenztransformationen,** denn sie liefern kongruente Bilder von den Urbildern. Die Bilder B11 und

B12 zeigen die Spiegelung der Bilder von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ und $y = mx + b$ an der x-Achse bzw. an der y-Achse.

3 **SATZ: Wird eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht, an einer Koordinatenachse gespiegelt, so ändert sich in der zugehörigen Funktionsgleichung das Vorzeichen von m.**

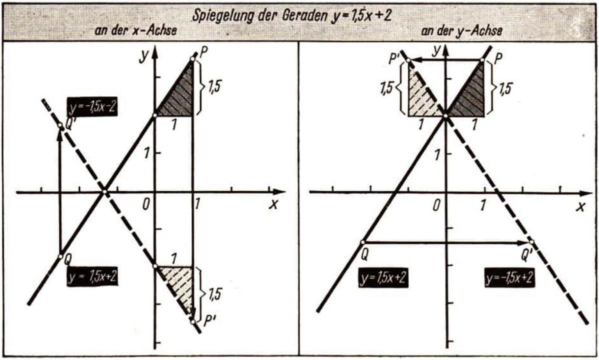
4 **a)** Beweisen Sie diesen Satz an Hand des Bildes B11!

B 11



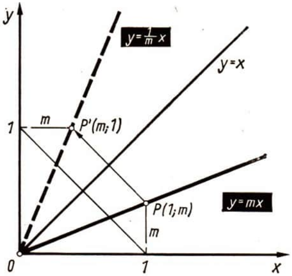
b) Überlegen Sie an Hand des Bildes B12, wie die Spiegelung einer beliebigen Geraden an einer Koordinatenachse in der zugehörigen Funktionsgleichung zum Ausdruck kommt!

B 12



B

Wir werden nun Geraden, die durch den Ursprung gehen, an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ spiegeln (Bild B13).



B 13

4 **SATZ: Die Anstiege zweier Geraden, die zur Geraden mit der Gleichung $y = x$ symmetrisch liegen, sind zueinander reziprok.**

Beweis: Wir wählen für den Beweis den Fall $m > 0$. Für den Fall $m < 0$ verläuft der Beweis analog.
Die Gerade $y = mx$ möge bei Spiegelung an der Geraden $y = x$ in die Gerade mit der Gleichung $y = m'x$ übergehen (Bild B13).
Bei dieser Spiegelung geht der Punkt $P\,(1; m)$ in den Punkt $P'\,(m; 1)$ über. Den Anstieg der Geraden, die durch $P'\,(m; 1)$ geht, kann man aus den Koordinaten dieses Punktes berechnen, nämlich als Quotient aus der y- und der x-Koordinate von $P'(m; 1) : m' = \frac{1}{m}$.
Also heißt die Gleichung der spiegelbildlichen Geraden $y = \frac{1}{m}x$.

Aufgaben b 16 bis 23

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

6

Die Zeichen „<“, „=“, „>“ heißen Relationszeichen.
Verbinden wir zwei Terme durch das Relationszeichen „=“, so erhalten wir eine **Gleichung,** verbinden wir zwei Terme durch eins der Relationszeichen „<“ oder „>“, so erhalten wir eine **Ungleichung.**
Gleichungen und Ungleichungen, in denen keine Variablen auftreten, können entweder wahre oder falsche Aussagen sein. Enthalten Gleichungen und Ungleichungen Variablen, so sprechen wir von **Aussageformen,** weil sie zwar die Form von Aussagen haben, aber erst durch Einsetzen von Zahlzeichen für die Variablen in Aussagen übergehen.

5 Setzen Sie in folgenden Aussageformen für das Zeichen „x“ das Zeichen „3“ und für das Zeichen „y“ das Zeichen „0“ ein! Entscheiden Sie, ob eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

a) $x \cdot y = 0$ **b)** $3 \cdot x + y < 5$ **c)** $y : x < 4 + x$

Die Menge sämtlicher Lösungen einer Gleichung bzw. Ungleichung heißt **Lösungsmenge** dieser Gleichung bzw. Ungleichung.

3 **a)** Die Zahl 5 ist Lösung der Gleichung

$(x - 5)(x + 3) = 0$,

denn $(5 - 5)(5 + 3) = 0$ ist eine wahre Aussage.

b) Die Zahl 4 ist keine Lösung dieser Gleichung,

denn $(4 - 5)(4 + 3) = 0$ ist eine falsche Aussage,

weil $(4 - 5)(4 + 3)$ gleich -7 ist und nicht gleich Null.

Wird eine Gleichung bzw. Ungleichung so umgeformt, daß sich dabei die Lösungsmenge nicht ändert, dann ist die Lösungsmenge der umgeformten Gleichung bzw. Ungleichung auch Lösungsmenge der Ausgangsgleichung bzw. Ausgangsungleichung.

B

Solche Umformungen nennt man **äquivalente Umformungen**. Gleichungen bzw. Ungleichungen, die durch solche äquivalenten Umformungen auseinander hervorgehen, nennt man **äquivalente Gleichungen bzw. Ungleichungen.**

4 **a)** $\underline{2x = 4}$ Die Zahl 2 ist Lösung, denn $2 \cdot 2 = 4$ ist wahr.

$$2x \boxed{+ 3} = 4 \boxed{+ 3}$$

Die Addition von 3 auf beiden Seiten führt auf eine äquivalente Gleichung, denn auch hier ist 2 die einzige Lösung. Es gilt $2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3$.

$$2x + \boxed{\frac{1}{x-2}} = 4 + \boxed{\frac{1}{x-2}}$$

Die Addition von $\frac{1}{x-2}$ auf beiden Seiten führt auf eine nicht äquivalente Gleichung. Da $\frac{1}{x-2}$ für $x = 2$ nicht definiert ist, ist $x = 2$ auch nicht Lösung dieser Gleichung. Die Lösungsmenge hat sich verändert.

b) $\underline{2x < 5}$ Die Lösungsmenge besteht aus allen Zahlen, die kleiner sind als 2,5.

$$2x \boxed{\cdot 4} < 5$$

Die Multiplikation von 4 auf nur einer Seite führt auf eine nicht äquivalente Ungleichung. Die Lösungsmenge besteht hier aus allen Zahlen, die kleiner als $\frac{5}{8}$ sind. $x = 2$ gehört zum Beispiel nicht mehr dazu.

$$2x \boxed{\cdot 4} < 5 \boxed{\cdot 4}$$

Die Multiplikation mit 4 auf beiden Seiten führt auf eine äquivalente Ungleichung.

$$2x \boxed{\cdot (-4)} > 5 \boxed{\cdot (-4)}$$

Die Multiplikation von (-4) auf beiden Seiten macht die Umkehrung des Relationszeichens erforderlich, wenn eine äquivalente Ungleichung gebildet werden soll.

Regeln für die äquivalente Umformung von Gleichungen und Ungleichungen

<table>
<tr><th>Gleichung</th><th>Ungleichung</th></tr>
<tr><td colspan="2">Addition bzw. Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten oder eines Terms, der im Variabilitätsbereich der Variablen der gegebenen Gleichung oder Ungleichung definiert ist.</td></tr>
<tr><td>Multiplikation beider Seiten mit einer von Null verschiedenen Zahl
oder
Division beider Seiten durch eine von Null verschiedene Zahl.</td><td>Multiplikation beider Seiten mit einer positiven Zahl
oder
Division beider Seiten durch eine positive Zahl.
Bei Multiplikation beider Seiten mit einer negativen
oder
Division durch eine negative Zahl ist die Richtung der Ungleichung zu ändern.</td></tr>
</table>

B

Bei Verwendung beliebiger Terme zur Multiplikation oder Division beider Seiten müssen zusätzliche Überlegungen angestellt werden, wie folgendes Beispiel zeigt: Die folgenden Gleichungen sind nicht äquivalent

(I) $x^2 = 4$ (II) $x^2(x + 3) = 4(x + 3)$

Gleichung II geht aus Gleichung I durch Multiplikation mit $(x + 3)$ hervor. Die Lösungsmenge von Gleichung I ist $\{2; -2\}$ und die Lösungsmenge von Gleichung II $\{2; -2; -3\}$.

Das Isolieren einer Variablen

7

Bringt man eine beliebige lineare Gleichung durch äquivalente Umformungen auf eine Form, in der diese Variable nur noch auf einer Seite, und zwar allein vorkommt, so hat man diese Variable **isoliert**.

$\boxed{5}$ In der Gleichung

$5(x + 3) = 4$ | $c(x + b) = a$

ist die Variable x durch die *Addition*

mit 3 | mit b

verknüpft. Das Ergebnis dieser Verknüpfung

$(x + 3)$ | $(x + b)$

ist durch die *Multiplikation*

mit 5 | mit c

verknüpft.

Die Zurückführung einer Gleichung auf die Form $x = z$ kann in der Weise erfolgen, daß man in umgekehrter Reihenfolge durch Anwenden der jeweils zutreffenden Umkehroperation Schritt für Schritt zu einfacheren Formen der Gleichung übergeht.

1. Die Verknüpfung durch die Multiplikation wird durch deren Umkehroperation, also die Division, gelöst. Folglich werden beide Seiten der Gleichung

durch 5	durch c
$\frac{5 \cdot (x+3)}{5} = \frac{4}{5}$	$\frac{c \cdot (x+b)}{c} = \frac{a}{c}$
$x + 3 = \frac{4}{5}$	$x + b = \frac{a}{c}$

dividiert.

2. Die additive Verknüpfung wird durch die Umkehroperation der Addition, also die Subtraktion, gelöst, indem auf beiden Seiten

3	b
$(x+3) - 3 = \frac{4}{5} - 3$	$(x+b) - b = \frac{a}{c} - b$
$x = -\frac{11}{5}$	$x = \frac{a - bc}{c}$

subtrahiert wird.

(9) Formen Sie nach dem gleichen Prinzip die folgenden Gleichungen äquivalent um bis zur Form $x = z$, indem Sie jeweils ein Zahlenbeispiel und den allgemeinen Fall parallel behandeln!

a) $x + b = a;\ x + 6 = -3$ **b)** $\frac{x}{b} = a;\ \frac{x}{-3} = 5$

c) $\frac{x}{b} - c = a;\ \frac{x}{3} - 0{,}5 = -1{,}5$ **d)** $\frac{x+b}{c} = a;\ \frac{x+2}{5} = 6$

Aufgaben b 24 bis 27

Die Probe

8

Wenn wir nur äquivalente Umformungen vornehmen, ist die Lösung der letzten Gleichung auch Lösung der Ausgangsgleichung. Die im folgenden behandelte Probe ist also bei äquivalenten Übergängen kein mathematisches Erfordernis, sondern erfüllt den Zweck, Rechenfehler aufzudecken. Deshalb wird sie stets durchgeführt.

Durch die Probe wird überprüft, ob die Gleichung in eine wahre Aussage übergeht, wenn für x die berechnete Zahl eingesetzt wird.

6 Die Gleichung $1 - 5x = 15 + 11x$ möge umgeformt worden sein in die Gleichung $x = -\frac{7}{8}$.

Es ist zu überprüfen, ob

$$1-5\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=15+11\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$$

eine wahre Aussage ist.
Da man das nicht sofort erkennen kann, werden beide Seiten *getrennt für sich* ausgerechnet, bis man die Gleichheit der rechten und der linken Seite bestätigt findet. Anderenfalls stellt die Gleichung eine falsche Aussage dar.

Rechte Seite:
$$\begin{aligned}1-5\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)&=1+\frac{35}{8}\\&=\frac{8+35}{8}\\&=\frac{43}{8}\end{aligned}$$

Linke Seite:
$$\begin{aligned}15+11\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)&=15-\frac{77}{8}\\&=\frac{120-77}{8}\\&=\frac{43}{8}\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist gleich der linken Seite, also ist

$$1-5\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=15+11\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$$

eine wahre Aussage, d. h., die Zahl $-\frac{7}{8}$ ist Lösung der gegebenen Gleichung.

Im folgenden wird an einem Beispiel die Form dargelegt, in der man die Lösung einer Gleichung schriftlich darstellen kann.
Auf der rechten Seite der Gleichung wird angedeutet, welche Operationen auf beiden Seiten der Gleichung vorgenommen werden.

7

$$\begin{aligned}\frac{7x-14}{4}&=x+4 &&|\cdot 4\\7x-14&=4x+16 &&|-4x\\3x-14&=16 &&|+14\\3x&=30 &&|:3\\x&=10\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}\frac{7\cdot 10-14}{4}&=10+4\\\frac{70-14}{4}&=14\\\frac{56}{4}&=14\\14&=14\end{aligned}$$

$14=14$ ist wahr, also ist $x=10$ Lösung.

Aufgaben b 28 bis 39

Anwendungsaufgaben

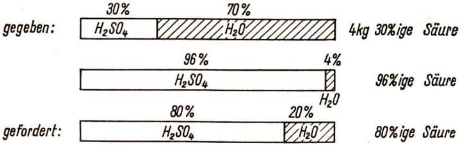
9

---

8 4 kg 30% iger Schwefelsäure sollen durch Zugabe von 96% iger Schwefelsäure auf einen Schwefelsäureanteil von 80% gebracht werden. Wieviel 96% ige Schwefelsäure ist hierfür erforderlich?

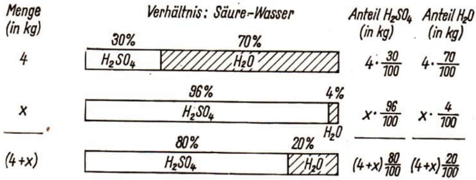
a) Lösungsansatz:

Wir verdeutlichen die Bedingungen dieser Aufgabe durch eine Zeichnung.



Die Menge der erhaltenen 80% igen Schwefelsäure besteht aus der Summe der Mengen der 30% igen, also 4 kg, und der unbekannten Menge x kg der 96% igen Säure.

Die Anteile an H_2SO_4 und an H_2O müssen wir ebenfalls addieren.



Wir haben zwei Lösungsmöglichkeiten.

Anteil H_2SO_4	Anteil H_2O
$4 \cdot \frac{30}{100} + x \cdot \frac{96}{100} = (4+x)\frac{80}{100}$	$4 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{4}{100} = (4+x)\frac{20}{100}$

Damit ist das praktische Problem in das mathematische übergeführt, diese Gleichung zu lösen.

b) Lösung des mathematischen Problems:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{30}{100} + x \cdot \frac{96}{100} &= (4+x)\frac{80}{100} && | \cdot 100\\
4 \cdot 30 + x \cdot 96 &= (4+x) \cdot 80\\
120 + 96x &= 320 + 80x && | -80x\\
120 + 16x &= 320 && | -120\\
16x &= 200 && | : 16\\
x &= \frac{200}{16}\\
x &= \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{30}{100} + \frac{25}{2} \cdot \frac{96}{100} &= \left(4 + \frac{25}{2}\right)\frac{80}{100}\\
1{,}2 + 12 &= (4 + 12{,}5) \cdot \frac{8}{10}\\
13{,}2 &= 13{,}2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{4}{100} &= (4+x)\frac{20}{100} && | \cdot 100\\
4 \cdot 70 + x \cdot 4 &= (4+x) \cdot 20\\
280 + 4x &= 80 + 20x && | -20x\\
280 - 16x &= 80 && | -280\\
-16x &= -200 && | : (-16)\\
x &= \frac{200}{16}\\
x &= \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{70}{100} + \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{100} &= \left(4 + \frac{25}{2}\right) \cdot \frac{20}{100}\\
2{,}8 + 0{,}5 &= 16{,}5 \cdot 0{,}2\\
3{,}3 &= 3{,}3
\end{aligned}
$$

c) *Lösung des praktischen Problems:*

(Das Ergebnis des mathematischen Problems muß jetzt entsprechend dem Lösungsansatz auf die praktische Aufgabenstellung bezogen werden.)
Es sind 12,5 kg 96% ige Schwefelsäure erforderlich.

d) *Kritische Einschätzung des Ergebnisses:*

Wir überprüfen das Ergebnis am Sachverhalt. In diesem Fall müssen wir untersuchen, ob in der gemischten Säure tatsächlich 80% H_2SO_4 enthalten sind, wie gefordert wurde.

B

Die Gesamtmenge beträgt 4 kg + 12,5 kg = 16,5 kg.
In 4 kg 30% iger Säure ist $\frac{30}{100} \cdot 4\,\text{kg} = 1{,}2\,\text{kg}\ H_2SO_4$.
In 12,5 kg 96% iger Säure ist $\frac{96}{100} \cdot 12{,}5\,\text{kg} = 12\,\text{kg}\ H_2SO_4$.
Also sind in der erhaltenen Säure 13,2 kg H_2SO_4,

$$\text{d. h. } \frac{13{,}2}{16{,}5} = \frac{\frac{66}{5}}{\frac{33}{2}} = \frac{66}{5} \cdot \frac{2}{33} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\,\%.$$

Für den zweiten Lösungsweg wird die Überprüfung entsprechend durchgeführt.

Aufgaben b 44 bis 62

Das Lösen von Ungleichungen

10

Ungleichungen werden nach den gleichen Prinzipien wie Gleichungen gelöst. Dabei sind die Regeln für die äquivalente Umformung von Ungleichungen (siehe Lerneinheit B 6) zu beachten.

$\boxed{9}$

$$\begin{aligned} 5x + 2 &< 3x - 4 \qquad &&| -3x \\ 2x + 2 &< -4 &&| -2 \\ 2x &< -6 &&| : 2 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge besteht aus allen Zahlen, die kleiner sind als −3.

Aufgaben b 40 bis 43

Graphische Lösung von linearen Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen

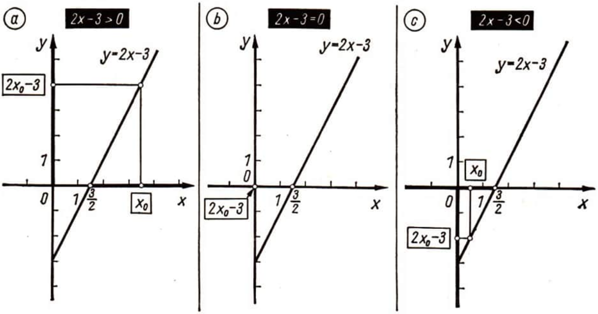
11

B

10 Für welche Zahlen x ist

a) $2x - 3 > 0$, **b)** $2x - 3 = 0$, **c)** $2x - 3 < 0$?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die graphische Darstellung der Funktion mit der Gleichung $y = 2x - 3$ (Bild B 14).



B 14

Zur Beantwortung der Frage a) untersuchen wir, für welche x-Werte die y-Werte größer als 0 sind, d. h., für welche x-Werte die Gerade oberhalb der x-Achse verläuft.

Zur Beantwortung der Frage b) untersuchen wir, an welcher Stelle $x = x_0$ die Gerade die x-Achse schneidet.

Zur Beantwortung der Frage c) untersuchen wir, für welche x-Werte die Gerade unterhalb der x-Achse verläuft.

a) Für $x > \frac{3}{2}$ ist $2x - 3 > 0$.

b) Für $x = \frac{3}{2}$ ist $2x - 3 = 0$.

c) Für $x < \frac{3}{2}$ ist $2x - 3 < 0$.

(7) Überprüfen Sie das graphisch ermittelte Ergebnis rechnerisch!

Aufgaben b 63 bis 66

11 Es sollen die Durchmesser einer zweistufigen Riemenscheibe bestimmt werden. Der Durchmesser der größeren Scheibe soll 6 cm größer sein als der kleinere, und die Durchmesser sollen das Verhältnis 4 : 5 besitzen (Bild B15).

a) Problemdiskussion und Lösungsansatz:

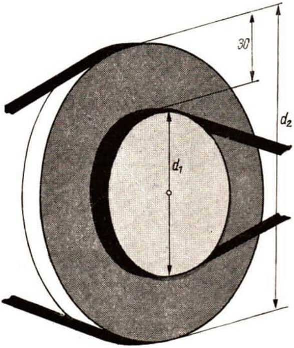
1. Bedingung: $d_2 - d_1 = 6$ (I)

2. Bedingung: $d_2 : d_1 = 5 : 4$ (II)

Forderung: Es ist ein Zahlenpaar $[d_1; d_2]$ zu bestimmen, das beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

b) Lösung des mathematischen Problems:

Man kann durch systematisches Probieren solch ein Zahlenpaar zu bestimmen versuchen. (Aus der 1. Bedingung folgt, daß d_2 größer sein muß als 6, da sonst d_1 gleich Null oder negativ würde.)



B 15

$d_2 - d_1 = 6$

d_2	7	8,5	10	...	18	...	**30**	...	61	62,1	...
d_1	1	2,5	4	...	12	...	**24**	...	55	56,1	...

$d_2 : d_1 = 5 : 4$

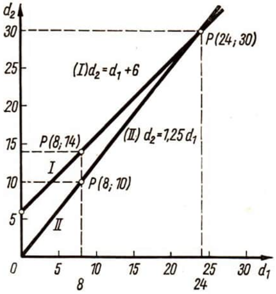
d_2	5	10	15	...	**30**	...	70	...
d_1	4	8	12	...	**24**	...	56	...

Ein Zahlenpaar, das sowohl der ersten als auch der zweiten Bedingung genügt, ist [24; 30]. Es gibt kein weiteres Zahlenpaar, das beiden Bedingungen genügt.
Graphische Lösung: Die beiden Bedingungen werden als Gleichungen von Funktionen betrachtet und d_1 als Argument und d_2 als Funktionswert der zugehörigen Funktionen aufgefaßt.

(I) $d_2 = d_1 + 6$
(II) $d_2 = 1{,}25\, d_1$

Jedem Punkt der Ebene entspricht ein Zahlenpaar $[d_1; d_2]$. Wir beschränken uns auf positive Zahlen (Bild B16).

Den Punkten, die auf der Geraden I liegen, entsprechen die Zahlenpaare $[d_1; d_2]$, für die gilt: $d_2 - d_1 = 6$. Den Punkten, die auf der Geraden II liegen, entsprechen die Zahlenpaare $[d_1; d_2]$, für die gilt: $d_2 : d_1 = 5 : 4$. Also entspricht dem Schnittpunkt beider Geraden, da er sowohl ein Punkt der Geraden I als auch ein Punkt der Geraden II ist, das Zahlenpaar, das beiden Bedingungen genügt. Wir entnehmen der Zeichnung das Zahlenpaar [24; 30] als Lösung des Problems.



B 16

c) Lösung des praktischen Problems:

Die gesuchte Stufenscheibe muß die Durchmesser 24 cm und 30 cm besitzen.

d) Kritische Einschätzung des Ergebnisses:

Wir führen die Kontrolle am Sachverhalt durch.
Die Differenz der Durchmesser beträgt 30 cm − 24 cm = 6 cm, das Verhältnis der Durchmesser ist $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$.

Das System von Bedingungen (I) und (II) wird als **Gleichungssystem** bezeichnet.
Die **allgemeine Form** eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen x, y ist:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Hierbei sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 Variable für beliebige, aber für ein bestimmtes Gleichungssystem fest gewählte Zahlen, also Parameter.
Das Gleichungssystem lösen heißt, alle Zahlenpaare $[x; y]$ zu bestimmen, für die beide Gleichungen in wahre Aussagen übergehen.
Die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme von zwei Gleichungen mit zwei Variablen enthält entweder ein Element (Fall I), d. h. ein Zahlenpaar $[x; y]$, oder unendlich viele Elemente (Fall II) oder gar kein Element (Fall III).
Bei der graphischen Lösung entsprechen diesen drei Fällen folgende Lagen der beiden zugehörigen Geraden:

Fall I: Die Geraden schneiden einander in einem Punkt.
Fall II: Die Geraden fallen zusammen.
Fall III: Die Geraden liegen parallel zueinander, fallen aber nicht zusammen.

Im Fall II besteht das Gleichungssystem aus zwei zueinander äquivalenten Gleichungen.

(8) Bilden Sie Gleichungssysteme, indem Sie in der allgemeinen Form die Parameter folgendermaßen wählen!

	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
a)	3	1	3	−1	2	−8
b)	−6	4	8	−3	2	−8
c)	5	2	2	15	6	6

Stellen Sie die zusammengehörenden Gleichungen jeweils gemeinsam in einem Koordinatensystem graphisch dar! Entscheiden Sie, welcher der drei Fälle von Gleichungssystemen vorliegt! Entnehmen Sie den Zeichnungen die Lösung des Gleichungssystems, und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Lösung durch Einsetzen in beide Gleichungen!

Aufgaben b 67 bis 71

B

Das Einsetzungsverfahren

13

Die Verfahren zur rechnerischen Lösung von Gleichungssystemen zielen darauf ab, das System auf *eine* Gleichung mit *einer* Variablen zu reduzieren.

12 Gegeben sei das Gleichungssystem

(I) $y - x = 6$
(II) $y = 1{,}25x$

Angenommen, wir hätten schon eine Lösung $[x_1; y_1]$ gefunden. Dann sind die Gleichungen

(I′) $y_1 - x_1 = 6$ und (II′) $y_1 = 1{,}25x_1$

wahre Aussagen. Wir dürfen folglich in der Gleichung (I′) y_1 durch $1{,}25\,x_1$ ersetzen. Also ist

$$\begin{aligned} 1{,}25x_1 - x_1 &= 6 \\ 0{,}25x_1 &= 6 \\ x_1 &= 24 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (II′) ergibt sich

$y_1 = 1{,}25 \cdot 24 = 30.$

Ob das Zahlenpaar [24; 30] tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems ist, wird durch die Probe nachgeprüft.

Probe: (I) $30 - 24 = 6$ ist eine wahre Aussage
(II) $30 = 1{,}25 \cdot 24$ ist eine wahre Aussage

Im allgemeinen muß man erst eine der Variablen in einer der beiden Gleichungen durch äquivalente Umformungen isolieren, um das Einsetzungsverfahren anwenden zu können.

13 Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

(I) $4x + 6y = -1$
(II) $10x + 2y = -9$

Wir isolieren x durch äquivalente Umformung in der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} \text{(II}'\text{)}\quad 10x + 2y &= -9 \qquad &| -2y \\ 10x &= -9 - 2y \qquad &| :10 \\ x &= -0{,}2y - 0{,}9 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das zum obigen System äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4x + 6y = -1 \\ \text{(II}'\text{)} & \qquad x = -0{,}2y - 0{,}9 \\ \hline \end{array}$$

Dieses System wird nach dem Einsetzungsverfahren gelöst. Für x wird in der ersten Gleichung der entsprechende Term der zweiten Gleichung eingesetzt.

Man braucht nicht immer die Variable selbst zu isolieren, sondern kann auch gewisse „Vielfache einer Variablen" isolieren, falls solche in beiden Gleichungen auftreten.

14

$$\begin{array}{rrcl} & \text{(I) } 6x + 9y & = & 123 \\ & \text{(II) } 6x + 4y & = & 78 \quad \leftrightarrow \quad \text{(II}'\text{) } 6x = 78 - 4y \\ \hline \text{(II}'\text{) in (I)} & (78 - 4y) + 9y & = & 123 \\ & 78 + 5y & = & 123 \\ & 5y & = & 45 \\ & y & = & 9 \end{array}$$

Bestimmen von x:

$y = 9$ einsetzen in (II′)

$$6x = 78 - 4 \cdot 9$$
$$6x = 42$$
$$x = 7$$

Probe: Gleichung I

$$6 \cdot 7 + 9 \cdot 9 = 123$$
$$123 = 123$$

Gleichung II

$$6 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 78$$
$$78 = 78$$

Aufgaben b 72 und 73

Das Additions- und Subtraktionsverfahren

14

Die Grundlage für das folgende Lösungsverfahren bildet der Satz:

$$\begin{array}{rl} \text{Wenn} & A = B \\ \text{und} & C = D \\ \hline \text{so ist} & A + C = B + D \\ \text{und} & A - C = B - D \end{array}$$

Beweis: $A = B$

$$A + C = B + C$$

$$C = D$$
$$C + B = D + B \quad \text{(Monotoniegesetz)}$$
$$B + C = D + B \quad \text{(Kommutativität)}$$

$$A + C = D + B \qquad \text{(Transitivität)}$$
$$A + C = B + D \qquad \text{(Kommutativität)}$$

(9) Formulieren Sie den Satz in Worten, und geben Sie die Erläuterungen zum Beweis!

[15] Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 127 \\ 4x + 3y &= 97 \end{aligned}$$

B

Die linke Seite der zweiten Gleichung wird von der linken Seite der ersten Gleichung subtrahiert und die rechte Seite der zweiten Gleichung von der rechten Seite der ersten. Dabei wird der Koeffizient von y gleich Null, und wir erhalten eine Gleichung mit einer Variablen, nämlich x.

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 7x + 3y &= 127 \\ \text{(II)} & 4x + 3y &= 97 \\ \hline \text{(I)} - \text{(II)} & 3x &= 30 \\ & x &= 10 \end{array}$$

Bestimmen von y:

Einsetzen von $x = 10$ in die Gleichung (I):

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10 + 3y &= 127 \\ 3y &= 57 \\ y &= 19 \end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel werden *beide* Gleichungen mit je einer Zahl multipliziert.

[16]

$$\begin{array}{lrll} & 2r + 3s &= 40 & | \cdot 2 \\ & 3r + 2s &= 35 & | \cdot 3 \\ \hline \text{(I)} & 4r + 6s &= 80 & \\ \text{(II)} & 9r + 6s &= 105 & \\ \hline \text{(I)} - \text{(II)} & -5r + 0 &= -25 & | : (-5) \\ & r &= 5 & \end{array}$$

Bestimmen von s:

Einsetzen von $r = 5$ in die Gleichung

$$\begin{aligned} 2r + 3s &= 40 \\ 2 \cdot 5 + 3s &= 40 \\ 3s &= 30 \\ s &= 10 \end{aligned}$$

Probe: Gleichung I:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 &= 40 \\ 40 &= 40 \end{aligned}$$

Gleichung II:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 &= 35 \\ 35 &= 35 \end{aligned}$$

Aufgaben b 74 bis 98

Gleichungssysteme mit drei Variablen

15

(10) Stellen Sie die Funktionen mit folgenden Gleichungen in einem einzigen Koordinatensystem graphisch dar!

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 4; \quad f_2(x) = x + 1; \quad f_3(x) = -3x - 3$$

Überlegen Sie an Hand der Zeichnung, ob das Gleichungssystem, das aus den drei Gleichungen dieser Übung besteht, eine Lösung besitzt!

Bei einem System linearer Gleichungen mit drei Variablen kann eine eindeutige Lösung nur gewonnen werden, wenn drei Gleichungen vorhanden sind, die nicht untereinander äquivalent sind.
Bei der rechnerischen Lösung muß wieder das gegebene Gleichungssystem durch Eliminieren zweier Variablen auf eine Gleichung mit einer Variablen gebracht werden.

B

17 Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{array}{ll} (1) & 4x - 2y + z = 11 \\ (2) & -2x + 3z = 7 \\ (3) & -3y - 2z = 0 \end{array}$$

Wir lösen Gleichung (3) nach y auf:

$$(3')\ y = -\frac{2}{3}z$$

und setzen den für y erhaltenen Term in (1) ein

$$(1')\ 4x - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}z\right) + z = 11.$$

Zusammen mit Gleichung (2) ergibt das ein System aus *zwei* Gleichungen mit *zwei* Variablen. (Die Variable y ist eliminiert worden.)

$$\begin{array}{lll} (1'') & 4x + \frac{7}{3}z = 11 & \\ (2) & -2x + 3z = 7 & | \cdot 2 \\ (1'') & 4x + \frac{7}{3}z = 11 & \\ (2') & -4x + 6z = 14 & \\ (1'') + (2') & 0 + \frac{25}{3}z = 25 & \end{array}$$

Damit ist auch die Variable x eliminiert, und aus der linearen Gleichung in z läßt sich diese Variable bestimmen: $z = 3$. Durch Einsetzen von $z = 3$ in die Gleichungen (2) und (3) lassen sich x bzw. y berechnen.

$-2x + 3 \cdot 3 = 7$	$-3y - 2 \cdot 3 = 0$
$-2x = -2$	$-3y = 6$
$x = 1$	$y = -2$

Die gesuchte Lösung ist $x = 1$; $y = -2$; $z = 3$.[1]
Die Probe muß nun natürlich an allen drei Gleichungen durchgeführt werden.

Gleichung (1)	Gleichung (2)	Gleichung (3)
$4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 = 11$	$-2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 7$	$-3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = 0$
$4 + 4 + 3 = 11$	$-2 + 9 = 7$	$6 - 6 = 0$
$11 = 11$	$7 = 7$	$0 = 0$

Aufgaben b 99 bis 104

[1] Man kann die Lösung auch als „geordnetes Zahlentripel" (1; −2; 3) schreiben.

C

Granaten beschreiben nach dem Abschuß eine ballistische Kurve, deren Weite und Höhe unter anderem auch vom Abschußwinkel abhängen. Würde nicht der Luftwiderstand den Flug beeinflussen, so wäre die Bahn eine Parabel. Die Bilder spezieller Potenzfunktionen sind ebenfalls Parabeln. Geschoßbahnen können mit Hilfe von Funktionen mathematisch erfaßt und die Einschlagstellen also vorausberechnet werden.

C. Potenzfunktionen (Exponent ganzzahlig)

C

Der Potenzbegriff

1

---

1 **DEFINITION:** $a^n \underset{\text{Def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$ **($n \geqq 2$, natürlich; a beliebig reell)**

a^n heißt *Potenz*, a heißt *Basis*, n heißt *Exponent*.

(1) a) Warum muß in der Definition der Potenz die Einschränkung $n \geqq 2$ gelten?
b) Berechnen Sie $(-1)^n$ für $n \in \{2, 3, \ldots, 10\}$, und überlegen Sie, welche Gesetzmäßigkeit vorliegt!
c) Zeigen Sie durch Rückgang auf die Definition, daß folgendes gilt:
$(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$ ($n \geqq 1$, natürlich),

und formulieren Sie diese Gesetzmäßigkeiten in Worten!

(2) Untersuchen Sie, ob folgende Potenzen positiv oder negativ sind, indem Sie zunächst jeweils ein Zahlenbeispiel bilden und dann eine allgemeingültige Schlußfolgerung anschließen!

a) a^n ($a > 0$; n gerade)
b) x^a ($x < 0$; a ungerade)
c) y^x ($y < 0$; x gerade)
d) m^z ($m > 0$; z ungerade)

Das Potenzieren bezeichnet man als **Rechenoperation dritter Stufe.**
Im Unterschied zur Addition und zur Multiplikation ist jedoch die Potenzierung weder kommutativ noch assoziativ. Es ist im allgemeinen $a^b \neq b^a$ und $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.

Aufgaben c 1 bis 10

C

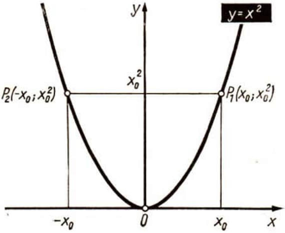
(3) **a)** Bilden Sie alle geordneten Paare $[x; y]$, die durch folgende Vorschrift festgelegt sind: $y = x^2$; $x \in \{-2;\ -1{,}5;\ -1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2\}$! Stellen Sie die durch diese Menge geordneter Paare festgelegte Funktion graphisch dar, indem Sie für die Einheiten auf den Koordinatenachsen jeweils 2 cm wählen!

b) Verbinden Sie die gezeichneten Punkte mit Hilfe des Lineals, und weisen Sie nach, daß der so entstandene Streckenzug nicht das Bild der Funktion $y = x^2$ für beliebige Argumente x ist!

Bestimmen Sie dazu weitere Zahlenpaare $\left(\text{z. B. für } x = -\frac{1}{4} \text{ und } x = +\frac{1}{4}\right)$, und stellen Sie diese in der gleichen Zeichnung graphisch dar!

c) Wie verläuft das Bild der Funktion $y = x^2$ in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes?

(4) Führen Sie für die Funktion $y = x^3$ die gleiche Untersuchung wie für die Funktion $y = x^2$ in Übung 3 durch!



C 1

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist symmetrisch bezüglich der y-Achse (Bild C1).

Beweis: Wir müssen zeigen, daß zu einander entgegengesetzten Argumenten x_0 und $-x_0$ die gleichen Funktionswerte gehören.

Die Funktionswerte erhalten wir entsprechend der Gleichung $y = x^2$, indem wir die x-Werte jeweils quadrieren, also

$$x_0 \to x_0^2; \quad -x_0 \to (-x_0)^2 = x_0^2.$$

Das Bild der Funktion $y = x^3$ ist zentralsymmetrisch bezüglich des Koordinatenanfangspunktes (Bild C2).

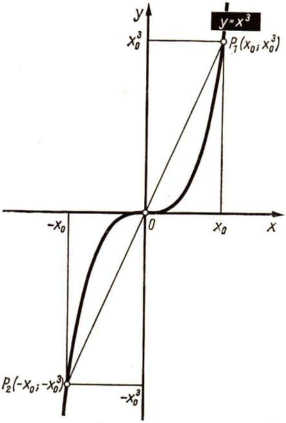
Beweis: Wir müssen zeigen, daß zu einander entgegengesetzten Argumenten x_0 und $-x_0$ auch einander entgegengesetzte Funktionswerte gehören.

Die Funktionswerte erhalten wir entsprechend der Gleichung $y = x^3$, indem wir die x-Werte in die dritte Potenz erheben, also

$$x_0 \to x_0^3; \quad -x_0 \to (-x_0)^3 = -(x_0)^3.$$

x_0^3 und $-(x_0)^3$ sind einander entgegengesetzte Zahlen.

Aufgaben c 11 bis 14



C 2

C

(5) Formulieren Sie die Symmetrieeigenschaften für die Bilder der Funktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$, natürlich) (Bild C3)!

Symmetrie bezüglich der y-Achse liegt vor, wenn zu einander entgegengesetzten Argumenten x und $-x$ gleiche Funktionswerte $f(x)$ bzw. $f(-x)$ gehören:

$$\boldsymbol{f(x) = f(-x).}$$

Alle Potenzfunktionen mit **geradem** Exponenten genügen dieser Bedingung.

Beweis: Es ist $f(x) = x^n$, $f(-x) = (-x)^n$

Da n als gerade Zahl vorausgesetzt wurde, ist

$(-x)^n = x^n$, also ist $f(-x) = f(x)$.

Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenanfangspunktes liegt vor, wenn die Funktionswerte $f(x)$ und $f(-x)$ von einander entgegengesetzten Argumenten x und $-x$ ebenfalls einander entgegengesetzt sind, d. h., wenn gilt

$$\boldsymbol{f(-x) = -f(x).}$$

Alle Potenzfunktionen mit **ungeradem** Exponenten genügen dieser Bedingung.

Beweis: $f(-x) = (-x)^n$, $f(x) = x^n$

Da n als ungerade Zahl vorausgesetzt ist, gilt

$(-x)^n = -(x^n)$, also ist $f(-x) = -f(x)$.

2 **DEFINITION:**

1. Eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ heißt *gerade* genau dann, wenn gilt: $f(x) = f(-x)$.

2. Eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ heißt *ungerade* genau dann, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$.

Hinweis: Es gibt auch Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind.

ZUSAMMENFASSUNG:

Bezeichnung	Bedingung	Symmetrieeigenschaft der Bilder der Funktionen
gerade Funktion	$f(-x) = f(x)$	Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse
ungerade Funktion	$f(-x) = -f(x)$	Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs

Aufgaben c 15 bis 19

Der Begriff „Intervall"

4

▶3 **DEFINITION: Die Menge der reellen Zahlen, die zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b liegen ($a < b$), heißt *Intervall*.**

Dabei werden bezüglich der Zugehörigkeit der Endpunkte folgende Bezeichnungen benutzt.

1. a und b gehören zur Menge	abgeschlossenes Intervall	$a \leqq x \leqq b$ oder $\langle a, b \rangle$
2. Entweder a oder b gehört zur Menge	halboffenes Intervall	$a \leqq x < b$ oder $\langle a, b)$ $a < x \leqq b$ oder $(a, b\rangle$
3. Weder a noch b gehören zur Menge	offenes Intervall	$a < x < b$ oder (a, b)

C

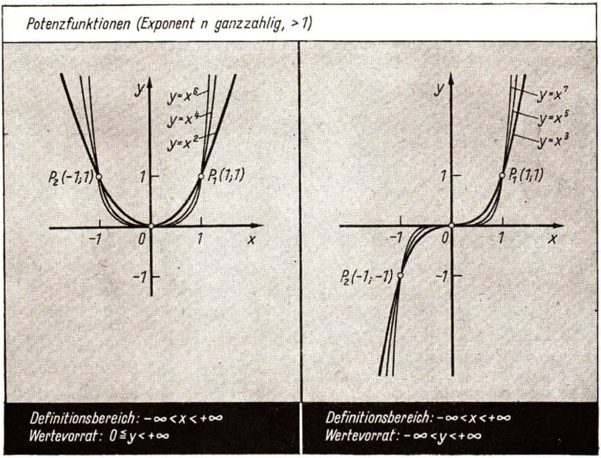
Zu den Intervallen im weiteren Sinne zählt man die folgenden Zahlenmengen:

Die Menge aller Zahlen	x beliebig reell	Gelegentlich schreibt man auch $-\infty < x < +\infty$
—, die kleiner sind als b	$x < b$	$-\infty < x < b$
—, die kleiner oder gleich b sind	$x \leqq b$	$-\infty < x \leqq b$
—, die größer sind als a	$x > a$	$a < x < +\infty$
—, die größer oder gleich a sind	$x \geqq a$	$a \leqq x < +\infty$

In den Punkten $P(1; 1)$, $P(0; 0)$ und $P(-1; 1)$ bzw. $P(-1; -1)$ schneiden die Kurven, die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$, ganzzahlig) sind, einander (vgl. Bild C3).

(6) Überzeugen Sie sich an Hand der graphischen Darstellung im Bild C3 von folgenden Gesetzmäßigkeiten!

Intervall	Beziehung zwischen den Funktionswerten der Potenzfunktionen zu *gleichen* Argumenten
$-\infty < x < -1$	für gerade Funktionen $x^2 < x^4 < x^6 < x^8 < \ldots$ für ungerade Funktionen $x^3 > x^5 > x^7 > x^9 > \ldots$
$-1 < x < 0$	für gerade Funktionen $x^2 > x^4 > x^6 > x^8 > \ldots$ für ungerade Funktionen $x^3 < x^5 < x^7 < x^9 < \ldots$
$0 < x < 1$	für alle Funktionen $x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > \ldots$
$1 < x < +\infty$	für alle Funktionen $x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < \ldots$



C 3

(7) Entscheiden Sie, welches der Zeichen $<$ und $>$ zwischen den folgenden Potenzen stehen muß!

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^8, \left(\frac{5}{2}\right)^{13}$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^6, \left(-\frac{2}{3}\right)^7$ **c)** $(-12)^{10}, (-12)^{14}$

d) $(-3)^5, (-3)^7$ **e)** $\left(-\frac{4}{9}\right)^6, \left(-\frac{4}{9}\right)^{10}$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^5, \left(-\frac{1}{3}\right)^7$

Aufgaben c 20 bis 24

Monotonie von Funktionen

5

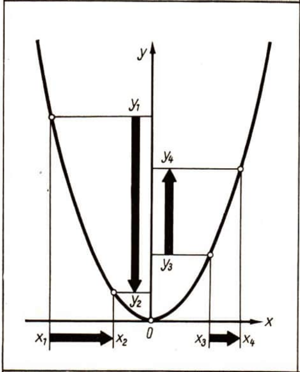
Es soll untersucht werden, wie sich bei kontinuierlichem Anwachsen des Arguments x der Funktionswert y verändert.

4 **DEFINITION: Eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ heißt in einem Intervall *monoton* genau dann, wenn für je zwei Argumente x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) des Intervalls stets gilt: entweder**

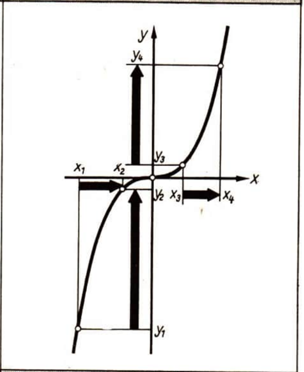
$f(x_1) < f(x_2)$ (monoton wachsend) oder $f(x_1) > f(x_2)$ (monoton fallend).

1 **a)** Die ungeraden Potenzfunktionen haben das Intervall $-\infty < x < +\infty$ als Monotonieintervall[1] (monoton wachsend).
b) Die geraden Potenzfunktionen haben die Monotonieintervalle $-\infty < x \leqq 0$ (monoton fallend) und $0 \leqq x < +\infty$ (monoton wachsend) (Bilder C4 und 5).

Gerade Potenzfunktionen		*Ungerade Potenzfunktionen*	
$-\infty < x \leqq 0$ $x_1 < x_2$ (x wächst)	$+\infty > y \geqq 0$ $x_1^{2n} > x_2^{2n}$ (y fällt)	$-\infty < x \leqq 0$ $x_1 < x_2$ (x wächst)	$-\infty < y \leqq 0$ $x_1^{2n+1} < x_2^{2n+1}$ (y wächst)
$0 \leqq x < +\infty$ $x_3 < x_4$ (x wächst)	$0 \leqq y < +\infty$ $x_3^{2n} < x_4^{2n}$ (y wächst)	$0 \leqq x < +\infty$ $x_3 < x_4$ (x wächst)	$0 \leqq y < +\infty$ $x_3^{2n+1} < x_4^{2n+1}$ (y wächst)



C 4



C 5

(8) Entnehmen Sie den Bildern C6 bis C8 die Monotonieintervalle sowie Definitionsbereich und Wertevorrat der zugehörigen Funktionen!

(9) Zeichnen Sie jeweils in ein gemeinsames Koordinatensystem die Bilder der folgenden Funktionen!

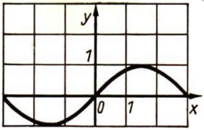
a) $y = x^2$; $y = x^2 + 3$; $y = x^2 - 2$
b) $y = x^3$; $y = x^3 - 1{,}5$; $y = x^3 + 2{,}7$

Geben Sie den Definitionsbereich, den Wertevorrat und Monotonieintervalle an!

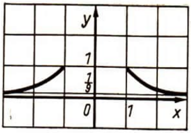
(10) Erläutern Sie, wie man die Bilder der Funktionen $y = x^n + e$ aus den Bildern der Funktionen $y = x^n$ gewinnen kann!

Aufgaben c 25 bis 31

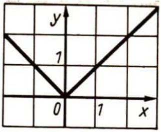
[1] Das heißt: Im ganzen Intervall $-\infty < x < +\infty$ wächst die Funktion monoton.



C 6



C 7



C 8

Die Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^n$

6

Viele in der Praxis auftretende Funktionen haben Gleichungen der Form $y = ax^n$, wobei a jeweils eine von Null verschiedene Konstante ist.

2

$y = ax^n$	y	a	x	n	Sachverhalt
$G = \gamma \cdot a^3$	G	γ	a	3	Gewicht G eines Würfels aus einem Stoff mit der Wichte γ in Abhängigkeit von der Kantenlänge a
$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$	s	$\frac{g}{2}$	t	2	Weg s, den ein frei fallender Körper in Abhängigkeit von der Fallzeit t zurücklegt
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	V	$\frac{4}{3}\pi$	r	3	Volumen V einer Kugel in Abhängigkeit vom Radius r

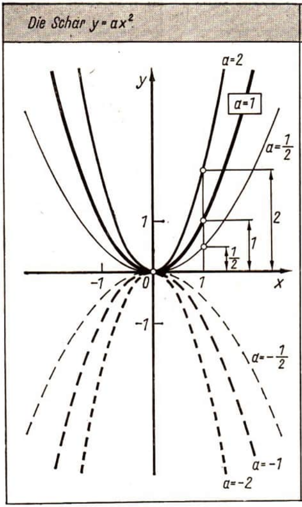
(11) Aus der graphischen Darstellung einer gewissen Meßreihe wird vermutet, daß die untersuchte physikalische Gesetzmäßigkeit durch eine quadratische Funktion mit einer Gleichung $y = ax^2$ erfaßt wird. Bestimmen Sie aus den ausgewählten Meßwertepaaren $[x; y]$:

$[0{,}80; 0{,}97]$, $[1{,}50; 3{,}42]$, $[2{,}40; 8{,}76]$

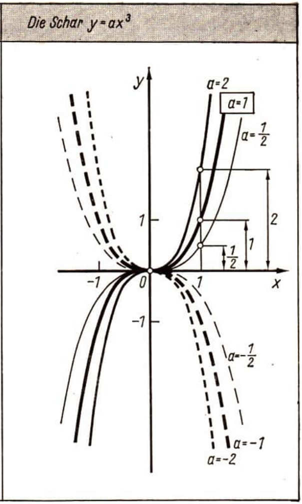
den Parameter a!

(12) Im Bild C 9 sind die Funktionen $y = a \cdot x^2$ und im Bild C 10 die Funktionen $y = a \cdot x^3$ für die Werte $-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$ des Parameters a graphisch dargestellt.
Überzeugen Sie sich an Hand dieser Darstellungen von folgender Tatsache:

Das Bild der Funktion $y = a \cdot x^n$ geht aus dem Bild der Funktion $y = x^n$ durch **Streckung** (wenn $|a| > 1$) oder **Stauchung** (wenn $|a| < 1$) hervor.
Ist $a < 0$, so muß außerdem eine Spiegelung an der x-Achse vorgenommen werden.



C 9



C 10

Aufgaben c 32 bis 38

Rechnen mit Potenzen

7

Summen von Potenzen, die *sowohl* in den Basen *als auch* in den Exponenten übereinstimmen, können vereinfacht werden.

3 **a)** $x^5 + x^5 + 6x^5 - 3x^5 = 5x^5$ **b)** $5x^a - 3x^a + 2x^b = 2x^a + 2x^b$

Potenzen, die in den Basen *oder* in den Exponenten übereinstimmen, können folgendermaßen multipliziert oder dividiert werden:

5 **Die Potenzgesetze:**

Für alle Zahlen a, b, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und alle natürlichen Zahlen m, n ($n \geqq 2$, $m \geqq 2$) gilt:

	gleiche Basis	gleicher Exponent
Multiplikation	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m \geqq n+2)$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzierung: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$		

Durch die folgenden Beispiele wird die Gültigkeit einiger Potenzgesetze für Spezialfälle gezeigt. Der Beweis für den allgemeinen Fall kann erst später geführt werden.

4 a) $(a^4) \cdot (a^3) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{4 Faktoren } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{\text{3 Faktoren } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{7 Faktoren } a} = a^7$

b) $(a^5) \cdot (b^5) \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{5 Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b)}_{\text{5 Faktoren } b} = \underbrace{(ab)\,(ab)\,(ab)\,(ab)\,(ab)}_{\text{5 Faktoren } (ab)} = (ab)^5$

c) $(a^4)^3 = \underbrace{(a^4)\,(a^4)\,(a^4)}_{\text{3 Faktoren } a^4} = \underbrace{(aaaa)\,(aaaa)\,(aaaa)}_{4 \cdot 3 \text{ Faktoren } a} = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$

13 Warum ist bei dem Gesetz über die Division von Potenzen mit gleicher Basis die Einschränkung $m \geqq n + 2$ notwendig?

8

Das Rechnen mit Potenzen gleicher Basis wird auf das Rechnen mit den Exponenten in der nächstniedrigen Stufe zurückgeführt.

Rechnen mit Potenzen	Rechnen mit den Exponenten
Produkt (2. Stufe) $(a^m) \cdot (a^n) = a^{m+n}$	Summe (1. Stufe) $m + n$
Quotient (2. Stufe) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Differenz (1. Stufe) $m - n$
Potenz (3. Stufe) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Produkt (2. Stufe) $m \cdot n$

14 Gibt es natürliche Zahlen m, n, für die die Gleichung $(a^m)^n = a^{(m^n)}$ erfüllt ist?

Für das Rechnen mit Potenzen wird folgendes festgelegt:

(1) $\boxed{a^{m^n} \underset{\text{Def}}{=} a^{(m^n)}}$

Diese Festlegung ist notwendig, weil sonst zwei Möglichkeiten der Berechnung von a^{m^n} bestünden, deren Ergebnisse im allgemeinen voneinander verschieden sind, nämlich $(a^m)^n$ und die in der Definition angegebene Möglichkeit $a^{(m^n)}$.

(2) Die Rechenoperation 3. Stufe bindet stärker als die Rechenoperationen 1. und 2. Stufe.

5 **a)** $5a^4 = 5 \cdot (a^4)$ und nicht gleich $(5a)^4$
b) $a + b^3 = a + (b^3)$ und nicht gleich $(a + b)^3$

Aufgaben c 39 bis 54

C

Erweiterung des Potenzbegriffs auf a^0 und a^1

9

Für a^0 und a^1 sollen sinnvolle Definitionen gefunden werden. Sinnvoll ist eine Festsetzung in diesem Zusammenhang dann, wenn die Potenzgesetze auch auf die um a^0 und a^1 erweiterte Menge der Potenzen zutreffen.

6

$$\boxed{a^0 \underset{\text{Def}}{=} 1} \quad (a \neq 0)$$

$$\boxed{a^1 \underset{\text{Def}}{=} a}$$

Es muß nun der Nachweis erbracht werden, daß die Gültigkeit der Potenzgesetze gewährleistet ist. Als Beispiel wird das Gesetz über die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis bewiesen.

SATZ: Für alle Zahlen a, $b (a \neq 0, b \neq 0)$ und alle natürlichen Zahlen m, n gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Beweis: Die Menge der Potenzen mit natürlichem Exponenten kann in zwei Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt werden:

M_1: Menge der Potenzen mit Exponenten $n \geqq 2$,
$M_2 = \{a^0, a^1\}$.
Die Aufgabe, die Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle möglichen Potenzen a^m und a^n zu beweisen, kann nunmehr in vier Teilaufgaben zerlegt werden:

Fall 1: a^m und a^n sind beide aus M_1 (d. h. $m \geqq 2$; $n \geqq 2$),
Fall 2: a^m und a^n sind beide aus M_2 (d. h. $m \in \{0,1\}$; $n \in \{0,1\}$),
Fall 3: a^m ist aus M_1, und a^n ist aus M_2 (d. h. $m \geqq 2$; $n \in \{0,1\}$),
Fall 4: a^m ist aus M_2, und a^n ist aus M_1 (d. h. $m \in \{0,1\}$; $n \geqq 2$).

Fall 1: Dieser Fall ist in der Lerneinheit C7 behandelt worden und wird nunmehr als gültig vorausgesetzt.

Fall 2: Es sind die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

2.1 $m = 0;\ n = 0;$ 2.2 $m = 0;\ n = 1;$
2.3 $m = 1;\ n = 0;$ 2.4 $m = 1;\ n = 1.$

Auf Grund der Kommutativität der Multiplikation sind die Fälle 2.2 und 2.3 nicht voneinander verschieden, und es genügt, den Fall 2.2 zu beweisen.

	2.1 $m = 0; n = 0$	2.2 (2.3) $m = 0; n = 1$	2.4 $m = 1; n = 1$
Behauptung	$a^0 \cdot a^0 = a^{0+0}$	$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$	$a^1 \cdot a^1 = a^{1+1}$
linke Seite	$a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1$	$a^0 \cdot a^1 = 1 \cdot a = a$	$a^1 \cdot a^1 = a \cdot a = a^2$
rechte Seite	$a^{0+0} = a^0 = 1$	$a^{0+1} = a^1 = a$	$a^{1+1} = a^2$

Fall 3 und Fall 4: Diese beiden Fälle sind auf Grund der Kommutativität der Multiplikation nicht voneinander verschieden, so daß es genügt, den Fall 3 zu beweisen.

	3.1 $m \geqq 2;\ n = 0$	3.2 $m \geqq 2;\ n = 1$
Behauptung	$a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$	$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$
linke Seite	$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$	$a^m \cdot a^1 = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+1 \text{ Faktoren}}$
rechte Seite	$a^{m+0} = a^m$	$a^{m+1} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+1 \text{ Faktoren})}$

Die Einschränkung bei der Definition von a^0, daß a nicht gleich Null sein darf, bedeutet, daß 0^0 nicht definiert wird. Die Definition $0^0 = 1$ wäre nämlich nicht sinnvoll, weil die Potenzgesetze für diesen Fall nicht gelten würden, wie folgende Überlegung zeigt. Es müßte dann nämlich gelten

$$1 = 0^0 = 0^{5-5} = \frac{0^5}{0^5} = \frac{0}{0}.$$

Das ist ein Widerspruch zu der Tatsache, daß $\frac{0}{0}$ nicht definiert ist. $0 : 0$ ist bekanntlich deshalb nicht definiert, weil die Gleichung $0 \cdot x = 0$ alle Zahlen als Lösung besitzt und somit nicht eindeutig lösbar ist, was von einer Rechenoperation jedoch gefordert wird.

15 Weisen Sie nach, daß die Definition $a^0 = 0$, $a^1 = 1$ nicht sinnvoll wäre!

Aufgaben c 55 bis 58

Erweiterung des Potenzbegriffs auf Potenzen a^{-k} mit $k>0$, k ganzzahlig

10

Leitgedanke für die Definition von Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten ist wiederum, daß die Potenzgesetze auch für die um diese neu definierten Potenzen erweiterte Menge der Potenzen (mit ganzzahligen Exponenten) gelten. Folgende Überlegung führt zu einer Möglichkeit für die Formulierung der Definition.

Es ist einerseits $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 \cdot 1}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2}$.

Andererseits würde die formale Anwendung des Potenzgesetzes für die Division von Potenzen mit gleicher Basis auf $\frac{a^3}{a^5}$ ergeben: $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$.

Es bietet sich die Definition $a^{-2} \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{a^2}$ an, d. h. für beliebige negative Exponenten:

C

7 $$\boxed{a^{-k} \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{a^k}} \quad (k > 0, \text{ ganzzahlig, } a \neq 0)$$

6 **a)** $2^{-9} = \frac{1}{2^9}$ **b)** $\frac{1}{2^{-9}} = 2^9$ **c)** $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $a^3 \cdot b^{-5} = \frac{a^3}{b^5}$ **e)** $\frac{x^3}{x^{-5}} = x^3 \cdot x^5 = x^8$

Damit können nunmehr alle ganzen Zahlen ohne Einschränkung als Exponenten auftreten. Es muß jedoch noch der Nachweis erbracht werden, daß die Gültigkeit der Potenzgesetze gewährleistet ist.
Als Beispiel wird das Gesetz über die Potenzierung einer Potenz bewiesen.

SATZ: Für alle Zahlen $a (a \neq 0)$ und alle ganzen Zahlen m und n gilt:
$a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Beweis:

Wir führen den Beweis durch eine vollständige Fallunterscheidung. Folgende Fälle werden unterschieden:

Fall 1: $m \geqq 0;\ n \geqq 0$, Fall 2: $m \geqq 0;\ n < 0$;
Fall 3: $m < 0;\ n \geqq 0$, Fall 4: $m < 0;\ n < 0$.

Fall 1: Dieser Fall wurde in der *Lerneinheit C9* behandelt und wird nunmehr als gültig vorausgesetzt. Auf diesen Fall werden die anderen drei Fälle zurückgeführt.

Fall 2: $m \geqq 0$ und $n < 0$

Um diesen Fall auf den Fall 1 zurückführen zu können, schreiben wir die negative ganze Zahl n in der Form $n = -k$, wobei k eine positive ganze Zahl bedeutet. Es sei also $m \geqq 0$ und $n = -k$ $(k > 0)$.

$(a^m)^n = (a^m)^{-k}$	Substitution $n = -k$
$= \dfrac{1}{(a^m)^k}$	auf Grund der Definition der Potenz mit negativem Exponenten
$= \dfrac{1}{a^{m \cdot k}}$	auf Grund des Potenzgesetzes für nichtnegative Exponenten $m > 0,\ k > 0$
$= a^{-(mk)}$	auf Grund der Definition der Potenz mit negativem Exponenten
$= a^{m(-k)}$	auf Grund der Vorzeichenregel für die Multiplikation
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Substitution $n = -k$

Fall 3 $m < 0;\ n \geqq 0$ $m = -k\ (k > 0)$	*Fall 4* $m < 0;\ n < 0$ $m = -k\ (k > 0)$, $n = -p\ (p > 0)$	
$(a^m)^n = (a^{-k})^n$	$(a^m)^n = (a^{-k})^{-p}$	Substitution
	$= \left(\dfrac{1}{a^k}\right)^{-p}$	Definition der Potenz mit negativem Exponenten
$= \left(\dfrac{1}{a^k}\right)^n$	$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^k}\right)^p}$	Definition der Potenz mit negativem Exponenten
$= \dfrac{1^n}{(a^k)^n}$	$= \dfrac{1}{\dfrac{1^p}{(a^k)^p}}$	Potenzgesetz (Quotienten)
$= \dfrac{1}{a^{k \cdot n}}$	$= \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{k \cdot p}}}$	Potenzgesetz (Potenzen)
	$= a^{k \cdot p}$	Division von Zahlen
$= a^{-(k \cdot n)}$		Definition der Potenz
$= a^{(-k) \cdot n}$	$= a^{(-k) \cdot (-p)}$	Vorzeichenregel
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Substitution

Da durch die vier Fälle insgesamt alle möglichen Fälle erfaßt werden, und da für jeden der vier Fälle die Behauptung $(a^m)^n = a^{mn}$ bewiesen wurde, gilt die Behauptung für alle ganzzahligen Exponenten.

