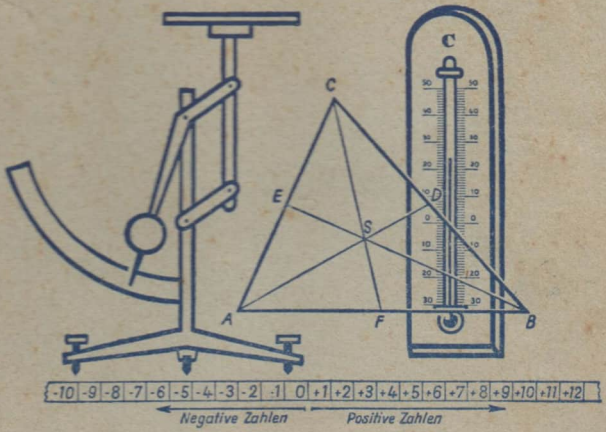
ZAHL UND FORM



7. Schuljahr

038

ZAHL UND FORM

Rechnen und Mathematik für die Grundschule

7. Schuljahr

Mit 115 Abbildungen

ARBEITSGEMEINSCHAFT

VOLK UND WISSEN VERLAGS GMBH

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

BERLIN—LEIPZIG

1948

Herausgegeben von
Hans Sturhann, Walter Zabel
und Charlotte Taube
Berlin

Best.-Nr. 2038 · Preis brosch. 1,10 RM

1.–500. Tausend · Liz. Nr. 334 · 1000/48–85/48

Satz: (M 109) B. G. Teubner, Leipzig C1 Poststr. 3 – A 1067
Druck: (945/10592) Staatsdruckerei, Berlin, Kommandantenstr. 7-9

Inhaltsverzeichnis

A. Die Rechenarten im täglichen Leben

I. Schlußrechnung 5

1. Von der Kohle, die zum Reinigen dient 5
2. Die Zahl 100 als Vergleichszahl 6

II. Prozentrechnung 7

3. Grundwert und Prozentbegriff 7
4. Berechnung des Prozentwertes 9
5. Berechnung des Prozentsatzes 12
6. Berechnung des Grundwertes 15
7. Vermehrter und verminderter Wert 17
8. Promillerechnung / Versicherungen 19
9. Familie und Haushalt / Aufgaben aus Sachgebieten 21

III. Zinsrechnung 24

10. Berechnung der Jahreszinsen 24
11. Berechnung der Monatszinsen / Von der Sparkasse 26
12. Berechnung der Tageszinsen 28
13. Berechnung des Zinsfußes 30
14. Berechnung des Kapitals 33
15. Berechnung der Zeit 35
16. Endkapital und Anfangskapital 37

IV. Aufgaben aus Sachgebieten 38

17. Brutto, Tara, Netto 38
18. Selbstkosten und Gewinn 39
19. Preisnachlaß; Verluste 40
20. Sparen und Sparkasse 41
21. Die Sparkasse vergibt Hypotheken 43
22. Hypotheken und Darlehen 44

V. Aus der Zinsrechnung des Kaufmanns 44

23. Berechnung der Tageszinsen durch Zinszahlen 44
24. Anwendung der Zinszahlen 45

B. Einführung in das Rechnen mit allgemeinen und relativen Zahlen

VI. Grundrechenarten mit allgemeinen Zahlen 48

25. Einführung der allgemeinen Zahlen 48
26. Auswerten von Buchstabenausdrücken 51
27. Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlen 53
28. Multiplikation allgemeiner Zahlen 56
29. Multiplizieren von Summen und Differenzen 58
30. Division allgemeiner Zahlen, Summen, Differenzen und Produkte 60

VII. Gleichungen 62
31. Einfache Gleichungen 62
32. Lösung angewandter Aufgaben mit Hilfe von Gleichungen .. 64
33. Schriftliche Lösung von Gleichungen 65

VIII. Das Rechnen mit relativen Zahlen 67
34. Einführung der relativen Zahlen 67
35. Addition und Subtraktion relativer Zahlen 69
36. Multiplikation relativer Zahlen 74
37. Division relativer Zahlen 76

C. Geometrie

IX. Spiegelung 78
38. Die Spiegelachse 78
39. Gleichschenkliges Dreieck / Grundaufgaben 81
40. Bestimmungslinien 83
41. Anwendungen 84

X. Winkelbeziehungen an Geraden 87
42. Neben- und Scheitelwinkel 87
43. Winkelmessungen im Freien 89
44. Parallele Geraden 91
45. Winkelpaare an Parallelen 93
46. Vermischte Aufgaben 96

XI. Das Dreieck / Vermessungen 98
47. Die Winkel des Dreiecks 98
48. Der erste Kongruenzsatz 101
49. Der zweite Kongruenzsatz 104
50. Der dritte Kongruenzsatz 106
51. Der vierte Kongruenzsatz 107
52. Besondere Linien im Dreieck 109
53. Vermessungs- und Ortungsaufgaben 113

XII. Das Viereck 116
54. Parallelogramme 116
55. Umkehrungen 118
56. Trapez und Viereck im allgemeinen 119
57. Rhombus, Drachenviereck und gleichschenkliges Trapez 122
58. Rechteck und Quadrat 126

A. Die Rechenarten im täglichen Leben

I. Schlußrechnung

1. Von der Kohle, die zum Reinigen dient

Durch geeignete Behandlung kann man Torf, Holz, Holzkohle, Braunkohle und Grudekoks in Kohle überführen, die von einem dichten Netz feiner Poren durchzogen ist und an der so entstandenen größeren Oberfläche viele Verunreinigungen festhält (Aktivkohle). Gelber Zucker, Trinkwasser, Alkohol und Öle können auf diese Weise gereinigt werden.

1. Es gibt Aktivkohle, die eine Oberfläche von 200 m^2 je Gramm aufweist. Welche Oberfläche haben dann a) 15 g, b) 75 g, c) 25 g, d) 100 g?

2. Eine bessere Sorte hat eine Oberfläche von 650 m^2 je Gramm. Welche Oberfläche haben dann a) 100 g, b) 175 g, c) 250 g, d) 315 g?

3. Die Wichte eines Stoffes gibt an, wieviel Gramm ein Kubikzentimeter desselben wiegt. Aluminium hat die Wichte 2,7.

   a) Wie lang sind die Kanten eines 2,7 g schweren Würfels aus Aluminium?

   b) Welche Oberfläche hat der Würfel?

   c) Vergleiche die Oberfläche dieses Würfels mit der Oberfläche von 2,7 g Aktivkohle der schlechteren und der besseren Sorte!

   d) Zerlege den Würfel aus Aluminium in 1 000 = 10^3 Würfel der Kantenlänge 1 mm! Welche Oberfläche erhältst du dadurch?

   e) Stelle durch einen Überschlag fest, wie lang die Kanten der Aluminiumwürfel gewählt werden müssen, damit 2,7 g Aluminium dieselbe Oberfläche aufweisen wie dasselbe Gewicht an Aktivkohle einer mittleren Sorte!

   f) Es ist sogar möglich geworden, Aktivkohle herzustellen, von der 600 g eine innere Oberfläche von 75 ha aufweisen. Diese 600 g erfüllen, wenn die Kohle in Körnerform vorliegt, den Raum eines Liters.

   1. Welche Oberfläche hat 1 kg dieser Kohle?

   2. Miß den Rauminhalt eines Fingerhutes und berechne die Oberfläche der Aktivkohle, die in einem Fingerhut Platz hat!

4. Eine Kokerei erzeugte täglich 2 100 000 m^3 Leuchtgas, wobei mittels Aktivkohle 80 000 kg Benzol ausgeschieden wurden.

   a) Wieviel Benzol wurde in 1 Woche (= 7 Tage) gewonnen?

   b) Welche Zeit ist erforderlich zur Gewinnung von 1 000 t Benzol?

2. Die Zahl 100 als Vergleichszahl (Schluß auf und von 100)

Bei einem Sportfest errangen von 320 Schülern einer Schule A 48 Schüler einen Preis; von einer anderen Schule B mit 450 Schülern wurden 54 ausgezeichnet. Welche Schule hat den größeren Erfolg gehabt?

Ein Vergleich zwischen beiden Schulen wäre ohne weiteres möglich, wenn von beiden Schulen dieselbe Schülerzahl teilgenommen hätte. Berechne, wieviel von je 100 Schülern der beiden Schulen einen Preis erhalten haben!

Die Zahl 100 wird sehr häufig als Vergleichszahl benutzt.

Aufgaben

Schluß auf 100

1. In einer Hühnerfarm werden 120 Eier in die Brutmaschine gelegt, aus denen 108 Küken schlüpfen. Eine andere Farm erhält von 150 Eiern 130 Küken. Welche Farm hat den größeren Erfolg?

2. Jemand hat ein Monatseinkommen von 360 RM und zahlt im Monat 72 RM Miete. Ein anderer zahlt bei einem Monatseinkommen von 450 RM 81 RM Miete. Rechne aus, wieviel RM Miete bei jedem auf 100 RM Einkommen entfallen, und vergleiche!

3. Ein Gartenbesitzer hat in seinem neu angelegten Garten 240 Obstbäume gepflanzt, 12 davon sind nicht „gekommen". Wieviel Stück würden unter gleichen Bedingungen von 100 gepflanzten Bäumen nicht angewachsen sein?

4. Das Gesamtgewicht – auch „Roh- oder Bruttogewicht" genannt – einer Warensendung beträgt 140 kg, die Verpackung 4,2 kg. Wie groß ist das Gewicht der Verpackung bei einem Bruttogewicht von 100 kg?

5. Eine Straße, die gleichmäßig ansteigt, hat auf einer Länge von 960 m eine Steigung von 115,2 m; eine andere Straße hat bei einer Länge von 1 725 m eine Steigung von 138 m. Berechne für jede Straße die Steigung bei 100 m Länge! Welche Straße hat die größere Steigung?

Schluß von 100

6. Für je 100 RM Umsatz, den ein Kaufmann im Monat gehabt hat, muß er 3,— RM Umsatzsteuer zahlen. Wieviel Umsatzsteuer hat er bei einem Monatsumsatz von 4 560, 3 765, 5 235 RM zu zahlen?

7. a) Ein 13jähriger Schüler atmet in einer Stunde etwa $18\frac{1}{2}$ l Kohlensäure aus, ein Erwachsener 25 l. Wieviel l Kohlensäure werden in 1 Std. in einer Klasse ausgeatmet, die aus 34 Schülern und einem Lehrer besteht?

b) Auf 100 l darf die Zimmerluft höchstens $\frac{3}{10}$ l Kohlensäure enthalten. Wieviel l Kohlensäure dürfen in einem Schulzimmer sein, das 9 m lang, 5 m breit und 4 m hoch ist?

c) In 100 l frischer Luft sind $\frac{1}{25}$ l Kohlensäure enthalten. Wie groß ist der Gehalt der Luft des Schulzimmers (Aufg. b) an Kohlensäure vor Beginn des Unterrichts und nach Schluß der Schulstunde (Aufg. a)?

II. Prozentrechnung

3. Grundwert und Prozentbegriff

Ein Junge erzählt: „In meiner Klasse sind 40 Jungen, und 36 von ihnen können schwimmen. Sein Vetter erwidert stolz, daß in seiner Klasse von 50 Jungen sogar 40 schwimmen können. Der Junge überlegt: „Bei uns können $\frac{36}{40}$ oder $\frac{9}{10}$ der Jungen schwimmen, in der anderen Klasse sind es $\frac{40}{50}$ oder $\frac{8}{10}$, also stellt meine Klasse einen verhältnismäßig höheren Anteil an Schwimmern." Der Junge hat mit der Vergleichszahl 10 gerechnet, im praktischen Leben bevorzugt man als Vergleichszahl die Zahl 100.

In der einen Klasse sind $\frac{90}{100}$ oder 90 vom Hundert der Kinder Schwimmer, in der anderen Klasse sind $\frac{80}{100}$ oder 80 vom Hundert der Kinder Schwimmer. Für 90 vom Hundert sagt man auch 90 **Prozent**[1]) und schreibt abgekürzt 90 v. H. oder 90 %; entsprechend 80 v. H. oder 80 %. Die Zahl, deren Bruchteile auf 100 bezogen werden sollen, heißt **Grundwert.**

Dem Grundwert entsprechen 100 %; 1 % ist $\frac{1}{100}$ des Grundwertes.

Beispiel: 1 % von 250 RM (Grundwert) sind $\frac{1}{100}$ von 250 RM oder 2,50 RM.

1) pro centum (lat.) = für (von) Hundert.

Aufgaben

1. Berechne 1 % von

   a) 1 m, 10 m, 100 m, 1 cm, 5 cm, 3,4 km;

   b) 1 m², 12 a, 7 hl, 20 m, 50 kg, 4 500 dz;

   c) 9 RM, 35 RM, 210 RM, 12,50 RM, 3,75 RM, 0,50 RM!

2. Schreibe folgende Prozente als Bruchteile des Grundwertes: 1 %, 2 %, 4 %, 5 %, 10 %, 25 %, 50 %, 8 %, 15 %, 45 %, 75 %, 80 %!

3. Das Wievielfache des Grundwertes ergeben 100 %, 200 %, 500 %, 150 %, 225 %, 360 %?

4. Wandle in Hundertsätze um: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{37}{50}$ des Grundwertes!

5. Bestimme ebenso die folgenden Hundertsätze als Bruchteile des Grundwertes: 1 %, 2 %, $2\frac{1}{2}$ %, $3\frac{1}{3}$ %, 4 %, 5 %, $6\frac{1}{4}$ %, $8\frac{1}{3}$ %, 10 %, $12\frac{1}{2}$ %, $16\frac{2}{3}$ %, 20 %, 25 %, 30 %, $33\frac{1}{3}$ %, 40 %, 50 %, $66\frac{2}{3}$ %, 75 %, 80 %! Stelle die Ergebnisse zum Einprägen nach folgendem Muster übersichtlich zusammen!

Hundertsatz	1 %	2 %	$2\frac{1}{2}$ %
Bruchteil des Grundwertes	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{40}$

6. Zeichne ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge und male 1 % des Quadratdezimeters bunt aus!

7. Zeichne mehrere 10 cm lange schmale Streifen stehend nebeneinander, betrachte sie als Grundwert und stelle darin durch Schraffieren anschaulich dar: 5 %, 32 %, 47 %, 50 %, 72 %, 80 %, 92 %! (Prozentstreifen!)

8. Zeichne mehrere Kreise mit 2 cm Halbmesser, betrachte sie als Grundwert und lege die Kreisausschnitte bunt an, die $16\frac{2}{3}$ %, $37\frac{1}{2}$ %, 40 %, $66\frac{2}{3}$ %, 75 % darstellen! Benutze dabei die Tabelle nach Aufgabe 5 und denke an die Teilung des Kreises (Prozentkreis)! Wieviel v.H. stellt jedesmal die Restfläche dar?

4. Berechnung des Prozentwertes

Ein Kaufmann verkauft Ware, die ihn selbst 1 200 RM kostet, mit einem Aufschlag von 8%. Wieviel RM schlägt er auf?

100% sind	1 200 RM
1% „	12 RM
8% „	96 RM
Der Aufschlag beträgt	96 RM.

Das Ergebnis dieser Aufgabe heißt **Prozentwert**; 8% ist der **Prozentsatz.**

Beispiel: Wieviel kg sind 15% von 900 kg?

1. Lösung durch Dreisatz:

Prozentsatz	Prozentwert
100%	900 kg
1%	9 kg
15%	135 kg

2. Kaufmännische Lösung:

Prozentsatz	Prozentwert
10%	90 kg
5%	45 kg
15%	135 kg

Aufgaben

1. Berechne: a) 2%, b) 3%, c) 7%, d) 11%, e) 32% von 500 RM, 350 RM, 72 RM, 9 RM, 700 m, 8 km, 6,3 kg, 27,5 dz, 51,2 t!

2. a) 105% von 70 RM b) 140% von 13,50 RM c) 220% von 43 m
   110% „ 4 „ 165% „ 21,60 „ 360% „ 19,700 kg
   123% „ 18 „ 200% „ 6,25 „ 425% „ 7,6 dz!

3. a) $\frac{1}{2}$%, b) $\frac{1}{3}$%, c) $\frac{1}{10}$%, d) $\frac{4}{5}$% von 360 RM, 54 hl, 35$\frac{1}{2}$ kg, 8;8 km! (Runde auf die übliche Stellenzahl ab!)

4. a) 1$\frac{3}{4}$%, b) 4$\frac{2}{3}$%, c) 3$\frac{1}{2}$%, d) 4,7% von 210 m, 15 kg, 351 t, 130 l, 5,75 RM! (Schätze zunächst das Ergebnis ab!)

5. Rechne möglichst vorteilhaft aus:

a)	5 % von	80 RM		**b)**	25 % von	84	RM
	40 % „	300 „			$8\frac{1}{3}$ % „	21,60	„
	$12\frac{1}{2}$ % „	96 „			$6\frac{1}{4}$ % „	17,44	„
	$16\frac{2}{3}$ % „	750 „			$37\frac{1}{2}$ % „	3,24	„
	$18\frac{3}{4}$ % „	1224 „			$33\frac{1}{3}$ % „	0,75	„

c)	20 % von	480 kg	
	75 %	92 „	
	80 %	27,300 kg	
	125 % „	38,6 dz	
	250 % „	43,5 t!	

6. Löse folgende Aufgaben durch geschicktes Zerlegen des Prozentsatzes:

a)	15 % (= 10 % + $\frac{1}{2}$ von 10 %)	von 524 m³;	36,80 RM;	0,90 RM
b)	9 % (= 10 % − 1 %)	825 RM;	1 045 hl;	345 RM
c)	2,2 % (= 2 % + $\frac{1}{10}$ von 2 %)	„ 725 dz;	187,5 kg;	16,5 t
d)	4,4 %	„ 365 RM;	1 225 hl;	31,25 t!

7. a) Bild 1 kann zur Bestimmung des Prozentwertes benutzt werden. Sollen 25 % von 60 RM bestimmt werden, dann geht man vom Grundwert 60 senkrecht nach oben bis zum Strahl für 25 %. Geht man von dort waagerecht nach links, so findet man auf der senkrechten Achse den Prozentwert 15.

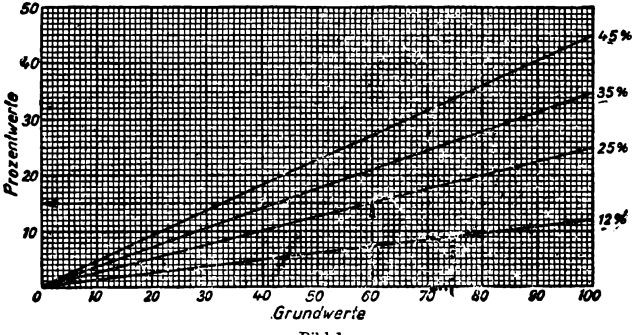


Bild 1

7. b) Lies daraus die Prozentwerte für folgende Aufgaben ab:

12 %	vom	Grundwert	75
45 %	„	„	40
35 %	„	„	80!

c) Bilde selbst ähnliche Aufgaben!

8. a) Wieviel Grad mißt der Winkel, der 1 %, 3 %, 8 %, 15 %, 25 %, 48 %, 63 %, 80 % des Vollwinkels beträgt? (Runde auf ganze Grade ab!)

b) Zeichne Kreisausschnitte als Schaubilder für 10 %, 28 %, 35 %, 50 %, 67 %!

Anleitung: $1\% = 3{,}6°$; $2\% = 2 \cdot 3{,}6° = 7{,}2° \approx 7°$.

9. Beim Bau eines mehrstöckigen Wohnhauses verteilen sich die Kosten der Arbeiten auf das „Bauhauptgewerbe", nämlich:

Erdarbeiten zu 3,4 %, Maurerarbeiten zu 38,6 %, Putzarbeiten zu 12,0 %, Zimmererarbeiten zu 14,0 %,

und auf das „Baunebengewerbe", nämlich:

Dachdeckerarbeiten zu 2,6 %, Klempnerarbeiten zu 1,3 %, Tischlerarbeiten zu 12,0 %, Schlosserarbeiten zu 2,6 %, Glaserarbeiten zu 0,5 %, Malerarbeiten zu 7,0 %, Ofenarbeiten zu 6,0 %.

a) Stelle diese Verhältnisse in einem Prozentkreis dar!

b) Lege den Teil des Kreises, der dem Bauhauptgewerbe entspricht, rot, den anderen blau an und bestimme in Prozenten den Gesamtanteil der Arbeiten des Bauhaupt- und des Baunebengewerbes!

10. Von drei zur Erholung aufs Land verschickten Kindern hatte das erste vor der Entsendung 34 kg gewogen, bei seiner Rückkehr betrug die Gewichtszunahme $4\frac{1}{2}$ %. Das zweite Kind (39,5 kg) nahm $8\frac{1}{2}$ %, das dritte (42 kg) $6\frac{1}{4}$ % zu.

11. Bei einer Preissenkung wird eine Ermäßigung um $12\frac{1}{2}$ % ($16\frac{2}{3}$ %, 25 %, $33\frac{1}{3}$ %) durchgeführt. Die bisherigen Preise waren 42 RM, 54 RM, 73,20 RM, 85,80 RM. Berechne **a)** den Preisnachlaß, **b)** den neuen Verkaufspreis für alle Preise und alle Prozentsätze!

5. Berechnung des Prozentsatzes

Ein Kaufmann bezieht für 1 200 RM Ware und verkauft sie mit einem Aufschlag von 96 RM. Wieviel Prozent des Selbstkostenpreises schlägt er auf?

1 200 RM sind 100 %
12 „ sind 1 %
96 „ sind 8 %

Er schlägt 8 % des Selbstkostenpreises auf.

Aufgaben

Wieviel % sind

1. a) 15 RM von 500 RM b) 24 RM von 200 RM
   c) 48 „ „ 600 „ d) 25 „ 600 „
   e) 39 kg „ 400 kg f) 50 hl 700 hl
   g) 32 l „ 960 l h) 42 dz „ 2800 dz
   i) 3 m „ 120 m k) 38 t 40 t

2. a) 34 m von 1700 m b) 16,50 ha von 660 ha
   c) 5,20 dz 65 dz d) 76 l 95 l
   e) 150,8 kg „ 3 480 kg f) 7,92 km „ 192 km
   g) 0,55 m 18,35 m h) 15,6 g „ 312 kg
   i) 6 Rpf. „ 1 RM k) 72 cm „ 3 m

3. a) $5\frac{4}{5}$ von 145 b) $5\frac{5}{8}$ von 90 c) $1\frac{1}{2}$ von 126
   d) $6\frac{3}{4}$ „ 215 e) $1\frac{2}{5}$ „ 70 f) $2\frac{4}{8}$ 80

4. a) 58 RM von 29 RM b) 96 RM von 32 RM
   c) 42 „ 28 „ d) 1 000 l 750 l
   e) 20 000 dz „ 9 200 dz f) 65 Mill. „ 58 Mill.

5. a) 6 von 15 b) 80 von 96 c) 576 von 450
   15 „ 6 96 „ 80 450 „ 576?

6. Bestimme den Prozentsatz!

	a)	b)	c)	d)
Grundwert	918,50 RM	816,25 m	7 766,45 ha	3,75 hl
Prozentwert	33,75 „	39,18 „	390,5	30 „

7. Wieviel % des Grundwertes beträgt die Zunahme oder Abnahme, wenn

a) der Grundwert	840 RM	auf	875 RM	anwächst
b) „	3 000 hl	„	3 078 hl	„
c)	2 450 t	„	2 254 t	abnimmt
d)	6 720 l	„	6 204 l	?

8. Lies aus Bild 1 ab, wieviel Prozent **a)** 17,50 RM von 70 RM, **b)** 9,60 RM von 80 RM, **c)** 14 RM von 40 RM, **d)** 40,50 RM von 90 RM betragen!

9. Ein Kreisausschnitt hat den Mittelpunktswinkel 30°, 45°, 60°, 90°, 270°, 36°, 108°, 144°, 200°, 305°. Wieviel Prozent der Kreisfläche stellt jeder Kreisausschnitt dar?

10. Für einen Haushalt, der keine Waage hat, können folgende Angaben wertvoll sein:

1 Eßlöffel Mehl, gehäuft, nicht zu stark	25 g
1 Teelöffel Mehl, „ „ „ „	10 g
1 Tasse (ein Viertelliter) Mehl, gestrichen voll	95 g
1 gehäufter Eßlöffel Zucker	30 g
1 gehäufter Teelöffel Zucker	10 g
1 Tasse Zucker, gestrichen voll	175 g
1 gehäufter Teelöffel Salz	10 g
1 Eßlöffel Grieß, gehäuft, nicht zu stark	25 g
1 Teelöffel Grieß, „ „ „ „	10 g
1 Tasse Grieß, gestrichen voll	145 g
1 gehäufter Eßlöffel Gerstengrütze	30 g
1 Tasse Gerstengrütze, gestrichen voll	165 g
1 gehäufter Eßlöffel Haferflocken	20 g
1 Tasse Haferflocken, gestrichen voll	80 g

Wiege die angegebenen Mengen nach und gib die Abweichungen von den genannten Gewichten in Prozenten an!

11. Zeichne eine Strecke von 6,8 cm mit einem Lineal, das keine mm-Teilung aufweist. Miß sie dann mit einem in mm geteilten Maßstab recht genau nach und rechne aus, wieviel % der Fehler beträgt, den du gemacht hast!

12. Ein Haus, das für 65 000 RM gekauft ist, bringt jährlich 4 510 RM Miete.

a) Wieviel Prozent des Kaufpreises sind das?

b) Wie hoch verzinst sich das angelegte Geld, wenn sich die Unterhaltungskosten des Hauses auf 1 480 RM belaufen?

13. 380 kg Sole gaben 57 kg Salz; wieviel „prozentig" war sie?

14. Der Preis einer Warensendung erhöhte sich durch den Zoll, der sich nach der betreffenden Ware und ihrem Gewicht richtet,

a)	von	2 555 RM	auf	3 321,50 RM
b)	„	4 870 „		6 087,50 „
c)	„	8 575 „		9 861,25 „
d)	„	16 350 „	„	22 072,50 „

Wieviel v. H. des Gesamtpreises macht die Zollabgabe aus?

15. Nach einer Preissenkung wurden

a) Waren im Preis von 32 RM, 50 RM, 65 RM, 72,50 RM
um 4 „, 8 „, 13 „, 12,50 „
billiger verkauft,

b) Preise für andere Waren
von 42 RM, 54,00 RM, 73,20 RM, 85,50 RM
auf 35 „, 40,50 „, 48,80 „, 51,30 „

herabgesetzt. Um wieviel Prozent wurde der Preis in jedem Falle ermäßigt?

16. In einer Stadt von 183 000 Einwohnern treiben nahezu 18 000 Einwohner Leibesübungen. Wieviel v. H. der Einwohnerzahl macht das aus?
Stelle dies durch einen Prozentstreifen anschaulich dar!

17. Leipzig hatte bei der Volkszählung

im Jahre 1900: 456 124 Einwohner
„ „ 1905: 503 672
„ „ 1910: 587 635
„ „ 1924: 680 000
„ „ 1932: 718 000
„ „ 1939: 714 480
„ „ 1945: 584 589
„ „ 1946: 608 111

Wieviel v.H. betrug die Zunahme a) von 1900 bis 1905, b) von 1905 bis 1910, c) von 1910 bis 1924, d) von 1924 bis 1932, e) von 1900 bis 1939, f) die Abnahme von 1939 bis 1945, g) die Zunahme von 1945 bis 1946?

6. Berechnung des Grundwertes

Schlägt ein Kaufmann auf den Selbstkostenpreis einer Ware 8% auf, so erzielt er eine Mehreinnahme von 96 RM. Wie hoch war der Selbstkostenpreis?

8%	sind	96 RM
1%	„	12 „
100%	„	1 200 „

Der Selbstkostenpreis betrug 1 200 RM.

Aufgaben

1. Von welcher Zahl sind a) 1%, b) 3%, c) 5%, d) 9% gleich 9,12; 123; 14,5; 7,38; 0,03?

Von welchem Grundwert sind

2. a) 2% = 36 RM b) 4% = 21 hl c) 5% = 22 RM
d) 10% = 34 dz e) 20% = 43 kg f) 25% = 37 km
g) 40% = 35 m³ h) 50% = 47 t i) 60% = 65 m²
k) 75% = 48 km² l) 80% = 75 a m) 90% = 55 ha

3. a) $3\frac{1}{3}$% = 20 hl b) $6\frac{1}{4}$% = 48 m c) $8\frac{1}{3}$% = 72 RM
d) $11\frac{1}{9}$% = 54 km e) $12\frac{1}{2}$% = 88 kg f) $16\frac{2}{3}$% = 120 m²
g) $66\frac{2}{3}$% = 75 t h) 50% = 90 km² i) 225% = 270 RM

4. 60 RM = a) 8 %, b) 15 %, c) 25 %, d) 40 %, f) $33\frac{1}{3}$ %, g) 72 %, h) 120 %, i) 200 %?

5. Berechne den Grundwert!

Prozentsatz	Prozentwert	Prozentsatz	Prozentwert
a) $2\frac{2}{3}$ %	850 kg	g) $5\frac{1}{2}$ %	434,50 ha
b) $7\frac{1}{2}$ %	$37\frac{1}{2}$ kg	h) 75 %	0,6 dz
c) $14\frac{2}{7}$ %	5 621,54 m²	i) $87\frac{1}{2}$ %	630 l
d) $6\frac{2}{3}$ %	15,216 km²	k) 8 %	73,08 hl
e) $14\frac{2}{7}$ %	16 864,62 km²	l) 6,6 %	24,42 m
f) $1\frac{1}{4}$ %	5 312 t	m) 50 %	9 076,50 km

6. Von welchem Grundwert betragen

a) 15 % 846 RM b) 30 % 685,74 m
c) $37\frac{1}{2}$ % 468,015 kg d) 22 % 790,35 RM
e) $31\frac{1}{2}$ % 246,32 hl f) $4\frac{3}{4}$ % 706,8 t?

7. a) 15 %, b) 12 %, c) 18 %, d) 43,2 % einer Zahl betragen 118,8. Wie groß ist die Zahl?

8. Zeichne auf Millimeterpapier ein Schaubild nach dem Muster von Bild 1 für 30 % und gib an, wie man zu dem gegebenen Prozentsatz den Grundwert findet! Lies den Grundwert zu den Prozentwerten 6 RM, 21 RM, 16,50 RM, 7,80 RM, 28,50 RM aus der Zeichnung ab!

9. Bei einem Brandschaden wurde die Vergütung auf a) 65 %, b) 80 %, c) 92 % der Versicherungssumme festgesetzt. Wie hoch war diese, wenn die ausgezahlte Vergütung in allen drei Fällen 1 200 RM betrug?

10. Ein Bauer verkaufte ein Stück Vieh, an dem er nach seiner Schätzung a) $2\frac{1}{2}$ %, b) $3\frac{1}{3}$ %, c) $4\frac{1}{6}$ %, d) $12\frac{1}{2}$ %, e) $18\frac{3}{4}$ % verdiente, mit 24 RM, 30 RM Gewinn.

11. Jemand spart monatlich 20 RM; das sind a) 5 %, b) $6\frac{1}{4}$ %, c) 10 %, d) $12\frac{1}{2}$ % seines Einkommens.

12. Ein Kaufmann gewann bei einem Verkauf $13\frac{1}{2}$ % der angelegten Geldsumme, und zwar 243 RM. Wie groß war die angelegte Geldsumme?

13. Beim Auswiegen einer Ware fand ein Kaufmann einen Gewichtsverlust von $3\frac{1}{4}$%, nämlich 6,5 kg. Wieviel kg sollte die Ware wiegen?

14. Beim Bezug einer Ware entstanden Ausgaben (Fracht, Rollgeld, Versicherung) in Höhe von $3\frac{1}{2}$% des Rechnungsbetrages; sie beliefen sich auf 54,46 RM. Wieviel kostete die Ware?

7. Vermehrter und verminderter Wert

Ein Kaufmann bezieht für 480 RM Ware, er verkauft sie mit 12% Gewinn. Wieviel RM nimmt er ein?

Man rechnet:

Selbstkostenpreis	Aufschlag	Verkaufspreis
480 RM	+ 57,60 RM	= 537,60 RM
100%	+ 12%	= 112%

Man nennt den neuen Wert (537,60 RM) den **vermehrten Wert.** Erkläre den Namen!

Ein Obsthändler erleidet durch Verderben eines Teiles der Ware bei einem Einkauf im Werte von 360 RM einen Verlust von 5%. Wieviel RM beträgt seine Einnahme?

Einkauf	Verlust	Verkauf
360 RM	− 18 RM	= 342 RM
100%	− 5%	= 95%

Der Grundwert (360 RM) ist in diesem Falle vermindert worden; man nennt den neuen Wert (342 RM) den **verminderten Wert.**

Um den Grundwert aus dem vermehrten oder verminderten Wert zu bestimmen, stellt man zunächst fest, welcher Hundertsatz diesem Wert entspricht, und schließt dann über 1% auf 100%.

Beispiele:

1. Bei 8% Verlust beträgt der Verkaufspreis 46 RM.
   Selbstkostenpreis (Grundwert)?
   Verkaufspreis mit Verlust ist ein verminderter Wert

100% − 8% = 92%

%	RM
92%	46 RM
1%	0,50 RM
100%	50 RM

2. Nach Erhöhung um 20 % beträgt das Gehalt 4 500 RM.
Früheres Gehalt?
Erhöhtes Gehalt ist ein vermehrter Wert

100 % +	20 % =	120 %
Prozentsatz	Prozentwert	
120 %	4 500 RM	
1 %	$\frac{450}{12}$ RM = 37,50 RM	
100 %	3 750 RM	

Aufgaben

1. Eine Zahl wird um
a) 7 %, 12 %, 35 %, $56\frac{1}{4}$ %, 105 % vermehrt,
b) um 3 %, 10 %, 24 %, $33\frac{1}{3}$ %, $56\frac{1}{4}$ % vermindert.
Wieviel v.H. bedeutet der neue Wert?

