Aufgabensammlung und Leitfaden der

GEOMETRIE

10.–12. SCHULJAHR

2019

Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie

10.–12. SCHULJAHR

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN / LEIPZIG

Lizenzausgabe des Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin/Leipzig,
aus der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig
Unveränderter Nachdruck der Auflage 1948

Bestell-Nr. 2019 Preis 4 DM (gbd.), 3,20 DM bei Lieferung über die Schule · 131.–150. Tausend
Lizenz Nr. 334 · 1000/51-I-80/50
Satz: Leipziger Druckhaus, Leipzig (M 115)
Offsetdruck: F. M. Geidel, Leipzig (M 133)

Inhalt

Aufgabensammlung

Erstes Kapitel

Ebene Trigonometrie

Zweites Kapitel

Stereometrie

Drittes Kapitel

Darstellende Geometrie

Viertes Kapitel

Sphärische Trigonometrie

Fünftes Kapitel

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte

Inhalt

Sechstes Kapitel

Analytische Geometrie

Leitfaden

AUFGABENSAMMLUNG

Erstes Kapitel

Ebene Trigonometrie[1])

§ 1. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

Die Funktionen

1. a) Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke von verschiedener Größe mit demselben spitzen Winkel α. Vergleiche den Wert der Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken. **b)** Ändere den Winkel α. Wie ändern sich dann die Werte der Seitenverhältnisse?

2. Wieviel Seitenverhältnisse lassen sich in einem rechtwinkligen Dreieck aus den drei Seiten bilden?

3. Was versteht man unter **a)** $\sin\alpha$, **b)** $\cos\alpha$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha$, **d)** $\operatorname{ctg}\alpha$?

4. Zeichne in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe CD. Drücke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ aus durch zwei Seiten **a)** des Dreiecks ABC, **b)** des Dreiecks ACD, **c)** des Dreiecks BCD; **d)** bis **f)** die entsprechenden Aufgaben für den Winkel β. — Stelle irgend zwei Seiten des ganzen Dreiecks oder eines Teildreiecks zu Seitenverhältnissen zusammen und drücke sie aus als Funktionen **g)** des Winkels α, **h)** des Winkels β.

5. Bestimme durch Zeichnung (Winkelmesser gestattet) und Messung die Werte der Sinusfunktion für folgende Winkel: **a)** 10°, **b)** 20°, **c)** 30°, **d)** 40°, **e)** 45°, **f)** 50°, **g)** 60°, **h)** 70°, **i)** 80°.

6. a) Benutze die Ergebnisse der Aufgabe 5 zur Herstellung einer graphischen Darstellung der Sinusfunktion. **b)** Beschreibe den Verlauf der Sinusfunktion.

7. Entnimm der graphischen Darstellung (Aufg. 6) die Werte der Sinusfunktion für folgende Winkel: **a)** 15°, **b)** 42°, **c)** 63°, **d)** 76°. Prüfe die Ergebnisse durch Zeichnung von rechtwinkligen Dreiecken nach.

8. Stelle aus der graphischen Darstellung oder durch Zeichnung eines rechtwinkligen Dreiecks die Winkel fest, deren Sinusfunktion folgende Werte hat: **a)** 0,1, **b)** 0,6, **c)** 0,35, **d)** $\frac{1}{4}$, **e)** $\frac{2}{5}$.

9. bis **12.** Löse die den Aufgaben 5 bis 8 entsprechenden Aufgaben für die Kosinusfunktion.

---

1) Die Paragraphen 1 bis 3 dienen der Wiederholung und können unter Umständen überschlagen werden, es sei denn, daß der Stoff noch nicht behandelt ist.

13. bis **15.** Löse die den Aufgaben 5 bis 7 entsprechenden Aufgaben für die Tangensfunktion.

16. Für welche Winkel hat die Tangensfunktion den Wert a) 0,1, b) 0,7, c) 1, d) 1,3, e) $1\frac{3}{5}$, f) $2\frac{1}{4}$?

17. bis **20.** Löse die den Aufgaben 5 bis 7 und 16 entsprechenden Aufgaben für die Kotangensfunktion.

21. Berechne aus geeigneten Dreiecken die Werte der vier Funktionen für a) 45°, b) 60°, c) 30°. Vergleiche die Ergebnisse mit den durch Zeichnung gefundenen Werten.

22. Welche Werte wird man den trigonometrischen Funktionen beilegen: a) für 0°, b) für 90°? (Grund?)

Beziehungen zwischen den Funktionen

23. a) α und β seien die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks. Beweise folgende Formeln:

$$\sin\alpha = \cos\beta, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\cos\alpha = \sin\beta, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

b) Beweise folgende Formeln:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha), \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha).$$

24. Was ergibt sich aus den Formeln 23b) für den Verlauf a) der Sinus- und Kosinuskurve, b) der Tangens- und Kotangenskurve? — Für welchen Winkel müssen c) Sinus- und Kosinusfunktion, d) Tangens- und Kotangensfunktion übereinstimmen? e) Vergleiche die in Aufgabe 21 errechneten Funktionswerte von 30° und von 60°.

25. a) Zeige mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes, daß

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

ist. b) Drücke $\sin\alpha$ durch $\cos\alpha$, c) $\cos\alpha$ durch $\sin\alpha$ aus.

26. Gegeben ist $\sin\alpha$ gleich a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 0,2, d) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. Berechne $\cos\alpha$.

27. Gegeben ist $\cos\alpha$ gleich a) $\frac{3}{15}$, b) $\frac{1}{3}$, c) 0,7, d) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Berechne $\sin\alpha$.

28. Zeige, daß $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ ist.

29. Drücke a) $\operatorname{tg}\alpha$ durch $\operatorname{ctg}\alpha$, b) $\operatorname{ctg}\alpha$ durch $\operatorname{tg}\alpha$ aus.

30. Gegeben ist $\operatorname{tg}\alpha$ gleich a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{3}{5}$, c) 2,5, d) $\sqrt{2}+1$. Berechne $\operatorname{ctg}\alpha$.

31. Gegeben ist $\operatorname{ctg}\alpha$ gleich a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{7}{5}$, c) 0,27, d) $\sqrt{2}-1$. Berechne $\operatorname{tg}\alpha$.

32. Beweise an der Hand eines rechtwinkligen Dreiecks folgende Formeln:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, b) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

33. Drücke a) $\operatorname{tg}\alpha$ nur durch $\sin\alpha$, b) $\operatorname{tg}\alpha$ nur durch $\cos\alpha$, c) $\operatorname{ctg}\alpha$ nur durch $\sin\alpha$, d) $\operatorname{ctg}\alpha$ nur durch $\cos\alpha$ aus.

34. Gegeben ist $\sin\alpha$ gleich a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{12}{13}$, c) 0,2, d) 0,6. Berechne $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$.

35. Gegeben ist $\cos\alpha$ gleich a) $\frac{8}{17}$, b) $\frac{7}{25}$, c) 0,3, d) 0,1. Berechne $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$.

36. Leite neue Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen her, indem du die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ (pythagoreischer Lehrsatz) durch a^2 bzw. durch b^2 dividierst.

37. Gegeben ist $\operatorname{tg}\alpha$ gleich a) 1, b) $\frac{2}{3}$, c) 4. Berechne $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$.

38. Gegeben ist $\operatorname{ctg}\alpha$ gleich a) 1, b) $\frac{5}{12}$, c) 7. Berechne $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$.

Benutzung vierstelliger Tafeln

Die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen

Schlage auf

39.	a) sin 15°,	b) sin 23°,	c) sin 46°,	d) sin 78°,
	e) cos 14°	f) cos 54°,	g) cos 65°,	h) cos 86°,
	i) tg 12°,	k) tg 34°,	l) tg 68°,	m) tg 77°,
	n) ctg 23°,	o) ctg 48°,	p) ctg 52°,	q) ctg 86°.
40.	a) sin 15° 30′,	b) sin 68° 20′,	c) sin 43° 40′,	d) sin 74° 30′,
	e) cos 34° 10′,	f) cos 45° 10′,	g) cos 78° 20′,	h) cos 86° 40′,
	i) tg 14° 20′,	k) tg 58° 20′,	l) tg 76° 50′,	m) tg 84° 10′,
	n) ctg 12° 50′,	o) ctg 14° 30′,	p) ctg 66° 50′,	q) ctg 74° 40′.
41.	a) sin 25° 12′,	b) sin 44° 14′,	c) sin 66° 36′,	d) sin 57° 38′,
	e) tg 24° 37′	f) tg 58° 24′,	g) tg 62° 16′,	h) tg 73° 48′,
	i) cos 14° 17′,	k) cos 53° 23′,	l) cos 74° 56′,	m) cos 66° 52′,
	n) ctg 13° 27′,	o) ctg 23° 14′,	p) ctg 48° 37′,	q) ctg 73° 42′,
	r) sin 14,5°,	s) cos 23,6°,	t) tg 54,7°,	u) ctg 81,2°,
	v) sin 74,25°,	w) cos 23,14°,	x) tg 27,75°,	y) ctg 84,33°.

Suche den Winkel α, wenn gegeben ist

42.	$\sin\alpha$ gleich	a) 0,2588,	b) 0,9397,	c) 0,7716,	d) 0,4014;
	$\cos\alpha$ gleich	e) 0,9703,	f) 0,3584,	g) 0,9853,	h) 0,6134;
	$\operatorname{tg}\alpha$ gleich	i) 0,1763,	k) 2,747,	l) 0,3378,	m) 1,780;
	$\operatorname{ctg}\alpha$ gleich	n) 0,8693,	o) 8,144,	p) 1,117,	q) 0,2962.
43.	$\sin\alpha$ gleich	a) 0,9286,	b) 0,9412,	c) 0,1955,	d) 0,7840,
		e) 0,9142,	f) 0,9726,	g) 0,8376,	h) 0,9935.

44. $\cos\alpha$ gleich a) 0,9290, b) 0,9386, c) 0,2266, d) 0,8120, e) 0,8609, f) 0,7000, g) 0,9505, h) 0,8015.

45. $\operatorname{tg}\alpha$ gleich a) 0,2912, b) 0,7056, c) 0,9506, d) 1,077, e) 4,120, f) 2,326, g) 1,3254, h) 0,360.

46. $\operatorname{ctg}\alpha$ gleich a) 0,4084, b) 0,2357, c) 2,570, d) 3,657, e) 1,362, f) 2,225, g) 49,000, h) 0,0020.

Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

47. Schlage in der Tafel auf

a) lg sin 22°, b) lg sin 43°, c) lg sin 54°,
d) lg sin 62°, e) lg sin $33^\circ 28'$, f) lg sin $44^\circ 16'$,
g) lg sin $66^\circ 27'$, h) lg sin $44^\circ 44'$, i) lg cos 26°,
k) lg cos 54°, l) lg cos 86°, m) lg cos 36°,
n) lg cos $43^\circ 16'$, o) lg cos $22^\circ 37'$, p) lg cos $46{,}25^\circ$,
q) lg cos $80{,}4^\circ$.

48. Schlage auf

a) lg tg 14°, b) lg tg 48°, c) lg tg 23°,
d) lg tg 72°, e) lg tg $17^\circ 56'$, f) lg tg $72^\circ 23'$,
g) lg tg $84^\circ 13'$, h) lg tg $16^\circ 42'$, i) lg ctg 28°,
k) lg ctg 73°, l) lg ctg 16°, m) lg ctg $44^\circ 12'$,
n) lg ctg $22{,}5^\circ$, o) lg ctg $49{,}3^\circ$, p) lg ctg $54{,}9^\circ$,
q) lg ctg $62{,}55^\circ$.

49. Schlage auf

a) lg sin $24^\circ 16' 12''$, b) lg sin $26^\circ 14' 54''$, c) lg sin $54^\circ 14' 43''$,
d) lg sin $75^\circ 55' 46''$, e) lg sin $14^\circ 25{,}5'$, f) lg sin $34^\circ 22{,}2'$,
g) lg sin $46^\circ 14{,}9'$, h) lg sin $72^\circ 4{,}2'$, i) lg sin $84^\circ 54{,}6'$.

50. Schlage auf

a) lg cos $43^\circ 46' 24''$, b) lg cos $52^\circ 46' 36''$, c) lg cos $80^\circ 40' 12''$,
d) lg cos $47^\circ 23' 37''$, e) lg cos $16^\circ 17{,}2'$, f) lg cos $25^\circ 24{,}3'$,
g) lg cos $86^\circ 14{,}7'$, h) lg cos $22^\circ 22{,}3'$, i) lg cos $53^\circ 24{,}3'$.

51. Schlage auf

a) lg tg $12^\circ 16' 42''$, b) lg tg $43^\circ 37' 30''$, c) lg tg $82^\circ 24' 24''$,
d) lg tg $23^\circ 24' 25''$, e) lg tg $24^\circ 12{,}3'$, f) lg tg $42^\circ 4{,}9'$,
g) lg tg $16^\circ 18{,}4'$, h) lg tg $88^\circ 52{,}4'$, i) lg tg $62^\circ 14{,}9'$.

52. Schlage auf

a) lg ctg $16^0\,42'\,30''$, **b)** lg ctg $28^0\,38'\,48''$, **c)** lg ctg $52^0\,24'\,24''$,
d) lg ctg $76^0\,56'\,56''$, **e)** lg ctg $43^0\,2{,}4$, **f)** lg ctg $88^0\,5{,}6'$,
g) lg ctg $45^0\,0{,}2'$, **h)** lg ctg $87^0\,2{,}5'$, **i)** lg ctg $3^0\,3{,}3'$.

53. Bestimme den Winkel α, wenn gegeben ist

lg sin α gleich	**a)** 9,5919 − 10,	**b)** 9,7476 − 10,	**c)** 9,9500 − 10,
	d) 9,6321 − 10,	**e)** 9,9721 − 10,	**f)** 8,9403 − 10,
lg cos α gleich	**g)** 9,9640 − 10,	**h)** 9,9849 − 10,	**i)** 9,3521 − 10,
	k) 9,6387 − 10,	**l)** 8,9816 − 10,	**m)** 8,6097 − 10;
lg tg α gleich	**n)** 9,8453 − 10,	**o)** 9,4281 − 10,	**p)** 9,2463 − 10,
	q) 10,4746 − 10,	**r)** 10,6252 − 10,	**s)** 11,0580 − 10;
lg ctg α gleich	**t)** 10,5719 − 10,	**u)** 10,8003 − 10,	**v)** 9,4853 − 10,
	w) 9,5329 − 10,	**x)** 11,2806 − 10,	**y)** 8,8446 − 10.

54. Bestimme den Winkel α, wenn gegeben ist

lg sin α gleich	**a)** 9,3606 − 10,	**b)** 9,8222 − 10,	**c)** 9,8687 − 10,
	d) 9,5600 − 10,	**e)** 9,3345 − 10,	**f)** 8,3520 − 10;
lg cos α gleich	**g)** 9,3600 − 10,	**h)** 9,5712 − 10,	**i)** 8,8641 − 10,
	k) 8,9120 − 10,	**l)** 9,8643 − 10,	**m)** 9,8232 − 10,
lg tg α gleich	**n)** 9,3774 − 10.	**o)** 9,7055 − 10,	**p)** 9,8267 − 10,
	q) 10,1554 − 10,	**r)** 10,2366 − 10,	**s)** 10,2688 − 10;
lg ctg α gleich	**t)** 10,2292 − 10,	**u)** 11,3467 − 10,	**v)** 9,0025 − 10,
	w) 9,4892 − 10,	**x)** 9,7064 − 10,	**y)** 10,3198 − 10.

Benutzung fünfstelliger Tafeln.

Die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen

55. bis **57.** Dieselben Aufgaben wie **39.** bis **41.**

58. Suche den Winkel α, wenn gegeben ist

sin α gleich	**a)** 0,34202,	**b)** 0,56641,	**c)** 0,91822,	**d)** 0,95882;
cos α gleich	**e)** 0,96593,	**f)** 0,71325,	**g)** 0,63608,	**h)** 0,09874;
tg α gleich	**i)** 0,12278,	**k)** 0,96586,	**l)** 1,3764,	**m)** 4,4494;
ctg α gleich	**n)** 1,1918,	**o)** 3,2709,	**p)** 0,31210,	**q)** 0,17033.

59. Suche den Winkel α, wenn gegeben ist sin α gleich

a) 0,44750, **b)** 0,56521, **c)** 0,93899, **d)** 0,95804,
e) 0,10700, **f)** 0,97524, **g)** 0,71019, **h)** 0,67422.

60. Suche den Winkel α, wenn gegeben ist $\cos\alpha$ gleich

a) 0,93939,	b) 0,83541,	c) 0,89206,	d) 0,14726,
e) 0,96843,	f) 0,19202,	g) 0,07500,	h) 0,99234.

61. Suche den Winkel α, wenn gegeben ist $\operatorname{tg}\alpha$ gleich

a) 0,17213,	b) 0,25397,	c) 2,4243,	d) 0,28800,
e) 1,0125,	f) 2,3245,	g) 0,2924,	h) 3,0276.

62. Suche den Winkel α, wenn gegeben ist $\operatorname{ctg}\alpha$ gleich

a) 2,2727,	b) 0,17093,	c) 0,41013,	d) 0,19255,
e) 6,4465,	f) 0,12305,	g) 0,99777,	h) 1,3535.

Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

63. bis **68.** Dieselben Aufgaben wie **47.** bis **52.**

69. Bestimme den Winkel α, wenn gegeben ist

lg sin α gleich	a) 9,08589 − 10,	b) 9,23967 − 10,	c) 9,99379 − 10,
	d) 9,99968 − 10,	e) 7,94084 − 10,	f) 9,99962 − 10;
lg cos α gleich	g) 9,99894 − 10,	h) 9,96403 − 10,	i) 9,57978 − 10,
	k) 9,46800 − 10,	l) 8,94317 − 10,	m) 8,77097 − 10;
lg tg α gleich	n) 9,08914 − 10,	o) 10,85220 − 10,	p) 10,63664 − 10,
	q) 9,33731 − 10,	r) 9,35931 − 10,	s) 11,05227 − 10;
lg ctg α gleich	t) 10,80029 − 10,	u) 10,04556 − 10,	v) 9,53697 − 10,
	w) 9,89255 − 10,	x) 11,72331 − 10,	y) 11,47921 − 10.

70. Bestimme den Winkel α, wenn gegeben ist

lg sin α gleich	a) 9,33862 − 10,	b) 9,77922 − 10,	c) 9,95362 − 10,
	d) 9,29224 − 10,	e) 8,36114 − 10,	f) 9,99679 − 10;
lg cos α gleich	g) 9,95176 − 10,	h) 9,86440 − 10,	i) 9,75892 − 10,
	k) 9,19522 − 10,	l) 9,86662 − 10,	m) 9,98266 − 10;
lg tg α gleich	n) 9,34298 − 10,	o) 9,74263 − 10,	p) 10,60012 − 10,
	q) 9,94002 − 10,	r) 9,25012 − 10,	s) 11,70698 − 10;
lg ctg α gleich	t) 10,65624 − 10,	u) 10,38268 − 10,	v) 9,15548 − 10,
	w) 9,96873 − 10,	x) 10,43215 − 10,	y) 11,25633 − 10.

Vierstellige und fünfstellige Tafeln

71. Stelle fest, ob die logarithmisch errechneten Ausdrücke

a) lg sin 30°,	b) lg tg 45°,	c) lg cos 30°,
d) lg sin 60°,	e) lg tg 30°,	f) lg ctg 30°

mit den aus der Tafel zu entnehmenden übereinstimmen.

72. Welche Gleichungen gelten **a)** zwischen lg tg α und lg ctg α, **b)** zwischen lg sin α, lg cos α und lg tg α, **c)** zwischen lg sin α, lg cos α und lg ctg α? Gib in diesem Falle für die gefundene Beziehung aus der Tafel ein paar Beispiele an.

73. Gib eine ungefähre graphische Darstellung vom Verlauf der Funktionen **a)** $y = \lg \sin x$, **b)** $y = \lg \cos x$, **c)** $y = \lg \operatorname{tg} x$, **d)** $y = \lg \operatorname{ctg} x$. Beachte dabei, daß die Logarithmen der Form $9{,}1713 - 10$ erst in negative Zahlen umzuschreiben sind.

74. In der Umgebung welcher Winkel ändert sich **a)** lg sin, **b)** lg cos, **c)** lg tg, **d)** lg ctg am stärksten, am schwächsten? Mit anderen Worten: Wo sind die Differenzen aufeinanderfolgender Logarithmen größer, wo kleiner?

§ 2. Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

1. In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben **a)** die beiden Katheten a und b, **b)** eine Kathete a und die Hypotenuse c, **c)** ein spitzer Winkel α und die Hypotenuse c, **d)** ein spitzer Winkel α und die Gegenkathete a, **e)** ein spitzer Winkel α und die Ankathete b. In jedem Falle sind die fehlenden Stücke zu berechnen. Untersuche, wie man möglichst schnell zum Ziel kommt.

2. Berechne ein rechtwinkliges Dreieck (rechter Winkel bei C, p Projektion von a, q Projektion von b auf die Hypotenuse) aus

a)	$a = 2{,}4$ m,	$b = 1{,}6$ m;	**b)**	$b = 0{,}152$ m,	$a = 0{,}345$ m;
c)	$a = 4{,}2$ cm,	$c = 5{,}7$ cm;	**d)**	$b = 4{,}5$ cm,	$c = 53$ mm;
e)	$\alpha = 16^\circ\,24'$,	$c = 23{,}4$ m;	**f)**	$c = 74{,}25$ m,	$\beta = 88^\circ\,14'$;
g)	$b = 44{,}35$ m,	$\beta = 24^\circ\,36'$;	**h)**	$a = 3{,}145$ m,	$\alpha = 48{,}3^\circ$;
i)	$a = 47{,}2$ cm,	$\beta = 53^\circ\,17{,}5'$;	**k)**	$b = 142$ m,	$\alpha = 24{,}5^\circ$;
l)	$h_c = 14{,}2$ cm,	$b = 17{,}5$ cm;	**m)**	$h_c = 0{,}75$ m,	$\beta = 24^\circ\,3'$;
n)	$a = 17{,}52$ m,	$p = 13{,}45$ m;	**o)**	$c = 10$ m,	$p = 8$ m;
p)	$p = 9{,}4$ m,	$\alpha = 46^\circ\,13'$;	**q)**	$c = 14{,}1$ m,	$f = 40{,}23$ m^2;
r)	$f = 42{,}5$ m^2,	$\alpha = 16^\circ\,17'$;	**s)**	$a = 24{,}3$ m,	$f = 70{,}45$ m^2.

3. Berechne (ohne Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes) ein Rechteck (e Diagonale, r Umkreisradius) aus

a)	$a = 6{,}6$ m,	$e = 10{,}3$ m;	**b)**	$r = 24{,}2$ m,	$b = 20{,}2$ m;
c)	$f = 82{,}4$ m^2,	$a = 14{,}2$ m;	**d)**	$\sphericalangle CAB = 12^\circ$,	$f = 16{,}24$ m^2.

4. Wenn $y = mx + n$ die Gleichung einer Geraden ist, so bedeutet darin m den Anstieg der Geraden, d. h. den Tangens des Winkels, den die Gerade mit der nach rechts gerichteten x-Achse bildet. Berechne den Winkel für die folgenden Geraden:

a) $y = x$, b) $y = x - 2$, c) $y = 2x + 3$,

d) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$, e) $y = \frac{x}{3} + 2$, f) $y = 5\frac{1}{2}x + 6$.

5. Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x-Achse den Winkel a) 30^0, b) 60^0, c) 45^0 bildet?

6. Die Gleichung einer Geraden, die auf der positiven x-Achse die Strecke a (vom Nullpunkt aus gerechnet), auf der positiven y-Achse die Strecke b abschneidet, ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bestimme die Winkel der Geraden mit den beiden Achsen, wenn die Gleichung lautet

a) $x + y = 1$, b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Praktische Anwendungen

7. Um die Höhe einer Hauswand zu messen, wird in 18 m Abstand von der Wand der Dachrand angezielt. Man findet $39{,}2^0$. Wie hoch ist die Hauswand? (Berücksichtige, daß die Augenhöhe bei der Beobachtung 1,5 m ist.)

8. Wie hoch steht die Sonne, wenn eine Fahnenstange von 15 m Höhe einen Schatten von 23,7 m wirft?

9. Eine senkrechte Stange von 12,5 m Länge wirft einen Schatten von 23,3 m Länge. Wie hoch steht die Sonne?

10. Ein Baum wirft bei einer Sonnenhöhe von $43{,}8^0$ einen Schatten von 30,5 m Länge. Wie hoch ist der Baum?

11. Wie lang ist der Schatten des Obelisken von Luksor auf dem Pariser Concordienplatz bei einer Sonnenhöhe von $35^0 45'$? (Höhe des Obelisken 22,83 m.)

12. Ein an der Spitze eines Mastes befestigtes Tau von 20 m Länge bildet, seitwärts zur Erde gespannt, mit dem Erdboden einen Winkel von $64{,}3^0$. Wie hoch ist der Mast? (Der „Durchhang" des Taues bleibt unberücksichtigt.)

13. Ein Schulhaus mit Satteldach ist 25 m lang und 14 m breit. Bestimme die Größe der Dachfläche, wenn ihr Neigungswinkel 50^0 ist.

14. Eine Bahnstrecke hat ein Gefälle a) 1 : 300, b) 1 : 210, c) 1 : 180. Wie groß ist der Neigungswinkel gegen die Horizontale?

15. Eine Zahnradbahn hat eine Neigung von 23%. Wie groß ist der Neigungswinkel der Bahn?

16. Die Granitschwellen, die für eine Treppe benutzt werden, sind 25 cm breit und 15 cm hoch. Welche Neigung muß man dem Treppengeländer geben?

17. Fig. 1 zeigt den Querschnitt eines Kanals mit eingeschriebenen Maßen. a) Wie groß ist der Querschnitt der auszuhebenden Erdmasse? b) Wie groß ist der Querschnitt der Wassermenge bei 4 m hohem Wasserstande?

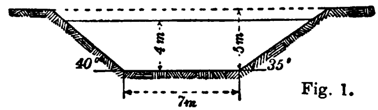

Fig. 1.

18. Berechne den durchschnittlichen Neigungswinkel des in Fig. 113 des Buches für Klasse 7—9 dargestellten Abhanges auf Grund der eingetragenen Messungsergebnisse.

19. Um das Fließen eines Gletschers nachzuweisen, werden zu beiden Seiten des Gletschers im Fels zwei Marken A und B in 157,5 m Abstand angegeben; die Verbindungsstrecke der beiden Marken liegt senkrecht zur Flußrichtung. In der Verbindungsgeraden der beiden Marken, 53,5 m von A entfernt, wird eine dritte Marke C auf dem Eise angebracht. Nach einiger Zeit beobachtet man, daß C vorgerückt ist, derart, daß $\sphericalangle CAB = 1^\circ 54'$ ist. a) Um wieviel ist C vorgerückt? b) Man macht eine Kontrollmessung, indem man $\sphericalangle ABC$ bestimmt. Welchen Wert muß man da erhalten?

20. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint ein Mensch von 1,80 m Größe bei a) 25 m, b) 250 m, c) 2,5 km Entfernung? Der Beobachter steht auf der gleichen Horizontalebene mit dem Beobachteten. Untersuche zuvor, ob es theoretisch und praktisch etwas ausmacht, wo der Augenpunkt des Beobachters liegt.

21. Ein (nicht selbstleuchtender) Gegenstand ist im allgemeinen noch erkennbar, wenn der Gesichtswinkel größer als $\frac{2}{3}$ Minuten ist. Untersuche, welche wirkliche Größe ein Gegenstand in a) 1 m, b) 1 km, c) in Mondferne (384000 km), d) in Sonnenferne (149 Mill. km) haben müßte, um noch gesehen zu werden.

22. Berechne den Querschnitt des in Fig. 2 mit eingeschriebenen Maßen dargestellten Bahndammes.

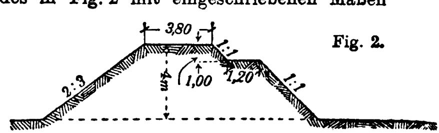

Fig. 2.

23. a) Berechne die Länge des Breitenkreises deines Wohnortes; $\varphi =$ [1]). Der Radius der Erde ist im Mittel 6370 km — In welcher Breite ist der Radius des Breitenkreises gleich b) dem halben Erdradius, c) einem Drittel des Erdradius?

1) Von dem Schüler selbst auszufüllen.

24. Auf einer um 25° gegen die Horizontale geneigten Ebene ruht ein Gewicht von 255 kg. Welchen Druck übt es auf die Unterlage aus?

25. Auf einer Bahnstrecke, die eine Neigung von 1 : 120 hat, steht ein D-Zug, der mit Lokomotive ein Gewicht von 325000 kg hat. Wie groß ist die durch die Neigung der Strecke gegebene Druckverringerung?

26. Ein Lichtstrahl quert unter einem Winkel von a) 25°, b) 75° eine 2,7 cm dicke Glasplatte. Wie groß ist die Parallelverschiebung, die er dabei erfährt? (Brechungsquotient 1,7.)

27. Der scheinbare Durchmesser sowohl der Sonne wie des Mondes ist ungefähr 32′. Berechne danach den wahren Durchmesser dieser Himmelskörper, wenn als Entfernung der Sonne im Mittel 149000000 km, als Entfernung des Mondes 384000 km angesetzt wird.

28. Unter welchem scheinbaren Durchmesser würde die Erde (Radius 6370 km) a) von der Sonne, b) von dem Monde aus gesehen werden? (Entfernungen siehe Aufg. 27.)

29. Die Sternwarten Altona und Göttingen liegen auf gleichem Meridian, ihr Breitenunterschied ist 2° 0′ 57″. In dem Augenblick, in dem der Mond durch den Meridian geht, wird seine Erhebung über dem Horizont in Göttingen zu 58° 42′ 2″, in Altona zu 56° 39′ 25″ bestimmt. (In beiden Fällen steht der Mond natürlich im Süden!) Berechne daraus die Entfernung des Mondes von der Erde.

Gleichschenkliges Dreieck und Rhombus

30. Zerlege das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige und zeige, daß dadurch die Berechnung der Stücke des gleichschenkligen Dreiecks aus irgend zwei gegebenen (zwei Seiten oder eine Seite und ein Winkel) möglich ist. Auch dann, wenn ein stumpfer Winkel auftritt?

31. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks (Spitze bei A), von dem gegeben ist

a) $a = 7$ cm,	$b = 8$ cm;	b) $a = 17{,}5$ cm,	$\beta = 35^\circ 48'$;
c) $a = 22{,}3$ cm,	$\alpha = 65^\circ 30'$;	d) $a = 48{,}31$ m,	$\alpha = 168^\circ 24'$;
e) $b = 17{,}9$ cm,	$\alpha = 108^\circ 36'$;	f) $b = 9{,}81$ m,	$\beta = 75^\circ 54'$;
g) $a = 22{,}8$ cm,	$h_a = 17{,}3$ cm;	h) $b = 19{,}81$ m,	$h_a = 17{,}18$ m;
i) $\beta = 17^\circ 30'$,	$h_a = 12{,}5$ cm;	k) $a = 95{,}3$ m,	$h_b = 73{,}8$ cm;
l) $f = 450$ cm²,	$h_a = 4{,}1$ cm;	m) $f = 513$ cm²,	$h_b = 23{,}4$ cm.

32. Zerlege den Rhombus in vier rechtwinklige Dreiecke und drücke durch die Seite und einen Winkel a) die Diagonalen, b) den Flächeninhalt, c) den Radius des Inkreises des Rhombus aus.

33. Berechne die fehlenden Seiten, Winkel und Diagonalen eines Rhombus (Diagonale $AC = e$; $BD = f$) aus

a) $a = 5$ cm, $\alpha = 70°$; b) $e = 13{,}5$ cm, $\alpha = 112° 36'$;

c) $e = 15$ cm, $f = 16$ cm; d) $\alpha = 63° 54'$, Inh. $= 1000\ \text{m}^2$.

Aufgaben am Kreis

34. In einen Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge s gelegt. Wie groß ist a) der zugehörige Zentriwinkel, b) der zugehörige Bogen, c) der zugehörige Kreisausschnitt, d) der zugehörige Kreisabschnitt? Beispiel: $r = 10$ cm, $s = 13$ cm.

35. a) Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r. Wie groß ist die Sehne, die zum Zentriwinkel α gehört? Beispiel: $r = 7{,}5$ cm, $\alpha = 57° 36'$. b) Ein Zirkel hat einen eisernen Kreisquadranten, der mit dem einen Schenkel fest verbunden ist, während der andere Schenkel an ihm vorbeigleitet. Auf dem Kreisbogen soll eine Skala eingeritzt werden, in der Weise, daß man bei irgendeiner Stellung des Zirkels in A (Fig. 3) den Abstand der Spitzen in cm ablesen kann. Gegeben ist die Länge der Zirkelschenkel 30 cm.

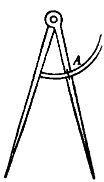

Fig. 3.

36. Der Peripheriewinkel über der Sehne eines Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm ist 72°. Wie groß ist die Sehne?

37. In einem Kreise steht über einer Sehne von 3 cm ein Peripheriewinkel von 35°. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?

38. Wie groß ist a) der Zentriwinkel der Seite eines regelmäßigen n-Ecks, b) die Seite eines regelmäßigen n-Ecks, c) der Inhalt eines regelmäßigen n-Ecks, wenn der Radius des Umkreises r ist?

39. Einem Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm ist ein regelmäßiges a) Dreieck, b) Sechseck, c) Viereck, d) Fünfeck, e) Achteck, f) Neuneck, g) Zehneck, h) Siebeneck, i) Zwölfeck, k) Fünfzehneck, l) Pentagramm, m) ein regelmäßiger Siebenstern eingeschrieben. Berechne in jedem Falle Seite, Umfang, Inkreisradius und Inhalt des n-Ecks.

40. Wie groß ist a) die Seite, b) der Inhalt eines regelmäßigen n-Ecks, wenn der Radius des Inkreises ϱ ist?

41. a)—m) Berechne Seite, Umfang, Umkreisradius und Inhalt der in Aufg. 39a)—m) genannten regelmäßigen Figuren, wenn diese einem Kreis mit dem Radius $\varrho = 12$ cm umgeschrieben sind.

42. Berechne die sämtlichen Diagonalen des regelmäßigen a) Siebenecks, b) Neunecks mit der Seite a. Beispiel: $a = 2{,}5$ cm.

43. An einen Kreis mit dem Radius r werden von einem Punkte P, der vom Kreismittelpunkt den Abstand a hat, die Tangenten gelegt. Berechne a) die Länge der Tangenten (von P bis zum Berührungspunkt), b) den Winkel zwischen den beiden Tangenten, c) die Länge der Berührungssehne. Beispiel: $r = 4$ cm, $a = 5$ cm.

44. Von einem Punkte P sind an einen Kreis zwei 12 cm lange Tangenten gelegt. Wie weit ist P vom Mittelpunkt entfernt, wenn a) der Kreisradius 5 cm ist, b) der Winkel zwischen den Tangenten 45° ist, c) die Berührungssehne 10 cm lang ist?

45. In einen Kreis mit dem Radius 8 cm ist eine Sehne von 12 cm Länge gelegt. Wie lang sind die in den Endpunkten der Sehne an den Kreis gelegten Tangenten (vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt), und unter welchem Winkel schneiden sie sich?

46. Zwei Kreise mit den Radien 10 cm und 12 cm schneiden sich unter einer Sehne von 11 cm. a) Wie groß ist der Mittelpunktsabstand? b) Wie groß sind die durch die zwei Kreise bestimmten Kreiszweiecke?

47. Zwei Kreisscheiben mit den Radien 0,45 m und 0,17 m sind durch einen Treibriemen ohne Ende verbunden. Wie lang muß der Treibriemen sein, wenn der Abstand der Scheibenmittelpunkte 5,50 m ist? Die Riemen sind a) gekreuzt, b) nicht gekreuzt.

48. Zwei Straßen stoßen geradlinig in einem Winkel α aufeinander. Sie werden an der Stelle des Treffpunktes durch einen Kreisbogen vom Radius r ersetzt. Wie groß ist die dadurch bewirkte Abkürzung? Beispiel: $\alpha = 105^\circ$, $r = 500$ m.

Aus der Geschichte der Trigonometrie

49. Aristarch von Samos (um 270 v. d. Ztr.) berechnete das Verhältnis der Mondentfernung zur Sonnenentfernung, indem er beim ersten Viertel des Mondes den Winkel zwischen der Richtung nach dem Sonnenmittelpunkt und der Richtung nach dem Mondmittelpunkt feststellte. Erkläre die Methode. Welche trigonometrische Funktion kommt zur Anwendung?

50. Die Griechen rechneten statt mit dem Sinus mit der Sehne (**chorda**). $\operatorname{crd} \alpha$ bezeichne die Länge der Sehne, die im Kreis mit dem Radius 1 zu dem Zentriwinkel α gehört. Drücke dann a) $\operatorname{crd} \alpha$ durch den Sinus, b) $\sin \alpha$ durch die Sehne aus.

51. Al Battâni (um 900 n. d. Ztr. in Bagdad) behandelte die umbra extensa, die Länge des Schattens, den ein vertikaler Stab von der Länge 1 auf eine horizontale Fläche wirft, und die umbra versa, die Länge des Schat-

tens, den ein horizontaler Stab von der Länge 1 auf eine senkrecht zu ihm stehende, also vertikale Fläche wirft. Welche trigonometrischen Funktionen hat er damit benutzt?

52. Argachel, mit arabischem Namen Al Zackâli (um 1080 n. d. Ztr. in Toledo), erfand ein Astrolabium, dessen Rückseite Fig. 4 schematisch wiedergibt. Auf dem Kreis denke man sich eine Winkelteilung in 360°. a) Welche Funktion erlaubt dieses Instrument abzulesen? b) Welche Teilung der Quadratseite würde man heute derjenigen in 24 Teile vorsehen? c) Stelle dir ein handliches Modell eines Astrolabiums her, jedoch mit Rücksicht auf unser übliches Zahlensystem.

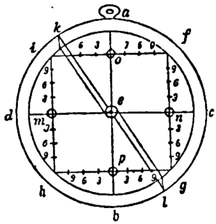

Fig. 4.

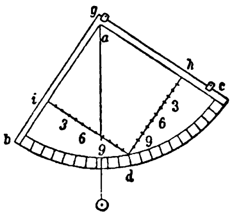

Fig. 5.

53. Mit dem Astrolabium aufs engste verwandt ist der Quadrant, von dem Fig. 5 eine von Leonardo Pisano (in der Practica geometriae, 1220) angegebene Form wiedergibt. ge stellt eine Visiereinrichtung vor, von a geht ein Senkblei aus. a) Vergleiche das Instrument mit dem in Fig. 4 dargestellten. b) Welche trigonometrische Funktion kann man an dem Instrument ablesen? c) Zeige, daß man statt des dem Quadranten eingeschriebenen Quadrates auch ein ihm umschriebenes anwenden kann, und stelle dir ein solches Instrument, jedoch mit einer unserem heutigen Zahlensystem entsprechenden Einteilung der Quadratseite her.

54. Fig. 6 zeigt ein von Peurbach (1516, Nürnberg) beschriebenes „geometrisches Quadrat". Hier ist die Visierrichtung am beweglichen Schenkel angebracht, das Lot an einer Seite des Quadrates. In der Figur sind die 1200 Teile, in die die 2 Ellen langen Quadratseiten geteilt sind, nur angedeutet. Wie kann man hier aus den Ablesungen den Winkel zwischen Horizontale und Visierrichtung bestimmen?

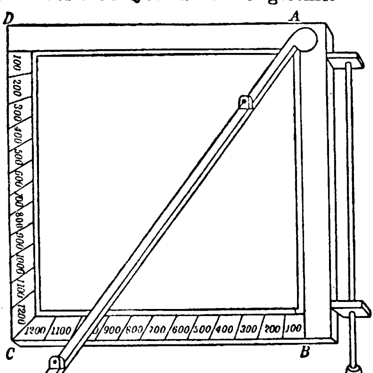

Fig. 6.

55. Der chinesische Kaiser Tschu-Kong (1100 v.d.Ztr.) soll die Länge des Schattens eines senkrechten Stabes von 8 Maßeinheiten am Mittag des längsten Tages zu 1,54 Einheiten, am Mittag des kürzesten Tages zu 13,12 Einheiten gefunden haben. Wie groß sind die entsprechenden Sonnenhöhen und wie groß die Schiefe der Ekliptik (d. h. die Hälfte der Differenz beider Sonnenhöhen)?

56. Plinius (23—79 n.d.Ztr.) berichtet, daß am Tage der Tagundnachtgleiche zur Mittagszeit der Schatten eines senkrechten Stabes in Alexandrien die halbe Länge des Stabes gehabt habe, in Rom hingegen um $\frac{1}{9}$ kürzer als der ganze Stab sei. **a)** Berechne für beide Fälle die Sonnenhöhe. **b)** Das Komplement der Mittagssonnenhöhe an diesem Tage ist die Breite des Ortes. Wie groß ist also nach diesen Beobachtungen die Breite von Alexandrien und die von Rom? (Prüfe das Ergebnis auf der Karte!) **c)** Plinius gibt auch eine Messung von Ancona an. Dort soll der Schatten um $\frac{1}{9}$ länger als der Stab gewesen sein. Rechne diese Beobachtung durch und beurteile das Ergebnis.

§ 3. Die trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel
Die Berechnung des allgemeinen Dreiecks

Die Funktionen stumpfer Winkel

1. Gegeben ist ein Achsenkreuz (Fig. 7). Um den Mittelpunkt O ist mit dem Radius r ein Kreis geschlagen; P ist ein Punkt der Kreisperipherie, α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und OP. Die Projektion von OP auf die x-Achse sei OQ. Zeichne die Lage von P und Q für α gleich **a)** 60°, **b)** 120°, **c)** 135°, **d)** 150°.

2. Man definiert den Sinus des Winkels α als das Verhältnis der Projizierenden PQ zum Radius, den Kosinus als das Verhältnis der Projektion OQ zum Radius, den Tangens als das Verhältnis der Projizierenden PQ zur Projektion OQ, den Kotangens als das Verhältnis der Projektion OQ zur Projizierenden PQ. Zeige, daß diese Definitionen mit den bisherigen Definitionen für spitze Winkel übereinstimmen.

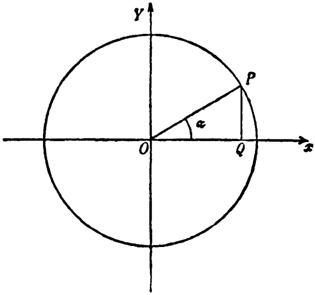

Fig. 7.

3. Liegt Q auf der negativen Seite der x-Achse, so nimmt man die Projektion OQ mit negativem Vorzeichen. Welches Vorzeichen erhalten demnach die Funktionen für Winkel, die zwischen 90° und 180° liegen?

4. Stelle durch Zeichnung und Messung den Wert der Sinusfunktion fest für
a) 100°, b) 110°, c) 120°, d) 130°, e) 135°,
f) 140°, g) 150°, h) 160°, i) 170°.

5. Setze danach die graphische Darstellung der Sinusfunktion für stumpfe Winkel fort.

6. Vergleiche die Werte der Sinusfunktion für spitze und für stumpfe Winkel an Hand a) der Kreisfigur, b) der graphischen Darstellung.

7. Zeige allgemein, daß
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{ist.}$$

8. bis 10. Löse die Aufgaben 4 bis 6 für die Kosinusfunktion.

11. bis 13. Löse die Aufgaben 4 bis 6 für die Tangensfunktion.

14. bis 16. Löse die Aufgaben 4 bis 6 für die Kotangensfunktion.

17. Zeige allgemein, daß
$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

18. Welche Symmetrieverhältnisse zeigt a) die Sinusfunktion, b) die Kosinusfunktion, c) die Tangensfunktion, d) die Kotangensfunktion zwischen 0° und 180°?

19. Was ist über die Werte der Funktionen a) bei 90°, b) bei 180° zu sagen?

20. Welche Zahlenwerte durchläuft a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$, c) $\operatorname{tg} \alpha$, d) $\operatorname{ctg} \alpha$, wenn α die Werte von 0° bis 180° durchläuft?

21. Bestimme mit Hilfe der Beziehungen der Aufgaben 7 und 17 und, soweit nötig, mit Hilfe der Tafeln für die Funktionen der spitzen Winkel
a) sin 120°, b) sin 150°, c) sin 135°, d) sin 162°,
e) sin 178°, f) sin 112° 40′, g) sin 159° 14′, h) sin 123,4°,
i) cos 135°, k) cos 120°, l) cos 115°, m) cos 92°,
n) cos 124°, o) cos 136° 40′, p) cos 172° 18′, q) cos 100,5°.

22. Bestimme ebenso
a) tg 120°, b) tg 135°, c) tg 98°, d) tg 154°,
e) tg 112°, f) tg 134° 50′, g) tg 93° 38′, h) tg 136,4°,
i) ctg 150°, k) ctg 120°, l) ctg 96°, m) ctg 124°,
n) ctg 144°, o) ctg 152° 30′, p) ctg 113° 14′, q) ctg 135,2°.

23. Sprich über die Zahl der Lösungen in folgenden Gleichungen, wenn a ein gegebener Zahlenwert, α ein gesuchter Winkel zwischen 0° und 180° ist:
a) $\sin \alpha = a$, b) $\cos \alpha = a$, c) $\operatorname{tg} \alpha = a$, d) $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

24. Bestimme, wenn nötig mit Hilfe der Tafeln, die Winkel α zwischen 0° und 180°, für welche ist

$\sin\alpha$ gleich	a) 0,	b) 1,	c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$,	d) 0,3773,	
				e) 0,9205,	f) $-\frac{1}{2}$;
$\cos\alpha$ gleich	g) -1,	h) 0,	i) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$,	k) $-0{,}3665$,	
				l) $-0{,}2868$,	m) $+\frac{1}{2}$;
$\operatorname{tg}\alpha$ gleich	n) -1,	o) 0,	p) $-\sqrt{3}$,	q) $-0{,}3121$,	
				r) $-1{,}3190$,	s) -2;
$\operatorname{ctg}\alpha$ gleich	t) 0,	u) $-\infty$,	v) -1,	w) $-0{,}9004$,	
				x) $-1{,}8040$,	y) -3.

25. Untersuche, ob die folgenden Formeln auch für stumpfe Winkel gelten:

a) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

b) $$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

c) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

26. α, β und γ seien die Winkel eines Dreiecks. Drücke durch α und β

a) $\sin\gamma$, b) $\cos\gamma$, c) $\operatorname{tg}\gamma$, d) $\operatorname{ctg}\gamma$ aus.

Der Sinussatz und seine Anwendungen

27. Beweise für das spitzwinklige Dreieck ABC, indem du die Höhe h_a einmal durch β, das andere Mal durch γ ausdrückst, den Sinussatz

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

28. Zeige, daß der Satz auch gilt, wenn β oder γ ein stumpfer Winkel ist.

29. Untersuche, ob der Satz noch gilt, wenn β oder γ ein rechter Winkel ist.

30. Beweise durch Erweiterung der Ableitung in Aufgabe 27

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

31. Aus Aufgabe 30 folgt $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Bestimme den Proportionalitätsfaktor mit Hilfe einer der beiden folgenden Überlegungen:

a) Fälle vom Mittelpunkt M des Dreiecks ABC das Lot auf die Seite a;

b) ziehe in dem Umkreis des Dreiecks ABC den Durchmesser BD und verbinde D mit C. Beweise, daß

$$a = 2r \cdot \sin\alpha$$

ist, und ebenso, daß

$$b = 2r \cdot \sin\beta, \qquad c = 2r \cdot \sin\gamma \quad \text{ist.}$$

c) Leite aus diesen Formeln den Sinussatz ab.

d) und e) Verfolge die Ableitungen a) und b) auch für stumpfwinklige Dreiecke.

32. Von einem Dreieck ist

	gegeben:	gesucht:		gegeben:	gesucht:
a)	c, α, γ;	a;	b)	a, α, β;	b;
c)	a, b, β;	α;	d)	a, c, α;	γ;
e)	a, β, γ;	b, c;	f)	b, α, γ;	a, c.

In jedem Falle ist der Ausdruck für das gesuchte Stück sofort hinzuschreiben.

33. Untersuche bei den Aufgaben 32 die Zahl der Lösungen, a) wenn gegeben sind eine Seite und zwei Winkel, b) wenn gegeben sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel. Vergleiche die trigonometrische Berechnung mit der geometrischen Konstruktion.

34. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC (achte auf die Zahl der möglichen Lösungen), wenn gegeben ist

a)	$a = 8{,}4$ cm,	$\alpha = 44^\circ$,	$\beta = 56^\circ$;
b)	$b = 17{,}23$ m,	$\alpha = 43{,}2^\circ$,	$\gamma = 66{,}8^\circ$;
c)	$c = 1{,}456$ km,	$\alpha = 20^\circ\, 12'$,	$\beta = 74^\circ\, 17'$;
d)	$c = 14{,}2$ m,	$a = 13{,}4$ m,	$\gamma = 24^\circ\, 23'$;
e)	$b = 55{,}6$ m,	$a = 24{,}3$ m,	$\beta = 109^\circ\, 14'$;
f)	$a = 133{,}4$ m,	$b = 128{,}3$ m,	$\beta = 20^\circ\, 25'$;
g)	$a = 24{,}5$ cm,	$b = 25{,}9$ cm,	$\alpha = 17^\circ\, 12'$;
h)	$c = 4{,}345$ km,	$b = 4{,}567$ km,	$\gamma = 20{,}5^\circ$;
i)	$c = 13{,}45$ m,	$a = 44{,}5$ m,	$\gamma = 82^\circ\, 17'$.

Der Kosinussatz und seine Anwendungen

35. a) In dem spitzwinkligen Dreieck ABC sei die Höhe BD gezogen. Die Strecke AD sei gleich p, die Strecke CD also $(b-p)$. Drücke mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes a durch h_b und $(b-p)$ und dann h_b durch c und p aus. Beweise so die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp$. b) Wie lautet die Beziehung, wenn man von C statt von B die Höhe fällt?

36. Drücke in dem nach Aufgabe 35 gefundenen Ausdruck p durch eine Seite und einen Winkel aus und beweise so den Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$$

37. Wie gestaltet sich der Beweis (Aufg. 35 und 36), wenn bei B (oder bei C) ein stumpfer Winkel ist?

38. Gilt der Satz auch dann, wenn bei A ein rechter Winkel ist?

39. Zeige, daß der Kosinussatz auch dann gilt, wenn α ein stumpfer Winkel ist.

40. Führe den Beweis auch für die Formeln

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

41. Löse die Formeln des Kosinussatzes (Aufg. 36 und 40) nach **a)** $\cos\alpha$, **b)** $\cos\beta$, **c)** $\cos\gamma$ auf.

42. Von einem Dreieck ist

	gegeben:	gesucht:		gegeben:	gesucht:
a)	a, b, γ;	c;	**b)**	a, c, β;	b;
c)	b, c, α;	a;	**d)**	a, b, c;	α, β, γ.

In jedem Falle sind nur die Ausdrücke für die gesuchten Stücke hinzuschreiben.

43. Berechne ein Dreieck aus

a)	$a = 14$ m,	$b = 12$ m,	$\gamma = 60^\circ$;
b)	$b = 17{,}2$ m,	$c = 14{,}3$ m,	$\alpha = 74^\circ\,20'$;
c)	$a = 24{,}5$ cm,	$c = 36{,}5$ cm,	$\beta = 58^\circ\,20'$;
d)	$a = 124{,}2$ m,	$b = 133{,}5$ m,	$\gamma = 102^\circ\,16'$;
e)	$a = 23{,}56$ m,	$c = 42{,}52$ m,	$\beta = 122^\circ\,18'$;
f)	$a = 14{,}5$ m,	$b = 16{,}4$ m,	$c = 13{,}2$ m;
g)	$a = 132{,}7$ km,	$b = 128{,}6$ km,	$c = 145{,}5$ km;
h)	$a = 13{,}2$ cm,	$b = 6{,}4$ cm,	$c = 7{,}0$ cm;
i)	$a = 24{,}5$ m,	$b = 38{,}2$ m,	$c = 13{,}9$ m.

Formeln für den Inhalt des Dreiecks

44. a) Ersetze in der Formel für den Inhalt des Dreiecks,

$$f = \tfrac{1}{2} a \cdot h_a,$$

h_a durch einen Ausdruck, der eine Seite und einen Winkel des Dreiecks enthält. Auf wieviel Weisen ist das möglich?

b) Beweise die drei Inhaltsformeln (achte auch auf stumpfwinklige Dreiecke!):

$$\text{I.}\quad f = \frac{a \cdot b}{2}\sin\gamma, \qquad \text{II.}\quad f = \frac{a \cdot c}{2}\sin\beta,$$

$$\text{III.}\quad f = \frac{b \cdot c}{2}\sin\alpha.$$

45. **a)** Zeige, daß die Inhalte von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, sich wie Rechtecke aus den anliegenden Seiten verhalten.

b) Zeige, daß Dreiecke, die in zwei Seiten übereinstimmen und deren eingeschlossene Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, gleichen Inhalt haben.

46. Ersetze in der Inhaltsformel I in Aufgabe 44b) die Seite b nach dem Sinussatz durch einen Ausdruck, der a enthält, und beweise so die Formel I und ebenso die ihr entsprechenden Formeln II und III:

$$\text{I.}\quad f = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}, \qquad \text{II.}\quad f = \frac{b^2 \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \sin\beta},$$

$$\text{III.}\quad f = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \sin\gamma}.$$

47. Berechne den Inhalt der Dreiecke Aufgabe 34a bis 34i, 43a bis 43e.

Vermischte Dreiecksberechnungen

48. Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 17$ cm, $\quad b = 12$ cm, $\quad \alpha = 58^\circ\,36'$

gegeben ist, **a)** die Höhen, **b)** die Winkelhalbierenden, **c)** die Seitenhalbierenden.

49. Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 9{,}2$ cm, $\quad b = 8{,}5$ cm, $\quad c = 3{,}9$ cm

gegeben ist, den Radius **a)** des Inkreises, **b)** des Umkreises.

50. Berechne in einem Dreieck, von dem

$\alpha = 67^\circ$, $\quad b = 12$ cm, $\quad \gamma = 72^\circ$

gegeben ist, die Abschnitte, in die die Winkelhalbierenden ihre Gegenseiten teilen.

51. Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 6{,}3$ cm, $\quad b = 4{,}8$ cm, $\quad \alpha = 114^\circ\,54'$

gegeben ist, die Winkel zwischen den Seitenhalbierenden.

52. Berechne ein Dreieck aus

a) $a = 6{,}555$ m, $\quad b = 7{,}04$ m, $\quad s_b = 6{,}895$ m;

b) $\alpha = 85^\circ\,15'$, $\quad \beta = 61^\circ\,30'$, $\quad w_\beta = 6{,}75$ m;

c) $a = 17{,}6$ cm, $\quad w_\gamma = 10{,}75$ cm, $\quad \gamma = 64^\circ\,24'$;

d) $h_a = 2{,}31$ m, $\quad h_b = 3{,}055$ m, $\quad \alpha = 103^\circ\,27'\,36''$;

e) $a = 234{,}1$ m, $\quad h_a = 157{,}25$ m, $\quad s_a = 252{,}4$ m.

53. In einem Dreieck verhalten sich die Seiten wie $2:3:4$. Bestimme die Winkel des Dreiecks.

54. In einem Dreieck ist das Verhältnis zweier Seiten $1:2$, der eingeschlossene Winkel zählt 60°. Wie groß sind die beiden anderen Winkel?

55. Berechne Seiten und Winkel eines Dreiecks, in dem gegeben ist $a:b=2:3$, $c=10$ cm und $\beta=45^\circ$.

Vierecksberechnungen

56. Berechne **a)** die Diagonalen, **b)** den Inhalt eines Parallelogramms mit den Seiten 3,75 cm und 5,38 cm und dem eingeschlossenen Winkel 75°.

57. Ein Parallelogramm hat die Seiten 5 cm und 8 cm. Die eine Diagonale ist gleich 7 cm. Wie groß ist die andere?

58. Von einem Parallelogramm sind die Diagonalen 11,5 cm und 17,2 cm und der Winkel, den sie bilden, 57°, bekannt. Berechne Seiten, Winkel und Inhalt!

59. Ein Trapez hat die Seiten $a=4{,}2$ cm, $b=10$ cm, $c=18$ cm und $d=14{,}6$ cm. Berechne die Winkel und den Inhalt. (Berechne erst ein Teildreieck!) Die parallelen Seiten sind a und c.

Höhenmessung

60. Um die Höhe eines Berges zu messen, wird eine 113 m lange horizontale Standlinie so abgesteckt, daß die sie enthaltende Vertikalebene durch die Bergspitze geht. An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $24^\circ\,17'$ und $19^\circ\,48'$ gemessen. Wie hoch ist der Berg?

61. Von der Plattform eines Turmes aus wird das untere und das obere Ende einer auf dem Erdboden stehenden 14 m hohen Fahnenstange anvisiert. Die beiden Tiefenwinkel sind $22{,}5^\circ$ und $28{,}5^\circ$. Wie hoch ist die Plattform, und wie weit steht die Fahnenstange von dem Turm ab?

62. Um die Höhe eines Gebäudes zu messen, wird auf der höchsten Erhebung eine 5 m lange, vertikale Meßstange angebracht und deren unteres und oberes Ende vom Erdboden aus anvisiert. Die abgelesenen Erhebungswinkel sind 61° und 67°. Wie hoch ist das Gebäude?

Triangulation

63. Die Basis BC eines Dreiecks ABC wird zu 117,58 m gemessen, die Winkel β und γ ergeben sich zu $73^\circ\,32'$ und $81^\circ\,17'$. Berechne AB und AC

64. Ein Punkt D wird an das eben bezeichnete $\triangle ABC$ dadurch angeschlossen, daß die Winkel $DAB=54^\circ\,25'$ und $DBA=63^\circ\,51'$ gemessen werden. **a)** Berechne DA und DB. **b)** Berechne auf zweifache Weise DC. (Zwei Fälle je nach der Lage von D.)

§ 4. Erweiterung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkel

Winkel und Winkelmaß

1. Zeige, wie man, von der Entstehung des Winkels durch Drehung eines Strahles (des Leitstrahles) um seinen Endpunkt ausgehend, von Winkeln

   a) über 180°, b) über 360° sprechen kann (Fig. 7).

2. Vergleiche die beiden möglichen Drehrichtungen des beweglichen Strahles bei der Entstehung eines Winkels: Wann nennt man einen Winkel positiv, wann negativ?

3. Zeichne unter Verwendung eines Pfeiles zur Kennzeichnung der Drehrichtung die folgenden Winkel: a) $+135^\circ$, b) -135°, c) $+90^\circ$, d) -90°, e) $+270^\circ$, f) -270°, g) 180°, h) -180°, i) $+360^\circ$, k) -360°. Die Anfangslage des Strahles sei einmal horizontal nach rechts gerichtet, dann horizontal nach links gerichtet, schließlich vertikal nach unten (jeder Winkel ist also dreimal zu zeichnen).

4. Deute die folgenden Winkel (wieder mit Pfeil) an: a) 450°, b) 410°, c) 570°, d) 700°, e) -310°, f) -480°, g) -720°.

5. Was ist über die freien Schenkel der Winkel a) α und $-\alpha$, b) $90^\circ+\alpha$ und $90^\circ-\alpha$, c) $180^\circ+\alpha$ und $180^\circ-\alpha$, d) α und $360^\circ+\alpha$, e) α und $360^\circ-\alpha$, f) $\alpha+180^\circ$ und $-\alpha-180^\circ$ zu sagen, wenn Scheitelpunkt und Anfangslage des Leitstrahles zusammenfallen?

6. Zeige, daß alle Winkel von der Form $\alpha + k \cdot 360^\circ$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, zur Deckung gebracht werden können.

7. Berechne den Weg, den ein um die Strecke r vom Scheitelpunkt entfernter Punkt zurücklegt, wenn der Winkel a) 90°, b) 360°, c) 45°, d) 720° mißt.

8. Gib die in Aufg. 7a)—d) berechneten Größen an unter der Voraussetzung, daß $r = 1$ ist (Bogenmaß).

9. Wir bezeichnen zunächst den Wert des in Graden gemessenen Winkels α im Bogenmaß mit $\operatorname{arc} \alpha^\circ$. Wie groß ist

a) $\operatorname{arc} 360^\circ$,	b) $\operatorname{arc} 90^\circ$,	c) $\operatorname{arc} 45^\circ$,	d) $\operatorname{arc} 10^\circ$,
e) $\operatorname{arc} 540^\circ$,	f) $\operatorname{arc} 63^\circ$,	g) $\operatorname{arc} 137^\circ$,	h) $\operatorname{arc} (-15^\circ)$,
i) $\operatorname{arc} (-30^\circ)$,	k) $\operatorname{arc} (-450^\circ)$,	l) $\operatorname{arc} 720^\circ$,	m) $\operatorname{arc} 1^\circ$,
n) $\operatorname{arc} 7^\circ 30'$,	o) $\operatorname{arc} 45'$,	p) $\operatorname{arc} 37^\circ 16'$,	q) $\operatorname{arc} 16^\circ 48'$?

10. Stelle die Funktion $y = \operatorname{arc} x$, wobei x in Graden gemessen wird, in geeignetem Maßstabe graphisch dar.

11. Rechne in Gradmaß die folgenden in Bogenmaß gemessenen Winkel um:

a) π, b) $\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{\pi}{4}$, e) 2π, f) $-\frac{2}{3}\pi$, g) $-\frac{3}{2}\pi$, h) 1, i) $-1\frac{1}{2}$,
k) 0,1, l) 0,35.

12. Rechne in Bogenmaß um a) α, b) $\alpha + 90^\circ$, c) $180^\circ - \alpha$, d) $-\alpha$, wenn α in Gradmaß gegeben ist.

13. Rechne in Gradmaß um a) a, b) $a + 2\pi$, c) $a - \frac{\pi}{2}$, d) $a + \frac{\pi}{3}$, wenn a im Bogenmaß gegeben ist[1]).

Erweiterung der Funktionsbegriffe auf beliebige Winkel

14. Ersetze in der Definition der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel Hypotenuse durch Leitstrahl (gemessen vom Scheitelpunkt bis zu einem beliebigen Punkt des Leitstrahls), Gegenkathete durch Ordinate oder Projizierende des Leitstrahls, Ankathete durch Abszisse oder Projektion des Leitstrahls, wobei die Anfangslage des Leitstrahls mit der positiven Richtung der x-Achse zusammenfällt (Fig. 7). Wie lautet dann die Erklärung des Sinus, des Kosinus, des Tangens, des Kotangens, ausgedehnt auf beliebige Winkel?

15. Gib die Vorzeichen a) des Sinus, b) des Kosinus, c) des Tangens, d) des Kotangens in den einzelnen Quadranten an, wenn du dabei die Vorzeichen von Ordinate und Abszisse maßgebend sein läßt, während die Maßzahl des Leitstrahls stets positiv genommen ist. e) Vereinige die Ergebnisse von a) bis d) in einer Tabelle.

16. Zeige, daß die Erklärungen der trigonometrischen Funktionen für spitze (§ 1) und stumpfe (§ 3) Winkel Sonderfälle der allgemeinen Erklärung in Aufgabe 14 sind.

17. Welche Werte haben die vier trigonometrischen Funktionen für

a) 0°,	b) 90°,	c) 180°,	d) 270°,	e) 360°,
f) 135°,	g) 120°,	h) 300°,	i) -30°,	k) -135°,
l) 540°,	m) 450°,	n) 630°,	o) -720°?	

18. Welche Werte haben die vier Funktionen für a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{2}{3}\pi$, c) $\frac{3}{4}\pi$,
d) $\frac{3}{2}\pi$, e) $-\frac{4}{3}\pi$, f) $-\frac{\pi}{4}$, g) -3π?

---

1) In der Folge wird die Funktionsbezeichnung arc immer fortgelassen. Ob also ein Winkel in Gradmaß den Wert α, in Bogenmaß den Wert a hat: wir schreiben sowohl $\sin\alpha$ wie $\sin a$. — Dem Zahlenwert α oder a ist zu entnehmen, welches von den beiden Maßen benutzt ist.

19. Stelle **a)** die Sinusfunktion, **b)** die Kosinusfunktion, **c)** die Tangensfunktion, **d)** die Kotangensfunktion für die ersten fünf positiven und die ersten beiden negativen Quadranten graphisch dar. Als Maßstab auf der x-Achse wähle das Bogenmaß.

20. Wie groß ist die Periode der einzelnen trigonometrischen Funktionen?

21. Gib die Lage aller Symmetrieachsen und aller Symmetriezentren an **a)** bei der Sinuskurve, **b)** bei der Kosinuskurve, **c)** bei der Tangenskurve, **d)** bei der Kotangenskurve.

22. Gegeben ist $\sin\alpha = s$. Berechne

a) $\sin(360^\circ + \alpha)$, **b)** $\sin(-\alpha)$, **c)** $\sin(360^\circ - \alpha)$,
d) $\sin(180^\circ + \alpha)$, **e)** $\sin(180^\circ - \alpha)$.

23. Gegeben ist $\cos\alpha = c$. Berechne

a) $\cos(-\alpha)$, **b)** $\cos(180^\circ + \alpha)$, **c)** $\cos(180^\circ - \alpha)$,
d) $\cos(360^\circ + \alpha)$, **e)** $\cos(360^\circ - \alpha)$.

24. Gegeben ist $\operatorname{tg}\alpha = t$. Berechne

a) $\operatorname{tg}(-\alpha)$, **b)** $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$. **c)** $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$,
d) $\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha)$, **e)** $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$.

25. Gegeben ist $\operatorname{ctg}\alpha = k$. Berechne

a) $\operatorname{ctg}(-\alpha)$, **b)** $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)$, **c)** $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$,
d) $\operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$, **e)** $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$.

26. (Erster Satz der absoluten Beträge.) Es ist

$$|\sin\alpha| = |\sin\beta|, \quad |\cos\alpha| = |\cos\beta|,$$
$$|\operatorname{tg}\alpha| = |\operatorname{tg}\beta|, \quad |\operatorname{ctg}\alpha| = |\operatorname{ctg}\beta|,$$

wenn **a)** die Differenz, **b)** die Summe der Winkel α und β ein ganzes Vielfaches von 180° ist.[1]) Beweise das.

27. Bestimme unter Benutzung der trigonometrischen Tafel

a) $\sin 195^\circ$, **b)** $\cos 212^\circ$, **c)** $\operatorname{tg} 142^\circ$, **d)** $\operatorname{ctg} 242^\circ$,
e) $\sin 317^\circ$, **f)** $\cos 292^\circ$, **g)** $\operatorname{tg} 282^\circ$, **h)** $\operatorname{ctg} 351^\circ$,
i) $\sin 231^\circ 35'$, **k)** $\cos 197^\circ 48'$, **l)** $\operatorname{tg} 332^\circ 15'$, **m)** $\operatorname{ctg} 265^\circ 52'$

---

1) Unter $|a|$ (gelesen: absoluter Wert von a) versteht man den Wert a, wenn a positiv ist, den Wert $-a$, wenn a negativ ist. $|a|$ ist also stets positiv. Man kann auch sagen, $|a|$ sei der Wert von a, abgesehen vom Vorzeichen.

28. [1]) Bestimme die Winkel zwischen 0° und 360°, für die die Sinusfunktion die folgenden Werte hat:

a) 0,4226, b) 0,6018, c) 0,5250, d) 0,5480,

e) 0,42262, f) 0,48481, g) 0,38805, h) 0,67200.

29. [1]) Bestimme die Winkel zwischen 0° und 360°, für die die Kosinusfunktion die folgenden Werte hat:

a) 0,8141, b) 0,8660, c) 0,9250, d) 0,8800,

e) 0,75741, f) 0,91116, g) 0,86603, h) 0,98010.