Aufgaben c 59 bis 69

11

Eine physikalische Größenangabe besteht aus einer Zahl und einer Einheit.

7

Physikalische Größe		Maßzahl	Einheit
Länge	$a = 5\ \mathrm{m} = 5 \cdot 1\ \mathrm{m}$	5	1 m
Zeit	$t = 25\ \mathrm{min} = 25 \cdot 1\ \mathrm{min}$	25	1 min
Masse	$m = 3\ \mathrm{kg} = 3 \cdot 1\ \mathrm{kg}$	3	1 kg

C

Eine solche Größenangabe wird formal als Produkt aus Maßzahl und Einheit aufgefaßt.
Die Bezeichnungen für die Einheiten von **abgeleiteten physikalischen Größen** werden entsprechend der formelmäßigen Definition dieser Größen aus den Einheiten der Grundgrößen zusammengesetzt.

8 Geschwindigkeit v bei einer gleichförmigen Bewegung: $v = \frac{s}{t}$.
Es ist die Geschwindigkeit eines Radfahrers zu ermitteln, der in 3 Stunden ($t = 3\,\mathrm{h}$) den Weg $s = 60$ km zurücklegt.[1]

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60\ \mathrm{km}}{3\ \mathrm{h}} = \frac{60 \cdot 1\ \mathrm{km}}{3 \cdot 1\ \mathrm{h}} = \frac{60}{3} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}}.$$

Für $\frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}}$ schreibt man $1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ oder $1\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

Die Geschwindigkeit des Radfahrers beträgt also: $v = 20\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

Auf Grund der Tatsache, daß die zusammengesetzten Einheiten hinsichtlich der Einheiten der Grundgrößen die gleiche Struktur aufweisen wie die Formeln, die zur Berechnung der physikalischen Größen dienen, kann man mit ihnen wie mit Variablen „rechnen", und es ergibt sich immer die richtige Einheit für die zu berechnende physikalische Größe.

9 Ein Aufklärungsflugzeug überfliegt eine gegnerische Fahrzeugkolonne in Marschrichtung in 1 min 12 s und in entgegengesetzter Richtung in 52 s. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt $v = 400\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.
Wie lang ist die Kolonne, wenn deren Bewegung als gleichförmig angenommen wird?
Problemdiskussion und Lösungsansatz führen auf die Formel zur Berechnung der Länge s der Kolonne:

$$s = \frac{2v \cdot t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

[1] Da die Bewegung des Radfahrers eigentlich nicht gleichförmig ist, wird hier eine durchschnittliche Geschwindigkeit berechnet, die der Radfahrer im Idealfall einer gleichförmigen Bewegung hätte.

Es ist zweckmäßig, die gegebenen Größen zunächst so umzuformen, daß einheitliche Einheiten der Grundgrößen vorliegen (man sagt, „die Einheiten werden zugeschnitten").

$v = 400\ \text{km h}^{-1}$

$t_1 = 1\ \text{min}\ 12\ \text{s} = 72\ \text{s} = \frac{72}{3600}\ \text{h}$

$t_2 = 52\ \text{s} = \frac{52}{3600}\ \text{h}$

Dann werden die Größen eingesetzt und Zahlen- und Einheitenrechnung getrennt voneinander durchgeführt.

$$s = \frac{2vt_1t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 400\ \text{km h}^{-1} \cdot \frac{72}{3600}\ \text{h} \cdot \frac{52}{3600}\ \text{h}}{\frac{72}{3600}\ \text{h} + \frac{52}{3600}\ \text{h}}$$

$$= \frac{\frac{800 \cdot 72 \cdot 52}{3600 \cdot 3600}}{\frac{124}{3600}} \cdot 1\ \frac{\text{km h}^{-1}\ \text{h h}}{\text{h}}$$

$$= \frac{800 \cdot 72 \cdot 52}{124 \cdot 3600} \cdot 1\ \text{km}$$

$s = 6{,}7\ \text{km}$

Überschlag:

$$\frac{800 \cdot 72 \cdot 52}{124 \cdot 3600} \approx \frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10}{10^2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 10$$

Vergleich: $6{,}7 \approx 10$

Ergebnis: Die Marschkolonne hat die Länge $s = 6{,}7$ km.

Aufgaben c 70 bis 75

C

Die Abtrennung von Zehnerpotenzen

12

Man kann jede rationale Zahl a $(a > 0)$ in der Form
$a = a_0 \cdot 10^q$ [a_0 rational $(1 \leqq a_0 < 10)$, q ganzzahlig]
darstellen.

10

	a	$a_0 \cdot 10^q$	a_0	q
a)	253	$2{,}53 \cdot 10^2$	2,53	2
b)	0,023	$2{,}3 \cdot 10^{-2}$	2,3	-2
c)	10000	$1 \cdot 10^4$	1	4
d)	0,001	$1 \cdot 10^{-3}$	1	-3

Diese Schreibweise dient in Naturwissenschaft und Technik zur Darstellung von Größen mit sehr großer oder sehr kleiner Maßzahl (Vgl. *Vorsätze für Maßeinheiten* im Tafelwerk, Mathematik-Physik-Chemie, Seite 69!)

11 **a)** Masse der Erde: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
b) Durchmesser eines Wasserstoffatoms: $1{,}07 \cdot 10^{-8}$ cm
c) Lichtgeschwindigkeit: $2{,}99792 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1}
d) Ruhmasse eines Elektrons: $9{,}108 \cdot 10^{-28}$ g

Berechnungen in den Naturwissenschaften und in der Technik werden durch Anwendung dieser Schreibweise übersichtlicher.

12 Es ist die mittlere Dichte der Erde zu bestimmen.
Das Volumen der Erde beträgt $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km³, die Masse beträgt $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{1{,}08 \cdot 10^{12}\,\text{km}^3} \qquad 1\,\text{km}^3 = (10^5\,\text{cm})^3 = 10^{15}\,\text{cm}^3$$

$$= \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10^3\,\text{g}}{1{,}08 \cdot 10^{12} \cdot 10^{15}\,\text{cm}^3} \qquad \textit{Überschlag:}\ \frac{5{,}98}{1{,}08} \approx \frac{6}{1} = 6$$

$$= \frac{5{,}98 \cdot 10^{27}}{1{,}08 \cdot 10^{27}} \cdot 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \qquad \textit{Vergleich:}\ 5{,}5 \approx 6$$

$$\varrho \approx 5{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Ergebnis: Die mittlere Dichte der Erde beträgt rund $5{,}5$ g · cm^{-3}.

Für das Rechnen mit Hilfe des Rechenstabs ist diese Schreibweise eine wesentliche Hilfe.

13
$$\frac{0{,}0312}{15\,300} \cdot 0{,}00036 = \frac{3{,}12 \cdot 10^{-2}}{1{,}53 \cdot 10^4} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-4}$$

$$= \frac{3{,}12 \cdot 3{,}6}{1{,}53} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}$$

$$= 7{,}34 \cdot 10^{-10}$$

Überschlag:
$$\frac{3{,}12 \cdot 3{,}6}{1{,}53} \approx \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$
Vergleich: $7{,}34 \approx 6$

Die Darstellung von Zahlen durch die Abtrennung von Zehnerpotenzen wird auch zur Bestimmung der Größenordnung einer Zahl benutzt.

16 Bestimmen Sie zu folgenden Zahlen die am nächsten gelegenen Zehnerpotenzen!

a) $3{,}4 \cdot 10^2$ **b)** $5{,}7 \cdot 10^4$ **c)** $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ **d)** $5{,}2 \cdot 10^{-3}$

8 **DEFINITION: Eine Zahl a liegt in der Größenordnung von 10^q genau dann, wenn 10^q die am nächsten gelegene Zehnerpotenz ist.**
Die Zahl $5 \cdot 10^q$ liegt in der Größenordnung von 10^{q+1}.

Bei der praktischen Bestimmung der Größenordnung einer Zahl ist also folgendermaßen zu verfahren:
Liegt die Zahl in der Form $a_0 \cdot 10^q$ $(1 \leq a_0 < 10)$ vor, so wird a_0 durch 10 ersetzt, wenn $a_0 \geq 5$ ist und durch 1, wenn $a_0 < 5$ ist.
Die dann verbleibende Zehnerpotenz ist die Größenordnung.

14

		Größenordnung	Begründung
a)	$6{,}3 \cdot 10^{24}$	10^{25}	$6{,}3 \cdot 10^{24} \approx 10 \cdot 10^{24} = 10^{25}$
b)	$2{,}7 \cdot 10^{15}$	10^{15}	$2{,}7 \cdot 10^{15} \approx 1 \cdot 10^{15} = 10^{15}$
c)	$3{,}4 \cdot 10^{-12}$	10^{-12}	$3{,}4 \cdot 10^{-12} \approx 1 \cdot 10^{-12} = 10^{-12}$
d)	$5{,}9 \cdot 10^{-1}$	1	$5{,}9 \cdot 10^{-1} \approx 10 \cdot 10^{-1} = 1$
e)	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3} \approx 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2}$
f)	$5{,}3 \cdot 10^{5}\,\Omega$	$10^{6}\,\Omega = 1\,\mathrm{M}\Omega$	$5{,}3 \cdot 10^{5} \approx 10 \cdot 10^{5} = 10^{6}$

Aufgaben c 76 bis 85

C

Die Darstellung von Zahlen mit Hilfe von Positionssystemen

13

Jeder endliche Dezimalbruch ist eine Summe aus Vielfachen von Potenzen der Zahl 10 mit ganzzahligen Exponenten.

15 $$532{,}403 = 500 + 30 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000}$$
$$= 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

Das Wesen des dekadischen Positionssystems liegt darin, daß die Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die Vielfachheit derjenigen Zehnerpotenz bezeichnen, die durch die Stellung (Position) der Grundziffer eindeutig festgelegt ist.
Die Vorteile dieses Systems bestehen darin, daß man relativ leicht rechnen und beliebig große Zahlen bezeichnen kann.
Diese Merkmale werden in der Gegenüberstellung zum System der römischen Zahlzeichen besonders deutlich. Dort werden mit Hilfe der Grundziffern

I = 1 X = 10 C = 100 M = 1000
V = 5 L = 50 D = 500

alle übrigen Zahlzeichen auf der Grundlage der Addition oder Subtraktion der zugehörigen Zahlen gewonnen.

16 1 = I; 2 = II = I + I; 3 = III = I + I + I
4 = IV = V − I; 5 = V; 6 = VI = V + I
444 = (500 − 100) + (50 − 10) + (5 − 1) = CDXLIV

Es gibt kein Verfahren dafür, wie man aus den genannten Grundziffern Zahlzeichen zur Bezeichnung *beliebig großer* Zahlen gewinnen kann. Das schriftliche Rechnen ist sehr schwierig.

Daß das römische Zahlzeichensystem durch das arabische abgelöst wurde und sich letzteres international durchgesetzt hat, liegt in der schwerfälligen Handhabung des römischen Zahlzeichensystems begründet. Das System entsprach nicht mehr den Bedürfnissen der Praxis (Wirtschaft, Wissenschaft).

Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, kann als Basis für ein Positionssystem benutzt werden.

Stets gilt es, eine gegebene Zahl in eine Summe von Vielfachen der Potenzen dieser Basiszahl zu zerlegen und die Koeffizienten in der entsprechenden Reihenfolge anzuordnen. Für das Zweiersystem (Dualsystem) ist die Tabelle der Potenzen der 2 Grundlage für die Zerlegung.

n	0	1	2	3	4	5	…
2^n	1	2	4	8	16	32	…

n	-1	-2	-3	-4	-5	…
2^n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	…

17 **a)**

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & 37 & = & 32 & & & & & + & 4 & & & +1 \\
 & & & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & & \downarrow \\
3\cdot 10^1 & + & 7\cdot 10^0 & = & 1\cdot 2^5 & + & 0\cdot 2^4 & + & 0\cdot 2^3 & + & 1\cdot 2^2 & + & 0\cdot 2^1 & + 1\cdot 2^0 \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
[3 & & 7]_{10} & = & [1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & 1]_2
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 6{,}625 = & 4 & + 2 & & + \frac{1}{2} & & + \frac{1}{8} \\
 & & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
6\cdot 10^0 + & 6\cdot 10^{-1} + & 2\cdot 10^{-2} + & 5\cdot 10^{-3} = & 1\cdot 2^2 + & 1\cdot 2^1 + & 0\cdot 2^0 + & 1\cdot 2^{-1} + & 0\cdot 2^{-2} + & 1\cdot 2^{-3} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
[6, & 6 & 2 & 5]_{10} = & [1 & 1 & 0, & 1 & 0 & 1]_2
\end{array}
$$

Wir erkennen, daß als Koeffizienten der Zerlegung nach Zweierpotenzen nur 0 und 1 vorkommen.

Das Rechnen im Dualsystem ist leichter, allerdings auch zeit- und platzaufwendiger.

18 **a)**

$$
\begin{array}{rcr}
21 & \leftrightarrow & 10101 \\
+14 & \leftrightarrow + & 1110 \\
\hline
35 & \leftrightarrow & 100011
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rr}
21\cdot 14 & 10101\cdot 1110 \\
\hline
21 & 10101 \\
84 & 10101 \\
294 & 101010 \\
\hline
 & \leftarrow 100100110
\end{array}
$$

Auf der Grundlage des Dualsystems ist der Einsatz von Rechenautomaten möglich. Die beiden Ziffern 1 und 0 können als zwei entgegengesetzte elektrische Zustände (Spannung vorhanden – keine Spannung vorhanden) realisiert werden.

Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ ($n \leqq 1$, n ganzzahlig)

14

Das Bild der Funktion $y = x^1$ ist uns als Spezialfall der linearen Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ für $m = 1$ bekannt.

(17) Wie verläuft das Bild der Funktion $y = x^1$ im gesamten Definitionsbereich dieser Funktion? Welchen Verlauf hat das Bild der Funktion für $-\infty < x < 0$ und $0 \leqq x < \infty$? Welche besonderen Eigenschaften hat diese Kurve?

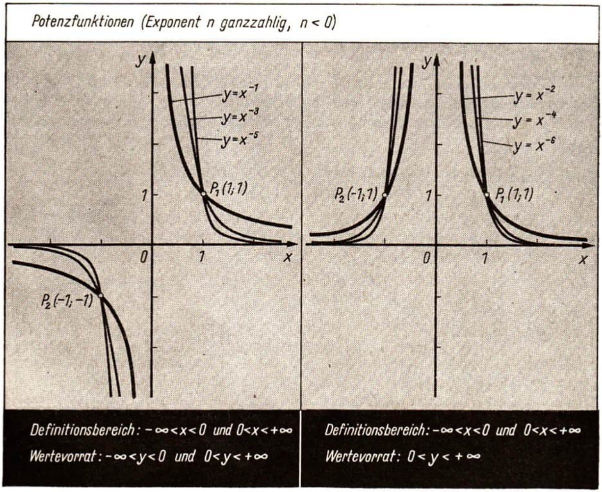
Das Bild der Funktion $f(x) = x^0$, d. h. $f(x) = 1$ $(x \neq 0)$, ist die Parallele zur x-Achse im Abstand 1, die allerdings an der Stelle $x = 0$ eine Lücke hat, da 0^0 nicht definiert ist. Wir bilden nun durch Erweiterung folgendermaßen eine neue Funktion:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Das Bild dieser Funktion $f_1(x)$ ist nun lückenlos.

Wir betrachten nun mit Hilfe der Bilder C 11 und C 12 den Kurvenverlauf der Bilder der Funktionen $y = x^n$ ($n \leqq -1$, ganzzahlig). Diese Kurven heißen **Hyperbeln.**

1. Hyperbeln bestehen aus zwei Teilen, den Hyperbelästen.
2. Die Funktionen $y = x^{-n}$ (n gerade, $n > 0$) sind gerade Funktionen, die Funktionen $y = x^{-n}$ (n ungerade, $n > 0$) sind ungerade Funktionen.



C 11 C 12

(18) Begründen Sie die Feststellungen im Punkt 2!

3. Gerade Funktionen liegen axialsymmetrisch zur Ordinatenachse, ungerade liegen zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung (Bilder C13 bis C16).

4. Die Bilder aller geraden Funktionen dieses Typs gehen durch die Punkte $P(-1; 1)$ und $P(1; 1)$, die aller ungeraden durch die Punkte $P(-1; -1)$ und $P(1; 1)$.

5. Die Hyperbeln vom Typ $y = x^{-n}$ ($n > 0$, ganzzahlig) gehen nicht durch den Koordinatenursprung. Die Ordinatenachse ist Asymptote.

Untersuchung der Monotonieverhältnisse

C

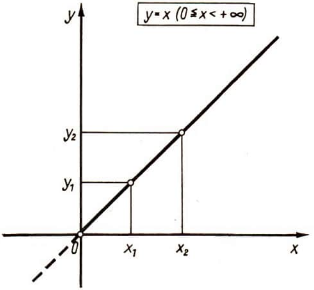
15

Aus den Bildern C13, C14, C15 und C16 können wir die folgenden Gesetzmäßigkeiten für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten entnehmen. Wir betrachten dabei nur positive Argumente.

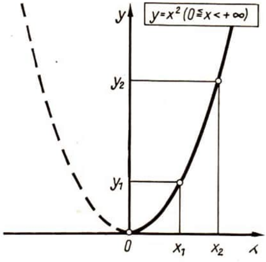
Für Potenzfunktionen mit positiven Exponenten (z. B. $n = 1$, $n = 2$) gilt:
Je größer x, desto größer y und je kleiner x, desto kleiner y, d. h., aus $x_1 < x_2$ folgt $y_1 < y_2$.

Die Funktionen sind im Intervall $0 \leqq x < +\infty$ monoton wachsend.
Für Potenzfunktionen mit negativen Exponenten (z. B. $n = -1$, $n = -2$) gilt:
Je größer x, desto kleiner y und je kleiner x, desto größer y, d. h. aus $x_1 < x_2$ folgt $y_1 > y_2$.

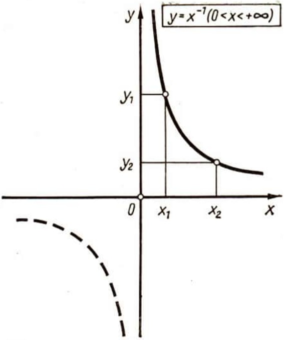
Die Funktionen sind im Intervall $0 < x < +\infty$ monoton fallend.



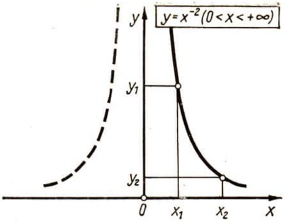
C 13



C 14



C 15



C 16

Die Annäherung an die Stelle $x = 0$

16

---

(19) **a)** Untersuchen Sie für die Funktionen mit den Gleichungen

$$y = x^{-1},\ y = x^{-3},\ y = x^{-5} \quad \text{sowie} \quad y = x^{-2},\ y = x^{-4},\ y = x^{-6}$$

das Verhalten bei Annäherung an das Argument 0, indem Sie Wertetafeln mit den Argumenten $x = 1;\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{100};\ \frac{1}{1000};\ -1;\ -\frac{1}{10};\ -\frac{1}{100};\ -\frac{1}{1000}$ aufstellen!

b) Untersuchen Sie für dieselben Funktionen das Verhalten für dem Betrage nach sehr große Argumente, indem Sie Wertetafeln mit den Argumenten $x = 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ -1;\ -10;\ -100;\ -1000$ aufstellen!

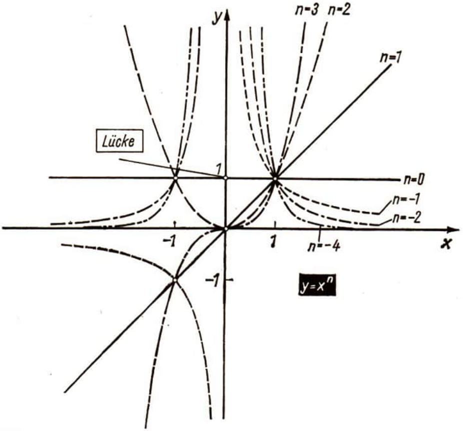
Für wachsende $x > 0$ und fallende $x < 0$ nähern sich die Hyperbeln immer mehr der x-Achse. Für wachsende x im Intervall $-1 < x < 0$ und für fallende x im Intervall $0 < x < +1$ nähern sich die Hyperbeln immer mehr der y-Achse (Bilder C11 und C12).

(20) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle der geraden und der ungeraden Potenzfunktionen!

Die Kurvenschar mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (n beliebig ganzzahlig)

17

Damit wir erkennen, welchen Einfluß der ganzzahlige Parameter n in der Gleichung $y = x^n$ auf die Gestalt der Kurve hat, betrachten wir die zu den Exponenten $n \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ gehörenden Kurven in einem gemeinsamen Koordinatensystem (Bild C 17).



C 17

Bei $n = -1$ liegt der Fall der indirekten Proportionalität vor, bei $n = 1$ der Fall der direkten Proportionalität.

(21) Erläutern Sie, welchen Einfluß der Exponent auf den Verlauf der Kurven hat, die zu den Funktionsgleichungen $y = x^n$ gehören!

Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^n$ ($a > 0$; n beliebig ganzzahlig) treten uns in zahlreichen physikalischen Gesetzen gegenüber.

19 **a)** $R = \dfrac{(\varrho \cdot l)}{A} = (\varrho \cdot l) \cdot \dfrac{1}{A}$

Der Widerstand R eines Drahtes der Länge l und mit dem spezifischen Widerstand ϱ ist indirekt proportional dem Querschnitt A $\left(\text{man schreibt dafür auch } R \sim \dfrac{l}{A}\right)$.

Wird beispielsweise der Quei lie Hälfte verringert, so wird der Widerstand doppelt so groß.

b) $F = \frac{(k \cdot m_1 \cdot m_2)}{r^2} = (k \cdot m_1 \cdot \quad) \cdot \frac{1}{r^2}$

Die Kraft F, mit der sich zwei Massen m_1 und m_2 gegenseitig anziehen, ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r der Massen voneinander. $\left(F \sim \frac{1}{r^2}\right)$

(k ist eine Konstante, die Gravitationskonstante)

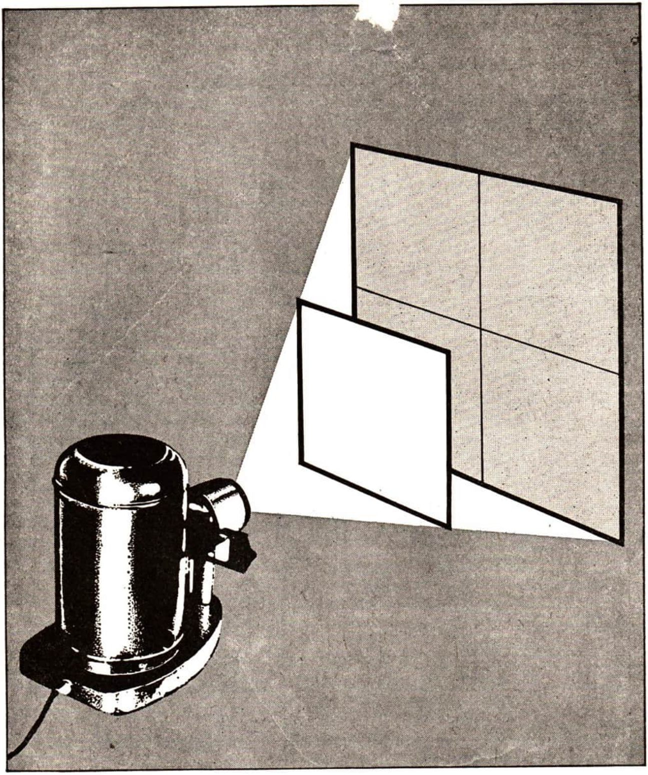
Wird beispielsweise der Abstand der Massen verdoppelt, so sinkt die Kraftwirkung auf den vierten Teil ab.

(22) Formulieren Sie an Hand der folgenden Tabelle, wie sich die Veränderung des Arguments auf die Veränderung des Funktionswertes bei den Funktionen $y = 36 \cdot x^2$ und $y = \frac{36}{x^2}$ auswirkt!

	$y = 36x^2$			$y = \frac{36}{x^2}$		
Veränderung des Arguments	x	y	Veränderung des Funktionswertes	x	y	Veränderung des Funktionswertes
$\boxed{\cdot 2}$	2	144	$\boxed{\cdot 2^2}$	2	9	$\boxed{: 2^2}$
	4	$576 = 144 \cdot 4$		4	$2{,}25 = \frac{9}{4}$	
$\boxed{\cdot 3}$	2	144	$\boxed{\cdot 3^2}$	2	9	$\boxed{: 3^2}$
	6	$1296 = 144 \cdot 9$		6	$1 = \frac{9}{9}$	
$\boxed{: 2}$	6	1296	$\boxed{: 2^2}$	6	1	$\boxed{\cdot 2^2}$
	3	$324 = \frac{1296}{4}$		3	$4 = 1 \cdot 4$	
$\boxed{: 3}$	6	1296	$\boxed{: 3^2}$	6	1	$\boxed{\cdot 3^2}$
	2	$144 = \frac{1296}{9}$		2	$9 = 1 \cdot 9$	

Aufgaben c 86 und 93

C



D

Bei der Projektion von Dias verringert sich die Helligkeit der Bilder auf der Projektionswand je weiter wir den Bildschirm vom Projektor abrücken. Die Beleuchtungsstärke nimmt im Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle ab. Dieses Gesetz kann mit Hilfe einer Potenzfunktion vom Typ $y = ax^{-2}$ dargestellt werden.

D. Potenzfunktionen (Exponent rational)

Zur Wiederholung

1

Die Gleichung $x^2 = 2$ ist im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar.
Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, das heißt, wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl x, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt. Für diese Zahl x existiert nach Annahme eine Darstellung:

$$x = \frac{p}{q}, \quad (p, q \text{ ganzzahlig und } q \neq 0).$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

bzw.

(1) $p^2 = 2q^2$.

Wir denken uns die Zahlen p^2 und $2q^2$ in Primfaktoren zerlegt. Der Primfaktor 2 möge in der Primzahlzerlegung von p m-mal ($m = 0, 1, 2, \ldots$) und in der Primzahlzerlegung von q n-mal ($n = 0, 1, 2, \ldots$) vorkommen. Dann würde der Primfaktor 2 auf der linken Seite der Gleichung (1) $2m$-mal und auf der rechten Seite $(2n + 1)$-mal auftreten. Da

$2m \neq 2n + 1$ (m, n natürliche Zahlen)

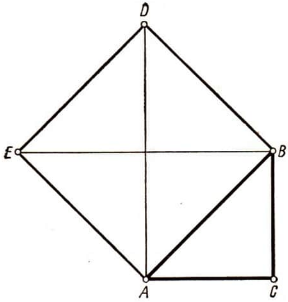
ist, würde der Primfaktor 2 in den Primzahlzerlegungen von p^2 und $2q^2$ in verschiedener Anzahl auftreten. Das ist aber nicht möglich, denn es kann gezeigt werden, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt.

Die Annahme, es gäbe eine rationale Zahl, die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist, ist damit widerlegt.

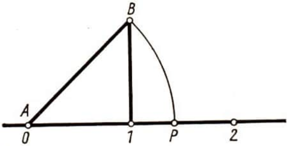
Es lassen sich beliebig viele andere Gleichungen angeben, die im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar sind.

Die Tatsache, daß es keine rationale Zahl x gibt, für die $x^2 = 2$ gilt, bedeutet geometrisch: Es existieren Strecken, die nicht mit demselben Maß gemessen werden können. Solche Strecken heißen **inkommensurable Strecken.** Das Bild D1 zeigt ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dessen Katheten die Länge 1 haben. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC hat die Maßzahl $\frac{1}{2}$. Dann ist $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ die Maßzahl des Flächeninhalts des Quadrates $ABDE$. Hätte nun die Quadratseite bzw. die Hypotenuse $\overline{AB}$ bei der verwendeten Längeneinheit (die Kathete des Dreiecks ist die Einheitsstrecke) eine rationale Zahl x als Maßzahl ihrer Länge, so müßte für diese rationale Zahl x gelten:

$x^2 = 2.$



D 1



D 2

Wir wissen aber bereits, daß diese Gleichung keine rationale Lösung hat. Die Kathete und die Hypotenuse des Dreiecks ABC besitzen demnach kein gemeinsames Maß, sie sind inkommensurabel. Würde man sich auf die *rationalen* Zahlen beschränken, so könnte man der Hypotenuse des gegebenen Dreiecks *keine* Maßzahl für ihre Länge zuordnen.

Die Bildpunkte der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden nennen wir **rationale Punkte.** Wir behaupten nun, daß auf der Zahlengeraden auch **„nichtrationale Punkte"**, das heißt Punkte, denen keine rationale Zahl zugeordnet werden kann, existieren. Wir zeichnen über der Einheitsstrecke der Zahlengeraden das eben betrachtete rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, so daß die Kathete $\overline{AC}$ mit der Einheitsstrecke $\overline{01}$ zusammenfällt (Bild D2). Um den Punkt O zeichnen wir mit dem Radius $\overline{AB}$ den Kreis, der die Zahlengerade in P schneidet. Wie wir schon wissen, hat die Länge der Strecke $\overline{OP} = \overline{AB}$ keine rationale Maßzahl. Folglich kann dem Punkt P keine rationale Zahl zugeordnet werden. Deswegen wollen wir den Punkt P einen nichtrationalen Punkt nennen.

Man kann zeigen, daß auf der Zahlengeraden unendlich viele nichtrationale Punkte liegen. Das ist insofern erstaunlich, als wir gelernt haben, daß die rationalen Punkte auf der Zahlengeraden überall dicht liegen. Man nennt die nichtrationalen Punkte der Zahlengeraden auch *Lücken*.

Aufgaben d 1 und 2

Intervallschachtelungen

2

Wollen wir **jedem** Punkt der Zahlengeraden eine Zahl zuordnen, so müssen wir den Zahlbereich nochmals erweitern. Diese Erweiterung zum Bereich der **reellen Zahlen** soll in den folgenden Lerneinheiten skizziert werden. Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt. Wir können aber rationale Näherungswerte angeben, deren Quadrate sich von der Zahl 2 beliebig wenig unterscheiden.
Geometrisch bedeutet das, daß wir rationale Punkte angeben können, die dem Punkt P in Bild D2 beliebig nahekommen. Aus dem Bild D2 entnehmen wir, daß der nichtrationale Punkt P zwischen den rationalen Punkten 1 und 2 liegt.
Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $I_1 = \langle 1; 2\rangle$ in der Menge der rationalen Zahlen. Wir verstehen also hier[1] unter dem Intervall $\langle a; b\rangle$ mit $a < b$ die Menge aller *rationalen* Zahlen x, für die $a \leqq x \leqq b$ gilt. Als Länge des Intervalls bezeichnet man die Differenz $d = b - a$.
Das Intervall $I_1 = \langle 1; 2\rangle$ zerlegen wir in die 10 gleich langen Teilintervalle

$\langle 1{,}0; 1{,}1\rangle$, $\langle 1{,}1; 1{,}2\rangle$, …, $\langle 1{,}8; 1{,}9\rangle$, $\langle 1{,}9; 2{,}0\rangle$

und suchen dasjenige Intervall $I_2 = \langle a_2; b_2\rangle$, für das $a_2^2 < 2 < b_2^2$ gilt. Es ist dies das Intervall $\langle 1{,}4; 1{,}5\rangle$ mit der Länge $d_2 = 0{,}1$; denn es ist

$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$.

Teilen wir I_2 abermals in 10 gleich lange Teilintervalle, so erhalten wir die Intervalle

$\langle 1{,}40; 1{,}41\rangle$, $\langle 1{,}41; 1{,}42\rangle$, …, $\langle 1{,}48; 1{,}49\rangle$, $\langle 1{,}49; 1{,}50\rangle$

Unter diesen Intervallen suchen wir dasjenige Intervall $I_3 = \langle a_3; b_3\rangle$ heraus, für das $a_3^2 < 2 < b_3^2$ gilt und erhalten $I_3 = \langle 1{,}41; 1{,}42\rangle$ mit der Länge $d_3 = 0{,}01$; denn es ist

$1{,}41^2 = 1{,}9981 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2$.

Das Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen, ohne daß es abbricht. Nach weiteren Schritten erhalten wir die nebenstehende **Intervallfolge.**

$$
(1)\quad
\begin{array}{c}
\langle 1;\ 2\rangle\\
\langle 1{,}4;\ 1{,}5\rangle\\
\langle 1{,}41;\ 1{,}42\rangle\\
\langle 1{,}414;\ 1{,}415\rangle\\
\langle 1{,}4142;\ 1{,}4143\rangle\\
\langle 1{,}41421;\ 1{,}41422\rangle\\
\langle 1{,}414213;\ 1{,}414214\rangle\\
\text{usw.}
\end{array}
$$

Das „usw." soll hier bedeuten: Wenn man noch so viele Intervalle berechnet hat, so kann man immer noch belie-

[1] Auch bei den im folgenden behandelten, sogenannten Intervallschachtelungen handelt es sich stets um Intervalle im Bereich der rationalen Zahlen.

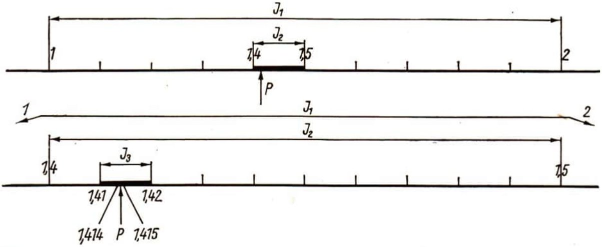
big viele weitere Intervalle ermitteln, ohne jemals fertig zu werden. Die Intervalle der Folge wurden so gewählt, daß jedes Intervall das folgende umfaßt. Die Längen der Intervalle sind der Reihe nach:

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000} \text{ usw.}$$

Da das beschriebene Verfahren nie abbricht, werden die Intervallängen kleiner als jede der Zahlen $\frac{1}{10^n}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Durch die Enden jedes Intervalls ist ein Paar von Näherungslösungen der Gleichung $x^2 = 2$ bestimmt. Der Fehler der Näherungswerte a_n und b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist kleiner als die Länge $d_n = b_n - a_n$ des Intervalls $\langle a_n; b_n \rangle$.
Die Veranschaulichung auf der Zahlengeraden zeigt, daß der nichtrationale Punkt P des Bildes D2 auf jedem Stück der Zahlengeraden liegt, das durch die rationalen Punkte a_n und b_n abgegrenzt wird. Wir erhalten auf der Zahlengeraden eine Folge ineinanderliegender oder „ineinandergeschachtelter“ Intervalle, die sich auf den Punkt P „zusammenziehen“ (Bild D3). Deswegen wollen wir sagen:

Die konstruierte Intervallfolge (1) *bestimmt den nichtrationalen Punkt P,* oder *durch die ineinandergeschachtelten Intervalle wird der Punkt P bestimmt.*



D 3

D

DEFINITION: Unter einer Intervallschachtelung versteht man eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots,$$

die folgenden Bedingungen genügen:

1. Jedes Intervall umfaßt das folgende

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \ldots$$

2. Mit wachsendem n werden die Längen der Intervalle I_n kleiner als jede der Zahlen

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

Bezeichnet man die Intervalle $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n, \ldots$ der Folge der Reihe nach mit

$\langle a_1; b_1\rangle, \langle a_2; b_2\rangle, \langle a_3; b_3\rangle, \langle a_4; b_4\rangle, \ldots, \langle a_n; b_n\rangle \ldots,$

so gilt für die rationalen Zahlen a_n und b_n:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \leqq b_n \leqq \ldots \leqq b_4 \leqq b_3 \leqq b_2 \leqq b_1.$$

Das Zeichen „$\leqq$" wurde gesetzt, weil zwei oder mehrere aufeinanderfolgende Intervalle ein gemeinsames Ende haben können. Die Intervallschachtelung, die durch die rationalen Zahlen a_n und b_n erzeugt wird, wollen wir mit „(a_n/b_n)" bezeichnen.
Wir wollen der Kürze wegen auch die Veranschaulichung eines Intervalls bzw. einer Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden ein Intervall bzw. eine Intervallschachtelung nennen. Daß durch jede Intervallschachtelung ein Punkt auf der Zahlengeraden bestimmt wird, ist anschaulich einleuchtend. Deshalb fordern wir, daß der folgende Grundsatz gilt.

2 **GRUNDSATZ: Jede Intervallschachtelung bestimmt auf der Zahlengeraden genau einen Punkt.**

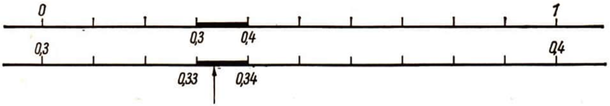
3

Es läßt sich auch umgekehrt zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine Intervallschachtelung angeben, die diesen Punkt bestimmt.

1 Es soll eine Intervallschachtelung für den rationalen Punkt $0,\overline{3}$ angegeben werden.
Die Intervallfolge

$$\begin{array}{ll} & \langle 0;\ 1\rangle \\ & \langle 0{,}3;\ 0{,}4\rangle \\ (2) & \langle 0{,}33;\ 0{,}34\rangle \\ & \langle 0{,}333;\ 0{,}334\rangle \\ & \langle 0{,}3333;\ 0{,}3334\rangle \\ & \text{usw.} \end{array}$$

stellt eine Intervallschachtelung dar, durch die der rationale Punkt $0,\overline{3}$ bestimmt wird (Bild D4).



D 4

(1) **Begründen Sie, daß die Folge (2) eine Intervallschachtelung ist!**

Da der rationale Punkt $0,\overline{3}$ allen Intervallen der Folge (2) angehört, können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &< 0,\overline{3} < 1 \\ 0,3 &< 0,\overline{3} < 0,4 \\ 0,33 &< 0,\overline{3} < 0,34 \\ 0,333 &< 0,\overline{3} < 0,334 \\ 0,3333 &< 0,\overline{3} < 0,3334 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Wir sagen in diesem Falle:
Die Intervallschachtelung (2) bestimmt die **rationale Zahl** $\mathbf{0,\overline{3}}$**.**

3 **SATZ: Jede rationale Zahl läßt sich durch eine Intervallschachtelung bestimmen.**

2 Es soll eine Intervallschachtelung für die Zahl 3 angegeben werden.
Die Intervallfolge

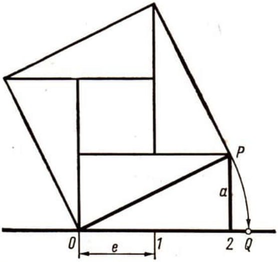
$$(3)\quad \begin{aligned} &\langle 2;\ 4\rangle \\ &\langle 2,9;\ 3,1\rangle \\ &\langle 2,99;\ 3,01\rangle \\ &\langle 2,999;\ 3,001\rangle \\ &\langle 2,9999;\ 3,0001\rangle \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

D

stellt eine Intervallschachtelung (a_n/b_n) dar, durch die die rationale Zahl 3 bestimmt wird; denn für alle n gilt

$a_n < 3 < b_n$.

(2) **Weisen Sie nach, daß der Strecke $\overline{OP} = \overline{OQ}$ im Bild D5 keine rationale Maßzahl für ihre Länge zugeordnet werden kann, wenn die Strecke e Einheitsstrecke ist ($a = e$)! Geben Sie eine Intervallschachtelung an, durch die der Punkt Q bestimmt wird! Nehmen Sie als erstes Intervall $I_1 = \langle 2; 3\rangle$, und gewinnen Sie jedes folgende Intervall durch „Zehnteilung" des vorhergehenden!**



D 5

ZUSAMMENFASSUNG:

Jede *rationale* Zahl läßt sich durch eine Intervallschachtelung bestimmen.
Jede Intervallschachtelung, ganz gleich, ob sie eine rationale Zahl bestimmt oder nicht, bestimmt eindeutig auf der Zahlengeraden einen Punkt.

4

Der nichtrationale Punkt P im Bild D2 läßt sich nicht nur durch eine einzige Intervallschachtelung bestimmen. Die folgende Intervallschachtelung bestimmt ebenfalls diesen Punkt.

3 Wir halbieren das Intervall $I_1 = \langle 1; 2 \rangle$ und betrachten dasjenige Teilintervall $\langle a_2'; b_2' \rangle$, für das

$a_2'^2 < 2 < b_2'^2$

gilt. Wir erhalten das Intervall $I_2 = \langle 1{,}0; 1{,}5 \rangle$; denn es ist

$1{,}0^2 < 2 < 1{,}5^2.$

Das Intervall I_2 wird abermals halbiert und das Intervall $I_3 = \langle a_3'; b_3' \rangle$ so bestimmt, daß

$a_3'^2 < 2 < b_3'^2$

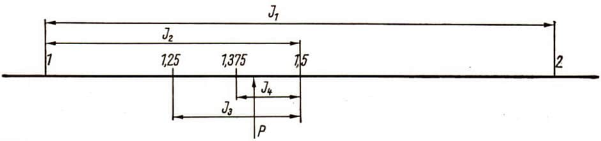
gilt. Man erhält $I_3 = \langle 1{,}25; 1{,}50 \rangle$; denn es ist

$1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2 < 2{,}2500 = 1{,}50^2.$

Auch dieses Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen. Man erhält so die Intervallfolge

$$\begin{array}{c}
\langle 1;\ 2 \rangle \\
\langle 1{,}0;\ 1{,}5 \rangle \\
\langle 1{,}25;\ 1{,}50 \rangle \\
\langle 1{,}375;\ 1{,}500 \rangle \\
\langle 1{,}3750;\ 1{,}4375 \rangle \\
\langle 1{,}40625;\ 1{,}43750 \rangle \\
\langle 1{,}406250;\ 1{,}421875 \rangle \\
\langle 1{,}4140625;\ 1{,}4218750 \rangle \\
\text{usw.}
\end{array} \tag{4}$$

Auch die Folge (4) stellt eine Intervallschachtelung dar. Die Veranschaulichung auf der Zahlengeraden zeigt, daß sich diese Schachtelung nicht so schnell wie die Folge (1), schließlich aber auch auf den Punkt P zusammenzieht (Bild D6).
Jeder Punkt der Zahlengeraden läßt sich durch unendlich viele Intervallschachtelungen bestimmen. Alle Intervallschachtelungen, die sich auf denselben Punkt zusammenziehen, nennen wir **gleichwertig** oder **äquivalent**.[1]



D 6

[1] Die Äquivalenz zweier Intervallschachtelungen läßt sich auch rein arithmetisch definieren.

D

4 Die Intervallfolgen (1) und (4) sind äquivalente Intervallschachtelungen.

Alle mit einer gegebenen Intervallschachtelung äquivalenten Schachtelungen fassen wir zu einer Klasse zusammen. Zwei verschiedene Klassen können dann nicht dieselbe Intervallschachtelung enthalten, da jede Schachtelung nur in einer Klasse vorkommt.

4 **SATZ: Jedem Punkt der Zahlengeraden läßt sich umkehrbar eindeutig eine Klasse gleichwertiger Intervallschachtelungen zuordnen.**

Da jedem Punkt der Zahlengeraden eine Klasse äquivalenter Intervallschachtelungen umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann, wird die Zahlengerade lückenlos erfaßt. Diese Klassen bilden den Bereich der **reellen Zahlen.**

5 **DEFINITION: Eine reelle Zahl ist die Klasse aller Intervallschachtelungen, die mit einer bestimmten Intervallschachtelung gleichwertig sind.**

Die Menge der Intervallschachtelungen, die sich auf den nichtrationalen Punkt P im Bild D2 zusammenziehen, ist eine reelle Zahl a, von der man nachweisen kann, daß $a^2 = 2$ gilt. Wir bezeichnen diese Zahl a mit „$\sqrt{2}$“.
Entsprechend ist die Menge der Intervallschachtelungen, die sich auf den nichtrationalen Punkt Q (Bild D 5) zusammenziehen, eine reelle Zahl. Diese reelle Zahl bezeichnen wir mit „$\sqrt{5}$“.
Bestimmt eine Intervallschachtelung eine rationale Zahl, so nennen wir die Klasse, der diese Schachtelung angehört, eine **rationale reelle Zahl.** Alle anderen Klassen heißen **irrationale reelle Zahlen.** Jeder rationalen Zahl entspricht dann genau eine rationale reelle Zahl und umgekehrt.
Die Ordnung und die Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen werden so definiert, daß sich die rationalen reellen Zahlen beim Vergleichen und Rechnen wie die ihnen zugeordneten rationalen Zahlen verhalten. Deshalb können wir die rationalen reellen Zahlen durch die rationalen Zahlen ersetzen.

6 **SATZ: Die Menge der reellen Zahlen enthält als Teilmenge die Menge der rationalen Zahlen.**

Aufgaben d 3 bis 7

D

Unendliche Dezimalbrüche

5

Die in der Lerneinheit D2 angegebene Intervallschachtelung (1) ist bereits durch die linken Enden (oder auch durch die rechten Enden) eindeutig bestimmt. Diese linken Enden liefern die Ziffern einer Dezimalentwicklung, die wir als Bezeichnung der reellen Zahl $\sqrt{2}$ ansehen können. Die mit

1,414 213 562 373 095 048 801 688 7...

beginnende Dezimalentwicklung ist ein **unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch,** der nur eine abgekürzte Schreibweise der betrachteten Schachtelung ist. Analog erhält man für jede irrationale Zahl a einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch, indem man die Schachtelung betrachtet, die man durch fortgesetzte Zehnteilung desjenigen Intervalls $\langle g;\, g+1\rangle$ (g ganzzahlig) erhält, für das $g < a < g+1$ gilt.
Jede rationale Zahl läßt sich durch einen unendlichen periodischen Dezimalbruch darstellen.

5 **a)** $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ **b)** $3 = 3{,}0000\ldots$ **c)** $5{,}32 = 5{,}320000\ldots$ **d)** $\frac{25}{37} = 0{,}675675\ldots$

Die Dezimalbrüche 5,320000 ... und 5,319999 ... stellen dieselbe rationale Zahl dar (vgl. Übung D 3 b). Um Eindeutigkeit zu erzielen, schließen wir eine der beiden Darstellungsmöglichkeiten – und zwar die zweite – aus. Wir wollen stets verlangen, daß in einer Dezimalbruchdarstellung von keiner Stelle an alle Ziffern sämtlich gleich 9 sind. Somit gilt:

7 **SATZ: Jede reelle Zahl läßt sich auf genau eine Weise durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen.**
Umgekehrt stellt auch jeder unendliche Dezimalbruch genau eine reelle Zahl dar.

3 **a)** Geben Sie für die reelle Zahl, die durch den Dezimalbruch 0,5151151115 ... dargestellt wird, eine Intervallschachtelung an!
b) Schreiben Sie die Dezimalbrüche $5{,}32\overline{0}$ und $5{,}31\overline{9}$ als Intervallschachtelungen! Veranschaulichen Sie diese Intervallschachtelungen auf der Zahlengeraden! Überlegen Sie sich, daß diese Schachtelungen äquivalent sind! Betrachten Sie von beiden Schachtelungen nur die linken Enden!

Als Variablen für reelle Zahlen wählen wir kleine lateinische Buchstaben. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit „P".
Auf eine Definition der Ordnung und der Rechenoperationen sowie auf den Nachweis der Rechengesetze verzichten wir hier.
Beim numerischen Rechnen arbeitet man mit den rationalen Näherungswerten a_n und b_n der durch die Intervallschachtelung (a_n/b_n) bestimmten reellen Zahl. Ersetzt man die beiden durch Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division zu verknüpfenden reellen Zahlen durch hinlänglich gute Näherungswerte, so kann man das Resultat der Verknüpfung mit jeder gewünschten Genauigkeit erhalten.

So ist beispielsweise

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 1{,}414 + 2{,}236 = 3{,}650$$

oder

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 1{,}4142 + 2{,}2360 = 3{,}6502.$$

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten folgende Gesetze:

1. Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b gilt entweder

   $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

2. Im Bereich der reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation stets eindeutig ausführbar. Beide Operationen sind kommutativ und assoziativ:

$a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Es gelten die Monotoniegesetze: Aus $a < b$ folgt

$a + c < b + c$ | $a \cdot c < b \cdot c$ für $c > 0$.

Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv:

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

3. Für das Rechnen mit den Zahlen 0 und 1 gilt:

$a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$

4. Die Gleichung $a + x = b$ hat stets eine eindeutig bestimmte reelle Lösung. Diese lautet $x = b - a$.
Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ stets eine eindeutig bestimmte reelle Lösung. Diese lautet $x = \frac{b}{a}$.

Außerdem gelten alle anderen uns schon vom Rechnen mit rationalen Zahlen bekannten Eigenschaften auch für das Rechnen mit reellen Zahlen, wie die „Vorzeichenregeln" für die Multiplikation sowie die Tatsache, daß ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann Null ist, wenn wenigstens ein Faktor Null ist. Ferner sei noch folgende Eigenschaft erwähnt: Ist $n > 0$ eine natürliche Zahl und sind a und b positive reelle Zahlen, so folgt aus $a \lesseqgtr b$ stets $a^n \lesseqgtr b^n$.

D

ZUSAMMENFASSUNG:

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen P.
Eine reelle Zahl ist die Klasse aller Intervallschachtelungen, die mit einer bestimmten Intervallschachtelung gleichwertig sind.
Reelle Zahlen können durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden. Die irrationalen Zahlen werden dabei durch nichtperiodische Dezimalbrüche dargestellt.
Irrationale Zahlen können beim Rechnen durch rationale Zahlen angenähert werden.

Aufgaben d 8 bis 14

Definition der Wurzel

6

$\boxed{6}$ Es gibt genau eine positive reelle Zahl b, für die $b^3 = 2$ gilt.
Beweis: Wir haben zu zeigen, daß es

1. eine positive Zahl b mit $b^3 = 2$ gibt,
2. auch nur eine positive Zahl b mit der verlangten Eigenschaft gibt.

Noch ehe wir wissen, ob eine positive Zahl b existiert, für die $b^3 = 2$ gilt, können wir bereits zeigen, daß es, wenn es überhaupt eine gibt, auch nur eine geben kann. Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene positive Zahlen b_1 und b_2, für die gilt:

(*) $b_1^3 = b_2^3 = 2$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, es sei

$b_1 < b_2$.

Dann gilt aber

$b_1^3 < b_2^3$

im Widerspruch zu (*). Damit ist durch einen indirekten Beweis gezeigt worden, daß es nur eine positive Zahl mit der obengenannten Eigenschaft gibt.
Die Existenz einer reellen Zahl b, für die $b^3 = 2$ gilt, zeigen wir, indem wir eine Intervallschachtelung für die Zahl b angeben. Wir behaupten, die Zahl b, die durch die Intervallschachtelung

$$\begin{array}{c} \langle 1;\ 2 \rangle \\ \langle 1{,}2;\ 1{,}3 \rangle \\ \langle 1{,}25;\ 1{,}26 \rangle \\ \langle 1{,}259;\ 1{,}260 \rangle \\ \langle 1{,}2599;\ 1{,}2600 \rangle \\ \langle 1{,}25992;\ 1{,}25993 \rangle \\ \text{usw.} \end{array} \tag{5}$$

dargestellt wird, genügt der Gleichung $b^3 = 2$. Die dritte Potenz der Zahl b erhalten wir durch die Intervallschachtelung

$$\begin{array}{c} \langle 1;\ 8 \rangle \\ \langle 1{,}728;\ 2{,}197 \rangle \\ \langle 1{,}953125;\ 2{,}000376 \rangle \\ \langle 1{,}995616979;\ 2{,}000376000 \rangle \\ \langle 1{,}999899757799;\ 2{,}000376000000 \rangle \\ \langle 1{,}999995000191488;\ 2{,}000042622521647 \rangle \\ \text{usw.} \end{array}$$

Diese Intervallschachtelung bestimmt die Zahl 2.

4 Zeigen Sie, daß genau eine positive reelle Zahl b existiert, für die $b^2 = 2$ gilt!

Allgemein gilt der folgende Satz, den wir ohne Beweis mitteilen:

8 **SATZ: Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und n eine positive ganze Zahl, so existiert stets genau eine nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.**

Die nach Satz 8 eindeutig bestimmte Zahl b nennt man die n-te Wurzel aus a und bezeichnet sie mit „$\sqrt[n]{a}$“.

9 **DEFINITION: $\sqrt[n]{a}$ ($a \geqq 0$; n positiv ganzzahlig) ist diejenige nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.**

D

Man nennt die nichtnegative reelle Zahl a den **Radikanden** und die positive ganze Zahl n den **Wurzelexponenten.** Die Operation, die den Zahlen n und a die Zahl $b = \sqrt[n]{a}$ zuordnet, heißt **Radizieren** oder **Wurzelziehen.**

Nach Definition 9 ist

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a} \quad \textbf{(}a \geqq 0, n \textbf{ positiv ganzzahlig).}$$

(5) Begründen Sie, warum das Radizieren eine Umkehrung des Potenzierens ist! Für welche Exponenten n und für welche Basen a ist diese Formulierung nur sinnvoll?

7 Es ist

a) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, denn $0{,}5^3 = 0{,}125$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3^4 = 81$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

d) $\sqrt[n]{1} = 1$, denn $1^n = 1$ (n positiv ganzzahlig)

e) $\sqrt[n]{0} = 0$, denn $0^n = 0$ (n positiv ganzzahlig)

f) $\sqrt[1]{a} = a$, denn $a^1 = a$

8 Es ist

$\sqrt{3^2} = 3$ und $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

Da eine Wurzel stets eine nichtnegative Zahl ist, gilt beispielsweise:

$\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt[4]{x^4} = |x|$; $\sqrt[6]{(x-y)^6} = |x-y|$.

Aufgaben d 15 bis 20

D

Potenzen mit rationalen Exponenten

7

(6) $\sqrt[3]{a^2}$ ist nach Definition D9 diejenige nichtnegative Zahl b, für die $b^3 = a^2$ gilt. Beweisen Sie, daß gilt: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[12]{a^8}$!

10 **SATZ: Ist $a > 0$ und sind m, n und c ganze Zahlen mit $n > 0$ und $c > 0$, so ist**

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nc]{a^{mc}}}$$

Beweis: Wir setzen $\sqrt[n]{a^m} = b$ und $\sqrt[nc]{a^{mc}} = b_1$,

wobei b und b_1 positive Zahlen sind. Dann ist

(1) $b^n = a^m$ und (2) $b_1^{nc} = a^{mc}$.

Potenzieren wir die Gleichung (1) mit c, so erhalten wir

(3) $b^{nc} = a^{mc}$.

Aus (2) und (3) folgt

$b_1^{nc} = b^{nc}$.

Da b_1 und b positive Zahlen sind, folgt

$b_1 = b$.

[Wäre nämlich $b_1 \neq b$ $(b_1 > 0;\ b > 0)$, so wäre auch $b_1^{nc} \neq b^{nc}$]. Damit ist der Satz 10 bewiesen.

9 a) $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$ b) $\sqrt[8]{\left(\frac{1}{7}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{7}}$ c) $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[1]{2^2} = 2^2$

Der Satz 10 kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Wenn $\frac{m}{n} = \frac{u}{v}$, so $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[v]{a^u}$ $(a > 0;\ m, n, u, v$ ganzzahlig; $n > 0;\ v > 0)$

Für das Zeichen „$\sqrt[n]{a^m}$“ führen wir ein neues Zeichen ein, das die Abhängigkeit der Zahl $\sqrt[n]{a^m}$ von dem Verhältnis $\frac{m}{n}$ der Exponenten erkennen läßt.

11 **DEFINITION: Ist $a > 0$ und sind m und n ganze Zahlen mit $n > 0$, so setzt man**

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Nach dieser Definition ist $a^{\frac{m}{n}}$ diejenige positive Zahl b, für die $b^n = a^m$ gilt. Es ist:

$a^{\frac{m}{n}} = b$ genau dann, wenn $b^n = a^m$.

Wir nennen die Zahl $a^{\frac{m}{n}}$ eine Potenz mit rationalem Exponenten. Somit haben wir **Potenzen für jeden rationalen Exponenten** definiert. Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ positiv, kann die Basis a auch Null sein, denn es ist

$0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0 \qquad (m > 0).$

Für $m = 1$ erhält man aus der Definition 11 den Spezialfall

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}} \quad (a \geqq 0 \text{ und } n \text{ positiv ganzzahlig}).$$

Ist n ein Teiler von m, so stellt $a^{\frac{m}{n}}$ eine Potenz mit ganzzahligem Exponenten dar. In diesem Falle kann a – wie uns bereits bekannt ist – eine beliebige reelle Zahl mit Ausnahme von Null sein.

10 a) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \sqrt[7]{2^3}$ c) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

Aus Satz 10 folgt insbesondere, daß $a^{\frac{m}{n}}$ nicht von dem speziellen Bruch abhängig ist, der als Repräsentant des rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ gewählt wurde. Beispielsweise ist

$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{6}{9}} = a^{\frac{8}{12}}$ $(a \geqq 0)$, $a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{4}{6}} = a^{-\frac{6}{9}} = a^{-\frac{8}{12}}$ $(a > 0)$.

Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten

8

Die Potenzgesetze gelten auch für das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten.

12 **SATZ: Sind a und b positive reelle Zahlen, m, n, p und q ganze Zahlen und n und q positiv, so ist:**

(1) $\boxed{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$ (2) $\boxed{a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}}$ (3) $\boxed{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}}$

Ferner gilt:

(4) $\boxed{a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$ (5) **Wenn $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, so ist $a^{\frac{m}{n}} \lessgtr a^{\frac{p}{q}}$ für $a \gtrless 1$.**

Sind die Exponenten $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ positiv, so gelten die Regeln (1) bis (3) auch für $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis zu (3): Wir setzen

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = u \; (u > 0) \quad \text{und} \quad u^{\frac{p}{q}} = u^{\frac{np}{nq}} = v \; (v > 0).$$

Dann ist $u^{np} = a^{mp}$ und $v^{nq} = u^{np}$.

Aus diesen Gleichungen folgt $v^{nq} = a^{mp}$.

Daraus erhält man mit $v = u^{\frac{p}{q}}$

$$\left(u^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = a^{mp}.$$

Mit $u = a^{\frac{m}{n}}$ erhält man

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = a^{mp}.$$

Dann ist aber $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

7 Beweisen Sie die Regel (2)!

Anleitung: Setzen Sie $a^{\frac{m}{n}} = u \; (u > 0)$ und $b^{\frac{m}{n}} = v \; (v > 0)$!

Beweis zu (4): Es ist

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\frac{1}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

Nach Regel (2) gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = (a \cdot a^{-1})^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{m}{n}} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad \text{bzw.} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

8 Zeigen Sie, daß gilt a) $3^{1,4} < 3^{1,5}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$!

Anleitung: Führen Sie den Nachweis indirekt!

11 a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$ b) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 12)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$

c) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}}\ (a \geqq 0)$ d) $\frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}} = a^2 \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{2+\left(-\frac{2}{3}\right)} = a^{\frac{4}{3}}\ (a > 0)$

e) $\left(p^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} = p^{\frac{1}{6}} \cdot q^{-\frac{2}{5}}\ (p > 0;\ q > 0)$

Aufgaben d 21 bis 36

Addition und Subtraktion von Wurzeln

9

D

Da die Multiplikation reeller Zahlen bezüglich der Addition distributiv ist, können wir gewisse Summen, in denen Wurzeln als Summanden auftreten, vereinfachen.

12 a) Es ist ein Näherungswert mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen für die Summe

$$s = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

zu berechnen.
Es ist

$$2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = (2-8)\sqrt{2} + (5-2)\sqrt{3} = -6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$
$$s \approx -6 \cdot 1{,}4142 + 3 \cdot 1{,}7321 = -8{,}4852 + 5{,}1963 = -3{,}2889$$

Man erhält

$$s \approx -3{,}289.$$

b) $3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}(3+4-5) = 2\sqrt[3]{x}\quad (x \geqq 0)$

Durch Addition und Subtraktion lassen sich nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleichen Radikanden zusammenfassen.

Aufgaben d 37 bis 40

Multiplikation und Division von Wurzeln — Radizieren von Produkten und Quotienten

10

Die folgenden Beispiele zeigen, daß wir Produkte und Quotienten von Wurzeln berechnen können, indem wir die Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten schreiben und danach die Potenzgesetze anwenden.

13 **a)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \quad (a \geqq 0)$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot (b^{-1})^{\frac{1}{3}} = (ab^{-1})^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$

$(a \geqq 0;\ b > 0)$

Für verschiedene Aufgaben ist es zweckmäßig, die Regeln für Potenzen mit rationalen Exponenten in der Wurzelschreibweise zu formulieren. So erhält man aus der Regel (2) des Satzes D 12 für $m = 1$:

(2a) $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \quad (a \geqq 0;\ b \geqq 0)$

Entsprechend gilt:

(2b) $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}} \quad (a \geqq 0;\ b > 0)$

9 Wie erhält man aus der Regel (2) des Satzes D 12 die Regel (2b)?

14 Mit den Regeln (2a) und (2b) können wir die Aufgaben aus dem Beispiel D 13 kürzer wie folgt lösen:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^3} \quad (a \geqq 0)$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} \quad (a \geqq 0;\ b > 0)$

15 **a)** $\sqrt[3]{\dfrac{2a^2b}{9c^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4ab^2}{3c}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2a^2b}{9c^2}\right)\left(\dfrac{4ab^2}{3c}\right)} = \sqrt[3]{\dfrac{8a^3b^3}{27c^3}} = \dfrac{2ab}{3c}$

$(a \geqq 0;\ b \geqq 0;\ c > 0)$

b) $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^2 = (\sqrt{2x})^2 - 2\sqrt{2x} \cdot \sqrt{3y} + (\sqrt{3y})^2$

$= 2x + 3y - 2\sqrt{6xy} \quad (x \geqq 0;\ y \geqq 0)$

Aufgaben d 41 bis 49

D

Potenzieren und Radizieren von Wurzeln — Radizieren von Potenzen

11

Aus der Regel (3) des Satzes D12 erhält man für $m = p = 1$:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nq}}$$

bzw.