2. Vermehrt man eine Zahl um 14 % 27 % 42 % 65 % 87 %,
so erhält man 912 $571\frac{1}{2}$ 4 586,6 280,5 27,86.

3. Vermindert man eine Zahl um 10 % $16\frac{2}{3}$ % $37\frac{1}{2}$ % 50 % 75 %,
so erhält man 36 75 195 1 $37\frac{1}{4}$.

4. Die Zahl 720 ist
a) um 20 % b) um 80 % größer,
c) um 36 % d) um 55 % kleiner
als die gesuchte Zahl.

Wie der Kaufmann rechnet

5. Der Selbstkostenpreis einer Ware erhöht sich durch Fracht und Verpackung

um	8 v.H.	$6\frac{1}{4}$ v.H.	$7\frac{1}{2}$ v.H.	$11\frac{1}{8}$ v.H.
auf	8,10 RM	5,10 RM	12,90 RM	100 RM.

6. Ein Händler bezahlt eine Rechnung unter Abzug von

a) $8\frac{1}{3}$ %	b) $12\frac{1}{2}$ %	c) $6\frac{2}{3}$ %	d) $7\frac{1}{4}$ % Rabatt[1]
mit 154 RM	227,50 RM	89,60 RM	168,08 RM bar.

Wie hoch war die Rechnung?

1) Rabatt ist ein Preisnachlaß, der beim Einkauf größerer Mengen gewährt wird.

7. Das Nettogewicht[1]) einer Warensendung betrug bei $3\frac{1}{2}$ % Tara 227,74 kg; welches Gewicht war auf dem Frachtbrief vermerkt?

8. Der Verkaufspreis eines Teppichs beträgt bei 16 v. H. Gewinn 455 RM; wieviel RM wurden durch den Verkauf des Teppichs verdient?

9. Der Gemüsehändler verkauft im Herbst 1 dz Kartoffeln mit 25 % Aufschlag für 7,50 RM.

a) Wieviel hat er selbst dafür bezahlt?

b) Wie teuer muß er $2\frac{1}{2}$ kg Kartoffeln im Einzelverkauf abgeben, wenn er wegen erhöhter Kosten und Schwund 40 % aufschlagen muß?

10. Ein Bauer hat für das Frühjahr eine Kartoffellieferung von 37 dz übernommen. Wieviel dz Kartoffeln muß er einmieten, wenn er mit $7\frac{1}{2}$ % Schwund rechnet?

11. Beim Bezug von Konserven entstehen $5\frac{1}{2}$ % Auslagen, das sind 12,65 RM. Berechne den Rechnungspreis!

Verschiedenes

12. Im Wirtshaus zahlt ein Gast einschließlich 10 % Bedienungsgeld 6,24 RM. Wie hoch war das Bedienungsgeld?

13. Von einem Lotteriegewinn gehen 16 % Steuern ab. Wieviel RM betrug der Gewinn, wenn 100,80 RM ausgezahlt wurden?

14. Ein Baumeister braucht 13 500 Ziegelsteine. Wieviel Ziegelsteine muß er anfahren lassen, wenn er damit rechnen muß, daß a) 5 %, b) $8\frac{1}{2}$ %, c) 7 % unbrauchbar sind?

8. Promillerechnung / Versicherungen

Jemand will bei einer Versicherungsanstalt eine Lebensversicherung über 5 000 RM abschließen. Die Versicherungsanstalt verlangt für je 1 000 RM Versicherungssumme eine jährliche Prämie (Entgelt) von 32 RM. Wieviel RM sind als Prämie für die Versicherungssumme von 5000 RM zu zahlen? Als Bezugszahl dient in diesem Fall die Zahl 1 000. Für 32 vom Tausend sagt man auch 32 Promille[2]) und schreibt 32 ‰.

1) Gewicht ohne Verpackung (Tara). (Vgl. auch IV, 17 S. 381)
2) pro mille (lat.) = für (von) Tausend.

Dem Grundwert entsprechen 1 000 ‰;
1 ‰ ist $\frac{1}{1\,000}$ des Grundwertes.

Beispiel: Wieviel RM sind 3 ‰ von 6 000 RM?

1 000 ‰	sind	6 000 RM
1 ‰	„	6 RM
3 ‰	„	18 RM

Aufgaben

1. Berechne 1 ‰ von

a) 6 000 RM, 8 000 „, 12 000 „
b) 700 RM, 600 „, 900 „
c) 350 RM, 680 „, 870 „ !

2. Wieviel RM sind

a) 3 ‰ von 7 200 RM
b) 4 ‰ von 8 900 RM
c) 2 ‰ „ 12 800 „
d) 5 ‰ „ 6 400 „ ?

3. Berechne

a) $3\frac{1}{4}$ ‰ von 120 RM
b) $1\frac{1}{2}$ ‰ von 480 RM
c) $6\frac{1}{2}$ ‰ „ 220 „
d) $8\frac{1}{3}$ ‰ „ 990 „ !

4. Wieviel ‰ sind

a) 7 RM von 3 500 RM
b) 34 RM von 8 000 RM
c) 36 „ 4 500 „
d) 81 „ 13 500 „ ?

5. Von welchem Grundwert sind

a) 6 ‰ = 36 RM
b) 9 ‰ = 45 RM
c) 3 ‰ = 12 „
d) 4 ‰ = 26 „ ?

6. Die Prämie einer Reisegepäckversicherung für 3 Monate beträgt $6\frac{1}{2}$ ‰ der versicherten Summe. Wieviel RM Prämie muß man für einen Koffer von a) 800 RM, b) 1 200 RM, c) 3 000 RM, d) 4 500 RM Wert bezahlen? e) Wie hoch sind die Prämien für 2 Koffer von 300 und 500 RM Wert?

7. a) Jemand läßt seine Möbel im Werte von 15 000 RM gegen Feuer und Einbruch versichern; die Versicherungsanstalt berechnet $\frac{3}{4}$ ‰ für das Jahr.

b) Berechne die jährliche Feuerversicherungsprämie für eine Wohnungseinrichtung im Werte von 8 500 RM, wenn die Prämie $\frac{1}{2}$ ‰ der versicherten Summe beträgt!

c) Wie hoch ist die Feuerversicherungsprämie für eine Fabrikanlage, die mit 250 000 RM zu $2\frac{1}{4}$ ‰ versichert ist?

8. Wie hoch ist die jährliche Prämie für eine Einbruchsversicherung in Höhe von a) 2 000 RM, b) 8 000 RM, c) 11 000 RM, wenn die Prämie $1\frac{1}{2}$ ‰ beträgt?

9. Ein Landwirt versichert sein Wohnhaus mit 24 000 RM, seine Stallungen und Scheunen mit 16 000 RM gegen Feuer. Für das Wohnhaus beträgt die Prämie 2 ‰; für Stallungen und Scheune wird hierauf ein Aufschlag von 50 % erhoben. Berechne die gesamte Versicherungsprämie!

10. Bei einer Erbschaft in Höhe von 16 000 RM muß jemand 2 560 RM Erbschaftsteuer zahlen. Wieviel ‰ sind das?

11. Beim Verkauf eines Hauses im Werte von 28 000 RM erhält der Vermittler eine Gebühr von $1\frac{3}{4}$ ‰.

9. Familie und Haushalt / Aufgaben aus Sachgebieten

Einkommen

1. Das Einkommen eines Geschäftsmannes betrug in 5 aufeinanderfolgenden Jahren 3 650, 4 275, 5 380, 4 970, 6 496 RM. Wieviel v. H. betrug jedesmal die Veränderung gegen das Vorjahr?

2. Einem Angestellten wird sein Jahresgehalt um 6 % ($4\frac{1}{2}$ %, $5\frac{1}{2}$ %, $7\frac{1}{2}$ %) erhöht. Es beträgt dann 3 600 RM.

3. Der Wochenlohn eines Arbeiters wird um 5 (6, 8, 12) % gesteigert; er erhält daher 4,32 RM mehr als in der Vorwoche. Berechne den früheren und den jetzigen Wochenverdienst!

Verteilung der Ausgaben

4. In Bild 2 wird gezeigt, welchen Hundertsatz des Einkommens die Ausgaben für die verschiedenen Lebensbedürfnisse in einer Arbeiterhaushaltung ausmachen. Berechne a) die jährlichen Summen, b) die Monatsbeträge, die für die einzelnen Lebensbedürfnisse aufgewendet werden, wenn das jährliche Einkommen eines Arbeiters 2 688 (2 820, 3 156) RM beträgt!

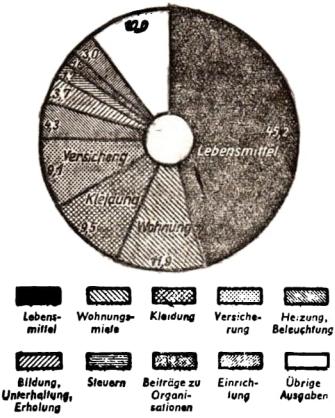


Bild 2

5. Ein Angestellter bezieht ein Jahresgehalt von 4 368 RM. Er gibt monatlich aus: 150 RM für den Lebensunterhalt, 57 RM für Miete, 25 RM für Kleidung, 24 RM für Versicherungen, 18 RM für Bücher, Theater, Konzert und Kino, 10 RM für Heizung und Beleuchtung, 41,90 RM für Steuern, 11 RM an Beiträgen für Vereine und Organisationen, 12 RM für seine Einrichtung und den Rest für Unvorhergesehenes und Ersparnisse.

a) Bestimme, wieviel v. H. seines Einkommens auf die einzelnen Ausgaben entfallen!

b) Veranschauliche das Verhältnis der Ausgaben für die verschiedenen Bedürfnisse 1. durch einen Prozentkreis, 2. durch einen 20 cm langen Prozentstreifen!

6. Die Krankheit eines Familienmitgliedes verursacht folgende Kosten:

1. Der Arzt erhält für Beratungen und Besuche 54 RM.

2. Für besondere ärztliche Verrichtungen (Operation u. a.) bekommt er 172 RM.

6. 3. Arzneien und Heilmittel kosten 73,60 RM.

4. Der Aufenthalt im Krankenhaus dauert 23 Tage und kostet je Tag 7,20 RM.

In den drei Monaten der Krankheit hatte das Familienmitglied ein Einkommen von 960 RM. Wieviel % seines Einkommens hätte er für die Krankheit aufbringen müssen, wenn er nicht in der Sozialversicherung gewesen wäre?

7. Jemand lagert im Herbst für den Winter 7 dz Kartoffeln ein, 1 dz kostet mit Anfuhr 7,60 RM. Er muß mit 8 % Schwund rechnen. Im Einzelkauf hätte die Hausfrau den Winter über für ½ kg Kartoffeln 4,5 Rpf bezahlt.

a) Wie teuer stellt sich ½ kg beim Einkauf im großen? (Beachte den Schwund!)

b) Wieviel kostet die gleiche Menge im Einzelkauf?

c) Wieviel v. H. werden gespart?

In der Küche

8. Rindfleisch verliert beim Kochen etwa 15 %, beim Braten 18 % seines Gewichts; Schweinefleisch verliert beim Kochen etwa 20 %, beim Braten 25 %.

a) Wieviel wiegt ein Stück Rindfleisch von 1,8 kg nach dem Kochen (nach dem Braten)?

b) Ein Stück Schweinefleisch wiegt 1,750 kg; beantworte dieselbe Frage wie unter a)!

c) Wie schwer war ein Stück Rindfleisch, das nach dem Kochen (nach dem Braten) 0,425 kg wog?

d) Wie schwer war ein Stück Schweinefleisch, das nach dem Kochen (nach dem Braten) 0,880 kg wog?

III. Zinsrechnung

10. Berechnung der Jahreszinsen

Jemand will ein Geschäft eröffnen. Da das eigene Geld nicht ausreicht, leiht er sich 5 000 RM. Der Verleiher oder Gläubiger verlangt für das verliehene Kapital eine jährliche Vergütung von 4 %. Man sagt, der Schuldner hat jährlich 4 % Zinsen zu zahlen.

Zinsen sind Vergütung für geliehenes Geld.

Die Zinsrechnung besteht aus einer Prozentrechnung und einer Zeitrechnung; das Bindeglied sind die Jahreszinsen. Der Prozentwert entspricht den Jahreszinsen.

Beispiele:

a) 5 000 RM werden zu 4% ausgeliehen; berechne die Jahreszinsen!

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}}{}^{1)}\ 5\,000 \text{ RM} \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}}\ 50 \text{ RM} \\ 4\,\% &\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\underline{200 \text{ RM}}} \end{aligned}$$

b) 8 000 RM werden zu $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; berechne die Jahreszinsen!

$$\begin{array}{rcr|l} 100\ \% & \mathrel{\widehat{=}} & 8\,000 \text{ RM} & \\ 1\ \% & \mathrel{\widehat{=}} & 80\ \text{„} & \\ \frac{1}{2}\,\% & \mathrel{\widehat{=}} & 40\ \text{„} & + \\ 3\ \% & \mathrel{\widehat{=}} & 240\ \text{„} & \\ \hline 3\frac{1}{2}\,\% & \mathrel{\widehat{=}} & \underline{\underline{280 \text{ RM}}} & \end{array}$$

c) Es sollen die Jahreszinsen z für irgendein Kapital k, das zu p% ausgeliehen ist, berechnet werden.

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}}\ k \text{ RM} \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}}\ \frac{k}{100} \text{ RM} \\ p\,\% &\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\underline{\frac{k \cdot p}{100} \text{ RM}}} \end{aligned}$$

1) Das Zeichen $\mathrel{\widehat{=}}$ bedeutet „entspricht".

Aufgaben

1. Wieviel Zinsen bringen in 1 Jahr:

a) 600, 400, 700, 800, 1 100, 1 400, 2 500, 3 000, 4 200 RM zu 3 %;
b) 300, 500, 800, 1 300, 1 600, 2 300, 3 200, 4 500, 5 000 RM zu 4 %;
c) 250, 360, 580, 670, 840, 970, 1 260, 1 480, 2 450 RM zu 5 %;
d) 65, 26, 72, 85, 77, 94, 19, 12, 9, 6 RM zu 4 %;
e) 200, 500, 600, 900, 1 000, 1 800, 2 400, 3 000 RM zu $2\frac{1}{2}$ %;
f) 600, 900, 1 500, 2 700, 3 000, 3 600, 4 200, 4 500 RM zu $3\frac{1}{3}$ %;
g) 400, 800, 1 000, 1 400, 1 800, 2 400, 2 900, 3 200 RM zu $4\frac{1}{4}$ %?

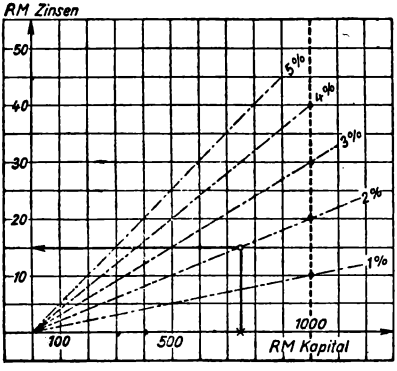


Bild 3

2. Erkläre, wie man nach Bild 3 Zinsaufgaben lösen kann!
Das Beispiel zeigt: 750 RM bringen in 1 Jahr bei einem Zinsfuß von 2 % 15 RM Zinsen.

a) Übertrage die Zeichnung auf mm-Papier und verlängere dabei die Achsen für Kapital und Zinsen so weit, daß man die Lösungen der Aufgaben 1 a bis d an der Zeichnung ablesen kann!

b) Überlege, durch welchen Punkt der dick gestrichelten Linie die „Zinsgerade" für $2\frac{1}{2}$ % gehen muß. Zeichne entsprechend die Geraden für $3\frac{1}{3}$ % und $4\frac{1}{4}$ % und löse die Aufgaben 1 e bis g durch Zeichnung!

11. Berechnung der Monatszinsen / Von der Sparkasse

Ein Angestellter bringt monatlich 20 RM zur Sparkasse. Die Sparkasse gibt jedem Kunden ein Sparkassenbuch, in das die Einzahlungen und Auszahlungen eingetragen werden. Am Schluß eines jeden Jahres werden auch die Zinsen zugeschrieben.

Die Sparkassen verzinsen die Spareinlagen mit $2\frac{1}{2}$%; dabei hat der Sparer die Möglichkeit, Beträge bis zu 1 000 RM in einem Monat ohne vorangegangene Kündigung abzuheben.

Wieviel Zinsen bringen 20 RM zu $2\frac{1}{2}$% in 7 Monaten?

$$\begin{array}{rcl} 100\ \% & \triangleq & 20{,}00\ \text{RM} \\ 1\ \% & \triangleq & 0{,}20\ \text{„} \\ \frac{1}{2}\ \% & \triangleq & 0{,}10\ \text{„} \\ 2\ \% & \triangleq & 0{,}40\ \text{„} \\ \hline 2\frac{1}{2}\ \% & \triangleq & \underline{\underline{0{,}50\ \text{RM}}} \end{array} \Bigg| +$$

0,50 RM sind die Jahreszinsen, d.h. die Zinsen für 12 Monate, also gilt für die „Zeitrechnung“:

Für 12 Monate 0,50 RM

1 Monat $\frac{0{,}50}{12}$ „

7 Monate $\frac{0{,}50 \cdot 7}{12} = 3{,}50\ \text{RM} : 12 = 0{,}291\,6\ldots\ \text{RM}$

$\approx \underline{\underline{0{,}29\ \text{RM}}}$

oder kürzer (ohne Nebenrechnung):

%	RM	Monate
100	20	
$2\frac{1}{2}$	0,50	12
	$\approx$ 0,29	7

Aufgaben

1. Drücke 6 Mon., 2 Mon., 3 Mon., 9 Mon., 4 Mon., 5 Mon., 7 Mon., 8 Mon., 11 Mon., $\frac{1}{2}$ Mon., $2\frac{1}{2}$ Mon., $4\frac{1}{2}$ Mon., $6\frac{1}{2}$ Mon., $8\frac{1}{2}$ Mon. als Bruchteile des Jahres aus!

2. Wieviel Zinsen bringen

a) 300 RM zu 4% in 2 Mon. b) 900 RM zu 2% in 3 Mon.

c) 400 „ „ 5% „ 5 „ d) 500 „ „ 3% „ 4

2. a) 600 RM zu 3 % in 3 Mon. f) 800 RM zu 5 % in 5 Mon.
g) 1 200 „ „ 2 % „ 2 „ h) 2 500 „ „ 4 % „ 6 „
i) 4 300 „ „ 3 % „ 3 „ k) 8 350 „ „ $\frac{1}{2}$ % „ 2 „ ?

3. Wieviel Zinsen bringen
a) 400 RM zu $3\frac{1}{2}$ % in 2 Mon. b) 600 RM zu $3\frac{1}{2}$ % in 5 Mon.
c) 875 „ „ 4 % „ 5 d) 840 „ „ $4\frac{3}{4}$ % „ 3
e) 930 „ „ $4\frac{1}{4}$ % „ 6 „ f) 4 600 „ „ 3 % „ 4
g) 3 560 „ „ $2\frac{1}{2}$ % „ 7 „ h) 8 920 „ „ $3\frac{1}{2}$ % „ 3 „
i) 2 840 „ „ $2\frac{1}{4}$ % „ 2 „ k) 6 300 „ „ $2\frac{4}{5}$ % „ 6 „ ?

4. Berechne die Zinsen, die eine Sparkasse bei $2\frac{1}{2}$ %iger Verzinsung für
a) 600 RM in 1 Mon. b) 400 RM in 3 Mon.
c) 800 „ 2 d) 900 „ „ 2.
e) 1 200 „ „ 10 f) 450 „ „ 6
g) 300 „ „ 7 h) 840 „ „ 2
i) 720 „ 5 k) 610 „ „ 2 zahlt!

5. Wieviel Zinsen bringen
a) 600 RM zu 5 % in 6 Mon. b) 400 RM zu 4 % in 2 Mon.
c) 800 „ „ 3 % „ 3 d) 200 „ „ $3\frac{1}{2}$ % „ 7
e) 2 500 „ „ 2 % „ 9 f) 340 „ „ 5 % „ 5
g) 3 100 „ „ $4\frac{1}{2}$ % „ 2 h) 400 „ „ $2\frac{1}{2}$ % „ 11
i) 675 „ „ 3 % „ 1 k) 960 „ „ $3\frac{1}{3}$ % „ 4 ?

6. Berechne die Zinsen von
a) 4 800 RM zu $5\frac{1}{2}$ % in 6 Mon. b) 9 600 RM zu 4 % in 3 Mon.
c) 1 250 „ „ $3\frac{2}{5}$ % „ 10 d) 360 „ „ 5 % „ 7
e) 96 „ „ $4\frac{1}{2}$ % „ 2 f) 420,75 „ „ 6 % „ 6
g) 6 210 „ „ 5 % „ 9 h) 310,35 „ „ $2\frac{3}{4}$ % „ 2 „
i) 75 „ „ 8 % „ 4 k) 78 350 „ „ $1\frac{4}{5}$ % „ 6 „ !

7. Auf wieviel RM wachsen an:
a) 400 RM zu 6 % in 9 Mon. b) 900 RM zu 5 % in 2 Mon
c) 400 „ „ $3\frac{3}{4}$ % „ 3 „ d) 72 „ „ $3\frac{1}{3}$ % „ 3 „
e) 620 „ „ 5 % „ 4 „ f) 25 „ „ 3 % „ 12
g) 3 200 „ „ $3\frac{1}{5}$ % „ 1 „ h) 8 700 „ „ $2\frac{2}{3}$ % „ 6 „
i) 640 „ „ 4 % „ 90 Tg. k) 520 „ „ 2 % „ 1 „ ?

8. Ein Sparer hat 1 600 RM auf der Sparkasse. Wieviel Zinsen erhält er jährlich mehr, wenn er statt der vorgeschriebenen Kündigung eine Kündigungsfrist von 6 Monaten vereinbart, wodurch sich der Zinsfuß von $2\frac{1}{2}$ % auf 3 % erhöht?

12. Berechnung der Tageszinsen

Jemand zahlt am 1. November 50 RM auf sein Sparkonto bei der Sparkasse ein, die das Geld vom 15. November an zu $2\frac{1}{2}$ % verzinst. Welcher Zinsbetrag wird ihm am Ende des Jahres dafür gutgeschrieben? Es sind die Zinsen für 45 Tage zu berechnen. Man bestimmt zunächst die Jahreszinsen, das ist die Vergütung für 360 Tage, und berechnet daraus die für 45 Tage.

%	RM	Tage
100	50	
$2\frac{1}{2}$	$\boxed{1{,}25}$	360
	0,156	45
	$\approx 0{,}16$	

Wir wollen wieder die Zinsen für irgendein Kapital k berechnen, das zu p % t Tage lang verzinst wird.

100	k	
p	$\frac{k \cdot p}{100}$	360
	$\frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$	t

Aus dieser Aufstellung sieht man, wie die Dreisätze für die Prozentrechnung (ausgezogen) und die Zeitrechnung (gestrichelt) durch die Jahreszinsen miteinander verbunden sind.

Die Zinsen lassen sich ganz allgemein auch nach der „Formel" $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{360 \cdot 100}$ berechnen. Eine Formel ist eine in Buchstaben kurz ausgedrückte Regel.

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{360 \cdot 100}.$$

Das ist eine abgekürzte Schreibweise für

„Zinsen = Kapital mal Prozente mal Tage geteilt durch 360 mal 100".

Aufgaben

1. Drücke als Bruchteile des Jahres aus:

a) 90 Tg., 60 Tg., 120 Tg., 36 Tg., 45 Tg., 72 Tg., 28 Tg., 9 Tg., 24 Tg., 144 Tg., 288 Tg., 12 Tg., 1 Mon. 10 Tg., 2 Mon. 12 Tg.;

b) 1 Tg., 2 Tg., 25 Tg., 81 Tg., 17 Tg., 11 Tg., 149 Tg., 301 Tg., 7 Tg., 69 Tg.!

2. Berechne die Zinsen von

a)	400 RM zu 3 % in 60 Tg.	b)	600 RM zu 5 % in 12 Tg.
c)	1 200 „ „ $3\frac{1}{3}$ % „ 45 „	d)	1 000 „ „ $2\frac{1}{2}$ % „ 120 „
e)	750 „ „ 4 % „ 30 „	f)	1 620 „ „ $4\frac{1}{2}$ % „ 36 „
g)	2 400 „ „ 5 % „ 72 „	h)	550 „ „ 6 % „ 144 „
i)	500 „ „ 8 % „ 9 „	k)	320 „ „ 5 % „ 288 „!

3. Wieviel Tage sind es vom 4. Juni bis 25. Juli? Man rechnet:

$$\begin{array}{l} 25 - 4 = 21 \\ \text{VII} - \text{VI} = \text{I} \end{array}, \text{ also } 1 \text{ Mon.} + 21 \text{ Tg.} = 51 \text{ Tg.}$$

Wieviel Tage sind es vom 22. März bis 14. Juni?

$$\begin{array}{l} 14 - 22 = -8 \\ \text{VI} - \text{III} = \text{III} \end{array}, \text{ also } 3 \text{ Mon.} - 8 \text{ Tg.} = 82 \text{ Tg.}$$

4. Wieviel Tage sind es vom

a)	2. Jan. bis 16. Jan.	b)	5. März bis 26. März
c)	3. „ „ 21. April	d)	19. Febr. „ 30. Mai
e)	1. April „ 22. Juni	f)	18. Nov. „ 31. Dez.
g)	5. Dez. „ 26. Jan. k. J.	h)	3. April „ 15. Juli
i)	3. Mai „ 17. Okt.	k)	11. Nov. „ 2. Febr. k. J.?

Beachte: Zur Vereinfachung der Rechnung wird im Geschäftsverkehr jeder Monat zu 30 Tagen gerechnet!

5. Berechne die Tage vom

a)	15. Jan. bis 7. März	b)	9. Okt. bis 30. Dez.
c)	2. März „ 25. Aug.	d)	12. April „ 15. Juni
e)	25. Juni „ 15. Nov.	f)	19. Febr. „ 26. Nov.
g)	10. Mai „ 28. Sept.	h)	8. März „ 2. Okt.
i)	5. Febr. „ 1. Dez.	k)	20. Dez. „ 16. März k. J.!

6. Wieviel Zinsen bringen

a)	500 RM	zu 3 %	vom	5. Okt.	bis zum	17. Dez.
b)	600 „	„ [illegible] %		12. März „	„	27. April
c)	1 200 „	„ 2 %		4. Jan. „		4. März
d)	1 460 „	„ $2\frac{1}{2}$ %		10. Febr. „	„	22. April
e)	6 000 „	„ 5 %		11. Juni „	„	26. Juni
f)	700 „	„ 4 %		16. Juli	„	26. Aug.
g)	600 „	„ $3\frac{1}{3}$ %		2. Mai	„	20. Mai?

13. Berechnung des Zinsfußes

Jemand hat auf seinem Haus eine Hypothek von 6 000 RM, für die er im Vierteljahr 75 RM Zinsen zahlen muß. Zu welchem Zinsfuß muß er die geliehene Summe verzinsen?

Aufstellung:

%	RM	Jahre
100	6 000	
		1
	75	$\frac{1}{4}$

Zuerst müssen im Dreisatz der Zeitrechnung die Jahreszinsen berechnet werden

%	RM	Jahre
100	6 000	
	300	1
	75	$\frac{1}{4}$

Nun erst kann die Prozentrechnung folgen:

%	RM
100	6 000
5	300

Beispiel: Zu welchem Zinsfuß bringen 5 000 RM in 108 Tg. 52,50 RM Zinsen?

Berechnung der Jahreszinsen:

%	RM	Tage
100	5 000	
	175	360
	52,50	108

Berechnung des Zinsfußes:

%	RM
100	5 000
3,5	175

Der Zinsfuß beträgt 3,5 %

Die Jahreszinsen sind 175 RM

Aufgaben

1. Zu welchem Zinsfuß bringen

a)	300 RM	in	$\frac{1}{4}$ J.	3,00 RM	Z.
b)	500 „	„	$\frac{1}{4}$ J.	3,75 „	Z.
c)	200 „	„	$\frac{1}{5}$ J.	2,00 „	Z.
d)	650 „	„	$\frac{1}{3}$ J.	6,50 „	Z.
e)	410 „	„	$\frac{1}{2}$ J.	6,15 „	Z.
f)	320 „	„	$\frac{1}{4}$ J.	4,00 „	Z.
g)	1 200 „	„	3 Mon.	15,00 „	Z.
h)	2 500 „	„	4 „	25,00 „	Z.
i)	60 „	„	5 „	0,75 „	Z.
k)	600 „	„	$2\frac{1}{2}$ „	5,00 „	Z.?

2. Zu welchem Zinsfuß bringen

a)	320 RM	in	6 Mon.	6,40 RM	Z.
b)	480 „	„	1 „	1,20 „	Z.
c)	960 „	„	4 „	12,00 „	Z.
d)	6 400 „		3 „	50,00 „	Z.
e)	72 000 „		$1\frac{1}{2}$ „	300,00 „	Z.
f)	24 000 „		$5\frac{1}{2}$ „	352,00 „	Z.
g)	80 „		$2\frac{1}{2}$ „	0,50 „	Z.
h)	60 „	„	9 „	1,50 „	Z.
i)	4 800 „	„	72 Tg.	24,00 „	Z.
k)	640 „	„	45 „	3,40 „	Z.?

3. Welchen Teil des Kapitals machen die Jahreszinsen bei 2 %, $2\frac{1}{2}$ %, $3\frac{1}{3}$ %, 4 %, 5 %, $6\frac{1}{4}$ %, $6\frac{2}{3}$ % aus?

4. Berechne den Zinsfuß!

	k	t	z
a)	1 250 RM	2 Mon.	6,25 RM
b)	4 880 „	6	76,25 „
c)	28 888 „	1	3,80 „
d)	3 978 „	1	15,47
e)	960 „	$1\frac{1}{2}$ „	3,30 „
f)	1 320 „	11	48,40 „
g)	360	$\frac{1}{2}$ „	1,20 „
h)	480 „	$1\frac{1}{2}$ „	3,00 „
i)	720 „	$2\frac{1}{2}$ „	3,75 „
k)	900 „	$\frac{1}{2}$ „	1,50 „

5. Zu wieviel % sind

a)	25 RM ausgeliehen,	wenn sie in 144 Tg.		0,30 RM	Z. bringen
b)	60 „	„ „	125 „	0,50 „	Z. „
c)	480 „	„ „	47 „	2,82 „	Z.
d)	16 000 „	„ „	37 „	74,00 „	Z.
e)	24 600 „ „	„ „	60 „	131,20 „	Z. ?

6. Zu wieviel % sind ausgeliehen

a) 960 RM, wenn sie vom 20. 6. bis zum 5. 9. 12,50 RM Zinsen bringen,

b) 3 700 RM, wenn sie vom 14. 9. bis zum 8. 12. 51,80 RM Zinsen bringen,

c) 2 100 RM, wenn sie vom 25. 11. bis zum 5. 5. des folgenden Jahres 63,00 RM Zinsen bringen,

d) 525 RM, wenn sie vom 17. 11. bis zum 9. 3. des folgenden Jahres 6,86 RM Zinsen bringen?

Berechne in folgenden Aufgaben den Zinsfuß!

7. Ein Mietshaus hat einen Wert von 96 000 RM. Die monatlichen Einnahmen an Miete betragen 640 RM.

8. Jemand erhält für 3 500 RM, die er am 2. April verliehen hat, am 14. Juni einschließlich der Zinsen 3 531,50 RM zurück.

9. Ein Schüler erhält für 72 RM, die er zur Sparkasse gebracht hat, in $7\frac{1}{2}$ Monaten 1,35 RM Zinsen.

10. Ein Wucherer verlangt für 1 RM täglich $\frac{1}{2}$ Rpf Zinsen.

14. Berechnung des Kapitals

Wie groß ist ein Kapital, für das die Sparkasse bei $2\frac{1}{2}$%iger Verzinsung in 4 Mon. 7,20 RM Zinsen zahlt?

Aufstellung:

%	RM	Monate
100		
$2\frac{1}{2}$		12
	7,20	4

Es muß wieder mit dem Dreisatz für die Zeitrechnung begonnen werden:

RM	Monate
21,60	12
7,20	4

Dann folgt die Prozentrechnung:

%	RM
100	864
$2\frac{1}{2}$	21,60

Das Kapital beträgt 864 RM.

Aufgaben

1. Welches Kapital bringt zu

a) 4 % in 5 Mon. 80,00 RM Z. b) 3 % in 2 Mon. 42,00 RM Z.
c) 2 % „ 6 „ 9,60 „ Z. d) 4 % „ 4 12,80 „ Z.
e) 5 % „ $2\frac{1}{2}$ „ 37,50 „ Z. f) $3\frac{3}{4}$ % „ 5 7,50 „ Z.
g) $5\frac{1}{2}$ % „ 2 „ 55,00 „ Z. h) $4\frac{3}{4}$ % „ 8 15,20 „ Z.
i) $4\frac{1}{2}$ % „ 3 „ 10,80 „ Z. k) $3\frac{1}{2}$ % „ 3 52,50 „ Z. ?