30. [1]) Bestimme die Winkel zwischen 0° und 360°, für die die Tangensfunktion die folgenden Werte hat:

a) 0,4877, b) 1,8807, c) 2,6051, d) 1,3100,

e) 0,10510, f) 6,31375, g) 3,20406, h) 0,30000.

31. [1]) Bestimme die Winkel zwischen 0° und 360°, für die die Kotangensfunktion die folgenden Werte hat:

a) 0,5317, b) 2,0503 c) 1,2203, d) 1,6000,

e) 1,23490, f) 0,70021, g) 4,84300, h) 1,11111.

Die Beziehungen der Winkelfunktionen untereinander

32. Untersuche die Gültigkeit der folgenden Formeln für den erweiterten Funktionsbegriff:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, c) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

33. a) Gelten die Formeln

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos\ (90^\circ - \alpha), \\ \cos\alpha &= \sin\ (90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{ctg}\ (90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \operatorname{tg}\ (90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

auch dann, wenn α ein beliebiger (nicht nur ein spitzer) Winkel ist?

b) Stelle entsprechende Formeln auf, wenn 90° durch 270° ersetzt wird.

---

1) Die Aufgaben a)—d) kommen jeweils für vierstelliges, die Aufgaben e)—h) für fünfstelliges Rechnen in Betracht.

34. (Zweiter Satz der absoluten Beträge.) Es ist

$$|\sin\alpha| = |\cos\beta|, \qquad |\cos\alpha| = |\sin\beta|,$$
$$|\operatorname{tg}\alpha| = |\operatorname{ctg}\beta|, \qquad |\operatorname{ctg}\alpha| = |\operatorname{tg}\beta|,$$

wenn **a)** die Summe, **b)** die Differenz der Winkel α und β ein ungerades Vielfaches von 90° ist. Beweise das.

Der Wert der Sinusfunktion für kleine Winkel

35. Berechne $\frac{\sin x}{x}$ für **a)** $x = 0{,}1$, **b)** $x = 0{,}01$, **c)** $x = 0{,}001$.

36. In der Fig. 8 ist der Kreisausschnitt BMC größer als das Dreieck MAB und kleiner als das Dreieck MCD. Bringe diese Ungleichungen in eine andere Form, indem du die auftretenden Größen durch den Radius $MC = r$ und den in Bogenmaß gemessenen Winkel $AMB = x$ ausdrückst. Leite daraus eine obere und eine untere Grenze für $\frac{x}{\sin x}$ ab.

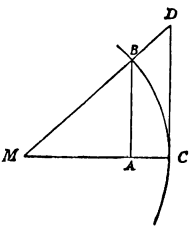

Fig. 8.

37. Gib auf Grund der Überlegungen in Nr. 36 den Grenzwert an, dem **a)** $\frac{x}{\sin x}$, **b)** $\frac{\sin x}{x}$ zustrebt, wenn x sich beliebig dem Wert 0 nähert.

38. Untersuche mit Hilfe der Tafel der trigonometrischen Funktionen, bis zu welchem Winkel, gemessen in Graden, $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ **a)** bis auf vier Dezimalen, **b)** bis auf drei Dezimalen übereinstimmen.

39. Gib ohne Tafel angenäherte Werte von **a)** $\sin 1^\circ$, **b)** $\sin \frac{1}{2}^\circ$, **c)** $\sin 0{,}1^\circ$ an.

40. Wenn für kleine Werte von x angenähert $y = \sin x$ und $y = x$ übereinstimmen, so bedeutet das, Sinuskurve und Gerade $y = x$ fallen in der Nähe von $x = 0$ angenähert zusammen. Unter welchen Winkeln schneidet also die Sinuskurve die x-Achse?

41. Welchen Wert nimmt $\frac{\sin(-x)}{-x}$ für beliebig kleines x an?

42. Wird **a)** $\frac{\sin x}{x}$, **b)** $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ für kleine Werte von x größer oder kleiner als 1?

§ 5. Die Additionstheoreme

Die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion

1. In Fig. 9 ist an Strahl OX der Winkel α und an dessen freien Schenkel der Winkel β angetragen. Vorausgesetzt wird $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ und $\alpha + \beta < 90°$. OA ist gleich der Einheit gewählt, $AB \perp OB$, $AA' \perp OX$, $BB' \perp OX$, $BC \perp AA'$. a) Berechne $\sphericalangle BAC$. b) Setze AA' aus AC und BB' zusammen und beweise so die Formel

$$(1) \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

c) Setze OA' gleich der Differenz von OB' und BC und beweise so die Formel

$$(2) \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

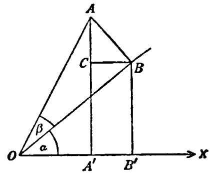

Fig. 9.

2. a) Entwirf eine der eben benutzten analoge Figur für die Differenz $\alpha - \beta$ zweier Winkel, und zwar unter der Voraussetzung, daß $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\alpha > \beta$ ist. b) Leite die Formeln her

$$(3) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$(4) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

3. Dehne an der Hand der Fig. 9 unter Beachtung der Vorzeichen der auftretenden Strecken das Additionstheorem (1), (2) auf den Fall aus, daß α und β zwar spitz bleiben, daß aber $\alpha + \beta > 90°$ ist.

4. (Herleitung des Additionstheorems (1) und (3) aus dem ptolemäischen Lehrsatz.) a) Im Sehnenviereck $ABCD$ sei AC Durchmesser $(= 2r)$, $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle CAB = \beta$. Dividiere die Formel des ptolemäischen Lehrsatzes durch $(2r)^2$ und leite so das Additionstheorem her. b) Im Sehnenviereck $ABCD$ sei AB Durchmesser $(= 2r)$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle CAB = \beta$. Wende die Formel für $AB \cdot CD$ an und verfahre wie oben. c) Welchen einschränkenden Bedingungen unterliegen bei diesem Beweis die Winkel α und β?

5. Fig. 10 zeigt, daß $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$ ist. a) Drücke in dieser Gleichung c, a und b durch den Radius r des Umkreises und Winkelfunktionen aus. b) Benutze $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ und leite so ein Additionstheorem her. c) Welchen einschränkenden Bedingungen unterliegen die Winkel α und β?

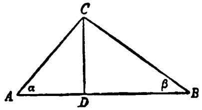

Fig. 10.

6. Es sei einer der Winkel α und β, etwa α, stumpf, der andere spitz. Führe den Winkel $\alpha' = \alpha - 90°$ ein, stelle für α' und β die Additionstheoreme (1) und (2) auf und untersuche, ob jetzt auch für α und β die Additionstheoreme nachweisbar sind.

7. Weise ebenso die Richtigkeit der Formeln (3) und (4) für den Fall nach, daß einer der beiden Winkel stumpf ist.

8. a) Die Additionstheoreme mögen für Winkel α und β gelten, die zwischen irgendwelchen bestimmten, in Vielfachen des rechten Winkels angebbaren Grenzen liegen. Weise dann nach, daß die Formeln auch noch für β und einen Winkel $\alpha' = 90^\circ + \alpha$ gelten. b) Zeige, daß damit die Additionstheoreme für beliebige positive Winkel α und β gelten. c) Zeige, daß die Formeln auch für negative Winkel gelten. d) Zeige, daß nach Zulassung negativer Winkel die Formeln (3) und (4) nur Sonderfälle der Formeln (1) und (2) sind. e) Leite die Formel (2) unmittelbar aus der Formel (1) her. f) Leite die Formel (4) unmittelbar aus der Formel (3) her.

9. Erprobe die Richtigkeit der Formeln an den Winkeln a) 60° und 30°, b) 0° und 45°, c) 90° und 90°, d) 0° und β.

10. Berechne a) $\sin 75^\circ$, b) $\cos 75^\circ$, c) $\sin 15^\circ$, d) $\cos 15^\circ$, e) $\sin 105^\circ$, f) $\cos 165^\circ$.

11. Entwickle Formeln für a) $\sin(45^\circ + \alpha)$, b) $\cos(45^\circ + \alpha)$, c) $\sin(45^\circ - \alpha)$, d) $\cos(45^\circ - \alpha)$.

12. Entwickle Formeln für a) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, b) $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$, c) $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$.

Die Additionstheoreme der Tangens- und Kotangensfunktion

13. Entwickle aus den Additionstheoremen der Sinus- und der Kosinusfunktion durch Division die folgenden Formeln:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

14. Entwickle Formeln a) für $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, b) für $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

15. Berechne aus den dir bekannten Werten der Funktionen für 45° und 30°

a) $\operatorname{tg} 75^\circ$, b) $\operatorname{ctg} 75^\circ$, c) $\operatorname{tg} 15^\circ$,

d) $\operatorname{ctg} 15^\circ$, e) $\operatorname{tg} 165^\circ$, f) $\operatorname{ctg} 255^\circ$.

16. Entwickle Formeln für

a) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$, b) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$,

c) $\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)$, d) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$.

Funktionen von Vielfachen eines Winkels

17. Beweise die Formeln

(1) $$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

(2) $$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

18. Entwickle entsprechende Formeln für

a) $\operatorname{tg} 2\alpha$, **b)** $\operatorname{ctg} 2\alpha$, **c)** $\sin 3\alpha$, **d)** $\cos 3\alpha$.

19. Beweise die Formeln

(1) $$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

(2) $$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

20. Entwickle entsprechende Formeln für **a)** $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, **b)** $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

21. Berechne **a)** $\sin 22^\circ 30'$, **b)** $\operatorname{tg} 15^\circ$, **c)** $\cos 67^\circ 30'$, **d)** $\sin 7^\circ 30'$, **e)** $\operatorname{ctg} 37^\circ 30'$.

22. Zeige, daß die trigonometrischen Funktionen aller ganzen Vielfachen von 3° durch Quadratwurzelausdrücke darstellbar sind. Berechne insbesondere die Funktionen von **a)** 3°, **b)** 6°, **c)** 9°, **d)** 12°.

Anleitung: $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$; $18^\circ = \frac{36^\circ}{2}$.

Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen

23. Entwickle nach dem Additionstheorem $\sin(x+y) + \sin(x-y)$ und leite daraus, indem du $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ setzt, die Formel

(1) $$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

her. — Leite in ähnlicher Weise die Formeln her:

(2) $$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

(3) $$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

(4) $$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

24. Entwickle in der Weise von Aufg. 23 Produkte für

a) $\sin\alpha + \cos\beta$, **b)** $\sin\alpha - \cos\beta$, **c)** $\sin\alpha + \cos\alpha$,

d) $1 - \sin\alpha$, **e)** $1 + \cos\beta$, **f)** $1 - \cos\beta$.

Anwendungen

25. Berechne unter Beachtung der Tatsache (§ 4, Aufg. 37), daß für kleine Winkel $\sin x \approx x$ ist (Bogenmaß!), a) $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ)$. b) $\cos 31^\circ$, c) $\sin 29^\circ$, d) $\sin 59^\circ$, e) $\cos 46^\circ$.

26. Entwickle für die Pfeilhöhe eines Kreisabschnittes (d. h. für den größten Abstand des Kreisbogens von der Sehne) die Formel $h = 2\,r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ (α = Zentriwinkel).
    Anleitung: Beachte Aufg. 19.

27. Bei der Lösung der reduzierten Gleichung dritten Grades erhält man, wenn der Casus irreducibilis vorliegt, drei Werte der Form $a \cdot \cos\alpha$, $a \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ und $a \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$. Es liegt nahe, als Probe auf die Richtigkeit zu untersuchen, ob die Summe der drei Werte Null ist. Beweise, daß diese Probe nichts besagt, weil die Summe auch dann Null ist, wenn a und α falsch berechnet sind.

Aus der Geschichte der Geometrie

Vieta (1540—1603), der als erster die Methoden zur Berechnung von Dreiecken mit Hilfe aller trigonometrischen Funktionen systematisch ausgebildet hat, veröffentlichte 1579 einen „Canon" und 1593 ein Buch „Über verschiedene mathematische Aufgaben".

28. Aus dem „Canon": $\sin\alpha = \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$. Beweise die Formel.

29. Aus den „Aufgaben": $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$. Beweise das.

§ 6. Goniometrische Gleichungen [1]

Algebraische Lösungen

1. Löse die folgenden Gleichungen:
   a) $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}$, b) $\cos^2\varphi = \frac{2}{3}$,
   c) $\operatorname{tg}^2\varphi = 2$, d) $\operatorname{ctg}^2\varphi = 2{,}5$.

2. Löse die quadratischen Gleichungen
   a) $\sin^2\varphi - 1{,}1428 \cdot \sin\varphi + 0{,}3214 = 0$,
   b) $\cos^2\varphi - 1{,}4848 \cdot \cos\varphi + 0{,}4924 = 0$,
   c) $\operatorname{tg}^2\varphi - 1{,}2679 \cdot \operatorname{tg}\varphi + 0{,}2679 = 0$,
   d) $\operatorname{ctg}^2\varphi - 6{,}6713 \cdot \operatorname{ctg}\varphi + 5{,}6713 = 0$.

1) In den Aufgaben dieses Paragraphen sind alle Lösungen zu berücksichtigen, die zwischen 0^0 und 360^0 liegen, und nur diese.

3. In den folgenden Gleichungen sind alle Funktionen durch eine einzige auszudrücken; dann ist die Gleichung nach dieser Funktion aufzulösen und der Winkel zu bestimmen:

a) $2 \cdot \sin^2 \varphi + 4 \cdot \cos^2 \varphi = 3$, **b)** $3 \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 2{,}5$,
c) $2 \cdot \sin^2 \varphi + \sqrt{2} \cdot \cos \varphi = 2$, **d)** $4 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \sin \varphi = 2$,
e) $a \cdot \sin^2 \varphi + b \cdot \cos^2 \varphi = 0$, **f)** $a \cdot \sin^2 \varphi + b \cdot \cos^2 \varphi = c$,
g) $a \cdot \sin^2 \varphi + b \cdot \cos \varphi = 0$, **h)** $a \cdot \cos^2 \varphi + b \cdot \sin \varphi = c$,
i) $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 1$, **k)** $\operatorname{tg}^2 x + 4 \cdot \sin^2 x = 3$.

4. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $3 \sin \varphi = 4 \cos \varphi$, **b)** $\sin \varphi + 2 \cos \varphi = 0$,
c) $5 \sin \varphi = 3 \operatorname{tg} \varphi$, **d)** $4 \sin \varphi + 3 \operatorname{tg} \varphi = 0$.

5. Löse die Gleichung $a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi = c$ dadurch, daß du die eine trigonometrische Funktion beseitigst und damit die Aufgabe auf eine quadratische Gleichung zurückführst.

6. Löse die Gleichung $a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi = c$ mit Benutzung eines Hilfswinkels ψ in folgender Weise: Dividiere durch a, führe $\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}$ ein und multipliziere mit $\cos \psi$. Was erhält man für $\sin(\varphi + \psi)$?

7. Löse die Gleichung $a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi = c$ mit Benutzung eines Hilfswinkels ψ, der durch die Gleichung $\operatorname{ctg} \psi = \frac{b}{a}$ eingeführt wird.

8. Löse die Gleichungen

a) $4 \sin \varphi + 7 \cos \varphi = 6{,}296$, **b)** $5 \sin \varphi - 2 \cos \varphi = 0{,}488$,
c) $\frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{2}{5} \cos \varphi = 0{,}625$, **d)** $\frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi = 0{,}258$.

Graphische Lösungen

9. a) Um die Gleichung $a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi = c$ graphisch zu lösen, setze $\cos \varphi = x$, $\sin \varphi = y$ und bringe den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ zum Schnitt mit der Geraden $ax + by = c$. **b)** Untersuche, wann die Gleichung reelle Lösungen hat und wie viele.

10. Löse graphisch die Gleichungen

a) $\cos \varphi - 2 \sin \varphi = 0$, **b)** $6 \cos \varphi + 4 \sin \varphi = 3$,
c) $4 \sin \varphi - 7 \cos \varphi = 6$, **d)** $\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2}$.

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

11. Gegeben ist $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{m}{n}$ und $\varphi + \psi = \alpha$. **a)** Bilde den Wert von $\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi}$ und forme ihn in ein Produkt um. **b)** Unter Beachtung dessen, daß $\varphi + \psi$ bekannt ist, stelle eine Gleichung für $\varphi - \psi$ auf. Daraus lassen sich bei gegebenen Größen m, n und a die unbekannten Winkel berechnen.

12. Löse die Gleichungen

a) $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 0{,}2242, \qquad \varphi + \psi = 325^\circ;$

b) $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{2}{3}, \qquad \varphi + \psi = 90^\circ;$

c) $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = -\,0{,}7018, \qquad \varphi - \psi = 152^\circ\,24'.$

§ 7. Berechnung von Dreiecken und Vierecken

Halbwinkelsätze

1. Ersetze in $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ (vgl. § 5 Nr. 19) $\cos\alpha$ durch den Wert, der sich aus dem Kosinussatz ergibt, führe $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ein und forme den Ausdruck um in

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}}. \tag{1}$$

2. Leite in ähnlicher Weise, von $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ ausgehend, ab:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\;c}}. \tag{2}$$

3. a) Leite aus (1) und (2) die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\;(s-c)}{s\,(s-a)}} \tag{3}$$

her. **b)** Leite die Formel (3) aus den zwei Formeln für den Flächeninhalt (Buch für Kl. 7—9, § 18, Aufg. 9 und 10, § 21, Aufg. 11)

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$
$$F = \varrho\cdot s$$

her, wobei die Formel $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\varrho}{s-a}$ zu berücksichtigen ist. **c)** Gib eine Halbwinkelformel für den Kotangens an.

4. a) Zeige, daß die Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten zweckmäßiger mit den Halbwinkelsätzen als mit dem Kosinussatz geschieht. **b)** Welche Halbwinkelformeln führen am schnellsten zum Ziel?

Mollweidesche Formeln und Tangenssatz

5. a) Drücke in $\dfrac{b+c}{a}$ die Seiten durch den Radius des Umkreises und die

Funktionen der Winkel aus und forme den Zähler auf Grund der in § 5 Nr. 23 hergeleiteten Formeln um, so daß sich die Gleichung ergibt

$$(1)\qquad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

b) Leite in gleicher Weise Ausdrücke für $\frac{a+c}{b}$ und $\frac{a+b}{c}$ her.

6. a) Leite in gleicher Weise die Formel her

$$(2)\qquad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

b) Leite in gleicher Weise Ausdrücke für $\frac{a-c}{b}$ und $\frac{a-b}{c}$ her. c) Beweise die Formeln (1) und (2) geometrisch (Buch für Kl. 7—9, § 31, Nr. 47 und 48).

7. Leite aus den Mollweideschen Formeln (1) und (2) durch Division den Tangenssatz her

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

8. a) Zeige, daß die Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zweckmäßiger mit Hilfe der Mollweideschen Formeln oder des Tangenssatzes als mit dem Kosinussatz geschieht. b) Welche der in Nr. 5, 6 und 7 entwickelten Formeln führen am schnellsten zum Ziel?

Anwendungen der Dreieckssätze

9. Berechne das Dreieck, von dem gegeben ist (achte auf mehrfache Lösungen)

a)	$a = 28{,}16$,	$b = 26{,}22$,	$s_a = 27{,}58$,
b)	$\alpha = 85^\circ\,21'\,36''$,	$\beta = 61^\circ\,31'\,12''$,	$w_a = 6{,}06$,
c)	$\alpha = 103^\circ\,27'\,36''$.	$h_a = 27{,}72$,	$h_c = 36{,}66$,
d)	$a = 14{,}046$,	$h_a = 9{,}435$	$s_a = 15{,}144$,
e)	$a = 11{,}82$,	$s_a = 5{,}64$,	$\beta = 9^\circ\,27'\,36''$,
f)	$a = 65{,}88$,	$c = 44{,}10$,	$r = 33{,}78$,
g)	$b = 85{,}05$,	$\alpha = 40^\circ\,2'\,24''$,	$r = 48{,}24$,
h)	$a = 6{,}26$,	$w_\beta = 4{,}32$,	$\gamma = 43^\circ\,16'\,48''$,
i)	$b = 7{,}49$,	$h_b = 7{,}84$,	$s_c = 6{,}23$,

k) $c = 3{,}104$, $h_a = 3{,}028$, $s_b = 2{,}619$,
l) $a = 36{,}26$, $b = 32{,}40$, $f = 397{,}8$,
m) $a = 56{,}5$, $\beta = 41^\circ\,6'$ $f = 512{,}8$,
n) $\alpha = 109^\circ\,30'\,36''$, $\beta = 38^\circ\,28'\,12''$. $f = 786{,}8$.

10. In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ABC wird die Hypotenuse BC durch den Punkt D im Verhältnis $1:2$ geteilt. Gib die Tangensfunktionen der Winkel in den Dreiecken ABD und ACD an!

11. Berechne die Winkel eines Dreiecks mit den Seiten $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$!

Höhenmessung

12. 15,12 m über einem Wasserspiegel liegt der Drehpunkt eines Winkelmeßapparates, mit dem man die Spitze eines Turmes und ihren Spiegelpunkt im Wasser anschneidet. Man findet den Erhebungswinkel $34^\circ\,30'$ und den Tiefenwinkel $46^\circ\,26'$. Wie hoch ist der Turm?

13. Auf einem Berge steht ein Turm. Man steckt am Abhang eine Standlinie AB von 214 m Länge ab, die auf den Turm zugeht und ein Gefälle von $6^\circ\,21'$ hat. Die Höhenwinkel der Turmspitze an den Enden der Standlinie sind $23^\circ\,23'$ und $36^\circ\,27'$. **a)** Wie hoch liegt die Turmspitze über den beiden Endpunkten der Standlinie? **b)** Wie weit ist der Turm von dem ihm zunächst gelegenen Endpunkt der Standlinie entfernt?

Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden in der Feldmessung

14. (Hansensche Aufgabe: Vorwärtseinschneiden.) Von den Enden A und B einer bekannten Basis a werden die Punkte P und Q anvisiert und dabei die Winkel $PAQ = \alpha$, $QAB = \beta$, $PBA = \gamma$, $QBP = \delta$ festgestellt (Fig. 11). Die Strecke PQ ist zu bestimmen. **a)** Konstruiere PQ. **b)** Berechne PQ. **c)** Beispiel: $AB = 3{,}75$ km, $\alpha = 12^\circ\,30'$, $\beta = 33^\circ$, $\gamma = 31^\circ\,30'$, $\delta = 19^\circ$. **d)** In der Fig. 11 ist angenommen, daß P und Q auf der gleichen Seite von AB liegen. Überlege die Aufgabe für den Fall, daß die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten von AB liegen.

Anleitung: 1. Berechne die Winkel APB und AQB. 2. Berechne AP und AQ. 3. Berechne nach dem ersten Kongruenzfall PQ.

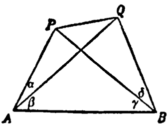

Fig. 11.

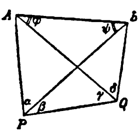

Fig. 12.

15. (Hansensche Aufgabe: Rückwärtseinschneiden.) Die Entfernung zweier Punkte PQ ist nicht unmittelbar meßbar; es lassen sich aber von ihnen aus die Enden A und B einer Basis von der bekannten Länge a an-

visieren (Fig. 12). P ist von Q aus sichtbar, es werden die Winkel $APB=\alpha$, $BPQ=\beta$, $AQP=\gamma$, $AQB=\delta$ festgestellt. a) Konstruiere PQ. b) Berechne PQ.

Anleitung: 1. Berechne $\sphericalangle PAQ$ und $\sphericalangle PBQ$. 2. Gib die Summe $\varphi+\psi$ der Winkel BAQ und ABP an. 3. Berechne $\frac{AB}{QP}$ einmal, indem du die Quotienten $\frac{AB}{AP}$ und $\frac{AP}{PQ}$, die nach dem Sinussatz auszuwerten sind, multiplizierst, dann noch einmal, indem du ebenso BQ zu Hilfe nimmst. 4. Durch Gleichsetzen beider Werte erhältst du einen Wert für $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$. 5. Vgl. § 6, Aufg. 11.

c) Beispiel: $a=3{,}309$ km, $\alpha=28^{\circ}\,12'$, $\beta=57^{\circ}\,38'$, $\gamma=22^{\circ}\,32'$, $\delta=73^{\circ}\,49'$.

d) In der Fig. 12 ist angenommen, daß P und Q auf der gleichen Seite von AB liegen. Überlege die Lösung der Aufgabe für den Fall, daß die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten von AB liegen.

16. (Snelliussche Aufgabe; Rückwärtseinschneiden.) Um die Lage eines Punktes P zu bestimmen, visiert man drei ihrer gegenseitigen Lage nach bekannte Punkte A, B und C an (Fig. 13). Man kennt also $AB=a$, $BC=b$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle APB=\varphi$ und $\sphericalangle CPB=\psi$. a) Konstruiere P! b) Berechne die Strecken AP, BP und CP!

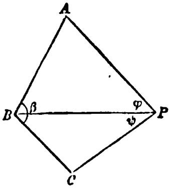

Fig. 13.

Anleitung: Die gesuchten Strecken lassen sich berechnen, wenn $\sphericalangle BAP=\alpha$ und $\sphericalangle BCP=\gamma$ bekannt sind. 1. Bestimme die Summe der Winkel. 2. Drücke BP zweimal durch den Sinussatz aus und bestimme damit $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. 3. Vgl. § 6, Aufg. 11.

c) Beispiel: $a=2{,}75$ km, $b=3{,}18$ km, $\beta=153^{\circ}\,30'$, $\varphi=19^{\circ}$, $\psi=23^{\circ}\,45'$.

Näherungskonstruktionen für Winkel- und Kreisteilung

17. Im Kreis um M sind die Radien MA und MB gezogen, sie schließen den Winkel α ein. Die Sehne AB werde durch die Punkte C und D in drei gleiche Teile geteilt. a) Ziehe CM und DM. b) Errichte auf AB in C und D Senkrechten; sie mögen den zu α gehörigen Kreisbogen in C' und D' schneiden; ziehe $C'M$ und $D'M$. — Zeige, daß durch beide Verfahren eine Dreiteilung des Winkels nur angenähert erfolgt. Bestimme den Fehler für a) $\alpha=10^{\circ}$, b) $\alpha=30^{\circ}$, c) $\alpha=45^{\circ}$, d) $\alpha=60^{\circ}$, e) $\alpha=90^{\circ}$.

18. Einem Kreis ist ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben. Die halbe Seite ist dann, wie im Buch für Kl. 7—9, § 27, Nr. 53 nach Dürers „Unterweysung“ angegeben, angenähert der Seite des regelmäßigen Sieben-

ecks gleich. a) Bestimme den Fehler des Zentriwinkels. b) In einen Kreis vom Radius 10 cm wird die halbe Dreiecksseite sechsmal eingetragen; ist die siebente Seite dann zu groß oder zu klein, und wie groß ist der Fehler?

19. Konstruiert man über dem Durchmesser BC eines Kreises ein Dreieck ABC so, daß AB gleich der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, AC gleich der des eingeschriebenen Quadrats ist, und trägt ferner $CD = CA$ auf CB ab, so ist AD annähernd gleich der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Neunecks. a) Bestimme den Fehler des Zentriwinkels. b) Bestimme den Fehler der Neunecksseite, wenn der Radius des Kreises 10 cm ist.

20. Bezeichnet man vier aufeinanderfolgende Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit A, B, C und D, verbindet A mit dem Mittelpunkt E der Diagonale BD und teilt AE in F so, daß $CF = AB$ ist, so ist EF annähernd gleich der Seite des regelmäßigen Elfecks mit der Sechsecksseite als Umkreisradius. a) Bestimme den Fehler des Zentriwinkels. b) Bestimme den Fehler der Elfecksseite, wenn der Radius des Kreises 10 cm ist.

Bei den folgenden Näherungskonstruktionen für regelmäßige eingeschriebene n-Ecke ist der Fehler α) des Mittelpunktswinkels, β) der Seite im Falle eines Kreises von 10 cm Radius zu bestimmen im a) Viereck, b) Fünfeck, c) Sechseck, d) Siebeneck, e) Neuneck, f) Elfeck, g) Siebzehneck.

21. Es sei BC ein Durchmesser des Kreises, ABC ein gleichseitiges Dreieck. Punkt D wird so auf BC gewählt, daß $BD = \frac{2\,BC}{n}$ ist. Die Verlängerung von AD über D hinaus schneide den Kreis in E. Dann ist BE ungefähr die gesuchte n-Ecksseite.

22. Es sei BC ein Durchmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt M, ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Punkte D_1 und D_2 seien so auf BC gewählt, daß $MD_1 = MD_2 = \frac{1}{n}\,BC$ ist. Die Verlängerungen von AD_1 und AD_2 über D_1 und D_2 hinaus schneiden den Kreis in E_1 und E_2. Dann ist E_1E_2 ungefähr die gesuchte n-Ecksseite.

23. Es sei BC ein Durchmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt M, AM ein zu BC senkrechter Radius. Man verlängert MA um $\frac{1}{n}\,BC$ bis A_1, MB um $\frac{1}{n}BC$ bis B_1 und bestimmt D auf BC so, daß $BD = \frac{3}{n}\,BC$ ist. A_1B_1 schneide den Kreis in zwei Punkten, von denen D_1 dem Punkte B am nächsten liegt. DD_1 ist dann ungefähr die gesuchte n-Ecksseite.

Zweites Kapitel

Stereometrie

§ 8. Geraden und Ebenen im Raum[1])

Ebenen im Raum

1. Gib an, wie man Ebenen praktisch herstellt und welches die diesen Herstellungsweisen entsprechenden geometrischen Eigenschaften der Ebenen sind.

2. a) Durch wieviel Punkte, b) durch wieviel Geraden ist eine Ebene bestimmt? c) Welche Nebenbedingung muß für die Punkte, welche für die Geraden gelten?

3. Gegeben sind a) 5, b) 10 Punkte im Raum, von denen keine drei in einer Geraden, keine vier in einer Ebene liegen. Wieviel Ebenen lassen sich durch sie legen?

4. Gegeben sind a) 4, b) 5, c) 10 Punkte im Raum, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Wieviel Geraden lassen sich durch sie legen?

5. Gegeben sind a) 3, b) 4, c) 6, d) n durch einen Punkt gehende Geraden, von denen keine drei in einer Ebene liegen. Wieviel Ebenen sind durch diese Geraden bestimmt?

6. † Lege durch eine Gerade eine Schar von Ebenen. Unter welchen Umständen kann eine andere Gerade ganz in einer Ebene der Schar liegen?

7. † Durch einen Punkt in einer Ebene wird eine Gerade gelegt. Welche verschiedenen Lagen zwischen Ebene und Gerade sind möglich?

8. a) Beim Würfel, b) bei einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche sind α) sich schneidende, β) parallele, γ) windschiefe Geraden zu nennen und in einer Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion zu bezeichnen.

9. † In einer Ebene ist eine Gerade gegeben; außerhalb der Geraden liegt a) in der Ebene, b) außerhalb der Ebene ein Punkt. Durch diesen werden Geraden gelegt. Untersuche, welche verschiedenen Lagen diese Geraden zur ersten Geraden haben können.

10. † Beschreibe den Schnitt zweier Ebenen und gib Beispiele von Schnitten zweier ebener Körperflächen.

11. † Welche Aussage läßt sich über zwei Ebenen machen, die einen Punkt gemeinsam haben? (Spitze einer Pyramide!)

12. Wieviel Schnittgeraden haben im Höchstfall a) 3, b) 4, c) 6 Ebenen?

---

1) Alle mit † bezeichneten Aufgaben sind durch Freihandmodelle (Bleistift, Federhalter u. dgl., Heft, Lineal usf.) vom Schüler zu erläutern.

Geraden im Raum

13. † Gegeben ist eine Gerade und außerhalb von ihr ein Punkt. **a)** Wieviel Parallelen durch den Punkt zu der Geraden gibt es? **b)** Wieviel Lote kann man von dem Punkt auf die Gerade fällen?

14. † Gegeben ist eine Gerade und auf ihr ein Punkt. Wieviel Senkrechten kann man in dem gegebenen Punkt auf der Geraden errichten?

15. † Sind **a)** alle vertikalen, **b)** alle horizontalen Geraden parallel? (Von der Krümmung der Erde ist zunächst abzusehen.) **c)** Wie fällt die Antwort auf die Fragen aus, wenn man sich nicht auf die nächste Umgebung des Beobachtungspunktes beschränkt, die Krümmung der Erde also in Rechnung ziehen muß?

16. † Untersuche, ob **a)** zwei vertikale, **b)** zwei horizontale Geraden windschief sein können.

17. † Wann sind eine horizontale und eine vertikale Gerade windschief, wann nicht?

18. **a)** Liegen zwei vertikale Geraden, wenn die Krümmung der Erde berücksichtigt wird, in einer Ebene oder nicht? (Grund!) — In den Punkten **b)** des Erdäquators, **c)** eines Meridians, **d)** eines Breitenkreises sind die vertikalen Geraden konstruiert. In was für einer Fläche liegen sie? **e)**—**g)** In den eben genannten Punkten sind die nach Norden gerichteten horizontalen Geraden gezeichnet. In was für einer Fläche liegen sie?

19. Stelle zusammen, welche verschiedene gegenseitige Lage im Raum einnehmen können: **a)** zwei Geraden, **b)** zwei Ebenen, **c)** eine Ebene und ein Punkt, **d)** eine Gerade und ein Punkt, **e)** eine Ebene und eine Gerade.

Senkrechte Geraden und Ebenen

20. † Eine Gerade schneidet eine Ebene. Zeige, daß es dann stets mindestens eine in der Ebene liegende Gerade gibt, die auf der Geraden senkrecht steht.

21. Zeige, daß beim geraden Kreiskegel die Achse (Höhe) senkrecht auf allen Durchmessern des Grundkreises steht.

22. † Ein Winkel wird um einen seiner Schenkel gedreht. Untersuche die Fläche, die der andere Schenkel beschreibt, wenn der Winkel **a)** spitz, **b)** stumpf, **c)** ein rechter ist.

23. † Eine Gerade schneidet eine Ebene und steht senkrecht auf zwei durch den Schnittpunkt von Gerade und Ebene gehenden und in der Ebene liegenden Geraden. Beweise, daß sie auch auf jeder anderen durch jenen Schnittpunkt gelegten Geraden der Ebene senkrecht steht.

Anleitung: Trage auf der Geraden beiderseits der Ebene gleiche Stücke FA_1 und FA_2 ab. Eine Gerade in der Ebene schneide die Senkrechten in B und C, die beliebige Gerade in D. Beweise dann durch Kongruenzbetrachtungen, daß $A_1D = A_2D$ ist, und folgere daraus die Behauptung des Satzes.

24. † Wieviel Senkrechten kann man in einem Punkte der Ebene auf der Ebene errichten? (Grund!)

25. † Wieviel Lote kann man von einem Punkte auf eine Ebene fällen? (Grund!)

26. † Wieviel zu einer Geraden senkrechte Ebenen lassen sich a) durch einen Punkt der Geraden, b) durch einen Punkt außerhalb der Geraden legen?

27. Welches ist die kürzeste Entfernung (Abstand) eines Punktes von einer Ebene? (Grund!)

28. † Bestimme den geometrischen Ort der Punkte (des Raumes), die a) von zwei gegebenen Punkten b) von zwei gegebenen Ebenen gleichen Abstand haben.

29. † Wo liegen die Punkte einer Ebene, die von einem Punkte außerhalb der Ebene gleichen vorgeschriebenen Abstand haben? — In welchen Fällen sind solche Punkte überhaupt nicht vorhanden?

30. In einer Ebene ist der Ort aller Punkte zu finden, die von zwei außerhalb der Ebene gelegenen Punkten gleichweit entfernt sind.

31. † Gegeben sind drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von allen drei Punkten gleichen Abstand haben?

32. Wo liegen im Raum alle Punkte, die von den Seiten eines Dreiecks gleichweit entfernt sind?

33. Wo liegen alle Punkte, die von drei gegebenen Ebenen gleichen Abstand haben?

34. Wo liegen die Punkte, die von drei zu einer Geraden parallelen Ebenen gleichweit entfernt sind?

35. Wo liegen alle Punkte, deren Abstände von drei gegebenen Ebenen gegebene Verhältnisse haben? — Wo liegen die Teile des Ortes?

36. Welche Ebenen haben von drei parallelen Geraden gleiche Abstände?

37. Gegeben ist ein Punkt P außerhalb und ein Punkt Q in einer Ebene. Man fällt von P das Lot PF auf die Ebene. PF ist 0,5 m, FQ ist 1,2 m. Wie groß ist die Entfernung PQ?

38. Von zwei Punkten P und Q sind auf eine Ebene die Lote PF und QG gefällt. Es ist $PF = 13{,}7$, $QG = 12{,}2$ und $FG = 11{,}2$. Wie groß ist PQ?

Konstruktionen im Raum

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben Nr. 39 bis 48 wird angenommen, daß durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte stets eine Zeichenebene gelegt werden kann, in der man nach den Methoden der Planimetrie Konstruktionen ausführen kann. Eine Ebene ist „konstruiert", wenn man drei ihrer Punkte kennt, die nicht in einer Geraden liegen.

39. Gegeben sind zwei Punkte. Konstruiere die Ebene, in bezug auf welche die beiden Punkte symmetrisch liegen.

40. Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt auf ihr. Konstruiere die zur Geraden senkrecht stehende Ebene, die durch den gegebenen Punkt geht.

41. Gegeben ist eine Gerade und außerhalb von ihr ein Punkt. Es ist die durch den Punkt gehende, zu der Geraden senkrechte Ebene zu konstruieren.

42. In einem Punkte einer Ebene ist auf der Ebene die Senkrechte zu errichten.

43. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene ist auf die Ebene das Lot zu fällen.

44. Gegeben ist eine Ebene und ein Punkt außerhalb der Ebene. Gesucht wird der Punkt, der in bezug auf die Ebene symmetrisch zu dem gegebenen Punkt liegt.

45. Gegeben sind drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Die Punkte sind zu konstruieren, die von den drei gegebenen Punkten einen gegebenen Abstand haben.

Bei den folgenden drei Aufgaben sollen Konstruktionen nur in den gegebenen Ebenen erlaubt sein; andere Ebenen dürfen nur für die Überlegung, nicht für die Ausführung benutzt werden:

46. Gegeben sind zwei sich schneidende Ebenen, in der ersten zwei Punkte, in der zweiten ein Punkt. Man zeichne die Schnittgeraden der durch die drei Punkte bestimmten Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen.

47. Gegeben sind zwei Ebenen, in der ersten die Punkte A und B, in der zweiten die Punkte C und D. Wie kann man entscheiden, ob die Geraden AC und BD sich schneiden, parallel oder windschief sind?

48. Gegeben sind drei sich schneidende Ebenen und in den beiden ersten je ein Punkt. Man zeichne den Schnittpunkt, den die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte mit der dritten Ebene bildet.

Parallele Geraden und Ebenen

Parallele Geraden

49. † Auf einer Ebene sind zwei Senkrechten errichtet. Zeige, daß sie weder sich schneiden noch windschief sein können, daß sie also parallel sind!

50. † Zwei Parallelen werden von einer Ebene geschnitten. Die eine Gerade steht senkrecht zur Ebene. Zeige, daß auch die andere zu ihr senkrecht ist.

51. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie untereinander parallel. Beweise den Satz a) in der Ebene, b) im Raum.

52. † a) Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt außerhalb von ihr. Konstruiere die Parallele zu der Geraden durch den Punkt. Wieviel Parallelen gibt es? b) Zu einer Geraden ist in vorgeschriebenem Abstand eine Parallele zu konstruieren. Wieviel Parallelen gibt es?

53. † a) Zeige, daß die Projektion einer Strecke auf eine Ebene wieder eine Strecke ist. b) Welche Ausnahme ist zu machen?

54. a) Eine Strecke, b) eine Gerade ist auf eine Ebene zu projizieren.

55. Der Schnittpunkt einer Ebene mit einer durch irgend zwei Punkte bestimmten, nicht in ihr liegenden Geraden ist zu konstruieren.

56. † Ein rechtwinkliges Dreieck wird auf eine Ebene projiziert. Wann ist die Projektion wieder ein rechtwinkliges Dreieck?

57. Ein Dreieck wird mitsamt a) seinen Höhen, b) seinen Winkelhalbierenden, c) seinen Seitenhalbierenden auf eine Ebene projiziert. Behalten die Projektionen der eingezeichneten Linien ihre ursprüngliche Bedeutung in der Projektionsfigur bei?

58. † Zwei Parallelen werden auf eine Ebene projiziert. Welche Lage haben die Projektionen zueinander?

Parallele Ebenen

59. Gib an, welche Begrenzungsflächen des Würfels parallel sind.

60. † Wie bestimmt man den Abstand zweier paralleler Ebenen?

61. † Wieviel zu einer gegebenen Ebene parallele Ebenen lassen sich konstruieren, wenn a) der Abstand, b) ein Punkt der Ebene vorgeschrieben ist?

62. † Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten geschnitten. Was läßt sich über die Durchschnittsgeraden sagen?

63. † In zwei Punkten einer Geraden werden auf der Geraden senkrechte Ebenen errichtet. Zeige, daß die beiden Ebenen parallel sind.

64. † Auf der einen von zwei parallelen Ebenen ist eine Senkrechte errichtet. Zeige, daß diese Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht steht.

65. † Beweise: Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie untereinander parallel.

Ebene und Gerade

66. Gib am Prisma Geraden an, die a) der Grundfläche, b) einer Seitenfläche parallel sind. c) Sind die Geraden in b) nur der einen Seitenfläche parallel?

67. † Beweise: Jede Gerade in der einen von zwei parallelen Ebenen ist der anderen Ebene parallel.

68. † Beweise: Ist eine Gerade irgendeiner in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie zur Ebene parallel.

69. † Untersuche, a) ob zwei Geraden, die einer Ebene parallel sind, selbst parallel sind, b) ob eine Ebene, die einer von zwei parallelen Geraden parallel ist, auch der anderen parallel ist.

70. Gegeben sind eine Ebene und ein Punkt außerhalb der Ebene. a) Konstruiere eine zur Ebene parallele Gerade durch den Punkt. Wie viele gibt es? b) Konstruiere die zur Ebene parallele Ebene durch den Punkt.

71. Gegeben sind eine Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden. Konstruiere eine zu der Geraden parallele Ebene durch den Punkt. Wie viele gibt es?

72. Gegeben sind zwei Geraden. Lege durch die eine eine zur andern parallele Ebene. Erörtere die Lösung.

Winkel zwischen Geraden, die sich schneiden

73. † Beweise a) für die Ebene, b) für den Raum: Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel und gleichgerichtet, so sind die Winkel gleich.

74. † Beweise: Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel, so liegen sie in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen.

75. Was läßt sich über zwei Winkel sagen, a) deren entsprechende Schenkel beide parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, b) bei dem ein Paar entsprechender Schenkel parallel und gleichgerichtet ist, während das andere Paar parallel und entgegengesetzt gerichtet ist?

Winkel zwischen Ebene und Gerade

76. † Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade, die sie schneidet. a) Konstruiere den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene, d. h. den Winkel zwischen der Geraden und ihrer Projektion. b) Erörtere den besonderen Fall, daß die Gerade zu der Ebene senkrecht steht.

77. † Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene ist Scheitel eines Strahlenbüschels in der Ebene. a) Zeige, daß die Winkel zwischen den Strahlen und der Geraden paarweise gleich sind; b) bestimme den größten und den kleinsten der auftretenden Winkel. c) Welche besondere Bedeutung hat der Neigungswinkel?

78. † Gib den geometrischen Ort der Geraden an, die durch einen Punkt a) innerhalb, b) außerhalb einer Ebene gehen und mit der Ebene einen vorgeschriebenen Neigungswinkel haben.

79. † Gegeben sind eine Ebene und in ihr eine Gerade. Durch einen Punkt außerhalb der Ebene soll eine Gerade gelegt werden, die gegen die Ebene einen vorgeschriebenen Neigungswinkel hat und die Gerade schneidet.

80. † Eine Gerade schneidet zwei parallele Ebenen. a) Was ist über die Neigungswinkel zu sagen? b) Läßt sich das Ergebnis von a) umkehren?

81. † Zwei parallele Geraden schneiden eine Ebene. a) Was ist über die Neigungswinkel zu sagen? b) Läßt sich das Ergebnis von a) umkehren?

82. Gegeben sind zwei Ebenen A und B, in A ein Punkt A, in B ein Punkt B. Auf der Schnittgeraden von A, B ist ein Punkt C zu finden, für den a) die Summe seiner Abstände von A und B möglichst klein, b) die Differenz seiner Abstände von A und B möglichst groß ist.

Anleitung: Umklappung einer Ebene in die zweite. — Wieviel Lösungen hat jede der beiden Aufgaben?

Trigonometrische Rechnungen

83. Gegeben sind eine Ebene und eine Strecke von der Länge a, die gegen die Ebene den Neigungswinkel φ hat. Wie lang ist die Projektion der Strecke? Beispiel: $a = 17{,}5$ cm, $\varphi = 45^\circ$.

84. Unter welchem Winkel ist eine Strecke gegen eine Ebene geneigt, wenn ihre Projektion a) die Hälfte, b) ein Drittel der Streckenlänge besitzt? c) Berechne die Neigung der projizierenden Strahlen bei der Darstellung in schräger Parallelprojektion für die üblichsten Fälle der Darstellung ($\frac{1}{2}$, 45° und $\frac{1}{3}$, 60°).

85. Berechne die Winkel, die die Körperdiagonale a) eines Würfels, b) eines Quaders mit den Kanten 1, 2 und 3 mit den Seitenflächen bildet. c) Stelle im Falle b) eine Gleichung zwischen den Winkeln auf.

86. Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm ist eine 6 cm hohe Pyramide errichtet, deren Spitze über der Mitte des Grunddreiecks liegt. Berechne den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche.

87. Welche Neigung haben die Seitenlinien eines geraden Kreiskegels gegen die Grundfläche, wenn die Höhe dreimal so groß ist wie der Durchmesser des Grundkreises?

88. Die Seitenlinien eines geraden Kreiskegels sind um $65^\circ 30'$ gegen die Grundfläche geneigt und 13 cm lang. Berechne Mantel und Rauminhalt des Kegels.

89. Welche Neigung hat die Strecke PQ a) in Aufg. 37, b) in Aufg. 38 gegen die Ebene?

Winkel zwischen zwei Ebenen

90. † a) Zwei Ebenen schneiden sich. Wieviel Winkel entstehen? b) Erkläre den Begriff Ebenenwinkel unter Benutzung des Ausdruckes Halbebene.

91. † Zwei Halbebenen haben die Grenzgerade gemeinsam. In einem Punkte dieser Geraden werden in beiden Ebenen Senkrechten auf der Grenzgeraden errichtet. Beweise, daß die Größe des Winkels zwischen den beiden Senkrechten unabhängig von der Wahl des Punktes auf der Grenzgeraden ist.

92. Zwei Ebenen sind durch je drei ihrer Punkte gegeben. Konstruiere die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen.

93. † Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist. — Zeige, daß jede Ebene, die man durch eine auf einer Ebene senkrecht stehende Gerade legt, auf der ersten Ebene senkrecht steht.

94. † Gegeben sind zwei Punkte in einer Ebene. Konstruiere die zur Ebene senkrechte Ebene, die durch die beiden Punkte geht.

95. † Gegeben sind eine Ebene, ein Punkt in der Ebene und ein anderer außerhalb der Ebene. Konstruiere die zur Ebene senkrechte Ebene, die durch die beiden Punkte geht (Zahl der Lösungen?).

96. † Gegeben sind eine Ebene und zwei Punkte außerhalb der Ebene. Durch die Punkte ist eine zur Ebene senkrechte Ebene zu legen (Zahl der Lösungen?).

97. † Gegeben sind zwei Ebenen und ein Punkt: Konstruiere eine zu beiden Ebenen senkrechte Ebene, die durch den Punkt geht.

98. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei a) parallelen, b) gegeneinander geneigten Ebenen gleichen Abstand haben?

99. † Gegeben sind zwei Ebenen und eine Gerade, die in keiner von ihnen liegt. Auf ihr ist ein Punkt zu bestimmen, der von beiden Ebenen gleichen Abstand hat.

100. † Gegeben sind zwei Ebenen und ein Punkt außerhalb von beiden. Durch den Punkt soll eine Gerade gelegt werden, die mit beiden Ebenen gleiche Neigung hat.

101. † Gegeben sind zwei Ebenen und ein Punkt außerhalb von beiden. Durch den Punkt soll eine Gerade gelegt werden, die beiden Ebenen parallel ist.

102. † Beweise, daß zwei parallele Ebenen mit einer dritten Ebene gleiche Winkel bilden.

103. † Gegeben sind eine Ebene und a) ein Punkt, b) eine Gerade außerhalb der Ebene. Durch a) den Punkt, b) die Gerade ist eine Ebene zu legen, die mit der gegebenen Ebene einen vorgeschriebenen Winkel bildet (Zahl der Lösungen?).

Trigonometrische Rechnungen

104. In einem Quader mit den Kanten a) 1 cm, 2 cm und 3 cm, b) a, b und c ist irgendeine der Diagonalebenen herauszugreifen, und ihre Neigungen gegen die Flächen sind zu bestimmen.

105. Die Spitze einer Pyramide liegt 5 cm über der Mitte der quadratischen Grundfläche mit der Grundkante 4 cm. Bestimme die Neigungen der Seitenflächen der Pyramide gegen die Grundfläche.

106. Die Spitze einer Pyramide liegt a cm über der Mitte der Grundfläche, die ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a cm ist. Bestimme die Neigung der Seitenflächen der Pyramide a) gegen die Grundfläche, b) gegeneinander.

Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden

107. † Gegeben sind zwei windschiefe Geraden. Ziehe durch einen Punkt im Raum (er kann auch auf einer der beiden Geraden liegen) Parallelen zu den Geraden. a) Zeige, daß der Winkel zwischen den beiden Parallelen unabhängig von der Lage des Punktes ist. b) Zeige, daß die Einführung des Winkels windschiefer Geraden in Übereinstimmung mit dem Winkelbegriff bei zwei sich schneidenden Geraden ist. c) Gib am Würfel Paare windschiefer Kanten an, die sich unter rechtem Winkel kreuzen.

108. a) Beweise, daß eine zu einer Ebene senkrechte Gerade senkrecht steht zu allen Geraden in der Ebene. b) Untersuche, ob das Entsprechende auch von einer zur Ebene parallelen Geraden gilt.

109. Eine Gerade steht senkrecht zu zwei nicht parallelen Geraden einer Ebene. Beweise, daß sie zu der Ebene senkrecht steht.

110. Wenn eine Gerade drei nichtparallele Geraden einer Ebene unter gleichen Winkeln kreuzt, so steht sie auf der Ebene senkrecht. Beweise das.

Andere Aufgaben über windschiefe Geraden

111. † a) Durch zwei windschiefe Geraden sind zwei parallele Ebenen zu legen. b) Zeige, daß der Abstand der beiden Ebenen den kürzesten Abstand der beiden windschiefen Geraden angibt.

112. † Gegeben sind zwei windschiefe Geraden. Konstruiere die Gerade, die auf beiden senkrecht steht.

113. † Gegeben sind zwei windschiefe Geraden und ein Punkt. Konstruiere die Ebene, die durch den Punkt geht und beiden Geraden parallel ist.

Beweise die folgenden Sätze 114—117:

114. Durch einen Punkt geht eine und im allgemeinen nur eine Gerade, die zwei gegebene windschiefe Geraden schneidet.

115. Sind drei windschiefe Geraden gegeben, so gibt es eine und nur eine Gerade, die zu einer der drei Geraden parallel ist und die beiden anderen schneidet. — Inwiefern ist dieser Satz ein Sonderfall des vorigen?

116. Es gibt unendlich viele Geraden, die drei gegebene windschiefe Geraden schneiden.

117. Hat man zwei windschiefe Geraden und eine Ebene, die zu keiner von ihnen parallel ist, so gibt es unendlich viele Geraden, die zu der Ebene parallel sind und die beiden Geraden schneiden.

118. Eine Strecke von gegebener Länge ist so zu legen, daß sie einer gegebenen Ebene parallel wird und daß ihre Endpunkte auf zwei gegebenen windschiefen Geraden liegen.

119. Eine Strecke von gegebener Länge soll so gelegt werden, daß sie von zwei windschiefen Geraden begrenzt wird und mit ihnen gleiche Winkel bildet.

120. Zwischen zwei windschiefe Geraden ist eine gegebene Strecke so zu legen, daß sie mit einer von ihnen einen gegebenen Winkel bildet.

121. Die Mittelpunkte aller zwischen zwei windschiefen Geraden möglichen Verbindungsstrecken liegen in einer Ebene.

122. Die Mitten der Seiten eines windschiefen Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms.

123. Eine Ebene, die zu zwei Seiten eines windschiefen Vierecks parallel ist, teilt die beiden anderen in demselben Verhältnis.

124. Gegeben sind zwei Ebenen und in jeder von ihnen ein Punkt. Man zeichne den kürzesten innerhalb der beiden Ebenen verlaufenden Weg von einem Punkte zum anderen.

Anleitung: Umklappung um die Schnittgerade.

125. In einem Raum von 10 m Länge, 4 m Breite und 4 m Höhe sitzt an einer der quadratischen Seitenflächen eine Spinne, und zwar in der Mittellinie des Quadrates $\frac{1}{3}$ m über dem Boden. Auf der gegenüberliegenden Seitenwand sitzt eine Fliege, gleichfalls in der Mittellinie des Quadrates und $3\frac{2}{3}$ m über dem Boden. Die Spinne kriecht auf kürzestem Wege zur Fliege. Welchen Weg muß sie nehmen?

Vermischte Überlegungen

126. Durch eine Gerade wird ein Ebenenbüschel gelegt. Untersuche den Schnitt des Büschels mit einer Ebene.

127. Führe den Begriff des harmonischen Ebenenbüschels ein und untersuche seine Beziehung zum harmonischen Strahlenbüschel und zur harmonischen Punktreihe.

128. Ein ebener Winkel wird von parallelen Ebenen geschnitten. Was läßt sich über die Abschnitte auf den Schenkeln sagen?

129. Wie groß ist die Mannigfaltigkeit a) der Punkte im Raum, b) der Geraden durch einen Punkt, c) der Ebenen durch eine Gerade, d) der Ebenen durch einen Punkt, e) der Geraden im Raum, f) der Ebenen im Raum?

130. Bestimme alle Symmetrieebenen a) des Würfels, b) eines Quaders, c) eines geraden Prismas mit regelmäßiger Grundfläche.

131. In der Ebene gibt es Symmetrie in bezug auf eine Gerade (axiale Symmetrie) und in bezug auf einen Punkt (zentrale Symmetrie). Im Raum wird also Symmetrie in bezug auf eine Ebene, eine Gerade, einen Punkt zu unterscheiden sein. Untersuche einige Körper in bezug auf die verschiedenen Arten der Symmetrie.

Praktische Anwendungen

132. a) Welche Vorteile hat der dreibeinige Schusterschemel vor dem vierbeinigen Stuhl? b) Warum macht man Stative (für photographische Apparate, Theodoliten usw.) dreibeinig, c) warum unsere Tische meist vierbeinig?

133. Wieviel Scharniere an einem Deckel, Drahtheftungen an einem Heftrücken, Angeln an einer Tür sind notwendig? (Grund!)

134. Warum genügt an der Tür ein Riegel, um sie fest zu schließen?

135. Wie stellt man fest, daß eine Ebene a) horizontal, b) vertikal ist?

136. Eine Stange wird ins Wasser gehalten. a) Wie stellt man mit einem Winkelmesser fest, ob sie vertikal steht? b) Wie löst man die Aufgabe mit Hilfe des Spiegelbildes?

137. Ein Stück Karton hat eine gerade Begrenzung. Man knifft eine Senkrechte zu der Geraden und stellt den geknifften Karton auf eine Ebene. Warum ist jetzt die gekniffte Gerade auch senkrecht auf der Ebene?

138. Auf eine Eisenplatte soll eine andere fest aufgenietet werden. Wieviel Nieten genügen zur unverschieblichen Befestigung?

139. Zwei Eisenbahnschienen sind durch Schwellen miteinander verbunden. Es werde angenommen, die Verbindung zwischen Schwelle und Schiene sei a) scharnierartig, b) nach Art von Kugelgelenken. Können die Schienen ohne Bruch oder Zerrung in windschiefe Lage gebracht werden?

140. Zwei Punkte mit den Höhenangaben 351 m und 287 m sind auf dem Meßtischblatt (1:25000) 3,2 cm voneinander entfernt. Gib a) die Entfernung in Luftlinie, b) die Neigung der Verbindungsstrecke der beiden Punkte an.

141. Beweise die folgende (von Girndt aufgestellte) Regel zur Berechnung eines aus verschiedenen Teilflächen zusammengesetzten Daches, die alle die gleiche Neigung haben: Man multipliziert die überdachte Fläche mit der Länge irgendeines Sparrens und dividiert das Produkt durch die Projektion dieses Sparrens auf die überdachte Fläche. (Trigonometrische Untersuchung! Vgl. § 11, 8.)

142. In der Geologie ist für die Lage einer geneigten Schicht kennzeichnend das Streichen, d. h. die Richtung der Durchschnittsgeraden von Schichtebene und Horizontalebene, und der Neigungswinkel. Gib Methoden an, beide Größen praktisch zu bestimmen.

143. Um festzustellen, ob eine Mauerkante lotrecht ist, hält der Maurer ein Senkblei daneben und sieht zu, ob beide Geraden überall gleichen Abstand haben. Begründe das Verfahren.

144. Ein anderes Verfahren, um zu prüfen, ob eine Gerade, etwa eine Mauerkante oder ein Fluchtstab, lotrecht ist, ist das folgende: Man hält ein Senkblei daneben und stellt durch Visieren fest, ob Gerade und Senkblei sich decken, d. h. in einer Ebene liegen. Das wiederholt man bei anderer Lage des Senkbleis ein zweites Mal. Begründe dieses Verfahren.

145. Fig. 14 zeigt, wie man zwischen zwei in A_1 und B_1 stehenden Stäben, die so an den Abhängen eines Berges stehen, daß der eine vom andern aus nicht zu sehen ist, die Stäbe a^* und b^* „einfluchtet“. a) Erkläre die Methode (vgl. dazu Buch für Kl. 7—9, § 8, Nr. 100). b) Begründe, warum alle vier Stäbe in einer Ebene liegen, wenn sowohl $A_1 b^* a^*$ wie $B_1 a^* b^*$ in einer Ebene liegen.

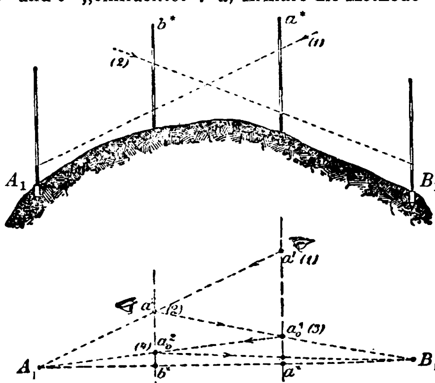

Fig. 14.

Aus der Geschichte der Geometrie

146. Aus dem 11. Buch von Euklids Elementen [in der Übersetzung[1]) von Pirkenstein]:

1) Achte auf die Verdeutschungen!

Wann eine gerade Lini auff drey geraden Linien (welche in einem Punct sich einander berühren) bleyrecht stehet; so werden solche drey Linien auff einer Fläche allein liegen. — Beweise das.

§ 9. Körperliche Ecken

Seiten und Winkel der Ecke

1. Beschreibe a) die Ecke eines Würfels, b) die Spitze einer sechsseitigen Pyramide, c) eine Ecke an der Grundfläche einer vierseitigen Pyramide. d) Welches ist die Mindestzahl der Kanten und der Seiten einer Ecke?

2. Gib bei einer Ecke des Würfels die Größe a) der einzelnen Seiten, b) der einzelnen Winkel an.

3. Gib Beispiele von Ecken mit überstumpfen a) Seiten, b) Winkeln an (Skizze oder Modell).

4. Gib Beispiele von Ecken an, bei denen eine Seite andere Seiten schneidet (Skizze).

5. Falte aus Papier a) eine konvexe Ecke mit drei, b) mit vier, c) mit fünf Seiten, d) eine nichtkonvexe Ecke.

6. Gegeben sind drei Ebenen. Zeige, daß ihre drei Durchschnittsgeraden entweder parallel sind oder durch einen Punkt gehen.

7. Wieviel Ecken bilden drei Ebenen, von denen keine zwei parallel sind? Vorausgesetzt wird, daß die Durchschnittsgeraden nicht parallel sind.

8. Zeige, daß a) die Summe zweier Seiten einer dreiseitigen Ecke größer, b) die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite ist.

9. Eine dreiseitige Ecke, die zwei gleiche Seiten hat, heißt gleichschenklig. a) Gibt es auch hier einen Satz über die Basiswinkel? b) Läßt sich gegebenenfalls das Ergebnis von a) umkehren?

10. Zeige, daß in einer dreiseitigen Ecke der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt.

11. Gib eine obere Grenze für die Summe der Seiten einer n-seitigen konvexen[1]) Ecke an.

12. Gib eine obere und eine untere Grenze für die Summe aller Winkel einer n-seitigen Ecke an.

13. Eine dreiseitige Ecke hat die Seiten a) 60° und 90°, b) 110° und 45°, c) a und b. Zwischen welchen Grenzen liegt die dritte Seite?

---

1) In Zukunft wird von den Ecken vorausgesetzt, daß sie konvex sind.

14. Eine dreiseitige Ecke hat die Winkel a) 75° und 60°, b) 100° und 45°, c) α und β. Zwischen welchen Grenzen liegt der dritte Winkel?

15. Welche Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche, deren Spitze über der Mitte liegt, können an der Spitze stumpfe Winkel haben, welche rechte?

Nebenecke, Scheitelecke, Polarecke

16. Verlängere eine Kante einer dreiseitigen Ecke über den Scheitelpunkt hinaus. Dann bildet diese Verlängerung mit den beiden anderen Kanten eine Nebenecke der ursprünglichen Ecke. Gib die Beziehungen a) zwischen den Seiten, b) zwischen den Winkeln der Ecke und der Nebenecke an.

17. Wieviel verschiedene Nebenecken hat eine dreiseitige Ecke?

18. Die Ecke, die von den Verlängerungen der Kanten einer Ecke über den Scheitelpunkt hinaus gebildet wird, heißt Scheitelecke. Gib die Beziehungen zwischen den Seiten und ebenso zwischen den Winkeln der Ecke und ihrer Scheitelecke an.

19. Was ist a) über die Scheitelecke der Scheitelecke der Ecke, b) über eine Nebenecke von einer Nebenecke der Ecke zu sagen?

20. a) Eine dreiseitige Ecke wird an einer Seitenfläche gespiegelt. Worin stimmen die beiden zueinander symmetrischen Ecken überein und worin unterscheiden sie sich? b) Sind Ecke und Scheitelecke kongruent oder symmetrisch?

21. Fälle von einem Punkt im Innern einer dreiseitigen Ecke die Lote auf die Seiten. Die von den drei Loten gebildete Ecke heißt Polarecke der ersten. a) Zeige, daß Seiten und Winkel der Polarecke unabhängig von der Lage ihres Scheitelpunktes sind. b) Gib die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln der Ecke und ihrer Polarecke an. c) Laß den Scheitel der Polarecke auf eine Seitenfläche oder in den Scheitel der Ecke fallen und untersuche die gegenseitige Beziehung der beiden Ecken bei dieser Lage. d) Stelle ein Flächenmodell einer dreiseitigen Ecke mit ihrer Polarecke her.

22. Was ist über die Polarecke einer Ecke zu sagen?

Konstruktionen am Netz der Ecke

23. Zeichne das Netz einer dreiseitigen Ecke mit den Seiten $a=53°$, $b=65°$, $c=90°$. Bestimme an dem Netz die drei Winkel der Ecke.

24. Konstruiere eine rechtwinklige dreiseitige Ecke a) aus den beiden Katheten, b) aus der Hypotenuse und einer Kathete, c) aus einer Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel, d) aus einer Kathete und dem anliegenden Winkel, e) aus der Hypotenuse und dem einen Winkel.

25. Konstruiere eine gleichschenklige dreiseitige Ecke a) aus dem Schenkel $a=b$ und dem Winkel γ (an der Spitze), b) aus dem Winkel γ und dem Basiswinkel, c) aus der Basis und dem Basiswinkel.

26. Zeichne das Netz einer dreiseitigen Ecke zweimal auf Pappe und klappe das Netz einmal nach der einen, dann nach der anderen Seite zusammen. Was ist von den beiden Ecken zu sagen?

27. Konstruiere eine dreiseitige Ecke a) aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, b) aus den drei Winkeln (benutze die Polarecke!), c) aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (benutze die Polarecke!), d) aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen, e) aus zwei Winkeln und der Gegenseite des einen.

Vermischte Überlegungen

28. Sprich Sätze über die Kongruenz dreiseitiger Ecken aus.

29. Sprich Sätze über die Lage der Symmetrieebene einer symmetrischen dreiseitigen Ecke aus.

30. Führe die Begriffe Höhe, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte bei der dreiseitigen Ecke ein und untersuche, ob sich Beziehungen feststellen lassen, die den Sätzen über die „merkwürdigen Punkte" im Dreieck entsprechen.

31. Erkläre den Begriff der regelmäßigen Ecke und sprich Sätze über sie aus.

32. Leite aus den in Aufgabe 30 gewonnenen Sätzen entsprechende Sätze über dreiseitige Pyramiden her.

§ 10. Der Eulersche Polyedersatz und die regelmäßigen Körper

Polyederformen

1. Ein von Ebenen begrenzter Körper (Polyeder, Vielflach) ist konvex, wenn er ganz auf einer Seite jeder Begrenzungsebene liegt. a) Nenne konvexe Polyeder. b) Setze aus zwei Quadern (Streichholzschachteln) nichtkonvexe Polyeder zusammen. c) Was ist über die Ecken konvexer Polyeder im Gegensatz zu denen nichtkonvexer Polyeder zu sagen?

2. Eine ebene (allseitig begrenzte) Fläche heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder von irgendeinem Punkte der Begrenzung zu einem andern solchen Punkte gehende geradlinige Schnitt das Flächenstück in zwei getrennte Teile zerlegt. Zeige, a) daß die Kreisfläche einfach zusammenhängend ist, die Kreisringfläche aber nicht, b) daß alle konvexen Polygone einfach zusammenhängend sind. c) Zeichne mehrfach zusammenhängende geschlossene Flächen. d) Zeichne eine geschlossene Fläche, die auch nach Anbringung eines Schnittes noch nicht einfach zusammenhängend geworden ist. e) Zeichne geschlossene Flächen, die erst durch drei, durch vier Schnitte einfach zusammenhängend gemacht werden können.

3. Bilde aus zwei Quadern (Streichholzschachteln) einen Körper, der eine mehrfach zusammenhängende Begrenzungsfläche hat.

4. Ein Körper hat einfachen Zusammenhang (das Geschlecht 0), wenn jeder ebene Schnitt ihn in zwei Teile trennt. **a)** Untersuche die dir bekannten Körperformen, ob sie vom Geschlecht 0 sind oder nicht. **b)** Fig. 15 zeigt ein

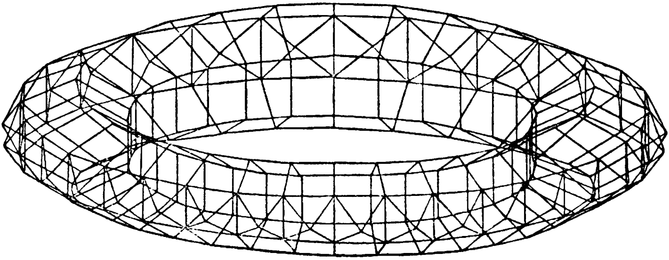

Fig. 15

ringförmiges Polyeder (ein sog. Mazzochio, und zwar nach einer Zeichnung von Uccelli, einem Maler der Renaissance). Untersuche, ob es das Geschlecht 0 hat. **c)** Setze aus Streichholzschachteln einen Körper zusammen, der nicht das Geschlecht 0 hat. Wieviel Schachteln brauchst du mindestens? **d)** Eine einfache Säulenhalle mit n Säulen ist auf ihr Geschlecht hin zu untersuchen.