(3a) $$\boxed{\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}} \quad (a \geqq 0)$$

und für $m = q = 1$:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$$

bzw.

(3b) $$\boxed{(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}} \quad (a > 0)$$

16 a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$

c) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{9 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$ d) $\sqrt[4]{3^6}^{\,2} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3$

e) $\sqrt[3]{a^2}^{\,4} = \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = a^2\sqrt[3]{a^2}$

anders: $\sqrt[3]{a^2}^{\,4} = \sqrt[3]{a^2}^{\,3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

f) $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{|a|}^{\,2}$; $\sqrt[n]{a^{2k}} = \sqrt[n]{|a|}^{\,2k}$; $\sqrt[n]{a^{2k+1}} = \sqrt[n]{a}^{\,2k+1} \, (a^{2k+1} \geqq 0)$

Aufgaben d 50 bis 53

Rationalmachen des Nenners

12

Die Berechnung von Näherungswerten für die Zahl $\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{z. B. } \frac{5}{\sqrt{2}} \approx \frac{5}{1{,}4142}\right)$ läßt sich vereinfachen, wenn man den Bruch $\frac{5}{\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{2}$ erweitert:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 2{,}5 \cdot 1{,}4142.$$

Durch das Erweitern haben wir einen Bruch erhalten, dessen Nenner rational ist. Wir sagen deshalb: *Wir haben den Nenner des Bruches $\frac{5}{\sqrt{2}}$ rational gemacht.*

17 Die Nenner folgender Brüche sind rational zu machen.

a) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$. Durch Erweitern mit $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ erhält man:

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7+2\sqrt{35}+5}{7-5} = \frac{12+2\sqrt{35}}{2}$$
$$= 6+\sqrt{35}$$

b) $\frac{5}{\sqrt[5]{2}}$. Diesen Bruch erweitern wir mit $\sqrt[5]{2^4}$:

$$\frac{5}{\sqrt[5]{2}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{5}{2}\sqrt[5]{2^4}$$

18 Der Bruch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a>0)$ ist so zu erweitern, daß im Nenner des erweiterten Bruches kein Wurzelzeichen auftritt.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Wir sagen auch hier: Wir haben den Nenner des Bruches $\frac{1}{\sqrt{a}}$ rational gemacht, obwohl $\sqrt{a}$ auch eine rationale Zahl sein kann.
Kommen im Nenner eines Bruches Wurzelzeichen vor, so sprechen wir ganz allgemein vom Rationalmachen des Nenners, wenn es gelingt, durch Erweitern einen Bruch zu erhalten, dessen Nenner keine Wurzelzeichen enthält.

D

19 $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ $(b \geqq 0;\ c \geqq 0;\ b \neq c)$

Durch Erweitern mit $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ erhält man:

$$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

Aufgaben d 54 und 55

Wurzelfunktionen

13

Nach Satz D8 existiert zu jeder nichtnegativen reellen Zahl x genau eine nichtnegative reelle Zahl y, für die $y=\sqrt{x}$ gilt. Demzufolge können wir für $x \geqq 0$ die Menge f aller geordneten Paare

$[x, y] = [x, \sqrt{x}]$

bilden. Da zu jedem $x \geqq 0$ genau eine Zahl $y=\sqrt{x}$ existiert, ist f eine Funktion.

Diese Funktion f ist eine **nichtrationale Funktion**. Ihre Gleichung lautet:

$$y = \sqrt{x} \ (x \geqq 0) \quad \text{oder} \quad f(x) = \sqrt{x} \ (x \geqq 0).$$

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist für alle nichtnegativen reellen Zahlen definiert. Ihr Wertevorrat enthält alle nichtnegativen reellen Zahlen.
Sind x_1 und x_2 zwei positive Zahlen, für die $x_1 < x_2$ gilt, so ist

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}.$$

Beweis: Wir nehmen an, es gelte für $0 < x_1 < x_2$

$$\sqrt{x_1} \geqq \sqrt{x_2}.$$

Da $\sqrt{x_1}$ und $\sqrt{x_2}$ positive Zahlen sind, folgt:

$$\sqrt{x_1}^2 \geqq \sqrt{x_2}^2 \quad \text{bzw.} \quad x_1 \geqq x_2$$

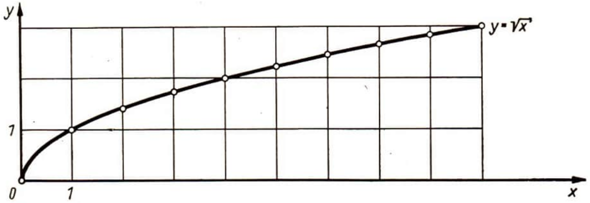
im Widerspruch zu $x_1 < x_2$.

Außerdem ist $f(0) = \sqrt{0} = 0$.

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist also im gesamten Definitionsbereich eine monoton wachsende Funktion.

(10) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \sqrt{x}$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 9$ bei ganzzahligem x auf!

Das Bild D7 zeigt das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 9$. Die Kurve verläuft nur im ersten Quadranten und steigt ständig.



D 7

(11) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = -\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 9$!

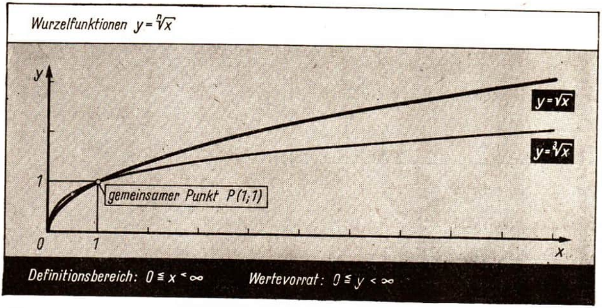
Analog können wir für jede positive ganze Zahl n die Menge aller geordneten Paare $[x; \sqrt[n]{x}]$ bilden, wenn x eine nichtnegative Zahl ist. Für jede ganze Zahl $n \geqq 2$ erhalten wir eine irrationale Funktion:

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \ (x \geqq 0).$$

(12) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 9$ auf, und zeichnen Sie das Bild der Funktion in diesem Intervall!
Beweisen Sie, daß $y = \sqrt[3]{x}$ eine monoton wachsende Funktion ist!

Wir vergleichen die Bilder der Funktionen

$y = x^{\frac{1}{2}}$ $(x \geqq 0)$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ $(x \geqq 0)$ miteinander (Bild D 8)!



D 8

Ist $x > 1$, so gilt $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ und
ist $0 < x < 1$, so gilt $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$ (siehe Regel (5) im Satz D 12).
Für die Argumente 0 und 1 stimmen die Werte beider Funktionen überein.

Aufgaben d 56 und 57

D

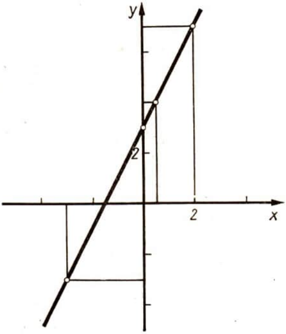
Eineindeutige Funktionen

14

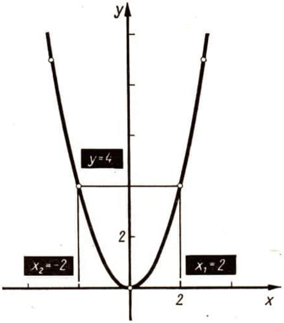
Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich M_1 und dem Wertevorrat M_2. Zu jedem Element x des Definitionsbereiches M_1 gibt es **genau** ein Element y des Wertevorrats M_2, so daß $[x; y] \in f$ gilt. Aus $x_1 = x_2$ folgt also stets $f(x_1) = f(x_2)$.
Bei der Funktion $f_1(x) = 2x + 3$ (Bild D9) existiert auch umgekehrt zu jedem Funktionswert y genau ein Argument x, so daß $[x; y] \in f_1$ gilt. Bei der Funktion $f_2(x) = x^2$ (Bild D10) gibt es dagegen zu jedem Funktionswert y mit Ausnahme von $y = 0$ zwei verschiedene Argumente x_1 und x_2, so daß gilt $[x_1; y] \in f_2$ und $[x_2; y] \in f_2$. So ist beispielsweise $f_2(2) = f_2(-2) = 4$.

13 **DEFINITION: Eine Funktion f heißt *eineindeutig* genau dann, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.**

Die Funktion $f_1(x) = 2x + 3$ ist eine eineindeutige Funktion. Schränken wir die Funktion $f_2(x) = x^2$ (x reell) auf die Teilmenge der nicht negativen reellen Zahlen ein, so erhalten wir die eineindeutige Funktion $f(x) = x^2$ mit $x \geqq 0$.[1]



D 9



D 10

14 **SATZ: Jede monotone Funktion f ist eineindeutig.**

Beweis: Wir nehmen an, f sei eine monoton wachsende Funktion. Es möge gelten: (1) $f(x_1) = f(x_2)$.

Wir haben zu zeigen, daß dann auch $x_1 = x_2$ ist. Wäre nun $x_1 \neq x_2$, so müßte entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$ gelten. Da f monoton wächst, wäre dann entweder $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_1) > f(x_2)$ im Widerspruch zur Gleichung (1). Also folgt aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$, womit die Eineindeutigkeit gezeigt ist.

13 Führen Sie den Beweis für den Fall, daß f eine monoton abnehmende Funktion ist!

Ist f eine eineindeutige Funktion, so schneidet jede Parallele zur x-Achse das Bild der Funktion in **höchstens** einem Punkt.

14 Welche der Funktionen

a) $y = x^3$, **b)** $y = x^4$, **c)** $y = |x|$, **d)** $y = x^{\frac{1}{2}}$, $(x \geqq 0)$

sind eineindeutig?

[1] Die Funktionen f_2 und f sind nicht identisch, denn f ist nur eine Teilmenge von f_2.

20 Gegeben sei die Funktion

$$f = \left\{[-3;\, -3],\, [0;\, 3],\, \left[\frac{1}{2};\, 4\right],\, [2;\, 7]\right\}$$

mit dem Definitionsbereich $M_1 = \left\{-3;\, 0;\, \frac{1}{2};\, 2\right\}$ und dem Wertevorrat $M_2 = \{-3;\, 3;\, 4;\, 7\}$. Da f eine eineindeutige Funktion ist, ist auch

$$\bar{f} = \left\{[-3;\, -3],\, [3;\, 0],\, \left[4;\, \frac{1}{2}\right],\, [7;\, 2]\right\}$$

eine Funktion. Die Funktion $\bar{f}$ erhalten wir, wenn wir die durch die Funktion f vermittelte Zuordnung umkehren, d. h., wenn wir in *jedem* geordneten Paar $[x; y]$, das zu f gehört, die Zahlen x und y miteinander vertauschen.
Demnach gilt:

Ist $[x; y] \in f$, so ist $[y; x] \in \bar{f}$ und ist $[y; x] \in \bar{f}$, so ist $[x; y] \in f$.
Also:

$[y; x] \in \bar{f}$ genau dann, wenn $[x; y] \in f$.

Die Funktionswerte der Funktion f sind die Argumente der Funktion $\bar{f}$, und die Argumente der Funktion f sind die Funktionswerte der Funktion $\bar{f}$. Die Funktion $\bar{f}$ hat also als Definitionsbereich die Menge M_2 und als Wertevorrat die Menge M_1. Die Gleichung für die Funktion f lautet: $y = 2x + 3$ mit $x \in \left\{-3;\, 0;\, \frac{1}{2};\, 2\right\}$. Die Funktion $\bar{f}$ läßt sich ebenfalls durch diese Gleichung (implizit) darstellen. Doch ist es zweckmäßig, die Gleichung für die Funktion $\bar{f}$ in der expliziten Form anzugeben:

$$x = \frac{1}{2}(y - 3), \quad y \in \{-3;\, 3;\, 4;\, 7\}.$$

Eineindeutige Funktionen nennt man auch **umkehrbare Funktionen.**

21 Gegeben sei die eineindeutige Funktion $f(x) = x^2$, $(x \geqq 0)$. Die Tabelle (1) enthält einige geordnete Paare $[x; y]$ der Funktion f.

(1)

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	2,5	$\sqrt{7}$	5 …
y	0	$\frac{1}{4}$	1	4	6,25	7	25 …

Wir vertauschen die Zahlen in diesen Paaren miteinander:

(2)

y	0	$\frac{1}{4}$	1	4	6,25	7	25 …
x	0	$\frac{2}{1}$	1	2	2,5	$\sqrt{7}$	5 …

Auch die durch die zweite Tabelle dargestellte Menge $\bar{f}$ von geordneten Paaren $[y; x]$ ist eine Funktion, die sich durch die Gleichung $\bar{f}(y) = \sqrt{y}$, $(y \geqq 0)$ darstellen läßt; denn zu jeder nichtnegativen reellen Zahl y existiert genau eine nichtnegative reelle Zahl x, für die $x = \sqrt{y}$ gilt. Das geordnete Paar

$$[y;\, x] = [y;\, \sqrt{y}], \quad (y \geqq 0)$$

gehört genau dann zur Funktion $\bar{f}$, wenn das geordnete Paar

$$[x;\, y] = [x;\, x^2], \quad (x \geqq 0)$$

zur Funktion f gehört.

15 **DEFINITION: Unter der Umkehrfunktion oder inversen Funktion $\bar{f}$ zu einer eineindeutigen Funktion f mit dem Definitionsbereich M_1 und dem Wertevorrat M_2 versteht man die Menge aller und nur der geordneten Paare $[y;\, x]$, für die $[x;\, y] \in f$ gilt ($x \in M_1$, $y \in M_2$). $\bar{f}$ hat den Definitionsbereich M_2 und den Wertevorrat M_1.**

Ist eine eineindeutige Funktion f durch eine Gleichung

$$y = f(x)$$

dargestellt, so erhält man die explizite Form

$$x = \bar{f}(y)$$

der Gleichung ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst, falls diese Auflösung möglich ist.
Da es üblich ist, die Argumente einer Funktion mit „x" und die Funktionswerte mit „y" zu bezeichnen, wollen wir in der Gleichung $x = \bar{f}(y)$ die Variablen umbenennen. Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$y = \bar{f}(x).$$

Durch die Umbenennung der Variablen wird die Funktion nicht geändert, denn die Zuordnung, die durch eine gegebene Funktion vermittelt wird, hängt nicht von der Wahl der Bezeichnung der Variablen ab. So ist beispielsweise die Menge aller geordneten Paare

$$[y;\, \sqrt{y}], \quad (y \geqq 0)$$

identisch mit der Menge aller geordneten Paare

$$[u;\, \sqrt{u}],\ (u \geqq 0); \quad [x;\, \sqrt{x}],\ (x \geqq 0).$$

Oder: Die Funktionen

$$y = 3x - 5, \quad (x \text{ reell}); \quad u = 3v - 5, \quad (v \text{ reell}); \quad x = 3y - 5, \quad (y \text{ reell})$$

sind identisch, da sie die gleichen geordneten Paare enthalten.

(15) a) Bilden Sie zu der Funktion $\bar{f}$ im Beispiel 20 die Umkehrfunktion $\bar{\bar{f}}$!
b) Überlegen Sie sich, daß stets folgender Satz gilt:

SATZ: Die zu $\bar{f}$ inverse Funktion $\bar{\bar{f}}$ ist die ursprüngliche Funktion f.

Man sagt deshalb auch: Die Funktionen f und $\bar{f}$ sind zueinander invers.

Aufgaben d 58 bis 61

Umkehrung der Potenzfunktionen

16

Zu der Funktion	gehört als Umkehrfunktion die Funktion	bzw. nach Umbenennung der Variablen
$y = x^2,\ (x \geqq 0)$	$x = \sqrt{y},\ \ (y \geqq 0)$	$y = \sqrt{x},\ \ (x \geqq 0)$
$y = x^2,\ (x \leqq 0)$	$x = -\sqrt{y},\ \ (y \geqq 0)$	$y = -\sqrt{x},\ \ (x \geqq 0)$
$y = x^3,\ (x \geqq 0)$	$x = \sqrt[3]{y},\ \ (y \geqq 0)$	$y = \sqrt[3]{x},\ \ (x \geqq 0)$
$y = x^3,\ (x \leqq 0)$	$x = -\sqrt[3]{-y},\ \ (y \leqq 0)$	$y = -\sqrt[3]{-x},\ \ (x \leqq 0)$

Die Potenzfunktionen $y = x^n$ mit positiven ganzzahligen Exponenten sind für $x \geqq 0$ (für $x \leqq 0$) monoton und damit umkehrbar. Zu jeder Funktion $y = x^n$ (n positiv ganz) existiert somit für $x \geqq 0$ (für $x \leqq 0$) die Umkehrfunktion:

$f\colon\ y = x^n$	Definitionsbereich von f	Wertevorrat von f	$\bar{f}$	Definitionsbereich von $\bar{f}$	Wertevorrat von $\bar{f}$
a) $n = 2m$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$	$y = \sqrt[n]{x}$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$
	$x \leqq 0$	$y \geqq 0$	$y = -\sqrt[n]{x}$	$x \geqq 0$	$y \leqq 0$
b) $n = 2m + 1$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$	$y = \sqrt[n]{x}$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$
	$x \leqq 0$	$y \leqq 0$	$y = -\sqrt[n]{-x}$	$x \leqq 0$	$y \leqq 0$

Die in der Tabelle aufgeführten Funktionen f und $\bar{f}$ sind zueinander invers.

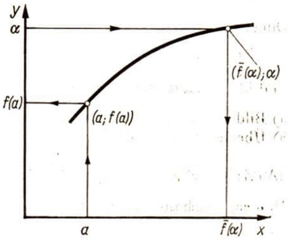
Aufgaben d 62 bis 65

Bilder zueinander inverser Funktionen

17

Das Bild einer eineindeutigen Funktion $y = f(x)$ veranschaulicht zugleich den Verlauf ihrer Umkehrfunktion $x = \bar{f}(y)$, wenn man es auf die y-Achse als Argumentachse bezieht. Ein und dieselbe Kurve stellt dann zwei verschiedene Funktionen dar (Bild D 11).

D 11



Durch die Umbenennung der Variablen, d. h., durch den Übergang von $x = \bar{f}(y)$ zu $y = \bar{f}(x)$ ist es möglich, die Bilder beider Funktionen – wie es üblich ist – auf die x-Achse zu beziehen.

(16) Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = x^2$, $(x \geqq 0)$ und $y = \sqrt{x}$, $(x \geqq 0)$ zusammen mit dem Bild der Funktion $y = x$ in dasselbe Koordinatensystem! Vergleichen Sie die Bilder der Funktionen $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ miteinander!

(17) Führen Sie dieselbe Aufgabe für die folgenden Funktionen durch!

$y = x^3$, $(x \leqq 0)$ und $y = -\sqrt[3]{-x}$, $(x \leqq 0)$

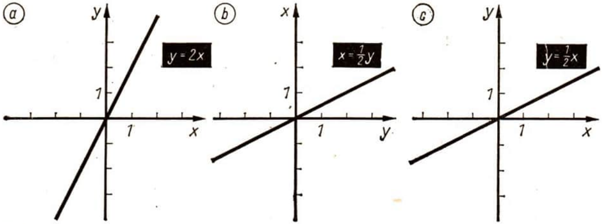
17 **SATZ: Die Bilder zweier zueinander inverser Funktionen $y = f(x)$ und $y = \bar{f}(x)$ liegen axialsymmetrisch zur Geraden $y = x$.**

Beweis: Es ist $P(a; b)$ ein Punkt des Bildes der Funktion f genau dann, wenn $\bar{P}(b; a)$ ein Punkt des Bildes der Funktion $\bar{f}$ ist. Es sei nun $P(a; b)$ ein beliebiger Punkt des Bildes von f. Wir haben zu zeigen, daß die Punkte $P(a; b)$ und $\bar{P}(b; a)$ axialsymmetrisch zur Geraden $y = x$ liegen.

(18) Führen Sie den Beweis für den Fall, daß $a \neq b$ ist! Warum genügt diese Einschränkung?

Aus Satz 17 folgt: Spiegelt man das Bild einer umkehrbaren Funktion f an der Geraden $y = x$, so erhält man das Bild der zu ihr inversen Funktion $\bar{f}$.

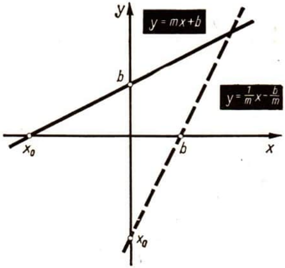
(19) Erklären Sie die Bilder D 12 a bis c!



D 12

(20) Das Bild D 13 zeigt, wie man aus dem Bild einer linearen Funktion $y = mx + b$, $(m \neq 0)$ das Bild der zu ihr inversen Funktion $y = \dfrac{1}{m}x - \dfrac{b}{m}$ gewinnen kann.

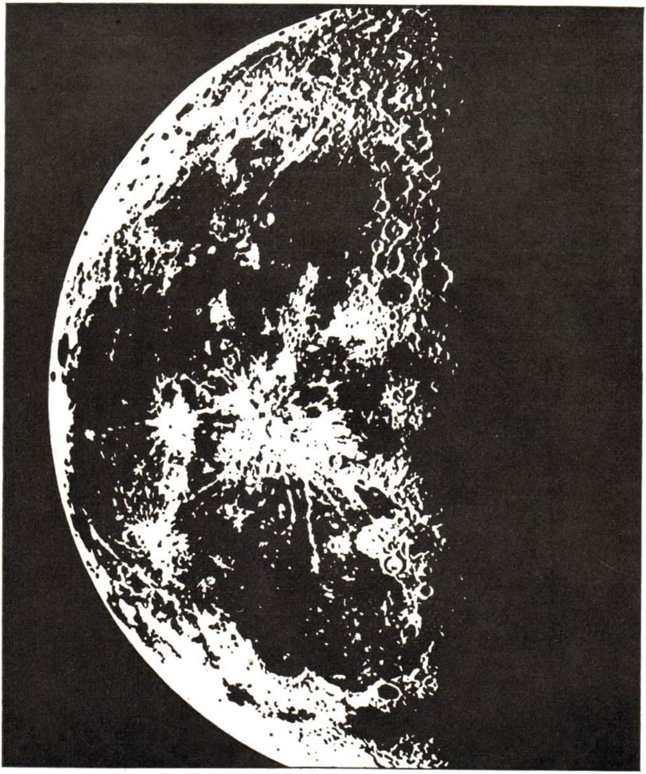
Erläutern Sie die Abbildung!



D 13

Aufgabe d 66

D



E

Körper unterschiedlicher Form und Zusammensetzung fallen unterschiedlich schnell zur Erde; denn die Luft beeinflußt den Fall. Auf dem Mond, der keine Atmosphäre besitzt, wird das Fallen nicht behindert, es kann durch die quadratische Funktion $s = 0{,}5\,gt^2$ beschrieben werden. Eine weiche Landung auf dem Mond, die erstmalig dem sowjetischen Raumkörper „Luna 9" gelang, kann deshalb nicht mit dem Fallschirm unterstützt werden.

E. Quadratische Funktionen und Gleichungen

Zur Wiederholung

1

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist eine spezielle Potenzfunktion (vgl. die Lerneinheiten C 2 und 3).

a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle reellen Zahlen definiert. Ihr Wertevorrat ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen; denn für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geqq 0$, und andererseits ist jede nichtnegative reelle Zahl Funktionswert der Funktion, da jede solche Zahl das Quadrat mindestens einer reellen Zahl ist.

b) Der kleinste Funktionswert der Funktion ist $f(0) = 0$.

c) Für $x \leqq 0$ fällt die Funktion monoton, für $x \geqq 0$ wächst sie monoton.

d) $f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion, denn es gilt stets $f(-x) = f(x)$.

Das Bild der Funktion $f(x) = x^2$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit gleicher Achsenteilung (Bild E 1) nennt man **Normalparabel.** Die Parabel ist axialsymmetrisch zur y-Achse. Die Symmetrieachse der Parabel nennt man kürzer die **Achse der Parabel.** Den Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Achse nennt man den **Scheitel der Parabel.** Der Scheitel der Normalparabel ist der tiefste Kurvenpunkt. Er liegt im Koordinatenanfangspunkt. Wir werden im folgenden der Einfachheit halber von der Normalparabel oder von der Parabel $y = x^2$ sprechen, wenn wir das Bild der Funktion $y = x^2$ meinen.

(1) Stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $y = -x^2$ (x reell) zusammen, und beschreiben Sie den Verlauf des Bildes der Funktion! Vergleichen Sie das Bild mit der Parabel $y = x^2$!

E

(2) Fertigen Sie von der Normalparabel eine Schablone an! Wählen Sie als Einheit 1 cm!

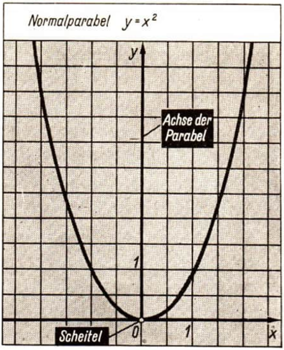
Wir nennen die Funktion $y = x^2$ eine **quadratische Funktion** oder eine **Funktion zweiten Grades,** weil in der Gleichung „$y = x^2$" das Argument x in der zweiten Potenz vorkommt. Andere Beispiele für quadratische Funktionen sind:

$y = x^2 - 3,\qquad y = 2x^2 + 5,$

$y = 3x^2 + 4x - 7,$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \sqrt{2},$

wobei x eine beliebige reelle Zahl ist.



E 1

DEFINITION: Eine Funktion f heißt eine Funktion zweiten Grades, wenn es reelle Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ gibt, so daß für alle Argumente x gilt: $f(x) = ax^2 + bx + c$.[1]

Es heißen:

$y = ax^2 + bx + c$	die **allgemeine Form der Gleichung einer quadratischen Funktion,**
ax^2; bx; c	(in dieser Reihenfolge) das **quadratische,** das **lineare,** das **absolute Glied** der Gleichung.

a, b und c sind **Parameter,** die beliebige Werte annehmen können mit der Ausnahme, daß a nicht Null sein darf.[2]

(3) Für welche Koeffizienten a, b und c erhält man aus der allgemeinen Form folgende Spezialfälle: $y = x^2$, $y = x^2 + e$, $y = ax^2$, $(a \neq 0)$?

E

Aufgaben e 1 bis 7

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = (x + d)^2$, (d reell)

2

(4) **a)** Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $f_1(x) = (x - 3)^2$ und $f_2(x) = (x + 4)^2$ auf, und zeichnen Sie die Bilder dieser Funktionen sowie das Bild der Funktion $f(x) = x^2$ in dasselbe Koordinatensystem! (Zeichnen Sie das Bild der Funktion f_1 im Intervall $0 \leq x \leq 6$ und das Bild der Funktion f_2 im Intervall $-7 \leq x \leq -1$!)

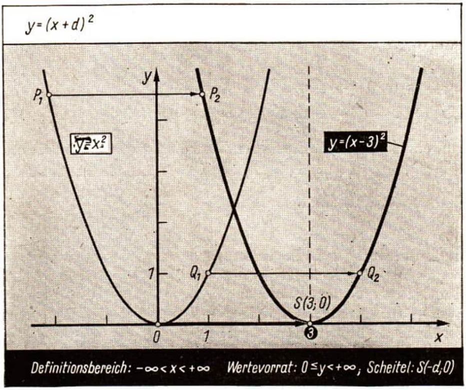
[1] Der Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen oder eine Teilmenge dieser Menge.
[2] Vgl. die Bemerkungen über Parameter in der Lerneinheit B 3!

b) Welchen Argumenten wird durch die Funktion **α)** $f(x) = x^2$,
β) $f_1(x) = (x - 3)^2$ der Funktionswert 4 zugeordnet? (Entnehmen Sie die Argumente aus der Wertetafel!)

Es sei x_1 ein beliebiges Argument. Der Funktionswert der Funktion $f(x) = x^2$ an dieser Stelle ist $f(x_1) = x_1^2$. Den gleichen Funktionswert erhalten wir bei der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ für das Argument $x_1 + 3$, denn es ist

$f_1(x_1 + 3) = (x_1 + 3 - 3)^2 = x_1^2$.

Für die Bilder dieser Funktionen bedeutet das: Das Bild der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ ist der Parabel $y = x^2$ kongruent. Man erhält dieses Bild, indem man die Parabel $y = x^2$ um drei Einheiten in der positiven Richtung der x-Achse verschiebt. Im Bild E 2 sind für einige Punkte der Parabel $y = x^2$ die Pfeile eingezeichnet, die zu dieser Verschiebung gehören.
Der Scheitel der Parabel $y = (x - 3)^2$ ist der Punkt S mit den Koordinaten $x_S = 3$ und $y_S = 0$.



E 2

5 Stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ zusammen!

Allgemein gilt für jede quadratische Funktion $f(x) = (x + d)^2$, (d reell):

Für ein beliebiges Argument x_1 hat die Funktion $y = x^2$ den Funktionswert $y_1 = x_1^2$. Den gleichen Funktionswert haben alle Funktionen $f(x) = (x + d)^2$ für das Argument $x_1 - d$; denn es ist $(x_1 - d + d)^2 = x_1^2$.

Daraus folgt:
Die Bilder der Funktionen $f(x) = (x + d)^2$, (d reell) sind Parabeln, die der Normalparabel kongruent sind. Die Scheitelkoordinaten der Parabeln sind $x_S = -d$ und $y_S = 0$. Die Achsen der Parabeln sind die Geraden $x = -d$. Man erhält die Parabeln $y = (x + d)^2$ durch Verschiebung der Parabel $y = x^2$ um $|d|$ Einheiten parallel zur x-Achse. Die Verschiebung erfolgt in der positiven (negativen) Richtung der x-Achse, wenn $d < 0$ ($d > 0$) ist.

Jede Funktion $f(x) = (x + d)^2$ hat als kleinsten Funktionswert $f(-d) = 0$. Der Wertevorrat jeder solchen Funktion enthält alle nichtnegativen reellen Zahlen. Alle diese Funktionen fallen für $x \leqq -d$ und wachsen für $x \geqq -d$ monoton.

(6) **a)** Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = x^2 - 3x + 2{,}25$, nachdem Sie d ermittelt haben!

b) Wie erhält man die Gleichung $y = (x + d)^2$ aus der allgemeinen Form?

Aufgaben e 8 und 9

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = (x + d)^2 + e$ (d, e reell)

3

---

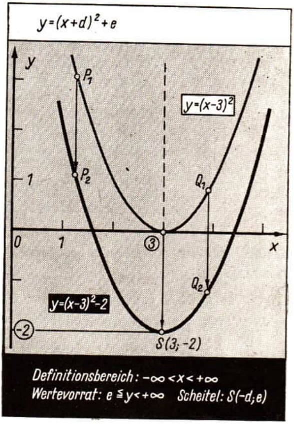
(7) Wie erhält man die Bilder der Funktionen $y = x^2 + e$, (e reell) aus der Parabel $y = x^2$?

(8) Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen

$$f_1(x) = (x - 3)^2 - 2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x + 4)^2 + 3$$

auf, und zeichnen Sie die Bilder dieser Funktionen sowie die Bilder der Funktionen $f_3(x) = (x - 3)^2$ und $f_4(x) = (x + 4)^2$ in dasselbe Koordinatensystem!

Für jedes Argument x ist der Funktionswert der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2 - 2$ um 2 kleiner als der Funktionswert der Funktion $f_3(x) = (x - 3)^2$. Demnach ist $f_1(3) = -2$ der kleinste Funktionswert der Funktion f_1. Der Wertevorrat von f_1 enthält alle reellen Zahlen y, für die $y \geqq -2$ gilt. Das Bild der Funktion f_1 erhalten wir durch Verschiebung der Parabel $y = (x - 3)^2$ um zwei Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse. Daraus folgt: Das Bild der Funktion f_1 ist eine Parabel, die der Normalparabel kongruent ist. Der Scheitel S dieser Parabel hat die Koordinaten $x_S = 3$ und $y_S = -2$. Ihre Achse fällt mit der Achse der Parabel $y = (x - 3)^2$ zusammen (Bild E 3). Demnach erhalten wir das Bild der Funktion f_1, indem wir die Parabel $y = x^2$ nacheinander um drei Einheiten in der positiven Richtung der x-Achse und dann um zwei Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse verschieben.



E 3

Allgemein gilt für jede Funktion $f(x) = (x + d)^2 + e$, (d, e reell):
Die Bilder dieser Funktionen sind Parabeln, die der Parabel $y = x^2$ kongruent sind. Die Scheitelkoordinaten sind $x_S = -d$ und $y_S = e$. Die Achsen der Parabeln sind der y-Achse parallel und schneiden die x-Achse bei $x_S = -d$.
Jede solche Funktion hat einen kleinsten Funktionswert, nämlich $f(-d) = e$. Der Wertevorrat enthält stets alle reellen Zahlen y, für die $y \geqq e$ gilt. Jede Funktion $f(x) = (x + d)^2 + e$ fällt für $x \leqq -d$ und wächst für $x \geqq -d$ monoton.

Aufgaben e 10 bis 13

Nullstellen quadratischer Funktionen

4

---

2 **DEFINITION: Ein Argument x_1 ist Nullstelle einer Funktion f genau dann, wenn gilt $f(x_1) = 0$.**

Ist x_1 eine reelle[1] Nullstelle der Funktion f, so schneidet oder berührt das Bild der Funktion f an der Stelle x_1 die x-Achse.
Aus dem Bild E 3 ist zu entnehmen, daß die Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2 - 2$ zwei reelle Nullstellen hat. Aus der Zeichnung erhält man für diese Nullstellen x_1 und x_2 die Näherungswerte $x_1 \approx 1{,}6$ bzw. $x_2 \approx 4{,}4$.
Während jede lineare Funktion $y = mx + b$ für $m \neq 0$ genau eine Nullstelle hat, können quadratische Funktionen auch zwei Nullstellen haben.

(9) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = (x + 1{,}5)^2 - 2{,}8$, und ermitteln Sie Näherungswerte für die Nullstellen der Funktion!

3 **SATZ: Eine Funktion $y = (x + d)^2 + e$, (d, e reell) hat genau dann reelle Nullstellen, wenn $e \leqq 0$ ist.**

(10) Beweisen Sie Satz E 3!

Aufgaben e 14 bis 20

E

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = x^2 + px + q$, (p, q reell)

5

Die Funktion

(1) $y = (x - 3)^2 - 2$

ist mit der Funktion

(2) $y = x^2 - 6x + 7$

identisch, denn es ist $(x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$.

[1] Reelle Nullstelle heißt Nullstelle im Bereich der reellen Zahlen. Es gibt noch einen umfassenderen Zahlenbereich, in dem jede quadratische Funktion Nullstellen hat!

Die Gleichung (1) ermöglicht u. a. das sofortige Ablesen der Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = (x - 3)^2 - 2$, nämlich $S(3; -2)$.
Jede quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e$, (d, e reell) läßt sich in der Form $y = x^2 + px + q$, (p, q reell) darstellen, wenn man

$$2d = p \quad \text{und} \quad d^2 + e = q$$

setzt. Die Gleichung „$y = x^2 + px + q$" heißt die **Normalform der quadratischen Funktionen.** Ist eine quadratische Funktion in der Normalform gegeben, so kann man sie stets durch eine Gleichung der Form $f(x) = (x + d)^2 + e$ darstellen, indem man $p = 2d$ und $q = d^2 + e$ setzt. Man kann aber auch zu $x^2 + px$ die *quadratische Ergänzung* bilden (vgl. Lerneinheit A 16) und diese auf der rechten Seite der Gleichung $y = x^2 + px + q$ addieren und subtrahieren. Nach der zuletzt genannten Methode erhält man:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \boxed{\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}} + q$$

bzw.

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Aus diesen Betrachtungen folgt:
Jede quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$, (p, q reell) hat als Bild eine Parabel, die der Parabel $y = x^2$ kongruent ist. Die Koordinaten des Scheitels S einer solchen Parabel sind

$$x_S = -\frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y_S = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Weiter gilt:

Jede Funktion $y = x^2 + px + q$, (p, q reell) nimmt an der Stelle $x_S = -\frac{p}{2}$ ihren kleinsten Funktionswert $y_S = q - \frac{p^2}{4}$ an. Für $x \leqq -\frac{p}{2}$ fallen alle diese Funktionen monoton, und für $x \geqq -\frac{p}{2}$ wachsen sie monoton.

1 Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + 5x + 4$ sind näherungsweise aus dem Bild zu ermitteln.

a) Wir bestimmen die Koordinaten des Scheitels S der Parabel $y = x^2 + 5x + 4$. Es ist

$$p = 5 \quad \text{und} \quad q = 4.$$

Dann gilt

$$x_S = -\frac{p}{2} = -\frac{5}{2} \quad \text{und} \quad y_S = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{4}\right) = -\frac{9}{4}$$

Also:

$$S\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$$

b) Wir zeichnen die Parabel
$y = x^2 + 5x + 4$.
Wir lesen aus der Zeichnung (Bild E 4) die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse ab:

$x_1 \approx -4$ und $x_2 \approx -1$.

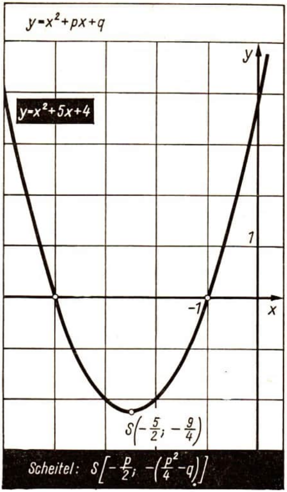
Berechnet man die Funktionswerte für die abgelesenen Näherungswerte, so erhält man $f(-4) = f(-1) = 0$, so daß wir sagen können: Die Nullstellen der Funktion

$f(x) = x^2 + 5x + 4$ sind

$x_1 = -4$ und $x_2 = -1$.

Analog zum Satz E 3 gilt:

4 **SATZ: Eine Funktion $y = x^2 + px + q$ (p, q reell) hat genau dann reelle Nullstellen, wenn gilt $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$.**



E 4

Aufgaben e 21 bis 40

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$, (a, b, c reell, $a \neq 0$)

6

(11) Wie entstehen die Bilder der Funktionen $y = ax^2$ mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ aus der Parabel $y = x^2$? Hinweis: Führen Sie folgende Fallunterscheidung durch:
a) $a > 1$, **b)** $0 < a < 1$, **c)** $a < 0$! (Vgl. Sie mit der Lerneinheit C 6!)
Für welche a haben die Funktionen einen kleinsten und für welche a einen größten Funktionswert?

Die Bilder der Funktionen $f(x) = ax^2$, ($a \neq 0$) heißen auch für $a \neq 1$ Parabeln.
Jede quadratische Funktion

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

läßt sich auch durch

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ bzw. durch

(2) $f(x) = a(x^2 + px + q)$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ darstellen.

Setzen wir

(3) $g(x) = x^2 + px + q$, so gilt

(4) $f(x) = ag(x)$, $(a \neq 0)$.

Die Bilder der Funktionen (3) sind Parabeln, die der Normalparabel kongruent sind. Ihre Scheitel haben die Koordinaten

$$x_S = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_S = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Statt (4) können wir auch schreiben:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Es sei nun $f(x) = a \cdot g(x)$, $(a \neq 0)$ eine beliebige quadratische Funktion. Für ein beliebiges Argument x erhalten wir den Funktionswert dieser Funktion, indem wir den zu diesem Argument gehörenden Funktionswert der Funktion g mit a multiplizieren. Damit wissen wir auch, wie wir das Bild der Funktion f aus dem bereits vorliegenden Bild der Funktion g erhalten:

Ist $a > 1$, so werden alle Ordinaten der zur Funktion g gehörenden Parabel im Verhältnis $a : 1$ in Richtung der y-Achse gestreckt. Man erhält eine Parabel, die steiler verläuft als die Normalparabel.

Ist $0 < a < 1$, so werden alle Ordinaten der zur Funktion g gehörenden Parabel im Verhältnis $a : 1$ in Richtung der y-Achse gestaucht. Man erhält eine Parabel, die flacher verläuft als die Normalparabel.

Ist $a < 0$, so wird nach der Streckung bzw. Stauchung der zur Funktion g gehörenden Parabel noch eine Spiegelung an der x-Achse durchgeführt. Die Bilder der Funktionen g und f haben die gleiche Achse, nämlich die Gerade $x = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a}$.

2 Das Bild der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{13}{2}$ ist zu zeichnen.

1. Wir formen die Funktionsgleichung wie folgt um:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 13) = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16 + 13)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}[(x - 4)^2 - 3].$$

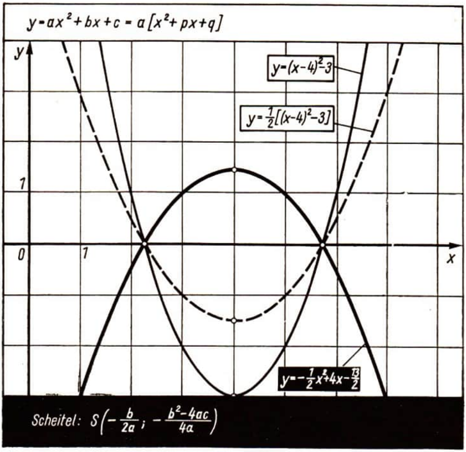
2. a) Wir zeichnen das Bild der Funktion $g(x) = (x - 4)^2 - 3$ mit Hilfe der Schablone.

b) Alle Ordinaten der Parabel $y = (x - 4)^2 - 3$ werden im Verhältnis $1 : 2$ gestaucht (d. h.: sie werden halbiert).

c) Die so erhaltene Parabel wird an der x-Achse gespiegelt (Bild E 5).

Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, (a, b, c, reell; $a \neq 0$) hat als Bild eine Parabel, die einer gestreckten oder gestauchten Normalparabel kongruent ist. Der Scheitel S dieser Parabel hat die Koordinaten $x_S = -\frac{b}{2a}$ und $y_S = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Die Achse der Parabel ist die Parallele zur y-Achse, die die x-Achse an der Stelle x_S schneidet. Wegen $f(0) = c$ schneidet die Parabel die y-Achse im Punkt c.

E



E 5

Jede Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, (a, b, c reell; $a \neq 0$) hat für $a > 0$, ($a < 0$) an der Stelle $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ einen kleinsten (größten) Funktionswert. Ist $a > 0$, ($a < 0$), so nimmt die Funktion für $x \leqq -\dfrac{b}{2a}$ monoton ab (monoton zu) und für $x \geqq -\dfrac{b}{2a}$ monoton zu (monoton ab).

(12) Zeigen Sie, daß quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$, (a, b, c reell; $a \neq 0$) genau dann reelle Nullstellen haben, wenn $b^2 - 4ac \geqq 0$ ist!

3 Ein Körper, der zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat, bewege sich mit konstanter Beschleunigung a auf einer geradlinigen Bahn. Für den zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg $s(t)$ gilt

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t, \quad (t \geqq 0),$$

wenn der Weg s von dem Punkt aus gemessen wird, an dem der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ gewesen ist. (Reibung und Luftwiderstand werden nicht berücksichtigt.) Stellen wir den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Weg s graphisch dar, so erhalten wir ein Stück einer Parabel.

(13) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $s(t) = \dfrac{a}{2}t^2 + v_0 t$ für das Intervall $0\,\mathrm{s} \leqq t \leqq 10\,\mathrm{s}$ für $v_0 = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$ und $a = 5\ \mathrm{ms}^{-2}$! Wählen Sie geeignete Einheiten auf der t- und s-Achse!

Aufgaben e 41 bis 44

E

7

Wir suchen reelle Zahlen x, für die

(1) $(x-3)(x+1)=0$

gilt. Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann gleich Null ist, wenn (mindestens) einer der beiden Faktoren gleich Null ist, können wir sagen:
Es ist $(x-3)(x+1)=0$ genau dann, wenn $x-3=0$ oder $x+1=0$.
Oder:
Es ist $(x-3)(x+1)=0$ genau dann, wenn $x=3$ oder $x=-1$. Die Gleichung

(I) $(x-3)(x+1)=0$
ist also äquivalent mit

(II) $x=3$ **oder** $x=-1$.

Das heißt: Für eine beliebige Zahl x ist **entweder** *sowohl (I) als auch (II) wahr* **oder** es ist *sowohl (I) als auch (II) falsch*. Die Zahlen 3 und -1 sind die einzigen Zahlen, die die Gleichung (1) erfüllen.
Wegen $(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$ nennen wir die Gleichung (1) eine **quadratische Gleichung** oder eine **Gleichung zweiten Grades.** Wir haben also die quadratische Gleichung $x^2-2x-3=0$ gelöst. Ihre Lösungen sind $x=3$ und $x=-1$.

(14) Überzeugen Sie sich, daß es genau eine reelle Zahl x gibt, für die $(x+2)^2=0$ gilt!

Die **allgemeine Form der quadratischen Gleichung** mit einer Variablen lautet:

(2) $$\boxed{ax^2+bx+c=0,} \quad (a, b, c \text{ reell}; \; a \neq 0).$$

Der Variabilitätsbereich der Variablen x soll im folgenden stets die Menge der reellen Zahlen sein. Dividiert man die Gleichung (2) durch a, $(a \neq 0)$, so erhält man die **Normalform der quadratischen Gleichung.**

(3) $$\boxed{x^2+px+q=0 \quad \text{mit} \quad p=\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q=\frac{c}{a}}$$

E

Die Gleichungen (2) und (3) sind äquivalent, ihre Lösungsmengen sind demzufolge identisch.
Eine quadratische Gleichung erhält man u. a., wenn man die Nullstellen einer quadratischen Funktion

(4) $f(x)=ax^2+bx+c, \quad (a \neq 0)$

bzw.

(5) $f(x)=x^2+px+q, \quad \left(p=\frac{b}{a}; q=\frac{c}{a}\right)$

berechnen soll. Die Funktionen (4) und (5)[1], die in der Regel nicht gleich sind, (sie sind nur dann identisch, wenn $a=1$ ist) haben die gleichen Nullstellen, da die Gleichungen (2) und (3) äquivalent sind.

[1] Wir denken uns die Parameter a, b und c für den Augenblick fest gewählt.

So haben beispielsweise die Funktionen f und g im Beispiel 2 die gleichen Nullstellen (vgl. Bild E5).
Hat eine quadratische Gleichung die Form

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$, $(x_1, x_2$ reell),

so kann man ihre Lösungen sofort ablesen: Die Gleichung $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ hat die Lösungen $x = x_1$ und $x = x_2$.
Es ist im folgenden das Ziel, die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, (p, q reell) zu lösen, indem wir die Summe $x^2 + px + q$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$; $(x_1, x_2$ reell) verwandeln.
Wir müssen feststellen, wann eine solche Zerlegung in lineare Faktoren möglich ist, und ein Verfahren erarbeiten, das die gewünschte Zerlegung liefert. Die Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Summe $x^2 + px + q$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren $x - x_1$ und $x - x_2$ zu zerlegen.
In den Lerneinheiten E 8 und E 9 werden zunächst einige Spezialfälle behandelt.

Die Gleichung $x^2 + q = 0$, (q reell)

8

Aus der Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erhält man für $p = 0$ die Gleichung $x^2 + q = 0$, (q reell). Diese Gleichung nennt man **reinquadratische Gleichung.**
Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ können wir äquivalent umformen in

(4) $(x - 3)(x + 3) = 0$.

Durch diese Umformung ist die Summe $x^2 - 9$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren zerlegt worden.
Aus (4) liest man die Lösungen ab: $x = 3$ und $x = -3$. Man bezeichnet die Lösungen mit „x_1" und „x_2" (die Reihenfolge ist willkürlich) und schreibt: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ oder kürzer: $x_{1/2} = \pm 3$ (gelesen: x eins/zwei gleich plus bzw. minus drei).

(15) Welche Lösung hat die Gleichung $x^2 = 0$?

(16) Warum hat die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ keine reellen Lösungen?

Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ kann man auch folgendermaßen lösen:

Es ist $x^2 - 9 = 0$ äquivalent mit:	$x^2 = 9$.
Diese Gleichung ist äquivalent mit:	$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$,[1]
bzw. mit:	$\lvert x \rvert = 3$.

Demnach hat die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ die Lösungen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

5 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + q = 0$ hat genau dann reelle Lösungen, wenn $q \leqq 0$ ist.**

[1] Allgemein gilt: Sind a und b nicht negative Zahlen, so ist die Gleichung $a = b$ äquivalent mit $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

E

Es sei also $q \leqq 0$. Wir setzen $q = -r$, $(r \geqq 0)$ und erhalten:

(5) $x^2 - r = 0$.

Wegen $r = \sqrt{r} \cdot \sqrt{r}$ ist (5) äquivalent mit

(6) $(x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0$.

Die Gleichung (6) hat die Lösungen: $x_1 = \sqrt{r}$ und $x_2 = -\sqrt{r}$. Mit $r = -q$, $(-q \geqq 0)$ folgt: $x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$.

6 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + q = 0$ hat für $q < 0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$.**
Ist $q = 0$, hat die Gleichung die Lösung $x = 0$.

17 **a)** Lösen Sie die Gleichung $x^2 + q = 0$, $(q \leqq 0)$ nach dem auf Seite **119**, unten gezeigten Verfahren!

b) Wie müssen die Zahlen a und c beschaffen sein, damit die Gleichung $ax^2 + c = 0$, $(a \neq 0)$ reelle Lösungen hat?

4 **a)**

$$\begin{aligned}
(2x+6)^2 + (4x-3)^2 &= 125 \\
4x^2 + 24x + 36 + 16x^2 - 24x + 9 - 125 &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \\
(x+2)(x-2) &= 0 \\
x_1 &= 2 \qquad x_2 = -2
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{34}{15}$, $\quad (x \neq a;\ x \neq -a;\ a \neq 0)$

Durch äquivalente Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned}
15(x+a)^2 + 15(x-a)^2 &= 34(x^2 - a^2) \\
15(x^2 + 2ax + a^2) + 15(x^2 - 2ax + a^2) &= 34x^2 - 34a^2 \\
-4x^2 &= -64a^2 \\
x^2 &= 16a^2 \\
|x| &= 4\,|a| \\
x_1 &= 4a \qquad x_2 = -4a
\end{aligned}$$

Wir kontrollieren die Richtigkeit der Rechnung mit Hilfe der Probe.

$x_1 = 4a$, $(a \neq 0)$: $\dfrac{4a+a}{4a-a} + \dfrac{4a-a}{4a+a} = \dfrac{5a}{3a} + \dfrac{3a}{5a} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{34}{15}$

$x_2 = -4a$, $(a \neq 0)$: $\dfrac{-4a+a}{-4a-a} + \dfrac{-4a-a}{-4a+a} = \dfrac{-3a}{-5a} + \dfrac{-5a}{-3a} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{34}{15}$

Aufgaben e 45 bis 58

Aus der Normalform $x^2 + px + q = 0$ erhält man für $q = 0$ die Gleichung $x^2 + px = 0$, (p reell).
Die Gleichung $x^2 + \sqrt{7}x = 0$ können wir äquivalent umformen in $x(x + \sqrt{7}) = 0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\sqrt{7}$.
Entsprechend verfahren wir bei der Lösung der Gleichung

$x^2 + px = 0.$

Wir formen äquivalent um in

$x(x + p) = 0$

und erhalten die Lösungen

$x_1 = 0;\ x_2 = -p.$

7 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + px = 0$, (p reell) hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.**

5 In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse 2 cm länger als die größere Kathete, diese wiederum sei 2 cm länger als die kleinere Kathete. Wie lang sind die Dreiecksseiten?
Die Maßzahl der Länge der größeren Kathete werde mit x bezeichnet. Dann erhalten wir für die Maßzahl der Länge

der Hypotenuse: $x + 2$
der kleineren Kathete: $x - 2$.

Ansatz: Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$x^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2.$

Diese Gleichung formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 - 8x &= 0 \\ x(x - 8) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind:

$x_1 = 0$ und $x_2 = 8.$

Die Lösung $x_1 = 0$ scheidet aus, da die Maßzahl der Länge einer Dreiecksseite nicht Null sein kann. Demnach ist $x_2 = 8$ die Maßzahl der Länge der größeren Kathete.

Ergebnis:
Länge der Hypotenuse: 10 cm
Länge der größeren Kathete: 8 cm
Länge der kleineren Kathete: 6 cm

Probe: Es ist $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

Aufgaben e 59 und 60

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$, (p, q reell)

10

Gegeben sei die Gleichung

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0.$

Wir bilden die quadratische Ergänzung zu $x^2 - 2x$ und erhalten 1. Durch Addition und Subtraktion der quadratischen Ergänzung auf der linken Seite der Gleichung (1) erhalten wir die zu (1) äquivalente Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

und somit

(2) $(x - 1)^2 - 4 = 0.$

Unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ läßt sich (2) äquivalent umformen in

$$[(x - 1) - 2][(x - 1) + 2] = 0$$

bzw. in

(3) $(x - 3)(x + 1) = 0.$

Da wir aus der Gleichung (3) die Lösungen ablesen können, ist durch die Umwandlung der Summe $x^2 - 2x - 3$ in das Produkt $(x - 3)(x + 1)$ die gegebene Gleichung bereits gelöst. Die Lösungen sind

$$x_1 = 3 \text{ und } x_2 = -1.$$

Wir können die Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ noch nach einer anderen Methode lösen. Die Gleichung (2) ist auch äquivalent mit

(4) $(x - 1)^2 = 4.$

Die Gleichung (4) ist äquivalent mit:

(5) $|x - 1| = 2.$

Nun ist

$$|x-1| = \begin{cases} x - 1, & \text{wenn } x \geqq 1 \\ -(x - 1), & \text{wenn } x < 1. \end{cases}$$

Es sei

a) $|x - 1| = x - 1.$

Nach (5) ist dann

$x - 1 = 2$

und somit $x_1 = 3.$

Es sei

b) $|x - 1| = -(x - 1).$

Nach (5) ist dann

$-(x - 1) = 2$

und somit $x_2 = -1.$

Gegeben sei die Gleichung

$x^2 - 6x + 9 = 0.$

Da die linke Seite der Gleichung bereits „ein vollständiges Quadrat" ist, können wir schreiben

$(x - 3)(x - 3) = 0.$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß nur die Zahl $x = 3$ die Gleichung erfüllt, denn für jede reelle Zahl $x \neq 3$ gilt $(x - 3)^2 \neq 0$. Die Gleichung hat also die Lösung $x = 3$.

Da in der Zerlegung der Summe $x^2 - 6x + 9$ in Linearfaktoren der Linearfaktor $(x - 3)$ zweimal auftritt, wollen wir verabreden zu sagen: *Die Zahl 3 ist eine zweifache Lösung der Gleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$.* Dabei soll eine zweifache Lösung doppelt gezählt werden, so daß wir dann sagen:
Die Gleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$ hat zwei gleiche reelle Lösungen, nämlich

$x_1 = x_2 = 3$.

Allgemein verabreden wir:

Eine Zahl x_1 heißt eine zweifache Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gilt $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

11

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + px$ ist $\frac{p^2}{4}$ (vgl. Lerneinheit E 5).
Dann ist die Gleichung

(1) $x^2 + px + q = 0$

äquivalent mit

(2) $x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$

bzw. mit

(3) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0$.

Wir setzen $\frac{p^2}{4} - q = D$ und erhalten

(4) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D = 0$.

Ist $D \geqq 0$, so gilt $D = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}$,
so daß wir unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ die Gleichung (4) äquivalent umformen können in

(5) $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}\right]\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{D}\right] = 0, \quad (D \geqq 0)$.

Schreibt man (5) noch in der Form

(6) $\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right] = 0, \quad (D \geqq 0)$,

so kann man die Lösungen der Gleichung aus (6) sofort ablesen:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}, \quad (D \geqq 0)$.

Setzt man für D wieder $\frac{p^2}{4} - q$ ein $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$, so ist

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

E

Dafür schreibt man oft kürzer:

$$(7)\ x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

(7) heißt die **allgemeine Lösungsformel der quadratischen Gleichung**

$x^2 + px + q = 0, \left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$.

Ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$, so gilt $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Die Gleichung hat dann eine zweifache Lösung.

12

Wir haben festgestellt:
Ist $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ reelle Lösungen.
Es gilt auch umgekehrt: Hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ reelle Lösungen, so ist $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$.
Diese Aussage ist gleichbedeutend mit:

Gilt nicht $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$, d. h., ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine reellen Lösungen.
Daß diese Aussage wahr ist, erkennt man sofort aus der Gleichung (3); denn für $\frac{p^2}{4} - q < 0$ gilt für jede reelle Zahl x

E

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) > 0\,.$$

Damit erhalten wir:

8 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann reelle Lösungen, wenn $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist. Ihre Lösungen sind dann**

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$, so hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Man nennt $D = \frac{p^2}{4} - q$ die **Diskriminante**[1] der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

[1] discriminare (lat.), trennen.

ZUSAMMENFASSUNG
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$, (p, q reell) hat für
$D > 0$ zwei verschiedene reelle Lösungen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$D = 0$ eine zweifache reelle Lösung

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2},$$

$D < 0$ keine reelle Lösungen.

Aus der Herleitung der Lösungsformel entnehmen wir:

Ist $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$, so gibt es genau zwei reelle Zahlen x_1 und x_2, so daß gilt:

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Gibt es umgekehrt zwei reelle Zahlen x_1 und x_2, so daß

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

gilt, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ reelle Lösungen.

Nach Satz E8 gilt dann $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$.

Wir können nunmehr formulieren:

SATZ: Die Summe $x^2 + px + q$ läßt sich genau dann in Linearfaktoren zerlegen, wenn $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ mit

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$, gilt $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right)$.

E

6 Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ sind zu berechnen!

Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ sind die Lösungen der Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

Es ist $p = -2$, $\frac{p}{2} = -1$ und $q = -3$.

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$= 1 + \sqrt{1 + 3}$	$= 1 - \sqrt{1 + 3}$
$x_1 = 3$	$x_2 = -1$

Probe für $x_1 = 3$:

$3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$

$9 - 6 - 3 = 0$

Probe für $x_2 = -1$:

$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

$1 + 2 - 3 = 0$

Ergebnis: Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

7 $\quad 3x^2 - 6\sqrt{2}x - 3 = 0$

Um die Normalform zu erhalten, dividieren wir die Gleichung durch 3:

$x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0.$

Es ist $p = -2\sqrt{2},\ \frac{p}{2} = -\sqrt{2},\ q = -1.$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2 + 1}$$
$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}146$$

Probe für $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 3 = 0$$
$$6 + 6\sqrt{6} + 9 - 12 - 6\sqrt{6} - 3 = 0$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{2 + 1}$$
$$x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \approx -0{,}318$$

Probe für $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$$3(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3 = 0$$
$$6 - 6\sqrt{6} + 9 - 12 + 6\sqrt{6} - 3 = 0$$

Aufgaben e 61 bis 68

Weitere Beispiele und Anwendungen

E

13

8 $\quad \frac{a}{x} + \frac{a - b}{x - b} = 2 \qquad (x \neq 0,\ x \neq b,\ a \neq 0,\ a \neq b,\ b \neq 0).$

Multiplikation mit $x(x - b)$:

$a(x - b) + x(a - b) = 2x(x - b).$

Auflösen der Klammern und Zusammenfassen:

$ax - ab + ax - bx = 2x^2 - 2bx$

$2x^2 - (2a + b)x + ab = 0$

Normalform: $x^2 - \frac{2a + b}{2}x + \frac{ab}{2} = 0$

Es ist: $p = -\frac{2a + b}{2}$ und $q = \frac{ab}{2}$.

Lösungen: $x_{1/2} = \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2+4ab+b^2}{16} - \frac{8ab}{16}}$

$$= \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2-4ab+b^2}{16}}$$

$$= \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{(2a-b)^2}{16}}$$

$x_1 = \frac{2a+b}{4} + \frac{|2a-b|}{4}$

1. Fall: $|2a-b| = 2a-b$

$x_{11} = \frac{2a+b}{4} + \frac{2a-b}{4} = a$

2. Fall: $|2a-b| = -(2a-b)$

$x_{12} = \frac{2a+b}{4} - \frac{2a-b}{4} = \frac{b}{2}$

$x_2 = \frac{2a+b}{4} - \frac{|2a-b|}{4}$

1. Fall: $|2a-b| = 2a-b$

$x_{21} = \frac{2a+b}{4} - \frac{2a-b}{4} = \frac{b}{2}$

2. Fall: $|2a-b| = -(2a-b)$

$x_{22} = \frac{2a+b}{4} - \frac{-(2a-b)}{4} = a$

Ist $2a - b \neq 0$, hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = \frac{b}{2}$.

Ist $2a - b = 0$, hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = x_2 = \frac{2a+b}{4} = a = \frac{b}{2}$.

(18) Führen Sie die Probe zum Beispiel 8 durch!