2. Welches Kapital bringt zu

a)	$4\frac{1}{2}$ % in	5 Mon.	11,25 RM Z.	b)	5 % in	7 Mon.	26,25 RM Z.
c)	$3\frac{1}{3}$ % „	5 „	50,00 „ Z.	d)	4 % „	$8\frac{1}{2}$ „	272,00 „ Z.
e)	5 % „	24 Tg.	779,00 „ Z.	f)	$3\frac{1}{2}$ % „	54 Tg.	248,64 „ Z.?

3. Wie groß ist das Kapital, das bei

a)	$3\frac{1}{5}$ % in	9 Mon.	288,00 RM	b)	$3\frac{3}{5}$ % in	10 Mon.	555,00 RM
c)	4 % „	66 Tg.	8,96	d)	6 % „	72 Tg.	28,80 „
e)	3 % „	1 „	6,00	f)	4 % „	2 „	0,40 „
g)	$3\frac{1}{2}$ % „	48 „	0,42 „	h)	$2\frac{3}{4}$ % „	84 „	0,77

Zinsen bringt?

4. Welches Kapital bringt in der Zeit vom

a)	2. April	bis	2. Okt.	bei	4 %	24,00 RM	Zinsen
b)	4. März	„	16. Mai		3 %	3,60 „	„
c)	16. Aug.	„	22. Sept.	„	5 %	4,50 „	„
d)	4. Okt.	„	22. Okt.	„	$3\frac{1}{2}$ %	7,50 „	„
e)	5. Sept.	„	5.	„	$2\frac{1}{2}$ %	12,50 „	„ ?

5. Ein Geschäftsmann möchte für seinen Lebensabend monatlich 200 RM zur Verfügung haben. Welche Summe muß er ersparen wenn er sein Geld zu 4 % anlegen kann?

6. 600 RM bringen bei 4 %iger Verzinsung im Vierteljahr ebensoviel Zinsen wie ein anderes Kapital bei gleicher Verzinsung in einem Monat. Wie groß ist das Kapital?

7. Ein Geschäftsmann hat 2 400 RM zu 3 %, 1 200 RM zu 5 % und 800 RM zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen. Welches Kapital würde ihm jährlich bei 4 % die gleichen Zinsen bringen?

8. Ein junger Handwerksmeister borgt sich zur Gründung eines eigenen Betriebes ein Kapital und muß dafür bei einer Verzinsung von $4\frac{1}{2}$ % vierteljährlich 157,50 RM Zinsen zahlen. Wie groß ist das geliehene Kapital?

9. Ein Angestellter, der das 65. Lebensjahr überschritten hat, erhält aus der Sozialversicherung eine monatliche Rente von 90 RM. Wieviel RM hätte er auf der Sparkasse sparen müssen, um von dem gesparten Kapital bei einer Verzinsung von 3 % denselben monatlichen Betrag als Zinsen zu erhalten?

15. Berechnung der Zeit

Jemand zahlte für eine Hypothek (s. S. 43) in Höhe von 6 000 RM bei 6%iger Verzinsung 90 RM Zinsen. Für welche Zeit galt diese Zinszahlung?

Aufstellung:

%	RM	Tage
100	6 000	
6		360
	90	

Man kann nicht mit der Zeitrechnung beginnen, da sowohl die Jahreszinsen als auch die Tage unbekannt sind. Erst durch die Prozentrechnung gewinnen wir die Jahreszinsen und damit den Anschluß an die Zeitrechnung:

	%	RM	Tage	
a)	100	6 000		
	6	360	360	b)
		90	90	

Ein Kaufmann lieh eine Summe von 720 RM und vereinbarte 4% Zinsen im Jahr. Er zahlte am 18. August die Summe nebst 6,80 RM Zinsen zurück. Wann lieh er das Geld? Die Zahl der Zinstage ist zu berechnen!

	%	RM	Tage	
a)	100	720		
	4	28,80	360	b)
		6,80	85	

Aufgaben

1. In welcher Zeit bringen

a) 300 RM zu 4 % 2,40 RM Z. b) 400 RM zu 2 % 6,40 RM Z.
c) 400 „ „ 5 % 8,00 „ Z. d) 300 „ „ 5 % 6,00 „ Z.
e) 800 „ „ 2 % 6,40 „ Z. f) 500 „ „ 3½% 3,50 „ Z.
g) 200 „ „ 4½% 4,50 „ Z. h) 800 „ „ 4 % 9,60 „ Z.
i) 60 „ „ 3 % 0,54 „ Z. k) 80 „ „ 3 % 0,80 „ Z.?

2. In welcher Zeit bringen

a) 300 RM zu 4% 6,00 RM Z.
b) 500 „ „ 3% 5,00 „ Z.

2. c)	400 RM	zu	2 %	2,00 RM	Z.
d)	600 „	„	5 %	7,50 „	Z.
e)	500 „	„	8 %	10,00 „	Z.
f)	1 200 „	„	4 %	36,00 „	Z.
g)	220 „	„	3 %	3,30 „	Z.
h)	810 „	„	2 %	4,05 „	Z.
i)	6 100 „	„	4 %	124,00 „	Z.
k)	72 000 „	„	3 %	540,00 „	Z.?

3. An welchem Tage sind 45 600 RM zu 6 % ausgeliehen worden, wenn sie bis zum 15. Sept. a) 798 RM, b) 608 RM, c) 1 710 RM, d) 1 472 RM Zinsen gebracht haben?

4. In welcher Zeit bringen 900 RM zu 3 % ebensoviel Zinsen, wie sie dasselbe Kapital in 7 Mon. zu 4 % ergibt?

5. In welcher Zeit wachsen

a)	900 RM	bei	4 %	auf	918,00 RM	an
b)	600 „	„	$5\frac{1}{3}$ %	„	608,00 „	
c)	160 „	„	5 %	„	162,00 „	
d)	440 „	„	$6\frac{1}{4}$ %	„	445,50 „	„
e)	480 „	„	$3\frac{1}{2}$ %	„	481,40 „	„
f)	15 500 „	„	$2\frac{4}{5}$ %	„	15 717,00 „	„
g)	720 „	„	$3\frac{3}{4}$ %	„	724,50 „	„
h)	99 000 „	„	$4\frac{1}{5}$ %	„	100 380,00 „	„ ?

6. Wie lange muß man 75 RM mindestens auf der Sparkasse lassen, bis sie bei $2\frac{1}{2}$ %iger Verzinsung auf 76,50 RM angewachsen sind? (Beachte die Bemerkung auf S. 47!)

7. An welchem Tage werden 900 RM, die am 12. Februar zu $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen wurden, mit den Zinsen auf a) 903,15 RM, b) 931,50 RM, c) 915,75 RM, d) 910,50 RM angewachsen sein?

8. Jemand hat eine Summe von 480 RM zu $2\frac{1}{2}$ % am 10. Januar ausgeliehen. Er erhält bei der Rückzahlung des Geldes einschließlich der Zinsen 487,20 RM. Wann hat er das Geld zurückbekommen?

9. Jemand leiht 1 200 RM zu 4 % auf $\frac{1}{2}$ Jahr aus; danach erhält er $4\frac{1}{2}$ % Zinsen. In welcher Zeit bringt das Kapital nun die gleichen Zinsen wie bei der früheren Verzinsung?

10. Ein Darlehen von 2 560 RM wurde bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen am 16. Mai mit 2 593,60 RM zurückgezahlt. Wann war es ausgeliehen?

11. Ein Schlossermeister lieh sich zur Anschaffung einer Maschine am 12. Februar 1 920 RM und zahlte nach einer gewissen Zeit das Kapital nebst $4\frac{1}{2}$ % Zinsen in Höhe von 75,60 RM zurück. An welchem Tage erfolgte die Rückzahlung?

16. Endkapital und Anfangskapital

Welches Kapital wächst zu 3 % in 7 Mon. auf 2 442 RM an? Das Endkapital 2 442 RM umfaßt das zu suchende Anfangskapital und die Zinsen; es ist also ein vermehrter Wert.

Bei einer Verzinsung von 3 % vermehrt sich ein Kapital in 1 Jahr um 3 %, in 7 Mon. um $\frac{7 \cdot 3}{12}$ % = $1\frac{3}{4}$ %; 100 % wachsen also bei 3 % in 7 Mon. auf $101\frac{3}{4}$ % an, und das sind 2 442 RM. Demnach gilt der Dreisatz:

Endkapital:	$101\frac{3}{4}$ %	≙ 2 442 RM
Anfangskapital:	100 %	≙ 2 400 RM

Aufgaben

1. Welches Kapital wächst

a)	zu $3\frac{1}{2}$ %	in 9	Mon.	auf 492,60	RM an
b)	„ 3 %	„ $4\frac{1}{2}$	„	606,75	„
c)	„ $4\frac{4}{5}$ %	„ 5	„	357,00	„
d)	„ $2\frac{1}{2}$ %	„ 8	„	91,50	„
e)	„ $3\frac{1}{2}$ %	„ 10		123,50	„
f)	„ $2\frac{3}{4}$ %	„ 11		492,10	„
g)	„ 4 %	„ 1		963,20	„
h)	„ $1\frac{3}{4}$ %	„ 6	„	685,95	„ „ ?

2. Ein am 15. März ausgeliehenes Kapital wurde mit den fälligen Zinsen zu 4 % am 15. November mit 2 060 RM zurückgezahlt. Berechne a) das Kapital, b) die Zinsen!

3. Jemand entlieh am 12. Februar eine Summe Geldes und zahlte sie mit den Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % am 22. Mai mit 3 037,50 RM zurück.
   a) Wie groß war das entliehene Kapital?
   b) Wieviel Zinsen wurden gezahlt?

4. Ein Kaufmann zahlte eine am 21. Januar empfangene Schuldsumme am 11. April mit 956,55 RM zurück; in diesem Betrag waren die Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ % enthalten.

5. Für einen am 2. Februar geliehenen Betrag zahlt ein Geschäftsmann am 14. April einschließlich $2\frac{1}{2}$ % Zinsen 361,80 RM zurück. Wieviel RM hatte er sich geliehen?

6. Eine Bank gibt am 15. April einem Handwerksmeister ein Darlehen und erhält am 27. Juni desselben Jahres das Darlehen einschließlich 5 % Zinsen mit 1 555,40 RM zurück. Wie hoch war das Darlehen?

7. Wie groß war das Kapital, das am 1. Februar ausgeliehen und am 15. September desselben Jahres nebst $3\frac{1}{5}$ % Zinsen mit 1 479 RM zurückgezahlt wurde?

IV. Aufgaben aus Sachgebieten

17. Brutto, Tara, Netto

Unter dem **Rein-** oder **Nettogewicht** einer Sendung versteht man das Gewicht des Inhalts ohne die **Verpackung** oder **Tara**; das Gesamtgewicht bezeichnet man als **Roh-** oder **Bruttogewicht.**

Es gilt also

Brutto	100 %
– Tara	p %
Netto	100 % – p %

Aufgaben

1. Von einer Sendung Ware von 75 kg Bruttogewicht entfallen $6\frac{2}{3}$ % auf die Verpackung (Tara). Berechne diese und das Nettogewicht!

	Bruttogewicht	Auf das Bruttogewicht bezogene Verpackung (Tara)
2. a)	12 kg	3 %
b)	27 kg	$4\frac{1}{2}$ %
c)	30 kg	7 %
d)	35 kg	$2\frac{1}{3}$ %

Berechne in jedem Falle das Gewicht der Verpackung und das Nettogewicht!

3. Eine Kiste mit Obst wiegt 40 kg. Es werden $12\frac{1}{2}$ % auf die Verpackung gerechnet.

4. In 3 Kisten werden insgesamt 108 kg Zucker versandt. Wieviel % des Bruttogewichts wiegen die Kisten, wenn die Fracht für 1 kg 0,08 RM beträgt und insgesamt 9,60 RM ausmacht?

5. a) Welchen Teil des Bruttogewichts bildet die Tara, wenn sie 1. 5 %, 2. $6\frac{1}{4}$ %, 3. $6\frac{2}{3}$ %, 4. $8\frac{1}{3}$ %, 5. $12\frac{1}{2}$ % beträgt?

b) Welchen Teil des Nettogewichts bildet die Tara in den fünf Fällen der Aufg. a)?

6. a) Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 180 kg und die Tara 1. 9 kg, 2. 6 kg, 3. 20 kg, 4. 15 kg, 5. 18 kg, 6. 12 kg. Wieviel % beträgt die Tara?

b) Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 240 kg und das Nettogewicht 1. 234 kg, 2. 232 kg, 3. 228 kg, 4. 224 kg, 5. 220 kg, 6. 216 kg. Wieviel % beträgt die Tara?

7. Wie groß ist das Bruttogewicht einer Sendung, wenn die Tara 4 % und das Nettogewicht

a) 72 kg, b) 120 kg, c) 192 kg, d) 288 kg, e) 384 kg beträgt?

8. a) Ein Ballen Leinwand wiegt 72 kg bei Einrechnung von $1\frac{1}{2}$ kg für Verpackung.

b) Eine Kiste mit Baumwollstoff wiegt 325 kg. Die Kiste ist 15,6 kg schwer.

9. Von 40 Ballen Wolle beträgt das Bruttogewicht 4 480 kg und die Tara $2\frac{1}{2}$ %. Wie groß ist das Gewicht der ganz trocknen Wolle, wenn festgestellt wird, daß die Wolle durchschnittlich $12\frac{1}{2}$ % Feuchtigkeit enthält?

18. Selbstkosten und Gewinn

Ein Kaufmann berechnet den Verkaufspreis, indem er auf die Selbstkosten einen bestimmten Prozentsatz für den Gewinn aufschlägt.

Selbstkosten + Gewinn = Verkaufspreis

Selbstkosten	100 %
+ Gewinn	p %
Verkaufspreis	100 % + p %

Aufgaben

	Selbstkosten	Gewinn		Selbstkosten	Gewinn
1. a)	21,25 RM	8 %	b)	29,50 RM	5 %
c)	31,75 „	4 %	d)	58,00 „	9 %

Wie hoch ist in jedem Falle der Verkaufspreis?

2. Ein Holzhändler verkauft einen Holzvorrat, der ihn einschließlich seiner allgemeinen Geschäftsunkosten auf 22 560 RM zu stehen kam, für 24 320 RM. Wieviel % beträgt sein Gewinn?

3. Beim Verkauf von Herrenstoffen verdient ein Geschäft 11 %, von Damenstoffen 8 %. In einem Monat werden für 6 200 RM Herrenstoffe und für 5 800 RM Damenstoffe verkauft. Wieviel % hat das Geschäft im Durchschnitt verdient?

4. Ein Obsthändler hatte Birnen und Äpfel vorrätig. Da die Gefahr bestand, daß sie bei längerer Lagerung verderben würden, mußten sie mit einem Verlust von 4 % verkauft werden.

a) Wie groß war dieser Verlust beim Birnenverkauf, wenn der Selbstkostenpreis 128,40 RM betrug?

b) Wieviel RM betrug der Selbstkostenpreis für die Äpfel, wenn der Erlös für die Ware 134,40 RM betrug?

19. Preisnachlaß; Verluste

Preisnachlaß

1. Beim Verkauf gebrauchter Bücher gewährt ein Buchhändler einen Preisnachlaß von $33\frac{1}{3}$ %. Wieviel ist für ein gebrauchtes Buch zu zahlen, das ursprünglich 4,80 RM (7,20 RM, 1,20 RM) kostete?

2. Wie teuer war ein Buch vor und nach dem Preisnachlaß, wenn der Nachlaß 1,20 RM (0,63 RM, 2,25 RM) betrug?

Skonto[1])

3. Eine Rechnung über 640 RM mit dem Vermerk „Zahlbar innerhalb von 30 Tagen. Bei Zahlung innerhalb von 8 Tagen $2\frac{1}{2}$ % Skonto" wird vom Kaufmann, der sie erhält, sofort bezahlt. Berechne die Barzahlung!

1) Skonto (ital.) = Abrechnung; im Warenhandel vorgenommener Rechnungsabzug.

4. Ein Papierwarenhändler erhält eine Rechnung über 300 Hefte das Stück zu 0,08 RM, 16 Bücher zu je 3,20 RM, 144 Flaschen Tinte zu je 0,18 RM. **a)** Auf welche Summe lautet die Rechnung? **b)** Wieviel RM hat der Papierwarenhändler bei Gewährung von 2 % Skonto zu zahlen?

5. Auf welche Summe lautet eine Rechnung, die ein Kaufmann bei Gewährung von $1\frac{1}{2}$ % Skonto mit 118,20 RM bar bezahlt?

Einberechnung von Verlusten

6. Kartoffeln verlieren beim Lagern über Winter 8 % ihres Gewichts. Ein Großhändler hat im Herbst 2 400 dz Kartoffeln eingelagert. Wieviel RM nimmt er beim Verkauf im Frühjahr dafür ein, wenn er für 1 dz 8,20 RM erhält?

7. Eine Glashütte soll auf eigene Gefahr 1 200 (1 500, 1 440) Flaschen liefern. Sie rechnet auf Bruch während des Transportes 4 % ($6\frac{1}{4}$ %, $7\frac{1}{2}$ %). Wieviel Stück muß sie abschicken?

8. Zum Decken eines Daches sind 5 500 (4 500) Ziegel erforderlich. Wieviel Ziegel müssen verfrachtet werden, wenn auf dem Transport erfahrungsgemäß $8\frac{1}{3}$ % ($6\frac{1}{4}$ %) durch Bruch unbrauchbar werden?

9. Überstundenlohn. Ein Arbeitgeber zahlt seinen Arbeitern für notwendige Überstunden einen Zuschlag zum Stundenlohn von 25 % des Stundenlohnes. Ein Arbeiter hat außer seinen 48 Wochenstunden jeden Tag 1 Stunde länger gearbeitet. Sein Stundenlohn beträgt 1,40 RM. Berechne den Wochenlohn!

20. Sparen und Sparkasse

1. Eine Schülerin hatte auf der Sparkasse 64 RM. Nach einem Jahr kann sie aus ihrer Heimsparkasse 48 RM dazutun; nach $\frac{1}{2}$ Jahr bringt sie wiederum 36 RM zur Sparkasse. Auf welche Summe sind ihre Ersparnisse nach einem weiteren halben Jahr angewachsen? Die Sparkasse zahlt $2\frac{1}{2}$ % Zinsen.

2. Eine Frau spart am 1. Oktober 6,50 RM, am 1. November 12 RM, am 1. Dezember 7,50 RM, am 1. Januar 5 RM, am 1. Februar 15 RM, am 1. März 20 RM. Welchen Betrag hat sie auf der Sparkasse einschließlich $2\frac{1}{2}$ % Zinsen am 5. Juli zur Verfügung?

3. Stelle den Bestand eines Sparkassenbuches am Jahresschluß mit den $2\frac{1}{2}$%igen Zinsen fest!

Einzahlungen		Abhebungen	
12. Jan.	720 RM	15. Febr.	110 RM
23. Febr.	180 „	4. Mai	250 „
24. April	270 „	6. Juni	140 „
1. Juli	300 „	1. Okt.	50 „
14. Nov.	172 „	4. Dez.	200 „

(Beachte die Bemerkung auf S. 47!)

4. Als die Sparkasse ihren Zinsfuß von 3 auf $2\frac{1}{2}$% herabsetzte, rechnete sich jemand aus, daß er im nächsten Jahr 39 RM Zinsen weniger erhalten würde. Wie hoch war sein Sparguthaben?

5. a) Die Einlagen bei den im Bereich der sowjetischen Besatzungszone (ohne Berlin) betriebenen neuen Sparkassen beliefen sich am 30. April auf 2 938 Mill. RM gegen 2 568 Mill. im Vormonat. Wieviel Prozent machte die Steigerung aus, bezogen auf die Einlagen des Vormonats?

b) Von den in a) genannten Einlagen entfielen 1 623 Mill. RM auf Spareinlagen und 1 315 Mill. RM auf Giroguthaben, die dem bargeldlosen Verkehr dienen. Wieviel Prozent der Gesamteinlagen machte jeder dieser Posten aus?

c) Die Spareinlagen erhöhten sich gegenüber dem Vormonat um 338 Mill. RM. Wieviel % machte das aus?

Die Spartätigkeit in Berlin

6. a) Bis zum 3. Mai 1946 belief sich der Spareinlagenbestand auf 160,4 Mill. RM gegen 158,7 Mill. RM Ende März. Wieviel % betrug die Steigerung?

b) Die Übersicht von Ende März ergab, daß von den 120 636 Sparern 40 % auf Angestellte und 28 % auf Arbeiter, zusammen also 68 % auf Festbesoldete entfielen, nur knapp 14 % auf Gewerbetreibende und 18 % auf freie Berufe und Sonstige. Berechne die Anzahl der Sparer in den einzelnen Gruppen!

7. Im Land Sachsen-Anhalt beliefen sich die Spar- und Giroeinlagen der 85 Sparkassen Ende April 1946 auf 935 Mill. RM und lagen damit um 55 % über der Endzahl des Vormonats. Wie hoch waren die Einlagen des Vormonats?

21. Die Sparkasse vergibt Hypotheken

Wie ermöglichen die Sparkassen die Zinsgewährung? Sie sammeln die eingezahlten Gelder und führen sie zum größten Teil den Gemeinden und den Stellen der Wirtschaft zu, die zur Erfüllung wichtiger Aufgaben das Geld nötig haben. Der Privatwirtschaft stellt die Sparkasse das Geld insbesondere für Wohnungsbauten zur Verfügung.

Das bei der Sparkasse eingezahlte Geld ist „mündelsicher" angelegt; die Stadt oder der Kreis, die die Sparkasse gegründet haben, haften mit ihrem gesamten Vermögen für die Spareinlagen. Von dem Zinsertrag der den Gemeinden und der Privatwirtschaft überlassenen Gelder zahlt die Sparkasse ihren Sparern Zinsen. Da sie höhere Zinsen fordert, als sie den Sparern bewilligt, erzielt sie einen Zinsüberschuß. Von diesem Zinsüberschuß deckt sie zunächst ihre Verwaltungskosten, der Rest wird zum Wohle der Stadt oder des Kreises verwandt. Wer spart, hat durch die Zinsgewährung nicht nur selbst einen Vorteil, sondern er erfüllt darüber hinaus eine volkswirtschaftliche Aufgabe, indem er dadurch sein Geld zum Wohle der Gesamtheit zur Verfügung stellt.

Stellt die Sparkasse zum Bau eines Hauses Geld zur Verfügung, so tut sie dies nur, wenn ihr hierfür eine Sicherheit geboten wird. Dies geschieht meist durch Verpfändung des Hauses. Es wird eine **Hypothek** eingetragen.[1])

Aufgaben

1. Jemand will ein Haus im Wert von 32 000 RM kaufen. Da er selbst nur 21 000 RM besitzt, läßt er die restliche Summe als Hypothek auf das Haus eintragen. Die jährlichen Hypothekenzinsen zu $4\frac{1}{2}$ % zahlt er vierteljährlich.

2. Auf einem Haus im Wert von 74 000 RM ist eine Hypothek in Höhe von 16 000 RM zu 5 %, eine weitere Hypothek in Höhe von 12 000 RM zu $5\frac{1}{2}$ % und eine dritte Hypothek in Höhe von 8 000 RM zu 6 % eingetragen. Wieviel Zinsen sind für die Hypotheken in jedem Vierteljahr zu zahlen?

3. Beim Kauf eines Hauses im Wert von 21 000 RM werden $\frac{2}{3}$ der Summe sofort bar bezahlt, der Rest wird als Hypothek eingetragen. Wie hoch sind die halbjährlichen Hypothekenzinsen bei 5 %?

1) Hypothek (gr.) = Unterpfand; durch eine Hypothek wird eine auf einem Grundstück oder Haus lastende Schuld durch eine gerichtliche Eintragung in das Grundbuch gesichert.

4. Ein junges Ehepaar will sich ein Eigenheim im Wert von 12 000 RM errichten. Es besitzt selbst 4 000 RM; der Rest wird als Hypothek geliehen. Welche Unkosten entstehen monatlich durch die Hypothekenzinsen bei 5 %iger Verzinsung?

22. Hypotheken und Darlehen

Hypotheken

1. Jemand hat auf seinem Haus eine Hypothek von 15 000 RM, die er mit $5\frac{1}{2}$ % verzinsen muß. Er löst diese Hypothek ab durch eine Hypothek in Höhe von 11 000 RM zu 5 % und eine zweite Hypothek in Höhe von 4 000 RM zu $5\frac{3}{4}$ %. Wieviel RM Zinsen spart er bei dieser Regelung im halben Jahr?

2. Ein Geschäftsmann hat Gelegenheit, sein Vermögen von 65 000 RM als Grundstückshypothek zu $4\frac{1}{2}$ % anzulegen. Es bietet sich ihm auch die Möglichkeit, 30 000 RM als Hypothek zu 4 % und 35 000 RM als Hypothek zu 5 % zu vergeben. Bei welcher Anlage erhält er die höhere Verzinsung?

Darlehen

3. Ein Geschäftsmann hat im Laufe des Jahres folgende Darlehen von der Bank in Anspruch genommen:

600 RM	vom 12. I.	bis 16. III.		3 400 RM	vom 15. II.	bis 18. III.	
1 890 „	„ 27. VI.	„ 3. IX.		5 600 „	„ 14. X.	„ 3. XII.	

Wieviel Zinsen hat er insgesamt zu zahlen, wenn die Bank $4\frac{1}{2}$ % berechnete?

V. Aus der Zinsrechnung des Kaufmanns

23. Berechnung der Tageszinsen durch Zinszahlen

Banken und Sparkassen berechnen die Tageszinsen vielfach durch Anwendung von Zinszahlen und Zinsteilern.

In der Zinsformel $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ (s. S. 28) ordnen wir die Glieder neu und schreiben $z = \frac{k \cdot t}{100} \cdot \frac{p}{360}$. Statt $\frac{p}{360}$ führen wir den Kehrwert $\frac{360}{p}$ ein, müssen also die Multiplikation durch die Division ersetzen; damit erhalten wir

$$z = \frac{k \cdot t}{100} : \frac{360}{p}.$$

Das Produkt $\frac{k}{100} \cdot t$ nennt man **Zinszahl** oder **Zinsnummer**; $\frac{360}{p}$ bezeichnet man als **Zinsteiler** oder **Zinsdivisor**.

$$\textbf{Formel für Tageszinsen} = \frac{\textbf{Zinszahl}}{\textbf{Zinsteiler}} \qquad \textbf{Zinszahl} = \frac{k}{100} \cdot t \qquad \textbf{Zinsteiler} = \frac{360}{p}$$

Beispiel: Berechne 4% Zinsen von 4 881,70 RM für 43 Tage!

$$\frac{k}{100} \cdot t = 48{,}82 \cdot 43 = 2\,099; \quad \frac{360}{p} = 90; \quad z = \frac{2\,099}{90}\,\text{RM} = \underline{\underline{23{,}32\ \text{RM}}}.$$

Beachte: Rpf-Beträge bleiben bei Anwendung der Formel unberücksichtigt. Die Zinszahl wird auf Ganze abgerundet ($2\,099{,}26 \approx 2\,099$).

Aufgaben

1. a) Stelle eine Tafel der Zinsteiler für folgende Prozentsätze auf: 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 8%, 9%, 10%, 12%, 15%, 18%, 20%, 24%!

b) Ergänze deine Tafel durch folgende Angaben:

%	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{2}$
Zinsteiler	240	160	144	108	96	80	54	48

2) Wieviel Zinsen bringen

a)	980 RM	zu	6%	in	45 Tg.	**b)**	1 260 RM	zu	4 %	in	36 Tg.
c)	3 600 „	„	3%	„	72 „	**d)**	4 820 „	„	$2\frac{1}{2}$%	„	21 „
e)	9 820 „	„	2%	„	49 „	**f)**	6 050 „	„	$2\frac{1}{2}$%	„	58 „
g)	16 235 „	„	5%	„	32 „	**h)**	87 530 „	„	$3\frac{1}{3}$%	„	123 „
i)	90 „	„	4%	„	15 „	**k)**	75 „	„	$1\frac{1}{2}$%	„	98 „ ?

24. Anwendung der Zinszahlen

Die Anwendung von Zinszahl und Zinsteiler ist besonders vorteilhaft, wenn es sich darum handelt, für mehrere Kapitale (Kapitalien), die zum gleichen Zinsfuß zu verzinsen sind, die Gesamtzinsen zu berechnen.

Beispiel: Jemand hat folgende Darlehen erhalten, die er am 15. Nov. einschließlich 5% Zinsen zurückzahlen soll: 3 480 RM am 2. Juni, 1 840 RM

am 8. August, 6 940 RM am 15. Sept. und 6 512 RM am 10. Okt. Wie groß ist die Rückzahlung?

Kapital	Verzinsung vom	Tage	Zinszahl
3 480,00 RM	2. 6. bis 15.11.	163	5 672
1 840,00 „	8. 8. „ 15.11.	97	1 785
6 940,00 „	13. 9. „ 15.11.	62	4 303
6 512,00 „	10.10. „ 15.11.	35	2 279
18 772,00 RM Kapital			14 039 : 72
+ 194,99 „ Zinsen			= 194,99 RM
18 966,99 RM Endkapital	Zinsteiler $= \frac{360}{5} = 72$		

Beachte: Gesamtzinsen $= \frac{\text{Summe der Zinszahlen}}{\text{Zinsteiler}}$.

Aufgaben

1. Die Sächsische Landeskreditbank gewährt einem Geschäftsmann gegen Hinterlegung von Wertpapieren einen Kredit[1]) bis zu 10 000 RM. Der Geschäftsmann leiht bei der Bank folgende Beträge: am 1. Febr. 2 000 RM; am 6. März 1 480 RM; am 15. März 3 850 RM; am 26. April 1 930 RM. Welche Summe hat er insgesamt einschließlich $4\frac{1}{2}$ % Zinsen am 1. Okt. zurückzuzahlen?

2. Wie groß ist das Bankguthaben eines Fleischermeisters am 30. 8. bei folgenden Einzahlungen: 1 200 RM am 5. 2.; 840 RM am 4. 3.; 600 RM am 28. 3.; 1 023 RM am 2. 5.; 948 RM am 4. 7. (Verzinsung $1\frac{1}{2}$ %)?

3. Ein Landwirt entlieh von seiner Kreditgenossenschaft am 26. Juli 2 400 RM, am 15. August 1 800 RM, am 28. August 1 550 RM und am 7. September 2 100 RM. Er zahlte die ganze Summe mit den Zinsen zu 4 % am 10. November zurück. Auf wieviel RM war seine Schuld angewachsen?

4. Ein Geschäftsmann erhielt von einer Genossenschaftsbank am 1. Februar ein Darlehen in Höhe von 18 000 RM. Er zahlte davon 4 000 RM am 1. April, 5 000 RM am 15. Mai und den Rest am 25. August zurück. Wieviel RM Zinsen hatte er insgesamt zu zahlen, wenn die Kasse eine $4\frac{1}{2}$ %ige Verzinsung fordert?

1) D. h. bis zu diesem Betrag kann der Kaufmann bei der Bank Geld entleihen.

5. a) Jemand zahlt bei der Sparkasse folgende Beträge ein: am 21. 5. 600 RM, am 17. 6. 930 RM, am 26. 8. 180 RM, am 4. 9. 2 100 RM, am 15. 11. 900 RM. Welches Guthaben hat er einschließlich $2\frac{1}{2}$ % Zinsen am 31. 12.?

Anleitung: Schlage dem Zahlungstage jeweils 14 Zinstage zu und berechne die Tage von dem dann sich ergebenden Zeitpunkt ab; z. B.: Einzahlung 21. 5.; dazu 14 Zinstage = 5. 6.; vom 5. 6. bis 31. 12. sind 205 Tage (s. S. 28).

b) Um wieviel RM wäre sein Guthaben kleiner gewesen, wenn er seine Einlagen bei der Postsparkasse gemacht hätte, die nur $2\frac{1}{4}$ % vergütet (Zinsteiler!)?

6. Ein Sparkassenbuch zeigt folgende Eintragungen:

Einzahlungen		Auszahlungen	
am 5. 2.	600 RM	am 3. 3.	150 RM
„ 9. 4.	140 „	„ 24. 5.	200 „
„ 8. 7.	820 „	„ 15. 9.	350 „
„ 13. 11.	750 „	„ 12. 12.	425 „

Wie hoch ist das Guthaben am 31. 12., wenn $2\frac{1}{2}$ % Zinsen vergütet werden?

Anleitung: a) Berechne die Summe der Zinszahlen aus den Einzahlungen! (Siehe Anleitung zu Aufgabe 5!)

b) Ermittle die Summe der Zinszahlen aus den Auszahlungen! Dabei muß man die Tage vom Tage vor der Rückzahlung ab berechnen, weil für Guthaben am Tage der Abhebung keine Zinsen mehr gezahlt werden; z. B. Auszahlung 31. 12.: Verzinsung vom 2. 3. bis 30. 12., also für 297 Tage.

c) Stelle den Unterschied zwischen den beiden Zinszahlsummen fest, berechne die Zinsen daraus und ermittle schließlich das Guthaben!

B. Einführung in das Rechnen mit allgemeinen und relativen Zahlen

VI. Grundrechenarten mit allgemeinen Zahlen

25. Einführung der allgemeinen Zahlen

Wir haben eine Reihe von Aufgaben gelöst, in denen die Jahreszinsen berechnet werden sollten. Der Lösungsweg dieser Aufgaben ließ sich sehr einfach darstellen, indem für die vorkommenden Größen: Zinsen, Kapital und Prozent Buchstaben z, k, p verwendet wurden. Dann ergab sich

$$z = \frac{k \cdot p}{100}.$$

Auch für die Lösung von Aufgaben zur Berechnung der Tageszinsen zeigte die Verwendung von Buchstaben den einzuschlagenden Lösungsweg. Wenn die Tage durch t bezeichnet werden, heißt er:

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}.$$

In einer Gärtnerei werden Äpfel zum Versand verpackt. Sie hat Kisten von 10 kg Eigengewicht, die 80 kg Äpfel fassen, und Kisten von 6 kg Eigengewicht, die 65 kg Äpfel fassen, zur Verfügung.