Der Eulersche Polyedersatz

5. In einem beliebigen nichtüberschlagenen Vieleck sind beliebig viele Diagonalen gezogen, in den dadurch entstehenden Teilvielecken sind wieder Diagonalen gezogen und so fort, soviel man will. Es sei schließlich in diesem Vielecksnetz die Anzahl der Teilvielecke f, die Anzahl der als Seiten dienenden Strecken k, die Anzahl der als Ecken dienenden Punkte e. Dann hat die Invariante

$$J = e - k + f$$

den Wert 1. **a)** Beweise das dadurch, daß du nacheinander im Innern Seiten wegläßt und jedesmal zeigst, daß J dabei unverändert bleibt, bis du beim zuletzt übrigbleibenden Vieleck siehst, daß J den Wert 1 hat. **b)** Beweise das, indem du zunächst das Netz in ein Netz aus lauter Dreiecken umwandelst, ohne daß J sich ändert, und dann vom Rande aus ein Dreieck nach dem andern wegläßt, wieder ohne daß J sich ändert.

6. **a)** Führe die Überlegung für ein beliebiges einfach zusammenhängendes, aus einfach zusammenhängenden Vielecken gebildetes Vielecksnetz durch. **b)** Wie erledigt man den Fall des Auftretens mehrfach zusammenhängender Vielecke?

7. Ein konvexes Polyeder wird (durch parallele Strahlen oder durch Strahlen, die von einem Punkte ausgehen) so auf eine Ebene projiziert, daß dabei jede begrenzende Fläche, jede begrenzende Kante oder Ecke in der Projektion auftritt. Gib eine solche Projektion **a)** für den Würfel, **b)** für eine Pyramide an. **c)** Gib für den Würfel Projektionen an, bei denen Begrenzungsflächen in Strecken, Kanten in Punkte zusammenschrumpfen. **d)** Beweise, daß es immer möglich ist, ein konvexes Polyeder ohne Flächen-, Kanten- und Eckenverlust in eine Ebene zu projizieren.

8. **a)** Zeige, daß die Projektion eines konvexen Polyeders sich stets als Übereinanderlagerung zweier Vielecksnetze ansehen läßt, die in ihrem scheinbaren Umriß übereinstimmen. **b)** Was für eine Figur ist dieser Umriß?

9. **a)** Zeige, daß die Invariante J (Aufg. 5) für die beiden übereinanderliegenden Vielecksnetze und damit die Invariante des konvexen Körpers den Wert 2 hat (Eulerscher Polyedersatz). **b)** Warum ist es ohne Belang, daß die Umrißlinie dabei zweimal statt nur einmal gezählt wird?

10. Beweise den Eulerschen Polyedersatz in folgender Weise: Aus dem Oberflächennetz wird eine Fläche weggenommen. Dadurch wird der Wert der Invariante des Polyeders um 1 verringert. Jetzt aber bleibt ein einfach zusammenhängendes, aus einfach zusammenhängenden Vielecken bestehendes Netz übrig, dessen Invariante den Wert 1 hat.

11. Beweise den Eulerschen Polyedersatz in folgender Weise: **a)** Die begrenzenden Vielecksflächen werden durch Diagonalen in Dreiecke verwandelt. Wie ändert sich J? **b)** Ein Punkt im Innern des Polyeders wird mit den Polyederecken verbunden. Damit kann das Polyeder in lauter dreiseitige Pyramiden zerteilt werden. Wie ändert sich J? **c)** Eine Pyramide wird herausgenommen. Wie ändert sich J? **d)** Es wird eine zweite, eine dritte Pyramide herausgenommen; wie ändert sich J? **e)** Welchen Wert hat J für die letzte Pyramide und welchen für das ganze Polyeder?

12. Untersuche die Eulersche Invariante bei einem konvexen Körperhaufen, der lückenlos aus lauter konvexen Polyedern zusammengesetzt ist. (Zeige die Invarianz von $e - k + f - r$, wo r die Anzahl der Polyeder ist.)

13. Untersuche, welche Änderung die Eulersche Invariante erfährt, wenn eine Fläche von mehrfachem Zusammenhang ist, wenn also z. B. **a)** auf eine Fläche ein zweiter Körper aufgesetzt ist so, daß die gemeinsame Fläche ganz innerhalb der Begrenzungsfläche des ersten Körpers liegt (zwei Streichholzschachteln!), **b)** wenn in eine Begrenzungsfläche eines Körpers eine von Vielecken begrenzte Vertiefung eingegraben ist.

14. Untersuche die Eulersche Invariante im Falle eines einfachen Polyeders, das nicht vom Geschlecht 0 ist, z. B. **a)** eines aus vier Streichholzschachteln gebildeten ringförmigen Körpers, **b)** eines konvexen Polyeders, das von einem prismatischen Kanal durchbohrt ist, **c)** des in Fig. 15 abgebildeten Mazzochio.

15. Untersuche die Eulersche Invariante für den Fall eines konvexen Körpers, der in seinem Innern a) einen, b) mehrere von Ebenen begrenzte konvexe Hohlräume hat.

Die Platonischen Körper

16. Die regelmäßigen Körper werden von jeweils einer Art kongruenter regelmäßiger Vielecke begrenzt. a) Was für Vielecke kommen überhaupt nur in Betracht? (Grund!) — Wieviel Kanten können die Ecken haben, die aus b) gleichseitigen Dreiecken, c) aus Quadraten, d) aus regelmäßigen Fünfecken zusammengesetzt werden?

17. Ein Körper wird von gleichseitigen Dreiecken begrenzt und hat dreiseitige Ecken. Nimm a) die Anzahl der Ecken, b) die Anzahl der Kanten, c) die Anzahl der Flächen als Unbekannte und berechne nach der Eulerschen Gleichung jeweils die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen (Tetraeder).

18. Ein Körper wird von gleichseitigen Dreiecken begrenzt und hat a) vierseitige, b) fünfseitige Ecken. Berechne auf Grund der Eulerschen Gleichung die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen (Oktaeder und Ikosaeder).

19. Ein Körper wird a) von Quadraten, b) von regelmäßigen Fünfecken begrenzt und hat dreiseitige Ecken. Berechne auf Grund der Eulerschen Gleichung die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen (Hexaeder und Dodekaeder).

Tetraeder und Oktaeder

20. Konstruiere ein Tetraeder a) mit der Kante 5 cm in schräger Parallelprojektion, b) mit der Kante 4 cm in Grundriß und Aufriß.

21. Berechne im Tetraeder a) den Neigungswinkel zweier Seitenflächen, b) den Winkel einer Kante gegen die Grundfläche, c) den Winkel zweier windschiefer Kanten.

Berechne in einem Tetraeder a) mit der Seite 10 cm, b) mit der Seite 14,36 cm, c) mit der Seite a:

22. die Höhe einer Seitenfläche,

23. die Tetraederhöhe,

24. den Radius der durch die Ecken gehenden Kugel,

25. den Radius der die Kanten berührenden Kugel,

26. den Radius der die Flächen berührenden Kugel,

27. die Oberfläche,

28. den Inhalt.

29. Konstruiere ein Oktaeder a) mit der Kante 4 cm in schräger Parallelprojektion, b) mit der Kante 3,5 cm in Grundriß und Aufriß.

30. Berechne im Oktaeder den Neigungswinkel zweier Nachbarebenen.

31—36. Beantworte die Fragen 22, 24 bis 28 für das Oktaeder.

37. Wie groß ist der Abstand zweier gegenüberliegender Flächen des Oktaeders?

38. Berechne die Kante eines Tetraeders, dessen Oberfläche 90,04 cm^2 ist.

39. Berechne die Kante eines Oktaeders, dessen Rauminhalt 11,29 cm^3 ist.

40. Berechne den Abstand zweier windschiefer Kanten eines Tetraeders mit der Kantenlänge a) 10 cm, b) a.

41. Dem Tetraeder ist ein Körper einzuschreiben, dessen Ecken a) die Kantenmitten, b) die Flächenmitten sind. Was sind das für Körper? c) Berechne die Kantenlänge und d) den Rauminhalt der Körper, wenn die Tetraederkante a gegeben ist.

42. Beantworte die gleichen Fragen wie in Aufg. 41 für das Oktaeder.

43. Den Seitenflächen a) des Tetraeders, b) des Würfels, c) des Oktaeders sind regelmäßige Pyramiden aufgesetzt, deren Spitzen auf der Kugel liegen, die dem ursprünglichen Körper umschrieben ist. Berechne die Kantenlänge und den Inhalt des neuen Körpers, wenn die Kante a des ursprünglichen Körpers gegeben ist.

Vierflach[1]), Oktaeder und Würfel

44. Ein Vierflach ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm wird, dessen Seiten ein gegebenes Verhältnis haben.

45. Ein Tetraeder ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Quadrat wird. (Zeichnung in schiefer Parallelprojektion.) a) Wie liegen die Ecken des Quadrats auf den geschnittenen Tetraederkanten? b) Wie liegt die Schnittebene zu den nicht geschnittenen Tetraederkanten? c) Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

46. Die Schwerpunkte der Flächen eines (beliebigen) Vierflachs bilden ein neues Vierflach; beweise, a) daß in diesem die Kanten und Flächen parallel denen des ursprünglichen Vierflachs sind, b) daß es dem ursprünglichen Vierflach symmetrisch ähnlich ist, c) daß sein Schwerpunkt mit dem des großen zusammenfällt, d) daß sein Inhalt sich zu dem des großen verhält wie 1 : 27.

47. Unter welchen Winkeln schneiden sich die Höhen eines Tetraeders?

48. Die Höhe eines Vierflachs wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene im Verhältnis $m:n$ geteilt; wie verhalten sich die Inhalte der Körperstücke?

49. Ein Vierflach wird parallel zur Grundfläche in zwei Teile zerschnitten, deren Rauminhalte sich wie $p:q$ verhalten; wie verhalten sich die Höhen?

---

1) Im folgenden ist das „Vierflach" als beliebiger Vierflächner in Gegensatz gestellt zu dem „Tetraeder" benannten regelmäßigen Vierflächner.

50. Ein Tetraeder wird längs der Höhe und parallel einer Grundkante zerspalten. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Teile?

51. In einem Tetraeder sollen die Ecken gleichmäßig so weit abgestumpft werden, daß der Restkörper halb so großen Inhalt wie der Ausgangskörper hat. Wie verhält sich die Oberfläche des neuen Körpers zu der des alten?

52. Stumpft man die Ecken eines Tetraeders bis auf ein Drittel der Kanten ab, so entsteht ein neuer Körper; man drücke Inhalt und Oberfläche dieses Körpers durch seine Kantenlänge aus.

53. Auf einer Ebene liegen drei sich berührende Kugeln vom Radius r; mitten auf diesen drei Kugeln liegt eine vierte gleich große. Wie weit ist deren Mittelpunkt von der Ebene entfernt?

54. Einem Tetraeder soll ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt eingeschrieben werden. Wie groß ist dessen Höhe?

55. Wie verhalten sich in einem Tetraeder die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kugel?

56. Beantworte dieselbe Frage für a) das Oktaeder, b) den Würfel.

57. a) Ein Tetraeder und ein Oktaeder sollen gleiche Oberfläche haben; wie verhalten sich die Rauminhalte? b) Wie verhalten sich die Oberflächen eines Tetraeders und Oktaeders von gleichem Rauminhalt? Leite die Lösung von b) aus der von a) ohne neue Rechnung her.

58. Ein Tetraeder und ein Oktaeder sollen gleiche Kantenlängen haben; wie verhalten sich die Oberflächen der den beiden Körpern eingeschriebenen Kugeln?

59. In einem Oktaeder sollen die Ecken gleichmäßig bis auf ein Drittel der Kanten abgestumpft werden. Drücke den Inhalt des Restkörpers als Funktion seiner Kantenlänge aus.

60. Ein Oktaeder ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck wird (Zeichnung in schiefer Parallelprojektion). a) Wie liegen die Ecken des Sechsecks auf den geschnittenen Oktaederkanten? b) Wie liegt die Schnittebene zu den nicht geschnittenen Oktaederkanten? c) Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

61. a) Vom Tetraeder, b) vom Oktaeder, c) vom Würfel sind alle Ecken durch Ebenen abgeschnitten, die jeweils durch die Mitten der in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten gehen. Stelle die Restkörper in Grundriß und Aufriß und in schräger Parallelprojektion dar und berechne ihre Inhalte und Oberflächen. d) Erkläre aus der Übereinstimmung der Ergebnisse von b) und c) die Entstehung des gemeinsamen Namens Kubooktaeder.

Ikosaeder und Dodekaeder

62. Zeichne das Netz eines Ikosaeders und stelle danach ein Flächenmodell her.

63. a) Zeichne, von einem Würfel ausgehend, in dessen Flächen je eine Ikosaederkante liegt, ein Ikosaeder in schräger Parallelprojektion. b) Berechne die Kantenlänge des Ikosaeders, wenn die Würfelkante gegeben ist.

64. Zeichne a) in schräger Parallelprojektion, b) in Grundriß und Aufriß ein Ikosaeder mit der Kante $a=3$ cm.

65. Berechne den Neigungswinkel zweier Nachbarflächen des Ikosaeders.

Berechne von einem Ikosaeder a) mit der Seite 10 cm, b) mit der Seite 13,34 cm, c) mit der Seite a:

66. den Radius der durch die Ecken gehenden Kugel,

67. den Radius der durch die Kantenmitten gehenden Kugel,

68. den Radius der durch die Flächenmitten gehenden Kugel,

69. die Oberfläche,

70. den Inhalt.

71. Zeichne das Netz eines Dodekaeders und stelle danach ein Flächenmodell her.

72. a) Zeichne, von einem Würfel ausgehend, dem das Dodekaeder umschrieben wird, ein Dodekaeder in schräger Parallelprojektion. b) Zeichne ein Dodekaeder in Grundriß und Aufriß.

73. Zeiche einen Würfel in ein Dodekaeder.

74. Berechne die Kante des Dodekaeders, wenn die Kante des ihm eingeschriebenen Würfels gegeben ist.

75.—79. Beantworte die Fragen 66 bis 70 für das Dodekaeder.

80. Die Mitten der Flächen eines a) Ikosaeders, b) Dodekaeders sind die Ecken eines a) Dodekaeders, b) Ikosaeders. Beweise das und zeichne jeden Körper mit dem ihm eingeschriebenen.

Vermischte Aufgaben über die Platonischen Körper

81. Stelle eine Tabelle auf für die Inhalte und Oberflächen aller Platonischen Körper als Funktion der Kantenlänge.

82. a) Wie verhalten sich nach der Tabelle von Nr. 81 die Oberflächen eines Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders von gleicher Kantenlänge? b) Versuche andere Beziehungen einfacher Art aus der Tabelle abzulesen. c) Ergänze die Tabelle durch die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kugeln als Funktion der Kantenlänge und lies auch für diese einige einfache Beziehungen ab.

83. (Satz des Eudoxus.) Ziehe von einer Würfelecke aus die Körperdiagonale und die drei Flächendiagonalen, lege durch die Körperdiagonale nach jeder der drei Flächendiagonalen eine Ebene und zeige, daß dadurch der Würfel in drei kongruente Pyramiden zerlegt wird (Zeichnung in schiefer Parallelprojektion und Herstellung des Netzes aller drei Teilpyramiden).
Anmerkung: In den Ankersteinbaukästen befinden sich solche Teilpyramiden.

84. Die Ecken eines Würfels werden so abgestumpft, daß in jeder Würfelfläche ein regelmäßiges Achteck entsteht. Man stelle Oberfläche und Inhalt des Restkörpers als Funktion a) seiner Kante, b) der Würfelkante dar.

85. Ein Würfel ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck wird (Zeichnung in schiefer Parallelprojektion). a) Wo liegen die Ecken des Sechsecks auf den geschnittenen Würfelkanten? b) Welchen Winkel bildet die Schnittebene mit den nicht geschnittenen Würfelkanten? (Nicht berechnen, sondern konstruieren!) c) Wieviel Lösungen hat die Aufgabe? d) Verlängert man die nicht geschnittenen Würfelkanten, so trifft jede von ihnen die Schnittebene in einem Punkte; welche Figur bestimmen diese sechs Punkte? (Rein geometrisch, ohne Rechnung!)

86. Auf jeder der zwölf Kanten eines Oktaeders bestimme man (zunächst rechnerisch) einen Punkt derart, daß diese zwölf Punkte die Ecken eines Ikosaeders bilden. Wie lassen sich diese Punkte auf Grund der Berechnung leicht zeichnen?

Vermischte Überlegungen

87. Den Flächen eines Würfels werden nach innen zu die vierseitigen Pyramiden aufgesetzt, die ihre Spitze im Mittelpunkt haben. Dann werden die Pyramiden nach außen umgestülpt. a) Was für ein Körper wird das? b) Welchen Rauminhalt hat der neue Körper? c) Verfahre in ähnlicher Weise mit anderen Platonischen Körpern.

88. Welche von den Platonischen Körpern sind starr, würden also, wenn die Kanten in Gelenken aneinanderstoßen, ohne Versteifung ihre Gestalt beibehalten? Wieviel und welche Körper- oder Flächendiagonalen müßte man einziehen, um die anderen Körper starr zu machen?

89. Bestimme Anzahl und Lage der Symmetrieachsen und Symmetrieebenen bei den verschiedenen Platonischen Körpern.

90. a) Beim Würfel, b) beim Oktaeder, c) beim Tetraeder werden erst irgendwelche zwei, dann irgendwelche drei Begrenzungsflächen ausgezeichnet (etwa mit Kreide bemalt). Untersuche, ob auch dann noch Symmetrieebenen vorhanden sind, und wenn ja, wie sie liegen.

Aus der Geschichte der Mathematik

Aus dem sog. 14. Buch von Euklids Elementen, das zwischen 200 und 100 v.d.Ztr. von Hypsikles von Alexandria verfaßt wurde:

91. Die fünfseitige Fläche eines Dodekaeders und die dreiseitige eines Ikosaeders, die beide der gleichen Kugel eingeschrieben sind, haben den gleichen Umkreis.

92. Die Oberfläche des Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche des Ikosaeders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders.

93. Der Rauminhalt des Dodekaeders verhält sich zum Rauminhalt des Ikosaeders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders.

Aus dem sog. 15. Buch von Euklids Elementen, das wahrscheinlich um 530 n. d. Ztr. von Isidorus verfaßt wurde:

94. Einem gegebenen Würfel ist ein Tetraeder einzuschreiben.

95. Einem gegebenen Tetraeder ist ein Oktaeder einzuschreiben.

96. Einem gegebenen Würfel ist ein Oktaeder einzuschreiben.
Zusatzfrage: Welchen Bruchteil des Würfelinhaltes macht das eingeschriebene Oktaeder aus?

97. Einem gegebenen Oktaeder ist ein Würfel einzuschreiben.

Zusatzfrage: Einem Würfel ist ein Oktaeder und diesem wieder ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich Inhalt und Oberfläche des kleinen Würfels zu denen des großen?

98. Eine Scherzfrage aus Daniel Schwenters Erquickstunden (1636): „Ein Tetraëton oder Corpus so von vier gleichseitigen Trianglen beschlossen | also zu werffen | daß die Spitz unter sich | die Fläch aber über sich (=oben) stehn."

§ 11. Weiterführung und Ergänzung der Körperberechnung

Prisma und Pyramide

1. Ein gerades gleichseitiges Prisma von der Höhe $h=5$ cm hat als Grundflächen gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln $a=b=12$ cm und der Basis $c=10$ cm. Durch die Basis der einen Grundfläche und die Spitze der anderen wird ein Schnitt gelegt. Wie lang sind die Schenkel der Schnittfigur, und welchen Flächeninhalt hat sie?

2. Durch eine Grundkante $a=6{,}4$ cm eines geraden regelmäßigen dreiseitigen Prismas wird eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha=51^\circ 37'$ geneigt ist. Welchen Inhalt hat die abgeschnittene Pyramide?

3. Wie groß ist der Rauminhalt eines regelmäßigen zwölfseitigen Prismas, dessen Grundfläche einem Kreise von $r=7$ cm Radius eingeschrieben ist und dessen Höhe $h=23$ cm beträgt?

4. Ein schiefes Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten 13 cm, 14 cm, 15 cm. Seine Seitenkanten sind gegen die Grundfläche unter 30° geneigt und 32 cm lang. Wie groß ist sein Rauminhalt?

5. Ein Rhomboeder (d. h. von kongruenten Rhomben begrenztes schiefes Prisma) hat die Kantenlänge a, der spitze Rhombuswinkel ist 60°. Berechne a) die Körperdiagonalen, b) den Neigungswinkel zweier Flächen gegeneinander.

6. Eine gerade regelmäßig sechsseitige Pyramide von $a=6$ dm Grundkante hat $J=795$ dm^3 Rauminhalt. Wie lang ist ihre Höhe?

7. Eine Pyramide hat zur Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten 3 cm und 4 cm; die Seitenkanten sind 6,5 cm lang. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

8. In einer Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, sind alle Seitenflächen gegen die Grundfläche unter 60° geneigt. Welchen Teil der Gesamtoberfläche macht die Grundfläche aus? (Vgl. § 8, Aufg. 141.)

9. In einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide hat eine Seitenfläche einen $n=2$mal so großen Flächeninhalt wie die Grundfläche. Man berechne den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

10. Von einer Pyramide wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene der $n$te Teil des Rauminhaltes abgeschnitten. In welchem Verhältnis wird die Höhe geteilt?

11. Drücke den Rauminhalt eines Tetraeders[1] als Funktion seiner Höhe aus.

12. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche kennt man den Inhalt $J=137{,}9$ cm^3 und den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche $\alpha=72°\,30'$. Wie lang sind die Seitenkanten?

13. Über einem Quadrat, dessen Seite a Längeneinheiten mißt, ist eine gerade, nach beiden Seiten gleich hohe Doppelpyramide errichtet. Wie hoch muß diese sein, damit Inhalt und Oberfläche dieselbe Maßzahl haben? Zeige, daß a in jedem Falle mehr als sechs Längeneinheiten messen muß, damit die Aufgabe lösbar sei, und berechne h für den Sonderfall $a=10$ cm.

14. In einer geraden regelmäßigen fünfseitigen Pyramide ist die Grundkante a gleich der Seitenkante $s=4$ cm (Teilpyramide des Ikosaeders). Gesucht ist der Rauminhalt.

15. Berechne in der fünfseitigen Pyramide der Aufg. 14 a) den Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche, b) den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche, c) den Neigungswinkel zweier Seitenflächen gegeneinander.

---

1) Zu dem Namen vgl. die Fußnote auf S. 58.

16. Man bestimme die Seiten und Winkel der körperlichen Ecken, die bei einem Rhombendodekaeder (§ 10, Nr. 87a) vorkommen. Vergleiche die Winkel mit dem in Aufg. 5b.

Regelmäßige Körper

17. Ein Hohlwürfel aus Gußeisen (Wichte $s_1 = 7{,}25$ g/cm^3) sinkt in Seewasser (Wichte $s_2 = 1{,}03$ g/cm^3) bis zur Hälfte ein. Wie dick ist die Wandung im Verhältnis zur Würfelkante?

18. Unter welchem Winkel schneiden sich die Körperdiagonalen eines Würfels? Vergleiche das Ergebnis mit dem von Aufg. 5b und 16.

19. Einem Würfel ist ein Tetraeder und ein Oktaeder eingezeichnet. Wie verhalten sich die Rauminhalte der drei Körper?

20. Einer Kugel sind ein Oktaeder und ein Würfel eingeschrieben. Wie verhalten sich die Radien der diesen Körpern eingeschriebenen Kugeln zueinander? Welcher Satz gilt also?

21. Löse die Aufgabe 20 für ein Dodekaeder und Ikosaeder.

22. Einem Dodekaeder ist in bekannter Weise ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

23. Einer Kugel ist ein Tetraeder eingeschrieben. Beweise, daß die größte Kugel, die gleichzeitig die erste Kugel und eine Tetraederfläche berührt, ebenso groß ist wie die dem Tetraeder eingeschriebene Kugel.

24. Einer Kugel ist je ein Tetraeder eingeschrieben und umschrieben. Wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Tetraeder?

25. Berechne den Winkel, den die Höhe eines Tetraeders mit einer der anstoßenden Kanten bildet. Vergleiche diesen Winkel mit dem in Aufg. 18 berechneten.

26. Unter welchem Winkel sind a) zwei Tetraederflächen, b) zwei Oktaederflächen gegeneinander geneigt?

27. Wie verhalten sich beim Oktaeder die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kugel?

28. In einem Oktaeder von der Kantenlänge a sind die drei Ecken einer Seitenfläche mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche verbunden. Wie lang sind die Verbindungslinien? Welcher Satz gilt also?

29. Berechne den Neigungswinkel je zweier Seitenflächen bei einem a) Dodekaeder, b) Ikosaeder.

30. Wie lang muß die Kante eines Tetraeders sein, wenn bei ihm Inhalt und Oberfläche dieselbe Maßzahl haben sollen?

Zylinder und Kegel

31. Eine amtliche Ausrüstungsvorschrift für große zylindrische Kochtöpfe enthält folgende Angaben:

	Inhalt in l	Durchmesser in mm	Höhe in mm
a)	60	400	480
b)	75	460	450
c)	58	520	275

Prüfe, um wieviel die Angaben der ersten Spalte von denen der beiden letzten abweichen, und erläutere die praktische Bedeutung dieser Abweichungen.

32. Ein Zylinder von $r = 15$ mm Radius und $h = 20$ cm Höhe aus Kork (Wichte $s_1 = 0{,}24$ g/cm³) wird durch eine auf den Grundkreis passende Halbkugel aus Blei (Wichte $s_2 = 11{,}4$ g/cm³) beschwert. Wie tief sinkt der Zylinder in Wasser ein?

33. Ein eiserner Kegel (Wichte $s_1 = 7{,}6$ g/cm³) mit dem Grundkreisradius $r = 10$ cm soll einem Korkzylinder (Wichte $s_2 = 0{,}2$ g/cm³) von derselben Höhe und Achsenlage so eingefügt werden, daß das Ganze bis zu $\frac{3}{4}$ der Höhe in Wasser eintaucht. Wie groß muß der Radius des Korkzylinders gewählt werden? Zusatzfrage: Warum ist über die Höhe keine Zahlenangabe gemacht worden?

34. Ein Bleizylinder (Wichte $s_1 = 11{,}4$ g/cm³) vom Radius $r = 4$ cm soll mit einer konzentrischen zylindrischen Korkhülle (Wichte $s_2 = 0{,}25$ g/cm³) von gleicher Höhe so umgeben werden, daß der Körper in Wasser gerade schwebt. Wie dick muß die Korkhülle sein?

35. Von einem dreiseitigen Prisma kennt man den Inhalt $J = 324{,}7$ cm³ und zwei Winkel der Grundfläche $\alpha = 41^\circ\,29'$ und $\beta = 73^\circ\,51'$. Welchen Inhalt hat der umschriebene Zylinder?

36. Einem Oktaeder sind zwei Zylinder eingeschrieben. Die Umfänge der Grundkreise des einen Zylinders gehen durch die Mittelpunkte der Oktaederflächen, die des anderen durch die Mittelpunkte von je 4 Kanten. Wie verhalten sich die Inhalte der beiden Zylinder?

37. In einem geraden Zylinder, dessen Inhalt $J = 15{,}708$ cm³ gegeben ist, verhält sich die Höhe zum Grundkreisdurchmesser wie $m : n$ (5 : 2). Wie groß ist die Oberfläche?

38. Ein chemischer Trichter (Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt) hat ein Fassungsvermögen von 1 Liter. Wie groß ist die beim Filtrieren höchstens in Betracht kommende Fläche?

39. Welchen Rauminhalt hat ein Kegel wie in Aufgabe 38 von $M = 300$ cm² Mantelfläche?

40. Ein gerader Kegel hat einen Grundkreisradius $r = 6$ cm und einen Mantel $M = 188{,}5$ cm². Wieviel beträgt sein Rauminhalt?

41. Ein gerader Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\varphi=102^{\circ}$ hat die Höhe $h=92{,}4$ cm. Berechne den Radius der Kugel, die mit dem Kegel gleichen Inhalt hat.

42. Ein gerader Kegel mit dem Öffnungswinkel $\alpha=62^{\circ}\,28'\,40''$ hat einen Grundkreis von $p=121$ cm Umfang. Wie groß ist der Kegelmantel?

43. Ein gerader Kegel hat den Öffnungswinkel $2\varphi=146^{\circ}$ und die Seitenlinie $s=15{,}07$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

44. Man berechne die Höhe eines geraden Kegels, dessen Inhalt gleich dem einer Kugel vom Radius a und dessen Gesamtoberfläche gleich der einer Kugel vom Radius b ist.

45. Ein Kegel mit gleichseitigem Achsenschnitt soll mit einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt gleiche Oberfläche haben. Wie verhalten sich die Rauminhalte?

46. Ein Kegel mit gleichseitigem Achsenschnitt hat mit einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt gleichen Rauminhalt. Wie verhalten sich a) die Mäntel, b) die Oberflächen?

47. Unter welcher Bedingung sind die Mäntel eines geraden Zylinders und eines geraden Kegels von gleichen Grundflächen und Höhen flächengleich?

48. Einer Kugel, deren Inhalt $J=974$ cm^3 beträgt, soll ein gerader Kegel vom Öffnungswinkel $\alpha=76^{\circ}\,43'\,40''$ eingeschrieben werden. Welchen Inhalt hat der Kegel?

49. Ein schiefwinkliges Dreieck dreht sich der Reihe nach um jede seiner drei Seiten. Beweise, daß die Inhalte der drei entstehenden Doppelkegel sich verhalten wie die reziproken Werte der Dreiecksseiten.

50. In einem schiefen Kreiskegel ist die längste Mantellinie $a=23{,}7$ cm gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\beta=29^{\circ}\,51'\,16''$ geneigt; der Neigungswinkel der kürzesten Mantellinie gegen die Grundfläche beträgt $\alpha=84^{\circ}\,23'\,20''$. Wie groß ist der Rauminhalt?

51. Ein Eimer von 27 cm Höhe hat einen Grundkreisradius von 10 cm. Wie weit muß der obere Radius sein, wenn der Eimer $13\frac{3}{4}$ Liter fassen soll? $\left[\pi=\frac{22}{7}\right]$ (Quadr. Gleichung.)

52. Ein gerader Kegel, dessen Grundkreisradius $r=17$ cm ist und dessen Mantellinien gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha=58^{\circ}56'52''$ geneigt sind, soll durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt in zwei Teile von gleicher Oberfläche zerlegt werden. Wie groß ist der Radius des Schnittkreises?

53. Ein Katalog für eiserne Kochkessel enthält folgende Maßangaben:

Inhalt in l	Durchmesser in mm unten	oben	Höhe in mm
a) 50	465	495	260
b) 60	495	530	270
c) 70	520	555	290
d) 80	550	580	295
e) 90	600	635	315
f) 120	650	670	335
g) 160	690	740	380
h) 170	660	750	440
i) 200	795	865	400
k) 210	720	810	470
l) 300	705	720	650

Prüfe, wie weit die Angaben in der ersten Spalte von denen in den übrigen abweichen, und erläutere die praktische Bedeutung der Abweichungen.

54. Ein Trapez wird zuerst um die größere, dann um die kleinere Grundlinie gedreht. Die Inhalte der entstehenden Drehkörper verhalten sich wie $m:n$ $(5:4)$. Wie verhalten sich die Grundlinien des Trapezes?

55. Ein regelmäßiges Zwölfeck von der Seitenlänge $a=7{,}3$ cm dreht sich um eine seiner größten Symmetrieachsen. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt des entstehenden Körpers?

56. Einem Kegelstumpf vom Inhalt $J=87{,}062$ cm^3 ist je ein regelmäßig sechsseitiger gerader Pyramidenstumpf eingeschrieben und umschrieben. Um wieviel unterscheiden sich die Inhalte der Pyramidenstümpfe?

57. Einer quadratischen abgestumpften Pyramide vom Inhalt J ist ein Kegelstumpf eingeschrieben und ein anderer umschrieben. Um wieviel unterscheiden sich die Inhalte der Kegelstümpfe?

58. Aus einem Zylinder vom Grundkreisradius r soll ein Kegelstumpf herausgeschnitten werden, der mit dem Zylinder den Grundkreis und die Höhe gemeinsam hat. Wie groß muß der Deckkreisradius gewählt werden, wenn der Inhalt des Stumpfes halb so groß werden soll wie der des Zylinders?

59. Durch einen geraden Kegel von $M=135\,\pi$ cm^2 Mantelfläche wird parallel zur Grundfläche ein Schnitt von $r=6$ cm Radius gelegt; die Seitenlinie des Stumpfes ist $s=5$ cm. Wie groß ist der Grundkreisradius? (Quadr. Gleichung.)

60. Von einem geraden Kegelstumpf kennt man die Grundkreisradien $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 4$ cm und den Inhalt $J = 381{,}59$ cm³. Man berechne den Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundflächen.

61. Ein Kegelstumpf, von dem man die Höhe $h = 15{,}2$ cm und die Grundkreisradien $r_1 = 16{,}7$ cm und $r_2 = 9{,}1$ cm kennt, soll durch einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt in zwei rauminhaltsgleiche Teile zerlegt werden. Wie weit muß der Schnitt von dem kleineren Grundkreis entfernt sein?

Kugel und Kugelteile

62. Billardkugeln sind in der Regel aus Elfenbein (Wichte 1,9 g/cm³) und haben einen Durchmesser von 6,5 cm. Wie schwer ist eine solche Kugel?

63. Welchen Rauminhalt hat eine Kugel von 113,1 cm² Oberfläche?

Zusatzfrage: Wie erklärt sich das im ersten Augenblick sonderbar erscheinende Zahlenergebnis?

64. Die beim Kegelspiel benutzten Kugeln werden für gewöhnlich aus schwerem Pockholz hergestellt. Jemand legt um eine solche Kugel ein Bandmaß und findet den Umfang eines Großkreises der Kugel zu 53,4 cm. Die Kugel wiegt 3,345 kg. Wie groß ist die Wichte des Pockholzes?

65. Eine Hohlkugel aus Eisen (Wichte 7,5 g/cm³) hat 4 cm Außendurchmesser und wiegt 220 g. Wie dick ist ihre Wand?

66. Eine Hohlkugel aus Kupfer (Wichte $s = 8{,}9$ g/cm³), deren Außendurchmesser $d = 11{,}2$ cm ist, sinkt bis zur Hälfte in Wasser ein. Wie dick ist ihre Wand?

67. Einer Kugel ist ein Pyramidenwürfel (d. h. ein Würfel, auf dessen Flächen gleichhohe quadratische Pyramiden aufgesetzt sind) eingeschrieben. Wie verhalten sich die Inhalte der beiden Körper?

68. Eine Kugel soll derart in einen geraden Zylinder verwandelt werden, daß der Mantel des Zylinders gleich der Oberfläche der Kugel wird. Wie verhält sich der Grundkreisdurchmesser des Zylinders zur Höhe?

69. In einer quadratischen Pyramide ist die Grundkante $a = 12$ cm und die Seitenkante $s = 10$ cm gegeben. Wie groß sind die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kugel?

70. In einer geraden regelmäßigen Pyramide sei die Grundkante mit a, der Radius des der Grundfläche umschriebenen Kreises mit r, die Seitenkante mit s, die Höhe der Pyramide mit h bezeichnet. Wie groß ist der Radius der Kugel, die alle Kanten berührt, und wo liegt der Mittelpunkt der Kugel?

Bemerkung: Natürlich dürfen nicht alle der vier genannten Größen gegeben werden. Die Bezeichnungen sind nur gewählt, damit die gesuchten Ausdrücke möglichst kurz hingeschrieben werden können.

71. Zwei Kugeln von den Radien r_1 und r_2 berühren sich von außen. Welchen Rauminhalt hat das zwischen den beiden Kugeln und dem gemeinsamen Berührungskegel gelegene Körperstück?

72. Einer Kugel ist ein gerader Kegel umschrieben, dessen Höhe doppelt so groß wie der Durchmesser der Kugel ist. Wie verhalten sich die Oberflächen und Inhalte der beiden Körper?

73. Einer Kugel wird ein gerader Kegel derart eingeschrieben, daß seine Höhe durch den Mittelpunkt der Kugel stetig geteilt wird. Wie verhalten sich die Inhalte beider Körper?

74. Vier gleiche Kugeln sind so gelegt, daß jede die drei anderen berührt; es soll eine fünfte Kugel ermittelt werden, die alle vier Kugeln berührt. a) Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? b) Wie verhalten sich die Radien der gesuchten Kugeln zum Radius der gegebenen? (Quadr. Gl.)

75. Einer Kugel ist ein Tetraeder eingeschrieben. Wie verhalten sich die beiden Abschnitte, in die eine der Tetraederebenen die Kugel zerlegt?

76. Einem Korkzylinder (Wichte $s_1 = 0{,}25$ g/cm³) von $r_1 = 15$ mm Radius und $h_1 = 20$ cm Höhe ist ein auf den Grundkreis passender eiserner Kugelabschnitt (Wichte $s_2 = 7{,}5$ g/cm³) von $h_2 = 9$ mm Höhe aufgesetzt. Wie tief taucht der Gesamtkörper in Wasser ein?

77. Aus einem Kugelabschnitt soll eine Kugel ausgebohrt werden, deren Durchmesser die Höhe des Abschnitts ist. Welches Verhältnis müssen die beiden Kugelradien haben, wenn die herausgebohrte Kugel ebenso groß sein soll wie der Restkörper?

78. Aus einer Kugel vom Radius $r = 7$ cm wird ein gerader Zylinder a) vom Radius $\varrho = 5$ cm, b) von der Höhe $h = 6$ cm zentrisch herausgebohrt. Welchen Inhalt hat der übrigbleibende Kugelring?

79. In welchem Kugelabschnitt ist die Kappe doppelt so groß wie der Grundkreis?

80. Eine Kugelkappe soll n-mal so groß sein wie ihr Grundkreis. Wie verhält sich die Höhe zum Kugelradius? Zahlenbeispiel: a) $n = 4$, b) $n = 1{,}5$.

81. In einem Kugelabschnitt beträgt die Höhe das n-fache des Kugelradius. Wie verhält sich die Kappe zum Grundkreis? Zahlenbeispiel: a) $n = 1{,}5$, b) $n = 1{,}2$.

82. Von einem Kugelabschnitt kennt man die Höhe $h = 5{,}8$ cm und die Kappe $K = 109{,}47$ cm². Wie groß ist der Rauminhalt?

83. Zwei Kugeln vom Radius $r = 6$ cm durchdringen einander so, daß jede von ihnen ihren Mittelpunkt auf der Oberfläche der anderen hat. Wie groß ist der Inhalt des ihnen gemeinsamen Körperstückes?

84. Durch eine Halbkugel vom Radius $r = 4$ cm soll parallel zur Grundfläche ein Schnitt so gelegt werden, daß die beiden entstehenden Teile gleiche Gesamtoberfläche erhalten. Wie weit ist die Schnittebene vom Kugelmittelpunkt entfernt?

85. Eine Halbkugel vom Radius r wird von einem geraden Kegel durchdrungen, der mit ihr auf derselben Grundfläche steht und die Höhe $2r$ hat. In welchem Verhältnis wird die Halbkugelfläche von dem Kegel geteilt?

86. In einem Kugelabschnitt verhält sich die Haube zum Grundkreis wie 4:3. Wie groß ist **a)** der Grundkreis im Vergleich zu einem Großkreis der Kugel, **b)** der Zentriwinkel des zugehörigen Kugelausschnitts?

87. Die Gesamtoberfläche eines Kugelabschnitts soll den vierten Teil der Kugelfläche ausmachen. Welchen Zentriwinkel hat der zum Abschnitt gehörige Kugelausschnitt?

88. Bei welchem Kugelausschnitt hat der Abschnitt und der Kegel gleichen Rauminhalt? Deute das Ergebnis auch mittels der stetigen Teilung.

89. Ein Kugelausschnitt hat den Zentriwinkel $2\alpha = 88^\circ 49' 50''$. Welchen Teil des Kugelinhalts erfüllt er?

90. Für welchen Kugelausschnitt ist die Kappe gleich dem Kegelmantel? Sprich das Ergebnis auch aus als Vergleich zwischen den Inhalten des Ausschnitts und der ganzen Kugel.

91. Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelausschnitts, bei dem sich die Kappe zum Mantel wie $m : n$ $(3 : 5)$ verhält?

92. Ein Kugelausschnitt soll durch eine konzentrische Kugelfläche in zwei Teile von gleichen Oberflächen und gleichen Inhalten zerlegt werden können. Welchen Zentriwinkel 2α muß der Ausschnitt haben?

93. Ein Kugelausschnitt hat den Inhalt $J = 589{,}4$ cm^3 und den Zentriwinkel $2\alpha = 103^\circ 37' 48''$. Wie hoch ist der zugehörige Kugelabschnitt?

94. Ein Kreisabschnitt, dessen zugehöriger Zentriwinkel $\alpha = 41^\circ 57' 26''$ ist, dreht sich um den zu seiner Sehne parallelen Durchmesser $2r = 73{,}5$ cm. Welchen Inhalt hat der entstehende Drehkörper?

95. Eine Kugelschicht, bei der die Durchmesser der beiden Grundkreise von dem Kugelmittelpunkte aus unter den Winkeln 2α und 2β $(\alpha > \beta)$ gesehen werden, soll durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene in zwei Teile von gleicher Oberfläche zerlegt werden. Unter welchem Winkel φ erscheint der Durchmesser des Schnittkreises vom Kugelmittelpunkt aus?

Simpsonsche Regel, Schwerpunktsbestimmungen, Guldinsche Regel

96. Ein Körper habe die Höhe h, seine Grundfläche sei g_1, die dazu parallele Deckfläche g_2, sein Mittelschnitt, d. h. der in halber Höhe geführte Querschnitt, sei m; ein beliebiger zur Grundfläche paralleler und von ihr um x entfernter Querschnitt des Körpers habe einen Flächeninhalt

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wo a, b, c, d irgendwelche endlichen, reellen Koeffizienten (einschließlich Null) bedeuten sollen. Beweise die Simpsonsche Regel, die besagt, daß der Rauminhalt dieses Körpers

$$V = ah + b\frac{h^2}{2} + c\frac{h^3}{3} + d\frac{h^4}{4} = \frac{h}{6}(g_1 + g_2 + 4m) \quad \text{ist.}$$

Andeutung: Zerlege die Höhe h des Körpers in n gleiche Teile, errichte über jedem Querschnitt ein Prisma von der Höhe $\frac{h}{n}$, bilde die Summe der Rauminhalte aller dieser Prismen (unter Anwendung der Summationsformeln für die Reihen der natürlichen Zahlen, der Quadratzahlen und Kubikzahlen), gehe dann zur Grenze $n \to \infty$ über.

97. Untersuche einige der schon früher behandelten Körper daraufhin, ob sie sich nach der Simpsonschen Regel berechnen lassen; ermittle insbesondere den Grad der in Aufg. 96 mit $f(x)$ bezeichneten ganzen rationalen Funktion a) bei der Kugel und dem Kugelabschnitt, b) beim Kegel und Kegelstumpf.

98. Im Prismatoid (Körperstumpf) ist jeder zur Grundfläche parallel geführte Querschnitt eine Funktion zweiten Grades seines Abstandes von der Grundfläche. Beweise das, und zeige damit, daß für das Prismatoid die Simpsonsche Regel gilt.

99. Inwiefern kann man jedes Oktaeder als Prismatoid auffassen?

100. Bei einem Prismatoid von der Höhe $h = 9{,}8$ cm ist die eine Grundfläche ein Rhombus mit der Seite $a = 7{,}9$ cm und einem Winkel 60°. Die zweite Grundfläche ist in eine Strecke von der Länge a entartet, deren Endpunkte senkrecht über den Endpunkten der kürzeren Diagonale des Rhombus liegen. Welchen Inhalt hat das Prismatoid?

101. Durch ein Prismatoid mit den Grundflächen g_1 und g_2, dem Mittelschnitt m und der Höhe h soll eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, die den Stumpf und die Höhe in demselben Verhältnis teilt. Wie weit ist die Schnittebene von den Grundflächen entfernt?

102. Berechne den Inhalt eines pontonförmigen Körpers (d. h. eines Körpers, der von zwei parallelen rechteckigen Grundflächen und vier trapezförmigen Seitenflächen begrenzt ist) als Funktion der beiden Grundkanten a, b, der beiden Deckkanten a', b' und der Höhe h.

103. Bei einem geraden, schief abgeschnittenen dreikantigen Prisma sei die Länge der parallelen Kanten a, b, c; der Flächeninhalt des senkrecht zu ihnen geführten Querschnittes sei q. Beweise mit der Simpsonschen Regel, daß der Rauminhalt des Prismas gleich $\frac{1}{3} q (a + b + c)$ ist.

104. Welchen Inhalt hat der Stumpf eines geraden, schief abgeschnittenen Prismas? (Benutze den Abstand der Schwerpunkte der beiden Grundflächen.)

105. Berechne den Inhalt eines geraden, schief abgeschnittenen Zylinders (Sonderfall der Aufg. 104).

106. Berechne auf Grund der Aufg. 105 den Inhalt eines geraden Zylinderhufes. (Unter Huf versteht man einen Zylinderstumpf, dessen Deckfläche mit der Grundfläche einen Punkt gemein hat.)

107. Zeige durch Betrachtung der Querschnitte, daß folgende Körper der Simpsonschen Regel gehorchen, und gib in den Fällen a) und b) den Rauminhalt der vollständigen Körper, in den übrigen Fällen den Rauminhalt der Abschnitte an:

a) Gestrecktes Drehellipsoid,

b) Abgeplattetes Drehellipsoid,

c) Drehparaboloid, begrenzt durch eine Ebene senkrecht zur Drehachse. Beweise, daß der Paraboloidabschnitt halb so groß ist wie der ihm umschriebene gerade Zylinder.

d) Einschaliges Drehhyperboloid, begrenzt durch zwei zur Drehachse senkrechte Ebenen. — Sonderfall: Der eine Begrenzungskreis sei der Kehlkreis, der andere ein Kreis von doppeltem Flächeninhalt wie der Kehlkreis.

e) Zweischaliges Drehhyperboloid, begrenzt von einer der beiden Schalen und einer zur Drehachse senkrechten Ebene. — Sonderfall: Der Abstand der begrenzenden Ebene vom Körpermittelpunkt werde durch den Scheitel der Schale halbiert.

f) Lies aus den Sonderfällen von d) und e) eine bemerkenswerte Beziehung zum Kugelinhalt ab, falls die gedrehte Hyperbel gleichseitig ist.

108. Wo liegt der Schwerpunkt **a)** einer Strecke, **b)** eines Parallelogramms, **c)** eines Parallelflachs? [1])

---

1) Bei der Ermittlung von Schwerpunkten geometrischer Gebilde (Aufg. 108 bis 131) wird stillschweigend vorausgesetzt, daß alle in Frage kommenden Strecken, Flächen und Körperstücke homogen sind.

109. Zeige, daß **a)** bei allen Flächen und Körpern, die eine Symmetrieachse oder Symmetrieebene haben, der Schwerpunkt in dieser liegt, **b)** bei zentrisch symmetrischen Figuren und Körpern der Mittelpunkt zugleich Schwerpunkt ist.

110. Beweise, daß der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises ist.

111. Zeige, daß bei einem Vierflach der Schwerpunkt der Oberfläche mit dem Mittelpunkt der durch die Schwerpunkte der Seitenflächen gehenden Kugel zusammenfällt.

112. Wo liegt der Schwerpunkt **a)** einer Dreiecksfläche, **b)** eines Vierflachs?

113. Wie findet man den Schwerpunkt eines ebenen Vierecks?

114. Wo liegt der Schwerpunkt **a)** eines Prismas, besonders eines dreiseitigen Prismas, **b)** einer beliebigen Pyramide?

115. Beweise mittels des Momentensatzes[1]) die beiden folgenden Guldinschen Regeln:

a) Die Oberfläche eines Körpers, der durch Drehung einer ebenen Figur um eine in ihrer Ebene liegende (die Figur nicht schneidende) Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der Figur und dem Wege, den der Schwerpunkt des Umfangs zurücklegt.

b) Der Rauminhalt eines Körpers, der durch Drehung einer geschlossenen ebenen Figur um eine in ihrer Ebene liegende (die Figur nicht schneidende) Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt der Figur und dem Wege, den der Schwerpunkt der Fläche zurücklegt.

116. Durch Drehung eines Kreises vom Radius r um eine Gerade seiner Ebene, die vom Mittelpunkt den Abstand a ($\geqq r$) hat, entsteht ein wulstförmiger Körper. Berechne dessen Inhalt und Oberfläche.

117. Ein Halbkreis dreht sich um seinen begrenzenden Durchmesser; gib auf Grund des dir bekannten Kugelinhalts an, wo der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt. Beantworte dieselbe Frage für den Schwerpunkt des Halbkreisbogens.

118. Ermittle auf dieselbe Weise wie in Aufg. 117 den Schwerpunkt eines **a)** Kreisbogens, **b)** Kreisausschnitts, **c)** Kreisabschnitts.

119. Wo liegt der (Flächen-)Schwerpunkt bei einer **a)** Kugelkappe, **b)** Kugelzone? (Andeutung: Zerlegung durch Parallelkreise.)

---

1) Unter Schwerpunktsmoment einer Masse in bezug auf eine Ebene (Gerade) versteht man das Produkt aus der Masse und dem Abstand ihres Schwerpunktes von der Ebene (Geraden). Der Momentensatz heißt: Das Schwerpunktsmoment einer zusammengesetzten Masse ist gleich der Summe der Schwerpunktsmomente ihrer Teile.

120. Ermittle den Schwerpunkt einer halben Ellipsenfläche, die a) von der großen Achse, b) von der kleinen Achse begrenzt wird.

Beachte beim Aussprechen des Ergebnisses, daß die Lage des Schwerpunktes von der Länge der begrenzenden Achse völlig unabhängig ist, daß also z. B. alle Halbellipsen, die in der „Pfeilhöhe" übereinstimmen, denselben Flächenschwerpunkt haben.

121. Wo liegt hiernach der Schwerpunkt eines Ellipsenquadranten?

122. Ein Parabelausschnitt werde von der Parabelachse und einer dazu senkrechten Sehne begrenzt. Wie weit ist der Schwerpunkt des Ausschnittes von der Parabelachse entfernt?

123. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kugelausschnitts?

Anleitung: Zerlege den Kugelausschnitt in Pyramiden, die den Kugelmittelpunkt als gemeinsame Spitze haben.

124. Ein regelmäßiges Sechseck dreht sich um eine seiner Seiten a. Man berechne Oberfläche und Inhalt des entstehenden Drehkörpers.

125. Ein Kreis vom Radius r dreht sich um eine seiner Tangenten. Wie groß ist der Hohlraum, der zwischen dem entstehenden Wulst und einer der beiden zur Drehachse senkrechten Tangentialebenen des Körpers eingeschlossen ist? — Vgl. Aufg. 116.

126. Ein Dreieck ABC, dessen Höhe auf AB bekannt $(=h)$ ist, dreht sich um eine Gerade seiner Ebene $PQ \parallel AB$. Wie weit muß PQ von AB entfernt sein, wenn der durch Drehung um PQ erzeugte Körper viermal so großen Inhalt haben soll wie der durch Drehung um AB erzeugte?

127. Ein Dreieck, von dem die Seite $a=25{,}7$ cm und die Winkel $\beta=74^\circ 32' 29''$ und $\gamma=38^\circ 47' 11''$ gegeben sind, dreht sich um die Seite a. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt des entstehenden Körpers?

128. Ein Rechteck mit den Seiten $a=6$ cm und $b=8$ cm wird um eine Achse gedreht, die durch eine Ecke parallel zu der nicht durch diese Ecke gehenden Diagonale gelegt ist. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstehenden Drehkörpers?

129. Bestimme mittels der Guldinschen Regel den Schwerpunkt a) des Umfangs, b) der Fläche eines Dreiecks, und vergleiche die Ergebnisse mit denen von Aufg. 110 und 112a.

130. Ermittele ebenso, wie weit in einem Trapez, dessen parallele Seiten a und c voneinander um h entfernt sind, der Flächenschwerpunkt von den Grundlinien entfernt ist. Wo liegt der Schwerpunkt außerdem noch?

131. Bestimme den Schwerpunkt a) der Fläche, b) des Umfangs eines Fünfecks, das man erhält, wenn man ein regelmäßiges Sechseck von der Seite a längs einer kurzen Symmetrielinie zerschneidet.

Vermischte Aufgaben

132. Beweise, daß ein Würfel auf 24 verschiedene Arten mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann (d. h. daß, wenn man seine Flächen durch Zahlen oder Farben voneinander unterscheidet, 24 verschiedene Lagen des Würfels denkbar sind, bei denen das Haupt-Symmetrieachsenkreuz dieselbe Lage hat).

133. Durch vier beliebige Punkte des Raumes ist eine Kugel zu legen (oder einem Vierflach ist eine Kugel zu umschreiben).

134. Der Durchmesser einer massiven Kugel ist zu bestimmen a) theoretisch, b) praktisch.

135. Wie kann man durch zwei Punkte einer massiven Kugel den Großkreis legen, d. h. a) weitere Punkte des Großkreises zeichnen, b) den Pol des Großkreises finden? (Beides bei wiederholter Anwendung des Tasterzirkels.)

136. Wird ein dreifach rechtwinkliges Dreikant von einer Ebene geschnitten, so ist der Höhenschnittpunkt des Schnittdreiecks die Projektion der Dreikantspitze auf die schneidende Ebene. Beweise das.

137. Auf den Kanten eines dreifach rechtwinkligen Dreikants sind vom Scheitel aus drei Strecken abgemessen, die sich wie $m : n : p$ $(2 : 3 : 4)$ verhalten. Welche Neigung hat die durch die drei Endpunkte gehende Ebene gegen die drei Ebenen des Dreikants?

138. In einem halbregelmäßigen Vierflach sind die Seitenflächen paarweise kongruent und gleichschenklig; bei dem einen Paar ist die gemeinsame Grundlinie $2a$, bei dem anderen $2b$, alle Schenkel sind gleich c. Man bestimme Inhalt und Oberfläche des Körpers und die Neigungswinkel zwischen den kongruenten Dreiecken.

139. Wie groß ist der Inhalt eines Prismatoids, dessen Grundflächen zwei Quadrate mit der Seite a und dessen Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind?

140. Man berechne Inhalt und Oberfläche eines Körpers, der durch Drehung eines regelmäßigen Sechsecks von der Seite a um einen seiner größten Durchmesser entsteht. Ferner ermittle man Höhe und Rauminhalt derjenigen Kugelschicht, deren Zone dieselbe Oberfläche wie der Drehkörper hat, unter der Annahme, daß die beiden Grundkreise der Kugelschicht gleich sind und daß der Radius der Kugel gleich a ist.

141. Ein Kreisabschnitt, dessen Sehne gleich dem Radius r ist, dreht sich um eine Achse, die der Sehne parallel ist und von der Kuppe des Kreisbogens die (über den Kreismittelpunkt hinaus zu messende) Entfernung $2r$ hat. Welchen Rauminhalt hat der entstehende Umdrehungskörper?

142. Welcher gerade Kegel kann durch eine Ebene parallel zum Grundkreis in zwei Teile zerlegt werden, die sowohl in den Rauminhalten wie auch in den Oberflächen übereinstimmen?

143. Eine Kugel, deren Großkreis $a = 73$ cm Umfang hat, schwimmt im Wasser so, daß sie mehr als zur Hälfte eintaucht und der von der Wasseroberfläche benetzte Kugelkreis $b = 48$ cm Umfang hat. Wie schwer ist die Kugel?

144. [1]) Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man den Inhalt $J = 1280$ cm^3 und den Flächeninhalt einer Seitenfläche $f = 136$ cm^2. Wie lang sind die Grundkante und die Höhe der Pyramide?

145. Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Inhalt $J = 4$ dm^3 und die Oberfläche $F = 15$ dm^2. Man berechne Grundkreisradius und Höhe.

146. Wie groß ist der Grundkreisradius r und die Höhe h eines geraden Zylinders, der mit einem Würfel von der Kantenlänge l gleiche Oberfläche und gleichen Inhalt hat?

147. Ein gerader Kegel hat den Inhalt $J = 100\,\pi$ cm^3 und den Mantel $M = 65\,\pi$ cm^2. Grundkreisradius, Höhe und Seitenlinie sind zu ermitteln.

148. Ein gerader Kegel von $O = 177{,}84$ cm^2 Oberfläche wird durch eine Ebene parallel zum Grundkreis geschnitten. Der Radius des Schnittkreises ist $r = 1{,}58$ cm, die Seitenlinie des Stumpfes $s = 7{,}54$ cm lang. Wie groß ist die Oberfläche des Stumpfes?

149. Durch einen geraden Kegel von $s = 2$ dm Seitenlinie wird parallel zur Grundfläche ein Schnitt von $r = 1$ dm Radius geführt. Die Oberfläche des entstehenden Stumpfes ist $O = 8\,\pi$ dm^2. Wie lang ist die Seitenlinie?

150. Eine Halbkugel vom Radius r soll durch eine zum Grundkreis parallele Ebene halbiert werden. Wie weit muß der Schnittkreis von der Grundfläche entfernt sein?

Andeutung: Man dividiere die Ansatzgleichung durch r^3.[2])

151. Welche Höhe hat ein Kugelabschnitt, dessen Inhalt a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{8}$ von dem der Kugel ist?

152. Wie tief sinkt eine Kugel vom Radius r und der Wichte s_1 in eine Flüssigkeit von der Wichte s_2 ein? — Zahlenbeispiele: a) Silber ($s_1 = 10{,}474$ g/cm^3) in Quecksilber ($s_2 = 13{,}596$ g/cm^3), b) Blei ($s_1 = 11{,}445$ g/cm^3) in Quecksilber ($s_2 = 13{,}596$ g/cm^3), c) Holz ($s_1 = 0{,}5736$ g/cm^3) in Wasser ($s_2 = 1$ g/cm^3).

153. Wie hoch stehen 500 g Wasser in einer Hohlkugel von 10 cm Innenhalbmesser?

---

1) Die Aufgaben 144 bis 158 führen auf Gleichungen 3. Grades.

2) Dieser kleine Kunstgriff ist bei vielen der folgenden Aufgaben anzuwenden, damit einfachere Gleichungen entstehen.

154. Einem geraden Kegel vom Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein gerader Zylinder eingeschrieben werden, dessen Inhalt $\frac{1}{4}$ von dem des Kegels beträgt.

155. Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kreiszylinder eingeschrieben, dessen Inhalt $\frac{1}{3}$ des Kugelinhalts ist. Man berechne Höhe und Grundkreisradius des Zylinders.

156. Einer Kugel ist ein gerader Kegel einzuschreiben, der a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{1}{9}$ des Kugelraums erfüllt. Wie hoch wird der Kegel?

157. Einer Kugel vom Radius $r=6$ cm soll man einen geraden Kegel von $J=16\pi$ cm^3 Rauminhalt so einschreiben, daß die Kegelspitze im Kugelmittelpunkt liegt. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius des Kegels?

158. Welcher zylindrisch durchbohrte Kugelring ist gleich der Summe der beiden beim Durchbohren abfallenden Kugelabschnitte?

Drittes Kapitel

Darstellende Geometrie

(Senkrechte Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen.)

Vorbemerkung über die Bezeichnungen

Für Punkte, Geraden, Strecken, Winkel usw. gelten die in der ebenen Geometrie üblichen Bezeichnungen; Ebenen werden mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet, insbesondere die erste Projektionsebene (Grundrißebene) mit Π_1, die zweite Projektionsebene (Aufrißebene, Vertikalebene) mit Π_2, die dritte Projektionsebene (Seitenrißebene, Kreuzrißebene) mit Π_3. Risse werden durch obere Indizes angedeutet; z. B. hat ein Punkt P den Grundriß P', den Aufriß P'', den Kreuzriß P'''. Spuren werden durch untere Indizes bezeichnet; z. B. hat eine Gerade g die Spuren G_1, G_2, G_3, eine Ebene E die Spuren e_1, e_2, e_3.

Die Koordinaten (x, y, z) eines Punktes im Raume werden in folgender Reihenfolge festgelegt:

Der Abstand eines Punktes P von der

Kreuzrißebene, also die Strecke PP''' } heißt { x
Aufrißebene, „ „ „ PP'' } heißt { y
Grundrißebene, „ „ „ PP' } heißt { z.

Positive Richtungen sind (vgl. Fig. 16):

für die x nach rechts,
„ „ y „ vorn,
„ „ z „ oben;

z. B. liegt der Punkt (7, —4, —1) rechts hinten unten.

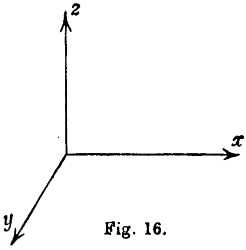

Fig. 16.

Die Kreuzrißebene und alles, was mit ihr zusammenhängt, wird nur selten benutzt.

Bei der Ausführung der Zeichnungen wird stets die vordere Grundrißebene um die Projektionsachse (d. h. um die Schnittgerade von Π_1 und Π_2) in die untere Aufrißebene hineingeklappt gedacht.

Für die Berücksichtigung der Sichtbarkeitsverhältnisse gilt die Verabredung, daß alle vorkommenden Flächen (einschließlich der Projektionsebenen) undurchsichtig gedacht werden. Die projizierenden Strahlen gelten als Sehstrahlen aus einem unendlich fernen Auge, das für den Grundriß über Π_1, für den Aufriß vor Π_2 zu denken ist. Sichtbares wird voll ausgezogen, Unsichtbares gestrichelt dargestellt.

§ 12. Grundaufgaben

Darstellung von Punkten

1. Beweise, daß Grundriß und Aufriß eines Punktes stets auf einer „Ordnungslinie" (d. h. auf einer Senkrechten zur Projektionsachse) liegen.

2. Gib der Reihe nach an, in welchen Quadranten oder Grenzebenen die Punkte A, B ... J in der Fig. 17 liegen.

3. Welcher Punkt der Fig. 17 liegt a) im 4. Quadranten, b) in der vorderen Horizontalebene, c) in der unteren Vertikalebene, d) auf der Projektionsachse?

4. Lies die Koordinaten der Punkte A ... J in Fig. 17 ab.

5. Zeichne der Reihe nach Punkte mit den Koordinaten
   a) (0, 5, 1), b) (3, 0, 5),
   c) (8, —3, —4),
   d) (1, 2, 0), e) (6, —7, 4),
   f) (4, 0, —3), g) (5, 4, —2),
   h) (2, —5, 0), i) (7, 0, 0);
   gib an, in welchen Quadranten oder Grenzebenen sie liegen, und beschreibe ihre Lage auch mit den Worten vorn, hinten, oben, unten.

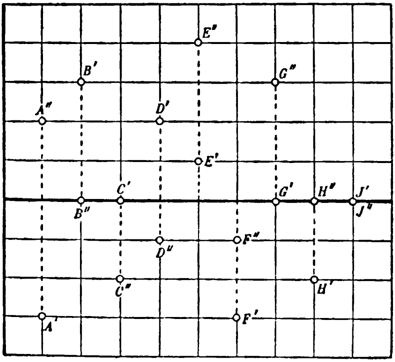

Fig. 17.

6. a) Wo liegen die Aufrisse aller Punkte der Horizontalebene? b) Wo liegen die Grundrisse aller Punkte der Vertikalebene?

7. Wo liegen die Punkte des Raumes, die von Π_1 und Π_2 gleichen Abstand haben?

8. Welche Quadranten halbiert die Ebene, für deren Punkte a) $y = z$, b) $y = -z$ ist?

9. Beschreibe die Lage der Risse aller Punkte a) der ersten, b) der zweiten Halbierungsebene (vgl. Aufg. 8).

Darstellung von Geraden

10. Von einer Geraden sind zwei Punkte A und B durch ihre Koordinaten gegeben:

	A	B		A	B
a)	(1, 3, −2)	(5, 2, −3),	b)	(2, 3, 0)	(6, −1, 4),
c)	(1, 2, −3)	(6, 4, 3),	d)	(2, −2, 1)	(5, −3, −1),
e)	(2, 3, −3)	(6, 2, −2),	f)	(1, −4, 2)	(7, −2, −3).

Zeichne die Risse der Geraden.

11. In welcher ausgezeichneten Ebene liegt die in Aufg. 10e genannte Gerade?

12. Eine Gerade ist durch zwei Punkte A, B gegeben:

	A	B		A	B
a)	(1, 4, 3)	(2, 2, 1),	b)	(2, 1, 1)	(5, 3, 3),
c)	(1, 3, 1)	(5, 1, 1),	d)	(2, 4, 1)	(6, 1, 4),
e)	(1, −6, 4)	(5, −1, 2),	f)	(1, 1, 3)	(5, −2, −1),
g)	(2, −1, −5)	(6, −4, −1),	h)	(3, −1, −2)	(7, −3, −6),
i)	(2, −5, −3)	(6, −1, −1),	k)	(2, 3, 2)	(7, −1, −4),
l)	(2, 6, −4)	(5, 3, −2),	m)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
n)	(6, 3, 1)	(1, 6, 3),	o)	(1, 6, 5)	(5, 3, 1),
p)	(8, −4, 2)	(2, 7, 6),	q)	(1, −5, 2)	(7, −1, −2).

Ermittele die Spuren der Geraden.

13. Welche Sonderlagen haben die in Aufg. 12o, h und l gegebenen Geraden? Zeichne andere Geraden in ähnlichen Sonderlagen.

14. Woran erkennt man a) eine Parallele zur Grundrißebene, b) eine Parallele zur Aufrißebene, c) eine Senkrechte zur Grundrißebene, d) eine Senkrechte zur Aufrißebene, e) eine Parallele zur Projektionsachse?

15. Wie liegen Grundriß und Aufriß einer Geraden, die die Projektionsachse senkrecht kreuzt?

16. Eine Gerade g ist durch ihre Spuren G_1 und G_2 gegeben:

	G_1	G_2		G_1	G_2
a)	(5, 3, 0)	(2, 0, 2),	b)	(1, 4, 0)	(6, 0, 2),
c)	(5, −3, 0)	(1, 0, −2),	d)	(2, −4, 0)	(7, 0, 3),
e)	(1, −3, 0)	(6, 0, −4),	f)	(1, −4, 0)	(5, 0, 1),
g)	(6, 3, 0)	(1, 0, −4),	h)	(2, 3, 0)	(7, 0, −2).

Man zeichne die Risse der Geraden g.

Darstellung ebener Flächenstücke

17. Ein Dreieck ABC ist durch die Koordinaten seiner Ecken gegeben. Man zeichne die Risse des Dreiecks.

	A	B	C
a)	(1, 6, 3)	(4, 2, 6)	(6, 4, 2),
b)	(0, 4, 4)	(2, 5, 6)	(5, 2, 3),
c)	(3, 1, 2)	(6, 3, 0)	(1, 4, −1),
d)	(7, 1, 2)	(4, −1, −1)	(2, 2, 1),
e)	(2, 4, 2)	(4, 3, 6)	(8, 1, 1);

wie liegt die Ebene dieses Dreiecks zu Π_1?

f)	(1, 2, 5)	(3, 5, 4)	(7, 1, 2);

wie liegt die Dreiecksebene zu Π_2?

g)	(2, 3, 3)	(4, 5, 5)	(7, 2, 2);

in welcher ausgezeichneten Ebene liegt das Dreieck?

h)	(1, −2, 2)	(3, −6, 6)	(7, −4, 4);

wie liegt die Ebene dieses Dreiecks zur Ebene des vorigen?