9 Die Summe $x^2 + 6x - 7$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.

a) Wir ermitteln die Zerlegung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

$$x_2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + 9 - 9 - 7 = (x+3)^2 - 16$$
$$= [(x+3) - 4]\,[(x+3) + 4]$$
$$= (x-1)\,(x+7)$$

b) Wir lösen die Gleichung

$$x^2 + 6x - 7 = 0: \quad x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9+7}$$
$$x_1 = 1; \; x_2 = -7$$

Dann ist $x^2 + 6x - 7 = (x-1)\,(x+7)$

10 Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 60 \text{ m s}^{-1}$ senkrecht nach oben geschleudert. In welcher Zeit erreicht er die Höhe **a)** $s = 100$ m, **b)** $s = 180$ m? (Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt; $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$.)
Lösung: Für den senkrechten Wurf nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt:

(1) $s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \; (t \geqq 0)$.

E

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Erdbeschleunigung g sind gegebene Konstanten. Wir sollen zu einem vorgegebenen s die zugehörige Zeit t berechnen. Wir bringen die Gleichung (1) zunächst auf die Normalform:

$$\frac{g}{2}t^2 - v_0 t + s = 0$$

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{2s}{g} = 0.$$

Es ist $p = -\frac{2v_0}{g}$ und $q = \frac{2s}{g}$.

Dann ist

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2gs}{g^2}} = \frac{v_0}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gs}$$

Einsetzen:

a) $$t = \frac{60\ \mathrm{ms^{-1}}}{10\ \mathrm{ms^{-2}}} \pm \frac{1}{10\ \mathrm{ms^{-2}}}\sqrt{3600\ \mathrm{m^2s^{-2}} - 2 \cdot 10\ \mathrm{ms^{-2}} \cdot 100\ \mathrm{m}}$$

$$= 6\ \mathrm{s} \pm \frac{1}{10\ \mathrm{ms^{-2}}}\sqrt{3600\ \mathrm{m^2s^{-2}} - 2000\ \mathrm{m^2s^{-2}}}$$

$$t = 6\ \mathrm{s} \pm \frac{1}{10\ \mathrm{ms^{-2}}} \cdot 40\ \mathrm{ms^{-1}} = 6\ \mathrm{s} \pm 4\ \mathrm{s}$$

$$t_1 = 10\ \mathrm{s}; \quad t_2 = 2\ \mathrm{s}$$

b) $$t_{1/2} = \left(\frac{60}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{3600 - 3600}\right)\mathrm{s}$$

$$t_1 = t_2 = 6\ \mathrm{s}$$

E

Setzt man die gefundenen Ergebnisse in die Gleichung (1) ein, so erhält man die Höhe $s = 100$ m bzw. $s = 180$ m.

Der Körper erreicht erstmalig nach 2 Sekunden die Höhe $s = 100$ m. Nach 6 Sekunden erreicht er die größtmögliche Höhe (Steighöhe) $s = 180$ m. Das ergibt sich aus der Formel $v = v_0 - gt$ für die Geschwindigkeit beim senkrechten Wurf nach oben, denn nach 6 Sekunden hat der Körper die Geschwindigkeit $v = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, d. h.: er hat den höchsten Punkt der Bahn erreicht. Danach bewegt er sich im freien Fall zurück zur Abwurfstelle und erreicht nach insgesamt 10 Sekunden wiederum die Höhe $s = 100$ m.

Der Körper erreicht jede Höhe s, für die $2gs < v_0^2$ gilt, genau zweimal. Die Höhe s, für die $2gs = v_0^2$ gilt, ist die größtmögliche Höhe (Steighöhe), die der Körper erreicht. Ist $v_0^2 < 2gs$, hat die Gleichung (1) keine reellen Lösungen, d. h., eine Höhe s mit $v_0^2 < 2gs$ erreicht der Körper nicht.

Aufgaben e 69 bis 106

14

(19) Bestimmen Sie die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichungen

$$x^2 - 9x + 14 = 0;\ x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0 \text{ und } x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 4 = 0!$$

Bilden Sie jeweils $x_1 + x_2$ und $x_1 \cdot x_2$, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Koeffizienten der Gleichung!

Für $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

wobei $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ist.

Wegen

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2$$

gilt für jede reelle Zahl x

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2, \quad \left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right).$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Vergleichen der Koeffizienten auf der linken und der rechten Seite:

$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Wir haben gezeigt:
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung

$x^2 + px + q = 0$, $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$, so gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:
Ist $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, so sind die Zahlen x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$.

Beweis: Es ist $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2$ (nach Voraussetzung).
Die Zahlen x_1 und x_2 erfüllen die Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2 = 0,$$

wovon man sich durch Einsetzen in die Gleichung überzeugen kann:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)\,x_1 + x_1x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = 0$$
$$x_2^2 - (x_1 + x_2)\,x_2 + x_1x_2 = x_2^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2 = 0.$$

Da eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen haben kann, sind x_1 und x_2 in der Tat die Lösungen der Gleichung

$$x_2 + px + q = 0.$$

Damit erhalten wir den

E

9 **Wurzelsatz**[1] **von** **VIETA**[2]**: Die Zahlen x_1 und x_2 sind dann und nur dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$, wenn gilt**

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes können wir zu vorgegebenen Zahlen x_1 und x_2 die Normalform der quadratischen Gleichung angeben, die die Zahlen x_1 und x_2 als Lösungen hat.

11 Wie heißt die Normalform der quadratischen Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$?

Lösung:

Es ist $x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6 = -p$

und $x_1 \cdot x_2 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 = q$.

Die Normalform der quadratischen Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ lautet

$x^2 - 6x + 7 = 0$.

20 Geben Sie noch drei quadratische Gleichungen mit den Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ an!

Hat man eine in der Normalform gegebene quadratische Gleichung gelöst, so kann nach dem VIETAschen Wurzelsatz die Probe durchgeführt werden.

E

12 Mit Hilfe des Wurzelsatzes von VIETA ist nachzuprüfen, ob $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = -\frac{6}{7}$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + \frac{4}{21}x - \frac{4}{7} = 0$ sind.

Lösung:

Die Koeffizienten der Gleichung sind $p = \frac{4}{21}$ und $q = -\frac{4}{7}$. Die gleichen Koeffizienten erhalten wir nach dem Satz von VIETA:

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{7} = -\frac{4}{21} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{4}{7} = q.$$

Aufgaben e 107 und 108

[1] Man nennt die Lösungen einer Gleichung auch „Wurzeln der Gleichung". Beachten Sie: Der Begriff „Wurzel einer Gleichung" darf nicht mit dem Begriff „Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl" verwechselt werden.
[2] *Francois Viète*, französischer Mathematiker, 1540–1603.

15

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion

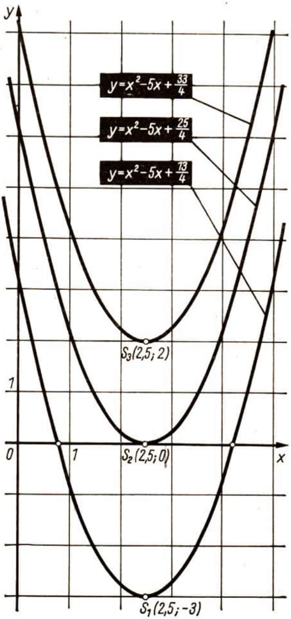
(1) $y = x^2 + px + q, \quad \left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$

sind die Lösungen der Gleichung

(2) $x^2 + px + q = 0.$

Umgekehrt sind die Lösungen der Gleichung (2) im Falle $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$ die Nullstellen der entsprechenden Funktion (1).
Eine zweifache Lösung der Gleichung (2) wollen wir auch eine zweifache Nullstelle der entsprechenden Funktion (1) nennen. Ist x_1 eine *zweifache* Wurzel der Gleichung (2), so *berührt* die Parabel $y = x^2 + px + q$ an der Stelle x_1 die x-Achse. Denn wenn x_1 eine zweifache Lösung von (2) ist, so gilt
$x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

Die Parabel $y = (x - x_1)^2$ hat mit der x-Achse nur den Scheitel $S\,(x_1; 0)$ gemeinsam.
Wir erhalten Näherungswerte für die Lösungen einer quadratischen Gleichung, indem wir das Bild der entsprechenden quadratischen Funktion zeichnen und aus der Zeichnung die Abszissen der gemeinsamen Punkte von Parabel und x-Achse ablesen.



E 6

13 Die Gleichungen

(1) $x^2 - 5x + \frac{13}{4} = 0;$

(2) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0;$

(3) $x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 0$

sind zeichnerisch zu lösen.

Wir zeichnen die Bilder der Funktionen (Bild E 6)

$f_1(x) = x^2 - 5x + \frac{13}{4};$

$f_2(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{4};$

$f_3(x) = x^2 - 5x + \frac{33}{4}.$

E

Die Scheitel der zu zeichnenden Parabeln sind die Punkte

$S_1\left(\frac{5}{2}; -3\right)$; $S_2\left(\frac{5}{2}; 0\right)$; $S_3\left(\frac{5}{2}; +2\right)$.

Ergebnis: Die Gleichung (1) hat die Lösungen $x_1 \approx 0{,}8$ und $x_2 \approx 4{,}2$. Die Gleichung (2) hat die zweifache Lösung $x = \frac{5}{2}$. Die Gleichung (3) hat keine reellen Lösungen.

Wir ergänzen die in der Lerneinheit E 12 (Zusammenfassung) mit Hilfe der Diskriminante durchgeführte Fallunterscheidung bezüglich der Lösungen einer quadratischen Gleichung durch die folgende Übersicht.

$D = \frac{p^2}{4} - q$	$y_S = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$	Parabel $y = x^2 + px + q$	Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat
$\frac{p^2}{4} - q > 0$	$y_S < 0$	schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten	zwei verschiedene reelle Lösungen
$\frac{p^2}{4} - q = 0$	$y_S = 0$	berührt die x-Achse	eine zweifache reelle Lösung
$\frac{p^2}{4} - q < 0$	$y_S > 0$	schneidet die x-Achse nicht	keine reellen Lösungen

16

Die Abszissen der Schnittpunkte der Bilder der beiden Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ sind zu bestimmen. Das Bild E 7 zeigt die Bilder der Funktionen f_1 und f_2. Die Zahlen -2 und $\frac{3}{2}$ sind diejenigen Argumente x, für die die Funktionswerte der Funktionen f_1 und f_2 übereinstimmen, d. h., es sind diejenigen Argumente x, für die gilt: $x^2 = -\frac{1}{2}x + 3$ bzw. $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$.

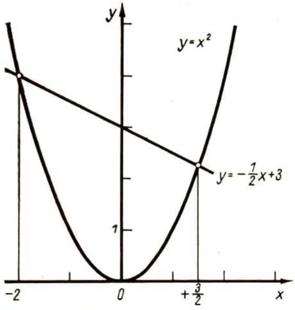
Das heißt aber: Die Zahlen -2 und $\frac{3}{2}$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$. Die Gleichung

$x^2 + px + q = 0$, (p, q reell) ist äquivalent mit $x^2 = -px - q$.

Das bedeutet: Diejenigen Zahlen x, für die $x^2 + px + q = 0$ gilt, sind auch diejenigen Zahlen x, für die $x^2 = -px - q$ gilt, und es sind auch diejenigen Argumente x, für die die Funktionen

$f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = -px - q$

gleiche Funktionswerte haben.



E 7

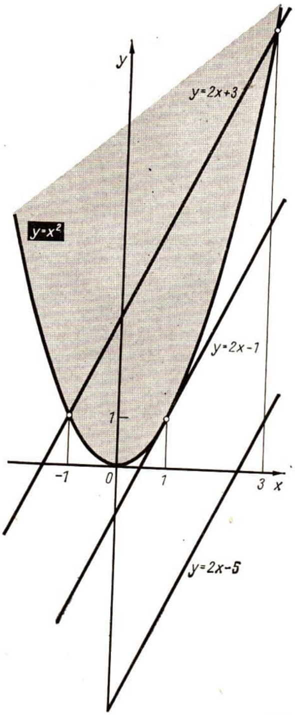
Die Lösungen der Gleichung

$x^2 + px + q = 0, \ \left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$

sind die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y = -px - q$.

Dieses Verfahren erweist sich besonders dann als zweckmäßig, wenn mehrere quadratische Gleichungen näherungsweise zu lösen sind. Man braucht die Parabel $y = x^2$ nur einmal zu zeichnen und kann dann mit Hilfe dieser Parabel mehrere quadratische Gleichungen lösen, indem man die entsprechenden Geraden in dasselbe Koordinatensystem einzeichnet.

Die Geraden $y = -px - q$ können bezüglich der Parabel $y = x^2$ folgende Lagen einnehmen:



E 8

Die Gerade $y = -px - q$	Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat
schneidet die Parabel $y = x^2$ in zwei Punkten	zwei verschiedene reelle Lösungen
berührt die Parabel $y = x^2$	eine zweifache reelle Lösung
hat keinen Punkt mit der Parabel $y = x^2$ gemeinsam	keine reellen Lösungen

14 Das Bild E 8 zeigt die zeichnerische Lösung der Gleichungen $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ und $x^2 - 2x + 5 = 0$ nach dem beschriebenen Verfahren.

Aufgaben e 109 bis 117

E

15 Die Summe der Quadrate zweier Zahlen x und y beträgt 26. Die Differenz dieser Quadrate ist 6. Wie heißen die Zahlen?
Nach der Aufgabenstellung erhalten wir das folgende **System quadratischer Gleichungen:**

$$\begin{aligned} \text{(I)}\ x^2 + y^2 &= 26 \\ \text{(II)}\ x^2 - y^2 &= \ \ 6. \end{aligned}$$

Jedes Zahlenpaar $[x; y]$ aus reellen Zahlen x und y, das *beide* Gleichungen des Systems erfüllt, heißt eine Lösung des gegebenen Systems (Vgl. Lerneinheit B 12).
Unter der Voraussetzung, daß reelle Lösungen existieren, können wir die bei der Lösung linearer Gleichungssysteme angewendeten Verfahren auch bei der Lösung quadratischer Gleichungssysteme anwenden. Addieren wir die Gleichungen (I) und (II), so erhalten wir:

$2x^2 = 32.$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x = 4$ und $x = -4.$

Durch Einsetzen in die Gleichung (I) erhält man für

a) $x = 4$:

$$\begin{aligned} 16 + y^2 &= 26 \\ y &= \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

b) $x = -4$:

$$\begin{aligned} 16 + y^2 &= 26 \\ y &= \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge L des gegebenen Gleichungssystems ist demnach

$$L = \{[4; \sqrt{10}], [4; -\sqrt{10}], [-4; \sqrt{10}], [-4; -\sqrt{10}]\}.$$

Die angegebenen vier Zahlenpaare erfüllen beide Gleichungen des Systems. Die Zahlen, die die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllen, sind

$$\begin{array}{llll} x_1 = 4 & x_2 = 4 & x_3 = -4 & x_4 = -4 \\ y_1 = \sqrt{10} & y_2 = -\sqrt{10} & y_3 = \sqrt{10} & y_4 = -\sqrt{10}. \end{array}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir noch ein System aus einer quadratischen und einer linearen Gleichung.

16 Einer Kugel ist ein Zylinder einbeschrieben. Der Radius R der Kugel hat eine Länge von 30 cm. Der Achsenschnitt des Zylinders hat einen Umfang von 168 cm. Radius r und Höhe h des Zylinders sind zu bestimmen.
Das Bild E 9 zeigt einen Achsenschnitt der beiden Körper.
Die gegebenen Größen wurden in der Einheit cm angegeben. Also werden wir als Ergebnisse für r und h ebenfalls Größen mit der Einheit cm erhalten. (Wir rechnen in diesem Beispiel nur mit den Maßzahlen, benutzen als Variablen aber die Zeichen „r" und „h".)

Es ist

$$\begin{aligned} \text{(I)}\ 4r^2 + h^2 &= 3600 \\ \text{(II)}\ 4r \ + 2h &= \ \ 168. \end{aligned}$$

E

Die Gleichung (II) ist äquivalent mit (IIa) $h = 84 - 2r$. Wenden wir das Einsetzungsverfahren an, so erhalten wir die Gleichung: $r^2 - 42r + 432 = 0$ mit den Lösungen $r_1 = 24$; $r_2 = 18$.

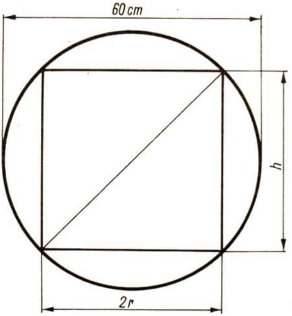
Durch Einsetzen von r_1 bzw. r_2 in die Gleichung (IIa) erhalten wir:

$h_1 = 36$; $h_2 = 48$.

Die Probe zeigt, daß beide Lösungspaare der Aufgabenstellung genügen. Man erhält das Ergebnis

$r_1 = 24$ cm; $h_1 = 36$ cm und

$r_2 = 18$ cm; $h_2 = 48$ cm.



E 9

Zur Geschichte der Algebra

Wer heute das Wort „Mathematik“ hört, denkt ganz unwillkürlich an Formeln. In der Tat scheint es selbstverständlich zu sein, daß ein Mathematikbuch auf den ersten Blick an den darin enthaltenen Formeln zu erkennen ist. Aber es ist eigentlich noch gar nicht so lange her, nämlich erst reichlich 300 Jahre, daß spezielle Symbole in großem Umfang in der Mathematik verwendet werden, um die Rechentätigkeit zu erleichtern und ihr eine größere Übersichtlichkeit zu verleihen.

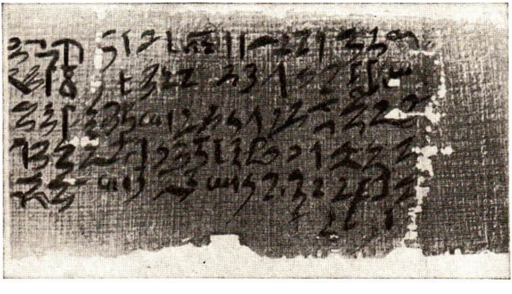


Bild E 10: Originaltext der angeführten Hau-Aufgabe

E

Vor der Herausarbeitung einer mathematischen Formelsprache mußten die Menschen die entsprechenden Rechenoperationen mit Hilfe von Wörtern der Umgangssprache ausdrücken. Einige Beispiele aus der Frühzeit der Mathematik zeigen recht deutlich, daß eigentlich ebenso gerechnet wurde wie heute und nur die Variablen fehlten.
In der ägyptischen Mathematik hatten die sogenannten Hau-Rechnungen große Bedeutung. Hau heißt soviel wie Haufen oder Menge und vertrat die Stelle unserer Variablen, für die wir meist x wählen. Die folgende Hau-Aufgabe, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führt, stammt aus einem mathematischen Papyrus aus der Zeit um 1700 v. u. Z.

Eigentlicher Text in deutscher Übersetzung	moderne Schreibweise
Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$ mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?	$1\frac{1}{2}x + 4 = 10$
Berechne Du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6.	$10 - 4 = 6$
Rechne Du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$.	$1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$
Berechne Du $\frac{2}{3}$ von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4	$6 \cdot \frac{2}{3} = 4$
nennt sich. Du hast richtig gefunden.	$x = 4$

Die babylonische Mathematik, insbesondere die Algebra, hatte schon einen hohen Entwicklungsstand erreicht. In Mesopotamien war die Landwirtschaft auf künstliche Bewässerung angewiesen. Daher findet man häufig Berechnungen des Flächeninhalts von Feldern. Das folgende Beispiel zur babylonischen Algebra stammt aus dem 3. Jahrtausend v. u. Z. und führt auf eine quadratische Gleichung.

„Länge und Breite habe ich multipliziert und so habe ich die Fläche errichtet. Wiederum: was immer die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe von Länge und meiner Breite multipliziert und dann habe ich meine Fläche hinzugefügt und es macht 1, 13, 20. Wiederum: Länge und Breite habe ich addiert. Es macht 1,40."

Bild E 11: Keilschrifttafel mit Flächenberechnung

Die Zahlenangaben sind im Sexagesimalsystem gemacht. Also bedeutet

$$1, 13, 20 = 1 + \frac{13}{60} + \frac{20}{60^2} = 1\frac{2}{9} \quad \text{und} \quad 1{,}40 = 1 + \frac{40}{60} = 1\frac{2}{3}.$$

E

Die Maßzahl der gesuchten Länge bezeichne man mit x, die Maßzahl der gesuchten Breite mit y. Dann erhält man durch Übertragung der Aufgabe in die moderne Schreibweise die Gleichungen $(x - y)(x + y) + xy = 1\frac{2}{9}$ und $x + y = 1\frac{2}{3}$. Löst man die zweite Gleichung nach y auf, so erhält man $y = 1\frac{2}{3} - x$. Man setzt in die erste Gleichung ein und erhält nach Umformen die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 9 = 0$. Die ersten Ansätze einer algebraischen Zeichenschrift finden sich schon in der babylonischen Mathematik und dann erst wieder in der spätgriechischen Mathematik, besonders bei DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA. Er hat ein umfangreiches Buch mit dem Titel *Arithmetica* geschrieben, das zum größten Teil erhalten geblieben ist. Es enthält feste Bezeichnungen für die Potenzen $x, x^2, \ldots, x^6$, ein festes Zeichen für die Subtraktion sowie die Abkürzung ι[1], die er immer als Gleichheitszeichen verwendete. Man weiß nicht genau, wann DIOPHANTOS gelebt hat, wahrscheinlich um 250 u. Z., aber über seine persönlichen Lebensumstände wissen wir durch das folgende Gedicht recht genau Bescheid:

„Hier dies Grabmal deckt DIOPHANTOS. Schaut das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel."

Wie alt ist demnach DIOPHANTOS geworden?
Die arabischen Gelehrten übersetzten um 900 auch die *Arithmetica* in ihre Sprache. Zugleich lernten sie Teile der hochentwickelten indischen und der schon sehr alten chinesischen Mathematik kennen, weil mit diesen Ländern ein ausgedehnter Handel betrieben wurde.

Die folgende Aufgabe stammt aus einer chinesischen Arithmetik des dritten Jahrtausends v. u. Z.

„Man nimmt an, man hätte in einem Käfig eine Anzahl Kaninchen und Fasanen beisammen, im ganzen 35 Köpfe und 94 Füße. Wieviel sind von jeder Art vorhanden?"

Besonders bedeutende chinesische Mathematiker waren LIU HUI (um 263 u. Z.) und LI YEH (1178–1265), die Bücher verfaßten, in denen das Auflösen von Gleichungen gelehrt wurde.

Ein großer Teil der alten indischen Textaufgaben ist besonders anmutig. So heißt es in der Aufgabensammlung *Krönung des Systems* des indischen Mathematikers BHÂSKARA (1114–1185?[2]):

„Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadombablüte, $\frac{1}{3}$ auf einer Silindhablüte nieder. Der 3fache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir die Anzahl der Bienen."

Die arabischen Mathematiker knüpften an die indische und die griechische Mathematik an und entwickelten sie weiter. Ihr besonderes Interesse galt der Algebra, da die Araber

[1] ι ist der erste Buchstabe des griechischen Wortes ἰσοι, d. i. gleich.
[2] Die Jahreszahl mit einem Fragezeichen ist nicht sicher bekannt.

E

einen großangelegten Handel mit der ganzen ihnen bekannten Welt unterhielten. Auch das Wort „Algebra“ stammt aus dem Arabischen. Der Astronom und Mathematiker AL-HWÂRAZMÎ (gest. um 840) hatte ein Rechenbuch mit dem Titel „Hisâb aljabr w'almuqâbalah“, d. i. *Buch über die Ergänzung und das Hinüberschaffen*, geschrieben. Aus „aljabr“ (Ergänzung) wurde bei den europäischen Gelehrten später Algebra. Da dieses Buch sehr viele neue Rechenverfahren zum Lösen von Gleichungen enthielt, wurde der Verfasser zum Symbol des geschickten Rechnens überhaupt. Auf diese Weise ist das in der Mathematik so häufige Wort Algorithmus, d. h. Rechenverfahren, entstanden. In diesem Buch vermittelt AL-HWÂRAZMÎ alles das, was „für die Menschen bei der Nachfolge und beim Vermächtnis, beim Aufteilen des Vermögens und bei Gerichtsprozessen sowie in allen ihren Wechselbeziehungen, beim Vermessen des Bodens und beim Anlegen von Kanälen, in der Geometrie und bei verschiedenen anderen Fragen ständig notwendig ist.“

Während arabische Kultur und Wissenschaft in hoher Blüte standen, wurde durch den Einfluß des herrschenden Religionsdogmas, des Katholizismus, in Europa die Entwicklung der Wissenschaften erschwert. Erst im 15. und 16. Jahrhundert begannen sich in Europa die Wissenschaften zu entwickeln. Über Spanien und Sizilien wurden die Europäer mit den Ergebnissen der arabischen Mathematik bekannt. Deshalb heißen die eigentlich aus Indien stammenden Ziffern heute noch arabische Ziffern, denn sie kamen durch Vermittlung der Araber nach Europa.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurde der Warenaustausch immer mehr durch die Geldwirtschaft ersetzt. Handel und Industrie entwickelten sich. Die sprunghafte Verstärkung des Geldumlaufs machte die Umrechnung der unterschiedlichen Währungseinheiten ineinander nötig. Zins- und Zinseszins mußten berechnet und die Buchhaltung mußte übersichtlich gestaltet werden. Überall in Europa gab es Rechenmeister, die für alle möglichen Auftraggeber derartige Rechnungen durchführten und die dann auch Lehrbücher schrieben, aus denen man die schwierige Kunst des Rechnens erlernen konnte. Von den deutschen Rechenmeistern ist ADAM RIES (1492—1559) am berühmtesten geworden. In einem seiner Rechenbücher stellt er z. B. die nebenstehende Aufgabe. Dabei bedeutet „fl“ die Währungseinheit 1 Gulden, und ein „ort“ bedeutet ein Viertel.


Adam Risen.
Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglichers haben für die 100. fl.? Machs nach den vorigen/mach eines jeglichen kosten zu örtern/deßgleichen die 100. fl. vnd setz als dann also:

16 15
6 5
100 400
2 1
1

Bild E 12: Eine Seite aus einem Rechenbuch von A. RIES. Sie enthält eine Viehkauf-Aufgabe.

Immer mehr nahm der Handel und damit die Rechentätigkeit zu. Um sich die Schreib- und Rechenarbeit zu erleichtern, gingen die Rechenmeister dazu über, Abkürzungen für häufig wiederkehrende mathematische Ausdrücke zu verwenden. Anfangs wählte jeder Abkürzungen nach eigenem Geschmack. Zum Beispiel kürzte der Italiener LUCA PACIOLI (1445—1514) das Wort „piu“, welches plus bedeutet, durch p ab und benutzte m für meno als Zeichen der Subtraktion. Diese Schreibweise hat sich nicht durchgesetzt. Die heute verwendeten + und — treten zum erstenmal gedruckt 1489 in einem Buch des deutschen Rechenmeisters JOHANN WIDMANN (geb. um 1460) auf, das den Titel *Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschafft* trägt.

Das heute gebräuchliche Gleichheitszeichen = empfahl der Engländer ROBERT RECORDE (1510?—1558), der von Beruf Arzt war. Aber es dauerte noch mehr als 100 Jahre, ehe sich dieses Gleichheitszeichen durchsetzte. Der Niederländer SIMON STEVIN (1548—1620), ein

Ingenieur, der an hervorragender Stelle den Befreiungskampf der Niederlande gegen die Spanier unterstützte, führte den Wurzelhaken mit nebengesetztem Exponenten ein, also bedeutete z. B. $\sqrt{\ }$③ die dritte Wurzel. Die heutige Schreibweise, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Winkelhakens einzufügen, also $\sqrt[3]{\ }$ für die dritte Wurzel zu schreiben, wurde von dem holländischen Mathematiker Albert Girard (1595–1632) vorgeschlagen. Der französische Philosoph und Mathematiker René Descartes (1596–1650), der lange Zeit aus Furcht vor der katholischen Kirche im protestantischen Holland lebte, führte schließlich 1637 den Querstrich am Wurzelzeichen ein, um den Radikanden genau kennzeichnen zu können. Der bedeutendste Algebraiker jener Periode war der Franzose François Viète (1540–1603), der als Jurist in hohen Staatsämtern tätig war. Einige Zeit stand er beim französischen König in Ungnade und beschäftigte sich währenddessen mit der Mathematik. Er ließ sich von dem Gedanken leiten, daß eine durchgängige Verwendung von Buchstaben die Übersichtlichkeit der mathematischen Rechnungen wesentlich erhöhen könnte und verwendete die Vokale a, e, i. ... für die Variablen und die Konsonanten b, d, g, ... für Konstanten. Zugleich machte er von eckigen, geschweiften und runden Klammern Gebrauch. Wegen der zu großen Anzahl von Symbolen fanden aber Vietas Vorschläge nicht die Zustimmung seiner Zeitgenossen.

Von Descartes stammt die heutige Potenzschreibweise a^3, b^4 usw., d. h. die Vereinbarung, die Exponenten halbhoch rechts neben die Basis zu schreiben. Auch das rechtwinklige Koordinatensystem ist nach Descartes genannt, obwohl er selbst nur eine Achse benutzt hat.

Bild E 13: François Viète (1540–1603)

Bild E 14: René Descartes (1596–1650)

F

Exponentialfunktionen begegnen uns bei Wachstums- und bei Zerfallsprozessen, in der Natur, Wirtschaft und Gesellschaft. Hierzu gehören – das Wachstum einer Hefekultur auf einem Nährboden, das Wachstum eines Waldbestandes, wenn man von außergewöhnlichen Bedingungen (Waldbrand, Windbruch, Schädlingsbefall) absieht, – das Ansteigen der Bevölkerungszahl der Erde, der Zerfall eines radioaktiven Elements.

F. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Einführung

1

Für welche rationale Zahl x gilt $2^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?
Es ist $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}$. Somit erhalten wir die Gleichung $2^x = 2^{-\frac{1}{2}}$, aus der wir die Lösung $x = -\frac{1}{2}$ sofort ablesen können.

(1) Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $3^x = 81$ **b)** $10^x = 1000000$ **c)** $10^x = 0{,}001$ **d)** $2^x = \sqrt[3]{4}$

Es gibt keine rationale Zahl x, für die $10^x = 3$ gilt.

Beweis (indirekt): Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, (p, q ganzzahlig; $q > 0$), für die

(1) $10^{\frac{p}{q}} = 3$

ist. Durch Potenzieren der Gleichung (1) mit q erhalten wir

(2) $10^p = 3^q$.

Da 3^q wegen $q > 0$ eine natürliche Zahl ist, muß auch 10^p eine natürliche Zahl sein. Zerlegen wir die Zahl 10 in Primfaktoren, so folgt

(3) $2^p \cdot 5^p = 3^q$.

F

Jede natürliche Zahl ist eindeutig in Primfaktoren zerlegbar. Daher erhält man aus (3) nur für $p = q = 0$ eine wahre Aussage. $p = q = 0$ widerspricht aber der Voraussetzung, so daß die Annahme, es gäbe eine rationale Zahl x mit $10^x = 3$, widerlegt ist.

(2) Zeigen Sie, daß die Gleichungen **a)** $10^x = 2$, **b)** $2^x = 5$ keine rationalen Lösungen haben!

Die folgende Tabelle enthält die Potenzen der Zahl 2 für die natürlichen Exponenten $n = 0$ bis $n = 20$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

n	14	15	16	17	18	19	20
2^n	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich gewisse numerische Rechnungen sehr einfach ausführen.

[1] **a)** $256 \cdot 2048 = 2^8 \cdot 2^{11} = 2^{19} = 524288$

b) $1048576 : 65536 = 2^{20} : 2^{16} = 2^4 = 16$

c) $128^2 = (2^7)^2 = 2^{14} = 16384$

d) $\sqrt[3]{262144} = \sqrt[3]{2^{18}} = 2^6 = 64$

(3) Bilden Sie weitere Aufgaben mit solchen Zahlen, die in der Tabelle enthalten sind, und lösen Sie diese wie im Beispiel 1!

Die Anzahl der Aufgaben, die wir nach der angegebenen Methode lösen können, ist beschränkt, denn zwischen den in der Tabelle enthaltenen Zahlen bestehen große Lücken. Wir können aber zwischen zwei beliebige aufeinanderfolgende Zahlen der Tabelle beliebig viele weitere zwischenschalten, wenn wir auch rationale Exponenten aufnehmen. Könnten wir jede positive reelle Zahl als Potenz mit der Basis 2 darstellen, so ließen sich mit diesen Zahlen die Operationen Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren so ausführen, wie es im Beispiel 1 gezeigt wurde.

Aus der Übung 2 entnehmen wir, daß sich nicht jede positive reelle Zahl als Potenz von 2 mit einem **rationalen Exponenten** darstellen läßt. Deshalb erweitern wir den Potenzbegriff abermals, indem wir auch **irrationale Exponenten** zulassen.

Die eben angestellten Überlegungen gelten nicht nur für die Basis 2. Tabellen wie die oben angeführte lassen sich auch für andere Basen aufstellen und entsprechend verfeinern.

Aufgaben f 1 und 2

F

2

Die Gleichung $10^x = 3$ hat keine rationale Lösung. Man kann jedoch rationale Zahlen x so bestimmen, daß sich die Potenzen 10^x beliebig wenig von der Zahl 3 unterscheiden. So ist:

$$
\begin{array}{llcl}
10^0 & = 1 & < 3 < 10 & = 10^1 \\
10^{0,4} & \approx 2{,}51189 & < 3 < 3{,}16228 & \approx 10^{0,5} \\
10^{0,47} & \approx 2{,}95121 & < 3 < 3{,}01995 & \approx 10^{0,48} \\
10^{0,477} & \approx 2{,}99916 & < 3 < 3{,}00608 & \approx 10^{0,478} \\
10^{0,4771} & \approx 2{,}99985 & < 3 < 3{,}00054 & \approx 10^{0,4772} \\
10^{0,47712} & \approx 2{,}99999 & < 3 < 3{,}00006 & \approx 10^{0,47713} \\
 & & \text{usw.} &
\end{array}
$$

(Ein Verfahren zur Berechnung dieser Potenzen soll hier nicht angegeben werden.) Die Folge

$$
(1) \quad
\begin{array}{c}
\langle 0; 1\rangle \\
\langle 0{,}4; 0{,}5\rangle \\
\langle 0{,}47; 0{,}48\rangle \\
\langle 0{,}477; 0{,}478\rangle \\
\langle 0{,}4771; 0{,}4772\rangle \\
\langle 0{,}47712; 0{,}47713\rangle \\
\text{usw.}
\end{array}
$$

ist eine Intervallschachtelung, durch die die (irrationale) reelle Zahl $r = 0{,}47712\ldots$ bestimmt ist. Auch die Folge

$$
(2) \quad
\begin{array}{c}
\langle 10^0; 10^1\rangle \\
\langle 10^{0,4}; 10^{0,5}\rangle \\
\langle 10^{0,47}; 10^{0,48}\rangle \\
\langle 10^{0,477}; 10^{0,478}\rangle \\
\langle 10^{0,4771}; 10^{0,4772}\rangle \\
\langle 10^{0,47712}; 10^{0,47713}\rangle \\
\text{usw.}
\end{array}
$$

ist eine Intervallschachtelung, denn sie hat die in der Definition D 1 genannten Eigenschaften.
Bis auf 10^0 und 10^1 sind alle Intervallenden der Folge (2) irrationale Zahlen. Wir haben demnach eine *Intervallschachtelung mit irrationalen Zahlen als Intervallenden* durchgeführt. Durch diese Intervallschachtelung wird die reelle Zahl 10^r mit dem irrationalen Exponenten $r = 0{,}47712 \ldots$ definiert, und es gilt $10^r = 3$.

Jede Intervallschachtelung (a_n/b_n), die durch die reellen Zahlen a_n und b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ erzeugt wird, bestimmt eindeutig eine reelle Zahl.

2 $3^{\sqrt{2}}$ ist diejenige reelle Zahl, die durch folgende Intervallschachtelung bestimmt wird:

$\langle 3^1;\, 3^2\rangle$
$\langle 3^{1,4};\, 3^{1,5}\rangle$
$\langle 3^{1,41};\, 3^{1,42}\rangle$
$\langle 3^{1,414};\, 3^{1,415}\rangle$
$\langle 3^{1,4142};\, 3^{1,4143}\rangle$
$\langle 3^{1,41421};\, 3^{1,41422}\rangle$
$\langle 3^{1,414213};\, 3^{1,414214}\rangle$
usw.

Unter Benutzung rationaler Näherungswerte für die Intervallenden erhalten wir:

$\langle 3;\, 9\rangle$
$\langle 4{,}65554;\, 5{,}19615\rangle$
$\langle 4{,}70697;\, 4{,}75896\rangle$
$\langle 4{,}72770;\, 4{,}73289\rangle$
$\langle 4{,}72874;\, 4{,}72926\rangle$
$\langle 4{,}72879;\, 4{,}72884\rangle$
$\langle 4{,}72880;\, 4{,}72881\rangle$
usw.

Demnach ist $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880\ldots$

Ist b eine beliebige reelle Zahl und a eine beliebige positive reelle Zahl, so kann man stets die Potenz a^b durch eine Intervallschachtelung definieren. Die allgemeine Definition soll hier nicht angegeben werden.
Für die Potenzen mit reellen Exponenten gelten ebenfalls – wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll – die Potenzgesetze.

1 **SATZ: Sind a und b beliebige positive reelle Zahlen und r und s beliebige reelle Zahlen, so ist:**

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	(2) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$	(3) $(a^r)^s = a^{rs}$
(4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$	(5) Wenn $r < s$, so ist $a^r \lesseqgtr a^s$ für $a \gtreqless 1$. Ist $r = s$, so gilt $a^r = a^s$.	

3 a) $3^{\sqrt{18}} \cdot 3^{\sqrt{32}} = 3^{\sqrt{18}+\sqrt{32}} = 3^{3\sqrt{2}+4\sqrt{2}} = 3^{7\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{5^3}{5^{\sqrt{3}}} = 5^3 \cdot 5^{-\sqrt{3}} = 5^{3-\sqrt{3}}$

c) $(\sqrt{5}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = \sqrt{5}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \sqrt{5}^{\sqrt{16}} = \sqrt{5}^4 = 25$

Definition des Logarithmus

3

F

Es gibt genau eine Zahl x, für die $10^x = 3$ gilt.
Daß es eine Zahl x, die der Gleichung $10^x = 3$ genügt, gibt, wurde bereits gezeigt. Wir zeigen noch, daß es *höchstens eine* Zahl x mit $10^x = 3$ gibt. Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Zahlen x_1 und x_2 mit

(1) $10^{x_1} = 10^{x_2} = 3$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_1 < x_2$. Dann gilt aber nach Satz F 1 (5)

$10^{x_1} < 10^{x_2}$

im Widerspruch zu (1). Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

2 **SATZ: Jede Gleichung $a^x = b$, $(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$ hat genau eine reelle Lösung.**

Der Beweis dieses Satzes soll hier nicht geführt werden.

Die nach Satz F 2 eindeutig bestimmte Zahl x nennt man den **Logarithmus von b zur Basis a** und bezeichnet sie mit „$\log_a b$".

3 **DEFINITION: $\log_a b$, $(b > 0;\ a > 0;\ a \neq 1)$ ist diejenige reelle Zahl c, für die $a^c = b$ gilt.**

Die positive Zahl b heißt der zum Logarithmus c und zur Basis a gehörende **Numerus.** Die Operation, die den Zahlen a und b die Zahl $c = \log_a b$ zuordnet, heißt **Logarithmieren.**

Nach Definition 3 ist

$$\boxed{a^{\log_a b} = b},\ (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0).$$

Die Gleichungen

$a^c = b$ und $c = \log_a b$, $(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$

sind äquivalent, d. h., es ist $c = \log_a b$ genau dann, wenn $a^c = b$.

4 Welcher Zusammenhang besteht zwischen Potenzieren und Logarithmieren?

Die Logarithmen positiver Zahlen mit der Basis 10 heißen **dekadische Logarithmen** oder **Briggssche[1] Logarithmen.** Statt „$\log_{10} b$" schreibt man kürzer „$\lg b$".

4 **a)** $\log_2 128 = 7$, denn $2^7 = 128$ **b)** $\log_3 4{,}72880\ldots = \sqrt{2}$, denn $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880\ldots$

c) $\lg 100 = 2$, denn $10^2 = 100$ **d)** $\lg 3 = 0{,}47712\ldots$, denn $10^{0{,}47712\ldots} = 3$

5 **a)** Schreiben Sie die Gleichungen **α)** $2^5 = 32$, **β)** $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ in der Form $c = \log_a b$!

b) Schreiben Sie die Gleichungen **α)** $\log_3 81 = 4$, **β)** $\lg 1 = 0$ in der Form $a^c = b$!

4 **SATZ: Ist $a > 1$ und sind b_1, b_2 reelle Zahlen mit $b_1 < b_2$, so gilt $\log_a b_1 < \log_a b_2$.**

Beweis: Es sei

(1) $b_1 = a^{c_1}$ und $b_2 = a^{c_2}$.

Nach Voraussetzung gilt: (2) $a^{c_1} < a^{c_2}$. Dann ist auch (3) $c_1 < c_2$.

Wäre nämlich $c_2 \leqq c_1$, so müßte nach Satz 1 (5) $a^{c_2} \leqq a^{c_1}$ gelten im Widerspruch zu (2). Aus (1) und (3) folgt

$\log_a b_1 < \log_a b_2$.

[1] Henry Briggs (1561–1630), ein englischer Mathematiker, veröffentlichte 1620 eine Tafel mit dekadischen Logarithmen.

F

Für jede positive Basis $a \neq 1$ gilt

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Aus Satz 4 folgt für jede Basis $a > 1$:

Wenn $0 < b < 1$, so ist $\log_a b < 0$. Wenn $b > 1$, so ist $\log_a b > 0$.

Die Logarithmen aller positiven reellen Zahlen zu einer vorgegebenen Basis a, ($a > 0$; $a \neq 1$) bilden ein **Logarithmensystem.**

Aufgaben f 3 bis 8

Eigenschaften der dekadischen Logarithmen

4

Wenn wir künftig im Zusammenhang mit Logarithmen keine Basis angeben, so sind stets dekadische Logarithmen gemeint.

(6) Geben Sie die Logarithmen der Zahlen 10^m an, wenn m eine ganze Zahl zwischen -5 und $+5$ ist!

Ist k eine ganze Zahl, so gilt stets $\lg 10^k = k$.
Ganzzahlige Logarithmen haben nur diejenigen Zahlen, die Potenzen von 10 mit ganzzahligen Exponenten sind. Die Logarithmen aller anderen *rationalen* positiven Zahlen sind irrational. Für gewisse irrationale Zahlen erhalten wir rationale Logarithmen, z. B.: $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$.

Jede positive reelle Zahl läßt sich eindeutig als Produkt aus einer reellen Zahl r mit $1 \leq r < 10$ und einer Potenz 10^k mit ganzzahligem Exponenten k darstellen (vgl. Lerneinheit C 12). So ist beispielsweise

$3754{,}79 = 3{,}75479 \cdot 10^3$; $0{,}0375479 = 3{,}75479 \cdot 10^{-2}$.

5 Es ist $\lg 6{,}85 = 0{,}8357$, d. h., es ist $6{,}85 = 10^{0{,}8357}$[1]).
Dann gilt

$$\begin{aligned}
68{,}5 &= 6{,}85 \cdot 10^1 = 10^{0{,}8357} \cdot 10^1 = 10^{1{,}8357}\\
685 &= 6{,}85 \cdot 10^2 = 10^{0{,}8357} \cdot 10^2 = 10^{2{,}8357}\\
6850 &= 6{,}85 \cdot 10^3 = 10^{0{,}8357} \cdot 10^3 = 10^{3{,}8357}\\
68500 &= 6{,}85 \cdot 10^4 = 10^{0{,}8357} \cdot 10^4 = 10^{4{,}8357}\\
0{,}685 &= 6{,}85 \cdot 10^{-1} = 10^{0{,}8357} \cdot 10^{-1} = 10^{0{,}8357-1}\\
0{,}0685 &= 6{,}85 \cdot 10^{-2} = 10^{0{,}8357} \cdot 10^{-2} = 10^{0{,}8357-2}\\
0{,}00685 &= 6{,}85 \cdot 10^{-3} = 10^{0{,}8357} \cdot 10^{-3} = 10^{0{,}8357-3}\\
0{,}000685 &= 6{,}85 \cdot 10^{-4} = 10^{0{,}8357} \cdot 10^{-4} = 10^{0{,}8357-4}
\end{aligned}$$

[1] 0,8357 ist ein Näherungswert für den irrationalen Logarithmus von 6,85. Strenggenommen müßten wir eigentlich schreiben: $\lg 6{,}85 \approx 0{,}8357$ bzw. $6{,}85 \approx 10^{0{,}8357}$.

F

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Logarithmen der angegebenen Zahlen, die wir in folgender Tabelle zusammenstellen:

x	$\lg x$
6,85	0,8357
68,5	1,8357
685	2,8357
6850	3,8357
68500	4,8357
0,685	0,8357–1
0,0685	0,8357–2
0,00685	0,8357–3
0,000685	0,8357–4

Das Beispiel zeigt: Wenn wir den Logarithmus der Zahl 6,85 schon kennen, so kennen wir auch die Logarithmen der Zahlen $6{,}85 \cdot 10^k$, wobei k eine ganze Zahl ist. Ferner erkennt man, daß es unzweckmäßig wäre, die Differenzen 0,8357–1; 0,8357–2 usw. auszurechnen.

5 **SATZ: Es sei r eine positive Zahl mit $1 \leqq r < 10$ und $\lg r = m$. Ist k eine beliebige ganze Zahl, so ist**

$\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\lg r = m$, d. h., es gilt $r = 10^m$. Dann ist

$r \cdot 10^k = 10^m \cdot 10^k = 10^{m+k}$, d. h.: $\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.

Man nennt die ganze Zahl k die **Kennzahl** und die Zahl m die **Mantisse** des Logarithmus von $r \cdot 10^k$.

6

x	$\lg x$	Kennzahl	Mantisse
685	2,8357	2	0,8357
6,85	0,8357	0	0,8357
0,00685	0,8357 − 3	−3	0,8357

6 **Satz: Ist $1 \leqq r < 10$, so ist $0 \leqq \lg r < 1$.**

7 Begründen Sie Satz 6, und geben Sie Intervalle an, in denen die Logarithmen der Zahlen x mit

a) $10 \leqq x < 100$, **b)** $100 \leqq x < 1000$, **c)** $0{,}1 \leqq x < 1$, **d)** $0{,}01 \leqq x < 0{,}1$

liegen!

ZUSAMMENFASSUNG

(1) Unterscheiden sich zwei positive Zahlen nur um einen Faktor 10^k (k ganzzahlig), so haben ihre Logarithmen gleiche Mantissen.
(2) Ist $x \geqq 1$, so ist die Kennzahl des Logarithmus von x um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, die in der Dezimalbruchdarstellung von x vor dem Komma stehen.
(3) Ist $0 < x < 1$, so ist die Kennzahl des Logarithmus von x negativ. Ihr Betrag ist gleich der Anzahl der Nullen, die in der Dezimalbruchdarstellung von x links vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer – *einschließlich der Null vor dem Komma* – stehen.

F

Berechnung dekadischer Logarithmen

5

Unsere Betrachtungen in der Lerneinheit F4 haben gezeigt, daß wir die dekadischen Logarithmen aller positiven Zahlen erhalten, wenn uns die dekadischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 (oder auch der Zahlen von 10^k bis 10^{k+1}, k ganzzahlig) bekannt sind. Man braucht also nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 zu berechnen. Nun ist zwar – wie wir in der Lerneinheit F2 gesehen haben – die Berechnung der Logarithmen auf elementarem Wege möglich, aber doch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Man berechnet die Logarithmen daher mit Hilfsmitteln, die hier nicht zur Verfügung stehen. Wir wollen jedoch noch an einem Beispiel zeigen, wie man durch sinnvolle Abschätzungen Logarithmen elementar berechnen kann.

7 **Es ist lg 2 zu berechnen!**
Es ist

$$\begin{array}{lcccc} & 10^0 & < 2^1 & < 10^1 \\ & 10^3 & < 2^{10} & < 10^4 \\ (1) & 10^{30} & < 2^{100} & < 10^{31} \\ & 10^{301} & < 2^{1000} & < 10^{302} \\ & 10^{3010} & < 2^{10\,000} & < 10^{3011} \end{array}$$

usw.

Potenzieren wir die Doppelungleichungen der Folge (1) mit 1 bzw. $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{100}$ ..., so erhalten wir

$$\begin{array}{lcccc} & 10^0 & < 2 < & 10^1 \\ & 10^{0,3} & < 2 < & 10^{0,4} \\ (2) & 10^{0,30} & < 2 < & 10^{0,31} \\ & 10^{0,301} & < 2 < & 10^{0,302} \\ & 10^{0,3010} & < 2 < & 10^{0,3011} \end{array}$$

usw.

Die Folge (2) stellt eine Intervallschachtelung dar, durch die die Zahl 2 bestimmt wird. Dann ist aber die Folge

$\langle 0; 1\rangle$
$\langle 0,3; 0,4\rangle$
$\langle 0,30; 0,31\rangle$
$\langle 0,301; 0,302\rangle$
$\langle 0,3010; 0,3011\rangle$
usw.

eine Intervallschachtelung für die Zahl lg 2.

Es gilt also lg 2 = 0,3010 ...

In unserer Logarithmentafel sind die Mantissen der dekadischen Logarithmen der Zahlen von 100 bis 1099 mit vier Dezimalstellen ohne Angabe der Null vor dem Komma aufgeführt.

8 **a)** Aufsuchen des Logarithmus zu einem vorgegebenen Numerus:

lg 60,4 = 1,7810; lg 6040 = 3,7810.

b) Aufsuchen des Numerus zu einem vorgegebenen Logarithmus:

lg x = 1,7896, dann ist x = 61,6; lg x = 0,7896—2, dann ist x = 0,0616.

F

(8) Vervollständigen Sie die folgenden Tabellen!

a)

x	33,9	4750	8,71	15	0,346	0,00054	99100
$\lg x$							

b)

$\lg x$	3,9330	0,8993	1,5911	2,1367	0,3729–4	0,8156–2	0,7243
x							

Die in der Tafel tabellierten Mantissen (mit Ausnahme der zu 100 und 1000 gehörenden) sind Näherungswerte irrationaler Zahlen. Der Betrag des Fehlers eines solchen Näherungswertes ist aber nicht größer als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle. So bedeutet $\lg 8{,}02 = 0{,}9042$:

$0{,}90415 < \lg 8{,}02 < 0{,}90425$.

Aufgaben f 9 bis 20

Lineare Interpolation

6

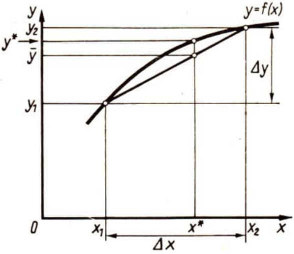
Unter gewissen Bedingungen ist es zulässig, eine gegebene Funktion f in einem kleinen Intervall, in dem f überall definiert ist, näherungsweise durch eine lineare Funktion zu ersetzen, ohne dabei einen wesentlichen Fehler zu machen. Man kann dann aus zwei bekannten benachbarten Funktionswerten dieser Funktion einen „Zwischenwert" näherungsweise berechnen.
Eine Funktion f sei in einem Intervall $\langle x_1; x_2\rangle$ definiert. Die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ seien bekannt. Es ist ein Näherungswert für den Funktionswert $f(x^*)$, $(x_1 < x^* < x_2)$ zu berechnen. Ersetzen wir die gegebene Funktion f im Intervall $\langle x_1; x_2\rangle$ näherungsweise durch eine lineare Funktion (Bild F 1), so gilt nach dem Strahlensatz

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\bar{y} - y_1}{x^* - x_1}$. Daraus folgt

(1) $\bar{y} = y_1 + \frac{(x^* - x_1) \cdot \Delta y}{\Delta x}$, und es ist

$\bar{y} \approx y^* = f(x^*)$.

Dieses Verfahren heißt **lineare Interpolation.**
Die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mantissen für mehrere aufeinanderfolgende Zeilen der Logarithmentafel sind annähernd konstant. Das heißt: In einem kleinen Intervall dürfen wir annehmen, daß der Zuwachs



F 1

F

von lg x dem Zuwachs von x proportional ist. Deswegen ist es zulässig, das Verfahren der linearen Interpolation anzuwenden[1], um auch für Zahlen mit **vier geltenden Ziffern** Näherungswerte für ihre Logarithmen zu berechnen.
Danach führt die Ermittlung eines Näherungswertes für lg 7,127 beispielsweise auf folgende Rechnung:

$$\lg 7{,}12 = 0{,}8525 < \lg 7{,}127 < 0{,}8531 = \lg 7{,}13.$$

Nach den oben verwendeten Bezeichnungen ist

$$x_1 = 7{,}12 \qquad x_2 = 7{,}13 \qquad \Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}01$$

$$y_1 = 0{,}8525 \quad y_2 = 0{,}8531 \quad \Delta y = y_2 - y_1 = 0{,}0006$$

$$x^* = 7{,}127 \qquad\qquad x^* - x_1 = 0{,}007$$

Die Formel (1) liefert

$$y^* \approx \bar{y} = 0{,}8525 + \frac{0{,}007 \cdot 0{,}0006}{0{,}01} = 0{,}8525 + \frac{7 \cdot 0{,}0006}{10}$$

$$\bar{y} = 0{,}8525 + 0{,}00042 \approx 0{,}8525 + 0{,}0004 = 0{,}8529.$$

Folglich erhält man lg 7,127 = 0,8529.

Zur Vereinfachung der Formel (1) setzen wir $\bar{y} - y_1 = \frac{d}{10^4}$ und erhalten:

$$d = \frac{(x^* - x_1)\,\Delta y \cdot 10^4}{\Delta x}.$$

$\Delta y \cdot 10^4 = D$ ist stets eine ganze Zahl, die wir **Tafeldifferenz** nennen.
Außerdem ist stets $\frac{x^* - x_1}{\Delta x} = \frac{n}{10}$, wobei n eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 ist, und zwar diejenige, die durch die vierte geltende Ziffer des Numerus bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\boxed{d = \frac{D \cdot n}{10}}. \tag{2}$$

Wir runden d auf eine ganze Zahl d' und erhalten $\bar{y} = y_1 + \frac{d'}{10^4}$.

9 Es ist ein Näherungswert für lg 473,8 zu bestimmen.

$\lg 473 = 2{,}6749$

$\lg 474 = 2{,}6758 \quad D = 9;\ n = 8$

$d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{9 \cdot 8}{10} = 7{,}2 \approx 7$

$\lg 473{,}8 = 2{,}6749 + 0{,}0007$

$\lg 473{,}8 = 2{,}6756$

Es sei ein Logarithmus gegeben, dessen Mantisse nicht in der Tafel steht. Durch Umkehrung des eben durchgeführten Verfahrens können wir einen Numerus mit vier geltenden Ziffern angeben.

[1] In der Lerneinheit F 11 werden wir sehen, daß die Menge aller geordneten Paare $[x;\ \lg x]$ mit $x > 0$ eine Funktion ist.

F

Aus (2) folgt

(3) $$\boxed{n = \frac{d \cdot 10}{D}}\,.$$

10 Gegeben ist $\lg x = 0{,}8827$.

Es ist $0{,}8825 = \lg 7{,}63 < \lg x < \lg 7{,}64 = 0{,}8831$.

In diesem Falle ist

$D = 6;\ d = 2,$

also $n = \frac{2 \cdot 10}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}\bar{3} \approx 3.$

Wir erhalten

$x = 7{,}633.$

Der Fehler eines durch lineare Interpolation berechneten Logarithmus bzw. Numerus ist größer als der Fehler eines Logarithmus bzw. Numerus, den wir der Tafel unmittelbar entnehmen können, denn

1. D ist fehlerhaft, da die in der Tafel angegebenen Mantissen nur Näherungswerte sind,
2. die Annahme des linearen Anwachsens der Logarithmen trifft nur annähernd zu,
3. durch das Runden von d bzw. n auf eine ganze Zahl entsteht eine weitere Ungenauigkeit.

Die lineare Interpolation läßt sich auch in anderen Tafeln (Tafel der Quadratzahlen, Tafel der Quadratwurzeln, Tafel der Kubikzahlen u. a.) anwenden.

Aufgaben f 21 bis 32

Proportionalität der Logarithmensysteme

7

Das dekadische Logarithmensystem verdankt seine Vorzugsstellung der Tatsache, daß man die Logarithmen für alle positiven Zahlen, die sich nur um einen Faktor 10^k, (k ganzzahlig) unterscheiden, aus *einem* Tafelwert bestimmen kann. Prinzipiell kann jede positive Zahl $a \neq 1$ als Basis eines Logarithmensystems verwendet werden. Zwischen zwei verschiedenen Logarithmensystemen bestehen Beziehungen, die die Berechnung der Logarithmen des einen Systems aus denen des anderen ermöglichen. Wir setzen voraus, daß uns die Logarithmen aller positiven reellen Zahlen mit der Basis a, ($a > 0;\ a \neq 1$) bekannt sind. Es soll der Logarithmus einer beliebigen positiven reellen Zahl c zur Basis b, ($b > 0;\ b \neq 1$) berechnet werden. Es sei

$\log_a c = \alpha,\ \log_b c = \beta,\ \log_a b = \gamma,$

das heißt, es ist

(1) $c = a^\alpha = b^\beta$ und (2) $b = a^\gamma$.

F

Setzt man in (1) $b = a^\gamma$, erhält man

(3) $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta = a^{\gamma\beta}$.

Aus (3) folgt $\beta = \frac{\alpha}{\gamma}$ bzw.

(4) $$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}} \quad (a, b > 0;\ a, b \neq 1;\ c > 0).$$

Die Gleichung (4) besagt, daß die Logarithmen ein und derselben positiven Zahl c aus zwei verschiedenen Logarithmensystemen einander proportional sind. Man hat alle Logarithmen des Systems mit der Basis a mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{\log_a b}$ zu multiplizieren, um die entsprechenden Logarithmen des Systems mit der Basis b zu erhalten. Aus (4) folgt speziell für $c = a$

$$\boxed{\log_b a \cdot \log_a b = 1} \quad (a, b > 0;\ a, b \neq 1).$$

Insbesondere können wir aus den dekadischen Logarithmen die Logarithmen für jede andere Basis berechnen. Setzt man in (4) $a = 10$, so erhält man

(5) $$\boxed{\log_b c = \frac{\lg c}{\lg b}} \quad (b > 0;\ b \neq 1;\ c > 0).$$

11 Es ist $\log_3 7$ zu berechnen.

Nach (5) gilt $\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3} = \frac{0{,}8451}{0{,}4771} \approx 1{,}77$

Aufgaben f 33 und 34

Exponentialfunktionen

8

Da zu jeder reellen Zahl x genau eine reelle Zahl 2^x existiert, ist die Menge f aller geordneten Paare $[x; 2^x]$, (x reell) eine Funktion, die durch die Gleichung

$y = 2^x$ oder $f(x) = 2^x$, (x reell)

dargestellt werden kann. Die nichtrationale Funktion f nennen wir eine **Exponentialfunktion.** Sie ist für alle reellen Zahlen definiert. Für jede reelle Zahl x ist 2^x positiv. Andererseits existiert nach Satz F2 zu jeder positiven reellen Zahl y genau eine reelle Zahl x mit $2^x = y$. Demnach ist der Wertevorrat von f die Menge der positiven reellen Zahlen. Das Bild der Funktion f verläuft also nur im ersten und zweiten Quadranten. Gemeinsame Punkte mit der x-Achse gibt es nicht, da f keine Nullstellen hat. Wegen $f(0) = 1$ schneidet das Bild der Funktion f die y-Achse im Punkt $P(0; 1)$. Nach Satz F1 (5) gilt:

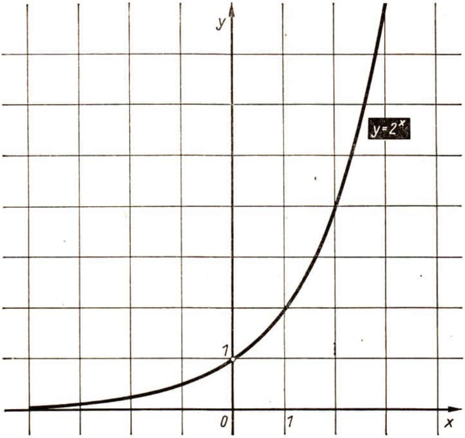
Wenn $x_1 < x_2$, so ist $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

F

Das bedeutet: f ist eine monoton wachsende Funktion. Da nun alle positiven reellen Zahlen Funktionswerte der Funktion f sind, folgt: Mit wachsendem x werden die Funktionswerte der Funktion f größer als jede noch so große reelle Zahl, z. B. werden sie größer als jede der Zahlen 10^n, (n eine natürliche Zahl). Ist x_1 eine beliebige reelle Zahl, so gilt

$$f(x_1) = 2^{x_1} \quad \text{und} \quad f(-x_1) = 2^{-x_1} = \frac{1}{2^{x_1}}.$$

Das heißt: Die Funktionswerte zweier Argumente, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, sind zueinander reziprok. Demnach werden die Funktionswerte von f für negative Argumente kleiner als jede der Zahlen $\frac{1}{10^n}$. Das Bild der Funktion f nähert sich also mit abnehmendem x asymptotisch der negativen x-Achse (Bild F 2). Man erhält eine zusammenhängende Kurve, die überall „nach unten gewölbt“ ist.