Bestimme jedesmal aus dem Nettogewicht und der Tara das Bruttogewicht der Kisten! Gib eine kurze Merkregel an, wie man das Bruttogewicht findet! Abgekürzt kann man der Regel die Form geben:

$$N + T = B.$$

Hier stehen wieder die Buchstaben N, T und B statt der Zahlen unserer Aufgabe.

Bilde Beispiele, in denen du die Tara berechnest!

Bilde auch hierfür eine Merkregel mit den Buchstaben N, T und B! Erkläre den Ausdruck

$$B - T = N!$$

Wende diese Regel auf selbsterdachte Beispiele an!

Man kann die Merkregeln für die Berechnung des Flächeninhaltes von Quadrat und Rechteck abkürzen, indem man zur Bezeichnung der Maßzahlen der Länge der Seiten a bzw. b und für die der Fläche F schreibt. Wie findet man den Umfang des Rechtecks? Bilde auch dafür einen Buchstabenausdruck! $U = \ldots\ldots$

Man benutzt oft **Buchstabenausdrücke**, wenn man für viele **gleichartige** Aufgaben den Lösungsweg angeben will. Die **Buchstaben** stehen an Stelle von **bestimmten** Zahlen und dienen zur Bezeichnung der **unbestimmten** oder **allgemeinen** Zahlen.

Anmerkung: Bei den Buchstabenausdrücken werden meistens die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets verwendet.

Aufgaben

1. Wieviel RM kosten

6 m,	wenn 1 m	1,50 RM kostet;	17 m,	wenn 1 m	0,65 RM kostet		
13 „	1 „	2,10 „	; 17 „	1 „	a „		
25 „	1 „	0,90 „	; b „	1 „	a „	?	

2. Wieviel RM kostet

1 kg,	wenn 27 kg	135,00 RM	kosten	
1 „	13 „	78,00 „	„	
1 „	9 „	12,60 „	„	
1 „	17 „	8,84 „	„	
1 „	17 „	a „	„	
1 „	b „	a „	„	?

3. Wieviel RM kosten

8 hl,	wenn 15 hl	63,00 RM	kosten
14 „	9 „	42,50	
21 „	12 „	50,00	
29 „	17 „	6,97	
29 „	17 „	a	
29 „	b „	a	
c „	b „	a	?

4. Eine Ware kostet den Händler selbst **a)** 8 RM, **b)** 18,50 RM, **c)** s RM. Er will daran verdienen **a)** 2 RM, **b)** 4,50 RM, **c)** g RM. Berechne den Verkaufspreis V!

5. Ein Geschäft für Wirtschaftsartikel muß einen angeschlagenen Kochtopf, dessen Selbstkostenpreis **a)** 5 RM, **b)** 8 RM, **c)** p RM beträgt, mit Verlust von **a)** 2 RM, **b)** 3 RM, **c)** d RM verkaufen. Gib an, wie man den Verkaufspreis (V) findet!

6. Eine Stahlfeder kostet 2, 3, e Rpf. Wieviel Rpf zahlt man für 5, 7, m Stück?

7. Für 0,5 kg neue Kartoffeln zahlt man a) 13 Rpf, b) e Rpf. 5 kg, im ganzen gekauft, erhält man a) 5 Rpf, b) d Rpf billiger. Wieviel Rpf müssen für 5 kg bezahlt werden?

8. Welche Zahl ist

a) um 1 größer als 99, 107, 1 000, a, h, l, p?

b) um 1 kleiner als 58, 100, b, n, s, t?

c) um 2, 4, 7, 8, 9 größer als x?

d) um 1, 2, 3, 5, 10 kleiner als y?

9. a) Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt k; $k + 9$; $k - 17$?

b) Zähle von $p - 6$ bis $p + 5$; $g - 3$ bis $g + 8$; $a - 4$ bis $a + 7$!

c) Zähle von r bis $r - 8$; $t + 3$ bis $t - 9$; $z + 1$ bis $z - 3$!

10. a) Welche Zahl ist größer: $g + 5$ oder $g + 7$; $g - 2$ oder $g - 5$; $g - 8$ oder $g - 11$?

b) Wie groß ist der Unterschied zwischen: $b + 3$ und b; $c + 4$ und $c + 9$; $a + 8$ und $a - 1$; $m - 5$ und $m + 5$; $p - 1$ und $p - 9$; $r - 3$ und $r - 17$?

11. Nenne die auf a (b; $g + 4$; $h - 2$) folgenden 3 (5, 9) Zahlen, die sich um je 3 (4, 5) unterscheiden!

12. Wie kann man kürzer ausdrücken: $3 + 3 + 3 + 3$; $7 + 7 + 7$; $a + a$; $b + b + b + b + b$?

13. Welche Zahl ist a) doppelt so groß wie r, b) 10 mal so groß wie z, c) n-mal so groß wie s?

14. Welche Zahl ist a) 5 mal so groß wie x, b) 6 mal so groß wie n c) a-mal so groß wie 5, d) k-mal so groß wie w, e) x-mal so groß wie y?

15. Wie groß ist a) der 7. Teil von 3, b) der 3. Teil von a, c) der r-te Teil von 10, d) der y-te Teil von x?

26. Auswerten von Buchstabenausdrücken

Fritz stellt seinem jüngeren Bruder und dessen Freunden folgende Aufgabe: „Jeder denke sich eine Zahl, verdopple sie, zähle 3 hinzu, ziehe von der Summe die gedachte Zahl ab, zähle 5 hinzu, ziehe die gedachte Zahl noch einmal ab. Wenn ihr richtig gerechnet habt, muß jetzt jeder 8 herausbekommen." Prüfe das mit verschiedenen Zahlen nach! Er selbst hat folgendermaßen gerechnet: $z \cdot 2 = 2z$; $2z + 3$; $2z + 3 - z = z + 3$; $z + 3 + 5 = z + 8$; $z + 8 - z = 8$. Auf diese Weise hat er gleichsam alle Aufgaben auf einmal gerechnet. Welche Zahl setzte er statt der verschiedenen von seinen Freunden gedachten Zahlen ein?

Der Wert eines Buchstabenausdrucks hängt im allgemeinen davon ab, welche bestimmte Zahlen an die Stelle der Buchstaben gesetzt werden.

Aufgaben

1. Welchen Wert haben die Ausdrücke $2n$ und $2n + 1$, wenn man für n die ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... einsetzt? Welche Zahlenreihen erhält man? Für welche Zahlen ist $2n$ die allgemeine Zahl? Für welche Zahlen ist $2n + 1$ die allgemeine Zahl?

2. Setze in folgenden Buchstabenausdrücken für $l = 24$, für $m = 20$, für $n = 16$, für $p = 12$ und für $r = 10$ ein und berechne jedesmal den Wert

a)	b)	c)	d)	e)
$l + m$	$l - m$	$l + m + n$	$l \cdot m$	$l : p$
$l + n$	$l - m$	$l + p + r$	$l \cdot p$	$l : r$
$l + p$	$l - p$	$m + p + r$	$m \cdot r$	$m : n$
$l + r$	$l - r$	$n + l + r$	$m \cdot p$	$m : p$
$m + n$	$m - n$	$l - p - r$	$n \cdot r$	$n : l$
$m + p$	$m - p$	$l + r - m$	$n \cdot p$	$n : p$
$m + r$	$m - r$	$m + n - p$	$r \cdot l$	$r : l$
$n + r$	$n - r$	$n - r + p$	$r \cdot p$	$p : l$!

3. Berechne den Wert folgender Buchstabenausdrücke:
   a) $12x$, $16x$, $3x$, $7x$, wenn $x = 7\frac{1}{2}$ ist,
   b) $\frac{y}{4}$, $\frac{y}{6}$, $\frac{y}{9}$, $\frac{5y}{18}$, $\frac{11y}{12}$, wenn $y = 36$ ist,
   c) $3x + 4y$, wenn $x = 5$, $y = 10$ ist,
   d) $5a + 3b - 4c$, wenn $a = 15$, $b = 10$, $c = 5$ ist,
   e) $16r - 10s$, wenn $r = 2\frac{1}{4}$, $s = 2{,}5$ ist,
   f) $2{,}5m - 1{,}25n + 7{,}5$, wenn $m = 18$, $n = 36$ ist!

4. Setze in dem Ausdruck $y = x + 3$ für x der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bis 10 und rechne jedesmal den Wert y dazu aus! Stelle die zusammengehörigen Werte in einer Wertetafel nach folgendem Muster zusammen:

x	1	2	3	4	.....	10
y	4	5	.	.	.....	.

5. Berechne ebenso Wertetafeln für die Ausdrücke:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = \frac{x}{2} + 4$ c) $y = 35 - 3x$!

6. Entwirf Wertetafeln für die folgenden Ausdrücke:

a) $a + 7$ für $a = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bis 10
b) $a - 12$ „ $a = 22, 21, 20,$
c) $10e$ „ $e = 1, 2, 3,$ „ 10
d) $2x + 5$ „ $x = 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2},$ „ 5
e) $3c - 4$ „ $c = 2, 3, 4,$ „ 10
f) $18 - 2d$ „ $d = 1, 2, 3,$ „ 9
g) $\frac{f}{4}$ $f = 1, 2, 3,$ „ 10
h) $\frac{5}{y}$ „ $y = 1, 2, 3,$ „ 10!

7. Eine Familie hat k Kinder, von denen jedes im Laufe des Jahres m RM spart. Der Vater legt jedem Kinde noch d RM hinzu. Berechne die Summe s, die sie zusammen haben! Wieviel Geld ist es, wenn die Familie **a)** 2, **b)** 3, **c)** 5 Kinder hat, von denen jedes **a)** 6 RM, **b)** 7,50 RM, **c)** 12 RM spart und der Vater **a)** 5 RM, **b)** 7 RM, **c)** 8 RM zuzahlt?

8. Ein Junge spart monatlich im Durchschnitt r RM. Wieviel RM sind das **a)** in 1 Jahr, **b)** in t Jahren? **c)** Wie lange muß er sparen, bis er k RM hat? **d)** Setze in den Buchstabenausdrücken $r = 4$, $t = 2\frac{1}{2}$ und $k = 110$ und berechne die Sparsumme und die Sparzeit!

9. Stelle fest, um wieviel Jahre deine Mutter älter ist als du! Bezeichne dein Alter mit x, das der Mutter mit y und gib den Unterschied als Buchstabenausdruck an! Nun stelle eine Wertetafel her, indem du für dein Alter 1, 2, 3, ... bis 20 einsetzt. Wie alt war danach deine Mutter, als du 1, 6, 10 Jahre alt warst? Wie alt wird sie sein, wenn du 20 Jahre alt bist?

27. Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlen

Gib Zahlenbeispiele für das Vertauschungsgesetz der Addition! Man kann diese Zahlenbeispiele durch allgemeine Zahlen zusammenfassen: $a + b = b + a$.

Mit diesem Buchstabenausdruck haben wir dem Gesetz eine kurze und allgemein gültige Form gegeben. Bild 4 zeigt, wie die Aufgaben $a + b$ und $a - b$ am Zahlenstrahl gelöst werden.

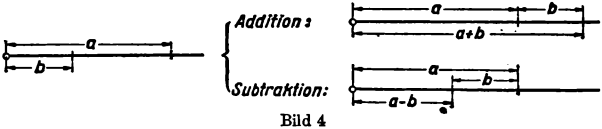


Bild 4

1. Die Additionsaufgabe
Summand + Summand = Summe[1])
2. Die Subtraktionsaufgabe
Minuend — Subtrahend = Differenz[2])
3. Das Vertauschungsgesetz der Addition:

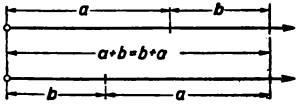


Bild 5

Der Wert einer Summe ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden: $a + b = b + a$ (Bild 5).

Anmerkung: 1. Zusammenfassen gleichartiger Größen:

$$a + a = 2a; \quad 4x + 6x = 10x; \quad 20y - 6y = 14y.$$

2. Die Reihenfolge des Addierens und Subtrahierens:

Enthält eine Aufgabe mehr als zwei Posten, von denen ein Teil addiert, der andere subtrahiert werden soll, so kommt es auf die Reihenfolge des Addierens und Subtrahierens nicht an:

$$a + b - c = a - c + b.$$

Beispiel: $15b + 9a - 7b - 4a = 15b - 7b + 9a - 4a = 8b + 5a$

3. Addieren und Subtrahieren von Summen und Differenzen:

a) $127 + 32 = 127 + (30 + 2) = 127 + 30 + 2 \qquad a + (b + c) = a + b + c$
b) $127 + 38 = 127 + (40 - 2) = 127 + 40 - 2 \qquad a + (b - c) = a + b - c$
c) $127 - 32 = 127 - (30 + 2) = 127 - 30 - 2 \qquad a - (b + c) = a - b - c$
d) $127 - 38 = 127 - (40 - 2) = 127 - 40 + 2 \qquad a - (b - c) = a - b + c$

1) Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Aufgabe wird als Summe bezeichnet, und zwar als unausgerechnete Summe.
2) Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Aufgabe wird als Differenz bezeichnet, und zwar als unausgerechnete Differenz.

Aufgaben

1. Löse folgende Aufgaben am Zahlenstrahl:

$3+5$, $9+7$, $8+6$, $4+9$, $12-9$, $13-6$, $14-8$, $11-7$!

2. Löse folgende Aufgaben auf vorteilhafte Weise:

a) $45+32+35$ b) $53+78+22+47$ c) $134+97+56+63$
d) $68-26-32$ e) $96-29-46+24$ f) $117-33-17-47$
g) $264-49-164-51$ h) $478-82-43-178-68$!

Was erkennt man beim Lösen der letzten beiden Aufgaben in bezug auf mehrere Subtrahenden?

3. a) $9x+3x$ b) $15t+17t$ c) $7a+5a+3a$
d) $8v+17v+12v+23v$ e) $19b+7b-9b$
f) $18r-9r+12r$ g) $28s-3s-8s-12s$
h) $18y+8a-8a$ i) $15m+12p-12p$

Welchen allgemeinen Satz kann man auf die letzten Aufgaben anwenden?

4. a) $12a+7b+3a$ b) $29x+17x+5y$ c) $45d+38c+17c$
d) $63x+17y-25x$ e) $16a-9a+13b$ f) $28+3a-19$
g) $55r+16s-13r+9s$ h) $42b-19b+15c-6c$
i) $17+23a-14+31b-18b-15a+c$
k) $34x+11z-16x+12y+13z-4y-5x$

5. a) $9\frac{3}{4}-7\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}$ b) $6\frac{5}{8}+2\frac{1}{2}-3\frac{5}{8}$ c) $9\frac{1}{6}-14\frac{2}{3}+5\frac{5}{6}$
d) $7{,}8+9{,}7-5{,}8$ e) $12{,}75+2{,}25-6{,}47$
f) $16{,}8+7{,}02-3{,}45$

6. a) $4\frac{1}{2}x+3\frac{2}{3}y+3\frac{1}{4}x$ b) $7\frac{4}{5}a+3\frac{1}{4}b+2\frac{2}{5}a$
c) $1\frac{2}{3}m+5\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}m+\frac{3}{4}n$ d) $8\frac{4}{5}d+7\frac{1}{4}e-5\frac{1}{2}d-2\frac{1}{2}e$
e) $0{,}8a+7{,}4b+0{,}02a$ f) $8{,}62c+9{,}11d-7{,}18c$
g) $3\frac{1}{2}x+9{,}2y-2{,}7x+1\frac{1}{4}y$ h) $9{,}8a+5\frac{1}{2}a+92\frac{1}{5}b-7{,}9b$

7. a) $283+(117+89)$ b) $546+(454-286)$
c) $975-(375+126)$ d) $34{,}8-(16{,}8-7{,}9)$
e) $18\frac{3}{4}+(12\frac{3}{4}-4\frac{3}{4})$ f) $53\frac{5}{9}-(18\frac{3}{8}-5\frac{4}{9})$

8. Rechne möglichst bequem mit Hilfe von Klammern:

a) $345 + 98$ b) $478 + 395$ c) $78 + 49\frac{3}{4}$ d) $77{,}4 + 39{,}9$
e) $286 - 97$ f) $743 - 294$ g) $1402 - 805$ h) $1250 - 446$

9. Führe das Addieren und Subtrahieren in möglichst vorteilhafter Reihenfolge aus!

a) $15r + 6{,}7s - 2\frac{1}{2}r + 4\frac{2}{3} + 1{,}3s - 3 - 4{,}5r$
b) $a + 15{,}3b - 0{,}7a - 14b \quad 6\frac{2}{5}c + 2{,}7a - c$
c) $16x + 7{,}9y - 22{,}4x - 3\frac{1}{2}y + 7{,}4x - y + 2\frac{3}{4}$
d) $2u + v - 3{,}8u + 4\frac{1}{4}w + 5{,}8u + 1{,}7v - 3{,}95w$
e) $8{,}4t - 9t + 5\frac{1}{4}p + 2\frac{1}{2}t - p + 8{,}5q + 3{,}7p - 7{,}9q$

10. Einen Zahlenstrahl im großen stellt jede gerade Landstraße mit ihren Kilometersteinen dar. Jemand schreitet auf einer solchen Straße a) von Kilometerstein 4,8 1. um 3,2 km vorwärts, 2. um 2,8 km zurück; b) von Kilometerstein a 1. um b km vorwärts, 2. um c km zurück. Bei welchem Kilometerstein kommt er jedesmal an?

11. Setze in dem Buchstabenausdruck $10x + y$ a) $x = 1$ und für y die Ziffern 0, 1, 2, ... bis 9, b) $x = 2$ und für y die Zahlen 0, 1, 2, ... bis 9! Welche Zahlen erhält man?

12. Setze in den Buchstabenausdruck $100a + 10b + c$

a) $a = 1$, für b nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9, für c nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9;

b) $a = 2$, für b nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9, für c nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9!

Welche Zahlenreihen erhält man?

13. a) In der Summe $a + b$ wächst a um 1, 2, 3, ... bis 10, b bleibt unverändert;

b) a bleibt unverändert, und b nimmt um 1, 2, ... bis 10 ab;

c) beide Summanden nehmen um 1, 2, ... bis 10 zu.

d) a wächst um 1, 2, ... bis 10, und b nimmt um 1, 2, ... bis 10 ab.

Wie ändert sich jedesmal die Summe?

14. a) In der Differenz $a - b = 36{,}4$ bleibt der Subtrahend unverändert, der Minuend aber nimmt um 1, 2, ... bis 10 zu;
b) der Minuend bleibt unverändert, der Subtrahend nimmt um 1, 2, 3, ... bis zu 10 zu;
c) der Minuend nimmt um 1, 2, ... bis 10 zu, der Subtrahend dagegen um ebensoviel ab.
Wie verändert sich jedesmal die Differenz?

28. Multiplikation allgemeiner Zahlen

Wiederhole das Vertauschungsgesetz der Multiplikation und untersuche, ob es auch für mehr als zwei Faktoren Gültigkeit hat!

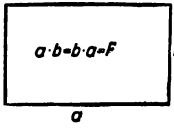
1. Die Multiplikationsaufgabe

Multiplikator • Multiplikand = Produkt[1])
Faktor • Faktor = Produkt

Ein Produkt aus gleichen Faktoren heißt Potenz: $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$.

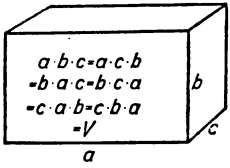
2. Das Vertauschungsgesetz

Der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren:



$a \cdot b = b \cdot a$ (Bild 6)

Bild 6



$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$ usf. (Bild 7)

Bild 7

3. Man multipliziert ein Produkt, indem man nur einen Faktor multipliziert.

Beispiel: $3a \cdot 4b = 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$.

Bemerkung: Vor allgemeinen Zahlen kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden.

1) Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Aufgabe heißt Produkt, und zwar unausgerechnetes Produkt.

Aufgaben

1. Schreibe kürzer:

a) $3+3+3+3+3$ b) $a+a+a+a$
c) $4\cdot 2+4\cdot 2+4\cdot 2$ d) $6b+6b+6b$
e) $xy+xy+xy+xy$ f) $(p+q)+(p+q)$!

2. Berechne:

a) $3\cdot 5a$ b) $6\cdot 4b$ c) $4{,}5\cdot 8x$ d) $15x\cdot 6$ e) $28y\cdot 4$!

3. a) $6x\cdot 5y$ b) $12m\cdot 7n$ c) $18a\cdot \frac{1}{2}b$ d) $1{,}5r\cdot 20s$
e) $3\frac{1}{2}p\cdot 6q$ f) $1\frac{1}{2}u\cdot 2\frac{1}{2}v$ g) $10{,}6m\cdot \frac{1}{2}s$ h) $10u\cdot 15v$
i) $0{,}125y\cdot 8z$ k) $4\frac{7}{10}t\cdot 2{,}5u$ l) $2a\cdot 3b\cdot 4c$ m) $6{,}5x\cdot 4y\cdot 10$
n) $26m\cdot \frac{1}{2}n\cdot 0{,}1p$ o) $100x\cdot \frac{1}{10}y\cdot 0{,}1z$

4. a) $6ik\cdot 3lm$ b) $2ab\cdot 3xy$ c) $4{,}5uv\cdot 6wx$
d) $2xy\cdot 3z\cdot 4u$ e) $14m\cdot \frac{1}{2}uv\cdot 3p$

5. Rechne vorteilhaft:

a) $25r\cdot 72t$ b) $15rs\cdot 12tv$ c) $2\frac{1}{2}x\cdot 7y\cdot 4z\cdot \frac{5}{7}u$
d) $4\frac{1}{6}c\cdot \frac{2}{3}e\cdot 6f\cdot 3g$ e) $2\frac{1}{2}rs\cdot 3\frac{1}{10}y\cdot 4a$ f) $6\frac{2}{3}mn\cdot 21b\cdot \frac{1}{2}c$!

6. Schreibe kürzer:

a) $5\cdot 5\cdot 5$ b) $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$
c) $a\cdot a\cdot a\cdot a$ d) $(ab)\cdot (ab)\cdot (ab)$
e) $(a+b)\cdot (a+b)$ f) $(x+y)\cdot (x+y)\cdot (x+y)$
g) $(p-q)\cdot (p-q)\cdot (p-q)\cdot (p-q)$!

7. Wie heißt die Potenz, wenn **a)** 8 sechsmal, **b)** 10 a-mal, **c)** p r-mal als Faktor steht?

8. a) $4x\cdot 3x\cdot x$ b) $5a\cdot 2a\cdot 6a$ c) $6a\cdot 7b\cdot \frac{1}{2}a$
d) $2x\cdot 0{,}5y\cdot 3y$ e) $3ab\cdot ab\cdot 4ab$ f) $3xy\cdot 2xy\cdot 0{,}5xy$

29. Multiplizieren von Summen und Differenzen

In einer Großstadt gibt ein Familienvater für seine täglichen Fahrten zur Arbeitsstätte und für sonstige Fahrten im Durchschnitt 20 RM im Monat aus, sein Sohn 12 RM und die Hausfrau 5 RM. Wieviel RM Fahrgeld muß im Laufe von 3 Monaten ausgegeben werden

a) für jedes Familienmitglied? b) für die ganze Familie?

$$3(20\text{ RM} + 12\text{ RM} + 5\text{ RM}) = 3 \cdot 20\text{ RM} + 3 \cdot 12\text{ RM} + 3 \cdot 5\text{ RM}.$$

Die Verpflegung einer Familie kostet wöchentlich s RM, wovon u RM auf die Verpflegung der Kinder entfallen. Während der Sommerferien fahren die Kinder 4 Wochen lang zu Verwandten aufs Land. Wieviel RM muß die Familie in dieser Zeit für ihre Verpflegung ausgeben? Der Verpflegungssatz für eine Ferienwoche ist s RM $-$ u RM, für 4 Ferienwochen also $4(s\text{ RM} - u\text{ RM})$. Man kann die Kosten aber auch berechnen, indem man von den normalen Verpflegungskosten für 4 Wochen, die $4s$ RM betragen, die Verpflegungskosten der Kinder für 4 Wochen, also $4u$ RM abzieht. Man erhält daher

$$4(s\text{ RM} - u\text{ RM}) = 4s\text{ RM} - 4u\text{ RM}.$$

Folgende Rechnungen sind uns schon geläufig:

$$12 \cdot 13 = 12(10 + 3) = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 3$$
$$8 \cdot 19 = 8(20 - 1) = 8 \cdot 20 - 8 \cdot 1.$$

Bilde selbst weitere Beispiele! Gib die Regel durch einen Buchstabenausdruck wieder!

Man multipliziert eine Summe oder Differenz, indem man jedes Glied einzeln multipliziert und die Teilergebnisse addiert oder subtrahiert.

$a(b + c) = ab + ac$ (Bild 8) $\quad a(b - c) = ab - ac$ (Bild 9)

Veranschaulichung: Bild 8 und 9.

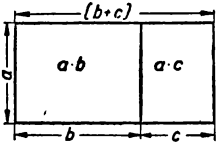


Bild 8

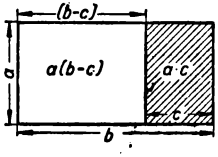


Bild 9

Aufgaben

Berechne auf zweierlei Weise:

1. a) $3(5+2)$ b) $\frac{3}{4}(20-4)$ c) $4(5+6+7)$
$9(20+5)$ $15(0{,}6-\frac{1}{5})$ $17(10-4+3)$
$24(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})$ $\frac{1}{4}(1{,}2+20)$ $24(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4})$

2. a) $5(a+b)$ b) $15(r+t-q)$ c) $12(3\frac{1}{2}a+4\frac{1}{4}b)$
$3(x-y)$ $2(a+2b+c)$ $8(5\frac{1}{3}e+2\frac{2}{3}f)$
$12(b+c)$ $5(3a-b)$ $15(6{,}4r-4\frac{5}{6}s)$
$20(m-n)$ $10(2x-3y)$ $9(1{,}2r+\frac{1}{3}s-0{,}1t)$

3. a) $3(x+5)$ b) $a(b+c)$ c) $11(4a-5y+10)$
$25(y+3)$ $x(y-z)$ $m(n+p-q)$
$7(2x-4)$ $m(4o-9p)$ $r(s-t+u-v)$

4. a) $2b(c+d)$ b) $x(2y-z)$ c) $2{,}5v(6m+14x-10z)$
$4d(e-f)$ $u(3v-5w)$ $4\frac{1}{2}a(7m-9n+o)$
$5x(a+b)$ $2a(4b-3c)$ $6{,}4o(3p-0{,}8q-\frac{1}{2}r)$

5. a) $3a(a+b)$ b) $ab(a-b^3)$ c) $4c(2c+9d)$ d) $a^2(a^3+b^2)$
$m^2(m+n)$ $o^3(o^3+q)$ $7g(f^3-5g^2)$ $5x(5x^2-10y^3)$!

6. Berechne

a) $5+3\cdot 9$ b) $6\cdot 5-3$ c) $2a\cdot 4+3b$ d) $7x-5y\cdot 3$
$(5+3)\cdot 9$ $6\cdot(5-3)$ $2a\cdot(4+3b)$ $(7x-5y)\cdot 3$!

Zahlenrätsel

7. Wenn man die Summe von 12 und 18 mit einer gewissen Zahl multipliziert, so erhält man 90. Wie heißt die Zahl?

8. Wenn man 15 zu einer gewissen Zahl addiert und die Summe mit 5 multipliziert, so erhält man 120!

9. Wenn man von einer Zahl 12 subtrahiert und den Rest dann mit 4 multipliziert, so erhält man 32.

30. Division allgemeiner Zahlen, Summen, Differenzen und Produkte

Löse folgende Teilungsaufgaben: 42 : 6; 56 : 8; 120 : 15! Mache die Probe und stelle fest, ob du richtig gerechnet hast!

In 84 : 3 = 28 heißt die zu teilende Zahl 84 **Dividend**, der Teiler 3 **Divisor** und das Ergebnis 28 **Quotient**.

In welche beiden Teile zerlegt man 96 beim Dividieren durch 8? Stelle die Teile von 96 als eingeklammerte Summe dar und führe die Division aus!

Betrachte den Dividenden als Differenz und teile 392 : 4; 693 : 7; 925 : 25!

Bestimme, ohne das Produkt zu berechnen (6 · 7) : 3; (20 · 19) : 5; (15 · 28) : 7; (18 · 45) : 9; $(a \cdot b) : c$!

Wieviel ist 0 : 3; 0 : 5; 0 : $2\frac{1}{2}$; 0 : 3,5?

Ist es möglich, einen Betrag unter 0 Personen zu teilen?

Merke: Man kann durch Null nicht dividieren.

1. Die Divisionsaufgabe:

Dividend : Divisor = Quotient[1])

2. Dividieren ist die Umkehrung des Multiplizierens.

3. Man dividiert eine Summe oder Differenz, indem man die einzelnen Glieder dividiert und danach addiert oder subtrahiert.

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$
$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

4. Man dividiert ein Produkt, indem man nur einen Faktor dividiert.

$$(ab) : c = (a : c)\, b = a \cdot (b : c).$$

Aufgaben

1. a) $6a : 6$ b) $9x : 9$ c) $16b : 4$ d) $15y : 5$
e) $20ab : 4$ f) $100yz : 25$ g) $z : z$ h) $2m : m$

2. a) $3or : 6r$ b) $ab : b$ c) $ab : a$ d) $ab : ab$
e) $32mn : 8m$ f) $36pq : 9pq$ g) $72stu : 18st$ h) $14uv : 7w$

1) Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Aufgabe heißt Quotient, und zwar unausgerechneter Quotient.

3. a) $\frac{3x \cdot 4}{6}$ b) $\frac{15a \cdot 3b}{9}$ c) $\frac{6xy \cdot 9z}{x}$ d) $\frac{36uv \cdot 3p}{9u}$

e) $\frac{16{,}5xy \cdot 2zv}{11xv}$ f) $\frac{48mn \cdot 1{,}5o \cdot 7p}{72mop}$

4. Untersuche, ob die verschieden gesetzten Klammern das Ergebnis ändern!

a) $15u \cdot 6v : 3$ b) $(15u \cdot 6v) : 3$ c) $15u \cdot (6v : 3)$

d) $144abc : 12b \cdot 3x$ e) $(144abc : 12b) \cdot 3x$ f) $144abc : (12b \cdot 3x)$

5. Untersuche, ob die veränderte Reihenfolge der Rechenvorgänge einen Einfluß auf das Ergebnis hat!

a) $(84xz : 7z) \cdot 3y$ $(84xz \cdot 3y) : 7z$

b) $(78ab \cdot 6c) : 13b$ $(78ab : 13b) \cdot 6c$

c) $(87st : 5{,}8t) \cdot 2{,}5v$ $(87st \cdot 2{,}5v) : 5{,}8t$

Sprich die gewonnene Erkenntnis in einem Merksatz aus!

6. a) $(21 + 35) : 7$ b) $(65 - 39) : 13$ c) $(7{,}5 + 10 - 2{,}5) : 2{,}5$

d) $(a + b) : 10$ e) $(m - n) : 5$ f) $(x + 14) : 7$

g) $(y + 50) : 50$ h) $(a - b) : a$ i) $(m + 1) : m$

7. a) $(3a + 15) : 3$ b) $(6x + 18y) : 6$ c) $(4a + 1) : 4$

d) $(25 - 60x) : 5$ e) $(px + qx) : x$ f) $(ay - by) : y$

g) $(12mn - 16pn) : 4n$ h) $(6{,}5xs + 20ps - 1{,}5qs) : 5s$

i) $(125abx - 75aby - 100abz) : 25ab$

8. Gleichungen. Vereinfache soweit wie möglich, dann rechne im Kopf!

a) $(56 + 4x) : 4 = 20$ b) $(32x - 96) : 16 = 1$

c) $21 + (9x - 24) : 3 = 25$ d) $(42x - 48) : 6 - 7 = 90$

e) $\frac{63 + 14x}{7} + \frac{18 - 6x}{6} = 15$ f) $\frac{15x + 25}{5} - 2x = (18 + 76) : 2 - 24$

9. Wenn man eine Zahl durch 16 dividiert, erhält man 4. Wie heißt die Zahl? Stelle zuerst die Gleichung auf!

VII. Gleichungen

31. Einfache Gleichungen

Mutter hat beim Einkochen von Kirschen von einem Zuckerhut ein Stück Zucker abgeschlagen; wiege es auf der Waage (Bild 10)!

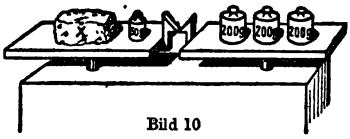


Bild 10

$x + 50 = 600$
(linke Waagschale) (rechte Waagschale)

Bei Gleichgewicht sind die Gewichtsmengen auf beiden Tafeln der Waage gleich groß. Bezeichne, wie Bild 10 zeigt, das Gewicht des Zuckers mit x und drücke das Gleichgewicht durch eine Gleichung aus, indem du beide Gewichtsmengen durch ein Gleichheitszeichen verbindest!

Nimm von der Tafel mit dem Zucker das kleine Gewichtsstück weg! Was beobachtest du? Wodurch stellst du Gleichgewicht her? Bestimme das Gewicht des Zuckers!

Lege noch ein Stück Zucker auf die linke Tafel und bringe die Waage wieder ins Gleichgewicht!

Ausdrücke der Form $x + 50 = 600$; $x - 70 = 30$ nennt man **Gleichungen**, genauer **Bestimmungsgleichungen**, x ist die **Unbekannte** in der Gleichung; das Bestimmen des Wertes von x ist das **Lösen** der Gleichung.