18. a)—h) Man denke sich für einen Augenblick die Dreiecke der Aufg. 17 ausgeschnitten aus einem Heftdeckel, der auf der Außenseite blau, auf der Innenseite weiß ist. Untersuche dann, ob im Grundriß und Aufriß gleiche oder verschiedene Farben sichtbar wären.

19. Sprich das Ergebnis der Aufg. 18 allgemein für jede ebene Figur aus und benutze dabei den Begriff „Umlaufssinn".

20. Man zeichne ein Vierflach $ABCD$ aus den Koordinaten seiner Ecken:

	A	B	C	D
a)	(1, 3, 4)	(3, 4, 1)	(4, 1, 3)	(2, 3, 2),
b)	(2, 4, 3)	(4, 1, 1)	(5, 6, 8)	(7, 2, 4),
c)	(2, 5, 5)	(4, 1, 0)	(6, 4, 6)	(7, 2, 2).

Welches ist die vorderste Ecke? Welches ist die oberste Kante? Erörtere die Sichtbarkeitsverhältnisse.

21. Ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge 3 cm ist darzustellen; die Dreiecksebene sei parallel Π_2, die unterste Ecke falle in den Punkt (1, 1, 2), und die durch diese Ecke gehende Dreieckshöhe stehe senkrecht zu Π_1.

22. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ebene senkrecht zu Π_1 steht und von dem eine Seite parallel **a)** zur Projektionsachse, **b)** zu Π_1 ist.

Die Wahl der anderen Bestimmungsstücke (Seitenlänge, Neigungswinkel der Dreiecksebene gegen Π_2, Lage der Spitze oder einer Grundecke usw.) ist vom Lehrer oder Schüler zu treffen, z. B. im Falle b): Die Spitze zeigt nach unten und hat die Koordinaten (5, 2, 1), die Seitenlänge beträgt 4 cm (Einheiten), die Dreiecksebene bildet mit Π_2 einen Winkel von 45^0.

23. Löse dieselbe Aufgabe wie Nr. 22, wobei Π_2 an die Stelle von Π_1 treten soll.

24. Zeichne ein Quadrat von vorgeschriebener Seitenlänge in verschiedenen Sonderlagen.

25. Von einem Kreise kennt man den Mittelpunkt $M \equiv (3, 3, 1)$ und den Radius $r = 2$ cm. Stelle den Kreis dar unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kreises **a)** parallel Π_1, **b)** parallel Π_2 ist.

26. Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Koordinaten dreier aufeinanderfolgender Ecken A, B, C (Zahlenbeispiele sind aus Aufg. 17 und 20 zu wählen). Man zeichne die Risse des Parallelogramms (Genauigkeitsprobe: Diagonalenschnittpunkt).

27. Man zeichne ein schiefes Parallelflach, von dem die Endpunkte dreier in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten AB, AC, AD gegeben sind (Maße beliebig).

28. Von einer schiefen vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein Parallelogramm ist, kennt man drei Ecken der Grundfläche und die Spitze. Man zeichne die Risse der Pyramide (Maße beliebig).

29. Von einem schiefen dreiseitigen Prisma kennt man die Grundfläche ABC und den der Ecke A entsprechenden Punkt D der Deckfläche. Man zeichne die Risse des Prismas.

Darstellung unbegrenzter Ebenen

30. Was versteht man unter den Spuren einer Ebene?
Benutze den Satz: „Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen ihre Spuren in den gleichnamigen Spuren der Ebene“ zur Lösung der folgenden Aufgaben 31 bis 34:

31. Eine Ebene ist durch drei Punkte A, B, C gegeben; man zeichne ihre Spuren.

	A	B	C		A	B	C
a)	(4, 0, 2)	(7, 1, 5)	(9, 7, 0),	b)	(3, 7, 6)	(7, 2, 0)	(9, 5, 2),
c)	(1, 6, 3)	(6, 3, 1)	(3, 6, 1)	d)	(3, 1, 3)	6, 2, 6)	(8, 7, 1),
e)	(2, 1, 7)	(9, 3, 2)	(4, 6, 1),	f)	(1, 2, 4)	(3, 3, 6)	(6, 1, 2).

(Deute das Ergebnis der Aufgabe f.)

Andere Zahlenbeispiele können aus Aufgabe 17 entnommen werden.

32. Welche Genauigkeitsprobe steht bei Aufgabe 31 zur Verfügung?

Andeutung: Konstruktion mittels zweier Seiten des Dreiecks ABC, Prüfung an den Spuren der dritten.

33. Wie kann man mittels desselben Gedankenganges wie in Aufg. 32 die Spuren der Ebene auch dann noch finden, wenn einige Geradenspuren nicht mehr auf das Zeichenblatt fallen?

34. Ein Vierflach hat die Ecken $A \equiv (5, 5, 2)$, $B \equiv (8, 9, 9)$, $C \equiv (10, 3, 9)$, $D \equiv (11, 6, 5)$. Man ermittele die Horizontalspuren der Flächen.

Einfachste Aufgaben über die wahre Größe von Strecken und Winkeln

35. Beweise: Die wahre Größe einer Strecke ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Grundriß der Strecke und dessen andere Kathete der Unterschied der Höhenkoten ihrer Endpunkte ist.

36. Sprich denselben Satz für den Aufriß der Strecke und die Tiefenabstände der Endpunkte aus.

37. Eine Strecke AB ist durch ihre Endpunkte $A \equiv (2, 1, 2)$, $B \equiv (7, 3, 5)$ gegeben. Bestimme die wahre Länge der Strecke durch Umlegen des Trapezes a) $AA'B'B$ um $A'B'$ in die Horizontalebene, b) $AA''B''B$ um $A''B''$ in die Vertikalebene.

38. Wie lassen sich diese Konstruktionen (Aufg. 37) mittels der Sätze in Nr. 35 und 36 auf kleinerem Raum ausführen?

39. Beweise: Alles, was parallel zu einer Rißebene liegt, bildet sich auf dieser in wahrer Größe ab.

40. Drehe das Trapez $AA'B'B$ (siehe Aufg. 37) um AA'. Welchen Weg beschreibt der Punkt B im Raum? Wie bildet sich dieser Weg ab a) im Grundriß, b) im Aufriß?

41. Drehe dasselbe Trapez $AA'B'B$ um AA' oder BB' so lange, bis es parallel zur Aufrißebene liegt. a) Beschreibe Lage und Länge des Grundrisses. b) Bestimme nach Aufg. 39 die wahre Größe der Strecke AB.

42. Bestimme die wahre Länge von AB durch Drehen des Trapezes $AA''B''B$ um AA'' oder BB'', bis es parallel zur Grundrißebene wird.

43. Inwiefern sind die Konstruktionen in Aufg. 41 und 42 zeichnerisch empfehlenswerter als die Konstruktionen in Aufg. 37 und 38, die doch auf denselben Sätzen beruhen?

44. Durch die Konstruktionen in Aufg. 37 und 38 sind die Neigungswinkel der Strecke AB gegen die beiden Rißebenen (kurz: die „Tafelneigungen" der Strecke AB) ohne weiteres mitbestimmt. Wo liegen diese Winkel in der Zeichnung?

45. Lies die Tafelneigungen von AB auch aus Aufg. 41 und 42 ab.

46. Bestimme die wahre Länge und die Tafelneigungen der Strecke PQ, wenn gegeben sind:

	P	Q		P	Q
a)	(2, 2, 1)	(6, 4, 4),	b)	(1, 3, 1)	(5, 1 5),
c)	(2, −4, 2)	(6, −1, 4),	d)	(1, 1, 1)	(5, −2, 2).

47. a)—q) Löse dieselbe Aufgabe für eine Strecke AB, deren Endpunkte die in Aufg. 12 angegebenen Koordinaten haben.

48. Das von den Rißebenen begrenzte Stück einer Geraden (also die Strecke zwischen den Spuren) heiße das „Hauptstück" der Geraden. — Bestimme die wahre Länge des Hauptstücks der in Aufg. 16 gegebenen Geraden und die Tafelneigungen der Geraden.

49. In welchen Sonderlagen der Geraden wird das Hauptstück unendlich groß?

50. Wie ermittelt man das Hauptstück einer durch zwei Punkte A, B gegebenen Geraden, wenn diese die Projektionsachse senkrecht kreuzt? Zahlenbeispiel: $A \equiv (2, 1, 4)$, $B \equiv (2, 3, 1)$. Bilde andere Zahlenbeispiele für solche Lagen und bestimme in jedem einzelnen Falle die wahre Größe des Hauptstücks, die Lage der Spuren und die Tafelneigungen der Geraden.

51. a) Gib an, wie man die in Aufg. 37, 38, 41 und 42 ausgeführten Konstruktionen benutzen kann zur Lösung der Aufgabe: Auf einer durch ihre Risse gegebenen Geraden von einem ihrer Punkte aus eine Strecke von gegebener Länge l abzutragen. b) Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe? c) Bilde Zahlenbeispiele (etwa in Anlehnung an Aufg. 12 oder 17) und erörtere jedesmal die Zweckmäßigkeit der Lösungsart (z. B. ob Umlegung oder Drehung, ob Grundrißebene oder Aufrißebene bevorzugt werden soll usw.). d) Zeige, welche Abänderungen die Konstruktionen erleiden, wenn die Gerade eine Sonderlage hat.

52. Zwei sich schneidende Geraden g und h sind durch ihren Schnittpunkt $S \equiv (5, 4, 5)$ und durch ihre Horizontalspuren $G_1 \equiv (2, 3, 0)$ und $H_1 \equiv (9, 1, 0)$ gegeben. Lege das Dreieck G_1SH_1 um G_1H_1 in die Horizontalebene um. Welchen Weg beschreibt der Punkt S? Wie sieht der Grundriß dieses Weges aus? Wie ermittelt man den wahren Abstand des Punktes S von G_1H_1? Bestimme auf diese Weise die wahre Größe des Winkels zwischen g und h.

53. Ermittle auf dieselbe Weise die wahre Größe der Winkel des Dreiecks ABC in Aufg. 17.

Andeutung: Wenn die Spuren der Dreiecksseiten selbst nicht zugänglich sind, so legt man durch einen beliebig, aber geschickt gewählten Punkt des Raumes Parallelen zu diesen Dreiecksseiten so, daß die Spuren dieser Hilfsparallelen (und zwar je nach den Lageverhältnissen entweder die Horizontalspuren oder die Vertikalspuren) noch in das Zeichenblatt fallen.

54. a)—c) Ermittle ebenso die wahre Größe der Winkel, die je zwei Kanten des Vierflachs $ABCD$ in Aufg. 20 miteinander bilden.

§ 13. Gegenseitige Lage der Grundgebilde

Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen

1. Woran erkennt man, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?

2. Durch einen gegebenen Punkt ist eine beliebige Gerade zu legen, die eine gegebene Gerade schneidet.

3. Durch einen gegebenen Punkt soll a) parallel Π_1, b) parallel Π_2 eine Gerade gelegt werden, die eine gegebene Gerade g schneidet. (Zahlenbeispiele sind vom Schüler selbst zu wählen.)

4. Beweise: Zwei Geraden schneiden oder kreuzen sich, je nachdem die Schnittpunkte gleichnamiger Risse auf einer Ordnungslinie liegen oder nicht. — Erleidet der Satz eine Ausnahme, wenn beide Geraden die Projektionsachse senkrecht kreuzen?

5. Zeichne zwei beliebige, windschiefe Geraden g, h, und gib an, welche der beiden Geraden a) oben, b) vorn gelegen ist.

Andeutung zu a): Es gibt einen und nur einen vertikalen Strahl, der sowohl g als auch h schneidet; es ist der Strahl, dessen Grundriß der Schnitt von g' und h' ist. (Wie sieht der Aufriß dieses Strahles aus?) Man blicke längs dieses Strahles aus einem weit über Π_1 gelegenen Punkte; der Aufriß lehrt dann, auf welche Gerade man zuerst stößt (m. a. W. welche Gerade oben gelegen, also beim Grundriß als sichtbar zu zeichnen ist). Die Sichtbarkeitsverhältnisse kann man durch passende Unterbrechung des Linienzuges, wie in Fig. 18, andeuten.

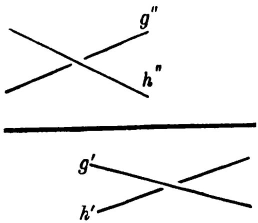

Fig. 18.

6. In Fig. 18 ist die Gerade g oben und hinten gelegen; entwirf drei andere Figuren, in denen g

a) oben und vorn, b) unten und hinten,

c) unten und vorn liegt.

7. Untersuche, ob die Geraden AB und PQ

	A	B	P	Q
a)	(1, 3, 3)	(7, 1, 2)	(1, 2, 1)	(7, 4, 4),
b)	(1, 4, 4)	(7, 1, 1)	(1, −1, 2)	(7, 2, 3),
c)	(1, 4, 5)	(7, 0, 1)	(1, 1, 2)	(7, 3, 4)

sich schneiden oder windschief sind. Gib im Falle der windschiefen Lage die Sichtbarkeitsverhältnisse an.

8. Löse dieselbe Aufgabe für je zwei der in § 12, Aufg. 12 gegebenen Geraden.
Beweise die Sätze:

9. Ist eine Ebene senkrecht zu Π_1 (Π_2), so ist ihre Vertikal-(Horizontal-)Spur senkrecht zur Projektionsachse.

10. Untersuche die Umkehrung des vorigen Satzes (Nr. 9).

11. Der Satz in Nr. 9 gilt auch noch, wenn man das Wort „senkrecht" beidemal durch „parallel" ersetzt.

12. Untersuche, ob auch hier die Umkehrung gilt.

13. Ist eine Ebene parallel zur Projektionsachse, so sind auch ihre Spuren parallel zur Projektionsachse.

14. Sprich die Umkehrung des vorigen Satzes (Nr. 13) aus und beweise sie.

15. Sind zwei Ebenen parallel, so sind auch ihre gleichnamigen Spuren parallel.

16. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen die Spuren der Geraden in den gleichnamigen Spuren der Ebene.

17. Liegt eine Gerade in einer Ebene und parallel einer Projektionsebene, so ist sie parallel der gleichnamigen Spur der Ebene („**Spurparallele**").

Die Aufgaben 18 bis 23 sind unter verschiedenen Annahmen über die Lagen der gegebenen Elemente zu lösen; die bei einigen von ihnen angefügten Zahlenbeispiele sollen nur als erster Anhalt dienen.

18. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren und a) der Grundriß, b) der Aufriß einer in der Ebene gelegenen Geraden. Man sucht a) den Aufriß, b) den Grundriß der Geraden.

19. Gegeben sind die Spuren einer Ebene und a) der Grundriß, b) der Aufriß eines in ihr gelegenen Punktes. Gesucht ist a) der Aufriß, b) der Grundriß des Punktes. — Zahlenbeispiele: Die Spuren der Ebene gehen von

$$\begin{matrix}\text{a)}\\ \text{b)}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}(0,\ 0,\ 0)\\(7,\ 0,\ 0)\end{matrix}\right\}\ \text{nach}\ \left\{\begin{matrix}(5,\ 3,\ 0)\\(1,\ 3,\ 0)\end{matrix}\right\}\ \text{und}\ \left\{\begin{matrix}(6,\ 0,\ 4)\\(2,\ 0,\ 4)\end{matrix}\right\};\ \left\{\ P\equiv\begin{matrix}(4,\ 1,\ ?)\\(3,\ ?,\ 2)\end{matrix}\right\}.$$

20. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h durch ihre Risse. Gesucht werden die Spuren der durch sie bestimmten Ebene, wenn a) g

und h beliebig liegen (s. auch § 12, Aufg. 17 und 20), **b)** g parallel Π_1 ist und h beliebig liegt, **c)** $g \parallel \Pi_1$ und $h \parallel \Pi_2$ ist, **d)** g und h parallel zur Projektionsachse sind.

21. Gegeben sind eine Gerade g und außerhalb von ihr ein Punkt P; gesucht werden die Spuren der durch g und P bestimmten Ebene.

22. Gegeben sind ein Punkt P durch seine Koordinaten, ferner zwei windschiefe Geraden g und h durch je ein Punktepaar A, B und C, D. Man lege durch P eine Ebene parallel zu den Geraden g, h und zeichne die Spuren der Ebene.

	P	A	B	C	D
a)	(6, 1, 3)	(4, 4, −1)	(8, 3, 4)	(5, 2, 6)	(8, 6, 3),
b)	(8, 2, 2)	(9, 5, 3)	(6, 2, 7)	(6, 3, 4)	(10, −2, 5),
c)	(7, 4, 3)	(4, 6, 5)	(7, 7, 8)	(7, 1, 7)	(9, 6, 2),
d)	(8, 3, 3)	(2, −6, 8)	(5, 4, 1)	(4, 9, 3)	(7, 6, 9),
e)	(6, 2, 3)	(6, 6, 9)	(9, 9, 2)	(6, 4 1)	(11, −1, 5).

23. Zwei windschiefe Geraden g und h sind durch je ein Punktepaar A, B und C, D gegeben. Durch jede dieser Geraden wird eine Ebene parallel zur anderen gelegt; die Spuren dieser Ebenen sollen gezeichnet werden.

	A	B	C	D
a)	(5, 2, 1)	(9, 1, 6)	(6, 1, 5)	(9, 5, 2),
b)	(6, 2, 5)	(9, 5, 1)	(10, 1, 2)	(6, 6, 1).

Schnitte von Ebenen und Geraden

24. Erkläre die Begriffe horizontalprojizierende Ebene und vertikalprojizierende Ebene.

25. Eine Ebene ist durch zwei sich schneidende Geraden g und h gegeben. Von einer Geraden l, die in der Ebene (g, h) liegen soll, kennt man **a)** den Grundriß, **b)** den Aufriß. Man ermittle mittels einer **a)** horizontalprojizierenden Ebene, **b)** vertikalprojizierenden Ebene **a)** den Aufriß, **b)** den Grundriß von l.

26. Löse dieselbe Aufgabe, wenn die Ebene durch ihre Spuren gegeben ist.

27. Von einem Punkt P, der in einer Ebene (g, h) liegt, kennt man einen Riß; man ermittle den anderen.

28. Löse dieselbe Aufgabe, wenn die Ebene durch ihre Spuren gegeben ist, mittels Spurparallelen. Wie kann man die Genauigkeit der Zeichnung prüfen?

29. Von einem ebenen Vieleck kennt man den einen Riß vollständig, von dem anderen drei Ecken; die bei diesem Riß noch fehlenden Ecken sind zu zeichnen. (Beispiel: Fünfeck $ABCDE$ aus $A \equiv (1, 4, 2)$, $B \equiv (4, 5, 1)$, $C \equiv (7, 3, ?)$, $D \equiv (5, 1, 4)$, $E \equiv (2, 2, ?)$.

Andeutung: Diagonalenschnittpunkte, Anwendung von Nr. 4.

30. Ein Dreieck ABC ist durch die Koordinaten seiner Ecken bestimmt, ferner ist eine Gerade g durch zwei Punkte P und Q gegeben. Man ermittle den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene des Dreiecks ABC, und zwar mittels einer **a)** horizontalprojizierenden Ebene, **b)** vertikalprojizierenden Ebene. — Die Sichtbarkeitsverhältnisse sind sorgfältig zu beachten. Welche Genauigkeitsprobe steht zur Verfügung?

Zahlenbeispiele:

	A	B	C	P	Q
c)	(1, 4, 4)	(6, 2, 3)	(7, 6, 8)	(2, 8, 1)	(5, 1, 8),
d)	(2, 1, 3)	(4, 5, 6)	(6 2, 4)	(2, 5, 2)	(7, 1, 7),
e)	(2, 3, 4)	(5, 5, 2)	(7, 2, 7)	(2, 6, 6)	(7, 1, 1),
f)	(1, 4, 4)	(5, 7, 6)	(7, 2, 1)	(6, 1, 7)	(3, 8, 1).

Weitere Beispiele für diese grundlegende Aufgabe sind unter Berücksichtigung anderer Lageverhältnisse zu bilden, etwa in Anlehnung an die Zahlen in § 12, Aufg. 17.

31. Eine Ebene ist durch ihre Spuren, eine Gerade PQ durch ihre Risse gegeben. Man ermittle den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene mittels einer **a)** horizontalprojizierenden Ebene, **b)** vertikalprojizierenden Ebene. — Prüfe die Genauigkeit der Zeichnung mittels Spurparallelen.

Zahlenbeispiele:

Die Spuren der Ebene gehen von

$$\begin{matrix}\textbf{a)}\\ \textbf{b)}\end{matrix} \begin{Bmatrix}(0,\ 0,\ 0)\\ (9,\ 0,\ 0)\end{Bmatrix} \text{ nach } \begin{Bmatrix}(5,\ 0,\ 4)\\ (2,\ 0,\ 6)\end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix}(6,\ 2,\ 0)\\ (1,\ 3,\ 0)\end{Bmatrix};$$

$$P \equiv \begin{Bmatrix}(2,\ 3,\ 3)\\ (4,\ 1,\ 1)\end{Bmatrix}, \quad Q \equiv \begin{Bmatrix}(4,\ -2,\ -1)\\ (8,\ \ 3,\ \ 5)\end{Bmatrix}.$$

Andere Beispiele werden dem Schüler überlassen, etwa die Untersuchung des Falles, daß die beiden Spuren der gegebenen Ebene in dieselbe Gerade fallen u. ä.

32. Durch einen Punkt P ist eine Gerade zu legen, die zwei windschiefe Geraden g und h schneidet.

33. Parallel einer Geraden l ist eine Gerade zu legen, die zwei windschiefe Geraden g und h schneidet. — Untersuche, inwiefern diese Aufgabe nur ein Sonderfall der vorigen ist.

34. Zwei Ebenen sind durch **a)** zwei Paare sich schneidender Geraden g, h und l, m, **b)** durch ihre Spuren e_1, e_2 und f_1, f_2 gegeben. Man zeichne die Risse der Schnittgeraden.

Diese Grundaufgabe ist vom Schüler unter den verschiedensten Annahmen über die Lage der gegebenen Elemente zu lösen, z. B. wären zu b) folgende Sonderfälle zu behandeln: Die Horizontalspuren der Ebenen sind parallel. Die Schnittgerade der Ebenen schneidet die Achse. Die Ebenen sind parallel der Achse. Die eine Ebene enthält die Achse.

35. Zwei Ebenen E und Φ sind durch ihre Spuren e_1, e_2 und f_1, f_2 gegeben, doch so, daß die Spurenschnittpunkte e_1, f_1 und e_2, f_2 unzugänglich sind. Wie kann man dennoch die Schnittgerade von E und Φ ermitteln? — Zahlenbeispiel:

e_1, e_2 gehen von (0, 0, 0) nach (3, 2, 0) und (2, 0, 5),
f_1, f_2 „ „ (7, 0, 0) „ (5, 2, 0) „ (4, 0, 5);

die Zeichnung ist auf einem Blatte von etwa 7×7 Einheiten auszuführen.

Andeutung: Eine Hilfsebene parallel Π_2 im Abstande 1, eine andere Hilfsebene parallel Π_1 im Abstande 2 oder 3.

36. Zwei Dreiecke ABC und PQR sind durch die Koordinaten ihrer Ecken gegeben. Man zeichne die Schnittlinie der beiden Dreiecksebenen. —

A	B	C	P	Q	R
(1, 1, 2)	(2, 3, 4)	(4, 2, 1)	(3, 1, 5)	(4, 3, 2)	(1, 2, 1).

Andere Zahlenbeispiele sind in Anlehnung an Aufg. 30 zu bilden, etwa aus 30f durch Hinzunahme eines Punktes $R \equiv (2, 2, 6)$ oder auch $R \equiv (8, 5, 4)$. (Bei diesen beiden Beispielen ergeben sich ganz verschiedene Lageverhältnisse, das eine Mal eine volle „Durchstoßung" eines Dreiecks durch das andere, das zweite Mal eine „Überschneidung".)

37. Der Schnitt zweier Parallelogramme $ABCD$ und $LMNP$ ist zu zeichnen.

	A	B	C	D	L	M	N	P
a)	(1, 2, 3)	(2, 5, 1)	(7, 4, 3)	(6, 1, 5)	(1, 5, 4)	(5, 0, 1)	(7, 1, 2)	(3, 6, 5),
b)	(3, 5, 4)	(7, 6, 5)	(8, 2, 1)	(4, 1, 0)	(1, 2, 2)	(2, 5, 0)	(6, 4, 2)	(5, 1, 4).

Schätze zuerst nach Augenmaß, welche der beiden Aufgaben auf eine volle Durchstoßung und welche auf eine Überschneidung führt.

38. Zeichne den Schnitt zweier Dreiecke und eines Fünfecks nach dem Vorbilde von Fig. 19. Maßannahmen sind dem Schüler freigestellt.

Andeutung: Nimm vom Fünfeck zunächst nach Augenmaß einen Riß vollständig und von dem anderen drei Punkte willkürlich an; dann weiter nach Aufg. 29.

39. Beweise: Bei jedem ebenen Vieleck liegen die Schnittpunkte von Grundriß und Aufriß der einzelnen Vielecksseiten in einer Geraden; die Risse jedes Vielecks sind also „perspektiv-affin" zueinander, die genannte Gerade ist „Affinitätsachse".[1])

Andeutung: Beachte die Fragen in § 12, Aufg. 8.

---

1) Vgl. § 14, Aufg. 7.

40. Beweise: Ein rechter Winkel, von dem ein Schenkel einer Projektionsebene parallel läuft, projiziert sich auf diese wieder als Rechter. — Umkehrung.

41. Beweise mittels Nr. 40 den Satz: Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so stehen die Risse der Geraden auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht.

42. Von einem Punkte P ist auf eine Ebene das Lot zu fällen, wenn die Ebene a) durch ihre Spuren e_1, e_2, b) durch drei Punkte A, B, C gegeben ist. — Auch die wahre Länge des Lotes ist zu bestimmen. —

Zahlenbeispiel:

a) $\left\{\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}\right\}$ geht durch (0, 0, 0) und $\left\{\begin{matrix} (6,\ 2,\ 0) \\ (5,\ 0,\ 4) \end{matrix}\right\}$; $P \equiv (2,\ 3,\ 3)$.

b) $A \equiv (3,\ 1,\ 1)$, $B \equiv (7,\ 3,\ 2)$, $C \equiv (4,\ 5,\ 4)$; $P \equiv (5,\ 1,\ 5)$.

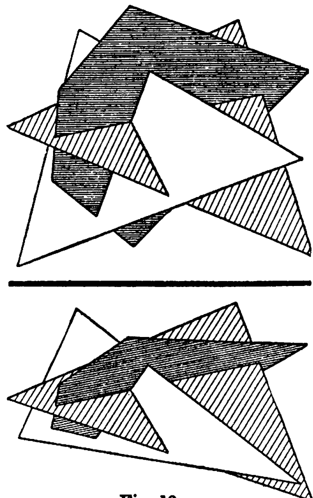

Fig. 19.

43. Warum kann man den Satz in Aufg. 41 zur Lösung der Aufg. 42b auch dann noch benutzen, wenn die Spuren der Ebene unzugänglich sind? — Zahlenbeispiel:

$$A \equiv (2,\ 3,\ 2),\quad B \equiv (6,\ 2,\ 5),\quad C \equiv (8,\ 7,\ 1);\quad P \equiv (3,\ 6,\ 5).$$

Andeutung: Spurparallelen.

44. Errichte nach der Andeutung in Aufg. 43 auf der Ebene jedes der in § 12, Aufg. 17 gegebenen Dreiecke die Senkrechte im Schwerpunkte.

Andeutung: Zeige zunächst, daß die Risse des Dreiecksschwerpunktes die Schwerpunkte der Dreiecksrisse sind.

45. Auf der Ebene des Dreiecks ABC soll im Schwerpunkt die Senkrechte errichtet und auf dieser eine Strecke von gegebener Länge vom Schwerpunkt aus nach beiden Seiten hin abgetragen werden. — Zahlenbeispiel:

$A \equiv (3, 2, 3)$, $B \equiv (6, 3, 7)$, $C \equiv (8, 7, 2)$; Länge der Strecke: 4 Einheiten.

Andere Zahlenbeispiele wähle der Schüler aus § 12, Aufg. 17 oder § 13, Aufg. 30.

46. a) Durch einen Punkt P ist eine Ebene senkrecht zu einer Geraden g zu legen. b) Von einem Punkt P ist auf eine Gerade g das Lot zu fällen.

Andeutung: Durch P eine Ebene $\perp g$.

c) Der Abstand zweier parallelen, durch ihre Spuren gegebenen Ebenen ist zu ermitteln.

47. a) Eine Ebene E ist durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben. Man ermittle die Neigungswinkel von E gegen die beiden Rißebenen („Tafelneigungen"). Zahlenbeispiele aus Aufg. 19, 31 und 35. b) Wie kann man die Tafelneigungen einer ebenen Figur auch dann noch ermitteln, wenn die Spuren unzugänglich sind? Zahlenbeispiele wähle der Schüler aus § 12, Aufg. 17.

48. a) Durch einen gegebenen Punkt sind in einer gegebenen Ebene die Geraden zu ziehen, die mit Π_1 den gegebenen Winkel α bilden. (Anzahl der Lösungen?) b) Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene zu legen, die mit Π_1 den gegebenen Winkel α bildet. (Anzahl der Lösungen?)

49. In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene liegt ein Dreieck, von dem man die Grundrisse seiner Ecken kennt. Zu ermitteln sind a) der Aufriß des Dreiecks (Spurparallelen), b) die wahre Größe des Dreiecks (durch Umklappung um eine der Ebenenspuren).

50. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 49 für ein ebenes Vieleck.

51. (Planimetrische Hilfsaufgabe zu Nr. 52.) In Fig. 20 ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M gezeichnet, in diesem ein fester Durchmesser AB, ein dazu senkrechter CD, ein beweglicher Kreispunkt X, ferner das umschriebene Quadrat $EFGH$, dessen Seitenmitten A, B, C, D sind. AX und BX schneiden GD und MD in P und Q. — a) Beweise, daß $PQ \parallel GM$ ist (Kongruenz, dann Strahlensatz). b) Bilde die ganze Figur durch Parallelprojektion (schief oder orthogonal) auf eine Ebene ab; was wird aus dem Kreise und dem Quadrat $EFGH$? c) Zeige daraus, wie man eine Ellipse, von der man ein Paar konjugierte Durchmesser oder ein umschriebenes Parallelogramm mit konjugierten Seitenrichtungen kennt, punktweise allein mit Hilfe von Schiebdreiecken konstruieren kann.

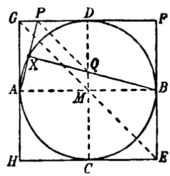

Fig. 20.

52. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 49 für einen Kreis unter Anwendung von Aufg. 51c.

53. Beweise, daß der Riß einer ebenen Figur und ihre Umklappung[1]) perspektiv-affin sind in bezug auf die Umklappungsspur als Affinitätsachse. (Vgl. auch Aufg. 39.)

54. In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene liegt ein Vieleck, dessen Umklappung der Lage und Größe nach gegeben ist. Man zeichne unter Benutzung von Aufg. 53 die Risse des Vielecks.

Zahlreiche Genauigkeitsproben.

55. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 54 für einen Kreis unter Anwendung von Aufg. 51c.

---

1) Die aus einer ebenen Figur durch Umklappung in eine der Rißebenen entstandene neue Figur heißt kurz „die Umklappung" der ersten Figur.

56. Von einem Dreieck kennt man die Koordinaten seiner Ecken $A \equiv (7, 1, 2)$, $B \equiv (10, 3, 0)$, $C \equiv (12, 1, 5)$. Man zeichne den a) Höhenschnittpunkt, b) Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, c) Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises (alles durch Umklappung).

57. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist zu bestimmen, die a) durch zwei sich schneidende Geraden, b) durch ihre Spuren gegeben ist. — Zahlenbeispiele aus Aufg. 30 und 31.

Andeutung: Anwendung von Aufg. 42, dann Umklappung oder anderweitige Bestimmung der wahren Größe.

58. Der Neigungswinkel zweier Ebenen gegeneinander ist zu bestimmen. — Zahlenbeispiele nimm etwa aus Aufg. 35 bis 37. Dann auch Sonderlagen.

59. Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden ist zu ermitteln. (Anwendung von Aufg. 23 und 46c.)

Einführung neuer Projektionsebenen

60. Führt man an Stelle einer Rißebene, z. B. an Stelle von Π_1, eine neue Ebene Π_3 ein, die auf Π_2 senkrecht steht, während sie gegen Π_1 unter beliebigem Winkel geneigt ist, so gilt für jeden Punkt des Raumes: Der Abstand des neuen Risses von der neuen Projektionsachse ist gleich dem Abstande des wegfallenden Risses von der alten Achse. — Beweise das.

61. Führe in Fig. 17 eine neue Rißebene $\perp \Pi_2$ so ein, daß die neue Achse durch die Punkte (3, 0, 5) und (6, 0, 3) geht, und übertrage die Grundrisse der Punkte $A, \ldots J$ in die neue Ebene.

62. Zeichne zunächst einen auf Π_1 stehenden Würfel und projiziere ihn dann auf eine neue Ebene $\perp \Pi_2$.

63. Stelle (ebenso wie in Aufg. 62) die anderen regelmäßigen Körper „über Eck" dar.

64. (Hilfsaufgabe zu Nr. 65 und 66.) Von einem Punkte P ist auf eine Gerade g das Lot zu fällen, wenn g parallel zur a) Horizontalebene, b) Vertikalebene ist. (Anwendung von Aufg. 40.)

65. Von einem Punkte P ist auf eine beliebige Gerade g das Lot zu fällen.

Andeutung: Neue Rißebene parallel g.

66. Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden g und h ist zu ermitteln.

Andeutung: Zunächst erste neue Rißebene parallel g oder h, dann zweite neue Rißebene senkrecht zur neuen Lage von g oder h.

67. Vergleiche die Konstruktionen in Nr. 59 und 66 hinsichtlich a) räumlicher Anschaulichkeit, b) zeichnerischer Ausführbarkeit, c) Genauigkeit.

68. Löse die Aufg. 58 mittels neuer Rißebenen.

69. Inwiefern kann man die übliche Lösung der Aufg. 47 als eine Anwendung des in Aufg. 60 beschriebenen Verfahrens ansehen?

Andere Anwendungen in § 14, Aufg. 50, 52 und 60.

70. Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E ist zu ermitteln (vgl. Aufg. 42).

Andeutung: Neue Projektionsebene durch $P \perp \mathsf{E}$ und $\perp \Pi_1$.

71. Die Entfernung eines Punktes P von einer Geraden g ist zu ermitteln (vgl. Aufg. 46).

Andeutung: Neue Rißebene durch $g \perp \Pi_1$ oder $\perp \Pi_2$.

§ 14. Schneidende und berührende Ebenen bei ebenflächigen und runden Körpern

Schnitte von Körpern. Abwicklungen und Durchdringungen

1. Der Schnitt einer auf Π_1 stehenden, durch Grundfläche und Spitze gegebenen schiefen Pyramide mit einer auf Π_2 senkrechten, durch ihre Spur e_2 gegebenen Ebene E ist zu ermitteln. — Gib zunächst an, wie e_2 zum Aufriß der Pyramide liegen muß, damit die Aufgabe überhaupt lösbar ist. Ermittle die Risse der Schnittfigur a) durch die Schnitte der Pyramidenebenen mit E („Flächenverfahren"), b) durch die Schnitte der Pyramidenkanten mit E („Kantenverfahren"). c) Zeichne die wahre Größe der Schnittfigur. d) Stelle die Abwicklung (das Netz) der beiden Pyramidenteile her.

2. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 1 für ein auf Π_1 stehendes schiefes Prisma, von dem man die Grundfläche sowie Richtung und Länge seiner Seitenkanten kennt.

3. Ermittle den Schnitt einer auf Π_1 stehenden schiefen Pyramide mit einer Geraden g, a) indem du zunächst nach Augenmaß, dann durch genaues Konstruieren feststellst, in welche Pyramidenflächen die Gerade g eindringt, b) mittels einer Hilfsgeraden parallel g durch die Spitze der Pyramide (oder m. a. W. mittels einer Hilfsebene durch g und die Pyramidenspitze). c) Wäge die Vorzüge und Nachteile jedes der beiden Verfahren gegeneinander ab.

4. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 3 für ein schiefes Prisma. — Wie liegt in diesem Falle die bei Aufg. 3b genannte Hilfsebene, und wo ist jetzt die „Pyramidenspitze" zu denken?

5. Ermittle a) den Schnitt einer schiefen Pyramide mit einer beliebigen, durch ihre Spuren e_1, e_2 gegebenen Ebene E, b) die wahre Größe der Schnittfigur, c) die Abwicklung der beiden Pyramidenteile.

6. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 5 für ein schiefes Prisma. (Für c: Hilfsebene senkrecht zu den Seitenkanten des Prismas.)

7. Erläutere an Pyramidenschnitten und Prismenschnitten die Begriffe „perspektiv-kollinear“ und „perspektiv-affin“ (vgl. auch § 13, Aufg. 39). Für welche Lage des Kollineationszentrums geht die Kollineation in die Affinität über?

8. Löse die Aufgaben 5 und 6 durch Einführung einer neuen Rißebene $\perp$ E und $\perp \Pi_1$ oder Π_2.

9.[1]) Zeichne die Durchdringung zweier dreiseitiger Prismen nach den in Fig. 21 angegebenen Größen- und Lageverhältnissen.

10. Die Durchdringung eines dreikantigen Prismas mit einem vierkantigen Prisma ist auf Grund der aus Fig. 22 abzulesenden Angaben zu zeichnen.

11. Ermittle die Durchdringung einer dreiseitigen Pyramide mit einem dreiseitigen Prisma nach den Angaben in Fig. 23.

12. Zeichne die Durchdringung eines dreiseitigen Prismas mit einem dreiseitigen Pyramidenstumpf nach Fig. 24.

13. Die Durchdringung einer vierseitigen und einer fünfseitigen Pyramide ist nach den in Fig. 25 dargestellten Lageverhältnissen zu ermitteln. (Hilfsmittel: Ebenenbüschel durch die Spitzen der beiden Pyramiden.)

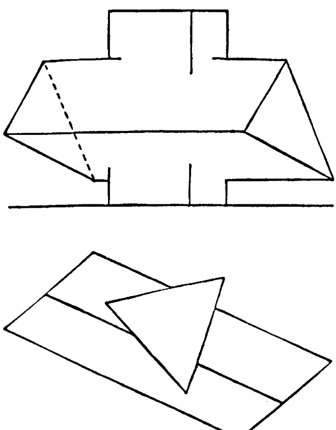

Fig. 21.

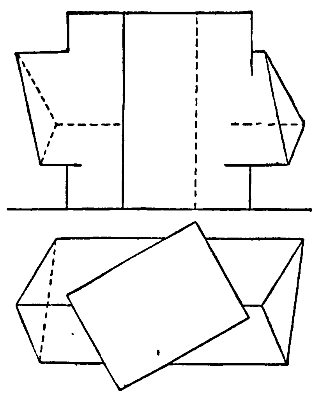

Fig. 22.

[1]) Der Schüler stelle bei den Aufgaben 9 bis 15 zwei Übersichtstäfelchen her, aus denen hervorgeht, durch welche Kanten und Flächen der durchdringenden Körper jede einzelne Ecke der Durchdringungsfigur erzeugt wird. Dann ist leicht zu erkennen, in welcher Reihenfolge die Ecken der Durchdringungsfigur zu verbinden sind.

14. Die Durchdringung einer quadratischen Pyramide mit einer regelmäßig achtseitigen Pyramide ist zu ermitteln. (Maße etwa aus Fig. 26.)

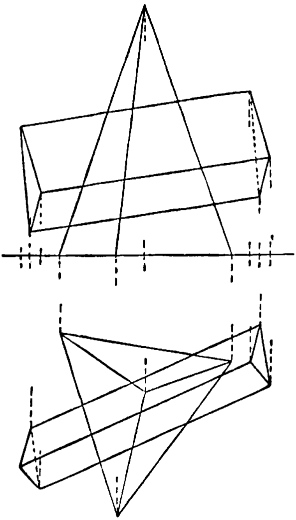

Fig. 23.

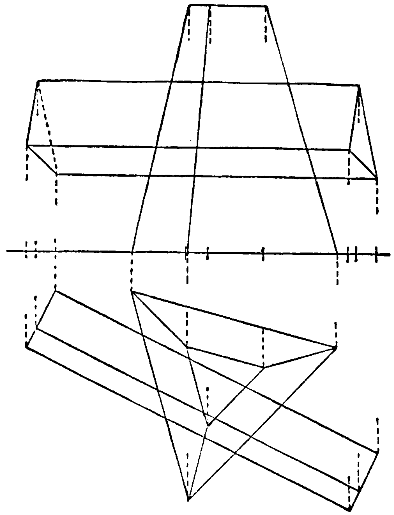

Fig. 24.

15. Zeichne das in Fig. 26 abgebildete Denkmal auf Grund der am Rande gemachten Maßangaben.

Andere Aufgaben, wie einfache Dachausmittlungen u. dgl., siehe § 15, Nr. 36ff.

Schattenkonstruktionen

16. Erkläre die Begriffe Zentralbeleuchtung, Parallelbeleuchtung, Eigenschatten, Schlagschatten.

17. Bei Anfertigung technischer Zeichnungen setzt man gewöhnlich (so auch im folgenden immer) voraus, daß die parallelen Lichtstrahlen derart auffallen, daß ihre Risse mit der Projektionsachse Winkel von 45° bilden. a) Vergleiche den Verlauf dieses sog. „45°-Lichtes" mit der Richtung der von links oben vorn nach rechts unten hinten verlaufenden Körperdiagonale eines Würfels in Frontstellung. b) Konstruiere auf Grund dieser Beziehung die wahre Größe des Neigungswinkels der „45°-Lichtstrahlen" gegen Π_1 und Π_2.

18. a) Wo liegen alle Punkte des Raumes, deren Schatten auf die Projektionsachse fallen? b) Wann ist der Schatten einer Geraden ein Punkt? c) Wann ist der Schatten eines ebenen Flächenstückes eine Gerade?

19. Da die Projektionsebenen als undurchsichtig vorausgesetzt sind (s. S. 78), so kann jeder Punkt (abgesehen von dem in Aufg. 18a erwähnten Sonderfall) nur auf eine der Rißebenen einen Schatten werfen. Man konstruiert aber doch meist Horizontal- und Vertikalschatten[1]), und zwar deshalb, weil man dadurch scharfe Genauigkeitsproben gewinnt. Beweise, a) daß Horizontal- und Vertikalschatten eines Punktes zwei Ecken eines Quadrates bilden, dessen andere Ecken auf der Projektionsachse liegen, b) daß Horizontal- und Vertikalschatten jeder Geraden sich auf der Projektionsachse schneiden. c) Sprich die Beziehungen zwi-

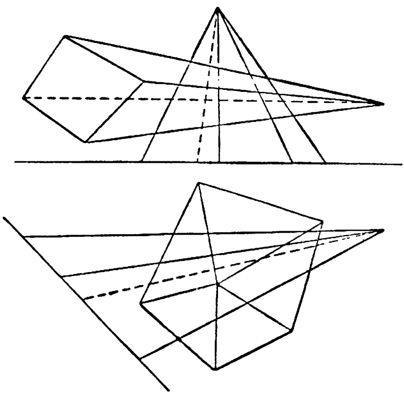

Fig. 25.

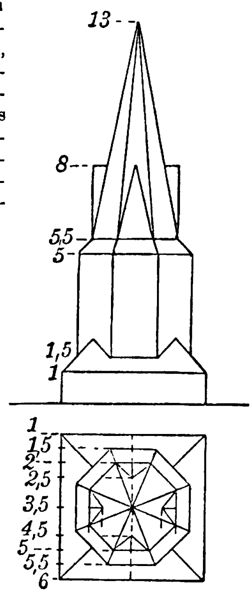

Fig. 26.

schen Horizontal- und Vertikalschatten einer ebenen Figur unter Benutzung des Begriffes „Affinität“ aus.

20. a)—o) Man zeichne den Schatten, den die in § 12, Aufg. 17a—h, 21, 31 a, d, e, ferner in § 13, Aufg. 30e und 45 genannten Dreiecke auf die Rißebenen werfen.

21. Welchen Schatten werfen die in § 12, Aufg. 26 genannten Parallelogramme auf die Rißebenen?

22. Ermittle den Schatten des in § 13, Aufg. 29 genannten Fünfecks.

1) Dies als kurze Bezeichnung für die längere Ausdrucksweise „Schlagschatten auf die Horizontalebene und Vertikalebene“.

23. **a)**, **b)** Zeichne (nötigenfalls unter Anwendung von § 13, Aufg. 51c) den Schatten des in § 12, Aufg. 25a, b bestimmten Kreises, ferner **c)**—**f)** den Schatten eines parallel Π_1 gelegenen Kreises, dessen Mittelpunkt M und Radius r gegeben sind:

	M	r		M	r
c)	(4, 5, 2)	2,	d)	(4, 5, 3)	3,
e)	(4, 8, 8)	4,	f)	(4, 8, 7)	4.

Andere Aufgaben, z. B. über Kreisringe, Abschnitte und Ausschnitte zu bilden, wird dem Schüler überlassen.

24. **a)**—**d)** Die Schatten der in § 12, Aufg. 20a bis c und 34 genannten Vierflache sind zu zeichnen.

25. Man zeichne den Schatten eines schiefen Parallelflachs, von dem die Endpunkte dreier in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten AB, AC, AD gegeben sind. (Vgl. § 12, Aufg. 27.)

26. Zeichne den Schatten einer mit der Spitze auf Π_1 stehenden regelmäßig sechsseitigen Doppelpyramide, wenn die Achse der Doppelpyramide senkrecht auf Π_1 ist und ein Paar der horizontalen Kanten parallel zur Projektionsachse läuft. — Maßangaben: Abstand der Pyramidenachse von der Projektionsachse: 4 cm, Seite des Sechsecks: 3 cm, Länge der Achse der Doppelpyramide: 10 cm.

27. Ein Dreieck hat die Ecken $A \equiv (2, 2, 5)$, $B \equiv (1, 5, 1)$, $C \equiv (4, 4, 3)$. In der Ecke B ist auf der Ebene des Dreiecks eine Senkrechte errichtet. Man ermittle die Schatten[1]). — Andere Beispiele für Dreiecke und Senkrechte auf diesen sind aus § 13, Aufg. 42b bis 44 zu entnehmen.

28. Von einem ebenen Viereck kennt man die Risse dreier Ecken $A \equiv (1, 1, 2)$, $B \equiv (2, 3, 4)$, $C \equiv (5, 4, 3)$ und den Grundriß der vierten Ecke $D' \equiv (4, 2, 0)$. Im Diagonalenschnittpunkt ist auf der Ebene des Vierecks eine Senkrechte errichtet und auf dieser vom Diagonalenschnittpunkte aus eine Strecke von der Länge 2 abgetragen. Man zeichne die Schatten.

29. Die Ebene eines Dreiecks ABC wird von einer Geraden PQ geschnitten. Man ermittle die Schatten. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (0, 3, 4)$, $B \equiv (1, 6, 2)$, $C \equiv (3, 2, 3)$; $P \equiv (0, 2, 1)$, $Q \equiv (3, 8, 6)$. — Andere Zahlenbeispiele wähle der Schüler aus § 13, Aufg. 30 und 31.

30. Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Parallelogramm $PQRS$. Man zeichne die Schatten. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (0, 7, 0)$, $B \equiv (2, 7, 8)$, $C \equiv (4, 10, 0)$, $P \equiv (1, 5, 2)$, $Q \equiv (4, 2, 4)$, $R \equiv (6, 8, 1)$, $S \equiv (9, 5, 4)$.

---

1) Darunter sind hier (und im folgenden immer) alle überhaupt vorkommenden Schatten verstanden, also in unserem Beispiel der Schlagschatten, den die Senkrechte auf das Dreieck wirft, ferner die Schatten, die die Senkrechte und das Dreieck auf die (undurchsichtig gedachten) Rißebenen werfen.

31. Ermittle die Schatten bei der Durchdringung zweier Dreiecke — Zahlenbeispiele nimm aus § 13, Aufg. 36.

32. Zeichne die Schatten bei der Durchdringung zweier Parallelogramme. — Zahlenbeispiele wähle aus § 13, Aufg. 37.

33 bis 38. Ermittle die Schatten bei den Durchdringungsaufgaben 1 bis 6.

39 bis 45. Zeichne die Schatten bei den Durchdringungsaufgaben 9 bis 15.

Aufgaben über runde Körper

Die Aufgaben 46 bis 65 sind auch für Schattenkonstruktionen geeignet; es wird empfohlen, die Schatten auch dann zu ermitteln, wenn dies nicht ausdrücklich (wie in Aufg. 51, 53b, 56) gefordert ist.

46. Der Grundkreis eines auf Π_1 stehenden geraden Kreiszylinders von beliebiger Höhe hat den Mittelpunkt $M \equiv (4, 4, 0)$ und den Radius $r = 3$. An den Zylinder sollen Berührungsebenen gelegt werden **a)** durch einen auf der Rückseite gelegenen Punkt der Zylinderfläche $P \equiv (3, ?, ?)$, **b)** durch einen außerhalb gelegenen Punkt $Q \equiv (8, 3, 5)$, **c)** parallel einer Geraden $AB\,[A \equiv (1, 8, 4),\ B \equiv (3, 2, 7)]$.

47. Von einem auf Π_1 stehenden schiefen Kreiszylinder kennt man den Radius $r = 2$, den Grundkreismittelpunkt $M \equiv (3, 3, 0)$ und den Deckkreismittelpunkt $N \equiv (9, 5, 8)$. Man lege an den Zylinder Berührungsebenen **a)** durch einen auf der Zylinderfläche gelegenen Punkt $P \equiv (2, ?, 4)$, **b)** durch einen außerhalb gelegenen Punkt $Q \equiv (2, 3, 3)$, **c)** parallel einer Geraden AB $[A \equiv (6, 3, 3),\ B \equiv (7, 8, 1)]$. — **d)** Ermittle den Schnitt des Zylinders mit einer Geraden CD $[C \equiv (2, 7, 7),\ D \equiv (9, 1, 2)]$.

48. Der Grundkreis eines schiefen Kreiszylinders liegt in Π_1, die Erzeugenden des Zylinders kreuzen die Projektionsachse rechtwinklig und sind gegen Π_1 unter 60° geneigt. Man zeichne diejenigen Berührungsebenen des Zylinders, die gegen Π_2 unter 60° geneigt sind.

49. Ein gerader Kreiszylinder steht auf Π_1, der Grundkreis hat den Mittelpunkt $M \equiv (2, 3, 0)$ und den Radius $r = 2$. Der Zylinder wird von einer Ebene E geschnitten, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch die Punkte (9, 0, 0) und $\begin{Bmatrix} (2, 6, 0) \\ (3, 0, 6) \end{Bmatrix}$ hindurchgehen. Man ermittle den Aufriß und die wahre Größe der Schnittellipse.

50. Drei unbegrenzte parallele Geraden sind Erzeugende eines geraden Kreiszylinders. Man zeichne die Risse desjenigen Zylinderkreises, der Π_1 berührt.

Andeutung: Hilfsebene senkrecht zu den Parallelen, dann horizontalprojizierende Ebene durch die Zylinderachse.

51. Ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius 2 und der Höhe 6 steht mit der Spitze nach unten im Punkte (2, 3, 0) senkrecht auf Π_1. Man zeichne die Schatten.

52. Ein Dreieck ABC ist gegeben; ein Kegel mit gleichseitigem Achsenschnitt ist darzustellen, dessen Grundkreis dem Dreieck ABC umschrieben ist. (Wie viele Lösungen hat die Aufgabe, wenn man nicht angibt, ob die Spitze über oder unter der Ebene ABC liegen soll?) — Zahlenbeispiele:

	A	B	C	
a)	(1, 2, 2)	(3, 1, 3)	(4, 2, 1)	Kegelspitze oberhalb der Ebene ABC
b)	(0, 6, 2)	(2, 2, 5)	(5, 3, 3)	„ „ Π_1.

53. **a)** Auf einem Kegel seien zwei Punkte P und Q gegeben. Warum gibt es im allgemeinen nur zwei Parabeln, die auf dem Kegel liegen und durch P und Q gehen? (Hilfsgerade durch die Kegelspitze parallel PQ.) **b)** Wie muß eine Gerade verlaufen, wenn der Schatten, den sie auf einen Kegel wirft, eine Parabel sein soll?

54. Ein gerader Kreiskegel hat die Höhe h, sein Grundkreis liegt in Π_1, hat den Radius r und den Mittelpunkt M. Eine durch die Punkte A und B bestimmte Gerade schneidet den Kegel in zwei Punkten P und Q. Man ermittle diese und zeichne eine auf dem Kegel liegende Parabel, die durch P und Q hindurchgeht. (Über die Zahl der Lösungen vgl. Aufg. 53a.) — Zahlenbeispiele:

	h	r	M	A	B
a)	7	3	(4, 4, 0)	(1, 2, 6)	(6, 8, 1),
b)	8	3	(4, 5, 0)	(1, 9, 3)	(8, 3, 1).

55. Ein auf Π_1 stehender gerader Kreiskegel von der Höhe 6, dessen Grundkreis den Mittelpunkt $M \equiv (3, 3, 0)$ und den Radius 2 hat, wird von einer Ebene E geschnitten, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch die Punkte (7, 0, 0) und $\begin{Bmatrix} (6, 4, 0) \\ (0, 0, 5) \end{Bmatrix}$ hindurchgehen. Man ermittle die Risse und die wahre Größe der Schnittfigur (Ellipse).

Anleitung für genaueres Konstruieren: Lege eine Ebene $\perp e_1$ durch die Spitze des Kegels und ermittle so die parallel zu e_1 verlaufenden Tangenten der Schnittellipse (also Streichlinien von E), dann die dazu senkrechten Tangenten (also Fallinien von E), dann weiter nach § 13, Aufg. 51c.

56. Ein auf Π_1 stehender gerader Kreiskegel wird von einer Ebene geschnitten, die durch den Mittelpunkt der Höhe hindurchgeht und gegen Π_1 unter 45°, gegen Π_2 unter 60° geneigt ist. Die Schnittfigur (Ellipse) ist zu zeichnen und der Schatten zu ermitteln, den das oberhalb gelegene Kegelstück auf die Schnittebene wirft.

57. Ein schiefer Kreiskegel hat seine Spitze im Punkte $S \equiv (12, 9, 12)$; der Grundkreis geht durch die Punkte $A \equiv (4, 7, 2)$, $B \equiv (2, 2, 8)$, $C \equiv (7, 2, 3)$. Man zeichne die Risse einer Parabel, die auf dem Kegel liegt und durch A und B hindurchgeht. (Über die Anzahl der Lösungen vgl. Aufg. 53a.)

58. Ein schiefer Kreiskegel (mit Scheitelkegel) steht auf Π_1; sein Grundkreis hat den Mittelpunkt $M \equiv (6, 5, 0)$ und den Radius $r = 3{,}5$. Die Spitze des Kegels (Scheitel des Doppelkegels) liegt in $S \equiv (8, 4, 7)$. Von einer Ebene E, die der Kegelachse parallel ist, kennt man die Horizontalspur e_1 durch die Punkte (0, 0, 0) und (5, 5, 0). Man konstruiere die Risse der Schnittfigur (Hyperbel), ihre wahre Gestalt und alle wichtigen Bestimmungselemente (Scheitel, Asymptoten usw.).

59. Ein gerader Kreiskegel steht auf Π_1, sein Grundkreisradius ist $r = 2$, seine Spitze liegt in $S \equiv (4, 3, 6)$. Man zeichne an diesen Kegel Berührungsebenen a) durch einen Punkt auf der Kegelfläche, $P \equiv (3, 4, ?)$, b) durch einen außerhalb gelegenen Punkt $Q \equiv (7, 1, 1)$, c) parallel der Geraden $AB\,[A \equiv (1, 4, 2),\ B \equiv (4, 7, 7)]$. — d) Schneide den Kegel durch eine Gerade $CD\,[C \equiv (1, 2, 5),\ D \equiv (7, 5, 1)]$; zeige, daß die hier benutzte Konstruktion (Hilfsgerade $\parallel CD$ durch S) sowohl beim schiefen Kegel wie auch beim Zylinder (vgl. Aufg. 47d; wo liegt da die „Spitze"?) anwendbar ist.

60. Die Spitze eines Kegels ist der Punkt $S \equiv (4, 2, 5)$, sein Grundkreis geht durch die Punkte $A \equiv (3, 4, 11)$, $B \equiv (3, 8, 7)$ und $C \equiv (7, 6, 9)$. Man bestimme die Tafelneigungen der Ebenen, die den Kegel längs SA und SB berühren.

61. Eine Kugel hat den Mittelpunkt $M \equiv (2, 3, 2)$ und den Radius 2. Man untersuche, in welchen Punkten die Kugel von der Geraden PQ geschnitten wird, wenn a) $PQ \perp \Pi_1$ und $P' \equiv Q' \equiv (1, 4, 0)$, b) $PQ \perp \Pi_2$ und $P'' \equiv Q'' \equiv (3, 0, 3)$ ist.

62. Eine Kugel hat den Mittelpunkt M und den Radius r. Man bestimme den Schnitt dieser Kugel mit einer Geraden, die durch zwei Punkte P, Q gegeben ist. — Zahlenbeispiele:

	M	r	P	Q
a)	(4, 3, 2)	2	(1, 0, 3)	(7, 4, 3),
b)			(2, 6, 5)	(7, 1, 1).

63. Eine Kugel ist durch ihren Mittelpunkt $M \equiv (3, 3, 3)$ und den Radius $r = 2$ gegeben. Man bestimme ihren Schnitt mit der Ebene E, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch (9, 0, 0) und $\begin{Bmatrix} (3,\ 6,\ 0) \\ (2,\ 0,\ 5) \end{Bmatrix}$ hindurchgehen.

64. An die in Aufg. 63 gegebene Kugel soll durch einen in der oberen Hälfte gelegenen Punkt, dessen Grundriß (4, 4, 0) bekannt ist, die Berührungsebene gelegt werden.

65. Von einer Kugel kennt man den Mittelpunkt $M \equiv (12, 5, 5)$ und den Radius $r = 4$. Diese Kugel soll von einer Ebene E, deren Vertikalspur e_2 durch die Punkte (7, 0, 4) und (4, 0, 8) gegeben ist, in einem größten Kreise geschnitten werden. Man zeichne die Risse dieses Kreises.

66. Zeichne die Durchdringung **a)** zweier schiefer Kreiszylinder, **b)** eines schiefen Kreiszylinders und eines schiefen Kreiskegels, **c)** zweier schiefer Kreiskegel, und zwar jedesmal unter der Bedingung, daß die Achsen der beiden Körper sich schneiden. — Untersuche, wann die Durchdringungsfigur keine doppelt gekrümmte Kurve (Raumkurve) ist, sondern in zwei Kegelschnitte (Ellipsen) zerfällt.

67. Zeichne den Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einem schiefen Kreiszylinder, wenn der erste auf Π_1, der zweite auf Π_2 steht und die Erzeugenden des zweiten Zylinders parallel zu Π_1 verlaufen, aber so, daß eine der Erzeugenden den ersten Zylinder berührt. — Zeige, daß die Durchdringungsfigur eine Raumkurve mit Doppelpunkt ist.

68. Ermittle die Durchdringung eines schiefen Kreiszylinders und **a)** eines schiefen Prismas, **b)** einer Pyramide, **c)** eines schiefen Kegels.

69. Zeichne den Schnitt eines schiefen Kreiskegels mit **a)** einem Prisma, **b)** einer Pyramide, **c)** einem schiefen Kreiskegel.

70. Zeige, daß Aufg. 69c die Aufgaben 66a, b, 67, 68c als Sonderfälle umfaßt und daß immer folgende Methode zum Ziele führt: Man lege ein Ebenenbüschel durch die Verbindungslinien der Spitzen beider Kegel. (Wo liegen diese im Zylinderfall?) Jede Ebene des Büschels, die beide Kegel schneidet, hat mit ihnen vier Erzeugende gemein; diese Erzeugenden bringt man paarweise zum Schnitt.

71. Zeichne die Durchdringung einer Kugel mit **a)** einer Kugel, **b)** einem Prisma, **c)** einer Pyramide, **d)** einem geraden Kreiszylinder, **e)** einem schiefen Kreiszylinder, **f)** einem geraden Kreiskegel, **g)** einem schiefen Kreiskegel.

72. Auf Π_1 steht ein gerader Kreiszylinder von der Höhe 12, dessen Grundkreis den Mittelpunkt $M \equiv (3, 3, 0)$ und den Radius $r = 2$ hat. Zeichne auf diesem Zylinder eine Schraubenlinie von der Ganghöhe 6, die im Punkte (1, 3, 0) beginnt und **a)** rechts gewunden, **b)** links gewunden ist.

73. Lege an die in Aufg. 72 gezeichnete Schraubenlinie in einem beliebigen Punkte die Tangente.

74. Stelle auf dem in Aufg. 72 angegebenen Zylinder eine Schraubenlinie dar, deren Neigung **a)** 45°, **b)** 30° beträgt.

75. Zeichne mittels der in Aufg. 72 bestimmten Schraubenlinie eine windschiefe Schraubenfläche, deren Erzeugende die Schraubenachse unter **a)** 30°, **b)** 45° schneiden. (Scharfgängige Schraubenfläche.)

76. Zeichne ebenso eine Schraubenfläche, deren Erzeugende die Schraubenachse rechtwinklig schneiden. (Flachgängige Schraubenfläche, Wendelfläche.)

77. Beweise: Wenn gerade Kreiszylinder derart durch eine Wendelfläche gelegt werden, daß eine Zylindererzeugende mit der Schraubenachse zusammenfällt, so durchsetzen sie die Wendelfläche in Schraubenlinien, die halb so große Ganghöhe haben wie die „Leitschraubenlinie".

§ 15. Vermischte Aufgaben

1. Ein Lichtstrahl AB wird an der Aufrißebene reflektiert; man zeichne die Risse des reflektierten Strahles. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (1, 3, 0)$, $B \equiv (4, 0, 4)$. Andere Zahlenbeispiele, auch für Spiegelung an Π_1, wähle selbst aus § 12, Aufg. 10, 12, 16.

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse in Π_1 liegt, ist der Grundriß gegeben. (Der Grundriß muß ein stumpfwinkliges Dreieck sein; warum?) Man ermittle den Aufriß und den Neigungswinkel der Dreiecksebene gegen die Rißebenen.

3. Eine Strecke AB ist durch ihre Risse gegeben. Man soll auf der Projektionsachse einen Punkt finden, der mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck bestimmt. — Zahlenbeispiele aus Aufg. 1 und § 12, Aufg. 10, 12 oder 16.

4. Eine vierseitige Pyramide $SABCD$ ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm wird. Die Schnittebene gehe durch A. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (5, 3, 0)$, $B \equiv (7, 4, 0)$, $C \equiv (9, 2, 0)$, $D \equiv (6, 1, 0)$, $S \equiv (10, 4, 4)$.

5. Eine Gerade AB und ein außerhalb von ihr gelegener Punkt C sind gegeben; man zeichne die Risse des gleichseitigen Dreiecks, dessen Spitze C ist und dessen Basis in die Gerade AB fällt. — Zahlenbeispiele etwa aus § 12, Aufg. 17.

6. Von einem gleichseitigen Dreieck sind zwei Ecken $A \equiv (7, 5, 2)$ und $B \equiv (4, -2, 7)$ gegeben; die dritte Ecke C liegt in der Horizontalebene. Die Risse des Dreiecks sind zu zeichnen.

7. Eine Gerade g und eine Ebene E sind gegeben. Ein Punkt ist zu finden, der von g die Entfernung a, von E die Entfernung $2a$ und von Π_2 die Entfernung $3a$ hat. — In welchem Zusammenhang steht die Aufgabe mit § 14, Nr. 47d)?

8. Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte $A \equiv (0, 6, 0)$ und $B \equiv (5, 3, 3)$ bestimmt. Man zeichne eine Gerade, die in B auf AB senkrecht steht und gegen Π_1 unter 45^0 geneigt ist.

9. Von dem Grundkreis eines auf Π_1 stehenden geraden Kreiskegels kennt man den Mittelpunkt $M \equiv (9, 4, 0)$ und den Radius $r = 3$. Ferner kennt man eine Ebene E, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $\begin{Bmatrix} (8, 5, 0) \\ (9, 0, 9) \end{Bmatrix}$

hindurchgehen. Wie hoch muß der Kegel werden, damit er von der Ebene E in einer Parabel geschnitten wird? Die Risse der Parabel sind zu zeichnen.

10. Ein Punkt P ist durch seine Risse, eine Ebene E durch ihre Spuren, die unter 45° gegen die Achse geneigt sind, gegeben. Eine Gerade ist zu bestimmen, die durch P geht, gegen Π_1 unter 30° geneigt ist und parallel zu E verläuft.

11. Bestimme in Π_1 den Punkt, der von drei Punkten $A \equiv (10, 3\ 6)$, $B \equiv (5, 2, 0)$ und $C \equiv (2, 8, 3)$ gleichweit entfernt ist. — In welchem Zusammenhange steht diese Aufgabe mit § 14, Nr. 52?

12. Die kleinste Kugel ist zu zeichnen, die zwei windschiefe Geraden AB und CD berührt. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (0, 1, 2)$, $B \equiv (8, 1, 7)$, $C \equiv (0, 7, 1)$ $D \equiv (8, 3, 1)$. — Vgl. § 13, Aufg. 59 und 66.

13. Einem Vierflach $ABCD$ ist eine Kugel umzuschreiben. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (2, 6, 3)$, $B \equiv (3, 2, 7)$ $C \equiv (8, 8, 9)$, $D \equiv (11, 4, 2)$.

14. Zwei Punkte $A \equiv (0, 10, 9)$ und $B \equiv (9, -2, 4)$ sind gegeben. Der Ort der Punkte ist darzustellen, die von A und B den Abstand $d = 9$ haben.

15. Eine Kugel ist zu zeichnen, von der man den Mittelpunkt $M \equiv (5, 3, 3)$ und eine Berührungsebene E kennt, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch die Punkte (6, 0, 0) und $\begin{Bmatrix} (0, 7, 0) \\ (1, 0, 5) \end{Bmatrix}$ hindurchgehen.

16. An eine gegebene Kugel ist eine Berührungsebene zu legen, die gegen Π_1 unter 45° und gegen Π_2 unter 60° geneigt ist. Der Eigenschatten der Kugel und der Schlagschatten, den sie auf die Berührungsebene wirft, ist zu zeichnen.

17. Von einer Kugel sind drei Punkte A, B, C eines größten Kreises gegeben. Man zeichne die Kugel und ihre Schatten. — Zahlenbeispiel: $A \equiv (1, 3, 3)$, $B \equiv (3, 5, 4)$, $C \equiv (2, 6, 8)$.

18. Zwei konzentrische Kugeln mit dem Mittelpunkt $M \equiv (5, 6, 12)$ und den Radien 5 und 3 sind gegeben, ferner eine Ebene E, deren Spuren $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$ durch (4, 0, 0) und $\begin{Bmatrix} (0, 5, 0) \\ (0, 0, 3) \end{Bmatrix}$ hindurchgehen. Man lege an die innere Kugel die zu E parallelen Berührungsebenen und stelle die auf der äußeren Kugel entstehende Zone dar.

19. Zeichne einen Schubstangenkopf nach irgendeinem leicht zugänglichen Vorbild (z. B. Lokomotive, Nähmaschine oder dgl.).