F 2

(9) Welcher formale Unterschied besteht zwischen den Funktionen $y = 2^x$ und $y = x^2$?

Auch $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ist eine Exponentialfunktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und deren Wertevorrat die Menge der positiven reellen Zahlen ist.
Für ein beliebiges Argument x_1 stimmt der Funktionswert der Funktion $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ mit dem Funktionswert der Funktion $f(x) = 2^x$ an der Stelle $-x_1$ überein, denn es ist

$$f_1(x_1) = \frac{1}{2^{x_1}} = 2^{-x_1} = f(-x_1).$$

F

(10) Wie erhält man das Bild der Funktion $f_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ aus dem Bild der Funktion $f(x) = 2^x$? Zeichnen Sie das Bild der Funktion f_1 im Intervall $\langle -4; 4 \rangle$!

9

Wenn a eine positive reelle Zahl ist, ist a^x für jede reelle Zahl x definiert. Demnach erhalten wir für jede positive reelle Zahl a eine Exponentialfunktion

$f(x) = a^x, \ (a > 0)$,

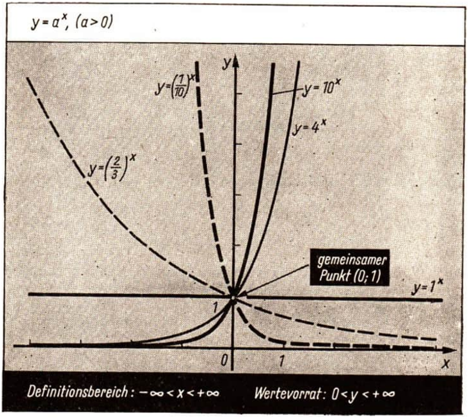
die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Der Wertevorrat jeder Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $(a > 0;\ a \neq 1)$ enthält alle positiven reellen Zahlen. Für alle diese Funktionen gilt

$f(0) = a^0 = 1.$

Wegen $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $(a > 0;\ x_1,\ x_2$ reell) gilt für alle Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ das sogenannte **Additionstheorem**

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)}.$$

Ist $a > 1$, so folgt aus $x_1 < x_2$ stets $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deshalb sind alle Funktionen $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ monoton wachsende Funktionen. Mit zunehmendem x werden die Funktionswerte größer als jede noch so große reelle Zahl. Wegen $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(a > 0)$ werden die Funktionswerte für negative Argumente kleiner als jede noch



F

so kleine positive reelle Zahl. Das Bild jeder Funktion $f(x) = a^x$, $(a > 1)$ nähert sich mit abnehmendem x asymptotisch der x-Achse.
Je größer die Basis a, $(a > 1)$ einer Exponentialfunktion ist, desto steiler verläuft das Bild dieser Funktion für positive Argumente und desto „schneller" schmiegt sich die Kurve für negative Argumente an die x-Achse an.
Ist a eine fest vorgegebene positive Zahl, so liegen die Bilder der Funktionen $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ und $y = a^x$ wegen $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ axialsymmetrisch zur y-Achse (Bild F 3).
Deswegen brauchen wir die Funktionen $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ nicht gesondert zu untersuchen; denn für jede Basis a mit $0 < a < 1$ gilt $\frac{1}{a} > 1$, und die Exponentialfunktionen mit Basen, die größer als 1 sind, sind uns bereits bekannt.

(11) Geben Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $f(x) = a^x$ mit $0 < a < 1$ an!

Anwendungen von Exponentialfunktionen

10

Exponentialfunktionen haben für die Physik, für die Biologie (Wachstumsprozesse) und für die Wirtschaft große Bedeutung.

12 **a)** Der Zusammenhang zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h (gemessen in km) wird durch die folgende Exponentialfunktion dargestellt.

$$p = p_0 a^h \quad \left(p_0 = 760 \text{ Torr}, \; a \approx 0{,}8823^{\frac{1}{\text{km}}}\right)$$

b) Ein Körper mit der Anfangstemperatur T_0 kühle sich in der Zeit t in einem Medium konstanter Temperatur auf die Temperatur T ab. Nach Newton gilt

$$T = T_0 e^{-at};$$

dabei ist $e = 2{,}71828\ldots$ eine irrationale Zahl, und a ist eine Konstante, die von der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers, seiner Wärmeleitfähigkeit und seiner Wärmekapazität abhängig ist.

c) Der biologische Wachstumsprozeß (z. B. Holzbestand eines Waldes) läßt sich unter vereinfachten Bedingungen durch die Exponentialfunktion

$$m = m_0 e^{at}$$

darstellen. Darin ist m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Stoffmenge, e die im Beispiel **b)** erwähnte irrationale Zahl, a eine für den Wachstumsprozeß des betreffenden Stoffes charakteristische Konstante und m die zu einem beliebigen Zeitpunkt t vorhandene Stoffmenge.

Aufgaben f 35 bis 38

F

(12) Gegeben sei die Menge f aller geordneten Paare $[x; \log_2 x]$, $(x > 0)$.

a) Begründen Sie, warum die Menge f eine Funktion ist!

b) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion f auf, und zeichnen Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 < x \leqq 10$!
Anleitung: Berechnen Sie näherungsweise einige Funktionswerte unter Verwendung der Formel $\log_2 x = \dfrac{\lg x}{\lg 2}$ mit Hilfe des Rechenstabes!

c) Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve!

Die Funktion $y = \log_2 x$, $(x > 0)$ nennen wir eine **Logarithmusfunktion.**

In der Lerneinheit F8 wurde gezeigt, daß die Funktion $f(x) = 2^x$ monoton ist. Demnach ist f eine eineindeutige Funktion und somit umkehrbar. Die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ erhalten wir, indem wir in jedem geordneten Paar $[x; y]$, das zu f gehört, die Zahlen x und y miteinander vertauschen. Die Funktion f ist die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$, für die gilt

$$y = 2^x, \quad (x, y \text{ reell}; \; y > 0).$$

Die Funktion $\bar{f}$ ist die Menge aller geordneten Paare $[y; x]$, für die gilt

$$x = \log_2 y, \quad (x, y \text{ reell}; \; y > 0).$$

Die Gleichung für die Funktion $\bar{f}$ lautet demnach $\bar{f}(y) = \log_2 y$, $(y > 0)$. Durch Umbenennung der Variablen erhält man die Gleichung

$$\bar{f}(x) = \log_2 x, \quad (x > 0).$$

Das ist aber die in der Übung 12 untersuchte Funktion. Demnach erhalten wir: Die Funktionen

$$f(x) = 2^x, \; (x \text{ reell}) \quad \text{und} \quad \bar{f}(x) = \log_2 x, \; (x \text{ reell}; \; x > 0)$$

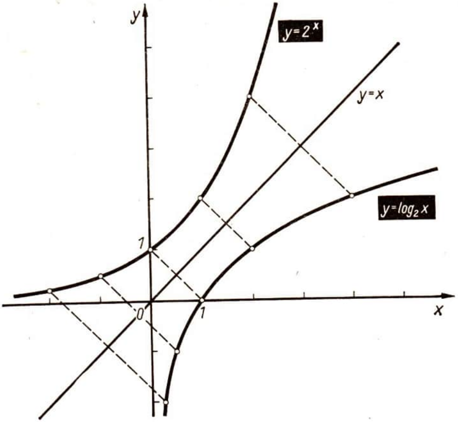
sind zueinander invers. Wir erhalten das Bild der Funktion $\bar{f}$ durch Spiegelung des Bildes der Funktion f an der Geraden $y = x$ (Bild F 4).

Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $(a > 0;\; a \neq 1)$ ist monoton und damit umkehrbar. Für eine fest vorgegebene Basis a, $(a > 0;\; a \neq 1)$ gehört zu der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ als inverse Funktion die Logarithmusfunktion $\bar{f}(x) = \log_a x$, $(x > 0)$. Nach Satz D15 ist auch $f(x) = a^x$ die inverse Funktion zu $\bar{f}(x) = \log_a x$. Das gilt für jede positive Basis $a \neq 1$, so daß wir sagen können:

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ und Logarithmusfunktionen $\bar{f}(x) = \log_a x$, $(x > 0)$, die die gleiche Basis a, $(a > 0;\; a \neq 1)$ haben, sind zueinander invers.

Wir erhalten demnach das Bild einer jeden Logarithmusfunktion $\bar{f}(x) = \log_a x$, indem wir das Bild der entsprechenden Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ an der Geraden $y = x$ spiegeln.

F



F 4

Die Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ sind nur für positive reelle Zahlen definiert und haben als Wertevorrat die Menge der reellen Zahlen. Ist $a > 1$, so wachsen die Funktionen monoton; ihre Funktionswerte sind für Argumente $x > 1$, $(0 < x < 1)$ positiv (negativ). Die Bilder der Funktionen $y = \log_a x$ verlaufen nur im ersten und vierten Quadranten und schneiden die x-Achse an der Stelle $x = 1$, denn es ist $\log_a 1 = 0$. Für $a > 1$ schmiegen sich die Kurven mit abnehmendem x, $(x > 0)$ an die negative y-Achse.

Aufgaben f 39 bis 44

Logarithmengesetze

12

Mit Hilfe der Logarithmentafel können wir jede positive reelle Zahl als Potenz mit der Basis 10 darstellen, so daß wir Produkte, Quotienten und Potenzen positiver reeller Zahlen „logarithmisch" berechnen können.

13 Aus der Logarithmentafel entnehmen wir:

$\lg 7 = 0{,}8451$, $\lg 13 = 1{,}1139$, $\lg 91 = 1{,}9590$.

Dann gilt:

$7 \cdot 13 = 10^{0,8451} \cdot 10^{1,1139} = 10^{0,8451+1,1139} = 10^{1,9590} = 91.$

Daraus folgt

$\lg (7 \cdot 13) = \lg 91 = 1{,}9590 = \lg 7 + \lg 13.$

F

Die Berechnung des Produktes $7 \cdot 13$ wird zurückgeführt auf die Addition der Logarithmen der Faktoren 7 und 13.

14 Der Quotient $\frac{94{,}6}{59{,}5}$ ist mit Hilfe von Logarithmen zu berechnen!

Es ist

$$\frac{94{,}6}{59{,}5} = \frac{10^{1{,}9759}}{10^{1{,}7745}} = 10^{1{,}9759-1{,}7745} = 10^{0{,}2014}$$

$$\frac{94{,}6}{59{,}5} = 1{,}59$$

7 **SATZ: Sind x_1 und x_2 positive reelle Zahlen und ist a eine positive von 1 verschiedene reelle Zahl, so gilt:**

$$\text{(1)}\ \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad \text{(2)}\ \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\text{(3)}\ \log_a x_1^r = r \log_a x_1 \ (r \text{ reell}).$$

Beweis: Es sei

$\log_a x_1 = b_1$ und $\log_a x_2 = b_2$ d. h. $x_1 = a^{b_1}$ und $x_2 = a^{b_2}$.

Dann ist:

$(1')$ $x_1 \cdot x_2 = a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$,

also $\log_a (x_1 \cdot x_2) = b_1 + b_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

Ferner ist: $(2')$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1} \cdot a^{-b_2} = a^{b_1-b_2}$,

also $\log_a \frac{x_1}{x_2} = b_1 - b_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$.

Ferner ist:

$(3')$ $x_1^r = (a^{b_1})^r = a^{rb_1}$,

also $\log_a x_1^r = rb_1 = r \log_a x_1$.

Für den Logarithmus eines Produktes aus endlich vielen positiven Faktoren $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gilt

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n.$$

Aus (3) erhält man speziell für $r = \frac{1}{n}$, (n positiv ganz):

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x_1} = \frac{1}{n} \log_a x_1}.$$

15 a) $\lg (7^3 \cdot \sqrt[3]{7}) = 3 \lg 7 + \frac{1}{3} \lg 7 = \frac{10}{3} \lg 7$

F

b) $\lg \frac{5^2 \cdot 13}{7 \cdot \sqrt[3]{11}} = 2 \lg 5 + \lg 13 - \left(\lg 7 + \frac{1}{3} \lg 11\right)$

c) $2 \log_a u + \frac{1}{2} \log_a (u - v) - \frac{2}{3} \log_a v = \log_a \frac{u^2 \cdot \sqrt{u - v}}{\sqrt[3]{v^2}}$

$(u > 0;\ v > 0;\ u > v;\ a > 0;\ a \neq 1)$

d) $2 - \lg 25 = \lg 100 - \lg 25 = \lg \frac{100}{25} = \lg 4$

Aufgaben f 45 und 46

Beispiele für logarithmische Berechnungen

13

(Anmerkung: Die in den Beispielen 16 bis 20 gegebenen Zahlen sind „genaue" Zahlen, d. h., es handelt sich nicht um Zahlen, die durch Runden entstanden sind und nicht um Maßzahlen gemessener Größen.)

Multiplizieren

16 $x = 5{,}73 \cdot 0{,}28 \cdot 15{,}84$

$\lg x = \lg 5{,}73 + \lg 0{,}28 + \lg 15{,}84$

$x = 25{,}42$

n	$\lg n$
5,73	0,7582
0,28	0,4472–1
15,84	1,1998
x	2,4052–1
x	1,4052

Dividieren

17 **a)** $x = \frac{7{,}26}{0{,}49}$

$\lg x = \lg 7{,}26 - \lg 0{,}49$

$x = 14{,}81$

n	$\lg n$
7,26	0,8609
0,49	0,6902–1
x	0,1707+1
x	1,1707

b) $x = \frac{2{,}424}{9{,}148}$

$x = 0{,}265$

n	$\lg n$
	1 –1
2,424	0,3845
9,148	0,9613
x	0,4232–1

(Anmerkung: Es ist $0{,}3845 = 1{,}3845 - 1$)

Potenzieren

18 $x = 0{,}877^4$

$\lg x = 4 \lg 0{,}877$

$x = 0{,}5916$

n	$\lg n$
0,877	0,9430–1
x	3,7720–4
x	0,7720–1

Radizieren

19 **a)** $x = \sqrt[5]{632}$

$\lg x = \frac{1}{5} \lg 632$

$x = 3{,}632$

n	$\lg n$
632	2,8007
x	0,5601

b) $x = \sqrt[3]{0{,}798}$

$x = 0{,}9275$

n	$\lg n$
0,798	$\overset{2}{0},90\overset{-2}{20}-1$
x	0,9673–1

Zusammengesetzte Aufgaben

20 **a)** $x = \dfrac{25{,}7^2 \cdot 119}{\sqrt[3]{2870}}$

Wir setzen: $25{,}7^2 \cdot 119 = p_1$,

$\sqrt[3]{2870} = p_2$.

Dann ist: $\lg p_1 = 2 \lg 25{,}7 + \lg 119$

$\lg p_2 = \frac{1}{3} \lg 2870$

$\lg x = \lg p_1 - \lg p_2$

Ergebnis: $x = 5530$

n	$\lg n$
25,7 2870	1,4099 $\Vert \cdot 2$ 3,4579 $\Vert \cdot \frac{1}{3}$
$25{,}7^2$ 119	2,8198 2,0755
p_1	4,8953
$\sqrt[3]{2870} = p_2$	1,1526
x	3,7427

b) $x = \dfrac{76{,}7 + \sqrt[3]{50\,200} \cdot 70{,}14}{(-21{,}7)^3}$

Wir setzen:

$\sqrt[3]{50\,200} \cdot 70{,}14 = p_1$,

$(-21{,}7)^3 = p_2$.

$p_1 = 2587$

$76{,}7 + p_1 = 2663{,}7 \approx 2664$

Ergebnis: $x = -0{,}2606$

n	$\lg n$
50 200 21,7	4,7007 $\Vert \cdot \frac{1}{3}$ 1,3365 $\Vert \cdot 3$
$\sqrt[3]{50\,200}$ 70,14	1,5669 1,8459
p_1	3,4128
2664 $21{,}7^3$	$\overset{1}{3},\overset{-1}{4}255$ 4,0095
$\lvert x \rvert$	0,4160–1

F

Beim numerischen Rechnen mit Hilfe von Logarithmen erhält man für die gesuchten Ergebnisse stets nur Näherungswerte. Die Genauigkeit dieser Näherungswerte ist um so größer, je mehr Dezimalstellen die tabellierten Mantissen in der benutzten Logarithmentafel haben. So erhält man beispielsweise für das Produkt $50{,}21 \cdot 42{,}54 = 2135{,}9334$ mit Hilfe einer

vierstelligen Tafel: 2136
fünfstelligen Tafel: 2135,9
siebenstelligen Tafel: 2135,933.

Mit der uns zur Verfügung stehenden vierstelligen Tafel erhält man im allgemeinen Ergebnisse mit vier geltenden Ziffern, wobei allerdings die vierte Ziffer meist nicht mehr zuverlässig ist.

Aufgaben f 47 bis 65

Rechnen mit Näherungswerten

14

In der Praxis hat man hauptsächlich Rechnungen auszuführen, bei denen die Eingabewerte Näherungswerte sind, d. h., es handelt sich um gerundete Zahlen (z. B. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$) oder um Maßzahlen gemessener Größen [z. B. $l = (4{,}7 \pm 0{,}05)$ cm]. Bei solchen Rechnungen erhält man sowieso – auch wenn nicht logarithmisch gerechnet wird – nur Näherungswerte für die Resultate.

21 Es ist $2{,}287 \cdot 1{,}384 = 3{,}165\,208$.

a) Runden wir die Faktoren auf drei geltende Ziffern, so erhält man
$2{,}29 \cdot 1{,}38 = 3{,}1602$.

b) Rundet man auf zwei geltende Ziffern, so gilt:
$2{,}3 \cdot 1{,}4 = 3{,}22$.

Man erkennt, daß im Fall **a)** die beiden letzten Grundziffern von 3,1602 völlig sinnlos sind. Das Ergebnis wird daher nur mit drei geltenden Ziffern angegeben: 3,16. Im Fall **b)** gibt man das Ergebnis nur mit zwei geltenden Ziffern an: 3,2.

Beim Rechnen mit Näherungswerten muß unbedingt beachtet werden, daß im Resultat keine sinnlosen Ziffern beibehalten werden und damit eine Genauigkeit vorgetäuscht wird, die gar nicht vorhanden ist.

Unter den wesentlichen oder geltenden Ziffern eines Näherungswertes versteht man alle Grundziffern dieser Zahl mit Ausnahme der Nullen, die links von der ersten von Null verschiedenen Grundziffer stehen und derjenigen Nullen rechts, die an Stelle unbekannter oder vernachlässigter Grundziffern geschrieben werden.

22 **a)** Die Zahlen 3,1 bzw. 3,14 bzw. 3,1416 sind Näherungswerte für die Zahl π mit zwei bzw. drei bzw. fünf geltenden Ziffern.

b) Die Einwohnerzahl der DDR beträgt etwa 17 000 000. Diese Zahl hat zwei geltende Ziffern. Man schreibt deswegen:
$17 \cdot 10^6$ oder 17 Millionen.

c) Runden wir die Zahl 738,54 auf Hunderter, so erhalten wir die Zahl 700 mit einer geltenden Ziffer. Man schreibt besser: $7 \cdot 10^2$.

d) Die Körpertemperatur eines Menschen, gemessen mit einem Fieberthermometer, dessen Skale in Zehntel Grad unterteilt ist, betrage 37,0 °C. Diese Zahl hat drei geltende Ziffern.

Führt man eine Rechnung mit Näherungswerten verschiedener Genauigkeitsstufen durch, so ist für die Genauigkeit des Resultates stets der Näherungswert mit der geringsten Genauigkeit maßgebend. Hat ein Näherungswert n zuverlässige geltende Ziffern, so ist es nicht sinnvoll, im Resultat einer Rechnung mit diesem Näherungswert mehr als n wesentliche Ziffern anzugeben. Vor der

F

Rechnung kann man die genaueren Eingabewerte so runden, daß sie nur eine wesentliche Ziffer mehr haben als der Näherungswert mit der geringsten Anzahl wesentlicher Ziffern. Für das Rechnen mit Näherungswerten wollen wir uns folgende Regeln[1] merken, die hier nur mitgeteilt werden sollen:

1. Bei der Addition und Subtraktion von Näherungswerten gibt man im Resultat nur so viele **Dezimalstellen** an, wie in dem Eingabewert mit der kleinsten Anzahl von Dezimalstellen vorhanden sind.[2]

2. Beim Multiplizieren und Dividieren von Näherungswerten gibt man im Ergebnis nur so viele **geltende Ziffern** an, wie in dem Eingabewert mit der geringsten Anzahl geltende Ziffern vorhanden sind.

3. Beim Potenzieren und Radizieren mit den Exponenten 2 oder 3 behält man im Ergebnis so viele geltende Ziffern bei, wie in der gegebenen Basis bzw. in dem gegebenen Radikanden zuverlässige geltende Ziffern vorhanden sind.

4. Ist das Ergebnis einer Rechnung mit Näherungswerten nur ein Zwischenergebnis, mit dem weitere Rechenoperationen auszuführen sind, so wird bei dem Zwischenergebnis eine Ziffer mehr berücksichtigt als durch die Regeln 1 bis 3 angegeben wird. Im Endergebnis wird die letzte Ziffer dann weggelassen.

5. Soll man bei einer Rechenoperation 2. oder 3. Stufe einen Näherungswert mit n geltenden Ziffern berechnen, so muß man von den Eingabewerten $n+1$ geltende Ziffern kennen.
Um z. B. den Flächeninhalt eines Kreises mit vier geltenden Ziffern angeben zu können, muß man für π den Näherungswert 3,1416 nehmen. Soll man den Quotienten $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ mit drei wesentlichen Ziffern angeben, so berechnet man den Quotienten $\frac{1{,}414}{1{,}732}$ mit vier geltenden Ziffern und rundet danach auf drei geltende Ziffern.

23 **a)** $2{,}000 \cdot 4{,}000 = 8{,}000$
b) $2{,}62 \cdot 4{,}03 = 10{,}6$
c) $2{,}620 \cdot 4{,}030 = 10{,}56$
d) $1{,}80^2 = 3{,}24$
e) $3{,}723 \cdot 1{,}8 = 6{,}7$
f) $3{,}723 \cdot 1{,}80 = 6{,}70$
g) $3{,}723 \cdot 1{,}800 = 6{,}701$
h) $\sqrt{3{,}24} = 1{,}80$

24 Die Masse eines 113 m langen Kupferdrahtes beträgt 1031 g. Die Dichte des Kupfers ist $\varrho = 8{,}93\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Welchen Durchmesser hat der Draht?

Es ist:

(1) $m = \varrho V$, (2) $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$.

F

Zuschneiden der Maßeinheiten:

$m = 1031\,\mathrm{g}$; $\varrho = 8{,}93\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $h = 113\,\mathrm{m} = 11\,300\,\mathrm{cm}$

Aus (1) und (2) erhalten wir

[1] Vgl.: *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Band 1, S. 374, Berlin 1954.
[2] Diese Regel läßt sich ebenfalls auf der Grundlage der wesentlichen Ziffern formulieren.

$$m = \varrho \frac{\pi}{4} d^2 h$$

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\varrho \pi h}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 1031 \text{ g}}{8{,}93 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \pi \cdot 11\,300 \text{ cm}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4124}{8{,}93 \cdot \pi \cdot 11\,300} \text{cm}}$$

n	lg n
	2 −2
4124	3,6153
8,93	0,9509 (+)
π	0,4971 (+)
11 300	4,0531 (+)
Nenner	5,5011
Radikand	0,1142−2 $\mid \cdot \frac{1}{2}$
0,114	0,0571−1

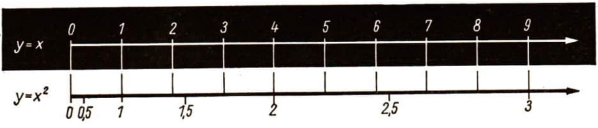
Das Ergebnis wird mit drei geltenden Ziffern angegeben. Da die Zahl 4124 nur eine geltende Ziffer mehr hat als die Zahlen 8,93 und 11300, ist es sinnvoll, den Logarithmus von 4124 durch lineare Interpolation zu ermitteln. Man erhält das Ergebnis

$d = 0{,}114 \text{ cm} = 1{,}14 \text{ mm}$

Die logarithmische Skale

15

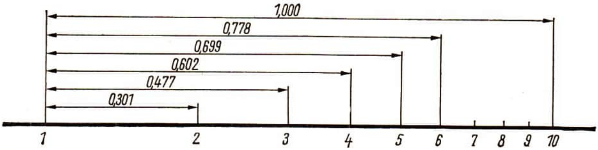
Eine Funktion kann man auch durch eine Skale darstellen. Für eine gegebene Funktion f gewinnt man eine solche geradlinige Skale, indem man nach Wahl einer Einheitsstrecke die Funktionswerte $f(x)$ von einem festgelegten Anfangspunkt auf einer Geraden abträgt und an die so erhaltenen Punkte die Argumente x schreibt. Das Bild F 5 zeigt einen Abschnitt der Skale für die Funktion $y = x^2$, bei der die Einheitsstrecke 1 cm lang ist. Zum Vergleich ist ein Abschnitt der Skale für die Funktion $y = x$ mit der gleichen Einheitsstrecke angegeben.



F 5

Das Bild F 6 zeigt den Abschnitt einer Skale für die Funktion $y = \lg x$ für die Argumente x mit $1 \leqq x \leqq 10$. Als Einheitsstrecke dieser **logarithmischen Skale** wurde eine Strecke von 10 cm Länge angenommen. Wegen $\lg 1 = 0$ bzw. $\lg 10 = 1$ sind Anfangs- bzw. Endpunkt der Einheitsstrecke mit 1 bzw. 10 bezeichnet. Jeder Zahl x mit $1 \leqq x \leqq 10$ ist eine Strecke mit dem Anfangspunkt 1 zugeordnet. Der Endpunkt dieser Strecke ist $(10 \cdot \lg x)$ cm vom Anfangspunkt der

Skale entfernt. Jede Strecke mit dem Anfangspunkt 1 und einem Endpunkt x, der zwischen 1 und 10 liegt, stellt den Logarithmus einer Zahl x mit $1 \leqq x \leqq 10$ dar.



F 6

(13) Fertigen Sie eine Skale für die Funktion $y = \lg x$ für das Intervall $1 \leq x \leq 10$ an, in dem Sie als Einheitsstrecke eine Strecke von 25 cm Länge wählen! Markieren Sie auch die Teilstriche für die Argumente 1,1; 1,2; 1,3; ···; 1,9!

Die im Bild F 6 dargestellte Skale läßt sich nach rechts und links fortsetzen. Erweitert man die Skale, indem man beispielsweise für die Argumente 20, 30, ···, 100 die Teilstriche einzeichnet, so erhält man ein weiteres Teilstück der unendlich langen logarithmischen Skale, das dem schon gezeichneten kongruent ist.

(14) Erläutern Sie, warum man den im Bild F 6 dargestellten Abschnitt der logarithmischen Skale auch als Abschnitt für die Argumente x mit $10^k \leqq x \leqq 10^{k+1}$ (k ganz) ansehen kann!

Der Rechenstab

16

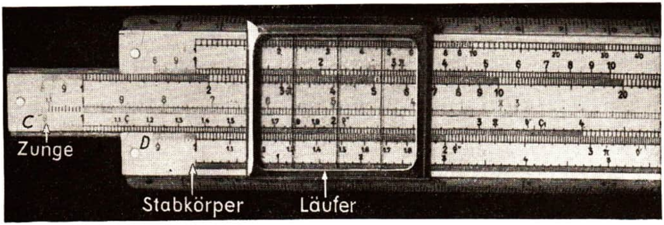
(15) Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes!

a) $1,37 \cdot 4,62$ **b)** $\pi \cdot 40,8$ **c)** $725 : 441$ **d)** $3,34 : 5,07$ **e)** 84^2 **f)** $\sqrt{0,655}$

Der Rechenstab besteht aus einem System logarithmischer Skalen, die auf dem Stabkörper bzw. der Zunge mit großer Genauigkeit aufgetragen sind. Die Skalen A und B bzw. C und D sind kongruent. Als Einheitsstrecke für die Skalen C und D wird meist eine Strecke mit der Länge 25 cm gewählt. Die Einheitsstrecke für die Skalen A und B hat dann eine Länge von 12,5 cm. Über der Skale A befindet sich die Skale K, deren Einheitsstrecke eine Länge von $8\frac{1}{3}$ cm hat, wenn die Länge der Einheitsstrecke der Skale C 25 cm beträgt.

(16) Warum sind die Strecken von 2 bis 4 bzw. von 4 bis 8 genauso lang wie die Strecke von 1 bis 2?

F



F 7

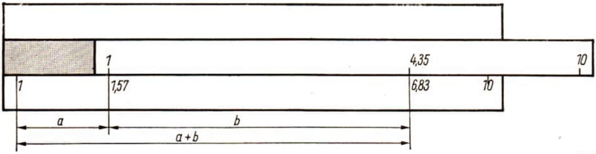
Das Multiplizieren bzw. Dividieren mit Hilfe des Rechenstabes beruht auf den Formeln $\lg (x_1 \cdot x_2) = \lg x_1 + \lg x_2$ bzw. $\lg \frac{x_1}{x_2} = \lg x_1 - \lg x_2$.

Das Addieren bzw. Subtrahieren von Logarithmen wird mit dem Rechenstab geometrisch ausgeführt.

25 *Aufgabe:* $x = 1{,}57 \cdot 4{,}35$
a) C 1 über D 157;
b) unter C 435 auf D ablesen: 683

Ergebnis: $x \approx 6{,}83$

Das Bild F 8 veranschaulicht die zur Lösung der Aufgabe erforderliche Einstellung. Die Maßzahlen der Strecken a bzw. b sind unter Berücksichtigung der Einheitsstrecke lg 1,57 bzw. lg 4,35. Die Maßzahl der Strecke $a + b$ ist dann $\lg 1{,}57 + \lg 4{,}35 = \lg (1{,}57 \cdot 4{,}35)$.



F 8

Dieselbe Einstellung ermöglicht die Lösung der Aufgabe

$6{,}83 : 4{,}35 \approx 1{,}57$.

17 Veranschaulichen Sie entsprechend an Hand der Aufgabe $2{,}75 \cdot 6{,}24$ die „Multiplikation mit Rückschlag“!
Deuten Sie an Ihrer Zeichnung folgende Rechnung:

$$\lg x = \lg 62{,}4 - (\lg 10 - \lg 2{,}75) = \lg 62{,}4 - \lg 10 + \lg 2{,}75$$
$$= \lg \frac{62{,}4}{10} + \lg 2{,}75 = \lg 6{,}24 + \lg 2{,}75 = \lg (6{,}24 \cdot 2{,}75).$$

Berücksichtigen Sie die Überlegungen der Übung 14!

Die für die Skalen D und A verwendeten Einheitsstrecken verhalten sich wie 2 : 1. Demnach ist die Strecke für $\lg a^2 = 2 \lg a$ auf der Skale A genauso lang wie die Strecke für $\lg a$ auf der Skale D. Über jeder Zahl a auf der Skale D steht also auf der Skale A das Quadrat dieser Zahl.

(18) Vergleichen Sie die Skalen D und K miteinander, und erläutern Sie, wie man mit diesen beiden Skalen Kubikzahlen bzw. Kubikwurzeln berechnen kann!

Berechnung zusammengesetzter Aufgaben

17

Ein Produkt aus mehreren Faktoren wird schrittweise berechnet. Die Zwischenergebnisse werden mit dem Läuferstrich markiert, bis man die Zunge für die nächste Berechnung eingestellt hat.

26 *Aufgabe:* $x = \dfrac{\sqrt{31{,}5} \cdot 404}{0{,}296 \cdot 123}$ *Überschlag:* $\dfrac{6 \cdot 4 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 1 \cdot 10^2} = \dfrac{6 \cdot 4}{3} \cdot 10 = 80$

Wir berechnen x mit Hilfe des Rechenstabs, indem wir abwechselnd dividieren und multiplizieren.

a) Läuferstrich über A 315 (wegen $\sqrt{31{,}5} \approx 6$ steht der Läuferstrich zwischen den mit 30 und 40 bezeichneten Punkten der Skale A);
b) C 296 unter (festgehaltenem) Läuferstrich (nicht ablesen);
c) Läuferstrich über C 404 (nicht ablesen);
d) C 123 unter Läuferstrich;
e) Unter C 1 ablesen: D 622.

Aus dem Überschlag entnehmen wir die Größenordnung.

Ergebnis: $x \approx 62{,}2$

Die Genauigkeit eines mit dem Rechenstab gewonnenen Ergebnisses entspricht der Genauigkeit einer dreistelligen Logarithmentafel. Bei allen Rechnungen, die mit dem Stab ausgeführt werden, erhält man die Ergebnisse mit drei wesentlichen Ziffern. So wird beispielsweise statt der Aufgabe $1{,}2 \cdot 4{,}012$ mit dem Rechenstab gerechnet: $1{,}20 \cdot 4{,}01 = 4{,}81$. Die ersten beiden Ziffern lassen sich stets genau einstellen bzw. ablesen. Auf den Skalen C und D kann man für die Zahlen zwischen $1 \cdot 10^k$ und $2 \cdot 10^k$ (k ganz) die ersten drei Ziffern genau einstellen bzw. ablesen. Die nächste Ziffer wird jeweils geschätzt. Das Schätzen der letzten Ziffer entspricht der linearen Interpolation, da man hierbei nicht berücksichtigt, daß die Teilstriche nach rechts enger aufeinander folgen. Auf den Skalen C und D ist die Ablesegenauigkeit größer als auf den Skalen A und B. Eine logarithmische Skale ist so beschaffen, daß der prozentuale Ablesefehler im wesentlichen an allen Stellen gleich groß ist.

Aufgaben f 66 bis 81

F

Zur Geschichte des logarithmischen Rechnens

Die Geschichte des logarithmischen Rechnens zeigt außerordentlich eindrucksvoll, wie die Entwicklung der Mathematik durch gesellschaftliche Bedürfnisse vorangetrieben wird. Ursprünglich schien nichts anderes als eine interessante Zahlenspielerei vorzuliegen, wenn man die arithmetische Folge

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

mit der geometrischen Folge

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$

verglich und eine Beziehung zwischen dem Produkt zweier Glieder der unteren Folge und der Summe der darüberliegenden Glieder der oberen Folge erkannte.
Der Deutsche MICHAEL STIFEL (1486 oder 1487—1567) schwärmte in seinem bedeutenden algebraischen Werk *Arithmetica integra* (Gesamte Arithmetik, 1539) von den Beziehungen beider Reihen. Er brachte zum Ausdruck, daß man „ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben könnte". STIFEL hatte auch erkannt, daß jeweils das Subtrahieren dem Dividieren, das Multiplizieren dem Potenzieren und das Dividieren dem Radizieren entspricht. Somit waren eigentlich seit STIFEL die theoretischen Grundlagen des logarithmischen Rechnens vorhanden.
Den Anstoß für die praktische Auswertung dieser Erkenntnisse gab die Trigonometrie. Im 16. Jahrhundert nahm die praktische Astronomie eine schwungvolle Entwicklung, da die Hochseeschiffahrt nach neu entdeckten Ländern bedeutende astronomische und trigonometrische Kenntnisse erforderte. Die astronomischen Berechnungen waren jedoch außerordentlich mühsam, da fortgesetzt Multiplikationen und Divisionen mit Zahlen großer Stellenzahl (nämlich den Sinuswerten verschiedener Winkel) vorzunehmen waren.
Vor diesen Problemen stand auch der Schweizer JOST BÜRGI (1552—1632), ein Uhrmacher und Mechaniker, der sich in unermüdlicher selbständiger Arbeit bis zur Stellung eines Astronomen an der damals führenden Sternwarte in Kassel emporgearbeitet hatte. Bei der Suche nach Methoden der Vereinfachung seiner beruflichen Rechenarbeit gelang es ihm, unter Ausnutzung der bereits bekannten theoretischen Grundlagen, eine erste Logarithmentafel aufzustellen. Hierzu interpolierte er nach einem geschickten Verfahren fortgesetzt eine arithmetische und eine entsprechende geometrische Folge. Dabei ergab sich genaugenommen eine Tafel der Antilogarithmen, da nicht wie in unseren heutigen Tafeln als Numeri die Reihe der ganzen Zahlen gewählt war, sondern die Logarithmen gleichmäßig wuchsen.
BÜRGI berechnete seine Tafel in außerordentlich angestrengter Arbeit in den Jahren von 1603 bis 1611. Da er sich als wissenschaftlicher Außenseiter fühlte und nur ungenügend die Gelehrtensprache der damaligen Zeit, das Latein, beherrschte, scheute er sich vor einer Veröffentlichung seines Werkes. Erst im Jahre 1620, nachdem BÜRGI seinen Wohnsitz nach Prag verlegt hatte und dort in freundschaftlichen Beziehungen zu dem anerkannten Astronomen JOHANNES KEPLER stand, erschienen die Tafeln unter dem Titel *Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen*, leider unter sehr unglücklichen Umständen. Im Jahre 1620 wurde Prag im Verlaufe der Kriegshandlungen des Dreißigjährigen Krieges eingenommen und gebrandschatzt. Dabei wurde auch fast die gesamte Auflage der Progreß-Tabulen zerstört.
Die Bedingungen für die Entwicklung der Wissenschaften wurden in Mitteleuropa und besonders in Deutschland durch den Dreißigjährigen Krieg ganz außerordentlich ungünstig. So konnten sich auch BÜRGIS Tafeln trotz der Empfehlung KEPLERS nicht durchsetzen. Durch sein Zögern hatte sich BÜRGI um den Ruhm der ersten Veröffentlichung von Logarithmentafeln gebracht. Im Jahre 1614 waren in Schottland, in Edinburgh, schon Logarithmentafeln gedruckt worden, und zwar unter dem Titel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Beschreibung einer Tafel wunderbarer Rechnungszahlen). Hier tritt zum erstenmal das Wort „Logarithmus" auf, das soviel wie Rechnungszahl, Ordnungszahl bedeutet.

F

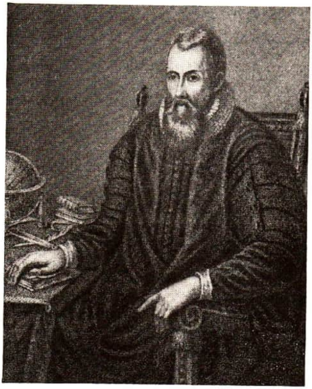


Bild F 9: JOHN NEPER

Der Verfasser war der schottische Mathematiker JOHN NEPER (1550–1617). Er war im Grunde von derselben Fragestellung ausgegangen wie BÜRGI, hatte aber ein anderes Verfahren zur Berechnung der Logarithmen angewendet und war daher auch auf eine andere Basis des Logarithmensystems gekommen. Den Logarithmen BÜRGIS lag, wenn man sich modern ausdrückt, die Basis $1{,}0001^{10000} = 2{,}71846 \ldots \approx e$ zugrunde, denen NEPERS eine zu $\frac{1}{e}$ proportionale Basis. NEPERS Tafel enthielt die siebenstelligen Logarithmen der nach Minuten fortschreitenden Sinus und Kosinus und die zugehörigen Differenzen, d. h. den log tan x. NEPERS Tafeln fanden, zunächst vor allem in England, aber später auch auf dem Festland eine begeisterte Aufnahme unter den Fachgelehrten. Die Umwandlung der zunächst noch schwer zu überblickenden neuartigen Zahlen in ein Handwerkszeug der Praxis erfolgte durch HENRY BRIGGS (1561–1630). Er war Professor am Gresham-College in London, einer Spezialschule zur Ausbildung von Kaufleuten und „Seeoffizieren Seiner Majestät des Britischen Königs", die auf ihre Art Englands Aufstieg zur führenden Kolonialmacht der Welt unterstützte. Nach einigen Diskussionen einigten sich BRIGGS und NEPER, der bald darauf starb, auf die vereinfachenden Annahmen $\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$, d. h. auf den Übergang zu dekadischen Logarithmen. Dann machte sich BRIGGS mit Feuereifer an die Berechnung der Tafeln, die von 1617 an in Teilen 14stellig erschienen. Von nun an war der Siegeszug der Logarithmen nicht mehr aufzuhalten.

In der Folgezeit wurden neue und bessere Methoden zur Tafelberechnung entwickelt. Sie beruhen auf der Verwendung unendlicher Reihen, einem Hilfsmittel der höheren Mathematik. Auch die theoretische Einsicht wurde vertieft. Aber erst dem Genie des großen schweizerischen Mathematikers LEONHARD EULER (1707–1783) verdankt man die Einsicht, daß das Logarithmieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens ist.

F

Aufgaben

a

a) Rechnen mit Variablen

1. Geben Sie die Menge der natürlichen Zahlen an, die

a) kleiner als 3 sind,

b) durch 3 teilbar und kleiner als 10 sind,

c) gleich ihrem Nachfolger sind!

2. Geben Sie die Menge der natürlichen Zahlen an, die

a) größer als 10 und kleiner als 11 sind,

b) nicht durch 3 teilbar und kleiner als 10 sind,

c) keinen Vorgänger haben!

Formulieren Sie jeweils eine Bildungsvorschrift für die nachstehend gegebenen Mengen in Worten!

3. a) $M_1 = \{0; 7; 14; 21; \ldots; 70\}$

b) $M_2 = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

c) $M_3 = \{1; 8; 15; 22; \ldots\}$

d) $M_4 = \{0; 1; 4; 9; \ldots; 100\}$

4. a) $M_1 = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 10\}$

b) $M_2 = \{2; 4; 8; 16; 32; \ldots\}$

c) $M_3 = \{7; 77; 777; 7777\}$

d) $M_4 = \{0; 1; 8; 27; 64; 125; \ldots\}$

Welche geometrischen Gebilde werden durch die folgenden Definitionen beschrieben?

5. a) Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene gleich weit entfernt sind.

b) Die Menge aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben.

6. a) Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einer Geraden in dieser Ebene gleichen Abstand haben.

b) Die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt gleich weit entfernt sind.

1. In einer Klasse haben 11 Schüler ein Fahrrad und 12 Schüler eine Luftmatratze. Was kann man über die Anzahl der Schüler dieser Klasse aussagen?

2. In einer Klasse sind 11 Rettungsschwimmer und zwei Nichtschwimmer. Was kann man über die Anzahl der Schüler dieser Klasse aussagen?

a

7. Definieren Sie die Mittelsenkrechte auf einer gegebenen Strecke mit Hilfe des Mengenbegriffs!

8. Definieren Sie die Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels mit Hilfe des Mengenbegriffs!

9. a) Deuten Sie $\frac{a}{b}$ als Geschwindigkeit, als Leistung, als Durchschnittsertrag einer landwirtschaftlichen Kultur, als Arbeitsproduktivität, indem Sie die Variablen entsprechend konkretisieren!

b) Geben Sie entsprechende konkrete Deutungen für $\frac{a \cdot b}{c}$ an!

In den nachfolgenden Termen sind die verwendeten Variablen sämtlich Zeichen für natürliche Zahlen.
Bestimmen Sie den jeweiligen Variabilitätsbereich für diese Variablen so, daß auch die Terme natürliche Zahlen darstellen!
Geben Sie dann für jeden Term seinen Vorgänger und seinen Nachfolger an!

10. a) n **b)** $a - 3$ **c)** $2a - 7$ **d)** $2n + 1$ **e)** $2n - 1$ **f)** n^2

11. a) $x + 5$ **b)** $2n$ **c)** $2(a - 7)$ **d)** $5(x - 1)$ **e)** $5(1 - x)$ **f)** $2 - 3n$

12. Welche natürliche Zahl ist um

a) 3, **b)** a, **c)** $2b - 1$ größer als

100; 0; a; $2b - 1$; $7b$; $a - 10$; $1 - 2b$?

13. Welche natürliche Zahl ist um

a) 2, **b)** x, **c)** $2b - 1$ kleiner als

100; 0; a; $2b + 1$; $2b$; $1 - 2b$; $100 - x$?

Mit Hilfe von Variablen und durch Angabe ihres Variabilitätsbereiches sind nachstehend Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen gegeben. Beschreiben Sie diese Mengen durch Angabe ihrer Elemente!

Beispiel: $n^2 + n - 1$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$

Lösung: $M = \{1; 5; 11; 19; 29; 41; 55; 71; 89; 109\}$

14. a) $n^2 - n$ mit $n \in \{1; 3; 5; 7\}$
b) $(n + 2)(n - 2)$ mit $n \in \{2; 3; \ldots; 10\}$
c) $n^3 - 1$ mit $n \in \{1; 10; 100; 1000\}$
d) $n^3 - n^2 - n$ mit $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
e) $5x - 2y$ mit $x \in \{1; 5; 10\}$ und $y \in \{0, 1; 2\}$

15. a) $n \cdot (n + 1)$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$
b) $n^2 - 8$ mit $n \in \{3; 4; 5; 6; \ldots; 9\}$
c) $2(2n - 1)$ mit $n \in \{11; 13; 17; 19\}$
d) $(x + 2)^2$ mit $x \in \{2; 3; 4; \ldots; 7\}$
e) $2(x - y)$ mit $x \in \{10; 9; 8\}$ und $y \in \{8; 7\}$

Beschreiben Sie die folgenden Mengen natürlicher Zahlen mit Hilfe von Variablen!

Beispiel: $M = \{2; 7; 12; 17; 22\}$ Lösung: $5n + 2$ mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

16. a) $M_1 = \{0; 3; 6; \ldots; 15\}$
b) $M_2 = \{0; 2; 4; 6; 8\}$
c) $M_3 = \{2; 5; 8; 11; \ldots\}$
d) $M_4 = \{2; 4; 8; 16; 32; \ldots\}$
e) $M_5 = \{0; 1; 4; 9; 16; \ldots\}$
f) $M_6 = \{3; 7; 11; 15; 19\}$

17. a) $M_1 = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
b) $M_2 = \{4; 9; 14; 19; 24; 29; \ldots\}$
c) $M_3 = \{1; 3; 9; 27; 81; 243; \ldots\}$
d) $M_4 = \{0; 1; 8; 27; 64; 125\}$
e) $M_5 = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$
f) $M_6 = \{0; 1; 16; 81; 625\}$

---

3. Geben Sie die Menge aller Primzahlen an, die auch gerade Zahlen sind!

4. Geben Sie drei natürliche Zahlen an, die sowohl der Menge der Quadratzahlen als auch der Menge der Kubikzahlen angehören!

18. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen x bzw. Zahlenpaare $[x, y]$, für die folgende Aussageformen in wahre Aussagen übergehen!

a) $4 \cdot x < 12$ **b)** $(x+1)(x-2) = 0$ **c)** $(x+y)(x-y) = 0$

Für welche natürlichen Zahlen x gilt folgendes?

19. a) $9 < x < 21$ **b)** $5 < x < 6$
c) $2x < 11$ **d)** $x < 3x$
e) $x - 12 \leqq 2x - 21$
f) $5 \leqq 2x + 3 \leqq 3x - 2$ **g)** $90 < x^2 < 100$

20. a) $5 < x < 7$ **b)** $2x + 1 \leqq 9$
c) $98 \leqq 3x - 2 \leqq 113$ **d)** $x + 7 > 7 + x$
e) $x \leqq 3x - 10 \leqq 2x$
f) $x^2 < x$ **g)** $x^2 = x$

Für welche $x \in N$ werden die folgenden Aussageformen zu wahren Aussagen?

21. a) $x + 5 = 5 + x$ **b)** $x + 5 = 2x$
c) $x + 5 = x - 5$ **d)** $x + x = x - x$
e) $x + x = 5 + 5$ **f)** $7x + 5 = 2x - 5$
g) $7x = 2x + 5x$
h) $x : 5 = 26 : 65$
i) $x + 0 = x$ **k)** $x : 1 = x$

22. a) $3x = 111$ **b)** $3x = 5$
c) $7x - 5 = 2x + 5$ **d)** $7x = 1$
e) $7x = 7$ **f)** $7(x-2) = 2(x-7)$
g) $(x-2) : (x+2) = 1 : 2$
h) $(x-2) : (x+4) = x : (x+10)$
i) $x - 0 = x$ **k)** $x \cdot 1 = x$

23. Prüfen Sie nach, welche der vier Brüche äquivalent sind!

a) $\frac{27}{21}$ **b)** $\frac{54}{42}$ **c)** $\frac{15}{32}$ **d)** $\frac{18}{14}$

Welche der drei Beziehungen $>$, $<$, $=$ gilt jeweils zwischen den nachfolgend angegebenen Paaren gebrochener Zahlen?

24. a) $\frac{3}{4}; \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{4}{3}; \frac{5}{4}$ **c)** $\frac{35}{49}; \frac{15}{21}$
d) $\frac{2^2}{2^3}; \frac{3^2}{3^3}$ **e)** $\frac{3^2}{2^3}; \frac{2^3}{3^2}$

25. a) $\frac{5}{7}; \frac{7}{9}$ **b)** $\frac{14}{26}; \frac{13}{15}$ **c)** $\frac{14}{26}; \frac{15}{27}$
d) $\frac{3}{5}; \frac{9}{25}$ **e)** $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}$

---

5. Begründen Sie unter Verwendung von Gesetzen für Rechenoperationen, daß aus

a) $3 < 5$ folgt $7 < 9$, **b)** $3 < 5$ folgt $300 < 500$, **c)** $20 > 10$ folgt $50 > 40$,
d) $30 > 10$ folgt $100 > 50$, **e)** aus $20 > 10$ nicht folgt $0 > 0$!

6. Zeigen Sie, daß

a) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine gerade Zahl,
b) die Differenz aus einer natürlichen Zahl und der nächstkleineren eine ungerade Zahl,
c) das Quadrat einer ungeraden Zahl eine ungerade und das Quadrat aus einer geraden Zahl eine gerade Zahl,
d) die Summe aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen
  α) gerade ist, wenn die kleinste Zahl gerade,
  β) ungerade ist, wenn die größte Zahl ungerade,
e) das Produkt zweier geraden Zahlen gerade,
f) das Produkt zweier ungeraden Zahlen ungerade,
g) das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl gerade ist!

a

Ordnen Sie die in einer Zeile angegebenen gebrochenen Zahlen nach der Größe!

26. Beginnen Sie jeweils mit der kleinsten Zahl!

a) $\frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{32}, \frac{33}{100}, \frac{33}{99}, \frac{3}{8}$

b) $\frac{44}{55}, \frac{33}{44}, \frac{22}{33}, \frac{99}{100}, \frac{66}{77}, \frac{77}{88}$

c) $\frac{3}{5}, \frac{63}{105}, \frac{99}{150}, \frac{63}{110}, \frac{54}{90}, \frac{60}{100}$

27. Beginnen Sie jeweils mit der größten Zahl!

a) $\frac{4}{7}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{7}{10}, \frac{5}{9}$

b) $\frac{6}{65}, \frac{5}{60}, \frac{5}{50}, \frac{5}{55}, \frac{5}{70}$

c) $\frac{9}{51}, \frac{14}{85}, \frac{20}{102}, \frac{12}{68}, \frac{5}{34}$

Konstruieren Sie eine gebrochene Zahl, die zwischen den nachfolgend angegebenen Paaren gebrochener Zahlen liegt!

28. a) $\frac{3}{10}; \frac{4}{10}$ b) $\frac{7}{8}; \frac{8}{9}$ c) $\frac{5}{4}; \frac{1}{1}$ d) $\frac{125}{625}; \frac{625}{125}$

29. a) $\frac{3}{10}; \frac{3}{11}$ b) $\frac{99}{10000}; \frac{1}{100}$ c) $\frac{17}{18}; \frac{171}{180}$ d) $\frac{17}{51}; \frac{435}{870}$

30. Konstruieren Sie jeweils drei gebrochene Zahlen, die zwischen den in Aufgabe **28** angegebenen Paaren von gebrochenen Zahlen liegen!

Für welche natürlichen Zahlen n werden die folgenden Aussageformen zu wahren Aussagen?

31. a) $\frac{3}{7} < \frac{n}{56}$ b) $\frac{3}{7} = \frac{n}{56}$ c) $\frac{3}{7} > \frac{n}{56}$

32. a) $\frac{5}{8} < \frac{n}{18}$ b) $\frac{5}{8} = \frac{n}{18}$ c) $\frac{5}{8} > \frac{n}{18}$

Welche der folgenden Aufgaben haben im Bereich der gebrochenen Zahlen keine Lösung? Bestimmen Sie die Lösungen für alle anderen Aufgaben! (In diesen Aufgaben gilt: $a \neq 0$; $a, b, c \in N$)

33. a) $\frac{5}{7} + \frac{9}{7}$ b) $\frac{5}{7} - \frac{9}{7}$ c) $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$

d) $\frac{b}{5} + \frac{c}{5}$ e) $\frac{b}{5} - \frac{c}{5}$ f) $\frac{b}{5} \cdot \frac{c}{5}$

34. a) $\frac{9}{7} - \frac{5}{7}$ b) $\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{7}$ c) $\frac{9}{7} : \frac{5}{7}$

d) $\frac{3}{a} - \frac{2}{a}$ e) $\frac{2}{a} - \frac{3}{a}$ f) $\frac{3}{a} : \frac{2}{a}$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben, und schreiben Sie das Ergebnis als gemeinen Bruch und als Dezimalbruch!

35. a) $\frac{5}{7} + \frac{3}{9}$ b) $\frac{5}{7} - \frac{3}{9}$ c) $\frac{3}{9} - \frac{5}{7}$

d) $\frac{7}{5} \cdot \frac{9}{3}$ e) $\frac{7}{5} : \frac{9}{3}$ f) $\frac{9}{3} : \frac{7}{5}$

36. a) $\frac{7}{5} + \frac{9}{3}$ b) $\frac{7}{5} - \frac{9}{3}$ c) $\frac{9}{3} - \frac{7}{5}$

d) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{9}$ e) $\frac{5}{7} : \frac{3}{9}$ f) $\frac{3}{9} : \frac{5}{7}$

37. a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{8}{5}$

c) $\frac{15}{8} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ d) $\frac{11}{14} + \frac{12}{13} - \frac{19}{21} - \frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{11} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$

f) $2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right)$

38. a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$ b) $\frac{7}{8} + \frac{4}{12} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{12} + \frac{15}{16} - \frac{7}{24}$ d) $2\frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{6}{5}$

e) $\frac{6}{7} - \frac{15}{14} + \frac{27}{28}$

f) $\frac{3}{4} + \frac{7}{12} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$

39. **a)** $\frac{3}{8}\cdot 2$ **b)** $6\cdot\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{a}{b}\cdot c$

d) $\frac{17}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$ **e)** $\frac{5}{6}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{12}{13}$

40. **a)** $15\cdot\frac{4}{5}$ **b)** $4\frac{1}{2}\cdot 5$ **c)** $\frac{10}{11}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}$

d) $\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{11}{5}$ **e)** $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{10}{24}$

a

41. **a)** $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{5}:\frac{14}{15}$ **d)** $\frac{4}{5}:1\frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right):\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)$

42. **a)** $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ **b)** $1\frac{1}{2}:\frac{3}{2}$

c) $\frac{19}{10}:\frac{19}{5}$ **d)** $\frac{11}{13}:\frac{12}{14}$

e) $\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{25}{24}$ **f)** $\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{3}{7}:\frac{25}{24}\right)$

43. Geben Sie für die folgenden Gleichungen alle Lösungen im Bereich der gebrochenen Zahlen an!

a) $3x-2=11$ **b)** $5y-3=2\left(\frac{5}{2}y+7\right)$ **c)** $3+x=2$ **d)** $7(x-5)=5(x-7)$

e) $\frac{x+3}{5}=\frac{x-3}{3}$ **f)** $x:8=2x:16$ **g)** $6(x-2)=\frac{1}{2}x-1$ **h)** $3+2y=15$

i) $3-2y=15$ **k)** $x\cdot x=\frac{16}{25}$ **l)** $x(x-1)=\frac{1}{81}-x$

44. Die folgende Tabelle gibt die in Millimeter gemessenen Nenn- bzw. Istmaße von Werkstücken wieder. Geben Sie die Abweichungen entsprechend dem Beispiel an!

Nr.	Nennmaß d_0	Istmaß d	Abweichung $[d-d_0]$	Absoluter Wert der Abweichung	Richtung der Abweichung
1	150	153	[153—150]	3	zu groß
2	275	278			
3	480	483			
4	320	318			
5	1200	1198			

45. Stellen Sie fest, welche der nachstehend angegebenen rationalen Zahlen in ein und derselben Klasse liegen!

a) $+\frac{7}{13}$ **b)** $+0{,}275$ **c)** $-\frac{35}{65}$ **d)** $-\frac{77}{143}$ **e)** $+\frac{21}{39}$ **f)** $\frac{49}{91}$

---

7. Welche der drei Beziehungen $>$, $<$, $=$ gilt zwischen den natürlichen Zahlen a und b, $(b \neq 0)$ in den folgenden Gleichungen und Ungleichungen?

a) $\frac{a}{b}>\frac{a+1}{b+1}$ **b)** $\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+1}$ **c)** $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$

d) $\frac{a}{b}>\frac{a-1}{b-1}$ **e)** $\frac{a}{b}=\frac{a-1}{b-1}$ **f)** $\frac{a}{b}<\frac{a-1}{b-1}$ (mit $b \neq 1$)

8. Welche Eigenschaften haben zwei gebrochene Zahlen, **a)** deren Produkt, **b)** deren Quotient 1 ist?

a

46. Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach! Beginnen Sie mit der größten!

a) $+\frac{7}{13}$; $+\frac{8}{14}$; $+\frac{9}{15}$ **b)** $-\frac{7}{13}$; $-\frac{8}{14}$; $-\frac{9}{15}$ **c)** $-\frac{5}{12}$; $+\frac{2}{7}$; $+0{,}3$; $-\frac{1}{3}$

d) $+0{,}8$; $+0{,}9$; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{4}$; $+\frac{3}{5}$; $+\frac{1}{3}$ **e)** -32; $+\frac{110}{7}$; $+22{,}8$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}33$

47. Ordnen Sie die Beträge der in Aufgabe **46** angegebenen rationalen Zahlen! Beginnen Sie mit dem kleinsten Betrag!

48. a) $(+4{,}2)-(+3)$ **b)** $0-(+3)$

c) $(-6{,}2)-(+2)$ **d)** $\left(-\frac{5}{2}\right):\left(+\frac{2}{3}\right)$

e) $(-12):(-3)$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right):(+2)$

49. a) $\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $(+5)-(-7)$

c) $(+1)-(-1)$ **d)** $\left(+\frac{2}{6}\right):\left(-\frac{1}{9}\right)$

e) $(-3):(-4)$ **f)** $\left(+\frac{8}{7}\right):\left(+\frac{4}{6}\right)$

50.

$a+b+c$	$-(a+b+c)$	$a+b-c$	$a-b+c$	$a-b-c$

a) $a=-2$; $b=+3$; $c=-4$ **b)** $a=-12$; $b=0$; $c=-8$

c) $a=-\frac{3}{5}$; $b=-\frac{1}{3}$; $c=+\frac{3}{10}$ **d)** $a=+2{,}81$; $b=+1$; $c=0$

e) $a=+0{,}2$; $b=-0{,}5$; $c=-0{,}04$

51.

$(a+b)\cdot c$	$(a-b)\cdot c$	$(a+b):c$	$(a-b):c$	$a\cdot b\cdot c$

Setzen Sie für die Variablen die in Aufgabe **50** genannten Zahlen ein!

52.

$-a$	$-b$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$a+b$	$a-b$	$b-a$

a) $a=+\frac{5}{8}$; $b=-\frac{11}{4}$ **b)** $a=-0{,}02$; $b=-0{,}04$ **c)** $a=+210$; $b=+55$

d) $a=-\frac{12}{5}$; $b=+\frac{5}{12}$ **e)** $a=-13{,}2$; $b=-2{,}5$ **f)** $a=-\frac{77}{88}$; $b=0$

g) $a=+1$; $b=-\frac{11}{3}$ **h)** $a=0{,}33$; $b=-1$ **i)** $a=-1$; $b=+1$

---

9. Für zwei rationale Zahlen a und b soll jeweils gelten **a)** $0<a<b$, **b)** $a<b<0$, **c)** $a<0<b$. Welche Beziehungen gelten jeweils zwischen ihren Beträgen?

10. Es sei **a)** $|a|<|b|$, **b)** $|a|=|b|$, **c)** $|a|>|b|$ mit $a\in R$ und $b\in R$.

α) Welche der drei Beziehungen $>$, $<$, $=$ gilt dann jeweils zwischen a und b?
β) Warum ist es nicht notwendig, die Aufgabe **10c)** noch gesondert zu lösen, wenn die Aufgabe **10a)** bereits gelöst ist?

53.

$a \cdot b$	$a : b$	$b : a$	$\lvert a+b \rvert$	$\lvert a-b \rvert$	$\lvert a \cdot b \rvert$

Setzen Sie für die Variablen die in Aufgabe **52** genannten Zahlen ein!