Die Ausgleichsregel: In einer Gleichung darf man auf beiden Seiten gleiche Beträge addieren und subtrahieren.

Beispiele:

a) $x + 7 = 15$
$x + 7 - 7 = 15 - 7$
$x = 8$

b) $x - 4 = 17$
$x - 4 + 4 = 17 + 4$
$x = 21$

Probe:

$8 + 7 = 15$
$15 = 15$

$21 - 4 = 17$
$17 = 17$

Aufgaben

1. Ergänze zu richtigen Gleichungen:

a) $6 + 8 = 7 \ldots$ b) $25 - 6 = 8 \ldots$ c) $63 - 57 = 4 \ldots$
d) $9 \ldots = 8 + 12$ e) $6a = 8a \ldots$ f) $3x \ldots = 9x - 5x$
g) $a + 2b = a + b \ldots$ h) $c \ldots = b + c$ i) $3x + 2 = 2x + x \ldots$!

2. Weise die Richtigkeit der vervollständigten Gleichungen (Aufg. 1e bis i) durch Einsetzen von natürlichen Zahlen für die allgemeinen Zahlen nach! Woran erkennst du, daß du richtig ergänzt hast?

3. Sprich die Gleichung $x + 3 = 10$ in Worten (als Zahlenrätsel) aus! Wie findest du den Wert für x? (Bedenke: Wenn 3 nicht zugezählt worden wäre!)

4. Bestimme auf gleiche Weise den Wert von x:

a) $x + 20 = 50$	b) $x - 4 = 16$	c) $42 + x = 65$
d) $50 - x = 18$	e) $x + 3\frac{1}{3} = 10$	f) $100 - x = 66\frac{2}{3}$
g) $60{,}5 - x = 0$	h) $2x + 3 = 15$	i) $x + 1 = a$
k) $x - 5 = b$	l) $x + a = 100$	m) $x - c = 50$
n) $x + m = n$	o) $x - p = q$	p) $x - a = b - c$!

Gib auch diese Gleichungen in Worten wieder!

5. Löse die folgenden Gleichungen unter Anwendung der Ausgleichsregel:

a) $x + 14 = 32$	b) $x + 62 = 118$	c) $x + 7{,}2 = 22$
d) $x - 9 = 14$	e) $x - 37 = 29$	f) $x - 6{,}9 = 5{,}4$
g) $x + 18\frac{1}{2} = 24$	h) $5 + x = 39$	i) $13\frac{1}{2} + x = 42$
k) $x - 4\frac{2}{3} = 7\frac{1}{6}$	l) $x - 16{,}8 = 7{,}6$	m) $9{,}3 + x = 18{,}2$
n) $x + 9\frac{1}{2} = 12 + 3\frac{1}{2}$	o) $x - 6{,}9 = 15 - 8{,}1$	
p) $x + 3a = 7a$	q) $x - 5b = 4{,}7b$	
r) $x - 3\frac{1}{2}c = c$	s) $2bx = 3a$	
t) $x + 7a = b$	u) $x - 4a = 9b$	
v) $x + 4a = 11a + 2b$	w) $7b + x = 3a + 11b$	
x) $a + x = 10a - 7b$	y) $x - 4\frac{1}{2}a = a + 1\frac{3}{4}b$	
z) $x - 7{,}8b = 2{,}3b - 5a$!		

6. a) $15 + x = 16\frac{1}{3}$
b) $x - 5\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
c) $12 + x - 4\frac{1}{4} = 8$
d) $x - 7\frac{1}{2} = 2{,}9$
e) $5a + x = 3b$
f) $x - 4{,}2c = 3a + 4b$
g) $x + 4{,}8a = 9a - 2b$
h) $x - 2\frac{1}{4}a = 5{,}7a + 3b$

32. Lösung angewandter Aufgaben mit Hilfe von Gleichungen

Ein Junge schenkt seinem Freunde von seinem Nußvorrat 6 Nüsse und besitzt nun noch 27. Wieviel Nüsse hatte er?

Die unbekannte Menge des Nußvorrates bezeichnet man mit x und gibt auf die Frage der Aufgabe die

1. vorläufige Antwort: Der Junge hat x Nüsse.

2. Dann bildet man aus den Angaben der Aufgabe eine Gleichung, indem man schließt: Der Junge verschenkt von x Nüssen 6; er behält also $x - 6$ Nüsse; das sind aber 27 Nüsse. Die Gleichung lautet:

$$x - 6 = 27$$

3. Lösung der Gleichung:

$$x - 6 = 27$$
$$x - 6 + 6 = 27 + 6$$
$$x = 33$$

4. Endgültige Antwort: Der Junge hatte 33 Nüsse

5. Probe:

$$33 - 6 = 27$$
$$27 = 27$$

Aufgaben

Zahlenrätsel

1. Ich denke mir eine Zahl, addiere 12 und erhalte 25. Wie heißt die Zahl?
2. Von einer gedachten Zahl subtrahiere ich 26. Es bleibt 24 übrig.
3. Wenn man eine bestimmte Zahl zu 64 addiert, so erhält man 100.
4. Subtrahiert man eine gewisse Zahl von 1000, so erhält man 625.
5. Welche Zahl muß man zu 12 addieren, um 51 zu erhalten?
6. Zu welcher Zahl muß man 28 addieren, um 83 zu erhalten?
7. Von welcher Zahl muß man 54 subtrahieren, um 37 zu erhalten?
8. a) Die Summe zweier Zahlen, von denen die eine 46 beträgt, ist 74 (87, 95, 113). Wie groß ist die andere Zahl?

   b) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 18; die kleinere Zahl heißt 15 (26, 32, 15,7, $21\frac{3}{4}$). Suche die größere Zahl!

Aus der Schule

9. Wenn in einer Klasse 6 Jungen nicht versetzt werden können, wird sie nur noch 32 Jungen zählen. Wie stark ist die Klasse?

10. Im vergangenen Jahr waren zu Beginn des Schuljahres 29 Jungen in einer Klasse. Im Laufe des Jahres kamen einige Jungen hinzu, so daß es zuletzt 38 waren.

11. In der Nachbarklasse kamen im Laufe des Jahres 4 Jungen hinzu, so daß es zuletzt 38 waren.

12. Auf dem Schulhof spielt eine Anzahl Jungen. Aus einer anderen Klasse kommen 29 hinzu; 16 Jungen laufen weg, später aber kommen 2 wieder zurück, so daß jetzt 60 Jungen auf dem Hofe sind. Wieviel waren anfangs da?

Taschengeld

13. **a)** Ein Junge hatte auf dem Jahrmarkt 60 Rpf von seinem Taschengeld ausgegeben und besaß nun noch 50 Rpf. Mit wieviel Geld ging er auf den Jahrmarkt?

b) Ein anderer Junge geht mit 90 Rpf auf den Jahrmarkt; unterwegs trifft ihn seine Großmutter und schenkt ihm 30 Rpf. Wieviel Geld hat er ausgegeben, wenn er 50 Rpf wieder mit nach Hause bringt?

c) Fritz sagt zu Otto: „Gib mir 20 Rpf von deinem Geld, dann habe ich gerade 1 RM!" Otto erwidert: „Gib du mir 30 Rpf, dann habe ich 1 RM!" Wieviel Rpf hatte jeder? (Beachte: Die Geldangaben müssen gleiche Benennungen haben!)

33. Schriftliche Lösung von Gleichungen

Die Gleichung $7x + 4 = 8 + 5x$ wird in folgender Weise gelöst:

I.	$7x + 4 = 8 + 5x$	-4
II.	$7x = 4 + 5x$	$-5x$
III.	$2x = 4$	$:2$
IV.	$x = 2.$	

In Gleichung I und II kommen auf jeder Seite unbekannte und bekannte Größen vor, in Gleichung III dagegen stehen die unbekannten Größen auf der linken Seite, die bekannten auf der rechten Seite. Gleichung I und II sind ungeordnete, Gleichung III und IV sind geordnete Gleichungen.

Ein Vergleich von Gleichung I und III zeigt, daß der Summand $+4$ der linken Seite in Gleichung I als -4 auf der rechten Seite in Gleichung III, der Summand $+5x$ der rechten Seite in Gleichung I als $-5x$ auf der linken Seite in Gleichung III erscheint.

Merke für weiteres Rechnen mit Gleichungen folgende praktische Regel: **Beim Ordnen einer Gleichung werden Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite gebracht.**

Aufgaben

1. a) $3x + 4 = 2x + 7$ b) $5x - 11 = 3x + 13$
   c) $15 - 3x = 37 - 4x$ d) $9 + 5x - 6 - 3x = 11$
   e) $16 + 8x = 25 + 5x$ f) $6x - 16 = 20 - 3x$
2. a) $8x + 20 - 4x = 98 - 9x$ b) $15x - 29 - 7x = 17 + 4x + 14$
   c) $8x = 9x + 17 + 7x - 10x + 31$
   d) $8 - 7x + 12 + 9x - 35 + 4x = x$
3. a) $2x - a = b + x$ b) $5b - 3x = 3a + b - 4x$
   c) $ax + x - 4b = 2b + ax$ d) $2x - 4m + bx = x - 3m + bx$
   e) $5x - 5a + 3b - x - 7b = 3a + 4b - 7a + 3x$
4. a) Zählt man zu einer Zahl ihr Vierfaches, so erhält man 65. Wie heißt die Zahl?
   b) Das Zweifache und Fünffache einer Zahl geben zusammen 84. Suche die Zahl!
   c) Zieht man vom Siebenfachen einer Zahl 10 ab, erhält man dasselbe, wie wenn man zum Vierfachen der Zahl 17 zulegt. Wie heißt die Zahl?
   d) Welche Zahl gibt, vermehrt um ihr Doppeltes und Dreifaches, 4 weniger als 100?
   e) Zu einer Zahl addiert man ihr Doppeltes, zu der erhaltenen Summe das Doppelte derselben und zu dieser Summe wieder ihr Doppeltes und erhält 8 mehr als 100. Berechne die Zahl!
5. a) Welche Zahl liegt ebensoviel über 4,5 wie sie unter 7,3 liegt?
   b) Welche Zahl liegt in der Mitte zwischen 3,9 und 7,3?
6. Bei einem Fischfang werden fünfmal soviel Karpfen gefangen wie Schleien. Man hat ein Fangergebnis von 198 Stück. Berechne die Zahl der gefangenen Karpfen und Schleien!

7. Auf einer Weide weiden achtmal soviel Kühe wie Pferde, insgesamt 36 Stück. Berechne die Zahl der Pferde und Kühe!

8. Jemand war mit 120 RM auf Reisen gegangen. Als er bei seiner Rückkehr gefragt wurde, wieviel RM er zur Reise gebraucht hätte, antwortete er: „Ich habe siebenmal soviel Geld ausgegeben, wie ich wieder mit nach Hause gebracht habe.“ Wieviel RM brachte er heim, und wieviel RM hatte er ausgegeben?

9. a) Ein Rechteck ist 5 cm länger als breit und hat einen Umfang von 46 cm. Berechne Breite und Länge des Rechtecks!

   b) Ein Rechteck, das einen Umfang von 54 cm hat, ist doppelt so lang wie breit. Berechne Breite und Länge des Rechtecks!

10. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 26 cm; ein Schenkel ist um 4 cm länger als die Grundlinie. Berechne Grundlinie und Schenkel!

VIII. Das Rechnen mit relativen Zahlen

34. Einführung der relativen Zahlen

1. Wir alle kennen die Gradeinteilung (Skala) auf dem Brettchen des Thermometers (Bild 11). An einem Dezemberabend zeigt das Thermometer 5° Wärme; in der Nacht fällt es um 9°, wieviel Grad zeigt es also am anderen Morgen an? Für 5° Wärme und 4° Kälte sagt man: Das Thermometer steht auf + 5° bzw. — 4°.

Bild 11

2. Rechne am Zahlenstrahl folgende Aufgaben: 7 — 4; 8 — 7; 4 — 4; 5 — 9! Was kann man zu der letzten Aufgabe sagen?

   Um die Aufgabe 5 — 9 = 5 — 5 — 4 = 0 — 4 am Zahlenstrahl lösen zu können, hat man ähnlich wie bei der Skala des Thermometers den Strahl (Bild 12) über den Nullpunkt hinaus nach links verlängert, auf dieser Verlängerung von Null aus dieselben Teile abgetragen, wie wir sie rechts von der Null haben, und die Teilungspunkte mit den Zahlen unserer Zahlenreihe bezeichnet.

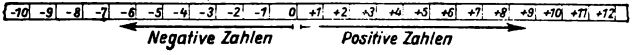


Bild 12

Der Zahlenstrahl ist auf diese Weise zur **Zahlengeraden** erweitert worden. Um nun aber die gleichlautenden Zahlen rechts und links vom Nullpunkt unterscheiden zu können, hat man den Zahlen rechts vom Nullpunkt das Pluszeichen (+) und den Zahlen links vom Nullpunkt das Minuszeichen (—) vorgesetzt und nennt sie relative Zahlen.

Die Zeichen + und — sind als **Vorzeichen** wichtige Bestandteile der relativen Zahlen; sie sagen dir, ob eine Zahl rechts oder links vom Nullpunkt der Zahlengeraden liegt. Du darfst die Vorzeichen nie mit den ebenso aussehenden Rechenzeichen verwechseln.

Erklärungen

1. Zahlen mit dem Vorzeichen „+" heißen **positive**[1]) **Zahlen,** Zahlen mit dem Vorzeichen „—" heißen **negative**[2]) **Zahlen**; sie werden mit dem gemeinsamen Namen **relative**[3]) **Zahlen** bezeichnet, weil man sie auf Null bezieht.
2. Vorzeichenfreie Zahlen heißen **absolute**[4]) **Zahlen.** Läßt man bei einer relativen Zahl das Vorzeichen fort, so erhält man ihren **absoluten Betrag.**

Aufgaben

1. **a)** Das Thermometer fällt von + 3° auf — 12°, **b)** von + 12° auf 0°, **c)** von + 25° auf + 13°, **d)** von — 2° auf — 8°, **e)** von — 13° auf — 21°. Um wieviel Grad ist es in jedem Fall gefallen?

2. Die höchste bisher beobachtete Wärme der arabischen Wüste betrug + 57° C, die größte Kälte des „sibirischen Kältepols" — 68° C. Wie groß ist der Unterschied der beiden Temperaturen?

Vermögen und Schulden

3. Zur Bezeichnung entgegengesetzter Größen wendet man im täglichen Leben oft positive und negative Zahlen an. So bezeichnet man z. B. Vermögen als positive und Schulden als negative Größen. A hat 180 RM Vermögen und B 90 RM Schulden. Berechne den Unterschied!

4. Durch längere Krankheit war jemand gezwungen, sich 70 RM zu borgen. Nach seiner Genesung gelang es ihm, die Schuld durch fleißige Arbeit und eifriges Sparen zurückzuzahlen und noch 45 RM auf die Sparkasse zu tragen. Wieviel RM hat er von seinem Verdienst erübrigt?

---

1) pónere (lat.) = setzen, aufstellen. 2) negáre (lat.) = verneinen.
3) relátio (lat.) = die Beziehung, relativus (lat.) = bezüglich.
4) absolútus (lat.) = unbedingt, losgelöst.

35. Addition und Subtraktion relativer Zahlen

Ein Kaufmann machte in einem Geschäftsjahr über den Geschäftsverlauf einiger Monate folgende Feststellungen:

1. Anfangsbestand: 5000 RM Vermögen; hinzukommen 3000 RM Vermögen;
2. „ : 7000 „ „ ; 4000 „ Schulden;
3. „ : 3000 „ „ ; 5000 „ „ ;
4. „ : 4000 „ Schulden; 3000 „ „ ;
5. „ : 2000 „ ; „ 8000 „ Vermögen;
6. „ : 8000 „ werden vermindert um 5000 RM Schulden;
7. : 3000 „ Vermögen „ 7000 RM Vermögen;
8. : 6000 „ „ 4000 RM Schulden.

Stelle in jedem Fall den Besitzstand am Monatsende fest! Betrachte Vermögen und Schulden als relative Größen und gib jedesmal den Rechenvorgang in mathematischer Schreibweise wieder!

Beispiel zu 1: $(+5\,000) + (+3\,000) = (+8\,000)$.

Achte hierbei darauf, daß Vorzeichen und Rechenzeichen zu unterscheiden sind! Man schließt aus diesem Grund das Vorzeichen mit dem absoluten Zahlenwert in eine Klammer ein.

Bild 13 veranschaulicht das Addieren und Subtrahieren relativer Zahlen an der Zahlengeraden. Es wird folgendes festgesetzt:

I. **Addieren** relativer Zahlen bedeutet ein Vorwärtsschreiten auf der Zahlengeraden.

Beachte das Vorzeichen der zu addierenden Zahl und merke:

a) Addieren einer positiven Zahl bedeutet Vorwärtsschreiten bei positiver Blickrichtung (Blick nach rechts);

b) Addieren einer negativen Zahl bedeutet Vorwärtsschreiten bei negativer Blickrichtung (Blick nach links).

II. **Subtrahieren** relativer Zahlen bedeutet ein Rückwärtsschreiten auf der Zahlengeraden.

Beachte das Vorzeichen der zu subtrahierenden Zahl und merke:

a) Subtrahieren einer positiven Zahl bedeutet Rückwärtsschreiten bei positiver Blickrichtung;

b) Subtrahieren einer negativen Zahl bedeutet Rückwärtsschreiten bei negativer Blickrichtung.

Stecke auf dem Schulhof eine Zahlengerade ab!

Führe jede der folgenden Aufgaben so aus, wie es auf dem entsprechenden Teil von Bild 13 gezeigt wird!

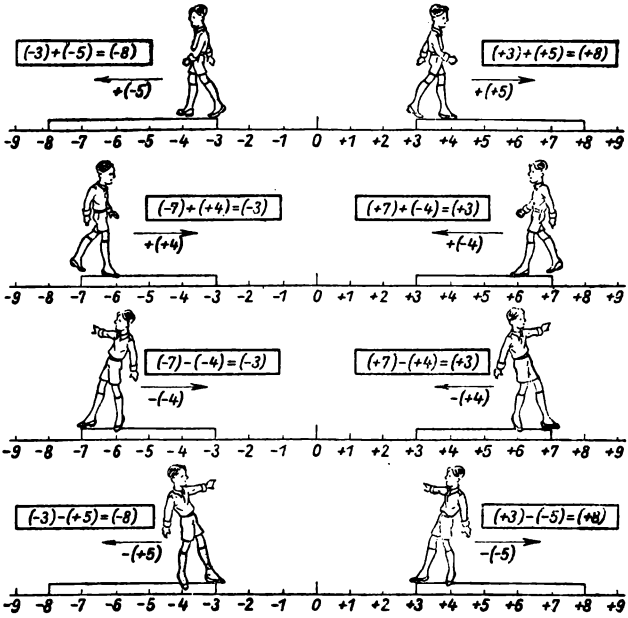


Bild 13

Schreite vom Punkt (+ 3) um 5 Einheiten vorwärts nach rechts! So ist die Aufgabe (+ 3) + (+ 5) = (+ 8) veranschaulicht.

Löse ebenso: (+ 7) + (+ 2); (+ 4) + (+ 3); (+ 9) + (+ 5)!

Schreite vom Punkt (− 3) aus 5 Einheiten vorwärts nach links! Man erkennt: (− 3) + (− 5) = (− 8).

Löse in gleicher Weise: (− 8) + (− 4); (− 3) + (− 7); (− 9) + (− 6)!

Schreite vom Punkt (+ 7) aus 4 Einheiten rückwärts nach links!

Löse die Aufgabe: (+ 7) − (+ 4) = (+ 3)!

Vergleiche hiermit: (+ 7) + (− 4) = (+ 3)!

Schreite vom Punkt (– 7) aus 4 Einheiten rückwärts nach rechts!

Man erkennt: $(-7) - (-4) = (-3)$.

Vergleiche hiermit: $(-7) + (+4) = (-3)$!

Zeige, daß Rückwärtsschreiten bei negativer Blickrichtung auf dasselbe hinauskommt wie Vorwärtsschreiten bei positiver Blickrichtung!

Daraus ergeben sich folgende Regeln:

Additionsregeln

1. Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man die Summe der absoluten Werte bildet und ihr das gemeinsame Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

2. Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen werden addiert, indem man die Differenz der absoluten Werte bildet und ihr das Vorzeichen des größeren der beiden Werte gibt.

$$(+a) + (-b) = +(a-b), \text{ wenn } a > b$$
$$(+a) + (-b) = -(b-a), \text{ wenn } b > a$$

Subtraktionsregel

Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit umgekehrtem Vorzeichen addiert.

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +(a-b), \text{ wenn } a > b$$
$$= -(b-a), \text{ wenn } b > a$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +(a+b)$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -(a+b)$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -(a-b), \text{ wenn } a > b$$
$$= +(b-a), \text{ wenn } b > a$$

Aufgaben

1. Löse folgende Aufgaben durch Schreiten auf der Zahlengeraden:

a) $(+4) + (+5)$ b) $(+10) + (-8)$ c) $(-10) + (-5)$

d) $(+3) - (-5)$ e) $(-8) - (-6)$ f) $(-2) - (+7)$

g) $(-5) + (+9)$ h) $(+2) - (-7)$ i) $(+6) + (-10)$!

2. Stelle aus zwei Pappstreifen zwei Zahlengeraden mit cm-Teilung her, die aneinander gleiten können (Bild 14)!

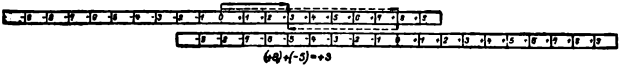


Bild 14

Bestimme mit diesem „Rechenstab" die in a) bis p) angegebenen Summen und Differenzen!

Beachte:

Addieren: $a + b$. Erster Summand a oben, zweiter Summand b unten (Null unter Punkt a), ablesen über Punkt b).

Subtrahieren: $a - b$. Minuend a oben, Subtrahend b unten (Punkt b unter Punkt a), ablesen über der unteren Null.

a) $(+2) + (+7)$	b) $(+5) + (-8)$	c) $(-4) + (+9)$
d) $(-5) + (-4)$	e) $(-2{,}5) + (-5)$	f) $(-3{,}5) + (+7{,}5)$
g) $(+8{,}5) + (-10)$	h) $(-4{,}5) + (-2{,}5)$	i) $(+9) - (+4)$
k) $(+6) - (+8)$	l) $(-5) - (-3)$	m) $(-7) - (+4)$
n) $(-7) - (+9)$	o) $(-5{,}5) - (+3{,}5)$	p) $(-2{,}5) - (-6{,}5)$

3. Untersuche, ob das Vertauschungsgesetz der Addition auch für relative Zahlen gilt!

Zähle zusammen:

4. a) $\begin{array}{r} +12 \\ \underline{-17} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} +34 \\ \underline{-48} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -47 \\ \underline{+28} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -15 \\ \underline{-23} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} +62 \\ \underline{+18} \end{array}$ f) $\begin{array}{r} -8 \\ \underline{+35} \end{array}$ g) $\begin{array}{r} -75 \\ \underline{-2} \end{array}$

5. a) $\begin{array}{r} -12x \\ \underline{-7x} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -24y \\ \underline{-y} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} +18c \\ \underline{-24c} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -27r \\ \underline{-15r} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} -45a \\ \underline{+62a} \end{array}$ f) $\begin{array}{r} +54s \\ \underline{-17s} \end{array}$

g) $\begin{array}{r} +4{,}5g \\ \underline{-5{,}3g} \end{array}$ h) $\begin{array}{r} -12{,}6a \\ \underline{-7{,}8a} \end{array}$ i) $\begin{array}{r} -9{,}2x \\ \underline{+4{,}9x} \end{array}$ k) $\begin{array}{r} -5\frac{3}{4}y \\ \underline{+2\frac{1}{2}y} \end{array}$ l) $\begin{array}{r} +\frac{2}{5}a \\ \underline{-7\frac{3}{8}a} \end{array}$

Wiederhole die Regeln über die Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen (S. 53) und wende sie in den Aufgaben 6 und 7 an! (Zur Vereinfachung läßt man vor positiven Zahlen das Vorzeichen weg.)

6. a) $15a + (8a - 7b)$ b) $9c - (3c + 8d)$
c) $8m - (-5m + 7n)$ d) $(20u + 3v) + (-7u + 9v)$
e) $(15a - 6b) - (18a - 11b)$ f) $(-x + y) - (+x - y)$

7. a) $(8a + 9b) + (-5a + 3b) - (-12a + 5b)$
b) $(-10m + 3n - 2) + (8m - 9n + 11) - (-7m + 15n - 7)$
c) $(6u^2 - 11u + 12) - (-5u^2 + 9u - 15) + (14u^2 - 25u - 30)$

Zähle zusammen:

8. a) $-13\frac{1}{6}b$
$+10\frac{3}{4}b$

b) $4x+3y$
$-7x+8y$

c) $-13a+15b$
$24a-31b$

d) $26c-33d$
$-15c+18d$

e) $-8{,}3m+6{,}9n-0{,}7r$
$12{,}5m-8{,}2n-5{,}2r$

f) $-5\frac{2}{3}u+6\frac{7}{8}v-3\frac{1}{5}w$
$6\frac{3}{4}u+6\frac{5}{6}v+3\frac{3}{4}w$

9. a) $-5x+13y+7z-6r$
$-15x-9y-12z+9r$

b) $5a-9b+30c+25d$
$-12a-18b-16c-41d$

c) $-5m^2-11n^2+80-12p$
$+28m^2+18n^2-50-15p$

d) $8u^2-9u+30v^2-14v$
$12u^2-6u-18v^2+26v$

10. Subtrahiere bei den Aufgaben in Nr. 4 die unteren Zahlen von den oberen!

11. Desgleichen bei Nr. 5!

12. Desgleichen bei Nr. 8!

13. Desgleichen bei Nr. 9!

14. a) Setze in dem Ausdruck $x+8$ für x nacheinander -6, -5, bis $+6$ und werte ihn aus!

b) Verfahre in derselben Weise mit dem Ausdruck $x-5$, $x=+5$ bis -5!

15. Ein Thermometer zeigt

a)	5° Wärme,	die Wärme nimmt um	8° zu
b)	18°		7° „
c)	16°		9° ab
d)	4° „	„ „	6° „
e)	3° Kälte,	„ Kälte	8° zu
f)	10°		5° „
g)	17° „	„	8° ab
h)	6° „	„ „	9° „.

Bilde aus den Angaben Additions- oder Subtraktionsaufgaben mit relativen Zahlen und gib den Stand des Thermometers an!

16. Zwei Kaufleute haben bei der gleichen Bank je ein Konto; beide vereinbarten mit der Bank, daß sie das Konto „überziehen" dürfen. Bestimme den Vermögensstand beider nach folgenden Vorgängen

a) Bestand: A + 430 RM; B + 210 RM; A überweist an B 185 RM

b) A − 150 „ ; B + 340 „ ; B „ A 400 „

c) A − 275 „ ; B − 130 „ ; A „ B 156 „ !

36. Multiplikation relativer Zahlen

Bringe jede der Aufgaben $4 + 4 + 4$; $a + a + a + a + a$ und $5 + 5 + 5 + \cdots + 5$ (a Summanden) auf eine kürzere Form!

Was soll man nun aber unter der Aufgabe $(-4) \cdot (-6)$ verstehen? Wir müssen festsetzen, wie Multiplikationsaufgaben mit relativen Zahlen gerechnet werden sollen. Weil diese Festsetzung in Einklang stehen soll mit den Multiplikationsregeln für absolute Zahlen, gehen wir davon aus, daß man die Aufgabe $6 \cdot 4 = 24$ durch Schreiten mit Viermeilenstiefeln veranschaulichen kann (5. Schuljahr). Diese Veranschaulichung erweitern wir für relative Zahlen durch folgende Vorschrift:

Ein positiver Multiplikand bedeutet Schreiten bei positiver Blickrichtung;

ein negativer Multiplikand bedeutet Schreiten bei negativer Blickrichtung;

ein positiver Multiplikator bedeutet Vorwärtsschreiten;

ein negativer Multiplikator bedeutet Rückwärtsschreiten.

Dabei ergänzen wir den Zahlenstrahl zur Zahlengeraden.

Verfolge jeden in Bild 15 dargestellten Rechenvorgang!

$(+3) \cdot (+5)$	bedeutet:	3 Fünferschritte	vorwärts,	Blick	nach	rechts,
$(+3) \cdot (-5)$	„	: 3 „	„	„	„	links,
$(-3) \cdot (+5)$	„	: 3 „	rückwärts,	„	„	rechts,
$(-3) \cdot (-5)$	„	: 3 „	„	„	„	links.

Der Festsetzung dieser Veranschaulichung entspricht die Festsetzung folgender Regel:

Vorzeichenregel:

Zwei Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergeben ein positives Produkt, zwei Faktoren mit ungleichen Vorzeichen ergeben ein negatives Produkt.

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad (+a) \cdot (-b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab \qquad (-a) \cdot (+b) = -ab$$

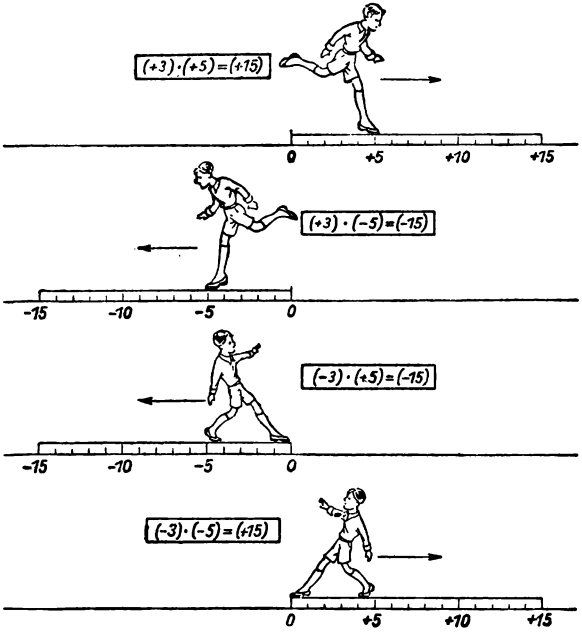


Bild 15

Aufgaben

1. Prüfe, ob das Vertauschungsgesetz der Multiplikation auch für relative Zahlen gilt!

2. a) $(-7)\cdot(+3)$ b) $(+9)\cdot(+3)$ c) $(-9)\cdot(-4)$
   d) $(+0{,}8)\cdot(-1{,}2)$ e) $(-0{,}13)\cdot(-0{,}8)$ f) $(+4{,}5)\cdot(-0{,}9)$
   g) $(+13)\cdot(+13)$ h) $(-15)\cdot(-15)$ i) $(+25)\cdot(-25)$

3. a) $(+a)\cdot(+5b)$ b) $(+7x)\cdot(+5y)$ c) $(+\frac{3}{4}r)\cdot(+\frac{2}{3}s)$
   d) $(+7c)\cdot(-8d)$ e) $(+1{,}2a)\cdot(-4b)$ f) $(+2{,}8x)\cdot(-0{,}6y)$
   g) $(-\frac{2}{5}n)\cdot(+\frac{3}{4}m)$ h) $(-1{,}5u)\cdot(+7v)$ i) $(-\frac{5}{8}a)\cdot(+\frac{3}{4}b)$

4. a) $(+x)\cdot(+x)$ b) $(+7a)\cdot(+7a)$ c) $(-5b)\cdot(+4b)$
d) $(+8y)\cdot(-5y)$ e) $(-3\frac{1}{2}z)\cdot(-5z)$ f) $(-0{,}8c)\cdot(-1{,}5c)$

5. a) $(+a)\cdot(+2b)\cdot(-c)$ b) $(+3x)\cdot(-2y)\cdot(+5y)$
c) $(-9u)\cdot(-1{,}5u)\cdot(-3v)$ d) $(-4d)\cdot(+0{,}2d)\cdot(+3d)$

6. a) $(+24)\cdot(-6)\cdot(+9)$ b) $(-38)+(+7)\cdot(+8)$
c) $(-3)\cdot(+9)+(+5)\cdot(+12)$ d) $(-8)\cdot(-10)-(-3)\cdot(-9)$
e) $(+9x)+(-3)\cdot(-4x)$ f) $(+5m)\cdot(-2n)-(-3n)\cdot(-2m)$
g) $(-20a)-(+7a)\cdot(-5)$ h) $(-9x)\cdot(+7y)+(-8y)\cdot(-11x)$

7. a) Welchen Wert erhält das Produkt $3a^2b$
1. für $a = 4$ und $b = 3$, 2. für $a = 5$ und $b = 1{,}2$?
b) Werte den Ausdruck $4x + 9$ aus, wenn man nacheinander für x die Größen -1, -2, -3 bis -10 einsetzt!
c) Stelle eine Wertetafel auf für den Ausdruck $3a - 2b$, wenn a von $+1$ bis $+10$ wächst und b von -1 bis -10 abnimmt!

37. Division relativer Zahlen

Löse die folgenden Divisionsaufgaben:

$(+36):(+9)$ $(+36):(-9)$
$(-36):(-9)$ $(-36):(+9)$.

Suche jedesmal als Ergebnis die Zahl, die, mit dem Divisor multipliziert, den Dividenden ergibt! Vergleiche jedesmal das Vorzeichen des Quotienten mit den Vorzeichen von Dividend und Divisor!