20. In einen zylindrischen Turm von 2 m lichter Weite ist eine Wendeltreppe eingebaut, deren Spindel 50 cm dick ist und deren Stufen je 20 cm hoch sind. Zeichne diese Wendeltreppe im Maßstab 1 : 20 (Annäherung an die

Wendelfläche, s. § 14, Nr. 76) unter der Voraussetzung, daß ein voller Umlauf um die Spindel **a)** 10 Stufen, **b)** 20 Stufen erfordert. -- Ansicht auch in schiefer Parallelprojektion.

21. Zeichne eine flachgängige Schraube (entstanden durch Schraubenbewegung eines Rechtecks).

22. Stelle eine scharfgängige Schraube dar (entstanden durch Schraubenbewegung eines gleichschenkligen Dreiecks).

23. Zeichne zu der in Aufg. 21 geforderten Schraube die passende Schraubenmutter (längs der Achse durchschnitten, die vordere Hälfte beseitigt gedacht).

24. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 23 für die in Aufg. 22 genannte Schraube.

25. Die bekannten Bleistiftanschärfer enthalten kegelige Höhlungen von 20^0 Öffnungswinkel; bei den üblichen sechskantigen Bleistiften ist jede Kante von ihren Nachbarkanten um 4 mm entfernt. Zeichne die Hyperbelbogen, die auf den Seitenflächen eines Bleistiftes beim Anschärfen entstehen. (Vergrößere in passendem Maßstabe, etwa 10 : 1.)

26. Zeichne eine Sonnenuhr deines Wohnortes unter der Voraussetzung, daß die schattenauffangende Wand **a)** horizontal, **b)** vertikal ist.

27. Zeichne in ein horizontales drehzylindrisches Tonnengewölbe eine drehzylindrische Stichkappe mit horizontaler Achse, doch so, daß sich die Achsen der beiden Drehzylinder nicht schneiden (vgl. § 14, Nr. 66a).

Kotierte Projektion (Eintafelprojektion)

28. Von einem ebenen Viereck $ABCD$ ist der Riß $A'B'C'D'$ gegeben, ferner auf einem Höhen-(Koten-)Maßstab die Höhen der Ecken A, B, C. Die Kote von D ist zu ermitteln.

29. Die Spur eines durch Riß und Eckenkoten gegebenen Dreiecks ABC ist zu bestimmen.

30 Von einem Dreieck ABC sind zwei Ecken (A, B) oberhalb, die dritte Ecke (C) unterhalb der Tafel gegeben. Man bestimme das unterhalb der Tafel gelegene Stück des Dreiecks.

31. Der Schnittpunkt einer gegebenen Geraden mit der Ebene eines gegebenen Dreiecks ist zu finden.

32. Eine Ebene ist durch Riß und Eckenkoten eines Dreiecks gegeben. Man ermittle Streich- und Fallinien der Ebene.

33. Von einer Ebene kennt man die Spur s und einen Punkt P. Man bestimme **a)** die (Horizontal-)Neigung der Ebene, **b)** einen Punkt der in P auf der Ebene errichteten Senkrechten.

34. Zwei Ebenen sind durch ihre Spuren s_1, s_2 und ihre Neigungen α_1, α_2 gegeben. Man ermittle die Schnittgerade der Ebenen.

35. Über einem in der Tafel gegebenen beliebigen Dreieck soll ein dreikantiges Dach gezeichnet werden, dessen Flächen alle gegen die Tafel unter gleichem Winkel (z B. 45°) geneigt sind. Man bestimme die wahre Größe der Dachflächen und die Kote der Spitze des Daches.

36. Der Grundriß eines Hauses sei rechteckig. a) Wie sieht der Grundriß eines Satteldaches aus, dessen Flächen gleiche Horizontalneigung haben? b) Zeichne den Grundriß eines Walmdaches (d. h. eines Daches mit Wasserabfluß auch nach den beiden Schmalseiten und mit gleicher Horizontalneigung aller Dachflächen) für dasselbe Haus.

37. Der Grundriß eines Hauses sei U-förmig (Hauptgebäude mit zwei Seitenflügeln), wobei die Breiten der beiden Schenkel (Flügel) unter sich und von der Breite des Querstückes (Hauptgebäudes) verschieden sein sollen. Verlangt ist die Dachausmittelung für den Fall, daß das Dach nach allen Seiten Wasserabfluß haben darf und alle Dachflächen gleiche Horizontalneigung (etwa 45°) haben.

38. Wie ändert sich die Dachausmittelung der Aufg. 37, wenn eine der Wände an ein Nachbargrundstück anstößt, wo ein Wasserabfluß unzulässig ist? Diese Beschränkung soll gelten a) für die Seitenwand des Hauptgebäudes, b) für die Stirnwand eines der beiden Seitenflügel, c) für die Stirnwände beider Seitenflügel.

39. Ändere die Dachausmittelung der Aufg. 37 ab durch die Vorschrift, daß an einer der Ecken des Hauptgebäudes noch ein achteckiges Türmchen angebracht ist, dessen Dachflächen gegen die Horizontalebene unter 75° geneigt sind.

40. Bei einer geraden Rampe beträgt die Basislänge l m, die obere Breite b m, die Steigung $c:d$, der Böschungswinkel der Seitenwände α. Man stelle die Rampe in Grund- und Aufriß in mehreren Ansichten (Frontstellung und auch schief gegen die Aufrißebene) im Maßstab $p:q$ dar.

	l	b	$c:d$	α	$p:q$
Zahlenbeispiele: a)	15	5	1 : 7	30°	1 : 100,
b)	32	6	1 : 8	45°	1 : 200.

41. Man bestimme den Böschungskörper, der bei vorgeschriebenem Böschungswinkel eine gegebene (nicht horizontale) Strecke PQ als First hat.

42. Zeichne unter Benutzung selbstgewählter Maßannahmen a) eine Abzweigung von einem waagerechten Damme, b) eine Einschnittböschung, c) einen längs eines Abhangs verlaufenden Weg (die von einem Rande des Weges auf den anderen Rand gefällten Lote sollen Streichlinien der Ebene des Weges sein).

Aufgaben aus der Perspektive

43. Bestimme das perspektivische Bild eines in der Grundebene gelegenen Punktes.

44. Erkläre die Begriffe Spurpunkt und Fluchtpunkt einer Geraden, Spurgerade und Fluchtgerade einer Ebene, Augenpunkt, Distanz, Horizontalebene, Horizont.

45. Zeige, daß eine Gerade durch Spur- und Fluchtpunkt im allgemeinen eindeutig bestimmt ist.

46. a) Warum ist die Spur einer Ebene immer parallel der Fluchtgeraden? b) Zeige, daß eine Ebene durch Spur- und Fluchtgerade eindeutig bestimmt ist.

47. Erörtere folgende Sonderlagen einer Geraden: a) der Spurpunkt fällt mit dem Fluchtpunkt zusammen. b) Mit welchem ausgezeichneten Punkte fällt der Fluchtpunkt zusammen, wenn die Gerade auf der Bildebene senkrecht steht? c) Welches ist der Ort für den Fluchtpunkt der Geraden, wenn diese gegen die Bildebene unter 45° geneigt ist? d) Ist eine zur Bildebene parallele Gerade auch noch durch Spur- und Fluchtpunkt eindeutig bestimmt?

48. Bilde folgende in der Grundebene gelegenen Figuren ab: a) Quadrat in Frontlage, b) Quadrat in beliebiger Lage, c) Rechteck in Frontlage, d) Rechteck in beliebiger Lage, e) Schachbrett in Frontlage, f) Schachbrett in beliebiger Lage, g) Parkettboden aus regelmäßigen Sechsecken in Frontlage, h) beliebig gelegenes Bienenwabenmuster, i) Flächenmuster nach eigenem Entwurf, k) Teil deines Wohnortes, Schulhof, Gartenanlage u. dgl. (Anleitung: Einzeichnung eines quadratischen Netzes in Frontlage, dann weiter nach Aufg. e.)

49. a) Erörtere die Konstruktionen, die zur perspektivischen Teilung einer in der Grundebene gegebenen Strecke führen. b) Trage in dem Bilde einer in der Grundebene gelegenen Geraden eine Strecke, deren wahre Größe gegeben ist, nach beiden Seiten hin ab.

50. Zeichne das Bild einer in der Grundebene gelegenen Geraden (Landstraße), auf der in gleichen Abständen gleiche Vertikalen (Telegraphenstangen) errichtet sind.

51. Bilde einen Kreis ab, der a) parallel zur Grundebene, b) parallel zur Bildebene, c) senkrecht zur Grundebene, aber nicht parallel zur Bildebene liegt. d)—f) Suche für jeden der drei genannten Fälle Anwendungen aus deiner Umgebung und zeichne die entsprechenden Bilder.

52. Gib an, wann das Bild eines Kreises a) wieder ein Kreis, b) eine Ellipse, c) eine Hyperbel, d) eine Parabel wird.

53. Bilde einen auf der Grundebene stehenden Würfel ab a) in Frontstellung, b) wenn nur vier Kanten, nicht aber auch zwei Flächen parallel zur Bildebene sind.

54. Zeige, wie man auf Grund der vorigen Aufgabe auch beliebige Prismen abbilden kann (Beispiele aus der häuslichen Umgebung, den Schulräumen oder anderen Gebäudeteilen).

55. Zeichne einen Quader, bei dem ein Flächenpaar zur Grundebene parallel ist, und zwar unter der Voraussetzung, daß das Auge **a)** außerhalb des Quaders gelegen ist (Perspektive eines Hauses), **b)** im Innern des Quaders liegt (Zimmeransicht).

56. Bilde einen auf der Grundebene stehenden Drehzylinder (Anschlagsäule o. ä.) ab.

57. Stelle einen Drehkegel perspektivisch dar. Suche Anwendungen aus deiner Umgebung.

58. **a)** Bilde eine Kugel perspektivisch ab unter verschiedenen Annahmen über die Lage der Kugel zum Projektionszentrum und zur Bildebene. **b)** Zeige, daß das perspektivische Bild einer Kugel eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem alle Erzeugenden des die Kugel berührenden Sehstrahlenkegels auf einer Seite oder auf zwei verschiedenen Seiten von der Bildebene geschnitten werden. **c)** Wie sieht das Bild der Kugel aus, wenn die Bildebene parallel einer Erzeugenden des Sehstrahlenkegels verläuft?

59. Bilde Zusammenstellungen von Drehzylindern, Drehkegeln und Kugeln ab. (Beispiele: Mittelalterliche Befestigungstürme oder neuzeitliche Hyazinthengläser mit Schutztüten o. ä.)

Aufgaben zur Kartenentwurfslehre

60. Zeichne das Gradnetz einer orthographischen Polar- und Äquatorialkarte der Erde (d. h. einer Karte, bei der die Erdachse senkrecht zur Horizontalebene gedacht ist) im Maßstab $1:2\cdot 10^8$ unter der vereinfachenden Annahme, daß die zu zeichnenden Meridiane und Parallelkreise einen Bogenabstand von $22\frac{1}{2}^0$ haben.

61. Zeichne das in Aufg. 60 bestimmte Gradnetz unter der Voraussetzung, daß die Erdachse nicht mehr senkrecht zur Horizontalebene, aber noch parallel zur Vertikalebene liegt.

62. Entwirf das Gradnetz einer Merkatorkarte und gib an, warum die Abbildung nach Merkator keine Projektion in strengem Sinne ist.

63. **a)** Zeichne eine stereographische Projektion der Nordpolarländer im Maßstabe $1:2\cdot 10^8$ unter der Voraussetzung, daß der Südpol als Projektionszentrum und die Äquatorebene als Bildebene gewählt wird. **b)** Beweise, daß sich bei der stereographischen Projektion jeder auf der Kugel liegende Kreis wieder als Kreis oder als Gerade abbildet (Hipparch).

64. Zeichne eine stereographische Projektion zweier Erdhalbkugeln unter der Voraussetzung, daß der Reihe nach zwei Endpunkte eines Äquatordurchmessers als Projektionszentren und die zu diesem Durchmesser senkrechte Meridianebene als Bildebene gewählt werden.

65. Zeichne eine Karte der Polarländer in gnomonischer Projektion (d. h. unter der Annahme, daß der Mittelpunkt der Kugel als Projektionszentrum und die im Pol berührende Ebene als Bildebene gewählt wird).

66. Zeichne ein Gradnetz von Europa bei Abbildung auf einen Drehkegel, der die Erdkugel längs des 40. und 70. Breitenkreises schneidet.

67. Entwirf im Maßstab $1:2 \cdot 10^8$ ein Gradnetz der von Lambert (1772) erdachten flächentreuen Abbildung der Erdkugel auf einen Drehzylinder, der die Erdkugel längs des Äquators berührt; dabei sind die Meridiane und Breitenkreise in Abständen von je 10^0 zu zeichnen.

Anleitung: Fällt man von jedem Punkte P der Kugel auf die Erdachse das Lot und verlängert es über P hinaus, bis es den Zylinder in P trifft, so ist P das Bild von P.

Viertes Kapitel

Sphärische Trigonometrie

§ 16. Inhalt des Kugeldreiecks; Berechnung des rechtwinkligen Kugeldreiecks

Inhalt des Kugelzweiecks und Kugeldreiecks

1. a) Wieviel Kugelzweiecke werden von zwei größten Kreisen einer Kugel gebildet? b) Stelle dir ein Modell her für den Schnitt zweier Kreise mit gleichem Radius, die ein Kugelzweieck bilden.

2. Es sei α der in Graden gemessene Winkel, den die beiden Seiten eines Kugelzweiecks miteinander bilden. Beweise, daß der Inhalt des Kugelzweiecks

$$f = \frac{\pi \cdot a}{90} r^2$$

ist, wenn r der Kugelradius ist.

3. $\widehat{a}$ ist der in Bogenmaß angegebene Winkel eines Kugelzweiecks. Wie groß ist dessen Inhalt, wenn der Radius der Kugel r ist?

4. a) Wieviel **Kugeldreiecke** (sphärische Dreiecke) werden von drei größten Kreisen einer Kugel gebildet? b) Stelle dir aus drei Kreisen von gleichem Radius ein Modell eines Kugeldreiecks her. c) Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit drei größte Kreise einer Kugel wirklich Kugeldreiecke bilden?

5. Unter den Seiten und Winkeln eines Kugeldreiecks versteht man die Seiten und Winkel der zu dem Kugeldreieck gehörigen Ecke, deren Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt. Übertrage die dir bekannten Sätze über die Seiten und Winkel einer dreiseitigen Ecke auf das Kugeldreieck.

6. Gib Beispiele von Kugeldreiecken a) mit drei spitzen, b) mit drei stumpfen, c) mit drei überstumpfen Winkeln an.

7. Auf der Kugel sind drei beliebige Punkte angegeben und durch je zwei von ihnen die größten Kugelkreise gelegt. Zeige, daß unter den dann entstehenden Kugeldreiecken mindestens eins ist, dessen Seiten und Winkel sämtlich kleiner als zwei rechte sind. (Gibt es Ausnahmen?)

8. Erkläre, was man — entsprechend den Definitionen bei der Ecke — a) unter einem **Nebendreieck**, b) unter dem **Scheiteldreieck**, c) unter dem **Polardreieck** eines Kugeldreiecks $A_1B_1C_1$ versteht, das von drei in A_1, A_2, B_1, B_2 und C_1, C_2 sich schneidenden größten Kreisen gebildet wird. Gib in jedem der unter a) bis c) genannten Fälle die zwischen der ursprünglichen und der neuen Ecke bestehenden Seiten- und Winkelbeziehungen an.

9. a) Wie heißen die drei Kugelzweiecke, denen das von drei in A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sich schneidenden größten Kreisen gebildete Kugeldreieck $A_1B_1C_1$ gemeinsam angehört? b) Die Winkel des Kugeldreiecks seien α, β und γ (gemessen in Graden). Welchen Inhalt haben die drei eben genannten Kugelzweiecke? c) Um wieviel ist die Summe der drei Kugelzweiecke größer als die Halbkugel? d) Man bezeichnet den Wert

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$$

als **sphärischen Exzeß** des Kugeldreiecks, Beweise die Formel

$$f = \frac{\varepsilon \pi r^2}{180}.$$

10. Entwickle eine Formel für den Inhalt des Kugeldreiecks, wenn dessen Winkel α, β und γ in Bogenmaß gegeben sind.

Das rechtwinklige Kugeldreieck

11. Ein Kugeldreieck ABC hat einen rechten Winkel γ. a) Nenne die Hypotenuse und die Katheten. b) Gib ein gleichschenkliges Kugeldreieck an, dessen Basiswinkel rechte sind. c) Nenne ein Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln. d) Beweise, daß die Summe der den Katheten gegenüberliegenden Winkel größer als ein rechter ist.

12. Dem bei C rechtwinkligen Kugeldreieck ABC entspreche eine dreiseitige Ecke $MABC$ (Fig. 27). a) Lege einen zu MA senkrechten, durch B gehenden Schnitt BDE durch die Ecke und beweise, daß $\sphericalangle BDE = \alpha$ und $\sphericalangle BED$ ein rechter ist. b) Beweise, daß $\triangle MBD$ rechtwinklig bei D, $\triangle MDE$ rechtwinklig bei D, $\triangle MBE$ rechtwinklig bei E ist.

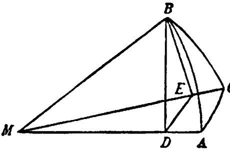

Fig. 27.

13. a) Ersetze in $\cos c = MD : MB$ (Fig. 27) Zähler und Nenner durch Ausdrücke, in denen Seiten der Ecke auftreten, und beweise so

(1) $$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

b) Ersetze in $\sin \alpha = BE : BD$ Zähler und Nenner durch Ausdrücke, in denen Seiten der Ecke auftreten, und beweise so

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$ oder

(2) $$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha.$$

c) Stelle eine entsprechende Formel (Schnittebene diesmal senkrecht zu MB) für $\sin \beta$ auf. d) Ersetze in $\cos \alpha = DE : BD$ Zähler und Nenner durch Ausdrücke, in denen Seiten der Ecke auftreten, und forme den Quotienten um in

(3) $$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta.$$

e) Stelle eine entsprechende Formel für $\cos \beta$ auf.

14. a) Führe in (1) mit Hilfe der Formeln (3) die Winkel ein und leite so die Formel

(1′) $$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

her. b) Führe in (2) b und β ein und leite so die Formel

(2′) $$\sin a = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} b$$

her. c) Wie heißt die (2′) entsprechende Formel für $\sin b$? d) Führe in (3) die Seiten c und b ein und leite so die Formel

(3′) $$\cos \alpha = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} b$$

her. e) Wie heißt die (3′) entsprechende Formel für $\cos \beta$?

15. Zeige, daß die in Aufg. 13 und 14 abgeleiteten zehn Formeln sämtlich sich der folgenden Neperschen Regel unterordnen:

Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke und gleich dem Produkt der Kotangenten der anliegenden Stücke; dabei ist der rechte Winkel nicht mitzuzählen, und die Katheten sind durch ihre Komplemente zu ersetzen.

16. Von einem rechtwinkligen Kugeldreieck sind

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)	l)	m)
gegeben:	a, b	a, c	a, c	a, b	b, c	α, β	α, β	α, a	β, b	α, b	β, a	β, a
gesucht:	c	b	α	α	β	a	c	b	α	c	b	α.

Es ist jeweils mit einer einzigen Formel zu antworten.

17. Welche Gestalt nehmen die zehn Formeln für ein Kugeldreieck mit a) zwei rechten, b) drei rechten Winkeln an?

18. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Kugeldreiecks ($\gamma = 90^\circ$), von dem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) $a = 59^\circ 15'39''$, $b = 83^\circ 27'45''$; b) $a = 48^\circ 27'17''$, $c = 97^\circ 12'54''$;
c) $b = 103^\circ 4'57''$, $c = 92^\circ 37'19''$; d)[1] $a = 71^\circ 5'32''$, $\alpha = 83^\circ 49'2''$;
e)[1] $b = 135^\circ 33'10''$, $\beta = 98^\circ 59'7''$; f) $a = 110^\circ 19{,}4'$, $\beta = 37^\circ 23{,}3'$;
g) $b = 67^\circ 44\frac{1}{4}'$, $\alpha = 119^\circ 28\frac{1}{2}'$; h) $c = 73^\circ 23{,}9'$, $\alpha = 37^\circ 49{,}2'$;
i) $c = 139^\circ 41{,}6'$, $\alpha = 41^\circ 18{,}7'$; k) $\alpha = 23^\circ 51{,}8'$, $\beta = 86^\circ 43{,}1'$.

19. a) Wie führt man mit Hilfe des Polardreiecks die Berechnung eines rechtseitigen Kugeldreiecks ($c = 90^\circ$) zurück auf eine solche des rechtwinkligen Kugeldreiecks? — Berechne die fehlenden Seiten und Winkel eines rechtseitigen Kugeldreiecks, von dem außer $c = 90^\circ$ gegeben ist:

b) $a = 63^\circ 19'24''$, $b = 105^\circ 44'35''$; c) $a = 74^\circ 53'7''$, $\alpha = 49^\circ 25'12''$;
d) $a = 81^\circ 23'51''$, $\gamma = 121^\circ 49'6''$; e) $a = 73^\circ 19'46''$, $\beta = 89^\circ 57'12''$;
f) $\alpha = 126^\circ 27{,}3'$, $\beta = 67^\circ 49{,}8'$; g) $\alpha = 132^\circ 77{,}7'$, $\gamma = 108^\circ 53{,}9'$.
h) Kann man ohne weiteres aus den Angaben $b = 53^\circ 19{,}2'$ und $\beta = 97^\circ 48{,}3'$ oder $\gamma = 73^\circ 42'19''$ und $\beta = 87^\circ 18'32''$ für eine rechtseitige Ecke ($c = 90^\circ$) angeben, daß eine Lösung nicht möglich ist?

20. a) Was wird man in einem gleichschenkligen Kugeldreieck ($b = c$) als Basis, was als Schenkelseite bezeichnen? b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Basiswinkeln und c) zwischen einer Schenkelseite und einem Basiswinkel?

21. Berechne das gleichschenklige Kugeldreieck ($b = c$) aus
a) $a = 143^\circ 12'28''$, $b = 79^\circ 54'13''$; b) $a = 129^\circ 8'53''$, $\beta = 62^\circ 43'38''$;
c) $a = 60^\circ$, $b = 87^\circ 22{,}4'$; d) $b = 78^\circ 23{,}7'$, $\beta = 57^\circ 39{,}2'$.

22. Berechne ein rechtwinkliges Kugeldreieck ($\gamma = 90^\circ$) aus
a) $a + b = 184^\circ\, 19'\, 35''$ und $c = 108^\circ\, 49'\, 52''$;
b) $a - b = 38^\circ\, 24'\, 17''$ „ $c = 79^\circ\, 13'\, 38''$;
c) $c = 67^\circ\, 14{,}8'$ „ $\alpha + \beta = 123^\circ\, 29{,}5'$;
d) $c = 72^\circ\, 31{,}3'$ „ $\alpha - \beta = 42^\circ\, 43{,}5'$;

---

1) Beachte hier die Anzahl und Möglichkeit der Lösungen! (Weshalb?)

e) $b + c = 107°24'3''$ und $\alpha = 92°47'57''$;
f) $c = 54°13'21''$ „ $a + \alpha = 83°38'25''$.

23. a) bis h) Berechne für den Kugelradius $R = 1$ die Flächeninhalte der in Aufg. 18a) bis d), Aufg. 19e) und f) und schließlich Aufg. 21c) und d) genannten Dreiecke.

24. Auf einer Kugel von Radius $R = 43{,}7$ cm ist ein rechtwinkliges Kugeldreieck ($\gamma = 90°$) gezeichnet, wobei eine Kathete $a = 128°$ und deren Gegenwinkel $\alpha = 120°$ beträgt; wie groß ist der Flächeninhalt?

25. a) Was wird man in einem rechtwinkligen Kugeldreieck ($\gamma = 90°$) unter der Höhe und was unter den Hypotenusenabschnitten verstehen? — Berechne in dem durch $a = 49°12{,}7'$ und $b = 93°28{,}2'$ bestimmten rechtwinkligen Kugeldreieck ($\gamma = 90°$), b) die Höhe h und c) die Hypotenusenabschnitte p und q.

26. Beweise die Formeln (falls $\gamma = 90°$)

a) $\operatorname{tg} a = \sqrt{\operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} p}$ und b) $\sin h = \sqrt{\operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q}$.

27. a) Was versteht man unter einer Höhe eines allgemeinen Kugeldreiecks? b) Berechne die Höhe h_c eines Kugeldreiecks, das bestimmt wird durch die Stücke: $a = 109°3{,}4'$, $b = 56°49{,}7'$, $\alpha = 84°27{,}9'$. (Brauchst du bei dieser Ausrechnung die Seite a?) c) Berechne in dem eben genannten Dreieck die Höhenabschnitte auf c und dann c selbst. (Brauchst du jetzt die Seite a?)

28. a) Zwei senkrecht aufeinanderstehende Ebenen E_1 und E_2 werden von einer dritten Ebene E_3 so geschnitten, daß $\sphericalangle (E_1, E_3) = 43°$ und $\sphericalangle (E_2, E_3) = 85°$ ist; welche Seiten hat diese rechtwinklige körperliche Ecke? (Welche Hilfskugel wirst du benutzen, um die Aufgabe an einem rechtwinkligen Kugeldreieck durchzuführen?) b) Ziehe in der Ebene E_1 eine Gerade g, die mit der Schnittgeraden (E_1, E_2) — wobei wieder E_1 senkrecht auf E_2 stehen soll — einen Winkel von 45° bildet, und lege durch g eine dritte Ebene E_3, die gegen E_1 unter 80° geneigt ist; unter welchem Winkel ist E_3 gegen E_2 geneigt?

29. Ein rechtwinkliges Achsenkreuz wird von einer Ebene E so geschnitten, daß sich die Achsenabschnitte wie $1 : 2 : 3$ verhalten. a) Unter welchen Winkeln schneidet die Ebene E die Ebenen des Achsenkreuzes? b) Welche Winkel hat das in der Ebene E liegende Schnittdreieck?

30. a) Schneide aus Papier einen Kreissektor mit dem Zentriwinkel 250° und teile ihn durch Kniffen des Papiers vom Zentrum aus so in drei Sektoren, daß der eine einen Zentriwinkel von 90° hat und die beiden anderen gleich groß werden. Wie groß sind die Winkel des Kugeldreiecks der drei Sektorenbogen, wenn du aus ihnen eine körperliche Ecke bildest? b) Berechne die Winkel eines gleichseitigen Kugeldreiecks, das du auf ähnliche Weise aus drei kongruenten Sektoren von je 60° erhältst. c) Was wirst du unter dem Umkreisradius r und unter dem Inkreisradius ϱ des eben berechneten gleichseitigen Kugeldreiecks verstehen? d) Berechne r, e) berechne ϱ.

31. a) Unter welchem Winkel sind die Seitenflächen einer geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramide gegeneinander geneigt, wenn je zwei benachbarte Kanten an der Spitze einen Winkel von 25° bilden? (Benutze eine Kugel um die Spitze als Mittelpunkt.) b) Berechne das Entsprechende für eine ebensolche fünfseitige Pyramide, wenn die Kanten an der Spitze einen Winkel von 30° bilden.

32. a) Was versteht man unter einem regelmäßigen Kugelviereck, Kugel-n-Eck? b) Berechne den Inkreisradius eines regelmäßigen Kugelsechsecks, wenn die Sechseckseite 45° beträgt.

33. a) Unter welchem Winkel sind bei einem Tetraeder zwei benachbarte Seitenflächen gegeneinander geneigt? Berechne das Entsprechende für das b) Oktaeder, c) Dodekaeder und d) Ikosaeder.

34. Bei einem regelmäßigen Polyeder stoßen in jeder Ecke p n-Ecke zusammen. Beweise, daß für den Neigungswinkel ε zweier zusammenstoßenden n-Ecke die Formel gilt:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \cos\frac{180^\circ}{p} : \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

35. Stelle dir selbst Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck mit Hilfe der folgenden Tafel:[1])

	a	b	c
a)	49°59′56″	143° 5′12″	120°55′34″,
b)	103°38′57″	171°18′57″	76°30′37″,
c)	36°27′	43°32′31″	54°20′,
d)	127° 4′32″	112°48′	50°,
e)	75°27′14″	67°48′17″	48°19′43″;
f)	104°32′46″	112°11′43″	

	α	β	γ
a)	63°15′12″	135°33′39″	90°,
b)	92° 6′	171° 4′	90°,
c)	46°59′43″	57°59′19″	90°,
d)	120° 3′50″	90°	56°11′56″,
e)	90°	73° 3′ 3″	50°30′27″.
f)		106°56′57″	

1) Aus Laska, Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.

§ 17. Berechnung des schiefwinkligen Kugeldreiecks

Das allgemeine Kugeldreieck

1. Im Kugeldreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ heißt der zu AB senkrechte, durch C gehende größte Kugelkreis die Höhe h_c (vgl. § 16, Aufg. 27). Schneidet die Höhe die Seite AB oder ihre Verlängerung in D, so sind ACD und BCD rechtwinklige Dreiecke. Drücke CD in beiden Dreiecken durch Seiten und Winkel aus und beweise so den

Sinussatz: $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$

2. Im Kugeldreieck ABC treffe die von C auf AB gefällte Höhe h die Seite AB in D, wobei D zwischen A und B liege. AD werde p genannt, dann ist $DB = c - p$. a) Drücke $\cos a$ in $\triangle CDB$ aus. b) Ersetze $\cos h$ aus $\triangle ADC$ durch Seiten, Winkel und p und wende auf $\cos(c-p)$ das Additionstheorem an. c) Leite durch Umformung den

Seitenkosinussatz: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$

her. d) Untersuche, wie sich die Herleitung gestaltet, wenn D auf der Verlängerung von AB liegt. e) Gib die entsprechenden Formeln für $\cos b$ und $\cos c$ an. f) Drücke $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ durch die Seiten des Kugeldreiecks aus.

3. a) Leite durch Übergang zum Polardreieck den

Winkelkosinussatz: $-\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$

her. b) Gib die entsprechenden Formeln für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ an. c) Drücke $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ durch die Winkel des Kugeldreiecks aus.

4. Setze in $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ für $\cos\alpha$ den Wert ein, der sich aus dem Seitenkosinussatz ergibt, und bringe den Ausdruck auf die Form

Halbwinkelsatz: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}}$,

wo $s = \frac{a+b+c}{2}$ gesetzt ist.

Leite in gleicher Weise Formeln für b) $\sin\frac{\beta}{2}$, c) $\sin\frac{\gamma}{2}$, d) $\cos\frac{\alpha}{2}$ (gehe dabei von $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ aus), e) für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, f) für $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ ab.

5. Leite durch Übergang von der Ecke zur Polarecke Formeln für a) $\sin\frac{a}{2}$, b) $\cos\frac{a}{2}$, c) $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ ab (Halbseitensatz).

6. Setze a) in $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$ die aus dem Halbwinkelsatz sich ergebenden Werte ein und bringe den Ausdruck auf die Form

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Leite auf diese Weise her die

Mollweideschen Formeln:

b) $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$, c) $\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$,

d) $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$, e) $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$.

7. Leite aus den Mollweideschen Formeln her die

Neperschen Analogien:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$, b) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$,

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$, d) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

8. Eine dreiseitige Ecke habe die drei Seiten a, b, c und entsprechend die drei Winkel α, β, γ. a) Wieviel von diesen sechs Größen müssen gegeben sein, damit man die anderen berechnen kann? b) Wieviel verschiedene Aufgaben sind hiernach möglich? c) Zeige, daß sich alle diese Aufgaben auf folgende sechs Fälle zurückführen lassen: I. a, b, c; II. α, β, γ; III. a, b, γ; IV. a, β, γ; V. a, b, α; VI. a, α, β.

9. Berechne die Winkel einer dreiseitigen Ecke aus den drei Seiten (Fall I.)

a) $a = 43^\circ 25' 17''$, $b = 58^\circ 49' 26''$, $c = 82^\circ 24' 7''$;
b) $a = 67^\circ 39' 23''$, $b = 47^\circ 42' 38''$, $c = 75^\circ 38' 43''$;
c) $a = 119^\circ 54' 38''$, $b = 89^\circ 23' 4''$, $c = 62^\circ 19' 51''$;
d) $a = 93^\circ 21' 54''$, $b = 107^\circ 16' 48''$, $c = 59^\circ 29' 33''$.

10. Berechne die Seiten aus den drei Winkeln (Fall II.)

a) $\alpha = 49^\circ 18{,}3'$, $\beta = 68^\circ 27{,}5'$, $\gamma = 83^\circ 42{,}7'$;
b) $\alpha = 83^\circ 24{,}2'$, $\beta = 63^\circ 19{,}7'$, $\gamma = 79^\circ 54{,}8'$;
c) $\alpha = 128^\circ 57{,}9'$, $\beta = 71^\circ 32{,}3'$, $\gamma = 98^\circ 35{,}4'$;
d) $\alpha = 143^\circ 2{,}5'$, $\beta = 167^\circ 51{,}4'$, $\gamma = 172^\circ 15{,}3'$.

11. Berechne die dritte Seite und deren anliegende Winkel (Fall III.) aus

a) $a = 43^\circ 19' 42''$, $b = 79^\circ 4' 23''$, $\gamma = 108^\circ 29' 7''$;
b) $b = 69^\circ 2' 18''$ $c = 163^\circ 31' 28''$, $\alpha = 150^\circ 12' 36''$;
c) $\beta = 140^\circ 32{,}2'$, $c = 119^\circ 56{,}3'$, $a = 97^\circ 42{,}6'$;
d) $\gamma = 79^\circ 47{,}8'$, $b = 42^\circ 19{,}8'$, $a = 104^\circ 31{,}7'$.

12. Berechne den dritten Winkel und die ihm anliegenden Seiten (Fall IV.) aus

a) $\alpha = 93^\circ 14' 27''$, $\beta = 31^\circ 27' 28''$, $\gamma = 82^\circ 53' 3''$;
b) $c = 159^\circ 31' 12''$; $\beta = 87^\circ 5' 49''$, $\alpha = 57^\circ 19' 28''$;
c) $\alpha = 83^\circ 9' 46''$, $\gamma = 24^\circ 49' 22''$, $b = 38^\circ 31' 43''$;
d) $\beta = 49^\circ 15' 38''$, $\gamma = 138^\circ 42' 18''$ $a = 12^\circ 49' 18''$.

13. Berechne die dritte Seite und die fehlenden Winkel (Fall V.) aus

a) $\alpha = 119^\circ 24{,}3'$, $a = 69^\circ 14{,}8'$, $b = 42^\circ 21{,}2'$;
b) $b = 42^\circ 57{,}9'$, $c = 51^\circ 28{,}3'$, $\gamma = 47^\circ 59{,}1'$;
c) $a = 131^\circ 19' 32''$, $c = 119^\circ 54' 21''$, $\alpha = 72^\circ 14' 28''$;
d) $\beta = 45^\circ 42' 13''$, $b = 50^\circ 43' 31''$, $c = 142^\circ 39' 52''$.

Achte hierbei auf die Anzahl und Möglichkeit der Lösungen.

14. Berechne den dritten Winkel und die fehlenden Seiten (Fall VI.) aus

a) $\alpha = 114^\circ 19' 59''$, $\gamma = 73^\circ 35' 12''$, $a = 55^\circ 12' 45''$;
b) $a = 84^\circ 25' 12''$, $\alpha = 46^\circ 29' 57''$, $\beta = 73^\circ 52' 4''$;
c) $\beta = 119^\circ 48{,}3'$, $\gamma = 61^\circ 4{,}8'$, $c = 126^\circ 29{,}3'$;
d) $\beta = 79^\circ 21{,}9'$, $\alpha = 59^\circ 33{,}2'$, $b = 103^\circ 18{,}5'$.

15. a) Berechne in dem nahezu rechtwinkligen Dreieck, von dem man kennt $b = 69^\circ 24' 17''$, $\alpha = 49^\circ 28' 51''$ und $\gamma = 89^\circ 54' 17''$, die fehlenden Stücke und vergleiche die Ergebnisse mit denen, die man bei $\gamma = 90^\circ$ erhält.

16. Welche Winkel hat das sphärische Dreieck mit den Seiten a) $a = b = c = 50^\circ$, b) $a = b = c = 60^\circ$, c) $a = b = c = 110^\circ$? d) Welche Seiten hat das sphärische Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \beta = \gamma = 60$? (!) e) Zwischen welchen Grenzen können die Seiten und Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks liegen?

17. Von einem Kugeldreieck ist gegeben

a) $a + c = 200^\circ$,	$b = 147^\circ 13'$,	$\beta = 150^\circ$;	gesucht ist a und c;
b) $b - c = 52^\circ 43'$,	$a = 108^\circ 27'$,	$\alpha = 100^\circ$;	gesucht ist b und β;
c) $\alpha + \beta = 83^\circ 15'$,	$\gamma = 107^\circ 53'$,	$c = 71^\circ 6'$;	gesucht ist a und α;
d) $\beta - \gamma = 92^\circ$,	$\alpha = 45^\circ$,	$a = 53^\circ$;	gesucht ist b und β.

18. a)—f) Berechne zu den Aufgaben 9 bis 14 jedesmal von a) die Flächeninhalte (Kugelradius $R = 1$).

19. a) Welche Seiten hat das Kugeldreieck, von dem gegeben ist $\beta = 39^\circ$, $\gamma = 125^\circ$, $F = 100\ \mathrm{cm}^2$, falls der Kugelradius 10 cm beträgt? b) Ein Kugeldreieck mit dem Flächeninhalt $F = 500\ \mathrm{cm}^2$ hat die Winkel $\alpha = 83^\circ 41'$, $\beta = 97^\circ 20'$, $\gamma = 72^\circ 31'$; welchen Radius hat die zugehörige Kugel?

20. a) Welchen Inhalt hat ein gleichseitiges sphärisches Dreieck, von dem die Summe der Seiten halb so groß ist wie die Summe der Winkel? (Kubische Gleichung!) b) Berechne das Entsprechende für den Fall, daß die Seitensumme nur den dritten Teil der Winkelsumme ausmacht.

21. Ein Kugeldreieck mit den Seiten $a = 65^\circ$, $b = 70^\circ$, $c = 80^\circ$ ist gegeben; wie groß ist a) die Höhe zur Seite a, also h_a, b) die Winkelhalbierende des Winkels β, also w_β, und c) die Seitenhalbierende der Seite c, also s_c? — Wie groß ist der Radius d) ϱ des Inkreises, e) r des Umkreises? f) Wie groß ist der als Strecke gemessene Radius ϱ oder r einer der beiden Kreise auf einer Kugel mit dem Radius 1?

22. Beweise, daß die Winkelhalbierende w_γ die gegenüberliegende Seite c so in zwei Abschnitte u und v teilt, daß $\sin u : \sin v = \sin a : \sin b$, falls u der Seite a und v der Seite b anliegt.

23. Versuche einen Satz aufzustellen, der etwas über das Verhältnis der Höhenabschnitte auf der Gegenseite aussagt.

24. a) Zwei Ebenen E_1 und E_2 schneiden einander unter einem Winkel von 60°; eine dritte Ebene E_3 schneidet E_1 unter 50° und E_2 unter 70°. Welcher Winkel wird auf E_3 durch E_1 und E_2 ausgeschnitten? — In diesen beiden Ebenen E_1 und E_2 [$\sphericalangle (E_1 E_2) = 60^\circ$] wird jetzt von einem Punkt P ihrer

Schnittgeraden g aus je eine Gerade g_1 und g_2 in E_1 und in E_2 gelegt, so daß $\sphericalangle (gg_1) = 27°14'$ und $\sphericalangle (gg_2) = 63°17'$ ist. b) Welchen Winkel bilden g_1 und g_2? c) Unter welchem Winkel ist die Schnittgerade g gegen die Ebene der Geraden g_1 und g_2 geneigt?

25. Von einem Punkt im Raum gehen drei Stäbe aus, die unter den Winkeln $a = 45°$, $b = 60°$, $c = 80°$ gegeneinander geneigt sind; der erste Stab (von b und c begrenzt) sei $s_1 = 49$ cm, der zweite $s_2 = 37$ cm, der dritte $s_3 = 42$ cm. Dieses Dreibein wird mit den Enden der Stäbe auf eine waagerechte Ebene gestellt. a) Unter welchen Winkeln sind die Ebenen der Stäbe gegen die waagerechte Ebene geneigt? b) Wie hoch befindet sich der Scheitel des Dreibeins über der Ebene? c) Welchen Rauminhalt hat die so dargestellte dreiseitige Pyramide?

Übergang von der sphärischen zur ebenen Trigonometrie

26. a) Nimmt man die Seiten a, b, c eines Kugeldreiecks als sehr klein an, so wird man mit um so größerer Annäherung, je kleiner diese Größen sind, ersetzen dürfen:

$$\sin a \text{ durch } a, \quad \cos a \text{ durch } 1 - \frac{a^2}{2} \text{ und } \operatorname{tg} a \text{ durch } a;$$

begründe das. — Im rechtwinkligen Kugeldreieck ($\gamma = 90°$) gelten folgende Formeln:

b) $\cos c = \cos a \cdot \cos b$, c) $\sin \alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$, d) $\cos \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$,

e) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, f) $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$, g) $\cos \alpha = \dfrac{\cos a}{\sin \beta}$.

In welche Formeln der ebenen Trigonometrie gehen diese Formeln der sphärischen Trigonometrie über, wenn das Kugeldreieck sehr klein wird?

27. a) In welchen Satz der ebenen Trigonometrie geht für ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten (vgl. Aufg. 26a) der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$$

über? — Gib das Entsprechende auch für die beiden Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie an:

b) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

c) $$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

d) Für die halben Winkel eines Kugeldreiecks gelten die Formeln

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s-a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$; in welche Formeln der ebenen Trigonometrie gehen diese für ein sphärisches Dreieck mit recht kleinen Seiten über? e) Was wird schließlich bei einem solchen Übergang aus den Mollweideschen Formeln und Neperschen Analogien der sphärischen Trigonometrie?

Das allgemeine Kugeldreieck auf der Erdoberfläche

28. a) Zeige, daß die Flächenformel eines Kugeldreiecks (R Kugelradius)

$$F = 4\,R^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2R} \cdot \operatorname{tg}\frac{s-a}{2R} \cdot \operatorname{tg}\frac{s-b}{2R} \cdot \operatorname{tg}\frac{s-c}{2R}}$$

übergeht in die bekannte Heronische Dreiecksformel der Ebene, wenn die Größen a, b, c im Vergleich zu R recht klein werden! $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$

b) Bestimme hiernach einmal genau nach der angegebenen und das andere Mal nach der Heronischen Formel den Dreiecksinhalt, wenn das Kugeldreieck auf der Erdkugel ($R = 6370$ km) die Seiten $a = 50$ km, $b = 60$ km, $c = 70$ km hat. (Im ersten Fall ist zu beachten, daß a, b, c als Längen gegeben sind; diese Größen müssen also erst im Bogenmaß dargestellt werden!) Welcher Unterschied ergibt sich? — Wie ist das Ergebnis bei c) $a = 5$ km, $b = 6$ km, $c = 7$ km und wie d) bei $a = 500$ km, $b = 600$ km, $c = 700$ km?

29. a) Was kannst du über die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines Kugeldreiecks aussagen, wenn sein Flächeninhalt im Vergleich zu demjenigen der ganzen Kugeloberfläche recht klein ist? b) Für solche Dreiecke wird in der Geodäsie, also auf der Erdoberfläche, statt der Formel (R Kugelradius)

$$F = \frac{R^2\pi}{180^0}(\alpha + \beta + \gamma - 180^0) = \frac{R^2\pi}{180^0}\cdot\varepsilon \;(\varepsilon = \text{sphärischer Exzeß des Dreiecks})$$

die Legendresche Annäherungsformel (r Umkreisradius)

$$F = 2r^2 \sin(\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon)\cdot\sin(\beta - \tfrac{1}{3}\varepsilon)\cdot\sin(\gamma - \tfrac{1}{3}\varepsilon)$$

benutzt, wobei man also statt des sphärischen Dreiecks ein ebenes setzt, dessen Seiten nahezu gleich denen des sphärischen sind. Erkläre das näher und zeige ferner, daß die zweite Formel in eine bekannte der ebenen Trigonometrie übergeht, wenn das Dreieck immer kleiner und kleiner bei endlichem Kugelradius wird.

30. Berechne für folgende Kugeldreiecke auf der Erde ($R = 6370$ km) je einmal nach der ersten und einmal nach der zweiten Formel (Aufg. 29 b) die Flächeninhalte und gib die Differenzen der verschiedenen Ergebnisse an:

a) $\alpha = 52^0$, $\beta = 61^0$, $\gamma = 70^0$;

b) $\alpha = 38^0\,3'59''$, $\beta = 56^0 29' 21''$, $\gamma = 85^0 46' 46''$;

c) $\alpha = 43^0 57' 38''$, $\beta = 106^0 43' 28''$, $\gamma = 29^0 19' 23''$.

d) Wie hätte man ohne große Rechnung überschlagen können, für welches Dreieck die beiden Ergebnisse den kleinsten Unterschied aufweisen?

31. **a)** Auf der Erdoberfläche sind zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben durch ihre geographischen Koordinaten φ_1, λ_1 und φ_2, λ_2. Welche Stücke kennt man dann von dem Kugeldreieck A_1A_2P, wenn P den Nordpol der Erde darstellt? **b)** Die Seite A_1A_2 ist die kürzeste Entfernung auf der Erdoberfläche von A_1 nach A_2. Wie läßt sie sich berechnen? — Führe diese Berechnung durch für die folgenden Ortspaare (rechne die Peripherie eines größten Erdkugelkreises zu 40000 km und runde auf ganze Kilometer ab!):

c)	Bonn	($\lambda_1 = 7^0\ 6'$,	$\varphi_1 = 50^0 44'$),
	Berlin	($\lambda_2 = 13^0 24'$,	$\varphi_2 = 52^0 30'$);
d)	Bochum	($\lambda_1 = 7^0 13'$,	$\varphi_1 = 51^0 29'$),
	Dresden	($\lambda_2 = 13^0 44'$,	$\varphi_2 = 51^0\ 3'$);
e)	Augsburg	($\lambda_1 = 10^0 54'$,	$\varphi_1 = 48^0 22'$),
	Leipzig	($\lambda_2 = 12^0 23'$,	$\varphi_2 = 51^0 20{,}5'$);
f)	Köln	($\lambda_1 = 6^0 57{,}5'$,	$\varphi_1 = 50^0 56{,}5'$),
	München	($\lambda_2 = 11^0 36'$,	$\varphi_2 = 48^0\ 8'$).

Miß die gefundenen Längen c) bis f) im Atlas nach! Woher rühren die Unterschiede?

g)	Rom — Kapitolsternwarte	($\lambda_1 = 12^\circ 29' 5''$,	$\varphi_1 = 41^\circ 53' 34''$ N),
	Budapest — Sternwarte	($\lambda_2 = 19^\circ 3' 49''$,	$\varphi_2 = 47^\circ 29' 35''$ N);
h)	Berlin	($\lambda_1 = 13^\circ 24'$ O,	$\varphi_1 = 52^\circ 30'$ N),
	New York	($\lambda_2 = 73^\circ 58'$ W,	$\varphi_2 = 40^\circ 48'$ N);

i) Helgoland, St. Helena, **k)** Hamburg, Rio de Janeiro. (Entnimm die Werte φ und λ für diese beiden letzten Aufgaben dem Atlas!)

32. Neapel ($\lambda = 14^\circ 15'$ O) hat ungefähr die gleiche Breite wie New York ($\lambda = 73^\circ 58'$ W), nämlich $\varphi = 40^\circ 48'$ N. **a)** Ist der durch die beiden Orte gelegte größte Kugelkreis nach Norden oder nach Süden gewölbt? **b)** Welches ist die größte Breitenabweichung des größten Kugelkreises? **c)** Bestimme die Entfernung der beiden Orte auf dem größten Kugelkreis.

33. Wie weit sind vom Schulort[1]) ($\lambda =$ $\qquad\qquad$ $\varphi =$ $\qquad$) entfernt:

a) Athen ($\lambda = 23^\circ 45'$ O, $\varphi = 37^\circ 58'$ N), **b)** Bordeaux ($\lambda = 0^\circ 31'$ W, $\varphi = 44^\circ 50'$ N), **c)** Chikago ($\lambda = 87^\circ 37'$ W, $\varphi = 41^\circ 50'$ N), **d)** Greenwich ($\lambda = 0^\circ$, $\varphi = 51^\circ 29'$ N), **e)** Kap Horn ($\lambda = 67^\circ 22'$ W, $\varphi = 56^\circ 2'$ S), **f)** Honolulu ($\lambda = 157^\circ 35'$ W, $\varphi = 21^\circ 16'$ N), **g)** Apia ($\lambda = 171^\circ 41'$ W, $\varphi = 13^\circ 39'$ S)?

---

1) Die Werte sind vom Schüler einzutragen.

34. Für die Bestimmung eines Erdbebenherdes mit Hilfe von Seismometeraufzeichnungen ist die Differenz des Weges der Erdbebenwellen auf geradem Wege durch den Erdkörper und auf kürzestem Wege an der Erdoberfläche von Wichtigkeit. Stelle diese Wegdifferenz für Bremen ($\lambda = 8^0 49'$ O, $\varphi = 53^0 4{,}5'$ N) und Tiflis ($\lambda = 44^0 45'$ O, $\varphi = 41^0 43'$ N) fest.

35. **a)** In der Nautik kommt es außer auf die Bestimmung der kürzesten Entfernung e zwischen zwei Punkten A_1 und A_2 auf der Erde noch auf den Kurs der Abfahrt und Ankunft an. Da bedient man sich (auch wegen der größeren Genauigkeit) zur Berechnung der Neperschen Analogien. Stelle danach die nötigen Formeln für die beiden Orte A_1 (λ_1, φ_1) und A_2 (λ_2, φ_2) auf. — Berechne die Größen α, β und e für folgende Fälle:

b) Honolulu ($\lambda_1 = 157^\circ 35'$ W, $\varphi_1 = 21^\circ 16'$ N), San Franzisko ($\lambda_2 = 122^\circ 24'$ W, $\varphi_2 = 37^\circ 48'$ N); **c)** Montevideo ($\lambda_1 = 56^\circ 13'$ W, $\varphi_1 = 34^\circ 52'$ S), Kapstadt ($\lambda_2 = 18^\circ 25'$ O, $\varphi_2 = 33^\circ 54'$ S); **d)** Jokohama ($\lambda_1 = 139^\circ 39'$ O, $\varphi_1 = 35^\circ 27'$ N), Kap Horn ($\lambda_2 = 67^\circ 22'$ W, $\varphi_2 = 56^\circ 2'$ S).

36. Im Jahre 1874 legte man von der Insel Valentia (A_1) bei Irland nach Neufundland (A_2) ein Kabel; man brauchte 3407 km Kabel. **a)** Um wieviel Prozent war die gebrauchte Kabellänge größer als die theoretisch kürzeste Linie (Gründe?), und **b)** in welcher Richtung laufen die Kabelenden ins Meer hinaus? — Für die Endpunkte A_1 und A_2 des Kabels gelten die Werte

$$\varphi_1 = 51^\circ 55', \qquad \varphi_2 = 47^\circ 42', \qquad \lambda_1 - \lambda_2 = 42^\circ 59'.$$

37. Ein Dampfer fährt von Sandy Hook ($\lambda_1 = 72^\circ 2'$ W, $\varphi_1 = 40^\circ 28'$ N) auf einem größten Kreis nach Kap Lizard ($\lambda_2 = 5^\circ 12'$ W, $\varphi_2 = 49^\circ 58'$ N) mit einer Stundengeschwindigkeit von 17,3 Seemeilen (1 sm $= 1{,}852$ km), die während der ganzen Fahrt beibehalten wird. **a)** Nach welcher Zeit seit der Abfahrt und **b)** wo hat der Dampfer die Hälfte seines Weges zurückgelegt? **c)** Wo befindet er sich nach drei Tagen Fahrt? — Wieviel Stunden nach der Abfahrt schneidet der Dampfer **d)** den Meridian 45° W und **e)** den Breitenkreis 45° N?

§ 18. Praktische Anwendungen aus der Himmelskunde[1])

Die Grundbegriffe der Himmelskoordinaten und der Zeit

Vorbemerkung. Im folgenden soll bedeuten:

h die Höhe eines Gestirns,	τ seinen Stundenwinkel,
z seine Zenitdistanz,	ϑ den Stundenwinkel des Frühlingspunktes $\doteq$ Sternzeit,
a sein Azimut,	MEZ die mitteleuropäische Zeit,
δ seine Deklination,	φ die geographische Breite eines Ortes,
α seine Rektaszension,	λ die geographische Länge,
λ seine Länge[2]),	
β seine Breite,	
Zgl. die Zeitgleichung,	w. Z. die wahre Ortszeit.

Ferner werde in den folgenden Aufgaben gesetzt:

Die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\ 27'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $\varrho = 16'$, die Strahlenbrechung im Horizont $r = 34'$, der Erdradius $R = 6370$ km. Die bürgerliche Dämmerung rechnet zwischen den Sonnenhöhen 0^0 und -6^0, die astronomische Dämmerung zwischen den Sonnenhöhen 0^0 und -18^0.

1. **a)** Beschreibe die Bahn eines Fixsternes an der Himmelskugel während eines Tages. **b)** Erkläre die Begriffe Pol (P), Äquator, Poldistanz, Stundenkreis an der Himmelskugel. **c)** Der Abstand des Parallelkreises eines Sternes vom Äquator heißt Deklination (δ). Wie mißt man die Deklination? In welcher Beziehung stehen Poldistanz und Deklination? **d)** Derjenige Stundenkreis an der Himmelskugel, dessen Ebene in der Nordsüdrichtung liegt, heißt Meridian des Beobachtungsortes. Der Winkel zwischen einem beliebigen Stundenkreis und dem Meridian heißt Stundenwinkel (τ): Zeige, daß ein Fixstern in gleichen Zeiten gleiche Stundenwinkel beschreibt.

2. Gib Poldistanz und Deklination **a)** des Polarsternes, **b)** eines Sternes auf dem Äquator, **c)** des Südpoles (P') an. **d)** Wodurch unterscheiden sich die Sterne nördlich und südlich des Himmelsäquators in ihrer Stellung? **e)** Was weiß man über die Deklination eines Sternes, der an einem der Lage nach gegebenen Ort gerade im Zenit beobachtet wird?

3. Unter den Koordinaten eines Gestirnes im äquatorialen System versteht man Stundenwinkel und Deklination. **a)** Wie ändern sich diese Koordinaten bei den Planeten, dem Mond und der Sonne im Gegensatz zu den Fixsternen?

4. Welchen Durchmesser hat die Bahn des Polarsternes ($\delta = 88^0 48'$)? Nimm zum Vergleich den mittleren Monddurchmesser ($31'$).

5. **a)** Erkläre die Begriffe Horizont, Zenit (Z), Zenitdistanz (z), Nadir (Z'), Höhe (über dem Horizont) an der Himmelskugel. **b)** In welcher Beziehung stehen Zenitdistanz und Höhe (h)? **c)** Wie kann man die Richtung eines Gestirnes festlegen? **d)** Welches Azimut (a) haben Nordpunkt (N), Südpunkt (S), Ostpunkt (O), Westpunkt (W)?

6. **a)** Was versteht man unter Polhöhe? **b)** Zeige, daß die Polhöhe an jedem Orte gleich der geographischen Breite dieses Ortes ist. **c)** Wie gestaltet sich diese Beziehung auf der südlichen Halbkugel der Erde?

7. **a)** Unter welchem Winkel schneidet der Himmelsäquator den Horizont? Beantworte dieselbe Frage insbesondere für einen Beobachter, der sich **b)** in einem Punkt des (Erd-)Äquators, **c)** im Nordpol oder Südpol befindet. **d)** An welchen Punkten der Erde fallen äquatoriales und horizontales Koordinatensystem zusammen?

---

1) Viele der Aufgaben dieses Paragraphen lassen sich ebensogut wie durch Rechnung auch durch Konstruktion lösen. Darauf ist überall zu achten.

2) Die Länge eines Gestirns kommt nur in den Aufgaben 65—73 vor; eine Verwechslung mit der (auch mit λ bezeichneten) geographischen Länge des Beobachtungsortes ist nicht möglich.

8. a) Wie liegen die Sterne, deren ganze Bahn an einem Orte von der geographischen Breite φ am Himmel sichtbar ist (Zirkumpolarsterne)? b) Welche Sterne gehen täglich auf und unter? c) Welche Sterne kommen überhaupt nicht über den Horizont?

9. Unter welchen Breiten werden die folgenden Sterne Zirkumpolarsterne: a) Wega in der Leier ($\delta = 38°42'$), b) Kapella im Fuhrmann ($\delta = 45°54'$), c) der Polarstern ($\delta = 88°48'$)? d) Welche Sterne sind am Nordpol zirkumpolar?

10. Welche Deklination muß die Sonne erreicht haben, damit sie zirkumpolar ist (Mitternachtssonne) a) am Nordkap ($\varphi = 71°10'$), b) in Hammerfest ($\varphi = 70°39'$)? c) Bis zu welcher Breite ist überhaupt die Erscheinung der Mitternachtssonne möglich? — Erörtere in den drei Fällen auch den Einfluß der Strahlenbrechung.

11. Den wievielten Teil des Himmels kann man innerhalb 24 Stunden überblicken a) in Berlin, b) an deinem Wohnort, c) am Pol, d) am Äquator?

12. a) Wie weit müßte man von Berlin aus nach Süden gehen, um das Sternbild des Südlichen Kreuzes (δ rund $-63°$) zu beobachten? b) In welchem Gebiet der Erde ist der Sirius ($\delta = -16°15'$) nicht sichtbar?

13. Um die Nordsüdrichtung festzustellen, beobachtet man mit einem Theodoliten, daß ein Fixstern um 10^h die Höhe $40°$ erreicht, während auf dem horizontalen Teilkreis der Winkel $\alpha = 11°57'$ abgelesen wird. Die gleiche Höhe hat der Stern abermals um $17^h\,2^m$, und man liest da den Winkel $\beta = 160°44'$ ab. Wie liegt die Nordsüdrichtung auf dem Teilkreis? (Meridianbestimmung nach der Methode der korrespondierenden Höhen.)

14. a) Welches ist der höchste und der tiefste Mittagsstand der Sonne in Rom ($\varphi = 41°54'$), wenn die Neigung des Äquators gegen die Ekliptik $23°27'$ beträgt? b) Welchen tiefsten Stand unter dem Horizont kann die Sonne in Berlin ($\varphi = 52°30'$) erreichen?

15. a) Wie hoch steht die Sonne mittags an deinem Schulort an einem Wintertag, für den die Deklination der Sonne $\delta = -19°25'$ beträgt? b) Wo steht die Sonne am 21. Juni 12^h mittags höher, in New York ($\varphi = 40°44'$) oder am Äquator?

16. Zu Frühlingsanfang ändert sich die Deklination der Sonne in 1 Stunde um $1'$. Kurz nach ihrem Meridiandurchgang erreicht die Sonne infolgedessen noch einmal dieselbe Höhe, die sie im Meridian hatte. Wann ist das? (Berechne die Änderung der Meridianhöhe während 1 Minute!)

·17. Unter **wahrer Ortszeit** (= wahrer Sonnenzeit) versteht man den Stundenwinkel der wirklichen Sonne. Da die wirkliche Sonne in gleichen Zeiten nicht gleiche Stundenwinkel beschreibt (vgl. Aufg. 1d), führt man eine gedachte Sonne ein, die mittlere Sonne, die diese Eigenschaft aufweist und jene Ungleichheiten ausgleicht. **a)** Warum können unsere Taschenuhren nicht wahre Ortszeit angeben? **b)** Welche Uhren zeigen wahre Ortszeit an? **c)** Durch welche Beobachtung erhält man die wahre Ortszeit? **d)** Wo liegen alle Orte auf der Erde, die im selben Augenblick auch die gleiche wahre (mittlere?) Ortszeit haben?

18. Unter der **Zeitgleichung** (Zgl.) versteht man den Unterschied der wahren Ortszeit von der mittleren Zeit. **a)** Stelle den Verlauf der Zeitgleichung graphisch dar, indem du die Werte von 10 zu 10 Tagen aus einem Kalender entnimmst! **b)** Erkläre: Wahre Ortszeit = Mittlere Ortszeit — Zgl.!

19. Unter der **mitteleuropäischen Zeit** (MEZ) versteht man die mittlere Ortszeit des 15. Meridians. Wie unterscheidet sich **a)** die Greenwicher Zeit von der MEZ, **b)** die mittlere Zeit des 14. Meridians östlicher Länge von der MEZ? **c)** Wie berechnet man aus der wahren Ortszeit die MEZ und wie **d)** die Greenwicher Zeit? **e)** Welche Größen müssen bekannt sein, um zu einer gegebenen MEZ den Stundenwinkel der wahren Sonne für Berlin zu berechnen?

20. Wie hoch steht die Sonne an deinem Wohnort ($\varphi =$) mittags (wahre Ortszeit) **a)** am 22. März ($\delta = 0^\circ$), **b)** am 22. Juni ($\delta = 23^\circ\,27'$), **c)** am 12. November ($\delta = -17^\circ\,28'$)?

21. Wie hoch steht die Sonne mittags am 15. Februar ($\delta = -12^\circ\,58'$) in **a)** Berlin ($\varphi = 52^\circ\,30'$ N), **b)** Singapore ($\varphi = 1^\circ\,16'$ N), **c)** Sidney ($\varphi = 33^\circ\,52'$ S), **d)** am Nordkap ($\varphi = 71^\circ\,10'$ N)?

22. **a)** Man habe auf See mit einem Spiegelsextanten die scheinbare Höhe des unteren Sonnenrandes gemessen. Welche Berichtigungen müssen angebracht werden, um daraus die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes zu finden? **b)** Beantworte ohne trigonometrische Rechnung: Über welchem Ort der Erde steht die Sonne zu Frühlingsanfang im Zenit, wenn sie in Berlin gerade untergeht? **c)** Wie weit ist dieser Ort von Berlin entfernt?

23. In **a)** Dresden ($\lambda = 13^\circ\,44'$ O), **b)** Rostock ($\lambda = 12^\circ 9'$ O), **c)** Karlsruhe ($\lambda = 8^\circ\,24'$ O) ergibt eine Zeitbestimmung für die wahre Ortszeit $9^h\,17^m\,42^s$. Setze dies in mitteleuropäische Zeit um (Zgl. am Beobachtungstage ist $-3^m\,17^s$).

24. **a)** Welche Zeit müßte in Hamburg ($\lambda = 10^\circ$ O) eine Sonnenuhr anzeigen, wenn es nach MEZ 16^h ist und die Zeitgleichung -3^m beträgt?

b) Um 3^h Greenwicher Zeit zeigt in Berlin ($\lambda = 13^0\ 24'$ O) eine Sonnenuhr $3^h\ 53^m$. Wie groß ist demnach die Zeitgleichung?

25. Ersetzt man die mittlere Sonne (Aufg. 17) durch einen Fixstern, so kommt man zum Begriff der Sternzeit. Wegen der Eigenbewegung der Sonne und natürlich auch der mittleren Sonne hat der Sterntag eine um 4^m (genauer $3^m\ 56^s$) kürzere Dauer als der mittlere Sonnentag. **a)** Drücke die Länge einer Stunde in Sternzeit aus durch Minuten in Sonnenzeit = bürgerlicher Zeit. **b)** Rechne $4^h\ 25^m\ 13^s$ Sternzeit um in Sonnenzeit! **c)** Welche Sternzeit wird dargestellt durch $18^h\ 53^m\ 36^s$ Sonnenzeit? **d)** Wie könnte man es möglich machen, daß unsere Taschenuhren nach Sternzeit gehen? **e)** Geht eine Uhr nach Sternzeit einer gewöhnlichen vor oder nach? (Grund.)

26. Unter Sternzeit versteht man den Stundenwinkel des Frühlingspunktes (Schnitt des Äquators mit der Ekliptik). **a)** Zu welchem Zeitpunkt im Jahr stimmt die Sternzeit mit der bürgerlichen Zeit überein? **b)** Erkläre folgende Regel zur angenäherten Bestimmung der Sternzeit: Am 20. eines jeden Monats ist 18^h die Sternzeit gleich der doppelten Monatszahl (also beispielsweise am 20. Nov. ist sie $2 \cdot 11^h = 22^h$).

27. In den Nautischen Jahrbüchern hat man für jeden Tag des Jahres den Unterschied zwischen Sternzeit und bürgerlicher Zeit für 12^h mittags nach Greenwicher Zeit berechnet und findet diese Angabe unter der Rubrik: Rektaszension der mittleren Sonne im mittleren Greenwicher Mittag. Dabei versteht man unter Rektaszension (= gerade Aufsteigung) eines Sternes (hier des Mittelpunktes der mittleren Sonne) den auf dem Äquator gemessenen Abstand des Frühlingspunktes von dem durch den Stern gelegten Stundenkreis, der im umgekehrten Sinn wie der Stundenwinkel (also in der Richtung von Westen über Süden nach Osten) gezählt wird. **a)** Inwiefern ist ein Stern am Himmel durch Deklination (δ) und Rektaszension (α) ebenso fest bestimmt wie ein Ort auf der Erde durch Breite und Länge? **b)** Weshalb darf man sagen, die Rektaszension eines Sternes gibt die Sternzeit an, um welche er später kulminiert als der Frühlingspunkt? **c)** Zeige, daß der Unterschied zwischen mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit zu jedem Zeitpunkt gleich der Rektaszension der mittleren Sonne ist. **d)** Erkläre, daß die Rektaszension der mittleren Sonne im mittleren Greenwicher Mittag die Zeit angibt, die eine Sternuhr in Greenwich angeben müßte in dem Augenblick, in dem eine nach Greenwicher bürgerlicher Zeit gehende Uhr gerade 12 zeigt.

28. Wie kann man **a)** aus der MEZ die Sternzeit berechnen und wie umgekehrt **b)** aus der Sternzeit die MEZ? **c)** Weshalb ist der Unterschied, den die Sternuhr an einem Ort des 15. Meridians anzeigt, gegenüber der gewöhnlichen Uhr noch um 10^s kleiner, als es im Nautischen Jahrbuch für den Greenwicher mittleren Mittag angegeben ist?

29. a) Beschreibe am Himmel den Winkel, durch den die wahre Ortszeit angegeben wird. — Um sich am Himmel eine Vorstellung von der Sternzeit machen zu können, muß man bedenken, daß der Frühlingspunkt auf dem Himmelsmeridian liegt, der vom Pol zwischen γ und δ des Großen Bären (dritter und vierter Stern) etwas näher an δ verläuft, und zwar in der entgegengesetzten Richtung; Sternzeit 0^h ist es, wenn der Frühlingspunkt kulminiert. Vergleiche die nebenstehende Figur 28. b) Wie groß ist die augenblickliche Sternzeit, wenn diese Linie am Himmel — wir rechnen sie angenähert vom Polarstern aus — genau nach oben (nach Süden) verläuft? c) Wie muß diese Linie (wir können sie den Zeiger der Himmelsuhr = Sternzeituhr nennen) verlaufen, wenn es nach Sternzeit 6^h, 12^h, 18^h ist?

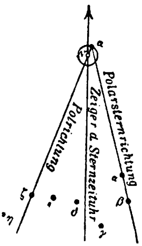

Fig. 28.

30. a) Übe dich abends am Sternhimmel im Ablesen der Sternzeit an dieser Himmelsuhr. b) Inwiefern kann man nun auch umgekehrt jederzeit bei bekannter Sternzeit die Stellung des Großen Bären bestimmen?