54. a) $(+5) + (-7) + 9 + (-11)$

b) $\frac{1}{300} - \left(+\frac{1}{3}\right) - (-0{,}33) - \left(-\frac{1}{6}\right)$

c) $\left(+\frac{23}{2}\right) - \frac{52}{3} + \left(-\frac{13}{6}\right) - (-0{,}3)$

55. a) $(-52) - (+752) - (-700) + (+102)$

b) $\left(+\frac{12}{7}\right) - \left(+\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{10}{7}\right)$

c) $\left(-\frac{25}{625}\right) - \left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

56. a) $(-2) \cdot (+3) \cdot (+5) \cdot (-7)$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{18}{11}\right) \cdot \left(-\frac{33}{54}\right) \cdot \left(-\frac{8}{6}\right)$

57. a) $(+0{,}2) \cdot 8 \cdot (-1{,}7) \cdot (-12{,}5)$

b) $(-8{,}53) \cdot (+1000{,}2) \cdot 0 \cdot (-7777{,}7)$

58. a) $\left[\left(+\frac{55}{12}\right) - \left(-\frac{45}{12}\right)\right]\left(-\frac{3}{25}\right) - \left(-\frac{3}{17}\right)\left[5 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

b) $\left[\left(-\frac{50}{7}\right) + \left(-\frac{20}{7}\right)\right] : \left[(-1) - \left(+\frac{3}{7}\right)\right]$

59. Die Summe zweier von Null verschiedener rationaler Zahlen sei 0.
Bestimmen Sie den Quotienten dieser beiden rationalen Zahlen!

---

11. Der Quotient zweier rationaler Zahlen sei **a)** $+1$, **b)** -1.
Bestimmen Sie für jeden der beiden Fälle
α) die Summe, **β)** die Differenz, **γ)** das Produkt dieser beiden rationalen Zahlen!

12. Das Produkt zweier rationaler Zahlen a und b sei **a)** $+1$, **b)** -1, **c)** 0.
Bestimmen Sie für jeden der drei Fälle
α) die Summe $a + b$, **β)** die Differenz $a - b$, **γ)** den Quotienten $\frac{a}{b}$ dieser beiden rationalen Zahlen!
Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Aufgabe **cγ)** immer lösbar ist?

13. Zeigen Sie, daß für die rationalen Zahlen r und s gilt:
a) aus $0 < r < s$ folgt $r^2 < s^2$, **b)** aus $r < s < 0$ folgt $r^2 > s^2$!

14. Es sei $x < 0 < y$. Für welche rationalen Zahlen x und y gilt:
a) $x^2 < y^2$ **b)** $x^2 = y^2$ **c)** $x^2 > y^2$?

15. Für welche rationalen Zahlen x gelten folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen?

a) $x^2 > x$ **b)** $x^2 = x$ **c)** $x^2 < x$

d) $x^2 > |x|$ **e)** $x^2 = |x|$ **f)** $x^2 < |x|$

g) $x^2 > -x$ **h)** $x^2 = -x$ **i)** $x^2 < -x$

Ermitteln Sie alle x, für die diese Gleichungen bzw. Ungleichungen zu wahren Aussagen werden!

a

Fassen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen!

60. a) $75a - (12a - 8b) - (6b - 4a)$

b) $90m + (82m + 78n) - (16n + 104m)$

61. a) $15b^2 - (120^2 - 3b^2) +$
$+ (800^2 + 70d^2 - 40d)$

b) $\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{8}\right) - \left(\frac{x}{20} - \frac{y}{16} + 4\frac{1}{2}\right)$

62. Gegeben sind die Summen

$S_1 = 3p - 4q + 5r,$

$S_2 = -2p + 3q - 4r - 1,$

$S_3 = \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}q + \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}.$

63. Gegeben sind die Summen

$S_1 = p^3 - q^2 - r^3 - 7,$

$S_2 = -3p^3 + 4q^2 - 5r^4,$

$S_3 = \frac{3}{2}p - \frac{5}{7}q + \frac{5}{4}r - \frac{3}{7}.$

Bilden Sie die folgenden Terme, und fassen Sie jeweils soweit wie möglich zusammen!

a) $S_1 + S_2$ **b)** $S_1 - S_2$ **c)** $S_2 - S_1$ **d)** $S_1 - 2S_2$

e) $3S_1 - 4S_2$ **f)** $\frac{3}{8}S_1 - \frac{4}{5}S_2$ **g)** $S_1 + S_3$ **h)** $2S_1 + 4S_3$

64. Zeigen Sie, daß für alle rationalen Zahlen x, y, z gilt:

a) $(x - y - z) - (y - z - x) - (z - x - y) = 3x - y - z$

b) $x^2 - y^3 - z - x(x - y) + y^2(y - z) + z = y(x - yz)$

c) $(a - b) - (b - c) + (c - a) - (-a - 2b + 2c) = a$

d) $ab^2c^3 - (a^2b^3c - a^3bc^2) - abc(a^2c - ab^2 + bc^2) = 0$

Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um!

65. a) $p_0V_0[1 + \gamma(t_2 - t_1)]$

b) $5(c - 2d)\,2ab$

c) $c(0{,}4ac - 0{,}6bc)\,5ab$

d) Unter welcher Bedingung ist das Produkt in **a)** gleich $p_0 \cdot V_0$?

66. a) $3[4 - (2a + 3)]$

b) $3x^2[8y - 4(6x - 2y)]$

c) $8r^2(-2s - 3r) \cdot 12{,}5s$

d) Welche Zahl muß man in Aufgabe **a)** für a einsetzen, damit das Produkt gleich 0, 1, 100 wird?

Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie wieder ausmultiplizieren!

67. a) $-4x + xy$

b) $\frac{2}{3}a + 2a$

c) $2ab + 3abx - aby$

d) $9a^2b^2 - 6a^2b - 3ab^2 + 12ab$

68. a) $(-1) \cdot y + 3yx$

b) $x + a \cdot x$

c) $-x - xy$

d) $25pq^2 - 35p^2q - 25pq + 35p$

69. a) $15r^2st^2 - 18rs^2t^2 + 33rst^3 - 27r^2s^2t^2$

b) $\frac{4}{5}a^2b^2c - \frac{2}{5}a^2b^2c^2 + \frac{6}{5}a^2bc^2 - \frac{8}{5}a^2bc$

c) $0{,}2m^2n^2 - 0{,}6m^2n + 0{,}8mn^2 - 1{,}2mn$

Gegeben sind die folgenden Summen:

$S_1 = 2u + 1; \quad S_2 = m^2n - 30m; \quad S_3 = -0{,}04z - \frac{1}{20}; \quad S_4 = 2u - 1; \quad S_5 = \frac{1}{2n} - \frac{1}{15m}$

Berechnen Sie die folgenden Produkte, und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

70. a) $S_1 \cdot S_2$ **b)** $S_1 \cdot S_3$ **c)** $S_3 \cdot S_4$

71. a) $S_2 \cdot S_3$ **b)** $S_1 \cdot S_4$ **c)** $S_2 \cdot S_5$

Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um, und fassen Sie dabei so weit wie möglich zusammen!

72. a) $(a - b) \cdot \left(3x - \frac{2}{3}y\right)$

b) $\left(-a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-7x + \frac{5}{2}y\right)$

c) $(3 + x)(a - 2b - c)$

d) $[u - (2b + c)] \cdot [b + (a - c)]$

73. a) $(1 - y) \cdot \left(\frac{4}{5} + a\right)$

b) $(4x + y - 3)\left(\frac{1}{3}z + x - 4\right)$

c) $(3a^2 - 2ab + a) \cdot \left(\frac{1}{3a^2} - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a}\right)$

d) $(5r^2s - 5rs^2)(5rs^2 - 5r^2s) \quad || \quad [a \neq 0]$

74. a) $[2x - 4(y + 3z)] \cdot [7y - 3(x - 4z)]$ **b)** $[m^2 - 5n(n - 2m)] \cdot [2n^2 + 3m(4n - 3m)]$

Formen Sie folgende Summen durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte um!

75. a) $54x^2yz - 108xy^2z - 36xyz^2$

b) $-28rs - 77rt - 84ru - 91rv$

c) $45mn^2 - 15mn + 135m^2n^2 - 105m^2n$

d) $\frac{1}{12}\pi h d_1^2 + \frac{1}{12}\pi h d_1 d_2 + \frac{1}{12}\pi h d_2^2$

76. a) $\frac{1}{8}\pi h d_1^2 + \frac{1}{16}\pi h d_2^2 + \frac{1}{6}\pi h^3$

b) $V_0 + V_0\gamma\Delta t$

c) $p_0V_0 + p_0V_0\gamma t_2 - p_0V_0\gamma t_1$

d) $aq^2 - a$

77. a) $(a - b)(3x - 2y) - (b - a)(4x - 3y) - (-a + b)(-7x + 5y)$

b) $3(2x - 5) - 5u(4y - 3) + 2u(2x - 5) + (4y - 3) + 3u(2x - 5) - 4(4y - 3)$

---

16. Jede der drei Kanten a, b, c eines Quaders wird um die Länge d, ($d < a$; $d < b$; $d < c$) in einem Fall verlängert und im anderen Fall verkürzt. Ist — verglichen mit dem ursprünglichen Quader — die Volumenzunahme bei Verlängerung der Kanten oder die Volumenabnahme bei Verkürzung der Kanten größer?

17. Zeigen Sie, daß

a) für $a > b$ und $c > d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) > 0$,

b) für $a > b$ und $c < d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) < 0$,

c) für $a \gtreqless b$ und $c = d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) = 0$!

18. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Untersuchen Sie, welche Beziehungen zwischen a und b bzw. zwischen c und d gelten, wenn gilt

a) $(a + b)(c + d) > 0$, **b)** $(a + b)(c + d) = 0$, **c)** $(a + b)(c + d) < 0$!

Wenden Sie auf folgende Terme die binomischen Formeln an!

78. **a)** $(4 + a)^2$ **b)** $(b - 3)^2$ **c)** $(b + x) \cdot (b - x)$ **d)** $(1 - y)^2$ **e)** $(x + 1)(x - 1)$

79. **a)** $(3x - 4y)^2$ **b)** $(-3 - z)^2$ **c)** $\left(\frac{6}{5}a - \frac{3}{2}\right)^2$ **d)** $\left(\frac{2}{5}a + 0{,}3\right)^2$ **e)** $\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}b\right)^2$

80. **a)** $(x + 3y)^2$ **b)** $(r - 2)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{2} + n\right)^2$ **d)** $\left(-\frac{3}{5}x + 2y\right)^2$ **e)** $(1{,}2mn - 1{,}1nm)^2$ **f)** $(3I_1 - I_2)^2$ **g)** $(14ab - 13a)(14ab + 13a)$

81. **a)** $(x - 2y)^2$ **b)** $(3 + s)^2$ **c)** $(-5a + 0{,}3)^2$ **d)** $\left(0{,}05 + \frac{6}{10}\right)^2$ **e)** $(2 + 30)^2$ **f)** $(-25ab - 0{,}2c)^2$ **g)** $\left(0{,}2z + \frac{1}{2}\right)\left(0{,}2z - \frac{1}{2}\right)$

Rechnen Sie die folgenden Aufgaben möglichst vorteilhaft im Kopf!

82. **a)** 38^2 **b)** 71^2 **c)** $58 \cdot 62$ **d)** $104 \cdot 96$ **e)** 85^2 **f)** 18^2 **g)** 103^2 **h)** 87^2

83. **a)** 52^2 **b)** 16^2 **c)** $52 \cdot 48$ **d)** 55^2 **e)** $38 \cdot 62$ **f)** 76^2 **g)** 44^2 **h)** 99^2

84. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

a) $(3x - 4y)^2 + (4y + 3x)^2 - 2(3x - 4y)(3x - 4y)$

b) $\left(0{,}3a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}a - 0{,}3\right)^2 + \left(\frac{6}{5}a - \frac{3}{2}\right)^2 - (1{,}3a - 1{,}7)^2$

c) $(25 + 35b)^2 - (35 - 25b)^2 + (25 + 35b)(35b - 25)$

Formen Sie die folgenden Terme in Summen um!

85. **a)** $(a \pm b)^3$ **b)** $(a \pm b)^4$ **c)** $(a \pm b)^5$ **d)** $(a \pm b)^6$

86. **a)** $(x - y)^4$ **b)** $(x - y)^2(x + y)^2$ **c)** $(a + b)^5 - (a + b)^3a^2$

Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung zu folgenden Summen!

87. **a)** $x^2 + 2cx$ **b)** $y^2 + 3y$ **c)** $b^2 - 5b$ **d)** $c^2 + \frac{2}{3}c$ **e)** $x^2 + 2x$ **f)** $a^2x^2 - 2ax$

88. **a)** $x^2 - \frac{1}{3}x$ **b)** $z^2 - z$ **c)** $r^2 - \frac{14}{3}r$ **d)** $25x^2 + 10x$ **e)** $x^2 - 4x$ **f)** $6x^2 - 12x$

---

19. Für welche rationalen Zahlen x und y ist

a) $xy - 3x + 3y - 9 = 0$, **b)** $xy - 3x + 3y - 9 = 9$?

20. Zeigen Sie, daß für alle rationalen Zahlen x und y gilt:

a) $x^2 - 6x + 9 \geqq 0$, **b)** $x^2 + 8x + 17 > 0$, **c)** $-x^2 + 20x - 101 < 0$,

d) $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geqq 0$, **e)** $\frac{x^2}{16} - 4x + 65 > 0$, **f)** $\frac{9x^2}{25} - x + \frac{25}{35} > 0$!

Formen Sie folgende Terme nach Möglichkeit in ein Produkt um!

89. **a)** $a^2 - 2ab - b^2$ **b)** $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ **c)** $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$ **d)** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

90. **a)** $x^2 - y^2$ **b)** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ **c)** $x^2 - 12x + 36$ **d)** $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$

Ermitteln Sie die quadratische Ergänzung für die folgenden Summen!

91. **a)** $x^2 - 6x$ **b)** $x^2 - x$ **c)** $x^2 + \frac{x}{10}$ **d)** $x^2 - 15x$ **e)** $4a^2 + a$ **f)** $a^2 + 144ab$ **g)** $0{,}0225p^2 - 3q$ **h)** $81x^2 + 9x$ **i)** $x^2 - 5$

92. **a)** $x^2 - 5x$ **b)** $x^2 - \frac{1}{2}x$ **c)** $x^2 - 2x$ **d)** $x^2 + 1000x$ **e)** $144a^2 - ab$ **f)** $\frac{r^2}{16} + x$ **g)** $0{,}7^2r^2 - 4{,}2r$ **h)** $9x^2 - 81x$ **i)** $25y^2 - 25x$

Formen Sie die folgenden Summen zu einer Summe aus einem vollständigen Quadrat und einem Restglied um! Beispiel: $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

93. **a)** $x^2 + 2x + 5$ **b)** $x^2 + bx + c$ **c)** $a^2 + 2ab - b^2$ **d)** $5m^2 - 5mn + 5n^2$ **e)** $x^2 + 2xy + y$ **f)** $9m^2 + 6m - 2$

94. **a)** $x^2 - 2x - 5$ **b)** $x^2 - bx - c$ **c)** $x^2 + px + q$ **d)** $x^2 - px + q$ **e)** $4x^2 + 8x + 8$ **f)** $a^2b^2 - abc$

Korrigieren Sie die folgenden Summen durch Hinzunahme eines weiteren Summanden so, daß ein vollständiges Quadrat entsteht!

95. **a)** $169 + 25z^2$ **b)** $x^2y^2 + z^2$ **c)** $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{256}$ **d)** $0{,}0225a^2 + b^2$

96. **a)** $-169 - 25z^2$ **b)** $r^2 + 16s^2$ **c)** $0{,}81 + 0{,}04c^2$

97. Setzen Sie in $(a + b)^2$ bzw. $(a + b) \cdot (a - b)$ **a)** $b = a$, **b)** $b = 2a$, **c)** $b = -2a$, **d)** $b = \frac{a}{2}$!

98. Beweisen Sie $(a + b + c)^2 = (-a - b - c)^2$

99. Formen Sie folgende Quadrate in Summen um!

a) $(a + b + c)^2$ **b)** $(2x - 3y + 4z)^2$ **c)** $(-2x + 3y - 4z)^2$

100. Formen Sie die folgenden Potenzen in Summen um!

a) $(a - b)^n$ mit $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ **b)** $(-2x + y)^n$ mit $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

c) $(r - 5)^n$ mit $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

---

21. Welchen kleinsten Wert können die folgenden Terme jeweils annehmen? (Die vorkommenden Variablen bedeuten sämtlich rationale Zahlen.)

a) $a^2 - 2ab - 4a + b^2 + 4b + 4$ **b)** $r^4 - 4r^3s + 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ **c)** $r^4 - 2r^2 + 2$

101. Welchen kleinsten Wert können die folgenden Terme jeweils annehmen, wenn x eine reelle Zahl ist?

a) $(x+5)(x-5)$ **b)** $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$

c) $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

e) x^2-2x+5 **f)** x^2-2x-5

102. Welchen größten Wert können die folgenden Terme jeweils annehmen, wenn x eine reelle Zahl ist?

a) $(5-x)(x+5)$ **b)** $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-x\right)$

c) $\left(-x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

d) $-3(2x+3)(2x-3)$

e) $(-3x+4)(3x-4)$

103. Der Term

$24xy-21y^2-3y$ ist durch

a) 3 **b)** -3 **c)** $3y$ **d)** $-3y$

e) $10y$ zu dividieren.

104. Der Term

$-a^2+20ab-6a^2b^2+3ab^2$ ist durch

a) 2 **b)** a **c)** a^2 **d)** $4a^2$ **e)** a^2b

f) $4a^2b^2$ **g)** $100a^2b^2$ zu dividieren.

105. a) $(ab^2c+a^2bc-abc^2+4abc):abc$

b) $\dfrac{a^2b^2+ab^2-ab}{ab}$

c) $\dfrac{rst+2rs^2-4st^2+s}{2s}$

d) $(10p^2q+12pq-4pq^2)\cdot\dfrac{1}{4pq}$

106. a) $(ax^2-a^2xy+ax^2+axy):ax$

b) $\dfrac{m^2n+2mn+mn^2}{mn}$

c) $\dfrac{182r^2s^2-104rs}{13rs}$

d) $\dfrac{55x^2y^2-121x^2y^2+132x^2y}{11x^2y}$

---

22. Das arithmetische Mittel m_A zweier positiver rationaler Zahlen a und b wird durch die Gleichung $m_A=\dfrac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel m_G dieser beiden Zahlen durch die Gleichung $m_G=\sqrt{ab}$ definiert. Beweisen Sie folgenden Satz: *Das arithmetische Mittel zweier positiver rationaler Zahlen ist mindestens gleich dem geometrischen Mittel dieser beiden Zahlen!*

23. Zeigen Sie, daß für $m=\{2;3;4;5;6\}$ die Beziehung $(1+x)^m>1+mx$ gilt, wenn $x\neq 0$ und $x>-1$ ist!

24. Die Länge der Seite eines Quadrates wird gemessen. Der ermittelte Wert a sei mit einem Fehler Δa behaftet. Sodann wird der Flächeninhalt A des Quadrates nach der Formel $A=a^2$ berechnet.

a) Wie groß ist dann der Fehler ΔA beim Flächeninhalt?
b) Zeigen Sie, daß das Ergebnis für den Flächeninhalt mindestens einen doppelt so großen prozentualen Fehler enthält, wie der prozentuale Fehler für die Seitenlänge des Quadrates beträgt!

25. Untersuchen Sie entsprechend in Aufgabe *24*

a) die Oberfläche; **b)** das Volumen eines Würfels!

26. Wie können Sie die Formel in Aufgabe *23* zur Vereinfachung der Lösung der Aufgaben *24* und *25* einsetzen?

107. a) $(x^2 + 2x + 2) : (x + 1)$

b) $(x^2 + 2x + a) : (x + 1)$

c) $(a^5 - b^5) : (a - b)$

108. a) $(ab + b^2 + ac + bc - a) : (a + b)$

b) $(a^2 - 2ab + 2a + b^2 + 2b + 1) : (a - b + 1)$

c) $(a^4 - b^4) : (a - b)$

a

Nachstehend sind jeweils zwei Summen gegeben. Die erste ist durch die zweite zu dividieren.

109. a) $c^3 - 8cd^2 + 8d^3;\; c - 2d$

b) $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 11x + 20;\; x - 5$

c) $\frac{81}{256}a^4 - \frac{16}{625}b^4;\; \frac{3}{4}a - \frac{2}{5}b$

d) $-x^4 - x^2 - 1;\; x^2 - x + 1$

110. a) $27r^3s^3 - 15rs - 2;\; 3rs + 2$

b) $m^2 + 2{,}1mn - n^2;\; 5n + 2m$

c) $\frac{u^4}{16} - \frac{v^4}{256};\; \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{16}$

d) $10a^4 - 21a^3 - 16a^2 + 15a;$ $5a^2 + 2a - 3$

111. a) $(125x^3 - 150x^2 + 60x - 8) : (25x^2 - 20x + 4)$

b) $(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1) : (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

c) $(9x^2 + 4y^2 + 1 - 12xy + 6x - 4y) : (1 - 2y + 3x)$

d) $\left(\frac{81}{16}r^4 - \frac{1}{256}s^4\right) : \left(\frac{3}{2}r - \frac{1}{4}s\right)$

e) $(3x^3 - x^2y + xy^2 - 3y^3) : (x - y)$ **f)** $(8x^3 - 27y^3) : (2x - 3y)$

---

27. Zwei natürliche Zahlen a und b seien durch dieselbe natürliche Zahl c teilbar. Zeigen Sie, daß dann auch **a)** die Summe, **b)** das Produkt, **c)** die Differenz (wenn sie eine natürliche Zahl ist) dieser Zahlen durch c teilbar sind!

28. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$. Vergleichen Sie die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ miteinander, und stellen Sie fest, welche zusätzlichen Bedingungen gelten müssen, damit **a)** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, **b)** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, **c)** $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ist!

29. Es seien a und b natürliche Zahlen mit $b \neq 0$ und $a < b$. Vergleichen Sie jeweils die beiden nachstehend angegebenen Quotienten!

a) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+1}{b+1}$

b) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a-1}{b-1}$, $(b \neq 1)$

c) $\frac{a+1}{b+1}$ und $\frac{a-1}{b-1}$, $(b \neq 1)$

d) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+n}{b+n}$, (n natürliche Zahl)

e) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a-n}{b-n}$ mit $n < a$, natürlich

f) Welche allgemeinen Gesetzmäßigkeiten ergeben sich aus **d)** und **e)** für echte Brüche? Formulieren Sie diese in Worten!

g) Untersuchen Sie, ob es entsprechende Gesetzmäßigkeiten für unechte Brüche gibt! Formulieren Sie solche als Ungleichungen und in Worten!

30. Welche Beziehungen zwischen a und b erhält man aus

a) $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b}$, **b)** $\frac{a-n}{b-n} = \frac{a}{b}$, **c)** $\frac{a+n}{b-n} = \frac{a}{b}$?

a

Bestimmen Sie jeweils den g.g.T. und das k.g.V.!

112. **a)** 20; 35; 15 **b)** 25; 30; 40 **c)** 260; 390; 65 **d)** 195; 130; 110 **e)** 165; 440; 495

113. **a)** 21; 42; 210 **b)** 210; 126; 420 **c)** 105; 35; 175 **d)** 210; 315; 36 **e)** 60; 24; 48

114. **a)** abc; ab^2c; a^2bc^2 **b)** abc^2; $a^2b^2c^2$; ac^2
(a, b, c sind untereinander teilerfremde natürliche Zahlen)

115. **a)** x^2yz; xy^2z; xyz^2 **b)** xyz; xy; xz
(x, y, z sind untereinander teilerfremde natürliche Zahlen)

Bestimmen Sie gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache!

116. **a)** r^3s^2t; r^2st^3 **b)** rs^3t^2; $r^2s^2t^2$ **c)** $63m^2n$; $21mn^2$ **d)** $42m^2n^2$; $84\,mn$

117. **a)** $a + b$; $a^2 - b^2$; $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $4p^2 - 9q^2$; $4p^2 - 12pq + 9q^2$; $9q^2 + 12pq + 4p^2$
c) $x - y$; $y^2 - x^2$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 + 2xy + y^2$

Jeder der folgenden Brüche ist so zu erweitern, daß sich das danebenstehende Produkt als erweiterter Nenner ergibt. Geben Sie die erweiterten Brüche an!

118. **a)** $\dfrac{15ab}{14bc}$; $112bc$ **b)** $\dfrac{a+b}{17r}$; $85rst$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{q}{4}}$; $16p^2 - 4q$

d) $\dfrac{a-b}{4u-2v}$; $4u^2 - 4uv + v^2$

119. **a)** $\dfrac{3m}{15n}$; $10m^2n^2$ **b)** $\dfrac{13}{x+y}$; $x^2 - y^2$

c) $\dfrac{15}{11a-1}$; $121a^2 - 22a + 1$

d) $\dfrac{7}{3x+0{,}5}$; $(3x + 0{,}5)^2$

Kürzen Sie soweit wie möglich!

120. **a)** $\dfrac{242p^2}{33pq}$ **b)** $\dfrac{x^3}{x^5}$ **c)** $\dfrac{7a-14b}{a-2b}$

121. **a)** $\dfrac{x^5}{x^3}$ **b)** $\dfrac{60a^2 - 30b^2}{12a - 6b}$ **c)** $\dfrac{81x^2 - 162x + 81}{27x - 27}$

Ermitteln Sie ein gemeinsames Vielfaches der Nenner!

122. **a)** $\dfrac{x^2}{a^2}$; $\dfrac{y^2}{b^2}$; 1

b) $\dfrac{1}{15x}$; $\dfrac{1}{x^2y^2}$; $\dfrac{1}{12y}$; $\dfrac{1}{30xy}$

c) $\dfrac{1}{a}$; $\dfrac{1}{a+1}$; $\dfrac{1}{a+2}$; $\dfrac{1}{a+3}$

123. **a)** $\dfrac{1}{15a^2}$; $\dfrac{1}{20b^2}$; 30

b) $\dfrac{a}{x-y}$; $\dfrac{b}{x+y}$; $\dfrac{c}{x-z}$; $\dfrac{d}{x+z}$

c) $\dfrac{a-b}{2}$; $\dfrac{3}{5y-2z}$; $\dfrac{2a-3b}{5y-2z}$; $\dfrac{4}{2y-5z}$

Schreiben Sie die folgenden Quotienten als Brüche, und kürzen Sie soweit wie möglich!

124. a) $(-r^2 - 2rs - s^2) : (r + s)$
b) $(a - b)^2 : (b - a)$
c) $(25 - 4x^2)^2 : (10x + 25)$

125. a) $(x - 1) : (2 - 2x)$
b) $(4x^2 - 25) : (2x + 5)$
c) $(5p - 3q)^3 : (3p - 5q)$

Vergleichen Sie folgende Paare von Brüchen miteinander!
(Alle vorkommenden Variablen bedeuten natürliche Zahlen, verschieden von Null.)

126. a) $\frac{a}{b}$ und $\frac{2a}{3b}$ b) $\frac{a}{5ab}$ und $\frac{3b}{7b^2}$
c) $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a-b}{a+b}$

127. a) $\frac{x}{2y}$ und $\frac{11x}{22y}$ b) $\frac{rs}{3st}$ und $\frac{rst}{4st^2}$
c) $\frac{2x-y}{2x+y}$ und $\frac{x-2y}{x+2y}$

Formen Sie folgende Quotienten in Summen um!

128. a) $\frac{a^2b + ab^2 - a^2b^2}{ab}$
b) $\frac{a^2b + ab^2 - a^2b^2}{abc}$
c) $\frac{a^2 + 2cb + b^2}{ab}$
d) $\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{2x - 3y}$
e) $\frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{20x + 30y}$
f) $\frac{5s + r}{s}$ g) $\frac{b + g}{bg}$
h) $\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{R_1R_2R_3}$

129. a) $\frac{xy + x^2y + xy^2}{xy}$
b) $\frac{1 - 2xy + x^2y^2}{xy}$
c) $\frac{25 - 20x + x^2}{50x^2}$
d) $\frac{16r^2 - 40rs + 25s^2}{8r - 10s}$
e) $\frac{49x^2 - 121y^2}{21x + 33y}$
f) $\frac{2s - t}{2t}$ g) $\frac{a - b}{ab}$
h) $\frac{3(5x + 2y) - 4(5x - 2y)}{25x^2 - 4y^2}$

Formen Sie die folgenden Summen in Quotienten um!

130. a) $\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}$ b) $\frac{2}{c} + \frac{c}{2}$
c) $\frac{2x}{4y + 5} - \frac{5x - 1}{10y} - \frac{y - 1}{8}$
d) $\frac{2u}{u - v} - \frac{3v}{u + v} + \frac{5}{u}$

131. a) $\frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ b) $\frac{1}{x^2} + x^2$
c) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
d) $\frac{9}{m + n} - \frac{5}{m} + \frac{4}{n}$

132. a) $\frac{20c}{c - 3} - \frac{19c}{c - 4} + \frac{c}{c - 5}$
b) $\frac{7s - 1}{15r - 30t} + \frac{4s - 11}{5r - 10t} - \frac{18s + 1}{r - 2t}$
c) $\frac{7y}{x^2 + xy} - \frac{5x}{xy + y^2} + \frac{3}{xy}$

133. a) $\frac{5}{4m} - \frac{7}{6n} - \frac{9}{8mn} + \frac{m^2 - 11mn}{12mn(m - n)}$
b) $13 - \frac{17m}{3m + 1} - \frac{5}{1{,}5m + 0{,}5}$
c) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$

134. a) $\dfrac{4m+n}{(m-n)^2}+\dfrac{21}{m+n}-\dfrac{2m-5n}{(m-n)^2}-\dfrac{22m^3+29n^3}{m^2-n^2}$

b) $\dfrac{5y-7z}{2y^3+2y^2z}-\dfrac{14y+9z}{3yz^2-3z^3}+\dfrac{2y^2-z^2}{4y^2z+4yz^2}-\dfrac{13z^2-11y^2}{6y^2z-6yz^2}$

Zeigen Sie, daß folgende Gleichungen gelten!

135. a) $\dfrac{6s-3rs}{5s}-\dfrac{12+4r}{10}=-r$

b) $\dfrac{4m^2-9}{4m^2-12m+9}=\dfrac{4m^2+12m+9}{4m^2-9}$

c) $\dfrac{p^2+p}{p}-p=1$

136. a) $\dfrac{a-bx}{b}+x=\dfrac{a}{b}$

b) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{xy+y^2z}{y^2}=-z$

c) $p\left(1-\dfrac{1}{p}\right)+1=p$

137. a) $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{1}$ b) $2\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{a}{b}$ c) $15m\cdot\dfrac{3n}{5n}$

138. a) $\dfrac{r^2s}{uv^2}\cdot\dfrac{u^2v}{rs^2}$ b) $\dfrac{4}{p}\cdot q$ c) $\dfrac{15m}{5n}\cdot 3n$

139. a) $\dfrac{9x^2}{bxy}\cdot\dfrac{4x}{18mz}$ b) $\dfrac{2xy}{3yz}\cdot\dfrac{4xy}{5x^2}$

c) $\dfrac{13xy}{12ab}\cdot\dfrac{15ac}{26xz}\cdot\dfrac{48bz}{30cy}$

140. a) $\dfrac{13m^3}{14n^2}\cdot\dfrac{21mn^2p}{39m^2n}$ b) $\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{b}{y}\cdot\dfrac{c}{z}$

c) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3rs}{5m^2n^2}\cdot\dfrac{15m^2n}{6r^2s}$

141. a) $\dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{1}{a+b}$ b) $\dfrac{1}{x+y}\cdot(x+y)$

c) $\dfrac{1}{x+y}\cdot x+y$ d) $\dfrac{a-7}{a^2-49}\cdot(a+7)$

e) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$

142. a) $\dfrac{1}{a-b}\cdot\dfrac{1}{a+b}$

b) $\dfrac{3x-2}{10y+4}\cdot\dfrac{5y+2}{6x-4}$

c) $\dfrac{5a-2b}{6r-4s}\cdot\dfrac{5{,}4r-3{,}6s}{5{,}5a-2{,}2b}$ d) $\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$

143. a) $\dfrac{a}{5}:\dfrac{a^2x}{20}$ b) $\dfrac{ax}{b^2y^2}:\dfrac{a^2x^2}{by}$

c) $\dfrac{1}{3a}:\dfrac{1}{5a}$

144. a) $\dfrac{1}{10a}:\dfrac{1}{5a^2}$ b) $\dfrac{7}{5x}:\dfrac{35x}{b}$

c) $\dfrac{1{,}2p^2}{4{,}6q^2}:\dfrac{6p^2}{11{,}5q}$

145. a) $\dfrac{27x^3}{16y^2}:\dfrac{81x^2y}{8y^3}$ b) $\dfrac{-36m^2p}{1{,}3d}:\dfrac{-0{,}18m}{-52df}$

c) $\dfrac{15a^2b}{81ab^2}:25ab$ d) $15x:\dfrac{4{,}5x}{2y}$

146. a) $\dfrac{8}{9abc}:\dfrac{9abc}{8}$ b) $\dfrac{-0{,}39}{0{,}25r}:\dfrac{2{,}6rs}{-7{,}5x^2}$

c) $\dfrac{26abc}{3{,}9axy}:(-10bc)$ d) $(-27rs):\dfrac{8{,}1s}{1{,}8r}$

147. a) $(-65ab):\dfrac{1{,}3a^2}{-50b}$ b) $5\dfrac{1}{5}:1{,}3a$

c) $11\dfrac{1}{5}a:(-7a)$

d) $143x^2y^2:6\dfrac{3}{11}xy$

e) $(-25rs):4\dfrac{1}{6}r$

148. a) $(-145m):\dfrac{29mn}{5n}$ b) $\left(-5\dfrac{1}{7}\right):1\dfrac{3}{21}x$

c) $\left(-3\dfrac{3}{8}a\right):\left(-5\dfrac{1}{3}b\right)$

d) $\left(-6\dfrac{3}{11}xy\right):(-143x^2y^2)$

e) $(-357mn):\left(-11\dfrac{9}{10}m^2\right)$

149. a) $\dfrac{\dfrac{4p-3q}{8p+9q}}{\dfrac{-12pq+9q^2}{16p^2+18pq}}$ **b)** $\dfrac{a+b}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2a+b^2}}$ **c)** $\dfrac{\dfrac{a+b}{-am+an}}{m^2-n^2}$

150. a) $\dfrac{\dfrac{21a^2b}{20xy^2}}{\dfrac{35ab^2}{75x^2y}}$ **b)** $\dfrac{\dfrac{4xy^2}{a-b}}{\dfrac{16x^2y}{(a^2+b^2)}}$ **c)** $\dfrac{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a+b}}$

---

31. Offensichtlich gilt $2+\dfrac{2}{1}=2\cdot\dfrac{2}{1}$, $3+\dfrac{3}{2}=3\cdot\dfrac{3}{2}$, $4+\dfrac{4}{3}=4\cdot\dfrac{4}{3}$.

a) Formulieren Sie diese Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe von Variablen!

b) Zeigen Sie, daß die in **a)** gefundene Gleichung immer gilt!

c) Gilt auch $n-\dfrac{n}{n+1}=n\cdot\dfrac{n}{n+1}$?

32. Von drei parallel geschalteten Widerständen, an denen die Gleichspannung U anliegt, ist der zweite doppelt so groß wie der erste und der dritte doppelt so groß wie der zweite.

a) Der kleinste Widerstand sei R, **b)** der größte Widerstand sei R.

Berechnen Sie für beide Fälle die Gesamtwiderstände, die Gesamtstromstärken und die Zweigstromstärken!

---

b) Lineare Funktionen und Gleichungen

---

1. Ordnen Sie jedem Element der Menge $X=\{1;2;4\}$ genau ein Element der Menge $Y=\left\{1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y=\dfrac{1}{x}$ **b)** $y=\dfrac{1}{4}x$ zu!

Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

2. Ordnen Sie jedem Element der Menge $X=\{1;3;9\}$ genau ein Element der Menge $Y=\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3};1\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y=\dfrac{x}{9}$ **b)** $y=\dfrac{1}{x}$ zu!

Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

3. Der Definitionsbereich einer Funktion sei

$$X=\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ +\frac{1}{2};\ +1;\ +\frac{3}{2};\ +2\right\}.$$

Man erhält die Funktionswerte, indem man die Argumente

a) quadriert und dann durch 3 dividiert, **b)** durch 3 dividiert und dann quadriert.

Stellen Sie die so gegebene Funktion als Menge geordneter Zahlenpaare, durch eine Gleichung und graphisch dar!

4. Gegeben sei die Funktion **a)** $4y + x = 20$, **b)** $x + 3y = 30$.

Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare $[x; y]$, in denen x und y natürliche Zahlen sind mit $0 \leqq x \leqq 20$!
Stellen Sie die Funktion graphisch dar! Bestimmen Sie den Wertevorrat der Funktion!

5. Eine Drahtspirale von 100 mm Länge dehnt sich bei Belastung so aus, daß das Verhältnis der ausgeübten Kraft zu der dadurch hervorgerufenen Längenausdehnung stets $\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{mm}}$ beträgt. Bestimmen Sie die Gesamtlänge l der Spirale, wenn eine Belastung $\mathfrak{P}$ von 10 p (20 p, 30 p, 50 p, 60 p) erfolgt! Geben Sie die Funktion an

a) durch die Menge der geordneten Paare $[\mathfrak{P}; l]$,

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung!

6. Nachdem ein Auto 8 km vom Abfahrtsort entfernt ist, fährt es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = 60$ km/h. Wie groß ist die Entfernung s vom Abfahrtsort, nachdem es $t = 10$ (20, 30, 40, 50) Minuten mit gleichbleibender Geschwindigkeit gefahren ist? Geben Sie die Funktion an

a) durch die Menge der geordneten Paare $[t; s]$,

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung!

7. Stellen Sie in **einem** rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Funktionen mit den folgenden Gleichungen graphisch dar!

a) $y = \frac{1}{2}x + 5$ **b)** $2y = x - 3$ **c)** $y - \frac{1}{2}x = 0$ **d)** $2y + 8 = x$

e) $\frac{1}{3}y = -x - 1$ **f)** $y + 3x = 0$ **g)** $y + 3x = 5$ **h)** $2y = -(6x + 3)$

Vergleichen Sie die Bilder der Funktionen! Welche gleichen Eigenschaften und welche unterschiedlichen haben sie? Wie ist das aus den Gleichungen der Funktionen erkennbar?

Welche Geradenschar wird durch die Bilder der folgenden Funktionen dargestellt?

8. $y = -2x + k$

9. $y = ax - 2{,}4$

10. Welche Gleichungen haben die linearen Funktionen, deren Bilder Geraden mit dem Anstieg **a)** $+\frac{3}{5}$, **b)** -5 sind, die die y-Achse jeweils in den Punkten schneiden, deren y-Koordinaten 3, $\frac{1}{2}$, -5 sind?

Stellen Sie die folgenden linearen Funktionen graphisch dar!

11. a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$ **c)** $y = -\frac{3}{2}x$ **d)** $y = -1{,}4$

12. a) $y = x - 1{,}6$ **b)** $y = -5x + 2$ **c)** $y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$ **d)** $y = 2{,}6$

---

1. Suchen Sie zwei Vorschriften, die jedem Element der Menge

$M_1 = \left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ genau ein Element aus der Menge

$M_2 = \left\{0; \frac{1}{16}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 4\right\}$ zuordnen!

a) Geben Sie die beiden Zuordnungsvorschriften und die Mengen geordneter Zahlenpaare an!

b) Sind die von Ihnen gebildeten Funktionen lineare Funktionen?

13. Bestimmen Sie den Wertevorrat der in den Aufgaben **11** und **12** angegebenen Funktionen für folgende Definitionsbereiche

a) $0 \leqq n \leqq 5$, n natürliche Zahl, **b)** $-2 \leqq g < 4$, g ganze Zahl!

Von einer linearen Funktion ist die folgende Wertetabelle gegeben. Zeichnen Sie das Bild der Funktion! Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die durch die Wertetabelle bestimmt ist!

14.

x	-4	$+4$	$+16$
y	-9	-3	$+6$

15.

x	-1	$+2$	$+5$
y	$+5$	-4	-13

b

Verschieben Sie die Geraden, die zu den nachstehenden Funktionsgleichungen gehören, um 3; -2; $\frac{1}{4}$; 0,8 Einheiten in Richtung der positiven y-Achse! Wie heißen die Gleichungen der Funktionen, die durch diese Geraden dargestellt werden? Wo schneiden diese Geraden die beiden Koordinatenachsen?

16. a) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **b)** $-7y = 3x + 14$

17. a) $11x + 11y = 0$ **b)** $y = 2x + 1$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Paare von Funktionsgleichungen zu Geraden gehören, die symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegen! Geben Sie die Symmetrieachse jeweils an!

18. a) $y = 4x$; $y = \frac{1}{4}x$

b) $y = 8x$; $y = -\frac{1}{8}x$

c) $y = -2x + 3$; $y = +2x + 3$

d) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{5}$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{5}$

19. a) $y = 3x$; $y = -3x$

b) $y = 5x$; $y = -4x$

c) $y = 3x + 1$; $y = -3x + 1$

d) $y = x - 2$; $y = -x + 2$

Gehören folgende Paare von Gleichungen zu Geraden, die symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen?

20. a) $y = 2x$; $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = 0{,}2x$; $y = -5x$

c) $y = \frac{3}{4}x$; $y = \frac{4}{3}x$

21. a) $y = -0{,}25x$; $y = 4x$

b) $y = -\frac{2}{3}x$; $y = -\frac{3}{2}x$

c) $y = -2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

---

2. Auf einer Geraden mit der Gleichung $y = mx + b$ sollen die Punkte $P_1(x_1;\, y_1)$ und $P_2(x_2;\, y_2)$ liegen. Beweisen Sie, daß man m mit Hilfe der Gleichung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bestimmen kann!

3. Die Geradenschar $y = mx$ mit $1 < m < \infty$ wird

a) an der x-Achse, **b)** an der y-Achse, **c)** an der Geraden $y = x$ gespiegelt.

Zwischen welchen Zahlen liegen die Richtungsfaktoren der Funktionen, deren Bilder die Geradenscharen sind, die durch die Spiegelungen entstanden sind?

4. Wie können Sie ohne Umformung der Gleichung und ohne Aufstellen einer Wertetabelle die Funktionen mit den Gleichungen

a) $x = 3y + \frac{1}{2}$, **b)** $x = ay + b$ graphisch darstellen?

Die Funktionen mit den nachstehenden Gleichungen sind graphisch darzustellen! Geben Sie die sechs Gleichungen der Funktionen an, deren Bilder durch Spiegelungen der erhaltenen Geraden jeweils an der x-Achse, an der y-Achse und an der Geraden $y = x$ entstehen?

22. a) $y = -2x$ **b)** $5y - x = 0$

23. a) $3y = 9x$ **b)** $5y + x = 0$

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Zahlen bzw. Zahlenpaare jeweils Lösung der danebenstehenden Gleichung bzw. Ungleichung sind!

b

24. a) $x = 7;\ 5x - 40 = -5$

b) $x = \frac{1}{3};\ (5x + 8)\cdot 3 > 20$

c) $[x; y] = [-2; 5];\ 5y + 10x = 5$

25. a) $a = -\frac{1}{2};\ 5a + 1 = a - 1$

b) $y = -4;\ 15y < 3y$

c) $[u; v] = \left[1; -\frac{1}{2}\right];\ (u + 3)\cdot(4v + 2) = 0$

Untersuchen Sie, ob bei folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen die beiden nebeneinander stehenden äquivalent sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

26. a) $7x + 1 = 2x + 5;\ 5x + 1 = 5$

b) $\frac{x}{9} + 1 = 4;\ x + 1 = 36$

c) $7x - 5 < 17;\ 7x < 22$

d) $-6x < 12;\ x < -2$

e) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{5} > 1;\ 2x > -5$

27. a) $8x - 27 + 2x = 2 - x;\ 8x + 3x = 25$

b) $6x + 27 = 9;\ 2x + 9 = 3$

c) $6x > 9;\ 2x > 3$

d) $8 - 2x < 36;\ -4 + x < -18$

e) $\frac{1 - x}{3} < 4;\ 1 - x < 12$

Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen!

28. a) $3 - (5x + 8) = 6x - (15 + x)$

b) $4(17x + 8) + 3(9 - 6x) = 5x - 4(6x - 9)$

c) $12\left(1 + \frac{x}{6}\right) - 4\left(\frac{x}{6} - 2\right) = 5\left(\frac{x}{10} - 7\right)$

d) $\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2$

e) $2x - (3 + 4x) = 9 - (10x - 1)$

f) $7(x + 1) - 5(3x - 7) = 50$

29. a) $\frac{x + 3}{x - 3} = 3,\ (x \neq 3)$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{2x + 2},\ (x \neq 0;\ x \neq -1)$

c) $\frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x + 6}{x + 4},\ (x \neq 3;\ x \neq -4)$

30. a) $\frac{7}{4x} - \frac{1}{12x} = \frac{3}{x} - 2,\ (x \neq 0)$

b) $\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x + 12},$
$(x \neq 0;\ x \neq -4)$

c) $\frac{x + 1}{x + 5} + \frac{x + 3}{x - 1} = 2,$
$(x \neq -5;\ x \neq 1)$

31. a) $3b + 7 < 13$ **b)** $8 + \frac{1}{4}x > 11$

c) $7 - a < 11$ **d)** $3a < 5a$

32. a) $6x - 5 < 13$ **b)** $7 + \frac{1}{5}a < 9$

c) $8 - x > 27$ **d)** $8b > 10b$

33. a) $6x - 9 < 3x - 7$

b) $\frac{1 - x}{3} < 4$ **c)** $1 + \frac{x}{5} > \frac{x}{3} - 1$

d) $\frac{k + 1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{k - 1}{2} - \frac{1}{3}$

34. a) $24x - 15 < 18x + 1$

b) $1 - \frac{x}{3} < 4$ **c)** $1 - \frac{x}{5} > \frac{x - 1}{3}$

d) $\frac{b}{3} - \frac{b + 1}{5} < \frac{1}{15} - \frac{b}{3}$

35. Bilden Sie drei verschiedene Gleichungen der Form $\frac{ax + b}{c} = d$, die alle die Lösung $x = 10$ besitzen!

Ermitteln Sie die jeweiligen Lösungen x der folgenden Gleichungen!

36. a) $b + x = a$ **b)** $ax + b = c$ **c)** $\frac{x}{r} + s = 0$ **d)** $a - \frac{b}{c}x = 0$ **e)** $m(x - n) = p(x + q)$

37. a) $m - x = n$ **b)** $\frac{x}{a} - b = c$ **c)** $ax = bx + c$ **d)** $p : x = q : r$ **e)** $\frac{x + a}{x - a} = a$

b

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für jede der vorkommenden Variablen!

38. a) $a = \frac{b}{2}(c + d)$ **b)** $a = b \cdot \frac{c - d}{2c}$ **c)** $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

39. a) $a = b \cdot c(d - e)$ **b)** $a = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{d \cdot c}{2}$ **c)** $a = b(1 + c \cdot d)$

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen!

40. a) $\frac{4}{5}x + 9 < \frac{5}{4}x$ **b)** $\frac{2 - x}{10} > 2(x - 2)$ **c)** $7(x - 1) < 9(x + 2)$ **d)** $\frac{x}{4} + 3 < 4 - \frac{x}{8}$ **e)** $\frac{x + 3}{4} < \frac{x - 4}{6}$

41. a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} < \frac{1}{2}x$ **b)** $2 - \frac{x}{10} > 2(7 - x)$ **c)** $2{,}5(1 - 4x) > 2{,}5x - 10$ **d)** $\frac{3 - x}{5} > \frac{5 - x}{3}$ **e)** $3 - \frac{x}{5} > 5 - \frac{x}{3}$

Ermitteln Sie die Lösungen x der folgenden Ungleichungen!
Geben Sie an, in welchem Zahlenbereich die von Ihnen ausgeführten Umformungen noch äquivalent waren!

42. a) $a + x < b$ **b)** $ax + b > c$ **c)** $ax + b > bx + a$ **d)** $\frac{x}{a} - b < c$

43. a) $b - x < a$ **b)** $ax - b > c$ **c)** $ax - b < a - bx$ **d)** $a - \frac{x}{b} > c$

---

5. Welche Lösungen x haben die folgenden Gleichungen?

a) $x + a = a - x$ **b)** $x - a = a - x$ **c)** $x + a = a + x$

d) $mx + n = nx + m$ **e)** $mx - n = nx - m$ **f)** $mx + n = mx - n$

6. Geben Sie die Lösungen x im Bereich der natürlichen Zahlen für nachstehende Gleichungen an, wenn a eine natürliche Zahl ist!

a) $a + x = 5$ **b)** $x + 3a = 10$ **c)** $3x + a = 6$ **d)** $3x + 3a = a$

Ermitteln Sie die durch folgende Bedingungen festgelegten Zahlen!

44. a) Das Fünffache einer Zahl ist gleich der um 3 vermehrten Hälfte dieser Zahl.

b) Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich 30.

c) Die Differenz aus dem Fünffachen und dem Doppelten einer Zahl ist gleich der um $\frac{1}{2}$ verminderten Zahl.

45. a) Die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist um 7 größer als 14.

b) Die Hälfte einer Zahl, vergrößert um 2, ist doppelt so groß wie die um 1 verminderte Zahl.

c) Eine um $\frac{2}{3}$ verkleinerte Zahl ist dreimal so groß wie ihr Doppeltes.

b

Formulieren Sie Textaufgaben, zu deren Lösung folgende Gleichungen aufgestellt werden müssen!

46. a) $\frac{x+3}{4} = \frac{x-7}{9}$

b) $8(x-3)+5 = 3(2x+1)$

47. a) $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{9} - 7$

b) $1 - \frac{x}{x+1} = 3$

48. Der Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Widerstände beträgt 20000 Ω. Der eine Widerstand beträgt 100 k Ω, wie groß ist der andere?

49. Von drei parallelgeschalteten Widerständen ist der zweite doppelt so groß wie der erste, der dritte doppelt so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände zu wählen, damit der Gesamtwiderstand 14 Ω beträgt?

50. Für die Rodung eines 23,5 ha großen Kartoffelschlages einer LPG mit einer Vollerntemaschine wären bei rationellstem Einsatz der Maschine 14 Arbeitsstunden zu planen. Wie lange dauert die Rodung der Kartoffeln, wenn gleichzeitig noch eine zweite Vollerntemaschine eingesetzt wird, deren Leistung bei vollem Einsatz aber um 25 % geringer als die der anderen ist?

51. Eine drei Mitglieder zählende Melkerbrigade hat für die im sozialistischen Wettbewerb erzielte Mehrproduktion eine Prämie von 185 MDN erhalten. Die Prämie soll nach dem Leistungsprinzip verteilt werden, indem die von den einzelnen Melkern im Wettbewerb erzielten Punktzahlen zugrunde gelegt werden, nämlich 300 bzw. 450 bzw. 360 Punkte. Wieviel MDN erhalten die einzelnen Melker?

52. Auf der Autobahn fährt ein PKW mit gleichbleibender Geschwindigkeit von $v_1 = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In welcher Zeit hat ihn ein anderer eingeholt, der 10 Minuten später abgefahren ist und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_2 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

53. Ein Autobus hat vor einem später abgefahrenen PKW einen Vorsprung von 3,5 km. Der PKW holt den Bus 5 km vom Abfahrtsort entfernt ein. Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge?

54. 4 l 96%ige Schwefelsäure werden in ein Gefäß mit 2 l Wasser gegeben. Wievielprozentig ist die entstandene Säure?

55. Wieviel Liter 42%ige Säure sind 2 l 10%iger Säure zuzusetzen, damit 30%ige Säure entsteht?

56. a Liter einer p_1-prozentigen Lösung werden mit p_2-prozentiger Lösung vermischt, so daß eine p-prozentige Lösung entsteht. Wieviel Liter p_2-prozentige Lösung sind zuzufügen?

57. a Liter p_1-prozentige Lösung werden mit b Litern p_2-prozentiger Lösung vermischt. Wievielprozentig ist die entstandene Lösung?

58. 1 l 40%ige Salzsäure ist mit Wasser so zu verdünnen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die mehr als 6% Salzsäure enthält. In wieviel Liter Wasser darf man den einen Liter Säure geben?

59. 3 l 70%ige Säure sind mit 12%iger Säure so zu mischen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30% der Säure enthält. Wieviel Liter der 12%igen Säure muß man zusetzen?

60. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 67,6 cm. Ein Schenkel ist 4 cm kleiner als die Grundlinie. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

61. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 5 cm lang. Die Hypotenuse ist 3 cm länger als die andere Kathete. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

62. Elektromagnetische Wellen breiten sich mit einer Geschwindigkeit von rund 300000 km/s aus. Der Höhenfunkmesser eines Flugzeugs sendet Wellen aus, die an der Erdoberfläche reflektiert werden. Von der Aussendung bis zum Empfang der an der Erdoberfläche reflektierten elektromagnetischen Wellen vergehe eine Zeit von 0,000004 s. In welcher Höhe fliegt das Flugzeug?

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen graphisch!

63. a) $3x + 4 = 0$; $3x + 4 > 0$; $3x + 4 < 0$ **b)** $\frac{1}{2}x - 3 > 0$ **c)** $-4x + 3 > 0$

64. a) $10x - 2 = 0$; $10x - 2 > 0$; $10x - 2 < 0$ **b)** $2x + 4 < 0$ **c)** $-6x - 9 < 0$

65. a) $2x + 1 > x$

b) $2x + 3 > 3x - 2$

c) $\frac{1}{2}x - 2 < -1$

66. a) $-3x + 4 > x + 6$

b) $-6x + 4 < 4x - 2$

c) $\frac{1}{3}x - 2 > +1$

Ermitteln Sie graphisch die Lösungen folgender Gleichungssysteme! Überprüfen Sie stets die Richtigkeit der ermittelten Lösungen!

67. a) $\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= 3 - x \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} y &= 2x + 2 \\ y &= \frac{1}{2}x - 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} y + x &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 6y - 10x - 3 &= 0 \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} &= 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{x}{3} &= 0 \end{aligned}$

68. a) $\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ y &= 4x - 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ x &= 4y - 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2y - x &= 0 \\ 4y + 3 &= x \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x + 5y &= 2{,}3 \\ x + y &= 1{,}5 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 23x - 19y &= 5 \\ y &= 2x \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} 4x + 3y &= 15 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$

---

7. Es sind 910 dt Düngemittel aus Güterwagen der Reichsbahn zu entladen. Dazu stehen entweder 5 LKW mit je 36,4 dt Ladefähigkeit oder 7 Traktorenzüge mit je 65 dt Ladefähigkeit zur Verfügung. Ein LKW benötigt für Hin- und Rückfahrt, Be- und Entladung zusammen 50 Minuten, ein Traktorenzug 120 Minuten. Mit welchen Fahrzeugen läßt sich

a) am schnellsten entladen,

b) am billigsten entladen, wenn einmal gleicher Stundenlohn für LKW- und Traktorenfahrer, ein andermal gleicher Lohn für jeden Tonnenkilometer gezahlt wird?

Stellen Sie jeweils die beiden durch Gleichungen gegebenen Funktionen graphisch in einem Koordinatensystem dar!

Verwenden Sie diese Darstellungen zur Lösung der folgenden Gleichungssysteme!

Bestimmen Sie die Lösungen jedes Gleichungssystems!

69. a) $5y + 2x = 1$; $5y + 2x = 14$ **b)** $6x - 3y = 15$; $2x - y = 5$ **c)** $y = 1{,}5x$; $x = 1{,}5y$

70. a) $2x - 5y = 6$; $5y - 2x = 6$ **b)** $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$ **c)** $8y + 5x = 20$; $1{,}6y + x = 4$

71. Begründen Sie an Hand der graphischen Darstellung von Aufgabe **69**, warum drei charakteristische Fälle bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen auftreten und wodurch sie bedingt sind!

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens!

72. a) $3x + 4y = 253$; $y = 5x$ **b)** $x = 3y - 2$; $x = 5y - 12$ **c)** $7y = 2x$; $14y - 4x = 0$ **d)** $x + y = 54$; $\frac{x}{y} = 2$

73. a) $8x - 7y = 85$; $x = 3y$ **b)** $6x - 4y = 24$; $x = y + 2$ **c)** $y = 3x - 17$; $y = 2x - 12$ **d)** $y : x = 1 : 4$; $y + x = 100$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Additions- und Subtraktionsverfahrens!

74. a) $3x + y = 9$; $2x - y = -1$ **b)** $6x + 5y = 8$; $3x - 2y = 1{,}3$ **c)** $0{,}4x + 0{,}3y = 6$; $1{,}2x - 2y = 760$

75. a) $6x + 4y = 4$; $-6x - 2y = 4$ **b)** $3x + \frac{1}{2}y = \frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}x + 2y = -6$ **c)** $5y + 2x = 11$; $7y - 3x = 27$

Wählen Sie zur Lösung der folgenden Gleichungssysteme das rationellste Verfahren!

76. a) $x + y = 1$; $x - y = 3$ **b)** $8x - 15y = -3$; $2x + 3y = \frac{3}{2}$ **c)** $u = v + \frac{7}{2}$; $14u = 112v$ **d)** $x + 3y = 1$; $3y = 11 - 2x$ **e)** $18a - 7b = 2$; $a = b + \frac{1}{42}$

77. a) $3x - y = 7$; $2x - y = 4$ **b)** $8y - 5x = 0$; $-8y - 5x = 80$ **c)** $3x = 15 - 2y$; $9x - 10y = 21$ **d)** $a + 1 = -2b$; $-5a = 38 + b$ **e)** $22y - 4 = z$; $33y + 3 = 2z$

78. a) $3x - 10 = 5y$
$\underline{6x - 20 = 5y}$

b) $\frac{3}{x} + 2y = -\frac{7}{2}$
$\underline{\frac{15}{x} - \frac{5}{4}y = 5}$

c) $5(x-3) - 24y = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)$
$\underline{5x + 7 = 0}$

d) $15(x+2) - 20y = 50$
$\underline{20(x-3) - 40(y-x) = -20}$

e) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y+1) = \frac{3}{2}$
$\underline{\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{2}y = \frac{9}{2}}$

79. a) $\frac{38}{7} - x = y + \frac{2}{7}$
$\underline{38 - 7x = 10(y-1)}$

b) $2r + \frac{10}{s} = 1$
$\underline{\frac{r}{4} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{2}}$

c) $11(x-y) + 12(y-x) = 1$
$\underline{(x-2) : y = 1 : 4}$

d) $5(x+2) - 3(y+1) = 23$
$\underline{3(x-2) + 5(y-1) = 19}$

e) $\frac{1}{x+y} = \frac{2}{3x+1}$
$\underline{\frac{1}{2x+1} = \frac{2}{7y}}$

Ermitteln Sie die Lösungen $[x; y]$ der folgenden Gleichungssysteme!

80. a) $x + y = a$
$\underline{x - y = b}$

b) $ax + by = 0$
$\underline{x + y = 5}$

c) $ax + by = 1$
$\underline{bx + ay = 1}$

81. a) $x + y = a - b$
$\underline{x - y = b}$

b) $ax + by = c$
$\underline{x + y = 0}$

c) $ax + ay = m$
$\underline{x - y = n}$

82. Die Summe zweier Zahlen ist 52. Die Differenz aus dem Dreifachen der einen und dem Fünffachen der anderen ist 100. Welche Zahlen erfüllen die Bedingungen?

83. Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen ist 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten ist 10. Für welche beiden Zahlen gilt dies?

---

8. Wie erkennt man bei einem gegebenen linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen,

a) daß die Lösungsmenge kein Element,
b) daß die Lösungsmenge unendlich viele Elemente enthält?

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$ax + by = c$
$\underline{max + mby = c}$ mit $a \neq 0;\ b \neq 0;\ m \neq 0$

a) für $c = 0$ **b)** für $c \neq 0$!

10. Es seien in Aufgabe **80. a)** die Variablen a und b natürliche Zahlen. Welche Bedingungen müssen gelten, damit die Elemente der Lösungsmenge auch natürliche Zahlen sind?

b

b

84. Eine zweistellige Zahl hat als Quersumme 10. Schreibt man die beiden Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so wird die Zahl dadurch weder größer noch kleiner. Für welche zweistellige Zahl gilt dies?

85. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10. Schreibt man die beiden Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so entsteht eine um 36 kleinere Zahl als die ursprüngliche. Für welche zweistellige Zahl trifft dies zu?

86. Auf einer Großbaustelle werden täglich 62 Wagenladungen mit insgesamt 480 t Beton angeliefert. Einige Fahrzeuge werden mit 6 t, die anderen mit 10 t Beton beladen. Wieviel Ladungen von jeder Art sind es täglich?

87. Ein Güterzug transportiert mit insgesamt 38 Wagen 730 t Braunkohlenbriketts. Einige Wagen sind mit 15 t, die anderen mit 20 t Briketts beladen. Wieviel Wagen von jeder Art sind es?

88. In einem chemischen Betrieb sollen aus einer 96%igen und einer 70%igen Schwefelsäure

a) 5 t einer 84%igen, **b)** 3 t einer 50%igen

Schwefelsäure hergestellt werden. Welche Ausgangsmengen sind dazu erforderlich?

89. Ein Panzer der Nationalen Volksarmee hat einen Weg von 230 km zurückgelegt. Im ursprünglich vollen Kraftstofftank befinden sich noch 40 l. Könnte der Kraftstoffverbrauch je 100 km um 15 l eingeschränkt werden, so würde dieser Panzer einen Aktionsradius von 270 km haben. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Tanks? Wieviel Kraftstoff wird für 100 km verbraucht?