Vorzeichenregel:
Der Quotient zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv; der Quotient zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

$$(+a):(+b) = +(a:b) \qquad (+a):(-b) = -(a:b)$$
$$(-a):(-b) = +(a:b) \qquad (-a):(+b) = -(a:b)$$

Aufgaben

1. a) $(+36):6$ b) $(-42):7$ c) $150:(-5)$
d) $(-48):(-12)$ e) $(-ab):(-b)$ f) $(+18mn):(-3m)$
g) $(-3{,}6u^2):(+12u)$ h) $(-a^2):(-a)$ i) $18a^2b:(-6ab)$

2. a) $(+15ab):(-3a)$ **b)** $(-2{,}4xy):(+0{,}8y)$
c) $(+2\frac{3}{4}mn):(+\frac{3}{4}m)$ **d)** $(-20fg^2):(-5fg)$
e) $(-\frac{5}{6}r^3s):(+\frac{2}{3}r^2s)$ **f)** $(+3{,}25ab):(-a)$
g) $(-6{,}7xy):(-1)$ **h)** $(-9xy^2):(+3xy)$
i) $(+4{,}2xy):(-4{,}2xy)$

3. a) $(40ab-24ac):8a$ **b)** $(+65nx-39ny):(-13n)$
c) $(35rs+56rt):(-7r)$ **d)** $(4\frac{4}{5}mv-3\frac{1}{5}nv):8v$
e) $(6{,}4xy-11{,}2xz):(-1{,}6x)$ **f)** $(+1\frac{1}{9}cd-\frac{2}{3}c):\frac{2}{3}c.$

4. a) $(21x^3+15x^2-9x):3x$ **b)** $(16ab+12ac-20ad):(-4a)$
c) $(5{,}6km+0{,}72k^2m-3{,}2k^2m^2-24km^2):(-0{,}8km)$

5. a) $(42mn-18nr+6n):6n+(45my+27ry-18y):9y$
b) $(1\frac{2}{3}ah+6\frac{1}{4}hr-2\frac{1}{2}h):5h-(3\frac{1}{2}ab-1\frac{1}{4}br+\frac{3}{4}b):(-\frac{3}{8}b)$

C. Geometrie

IX. Spiegelung

38. Die Spiegelachse

Wir halten einen linken Schuh, einen rechten Handschuh vor den Spiegel. Welche Wirkung hat der Spiegel? Betrachte Bild 16! Was beobachtet man an der Wasserfläche? Vergleiche z. B. das Standbild im Mittelbogen mit seinem Spiegelbild! Betrachte nun das Gebäude allein! Was fällt an der Anordnung der einzelnen Teile auf? Bestimme die Gerade im Bild, auf die ein Spiegel gesetzt werden muß, damit aus einer Hälfte das ganze Bild entsteht! Pause das Gebäude in großen Umrissen durch und bringe rechte und linke Hälfte durch Falten zur Deckung!

Bild 16

Zeichne auf Papier mit Kohle eine krumme Linie und falte das Papier! Was beobachtet man?

Durchstich ein gefaltetes Papier mehrfach mit einer Nadel und breite es aus! Untersuche die entstandenen Punkte in ihrer Lage zum Kniff! Bild 17 zeigt dir einen „Falter". Erkläre den Namen und unter-

Bild 17

suche die Form der Flügel und der Flügelzeichnungen! Bild 18 entstand, indem man ein Stück Papier mit einem noch feuchten Tintenklecks zusammenfaltete und den Klecks dabei breitdrückte. Gib Punkte an, die beim Entstehen des Bildes übereinanderlagen! Zeige an dem Bild einander entsprechende Strecken!
Stelle durch Falten und Durchstechen zwei symmetrische Punkte her und vergleiche ihre Entfernungen von verschiedenen Punkten der Faltlinie und die an der Faltlinie entstehenden Winkel!

Bild 18

Erklärungen:

1. Gehen zwei Bilder, die in einer Ebene liegen, durch Spiegelung auseinander hervor, so nennt man sie **spiegelgleich** oder **symmetrisch.**
2. Spiegelgleiche Bilder können durch Umklappen um eine gerade Linie, die **Spiegelachse,** zur Deckung gebracht werden. Man nennt sie daher **achsenspiegelig** oder **achsensymmetrisch.**

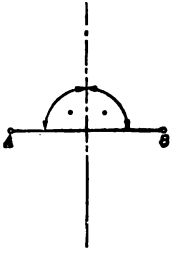


Bild 19

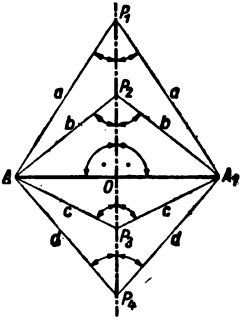


Bild 20

1. Die Spiegelachse halbiert die Verbindungsstrecke spiegelgleicher Punkte und steht senkrecht auf ihr (Bild 19).
2. Jeder Punkt der Spiegelachse ist von zwei spiegelgleichen Punkten gleich weit entfernt (Bild 20).
3. Verbindet man einen Punkt der Spiegelachse mit zwei spiegelgleichen Punkten, so entstehen an der Achse gleiche Winkel (Bild 20).

Aufgaben

1. Falte ein Stück Papier und schneide längs des Kniffes ein Muster aus! Breite jetzt das Papier aus und zeige den Verlauf der Spiegelachse! Gib Punkte an, die beim Entstehen der Bilder übereinanderlagen!

2. Vervollständige die Wappenbilder des Bildes 21!

3. Zeichne die Spiegelachsen eines Quadrates, eines Rechtecks, eines Kreises!

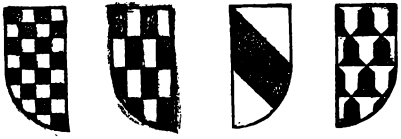


Bild 21

4. Zeichne einen Winkel, schneide ihn aus und stelle durch Falten seine Spiegelachse her!

5. a) Suche bei dem in Bild 22 dargestellten Scherenschnitt die Spiegelachsen auf! Wieviel sind es?

b) Verbinde auf einer Pauszeichnung des Bildes 18 spiegelgleiche Punkte. Was beobachtet man?

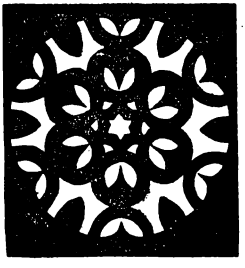


Bild 22

6. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Zeichne ihre Spiegelachse (Bild 23)!

7. Spiegele einen Punkt P an einer Achse g, die nicht durch P geht (Bild 24)!

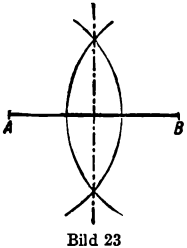


Bild 23

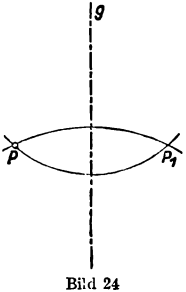


Bild 24

8. Spiegele eine Strecke AB an einer gegebenen Geraden g,
a) wenn die Verlängerung von AB die Gerade g unter einem spitzen Winkel schneidet,
b) wenn die Verlängerung von AB die Gerade g unter einem rechten Winkel schneidet, c) wenn die Strecke AB mit der Geraden g gleichgerichtet ist!

9. Zeichne drei einander in drei Punkten schneidende Geraden und spiegele sie an einer Achse!

10. Gegeben sind ein Kreis und eine Gerade g, die den Kreis nicht schneidet. Zeichne den in bezug auf g als Achse spiegelgleichen Kreis!

11. Ein Kreis schneidet eine Gerade g. Zeichne den in bezug auf g als Achse spiegelgleichen Kreis!

39. Gleichschenkliges Dreieck / Grundaufgaben

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, schneide es aus und falte es so, daß die Schenkel aufeinanderfallen! Falte es wieder auseinander und vergleiche die an der Spiegelachse entstandenen Winkel, die Teile der von der Achse geschnittenen Grundseite des Dreiecks und die Winkel an ihr (Bild 25[1])!

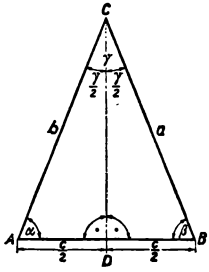


Bild 25

1. **Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Spiegelachse.**
2. **Die Achse des gleichschenkligen Dreiecks halbiert den Winkel an der Spitze und die Grundseite und steht senkrecht auf ihr.**
3. **Die Winkel an der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.**
4. **Die Verbindungsgerade der Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite (Drachenviereck) ist die Spiegelachse der beiden Dreiecke (Bild 20).**

Aufgaben

Grundaufgaben, mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal zu lösen.

1. Halbiere eine gegebene Strecke!

Anleitung: Betrachte die gegebene Strecke als gemeinsame Grundlinie zweier gleichschenkliger Dreiecke (Bild 23)!

2. Halbiere einen gegebenen Winkel!

Anleitung: Betrachte den Winkel als Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks (Bild 26)!

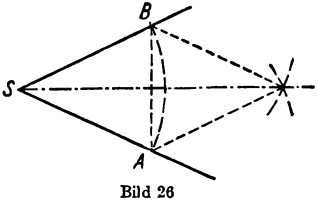


Bild 26

1) Rechte Winkel werden in Zeichnungen häufig durch einen Punkt bezeichnet.

3. Errichte auf einer Geraden im Punkt P die Senkrechte!

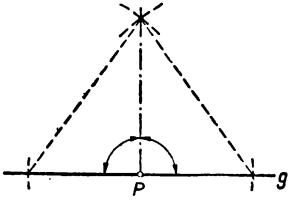


Bild 27

Anleitung: Betrachte P als Mittelpunkt der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks (Bild 27)!

4. Fälle von einem Punkt P außerhalb der Geraden g die Senkrechte auf sie!

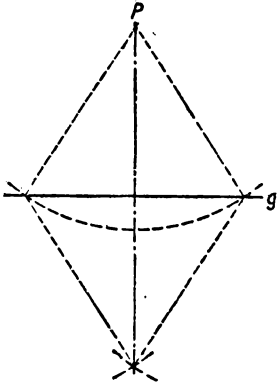


Bild 28

Anleitung: Betrachte P als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und wende Satz 4 an (Bild 28)!

Zeichenübungen, nur mit Zirkel und Lineal zu lösen.

5. Teile eine gegebene Strecke in 4 (8, 16) gleiche Teile!

6. Teile einen gegebenen Winkel in 2 (4, 8) gleiche Teile!

7. Zeichne einen rechten Winkel durch Halbieren eines gestreckten!

8. Zeichne einen Winkel von 45° (22½°, 135°)!

9. Halbiere in einem Dreieck die Seiten und verbinde ihre Mitten mit den Eckpunkten!

10. Halbiere in einem Dreieck die Winkel!

11. Fälle in einem spitzwinkligen Dreieck die Lote von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten!

40. Bestimmungslinien

Zeichne im Atlas um deinen Heimatort als Mittelpunkt in richtigem Maßstab Kreise mit den Halbmessern 75 km, 150 km, 375 km! Welche Eigenschaften haben alle Orte, die auf einer solchen Kreislinie liegen?

Mitten über dem Anrichtetisch des Wohnzimmers soll ein Bild aufgehängt werden. Ein Junge soll dem Vater dabei helfen und das Bild an die Wand halten, damit er die passende Stelle für den Bildnagel finden kann. Auf welcher Linie muß er die Bildöse bewegen?

Erklärung: Wenn alle Punkte einer Linie eine bestimmte Bedingung erfüllen, nennt man die Linie **Bestimmungslinie** (geometrischer Ort).

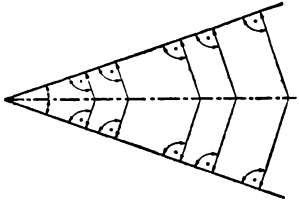


Bild 29

Bestimmungslinien:

1. **Der Kreis ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einem Punkt, dem Mittelpunkt, die gleiche Entfernung haben.**
2. **Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind.**
3. **Die Winkelhalbierende ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von den Schenkeln des Winkels die gleiche Entfernung haben (Bild 29).**

Aufgaben

1. Zwei Punkte A und B sind 5 cm voneinander entfernt.

   a) Bestimme einen Punkt, der von A 4,5 cm und von B 3 cm entfernt ist! Wieviel solcher Punkte gibt es?

   b) Bestimme die Entfernung des gefundenen Punktes von der Strecke AB!

2. Rechts und links einer Bahnstrecke liegen zwei Orte A und B (Bild 30). Ein gemeinsamer Bahnhof soll gebaut werden, der von den beiden Orten gleich weit entfernt ist. Stelle durch eine Zeichnung fest, wo der Bahnhof angelegt werden muß!

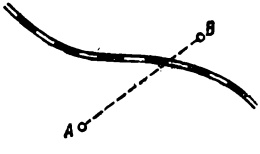


Bild 30

3. a) Auf einer gegebenen Kreislinie wird ein Punkt gesucht, der von den Endpunkten einer bestimmten Strecke AB gleich weit entfernt ist!

b) Unter welchen Bedingungen gibt es zwei Lösungen oder nur eine oder gar keine? Zeichne!

4. a) Zeichne zwei einander unter einem Winkel von 60° schneidende Straßen (als Geraden) und auf einer der beiden Straßen einen Punkt A, der von der Straßenkreuzung 200 m entfernt ist (Maßstab 1 : 10 000)!

b) Bestimme einen Punkt auf der nicht durch A gehenden Straße so, daß er von A $\frac{1}{2}$ km entfernt ist! (Wieviel Lösungen?)

c) Bestimme einen anderen Punkt so, daß er von beiden Straßen gleich weit und von A 300 m entfernt ist! (Beachte wieder verschiedene Lösungsmöglichkeiten!)

5. Zeichne mit Hilfe einer Tasse einen Kreis und ermittle seinen Mittelpunkt!

Anleitung: Zeichne Sehnen in den Kreis! Auf welchen Bestimmungslinien muß der Mittelpunkt liegen?

41. Anwendungen

Zeichenübungen

1. In einem Rechteck hat die Seite a die Länge 5 (4; 7) cm, die Seite b ist 3 (5; 2) cm lang. Zeichne, zuerst nach Augenmaß, dann mit dem Zirkel den Umfang des Rechtecks als Strecke!

2. Nach einer 15 cm langen Vorlage wollen wir ein Stickmuster (Bild 31) auf einen Gürtel übertragen. Schätze zuerst, wie oft man das Muster anlegen muß; dann miß nach!

Bild 31

Gleichschenkliges Dreieck

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus

a) $c = 5$ cm und $\alpha = 75°$ b) $c = 6$ cm und $\gamma = 45°$

c) $b = 6$ cm und $\gamma = 67\frac{1}{2}°$ d) $a = 8$ cm und $\beta = 52\frac{1}{2}°$!

(Bezeichnungen siehe Bild 25!)

4. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus
   a) Spiegelachse = 3 cm und c = 8 cm
   b) Spiegelachse = 7,2 cm und b = 8,3 cm!

5. a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel einen rechten Winkel einschließen!
   b) Betrachte seine Grundlinie als Spiegelachse und zeichne sein Spiegelbild! Was für eine Figur entsteht dadurch?

6. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und seine Spiegelachsen!

7. Zeichne über derselben Grundseite mehrere gleichschenklige Dreiecke nach beiden Seiten und verbinde ihre Spitzen miteinander! Wie ändern sich die Winkel, wenn die Schenkel länger werden?

8. Wir wollen einen Drachen bauen, 80 cm lang und 60 cm breit; der Querstab soll 25 cm von der Spitze entfernt angebracht werden. Entwirf eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10!

9. Versuche, eine Windrose aus acht gleichen Drachenvierecken zusammenzusetzen! Nimm die längere Seite dreimal so lang wie die kurze, bestimme erst den Winkel, den die kurzen Seiten miteinander bilden!

Spiegelungen

10. Lege ein Quadrat vor einen aufrecht stehenden Spiegel! Verdecke das Quadrat so, daß man nur sein Spiegelbild sieht, und zeichne nach dem Spiegelbild eine Diagonale! Was beobachtet man?

11. Zeichne die Bilder 32 und 33 in doppelter Größe in dein Heft und ergänze sie!

Bild 32

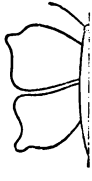


Bild 33

12. Stelle einen randlosen Spiegel senkrecht so auf die Kantenmuster des Bildes 34, wie die Geraden AB, CD, EF usf. angeben! Zeichne die sich ergebenden Eckenmuster!

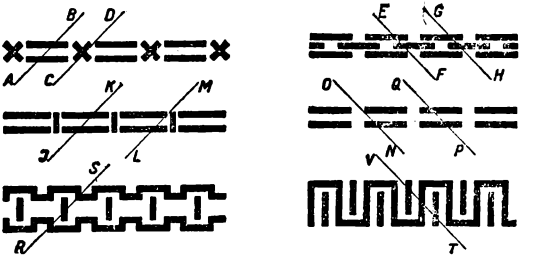


Bild 34

13. Vervollständige die Flächen des Bildes 35 durch Spiegelung; Bild *a* wird ein gotischer Dachgiebel, *b* ein altdeutscher Dachgiebel. Bei welchen Gebäuden sieht man einen nach *c* entstehenden Giebel?

14. Vervollständige das Schnittmuster in Bild 36!

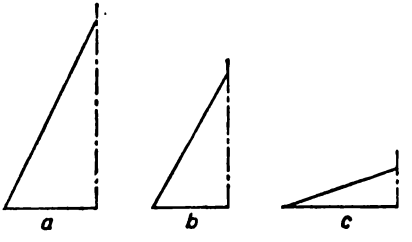


Bild 35

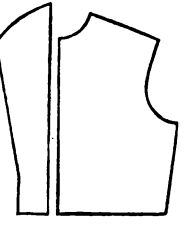


Bild 36

X. Winkelbeziehungen an Geraden

42. Neben- und Scheitelwinkel

Betrachte eine geöffnete Schere! Was bilden die Schneiden der Scherenblätter miteinander? Ersetze die Scherenblätter durch zwei Papierstreifen und verbinde sie miteinander in ähnlicher Weise, wie die Blätter bei der Schere verbunden sind (Bild 37)! Drehe den einen Papierstreifen und beobachte die entstehenden Winkel nach Anzahl und Größe!
Zeichne statt der Papierstreifen zwei einander schneidende Geraden!

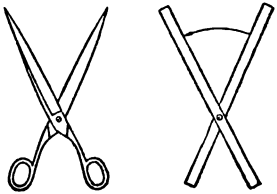


Bild 37

Erklärungen

Durch zwei einander schneidende Geraden entstehen vier Winkel.

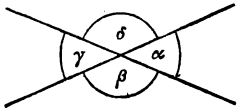


Bild 38

Die beiden Winkel, die nur den Scheitelpunkt gemeinsam haben, heißen **Scheitelwinkel** (α und γ; β und δ im Bild 38). Die beiden Winkel, die außerdem einen Schenkel gemeinsam haben, heißen **Nebenwinkel** (α und δ; β und γ in Bild 38).

1. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 180° oder 2 *R*.
2. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Aufgaben

Nebenwinkel

1. Ein Winkel ist **a)** 46°, **b)** 87°, **c)** 124°, **d)** 153°, **e)** 24° 15′, **f)** 65° 45′, **g)** 98° 24′, **h)** 133° 36′, **i)** 162° 52′ groß. Wie groß ist der Nebenwinkel?
2. Verlängere die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats oder Rechtecks! Was für Nebenwinkel entstehen dadurch?
3. Bilde Nebenwinkel durch ein geöffnetes Buch, eine Tür, einen Fensterflügel! Schätze und miß die entstehenden Nebenwinkel!
4. Pedale und Tretkurbel eines Fahrrades bilden Nebenwinkel (Bild 39). Beobachte, wie sich die Größe eines bestimmten Winkels beim Drehen der Kurbel ändert und welchen Einfluß diese Veränderung auf die Größe seines Nebenwinkels hat!

5. Stelle dir über die Größe zueinander gehörender Nebenwinkel eine Wertetafel auf! Zeichne die zueinander gehörenden Nebenwinkel als Seiten von Rechtecken und laß jedesmal zwei Rechteckseiten an demselben Punkt beginnen (Bild 40)! Stelle die Größe der Winkel durch Strecken dar! (Z. B. 10° durch eine Strecke von 5 mm Länge.)

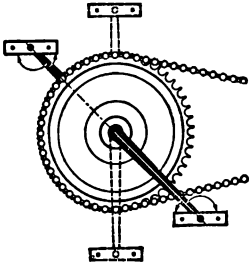


Bild 39

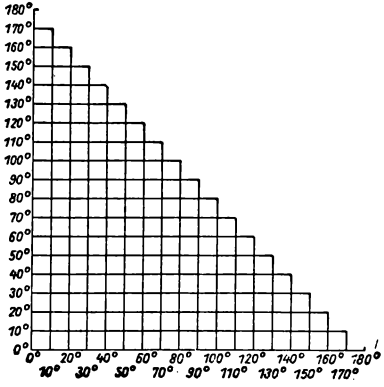


Bild 40

a) In welchem Fall entsteht ein Quadrat?

b) Was entsteht, wenn man die rechten oberen Ecken aller Rechtecke miteinander verbindet?

6. Zeichne die Halbierenden zweier Nebenwinkel! Was kann man feststellen?

7. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine halb so groß wie der andere. Wie groß ist jeder?

Scheitelwinkel

8. Zeichne einen Winkel von beliebiger Größe! Wie entsteht sein Scheitelwinkel?

9. Nenne Geräte, an denen Scheitelwinkel vorkommen!

10. Zeichne die Spiegelachsen zweier einander schneidender Geraden!

11. Zeichne Skizzen von Straßenkreuzungen deines Heimatortes!

43. Winkelmessungen im Freien

Zur Messung von Winkeln im Gelände kann man ein einfaches Gerät verwenden, das Bild 41 zeigt. Es hat eine Peilvorrichtung, die aus einem feinen Schlitz in einer Holzplatte besteht, dem gegenüber am anderen Ende eines drehbaren Lineals ein dünner Metallstift angebracht ist. Wie stellt man die Peilvorrichtung auf ein bestimmtes Ziel im Gelände ein? Wie muß man das Lineal auf der mit einer Gradeinteilung versehenen Kreisscheibe befestigen, um den Winkel zwischen zwei verschiedenen Richtungen zu messen? Fertige selbst ein solches Gerät an, das auf einem Fotostativ aufgestellt werden kann!

Aufgaben

Messen und Abstecken von Winkeln im Gelände

1. Vorübung. a) Fluchte mittels Stecknadeln auf dem Reißbrett (einer Pappunterlage o. ä.) zwei Richtungen aus!

b) Wie mißt man mit einem Gerät, wie es Bild 41 zeigt, den Winkel zwischen diesen Richtungen?

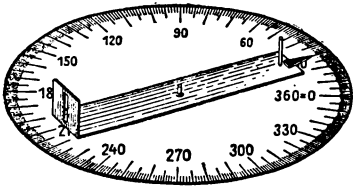


Bild 41

c) Gib auf dem Reißbrett eine bestimmte Richtung durch eine Gerade und auf dieser einen Punkt an! Wie fluchtet man mit dem in b) genannten Gerät eine Richtung aus, die mit dieser Geraden im angegebenen Punkt einen Winkel von 90° und

d) einen Winkel von 54° bildet?

2. a) Wir wollen mit dem in Bild 41 dargestellten Gerät den Winkel messen, den zwei vorher durch Fluchtstäbe festgelegte Richtungen im Gelände miteinander bilden. Erkläre, wie das zu machen ist!

b) Von einem Punkt einer auf dem Schulhof (Turnplatz) ausgefluchteten Richtung aus soll eine zweite Richtung ausgefluchtet werden, die mit der ersten einen Winkel von 65° bildet. Wie geschieht das?

Sehwinkel

3. Halte ein Lineal mit ausgestrecktem Arm senkrecht vor dich hin! Betrachte mit einem Auge Gegenstände hinter dem Lineal! Die Sehstrahlen, die von deinem Auge ausgehen und die Seitenkanten des Lineals berühren, schließen den „Sehwinkel" ein, unter dem du das Lineal siehst (Bild 42). Nähere das Lineal dem Auge und beobachte die Gegenstände hinter dem Lineal! Was kann man feststellen?

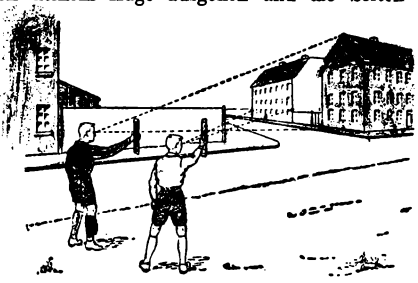


Bild 42

4. a) Fertige eine maßstäbliche Zeichnung, nachdem du vorher die Länge deines Armes und die Breite des Lineals gemessen hast! Unter welchem Winkel hast du das Lineal gesehen?

   b) Unter welchem Schwinkel siehst du die Gegenstände, die von dem Lineal gerade verdeckt werden?

5. Stelle dich auf dem Schulhof mit ausgestrecktem Arm und dem senkrecht gehaltenen Lineal vor ein nach dem Hof gehendes Fenster und gehe so weit zurück, daß das Lineal gerade das Fenster verdeckt!

6. Halte statt des Lineals den Daumen deiner ausgestreckten Hand senkrecht aufwärts und stelle fest, wie weit du zurückgehen mußt, damit das Fenster vom Daumen verdeckt wird!

7. Der Sehwinkel, unter dem der Daumen bei vorgestrecktem Arm erscheint, heißt Daumenbreite (Bild 43). Miß die Länge deines Armes und die Breite deines

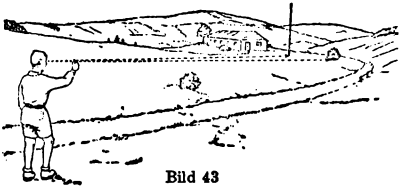


Bild 43

Daumens und stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung fest, wie groß deine Daumenbreite ist!

8. Stelle auf dieselbe Weise fest, wie groß der Winkel ist, unter dem du bei vorgestrecktem Arm a) deine geballte Faust, b) die Spanne deiner Hand siehst!

9. Vergleiche die gemessenen Winkel mit folgenden Angaben: der Daumen eines Erwachsenen deckt bei vorgestrecktem Arm ungefähr einen Sehwinkel von 2°, die Faust 10°, die Spanne etwa 20°!

44. Parallele Geraden

Beobachte die Winkel zwischen dem Leitungsdraht und dem Stromabnehmer einer elektrischen Straßenbahn, wenn der Stromabnehmer an

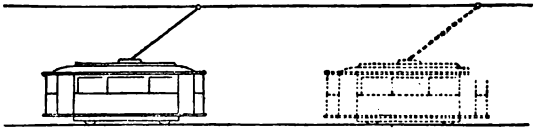


Bild 44

dem Draht entlang gleitet (Bild 44)! Er ändert seine Richtung bei der Bewegung nicht.

Beobachte ebenso den Winkel zwischen den Leiterholmen und den Führungsschienen, wenn die Leiter am Regal entlang verschoben wird (Bild 45)!

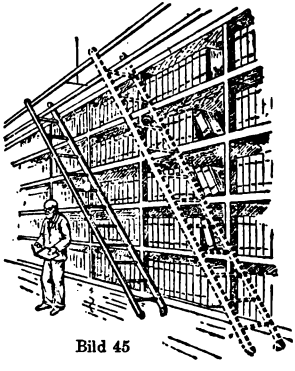


Bild 45

Erklärung: Zwei Geraden, die eine festliegende Gerade unter gleichem Winkel schneiden, heißen gleichgerichtet oder **parallel**. Man kann sie durch Verschieben längs einer Geraden zur Deckung bringen (Parallelverschiebung).

1. **Parallele Geraden haben überall gleichen Abstand.**
2. **Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt kann man zu dieser Geraden nur eine Parallele ziehen.**

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände, an denen man parallele Linien findet!

2. Stelle durch zweimaliges Falten eines rechteckigen Papierblattes einen Kniff her, der dem Rande des Papiers parallel läuft!

3. a) Zeichne mit Schiebedreieck und Lineal parallele Linien, indem das Schiebedreieck längs des Lineals verschoben wird (Bild 46)!
   b) Benutze zum Zeichnen von Parallelen das Doppellineal (Bild 47)!

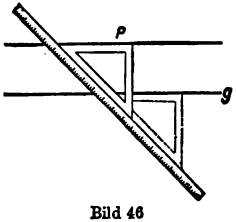


Bild 46

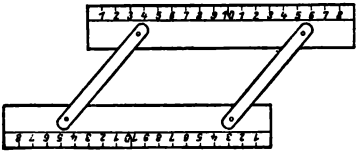


Bild 47

4. Zeichne parallele Linien nach Augenmaß und prüfe nach!

5. Zeichne eine Gerade und ziehe im Abstand von 4 cm die Parallelen zu der Geraden!

6. Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele!

7. Bei der Eisenbahn beträgt die Spurweite eines Gleises 1,435 m. Zeichne eine 9 m lange Gleisstrecke mit 11 Schwellen in der „Draufsicht", wenn die 1. Schwelle 0,3 m vom Ausgangspunkt entfernt liegt und die Abstände der 11 Schwellen (als Strecken zu zeichnen) 0,8 m, 0,9 m, 5 mal 1 m, 0,9 m 0,8 m, 0,3 m betragen (Maßstab 1 : 50)!

8. Zeichne ein Rechteck aus $a = 2$ cm; $b = 7$ cm! Zeichne unter einem Winkel von 45° zur Richtung der Seite a durch die Ecken des Rechtecks parallele Linien, mache sie 1 cm lang und verschiebe das Rechteck längs dieser Parallelen!

9. Zeichne eine Schar paralleler Geraden! Eine andere Schar paralleler Geraden zeichne so, daß sie die zuerst gezeichneten Parallelen senkrecht schneiden! Aus welcher Art von Flächen besteht das entstandene „Netz"?

10. a) Führe die Aufgabe 9 so aus, daß ein Netz von Quadraten entsteht (Millimeterpapier)!

b) Zeichne das Netz so, daß der Eindruck eines Geflechtes entsteht!

Bild 48

11. Das Getreide, die Kartoffeln, die Rüben stehen in langen parallelen Reihen auf dem Feld. Wie kommen diese Reihen zustande?

12. Wir wollen parallele Linien auf die Tafel zeichnen! Gib nach Bild 48 an, unter welchen Umständen die Parallelen mit Hilfe einer anderen Tafel gezeichnet werden können!

13. Warum können parallele Geraden einander nicht schneiden?

45. Winkelpaare an Parallelen

Schreibe die Buchstaben, die Bild 49 zeigt, recht groß nach! Worauf muß man achten? In welchem Falle wirken sie unschön?

N E F H Z L

Bild 49

Stelle eine Pause der Winkel am oberen Schnittpunkt in Bild 50 her und verschiebe die Pause längs der schneidenden Geraden h, bis der obere Schnittpunkt auf den unteren fällt! Welche Winkel fallen aufeinander?

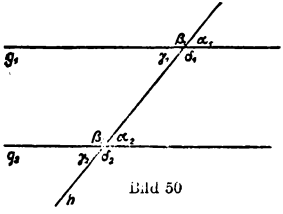


Bild 50

Erklärungen

Wenn zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten werden, so entstehen **Stufenwinkel** und **Wechselwinkel** (Bild 51 und 52).

Stufenwinkel liegen auf gleichen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden.

Wechselwinkel liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden.

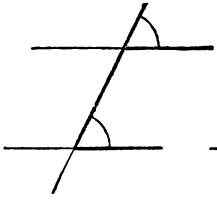


Bild 51

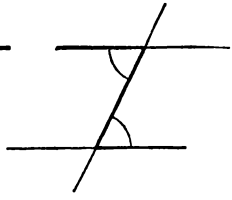


Bild 52

1. **Stufenwinkel** an parallelen Geraden sind gleich.
2. **Wechselwinkel** an parallelen Geraden sind gleich.
3. Sind **Stufenwinkel** gleich, so sind geschnittene Geraden **parallel**.
4. Sind **Wechselwinkel** gleich, so sind geschnittene Geraden **parallel**.

Beweis zu 1 und 2: Verschiebt man die eine Parallele längs der schneidenden Geraden, so fallen die Stufenwinkel aufeinander; die Wechselwinkel werden zu Scheitelwinkeln.

Aufgaben

Überlegungen

1. Nenne in Bild 53 **a)** verschiedene Paare gleicher Winkel, **b)** verschiedene Winkel, die einander zu 180° ergänzen!

2. Lege zwei Winkel mit parallelen Schenkeln ineinander oder nebeneinander und vergleiche ihre Größe! Welche Fälle muß man unterscheiden?

   Anleitung: Verlängere die Schenkel, bis sie einander schneiden!

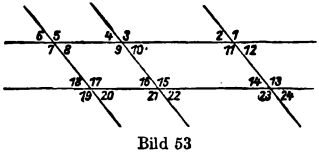


Bild 53

3. Zeichne zwei Paare paralleler Geraden, die einander schneiden! Was gilt von je zwei Winkeln in dem eingeschlossenen Viereck, die **a)** einander gegenüberliegen, **b)** benachbart sind? Begründe die Feststellungen!

Zeichenübungen

4. Ziehe zu einer Geraden g durch einen Punkt P außerhalb der Geraden die Parallele!

1. Lösung: Verschiebe das Zeichendreieck am festliegenden Lineal (Bild 46)! Begründe das Verfahren!

2. Lösung: Bestimme einen zweiten Punkt, der den gleichen Abstand von g hat!

5. Errichte in Punkt P auf der Geraden g die Senkrechte unter Benutzung von Lineal und Zeichendreieck!

Lösung: Verschiebe das Zeichendreieck, wie es Bild 54 andeutet! Begründung!