31. a) **Durch ähnliche Betrachtungen wie in Aufg. 29 kann man auch die Breitenbestimmung eines Ortes etwas genauer als in Aufg. 6 ausführen. Merke, daß der Pol etwa 70′ vom Polarstern absteht,** und zwar vom Polarstern aus in Richtung nach dem 6. Stern ζ (Mizar) des Großen Bären, s. Fig. 28. b) Welche Korrektion ist also an der gemessenen Polarsternhöhe anzubringen, wenn jene Linie genau nach unten zeigt? c) Wie muß diese Linie verlaufen, wenn die Höhe des Polarsterns genau die geographische Breite angeben soll? d) Übe dich im Schätzen der Korrektion für beliebige Lagen! (Im Nautischen Jahrbuch sind diese Korrektionen berechnet!)

32. Gib noch einmal zur Wiederholung die Definition der in der Vorbemerkung erwähnten Größen h, z, a, δ, α, τ, ϑ, MEZ an.

33. Erläutere durch Zeichnungen die Größen a) h, z und a, b) δ und τ, c) δ, α und ϑ. d) Welche Gleichung besteht zwischen τ, ϑ, α? (Zeichnung!)

Das Aufgangsdreieck, Morgen- und Abendweite

34. Wenn ein Gestirn G auf- oder untergeht, ist seine Lage durch den Schnittpunkt seiner Bahn mit dem Horizont gegeben. P sei der Pol, N der Nordpunkt. a) Zeige, daß das Aufgangsdreieck GNP rechtwinklig ist. b) Deute die Stücke des Aufgangsdreiecks. c) Kann das Aufgangsdreieck zwei rechte Winkel haben?

35. Gib an, welche Größen sich mit Hilfe des Aufgangsdreiecks bestimmen lassen, wenn als Gestirn die Sonne gewählt wird und a) die Breite des Beobachtungsortes und die Deklination der Sonne, b) die Breite des Beobachtungsortes und entweder Zeit oder Ort des Untergangs bekannt ist. c) Wie läßt sich das Aufgangsdreieck zur Bestimmung der Breite ausnutzen?

36. Berechne[1]), wo (Azimut?) und wann (wahre Ortszeit?) am längsten Tag die Sonne ($\delta = 23°27'$) auf- und untergeht in **a)** Berlin ($\varphi = 52°30'$ N), **b)** Dresden ($\varphi = 51°3'$ N), **c)** Hammerfest ($\varphi = 70°39'$ N), **d)** Wien ($\varphi = 48°14'$ N), **e)** Kairo ($\varphi = 30°7'$ N), **f)** Buenos Aires ($\varphi = 34°34'$ S), **g)** St. Helena ($\varphi = 50°50'$ S), **h)** in deinem Schulort ($\varphi =$)[2])?

37. a)—h) Löse die entsprechenden Aufgaben für den kürzesten Tag ($\delta = -23° 27'$).

38. a)—h) Löse die entsprechenden Aufgaben für $\delta = 15°$.

39. a)—c) Löse dieselben Aufg. 36 bis 38 nochmals für deinen Schulort unter Berücksichtigung der Strahlenbrechung und des Sonnendurchmessers (s. die Vorbemerkung!).

40. a)—h) Wie lange dauert der kürzeste und wie lange der längste Tag an den in Aufg. 36 genannten Orten?

41. a)—d) Berechne für deinen Wohnort zu Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterbeginn die Morgenweite (d. h. den Abstand der aufgehenden Sonne vom Ostpunkt des Horizonts) und Abendweite der Sonne (d. h. den Abstand der untergehenden Sonne vom Westpunkt des Horizonts)

42. Unter welchem Winkel schneidet die Sonnenbahn den Horizont **a)** am 1 März ($\delta = -8°$) in Berlin, **b)** am längsten Tag in Wien, **c)** am kürzesten Tag in deinem Wohnort? (Benutze die in Aufg. 36 angegebenen Breiten.)

43. a) Wann und wo geht der Sirius ($\delta = -16°36'$) in Hamburg ($\varphi = 53°34'$ N) auf und unter, wenn er $22^h\ 29^m$ kulminiert? — Berechne das Entsprechende für **b)** Spika ($\delta = -10°42'$) und Kapstadt ($\varphi = 33°54'$ S); Kulmination $2^h\ 53^m$; **c)** für Rigel ($\delta = -8°18'$), Berlin ($\varphi = 52°\ 30'$ N), Kulmination $19^h\ 13^m$.

44. Auf welchem Breitenkreis liegt der Ort, für den **a)** die Wega ($\delta = 38°43'$) untergeht in NW, **b)** Regulus ($\delta = 12°22'$) aufgeht in ONO? **c)** und **d)** unter welchen Breiten werden die eben genannten Sterne Zirkumpolarsterne?

45. a) Welche Breite müssen Orte der nördlichen Halbkugel haben, an denen man einen Stern (γ Crucis: $\delta = -56°38'$) des Südlichen Kreuzes gerade noch am Horizont sieht? (Vgl. Aufg. 12a.) **b)** Berechne entsprechend den Breitenkreis der südlichen Halbkugel, auf dem man den Polarstern ($\delta = +88°52'$) gerade noch am Horizont sehen kann.

46. In welcher Höhe kulminiert die Sonne, wenn sie für **a)** Berlin ($\varphi = 52° 30'$ N) in WNW, **b)** Kopenhagen ($\varphi = 55°4'$ N) in WSW, **c)** Kap Horn ($\varphi = 56°2'$ S) in N 65° zu W untergeht? **d)** bis **f)** Berechne die dazugehörigen Tageslängen.

---

1) Wenn nichts anderes bemerkt ist, soll in diesen Aufgaben von der Strahlenbrechung abgesehen werden; für die Sonne soll ebenso der Sonnenmittelpunkt genommen werden.

2) Ist vom Schüler auszufüllen.

47. Unter welcher Breite hat die Sonne a) bei der Deklination $\delta = 21^{\circ}23'$ die Morgenweite $28^{\circ}13'$ nördl., b) bei $\delta = -14^{\circ}49'$ die Morgenweite $18^{\circ}8'$ südl.?

48. Unter welcher nördlichen Breite beträgt die Dauer des längsten Tages ($\delta = +23^{\circ}27'$) 20 Stunden a) ohne, b) mit Berücksichtigung der Strahlenbrechung ($s = 34'$). c) Unter welcher Breite beträgt der kürzeste Tag 10 Stunden?

49. a) Bei welcher Deklination der Sonne kann man am Nordkap ($\varphi = 71^{\circ}10'$ N) die Mitternachtssonne sehen? (Vgl. Aufg. 10a). b) Wie lange dauert (ungefähr) die Polarnacht auf Spitzbergen ($\varphi = 80^{\circ}$ N)? Nimm an, daß sich die Sonne in der Ekliptik mit konstanter Geschwindigkeit bewegt!) c) Auf welchem Parallelkreis dauert für $\delta = +23^{\circ}27'$ die astronomische, d) die bürgerliche Dämmerung gerade die ganze Nacht durch? (S. die Vorbemkg.)

50. Am 6. November (δ der Sonne $= -15^{\circ}54'$) erscheint auf dem Fuchsturm bei Jena der Aussichtsturm des Schneekopfes bei Ilmenau im Rahmen der untergehenden Sonne unter einem Azimut, das von WSW um $3^{\circ}16'$ nach S abweicht. Berechne danach die geographische Breite des Fuchsturmes.

51. An einem Tage im August soll, von Leipzig aus gesehen, der Brocken vor der untergehenden Sonne erscheinen. Bestimme in deinem Atlas diese Richtung, ferner die geographische Breite Leipzigs und berechne für jenen Tag die Deklination δ der Sonne.

52. a) Ein Beobachter auf dem Königsstuhl auf Rügen ($\varphi = 54^{\circ}35'$ N, Höhe über dem Meere 133 m) sieht die Sonne um $4^{h}\,10^{m}$ aufgehen. Wieviel später geht sie für einen Beobachter am Meeresstrand auf? b) In München ($\varphi = 48^{\circ}8'$ N) beobachtete man an einem Tage (Deklination der Sonne $\delta = 12^{\circ}30'$), daß eine im Zenit stehende Zirruswolke noch 25^{m} nach Sonnenuntergang beleuchtet wurde. Wie hoch war die Wolke?

Das Poldreieck am ersten Vertikal

53. An einem Orte steht die Sonne $7^{h}\,6^{m}$ wahrer Ortszeit genau im Osten, und zwar in einer Höhe von $27^{\circ}42'$. a) Welches ist die Breite des Ortes, b) welche Deklination hat da die Sonne, und c) in welcher Höhe steht die Sonne im Süden?

54. a)—c) Beantworte dieselben Fragen (Aufg. 53) für einen anderen Ort, wenn die Zeitdifferenz zwischen Kulmination und Oststellung gerade 5 Stunden beträgt und die Sonne im Osten noch $23^{\circ}11'$ hoch steht.

55. Wann (wahre Ortszeit?) und in welcher Höhe steht die Sonne am längsten Tag ($\delta = +23^{\circ}27'$) genau westlich in a) Berlin ($\varphi = 52^{\circ}30'$ N), b) New York ($\varphi = 40^{\circ}46'$ N), c) Kairo ($\varphi = 30^{\circ}7'$ N)?

56. In welcher Höhe steht die Sonne genau **a)** östlich in London ($\varphi = 52^\circ$ N) um ein Viertel nach 7^h (w. Z.), **b)** westlich in Neapel ($\varphi = 40^\circ 50'$ N) $17^h\ 32^m$ (w. Z.).

57. Zu welcher Zeit (w. Z.) und bei welcher Deklination passiert die Sonne den ersten Vertikal in Helsinki ($\varphi = 60^\circ 10'$ N) in einer Höhe von $27^\circ 16'$?

58. Um die Breite seines Schulortes und für den Beobachtungstag die Sonnendeklination überschlägig zu bestimmen, stellte ein Schüler einen 17,3 cm langen, angespitzten Bleistift senkrecht auf eine horizontale Ebene und maß darauf morgens, als die Sonne genau im Osten stand, den Schatten des Stiftes zu 40,5 cm. Den Zeitpunkt dieser Ostweststellung des Schattens notierte er sich und wartete, bis der Schatten genau einen rechten Winkel beschrieben hatte; dieser Zeitpunkt war 5 Std. $1\frac{1}{2}$ Min. später gekommen. **a)** Berechne die Breite des betreffenden Ortes und **b)** die Deklination der Sonne am Beobachtungstag. **c)** Der Schüler hatte auch noch den Schatten des Stiftes in der Nordsüdstellung gemessen; wie lang war der Schatten? **d)** Wie gestaltet sich die Berechnung von δ und φ, wenn die Länge des nach W und N fallenden Schattens gemessen wird?

59. Zwischen der Süd- und Weststellung von Pollux ($\delta = +28^\circ 13'$) liegen 4 Std. und 27 Min. **a)** Auf welchem Breitenkreis wurde beobachtet? **b)** In welchen Höhen befand sich der Stern in beiden Stellungen über dem Horizont?

60. **a)** Berechne die Höhe eines Sternes mit der Deklination $\delta = 8^\circ 45'$ bei seinem Durchgang durch den ersten Vertikal in Berlin ($\varphi = 52^\circ 30'$ N). **b)** Unter welcher Breite erscheint Rigel ($\delta = -8^\circ 18'$) genau im Westen $14^\circ 38'$ über dem Horizont?

Das Poldreieck am Sechsuhrkreis

61. Welche Deklination hat die Sonne, wenn sie **a)** in Berlin ($\varphi = 52^\circ 30'$ N) um 6 Uhr (w. Z.) in einer Straße mit der Richtung W $6\frac{1}{2}^\circ$ S keinen Schatten wirft, und **b)** wie hoch steht sie dann am Himmel?

62. In welcher Richtung sieht man die Sonne in München ($\varphi = 48^\circ 8'$ N), wenn sie um 6^h (w. Z.) $13\frac{1}{4}^\circ$ hoch steht?

63. **a)** In welcher Höhe und **b)** in welcher Richtung steht an deinem Schulort die Sonne, wenn sie am längsten (kürzesten) Tag ($\delta = \pm 23^\circ 27'$) gerade den Sechsuhrkreis schneidet?

64. Unter welcher Breite und in welcher Richtung steht Arkturus ($\delta = +19^\circ 37'$) im Sechsuhrkreis in einer Höhe von $13^\circ 7'$?

Das rechtwinklige Dreieck zwischen Äquator und Ekliptik

65. Wie man einen Stern durch die äquatorialen Koordinaten α und δ bestimmen kann, so kann man ihn auch durch die ekliptikalen Koordinaten

λ und β, seine astronomische Länge und Breite, bestimmen. a) Definiere noch einmal Rektaszension und Deklination! b) Beim ekliptikalen System tritt an Stelle des Himmelspols der Pol der Ekliptik und an Stelle des Äquators die Ekliptik. Definiere hiernach die Begriffe astronomische Länge und Breite eines Sternes.

66. a) Zwischen welchen Grenzen bewegt sich die Rektaszension und Deklination der Sonne in den verschiedenen Jahreszeiten? b) Beantworte dieselbe Frage für die Länge und Breite der Sonne. c) und d) Wo liegen die Sterne, für welche die Deklination und die Breite gleiches Vorzeichen haben und für welche sie verschiedene Vorzeichen haben?

67. Es soll α und δ der Sonne berechnet werden, wenn sie die folgende astronomische Länge hat: a) $49^\circ 12'$, b) $153^\circ 47'$, c) $289^\circ 35'$. d) und e) Wieviel Tage nach Frühlingsanfang findet das ungefähr statt?

68. Welche astronomische Länge hat die Sonne, wenn sie nach Sternzeit kulminiert um a) $8^{h}\,19{,}3^{m}$, b) $13^{h}\,42{,}8^{m}$, c) $21^{h}\,8{,}3^{m}$? d)—f) Welches sind die zu a) bis c) gehörigen Kulminationshöhen für Berlin?

69. Wann kulminiert nach mittlerer Zeit Arkturus ($\alpha = 14^{h}\,12^{m}$) an dem Tage, für den die Deklination δ der Sonne und die Zeitgleichung (Zgl.) gegeben ist zu a) $\delta = 15^\circ 42'$, Zgl. $= 14{,}7^{m}$, b) $\delta = -9^\circ 21'$, Zgl. $= 5{,}4^{m}$, c) $\delta = 8^\circ 17'$, Zgl. $= -12{,}3^{m}$?

70. Berechne für die Tage in der vorigen Aufgabe die mittleren Zeiten der Kulmination für a) bis c) Sirius ($\alpha = 6^{h}\,41{,}6^{m}$) und d) bis f) Aldebaran ($\alpha = 4^{h}\,31{,}2^{m}$).

71. Da man den Winkel zwischen Äquator und Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$ kennt, da ferner die Bogen δ und β senkrecht auf dem Äquator bzw. der Ekliptik stehen, so kann man aus den ekliptikalen Koordinaten λ und β die äquatorialen α und δ berechnen und umgekehrt. — Erläutere an einer Zeichnung diese Übergänge a) für einen Stern oberhalb der Ekliptik und des Äquators, b) für einen Stern zwischen der Ekliptik und dem Äquator und c) für einen Stern unterhalb beider.

72. Berechne λ und β von folgenden Sternen: a) Polarstern ($\alpha = 1^{h}\,31^{m}$, $\delta = +88^\circ 53'$), b) Rigel ($\alpha = 5^{h}\,10{,}7^{m}$, $\delta = -8^\circ 15'$), c) Wega ($\alpha = 18^{h}\,34{,}3^{m}$, $\delta = +38^\circ 45'$), d) Gemma ($\alpha = 15^\circ 31{,}3^{m}$, $\delta = +26^\circ 59'$).

73. Berechne umgekehrt α und δ, wenn λ und β gegeben sind, zu a) $\lambda = 215^\circ 49'$, $\beta = +41^\circ 28'$, b) $\lambda = 87^\circ 14'$, $\beta = -17^\circ 25'$, c) $\lambda = 342^\circ 18'$, $\beta = 33^\circ 54'$.

Das allgemeine Kugeldreieck am Himmel (Stern-Pol-Zenit)

74. a) Gib die Bedeutung der einzelnen Stücke des von einem Gestirn G, dem Pol P und dem Zenit Z gebildeten sphärischen Dreiecks am Himmel an (s. Fig. 29). — Welches Stück im Dreieck GPZ wird gesucht, wenn b) nach der geographischen Breite, c) nach der Beobachtungszeit, d) nach der Deklination, e) nach der Höhe des Gestirns gefragt wird? f) Das Gestirn werfe auf der Horizontalebene von einem senkrechten Stab einen Schatten. Welches Stück im Dreieck ist durch die Schattenrichtung bestimmt?

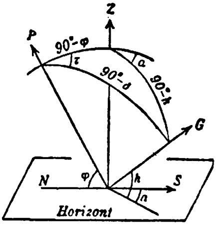

Fig. 29.

75. Wo steht die Sonne a) am 25. Februar ($\delta = -9^\circ\ 25'$), b) am 15. Juli ($\delta = +21^\circ\ 41'$) um 15^h wahrer Ortszeit an deinem Wohnort ($\varphi =\quad$)?

76. Wo steht die Sonne a) am längsten, b) am kürzesten Tage (unter dem Horizont!) um 6^h wahrer Ortszeit in Wilhelmshaven ($\varphi = 53^\circ\ 32'$ N)?

77. Für Leipzig ($\lambda = 12^0 23'$ O, $\varphi = 51^0 20{,}5'$ N) ist der Stand der Sonne am 11. April ($\delta = 7^0 59'$) $8^h\ 25^m\ 30^s$ mitteleuropäischer Zeit festzustellen. Die Zeitgleichung ist $+ 1^m\ 20^s$.

78. Der Turm des Ulmer Münsters wirft am 10. August $10^h\ 25{,}4^m$ mitteleuropäischer Zeit einen Schatten von 139 m Länge. Wie hoch ist der Turm? Länge von Ulm $\lambda = 10^0$ O, Breite von Ulm $\varphi = 48^0 24'$, Deklination der Sonne $+15^0 46'$, Zeitgleichung $+ 5{,}4^m$.

79. Am 24. Mai $6^h\ 40^m$ MEZ ist die Leipziger Straße in Berlin völlig schattenlos. Welche Richtung hat sie? Länge von Berlin $\lambda = 13^0 24'$ O, Breite von Berlin $\varphi = 52^0 30'$ N, Deklination der Sonne $+ 20^0 39'$, Zeitgleichung $- 3{,}5^m$.

80. Am Vormittag eines Augusttages stand in Karlsruhe ($\lambda = 8^0 24'$ O, $\varphi = 49^0$ N) der Mittelpunkt der Sonne in OSO in einer Höhe von $37^0 26'$. a) Wie groß war die Deklination an diesem Tage? b) Berechne die wahre Ortszeit. c) Die Zeitgleichung betrug an jenem Tage $+ 4^m\ 58^s$. Gib die mitteleuropäische Zeit an.

81. Bei welcher Sonnendeklination und um wieviel Uhr wahrer Ortszeit wirft in Rom ($\varphi = 41^\circ\ 54'$ N) ein Obelisk von 32 m Höhe einen 48 m langen Schatten nach ONO?

82. Wann (in wahrer Ortszeit) erreichte der Sonnenmittelpunkt am 21. Juni ($\delta = +23^\circ\ 27'$) die Höhe von 10° a) in Hammerfest ($\varphi = 70^\circ\ 39'$ N), b) in Gotha ($\varphi = 50^\circ\ 56'$ N), c) auf Norderney ($\varphi = 53^\circ\ 43'$ N), d) am Äquator, e) in Tokio ($\varphi = 35^\circ\ 39'$ N), f) in Sidney ($\varphi = 33^\circ\ 52'$ S)?

83. An einem Ort wird am Vormittag des 8. September ($\delta = 6^\circ 2'$) der Mittelpunkt der Sonne $47^\circ 20'$ hoch in SO beobachtet. Gib die wahre Ortszeit der Beobachtung an.

84. Um $15^h\ 12^m\ 10^s$ wahrer Ortszeit wird in Wien ($\varphi = 48^\circ 14'$ N) die Sonnenhöhe $h = 36^\circ 28'$ gemessen; wie groß ist ihre Deklination?

85. Gib allgemein an, wie man bei bekannter Breite eines Ortes **a)** aus der Höhe und dem Azimut eines Sternes dessen Deklination und Stundenwinkel berechnet und **b)** umgekehrt, wie man aus der Deklination und dem Stundenwinkel eines Sternes die Höhe des Sternes und sein Azimut findet.

86. **a)** In Berlin ($\varphi = 52^\circ 30'$ N) beobachtet man Höhe und Azimut der Sonne: $h = 32^\circ 14'$ und $a = 46^\circ 28'$. Wie groß sind Stundenwinkel und Deklination? **b)** Man mißt ebenfalls in Berlin Höhe und Azimut eines Sternes: $h = 42^\circ 17'$ und $a = 51^\circ 11'$. Wie groß ist die Deklination des Sternes, und wieviel Zeit ist seit seiner Kulmination verflossen?

87. Jemand will am 20. April (α der wahren Sonne $= 1^h\ 50^m$) in Berlin um 16^h den Sirius ($\delta = -16^\circ 35'$, $\alpha = 6^h\ 41^m\ 30^s$) beobachten. Wie muß er das Fernrohr einstellen, wenn die Zeitgleichung -54^s und die Länge von Berlin $13^\circ 24'$ O beträgt?

88. **a)** Wo stand die Sonne am 3. Juli $15^h\ 2{,}7^m$ in Berlin ($\lambda = 13^\circ 24'$ O, $\varphi = 52^\circ 30'$ N), wenn $\delta = +23^\circ 2'$ und die Zeitgleichung $+3{,}8^m$ beträgt? Erkläre zuvor die Gleichung

Wahre Ortszeit = Mittl. Greenw. Zt. + Längenunterschiedskorrekt. — Zgl.

b) In welcher Höhe wurde am selben Tage $22^h\ 44{,}1^m$ Denebola ($\alpha = 11^h\ 44{,}7^m$, $\delta = 15^\circ 2{,}8'$) am westlichen Himmel gesehen, wenn für diese Zeit die Rektaszension der mittleren Sonne in Greenwich $6^h\ 43{,}3^m$ beträgt? Erkläre zuvor die Gleichung

τ = mittl. Greenw. Zt. + α der mittl. Sonne in Greenwich + Längenunterschiedskorrektion — α von Denebola.

Astronomische Orts- und Zeitbestimmungen

Vorbemerkung. Unter astronomischen Ortsbestimmungen versteht man solche Verfahren, die gestatten, aus dem Stand der Gestirne die geographischen Koordinaten des Beobachtungsortes zu ermitteln. Ist der Beobachtungsort bekannt, so liefert die rechnerische Auswertung der Beobachtung den Stundenwinkel τ (Fig. 29) und damit die Ortssternzeit, welche ihrerseits die mitteleuropäische Zeit festzustellen gestattet.

89. Erkläre zur Wiederholung folgende Formeln, in denen λ die geographische Länge eines Ortes östlich Greenwich ist:

a)	Mittlere Ortszeit	$=$ Mittl. Greenwich. Zeit $+ \lambda \cdot 4^{\mathrm{m}}$,
b)	„ „	$= \mathrm{MEZ} + (\lambda - 15) \cdot 4^{\mathrm{m}}$,
c)	„ „	$=$ Wahre Ortszeit $+$ Zeitgleichung,
d)	Wahre Ortszeit	$=$ Mittlere Ortszeit $-$ Zeitgleichung,
e)	MEZ	$=$ Mittlere Ortszeit $+ (15 - \lambda) \cdot 4^{\mathrm{m}}$,
f)	MEZ d. Sonnenkulm.	$= 12^{\mathrm{h}} +$ Zeitgl. $+ (15 - \lambda) \cdot 4^{\mathrm{m}}$,
g)	Sternzeit	$=$ Stundenwinkel $+$ Rektaszension,
h)	„	$=$ Mittl. Zeit $+$ Rektasz. der mittl. Sonne,
i)	Ortssternzeit	$=$ Greenw. Sternzeit $+ \lambda \cdot 4^{\mathrm{m}}$,
		$=$ Sternzeit am 15. Meridian $+ (\lambda - 15) \cdot 4^{\mathrm{m}}$.

90. Von einem Gestirn mißt man bei bekannter Nordsüdlinie das Azimut a und die Höhe h. **a)** Leite mit Hilfe des Kosinussatzes für das sphärische Dreieck Gestirn-Pol-Zenit (s. Fig. 29) folgende Formel ab:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a.$$

b) Zeige, daß man diese Gleichung unter Benutzung des Hilfswinkels ψ, wo $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg} h \cdot \cos a$, folgenderweise nach der Breite φ auflösen kann:

$$\sin (\varphi - \psi) = \frac{\sin \delta \cos \psi}{\sin h}.$$

91. a) Zeige, daß der Sinussatz für das sphärische Dreieck Gestirn-Pol-Zenit zu folgender Formel für den Stundenwinkel τ führt:

$$\sin \tau = \frac{\sin a \cdot \cos h}{\cos \delta}.$$

b) Wie findet man aus dem Stundenwinkel τ (Fig. 29) die Ortssternzeit am Beobachtungsort und wie daraus die mittlere Ortszeit? **c)** Wie findet man schließlich aus der mittleren Ortszeit die geographische Länge des Beobachtungsortes? **d)** Weshalb kommt also Längenbestimmung und Zeitbestimmung auf dasselbe hinaus?

92. Führe die Breiten- und Längenberechnung der beiden letzten Aufgaben für den Fall durch, daß das Gestirn die Sonne ist.

93.[1] Am 3. Juli $15^{\mathrm{h}}\, 2{,}7^{\mathrm{m}}$ MEZ wurde das Azimut der Sonne gemessen zu $a = 64^\circ\, 51'$ und die Höhe der Sonne zu $h = 46^\circ\, 4'$. An welchem Ort geschah das, wenn die Zeitgleichung $+3{,}8^{\mathrm{m}}$ und δ der Sonne $23^\circ\, 2'$ betrug? Rechne in folgender Reihenfolge: 1. φ, 2. $\tau =$ wahre Ortszeit, 3. Umrechnung von τ in Stunden und Minuten, 4. mittlere Ortszeit; 5. der Vergleich dieser Zeit mit der mittleren Greenwicher Zeit im Augenblick der Beobachtung liefert den Längenunterschied gegen den Greenwicher Meridian.

94. Berechne die Länge und Breite des Beobachtungsortes, wenn **a)** MEZ $= 10^{\mathrm{h}}\, 19^{\mathrm{m}}$, $a = 39^\circ\, 2'$ östl., $h = 42^\circ\, 24'$, $\delta = 9^\circ\, 40'$, Zeitgleichung $= +1^{\mathrm{m}}\, 7^{\mathrm{s}}$, **b)** MEZ $= 17^{\mathrm{h}}\, 2^{\mathrm{m}}$, $a = 80^\circ$ östl., $h = 21^\circ\, 52'$, $\delta = 12^\circ\, 6'$, Zeitgleichung $= +3^{\mathrm{m}}\, 3^{\mathrm{s}}$.

---

1) Von größtem Nutzen wird es sein, wenn die Schüler an ihrem Schulort selbst eine solche Bestimmung vornehmen.

95.[1]) a) Gib den Gang der Rechnung an für die Aufgabe: An einem Ort von bekannter Länge und Breite wird die Sonne nach Höhe und Azimut gemessen; wie kann man daraus die zur Verfügung stehende Uhr kontrollieren? b) Wie kann man in a) die Uhrkorrektion finden, ohne das Azimut der Sonne zu benutzen?

96.[1]) An welchem Orte beobachtete man 21^{h} MEZ den hellsten Stern im Skorpion (Antares $\delta = -26^{\circ}\,14'$ und $\alpha = 16^{\text{h}}\,24{,}1^{\text{m}}$) unter der Höhe von $7^{\circ}\,40'$ im Azimut von $34^{\circ}\,16'$ am westlichen Himmel, wenn im Augenblick der Beobachtung die Rektaszension der Sonne $8^{\text{h}}\,51{,}4^{\text{m}}$ war?

Fünftes Kapitel

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte

§ 19. Planimetrische Hilfssätze über Dreieck, Viereck, Kreis

Pol und Polare. Kreispotenzen

1. (Satz von Menelaus.) Die Seiten eines Dreiecks ABC werden von einer Geraden in den Punkten P, Q und R geschnitten, und zwar liegt P auf BC oder ihrer Verlängerung, Q auf AC oder ihrer Verlängerung und R auf AB oder ihrer Verlängerung. Auf diese Gerade werden die Lote AA_1, BB_1, CC_1 gefällt. Drücke $\frac{AA_1}{CC_1}, \frac{CC_1}{BB_1}, \frac{BB_1}{AA_1}$ durch die Seitenabschnitte des Dreiecks aus und zeige durch Multiplikation, daß
$$RA \cdot PB \cdot QC = RB \cdot PC \cdot QA$$
ist. — Führe den Beweis für den Fall, daß a) alle drei Seiten des Dreiecks äußerlich geteilt werden, b) zwei Seiten innerlich, die dritte äußerlich geteilt wird. c) Untersuche, ob noch andere Fälle möglich sind. d) Fasse den Satz in Worte.

2. Führe den Beweis für den Satz von Menelaus noch einmal mit Hilfe des ersten Strahlensatzes, doch mit nur einer Hilfslinie, nämlich einer Parallelen zu einer Dreiecksseite durch die gegenüberliegende Ecke.

3. Eine Transversale halbiert eine Dreiecksseite. Was ist über das Teilungsverhältnis auf den beiden anderen zu sagen?

4. a) Beweise die Umkehrung des Satzes von Menelaus. b) Welches Beweismittel erhält man damit für den Nachweis, daß drei Punkte in einer Geraden liegen?

---

[1]) Von größtem Nutzen wird es sein, wenn die Schüler an ihrem Schulort selbst eine solche Bestimmung vornehmen.

5. Der Satz von Desargues lautet: Wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt gehen, dann liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden. Beweise den Satz.

Anleitung: Die Dreiecke mögen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ heißen, S möge der Schnittpunkt von A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 sein. Wende den Satz von Menelaus auf die Dreiecke SA_1B_1, SA_1C_1, SB_1C_1 an.

6. (Satz von Ceva.) Durch einen Punkt O im Innern des Dreiecks ABC werden die drei Ecktransversalen AP, BQ und CR gezogen, wo P, Q und R die Schnittpunkte mit den Gegenseiten sind. a) Wende auf irgend zwei durch eine Ecktransversale gebildete Teildreiecke den Satz von Menelaus an. b) Leite aus den so erhaltenen Gleichungen die Beziehung

$$AR \cdot BP \cdot CQ = AQ \cdot BR \cdot CP \quad \text{ab.}$$

c) Fasse den Satz in Worte. d) Beweise den Satz von Ceva ohne Rückgang auf den Satz von Menelaus an Hand der Fig. 30: Zeige, daß $\triangle AOB : \triangle AOC = BD : DC$ ist, stelle die beiden andern entsprechenden Beziehungen auf und leite daraus die Gleichung des Satzes von Ceva her.

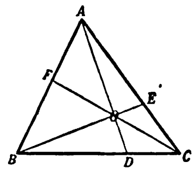

Fig. 30.

7. Untersuche die Gültigkeit des Satzes von Ceva in dem Fall, daß der Schnittpunkt der drei Ecktransversalen a) außerhalb des Dreiecks liegt, b) unendlich fern ist.

8. Beweise, daß durch einen Punkt gehen a) die Seitenhalbierenden eines Dreiecks, b) die Halbierenden der drei Innenwinkel, c) die Halbierenden eines Innenwinkels und der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel, d) die Höhen (es sind erst die Höhenschnitte zu berechnen!), e) die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises, f) die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten eines Ankreises, g) die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der drei Ankreise mit den (nicht verlängerten) Dreiecksseiten.

9. (Satz von Pascal.) Auf einem Kreise werden der Reihe nach sechs Punkte A, B, C, D, E und F angenommen. Wenn dann je zwei aufeinanderfolgende Punkte durch Strecken verbunden werden, entsteht ein Sehnensechseck. a) Bringe die drei Paare von Gegenseiten zum Schnitt in den Punkten P, Q und R. b) Wende auf eines der von drei nicht aneinanderstoßenden Seiten des Sehnensechsecks gebildeten Dreiecke dreimal den Satz von Menelaus an, indem du jede der drei anderen Sehnensechsecksseiten als Transversale benutzt. c) Durch Multiplikation der eben gefundenen Gleichungen und unter Beachtung des zweiten Strahlensatzes beweise dann mittels der Umkehrung des Satzes von Menelaus, daß P, Q und R in einer Geraden liegen.

10. Wie gestaltet sich der Beweis des Satzes von Pascal, a) wenn ein Paar Gegenseiten parallel sind, b) wenn zwei Paar Gegenseiten parallel sind (was gilt dann für das dritte Paar Gegenseiten?), c) wenn ein Paar nicht

gegenüberliegender (natürlich aber auch nicht aneinanderstoßender) Seiten parallel ist? — Untersuche die Gültigkeit des Pascalschen Satzes, wenn das Sehnensechseck d) überschlagen ist, e) wenn es in zwei dem Kreise eingeschriebene Dreiecke ausartet. — Welche Sätze lassen sich aus dem Pascalschen Satz gewinnen, wenn man in verschiedener Weise aus dem Sechseck f) ein Fünfeck, g) ein Viereck, h) ein Dreieck werden läßt?

Vollständiges Vierseit und Viereck

11. Vier Geraden (Seiten) bilden im allgemeinen ein vollständiges Vierseit. a) Wieviel Schnittpunkte (Ecken) hat das Vierseit? b) Welche einschränkende Bedingung ist über die Lage der vier Geraden auszusprechen? c) Zwei Ecken, die nicht auf der gleichen Seite des Vierseits liegen, heißen Gegenecken. Nenne die Ecken und jeweils ihre Gegenecken. d) Zwei Gegenecken bestimmen eine Diagonale. Wieviel Diagonalen hat das Vierseit? e) In wieviel Punkten schneiden sich die Diagonalen?

12. Vier Punkte (Ecken) mit ihren Verbindungsgeraden bilden im allgemeinen ein vollständiges Viereck. a) Wieviel Verbindungsgeraden (Seiten) hat das Viereck? b) Welche einschränkende Bedingung ist über die Lage der vier Punkte auszusprechen? c) Seiten, die keine Ecken gemeinsam haben, heißen Gegenseiten. Nenne die Seiten und jeweils ihre Gegenseiten. d) Zwei Gegenseiten bestimmen einen Diagonalpunkt. Wieviel Diagonalpunkte hat das Viereck? e) Wieviel Geraden werden durch die Diagonalpunkte bestimmt?

13. Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden die beiden Gegenecken und die beiden Schnittpunkte mit den beiden anderen Diagonalen eine harmonische Punktreihe. Beweise das mit Hilfe der Sätze von Menelaus und Ceva.

14. In einem vollständigen Viereck bilden die beiden durch einen Diagonalpunkt gehenden Gegenseiten und die beiden durch die anderen Diagonalpunkte gehenden Strahlen ein harmonisches Strahlenbüschel. Beweise den Satz.

Konstruktionen mit dem Lineal allein

Die folgenden Konstruktionen 15 bis 21 sind ohne Benutzung des Zirkels auszuführen (benutze bei 15 bis 20 die Figur des vollständigen Vierseits, bei 21 den Pascalschen Satz):

15. Auf einer Geraden sind drei Punkte P, Q, R gegeben; konstruiere den a) P, b) Q, c) R zugeordneten vierten harmonischen Punkt.

16. Zu einem von drei Strahlen eines Büschels ist der zugeordnete harmonische zu konstruieren.

17. a) Punkte auf der Verlängerung der Strecke PQ sind zu konstruieren, ohne daß die Strecke verlängert wird. b) Wie kann man auf diese Weise eine Gerade über ein unzugängliches Gebiet hinaus verlängern?

18. Zwei Geraden sind gegeben, deren Schnittpunkt unzugänglich ist; eine dritte Gerade ist zu finden, die durch den unzugänglichen Schnittpunkt geht.

19. Gegeben ist eine Strecke und ihre Mitte. Durch einen beliebigen Punkt ist zu ihr die Parallele zu ziehen.

20. Gegeben ist eine Strecke und eine beliebige Parallele zu ihr. Die Strecke ist a) zu halbieren, b) zu verdoppeln.

21. An einen Kreis ist ohne Benutzung des Kreismittelpunktes in einem Punkt P des Umfanges die Tangente zu konstruieren.

Ähnlichkeitspunkte

22. Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2, die sich nicht schneiden. Sie sind stets in Ähnlichkeitslage. a) Beweise, daß die Verbindungsgeraden der Endpunkte gleichgerichteter und entgegengesetzter Radien durch je einen Punkt, den äußeren und den inneren Ähnlichkeitspunkt, gehen. b) Beweise, daß der Abstand der Mittelpunkte durch die Ähnlichkeitspunkte harmonisch geteilt wird, und gib das Teilungsverhältnis an. c) Zeige, daß auch die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise durch die Ähnlichkeitspunkte der Kreise gehen.

23. Konstruiere auf Grund der Überlegungen in Aufg. 22 zu zwei Kreisen, die sich nicht schneiden, a) den äußeren, b) den inneren Ähnlichkeitspunkt, c) die gemeinschaftlichen Tangenten.

24. Führe die Überlegungen der Aufg. 22 durch für Kreise, a) die sich schneiden, b) von denen einer ganz im Innern des andern liegt, c) die sich von außen, d) die sich von innen berühren.

25. Wie wandern äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise, wenn diese sich zunächst nicht schneiden und nun a) der Radius des größeren Kreises unverändert bleibt, der des kleineren aber stetig wächst, b) der Mittelpunkt des größeren auf der gemeinschaftlichen Zentrale wandert?

26. Durch a) den äußeren, b) den inneren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise ist eine Sekante (Ähnlichkeitsstrahl) gelegt. Zeige, daß die Sekante von den Kreisen in zwei Paaren von Punkten geschnitten wird, deren Abstände vom Ähnlichkeitspunkt im Verhältnis der Radien stehen. c) Untersuche die Beziehung für den Fall, daß die Sekante zur gemeinschaftlichen Tangente der Kreise wird.

27. (Satz von Monge.) Gegeben sind drei Kreise. Zeige, daß die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte, welche von je zweien der Kreise bestimmt werden, auf einer Geraden (Ähnlichkeitsachse) liegen.

Anleitung: Wende auf das von den Mittelpunkten der Kreise gebildete Dreieck den Satz von Menelaus an. Bestimme vorher die harmonischen Teilverhältnisse auf jeder Dreiecksseite.

28. Zeige, daß auch je zwei innere Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise mit einem äußeren Ähnlichkeitspunkt in einer Geraden (Ähnlichkeitsachse) liegen.

29. Zwei Kreise werden von einem dritten berührt. a) Beweise, daß die durch die beiden Berührungspunkte gehende Gerade durch einen Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise geht. b) Untersuche, wie die Berührung ist, wenn die Gerade durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt geht, wie sie ist, wenn die Gerade durch den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

Anleitung: Beachte, daß die Berührungspunkte zweier Kreise auch Ähnlichkeitspunkte sind.

30. Die beiden Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 haben den äußeren Ähnlichkeitspunkt A (Fig. 31). Die Zentrale schneidet den einen Kreis in B_1 und C_1, den andern in B_2 und C_2. Eine beliebige Sekante von A aus schneidet die Kreise in den entsprechenden Punkten D_1 und E_1 sowie in D_2 und E_2. Beweise, daß a) $B_1D_1E_2C_2$, b) $C_1B_2D_2E_1$ ein Sehnenviereck ist. c) Wende auf die Sehnenvierecke den Sekantensatz an und leite damit zwei Gleichungen zwischen den Abschnitten auf der Zentrale und auf der Sekante ab.

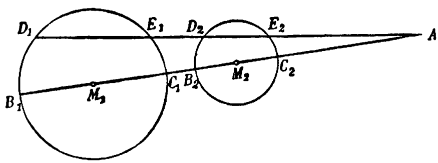

Fig. 31.

Pol und Polare

31. Zwei Punkte, die einen Durchmesser eines Kreises harmonisch teilen, heißen konjugierte Pole des Kreises. Untersuche, wie beim Wandern eines Poles auf seinem Durchmesser sein konjugierter Pol wandert.

32. Errichte in dem einen von zwei konjugierten Polen auf der Zentrale die Senkrechte (Polare). Wo liegt die Polare a) zu einem Punkte im Kreisinneren, b) zu einem Punkte des Kreisumfangs? Wo liegt der Pol c) einer Sekante, d) einer Tangente?

33. Gegeben ist ein Kreis und ein Pol mit zugehöriger Polare. Durch den Pol ist eine Sekante gelegt; beweise unter Heranziehung der durch den Pol gehenden Zentrale und mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Vierseit, daß die Sehne, die der Kreis aus der Sekante herausschneidet, durch Pol und Polare harmonisch geteilt wird.

34. Konstruiere auf Grund der Überlegungen von Aufg. 33 a) zu einem Pol die Polare in bezug auf einen Kreis ohne Benutzung des Durchmessers, b) die Polare eines Punktes in bezug auf einen Punkt.

35. Konstruiere von einem Punkt an einen Kreis die Tangenten nur mit dem Lineal.

36. Gegeben ist ein Kreis und ein Punkt a) innerhalb, b) außerhalb des Kreises. Bestimme den geometrischen Ort der Pole aller durch den Punkt gehenden Geraden.

37. Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade, die den Kreis a) schneidet, b) nicht schneidet, c) berührt. Was ist über die Polaren aller Punkte der Geraden zu sagen?

38. Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade. Konstruiere nur mit dem Lineal den Pol der Geraden.

39. Gegeben ist a) eine harmonische Punktreihe, b) ein harmonisches Strahlenbüschel. Was ist über die hierzu in bezug auf einen Kreis polaren Gebilde zu sagen?

40. (Satz von Brianchon.) Ein Tangentensechseck ist gegeben. Zeichne das dazu polare Sehnensechseck. Sprich die Tatsache aus, die sich durch Übertragung der Aussagen des Pascalschen Satzes auf das zum Sehnensechseck polare Tangentensechseck ergibt.

41. Was läßt sich aus dem Satz von Brianchon schließen, wenn aus dem Tangentensechseck a) ein Tangentenfünfeck, b) ein Tangentenviereck, c) ein Dreieck wird?

Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis

42. Unter der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis versteht man das Produkt der beiden Abschnitte, in die der Punkt jede durch ihn gehende Sekante teilt. Gib die Potenz als Funktion des Mittelpunktabstandes für Punkte a) innerhalb, b) außerhalb des Kreises an.

43. Gib die Potenz a) des Mittelpunktes, b) eines Punktes des Peripherie, c) eines unendlich fernen Punktes in bezug auf einen Kreis an.

44. Zwischen welchen Grenzen liegt die Potenz a) im Innern, b) im Außenbereich eines Kreises?

45. Gegeben ist ein Kreis. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte einer gegebenen Potenz in bezug auf den Kreis.

Die Potenzlinie zweier Kreise

46. Gegeben sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und ein Punkt P, der in bezug auf beide die gleiche Potenz hat. a) Wie groß ist $PM_1^2 - PM_2^2$? b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, für die die Differenz der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten einen konstanten Wert hat. — Wie kann man also den geometrischen Ort der Punkte gleicher Potenz in bezug auf zwei Kreise, die Potenzlinie (Chordale), finden, wenn man c) einen Punkt, d) zwei Punkte gleicher Potenz kennt?

47. Konstruiere die Potenzlinie zweier Kreise, a) die sich schneiden, b) die sich von außen berühren, c) die sich von innen berühren, d) von denen der eine außerhalb des andern liegt, e) von denen der eine ganz innerhalb des andern liegt?

48. Wie bewegt sich die Potenzlinie zweier Kreise, die sich ausschließen, wenn a) der Mittelpunkt des einen Kreises sich auf der Zentrale bis zum Mittelpunkt des andern bewegt, b) der Radius des größeren Kreises unverändert bleibt, der des kleineren aber wächst?

49. Wie liegt die Potenzlinie a) zweier Kreise mit gleichem Radius, b) zweier konzentrischer Kreise?

50. Ein kleinerer und ein größerer Kreis sind gegeben. a) Welchem der beiden Mittelpunkte, b) welchem der beiden Umfänge liegt die Potenzlinie näher?

51. Bestimme die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes a) außerhalb, b) innerhalb, c) auf der Peripherie.

52. Bestimme die Potenzlinie a) eines Kreises und einer Geraden, b) zweier Punkte, c) zweier Geraden, die sich schneiden, d) zweier paralleler Geraden, e) eines Punktes und einer Geraden.

Der Potenzpunkt dreier Kreise

53. Drei Kreise sind gegeben, die sich gegenseitig schneiden. Zeige, daß die drei Berührungssehnen durch einen Punkt (den Potenzpunkt) gehen, der in bezug auf alle drei Kreise gleiche Potenz hat.

54. Beweise, daß die drei Potenzlinien dreier Kreise durch einen Punkt gehen.

55. Konstruiere den Potenzpunkt dreier Kreise, a) die sich gegenseitig ausschließen, b) von denen zwei sich schneiden und außerhalb des dritten liegen, c) von denen zwei sich schneiden und innerhalb des dritten liegen, d) von denen der erste innerhalb des zweiten, der zweite innerhalb des dritten liegt, e) die einen Berührungspunkt, f) die zwei Berührungspunkte haben.

56. Konstruiere die Potenzlinie zweier sich ausschließender Kreise, indem du sie mit einem beliebigen dritten Kreis zum Schnitt bringst, wobei der Schnitt der Berührungssehnen den Potenzpunkt der drei, und damit einen Punkt der Potenzlinie der zwei gegebenen Kreise liefert.

57. Löse die Aufg. 55 unter Benutzung des in Aufg. 56 entwickelten Verfahrens.

58. Gegeben sind zwei Kreise und ein Punkt. Konstruiere ihren Potenzpunkt. Es liege der Punkt a) außerhalb beider Kreise, die sich schneiden, b) außerhalb beider Kreise, die sich nicht schneiden, c) innerhalb eines der beiden Kreise, die sich schneiden, d) innerhalb eines der beiden Kreise, die sich nicht schneiden, e) innerhalb beider Kreise, die sich schneiden, f) innerhalb beider Kreise, die sich nicht schneiden.

59. Gegeben sind zwei Punkte und ein Kreis. Konstruiere ihren Potenzpunkt. Es liegen a) beide Punkte außerhalb, b) innerhalb des Kreises; c) es liegt ein Punkt innerhalb, der andere außerhalb des Kreises.

60. Bestimme den Potenzpunkt dreier Punkte.

61. Bestimme den Potenzpunkt zweier Geraden und a) eines Kreises, b) eines Punktes.

62. Bestimme den Potenzpunkt dreier Geraden, die sich a) in drei Punkten, b) in einem Punkte schneiden, c) von denen zwei parallel sind, während die dritte die anderen schneidet.

Das Berührungsproblem von Apollonius

63. Das Berührungsproblem von Apollonius lautet: Die Kreise sind zu zeichnen, die drei gegebene Kreise berühren. Stelle die verschiedenen Aufgaben zusammen, die aus diesem Problem hervorgehen, wenn man die Kreise auch in Punkte (Kreise mit Radius 0) und Geraden (Kreise mit Radius ∞) ausarten läßt.

64. Wiederhole die Lösungen des Problems in folgenden Fällen, wobei die P Punkte, die g Geraden, die k Kreise bedeuten: a) P_1, P_2, P_3, b) g_1, g_2, g_3, c) P_1, P_2, g_1, d) g_1, g_2, P_1, e) P_1, P_2, k_1, f) g_1, g_2, k_1, g) P_1, g_1, k_1, h) g_1, k_1, k_2. Achte in allen Fällen besonders auf die Anzahl der Lösungen.

65. Löse das Berührungsproblem im Falle P_1, k_1, k_2 und erörtere die Anzahl der Lösungen.

Anleitung: Bestimme den äußeren Ähnlichkeitspunkt der Kreise und lege durch ihn und den gegebenen Punkt eine Gerade. Auf ihr ist dann ein zweiter Punkt des gesuchten Kreises zu bestimmen unter Beachtung von Aufg. 29 und 30.

66. Löse das Berührungsproblem im Falle k_1, k_2, k_3 durch Rückgang auf das in Aufg. 65 behandelte Problem und erörtere die Anzahl der Lösungen.

Anleitung: Suche zunächst den Kreis, der dem gesuchten konzentrisch ist, durch den Mittelpunkt des einen der gegebenen Kreise geht und zwei Kreise berührt, die den beiden anderen gegebenen konzentrisch sind (Aufg. 65).

67. Ein Kreis K_1 berührt zwei Kreise k_1 und k_2, die sich nicht schneiden, und zwar beide von außen. Zu k_1 und k_2 ist die Potenzlinie zu konstruieren. Beweise, daß der Pol dieser Potenzlinie in bezug auf K_1 auf der durch die Berührungspunkte gehenden Sekante liegt, daß also mit anderen Worten die Berührungssehne Ähnlichkeitsstrahl ist.

68. Untersuche den Satz 67 für den Fall, a) daß die Kreise k_1 und k_2 sich schneiden, b) daß die Kreise k_1 und k_2 innerlich von K_1 berührt werden, c) daß K_1 die Kreise ungleichartig berührt.

69. Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen sich nicht schneiden; sie werden von zwei anderen Kreisen K_1 und K_2 gleichartig berührt. Dann sind nach Nr. 67 die beiden Berührungssekanten Ähnlichkeitsstrahlen. Beweise, daß der Ähnlichkeitspunkt von k_1 und k_2 gleiche Potenz in bezug auf K_1 und K_2 hat und deshalb auf deren Potenzlinie liegt.

70. Untersuche, wie sich die Aussage von Nr. 69 gestaltet a) bei anderer Lage der Kreise k_1 und k_2, b) bei ungleichartiger Berührung.

71. Gegeben seien drei Kreise, k_1, k_2 und k_3, die von zwei Kreisen K_1 und K_2 alle gleichartig berührt werden. Untersuche, welche Bedeutung der Potenzpunkt von k_1, k_2, k_3 für K_1, K_2 hat.

72. Wie gestaltet sich das Ergebnis von Nr. 71 bei ungleichartiger Berührung der Kreise?

73. Gegeben seien drei Kreise, k_1, k_2, k_3, die von zwei Kreisen K_1 und K_2 alle gleichartig berührt werden. Welche Bedeutung hat dann die äußere Ähnlichkeitsachse von k_1, k_2, k_3 für K_1 und K_2?

74. Untersuche, wie sich das Ergebnis von Nr. 73 bei ungleichartiger Berührung unter Heranziehung der anderen Ähnlichkeitsachsen gestaltet.

75. Es seien drei Kreise, k_1, k_2 und k_3 gegeben; jeder liege ganz außerhalb der anderen. Es sind die Kreise K gesucht, die alle drei Kreise k_1, k_2, k_3 berühren. a) Wieviel Kreise gibt es? Entwirf eine Skizze. b) Gruppiere die Kreise K in Paare derart, daß auf die Paare die in Nr. 73, 74 gefundenen Ergebnisse anzuwenden sind. c) Was liefern die vier Ähnlichkeitsachsen von k_1, k_2, k_3 für die Kreise K? d) Bestimme die Pole jeder Ähnlichkeitsachse in bezug auf jeden der Kreise k_1, k_2, k_3. e) Was liefert der Potenzpunkt der drei Kreise k_1, k_2, k_3 für die Kreispaare K? f) Wie lassen sich aus den Ergebnissen von d) und e) die Berührungspunkte der gesuchten Kreise K finden?

76. Erörtere die Lösung des Berührungsproblems für den Fall, a) daß jeder Kreis jeden andern schneidet, b) daß der erste im zweiten, der zweite im dritten liegt, c) daß zwei getrennt, beide aber im dritten liegen. d) Erörtere selbst andere Fälle.

77. Welche Gestalt nimmt die in Aufg. 75 entwickelte Lösung an, wenn Ausartungen der Kreise in Punkte oder Geraden eintreten, wenn insbesondere also das Problem zu lösen ist für a) P_1, k_1, k_2, b) g_1, k_1, k_2, c) P_1, P_2, k_1, d) g_1, g_2, k_1, e) P_1, g_1, k_1, f) P_1, P_2, P_3, g) g_1, g_2, g_3, h) P_1, P_2, g_1, i) P_1, g_1, g_2?

Geometrische Überlegungen

78. Äußere dich im Zusammenhang über die uneigentlichen Elemente der Ebene, die unendlich fernen Punkte und die unendlich ferne Gerade.

79. Erörtere Wesen und Bedeutung des Dualitätsprinzips.

§ 20. Dandelinsche Kugeln und Kegelschnitte

Kegel und Kugel

Dandelinsche Kugeln

1. Gib den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln an, die einen geraden Kreiskegel in einem Kreise berühren.

2. In welcher Weise kann man den Kegel (Doppelkegel) als geometrischen Ort gemeinsamer äußerer (innerer) Tangenten an zwei Kugeln auffassen? (Sonderfall des Zylinders!)

3. Ein gerader Kreiskegel wird durch eine zur Achse senkrechte Ebene geschnitten. Der halbe Öffnungswinkel ist α, der Abstand der Ebene von der Kegelspitze a. a) Zeige, daß die Durchschnittsfigur ein Kreis ist, und berechne den Radius. b) Wie bestimmt man die Mittelpunkte der beiden Dandelinschen Kugeln, die die Ebene in je einem Punkte, den Kegel in je einem Kreise berühren? c) Berechne die Radien der Dandelinschen Kugeln. d) Berechne die Radien der Berührungskreise. — Zeichne die Körper mit der Schnittebene e) in schräger Parallelprojektion, f) in Grundriß und Aufriß. —

   Beispiele: $a = 4$ cm, $\alpha = 30^\circ$, 45°, 60°.

Elliptischer Schnitt

4. Ein gerader Kreiskegel wird durch eine Ebene geschnitten. Der Winkel zwischen Achse und Ebene sei größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels. a) Beschreibe die Durchschnittsfigur. b) Wie lassen sich die Mittelpunkte der beiden Dandelinschen Kugeln (Nr. 3) bestimmen? c) Die Berührungspunkte der Schnittebene mit den Dandelinschen Kugeln seien F_1 und F_2. Ein Punkt C der Durchschnittsfigur werde mit ihnen verbunden. Die durch C gelegte Seitenlinie des Kegels schneide die von den beiden Dandelinschen Kugeln und dem Kegel erzeugten Berührungskreise in den Punkten A und B. Beweise, daß $F_1C + F_2C = AB$ ist. — Man nennt den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine konstante Summe haben, eine Ellipse.

5. In einer Ebene sind zwei Punkte gegeben, die Brennpunkte einer Ellipse sein sollen; außerdem ist die Summe der Abstände eines Punktes von den Brennpunkten vorgeschrieben. a) Konstruiere einzelne Punkte der Ellipse. b) Untersuche die Ellipse auf ihre axiale und zentrale Symmetrie.

6. Wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn der Neigungswinkel zwischen Achse und Schnittebene in Aufg. 4 a) vergrößert, b) verkleinert wird? (Bis zu welcher Grenze ist die Vergrößerung und Verkleinerung möglich?)

Hyperbolischer Schnitt

7. Führe die Überlegungen von Aufg. 4 für eine Schnittebene durch, bei der der Winkel mit der Achse kleiner als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. a) Zeige, daß man hier den Scheitelkegel hinzunehmen muß. b) Wie unterscheidet sich dieser Fall hinsichtlich der Lage der Dandelinschen Kugeln von dem in Aufg. 4 behandelten? c) Zeige, daß die Durchschnittsfigur zwei getrennte Äste hat. d) Beweise, daß hier, je nachdem der Punkt C auf dem einen oder anderen Ast liegt, $F_1C - F_2C$ oder $F_2C - F_1C$ eine konstante Größe ist. — Man nennt den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine konstante Differenz haben, eine Hyperbel.

8. In einer Ebene sind zwei Punkte gegeben, die Brennpunkte einer Hyperbel sein sollen; weiterhin ist die Differenz der Abstände eines Punktes von den Brennpunkten gegeben. a) Konstruiere einzelne Punkte der Hyperbel. b) Untersuche die Hyperbel auf ihre axiale und zentrale Symmetrie.

9. Wie ändert sich die Gestalt der Hyperbel, wenn der Neigungswinkel zwischen Achse und Schnittebene in Aufg. 7 a) vergrößert, b) verkleinert wird? (Bis zu welcher Grenze ist die Vergrößerung und Verkleinerung möglich?)

Parabolischer Schnitt

10. Wieviel Seitenlinien des geraden Kreiskegels sind der Schnittebene im Falle a) eines hyperbolischen, b) eines elliptischen Schnittes parallel?

11. a) An den Kegel ist eine Tangentialebene gelegt. Was läßt sich über ihre Lage zum Kegel sagen? b) Eine Ebene ist parallel zu einer Tangentialebene eines geraden Kreiskegels; zeige, daß sie dann auch parallel ist zu einer, und zwar zu nur einer Seitenlinie des Kegels. c) Was ist über den Neigungswinkel der Kegelachse zu einer solchen Ebene zu sagen?

12. Ein gerader Kreiskegel wird von einer Ebene geschnitten, die einer und nur einer Seitenlinie parallel ist. Dem Kegel ist die Dandelinsche Kugel eingeschrieben, die die Schnittebene in einem Punkte F berührt. Die Ebene in der der Berührungskreis von Kegel zu Kugel liegt, schneidet die Schnittebene in einer Geraden, der Leitlinie. a) Wie liegt diese Gerade zu dem durch F gehenden Achsenschnitt der Kegels? b) C sei ein Punkt der Durchschnittsfigur von Kegel und Ebene. Die durch C gehende Seitenlinie schneide den Berührungskreis in A. Zeige, daß $CF = CA$ ist. c) Fälle von C auf die Leitlinie das Lot CL und zeige, daß $CL = CA$ und also auch $CF = CL$ ist. Zum Beweise ist die Seitenlinie heranzuziehen, die der Schnittebene parallel ist. — Man nennt den geometrischen Ort der Punkte, die von einer festen Geraden und einem festen Punkte gleiche Entfernung haben, eine Parabel.

13. Gegeben sind ein Punkt und eine Gerade. a) Konstruiere in der durch sie gegebenen Ebene einzelne Punkte der Parabel. b) Untersuche die Parabel hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften.

14. Gibt es bei der Parabel noch eine zweite, die Schnittebene berührende Dandelinsche Kugel?

Zylinder und Kugel

15. Gib den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln an, die einen geraden Kreiszylinder in einem Kreise berühren.

16. An zwei Kugeln von gleichem Radius sind die gemeinsamen äußeren Tangenten gelegt. Was für eine Fläche bilden die Tangenten?

17. Ein gerader Kreiszylinder wird durch eine Ebene senkrecht zur Achse geschnitten. a) Welchen Abstand haben die Mittelpunkte der beiden Kugeln voneinander, die den Zylinder in einem Kreise und die Schnittebene in einem Punkte berühren? — Zeichne Körper und Schnitt b) in schräger Parallelprojektion, c) in Grundriß und Aufriß.

18. Ein gerader Kreiszylinder wird durch eine Ebene geschnitten, die mit der Achse den Winkel α bildet. a) Beschreibe die Durchschnittsfigur. b) Wie lassen sich die Mittelpunkte der beiden Dandelinschen Kugeln bestimmen, die den Zylinder in je einem Kreise und die Schnittebene in je einem Punkte berühren? c) Die Berührungspunkte der Schnittebene mit den Dandelinschen Kugeln seien F_1 und F_2, der Schnitt der Zylinderachse mit der Ebene sei Z. Was ist über die gegenseitige Lage der Punkte F_1, F_2 und Z zu sagen? d) Wie ändert sich F_1F_2, wenn α von 90° nach 0° abnimmt? e) Stelle Zylinder, Schnittebene und Kugeln in Grundriß und Aufriß dar.

19. Ein Punkt C der Durchschnittsfigur von Zylinder und Ebene werde mit F_1 und F_2 verbunden. Die durch C gehende Seitenlinie des Zylinders schneide die von den beiden Dandelinschen Kugeln und dem Zylinder erzeugten Berührungskreise in den Punkten A und B. Beweise, daß $F_1C + F_2C = AB$, mit anderen Worten, daß die Durchschnittsfigur eine Ellipse ist.

20. Bestimme die Lage des größten und des kleinsten Durchmessers einer Ellipse (in der Zylinder-Schnittfigur) und gib die Länge der großen und der kleinen Halbachse (der halben Hauptachse und der halben Nebenachse) an. Gegeben ist der Radius r und der Abstand $2a$ der Mittelpunkte der Dandelinschen Kugeln.

21. Welche Gleichung besteht zwischen der großen Halbachse a, der kleinen Halbachse b und dem halben Brennpunktsabstand e einer Ellipse?

22. Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist durch ebenen Schnitt eines geraden Kreiszylinders entstanden. a) Wie groß ist der kleinste Abstand der beiden Dandelinschen Kugeln? b) Unter welchem Winkel ist die Schnittebene gegen die Zylinderachse geneigt?

23. Ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r wird von einer Ebene geschnitten, die mit der Zylinderachse den Winkel a) $45°$, b) $60°$, c) α bildet. Bestimme die Halbachsen und den Brennpunktsabstand der Schnittfigur.

Vermischte Aufgaben

24. Ein gerader Kreiszylinder vom Radius r und der Höhe h werde durch eine Ebene, die weder Grund- noch Deckfläche trifft, in zwei Teilkörper zerlegt. Setzt man beide wieder mit den Kreisflächen aneinander, so erhält man einen schiefen Zylinder mit elliptischer Grundfläche. a) Wie hoch ist der neue Körper, wenn die elliptische Grundfläche die Halbachsen a und b hat? b) Nach dem Cavalierischen Grundsatz erhält man den Inhalt des neuen Körpers als Produkt aus Grundfläche und Höhe. Da der Inhalt — der gleiche wie der des ursprünglichen geraden Zylinders — und die Höhe bekannt sind, läßt sich der Inhalt der Grundfläche, d. h. der Ellipse, berechnen. Tue das.

25. Eine Kugel wird in schräger Parallelprojektion dargestellt. Welche Gestalt hat ihr Umriß?

26. Ein gerader Kreiszylinder ist durch eine Ebene schief abgeschnitten. Der Mantel wird in eine Ebene abgerollt. Wie sieht die Fläche dann aus?

27. Untersuche die Fälle von Aufgabe 4, 7, 12, in denen die durch den geraden Kreiskegel gelegte Ebene durch die Spitze des Kegels geht.

28. Eine Kugel ruht auf einer Ebene; diese fängt den Schatten der Kugel auf, der durch eine punktförmige, neben der Kugel befindliche Lichtquelle erzeugt wird. a) Untersuche, wie bei Veränderung der Lage des leuchtenden Punktes sich die Form des Kugelschattens ändert. b) Wie könnte man an der Hand dieser Überlegung einen sog. Kegelschnittzirkel konstruieren, d. h. eine mechanische Vorrichtung, die in kontinuierlichem Zuge einen Kegelschnitt zu zeichnen gestattet?

29. Wie muß man eine Taschenlampe halten, damit der von ihr beleuchtete Teil einer Wand von a) einem Kreis, b) einer Ellipse, c) einer Parabel, d) einer Hyperbel begrenzt wird?

30. Aristäus (vielleicht um 320 v. d. Ztr.) legt die ebenen Schnitte durch den geraden Kreiskegel stets so, daß sie senkrecht zu einer Seitenlinie stehen. Wann erhält er elliptische, wann hyperbolische, wann parabolische Schnitte?

§ 21. Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte

Definition und Gestalt der Ellipse

Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Summe haben (§ 20, Nr. 4). — Die beiden festen Punkte, die Brennpunkte (vgl. Aufg. 7), werden im folgenden mit F_1, F_2, die konstante Entfernungssumme wird mit $2a$ bezeichnet; $\frac{F_1F_2}{2} = e$ heißt die lineare Exzentrizität der Ellipse.

1. a) Zerlege $2a$ in zwei Stücke r_1, r_2 und zeichne über F_1F_2 ein Dreieck F_1F_2C mit den Seiten $2e$, r_1, r_2. Zeige aus der Definition, daß C ein Punkt der Ellipse ist. b) In wieviel verschiedenen Lagen zur festen Grundlinie F_1F_2 läßt sich jedes der Dreiecke F_1F_2C zeichnen? c) Beschreibe die Symmetrieverhältnisse je zweier dieser Lagen. d) Beweise hiernach, daß die Ellipse symmetrisch ist 1. in bezug auf die Hauptachse, 2. in bezug auf die Nebenachse, 3. in bezug auf den Mittelpunkt. —Wie liegt ein Punkt der Ebene zur Ellipse, wenn die Summe seiner Entfernungen von F_1 und F_2 e) größer, f) kleiner als $2a$ ist?

2. Was versteht man unter den Hauptscheiteln und Nebenscheiteln der Ellipse?

3. Wie konstruiert man aus F_1, F_2, $2a$ die Hauptscheitel und die Nebenscheitel?

4. Bezeichnet man die kleine Achse der Ellipse mit $2b$, so ist $e^2 = a^2 - b^2$. Beweise dies.

5. Beweise, daß die Ellipse ganz innerhalb des Hauptscheitelkreises und ganz außerhalb des Nebenscheitelkreises liegt, oder mit anderen Worten, daß die große Achse der größte, die kleine Achse der kleinste von allen Ellipsendurchmessern ist.

6. Verlängere F_2C über C hinaus um F_1C bis F'. Beweise, a) daß F' auf dem Kreise um F_2 mit dem Radius $2a$, dem „zu F_2 gehörigen Leitkreise der Ellipse" liegt, b) daß die Mittelsenkrechte von F_1F' nur den einen Punkt C mit der Ellipse gemeinsam hat und daher Tangente an diese ist, c) daß die Tangente die (Neben-)Winkel der beiden „Brennstrahlen" halbiert.

7. a) Beweise aus den Symmetrieeigenschaften der Mittelsenkrechten, daß Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen, an der Ellipse so zurückgeworfen werden, daß sie nach F_2 gelangen, und umgekehrt. b) Begründe damit die Berechtigung der Bezeichnung „Brennpunkt".

8. a) Wo liegt der Gegenpunkt des Brennpunktes in bezug auf eine Ellipsentangente? b) Wie liegt der Kreis um C mit dem Radius CF_1 (oder CF') zu dem Leitkreis um F_2?

9. Beweise hiernach: Die Ellipse ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis berühren und durch einen festen Punkt

im Innern dieses Kreises hindurchgehen. (Der feste Punkt und der Mittelpunkt des festen Kreises sind die Brennpunkte, der Radius des festen Kreises ist die große Achse der Ellipse.)

Definition und Gestalt der Hyperbel

Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Differenz haben. Die konstante Differenz soll mit $2a$ bezeichnet werden, alle übrigen Bezeichnungen sollen dieselben sein wie bei der Ellipse.

10. a) Verlängere $2a$ um eine Strecke r_1 auf eine Länge r_2, so daß $r_2 - r_1 = 2a$ ist, und zeichne über F_1F_2 ein Dreieck F_1F_2C mit den Seiten $2e$, r_1, r_2. Zeige aus der Definition, daß C ein Punkt der Hyperbel ist. b) In wieviel verschiedenen Lagen zur festen Grundlinie F_1F_2 läßt sich jedes der Dreiecke F_1F_2C zeichnen? (Achte darauf, daß in der Definition der Hyperbel nichts darüber gesagt ist, in welchem Sinne man die Differenz der Entfernungen zu bilden hat, also ob von F_1 oder von F_2 die größere der beiden Entfernungen ausgehen soll.) c) Zeige, daß die Symmetrieverhältnisse bei der Hyperbel dieselben sind wie bei der Ellipse. d) Wie liegt ein Punkt der Ebene zur Hyperbel, wenn die Differenz seiner Entfernungen von F_1 und F_2 größer (kleiner) als $2a$ ist?

11. a) Was versteht man unter den Scheiteln der Hyperbel? b) Wie konstruiert man die Scheitel? c) Warum gibt es bei der Hyperbel keine Nebenscheitel?

12. Beweise, daß die Hyperbel ganz außerhalb des Scheitelkreises liegt.

13. Die längere der beiden Strecken CF_1 und CF_2 werde um die kürzere von C aus verkürzt bis F'. Beweise, daß für die Hyperbel dieselben Sätze gelten wie die in Aufg. 6a) bis c) für die Ellipse bewiesenen.