90. Ein Kraftwagen fährt auf der Strecke $\overline{AB}$ mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_2 = 70\,\mathrm{km/h}$ entgegen von B nach A. Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt **a)** 90 km, **b)** 108 km. Nach wieviel Minuten Fahrzeit treffen sie sich? Wieviel Kilometer ist der Treffpunkt von A entfernt?

91. Ein Feuerlöschteich enthält 135 m³ Wasser. Bei einem Einsatz entnimmt eine Motorspritze $750\,\mathrm{l \cdot min^{-1}}$. Wann ist der Teich leergepumpt, wenn 30 min nach der ersten Motorspritze noch eine zweite mit einer Leistung von $500\,\mathrm{l \cdot min^{-1}}$ zusätzlich eingesetzt wird und die erste Pumpe zwischendurch einmal 10 min ausfällt?

92. In der gleichen Zeit umrunden zwei Freunde die 400 m lange Aschenbahn eines Sportplatzes zwei- bzw. dreimal. Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s. Mit welcher Geschwindigkeit laufen die beiden Freunde?

93. Auf einem 15 ha großen Getreideschlag eines volkseigenen Gutes arbeiten ein Mähdrescher $5^1/_2$ h und gleichzeitig ein Mähbinder, der eine halbe Stunde früher als der Mähdrescher begonnen hat. Eine Nachmessung ergibt, daß der Mähbinder 12% der Fläche gemäht hat. Berechnen Sie die Stundenleistungen beider Maschinen!

94. Aus der Antike wurde uns überliefert: ARCHIMEDES (287–212 v. u. Z.) prüfte einen goldenen Kranz des Königs HIERO VON SYRAKUS. Er fand sein Gewicht zu 9 kp und in Wasser eingetaucht zu 8,375 kp. Aus reinem Gold hätte er im Wasser 8,5 kp, aus reinem Silber hätte er im Wasser 8,125 kp gewogen. Wieviel Prozent Silber war in dem Kranz, wenn man annimmt, daß er außer Gold nur Silber enthielt?

95. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthält 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

96. Ein zylinderförmiger Kessel von 3 m Höhe und 190 cm Durchmesser ist zu einem Drittel mit einer 25%igen Ammoniaklösung gefüllt. Wieviel Liter einer 18%igen Ammoniaklösung muß man zugeben, um eine 24%ige Lösung zu erhalten?

97. Ein ganz mit Quecksilber ($\varrho_{Hg} = 13{,}6\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$) gefülltes und verschlossenes Gefäß aus Gußeisen ($\varrho_{Fe} = 7{,}2\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$), das beim Eintauchen in Wasser 20 kg Wasser verdrängt, hat eine Masse von 250 kg. Wie groß ist die Masse des Quecksilbers, wie groß die des Gefäßes?

98. In einem Stromkreis, in dem zwei Widerstände parallel geschaltet sind, sei die Gesamtstromstärke 3 A. Welche Stromstärke wird in den Verzweigungen gemessen, wenn sich die Widerstände wie 2:3 verhalten?

99. a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 6x + y + 2z &= 4 \\ x - 10y - 2z &= 7 \\ 5x - 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}y + \frac{17}{4}z &= 64 \\ \frac{15}{4}x &= \frac{5}{2}y \\ \frac{10}{3}y &= \frac{5}{2}z \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y - z &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= \frac{b - a}{2} \end{aligned}$$

100. a)
$$\begin{aligned} x + y &= 21 \\ y + z &= 15 \\ x + z &= 12 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 10x + 3y + 6z &= 0 \\ 45x - 6y + 60z &= 1 \\ 5x - 6y - 24z &= 7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x &= \frac{7}{3}y - 6 \\ y &= z - 1 \\ z &= \frac{6}{5}x - 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c \end{aligned}$$

101. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn zwei Seiten jeweils zusammen 9 cm bzw. 12 cm bzw. 13 cm lang sind?

102. Drei Bagger unterschiedlicher Förderleistung schaffen eine Ausschachtungsarbeit in 10 Tagen. Die beiden kleinsten Bagger hätten zusammen 20 Tage dazu benötigt, die beiden größeren zusammen 12 Tage. Wie groß ist die Tagesleistung von jedem der drei Bagger?

103. Drei Zahlen verhalten sich wie 2:3:4 und ihre Summe beträgt 36. Für welche Zahlen gilt dies?

104. Die Innenwinkel eines Dreiecks verhalten sich wie 5:6:7. Berechnen Sie diese!

11. Ein Aufklärungsflugzeug überfliegt eine gegnerische Fahrzeugkolonne in Marschrichtung in 1 min 12 s und in entgegengesetzter Richtung in 52 s. Wie lang ist die Fahrzeugkolonne und welche Geschwindigkeit hat diese, wenn das Flugzeug die Kolonne mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $v_F = 400$ km überfliegt?

12. In welchen Fällen hat ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen als Lösungsmenge die leere Menge und wann besitzt die Lösungsmenge unendlich viele Elemente?

13. Eine dreistellige Zahl sei teilbar durch 9 und durch 11. Wenn man ihre erste und letzte Ziffer vertauscht, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl. Für welche dreistellige Zahl gilt das?

c) Potenzfunktionen (Exponent ganzzahlig)

Schreiben Sie folgende Produkte als Potenzen!

1. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$

d) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$ **e)** $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)$

f) $(m - n)\,(m - n)\,(m - n)$

2. a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ **b)** $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

d) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ **e)** $k \cdot m \cdot k \cdot k \cdot m \cdot k$

f) $(r \cdot h) \cdot (r \cdot h)$

Schreiben Sie folgende Potenzen als Produkte!

3. a) 3^5 **b)** $6{,}5^2$ **c)** $\left(-\frac{3}{8}\right)^4$

d) 6^3 **e)** $(m \cdot n)^4$ **f)** $(-k)^3$

g) $(a + b + c)^3$ **h)** $(x - y)^2$

4. a) 4^6 **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ **c)** $(-6)^2$

d) n^5 **e)** $(m + n)^3$ **f)** $(-a)^5$

g) $(a + 2c)^2$ **h)** $(p - q)^3$

Berechnen Sie!

5. a) $(-2)^3$ **b)** $(-25)^2$ **c)** $(-0{,}2)^5$

d) -3^2 **e)** $(-a)^7$ **f)** $-(-2)^4$

g) $+(-1)^5$ **h)** $-\left(+\frac{1}{5}\right)^4$

6. a) $(-3)^4$ **b)** $\left(-\frac{1}{3}\right)$ **c)** -5^4

d) $(-k)^6$ **e)** $-(+25)^2$ **f)** $+(-6)^3$

g) $-(-1)^{15}$ **h)** $-(-13)^2$

Sind die folgenden Potenzen, in denen n eine natürliche Zahl $(n \geqq 2)$ ist, positiv oder negativ?

7. a) $(-1)^{2n}$ **b)** $(-2)^{2n-1}$

c) $(-a)^{2n+1}$ für $a > 0$ und $a < 0$, a rational

8. a) a^{2n-2} für $a > 0$ und $a < 0$, a rational

b) $(-a)^{2n+4}$ **c)** $-(-1)^{2n-1}$

9. Berechnen Sie a^n mit $a \in \{-3; -1; 1; 3; 5\}$ und $n \in \{2; 4\}$ bzw. $n \in \{3; 5\}$!

10. Berechnen Sie a^n mit $a \in \{-2; -1; 1; 2\}$ und $n \in \{2; 3; 6; 7\}$!

---

1. Schreiben Sie in eine Tabelle mit zwei Eingängen die Elemente a der Menge

$$A = \left\{-3; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 3\right\} \text{ und}$$

die Elemente n der Menge $N = \{2; 3; 4; 5\}$!

a) Berechnen Sie die Potenzen a^n!

b) Bestimmen Sie in der Tabelle die Teilmengen der positiven und die der negativen Potenzwerte, und geben Sie diese Teilmengen unter Verwendung der mathematischen Symbolik möglichst kurz an!

c) Geben Sie die Menge aller Zahlenpaare $[a; n]$ an, für die gilt:

1. $a^n = 1$, 2. $-1 < a^n < 0$, 3. $a^n = 0$!

11. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung $y = x^3$ mit dem Definitionsbereich

$$D = \left\{-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}.$$

Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion!

12. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich

$$D = \left\{-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}.$$

Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion!

13. Von verschiedenen Würfeln sind die Seitenlängen a bekannt. Bestimmen Sie die Volumina V dieser Würfel in Kubikzentimeter und in Kubikmeter!

a) $a_1 = 2{,}00$ m **b)** $a_2 = 3$ cm **c)** $a_3 = 3{,}5$ dm **d)** $a_4 = 1{,}00$ m **e)** $a_5 = 12$ cm

14. Stellen Sie das Volumen von Würfeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen graphisch dar! Tragen Sie dazu auf der Abszissenachse die Seitenlängen und auf der Ordinatenachse die Volumina ab!
Bestimmen Sie zu fünf selbstgewählten Seitenlängen die Volumina und zu fünf selbstgewählten Volumina die Seitenlängen!

15. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen! Wählen Sie jeweils als Definitionsbereich alle Zahlen zwischen $a = -2$ und $b = +2$ einschließlich $a = -2$ und $b = +2$!

a) $y = x^2$ **b)** $y = x^3$ **c)** $y = x^4$ **d)** $y = x^5$

e) Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften dieser Funktionen!

Untersuchen Sie mit Hilfe der Bedingungen $f(-x) = f(x)$ und $f(-x) = -f(x)$, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind!

16. a) $y = x^9$ **b)** $y = x^{20}$

c) $y = -x^3$ **d)** $y = x^2 + 5$

17. a) $y = x$ **b)** $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

c) $y = -x^4$ **d)** $y = x^2 - 3$

Stellen Sie für die folgenden Funktionen durch Symmetrieuntersuchungen an ihren Bildern fest, ob sie gerade oder ungerade sind!

18. a) $y = x^4$ **b)** $y = (-x)^3$

c)

x	-3	-1	0	1	3
y	9	1	0	1	9

19. a) $y = x^5$ **b)** $y = -x^2$

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

20. Beschreiben Sie folgende Intervalle mit Worten!

a) $0 \leqq a < 1$ **b)** $-20 \leqq z \leqq -1$ **c)** $-1 < k < 0$

d) $-1 < x \leqq 0$ **e)** $0 \leqq y < +\infty$ **f)** $-\infty < x < +\infty$

---

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen für $-\infty < x < +\infty$ gerade oder ungerade sind!

a) $y = |x|$ **b)** $y = \frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$ **c)** $y = x - 6$ **d)** $y = 3x^2$ **e)** $y = x^3 + 1$ **f)** $y = 2$

3. Untersuchen Sie, ob die Bilder der Funktionen mit Gleichungen der Form $y = x^2 + a$, (a rational) gemeinsame Punkte besitzen!

21. Für welche Zahlen x gilt:

a) $x^2 > x$, $x^2 = x$, $x^2 < x$; **b)** $x^3 > x$, $x^3 = x$, $x^3 < x$; **c)** $x^3 > x^2$, $x^3 = x^2$, $x^3 < x^2$?

Zum Bestimmen der Zahlen bzw. Intervalle können Sie die Bilder der Funktionen $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$ benutzen.

22. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen a an, für die gilt:

a) $-3 \leqq a \leqq +7$, **b)** $1 \leqq a < 5$, **c)** $-2 < a < 1$!

Bestimmen Sie einige rationale Zahlen b aus den folgenden Intervallen!

d) $-2 \leqq b < +3$ **e)** $\frac{3}{4} \leqq b \leqq \frac{4}{3}$ **f)** $0{,}3 < b \leqq \frac{1}{3}$

Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen, die durch ihre Gleichungen und den Definitionsbereich gegeben sind, jeweils den Wertevorrat!

23. a) $y = 2x + 1$ mit $0 \leqq x < +\infty$

b) $y = x^2$ mit $-\infty < x < +\infty$

c) $V = a^3$ mit $0 < a \leqq 10$

24. a) $y = x^3$ mit $-\infty < x < +\infty$

b) $y = x^2$ mit $-2 < x \leqq +3$

c) $y = x^5$ mit $-1 \leqq x < 0$

Welches Monotonieverhalten zeigen die Funktionen mit folgenden Gleichungen in den angegebenen Intervallen?

25. a) $y = x^2$, $(-\infty < x < +\infty)$

b) $y = -x^3$, $(-\infty < x < +\infty)$

c) $y = x^3$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$

d) $y = x^4$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$

26. a) $y = -x^2$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$

b) $y = x^3$, $(0 < x < 1)$

c) $y = x^2$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$

d) $y = x^5$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$

Geben Sie auch zu jeder Funktion den Wertevorrat an!

Vergleichen Sie je zwei nebeneinanderstehende Potenzen auf Grund der Kenntnis des Monotonieverhaltens der Potenzfunktionen!

27. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ **b)** $(-3)^{17}$; $(-4)^{17}$

c) $\left(-\frac{1}{12}\right)^6$; $\left(-\frac{3}{12}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{6}{5}\right)^9$; $1{,}1^9$

e) 0^{15}; $(-1)^{15}$

28. a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9$; $\left(-\frac{3}{5}\right)^9$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

e) $-(-3)^3$; $-(1)^3$

Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen mit dem Definitionsbereich $-2 \leqq x \leqq +2$ jeweils in dasselbe Koordinatensystem!

29. a) $y = x^2$; $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 2{,}5$

b) $y = x^3$; $y = x^3 - 2$; $y = x^3 + 3$

c) $y = x^4$; $y = x^4 + 1{,}5$; $y = x^4 - 1$

30. a) $y = x^3 + e$; $e \in \{-3;\ -0{,}5;\ 1;\ 1{,}5\}$

b) $y = x^2 - b$; $b \in \{-2;\ 0;\ 2{,}5;\ 6\}$

c) $y = x^4 + c$; $c \in \{-1;\ 0;\ 0{,}5;\ 2\}$

Geben Sie zu jeder Funktion Definitionsbereich, Wertevorrat und Monotonieintervalle an! (Benutzen Sie zum Zeichnen nach Möglichkeit Schablonen!)

C

31. Verschieben Sie die Bilder der Funktionen **a)** $y = x$, **b)** $y = x^2$, **c)** $y = x^3$ jeweils um 1 (2, 4) Einheiten in der positiven Richtung der y-Achse! Führen Sie die Verschiebungen dann um $1\left(3, \frac{3}{4}\right)$ Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse aus!
Geben Sie für alle so entstandenen Funktionen die Gleichungen an!

Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen in dasselbe Koordinatensystem! (Definitionsbereich: $-2 \leqq x \leqq +2$) Geben Sie jeweils die Monotonieintervalle an!

32. **a)** $y = 3x^2$ **b)** $y = x^2$
c) $y = \frac{1}{3}x^2$ **d)** $y = -\frac{1}{2}x^2$
e) $y = -x^2$ **f)** $y = -2x^2$

33. **a)** $y = 2x^3$ **b)** $y = x^3$
c) $y = -\frac{1}{2}x^3$ **d)** $y = -x^3$
e) $y = \frac{1}{3}x^3$ **f)** $y = -\frac{3}{2}x^3$

Spiegeln Sie die Bilder der folgenden Funktionen an der x-Achse und an der y-Achse! Geben Sie die Gleichungen der so entstandenen Funktionen an!

34. **a)** $y = x^3$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x^4$

35. **a)** $y = x^2$ **b)** $y = 2x^3$ **c)** $y = -\frac{2}{3}x^2$

C

36. In einer Meßreihe wurde die elektrische Leistung eines Gleichstromkreises in Abhängigkeit von der Spannung untersucht:

U(in V)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
P(in W)	0,1	0,35	0,9	1,55	2,55	3,6	5,0	6,4	8,0	10

a) Tragen Sie die Meßwerte in ein U,P-Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie die Kurve! (Spannung U auf der Abszissenachse, Leistung P auf der Ordinatenachse)
b) Bestimmen Sie aus einigen Meßwertpaaren (U; P) den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{R}$ zu dieser Funktion $\left(\text{Gleichung } P = \frac{1}{R} \cdot U^2\right)$!
c) Wie groß ist der Widerstand (in Ω), der bei diesem Versuch benutzt wurde?

37. Stellen Sie das Volumen V von Pyramiden mit quadratischer Grundfläche in Abhängigkeit von der Seitenlänge a der Grundfläche graphisch dar! Berechnen Sie dazu für die gleichbleibende Höhe h einige Paare [V; a], und tragen Sie diese in ein V,a-Koordinatensystem ein!

a) $h = 3;\ 0 < a \leqq 5$ **b)** $h = 1;\ 0 < a$ und $V < 30$
(h und a in cm; V in cm^3)

---

4. Spiegeln Sie die Bilder folgender Funktionen:

a) $y = 2x^2 + 2,\ (-\infty < x < +\infty)$ an der x-Achse,
b) $y = 2x^2 - 2,\ (-\infty < x < +\infty)$ an der x-Achse,
c) $y = x^3 + 1,\ (0 \leqq x < +\infty)$ an der x-Achse,
d) $y = x^3 - 1,\ (0 \leqq x < +\infty)$ an der x-Achse,
e) $y = x^2,\ (0 \leqq x < +\infty)$ an der Geraden $y = x$!

Stellen Sie die Gleichungen der zu den Spiegelbildern gehörenden Funktionen auf! Bestimmen Sie zu diesen Funktionen den Definitionsbereich und den Wertevorrat!

38. Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls lautet:

$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ (s ist der zurückgelegte Weg in Metern; t ist die Fallzeit in Sekunden; $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ ist die Fallbeschleunigung).

a) Stellen Sie dieses Gesetz graphisch dar!
b) Bestimmen Sie das Intervall aus dem Definitionsbereich von t, für das $50 < s < 100$ gilt!

Bemerkung: Wenn nicht anders angegeben, gilt für die Aufgaben 39 bis 69: Alle Basen sind rationale Zahlen. Jeder auftretende Divisor bzw. Nenner eines Bruches ist von Null verschieden.

Aufgaben 39 bis 54: Alle Exponenten sind natürliche Zahlen (größer als 2).
Aufgaben 55 bis 69: Alle Exponenten sind ganze Zahlen.
Basis und Exponent sind nicht gleichzeitig Null.

C

Berechnen Sie für jede der folgenden Aufgaben die jeweiligen Potenzwerte!

39. a) $3^2 \cdot 3^3$ **b)** $(-4)^2 \cdot (-4)^4$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$ **d)** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^2$ **e)** 7^{3+2}

40. a) $7^5 : 7^3$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^6 : \left(\frac{1}{5}\right)^3$ **c)** $13^6 \cdot \frac{1}{13^4}$ **d)** $\frac{(-2)(-2)(-2)(-2)}{(-2)^2}$ **e)** $\frac{5^7}{5^3}$

41. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 6^2$ **b)** $(-5)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$ **c)** $(2 \cdot 4)^3$ **d)** $\left(4 \cdot \frac{1}{8}\right)^2$ **e)** $(-2)^4 \cdot \frac{1}{4^4}$ **f)** $8^5 : 4^5$ **g)** $(5^2)^4$ **h)** $\left(\frac{1}{6^2}\right)^3$

42. a) $12^3 : 4^3$ **b)** $5^2 : \frac{1}{10^2}$ **c)** $\frac{1}{6^2} : \frac{1}{12^2}$ **d)** $\frac{49^4}{7^4}$ **e)** $\left(51 \cdot \frac{1}{17}\right)^4$ **f)** $(-1)^5 \cdot 2^5$ **g)** $(-5^2)^2$ **h)** $(3^3)^3$ **i)** $2^{3 \cdot 4}$

Berechnen Sie bzw. vereinfachen Sie weitgehend!

43. a) x^3x^5 **b)** a^2a^4 **c)** $\frac{3}{5}b^3 \cdot \frac{4}{7}b^2$ **d)** $(-x)^4x^3$ **e)** $(-x)^3x^4$ **f)** $\frac{1}{2}a^2b^4c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b^4c^2$ **g)** $(x-1)^3 \cdot (x-1)^2$ **h)** $a^{2m}a^m$ **i)** $c^{2m-n}c^{2n-m}$

44. a) m^3m^5 **b)** y^6y^4 **c)** $\left(-\frac{6}{7}v^3\right)\left(-\frac{1}{8}v^6\right)$ **d)** $(-x^3)\,x^4$ **e)** $(-x^3)(-x^4)$ **f)** $7{,}24a^3b^2 \cdot 82{,}3a^2b^2$ **g)** $(a-b)^4c^5(a-b)^2c^7$ **h)** x^nx^{3n} **i)** $r^{3k+1}r^{3-2k}$

45. a) $a^4 : a^2$ **b)** $5^{18} : 5^{14}$ **c)** $(1{,}2x^4) : (3{,}6x^2)$ **d)** $(-x^5) : x^2$ **e)** $(-x)^5 : x^2$ **f)** $x^m : x^2$; $(m \geqq 4)$ **g)** $10^{5a-2} : 10^a$; $(a \geqq 1)$ **h)** $x^{2p+5q} : x^{q-p-2}$

46. a) $x^6 : x^3$ **b)** $b^{27} : b^{13}$ **c)** $(1{,}8m^5) : (5{,}4m^2)$ **d)** $(-x)^7 : x^3$ **e)** $x^5 : (-x^2)$ **f)** $a^n : a^3$; $(n \geqq 5)$ **g)** $5^{7k+1} : 5^{2k}$ **h)** $a^{2r-s+1} : a^{r-s}$; $(r \geqq 1)$

Fassen Sie zu einer Potenz zusammen!

47. a) $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ **b)** $a^4 \cdot b^4 \cdot (c+d)^4$ **c)** $m^2 \cdot \frac{k^2}{l^2}$ **d)** $\frac{(a-b)^5}{(a+b)^5} \cdot (a-1)^5$

48. a) $a^3b^3c^3$ **b)** $\frac{m^5}{n^5}$ **c)** $\frac{(r-s)^4}{(k+o)^4}$ **d)** $(x-y)^3\,(x+y)^3$

Fassen Sie die folgenden Terme zu einer Potenz zusammen, und vereinfachen Sie die Basis!

49. a) $\frac{17^3}{34^3} \cdot \frac{23^3}{69^3}$ **b)** $\left(\frac{a^6}{2b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^5}{a^3}\right)^3$

c) $\frac{(2p^4q^7)^5}{(3p^2q^2)^5}$

50. a) $\frac{15^2}{22^2} \cdot \frac{11^2}{5^2}$ **b)** $\left(\frac{4b^4}{a}\right)^4 \left(\frac{a}{8b}\right)^4$

c) $\frac{(3o^4p^5)^3}{(6o^2p^2)^3}$.

Potenzieren Sie die folgenden Potenzen!

51. a) $(m^2)^4$ **b)** $(0{,}3 \cdot m^3 \cdot n^2)^3$

c) $(x^{n-1} \cdot y^{n-2})^3$; $[n \geqq 4]$ **d)** $\left(\frac{5x^3}{6y^2}\right)^3$

52. a) $(a^3)^4$ **b)** $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^2$

c) $(4m^pn^q)^3$ **d)** $\left(\frac{4a^2}{7b^3}\right)^2$

Berechnen Sie folgende Summen!

53. a) $5^2 + 6 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5^2$

b) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-3)^2$

c) $(1{,}3b - 0{,}4)^3$

54. a) $3^4 - 5 \cdot 3^4 + 7 \cdot 3^4$

b) $2 \cdot (-4)^4 - 5(-3)^2 - 2 \cdot 4^2$

c) $(1{,}5a - 0{,}2)^3$

55. Zeigen Sie, daß die Definition $a^1 = 1$; (a reell) dem Permanenzprinzip widerspricht! Benutzen Sie dazu das Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; (a reell, $a \neq 1$)!

56. Zeigen Sie, daß die Definition $a^0 = 0$; (a rational, $a \neq 0$) nicht sinnvoll ist! Benutzen Sie dazu das Potenzgesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$!

57. Bestimmen Sie die Potenzwerte folgender Potenzen!

a) 20^1 **b)** 5^0 **c)** 1^1 **d)** 100^0 **e)** $(-6)^0$

f) $(-b)^0$; $(b \neq 0)$ **g)** $\frac{(-3)^3}{(-3)^3}$ **h)** $2^3 \cdot 5^0$ **i)** $(-5)^3 \cdot (-5)^1$

58. Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

a) $x^3 : x^3$ **b)** $a^{m+1} : a^m$; $(m \geqq 0)$ **c)** $3x^{m+2} : 3x^{m+1}$; $(m \geqq -1)$

d) $0{,}21x^3y^6) : (7x^2y^2)$ **e)** $\frac{27a^m}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^4}$

Formen Sie die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten!

59. a) 5^{-6} **b)** x^{-4} **c)** 15^{-c}, $c \in N$

d) $\frac{1}{6^{-2}}$ **e)** $\frac{1}{x^{-k}}$; (k natürlich)

f) $\frac{1}{(-10)^{-3}}$ **g)** $a^4 \cdot b^{-3}$

h) $\frac{m^{-3}}{n^{-6}}$ **i)** $\frac{1}{x^{-7} \cdot y^a}$; ($a$ natürlich)

60. a) 4^{-3} **b)** $(-b)^{-2}$ **c)** $\frac{a^3}{a^{-3}}$

d) a^{-5} **e)** $(6^{-1})^3$

f) $\frac{1}{2^{-3}}$ **g)** $x^{-4} \cdot y^{-4}$

h) 1^{-3} **i)** $\frac{1}{(-3)^{-4}}$

---

5. Ordnen Sie die folgenden Potenzen nach ihrer Größe!

22^2; 2^{22}; $(2^2)^2$; 2^{2^2}

6. Geben Sie die größte Zahl an, die sich durch dreimalige Verwendung der Ziffer „3" darstellen läßt!

C

61. Beweisen Sie die Gültigkeit des Potenzgesetzes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für ganzzahliges m und n! (Die Gültigkeit dieses Potenzgesetzes für natürliche m und n wird vorausgesetzt.) Führen Sie dazu eine vollständige Fallunterscheidung durch!

62. Beweisen Sie die Gültigkeit des Potenzgesetzes $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ für n ganzzahlig!

Berechnen bzw. vereinfachen Sie!

63. a) $5^{-3} \cdot 125$ b) $\frac{5}{3}z^0 \cdot \frac{9}{5}z^{-2}$

c) $\frac{7}{8}x^2 \cdot 0{,}4x^{-2}$

d) $400a^{2n} \cdot 0{,}08a^{-5n}$

64. a) $108 \cdot 3^{-4}$ b) $r^{-3} \cdot s^3$

c) $k^{-x} \cdot k^x$

d) $4b^3c^{-5} \cdot 3b^{-4}c^5$

65. a) $a^{k+1} \cdot b^{k-1} \cdot c^{-k} \cdot a^{-k} \cdot b^{-k} \cdot c^{k-1}$ b) $(2x + 3x^{-1}) \cdot (3x^{-2} - 2x^{-1})$

66. a) $(-5)^3 : (-5)^6$

b) $a^5 : a^9$

c) $\left(\frac{1}{2}p^{12}\right) : \left(\frac{3}{2} \cdot p^{14}\right)$

d) $(q^{2n-1} \cdot r^{3n}) : (q^{2n+1} \cdot r^{-3n})$

e) $\frac{2^a \cdot 2^5 \cdot 2^{10-a}}{2^{2a-3}}$

67. a) $(-4^{10}) : (-4)^{12}$

b) $c^6 : c^{11}$

c) $(1{,}4q^{12}) : (3{,}5q^{20})$

d) $(a^{m-1} \cdot b^{-n}) : (a^m \cdot b^{2n} \cdot c^1)$

e) $\frac{x^{-2a-4}}{x^{-2a+4}}$

68. a) $(3^2)^{-2}$ b) $\left(\frac{x^2}{10}\right)^{-1}$

c) $(a^{-5})^2$ d) $(-x^{-7})^{-2}$

e) $(r^{-4}s^3t)^{-3}$ f) $\frac{(a^2 - b^2)^{-2}}{(a + b)^{-2}}$

69. a) $(5^{+2})^{-3}$ b) $\left(\frac{1}{6}x^3\right)^{-1}$

c) $(3^{-2})^2$ d) $\left(\frac{4}{5}a^{-3}\right)^{-2}$

e) $(n^{-4} \cdot v^{-2})^3$ f) $\frac{(a - b)^{-2}}{(a^2 - b^2)^{-1}}$

Verwenden Sie beim Lösen der folgenden Aufgaben den Rechenstab!

70. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach 2,5 s ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$)!

71. Bestimmen Sie die Beschleunigung eines Fahrzeuges, das nach 6 s seine Geschwindigkeit von 40 km $\mathrm{h^{-1}}$ erreichte! ($v = a \cdot t$)

72. Berechnen Sie den Bremsweg eines Motorrades, wenn die Verzögerung beim Bremsen 4 m $\mathrm{s^{-2}}$ beträgt und das Motorrad mit 60 km $\mathrm{h^{-1}}$ fuhr! ($s = \frac{v^2}{2a}$; a ist hier die Verzögerung)

73. Wieviel Sekunden braucht ein D-Zug beim Anfahren, um auf die Geschwindigkeit von 80 km $\mathrm{h^{-1}}$ zu kommen? ($v = a \cdot t$; $a = 0{,}25\ \mathrm{m\ s^{-2}}$)

---

7. Welche Bedingungen müssen für die Variablen in den folgenden Termen gelten, wenn die Basen rationale und die Exponenten natürliche Zahlen (größer als 2) sein sollen?

a) a^{m-5} b) $\frac{r^m}{r^{2m-2}}$ c) $\frac{(x \cdot y)^k}{(x + y)^k}$ d) $(a \cdot x^{2m} + b \cdot x^{2n+4m} - c \cdot x^{2m}) : (x^{m-n})$

74. Bestimmen Sie den elektrischen Widerstand einer Kupferfreileitung mit einem Querschnitt von 12 mm² und einer Länge von 150 m!

$\left(R = \varrho \cdot \frac{1}{A};\ \varrho_{Cu} = 0{,}0155\ \Omega\,\mathrm{mm^2 m^{-1}}\right)$

75. Wieviel Kilogramm wiegt ein Stahlrohr, dessen Länge 3000 mm, dessen Außendurchmesser 5,5 cm und dessen Wanddicke 2 mm betragen?

$(\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}})$

Schreiben Sie folgende Zahlen in der Form $a_0 \cdot 10^q$ mit a rational, $1 \leqq a_0 < 10$ und q ganzzahlig!

76. a) 2421 **b)** 35 040 000 **c)** 0,238

d) 0,000048 **e)** 43800 **f)** 400

77. a) 23,41 **b)** 0,0205 **c)** 0,001

d) 0,00005 **e)** 34 165 **f)** 4 000 300

Schreiben Sie ohne abgetrennte Zehnerpotenzen!

78. a) $7 \cdot 10^5$ **b)** $5 \cdot 10^{-3}$ **c)** $2{,}73 \cdot 10^4$

d) $9{,}834 \cdot 10^7$ **e)** $6 \cdot 10^4$ **f)** $8{,}42 \cdot 10^1$

79. a) $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ **b)** $3{,}43 \cdot 10^{-4}$ **c)** $6{,}42 \cdot 10^7$

d) $8{,}3 \cdot 10^{-5}$ **e)** $4{,}2 \cdot 10^{-2}$ **f)** $3{,}2 \cdot 10^6$

80. Vereinfachen Sie die Schreibweise folgender Zahlen durch Benutzen der Schreibweise mit Zehnerpotenzen!

a) In 22,4 l Sauerstoff unter Normalbedingungen befinden sich 602 400 000 000 000 000 000 000 Moleküle.

b) Ein Molekül Wasser (H_2O) hat eine Masse von 0,000 000 000 000 000 000 000 029 88 g

c) Die elektrische Elementarladung beträgt 0,000 000 000 000 000 000 1602 C.

d) Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 149 500 000 000 m.

81. Zwei quadratische Metallplatten mit einer Seitenlänge von 15 cm stehen sich in Luft (Abstand $d = 2{,}5$ mm) gegenüber. Wie groß ist die Kapazität dieser Anordnung?

$\left(C = \frac{8{,}86}{10^{14}}\ \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d};\ \varepsilon_r \approx 1;\ A\right.$ — Flächeninhalt einer Platte in cm²; d — Abstand der Platten in mm; C — Kapazität in F). Benutzen Sie den Rechenstab!

Drücken Sie die folgenden Maßangaben mit Hilfe der genormten Vorsätze aus!

82. a) 10^6 t **b)** 10^3 t

c) 10^{-1} t **d)** 10^3 A

83. a) 10^{-3} A **b)** 10^3 m

c) 10^{-3} p **d)** 10^{-3} l

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

84. a) $7350 \cdot 172\,000$ **b)** $0{,}00041 \cdot 230$

c) $\frac{7270}{192}$ **d)** $3{,}8^2$ **e)** 1650^2

f) $0{,}0053^2$ **g)** $0{,}0000835^2$

h) $\frac{0{,}00038}{0{,}0145}$ **i)** $\frac{672}{0{,}54} \cdot 321$

85. a) $0{,}00643 \cdot 0{,}72$ **b)** $\frac{7310}{52}$

c) $\frac{0{,}093}{0{,}38}$ **d)** $\frac{691}{0{,}0485}$

e) $\frac{0{,}873}{0{,}00053}$ **f)** $57{,}2 \cdot 0{,}000081$

g) 370^2 **h)** $118\,000^2$ **i)** $0{,}0062^2$

---

8. Beweisen Sie den Satz:
Für alle rationalen Zahlen a und b, $(a \neq 0;\ b \neq 0)$ und alle ganzen Zahlen n gilt: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, wenn die Gültigkeit dieses Satzes für $n \geqq 2$ nachgewiesen wurde. Führen Sie dazu eine genaue Falluntersuchung durch!

C

86. Zeichnen Sie in ein R,I-Koordinatensystem das Bild der Funktion $I = \frac{U}{R}$ (I — Stromstärke, $U = 220$ V, R — Widerstand) für $0 < R < 1000\ \Omega$!
Geben Sie den Wertevorrat für I an!
Charakterisieren Sie das Verhalten der Stromstärke bei steigendem Widerstand! Geben Sie das Intervall an, für das $0 < I \leqq 6$ A gilt!

87. Der spezifische Widerstand in einem Gleichstromkreis kann durch folgende Gleichung beschrieben werden!
$R = \varrho \frac{l}{A}$ (ϱ spezifischer Widerstand in $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$, l Länge des Leiters in m, A Querschnitt des Leiters in mm^2).

Zeichnen Sie das Querschnitts-Widerstands-Diagramm für

a) $\varrho_{Fe} = 0{,}10 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$; $l_1 = 0{,}2$ m ($l_2 = 1$ m; $l_3 = 10$ m),

b) $\varrho_{Cu} = 0{,}0155 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$; $l_1 = 0{,}5$ m ($l_2 = 2$ m; $l_3 = 20$ m)

c) $\varrho_{Al} = 0{,}024 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$; $l_1 = 0{,}03$ m ($l_2 = 3$ m; $l_3 = 30$ m)!

Wählen Sie dazu geeignete Koordinateneinheiten! Benutzen Sie den Rechenstab!

C

88. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = x^n$ mit $n \in \{-1; -2; -3; -4\}$ in dasselbe Koordinatensystem!
Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse dieser Funktionen an Hand ihrer Bilder!
Geben Sie an, welche dieser Funktionen gerade und welche ungerade sind!
Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktionen monoton steigen bzw. monoton fallen!

89. Stellen Sie für die Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$ und $y = x^{-4}$ Wertetafeln mit
$x \in \left\{-10^3; -10^2; -50; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{10^2}; +\frac{1}{10^3}; +\frac{1}{10^2}; \frac{1}{10}; 1; 10^2; 5 \cdot 10^3; 10^6\right\}$
auf!

a) Welche Feststellungen können Sie für alle aufgeführten Funktionen treffen, wenn
1. x dem absoluten Betrag nach groß wird,
2. x dem absoluten Betrag nach klein wird?

b) Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus **a)** für die Bilder der Funktionen?
c) Was können Sie über die Zahlenpaare $[-1; y]$ und $[1; y]$ aussagen?

90. Entscheiden Sie mit Hilfe der Kriterien $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind!

a) $y = x^{-3}$ **b)** $y = \frac{1}{x^2 \cdot x^3}$ **c)** $y = x^{-4}$ **d)** $y = x^{-10}$

---

9. Stellen Sie folgende Zahlen im Dualsystem dar!

a) 4 **b)** 16 **c)** 7 **d)** 23

e) 49 **f)** 56 **g)** 65 **h)** 1024

10. Berechnen Sie das Produkt folgender Zahlen im Dualsystem!

a) $100101 \cdot 101$ **b)** $11001 \cdot 100$ **c)** $37 \cdot 46$ **d)** $256 \cdot 64$

91. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = x^0$ $(-\infty < x < 0;\ 0 < x < +\infty)$!

Geben Sie den Wertevorrat an!
Untersuchen Sie, ob diese Funktion gerade oder ungerade ist!

92. Spiegeln Sie die Bilder der Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$ und $y = x^{-3}$ (jeweils $-5 \leqq x < 0$; $0 < x \leqq +5$) an der y-Achse und an der x-Achse! Stellen Sie die Gleichungen der zu den Spiegelbildern gehörenden Funktionen auf!

93. a) Zeichnen Sie die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$; $n \in \{-4; -3; -2; -1; 2; 3; 4\}$ in dasselbe Koordinatensystem!

b) Zeichnen Sie zusätzlich die Bilder der Funktionen $y = x^1$ und $y = x^0$ in dieses Koordinatensystem!
Beachten Sie den Definitionsbereich der Funktion $y = x^0$!

c) Untersuchen Sie die Bilder dieser Funktionen
- auf gemeinsame Punkte,
- auf die Symmetrieverhältnisse,
- auf das Monotonieverhalten,
- auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Definitionsbereich und im Wertevorrat!

---

11. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen **a)** $y = a \cdot x^{-1}$, $(-\infty < x < 0; 0 < x < \infty)$,

b) $y = a \cdot x^{-2}$, $(-\infty < x < 0; 0 < x < \infty)$ **c)** $y = \frac{1}{x} + a$, $(-\infty < x < 0; 0 < x < \infty)$

[jeweils mit $a \in \{3;\ 0{,}5;\ -1;\ -2\}$]!

Geben Sie zu jeder Funktion den Wertevorrat an!

d

d) Potenzfunktionen (Exponent rational)

---

1. Beweisen Sie, daß die Gleichung **a)** $x^2 = 6$, **b)** $x^3 = 10$ keine rationale Lösung hat!

2. Wenden Sie die gleiche Beweisführung an, um festzustellen, ob die Gleichung $x^2 = 9$ eine rationale Lösung hat oder nicht!

Geben Sie eine Intervallschachtelung an!

3. a) 5 **b)** $0{,}\overline{7}$

4. a) 7 **b)** $0{,}\overline{6}$

5. Geben Sie eine Intervallschachtelung (a_n/b_n) mit $d_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ für die Lösung der Gleichung **a)** $x^2 = 3$, **b)** $x^2 = 7$ an!

6. Geben Sie eine andere Intervallschachtelung (c_n/d_n) durch Halbieren der Intervalle für die nichtrationalen Zahlen der Aufgabe **5** an! Prüfen Sie die Äquivalenz der beiden Intervallschachtelungen (a_n/b_n) und (c_n/d_n)!

7. Bilden Sie äquivalente Intervallschachtelungen für die rationalen Zahlen der Aufgaben **3** und **4**!

Berechnen Sie die Summe und das Produkt der folgenden reellen Zahlen!

8. a) $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$

9. a) $\sqrt{7}$ und $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{4}$

Geben Sie für folgende reelle Zahlen unendliche Dezimalbrüche auf vier Dezimalstellen an!

10. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{5}$ **11.** a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{3}$

12. Bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten $a = 2$ cm und $b = 3$ cm lang sind!

13. Bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Raumdiagonale eines Würfels, dessen Kanten $a = 20$ mm lang sind!

14. Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Volumen 20 cm³ beträgt?

Radizieren Sie! Begründen Sie wie im Beispiel D 7!

15. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[4]{810\,000}$ **16.** a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[4]{256}$ c) $\sqrt[3]{216\,000}$

Radizieren Sie!

17. a) $\sqrt{(-7)^2}$ b) $\sqrt[5]{3{,}2^5}$ c) $\sqrt[6]{a^6}$; (a ganz) **18.** a) $\sqrt{(-5)^2}$ b) $-\sqrt[7]{17^7}$ c) $\sqrt[8]{(-16)^2}$

Ermitteln Sie unter Verwendung der Wurzeltafeln oder des Rechenstabes rationale Näherungswerte für folgende Wurzeln! Überschlagen Sie das Ergebnis!

19. a) $\sqrt{285}$ b) $\sqrt{4372}$ c) $\sqrt{65\,000}$
d) $\sqrt{0{,}39}$ e) $\sqrt{0{,}05}$ f) $\sqrt[3]{4}$
g) $\sqrt[3]{23{,}8}$ h) $\sqrt[3]{856}$

20. a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{63}$ c) $\sqrt{3850}$
d) $\sqrt{0{,}90}$ e) $\sqrt{0{,}008}$ f) $\sqrt[3]{6}$
g) $\sqrt[3]{7000}$ h) $\sqrt[3]{0{,}053}$

21. Erweitern Sie die Wurzel auf den Wurzelexponenten n!

a) $\sqrt{5^2}, n = 6$ b) $\sqrt[3]{3^5},\ n = 12$ c) $\sqrt[5]{6^2},\ n = 10$ d) $\sqrt[4]{a^3}, n = 8$; ($a > 0$, reell)

22. Erweitern Sie die folgenden Wurzelpaare so, daß sie den gleichen Wurzelexponenten besitzen!

a) $\sqrt{6^3}$ und $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[4]{17^2}$ und $\sqrt[10]{2^5}$ c) $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[5]{a^2}$; ($a > 0$, reell)

d) $\sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[q]{a^r}$; (a, b reell; $a, b \geqq 0$; $n, q, r \geqq 2$ und natürlich)

23. Bringen Sie folgende Wurzeln jeweils auf den kleinstmöglichen Wurzelexponenten!

a) $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[16]{a^{32}}$; (a reell) c) $\sqrt[33]{k^{11}}$; ($k > 0$, reell) d) $\sqrt[18]{17^{30}}$

Schreiben Sie die folgenden Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten!

24. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[5]{3^4}$ c) $\sqrt[5]{6}$
d) $\sqrt[2]{6^{-5}}$ e) $\sqrt[2]{\left(\frac{5}{3}\right)^3}$ f) $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

25. a) $\sqrt[7]{3}$ b) $\sqrt[9]{3}$ c) $\sqrt[7]{9^{12}}$
d) $\sqrt[3]{3^{-5}}$ e) $\sqrt[5]{\left(\frac{6}{7}\right)^6}$ f) $\sqrt[4]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6}$

Schreiben Sie folgende Potenzen als Wurzeln!

26. a) $3^{\frac{1}{7}}$ b) $6^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{2}{7}}$
d) $a^{\frac{1}{8}}$; ($a \geqq 0$, reell)

27. a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{3}{8}}$ c) $7^{-\frac{1}{8}}$
d) $r^{\frac{1}{s}}$; ($r \geqq 0$, reell; $s \geqq 2$, natürlich)

---

1. Welche reellen Zahlen werden durch folgende Intervallschachtelungen bestimmt?

a) $\left(1 - \frac{1}{n} \middle/ 1 + \frac{1}{n}\right)$ b) $\left(\frac{n}{n+2} \middle/ \frac{n}{n+1}\right)$ c) $\left(\frac{1}{n+1} \middle/ \frac{1}{n}\right)$

Wenn im folgenden nicht anders angegeben, sind alle Basen positiv reell und alle Exponenten rational.

28. Formen Sie die folgenden Terme so um, daß sie nur positive Exponenten enthalten!

a) $6^{-\frac{1}{3}}$ **b)** $4^{-\frac{2}{5}}$ **c)** $a^{-\frac{1}{7}}$ **d)** $\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{5}}$ **e)** $\dfrac{m^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{4}}}$

Wenden Sie auf die folgenden Terme die entsprechenden Potenzgesetze an und vereinfachen Sie weitgehend!

29. a) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $n^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{4}{2}} \cdot n^{\frac{5}{2}}$ **d)** $a^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{14}}$

30. a) $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$ **b)** $k^{\frac{1}{5}} \cdot k^{\frac{3}{5}}$

c) $a^{\frac{1}{7}} \cdot a^{\frac{3}{14}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$ **d)** $x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{2n}}$; ($n \geqq 2$; natürlich)

31. a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot (-2)^{\frac{4}{7}}$

c) $b^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} : \left(\frac{4}{12}\right)^{\frac{2}{5}}$

32. a) $6^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}$ **b)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \left(\frac{24}{9}\right)^{\frac{3}{8}}$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $5^{-\frac{1}{4}} : 10^{-\frac{1}{4}}$

33. a) $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}$ **c)** $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{5}}$

34. a) $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$ **b)** $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{7}}$ **c)** $\left(3^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}$

35. Zeigen Sie, daß gilt:

a) $5^{\frac{1}{6}} < 5^{\frac{1}{5}}$, **b)** $3{,}5^{2{,}5} < 3{,}5^{2{,}6}$, **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{7}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$, **d)** $3^{-\frac{1}{2}} > 4^{-\frac{1}{2}}$!

36. Beweisen Sie das Potenzgesetz

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$ für a positiv reell; m, n, p, q ganz und $n, q \geqq 2$!

Im folgenden sollen alle Radikanden positive reelle Zahlen sein.

Berechnen Sie die folgenden Summen! Geben Sie das Ergebnis auf drei Stellen nach dem Komma an!

37. a) $5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

c) $7\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9}$

38. a) $7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}$

c) $4\sqrt[3]{5} + 7\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{8}$

Addieren Sie die folgenden Wurzeln!

39. a) $8\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 17\sqrt{a}$

b) $4x\sqrt{b} - 5y\sqrt{b} + 6z\sqrt{b}$

40. a) $5\sqrt{b} - 3\sqrt{b} + 20\sqrt{b}$

b) $4\sqrt[3]{r} + 5\sqrt[3]{r} - 6\sqrt[6]{r^2}$

Berechnen Sie die folgenden Produkte und Quotienten!

41. a) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$ b) $\sqrt[3]{17}\cdot\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[4]{u}\cdot\sqrt[4]{u^2}\cdot\sqrt[8]{u^2}$ d) $\sqrt[3]{a^4x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2x^4}$ e) $\sqrt[2]{18}:\sqrt[2]{2}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}}$

42. a) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}$ c) $4\sqrt{x}\cdot 3\sqrt{y}$ d) $\sqrt[3]{b^5}\cdot\sqrt[3]{a^4b}$ e) $\sqrt{40}:\sqrt{10}$ f) $\sqrt{\dfrac{15}{24}}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

43. a) $\sqrt[4]{\dfrac{8}{27}}\cdot\sqrt[2]{\dfrac{8}{27}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[2]{ab^2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{u^3}}{\sqrt[5]{u^8}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{8}}$ e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

44. a) $\sqrt{\dfrac{a^3}{b}}\cdot\sqrt{ab^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{y}}$ c) $\dfrac{\sqrt[9]{r^5}}{\sqrt[12]{r^5}}$ d) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3x^3}}{\sqrt[9]{a^5x^3}}$ e) $\sqrt[3]{189}:\sqrt[3]{7}$

Vereinfachen Sie die folgenden Wurzeln unter Benutzung der Regeln

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,!$$

45. a) $\sqrt[4]{160\,000}$ b) $\sqrt[3]{0{,}00004}$ c) $\sqrt[3]{81x^3}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^2x}{b^2y}}$

46. a) $\sqrt[3]{162}$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{490\,000}}$ c) $\sqrt{225a^3b^2}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{16b^4c^2}{8dc^3}}$

Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte! Vereinfachen Sie weitgehend!

47. a) $2\sqrt{12}+5\sqrt{3}+10\sqrt{75}-5\sqrt{243}$ b) $(2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{2})\,(2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{3})$ c) $4\sqrt{15}+2\sqrt{240}-3\sqrt{135}+5\sqrt{60}$

48. a) $(5\sqrt{3}-4\sqrt{27}+2\sqrt{81})\,\sqrt{3}$ b) $(16-5\sqrt{2})\,(2\sqrt{2}-3)$

49. a) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})\,(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ b) $(2\sqrt{3}-4\sqrt{6})^2$ c) $(\sqrt{6u}-5\sqrt{w})^2$

Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

50. a) $(\sqrt{5})^2$ b) $\sqrt{3^2}$ c) $(\sqrt[3]{3})^4$ d) $(\sqrt[5]{a^7b^6})^{10}$ e) $\sqrt{a^{2n}}$; (n ganz)

51. a) $(\sqrt{3})^2$ b) $\sqrt[3]{4^6}$ c) $\sqrt[6]{(-3)^{12}}$ d) $(\sqrt[4]{25})^2$ e) $(\sqrt[9]{z^4})^6$

Radizieren Sie!

52. a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{9}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$ e) $\sqrt[3]{2\sqrt{16}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$ g) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{12}r^{48}w^{24}}}$

53. a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}}$ e) $\sqrt[2]{3\sqrt[3]{27}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{12}}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt{a^{20}b^5c^{10}}}$

---

2. Unter welchen Bedingungen sind jeweils die folgenden Wurzeln definiert?

a) $\sqrt{b}$ b) $\sqrt[3]{-a}$ c) $\sqrt[m]{\dfrac{1}{x}}$ d) $\sqrt{x-y}$ e) $\sqrt{1-a}$ f) $\sqrt[4]{3b-2}$ g) $\sqrt[n]{5x-4}$

3. Formen Sie die folgenden Terme um!

a) $x\cdot y\sqrt[m]{x^{m+1}\cdot y^m}$ b) $\sqrt{ax^2+bx^2}\cdot\sqrt{ay^2-by^2}$ c) $\sqrt{a\cdot b\cdot c}\cdot(x\sqrt{a}-y\sqrt{b}-z\sqrt{c})$

Geben Sie für alle auftretenden Variablen den größtmöglichen Variabilitätsbereich an!

In den folgenden Termen soll der Nenner rational gemacht werden.

54. a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{32}}$ c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ d) $\sqrt{\dfrac{9}{10}}$ e) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{5}{2\cdot\sqrt{8}}$

55. a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ d) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{7}{2\sqrt{18}}$ f) $\sqrt{\dfrac{y^4}{x}}$

56. Zeichnen und spiegeln Sie die Bilder der Funktionen $y=\sqrt{x}$ und $y=\sqrt[3]{x}$; (jeweils $0 \leqq x \leqq 10$) an der x-Achse! Geben Sie die Gleichungen sowie den Definitionsbereich und den Wertevorrat dieser durch die Spiegelbilder entstandenen Funktionen an!

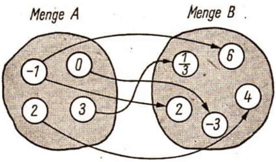
57. Zeigen Sie, daß die Funktionen $y=\sqrt{x}$ und $y=\sqrt[3]{x}$ monoton wachsen! Geben Sie die Monotonieintervalle an!

Untersuchen Sie, ob die Elemente der Menge A eindeutig den Elementen der Menge B zugeordnet sind!

58. a)

A	-2	0	1	3
B	-1	3	5	9

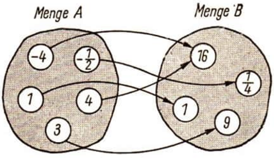
b) (Bild d 1)



59. a)

A	0	1	2	3	4
B	0	1 und -1	4 und -4	9 und -9	16 und -16

b) (Bild d 2)



Untersuchen Sie, ob die im folgenden gegebenen Funktionen eineindeutig sind!

60. a) $y=3x$; $(-\infty < x < +\infty)$

b)

x	-1	0	1	$1{,}5$	3
y	2	2	2	2	2

c) $f=\left\{\left[-2;\dfrac{2}{3}\right],\ [-3;1],\ \left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{9}\right],\ [0;0],\ \left[1;-\dfrac{1}{3}\right]\right\}$

61. a) $y=2x^2$; $(-\infty < x < +\infty)$

b)

x	-2	$0{,}5$	0	1	3
y	-8	$0{,}125$	0	1	27

c) $f=\{[-3;10], [-1{,}5;3{,}25], [-1;2], [2;5], [3;10]\}$

---

4. Machen Sie in den folgenden Quotienten die Nenner rational!

a) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{3+\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{6\sqrt{7}}{8+3\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}}{ax+b\sqrt{x}}$; $\left(\begin{array}{c} x>0 \\ ax+b\sqrt{x}\neq 0\end{array}\right)$

e) $\dfrac{10+12}{8+\sqrt{10}}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

62. Vertauschen Sie in den unter **60** und **61b)** und **c)** gegebenen Funktionen die Zahlen in den Zahlenpaaren! Entscheiden Sie, ob die jeweils neugebildete Menge von Zahlenpaaren wieder eine Funktion ist!

63. Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Funktionen die inverse Funktion!

a) $f_1 = \left\{\left[-2; -\frac{7}{2}\right], [-1; -2], \left[0; -\frac{1}{2}\right]\right\}$ **b)** $f_2 = \{[0; 2], [1; 3], [3; 11], [4; 18]\}$

c) $f_3 = \left\{[-2; 3{,}2], [-1; 0{,}2], \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{80}\right], [0; 0]\right\}$

d) $f_4 = \{[0; -1], [1; 0], [8; 1]; [27; 2]\}$

Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen die inverse Funktion an! Bestimmen Sie zu jeder inversen Funktion den Wertevorrat!

64. a) $y = 3x - 1$, $(-\infty < x < +\infty)$

b) $y = \sqrt{2} \cdot x$, $(-\infty < x < +\infty)$

c) $y = x^2$, $(-\infty < x \leqq 0)$

d) $y = \sqrt[3]{x}$, $(0 \leqq x < +\infty)$

65. a) $y = \frac{1}{5}x + 3$, $(-\infty < x < +\infty)$

b) $y = x^3$, $(0 \leqq x < +\infty)$

c) $y = 0{,}5x^4$, $(0 \leqq x < +\infty)$

d) $y = -\sqrt[5]{x}$, $(0 \leqq x < +\infty)$

66. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen aus Aufgabe **64** und **65** im Intervall $-4 \leqq x \leqq +4$! Spiegeln Sie diese Bilder an der Geraden $y = x$, und bestimmen Sie somit das Bild der inversen Funktion!

---

d

5. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen mit Hilfe einer Wertetafel!

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = \sqrt{x+3}$ **c)** $y = \sqrt{x} + 2$ **d)** $y = \sqrt[3]{x} - 2$

Geben Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertevorrat an! Spiegeln Sie die Bilder der in Aufgabe 5 angegebenen Funktionen an der x-Achse! Geben Sie die Gleichungen der durch die Spiegelbilder dargestellten Funktionen an!

6. Soll ein Luftschutzbunker noch sicheren Schutz vor einer x kp schweren Sprengladung gewähren, dann muß die Mauerstärke d m so bemessen sein, daß gilt: $d = a\sqrt[3]{x}$; a ist eine Konstante, die bei Eisenbeton 0,15, bei Beton 0,20 und bei Ziegelmauerwerk 0,50 beträgt.

a) Wie stark müssen die Wände eines Luftschutzbunkers aus Eisenbeton gemacht werden, wenn er gegen 500-kp-Sprengbomben Schutz gewähren soll?

b) Gegen welche Sprengladungen gewährt ein Bunker aus Beton Schutz, wenn die Wände 2,0 m dick sind?

7. Die Reichweite E (in km) einer Funkmeßstation wird gewöhnlich nach der Formel

$$E = 3{,}57\left(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}\right)$$

berechnet. (Dabei wird nur die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt.) Es bedeuten H_1 (in m): Höhe der Empfangsantenne und H_2 (in m): Höhe des Flugzeuges.

In welcher Entfernung könnte ein Flugzeug aufgefaßt werden, das 1650 m hoch fliegt, wenn sich die Funkmeßstation 5 m über der Erde befindet?

8. Begründen Sie, warum zu folgenden Funktionen im Definitionsbereich keine inverse Funktion gebildet werden kann!

a) $y = 2x^2$, $(-2 \leqq x \leqq +2)$ **b)** $y = 4x^4$, $(-\infty < x < +\infty)$

e) Quadratische Funktionen und Gleichungen

Ermitteln Sie die Quadrate folgender Zahlen!

1. a) 17 **b)** 120 **c)** 35 **d)** 350

e) 3,5 **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{1}{20}$ **h)** 0,01

2. a) 13 **b)** 140 **c)** 75 **d)** 750

e) 7,5 **f)** $\frac{1}{3}$ **g)** $\frac{1}{30}$ **h)** 0,001

3. a) 0,24 **b)** -3 **c)** -19 **d)** $-0{,}5$

e) $-\frac{3}{7}$ **f)** $-\frac{1}{3}$ **g)** $-3{,}3$ **h)** -200

4. a) 0,22 **b)** -4 **c)** -17 **d)** $-0{,}3$

e) $-\frac{3}{8}$ **f)** $-\frac{1}{2}$ **g)** $-4{,}6$ **h)** -300

5. Zu jeder der Zahlen in den Aufgaben 1 bis 4 gibt es eine zweite, deren Quadrat dem Quadrat der obenstehenden Zahl gleich ist. Geben Sie diese Zahlen an!

6. Welcher Zusammenhang besteht
a) zwischen der Fläche und der Seitenlänge eines Quadrates,
b) zwischen der Fläche und dem Umfang eines Kreises?

7. Welcher Zusammenhang besteht
a) zwischen der Fläche und dem Durchmesser eines Kreises,
b) zwischen der Fläche und der Diagonale eines Quadrates?

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist um k Einheiten parallel zur x-Achse erst in der positiven Richtung und dann in der negativen Richtung zu verschieben. Zeichnen Sie die Bilder, und geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

8. a) $k = 2$ **b)** $k = 5$ **c)** $k = 0{,}8$

9. a) $k = 3$ **b)** $k = 0{,}5$ **c)** $k = \sqrt{2}$

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist um k Einheiten parallel zur y-Achse erst in der positiven Richtung und dann in der negativen Richtung zu verschieben. Zeichnen Sie die Bilder, und geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

10. a) $k = 2$ **b)** $k = 5$ **c)** $k = 0{,}8$

11. a) $k = 3$ **b)** $k = 0{,}5$ **c)** $k = \sqrt{2}$

Die folgenden Punkte sind Scheitel von Parabeln mit Gleichungen vom Typ $y = x^2 + e$ oder $y = (x + d)^2$, (d, e reell). Geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

12. a) $S(0; 5)$ **b)** $S(0; -4)$ **c)** $S(1; 0)$

13. a) $S(0; -0{,}25)$ **b)** $S(-3; 0)$ **c)** $S(-1; 0)$

Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar! Geben Sie für die Funktionen eventuell vorhandene Nullstellen sowie für die Bilder den Schnittpunkt mit der y-Achse und den Scheitel an!

14. a) $y = x^2 - 7$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{5}$

c) $y = x^2 + \frac{3}{4}$ **d)** $y = x^2 - \frac{11}{5}$

15. a) $y = x^2 - 9$ **b)** $y = x^2 + \frac{1}{2}$

c) $y = x^2 + \sqrt{3}$ **d)** $y = x^2 - \frac{13}{4}$

16. a) $y = x^2 - 1{,}8$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{2{,}7}$

c) $y = x^2 - 1{,}5^2$ **d)** $y = x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

17. a) $y = x^2 - 1{,}9$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{1{,}8}$

c) $y = x^2 - 2{,}5^2$ **d)** $y = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

18. a) $y = x^2 + 0{,}5^2$
b) $y = -x^2 + 2$
c) $y = -x^2 - \sqrt{7}$

19. a) $y = -x^2 - 1{,}2^2$
b) $y = -x^2 + (-1{,}2)^2$
c) $y = -x^2 + 3{,}8$

e

20. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen

a) der Aufgabe **18** **b)** der Aufgabe **19**

mit Hilfe der Normalparabelschablone in ein kartesisches Koordinatensystem!

Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar, und geben Sie für diese die Schnittpunkte mit der x-Achse und die Scheitel an!

21. **a)** $y = x^2 - 9$ **b)** $y = x^2 - 6{,}25$ **c)** $y = x^2 - 12{,}25$ **d)** $y = x^2 - 0{,}81$

22. **a)** $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 - 2{,}25$ **c)** $y = x^2 - 0{,}25$ **d)** $y = x^2 - 1{,}44$

23. **a)** $y = (x - 2)^2$ **b)** $y = (x + 5)^2$ **c)** $y = (x - 0{,}4)^2$ **d)** $y = -(x + 1)^2$

24. **a)** $y = (x - 3)^2$ **b)** $y = (x + 4)^2$ **c)** $y = (x + 0{,}9)^2$ **d)** $y = -(x - 3)^2$

25. **a)** $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = x^2 + 3x + 2{,}25$

c) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

26. **a)** $y = x^2 + 4x + 4$

b) $y = x^2 - 3x + 2{,}25$

c) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

27. **a)** $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$

b) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$

c) $y = x^2 - 0{,}2x + 0{,}01$

28. **a)** $y = -x^2 + 3x - \frac{9}{4}$

b) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$

c) $y = -x^2 - 0{,}2x - 0{,}01$

29. Ermitteln Sie für die Bilder der Funktionen **a)** in Aufgabe **25**, **b)** in Aufgabe **27**, **c)** in Aufgabe **28** die Schnittpunkte mit der y-Achse!