6. Fälle nach Bild 55 das Lot von P auf g!

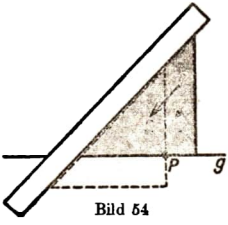


Bild 54

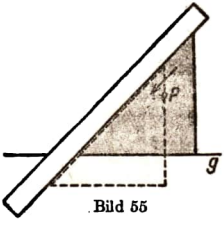


Bild 55

7. Straßenanlage. Eine geradlinige Hauptverkehrsstraße ist insgesamt 14 m breit. Die Gehwege sind je 2,20 m breit. In der Mitte des Fahrdammes laufen zwei Gleise der elektrischen Straßenbahn; die äußeren Schienen liegen 2,60 m von der Bordkante entfernt. Die Spurweite eines Gleises beträgt 1,42 m. Zeichne 30 m Länge dieser Straße in der „Draufsicht" im Maßstab 1 : 200!

8. Schieblehre. Bild 56 zeigt eine Schieblehre in vereinfachter Form. Sie dient zum Messen der Dicke von Stäben und anderen Gegenständen.

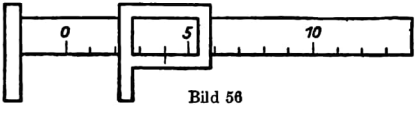


Bild 56

a) Beschreibe, wie sie verwendet wird (Parallelverschiebung)!

b) Die Messung eines Stabes ergibt, daß er 4 cm dick ist. Zeichne die Stellung des Schiebers!

46. Vermischte Aufgaben

1. Zeichne das Bild eines Schachbretts (Bild 57), indem du ein Feld als 1 cm² wiedergibst; bezeichne die senkrechten Streifen mit den Buchstaben *a, b, c ... h*, die waagerechten Streifen mit den Ziffern 1, 2, 3, ... 8! Welchen Zweck hat diese Benennung?

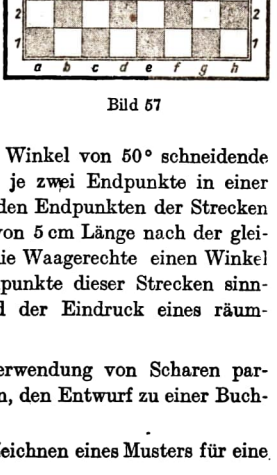


Bild 57

2. Suche nach Aufgabe 1 die Felder *e* 5, *f* 3, *g* 2, *h* 5, *c* 6 auf!

3. Verwende ein Blatt Millimeterpapier und schreibe die Buchstaben *a, b, c, ...* und die Ziffern 1, 2, 3, ... nicht an die Streifen wie bei Aufgabe 1, sondern an die Strecken! Was wird jetzt an Stelle der bezifferten Felder durch Bezeichnungen wie *a* 1, *c* 3 usw. bestimmt?

4. Zeichne zwei einander unter einem Winkel von 50° schneidende Strecken von 6 cm Länge so, daß je zwei Endpunkte in einer Waagerechten liegen! Zeichne von den Endpunkten der Strecken und ihrem Schnittpunkt Strecken von 5 cm Länge nach der gleichen Richtung so, daß sie gegen die Waagerechte einen Winkel von 30° bilden! Verbinde die Endpunkte dieser Strecken sinngemäß miteinander! Dadurch wird der Eindruck eines räumlichen Gebildes hervorgerufen.

5. Handarbeit. **a)** Fertige unter Verwendung von Scharen paralleler Linien, die einander schneiden, den Entwurf zu einer Buchhülle an!

b) Verwende parallele Linien zum Zeichnen eines Musters für eine Handarbeitstasche!

Eisenbahn

6. Die Spurweite der Gleise bei der deutschen Eisenbahn beträgt 1,435 m. Bei Doppelgleisen muß von Gleismitte zu Gleismitte eine Entfernung von 3,5 m vorhanden sein.

6. a) Zeichne eine zweigleisige Strecke in der Draufsicht für eine Länge von 20 m im Maßstab 1 : 200!

b) Zeichne eine zweigleisige Strecke von 1500 m Länge in Draufsicht im Maßstab 1 : 10 000 und zeichne ein Vor- und Hauptsignal ein! Das Vorsignal muß 700 m vom Hauptsignal entfernt sein.

7. Zeichne die Warnzeichen bei Eisenbahnübergängen nach Bild 58!

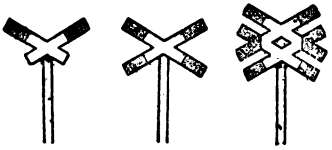


Bild 58

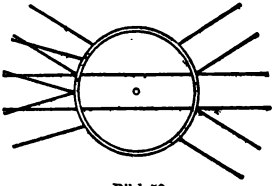


Bild 59

8. Bild 59 zeigt uns die Drehscheibe eines Strahlengleises. Um welchen Winkel muß die Scheibe gedreht werden, damit Gleisverbindungen hergestellt werden können? Wieviel durchgehende Verbindungen sind möglich?

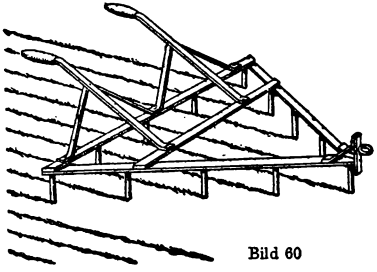


Bild 60

9. Landwirtschaftliches Gerät. Zeichne die in Bild 60 dargestellte Egge in der Draufsicht! Zeichne die von dem bewegten Gerät hervorgerufenen Rillen und miß die Winkel, die sie mit den Seiten der Egge bilden!

10. Küstenschiffahrt. Ein Schiff kann mit Hilfe des Kompasses in einer bestimmten Himmelsrichtung fahren. Diese Himmelsrichtung heißt Kurs des Schiffes. Die Windrose eines Schiffskompasses ist in 360° geteilt. Gezählt wird von der Nord-Südrichtung nach Osten

und Westen, jedesmal von 0° bis 90° (Bild 61). Statt von NO-Richtung spricht man von N 45° O, statt SSW sagt man S 22½° W.

a) Stelle eine Zeichnung dazu her!

b) Gib fünf Skizzen von Schiffskursen und bezeichne jedesmal den Kurs!

Bild 61

Peilen

11. „Peilen" bedeutet in der Seemannssprache, mit dem Kompaß die Richtung feststellen, in der ein Gegenstand gesehen wird. Auf einem nach N 20° O steuernden Schiff peilte man ein Feuerschiff in N 65° O. Fertige eine Zeichnung dazu und gib an, in welcher Richtung das Schiff vom Feuerschiff aus gesehen wurde!

12. Aus einer Entfernung von 5,85 sm (1 sm = 1,852 km) wurde ein Schiff in S 37° O gepeilt. Gib in einer maßstäblichen Zeichnung den Standort des Schiffes an!

XI. Das Dreieck / Vermessungen

47. Die Winkel des Dreiecks

Die Winkelsumme im Dreieck

1. Schneide ein genügend großes Dreieck (Packpapier!) aus, reiße seine Ecken ab und lege sie mit den Spitzen aneinander! Was für ein Winkel entsteht?
2. Zeichne mehrere Dreiecke von verschiedener Form! Miß jedesmal die drei Winkel und zähle zusammen!
3. Bilde zeichnerisch die Summe der Winkel eines Dreiecks, indem du sie aneinander anträgst!
4. Falte ein Dreieck so, daß die drei Eckpunkte auf einen Punkt der Grundseite zu liegen kommen!
5. Verlängere die Seiten eines Dreiecks über ihre Eckpunkte hinaus!
   a) Was kann man über die entstandenen Winkel aussagen?
   b) Wieviel Nebenwinkel hat jeder Dreieckswinkel?
   c) Wieviel verschiedene solcher Winkel sind entstanden?

Erklärungen

1. Jedes Dreieck hat drei Winkel, die man auch als **Innenwinkel** bezeichnet.
2. Die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen **Außenwinkel**. Weil je zwei Außenwinkel gleich sind, sagt man: Das Dreieck hat drei Außenwinkel (Bild 62).

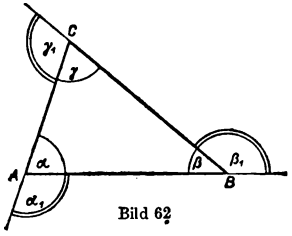


Bild 62

1. Die Summe der Winkel im Dreieck beträgt 2 *R*.
2. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Beweis zu 1: Man zieht im Dreieck ABC (Bild 63) zu $\overline{AB}$ durch C die parallele Gerade; es entstehen die Winkel δ und ε.

Nun ist

$\varepsilon = \alpha$ (Wechselwinkel an Parallelen)

und

$\delta = \beta$ („ „).

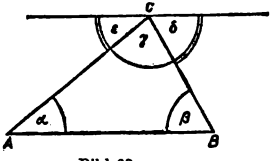


Bild 63

Man hat also gewissermaßen alle drei Dreieckswinkel in C vereinigt. Sie ergeben zusammen einen gestrecktenWinkel. Daraus folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

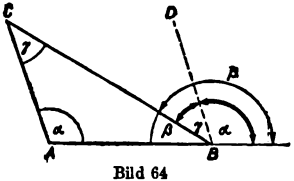


Bild 64

Beweis zu 2: Im Dreieck ABC (Bild 64) ergänzt β die Summe von $\alpha + \gamma$ zu $2R$ (Satz 1). β ergänzt auch den Außenwinkel β_1 zu $2R$, es sind Nebenwinkel. Folglich muß β_1 gleich $(\alpha + \gamma)$ sein.

Aufgaben

Innenwinkel

1. In einem Dreieck ist $\alpha = 65°$; β nimmt folgende Werte an: 5°, 15°, 25° .... Welche Werte ergeben sich für γ? Stelle sie mit denen von β in einer Tafel zusammen und beachte die Änderungen!

2. Zeichne zwei beliebige Winkel, die Winkel in einem Dreieck werden sollen, und stelle durch Zeichnung den zugehörigen dritten Winkel fest! Worauf ist zu achten? Prüfe das Meßergebnis durch Rechnung nach und stelle den Fehler fest!

3. Von den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks sind zwei bekannt. Berechne den dritten!

a) $\alpha = 56°$, $\beta = 47°$ b) $\alpha = 82°$, $\beta = 58°$
c) $\beta = 94°$, $\gamma = 39°$ d) $\beta = 28°$, $\gamma = 75°$
e) $\alpha = 18°$, $\gamma = 81°$ f) $\alpha = 119°$, $\gamma = 46°$

Winkel in besonderen Dreiecken: Das gleichschenklige Dreieck

4. Begründe folgende Sätze:

a) Im gleichschenkligen Dreieck sind durch einen Winkel auch die übrigen bestimmt.

b) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Grundwinkel.

5. In einem gleichschenkligen Dreieck mißt ein Grundwinkel a) 28°, b) 49°, c) 64°, d) 76°. Wie groß sind der Winkel an der Spitze und die Außenwinkel?

6. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt a) 132°, b) 98°, c) 67°. Bestimme die Innenwinkel und die anderen Außenwinkel!

7. Der Winkel γ an der Spitze nimmt folgende Werte an: 5°, 10°, 15°, ... Stelle die dazugehörigen Werte von α fest!

Das rechtwinklige Dreieck

8. Warum kann ein rechtwinkliges Dreieck nur einen rechten Winkel enthalten?

9. Zeichne verschiedene rechtwinklige Dreiecke und halbiere die spitzen Winkel! Die Winkelhalbierenden bilden dann stets denselben Winkel miteinander. Begründe dies! Wie groß ist dieser Winkel?

Das gleichseitige Dreieck

10. Zeichne mehrere gleichseitige Dreiecke, miß die Winkel und begründe die Feststellung!

11. Zeichne mit Lineal und Zirkel einen Winkel von 60° (30°, 15°, 75°)!

12. Ein rechter Winkel ist in drei gleiche Teile zu teilen (Bild 65)!

13. Errichte im Endpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit Lineal und Zirkel die Senkrechte! Bild 66 zeigt das Verfahren. Begründe es!

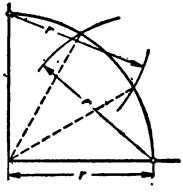


Bild 65

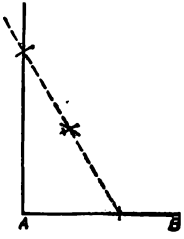


Bild 66

Anmerkung: In Bild 65 und 66 wurden die Kreisbogen mit gleichem Halbmesser geschlagen.

48. Der erste Kongruenzsatz

Wir schneiden drei verschieden lange Pappstreifen aus und verbinden sie durch Heftzwecken zu einem Dreieck! Stelle fest, ob das Dreiecksmodell fest oder beweglich ist! Stelle auf dieselbe Weise ein Viereck zusammen und untersuche es auf seine Beweglichkeit! Füge einen Streifen hinzu, der zwei gegenüberliegende Ecken verbindet! Was kann man nun feststellen?

Bild 67 zeigt uns Gegenstände unserer Umgebung, bei denen Dreiecksformen benutzt wurden, um sie starr zu machen. Weise

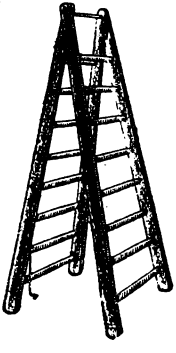


Bild 67

das bei den einzelnen Gegenständen nach! Stecke auf dem Schulhof ein Dreieck mit Fluchtstäben ab (Bild 68)! Miß die Seiten des Dreiecks und zeichne es in verkleinertem Maßstab! Miß mit dem Peilgerät (Bild 41) die Winkel des Dreiecks und bilde ihre Summe!

Miß an der Zeichnung die Winkel des Dreiecks und prüfe nach, ob sie mit denen des auf dem Hofe abgesteckten Dreiecks übereinstimmen!

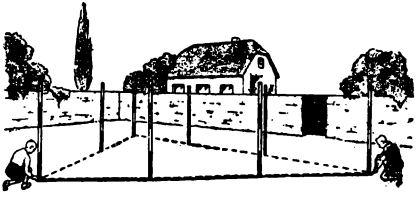


Bild 68

Vergleiche das gezeichnete Dreieck mit denen der Mitschüler, indem du es ausschneidest und auf die übrigen Dreiecke legst!

Erklärungen

Dreiecke heißen **deckungsgleich** oder **kongruent**[1]), wenn sie so aufeinandergelegt werden können, daß ihre Seiten und Winkel sich decken. Das Zeichen für deckungsgleich ist $\cong$; man schreibt kurz $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Die Seiten und Winkel eines Dreiecks nennt man seine Stücke. Bild 69 zeigt, wie sie bezeichnet werden.

Strecken und Winkel, die beim Aufeinanderlegen zusammenfallen, heißen entsprechende oder **gleichliegende** Stücke.

In deckungsgleichen Dreiecken sind gleichliegende Stücke gleich.

Ist eine Seite a größer als eine Seite b, so schreibt man $a > b$, ist a kleiner als b, so schreibt man $a < b$.

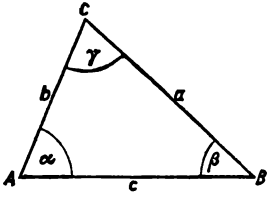


Bild 69

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus den drei Seiten!

Beispiel: $a = 2{,}9$ cm; $b = 3{,}2$ cm; $c = 4{,}1$ cm.

Ausführung (Bild 70): Zeichne auf einer Geraden UV die Strecke $AB = 4{,}1$ cm! Schlage um A als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser $b = 3{,}2$ cm und um B als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser $a = 2{,}9$ cm! Beide Kreise schneiden einander in C (C_1).

Zeichne CA und CB bzw. C_1A und C_1B!

---

1) congrúere (lat.) = übereinstimmen.

Ausführbarkeit:

Zu $\triangle ABC$ gehört ein spiegelgleiches $\triangle ABC_1$. Beide Dreiecke sind deckungsgleich.

Wäre $a + b = c$, so lägen AC und BC auf AB; das Dreieck wäre zu einer Strecke geworden. Wäre $a + b < c$, so würden sich die Kreise überhaupt nicht schneiden. Es muß also immer $a + b > c$ sein, damit ein Dreieck gezeichnet werden kann. Daraus ergibt sich auch, daß $a > c - b$ sein muß.

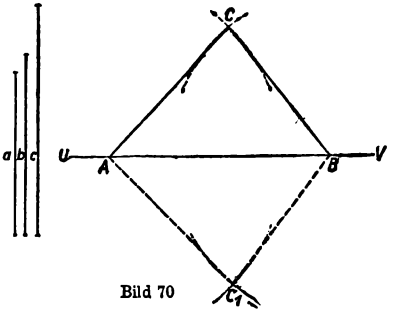
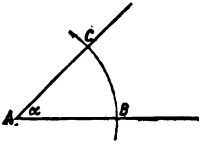


Bild 70

1. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite. Der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner als die dritte Seite.
2. Erster Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (*sss*).

Grundaufgabe:

Trage an eine Gerade g in einem ihrer Punkte einen gegebenen Winkel α an!



Ausführung:

Verfahre nach Bild 71! Die Zeichnung liefert vier Lagen für den Winkel. Sie stützt sich auf den 1. Kongruenzsatz. Begründe das!

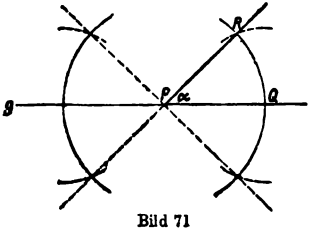


Bild 71

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $a = 3{,}7$ cm $b = 4{,}5$ cm $c = 6{,}8$ cm
b) $a = 3{,}8$ cm $b = 2{,}4$ cm $c = 4{,}7$ cm
c) $a = 6{,}5$ cm $b = 7{,}4$ cm $c = 2{,}8$ cm
d) $a = 4{,}2$ cm $b = 6$ cm $c = 5{,}5$ cm!

Miß die Winkel!

2. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus

a) $a = b = 4{,}8$ cm $c = 8{,}1$ cm
b) $a = b = 7{,}6$ cm $c = 2{,}7$ cm!

3. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus

a) $a = b = c = 5{,}3$ cm b) $a = b = c = 6{,}4$ cm!

49. Der zweite Kongruenzsatz

Zwischen den Endpunkten einer Strecke BC liegt ein Haus, so daß die Strecke nicht zugänglich ist (Bild 72). Gib nach dem Bild an, welche Strecken gemessen werden können! Welcher Winkel kann außerdem mit dem Peilgerät gemessen werden?

Es sei gemessen worden:

$AC = 50$ m;
$AB = 80$ m;
$\sphericalangle BAC = 40°$.

Zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst AC! Die Bestimmungslinien für B sind erstens der Kreis um A mit $r = 8$ cm und zum anderen der Schenkelstrahl (der freie Schenkel) des Winkels CAB. Stelle nun auf Grund der Zeichnung die Länge von BC fest!

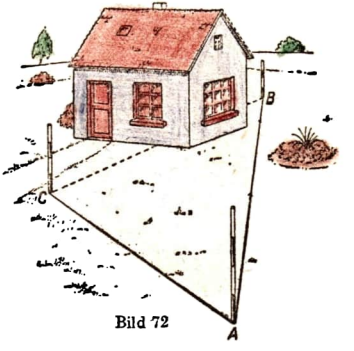


Bild 72

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel!

Beispiel: $b = 3{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\alpha = 74°$.

Beschreibe die Ausführung nach Bild 73!

Zweiter Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (*swsw*).

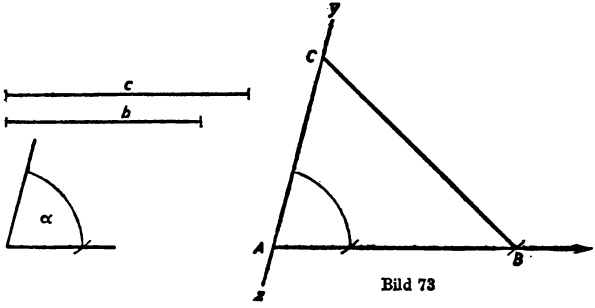


Bild 73

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a)	$a = 4{,}9$ cm	$b = 3{,}6$ cm	$\gamma = 112°$
b)	$b = 3$ cm	$c = 9$ cm	$\alpha = 40°$
c)	$a = 5{,}3$ cm	$c = 6{,}7$ cm	$\beta = 76°$
d)	$b = 4{,}8$ cm	$a = 5{,}1$ cm	$\gamma = 65°$

Miß die übrigen Stücke des Dreiecks!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus folgenden Stücken, wobei die Seite c dem rechten Winkel gegenüber liegen soll:

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm b) $a = 5{,}4$ cm, $b = 6{,}9$ cm!

3. Zeichne eine Reihe von Dreiecken aus $b = 4$ cm, $c = 6$ cm und $\alpha = 10°$, $20°, 30°, \ldots 170°$! Wie ändert sich die Seite a bei wachsendem α?

4. Ein Radfahrer fährt, um von einem Ort A nach einem Ort B zu gelangen, zu dem der Weg über einen steilen Berg führt, auf ebenen geraden Straßen zuerst in $2\frac{1}{2}$ Stunden nach einem dritten Ort C und von da in $1\frac{3}{4}$ Stunden nach B. Stelle nach einer maßstäblichen Zeichnung fest, wie weit A in der Luftlinie von B entfernt ist, wenn die beiden Straßen in C in einem Winkel von $52°$ zusammenstoßen und der Radfahrer in einer Stunde 15 km zurücklegt!

50. Der dritte Kongruenzsatz

Ein Punkt eines zu vermessenden Dreiecks ist infolge eines Hindernisses (Zaun) nicht zugänglich und soll von einer Standlinie aus bestimmt werden (Bild 74). Gib nach dem Bild an, welche Winkel außer der Standlinie gemessen werden können!

Es sei gemessen: $AB = 46\,\text{m}$; $\sphericalangle ABC = 73°$; $\sphericalangle BAC = 48°$; zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst AB! Die Bestimmungslinien für C sind die freien Schenkel der an AB in A und B angetragenen Winkel BAC und ABC. Stelle auf Grund der Zeichnung die Längen AC und BC fest!

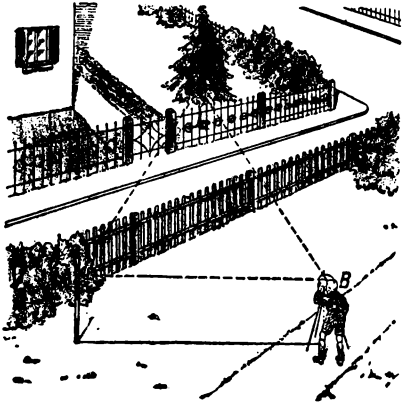


Bild 74

Grundaufgabe:

Zeichne ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln!

Beispiel:

$c = 4\,\text{cm}$;
$\alpha = 42°$; $\beta = 75°$.

Beschreibe die Ausführung nach Bild 75!

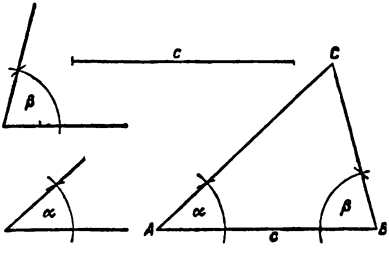


Bild 75

Dritter Kongruenzsatz: Stimmen Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln überein, so sind sie deckungsgleich (*sww*).

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $a = 9$ cm $\beta = 75°$ $\gamma = 52\frac{1}{2}°$

b) $c = 12$ cm $\gamma = 105°$ $\beta = 37°$

(Benutze den dritten Dreieckswinkel!)

c) $b = 4{,}7$ cm $\beta = 100°$ $\gamma = 65°$

(Benutze den dritten Dreieckswinkel!)

d) $c = 5{,}4$ cm $\alpha = 25°$ $\beta = 70°$!

Miß die übrigen Stücke des Dreiecks!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus

a) $a = 7$ cm $\alpha = 68°$ b) $c = 10$ cm $\beta = 37°$!

3. Auf eine 7 m hohe Brücke soll eine Fahrrampe geführt werden. Man läßt sie unter dem Winkel $\alpha = 5°$ gegen die Waagerechte ansteigen. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Länge der Fahrrampe fest!

4. Wenn die Sonne unter dem Winkel $\alpha = 38°$ gegen die Waagerechte gesehen wird, wirft eine Telegrafenstange einen Schatten von $l = 10{,}5$m Länge. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe der Stange fest!

51. Der vierte Kongruenzsatz

Betrachte Bild 76! Die Lage und die Entfernung der Punkte A und B seien aus der Karte bekannt. Punkt C soll in die Karte eingetragen werden. Gib an, welche Strecken außer AB und welche Winkel in Dreieck ABC gemessen werden können! Nach der Karte ist $AB = 83$ m. Es sei gemessen: $BC = 45$ m; $\sphericalangle BCA = 83°$. Zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst BC. Die Bestimmungslinien für A sind 1. der freie Schenkel des an BC in C angetragenen Winkels BCA und 2. der Kreis um B als

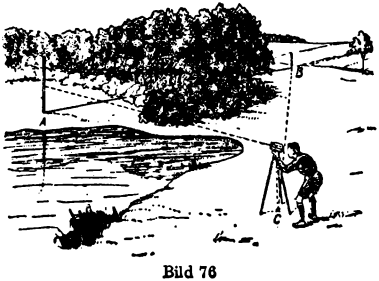


Bild 76

Mittelpunkt mit AB als Halbmesser. Stelle mit Hilfe der Zeichnung die Länge von AC und die Größe des Winkels CAB fest!

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite!

Beispiel:

$a = 2{,}6$ cm;
$b = 3{,}2$ cm;
$\beta = 105°$.

Beschreibe die Ausführung nach Bild 77! Gib an, warum nicht zwei Lösungen möglich sind!

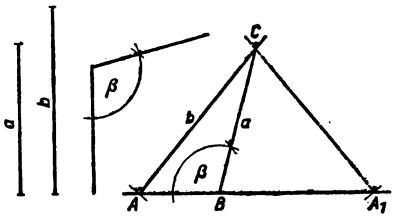


Bild 77

Vierter Kongruenzsatz: Stimmen Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite überein, so sind sie deckungsgleich (ssw).

Betrachtung

Es soll untersucht werden, ob man auch deckungsgleiche Dreiecke erhält, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren gegeben sind.

Gegeben sind:

$a = 2{,}6$ cm; $c = 4$ cm;
$\alpha = 41°$ $(a < c)$.

Man zeichnet (Bild 78) $AB = c$ und trägt in A an AB Winkel α an. Schlägt man um B mit a den Kreis, so schneidet er den freien Schenkel von α zweimal in C und D. Man erhält die beiden Dreiecke ABC und ABD; jedes enthält die gegebenen Stücke, die Dreiecke sind aber nicht deckungsgleich. Die Lösung der Aufgabe ist nicht eindeutig bestimmt.

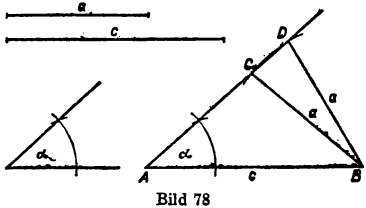


Bild 78

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $b = 6$ cm $c = 4$ cm $\beta = 120°$ b) $a = 1{,}8$ cm $c = 4{,}1$ cm $\gamma = 79°$
c) $a = 3{,}5$ cm $b = 2$ cm $\alpha = 69°$ d) $c = 3{,}9$ cm $b = 3$ cm $\gamma = 80\frac{1}{2}°$!

Miß die dritte Seite und die anderen Winkel!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus
   a) $b = 5$ cm $c = 6$ cm b) $a = 6$ cm $c = 10$ cm!

3. Zeichne ein Dreieck aus: $c = 4{,}5$ cm; $a = 4$ cm; $\alpha = 50°$! Welcher der beiden gegebenen Seiten (bezogen auf die Länge) liegt der Winkel α gegenüber? Stelle fest, wieviel Lösungen diese Aufgabe hat!

4. Zwei Orte A und B sind 7 km voneinander entfernt. Ein dritter Ort C ist von B $4\frac{1}{2}$ km entfernt. Die Blickrichtung von C nach A bildet mit CB einen Winkel von 82°. Stelle durch eine Zeichnung fest, wie weit C von A entfernt ist!

5. Von einem dreieckigen Weideplatz stellt man durch Abschreiten fest, daß zwei Seiten 172 m und 88 m lang sind. Der Winkel, den die kürzere Seite mit der dritten bildet, wird mit 95° gemessen. Zeichne den Weideplatz im geeigneten Maßstab und bestimme, wie lang die dritte Seite ist!

52. Besondere Linien im Dreieck

Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Bild 79) und in ihm a) das Lot von C zu AB, b) die Winkelhalbierende von $\sphericalangle\gamma$, c) die Verbindungsstrecke von C zur Mitte von AB!

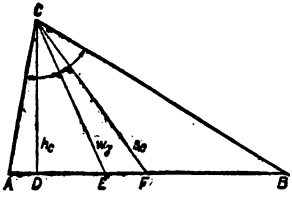


Bild 79

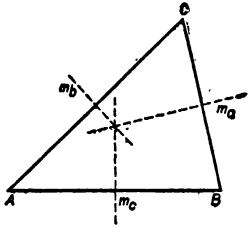


Bild 80

Zeichne in einem spitzwinkligen Dreieck a) die Lote von den Ecken zu den Gegenseiten, b) die Verbindungsstrecken von den Ecken zu den Seitenmitten, c) die drei Winkelhalbierenden! (Drei gesonderte Zeichnungen!) Was beobachtet man?

Zeichne in einem Dreieck zu je zwei Eckpunkten die Spiegelachse! (Bild 80.)

Erklärungen

1. Das Lot von einer Dreiecksecke zur Gegenseite heißt **Höhe.**
2. Die Halbierende eines Dreieckswinkels heißt **Winkelhalbierende.**
3. Die Verbindungsstrecke einer Dreiecksecke mit der Mitte der Gegenseite heißt **Seitenhalbierende.**
4. Die Senkrechte in der Mitte einer Dreiecksseite heißt **Mittelsenkrechte.**

Jedes Dreieck hat drei Höhen (h_a, h_b, h_c), drei Winkelhalbierende (w_α, w_β, w_γ), drei Seitenhalbierende (s_a, s_b, s_c) und drei Mittelsenkrechte (m_a, m_b, m_c).

Welche Bedeutung haben die angehängten kleinen Buchstaben?

Auch diese besonderen Linien im Dreieck können unter den drei gegebenen Stücken sein, aus denen ein Dreieck gezeichnet werden soll.

1. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser ist von den Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt (Bild 81).
2. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt (Bild 82).
3. Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser ist von den Seiten gleich weit entfernt (Bild 83).
4. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und teilen sich im Verhältnis 1 : 2 (Bild 84a).

Beweis zu 1 (Bild 81): Der Schnittpunkt M von je zwei der Mittelsenkrechten ist von allen drei Ecken gleich weit entfernt; also muß er auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen.

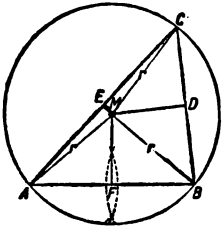


Bild 81

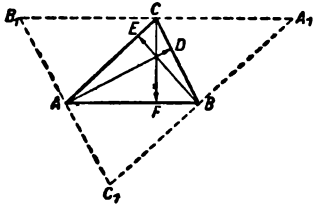


Bild 82

Beweis zu 2 (Bild 82): Zeichnet man im Dreieck ABC die Höhen und zieht durch die Ecken die Parallelen zu den Gegenseiten, bis sie einander schneiden, so entstehen drei Dreiecke, die dem Dreieck ABC kongruent sind. Die Höhen des Dreiecks ABC sind daher die Mittelsenkrechten des großen Dreiecks $A_1B_1C_1$ und schneiden sich in einem Punkt.

Beweis zu 3 (Bild 83): Zieht man je zwei Winkelhalbierende, so ist ihr Schnittpunkt O von den drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt und muß daher auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegen.

Beweis zu 4 (Bild 84b): Die Punkte E_1, D, F_1 teilen die Seite BC in vier gleiche Teile. Die durch E_1 und F_1 zu AD gezogenen Parallelen lassen erkennen, daß $SF = \frac{1}{3} CF$ ist. Entsprechend erkennt man, daß auch die Seitenhalbierende EB ein Drittel von CF abschneiden muß, sie muß also ebenfalls durch S gehen.

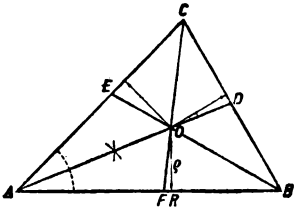


Bild 83

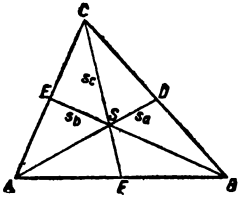


Bild 84a

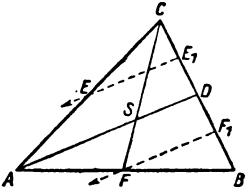


Bild 84b

Beispiel für eine Dreieckskonstruktion: Ein Dreieck zu zeichnen aus: $c = 10$ cm; $a = 7$ cm; $s_c = 6$ cm.

1. Es wird als **Planzeichnung** ein beliebiges Dreieck angefertigt, in dem die gegebenen Stücke besonders kenntlich gemacht werden (Bild 85). An Hand dieser Zeichnung ist zu untersuchen, mit Hilfe welcher Teildreiecke und Bestimmungslinien das gesuchte Dreieck zu zeichnen ist.

2. **Plan:** Zu zeichnen ist das Teildreieck BCD aus $BC = a$; $CD = s_c$; $DB = \frac{c}{2}$ nach der Grundaufgabe *sss*. Bestimmungslinien für A: 1. die Verlängerung von BD über D hinaus, 2. der Kreisbogen um B mit c als Halbmesser.