14. Beweise aus den Symmetrieeigenschaften des Mittellotes, daß Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen, an der Hyperbel so zurückgeworfen werden, als kämen sie ungeknickt aus F_2 und umgekehrt. (Vgl. Aufg. 7.)

15. Beantworte die in Aufg. 8 gestellten Fragen für die Hyperbel.

16. Beweise hiernach: Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis berühren und durch einen festen Punkt außerhalb dieses Kreises hindurchgehen. (Der feste Punkt und der Mittelpunkt des festen Kreises sind die Brennpunkte, der Radius des festen Kreises ist die Hauptachse der Hyperbel.)

17. An den Leitkreis um F_1 seien von F_2 die Tangenten gelegt, einer der Berührungspunkte sei T. Beweise, daß F_2T auch den Scheitelkreis der Hyperbel berührt.

Andeutung: F_2 ist äußerer Ähnlichkeitspunkt des Scheitelkreises und Leitkreises.

18. Der Punkt, in dem F_2T (s. vor. Aufg.) den Scheitelkreis berührt, sei U, der Mittelpunkt der Hyperbel heiße O; beweise als Folgerung von Nr. 17, **a)** daß OU die Mittelsenkrechte von TF_2 ist, **b)** daß $F_1T \parallel OU$, oder mit anderen Worten, daß der Berührungspunkt der Hyperbeltangente OU im Unendlichen liegt (Asymptoten).

19. Zeige aus der Definition in Nr. 16, daß auf OU ein Hyperbelpunkt, und zwar ein unendlich ferner, gelegen sein muß.

20. Zeige, daß die Hyperbel zwei Asymptoten hat (zwei Tangenten von F_2 an den Leitkreis um F_1) und daß sie aus zwei kongruenten Zweigen besteht. Diskutiere für beide Zweige der Kurve den Sinn und das Vorzeichen der in der Definition der Hyperbel auftretenden Differenz.

21. Definiert man als Länge der Nebenachse $2b$ das Stück, das die Asymptoten auf einer Scheiteltangente abschneiden, so ist $e^2 = a^2 + b^2$. Beweise dies und leite daraus eine einfache Konstruktion der Asymptoten her.

22. Diskutiere den Sonderfall, daß die Asymptoten senkrecht zueinander sind ($a = b$, gleichseitige Hyperbel).

Definition und Gestalt der Parabel

Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden gleichweit entfernt sind. Der feste Punkt (F) heißt der Brennpunkt, die feste Gerade (l) die Leitlinie der Parabel, das von F auf l gefällte Lot die Achse der Parabel.

23. Warum gibt es nur auf der dem Brennpunkt zugewandten Seite der Leitlinie Parabelpunkte?

24. Wie konstruiert man den Scheitel der Parabel?

25. Ziehe zu l auf der dem Punkte F zugewandten Seite im Abstande c die Parallele und zeichne um F einen Kreis mit dem Radius c. **a)** Beweise, daß die Schnittpunkte des Kreises und der Parallelen Parabelpunkte sind. **b)** Wie groß muß c mindestens sein, damit sich Schnittpunkte ergeben?

26. Verbinde den Brennpunkt F mit einem beliebigen Punkt F' der Leitlinie l, ziehe durch F' die Parallele zur Achse und errichte auf FF' die Mittelsenkrechte. Beweise: **a)** Der Schnittpunkt C der Parallelen und der Mittelsenkrechten ist ein Parabelpunkt. **b)** Die Mittelsenkrechte ist Tangente der Parabel, der Punkt C ihr Berührungspunkt.

27. Beweise aus den Symmetrieeigenschaften der Mittelsenkrechten **a)** daß Lichtstrahlen, die von F ausgehen, an der Parabel so zurückgeworfen werden, daß sie parallel der Achse laufen, und **b)** daß Lichtstrahlen, die parallel der Achse auffallen, an der Parabel so gespiegelt werden, daß sie sich in F sammeln (Name „Brennpunkt“).

28. Wo liegt der Gegenpunkt F' des Brennpunktes F in bezug auf eine Parabeltangente?

29. Beweise, daß es bei der Parabel keine zwei Tangenten gibt, die einander parallel sind.

Andeutung: Beachte Nr. 28.

30. Zeige aus der Definition der Parabel, daß die durch F' gelegte Parallele zur Achse außer dem im Endlichen gelegenen Punkt C (siehe Aufg. 26) noch einen anderen, und zwar im Unendlichen gelegenen Punkt mit der Parabel gemeinsam hat. Wieviel unendlich ferne Punkte hat die Parabel?

31. Wo liegt bei der Parabel der Mittelpunkt, der zweite Scheitel und der zweite Brennpunkt?

32. Beweise, daß man die Parabel als Grenzform zwischen Ellipse und Hyperbel auffassen kann, wofern man die Leitlinie der Parabel als Leitkreis mit unendlich großem Radius ansieht. Beachte dabei, daß im Parabelfalle der in Aufg. 9 und 16 genannte feste Kreis in dem Sinne entartet, daß man nicht entscheiden kann, ob der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des festen Kreises liegt.

33. Stelle hiernach eine gemeinsame Definition der drei Kurven Ellipse, Hyperbel und Parabel auf. (Über den Namen „Kegelschnitte" vgl. § 20, Aufg. 4ff.)

Sekanten und Tangenten eines Kegelschnittes

34. Konstruiere nach der in Aufg. 33 verlangten Definition die Schnittpunkte eines durch Brennpunkt und Leitkreis bestimmten Kegelschnittes mit einer Geraden g als die Mittelpunkte von Kreisen, welche durch F_1 gehen und den Leitkreis um F_2 berühren.

Andeutung: Gegenpunkt von F_1 in bezug auf g sei F'; lege durch F_1F' einen Hilfskreis, der den Leitkreis in X und Y schneidet. XY und F_1F' schneiden sich in M, dem Potenzmittelpunkt des Leitkreises, des Hilfskreises und des gesuchten Kreises, also sind die von M an den Hilfskreis gelegten Tangenten Potenzlinien des Leitkreises und des gesuchten Kreises.

Wie vereinfacht sich bei der Parabel die Konstruktion?

35. Wie viele Lösungen hat die Aufg. 34 im allgemeinen? Diskutiere im einzelnen folgende Fälle: **a)** F_1 und F' liegen entweder beide innerhalb oder beide außerhalb des Leitkreises. **b)** Von den Punkten F_1 und F' liegt einer innerhalb, der andere außerhalb des Leitkreises. **c)** F' liegt auf dem Leitkreise.

36. Von welcher Ordnung sind daher die Kegelschnitte?

37. Lege an einen durch Brennpunkt und Leitkreis gegebenen Kegelschnitt von einem Punkte P aus die Tangenten.

Andeutung: Lege den Kreis um P durch F_1; dieser Kreis schneidet den Leitkreis um F_2 (bei der Parabel die Leitlinie) in F'' und F'''. Die Mittelsenkrechten von F_1F'' und F_1F''' sind Tangenten an den Kegelschnitt, und zwar sind die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten mit F_2F'' und F_2F''' die Berührungspunkte der Tangenten.

38. Wieviel Lösungen hat die Aufg. 37 im allgemeinen? — Diskutiere im einzelnen die Fälle, wo der Kreis um P durch F_1 den Leitkreis um F_2 a) schneidet, b) berührt oder c) gar nicht trifft.

39. Von welcher Klasse sind hiernach die Kegelschnitte?

Beweise, daß für jeden Kegelschnitt folgende Sätze gelten:

40. Die Brennstrahlen nach den Berührungspunkten zweier Tangenten bilden gleiche Winkel mit dem Brennstrahl nach dem Schnittpunkt der Tangenten.

41. Die Brennstrahlen nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten bilden mit den Tangenten gleiche Winkel.

42. Der Fußpunkt des von einem Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Scheitelkreise.

43. Das zwischen Berührungspunkt und Hauptachse gelegene Stück einer Tangente wird vom Scheitelkreise harmonisch geteilt.

44. Das von den beiden Scheiteltangenten begrenzte Stück einer Tangente erscheint von einem Brennpunkt aus gesehen unter rechtem Winkel und wird vom Berührungspunkt und der Hauptachse harmonisch geteilt.

45. Wie lauten die unter 41 bis 44 aufgestellten Sätze in dem besonderen Fall der Parabel?

Folgende Sätze sind zu beweisen:

46. Der geometrische Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel einen Kegelschnitt berühren, ist ein mit dem Kegelschnitt konzentrischer Kreis, im Parabelfalle die Leitlinie. Erörtere, wann bei der Hyperbel dieser Kreis reell ist, und worin der Kreis entartet, wenn die Hyperbel gleichseitig ist.

Andeutung: Zuerst Aufg. 41, dann pythagoreischer Lehrsatz; im Parabelfalle einfacher.

47. Die Strecke zwischen dem Schnittpunkt zweier Parabeltangenten und dem Brennpunkt ist mittlere Proportionale zu den Brennstrahlen nach den Berührungspunkten.

Andeutung: Anwendung von Aufg. 40 und 41; ähnliche Dreiecke.

48. (Für Ellipse und Hyperbel.) Das Produkt der Abstände einer Tangente von den beiden Brennpunkten ist konstant (und zwar gleich dem Quadrat der halben Nebenachse).

49. Die Punkte, in denen eine Hyperbeltangente die Asymptoten schneidet, liegen mit den Brennpunkten auf einem Kreise.

Andeutung: Anwendung von Aufg. 40 und 41; dann Satz über Peripheriewinkel.

50. Das Dreieck, das eine Hyperbeltangente mit den Asymptoten bestimmt, hat konstanten Flächeninhalt oder m. a. W.: Das Produkt aus den von einer Hyperbeltangente auf den Asymptoten abgeschnittenen Stücken ist konstant.

Andeutung: Aufg. 49, dann Sehnensatz.

51. Der umgeschriebene Kreis jedes Parabeltangentendreiecks geht durch den Brennpunkt.

Andeutung: Dreimalige Anwendung von Nr. 42 in der besonderen Form wie Aufg. 45, dann Umkehrung der Sätze über Peripheriewinkel.

52. Der Höhenschnittpunkt jedes Parabeltangentendreiecks liegt auf der Leitlinie.

Andeutung: Gegenpunkt des Brennpunkts und Höhenschnittpunkts in bezug auf eine Tangente, dann Trapezsatz und Aufg. 28.

53. Das auf eine Parabelsehne vom Brennpunkte aus gefällte Lot halbiert die Projektion der Sehne auf die Leitlinie.

Andeutung: Das Lot ist nach der Definition der Parabel Potenzlinie zweier Kreise durch den Brennpunkt.

54. Der durch den Schnittpunkt zweier Parabeltangenten gezogene Durchmesser halbiert die Berührungssehne.

Andeutung: Folgerung von Nr. 53.

55. bis 72. Von einem Kegelschnitt sind

gegeben:	gesucht:
55. ein Brennpunkt, zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von diesen,	der zweite Brennpunkt;
56. ein Brennpunkt, zwei Tangenten und ein Kurvenpunkt,	
57. ein Brennpunkt, zwei Kurvenpunkte und die Tangente in einem von diesen,	
58. ein Brennpunkt, zwei Kurvenpunkte und eine Tangente,	
59. ein Brennpunkt und drei Tangenten,	
60. ein Brennpunkt, eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt und die Länge der Hauptachse,	
61. ein Brennpunkt, zwei Tangenten und die Länge der Hauptachse,	
62. ein Brennpunkt, eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt und die Richtung der Hauptachse,	
63. ein Brennpunkt, zwei Tangenten und die Richtung der Hauptachse;	

gegeben:	gesucht:
64. ein Brennpunkt, ein Scheitel und ein Kurvenpunkt,	die Tangenten in den beiden gegebenen Punkten und der zweite Brennpunkt,
65. ein Brennpunkt, ein Scheitel und eine Tangente,	die Tangente in dem gegebenen Scheitel, der Berührungspunkt der gegebenen Tangente und der zweite Brennpunkt,
66. ein Brennpunkt, eine Scheiteltangente und ein Kurvenpunkt,	beide Scheitel und der zweite Brennpunkt,
67. ein Brennpunkt, eine Scheiteltangente und eine beliebige Tangente,	die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten und der zweite Brennpunkt,
68. die beiden Scheitel und ein Kurvenpunkt,	die Tangente in dem gegebenen Punkt,
69. die beiden Scheitel und eine Tangente;	der Berührungspunkt der gegebenen Tangente;

gegeben:	gesucht:
70. zwei Tangenten, der Mittelpunkt der Kurve und die Länge der Hauptachse,	die beiden Brennpunkte.
71. eine Tangente, der Berührungspunkt auf dieser, der Mittelpunkt der Kurve und die Länge der Hauptachse,	
72. die beiden Scheiteltangenten und zwei andere Tangenten;	

73. bis 76. Von einer Hyperbel sind

gegeben:	gesucht:
73. die beiden Asymptoten und die Länge der Hauptachse,	die beiden Brennpunkte,
74. die beiden Asymptoten und die lineare Exzentrizität,	die Scheitel,
75. die beiden Asymptoten und eine Tangente,	die Brennpunkte und der Berührungspunkt der gegebenen Tangente,
76. die beiden Asymptoten und ein Punkt der Kurve;	die Tangente in dem gegebenen Punkt und die beiden Brennpunkte.

77. bis 93. Von einer Parabel sind

gegeben:	gesucht:
77. der Brennpunkt, eine Tangente und ihr Berührungspunkt,	die Leitlinie, die Achse und der Scheitel,

78. der Brennpunkt und zwei Tangenten,	die Leitlinie, die Achse und die Berührungspunkte der beiden Tangenten,
79. der Brennpunkt und zwei Kurvenpunkte,	die Leitlinie, der Scheitel und die Tangenten in den beiden gegebenen Punkten,
80. eine Tangente, die Achse und auf dieser der Brennpunkt,	der Berührungspunkt der Tangente, die Leitlinie und der Scheitel,
81. ein Kurvenpunkt, die Achse und auf dieser der Brennpunkt,	die Tangente in dem gegebenen Punkt, die Leitlinie und der Scheitel,
82. die Leitlinie, eine Tangente und deren Berührungspunkt,	der Brennpunkt und der Scheitel,
83. die Leitlinie und zwei Kurvenpunkte,	der Brennpunkt, der Scheitel und die Tangenten in den gegebenen Punkten,
84. die Leitlinie und zwei Tangenten,	der Brennpunkt,
85. zwei Tangenten und deren Berührungspunkte,	der Brennpunkt und die Leitlinie,
86. eine Tangente, die Achse und auf dieser der Scheitel,	der Berührungspunkt der gegebenen Tangente und die Leitlinie,
87. ein Kurvenpunkt, die Achse und auf dieser der Scheitel,	die Tangente in dem gegebenen Punkt und die Leitlinie,
88. die Scheiteltangente, eine beliebige andere Tangente und deren Berührungspunkt,	der Brennpunkt,
89. die Scheiteltangente und zwei andere Tangenten,	der Brennpunkt,
90. die Achse und zwei Tangenten,	der Brennpunkt, der Scheitel und der Berührungspunkt auf den gegebenen Tangenten,
91. die Achsenrichtung, zwei Kurvenpunkte und die Tangente in einem von diesen,	der Brennpunkt und die Tangente in dem zweiten der gegebenen Punkte,
92. drei Tangenten und ein Punkt der Leitlinie,	die Leitlinie und der Brennpunkt,
93. vier Tangenten;	die Leitlinie und der Brennpunkt.

94. Beweise: Ist in einem gleichschenkligen Dreieck irgendeine Parabel angeschrieben, so geht der Brennstrahl nach der Spitze des Dreiecks durch den Berührungspunkt der Grundlinie.

95. Beweise: Der Schnittpunkt zweier beliebiger Tangenten eines Kegelschnittes ist Mittelpunkt eines Kreises, der die vier Brennstrahlen nach den Berührungspunkten berührt.

§ 22. Die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises

Umkehrung der Dandelinschen Sätze

1. Die Ebene einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel werde von einer beliebigen Kugel so berührt, daß der Berührungspunkt mit einem Brennpunkt zusammenfällt; in der durch den Mittelpunkt der Kugel und die Achse der Kurve gelegten Ebene ziehe man von den Scheiteln der Kurve aus die beiden noch möglichen Tangenten an die Kugel. Von dem Schnittpunkt dieser beiden Tangenten aus lege man an die Kugel einen Berührungskegel. — Es ist zu beweisen, daß der Schnitt dieses Kegels und der ersten Ebene identisch ist mit der Ausgangskurve.

   Andeutung: Die Schnittkurve und die Ausgangskurve fallen mit den Scheiteln und einem Brennpunkt, also vollständig, zusammen.

2. Jede Ellipse, Parabel und Hyperbel kann als Zentralprojektion eines Kreises angesehen werden.

   Zeige, daß diese Aussage nur eine andere Fassung des vorigen Satzes ist.

3. Jeder für den Kreis gültige Lehrsatz, der nur von Lagebeziehungen, nicht von Maßbeziehungen handelt, ist durch Zentralprojektion ohne weiteres auch auf die Kegelschnitte übertragbar. — Überlege zum Beweise folgende Fragen: Worin projizieren sich bei dieser Übertragungsart a) der Kreis, b) Punkte der Kreisebene, c) Geraden der Kreisebene?

4. Gib an, inwiefern die Sätze in Aufg. 1 und 2 Umkehrungen der Aussagen in § 20, Aufg. 4, 7 und 12 sind.

5. Die Ebenen der Kreise, längs deren die Dandelinschen Kugeln den Kegel berühren, erzeugen in der Ebene jedes Kegelschnittes zwei Geraden, die (nach dem Muster von § 20, Nr. 12) Leitlinien des Kegelschnittes genannt werden. — a) Wo liegt im Parabelfalle die zum zweiten Brennpunkt gehörige Leitlinie? b) Beweise aus der Dandelinschen Figur, daß die Abstände eines Kegelschnittpunktes von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ein konstantes Verhältnis ε haben und daß dieses Verhältnis $\varepsilon \lesseqqgtr 1$ ist, je nachdem die Schnittfigur eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. (ε heißt die numerische Exzentrizität des Kegelschnitts.)

6. Beweise aus der Dandelinschen Figur, daß die Hauptachse jeder der drei Kurven durch einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie harmonisch geteilt wird.

7. a) Stelle nach Aufg. 5b) eine gemeinsame Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie auf. b) Beweise, daß die so definierten Kurven mit den durch wirkliches Schneiden des Kegels erzeugten Gebilden identisch sind.

8. Kegelschnitte mit derselben numerischen Exzentrizität heißen ähnlich. — Beweise aus der Dandelinschen Figur: a) Kegelschnitte mit demselben Achsenverhältnis sind ähnlich. b) Ebenen, die gegen die Achse eines geraden Kreiskegels gleich geneigt sind, schneiden diesen in ähnlichen Kegelschnitten. c) Vergleiche auf Grund des in b) ausgesprochenen Satzes die Asymptotenrichtungen einer Schnitthyperbel mit den Richtungen der Mantellinien, welche die Parallelebene durch die Spitze des Kegels aus diesem ausschneidet.

Pol und Polare

9. a) (Wiederholung.) Beweise den Satz: Die Bestimmungslinie der Punkte, die von einem festen Punkt P durch einen Kreis harmonisch getrennt sind, ist eine Gerade p; diese heißt die Polare von P, entsprechend heißt P der Pol von p. b) Übertrage nach Aufg. 3 diesen Satz auf einen beliebigen Kegelschnitt.

10. Welche Lage hat die Polare, wenn der Pol a) innerhalb des Kegelschnittes, b) auf dem Kegelschnitt, c) außerhalb des Kegelschnittes liegt?

11. a) Welches ist die Polare des Mittelpunktes? b) Welches ist der Pol der unendlich fernen Geraden? c) Durch welchen Punkt geht die Polare eines unendlich fernen Punktes? d) Wo liegt der Pol eines Durchmessers?

12. Beweise nach Aufg. 6: Jede Leitlinie eines Kegelschnittes ist die Polare des zugehörigen Brennpunktes.

13. Beweise: In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen vollständigen Viereck bilden die Nebenecken ein Polardreieck, d. h. ein Dreieck, in dem jede Ecke Pol zur Gegenseite und jede Seite Polare zur Gegenecke ist.

14. Zeige, daß von jedem Polardreieck eine Ecke innerhalb und zwei außerhalb des Kegelschnitts liegen, also daß zwei Seiten des Polardreiecks den Kegelschnitt schneiden, die dritte nicht.

15. Zeichne zu einem Punkte P die Polare in bezug auf einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt mit alleiniger Hilfe des Lineals.

16. Zeichne ebenso an einen gegebenen Kegelschnitt die Tangenten von einem außerhalb gelegenen Punkte aus.

17. Beweise:

a) Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so geht seine Polare durch den Pol der Geraden.

b) Geht eine Gerade durch einen Punkt, so liegt ihr Pol auf der Polaren des Punktes.

18. Das Nebendreiseit eines einem Kegelschnitt umgeschriebenen vollständigen Vierseits ist mit dem Nebendreieck des von den Berührungspunkten gebildeten vollständigen Vierecks identisch (oder m. a. W.: Das Viereck und das Vierseit haben dasselbe Polardreieck). — Beweise das aus Aufg. 13 und 17.

19. Erklärung:

Zwei Punkte heißen konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jeder in der Polare des anderen liegt.	Zwei Geraden heißen konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der anderen geht.

Zeige auf Grund von Aufg. 11, daß von zwei konjugierten Durchmessern jeder die zum anderen parallelen Sehnen halbiert.

20. Beweise mittels des vorigen Satzes und Aufg. 15 und 16: a) Die Berührungssehne eines äußeren Punktes wird von dem durch diesen gehenden Durchmesser halbiert. b) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.

21. Beweise: a) Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben, so wird jede durch den Pol einer Seite gehende Gerade von den beiden anderen Seiten in konjugierten Punkten geschnitten. b) Sonderfall: Verbindet man einen beliebigen Ellipsenpunkt mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers, so teilen diese Verbindungslinien den konjugierten Durchmesser harmonisch. (Warum gilt der Satz nicht auch für die Hyperbel?)

22. Zeige: a) Die Diagonalen eines einer Ellipse oder Hyperbel umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser. b) Die Seiten eines einer Ellipse oder Hyperbel eingeschriebenen Parallelogramms sind konjugierten Durchmessern parallel.

Pascalscher und Brianchonscher Satz

23. Beweise: In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen einfachen Sechseck liegen die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten auf einer Geraden (Pascalscher Satz; Pascalsche Gerade).

Andeutung: Man beweist den Satz zunächst für den Kreis (§ 19, Nr. 9). — Die Übertragung auf einen beliebigen Kegelschnitt geschieht nach dem Muster von Aufg. 3.

24. a) Wieviel verschiedene Sechsecke lassen sich aus sechs auf dem Kegelschnitt angenommenen Punkten herstellen? b) Gib an, warum die Pascalsche Figur um so übersichtlicher und gedrängter wird, je „unsinniger" die Reihenfolge der sechs Ecken erscheint.

25. Beweise: In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen einfachen Sechsseit gehen die Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken durch einen Punkt (Brianchonscher Satz; Brianchonscher Punkt).

Andeutung: Der Beweis wird am einfachsten mittels Aufg. 23 und 17 geführt.

26. Erkläre, warum (im Gegensatz zu Aufg. 24b) die Brianchonsche Figur um so übersichtlicher wird, je „vernünftiger“ die Reihenfolge der sechs Seiten erscheint.

27. Sprich den Pascalschen Satz für folgende Sonderfälle aus: **a)** Zwei Ecken des Sechsecks sind zusammengefallen (eingeschriebenes Fünfeck mit Tangente in einer Ecke), **b)** zweimal zwei Ecken des Sechsecks sind zusammengefallen (eingeschriebenes Viereck mit Tangenten in zwei Gegenecken oder Nachbarecken), **c)** dreimal zwei Ecken des Sechsecks sind zusammengefallen (eingeschriebenes Dreieck mit Tangenten in den Ecken).

28. Sprich den Brianchonschen Satz für folgende Sonderfälle aus: **a)** umgeschriebenes Fünfseit mit Berührungspunkt auf einer Seite, **b)** umgeschriebenes Vierseit mit Berührungspunkten auf einem Paar Gegenseiten, **c)** umgeschriebenes Dreiseit mit den Berührungspunkten der drei Seiten.

29. Von einem Kegelschnitt sind fünf Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 und eine durch einen von diesen (z. B. durch C_5) gehende Gerade g gegeben; man bestimme den zweiten auf g gelegenen Kegelschnittpunkt.

Andeutung: Man faßt den gesuchten Punkt C_6 als sechste Ecke eines Pascalschen Sechsecks auf und sorgt dafür, daß die Gerade g (also $C_5 C_6$) als eine Seite des Sechsecks auftritt. Die Konstruktion kann man kurz und zweckmäßig in die nebenstehende Übersicht zusammendrängen. Die in der ersten Zeile stehenden Buchstaben bezeichnen die Ecken des Sechsecks in der gewählten Reihenfolge. Die drei darunterstehenden Zeilen enthalten je ein Paar Gegenseiten des Sechsecks mit ihren Schnittpunkten A, B, C (3. Spalte), die auf der Pascalschen Geraden p gelegen sind (4. Spalte).

$C_1 C_2 C_3$	$C_4 C_5 C_6$		
$C_1 C_2$	$C_4 C_5$	A	
$C_2 C_3$	$C_5 C_6$	B	p
$C_3 C_4$	$C_6 C_1$	C	

30. Von einem Kegelschnitt sind fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 und auf einer von diesen (z. B. t_5) ein Punkt P gegeben; man zeichne die zweite durch P gehende Tangente.

Andeutung: Man faßt die gesuchte Tangente t_6 als sechste Seite eines Brianchonschen Sechsseits auf und sorgt dafür, daß der gegebene Punkt P (also $t_5 t_6$) als eine Ecke des Sechsseits erscheint (siehe das nebenstehende Schema). Von den Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken sind zwei (nämlich a und b) durch die gegebenen Stücke bestimmt. Durch den Schnittpunkt von a und b, den Brianchonschen Punkt B, geht auch die dritte Verbindungslinie c, von der ein Punkt $t_3 t_4$ bereits bekannt ist.

$t_1 t_2 t_3$	$t_4 t_5 t_6$		
$t_1 t_2$	$t_4 t_5$	a	
$t_2 t_3$	$t_5 t_6$	b	B
$t_3 t_4$	$t_6 t_1$	c	

31. bis 63. Die folgenden Aufgaben sind mit Hilfe des Pascalschen und Brianchonschen Satzes zu lösen.

Treten hierbei Tangenten mit ihren Berührungspunkten auf, so erscheint (im Falle des Pascalschen Satzes) eine Tangente als Verbindungslinie zweier zusammenfallender Punkte und (im Falle des Brianchonschen Satzes) ein Berührungspunkt als Schnittpunkt zweier zusammenfallender Tangenten.

31. bis **39.** Von einem Kegelschnitt sind

gegeben:	gesucht:
31. fünf Punkte,	die Tangente in einem von ihnen,
32. vier Punkte und die Tangente in einem von ihnen,	die Tangente in einem anderen der gegebenen Kurvenpunkte,
33. vier Punkte und die Tangente in einem von ihnen,	ein fünfter Kurvenpunkt,
34. drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen,	die Tangente im dritten Punkte,
35. fünf Tangenten,	der Berührungspunkt auf einer von ihnen,
36. fünf Tangenten,	die zu einer von ihnen parallele Tangente,
37. vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von ihnen,	der Berührungspunkt auf einer anderen der gegebenen Tangenten,
38. vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von ihnen,	eine fünfte Tangente,
39. drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien von ihnen;	der Berührungspunkt auf der dritten Tangente.

40. bis **50.** Von einer Parabel sind

gegeben:	gesucht:
40. zwei Punkte, die Tangente in einem von ihnen und die Achsenrichtung,	die Tangente in dem zweiten der gegebenen Punkte,
41. zwei Punkte, die Tangente in einem von ihnen und die Achsenrichtung,	andere Punkte der Parabel,
42. drei Punkte und die Achsenrichtung,	die Tangenten in den gegebenen Punkten,
43. vier Tangenten und auf einer von ihnen ein Punkt P,	die zweite Tangente durch P,
44. vier Tangenten,	der Berührungspunkt auf einer von ihnen,
45. vier Tangenten,	die Achsenrichtung,
46. vier Tangenten und eine Gerade g,	die parallel g verlaufende Tangente,
47. drei Tangenten und die Achsenrichtung,	eine vierte Tangente und der Berührungspunkt auf einer der gegebenen,

48. drei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von ihnen,	eine vierte Tangente und die Achsenrichtung,
49. zwei Tangenten, der Berührungspunkt auf einer von ihnen und die Achsenrichtung,	der Berührungspunkt auf der zweiten gegebenen Tangente und eine beliebige dritte Tangente,
50. zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten;	eine beliebige dritte Tangente und die Achsenrichtung.

51. bis **63.** Von einer Hyperbel sind

gegeben:	gesucht:
51. drei Punkte und die Richtungen der beiden Asymptoten,	die beiden Asymptoten und die Tangente in einem der gegebenen Punkte,
52. vier Punkte und die Richtung der einen Asymptote,	die beiden Asymptoten und die Tangente in einem der gegebenen Punkte,
53. die Richtungen der beiden Asymptoten, zwei Punkte und die Tangente in einem von ihnen,	die Tangente in dem zweiten der gegebenen Punkte und die beiden Asymptoten,
54. drei Punkte und eine Asymptote,	die Tangente in einem der gegebenen Punkte und ein beliebiger vierter Punkt,
55. zwei Punkte, eine Asymptote und die Richtung der anderen,	die Tangente in einem der gegebenen Punkte und die zweite Asymptote,
56. die Richtung einer Asymptote, drei Punkte und die Tangente in einem von ihnen,	die beiden Asymptoten,
57. die Richtung einer Asymptote, zwei Punkte und die Tangenten in ihnen,	andere Punkte der Hyperbel und die Asymptoten,
58. die Asymptoten und ein Punkt,	andere Punkte der Hyperbel und die Tangente in dem gegebenen Punkt,
59. ein Punkt, die Tangente in diesem, eine Asymptote und die Richtung der zweiten,	andere Punkte der Hyperbel und die zweite Asymptote,
60. drei Tangenten und eine Asymptote,	andere Tangenten und der Berührungspunkt auf einer der gegebenen,
61. eine Asymptote, zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von diesen,	eine dritte Tangente,

	gegeben:	gesucht:
62.	eine Asymptote, zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer von diesen,	der Berührungspunkt auf der anderen der gegebenen Tangenten und die zweite Asymptote,
63.	die Asymptoten und eine Tangente;	andere Tangenten und der Berührungspunkt auf der gegebenen.

64. Das von den Asymptoten begrenzte Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkt halbiert. Beweise das **a)** mittels des Pascalschen Satzes, **b)** mittels des Brianchonschen Satzes.

65. Zeige: Jede Hyperbeltangente bestimmt mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt. Vgl. den früheren Beweis in § 21, Aufg. 50.

66. Beweise mittels des Pascalschen Satzes: Auf jeder Hyperbelsekante sind die zwischen den Asymptoten und der Kurve gelegenen Stücke gleich. (Warum ist dieser Satz nicht wie sein in Aufg. 64 genannter Sonderfall auch mittels des Brianchonschen Satzes beweisbar?)

67. Zeige: Das von drei Parabeltangenten begrenzte Dreieck hat halb so großen Flächeninhalt wie das von den Berührungspunkten gebildete Dreieck.

68. Beweise mittels Aufg. 20b) und 64: Je zwei konjugierte Hyperbeldurchmesser bilden mit den Asymptoten ein harmonisches Büschel.

§ 23. Projektive und involutorische Eigenschaften

Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel und Punktreihen

1. Was versteht man unter dem Doppelverhältnis von **a)** vier Punkten A, B, C, D einer Punktreihe, **b)** vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels?

2. Beweise, daß der Wert eines Doppelverhältnisses von vier Punkten (Strahlen) unverändert bleibt, wenn man die Punkte (Strahlen) jedes Paares oder auch die Punktepaare (Strahlenpaare) miteinander vertauscht.

3. **a)** Zeige, daß es nur einen Punkt (Strahl) einer Punktreihe (eines Strahlenbüschels) gibt, der mit drei anderen Punkten der Punktreihe (Strahlen des Strahlenbüschels) ein gegebenes Doppelverhältnis bildet. **b)** Erörtere, welche Werte das Doppelverhältnis annimmt, wenn man den vierten Punkt (Strahl) alle möglichen Lagen annehmen läßt. **c)** Welchen Wert hat das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten (Strahlen)?

4. Gib an, wie man beweisen kann, daß **a)** vier Strahlen eines Strahlenbüschels dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier Punkte, in denen irgendeine Gerade die Strahlen des Büschels schneidet, **b)** vier Punkte einer Punktreihe dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier Strahlen, durch die man die Punkte aus einem beliebigen fünften Punkte projizieren kann. c) Fasse den Inhalt von a) und b) in die Aussage zusammen, daß Doppelverhältnisse durch Projizieren und Schneiden nicht geändert werden.

5. Wann nennt man zwei Punktreihen (Strahlenbüschel) a) projektiv, b) perspektiv?

6. Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei projektive Punktreihen (Strahlenbüschel) perspektiv liegen?[1])

7. Es seien zwei schiefliegende projektive
Strahlenbüschel | Punktreihen
durch drei Paare entsprechender Elemente gegeben. Zeige, wie man mit alleiniger Benutzung des Lineals zu jedem vierten
Strahl des einen Strahlenbüschels | Punkt der einen Punktreihe
den entsprechenden
Strahl des anderen Strahlenbüschels | Punkt der anderen Punktreihe
finden kann. — Erläutere dabei den Begriff
Perspektivitätszentrum | Perspektivitätsachse.

8. Es seien zwei projektive Punktreihen auf derselben Geraden („Träger") durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben. Wie kann man zu jedem vierten Punkt der einen Punktreihe den entsprechenden der anderen finden?

Andeutung: Zeige, daß man durch Projizieren aus zwei verschiedenen Punkten der Ebene diese Aufgabe auf die in Nr. 7 für Strahlenbüschel gelöste zurückführen kann.

9. Löse dieselbe Aufgabe wie Nr. 8 für zwei projektive Strahlenbüschel mit demselben Scheitel („Träger").

10. In jedem von zwei schiefliegenden projektiven Strahlenbüscheln soll der Strahl ermittelt werden, welcher der Verbindungslinie der Träger entspricht.

11. Zeichne in jeder von zwei schiefliegenden projektiven Punktreihen den Punkt, der dem Schnittpunkt der Träger entspricht.

12. Fällt von zwei auf demselben Träger gelegenen projektiven Punktreihen ein Paar entsprechender Punkte zusammen, so muß noch ein zweites Paar entsprechender Punkte zusammenfallen. Beweise das und zeige, wie man das zweite Paar finden kann, wenn das erste Paar und zwei nicht zusammenfallende Paare entsprechender Punkte gegeben sind.

13. Von zwei schiefliegenden projektiven Punktreihen kennt man ein Paar entsprechender Punkte und in jeder Reihe noch den Punkt, der dem Schnittpunkt der Träger entspricht. Andere Paare entsprechender Punkte sind zu zeichnen.

---

1) Projektive Punktreihen oder Strahlenbüschel, die nicht perspektiv liegen, sollen im folgenden als „schiefliegend" bezeichnet werden, wenn dies der Deutlichkeit wegen nötig erscheint.

11 [20191]

14. Von zwei schiefliegenden projektiven Strahlenbüscheln kennt man ein Paar entsprechender Strahlen und in jedem Büschel noch den Strahl, welcher der Verbindungslinie der Träger entspricht. Man zeichne andere Paare entsprechender Strahlen.

15. Beweise: a) Die Punkte eines Kegelschnittes werden aus zwei beliebigen von ihnen durch projektive Strahlenbüschel projiziert. b) Zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnittes werden von den übrigen Tangenten in projektiven Punktreihen geschnitten.

Andeutung: Zu a) Beim Kreise sind diese Büschel kongruent, also sicher projektiv; weiter nach 4c) und § 22, Aufg. 3.

16. Beweise den Pascalschen Satz, indem du bei einem dem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck vier Ecken aus den beiden anderen durch projektive Strahlenbüschel projizierst und beachtest, daß diese Büschel in zwei perspektiven Punktreihen geschnitten werden können.

17. Beweise in entsprechender Weise den Satz von Brianchon.

18. Ein harmonisches Büschel, dessen Träger auf einem Kegelschnitt liegt, schneidet diesen in vier Punkten, die von jedem anderen Punkt des Kegelschnitts wieder durch ein harmonisches Büschel projiziert werden. Woraus folgt das?

19. Zwei projektive Strahlenbüschel, die denselben Träger haben, sind durch je drei entsprechende Strahlen gegeben. Zeichne die Doppelstrahlen, d. h. die Strahlen, in denen je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammenfallen. — Erörtere die Ausführbarkeit der Konstruktion und die Anzahl der Lösungen.

Andeutung: Hilfskreis durch den gemeinsamen Träger der beiden Büschel.

20. Ermittle in zwei projektiven Punktreihen, die auf demselben Träger gelegen und durch je drei entsprechende Punkte gegeben sind, die Doppelpunkte.

Andeutung: Projiziere die beiden Punktreihen aus demselben Punkte und verfahre dann nach Aufg. 19.

21. Beweise, daß die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnitts nichts anderes sind als die Doppelpunkte der beiden Punktreihen, die auf dieser Geraden dadurch erzeugt werden, daß man die Punkte des Kegelschnitts aus zwei beliebigen von ihnen durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

22. Zeige ebenso, daß die von einem Punkt an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten Doppelstrahlen zweier Strahlenbüschel mit demselben Träger sind.

23. Wie kann man Aufg. 21 benutzen zur Konstruktion eines Kegelschnitts aus vier Punkten und einer Tangente?

24. Benutze Aufg. 22 zur Konstruktion eines Kegelschnitts aus vier Tangenten und einem Punkt.

25. a) Was versteht man unter gleichlaufenden und ungleichlaufenden Strahlenbüscheln? b) Erkläre die Begriffe gleichlaufender und ungleichlaufender Punktreihen durch Zurückführung auf a).

26. a) Warum müssen ungleichlaufende Strahlenbüschel mit demselben Scheitel stets zwei Doppelstrahlen haben? b) Warum gibt es in zwei ungleichlaufenden Strahlenbüscheln mit verschiedenen Trägern stets zwei Paare einander entsprechender paralleler Strahlen?

27. Zeige auf Grund von Aufg. 26b), daß der Ort für die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier schiefliegenden ungleichlaufenden projektiven Strahlenbüschel eine Hyperbel ist. In welcher Beziehung stehen die Parallelstrahlen der beiden Büschel zu den Asymptoten der Hyperbel?

28. Bleibt die Seite AB eines Dreiecks ABC fest, während die Seiten AC und BC kongruente ungleichlaufende Strahlenbüschel beschreiben, so durchläuft die Ecke C eine gleichseitige Hyperbel, von der AB ein Durchmesser ist. Zeichne die Tangenten dieser Hyperbel in A und B und die Winkel der Asymptoten gegen AB.

29. Beweise: Ein beliebiges Bogenstück der gleichseitigen Hyperbel erscheint von den Endpunkten eines Hauptdurchmessers aus unter gleichen Winkeln.

Involutorische Eigenschaften

30. a) Was versteht man unter einem Kreisbüschel? b) Gib an, welche Kreispotenzeigenschaften die Punktepaare haben, die ein solches Kreisbüschel auf einer beliebigen Geraden bestimmt. — (Die Gesamtheit dieser Punktepaare heißt eine involutorische Punktreihe oder eine Punktinvolution.)

31. a) Was versteht man unter den Doppelpunkten einer (Punkt-)Involution, und wie findet man sie? b) Beweise, daß je zwei zugeordnete Punkte einer Involution von den Doppelpunkten harmonisch getrennt werden. c) Zeige, wie man aus zwei Punktepaaren einer Involution beliebig viele andere zugeordnete Punkte, den Mittelpunkt und die Doppelpunkte, falls sie reell sind, zeichnen kann.

32. Beweise: Ein aus vier Punkten einer Involution beliebig gebildetes Doppelverhältnis bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man jeden Punkt durch den ihm zugeordneten ersetzt.

33. Ein Strahlenbüschel, das eine Gerade in einer involutorischen Reihe schneidet, heißt ein involutorisches Strahlenbüschel oder eine Strahleninvolution. — Beweise: Ein involutorisches Strahlenbüschel schneidet jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe.

34. a) Wie findet man die Doppelstrahlen und die aufeinander senkrechten Strahlen eines involutorischen Büschels? b) Beweise: In einer Strahleninvolution werden die Doppelstrahlen (falls solche vorhanden sind) von je

zwei zugeordneten Strahlen harmonisch getrennt. c) Zeige: Hat ein involutorisches Büschel mehr als ein rechtwinkliges Strahlenpaar, so sind alle zugeordneten Strahlen aufeinander senkrecht („orthogonale Strahleninvolution").

35. Die in bezug auf einen Kegelschnitt konjugierten

Punktepaare einer Geraden	Strahlenpaare eines Büschels

bilden eine Involution. — Beweise das, indem du vom Kreise ausgehst.

36. a) Beweise: Die konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes bilden ein involutorisches Büschel, dessen rechtwinkliges Strahlenpaar das Achsenkreuz ist. b) Was für eine Involution bilden die konjugierten Durchmesser eines Kreises?

37. Zeige, daß die Doppelstrahlen des in Aufg. 36a) genannten Büschels bei einer Hyperbel die Asymptoten sind.

38. Beweise, daß die konjugierten Brennpunktssehnen eine orthogonale Strahleninvolution bilden.

39. a) Beweise: Jede Gerade schneidet die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in einer Involution. b) Zeige, wie man hiernach in einer durch zwei Punktepaare gegebenen Involution zu jedem beliebigen Punkte den zugeordneten mit alleiniger Benutzung des Lineals finden kann.

40. Beweise: Die drei Punktepaare, in denen eine beliebige Gerade einen Kegelschnitt und die zwei Paar Gegenseiten eines ihm eingeschriebenen einfachen Vierecks schneidet, bilden eine Involution (Satz von Desargues).

41. a) Vergleiche das durch vier Punkte (z. B. durch die Ecken des Vierecks in Aufg. 40) bestimmte Kegelschnittbüschel mit dem Kreisbüschel in Aufg. 30. b) Wenn die durch das Kegelschnittbüschel auf der Geraden erzeugte Involution Doppelpunkte hat, so ist jeder von ihnen Berührungspunkt eines von zwei ausgezeichneten Kegelschnitten des Büschels. Beweise das. c) Gib hiernach an, wie man einen Kegelschnitt zeichnet, der durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt. (Vergl. hiermit Aufg. 23.)

42. a) Welcher Satz ergibt sich, wenn in dem Viereck der Aufg. 40 zwei Paar Gegenecken zusammenfallen, also das Viereck in eine (doppelt zu denkende) Sehne entartet? b) Zeige hiernach, wie man einen Kegelschnitt aus drei Punkten und zwei Tangenten zeichnen kann.

43. a) Die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt und die Verbindungslinien des Punktes mit den Gegenecken eines umgeschriebenen einfachen Vierseits bilden eine Involution. Beweise das und vergleiche das Ergebnis mit dem Satz in Nr. 40. b) Man bezeichnet die Gesamtheit aller Kegelschnitte, die vier feste Geraden berühren, als eine Kegelschnittschar. Sprich unter Benutzung dieser Bezeichnung einen Satz aus, der dem in 41 b) genannten entspricht. c) Zeige hiernach, wie man einen Kegelschnitt aus vier Tangenten und einem Punkt zeichnen kann. (Vgl. hiermit Aufg. 24.)

44. a) Welcher Satz ergibt sich, wenn in dem umgeschriebenen Vierseit der Aufg. 43 zwei Paar Gegenseiten zusammenfallen, also das Vierseit in ein (doppelt zu denkendes) Tangentenpaar entartet? b) Wie kann man hiernach einen Kegelschnitt aus drei Tangenten und zwei Punkten zeichnen?

45 bis 50. Von einem Kegelschnitt sind

gegeben:	gesucht:
45. fünf Punkte,	die Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, die Tangenten von einem beliebigen Punkte und (falls vorhanden) die Asymptoten,
46. fünf Tangenten,	
47. drei Punkte und die Lage einer Symmetrieachse,	die Scheitel,
48. zwei Tangenten und das Achsenkreuz,	die Berührungspunkte auf den gegebenen Tangenten,
49. zwei Punkte und das Achsenkreuz,	die Scheitel,
50. drei Punkte und der Mittelpunkt;	die Achsen.

§ 24. Vermischte Aufgaben

Beweise von Lehrsätzen

1. Verbindet man die Ecken eines Polardreiecks mit einem beliebigen Punkt des Kegelschnitts, so bildet dieser Punkt mit den drei Punkten, in denen die Verbindungslinien die Kurve zum zweitenmal schneiden, ein vollständiges Viereck, dessen Nebendreieck das Polardreieck ist.

2. Sprich einen ähnlichen Satz wie Nr. 1 über die drei Seiten eines Polardreiseits aus, die man mit einer Tangente der Kurve zum Schnitt bringt.

3. Die Asymptoten und die Leitlinien einer Hyperbel schneiden den Scheitelkreis in denselben vier Punkten.

4. Die umgeschriebenen Kreise aller aus vier Geraden gebildeten Dreiecke gehen durch einen Punkt, und die Höhenschnittpunkte der Dreiecke liegen in einer Geraden. (Vgl. § 21, Aufg. 51 und 52.)

5. Bei jedem Tangentendreieck der Parabel bilden die durch die Ecken zu den Seiten gezogenen Parallelen ein Polardreieck.

6. Bilden drei Parabeltangenten ein gleichseitiges Dreieck, so gehen die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten durch den Brennpunkt der Parabel.

7. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.

8. Jede einem Dreieck umgeschriebene gleichseitige Hyperbel geht durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

9. a) „Wird ein Kegelschnittbüschel K mit den Grundpunkten A, B, C, D durch irgend zwei Geraden g und h, von denen jede durch einen der Grundpunkte D, C geht, geschnitten, so dreht sich bei Veränderung des Kegelschnitts die Verbindungsgerade x der zweiten Durchschnitte E und F von g und h mit K um einen festen Punkt C, der mit den übrigen beiden Grundpunkten A, B in einer Geraden liegt" (J. Steiner). b) Wie lautet der entsprechende Satz für eine Kegelschnittschar?

10. Die Polaren irgendeines Punktes in bezug auf ein Kegelschnittbüschel schneiden sich in einem Punkte.

Die Pole irgendeiner Geraden in bezug auf eine Kegelschnittschar liegen in einer Geraden.

11. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schar liegen in einer Geraden (Sonderfall von Nr. 10).

12. Die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden. — Inwiefern ist dieser Satz ein Sonderfall von Nr. 11?

13. „Zieht man in einem Kegelschnittbüschel nach irgendeiner Richtung die Durchmesser, so laufen deren konjugierte alle durch denselben Punkt" (J. Steiner).

14. Die Polaren eines Punktes in bezug auf eine Kegelschnittschar umhüllen einen neuen Kegelschnitt.

Die Pole einer Geraden in bezug auf ein Kegelschnittbüschel liegen auf einem neuen Kegelschnitt.

15. Zwei beliebige Tangenten einer Parabel werden von den übrigen Tangenten in ähnlichen Punktreihen geschnitten.

16. Eine involutorische Punktreihe ist projektiv zu derjenigen, die man erhält, wenn man jeden Punkt durch den ihm zugeordneten ersetzt.

17. Die Verbindungslinien eines Punktes mit den drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits bilden ein involutorisches Strahlenbüschel.

18. Auf jeder Seite eines Dreiecks bestimmen die drei Kreise von Apollonius eine Involution.

Konstruktionen

19. Von einem Kegelschnitt kennt man eine Brennpunktssehne und die in ihren Endpunkten gelegten Tangenten; man ermittle die Brennpunkte und die Scheitel.

20. Ein Kegelschnitt liegt gezeichnet vor. Man soll den Pol einer gegebenen Geraden mit alleiniger Hilfe des Lineals finden.

21. Man zeichne eine Ellipse, die ein gegebenes Parallelogramm in den Mitten der Seiten berührt.

22. Es ist ein Kegelschnitt zu zeichnen, der die Seiten eines Parallelogramms, und zwar eine von ihnen in einem bestimmten Punkte, berührt. — Wann ist der gesuchte Kegelschnitt eine Ellipse und wann eine Hyperbel?

23. Von einer Ellipse kennt man die Hauptscheitel und einen Durchmesser der Größe und Lage nach. Man ermittle die Größe und Lage des konjugierten Durchmessers.

24. Von einer Ellipse ist ein Paar konjugierter Durchmesser gegeben. Man zeichne die Achsen der Kurve.

25. Eine Parabel ist durch drei Tangenten und einen Punkt gegeben. Gesucht sind die Berührungspunkte auf den gegebenen Tangenten, der Scheitel und die Scheiteltangente.

26. In jeder von zwei schiefliegenden projektiven Punktreihen soll der Punkt ermittelt werden, der dem unendlich fernen Punkt der anderen Punktreihe entspricht („Fluchtpunkt").

27. Wie löst man die Aufgabe 26, wenn die Punktreihen auf demselben Träger liegen?

28. Welcher Punkt einer involutorischen Punktreihe ist ihrem Mittelpunkt zugeordnet?

29. Eine Involution ohne Doppelpunkte kann stets von zwei Punkten aus durch je eine orthogonale Strahleninvolution projiziert werden. Man zeichne diese beiden Punkte.

30. Es soll ein Vieleck gezeichnet werden, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

31. Einem gezeichneten Kegelschnitt soll ein Vieleck eingeschrieben werden, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

32. Einem gezeichneten oder durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt soll ein Vieleck umgeschrieben werden, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

33. Von zwei Kegelschnitten kennt man drei gemeinsame Punkte und je zwei andere Punkte. Man soll den vierten gemeinsamen Punkt finden.

34. Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinsame Punkte und drei nicht gemeinsame Punkte gegeben. Die beiden anderen gemeinsamen Punkte sollen gezeichnet werden.

35. Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gelegt werden, die von vier beliebig gegebenen Geraden in vier Punkten von gegebenem Doppelverhältnis geschnitten wird.

36. Auf einer gegebenen Geraden soll ein Punkt gefunden werden, aus dem vier beliebig gegebene Punkte durch vier Strahlen von gegebenem Doppelverhältnis projiziert werden.

37. Von einem Kegelschnitt sind fünf Punkte, ferner in der Ebene des Kegelschnitts eine beliebige Gerade gegeben. Man zeichne den Pol der gegebenen Geraden.

38. Von einem Kegelschnitt sind fünf Tangenten, ferner in der Ebene des Kegelschnitts ein beliebiger Punkt gegeben. Man zeichne die Polare des gegebenen Punktes.

39. Von einem Kegelschnitt sind drei Punkte oder drei Tangenten gegeben; außerdem weiß man, daß eine gegebene Gerade Polare eines gegebenen Punktes sein soll. Der Kegelschnitt ist zu zeichnen.

40. Von einem Kegelschnitt kennt man den Mittelpunkt und ein Polardreieck; man zeichne die Schnittpunkte der Kurve mit den durch die Ecken des Polardreiecks gehenden Durchmessern.

Sechstes Kapitel

Analytische Geometrie

§ 25. Punkt, Strecke, Dreieck

Punkte

1. (Wiederholung.) Zeichne in einem rechtwinkligen Koordinatensystem für das ein geeigneter Maßstab gewählt ist, die Punkte

a) $(1;\ 3)$; b) $(4;\ 4)$; c) $(3{,}2;\ 1{,}7)$; d) $(1{,}8;\ 2{,}8)$;
e) $(1;\ -2)$; f) $(-2;\ 3)$; g) $(-4;\ -5)$; h) $(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2})$;
i) $(1{,}7;\ -0{,}8)$; k) $(-3{,}8;\ -4{,}1)$; l) $(-2\frac{1}{3};\ 0{,}5)$; m) $(\pi;\ -\pi)$.

2. Gegeben sind durch Strecken die (positiven) Zahlen a und b. Zeichne in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Punkte

a) $(a;\ b)$; b) $(a;\ a)$; c) $(-b;\ -b)$;
d) $(a;\ -b)$; e) $(a;\ -a)$; f) $(-a;\ b)$;
g) $(-a;\ -b)$; h) $(a+b;\ a-b)$; i) $(a-b;\ b-a)$;
k) $(a-b;\ a-b)$; l) $(b-a;\ b-a)$; m) $(a-b;\ -a-b)$.

3. Spiegele den Punkt $(a;\ b)$ a) an der x-Achse, b) an der y-Achse. Welche Koordinaten hat der neue Punkt?

4. Vertausche die Koordinaten a und b eines Punktes. Welche Lage hat der neue Punkt?

5. Wie wandert ein Punkt, a) wenn seine x-Koordinate konstant bleibt und seine y-Koordinate zunimmt, b) wenn seine x-Koordinate abnimmt, während die y-Koordinate konstant bleibt?

Strecken

6. Berechne den Abstand der Punkte

a) $(3;\ 4)$; **b)** $(3;\ -4)$; **c)** $(5;\ -12)$; **d)** $(-5;\ -12)$;
e) $(4;\ 5)$; **f)** $(-3;\ 7)$; **g)** $(2;\ -14)$; **h)** $(-12;\ -12)$;
i) $(0;\ 3)$; **k)** $(a;\ b)$; **l)** $(a;\ -a)$; **m)** $(a+b;\ a-b)$

vom Koordinatenanfangspunkt.

7. Berechne die Entfernung der Punkte

a) $(1;\ 1)$ und $(4;\ 5)$; **b)** $(2;\ -5)$ und $(-3;\ 7)$;
c) $(2;\ 3)$ „ $(3;\ 2)$; **d)** $(5;\ 12)$ „ $(-3;\ -1)$;
e) $(x_1;\ y_1)$ „ $(x_2;\ y_2)$; **f)** $(a;\ b)$ „ $(b;\ a)$;
g) $(a;\ b)$ „ $(a;\ -b)$; **h)** $(-a;\ b)$ „ $(a;\ -b)$.

8. Berechne die Seitenlängen der Dreiecke, deren Ecken die Koordinaten haben

a) $(11;\ 46)$, $(31;\ 6)$ und $(137;\ 14)$;
b) $(0;\ 0)$, $(44;\ 0)$ „ $(0;\ 117)$;
c) $(-1;\ -1)$, $(3;\ 7)$ „ $(3;\ -5)$;
d) $(9;\ 0)$, $(-5;\ 0)$ „ $(0;\ 12)$;
e) $(a;\ b)$, $(a;\ -b)$ „ $(0;\ -b)$.

9. Untersuche, welche von den folgenden Dreiecken gleichschenklig sind:

a) $(0;\ 2)$; $(1;\ -2)$; $(-3;\ -1)$; **b)** $(3;\ 3)$; $(-1;\ 1)$, $(1;\ -1)$;
c) $(6;\ 2)$; $(2;\ -2)$; $(4;\ -4)$; **d)** $(2;\ 3)$; $(4;\ 1)$; $(4;\ 5)$;
e) $(-1;\ 6)$; $(2;\ -3)$; $(8;\ -1)$.

10. Untersuche, von welcher besonderen Art die Vierecke sind, deren Ecken die folgenden Koordinaten haben:

a) $(1;\ 3)$; $(2;\ 1)$; $(5;\ 2)$; $(4;\ 4)$;
b) $(1;\ 1)$; $(6;\ 1)$; $(5;\ 4)$; $(2;\ 4)$;
c) $(2;\ 3)$; $(3;\ 0)$; $(0;\ -1)$; $(-1;\ 2)$;
d) $(1;\ 5)$; $(4;\ 1)$; $(1;\ -3)$; $(-3;\ 1)$;
e) $(a;\ 0)$; $(0;\ a)$; $(-a;\ 0)$; $(0;\ -a)$;
f) $(a;\ b)$; $(b;\ a)$; $(-a;\ b)$; $(b;\ -a)$.

11. Gib die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke an, deren Endpunkte sind

a) $(6;\ 6)$ und $(2;\ 2)$; **b)** $(4;\ 10)$ und $(12;\ 3)$;
c) $(-2;\ -6)$ und $(-3;\ 4)$; **d)** $(a;\ b)$ und $(c;\ d)$.

12. Halbiere den Abstand des Punktes $(x;\ y)$ vom Koordinatenanfangspunkt und gib die Koordinaten dieses Punktes an.

13. Verlängere die Verbindungsstrecke des Koordinatenanfangspunktes mit den Punkten a) $(-3;\ 2)$, b) $(a;\ b)$ nach beiden Seiten um sich selbst. Welches sind die Koordinaten der Endpunkte?

14. Halbiere die Seiten a) des Dreiecks $(2;7)$; $(1;1)$; $(3;6)$, b) eines beliebigen Dreiecks und zeige, daß das von den Seitenmitten gebildete Dreieck Seiten hat, die halb so groß wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind.

15. Bestimme die Länge der Seitenhalbierenden des Dreiecks, dessen Ecken die Koordinaten $(1;\ 1)$; $(7;\ 2)$; $(2;\ 7)$ haben.

16. a)—d) Teile die in Aufg. 11a)—d) genannten Strecken α) innerlich im Verhältnis $1:4$, β) innerlich im Verhältnis $2:3$, γ) innerlich im Verhältnis $m:n$, δ) äußerlich im Verhältnis $1:2$, ε) äußerlich im Verhältnis $2:5$, ζ) äußerlich im Verhältnis $m:n$, η) im Verhältnis λ und gib jeweils die Koordinaten des Teilpunktes an.

17. Bestimme die Lage des Schwerpunktes im Dreiecke a) mit den Ecken $(-2;\ -3)$, $(7;\ 5)$ und $(3;\ -8)$, b) mit den Ecken $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ und $(x_3;\ y_3)$.

18. Gib für die Neigungswinkel der Strecke mit den Endpunkten

a) $(2;\ 3)$ und $(7;\ 8)$;	b) $(2;\ 1)$ und $(-1;\ 4)$;
c) $(7;\ 8)$ und $(0;\ 0)$;	d) $(x_1;\ y_1)$ und $(x_2;\ y_2)$

gegen die x-Achse und gegen die y-Achse eine Beziehung an. Im Falle a) bis c) sind die Neigungswinkel zu bestimmen.

Trapez und Dreieck

19. Von den Endpunkten der Strecke a) $(2;\ 1)$; $(7;\ 5)$; b) $(a_1;\ b_1)$; $(a_2;\ b_2)$ sind Lote auf die x-Achse gefällt. Der Inhalt des von der Strecke, den Loten und der x-Achse bestimmten Trapezes ist zu berechnen.

20. Ein Streckenzug ist durch die folgenden Punkte bestimmt $(0;\ 5)$; $(1;\ 7)$; $(3;\ 3)$; $(5;\ 8)$. Wie groß ist das Flächenstück, das von Streckenzug, x-Achse, y-Achse und des Lotes von $(5;\ 8)$ auf die x-Achse bestimmt wird?

21. Berechne den Inhalt des Dreiecks mit den Koordinaten

a) $(1;\ 2)$; $(7;\ 3)$; $(2;\ 8)$;	b) $(0;\ 0)$; $(6;\ 8)$; $(13;\ 5)$;
c) $(0;\ 0)$; $(0;\ 7)$; $(12;\ 9)$;	d) $(4;\ 0)$; $(-4;\ 0)$; $(3;\ 8)$;
e) $(0;\ 0)$; $(x_1;\ y_1)$; $(x_2;\ y_2)$;	f) $(x_1;\ y_1)$; $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$.

22. a)—e) Bestimme möglichst praktisch den Inhalt der in Aufg. 9a)—e) genannten Dreiecke.

23. a)—f) Bestimme möglichst praktisch den Inhalt der in Aufg. 10a)—f) genannten Vierecke.

Praktische Anwendungen

In der Geodäsie werden die Punkte eines größeren, als eben angesehenen Gebietes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, das etwa so orientiert ist, daß die positive x-Achse nach Norden gerichtet ist, also in irgendeinen festen Meridian fällt, während die positive y-Achse nach Osten zeigt. Es kann aber auch die positive x-Achse nach Süden zeigen, dann zeigt die positive y-Achse nach Westen. Wir setzen in Zukunft das erste System voraus.

24. Worin unterscheiden sich die geodätischen Koordinatensysteme von dem bisher von uns benutzten Koordinatensystem?

25. Ein Punkt hat die geodätischen Koordinaten

$$x_1 = 3187{,}3 \text{ m}; \qquad y_1 = 4318{,}4 \text{ m}.$$

a) Liegt er östlich oder westlich, nördlich oder südlich vom Nullpunkt des Koordinatensystems? b) Welchen Winkel bildet die Richtung vom Nullpunkt zu dem Punkt mit der Nordsüdrichtung? c) Welchen Abstand hat der Punkt vom Koordinatenanfangspunkt?

26. Zwei Punkte P_1 und P_2 sind mit ihren geodätischen Koordinaten bekannt:

$$x_1 = 1712{,}8 \text{ m}; \qquad y_1 = 3183{,}4 \text{ m};$$
$$x_2 = 2874{,}2 \text{ m}; \qquad y_2 = 5017{,}2 \text{ m}.$$

a) Welcher Punkt liegt mehr nach Osten, welcher mehr nach Norden? b) Welchen Abstand haben die Punkte voneinander? c) Welchen Winkel macht die Richtung von P_1 nach P_2 mit der Nordsüdrichtung?

27. Von einem Punkte P_1 mit den geodätischen Koordinaten

$$x_1 = 1381{,}5 \text{ m}; \qquad y_1 = 1927{,}8 \text{ m}$$

liegt ein Punkt P_2 um 564,2 m entfernt. Die Richtung P_1P_2 bildet mit der Richtung nach Norden einen Winkel von $54^\circ 48'$. Welche Koordinaten hat Punkt P_2?

28. Ein Punkt P_1 mit den geodätischen Koordinaten

$$x_1 = 1183{,}7 \text{ m}; \qquad y_1 = 2812{,}9 \text{ m}$$

(auf der Plattform eines Turmes) liegt 53,2 m höher als ein Punkt P_2 mit den Koordinaten

$$x_2 = 1417{,}1 \text{ m}; \qquad y_2 = 2562{,}6 \text{ m}.$$

a) Unter welchem Winkel ist die Verbindungsgerade beider Punkte gegen die Horizontalebene geneigt? b) Um wieviel ist die Kartenentfernung (d.h. die Projektion auf die Horizontalebene) kürzer als die wirkliche Entfernung?

29. Bestimme den Inhalt des in Fig. 32 wiedergegebenen Grundstücks auf Grund der eingetragenen Maße.

Geometrische Überlegungen

30. Bei der analytischen Bestimmung des Inhaltes von Dreiecken erhält der Wert der Fläche ein Vorzeichen. **a)** Es seien P, Q und R drei Punkte. Zeige, daß $\triangle PQR$ und $\triangle PRQ$ verschiedenes Vorzeichen haben. **b)** Untersuche, bei welchem Umlaufungssinn der Flächeninhalt positiv, bei welchem er negativ ist.

31. Gib die Bedingung dafür an, daß drei Punkte $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ und $(x_3;\ y_3)$ in einer Geraden liegen.

32. Entwickle eine Formel für den Inhalt eines Vielecks, von dem die Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind.

Anleitung: Verbinde die Ecken des Vielecks mit dem Koordinatenanfangspunkt und sieh den Flächeninhalt des Vielecks als Summe der entstehenden Dreiecksflächen (unter Beachtung des Vorzeichens!) an.

33. Im Raum kann man die Lage eines Punktes durch seine (mit Vorzeichen zu nehmenden) Abstände von drei senkrecht zueinander stehenden Ebenen bestimmen (vgl. das dritte Kapitel). Entwickle die Formeln für die Entfernung zweier durch ihre Raumkoordinaten gegebenen Punkte und für die Neigung der durch sie begrenzten Strecke gegen die Koordinatenebenen.

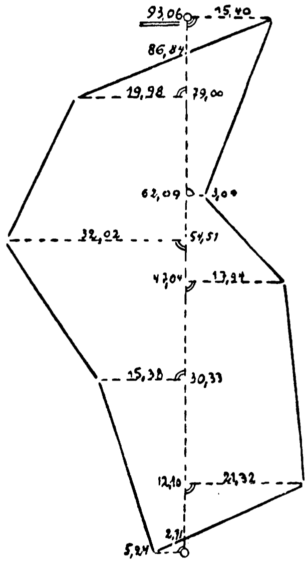

Fig. 32.

§ 26. Die Gerade

Die Gleichung der Geraden

$$y = mx + n.$$

1. (Wiederholung.) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die **a)** im Abstand a parallel zur x-Achse verläuft, **b)** im Abstand b parallel zur y-Achse verläuft, **c)** den Winkel zwischen den beiden Koordinatenachsen halbiert und durch den ersten Quadranten geht?

2. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht und den Richtungsfaktor a) 2, b) $\frac{1}{2}$, c) -1, d) $-\frac{1}{2}$, e) m hat? Zeichne die Gerade in den Fällen a) bis d).

3. a) Welche Beziehung besteht zwischen dem Richtungsfaktor einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden und ihrem Neigungswinkel gegen die x-Achse? b) bis e) Berechne für die in Aufg. 2 angegebenen ersten vier Fälle die Neigungswinkel.

4. Zeichne die Geraden

a) $y = 3x$, b) $y = \frac{x}{4}$, c) $y = -2x$,

d) $y = \frac{2}{3}x$, e) $y = -\frac{4}{5}x$, f) $y = 2\pi x$,

g) $y = \frac{m}{n}x$, wenn m und n durch Strecken gegeben sind.

5. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Nullpunkt geht und außerdem durch den Punkt

a) $(3;\ 4)$; b) $(-2;\ 5)$; c) $(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3})$;

d) $(2{,}7;\ 8{,}1)$; e) $(-1{,}8;\ +10{,}8)$; f) $(a;\ b)$;

g) $(a;\ -b)$; h) $(a;\ -a)$; i) $(-a;\ b)$?

6. Wie ändert sich m in der Gleichung einer Geraden $y = mx$, wenn die Gerade um den Koordinatenanfangspunkt gedreht wird?

7. Was läßt sich aus dem Vorzeichen des Richtungsfaktors erkennen?

8. Eine Gerade hat den Richtungsfaktor 2 und schneidet auf der y-Achse vom Nullpunkt aus die Strecke a) 1, b) 7, c) -5, d) n ab. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

9. Gib die Schnittpunkte der Geraden

a) $y = 2x + 3$, b) $y = x - \frac{1}{2}$, c) $y = -\frac{x}{2} - 1$,

d) $y = -x - 2$, e) $y = -3x - 3$, f) $y = mx + n$

mit der y-Achse an. Zeichne die Geraden.

10. a)—f) Gib an, unter welchem Winkel die in Aufg. 9a)—f) genannten Geraden die y-Achse schneiden.

11. a)—f) Bestimme von den in Aufg. 9a)—f) genannten Geraden die Schnittpunkte mit der x-Achse.

12. Stelle fest, ob

a) auf der Geraden $y = x - 1$ der Punkt $(7;\ 6)$ liegt.

b) „ „ „ $y = 2x - 3$ „ „ $(1;\ 1)$ „

c) „ „ „ $y = -\frac{x}{2} + 1$ „ „ $(2;\ 0)$ „

13. Bringe die folgenden linearen Gleichungen auf die Form $y = mx + n$:

a) $2x + 3y = 4$, b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{4}$, c) $4x + \frac{y}{4} = 1$,

d) $ax + by = c$, e) $ax - by + c = 0$, f) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}$.