30. Begründen Sie, warum die Funktionen in Aufgabe **27** jeweils genau eine Nullstelle haben!

Geben Sie für die folgenden Funktionen eventuell vorhandene Nullstellen an! Zeichnen Sie die zugehörigen Bilder, und geben Sie jeweils den Schnittpunkt mit der y-Achse und den Scheitel an!

31. **a)** $y = (x + 2)^2 - 3$

b) $y = (x - 5)^2 - \frac{2}{5}$

c) $y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 1{,}8$

32. **a)** $y = (x - 2)^2 - 2$

b) $y = (x - 4)^2 + 3{,}5$

c) $y = (x + 1{,}5)^2 - \frac{1}{4}$

33. **a)** $y = -(x - 2)^2 - 3$

b) $y = -(x + 3)^2 + 8$

c) $y = x^2 - 4x - 5$

34. **a)** $y = -(x - 5)^2 - 4$

b) $y = -(x + 2)^2 + 5$

c) $y = x^2 + 6x + 8$

35. **a)** $y = x^2 + 7x - 2$

b) $y = x^2 - 5x - \frac{3}{4}$

c) $y = -x^2 + 6x - 5$

36. **a)** $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = x^2 - 7x + \frac{10}{3}$

c) $y = -x^2 + 5x - 1$

37. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen in den Aufgaben **a) 31, b) 33** und **c) 35** jeweils in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

38. Welche Ordinaten müssen die Punkte $P_1(-2; y_1)$ bzw. $P_2(1{,}5; y_2)$ haben, damit sie auf dem Bild der Funktionen von Aufgabe **34** liegen?
Bestimmen Sie die Ordinaten rechnerisch und grafisch!

Die folgenden Punkte sind Scheitel von Parabeln mit Gleichungen vom Typ $y = x^2 + px + q$; (q, p reell). Geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

39. a) $S\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ **b)** $S\left(3; -\frac{2}{5}\right)$

c) $S\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ **d)** $S(-1{,}2; 2{,}4)$

40. a) $S\left(-4; -\frac{5}{2}\right)$ **b)** $S(0{,}6; -0{,}6)$

c) $S(-2; -2)$ **d)** $S(2; 2)$

41. Zeichnen Sie in je ein rechtwinkliges Koordinatensystem
a) die Gerade $y = x$, **b)** den Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und dem Mittelpunkt M (0; 0), **c)** die Normalparabel $y = x^2$!

Wählen Sie einige Punkte auf den Bildern, und zeichnen Sie zu diesen die entsprechenden Punkte mit doppelt so großer (halb so großer) Ordinate bei gleicher Abszisse! Welche geometrische Figurwird durch die so gewonnenen Punkte festgelegt! Zeichnen Sie diese Figuren!

Stellen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem folgende Funktionen graphisch dar!

42. a) $y = x^2$ **b)** $y = 3x^2$ **c)** $y = -0{,}5x^2$ **d)** $y = -3x^2$ **e)** $y = (3x)^2$ **f)** $y = \frac{1}{10}x^2$

43. a) $y = (x + 5)^2$ **b)** $y = (2x + 5)^2$ **c)** $y = 2(x + 5)^2$

d) $y = \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2$ **e)** $y = \frac{1}{2}(x + 5)^2$

44. Stellen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem dar!

$y = f_1(x) = x^2 + 3$; $y = f_2(x) = 2x^2 + 3$;

$y = f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$; $y = f_4(x) = -2x^2 + 3$;

$y = f_5(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

Ermitteln Sie die Zahlen, deren Quadrat folgendermaßen lautet!

45. a) 25 **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{225}{96}$

d) 0,04 **e)** 0,4225 **f)** 0,0289

46. a) 144 **b)** $\frac{36}{121}$ **c)** $\frac{180}{125}$

d) 6,25 **e)** 0,0036 **f)** 0.9025

47. a) 0,256 **b)** $9r^2$ **c)** $0{,}01p^2$

d) 5 **e)** 2 **f)** a

48. a) 44,1 **b)** 16 m^2 **c)** 7

d) 17 **e)** 3 **f)** b

Bestimmen Sie die Kantenlängen der Quadrate mit folgenden Flächeninhalten!

49. a) 441 m² **b)** 0,81 cm² **c)** 1 km²

d) 10 km² **e)** 81 ha **f)** 8,1 ha

50. a) 0,0144 m² **b)** 1 mm² **c)** 10 mm²

d) 36 a **e)** 3,6 a **f)** 0,36 a

Zerlegen Sie die folgenden Gleichungen in je zwei lineare Faktoren, und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen! Machen Sie in jedem Fall die Probe!

e

51. a) $x^2 - 576 = 0$ b) $x^2 - 12{,}96 = 0$ c) $x^2 - \frac{225}{16} = 0$ d) $x^2 = 0{,}016$ e) $x^2 + 17 = 0$ f) $3x^2 - 12 = 0$

52. a) $x^2 - 729 = 0$ b) $x^2 - \frac{121}{169} = 0$ c) $x^2 = 0{,}09$ d) $x^2 = 0{,}0004$ e) $x^2 + 9 = 0$ f) $5x^2 - 45 = 0$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und machen Sie jeweils die Probe!

53. a) $32x^2 - 800 = 0$ b) $\frac{x^2}{5} - 125 = 0$ c) $\frac{x^2}{m} - 16m = 0$; $(m \neq 0)$ d) $\frac{r}{s}x^2 - \frac{s}{r} = 0$; $(s \neq 0;\ r \neq 0)$ e) $\frac{r}{s}x^2 - \frac{r}{s} = 0$; $(s \neq 0;\ r \neq 0)$ f) $ax^2 + b = 0$; $(a \neq 0)$

54. a) $12x^2 - 75 = 0$ b) $0{,}4\left(x^2 - \frac{4}{25}\right) = 0$ c) $\frac{x^2}{3} - 27 = 0$ d) $\frac{8}{9}x^2 - \frac{288}{676} = 0$ e) $m^2x^2 - n^2 = 0$; $(m \neq 0)$ f) $ax^2 - b = 0$; $(a \neq 0)$

55. a) $(x-4)(x+4) = 0$
b) $(x-7)^2 + 14x = 0$
c) $x + 3 + \frac{5}{x-3} = 0$
d) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 0$

56. a) $(x+11)^2 - 121x = 0$
b) $\frac{9}{x+5} + x - 5 = 0$
c) $\frac{x+25}{x+9} = \frac{13+x}{47-x}$
d) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^2+1)}{1-a^2}$

Die folgenden Gleichungen sollen für die halbfett gedruckten Variablen gelöst werden.

57. a) $a^2 + \mathbf{b}^2 = 13^2$ b) $\mathbf{a}^2 + b^2 - c^2 = 0$ c) $\mathbf{y}^2 - 2px = 0$

58. a) $a^2 - \mathbf{c}^2 = b^2$ b) $z^2 + 3x\mathbf{y} = 0$ c) $24^2 = \mathbf{b}^2 + a^2$

e

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und machen Sie jeweils die Probe!

59. a) $x^2 - 5x = 0$ b) $x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + \frac{5}{7}x = 0$ d) $3{,}5x^2 + \frac{3}{5}x = 0$ e) $5 - (x + 3) = \frac{6}{x+3}$; $(x \neq -3)$

60. a) $x^2 - 4x = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $x^2 - bx = 0$ d) $a(x^2 - bx) = 0$ e) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x = 0$

61. a) $x^2 - 4x - 12 = 0$
b) $x^2 + 3x - 18 = 0$
c) $x^2 + 5x + \frac{9}{4} = 0$ d) $x(5-x) = -24$
e) $x = \frac{1}{2x+1}$ f) $\frac{1}{x} = 2x + 1$
g) $x^2 - \frac{1}{2x} - 2 = 0$

62. a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
b) $x^2 - 5x - 12 = 0$
c) $x^2 + 4x + \frac{13}{5} = 0$ d) $x(4-x) = -15$
e) $x = \frac{2}{3x+1}$ f) $\frac{2}{x} = 3x + 1$
g) $x^2 - \frac{1}{5x} - 1 = 0$

63. a) $x^2 - \frac{15}{16}x - \frac{25}{24} = 0$

b) $x^2 - \frac{24}{5}x - 1 = 0$

c) $x^2 - 2x + 0{,}75 = 0$

d) $x^2 + x - 156 = 0$

e) $x^2 + 23x + 120 = 0$

f) $x^2 - 12x + \frac{275}{9} = 0$

64. a) $x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{9}{64} = 0$

b) $x^2 + \frac{18}{5}x - 1 = 0$

c) $x^2 - 4x + 3{,}75 = 0$

d) $x^2 + x - 182 = 0$

e) $x^2 + 12x - 58 = 0$

f) $x^2 - \frac{45}{14}x - 1 = 0$

65. Welche der Aufgaben unter **61** bis **64** haben **a)** rationale, **b)** irrationale, **c)** keine rationalen oder irrationalen Lösungen?
Wie können Sie die Frage beantworten, ohne vorher die Lösungen der Gleichungen ermittelt zu haben?

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

66. a) $x^2 - 2x - 24 = 0$

b) $x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $a^2 + 3a + 2 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $m^2 + m - 6 = 0$

f) $x^2 - 3x = 4$ g) $x^2 + 3x = 10$

h) $s^2 = s + 42$ i) $13 = r^2 - 12r$

67. a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

c) $x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $a^2 - 3a - 4 = 0$

e) $r^2 + 2r - 8 = 0$

f) $x^2 + x - 2 = 0$ g) $x^2 - 12x = -27$

h) $z^2 = z + 30$ i) $48 = y^2 - 8y$

68. a) $x^2 + px + q = 0$

für $p = -6$ und $+5 \leqq q \leqq +10$, (q ganzzahlig)

b) $x^2 + px + q = 0$

für $p = +6$ und $+5 \leqq q \leqq +10$, (q ganzzahlig)

69. Das Produkt aus dem vierten Teil und dem fünften Teil einer Zahl ist 500. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingung?

70. Die Summe aus dem Quadrat einer negativen Zahl und 79 ist gleich 200.
Wie heißt die Zahl?

71. Das Quadrat aus der Summe des Reziproken einer Zahl und der Zahl 3 ist 36.
Wie heißt die Zahl?

72. Wenn man das Quadrat gewisser Zahlen um 12 vermindert, so erhält man das Vierfache dieser Zahlen. Wieviel solcher Zahlen gibt es, und welche Zahlen sind das?

73. Zerlegen Sie 1000 so in zwei Zahlen, daß die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird! Wie heißen diese beiden Zahlen?

74. Zerlegen Sie 1000 so in zwei Zahlen, daß die Summe ihrer Quadrate möglichst groß wird! Wie heißen diese beiden Zahlen?

75. Das 10000fache einer Zahl ist gleich dem Quadrat dieser Zahl.
Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

76. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produktes $47 \cdot 53$ vermehren, damit das Produkt gleich 1840 ist?

77. In einem gleichseitigen Dreieck seien die Seiten mit a bezeichnet. Wie lang ist die Strecke von einem Eckpunkt bis zum Mittelpunkt des Dreiecks?

78. Der Radius eines Kreises sei r. Wie lang ist eine Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?

79. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks betrage 1 m. Wie lang ist jede Seite des Dreiecks?

80. Welche Höhe muß ein gleichseitiges Dreieck haben, dessen Umfang 1 m betragen soll?

81. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen sich wie 3 : 4 verhalten. Wie lang sind sie zu zeichnen, wenn die Hypotenuse 5,5 cm lang ist?

82. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich die Basis zur Höhe wie 5 : 6.
Welchen Umfang hat dieses Dreieck, wenn die Länge eines Schenkels 1040 mm beträgt?

83. Die Förderanlage eines Schachtes hat 1350 m Tiefe. Das Anfahren des Förderkorbes soll mit gleichmäßiger Beschleunigung a von $0{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ stattfinden, die gleichförmige Fahrt mit einer Geschwindigkeit von $18\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, das Auslaufen mit einer Verzögerung von $0{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Bestimmen Sie
a) die Zeitdauer der beschleunigten Fahrt,
b) die Zeitdauer der verzögerten Fahrt,
c) die während jedes Bewegungsabschnittes zurückgelegten Federhöhen in Metern und
d) in Prozenten der Gesamthöhe,
e) die Gesamtdauer eines Hubes,
f) das Weg-Zeit- und das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

84. Eine ovale Radrennbahn hat eine Länge von 360 m. Bei einem Verfolgungsrennen ist der Verfolger um $2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ schneller als der Verfolgte, so daß er für eine Runde 2 s weniger benötigt. Nach wieviel Runden holt der Verfolger den Verfolgten ein, wenn sie mit 180 m Abstand gestartet worden sind?

85. Um welche Strecke muß man die Seite a eines Quadrates verlängern, um ein Quadrat mit
a) doppeltem, **b)** dreifachem, **c)** vierfachem Flächeninhalt zu erhalten?

86. Um welche Strecke muß man die Seite a eines gleichseitigen Dreiecks verlängern, um ein gleichseitiges Dreieck mit
a) doppeltem, **b)** dreifachem, **c)** neunfachem Flächeninhalt zu erhalten?

87. Wie groß ist die Fläche eines Rechtecks, dessen eine Seite um 2,5 cm kürzer ist als die andere und dessen Diagonale 12,5 cm lang ist?

88. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 37 m, sein Flächeninhalt 85 m². Wie lang sind die Seiten?

89. Die parallelen Seiten des ein- und umbeschriebenen Quadrates eines Kreises haben 5 cm Abstand voneinander. Wie groß ist der Durchmesser dieses Kreises?

90. Bestimmen Sie den Radius desjenigen Kreises, dessen 16 cm lange Sehnen vom Kreismittelpunkt einen Abstand von 3,5 cm haben!

e

91. Die Differenz der Maßzahlen der Flächeninhalte zweier Quadrate beträgt 11, die Differenz der Maßzahlen der Seitenlängen dieser Quadrate beträgt 1. Wie lang sind die Seiten der beiden Quadrate?

92. Die Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte zweier Kreise beträgt 15,70, die Differenz der Maßzahlen der Radien dieser Kreise beträgt 1. Wie lang sind die Radien der beiden Kreise?

93. Über eine Kugel mit einem Radius von 10 cm wird ein Kegelmantel gestülpt, der mit der Kugel einen Berührungskreis bildet.
Wie groß ist der Abstand der Kegelspitze von der Kugel, wenn der Berührungskreis von der Kegelspitze 12 cm entfernt ist?

94. Einer Kugel mit einem Radius von 10 cm ist ein Zylinder mit quadratischem Querschnitt einbeschrieben. Wie groß ist das Volumen des Zylinders?

95. Zwei Widerstände sollen hintereinandergeschaltet einen Gesamtwiderstand von 50 Ω (8 Ω) und parallelgeschaltet einen Gesamtwiderstand von 12 Ω (1,875 Ω) ergeben. Wie groß sind die Einzelwiderstände jeweils zu wählen?

96. Ein geschlossener Gleichstromkreis wird mit 21 Volt (48 V) betrieben. Vergrößert man den Widerstand um 1,4 Ω (auf das Doppelte), so sinkt die Stromstärke um 0,5 Ampere (3 A). Wie groß sind jeweils ursprünglicher Widerstand und ursprüngliche Stromstärke?

97. In einer Montagehalle bewegt sich der Laufkran mit einer Geschwindigkeit $v_{kr} = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Seine Laufkatze bewegt sich rechtwinklig dazu mit einer Geschwindigkeit $v_k = 0{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Die Last wird dabei gehoben mit der Geschwindigkeit $v_L = 0{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Wie groß ist die relative Geschwindigkeit **a)** der Laufkatze in bezug auf die Montagehalle, **b)** der Last in bezug auf den Laufkran, **c)** der Last in bezug auf die Montagehalle?

98. Ein Flugzeugpropeller mit dem Durchmesser $d = 4{,}00$ m dreht sich mit einer Geschwindigkeit $n = 3000 \frac{\text{U}}{\text{min}}$. Welche Geschwindigkeit besitzen die Spitzen des Propellers,
a) wenn sich der Propeller bei stillstehendem Flugzeug dreht,
b) wenn das Flugzeug eine Geschwindigkeit $v_1 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ besitzt,
c) wenn das Flugzeug eine Geschwindigkeit $v_2 = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ besitzt?

99. Zwei rechtwinklig in einem Punkt angreifende Kräfte verhalten sich wie 1 : 2.
Wie groß sind die Kräfte, wenn die resultierende Kraft 1 Mp beträgt?

100. Ein Flugzeug hat in bezug auf die umgebende Luft eine Geschwindigkeit von $320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ($450 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$). Es wird durch einen rechtwinklig angreifenden Wind um $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ($25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) seitlich abgetrieben.
Um welchen Betrag ändert sich dadurch die Geschwindigkeit des Flugzeuges in bezug auf den Erdboden?

101. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Pfeil senkrecht nach oben geschossen werden, wenn er eine Höhe von 61,25 m erreichen soll? Wie lange fliegt der Pfeil bis zum höchsten Punkt, wie lange insgesamt?
Hinweis: Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben; $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

102. Der Brunnen auf der ehemaligen Festung Königstein ist 320,7 m tief. Welche Zeit vergeht vom Loslassen eines frei fallenden Steines am Brunnenrand bis zu seinem Aufschlag?
Hinweis: Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben; $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

103. Vergleichen Sie die kinetische Energie folgender Körper!

a) Hammer:	$m = 0{,}3$ kg;	$v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
b) Fahrrad:	$m = 100$ kg;	$v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
c) Personenauto:	$m = 1300$ kg	$v = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
d) Personenauto:	$m = 1300$ kg;	$v = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
e) Güterzug:	$m = 8 \cdot 10^5$ kg;	$v = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
f) Flugzeug:	$m = 6 \cdot 10^4$ kg;	$v = 800 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
g) Schiff:	$m = 1 \cdot 10^7$ kg;	$v = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Anleitung: $W_{kin} = \frac{m}{2} v^2$

104. Welche Fallgeschwindigkeit v muß ein Hammer mit dem Gewicht $P = 40$ kp besitzen, damit seine kinetische Energie $W_{kin} = 200$ kpm beträgt?
Anleitung: $W_{kin} = \frac{m}{2} v^2$; $m = \frac{P}{g}$ entsprechend dem Newtonschen Gesetz $F = m \cdot a$.

---

1. In der Kraftfahrzeugtechnik wird für den Bremsweg w (in m) folgende „Faustformel" (das ist eine näherungsweise richtige Formel) benutzt:
$w = (0{,}1 \cdot v)^2$. Darin bedeutet v die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeuges in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

a) Wie lang ist der Bremsweg w, wenn $v = 60;\ 70;\ 80;\ 90;\ 100;\ 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ beträgt?

b) Zwischen dem Auftauchen eines Hindernisses und der Reaktion des Fahrers, d. h. der Betätigung der Bremsen, vergeht eine gewisse Zeit, „Schrecksekunde" genannt. Das bedeutet, daß das Fahrzeug während der „Schrecksekunde" mit unverminderter Geschwindigkeit weiterfährt. Die Schrecksekunde sei 0,25 s.
Wie weit muß das Fahrzeug im Moment der Wahrnehmung des Hindernisses bei den in **a)** angegebenen Geschwindigkeiten vom Hindernis entfernt sein, damit ein Zusammenstoß vermieden wird?

e

105. Die Tragfähigkeit des Eises auf Gewässern mit Süßwasser kann für Kettenfahrzeuge nach der Formel $F_G = 10^5 \cdot h^2$ näherungsweise berechnet werden.
Die Stärke h des Eises wird in m und das Gewicht F_G des Fahrzeuges in kp angegeben.

a) Wie stark muß die Eisdecke eines Gewässers mindestens sein, damit es ein 50000 kp schwerer Panzer überwinden kann?

b) Die Eisdecke eines Gewässers ist 0,35 m dick. Wie schwer darf höchstens ein Kettenfahrzeug sein, damit es dieses Eis befahren kann?

106. Bei einem Schuß senkrecht nach oben erleidet das Geschoß in jeder Sekunde einen Geschwindigkeitsverlust von $9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. (Der Luftwiderstand ist dabei nicht berücksichtigt.) Die Abgangsgeschwindigkeit soll $v_0 = 490\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ betragen.

a) Man gebe die Folge der Geschwindigkeiten von Sekunde zu Sekunde an!

b) Nach wieviel Sekunden würde das Geschoß den Gipfelpunkt erreichen?

c) Welche Geschwindigkeit besitzt das Geschoß nach 37 s?

Wie lautet jeweils die Normalform der quadratischen Gleichung mit den folgenden Lösungen?

107. **a)** $x_1 = -5;\ x_2 = 3$

b) $x_1 = 3;\ x_2 = -5$

c) $x_1 = 5;\ x_2 = -3$

d) $x_1 = -\frac{3}{7};\ x_2 = -\frac{4}{7}$

e) $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{4}$

f) $x_1 = a;\ x_2 = -a$

g) $r_1 = 21;\ r_2 = 1$

108. **a)** $x_1 = 7;\ x_2 = -4$

b) $x_1 = -4;\ x_2 = -7$

c) $x_1 = 22;\ x_2 = 8$

d) $x_1 = \frac{3}{8};\ x_2 = -\frac{5}{8}$

e) $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{1}{2}$

f) $a_1 = m;\ a_2 = -m$

g) $t_1 = 0{,}30;\ t_2 = -0{,}05$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen graphisch, und führen Sie die Probe rechnerisch durch!

109. **a)** $x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $x^2 - 3x + 4 = 0$

d) $x^2 - 4x - 5 = 0$

e) $x^2 + 2x + 5 = 0$

f) $x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$

110. **a)** $x^2 - x - 3 = 0$

b) $x^2 + 2x - 5 = 0$

c) $x^2 + 2x + 4 = 0$

d) $x^2 - 3x - 4 = 0$

e) $x^2 - 4x + 3 = 0$

f) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

e

---

2. Stellen Sie in je einem geeigneten rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Funktionen mit Hilfe der Normalparabelschablone graphisch dar!

a) $y = 0{,}01x^2 + 0{,}63x - 0{,}9$

b) $y = 250x^2 + 5x$

c) $y = 0{,}4 \cdot 10^3x^2 + 0{,}28 \cdot 10^3x - 0{,}6 \cdot 10^3$

d) $y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{10}x + \frac{15}{100}$

e) $y = 29{,}63x^2 - 25{,}80x - 30{,}38$

f) $y = 0{,}478x^2 - 0{,}936x + 0{,}022$

3. Welche Form haben die Gleichungen von quadratischen Funktionen, deren Scheitelpunkte auf dem Bild der Funktion mit der folgenden Gleichung liegen?

a) $y = -x$ **b)** $y = x$ **c)** $y = -x + 5$ **d)** $y = x + n$ **e)** $y = mx + n$

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen!

111. **a)** $y = x^2 + 7x + 12$ **b)** $y = \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{64}x + 1$ **c)** $y = a^2x^2 + 3ax + 2$

d) $y = 20x^2 - rx - r^2$ **e)** $y = x^2 - 7$ **f)** $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

g) $y = (x - 0{,}4)^2$ **h)** $y = -x^2 + 5x - \frac{23}{4}$ **i)** $y = x^2 + 2x + \frac{1}{5}$

k) $y = x^2 - 0{,}5x + 1{,}2$ **l)** $y = -x^2 + 7x - \frac{4}{5}$ **m)** $y = -x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

112. **a)** $y = x^2 + 9x + 20$
b) $y = 6x^2 - 44x + 70$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = (x + 1{,}8)^2$
e) $y = x + 4x + \frac{1}{2}$
f) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

113. **a)** $y = ax^2 - 2bx - c$ **b)** $y = 20x^2 + x - 12$
c) $y = \left(x - \frac{10}{3}\right)^2$ **d)** $y = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$
e) $y = x^2 - 0{,}3x + 1{,}8$ **f)** $y = -x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen!

114. **a)** $3x^2 - 11x - 4 = 0$ **b)** $121x^2 - 462x - 256 = 0$ **c)** $49b^2 = 42b - g$

d) $(x + 2)\,x + (1 - x)(2x + 1) = -\frac{3}{4}$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{19}{36}$

f) $\frac{2x - 14}{x + 5} = \frac{x - 7}{x - 3}$; $(x \neq -5;\ x \neq 3)$ **g)** $\frac{x - m}{x + m} + \frac{m}{2x - m} = 1$; $\left(x \neq -m;\ x \neq \frac{m}{2}\right)$

115. Bestimmen Sie die Beschleunigung a (in $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) für die folgenden Fahrzeuge bzw. Flugzeuge! Stellen Sie für jedes Fahrzeug bzw. Flugzeug die nach dem Anfahren zurückgelegte Strecke s als Funktion der Zeit t dar!

Stellen Sie die Funktion in geeigneten Koordinaten zeichnerisch dar!

Antriebskraft P (in kp)	Masse m (in kg)	Fahrzeug bzw. Flugzeug
4500	6800	MIG 17
2 × 3950	10000	MIG 19
2 × 6750	70000	Tu 104
20000	800000	Güterzug
80	1300	PKW
220	5000	LKW

Anleitung: $P = m \cdot a$; $s = \frac{a}{2}t^2$

116. Auf einer Straßenkreuzung stehen sich ein PKW (Länge: 438 cm) und ein LKW (Länge: 735 cm) in einem Abstand von 18 m gegenüber.
Bei grünem Licht fahren beide gleichzeitig los ($a_{PKW} = 2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a_{LKW} = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

a) Stellen Sie den Bewegungsablauf des Anfahrens und Begegnens beider Fahrzeuge in einem Weg-Zeit-Koordinatensystem dar!

b) Ermitteln Sie zeichnerisch Ort und Zeit des Nebeneinanderbefindens beider Fahrzeuge!

117. Ein 480 m langer Güterzug durchfährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ einen Bahnhof.
Ein 180 m langer D-Zug beginnt in diesem Augenblick (20 Sekunden nach diesem Augenblick; 20 Sekunden vor diesem Augenblick) mit einer Beschleunigung $a = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ seine Fahrt (mit gleichem Richtungssinn wie der Güterzug), in dem sich die Spitzen beider Züge nebeneinander befinden.

a) Stellen Sie den Bewegungsablauf in einem Weg-Zeit-Koordinatensystem dar!

b) Ermitteln Sie zeichnerisch Ort und Zeitpunkt des Nebeneinanderbefindens von Zugspitzen und Zugenden.

c) Ermitteln Sie die Strecke und die Zeitdauer des Vorbeifahrens der D-Zug-Spitze, des D-Zug-Endes, des D-Zuges am Güterzug!

---

4. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $x^2 - 13{,}5x + 0{,}7 = 0$ **b)** $x^2 - 0{,}478 \cdot 10^3x + 0{,}355 \cdot 10^5 = 0$

c) $x^2 + 0{,}62 \cdot 10^{-2}x + 0{,}58 \cdot 10^{-4} = 0$ **d)** $1{,}085 \cdot 10^{-1}x^2 + 2{,}191 \cdot 10^{-1}x - 1{,}05 \cdot 10^{-1} = 0$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen graphisch!
Machen Sie die Probe mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes!

a) $12x^2 + x - 1 = 0$ **b)** $9x^2 - 1 = 0$ **c)** $\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3 = 0$ **d)** $10a^2 + 10a + 12 = 0$

f) Exponential- und Logarithmusfunktionen

Lösen Sie folgende Gleichungen!

1. a) $2^x = 512$ **b)** $2^x = \sqrt[5]{8}$ **c)** $2^x = 1$ **d)** $10^x = 10000$ **e)** $10^x = 0{,}000001$

2. a) $2^x = \frac{1}{16}$ **b)** $2^x = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$ **d)** $10^x = 0{,}1$ **e)** $10^x = \sqrt[3]{10000}$

Berechnen Sie! Begründen Sie in jedem Falle das Ergebnis unter Verwendung der äquivalenten Gleichung in Potenzschreibweise!

3. a) $\log_2 8$ **b)** $\log_8 2$ **c)** $\log_{10} 1000$ **d)** $\log_{1000} 10$ **e)** $\log_2 128$ **f)** $\log_2 \frac{1}{16}$

4. a) $\log_3 81$ **b)** $\log_{81} 3$ **c)** $\log_{27} \frac{1}{3}$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}} 27$ **e)** $\log_2 0{,}5$ **f)** $\log_2 0{,}125$

5. a) $\log_3 243$ **b)** $\log_3 \frac{1}{81}$ **c)** $\log_4 1024$ **d)** $\log_4 \frac{1}{64}$ **e)** $\log_5 0{,}008$

6. a) $\log_3 0{,}1\overline{1}\ldots$ **b)** $\log_5 \frac{1}{625}$ **c)** $\log_{10} 10000000$ **d)** $\log_7 (49^{-2})$

f

7. a) $2^{\log_2 8}$ b) $5^{\log_5 1}$

8. a) $3^{\log_3 13}$ b) $7^{\log_7 7}$

Ermitteln Sie folgende Logarithmen, und begründen Sie die Ergebnisse!

9. a) $\lg 10\,000$ b) $\lg 0{,}001$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt[4]{1000}$

10. a) $\lg 100$ b) $\lg 0{,}00001$ c) $\lg \sqrt[3]{100}$ d) $\lg \sqrt[4]{100}$

Benutzen Sie im folgenden die Tafel der vierstelligen Logarithmen!

11. a) $\lg 1$ b) $\lg 66$ c) $\lg 100$ d) $\lg 3{,}3$ e) $\lg 8{,}5$ f) $\lg 0{,}10$ g) $\lg 550$ h) $\lg 41\,000$

12. a) $\lg 37$ b) $\lg 89$ c) $\lg 10$ d) $\lg 5{,}4$ e) $\lg 0{,}25$ f) $\lg 1$ g) $\lg 7100$ h) $\lg 28\,000\,000$

13. a) $\lg 0{,}28$ b) $\lg 0{,}0003$ c) $\lg 72{,}3$ d) $\lg 0{,}00321$ e) $\lg 1{,}28$ f) $\lg 538\,000$ g) $\lg 0{,}32$ h) $\lg 54{,}4$

14. a) $\lg 0{,}0041$ b) $\lg 0{,}584$ c) $\lg 321\,000$ d) $\lg 0{,}302$ e) $\lg 34{,}8$ f) $\lg 2{,}03$ g) $\lg 7{,}59$ h) $\lg 0{,}000437$

15. a) $\lg 13{,}4$ b) $\lg 1{,}25$ c) $\lg 0{,}00432$ d) $\lg 0{,}298$ e) $\lg 0{,}0000707$ f) $\lg 0{,}000372$ g) $\lg 1{,}01$

16. a) $\lg 37{,}7$ b) $\lg 8{,}94$ c) $\lg 0{,}0517$ d) $\lg 80\,000$ e) $\lg 821$ f) $\lg 0{,}123$ g) $\lg 0{,}0987$

17. a) $\lg x = 0{,}1523$ b) $\lg x = 0{,}8785 - 1$ c) $\lg x = 1{,}9031$ d) $\lg x = 3{,}7372$ e) $\lg x = 0{,}9415 - 1$ f) $\lg x = 4{,}6730$

18. a) $\lg x = 2{,}7810$ b) $\lg x = 0{,}0453 - 3$ c) $\lg x = 0{,}9004$ d) $\lg x = 0{,}8261 - 4$ e) $\lg x = 0{,}03019$ f) $\lg x = 2{,}9818$

19. a) $\lg x = 0{,}4654 - 6$ b) $\lg x = 0{,}3324 - 5$ c) $\lg x = 8{,}6385$ d) $\lg x = 0{,}02160 - 1$ e) $\lg x = 7{,}9294$ f) $\lg x = 1{,}1553$

20. a) $\lg x = 0{,}5092 - 2$ b) $\lg x = 0{,}4900$ c) $\lg x = 5{,}4871$ d) $\lg x = 0{,}6964 - 3$ e) $\lg x = 0{,}4425 - 10$ f) $\lg x = 0{,}0792 - 4$

21. a) $\lg 3{,}579$ b) $\lg 50\,340$ c) $\lg 0{,}5723$ d) $\lg 0{,}002038$ e) $\lg 0{,}01528$ f) $\lg 28{,}28$

22. a) $\lg 821{,}3$ b) $\lg 20{,}02$ c) $\lg 0{,}0004807$ d) $\lg 0{,}07543$ e) $\lg 310{,}4$ f) $\lg 0{,}03050$

---

f

1. Gibt es jeweils eine rationale Zahl x, für die die folgenden Gleichungen gelten?

a) $9^x = 27$ b) $3^x = 6$ c) $8^x = 32$ d) $5^x = 2$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0{,}064$ f) $10^x = 200$

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie entweder diese Zahl bestimmen oder indem Sie zeigen, daß es eine solche Zahl nicht gibt!

2. Überprüfen Sie folgende Gleichungen!

a) $5^{\sqrt{13}} \cdot 5^{\sqrt{52}} \stackrel{?}{=} 5^{3 \cdot \sqrt{13}}$ b) $8^{\sqrt{8}} \cdot 2^{\sqrt{8}} = 2^{8 \cdot \sqrt{2}}$ c) $5^{\sqrt{52}} : 5^{\sqrt{13}} = 5^{\sqrt{13}}$

d) $256^{\sqrt{2}} : 8^{\sqrt{8}} = 4^{\sqrt{2}}$ e) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{5}} : \left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}} = 1$ f) $\frac{25^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}}}{5^{\sqrt{25}}} = 5^{3\sqrt{5}-5}$

23. **a)** lg 27450 **b)** lg 10030 **c)** lg 20830000 **d)** lg 0,0001013 **e)** lg 0,002704 **f)** lg 5038

24. **a)** lg 190500 **b)** lg 0,01407 **c)** lg 30,71 **d)** lg 0,1099 **e)** lg 0,00002049 **f)** lg 5299000

Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen (vier geltende Ziffern für x)!

25. **a)** $\lg x = 3{,}4305$ **b)** $\lg x = 0{,}8930 - 3$ **c)** $\lg x = 1{,}5619$ **d)** $\lg x = 2{,}3170$ **e)** $\lg x = 0{,}8145 - 2$ **f)** $\lg x = 2{,}7524$

26. **a)** $\lg x = 0{,}5360$ **b)** $\lg x = 0{,}0900 - 2$ **c)** $\lg x = 5{,}6005$ **d)** $\lg x = 0{,}5031 - 4$ **e)** $\lg x = 0{,}6991 - 5$ **f)** $\lg x = 0{,}5125$

27. **a)** $\lg x = 1{,}0249$ **b)** $\lg x = 4{,}6000$ **c)** $\lg x = 0{,}6563$ **d)** $\lg x = 0{,}6489 - 2$ **e)** $\lg x = 4{,}01368$ **f)** $\lg x = 0{,}3680 - 4$

28. **a)** $\lg x = 0{,}9120 - 1$ **b)** $\lg x = 0{,}5085 - 3$ **c)** $\lg x = 3{,}1630$ **d)** $\lg x = 5{,}0410$ **e)** $\lg x = 0{,}2570 - 2$ **f)** $\lg x = 1{,}2730$

29. **a)** $\lg x = 0{,}0162 - 1$ **b)** $\lg x = 0{,}1137 - 11$ **c)** $\lg x = 0{,}0900 - 4$ **d)** $\lg x = 4{,}3691$

30. **a)** $\lg x = 3{,}0141$ **b)** $\lg x = 2{,}2399$ **c)** $\lg x = 10{,}6500$ **d)** $\lg x = 0{,}1580$

Ermitteln Sie x (fünf geltende Ziffern)!

31. **a)** $\lg 1{,}0254 = x$ **b)** $\lg 100{,}25 = x$ **c)** $\lg x = 1{,}00050$ **d)** $\lg x = 0{,}01299$ **e)** $\lg 0{,}0010947 = x$ **f)** $\lg x = 0{,}03400 - 2$

32. **a)** $\lg 1{,}0047 = x$ **b)** $\lg 103580 = x$ **c)** $\lg x = 0{,}03609 - 1$ **d)** $\lg x = 2{,}02301$ **e)** $\lg 0{,}010768 = x$ **f)** $\lg x = 0{,}04089 - 3$

Berechnen Sie mit Hilfe der dekadischen Logarithmen!

33. **a)** $\log_2 3$ **b)** $\log_7 14$ **c)** $\log_3 2$ **d)** $\log_2 0{,}473$ **e)** $\log_3 571$ **f)** $\log_{20} 10$ **g)** $\log_{\frac{1}{2}} 8$ **h)** $\log_5 3125$

34. **a)** $\log_2 9$ **b)** $\log_7 6$ **c)** $\log_3 28$ **d)** $\log_2 0{,}0573$ **e)** $\log_3 6561$ **f)** $\log_{20} 20$ **g)** $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}125$ **h)** $\log_5 12{,}6$

Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen mit den folgenden Gleichungen jeweils für einen geeigneten Definitionsbereich!

35. **a)** $y = 3^x$ **b)** $y = -x^3$ **c)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **d)** $f(x) = 0{,}8 \cdot 5^x$

36. **a)** $y = 10^x$ **b)** $y = -10^x$ **c)** $y = \frac{1}{10^x}$ **d)** $y = -\left(\frac{1}{10}\right)^x$

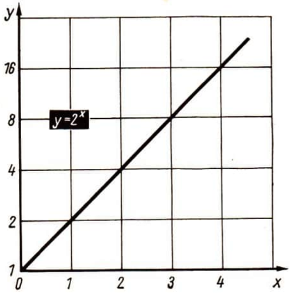
Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen mit den folgenden Gleichungen im Definitionsbereich $-2 \leqq x \leqq +2$ in einunddemselben Koordinatensystem!
Begründen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Potenzgesetze!

37. $y = 2^{2x}$; $y = 4^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$; $y = \frac{1}{4^{-x}}$

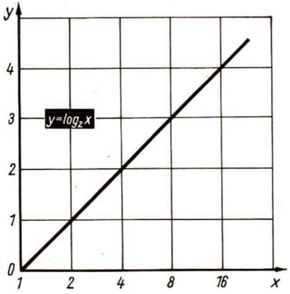
38. $y = 3^{2x}$; $y = (3^x)^2$; $y = \frac{1}{9^{-x}}$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$

Die Funktionen mit den Gleichungen $y = 2^x$ und $y = \log_2 x$ wurden im folgenden in besonderen Koordinatensystemen dargestellt.
Erläutern Sie die Darstellung und begründen Sie, warum das Bild jeweils ein Geradenabschnitt ist!

39. (Bild f1)



40. (Bild f2)



Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen mit den folgenden Gleichungen jeweils für einen geeigneten Definitionsbereich!

41. **a)** $y = \log_3 x$ **b)** $y = -\log_3 x$ **c)** $y = \lg x - 2$ **d)** $y = (\lg x)^2$

42. **a)** $y = \lg x$ **b)** $y = -\lg x$ **c)** $y = \lg x + 2$ **d)** $y = 2 \lg x$

43. Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen
a) $f(x) = \log_2 x$, **b)** $f(x) = \log_4 x^2$, **c)** $f(x) = \log_8 x^3$
in einunddemselben Koordinatensystem! Begründen Sie das gefundene Ergebnis mit Hilfe der Potenzgesetze!

44. **a)** Vergleichen Sie die Bilder der Funktionen $f(x) = \lg (x^2)$ und $f(x) = (\lg x)^2$!
b) Ermitteln Sie zu den in den Aufgaben α) **35**, β) **37**, γ) **41**, δ) **42** angegebenen Funktionen jeweils die zugehörige inverse Funktion!

Berechnen Sie x aus folgenden Gleichungen!

45. **a)** $\lg x = \lg 4 + \lg 25$
b) $\lg x = \lg 2 + \lg 2 + \lg 5$
c) $\lg x = \lg 90 - \lg 30$
d) $\log_2 x = \log_2 8 + \log_2 128$
e) $\log_2 x = \log_2 32 - \log_2 16$
f) $\lg x = \lg 51 - \lg 17$
g) $\lg x = 3 \cdot \lg 8$ **h)** $\lg x = 5 \cdot \lg 2$
i) $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 256$

46. **a)** $\lg x = \lg 5 + \lg 20$
b) $\lg x = \lg 3 + \lg 3 + \lg 5$
c) $\lg x = \lg 120 - \lg 30$
d) $\log_2 x = \log_2 16 + \log_2 32$
e) $\log_2 x = \log_2 64 - \log_2 8$
f) $\lg x = \lg 36 - \lg 12$
g) $\lg x = 5 \cdot \lg 3$
h) $\lg x = \frac{1}{3} \lg 125$ **i)** $\lg x = \frac{1}{2} \lg 2$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Produkte!

Hinweis: Bestimmen Sie die vierte Ziffer im Produkt nur dann, wenn jeder Faktor mindestens vierziffrig gegeben ist!

47. **a)** $3{,}81 \cdot 17{,}8$ **b)** $0{,}51 \cdot 23$
c) $0{,}0257 \cdot 3410$ **d)** $0{,}702 \cdot 0{,}0578$
e) $631 \cdot 70\,800$ **f)** $0{,}1304 \cdot 5{,}288$

48. **a)** $25{,}3 \cdot 4{,}27$ **b)** $0{,}66 \cdot 29$
c) $35\,200 \cdot 0{,}0622$ **d)** $0{,}683 \cdot 0{,}0405$
e) $283 \cdot 90\,300$ **f)** $0{,}1176 \cdot 7{,}827$

49. **a)** $5{,}28 \cdot 7{,}41 \cdot 9{,}99$ **b)** $755 \cdot 602 \cdot 830$
c) $0{,}002\,65 \cdot 0{,}341 \cdot 0{,}0827$
d) $39{,}42 \cdot 5{,}783 \cdot 210{,}8$
e) $0{,}8311 \cdot 0{,}010\,74 \cdot 0{,}087\,18$

50. **a)** $3{,}64 \cdot 2{,}55 \cdot 8{,}62$ **b)** $583 \cdot 456 \cdot 850$
c) $0{,}004\,35 \cdot 0{,}0131 \cdot 0{,}878$
d) $85{,}32 \cdot 6{,}100 \cdot 346{,}3$
e) $0{,}020\,91 \cdot 0{,}066\,27 \cdot 0{,}3492$

51. **a)** $23{,}7 \cdot 0{,}0875 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}543$ **b)** $124 \cdot 5{,}38 \cdot 0{,}0277 \cdot 0{,}741 \cdot 0{,}000\,318$
c) $27{,}5 \cdot 2{,}03 \cdot 0{,}0785 \cdot 0{,}439$ **d)** $142 \cdot 3{,}59 \cdot 0{,}000\,162 \cdot 0{,}506 \cdot 0{,}0923$

Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

52. **a)** $\lg \cdots = \lg a + \lg b$
b) $\lg m = \lg \frac{m}{2} + \lg \ldots$
c) $\log_2 5000 = \log_2 \cdots + \log_2 25$
d) $\log_a \cdots = \log_a r + \log_a 2r$

53. **a)** $\lg \cdots = \lg 6 + \lg 5 + \lg 4$
b) $\lg \cdots = \lg \frac{m}{2} + \lg \frac{m}{2}$
c) $\log_{130} 121 = \log_{130} \cdots + \log_{130} 11$
d) $\log_a \frac{3b}{2} = \log_a \frac{3b}{2} + \log_a \ldots$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Quotienten!

54. **a)** $53\,100 : 72{,}3$ **b)** $2{,}37 : 0{,}476$
c) $0{,}854 : 0{,}703$ **d)** $\dfrac{72{,}4}{0{,}005\,03}$
e) $\dfrac{82\,200}{0{,}0242}$ **f)** $\dfrac{0{,}0572}{0{,}000\,0504}$
g) $0{,}0719 : 821$ **h)** $21{,}86 : 0{,}000\,3544$

55. **a)** $72{,}3 : 501$ **b)** $0{,}575 : 0{,}233$
c) $0{,}608 : 87\,900$ **d)** $\dfrac{5{,}81}{29{,}3}$
e) $\dfrac{0{,}007\,08}{9770}$ **f)** $\dfrac{0{,}488}{5{,}23}$
g) $0{,}2718 : 44{,}44$ **h)** $0{,}005\,072 : 1{,}099$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Potenzen!

56. **a)** $15{,}2^7$ **b)** 1013^4 **c)** $1{,}05^{13}$
d) $0{,}025^5$ **e)** $0{,}999^7$ **f)** $0{,}000\,708^3$
g) $103{,}4^{12}$ **h)** $78{,}03^8$

57. **a)** $0{,}583^7$ **b)** $18{,}6^4$ **c)** $103{,}5^8$
d) $0{,}033^5$ **e)** $1{,}111^7$ **f)** $0{,}000\,826^6$
g) 2^{64} **h)** $95{,}08^{10}$

---

3. Bestimmen Sie jeweils die Basis a des Logarithmensystems!

a) $\log_a 8 = 3$ **b)** $\log_a 8 = 0{,}3$ **c)** $\log_a 8 = 1{,}5$ **d)** $\log_a b = 2$

4. Berechnen Sie!

a) $\lg 10 \cdot \lg 9 \cdot \lg 8 \cdot \lg 7 \cdot \lg 6 \cdot \lg 5 \cdot \lg 4 \cdot \lg 3 \cdot \lg 2 \cdot \lg 1$

b) $\log_3 \log_2 8 - \log_2 \log_3 9$ **c)** $2 \log_6 36 + 3 \log_7 49$ **d)** $4^{3 \cdot \log_4 2}$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Wurzeln!

58. **a)** $\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{3570}$ **c)** $\sqrt[7]{7}$

d) $\sqrt{829000}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}01012}$

f) $\sqrt[4]{0{,}005107}$ **g)** $\sqrt[10]{1000}$

59. **a)** $\sqrt[5]{4{,}6}$ **b)** $\sqrt[3]{24600}$ **c)** $\sqrt[10]{10}$

d) $\sqrt{5670000}$ **e)** $\sqrt[5]{0{,}07350}$

f) $\sqrt[4]{1{,}0980}$ **g)** $\sqrt{0{,}0002905}$

Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen!

60. **a)** $\lg x = \lg 2000 - \lg 25$

b) $\lg m = \lg x - \lg \frac{m}{5}$

c) $\log_a z^3 = \log_a x - \log_a z^2$

d) $\log_3 x = \log_3 781 - \log_3 11$

e) $\lg 3 = \frac{1}{6} \lg x$ **f)** $\lg x = \frac{1}{5} \lg 243$

g) $\log_6 x = \log_6 10000$

61. **a)** $\lg 144 = \lg x - \lg 5$

b) $\lg 13 = \lg 26 - \lg x$

c) $\log_r x = \log_r 4m - \log_r 2m$

d) $\log_5 2 = \log_5 20000 - \log_5 x$

e) $\log_5 2 = x \cdot \log_5 128$ **f)** $\lg x = \frac{1}{b} \lg a$

g) $\lg x = \frac{1}{5} \lg 17$

62. **a)** $\sqrt[5]{13{,}7^2}$ **b)** $\sqrt{0{,}241}$ **c)** $85300^{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[3]{0{,}005188}$ **e)** $\sqrt[5]{853^4}$ **f)** $154{,}3^{\frac{3}{4}}$

63. **a)** $\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[7]{7}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}0000417}$

d) $\sqrt[5]{91{,}4}$ **e)** $\sqrt[4]{0{,}246}$ **f)** $\sqrt[12]{1{,}20}$

Berechnen Sie mit Hilfe der dekadischen Logarithmen!

64. **a)** $\log_5 8$ **b)** $\log_{11} 0{,}0213$

c) $\log_{17} 3810$ **d)** $\log_3 0{,}0027$

e) $\log_{0,5} 0{,}0625$ **f)** $\log_9 999$

65. **a)** $\log_2 0{,}3$ **b)** $\log_6 0{,}1296$

c) $\log_4 10{,}24$ **d)** $\log_{0,3} 38{,}4$

e) $\log_3 520{,}8$ **f)** $\log_5 0{,}371$

Berechnen Sie die folgenden Terme mit Hilfe des Rechenstabs und mit Hilfe der Logarithmentafel!

66. **a)** $\frac{23{,}4 \cdot 0{,}827}{0{,}0573}$ **b)** $\frac{50000 \cdot 0{,}237}{480{,}2}$

c) $\frac{44{,}7 \cdot 0{,}0522 \cdot 3{,}01}{0{,}371 \cdot 17{,}4}$

d) $\frac{218 \cdot 0{,}00403 \cdot 53{,}8}{52{,}82 \cdot 0{,}781}$

e) $\frac{7{,}44}{13{,}8 \cdot 2{,}47}$ **f)** $\frac{0{,}0005997 \cdot 0{,}66}{12{,}1 \cdot 0{,}369 \cdot 0{,}2084}$

67. **a)** $\frac{567 \cdot 811}{5{,}67}$ **b)** $\frac{13{,}8 \cdot 548 \cdot 2000}{5{,}21 \cdot 30{,}4}$

c) $\frac{0{,}2448 \cdot 0{,}7599 \cdot 0{,}0005281}{261{,}7 \cdot 3{,}577}$

d) $\frac{21{,}8 \cdot 154 \cdot 1001}{8{,}72 \cdot 0{,}104 \cdot 0{,}00782}$

e) $\frac{0{,}00548}{2{,}09 \cdot 33{,}80}$ **f)** $\frac{13{,}8 \cdot 20000}{100 \cdot 50{,}0 \cdot 27{,}6}$

68. **a)** $\frac{0{,}0728 \cdot 11{,}4}{0{,}973}$ **b)** $\frac{5120 \cdot 0{,}640}{1{,}280}$

c) $\frac{0{,}11 \cdot 18{,}4 \cdot 0{,}05374}{52{,}82 \cdot 0{,}781}$ **d)** $\frac{82200}{135 \cdot 702}$

e) $\frac{11{,}44 \cdot 0{,}8502}{0{,}358}$ **f)** $\frac{791{,}3 \cdot 622 \cdot 3{,}8}{1{,}286 \cdot 0{,}75 \cdot 60}$

69. **a)** $\frac{238{,}5 \cdot 0{,}5384}{777{,}7}$ **b)** $\frac{532 \cdot 82{,}7 \cdot 1024}{0{,}537 \cdot 63{,}4}$

c) $\frac{0{,}587 \cdot 0{,}000243 \cdot 2{,}58}{722 \cdot 458}$

d) $\frac{17000 \cdot 28{,}4}{14{,}2 \cdot 34{,}00 \cdot 0{,}020}$

f

70. Bei welchen Aufgaben aus **68.** und **69.** genügt Stabgenauigkeit, bei welchen nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

71. Die chemische Analyse von 212,4 g Braunkohle ergab:

Wasser 110,7 g; Asche 8,9 g; C 63,2 g; H 5,7 g; O 20,5 g; N 0,85 g; S 2,55 g.

Rechnen Sie die angegebenen Massen in Prozent (in Tonnen) um! Bestimmen Sie den Anteil (in Tonnen) der verschiedenen Bestandteile an der Ladung eines Kohlenzuges von 1500 Tonnen!

72. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Planet	Mittlere Entfernung von der Sonne 10^6 km	Umlaufzeit Jahre	Mittlere Geschwindigkeit km · s^{-1}	Äquatordurchmesser 10^3 km	Masse Erde = 1	Mittlere Dichte g · cm^{-3}
Merkur	57,9	0,24		4,8	0,05	
Venus	108,2	0,62		12,4	0,81	
Erde	149,6	1,00		12,8	1,00	5,52
Mars	227,9	1,88		6,8	0,11	
Jupiter	778,3		13,1	142,8	318	
Saturn	1428		9,6	120,8	95,2	
Uranus	2872		6,8	47,6	14,6	
Neptun	4498		5,4	44,6	17,2	
Pluto	5910		4,7	14,4	0,9	

73. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, die Angaben über den Zusammenhang von Spannung, Stromstärke, Leistung, Arbeit und den Kosten der elektrischen Arbeit enthält! (1 kWh ≙ 0,08 MDN)

Gerät	Spannung U (in Volt)	Stromstärke I (in Ampere)	Leistung N (in Watt)	Zeit t (in h)	Arbeit W (in kWh)	Preis P (in MDN)
Glühlampe	220		40	6		
Motor	380		$5{,}5 \cdot 10^3$	2		
Tauchsieder	220		1000	0,2		
Heizkörper	220		750			1,00
Glühlampe	24	4,15		10		
Radiogerät	220		120	5		
Kochherd	220		$2{,}4 \cdot 10^3$	30		
Sicherung	220	10		1		
Trafo-Station	$6 \cdot 10^3$		$1 \cdot 10^5$	1		
Trafo-Station	220		$1 \cdot 10^5$	1		
Kraftwerk	$6 \cdot 10^3$		$4{,}5 \cdot 10^8$	24		

74. Für Stahlkugeln mit den folgenden Durchmessern ist zu bestimmen, wieviel Kugeln die Masse von 1 kg ergeben.
Bestimmen Sie danach für 1 kg Stahlkugeln eines jeden Durchmessers das Verhältnis von der Oberfläche aller Kugeln zur Masse dieser Kugeln (in $cm^2 \cdot g^{-1}$)!
Stellen Sie dieses Verhältnis als Funktion des Durchmessers in einem geeigneten Koordinatensystem dar!

$d = 2{,}2$ mm; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; 4,2; 4,4! ($\varrho_{Fe} = 7{,}8\ g \cdot cm^{-3}$)

75. Bei der Bestandsaufnahme über vorhandenen Kupfer- und Aluminiumdraht wurde die folgende Tabelle zusammengestellt.

Rolle Nr.	Durchmesser der Rolle d (in m)	Querschnitt des Drahtes A (in mm²)	Anzahl der Windungen auf der Rolle n	Material Cu/Al
1	1,20	10	84	Cu
2	1,05	10	37	Cu
3	0,55	4	430	Cu
4	1,35	6	22	Cu
5	1,35	1,5	205	Cu
6	0,40	1,5	30	Cu
7	1,50	25	80	Al
8	1,45	25	45	Al
9	1,20	16	135	Al

Berechnen Sie
a) die Länge des Kupferdrahtes insgesamt,
b) die Länge des Aluminiumdrahtes insgesamt,
c) die Masse des Kupferdrahtes,
d) die Masse des Aluminiumdrahtes!

76. Bestimmen Sie die Oberfläche, das Volumen und die Masse der Sonne!

Sonnendurchmesser: $1{,}392 \cdot 10^{11}$ cm; Mittlere Dichte: $1{,}41\ g \cdot cm^{-3}$

77. Bestimmen Sie die Oberfläche, das Volumen und die Masse der Erde (unter Annahme einer Kugelgestalt)!

Erdradius: $6{,}371\,221\,266 \cdot 10^8$ cm; Mittlere Dichte: $5{,}52 g \cdot cm^{-3}$

78. Bestimmen Sie die Oberfläche, das Volumen und die mittlere Dichte des Mondes!

Durchmesser: $3{,}476 \cdot 10^8$ cm; Masse: $7{,}35 \cdot 10^{25}$ g

79. Salzsäure mit einer Dichte von $\varrho = 1{,}15\ g \cdot cm^{-3}$ soll in kugelförmige Behälter mit 70,2 cm Innendurchmesser gefüllt werden.

a) Wieviel Salzsäure faßt ein Behälter?
b) Wieviel Behälter werden benötigt, um 2,48 t Salzsäure abzufüllen?

80. Für einen Tieftauchversuch soll eine Hohlkugel aus Stahl verwendet werden.

Innendurchmesser: 1658 mm; Wandstärke: 37 mm; Dichte des Stahls: $7{,}845\ g \cdot cm^{-3}$

Wie groß ist der Auftrieb (in kp) dieser Hohlkugel in Meereswasser mit einer Dichte $\varrho = 1{,}027\ g \cdot cm^{-3}$?

81. Bestimmen Sie das Verhältnis von Masse zu Oberfläche (in $g \cdot cm^{-2}$) bei Hohlzylindern aus Hartporzellan ($\varrho = 2{,}35\ g \cdot cm^{-3}$)!

Außendurchmesser D: 3,5 cm; 6,4 cm; 4 cm;
Innendurchmesser d: 1,75 cm; 3,2 cm; 3 cm; Höhe h: 3,5 cm; 4,8 cm; 3 cm

Zahlenbereiche	
Natürliche Zahlen	A 3
Gebrochene Zahlen	A 4
Rationale Zahlen	A 7
Ganze Zahlen	A 10
Reelle Zahlen	D 4

Rechenoperationen (1. Stufe)					
Addition	Subtraktion	A 3	A 5	A 9	D 5

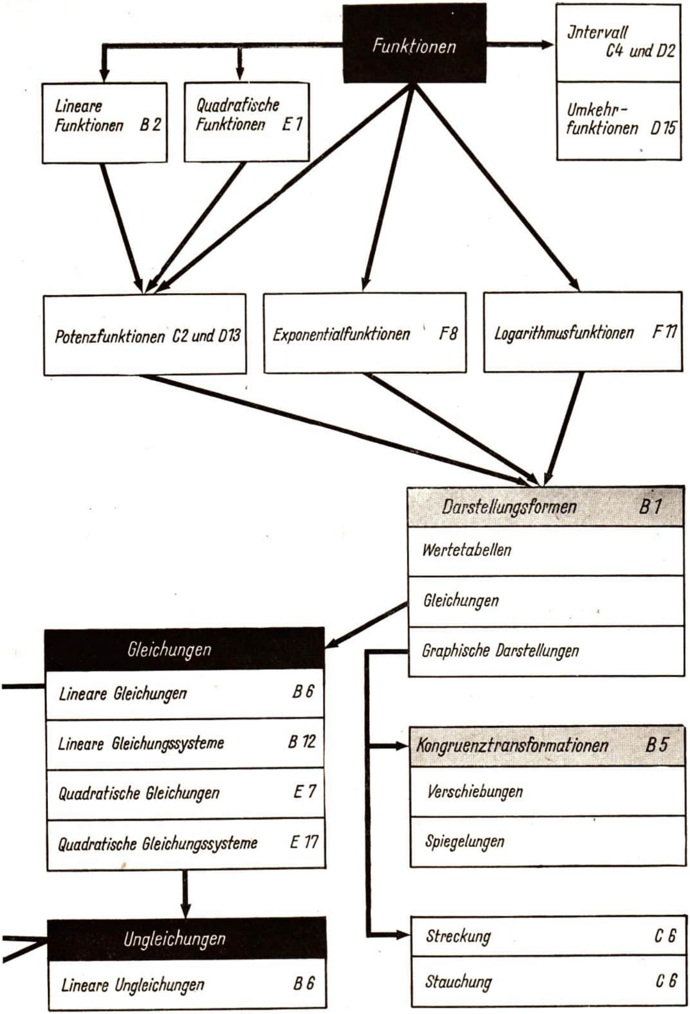
Rechenoperationen (2. Stufe)					
Multiplikation	Division	A 3	A 5	A 10	D 5

Rechenoperationen (3. Stufe)				
Potenzieren (Exp. ganz)	Radizieren	Potenzieren (Exp. ratio)	Potenzieren (Exp. irrat.)	Logarithmieren
C 7 bis 10 Def. ▷ C 1, 6, 7 Sätze ▷ C 5	D 6 Def. ▷ D 9	D 8 bis 11 Def. ▷ D 11 Sätze ▷ D 12	F 2 Sätze ▷ F 1	F 3 und 12 Def. ▷ F 3 Sätze ▷ F 7

Rechnerische Lösung	
Lineare Gleichungen	B 7
Lineare Gleichungssysteme	B 12 bis 15
Quadratische Gleichungen	E 11 und 12
Quadratische Gleichungssysteme	E 17
Lineare Ungleichungen	B 10

Zeichnerische Lösung	
Lineare Gleichungen	B 11
Lineare Gleichungssysteme	B 12
Quadratische Gleichungen	E 15
Lineare Ungleichungen	B 11

Z


Funktionen
Jntervall C4 und D2
Umkehrfunktionen D 15
Lineare Funktionen B 2
Quadratische Funktionen E 1
Potenzfunktionen C2 und D13
Exponentialfunktionen F 8
Logarithmusfunktionen F 11
Darstellungsformen B 1
Wertetabellen
Gleichungen
Graphische Darstellungen
Gleichungen
Lineare Gleichungen B 6
Lineare Gleichungssysteme B 12
Quadratische Gleichungen E 7
Quadratische Gleichungssysteme E 17
Kongruenztransformationen B 5
Verschiebungen
Spiegelungen
Ungleichungen
Lineare Ungleichungen B 6
Streckung C 6
Stauchung C 6

Z

Register

Quellennachweis

Bild E 10: Reproduktion aus W. W. Struve: Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Berlin 1930.
Bild E 11: Reproduktion aus O. Neugebauer: Mathematische Keilschrifttexte. Dritter Teil. Ergänzungsheft. Berlin 1937.
Bild E 12: Reproduktion aus einem Rechenbuch von Adam Ries.
Bild E 13: Reproduktion aus Struik: A Concise History of Mathematics. New York 1948.
Bild E 14: Reproduktion aus Wolf: A History of Science ... in the XVI$^{\text{th}}$ and XVII$^{\text{th}}$ Centuries. London 1950.
Bild F 7: Volk und Wissen (M. Seifert)
Bild F 9: Deutsche Fotothek Dresden

Zwischentitel

Kap. A, B, D, F: Manfred Behrend
Kap. C: Militär-Bilddienst
Kap. E: Prof. Wattenberg

Die Aufgaben **b 62**, **b 89**, *b 11*, *d 6*, *d 7*, **e 105** und **e 106** wurden dem Werk: Fuchs/Pöhlmann/Wetzel: *Grundlagen der Mathematik für Angehörige der NVA*, erschienen im Deutschen Militärverlag, Berlin, entnommen.

Z