3. **Ausführung:** Es ist eine Strecke $DB = 5$ cm zu zeichnen. Um D wird ein Kreis

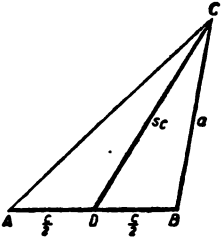


Bild 85

mit dem Halbmesser 6 cm, um B ein Kreis mit dem Halbmesser 7 cm gezeichnet, der Schnittpunkt beider Kreise heißt C. Um B wird ein Kreis von 10 cm Halbmesser gezeichnet, der die Verlängerung von BD in A schneidet. A wird mit C verbunden.

4. Nachbetrachtung: Die Aufgabe kann gelöst werden, wenn die Summe zweier Seiten des Teildreiecks BCD größer ist als die dritte Seite.

Aufgaben

1. Zeichne je ein spitz-, recht- und stumpfwinkliges Dreieck! Zeichne jedesmal die drei Mittelsenkrechten, bis sie einander schneiden, und schlage um den Schnittpunkt den Kreis, der durch die drei Ecken geht! Man nennt ihn den Umkreis des Dreiecks.

2. Zeichne in je einem spitz-, recht- und stumpfwinkligen Dreieck die drei Höhen und bestimme jedesmal ihren Schnittpunkt!

3. Zeichne in je einem spitz-, stumpf- und rechtwinkligen Dreieck die drei Winkelhalbierenden und in jedem Fall den Kreis, der die drei Seiten berührt! Man nennt ihn den Inkreis des Dreiecks.

Zeichne ein Dreieck aus (r = Halbmesser des Umkreises):

4. $a = 3{,}5$ cm	$b = 3$ cm	$r = 2$ cm
5. $b = 2{,}5$ cm	$c = 4{,}9$ cm	$r = 2{,}5$ cm
6. $c = 5{,}4$ cm	$\alpha = 21°$	$r = 3$ cm
7. $a = 6$ cm	$h_c = 5$ cm	$b = 7$ cm
8. $a = 8$ cm	$h_c = 6$ cm	$\gamma = 75°$
9. $a = 7$ cm	$h_c = 3$ cm	$\gamma = 45°$
10. $a = 8$ cm	$h_a = 5$ cm	$\gamma = 67{,}5°$
11. $c = 6$ cm	$h_c = 5{,}5$ cm	$a = 7$ cm
12. $\gamma = 75°$	$w_\gamma = 5$ cm	$a = 7$ cm
13. $\alpha = 67{,}5°$	$w_\alpha = 7$ cm	$c = 9$ cm
14. $\beta = 105°$	$w_\beta = 5$ cm	$c = 8$ cm
15. $a = 4{,}5$ cm	$b = 6{,}6$ cm	$s_a = 6{,}4$ cm
16. $c = 7$ cm	$\alpha = 70°$	$s_c = 5{,}4$ cm
17. $b = 4{,}8$ cm	$h_c = 4$ cm	$s_b = 6$ cm!

53. Vermessungs- und Ortungsaufgaben

1. Bestimme die Breite eines Flusses von einem seiner Ufer aus (Bild 86)! Hart am jenseitigen Ufer steht ein Baum (oder ein

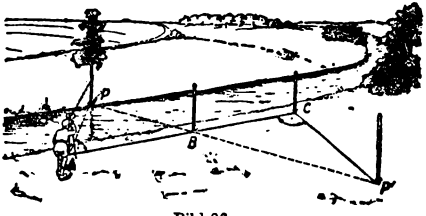


Bild 86

Pfahl). Stecke auf dem diesseitigen Ufer eine Gerade ab und bestimme auf ihr mit Hilfe des Peilgerätes Punkt A so, daß $\sphericalangle PAB = R$ ist! Dann stecke auf der Geraden die gleichen Strecken AB und BC ab und lege das Dreieck ABP auf das diesseitige Ufer um!

Beispiel: $AB = 84$ m; $\sphericalangle ABP = 55°$ (Zeichnung 1 : 1 000).

2. Bestimme die Höhe eines Baumes (Turmes, Hauses) unter Benutzung eines Försterdreiecks (Bild 87a und b)! Welche Strecke entspricht der Höhe des Baumes? (Augenhöhe berücksichtigen!) Warum?

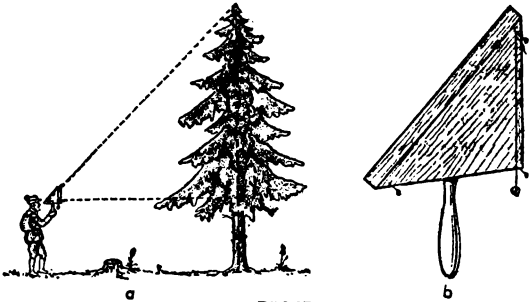


Bild 87

3. Auf einem nach N 20° O steuernden Schiff peilte man das Feuerschiff von Borkum in N 65° O und kam nach einer Fahrt von 3,8 sm (1 sm = 1 852 m) an dem Feuerschiff vorbei (Bild 88). Stelle durch eine maßstabgerechte Zeichnung fest, in welchem Abstand das Schiff an dem Feuerschiff vorbeifuhr!

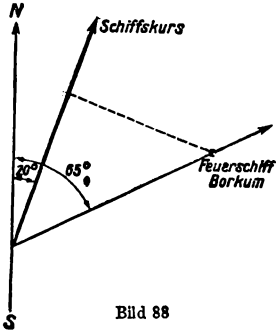


Bild 88

4. Auf einem nach N 13° O fahrenden Schiff wurde das Feuer von Helgoland in N 44° O und dann nach einer Fahrt von 7,5 sm in S 37° O gepeilt. Stelle fest, in welchen Entfernungen vom Feuer die Peilungen vorgenommen wurden!

5. Auf einer waagerechten Straße, in deren Richtung der Gipfel eines Berges sichtbar ist, wird an zwei aufeinanderfolgenden Punkten A und B, deren Entfernung voneinander 120 m beträgt, der Gipfel des Berges unter den Erhebungswinkeln $\alpha = 30°$ und $\beta = 32°$ gesehen. Entnimm einer Zeichnung im Maßstab 1 : 10 000, wie hoch der Berg ist!

6. Durch einen Berg soll zwischen den Punkten A und B ein Tunnel gebaut werden. Man will auf beiden Seiten gleichzeitig mit dem Bau beginnen. Es ist festzustellen, wie lang der Tunnel wird und in welchen Richtungen man in den Berg hineinarbeiten muß.

Man bestimmt im anschließenden Gelände einen Punkt C so, daß von ihm A und B zugänglich sind. Die Strecken AC und BC werden um sich selbst über C hinaus verlängert bis A_1 und B_1. Gib an, welche Dreiecke dann kongruent sind (nach welchem Kongruenzsatz)!

Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000, wenn durch Messen bestimmt wurden:

a) $AC = 55$ m, $BC = 80$ m, $\sphericalangle ACB = 115°$

b) $AC = 76$ m, $BC = 110$ m, $\sphericalangle ACB = 85°$!

7. Man will wissen, wie hoch eine Burg, die auf einer Bergkuppe erbaut wurde, über die Ebene emporragt (Bild 89a). Der Fußpunkt der zu bestimmenden Höhe ist nicht zugänglich. Man steckt in der Ebene eine auf die Burg zulaufende Standlinie AB ab (Bild 89b) und mißt die Erhebungswinkel α und β bei A und B. Die Höhe $CD = h$ entnimmt man einer maßstabgerechten Zeichnung.

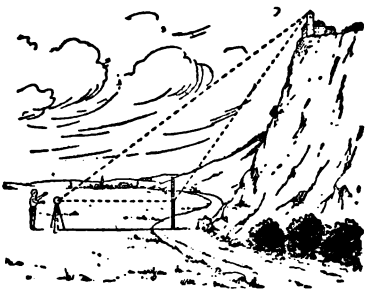


Bild 89a

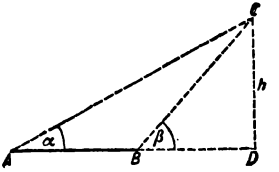


Bild 89b

Beispiele:

a) $AB = 65$ m, $\sphericalangle \alpha = 32°$, $\sphericalangle \beta = 48°$, Augenhöhe $= 1{,}35$ m

b) $AB = 140$ m, $\sphericalangle \alpha = 18°$, $\sphericalangle \beta = 33°$, „ $= 1{,}25$ m

8. Steht am Fluß (Teich oder See) ein Turm oder ein hohes Haus, dessen Höhe man kennt, so bestimmt man die Breite des Flusses (Teiches oder Sees) nach Bild 90.

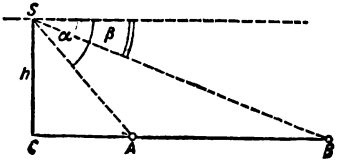


Bild 90

Man mißt mit dem Winkelmesser die Senkungswinkel α und β, die die Peilstrahlen zum nahen und fernen Ufer mit der Waagerechten bilden. Aus einer Zeichnung im geeigneten Maßstab kann man die Breite ($= AB$) feststellen.

Beispiele: a) $h = 24$ m, $\sphericalangle \alpha = 65°$, $\sphericalangle \beta = 28°$

b) $h = 32$ m, $\sphericalangle \alpha = 72°$, $\sphericalangle \beta = 38°$

XII. Das Viereck

54. Parallelogramme

Stelle nach Bild 91 ein bewegliches Viereck aus je zwei gleich langen Stäben her und bilde die Diagonalen durch gespannte Fäden! Verändere die Gestalt des Vierecks, vergleiche seine Winkel und beobachte die Diagonalen! Fertige Zeichnungen dazu an!

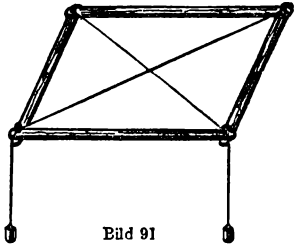


Bild 91

Erklärungen

Ein Viereck heißt **Parallelogramm**[1]), wenn zwei Paar Gegenseiten parallel sind.

Die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken eines Vielecks heißen **Diagonalen**.

1. Im Parallelogramm ist die Summe je zweier Nachbarwinkel gleich 180°.
2. Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.
3. Im Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich.
4. Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Anleitung zu den Beweisen: Weise nach, daß jede Diagonale ein Parallelogramm in zwei deckungsgleiche Dreiecke zerlegt!

Beide Diagonalen zerlegen das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen je zwei kongruent sind. Weise auch das nach (Bild 92)!

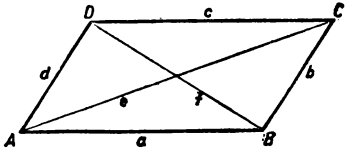


Bild 92

Aufgaben

Zeichne ein Parallelogramm aus

1. a) $a = 5$ cm $\quad b = 6$ cm $\quad e = 4$ cm

   b) $a = 5$ cm $\quad e = 4$ cm $\quad \beta = 45°$

1) parállelos (gr.) = gleichlaufend; to gramma (gr.) = der Buchstabe, die Schrift, die Zeichnung (vgl. Grammatik).

2. a) $a = 5$ cm $e = 8$ cm $f = 6{,}4$ cm
   b) $b = 6$ cm $e = 12$ cm $f = 5$ cm

3. a) $a = 5{,}5$ cm $e = 8$ cm $\sphericalangle (ef) = 75°$
   b) $a = 6{,}5$ cm $f = 10$ cm $h_a = 3{,}5$ cm

4. a) $a = 5$ cm $e = 4$ cm $\sphericalangle (eb) = 82°$
   b) $e = 8$ cm $f = 6{,}4$ cm $\sphericalangle (ef) = 105°$!

5. Bild 93 stellt eine Briefwaage und Bild 94 eine Tafelwaage schematisch dar. Wie wird in beiden Fällen erreicht, daß die Schalen beim Wägen immer die waagerechte Richtung behalten? Begründe die Antwort mit den Eigenschaften des Parallelogramms!

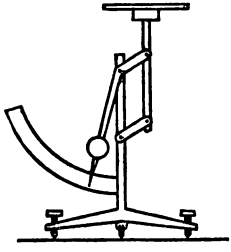


Bild 93

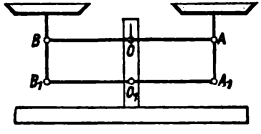


Bild 94

Betrachte auch die Aufhängevorrichtung einer Fahrradlampe!

6. Zeichne die Eisenbahnschranke (Bild 95) im geöffneten Zustand bei einem Winkel von 65° (Länge 8 m, Höhe 1,20 m)!

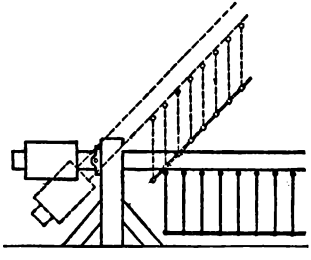


Bild 95

7. a) Untersuche, ob ein Parallelogramm Spiegelachsen besitzt, ob also kongruente Teile des Parallelogramms durch Umklappen zur Deckung gebracht werden können!
   b) In Bild 92 kann das Dreieck ACD mit dem Dreieck ABC nur durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Gib den Drehpunkt an! Wie groß ist der Drehwinkel?

8. Verbinde Punkte der Gegenseiten eines Parallelogramms durch eine Strecke, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, und beweise, daß diese Strecke durch den Schnittpunkt halbiert wird!

9. Gebilde, die durch eine Drehung von 180° um einen Punkt O (den Mittelpunkt) zur Deckung gebracht werden können, heißen punktsymmetrisch. Welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Parallelogramm?

10. Betrachte die Punkte der Gegenseiten in Aufg. 8 als zum Mittelpunkt symmetrische Punkte. Was geschieht also mit der Verbindungsstrecke spiegelgleicher Punkte durch den Mittelpunkt?

55. Umkehrungen

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn
a) die Gegenseiten einander gleich sind,
b) zwei Gegenseiten gleich und parallel sind,
c) die Diagonalen einander halbieren.

Anleitung zu den Beweisen: Durch den Nachweis deckungsgleicher Dreiecke (Bild 92) ergibt sich die Gleichheit zweier gegenüberliegender Winkel.

Aufgaben

1. Zeichne ein Parallelogramm und fälle vom Schnittpunkt der Diagonalen die Lote auf die Seiten und verbinde je zwei benachbarte Fußpunkte! Was für ein Viereck entsteht? (Beweis!)

Zeichne ein Parallelogramm aus

2. a) $a = 5$ cm $\quad e = 4$ cm $\quad \sphericalangle (eb) = 82°$
   b) $e = 8$ cm $\quad f = 6{,}4$ cm $\quad \sphericalangle (ef) = 105°$

3. a) $a = 5$ cm $\quad f = 6{,}4$ cm $\quad \sphericalangle (ef) = 75°$
   b) $e = 7$ cm $\quad \sphericalangle (ef) = 85°$ $\quad h_a = 4{,}4$ cm!

4. Zeichne ein durch den Winkel $\alpha = 75°$ und die Seiten $a = 6$ cm und $b = 5$ cm bestimmtes Parallelogramm durch Herstellung a) paarweise paralleler Gegenseiten, b) paarweise gleicher Gegenseiten, c) eines Paares paralleler und gleicher Gegenseiten, d) eines Paares paralleler und eines Paares gleicher Gegenseiten!

56. Trapez und Viereck im allgemeinen

Wir stellen aus vier verschieden langen Stäben oder Pappstreifen ein Viereck her und verbinden die Stabenden gelenkig miteinander (Gelenkviereck)! Halte eine Seite als Grundseite fest und verschiebe die anderen! Wie kann man das Gelenkviereck versteifen?

Versuche, das Gelenkviereck so zu verformen, daß zwei Seiten parallel verlaufen!

Erklärungen

Ein Viereck ist durch vier in einer Ebene liegende Punkte bestimmt.

Ein Viereck heißt **Trapez**, wenn zwei Gegenseiten parallel sind.

Die parallelen Gegenseiten heißen Grundseiten, die nicht parallelen Schenkel.

Die Verbindungslinie der Mitten der Schenkel heißt **Mittellinie** des Trapezes.

Der Abstand der Grundlinien wird als Höhe bezeichnet.

1. Ein Viereck ist durch 5 Stücke bestimmt.
2. Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks beträgt 4 R.
3. Zieht man in einem Trapez durch die Mitte eines Schenkels die Parallele zu den Grundseiten, so ist diese Parallele die Mittellinie des Trapezes.
4. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der Grundseiten.

Anleitung zu den Beweisen:

Zu 1 und 2: Jedes Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite zerlegt.

Zu 3 (Bild 96): Aus der Deckungsgleichheit der Dreiecke BFH und CGF folgt $BF = FC$.

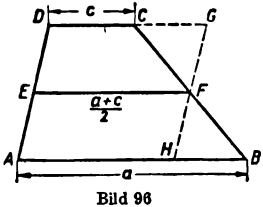


Bild 96

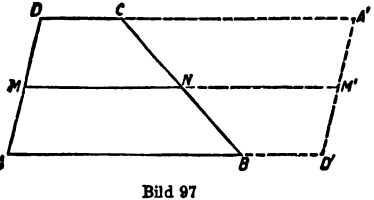


Bild 97

Zu 4 (Bild 97): Dreht man das Trapez um N als Mittelpunkt um 180° (Punktspiegelung), so entsteht das Parallelogramm $AD'A'D$, in dem MM' durch N halbiert wird. Es ist $MM' = AD' = AB + CD = a + c$; folglich ist $MN = \frac{a+c}{2}$.

Grundaufgabe: Teile eine Strecke AB in n (beliebig viele) gleiche Teile (Bild 98)!

Ausführung: Lege durch A eine Gerade in beliebiger Richtung, trage auf ihr von A aus hintereinander n gleiche Teile ab, verbinde den Endpunkt B' des letzten Teiles mit B und zeichne zu der Verbindungslinie durch die übrigen Endpunkte die Parallelen! Der Beweis ergibt sich aus Satz 3. Führe ihn!

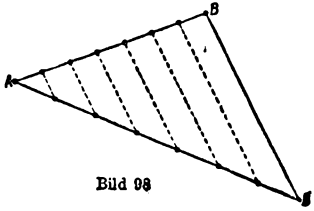


Bild 98

Aufgaben

1. Zeichne ein Viereck aus den Stücken:

a)	$a = 5$ cm	$b = 4$ cm	$d = 6$ cm	$\alpha = 112\frac{1}{2}°$	$\beta = 75°$
b)	$a = 6$ cm	$b = 5$ cm	$c = 3$ cm	$d = 7$ cm	$e = 7$ cm
c)	$a = 5$ cm	$b = 4$ cm	$c = 8$ cm	$e = 7$ cm	$\alpha = 120°$
d)	$a = 3$ cm	$b = 4$ cm	$c = 6$ cm	$e = 4{,}5$ cm	$f = 7$ cm
e)	$a = 6{,}3$ cm	$b = 3{,}4$ cm	$\alpha = 54°$	$\beta = 70°$	$\gamma = 145°$
f)	$a = 5$ cm	$e = 6{,}7$ cm	$f = 5{,}8$ cm	$\alpha = 84°$	$\beta = 72°$!

Zeichne ein Trapez aus:

2. a)	$a = 4$ cm	$c = 2{,}5$ cm	$d = 3$ cm	$\alpha = 85°$
b)	$a = 8$ cm	$b = 6$ cm	$d = 5$ cm	$\delta = 100°$
3. a)	$a = 5$ cm	$d = 3$ cm	$\alpha = 80°$	$\beta = 60°$
b)	$a = 6$ cm	$c = 4$ cm	$d = 4{,}5$ cm	$e = 5{,}5$ cm!

4. Bild 99 zeigt ein sog. Gaffelsegel, das am Mast zwischen zwei Rundhölzern, der Gaffel und dem Großbaum, an einem von der Mastspitze zur Gaffelmitte führenden Seil aufgehängt ist. Es hat folgende Ausmaße: Gaffel 3 m lang, Stützpunkt der Gaffel 2 m unterhalb der Mastspitze, Halteseil 1,8 m lang, Großbaum 4 m lang (senkrecht zum Mast), Großbaumstütze 6 m unter der Mastspitze. Zeichne das Segel im Maßstab 1 : 100!

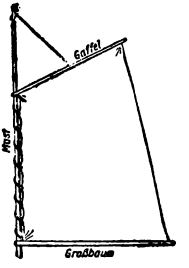


Bild 99

5. Die Entfernung zweier Punkte X und Y, die wegen eines Hindernisses (Berg, See o. dgl.) nicht unmittelbar gemessen werden kann, läßt sich auf folgende Weise bestimmen: Zwei Punkte P und Q werden so ausfindig gemacht (Bild 100), daß von ihnen aus X und Y angepeilt werden, also $\sphericalangle XPY = \alpha$ und $\sphericalangle XQY = \beta$ bestimmt und ferner die Strecken $PX = a$, $QX = b$, $\sphericalangle PXQ = \varepsilon$ gemessen werden können. Bestimme durch Zeichnung die Länge von XY für den Fall, daß $a = 270$ m, $b = 135$ m, $\alpha = 95°$, $\beta = 84°$, $\varepsilon = 112°$ gemessen wurde!

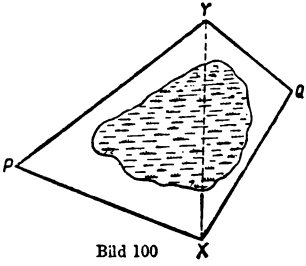


Bild 100

6. Die nicht unmittelbar zu messende Entfernung zweier unzugänglicher Punkte XY kann mittels einer festen Standlinie $AB = a$ durch Vorwärtseinschneiden folgendermaßen bestimmt werden (Bild 101): Von den Endpunkten der Standlinie AB werden die Punkte X und Y angepeilt und $XAB = \alpha_2$, $\sphericalangle YAB = \alpha_1$, $\sphericalangle XBA = \beta_1$ und $\sphericalangle YBA = \beta_2$ gemessen. Bestimme durch Zeichnung die Entfernung XY, AX und BX für den Fall, daß $a = 155$ m, $\alpha_1 = 42°$, $\alpha_2 = 124°$, $\beta_1 = 33°$, $\beta_2 = 105°$ gemessen wurde!

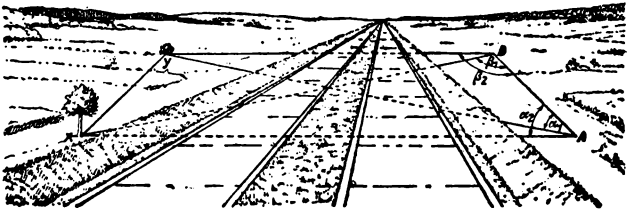


Bild 101

7. Löse die gleiche Aufgabe wie 6. für den Fall, daß X und Y auf verschiedenen Seiten der Standlinie liegen!

8. Durch einen Bergrücken, von dem Bild 102 einen lotrechten Schnitt wiedergibt, soll von A nach B eine Rohrleitung vorgetrieben werden. Um ihre Länge und Steigung zu bestimmen, werden die Entfernungen $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und in D der Senkungswinkel δ_1 für A und der Erhebungswinkel δ_2 für C, schließlich in C der Senkungswinkel γ_1 für B gemessen. Bestimme durch Zeichnung die Länge der Rohrleitung und ihren Neigungswinkel gegen die Waagerechte für den Fall, daß $b = 650$ m, $c = 940$ m, $d = 570$ m, $\sphericalangle \delta_1 = 67°$, $\sphericalangle \delta_2 = 18°$ und $\sphericalangle \gamma_1 = 76°$ gemessen wurde!

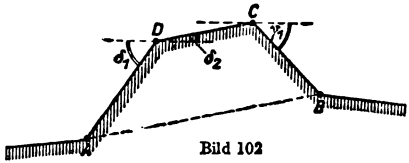


Bild 102

Beweise die Sätze:

9. Betrachte ein Dreieck als ein Trapez, dessen eine Grundseite zu Null zusammengeschrumpft ist. Zeichne die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten und beweise, daß sie gleich der halben dritten Seite ist!

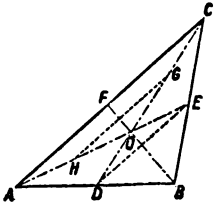


Bild 103

10. Benutze den Satz Aufg. 9 und beweise nach Bild 103, daß der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks von den Mitten der Seiten halb so weit entfernt ist wie von der gegenüberliegenden Ecke!

57. Rhombus, Drachenviereck und gleichschenkliges Trapez

Falte ein Blatt Papier einmal zusammen und durchstich es! Falte es auseinander, lege durch die beiden Durchstichpunkte eine Gerade, falte das Papier längs der Geraden zusammen und durchstich es zum zweiten Male! Falte es auseinander, beschreibe die durch die Durchstichpunkte gebildete Figur und gib ihre Symmetrieeigenschaften an!

Durchstich ein einfach gefaltetes Papier, wähle auf der Faltlinie zwei beliebige Punkte und verbinde jeden der Durchstichpunkte mit ihnen! Welches Spielzeug hat die gleiche Gestalt? Gib die Symmetrieeigenschaften der Figur an!

Durchstich ein einfach zusammengefaltetes Papier zweimal, verbinde die einander benachbarten Punkte, beschreibe die entstandene Figur und ihre Symmetrieeigenschaften! An welchen Gegenständen der Umgebung finden wir solche Figuren?

Erklärungen

1. Der **Rhombus ist ein Viereck mit zwei aufeinander senkrechten**, durch die Eckpunkte verlaufenden Spiegelachsen (Bild 104).
2. Das Drachenviereck enthält eine durch zwei gegenüberliegende Ecken verlaufende Spiegelachse (Bild 105).
3. Das **gleichschenklige Trapez** ist ein Viereck mit einer Spiegelachse, die nicht durch die Eckpunkte verläuft. Die symmetrisch liegenden Seiten heißen Schenkel des Trapezes (Bild 106).

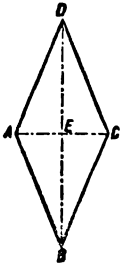


Bild 104

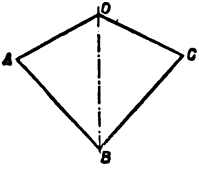


Bild 105

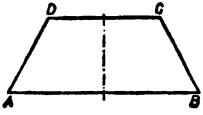


Bild 106

1. **Die vier Seiten des Rhombus sind gleich lang.**
2. **Je zwei Gegenseiten des Rhombus sind parallel.**
3. **In dem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander, halbieren einander und die Winkel an den Ecken.**
4. **Das Drachenviereck hat zwei Paare gleich langer, benachbarter Seiten und ein Paar gleicher, gegenüberliegender Winkel.**
5. **Das gleichschenklige Trapez hat ein Paar gleich langer Seiten.**

Anleitung zu den Beweisen: Die Sätze folgen aus der Symmetrie.

Aufgaben

Zeichenübungen

Die Benennung der Stücke ist wie im Bild 92.

Zeichne einen Rhombus aus

1.	a) $e = 7$ cm	$f = 6$ cm	b) $e = 6$ cm	$a = 5$ cm
2.	a) $e = 8$ cm	$\alpha = 75°$	b) $a = 6{,}2$ cm	$\alpha = 105°$!

3. Zeichne mit Hilfe eines Rhombus durch einen Punkt P die Parallele zu einer Geraden g (ohne Benutzung des Schiebedreiecks)!

4. Zeichne ein Drachenviereck $ABCD$ aus

a) $a = b = 3$ cm $\quad c = d = 4$ cm $\quad \gamma = 45°$
b) $a = b = 4{,}2$ cm $\quad d = c = 2{,}5$ cm $\quad \alpha = 106°$!

5. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ aus

a) $a = 5$ cm $\quad b = 4$ cm $\quad \beta = 60°$
b) $a = 4$ cm $\quad d = 3$ cm $\quad \delta = 105°$
c) $a = 4{,}5$ cm $\quad b = 3$ cm $\quad h = 2{,}8$ cm!
(h ist der Abstand der parallelen Seiten.)

Beweise die Sätze:

6. Die Seitenmitten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks.

7. Die Seitenmitten eines Rechtecks sind die Ecken eines Rhombus.

8. Im gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an jeder der Grundseiten gleich.

9. Im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich.

Anwendungen

10. An Hauseingängen und Läden findet man hin und wieder Scherengitter, die nach den Seiten zusammengeschoben werden können.
a) Zeichne ein Scherengitter, das geschlossen ist!
b) Zeichne es so, daß der Eingang zur Hälfte freigegeben wird! Wie ändern die Gelenkrhomben ihre Gestalt?

11. „Nürnberger Schere". Bild 107a und b zeigt die Verwendung der Gelenkrhomben („Nürnberger Schere") bei einem zusammenlegbaren Bettgestell. Jede Verstrebung ist 48 cm, die waagerechte Liegefläche 180 cm lang.

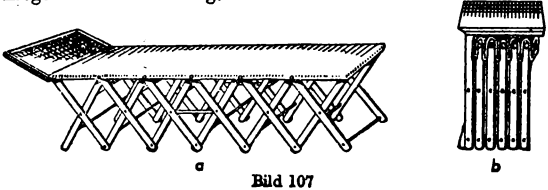


Bild 107

11. a) Welchen Vorteil gewährt die Einrichtung?
b) Führe andere Beispiele für die Verwendung von Gelenkrhomben an!

12. Der Durchmesser einer Kaffeekanne ist unten 21 cm und oben 12 cm groß; der obere Rand ist von dem unteren 35 cm entfernt. Zeichne den Längsschnitt durch die Kaffeekanne (ohne Tülle und Henkel) im Maßstab 1 : 2!

13. Die in Bild 108 gezeichnete Weichensignallaterne zeigt dem Lokomotivführer, daß die Weiche auf das durchgehende Gleis gestellt ist. Zeichne die Scheibe dieser Laterne nach Bild 108 im Maßstab 5 : 1!

14. Entnimm die Maße zu einem Waschkorb, wie ihn Bild 109 darstellt, eurem Haushalt und zeichne seine Vorder- und seine Seitenflächen im Maßstab 1 : 10!

Bild 108

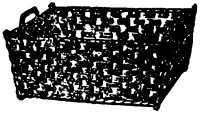


Bild 109

15. Den Querschnitt eines Eisenbahndammes zeigt Bild 110. Entnimm ihm die Maße und zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 100!

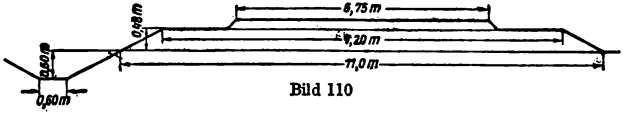


Bild 110

16. Zeichne den Schnitt durch die Flußstrecke der Schwebebahn Wuppertal (Bild 111) in doppelter Größe! Gib die Größe der nicht eingetragenen Maße an!

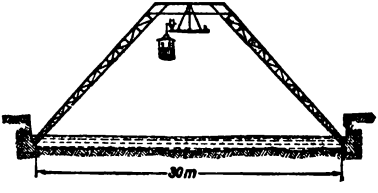


Bild 111

58. Rechteck und Quadrat

Wir haben beim Quader und Würfel Sonderformen des Parallelogramms kennengelernt; gib Namen, Form und Begrenzung dieser Körperflächen an!

Erklärungen

1. Ein Parallelogramm mit gleichen Winkeln heißt **Rechteck.**
2. „ „ „ „ „ und Seiten heißt **Quadrat.**

Im Rechteck sind die Diagonalen gleich.

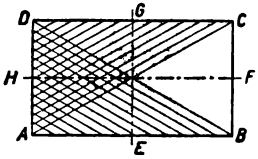


Bild 112

Anleitung zum Beweis (Bild 112):

Durch Spiegelung an der Achse HF geht $\Delta\ ABD$ über in $\Delta\ ACD$.

Im Quadrat sind die Diagonalen gleich; sie stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

Aufgaben

Zeichenübungen

Die Benennung der Stücke zeigt Bild 92.

Zeichne ein Rechteck aus

1. a) $a = 6$ cm $b = 5$ cm b) $a = 5{,}5$ cm $e = 6{,}5$ cm
2. a) $e = 7$ cm $\sphericalangle (ef) = 75°$ b) $a = 5$ cm $\sphericalangle (ef) = 150°$!
3. Zeichne im Maßstab 1 : 100 eine 4 m hohe und 7 m lange Wand und auf ihr Punkt P, der von der unteren Seite 1 m und von der linken Seite 2 m entfernt ist!
4. Zeichne ein Quadrat mit der Seite 5 cm und in ihm einen Punkt P so, daß er von zwei Seiten gleich weit entfernt ist, von einer der anderen 1,2 cm! (2 Fälle!)
5. Weise nach, daß die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

Anwendungen

6. Die obere und die untere Leiste der Lattentür im Bild 113 sind 20 cm breit und 1 m lang, die Strebe ist 20 cm breit, die Latten sind 7 cm breit. Die Tür ist 1,40 m breit und 1,80 m hoch. Fertige eine maßstäbliche Zeichnung an!

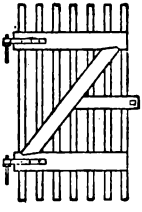


Bild 113

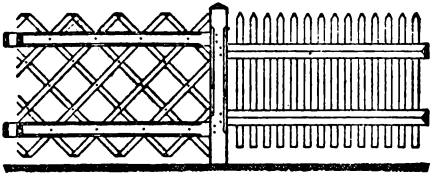


Bild 114

7. Entnimm die Maße zum maßstäblichen Zeichnen der Zaunarten dem Bild 114, das im Maßstab 1 : 50 gezeichnet wurde! Zeichne im Maßstab 1 : 20!

8. Eine Gerade AB trifft auf ein Haus. Man soll ihre Verlängerung jenseits des Hauses bestimmen (Bild 115). Beweise auf Grund des Bildes, daß E ein Punkt der Geraden ist!

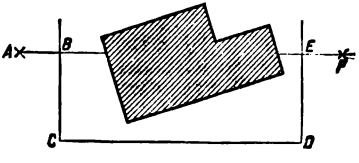


Bild 115