14. a) Stelle auf Grund der Gleichungen fest, welche der folgenden Geraden untereinander parallel sind:

$y = 3x + 2$, $y = -3x - 2$, $y = 3x - 4$,
$y = x + 4$, $y - x = 1$, $y + x = 7$,
$2x + 3y = 4$, $y = \frac{2}{3}x - 4$, $y + \frac{2}{3}x = 4$.

b) Was ist über den Richtungsfaktor paralleler Geraden zu sagen?

15. Welche Geraden lassen sich nicht durch eine Gleichung der Form $y = mx + n$ darstellen?

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

16. Zeige, daß die Gerade mit der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ auf der x-Achse die Strecke a, auf der y-Achse die Strecke b abschneidet.

17. Wie lautet die Gleichung der Geraden, deren Abschnitte auf x- und y-Achse sind: a) 2 und 3, b) -1 und 2, c) 5 und -6, d) -4 und -7, e) a und a, f) a und $-a$?

18. Zeichne die Geraden mit folgenden Gleichungen (bestimme erst die Abschnitte auf x- und y-Achse):

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$, c) $x + \frac{y}{3} = 1$,

d) $3x + \frac{y}{2} = 1$, e) $3x - \frac{y}{3} = 1$, f) $x + y = 1$,

g) $x - y = 1$, h) $2x - 2y = 1$, i) $x + y = 7$,

k) $x - y = 2$, l) $x + y = \frac{1}{3}$, m) $x - y = 4$.

19. Welche Beziehung besteht zwischen den Konstanten a und b in der Gleichungsform $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und dem Richtungsfaktor m der Geraden?

20. In welchen Fällen versagt die Gleichungsform $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$?

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

21. Zeige, daß die Gerade mit der Gleichung $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ den Richtungsfaktor m hat und durch den Punkt x_1, y_1 geht.

22. Eine Gerade mit dem Richtungsfaktor a) 2, b) 1, c) $\frac{1}{2}$, d) m soll durch den Punkt (3; 4) gehen. Wie lautet ihre Gleichung? e)—h) Gib die Abschnitte der Geraden auf den Koordinatenachsen an.

23. Eine Gerade mit dem Richtungsfaktor $-\frac{1}{2}$ soll durch den Punkt a) (1; 1), b) (0; 3), c) (—2; 0), d) (a; b) gehen. Wie lautet die Gleichung?

24. Durch den Punkt (3; 4) ist zu der Geraden a) $y = x$, b) $y = -\frac{x}{3}$, c) $y = 3x + 4$, d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, e) $\frac{y-2}{x-3} = 4$ die Parallele gezogen. Wie lautet ihre Gleichung?

25. Welcher Gleichung genügen alle Geraden eines Büschels mit dem Scheitelpunkt (a; b)?

26. Bei welcher Lage der Geraden versagt die Gleichungsform $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$?

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

27. a) Eine Gerade geht durch die Punkte (x_1; y_1) und (x_2; y_2). Zeige, daß ihr Richtungsfaktor den Wert $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ hat. b) Zeige, daß die Gerade mit der Gleichung $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ durch die Punkte (x_1, y_1) und x_2, y_2) geht. Welche Gerade wird von der Gleichung $\frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ dargestellt?

28. Eine Gerade geht durch die Punkte

a) (2; 3) und (3; 2); b) (1; 4) und (—1; —2);
c) (2; $-\frac{1}{2}$) und (—3; $\frac{1}{2}$); d) (0; 0) und (a; b);
e) (0; b) und (a; 0); f) (a; a) und (b; b).

Wie lautet ihre Gleichung? g)—m) Wie groß sind in jedem Falle die Abschnitte auf den Koordinatenachsen?

29. Ein Dreieck wird gebildet von den Punkten (2; 7), (1; 1) und (3; 6). a) Wie lauten die Gleichungen der Dreiecksseiten? b) Wie lauten die Gleichungen der Seitenhalbierenden?

30. Durch die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und die Koordinatenachsen wird ein Dreieck bestimmt. Wie lauten die Gleichungen der drei Seitenhalbierenden dieses Dreiecks?

31. a)—f) Wie lauten die Gleichungen der Seiten der in § 25, Aufg. 10a)—f) genannten Vierecke?

Zwei Geraden

Schnittpunkt

32. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes von folgenden Geradenpaaren, soweit sie nicht parallel sind:

a) $y = x + 3$ und $y = -x - 8$; b) $y = \frac{x}{2} - 2$ und $y = -2x + 5$;

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ und $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; d) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ und $\frac{y}{3} - \frac{x}{3} = 1$;

e) $\frac{y-1}{x-1} = 3$ und $\frac{y-2}{x-2} = 1$; f) $y = -\frac{x}{2} + 3$ und $y + x = 1$;

g) $y = 2x + 4$ und $y = 2x - 7$; h) $y = m_1 x + n_1$ und $y = m_2 x + n_2$;

i) $y = mx + n$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; k) $y = mx + n$ und $\frac{y - y_1}{x - x_1} = 1$.

l) Wann haben die Geraden $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ keinen Schnittpunkt?

33. Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks, das gebildet wird von den drei Geraden mit den Gleichungen $y = 3x - 4$, $y = \frac{x}{4} - 1$ und $y = -2x + 2$.

34. a)—f) Bestimme die Diagonalschnittpunkte der in § 25, Aufg. 10a)—f) genannten Vierecke.

Winkel

35. (Wiederholung.) Zwei Geraden bilden mit der positiven Richtung der x-Achse die Winkel α_1 und α_2. Bestimme den Winkel (genauer die Winkel) zwischen den beiden Geraden.

36. Es sei φ der spitze Winkel zwischen zwei Geraden, die die Richtungsfaktoren m_1 und m_2 haben. Zeige, daß dann

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \text{ ist.}$$

37. a)—k) Bestimme den Winkel zwischen den in Aufg. 32a)—k) genannten Geradenpaaren.

38. a) Zeige durch Untersuchung des in Aufg. 36 genannten Ausdrucks, daß zwei Geraden mit den Gleichungen $y = m_1 x + n_1$ und $y = m_2 x + n_2$ senkrecht aufeinander stehen, wenn

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ist. b) Leite diese Beziehung unmittelbar an zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden im Koordinatensystem her.

39. Der Punkt (2; 3) liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$. Wie lautet die Gleichung der in dem Punkt auf der Geraden errichteten Senkrechten?

40. Vom Punkt (1; 2) ist auf die Gerade $y = 2x + 4$ das Lot gefällt. Wie lautet die Gleichung?

41. Welches ist die Gleichung des Lotes vom Koordinatenanfangspunkt auf die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$?

42. Bestimme den Abstand des Nullpunktes von den Geraden mit den Gleichungen

a) $x + y = 1$, b) $y = -\frac{x}{2} + 3$, c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$,

d) $y = mx + n$, e) $x - y = a$, f) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

43. a)—f) Bestimme den Abstand des Punktes (1; 1) von den in Aufg. 42a) bis f) genannten Geraden.

44. Welchen Abstand haben die Parallelen $y = \frac{x}{2} + 3$ und $y = \frac{x}{2} - 4$?

45. Bestimme von dem Dreieck, dessen Ecken die Koordinaten (—1; —3), (4; —1) und (5; 8) haben, die Gleichungen a) der drei Mittelsenkrechten, b) der drei Höhen. c) Bestimme den Radius des Umkreises. d)—f) Löse die gleiche Aufgabe für das Dreieck mit den Koordinaten (9; 0), (—5; 0), (0;12).

46. Bestimme die Winkel des Dreiecks mit den Ecken (2; 3), (4; 1) und (4; 5).

47. Auf der Geraden $y = x + 3$ liegt der Punkt (2; 5). Gib die Gleichung der Geraden an, die in diesem Punkt mit der gegebenen Geraden einen Winkel von 45° bildet (2 Lösungen).

48. Durch den Punkt (3; —1) soll eine Gerade gezogen werden, die die Gerade $2x = y + 2$ unter einem Winkel von 45° schneidet. Wieviel Lösungen gibt es?

Die Hessesche Normalform.

49. Vom Koordinatenanfangspunkt ist auf eine Gerade das Lot gefällt. Der Winkel, den dieses Lot mit der positiven x-Achse bildet, ist φ, der Abstand der Geraden vom Koordinatenanfangspunkt ist p. Zeige, daß dann

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$$

die Gleichung (Hessesche Normalform) der Geraden ist (die Gerade soll nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehen). — Der Winkel φ sei a) spitz, b) stumpf, c) überstumpf.

50. Bringe die folgenden Gleichungen von Geraden auf die Hessesche Normalform:

a) $x + y = 5$, b) $x - y = 2 \cdot \sqrt{2}$,

c) $x + y = -a$, d) $2x + 3y = 6$.

51. Lege durch den Punkt a) (2; 3), b) (2; —3) eine Gerade, die vom Koordinatenanfangspunkt den Abstand 1 hat.

52. Der Koordinatenanfangspunkt sei Mittelpunkt eines regelmäßigen a) Sechsecks mit der Seite a, b) Fünfecks mit dem Inkreisradius ϱ, c) Achtecks mit dem Umkreisradius r. Ein Eckpunkt liege auf der positiven x-Achse. Wie heißen die Gleichungen der Seiten des regelmäßigen Vielecks?

53. Zur Geraden $x \cdot \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ sind im Abstand q beiderseits die Parallelen gezogen. Wie heißen ihre Gleichungen?

54. Ein Punkt $(a; b)$ hat von der Geraden $x \cdot \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ den Abstand $a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi - p$. Beweise das.

55. Berechne den Abstand .

des Punktes	von der Geraden
a) $(1; 2)$	$x \cdot \cos 45^\circ + y \cdot \sin 45^\circ - 1 = 0,$
b) $(-1; -1)$	$x + y = 1.$

56. Berechne im Dreieck $A(-1; 4)$, $B(3; 1)$, $C(7; 5)$ unter Benutzung der Hesseschen Normalform den Abstand des Punktes A von der Seite BC (d.h. die Höhe h_a), ebenso den Abstand der Ecke B von AC, der Ecke C von AB.

Überlegungen

57. Diskutiere die Gleichung $ax + by + c = 0$ einer Geraden.

58. Die Gleichung einer Geraden werde auf die Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \tag{1}$$

gebracht, die einer zweiten auf die Form

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \tag{2}$$

a) Was ist über die durch Addition und Subtraktion entstehenden Gleichungen

$$(a_1 \pm a_2)\, x + (b_1 \pm b_2)\, y + (c_1 \pm c_2) = 0 \tag{3}$$

zu sagen? b) Was ist über die geometrische Bedeutung der Gleichung (3) zu sagen, wenn (1) und (2) Hessesche Normalformen sind?

59. Man setzt

$$A_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$A_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Beweise, daß a) $l_1 A_1 + l_2 A_2 = 0$ die Gleichung einer durch den Schnittpunkt der Geraden $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ gehenden Geraden ist. b) Untersuche, welche Bedeutung die Geraden mit den Gleichungen $A_1 - A_2 = 0$ und $A_1 + A_2 = 0$ haben, wenn A_1 und A_2 Hessesche Normalformen sind. c) Leite eine Bedingung dafür her, daß drei Geraden durch einen Punkt gehen.

60. Beweise analytisch den Satz, daß a) die Seitenhalbierenden, b) die Höhen, c) die Mittelsenkrechten, d) die Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.

Praktische Aufgaben

61. Die geodätischen Koordinaten eines Punktes A sind $x_1 = +7217$ m, $y_1 = +2413$ m, die eines Punktes B sind $x_2 = 8017$ m, $y_2 = 2112$ m. Ein Punkt P wird von A aus anvisiert; $\sphericalangle PAB$ wird zu $45°40'$ gefunden. Dann wird P von B aus anvisiert. $\sphericalangle PBA$ wird zu $69°15'$ bestimmt. Die Koordinaten von P sind zu bestimmen.

62.—64. Überlege, wie man die Hansensche Aufgabe, Vorwärtseinschneiden (§ 7, Aufg. 14), die Hansensche Aufgabe, Rückwärtseinschneiden (§ 7, Aufg. 15), und die Snelliussche Aufgabe (§ 7, Aufg. 16) analytisch lösen kann, wenn die bekannten Punkte durch ihre geodätischen Koordinaten gegeben sind.

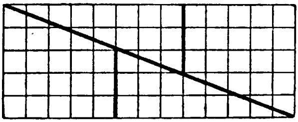

Fig. 33.

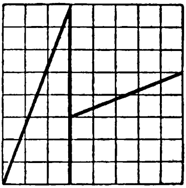

Fig. 34.

65. Ein bekannter Trugschluß besteht darin, daß man aus den vier Teilen der Fig. 34 die Fig. 33 zusammensetzt und damit zeigt, daß $64 = 65$ ist. Zeige, daß die scheinbare Diagonale in Fig. 33 tatsächlich durch eine Fläche vom Inhalt 1 zu ersetzen ist.

§ 27. Der Kreis

Gleichung des Kreises

1. Zeige, daß für jeden Punkt $(x; y)$ auf der Peripherie eines mit dem Radius r um den Koordinatenanfangspunkt geschlagenen Kreises die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gilt (Mittelpunktsgleichung des Kreises)

2. Zeichne die Kreise mit den Gleichungen
a) $x^2 + y^2 = 25$, b) $x^2 + y^2 = 10$, c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$.

3. Wie kommt in der Mittelpunktsgleichung des Kreises a) die axiale Symmetrie in bezug auf die beiden Koordinatenachsen, b) die zentrale Symmetrie in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt zum Ausdruck?

4. Der Punkt M habe die Koordinaten $(a; b)$. Um M sei mit dem Radius r ein Kreis geschlagen. Zeige, daß jeder Punkt $(x; y)$ auf der Kreisperipherie der Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \text{genügt.}$$

5. Bestimme die Gleichung eines Kreises

	mit dem Radius	und dem Mittelpunkt
a)	3	(4; 5),
b)	$\sqrt{5}$	(3; 3),
c)	4	(1; 2),
d)	5	(−1; 3),
e)	3,5	(2; 0)

und zeichne den Kreis in jedem einzelnen Fall.

6. Es sei r eine durch eine Strecke gegebene Größe. Zeichne einen Kreis mit dem Radius r und gib seine Gleichung an, wenn der Kreis a) die x-Achse berührt und sein Mittelpunkt auf der Geraden $x=4$ liegt, b) die y-Achse berührt und sein Mittelpunkt auf der Geraden $y=-3$ liegt, c) x- und y-Achse berührt. (Wieviel Fälle?)

7. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der den Punkt $(a; b)$ zum Mittelpunkt hat und durch den Koordinatenanfangspunkt geht?

8. a) Um den Punkt $(a; b)$ sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r_1 und r_2 gelegt. Wie heißen ihre Gleichungen? b) Wie erkennt man an den Gleichungen zweier Kreise, daß sie konzentrisch sind?

9. Gib Mittelpunkt und Radius der Kreise an, deren Gleichungen sind

a) $x^2+y^2+2x=3$, b) $x^2+y^2+4y=5$,

c) $x^2+y^2+4x+6y=3$, d) $x^2+y^2-2y=3$,

e) $x^2+y^2-4y=5$, f) $x^2+y^2-4x-6y=3$,

g) $x^2+y^2+x=4$, h) $x^2+y^2-3y=7$,

i) $x^2+y^2-8x+7y=40$, k) $x^2+y^2+ax=b$,

l) $x^2+y^2+by=c$, m) $x^2+y^2+ax+by=c$.

Kreis und Punkt

10. Gib die Gleichung des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt an, der durch den Punkt a) $(3; 7)$, b) $(a; b)$ geht.

11. Bestimme die Gleichung des Kreises, der durch den Koordinatenanfangspunkt und die Punkte $(2; 3)$ und $(3; 2)$ geht.

12. Bestimme die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte (7; 1), (5; 5) und (—2; 4) geht, und gib Radius und Mittelpunkt an.

13. Untersuche, ob das Viereck, das von den Punkten (6; 5), (8; 1), (0; —3), (—1; 4) gebildet wird, ein Sehnenviereck ist oder nicht.

14. Gib von den Punkten **a)** (2; 3), **b)** (3; —3), **c)** (—4; —2), **d)** (—4; 3) an, ob sie innerhalb oder außerhalb oder auf der Peripherie des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 20$ liegen.

Kreis und Sekante

15. Berechne die beiden Schnittpunkte

des Kreises	mit der Geraden
a) $x^2 + y^2 = 25$	$x + y = 7,$
b) $x^2 + y^2 = 9$	$x - y = 2,$
c) $x^2 + y^2 = r^2$	$x + y = a,$
d) $x^2 + y^2 = r^2$	$y = mx.$

16. Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $y = mx + n$ mit dem Kreis **a)** $x^2 + y^2 = r^2$, **b)** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ und untersuche, wann zwei Lösungen vorhanden sind (Sekante), wann eine Lösung (Tangente), wann keine Lösung vorhanden ist.

17. **a)—d)** Berechne die Sehnenmitte beim Schnitt der in Aufg. 15 **a)—d)** angegebenen Kreise und Sekanten.

Anleitung: Beachte, daß zwischen den Würzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ die Beziehung $x_1 + x_2 = -a$ besteht.

18. Bestimme die Schnittpunkte (soweit sie vorhanden sind) der folgenden Kreise mit den Koordinatenachsen
a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, **b)** $x^2 + y^2 + 2x = 3$, **c)** $x^2 + y^2 + 4y = 5$.

Kreis und Tangente

19. Wie lautet die Gleichung der im Punkte **a)** (3; 4), **b)** $(x_1; y_1)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ gelegten Tangente?

Anleitung: Die Tangente steht senkrecht auf dem zugehörigen Radius.

20. Es sei $(x_1; y_1)$ ein Punkt des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$. Zeige, daß dann

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

die Gleichung der Tangente in $(x_1; y_1)$ an den Kreis ist.

21. Es sei $(x_1; y_1)$ ein Punkt des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Leite die Gleichung der Tangente in $(x_1; y_1)$ an den Kreis her.

22. Wie lautet die Gleichung einer Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = 6$, die **a)** der Geraden $y = \frac{x}{2} - 3$ parallel ist, **b)** zur Geraden $y = 3x - 7$ senkrecht steht?

23. Vom Punkte (10; 0) sind an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ die Tangenten gezogen. Bestimme **a)** die Berührungspunkte, **b)** die Länge der Berührungssehne, **c)** den Winkel zwischen den beiden Tangenten.

24. In den Punkten (6; 8) und (8; 6) sind an den Kreis $x^2 + y^2 = 100$ die Tangenten gezogen. **a)** Wo schneiden sie sich? **b)** Welchen Winkel bilden sie miteinander?

25. Unter welchen Winkeln schneidet der Kreis $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ die Koordinatenachsen?

26. Gib die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten der Kreise $x^2 + y^2 = r_1^2$ und $(x - a)^2 + y^2 = r_2^2$ an.

Überlegungen.

27. Entwickle die Lehre von Pol und Polare am Kreis analytisch.

28. Entwickle die Lehre von den Ähnlichkeitspunkten zweier und dreier Kreise analytisch.

29. Leite den zweiten Strahlensatz (Buch für Kl. 7—9, § 26, Nr. 3) analytisch her.

30. Entwickle die Lehre von der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis, von der Potenzlinie (Chordale) zweier Kreise und dem Potenzpunkt dreier Kreise analytisch.

§ 28. Koordinatensysteme

Rechtwinklige Koordinatensysteme

Verschiebung (Translation)

1. Ein Punkt P_0 habe in bezug auf ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem die Koordinaten $(x_0; y_0)$. Das Koordinatensystem wird um a in der Richtung der x-Achse, um b in der Richtung der y-Achse verschoben (a und b sind Größen mit Vorzeichen). Zeige, daß dann P_0 in bezug auf das verschobene System, das wir als ξ-η-Koordinatensystem bezeichnen wollen, die Koordinaten
$$\xi_0 = x_0 - a; \qquad \eta_0 = y_0 - b$$
hat. — Untersuche zeichnerisch einige Fälle, bei denen die Koordinaten x_0, y_0 des Punktes P_0 oder die x-y-Koordinaten des neuen Koordinatenanfangspunktes auch negative Werte haben.

2. Gegeben ist die Gerade a) $y = 2x - 5$, b) $y = mx + n$. Verschiebe das Koordinatensystem so, daß die Gerade durch den Nullpunkt des neuen Systems geht, und gib die Gleichung der Geraden im neuen ξ-η-System an.

3. Die Eckpunkte eines Dreiecks haben die Koordinaten (1; 1), (3; 3) und (1; 5). Gib eine solche Translation an, daß die Eckpunkte des Dreiecks im neuen System möglichst einfache Koordinaten erhalten.

4. Leite die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $(a;\ b)$ und dem Radius r in der Weise her, daß du ein durch den Mittelpunkt des Kreises gehendes Koordinatensystem zu Hilfe nimmst.

5. Zeige, daß der Grad der Gleichung einer Kurve nicht geändert wird, wenn man mit dem Koordinatensystem, auf das sie bezogen ist, eine Verschiebung vornimmt.

Drehung (Rotation)

6. Ein Punkt P_0 habe (Fig. 35) in bezug auf ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem die Koordinaten $(x_0;\ y_0)$. Das Koordinatensystem wird um den Winkel φ um den Koordinatenanfangspunkt gedreht. In bezug auf das neue ξ-η-System habe der Punkt die Koordinaten $(\xi_0;\ \eta_0)$. Es sei $OQ = x_0$, $P_0Q = y_0$, $OR = \xi_0$, $P_0R = \eta_0$, $SR \perp P_0Q$ und $RT \perp OQ$. a) Wie groß ist $\sphericalangle RP_0S$? b) Drücke x_0 durch ξ_0, η_0 und φ aus, indem du von $OQ = OT - SR$ ausgehst; c) drücke y_0 durch ξ_0, η_0 und φ aus, indem du von $P_0Q = P_0S + RT$ ausgehst; d) bestätige damit die Transformationsgleichungen für die Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems

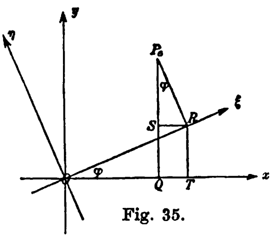

Fig. 35.

$$x = \xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi\,,$$
$$x = \xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi\,.$$

7. Wie lauten die Transformationsgleichungen, wenn die Drehung a) 90°, b) 180°, c) 45°, d) 60° beträgt?

8. Drehe das Koordinatensystem, auf das der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ bezogen ist, um den beliebigen Winkel α. Wie lautet die transformierte Gleichung?

9. Zeige, daß durch die Transformation einer Kurvengleichung, die einer Drehung entspricht, der Grad der Gleichung nicht geändert wird.

10. Wie lauten die Transformationsgleichungen im Falle einer beliebigen starren Bewegung des rechtwinkligen Koordinatensystems in der Ebene? Durch wieviel Größen wird die Bewegung bestimmt?

Analytische Bestimm ng geometrischer Örter

11. Zeige analytisch, daß der geometrische Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, die Mittelsenkrechte ist.

12. Zeige analytisch, daß der geometrische Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichen Abstand haben, die Winkelhalbierenden sind.

13. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, für die die Differenz der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten den konstanten Wert a^2 hat.

14. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, für die die Summe der Abstände von den Schenkeln eines rechten Winkels konstant ist?

15. In einem Dreieck sind von einer Ecke alle möglichen Verbindungsstrecken nach den Punkten der gegenüberliegenden Seite gezogen. Wo liegen die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken?

16. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks werden über die Spitze hinaus um sich selbst verlängert. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte, wenn das gleichschenklige Dreieck sich bei festbleibender Basis verändert?

17. Einem a) rechtwinkligen, b) beliebigen Dreieck werden Rechtecke eingeschrieben. Welches ist der geometrische Ort der Diagonalenschnittpunkte der Rechtecke?

18. Ein Kreis wird von einer Schar paralleler Sehnen geschnitten. Welches ist der geometrische Ort der Sehnenmitten?

19. Von einem Punkte des Umfanges eines Kreises aus werden Sehnen gezogen. Welches ist der geometrische Ort a) der Sehnenmittelpunkte, b) der Punkte, die die Sehnen, von dem gemeinsamen Punkt aus gerechnet, im Verhältnis 1 : 3 teilen?

20. Durch einen Punkt a) außerhalb, b) innerhalb des Kreises werden Sehnen durch den Kreis gezogen. Die Abschnitte vom Punkt bis zum Schnitt mit dem Kreis werden, vom Punkt aus gerechnet, im Verhältnis a) 1 : 2, b) 2 : 3, c) $m : n$ geteilt. Welches ist der geometrische Ort der Teilpunkte?

21. An einen Kreis werden Tangenten von der Länge a gelegt. Welches ist der geometrische Ort ihrer Endpunkte?

22. In einen Kreis werden Sehnen von der Länge a gelegt. Welches ist der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte?

23. Ein Stab von der Länge a) 30 cm, b) a lehnt an der Wand und gleitet an ihr senkrecht herab. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt des Stabes?

24. Der Stab in Aufg. 23 und seine Projektionen auf Wand und Fußboden bestimmen ein Dreieck. Welchen Weg beschreibt der Schwerpunkt des Dreiecks, wenn sich der Stab, wie in Aufg. 23 angegeben, bewegt?

Schiefwinklige Koordinatensysteme

25. Die X-Achse und die Y-Achse mögen den Winkel φ miteinander bilden. Ein Punkt P_0 hat die Koordinaten X_0 und Y_0, wenn die durch P_0 zu den Koordinatenachsen gezogenen Parallelen vom Nullpunkt aus die Strecken X_0 und Y_0 abschneiden. Zeichne in einem X-Y-System mit dem Winkel $\varphi = 60^\circ$ die Punkte a) (1; 1), b) (2; 7), c) (— 3; —4), d) (—2; 5).

26. In einem schiefwinkligen Koordinatensystem, dessen Achsen den Winkel φ einschließen, sind die Punkte $(a; b)$ und $(c; d)$ gegeben. Wie groß ist ihre Entfernung? Beispiel: $\varphi = 60^\circ$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$.

27. Eine Gerade schneide auf der X-Achse die Strecke a, auf der Y-Achse die Strecke b ab. a) Zeige, daß ihre Gleichung in schiefwinkligen Koordinaten

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$

ist. b) Untersuche, ob noch irgendeine andere Form der Gleichung der Geraden (§ 26) auch für schiefwinklige Systeme gilt.

28. Nimm in einem Dreieck ABC die Seiten AB und AC zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems. a) Wie lauten die Gleichungen der Seitenhalbierenden durch B und C? b) Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt?

29. Ein Punkt P_0 hat in bezug auf ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem die Koordinaten $(x_0; y_0)$, in bezug auf ein schiefwinkliges X-Y-Koordinatensystem die Koordinaten $(X_0; Y_0)$. Die x-Achse bildet mit der X-Achse den Winkel φ, mit der Y-Achse den Winkel ψ (Fig. 36). Leite dann ebenso wie in Aufg. 6 die Transformationsgleichungen ab:

$$x = X \cdot \cos\varphi + Y \cdot \cos\psi,$$
$$y = X \cdot \sin\varphi + Y \cdot \sin\psi.$$

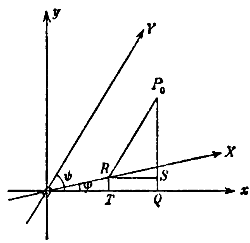

Fig. 36.

30. Leite als Sonderfall aus den in Aufg. 29 gefundenen Gleichungen die Transformationsgleichungen für die Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems ab.

31. Welche Gestalt nehmen die Transformationsgleichungen in Aufg. 29 an, wenn die x-Achse des rechtwinkligen und die X-Achse des schiefwinkligen Systems zusammenfallen?

Polarkoordinatensystem

32. Ein Punkt P_0 sei seiner Lage nach durch den Abstand r_0 vom Koordinatenanfangspunkt (Radiusvektor) und den Winkel u_0 zwischen Radiusvektor

und einer festgelegten Richtung (Argument) gegeben. Zeichne die Punkte a) (1; 90°), b) (2; 180°), c) (3,5; 60°), d) $\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$, e) $\left(1\frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$.

33. Gegeben ist eine Strecke a und ein Winkel α. Konstruiere den Punkt a) $(a; \alpha)$, b) $(a; -\alpha)$. — Wo liegen die Punkte c) $(a; \alpha)$, $(a; 2\alpha)$, $(a; 3\alpha)$, $(a; 4\alpha)$? d) $(a; \alpha)$, $(2a; \alpha)$, $(3a; \alpha)$, $(4a; \alpha)$?

34. Wie lautet in Polarkoordinaten die Gleichung einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden, die mit der Anfangsrichtung den Winkel a) 45°, b) 90°, c) u_0 einschließt?

35. Wie lautet in Polarkoordinaten die Gleichung eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius a) 2, b) r_0?

36. Welche Beziehungen bestehen zwischen den x-y-Koordinaten eines rechtwinkligen Systems und den r-u-Koordinaten eines Polarsystems, wenn beide gleichen Nullpunkt haben und die x-Achse des rechtwinkligen mit der Anfangsrichtung des Polarkoordinatensystems zusammenfällt?

37. Leite die Gleichung a) einer beliebigen Geraden, b) eines Kreises mit dem Mittelpunkte $(r_0; u_0)$ und dem Radius ϱ in Polarkoordinaten ab.

38. Wie ist ein Polarkoordinatensystem für den Raum zu definieren?

§ 29. Kegelschnittgleichungen

Ellipse

1. (Zur Wiederholung.) Zeichne Punkte einer Ellipse auf Grund der Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) konstante Summe haben (vgl. § 20, Nr. 4).

2. Leite eine Beziehung zwischen der großen und der kleinen Halbachse der Ellipse (a und b) und der linearen Exzentrizität (e) ab.

3. Von einer Ellipse sind die Brennpunkte und die Endpunkte der großen Achse (Hauptscheitel) gegeben. Bestimme die Endpunkte der kleinen Achse (Nebenscheitel).

4. Von einer Ellipse sind die vier Scheitel (Endpunkte der großen und der kleinen Achse) gegeben. Bestimme die Lage der Brennpunkte.

5. Zeichne verschiedene Ellipsen: a) mit gleichbleibender großer Achse; wie wandern die Brennpunkte, wenn die kleine Halbachse b von 0 bis a wächst; b) mit festen Brennpunkten; welches ist der kleinste Wert von a; wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn a wächst?

6. Welche Koordinaten haben a) die Scheitel, b) die Brennpunkte F_1 und F_2, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x-Achse mit der großen, dessen y-Achse mit der kleinen Achse der Ellipse zusammenfällt?

7. $(x_1; y_1)$ seien die Koordinaten eines Punktes C_1 der Ellipse, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie in Aufg. 6. F_1 und F_2 seien die Brennpunkte. a) Welches sind die Gleichungen der Brennstrahlen C_1F_1 und C_1F_2? b) Berechne die Entfernungen C_1F_1 und C_1F_2.

8. Unter einem Scheitelkreis versteht man einen Kreis, der denselben Mittelpunkt wie die Ellipse hat und durch einen Scheitel geht. Wie heißen die Gleichungen der beiden Scheitelkreise?

9. Man erklärt die Ellipse auch als geometrischen Ort der Punkte, die von einem Kreise, dem Leitkreise, und einem Punkte im Innern des Kreises gleichen Abstand haben. a) Beweise, daß diese Definition gleichbedeutend mit der in Aufg. 1 erwähnten ist. b) Zeige, daß jede Ellipse zwei Leitkreise hat. c) Gib die Gleichungen der Leitkreise an. d) Berechne die Lage der Schnittpunkte beider Leitkreise.

10. Es sei C ein beliebiger Punkt der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Ein x-y-Koordinatensystem sei durch große und kleine Achse bestimmt. a) Setze dann die Gleichung $F_1C + F_2C = 2a$ in eine Beziehung zwischen e, a und den Koordinaten x und y von C um. b) Beseitige in diesem Ausdruck die Quadratwurzeln. c) Drücke e durch a und b aus. d) Bringe die Gleichung auf die Form (Mittelpunktsgleichung)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

11. Zeige an der Gleichung der Ellipse a) die axiale Symmetrie in bezug auf x- und y-Achse, b) die zentrale Symmetrie in bezug auf denKoordinatenanfangspunkt, c) daß die Kurve nur zwischen $x = -a$ und $x = +a$ reell ist.

12. Man kann die Ellipse auch erklären als geometrischen Ort der Punkte, die die Ordinaten y eines auf seinen Mittelpunkt bezogenen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ im Verhältnis $m:n$ teilen. a) Leite auf diese Weise die Gleichung der Ellipse her. b) Stelle die Beziehung zu der in Aufg. 10 gefundenen Gleichungsform her und gib an, wie der Kreis zur Ellipse liegt.

13. Drücke die Länge der Brennstrahlen, die einem Ellipsenpunkt $(x; y)$ zugehören, lediglich durch a, e und x aus.

14. Wie lautet die Gleichung einer Ellipse, deren Brennpunkte auf der y-Achse im Abstande $+e$ und $-e$ vom Nullpunkt liegen, während die x-Achse in den Punkten $+a$ und $-a$ geschnitten wird?

15. Wie lautet die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt die Koordinaten m und n hat, während große und kleine Achse $2a$ und $2b$ der x- und der y-Achse des Koordinatensystems parallel sind?

16. Wähle als Koordinatensystem, auf das die Ellipse bezogen ist, die eine Achse der Ellipse und die Parallele durch einen ihrer Scheitel zur anderen Achse. Wie lautet dann die Gleichung (Scheitelgleichung) der Ellipse?

17. Inwiefern ist der Kreis ein Grenzfall der Ellipse?

18. Aus den folgenden Gleichungen von Ellipsen sind große und kleine Achse und Brennpunktsabstand zu bestimmen; die Ellipsen sind im Falle **a)** bis **f)** in Skizze zu zeichnen:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$, **b)** $\frac{x^2}{9}+4\,y^2=1$, **c)** $2\,x^2+3\,y^2=1$,

d) $x^2+2\,y^2=4$, **e)** $2\,x^2+y^2=4$, **f)** $2\,x^2+\frac{4\,y^2}{9}=1$,

g) $ax^2+by^2=c$, wo $a>0,\ b>0,\ c>0$.

19. a) bis **g)** Leite die Gleichungen der beiden Leitlinien (vgl. § 22, Nr. 5) der Ellipsen her, deren Gleichungen in Aufg. 18a) bis g) genannt sind.

20. Gib die Gleichung der Ellipsen an, deren kleine Achse der größere Abschnitt der stetig geteilten großen Achse ist, und zeichne ein Beispiel.

21. Die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ geht durch die Punkte (18; 20) und (−24; −15). Wie groß sind ihre Achsen?

22. Untersuche, welche von den folgenden Punkten innerhalb oder außerhalb der Ellipse $9\,x^2+25\,y^2=225$ liegen: **a)** (4; 1), **b)** (4; 2), **c)** (2,7; 2,7), **d)** (2; 7).

Hyperbel

23. a) Zeichne Punkte einer Hyperbel, indem du von der Definition der Hyperbel als des geometrischen Ortes derjenigen Punkte ausgehst, deren Abstände von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) die konstante Differenz $2a$ haben (vgl. § 20, Nr. 7). **b)** Zeige, daß die Hyperbel zwei Äste hat; gib den Grund dafür an. **c)** Bestimme insbesondere die Scheitel der beiden Hyperbeläste.

24. Zeige, daß der Abstand der beiden Scheitel einer Hyperbel die Größe $2a$ hat.

25. Zeichne verschiedene Hyperbeln **a)** mit konstantem Scheitelabstand, aber veränderlicher Lage der Brennpunkte, **b)** mit gleichbleibendem Brennpunktsabstand, aber veränderlichem Scheitelabstand. **c)** Welche Ungleichung zwischen a und e gilt bei der Ellipse, welche bei der Hyperbel?

26. Die Hyperbel wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen x-Achse durch die beiden Scheitel geht und dessen y-Achse Mittelsenkrechte des Scheitelabstandes ist. Ein Punkt C_1 der Hyperbel habe die Koordinaten $(x_1;\ y_1)$; die Brennpunkte seien F_1 und F_2. **a)** Wie heißen die Gleichungen der Brennstrahlen C_1F_1 und C_1F_2? **b)** Wie groß sind die Entfernungen C_1F_1 und C_1F_2?

27. Wie heißt die Gleichung des Scheitelkreises der Hyperbel, d. h. des Kreises, der den gleichen Mittelpunkt wie die Hyperbel hat und durch die Scheitel geht?

28. Man erklärt die Hyperbel auch als geometrischen Ort der Punkte, die von einem Kreise, dem Leitkreise, und einem Punkte außerhalb des Kreises gleichen Abstand haben. a) Beweise, daß diese Definition gleichbedeutend mit der in Aufg. 23 erwähnten ist; b) zeige, daß jede Hyperbel zwei Leitkreise hat; c) gib die Gleichungen der Leitkreise an.

29. Führe die Länge der imaginären Halbachse b durch die Gleichung

$$a^2 + b^2 = e^2$$

ein. a) Konstruiere b, wenn a und e gegeben ist. b) Wie ändert sich b bei den Veränderungen der Hyperbelgestalt, wie sie in Aufg. 25 erörtert worden sind?

30. Es sei C ein beliebiger Punkt der Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei durch die Verbindungsgerade der Brennpunkte und die Mittelsenkrechte dazu bestimmt. a) Setze die Gleichung $F_1C - F_2C = 2a$ in eine Beziehung zwischen e und a und den Koordinaten x und y von C um. b) Beseitige in dem Ausdruck die Quadratwurzeln. c) Drücke e durch a und b aus. d) Bringe die Gleichung auf die Form (Mittelpunktsgleichung)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

31. a) Untersuche, ob, wie in der Ausgangsgleichung $F_1C - F_2C = 2a$, so auch in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel nur ein Ast berücksichtigt worden ist. b) Welchen Wert hat $F_1C - F_2C$ für die Punkte des anderen Hyperbelastes?

32. Zeige an der Gleichung der Hyperbel a) die axiale Symmetrie in bezug auf die x-Achse (Hauptachse) und die y-Achse (Nebenachse), b) die zentrale Symmetrie in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, c) daß die Kurve zwischen $x = -a$ und $x = +a$ imaginär ist. d) daß sich beide Äste ins Unendliche erstrecken.

33. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel, deren Brennpunkte auf der y-Achse im Abstande $+e$ und $-e$ vom Nullpunkt liegen, während die Scheitel auf der gleichen Achse die Koordinaten $+a$ und $-a$ haben?

34. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt die Koordinaten m und n hat, während die Hauptachse der x-Achse parallel ist?

35. Die Hyperbel soll auf ein Koordinatensystem bezogen werden, dessen Achsen parallel dem ursprünglichen sind, dessen Koordinatenanfangspunkt aber in einen der Scheitelpunkte fällt. Wie lautet die Scheitelgleichung?

36. a) Erörtere die Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$. b) Wie groß ist der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt? c) Wie liegt die Hyperbel $y^2 - x^2 = a^2$?

37. Die Hyperbeln mit den folgenden Mittelpunktsgleichungen sind (in Skizze) zu zeichnen:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, b) $\frac{x^2}{9} - 4y^2 = 1$, c) $2x^2 - 3y^2 = 1$,
d) $3x^2 - 2y^2 = 1$, e) $2y^2 - 3x^2 = 1$, f) $3y^2 - 2x^2 = 1$,
g) $2x^2 - y^2 = 4$, h) $x^2 - 2y^2 = 9$, i) $y^2 - 3x^2 = 27$.

38. Leite die Gleichungen der beiden Leitlinien (vgl. § 22, Nr. 5) der Hyperbeln her, deren Gleichungen in Aufg. 37a) bis i) genannt sind.

39. Die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ geht durch die Punkte (17; 15) und (10; $-$6). Wie groß sind ihre Achsen?

40. Entscheide bei den folgenden Punkten, ob sie zwischen den beiden Ästen oder innerhalb des rechten oder linken Astes der Hyperbel $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ liegen: a) (6; 2), b) (4; 3), c) ($-$3; $-$1), d) ($-$4; 1), e) (4; 2), f) ($-$5; 3).

Parabel

41. Zeichne Punkte einer Parabel, indem du von der Definition der Parabel als des geometrischen Ortes derjenigen Punkte ausgehst, deren Abstände von einer festen Geraden (der Leitlinie) und einem festen Punkte (dem Brennpunkt) gleich sind (vgl. § 20, Nr. 12). Gib den Punkt der Parabel an, der der Leitlinie am nächsten liegt (Scheitel der Parabel).

42. Zeichne verschiedene Parabeln mit gleichbleibender Leitlinie, deren Brennpunkte alle auf einer Senkrechten zur Leitlinie liegen, und untersuche, wie die Parabel sich ändert, wenn der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie wächst.

43. Die Parabel soll auf ein Koordinatensystem bezogen werden, dessen y-Achse parallel zur Leitlinie durch den Scheitel geht; Nullpunkt ist der Scheitel der Parabel. Gib die Gleichung der Leitlinie an, wenn der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie (der halbe Parameter) p ist.

44. $(x_1; y_1)$ seien die Koordinaten eines Punktes C_1 der Parabel mit dem Brennpunkt F. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem habe die Lage wie in Aufg. 43. a) Welches ist die Gleichung des Brennstrahles C_1F? b) Wie lang ist C_1F?

45. Der Fußpunkt der Senkrechten von einem beliebigen Parabelpunkt C auf die Leitlinie sei L. a) Setze dann die Gleichung $CL = CF$ in eine Beziehung zwischen den Koordinaten x und y von C und dem Halbparameter p um. b) Beseitige in dem Ausdruck die Quadratwurzel. c) Bringe die Gleichung auf die Form (Scheitelgleichung)

$$y^2 = 2px.$$

46. Zeige an der Gleichung der Parabel a) die axiale Symmetrie in bezug auf die x-Achse; b) zeige, daß bei positivem p die Kurve nur für die rechte Halbebene reell ist.

47. Wie lautet die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Leitlinie parallel der x-Achse ist?

48. a) Welche Lage hat eine Parabel $y^2 = 2px$, wo p eine negative Größe ist? b) Zeige, daß $x^2 = 2py$ gleichfalls eine Parabel ist, und gib ihre Lage an.

49. Zeichne Punkte der folgenden Parabeln:

a) $y^2 = 2x$, b) $y^2 = 8x$, c) $y^2 = x$,

d) $y^2 = -\frac{x}{2}$, e) $x^2 = 3y$, f) $x^2 = -\frac{y}{3}$.

50. Bestimme den Parameter einer Parabel $y^2 = 2px$, die durch den Punkt a) (12; 6), b) (4; 4), c) (4; 8), d) (—25; —10) geht.

51. Entscheide bei den folgenden Punkten, ob sie innerhalb oder außerhalb der Parabel $y^2 = 12x$ liegen: a) (1; 2), b) (1; —3), c) (2; 5), d) (4; —7).

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

52. Nimm mit der Parabel $y^2 = 2px$ eine Drehung um den Koordinatenanfangspunkt um a) 90°, b) 180°, c) 60°, d) 135° vor (§ 28, Aufg. 6). Wie lautet die Gleichung der gedrehten Parabel?

53. Drehe die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ um a) 90°, b) 45° um den Mittelpunkt. Wie lautet die Gleichung der gedrehten Hyperbel?

54. Drehe die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ um den Mittelpunkt um 45°. Wie lautet die Gleichung dann?

55. a) Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, b) die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, c) die Parabel $y^2 = 2px$ wird um die Strecke m in der Richtung der x-Achse, um n in der Richtung der y-Achse verschoben, außerdem um den Winkel α gedreht. Wie lautet die Gleichung des geschobenen und gedrehten Kegelschnittes?

56. Beseitige aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

den Faktor a. Wann ist das nicht möglich?

57. Beseitige aus der Gleichung

a) $x^2 + xy + y^2 = 19$, b) $xy = 12$, c) $x^2 - xy + y^2 = 7$,

d) $x + xy + y = 15$, e) $x^2 + xy = 3$, f) $y^2 - xy = 6$

das gemischt-quadratische Glied dadurch, daß du durch die Substitution

$$x = \xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha, \qquad y = \xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha$$

ein neues Koordinatensystem einführst, wobei der Winkel α so gewählt wird, daß im neuen System ein Glied mit $\xi \cdot \eta$ nicht vorkommt. — Gib danach an, welche Kurven den ursprünglichen Gleichungen entsprechen, und zeichne sie.

58. Beseitige aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$$

das gemischt-quadratische Glied durch die in Aufg. 57 benutzte Substitution. Zeige, daß man für α die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{1-b} \quad \text{erhält.}$$

59. Untersuche, aus welchen der nachfolgenden Gleichungen

a) $x^2 + y^2 + x + y = 8$, b) $x^2 - y^2 + x + 2y = 12$,
c) $x^2 + x + y = 21$, d) $x^2 + x - y = 48$,
e) $x - y^2 + y = 5$, f) $x + 4 = y^2$

die linearen Glieder durch eine Substitution

$$x = \xi + m, \qquad y = \eta + n$$

fortgeschafft werden können, aus welchen nicht. In allen Fällen gib an, welche Kurven den ursprünglichen Gleichungen entsprechen, und zeichne sie.

60. Untersuche die geometrische Bedeutung der Gleichungen

$$\pm 3x^2 \pm 2y^2 = 1,$$

wobei alle vier Vorzeichenkombinationen berücksichtigt werden.

61. Untersuche die geometrische Bedeutung der Gleichungen

$$\pm 4x^2 \pm 9y^2 = 0,$$

wobei wieder alle vier Vorzeichenkombinationen berücksichtigt werden.

62. Diskutiere die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$ax^2 + by^2 = c,$$

wobei $a \neq 0$, $b \neq 0$ vorausgesetzt wird.

63. Untersuche die geometrische Bedeutung der Gleichungen[1]

a) $x^2 + ax + by + c = 0$, b) $y^2 + ax + by + c = 0$.

64. Gib zusammenfassend an, welche geometrischen Gebilde durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden können.

---

1) Vgl. vorher Aufg. 59 c)—f).

65. Zeichne die graphischen Bilder der folgenden Gleichungen:

a) $2x^2 - 3xy + y^2 + 5y - 3x + 2 = 0$,
b) $x^2 + xy - 5x - 3y + 6 = 0$, c) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$,
d) $xy - 2x^2 + 7x - 3y - 3 = 0$, e) $y^2 - 2xy + 4x + 2y - 8 = 0$.

66. Durch wieviel Konstanten ist ein Kegelschnitt in allgemeiner Lage bestimmt?

67. Bestimme die Gleichung des Kegelschnitts, der durch folgende fünf Punkte geht:

a) (0; 1), (2; 4,2), (5; 5), (8; —2,2), (10; 1);
b) (—4; 2), (—3; 6), (0; —3), (5; 2), (2; —4);
c) (—3; —2), (—1; —3), (0; —5), (2; 3), (5; 0).

68. Wie sieht die Gleichung eines Kegelschnittes aus, der a) durch den Koordinatenanfangspunkt geht, b) symmetrisch zur x-Achse ist, c) symmetrisch zur y-Achse ist, d) zur x-Achse und y-Achse gleichzeitig symmetrisch ist, e) dessen Achsen den Koordinatenachsen parallel sind.

69. Bestimme Art und Lage der Kegelschnitte mit folgenden Gleichungen:

a) $xy - 2y = 16$, b) $7x + xy + 4y - 20 = 0$,
c) $y = 2x^2 - 4x + 1$, d) $x^2 + y^2 - 2x - 5y + 4 = 0$,
e) $x^2 - 2xy - 2x + 4y + 24 = 0$, f) $3x + xy + 3y = 9$.

70. a)—f) Gib für die in Aufg. 69a—f) genannten Kegelschnitte die Gleichungen der Leitlinien an.

71. a) Bei der graphischen Lösung der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ werden die Schnitte der Parabel $y = x^2 + ax + b$ mit der x-Achse gesucht. Untersuche die Lage des Scheitelpunktes der Parabel und gib auf Grund der Lage der Parabel an, wann die Gleichung keine, wann sie eine, wann sie zwei reelle Wurzeln hat. b) Bei einer anderen graphischen Lösung der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ werden die Schnitte der Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y + ax + b = 0$ gesucht. Wann sind zwei Schnittpunkte vorhanden, wann gibt es einen, wann keinen Schnittpunkt?

Kegelschnitte als geometrische Örter

72. Ein Stab von a) 1 m Länge, b) von der Länge a lehnt an einer Wand und gleitet an ihr senkrecht herab. Welche Kurve beschreibt der Punkt, der den Stab im Verhältnis 2 : 3 teilt?

73. In einen rechten Winkel werden Rechtecke gleichen Flächeninhalts hineingeschoben. Auf welcher Kurve liegen die freien vierten Ecken der Rechtecke?

74. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von einer Geraden und einem Punkt den Wert a) $2:3$, b) $3:2$, c) $m:n$ hat.

75. Dreiecke gleichen Umfanges sind mit ihren gleich langen Grundlinien aufeinandergelegt. Auf welcher Kurve liegen a) die Spitzen, b) die Schwerpunkte der Dreiecke?

76. Gegeben ist eine Strecke, gesucht der geometrische Ort der Punkte, für die die Differenz der Quadrate der Abstände von den Endpunkten den gleichen Wert hat wie das Quadrat des Abstandes von der Strecke.

77. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Kreisen gleichen Abstand haben (Berührungsaufgabe von Apollonius).

Praktische Anwendungen

78. Unter dem Perihel einer Planeten- und Kometenbahn versteht man den Punkt größter Sonnennähe, unter dem Aphel den Punkt größter Sonnenferne. Von der linearen Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ unterscheidet man die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Gib die numerische Exzentrizität und die Bahngleichung der folgenden Planeten an:

	a) Merkur	b) Venus	c) Erde	d) Mars
Apheldistanz	69,4	108,3	151,1	247,6
Periheldistanz	45,6	106,7	146,2	205,4

	e) Jupiter	f) Saturn	g) Uranus	h) Neptun
Apheldistanz	810,6	1497,3	2983,5	4505,5
Periheldistanz	735,6	1338,3	2719,1	4429,6.

Die Längen sind in Millionen Kilometern gegeben. — Welcher Planet hat die größte und welcher die kleinste numerische Exzentrizität?

79. Gib bei folgenden periodischen Kometen die numerische Exzentrizität und die Bahngleichung an:

	a) Enke	b) Biela	c) Halley
Periheldistanz	0,341	0,879	0,687
Apheldistanz	4,096	6,223	35,224.

Als Maßeinheit ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne genommen.

80. Ein ebener Schnitt durch die Drehachse der Erde ist nach den neuesten Forschungen von Helmert eine Ellipse mit den Halbachsen 6378388 m und 6356909 m. Berechne a) den Abstand der Brennpunkte dieser Ellipse vom Erdmittelpunkt, b) die Abplattung der Erde $\left(\frac{a-b}{a}\right)$.

81. Leonardo da Vinci wird ein Ellipsenzirkel zugeschrieben, der die Tatsache benutzt (Aufg. 72), daß ein Punkt einer zwischen zwei senkrecht zueinander stehenden Stäben gleitenden Strecke eine Ellipse beschreibt. Konstruiere ein Modell eines solchen Zirkels.

82. Konstruiere eine Vorrichtung aus einem Stab und einem Faden von der Länge $2a$, mit deren Hilfe sich eine Hyperbel zeichnen läßt.

83. Konstruiere aus einem Stab, einem an ihm gleitenden rechtwinkligen Dreieck und einem Faden eine Vorrichtung zum Zeichnen einer Parabel.

84. Zwischen Gegenstandsweite x und Bildweite y bei einer Linse mit der Brennweite f besteht die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Durch welche Kurve wird diese Beziehung graphisch veranschaulicht?

Aus der Geschichte der Geometrie

85. In Descartes' Géométrie (1637) findet sich als erstes Beispiel aus der analytischen Geometrie die Herleitung der Kurve mit der Gleichung

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac.$$

a, b und c sind positive Größen. Was ist das für eine Kurve?

86. Auch ein erstes Zahlenbeispiel kommt in der Géométrie von Descartes vor:

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2.$$

Was ist das für eine Kurve, und welche Lage hat sie?

§ 30. Kegelschnitt und Gerade

Ellipse und Sekante

1. a) Gib die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Zentralen $y = mx$ an. b) Wie groß ist der Durchmesser mit dem Richtungsfaktor m?

2. Bringe die Gerade $x + y = 4$ zum Schnitt mit der Ellipse $3x^2 + 4y^2 = 120$.

3. Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

4. Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $y = mx + n$ und untersuche, wann es zwei Lösungen, wann eine, wann es keine Lösung gibt.

5. Wie lang ist die Sehne, die die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus der Geraden $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ herausschneidet?

6. Bestimme die Länge der durch einen Brennpunkt und einen Nebenscheitel gehenden Sehne.

7. Bestimme die Länge $2p$ der durch den Brennpunkt gehenden, zur kleinen Achse parallelen Sehne (die Größe heißt der Parameter der Ellipse).

8. Gib eine geometrische Deutung der Beziehung zwischen Parameter, großer und kleiner Halbachse.

9. Wie ändert sich die Gestalt einer Ellipse, wenn der Abstand von Brennpunkt und zugehörigem Scheitel der großen Achse konstant bleibt und der Parameter variiert?

10. Führe in die Scheitelgleichung (§ 29, Aufg. 16) der Ellipse den Parameter ein und bringe sie auf die Form

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

11. Ein Strahlenbüschel hat a) den Mittelpunkt, b) einen Scheitel, c) einen beliebigen Ellipsenpunkt zum Scheitelpunkt. Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der vom Scheitelpunkt und von der Ellipse begrenzten Strahlenstücke.

12. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird an der Geraden $y = x$ gespiegelt.

a) Wie lautet die Gleichung der neuen Kurve? b) In welchen Punkten schneiden sich beide Kurven? c) Wie lang sind die gemeinsamen Durchmesser?

Konjugierte Durchmesser der Ellipse

13. Bestimme den geometrischen Ort der Mitten einer Schar paralleler Sehnen der Ellipse (konjugierte Durchmesser).

14. Es seien m_1 und m_2 die Richtungsfaktoren zweier konjugierter Durchmesser der Ellipse. Zeige, daß dann

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

15. Untersuche, wie sich die Lage des einen von zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse ändert, wenn der Richtungsfaktor des andern von 0 bis $+\infty$ wächst.

16. Berechne den Tangens des Winkels zwischen zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse, deren einer den Richtungsfaktor m hat, und diskutiere die Lösung.

17. In einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ein Paar konjugierter Durchmesser gezeichnet. Die Hälfte des einen sei a' und habe den Rich-

tungsfaktor m, die Hälfte des anderen sei b'. a) Berechne a'^2 und b'^2. b) Beweise, daß
$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ist.}$$

18. In einer Ellipse sind a' und b' die Hälften konjugierter Durchmesser. Die Gleichung der Ellipse ist auf das durch das Paar konjugierter Durchmesser gegebene schiefwinklige ξ-η-Koordinatensystem zu transformieren. Beweise, daß die Gleichung die Gestalt
$$\frac{\xi^2}{a'^2} + \frac{\eta^2}{b'^2} = 1 \quad \text{annimmt.}$$

19. Gegeben ist ein Durchmesser einer durch ihre Halbachsen bestimmten Ellipse nach Länge oder Richtung. Konstruiere den konjugierten Durchmesser.

Hyperbel und Sekante

20. a) Gib die Schnittpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Zentralen $y = mx$ an. Wann sind keine Schnittpunkte vorhanden? Wie groß ist der Durchmesser mit dem Richtungsfaktor m?

21. Bestimme den Schnittpunkt a) der Hyperbel $9x^2 - 4y^2 = 36$ mit der Geraden $x + y = 4$, b) der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, c) der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Geraden $y = mx + n$ und diskutiere die Lösung.

22. Untersuche, wie viele Schnittpunkte eine Gerade mit einer Hyperbel haben kann.

23. Wie lang ist die Sehne, die von der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus der Geraden $2y = x - 1$ herausgeschnitten wird?

24. Im Abstand b ist zur Hauptachse einer Hyperbel $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ die Parallele gezogen. Wie lang ist die Sehne?

25. Bestimme die Länge $2p$ der durch einen Brennpunkt gehenden, zur Hauptachse senkrechten Sehne (die Größe heißt der Parameter der Hyperbel).

26. Gib eine geometrische Deutung der Beziehung zwischen dem Parameter und den beiden Halbachsen.

27. Führe in die Scheitelgleichung der Hyperbel den Parameter ein und bringe sie auf die Form
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

28. Vergleiche die Scheitelgleichungen der drei Kegelschnittarten und führe aus, inwiefern man die Parabel als Grenze einerseits der Ellipse, andererseits der Hyperbel ansehen kann.

29. Die Punkte einer Hyperbel werden **a)** mit dem Mittelpunkt, **b)** mit einem Scheitel, **c)** mit einem Brennpunkt verbunden. Bestimme den geometrischen Ort der Mitten der Verbindungsstrecken.

Konjugierte Durchmesser der Hyperbel

30. Bestimme den geometrischen Ort der Mitten einer Schar paralleler Sehnen der Hyperbel (konjugierte Durchmesser).

31. Es seien m_1 und m_2 die Richtungsfaktoren zweier konjugierter Durchmesser der Hyperbel. Zeige, daß dann
$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{ist.}$$

32. Untersuche, wie sich die Lage des einen von zwei konjugierten Durchmessern der Hyperbel ändert, wenn der Richtungsfaktor des anderen von 0 bis $+\infty$ wächst. — Beachte den Unterschied gegen Nr. 15.

33. Berechne den Tangens des Winkels zwischen zwei konjugierten Durchmessern, deren einer den Richtungsfaktor m hat.

34. In einer Hyperbel mit den Halbachsen a und b ist ein Paar konjugierter Durchmesser gezeichnet. **a)** Was wird man unter den Längen a' und b' dieser Durchmesser verstehen? **b)** Berechne a'^2 und b'^2. **c)** Beweise, daß
$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 \qquad \text{ist.}$$

35. In einer Hyperbel sind a' und b' die Hälften konjugierter Durchmesser. Die Gleichung der Hyperbel ist auf das durch das Paar konjugierter Durchmesser gegebene schiefwinklige ξ-η-Koordinatensystem zu transformieren. Beweise, daß die Gleichung die Gestalt
$$\frac{\xi^2}{a'^2} - \frac{\eta^2}{b'^2} = 1 \qquad \text{annimmt.}$$

36. Gegeben ist ein Durchmesser einer durch ihre Halbachsen bestimmten Hyperbel nach Länge oder Richtung. Konstruiere den konjugierten Durchmesser.

Parabel und Sekante

37. **a)** Gib die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden $y = mx$ an. **b)** Wie lang ist die Parabelsehne?

38. Bestimme die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden $y = mx + n$ und untersuche, wann es zwei Lösungen, wann eine, wann keine Lösung gibt.

39. Bestimme die Länge der durch den Brennpunkt parallel zur Leitlinie gelegten Sehne.

40. Ein Strahlenbüschel hat den Scheitel der Parabel zum Scheitelpunkt. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die, vom Scheitelpunkt aus gerechnet, die Sehnen im Verhältnis **a)** $1:2$, **b)** $2:3$, **c)** $m:n$ teilen.

41. Ein Strahlenbüschel hat den Schnitt von Leitlinie und Hauptachse einer Parabel zum Scheitelpunkt. Welches ist der geometrische Ort der Mitten der Sekantenabschnitte?

42. Durch den Brennpunkt sind die Strecken nach den Punkten der Parabel gezogen. Auf welcher Kurve liegen die Punkte, die diese Strecken vom Brennpunkt aus im Verhältnis a) $1:3$, b) $1:n$ c) $m:n$ teilen?

43. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Bestimme die Schnittpunkte der neuen Kurve mit der Parabel.

Konjugierte Durchmesser der Parabel

44. Bestimme den geometrischen Ort der Mitten einer Schar paralleler Sehnen der Parabel.

45. Durch den Berührungspunkt einer Parabeltangente wird die Parallele zur Hauptachse der Parabel gelegt. Beweise, daß sie die Schar der zur Tangente parallelen Sehnen halbiert.

46. Die Scheitelgleichung einer Parabel ist von dem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem zu transformieren, dessen Achsen eine Parallele zur Hauptachse und die Tangente im Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Parabel sind. — Setze $p' = p + 2a$, wo a die x-Koordinate des Berührungspunktes ist, und beweise, daß sich die Gleichung auf die Form
$$\eta^2 = 2p'\xi \qquad \text{bringen läßt.}$$

Ellipse und Tangente

47. a) Wie lautet die Gleichung einer durch die Punkte $(x_0;\ y_0)$ und $(x_1;\ y_1)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gehenden Sekante? b) Zeige, daß die Sekantengleichung sich auf die Form
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} \qquad \text{bringen läßt.}$$

48. a) Leite die Gleichung der im Punkte $(x_0;\ y_0)$ an die Ellipse gelegten Tangente in der Weise her, daß du die beiden Schnittpunkte der Sekante mit der Ellipse (Nr. 47) zusammenfallen läßt. b) Bringe die Tangentengleichung auf die Form
$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

49. Leite die Tangentengleichung der Ellipse mit Hilfe der Differentialrechnung her.

50. Gib die Gleichungen der Scheiteltangenten einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ an.

51. Zeige, daß die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers der Ellipse dem konjugierten parallel ist.

52. In den Punkten $z = \pm e$; $y = ?$ einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die vier Tangenten gezeichnet; sie bilden einen Rhombus. Welches ist die Seitenlänge und der Flächeninhalt dieses Rhombus?

53. An die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die Tangenten gezogen, deren Richtungsfaktoren $+1$ und -1 sind. a) Wie heißen die Berührungspunkte? b) Welches ist der Inhalt des von diesen Tangenten gebildeten Quadrates?

54. An die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind parallel zur Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ die Tangenten gezogen. Wie heißen ihre Gleichungen?

55. Vom Punkte $(0; a)$ sind an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Tangenten gezogen. Wie lang ist die Berührungssehne?

56. Im Punkte $(x_1; y_1)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist auf der Tangente die Senkrechte (Normale) errichtet. a) Gib ihre Gleichung an. b) Wo schneidet die Normale die Koordinatenachsen?

57. Von welchen Ellipsenpunkten geht die Normale durch einen Brennpunkt?

58. Berechne die Winkel, die die Tangente an die Ellipse mit den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen bildet, und zeige, daß sie gleich groß sind.

59. Auf die Tangenten einer Ellipse werden von einem Brennpunkt Lote gefällt. Bestimme den geometrischen Ort der Fußpunkte dieser Lote.

60. Berechne das Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte einer Ellipse von einer beliebigen Tangente.

61. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$?

Hyperbel und Tangente

62. a) Wie lautet die Gleichung einer durch die Punkte $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gehenden Sekante? b) Zeige, daß die Sekantengleichung sich auf die Form $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0}$ bringen läßt.

63. a) Leite die Gleichung der im Punkte $(x_0; y_0)$ an die Hyperbel gelegten Tangente in der Weise her, daß du die beiden Schnittpunkte der Sekante mit der Hyperbel (Nr. 62) zusammenfallen läßt. b) Bringe die Tangentengleichung auf die Form

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

64. Leite die Tangentengleichung der Hyperbel mit Hilfe der Differentialrechnung her.

65. Gib die Gleichungen der Scheiteltangenten einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ an.

66. Beweise den der Aufg. 51 entsprechenden Satz für die Hyperbel.

67. In den Punkten $x = \pm e$; $y = ?$ einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind die vier Tangenten gezeichnet; sie bestimmen einen Rhombus. Welches ist die Seitenlänge und der Flächeninhalt dieses Rhombus?

68. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte $(x_1; y_1)$ der Hyperbel $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$?

69. An die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sind parallel zur Geraden $y = mx$ die Tangenten gezogen. Wie lauten ihre Gleichungen? Diskutiere das Ergebnis.

70. Vom Punkte $(0; b)$ sind an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Tangenten gezogen. Wie lang ist die Berührungssehne?

71. Untersuche, ob die Brennpunkte einer Hyperbel immer auf verschiedenen Seiten einer Tangente liegen oder ob sie auch auf der gleichen Seite liegen können.

72. Im Punkte $(x_1; y_1)$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist auf der Tangente die Senkrechte (Normale) errichtet. a) Wie lautet ihre Gleichung? b) Wo schneidet die Normale die Koordinatenachsen?

73. Von welchen Hyperbelpunkten geht die Normale durch einen Brennpunkt?

74. Berechne die Winkel, die die Tangente an die Hyperbel mit den beiden Brennstrahlen nach dem Berührungspunkt bildet, und zeige, daß sie gleich groß sind.

75. Auf die Tangenten einer Hyperbel werden von einem Brennpunkt Lote gefällt. Bestimme den geometrischen Ort der Fußpunkte dieser Lote.

Parabel und Tangente

76. a) Wie lautet die Gleichung einer durch die Punkte $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$ der Parabel $y^2 = 2px$ gehenden Sekante? b) Zeige, daß die Sekantengleichung sich auf die Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0} \quad \text{bringen läßt.}$$

77. a) Leite die Gleichung der im Punkte $(x_0; y_0)$ an die Parabel gelegten Tangente durch Grenzübergang aus der Sekantengleichung her. b) Bringe die Tangentengleichung auf die Form

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0).$$

78. Leite die Gleichung der Parabeltangente durch Differentiation her.

79. Zeige, daß die y-Achse Scheiteltangente der Parabel $y^2 = 2px$ ist.

80. Berechne die Lage der an die Parabel $y = \frac{x^2}{12}$ in den Punkten mit den x-Koordinaten ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 gelegten Tangenten und benutze sie zur Zeichnung der Parabel.

81. Wo schneiden sich die in den Punkten mit der x-Koordinate $\frac{p}{2}$ an die Parabel gelegten Tangenten?

82. An die Parabel $y^2 = 2px$ ist parallel zur Geraden $y = x$ die Tangente gelegt. Wie heißt ihr Berührungspunkt?

83. Im Punkte $(x_1; y_1)$ der Parabel $y^2 = 2px$ ist auf der Tangente die Senkrechte (Normale) errichtet. a) Wie lautet ihre Gleichung? b) Wo schneidet die Normale die Koordinatenachsen?

84. Auf die Tangenten einer Parabel werden vom Brennpunkt Lote gefällt. Bestimme den geometrischen Ort der Fußpunkte dieser Lote.

85. Unter welchem Winkel schneiden sich die Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$?

86. Von einem beliebigen Punkte der Leitlinie sind an die Parabel die Tangenten gelegt. a) Welchen Winkel bilden sie miteinander? b) In welchem Punkte schneidet die Berührungssehne die Hauptachse?

Hyperbel und Asymptote

87. a) Leite durch Diskussion des Schnittes der Geraden $y = mx$ mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Asymptoten her. Konstruiere die Asymptoten einer Hyperbel, von der b) die Halbachsen a und b, c) die Brennpunkte und die Halbachse a gegeben sind.

88. a) Welche geometrische Bedeutung hat die (imaginäre) Halbachse b der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? — Unter welchem Winkel sind die Asymptoten einer Hyperbel b) mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2{,}4$, c) mit der halben Hauptachse $a = 3{,}5$ und der Exzentrizität $e = 4{,}8$ gegen die x-Achse geneigt?

89. a) Zeige, daß die gleichseitige Hyperbel dadurch ausgezeichnet ist, daß ihre Asymptoten senkrecht aufeinander stehen. b) Wie ist der Hyperbelgleichung zu entnehmen, ob der Neigungswinkel der Asymptoten gegen die x-Achse größer oder kleiner als 45° ist?

90. Leite die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel her, wobei die Asymptoten als Achsen des Koordinatensystems gewählt werden.

91. Welche Form hat die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 120° miteinander bilden?

92. Das graphische Bild einer linearen gebrochenen Funktion $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind. Beweise das. — Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt der Hyperbel?

93. Diejenige Hyperbel, die mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Asymptoten und die Achsenlängen gemeinsam hat, ohne mit ihr zusammenzufallen, heißt die konjugierte Hyperbel. Wie lautet ihre Gleichung?

94. Im Punkte $(x_1; y_1)$ der Hyperbel hat man die Tangente gezeichnet. **a)** Wie groß ist der Inhalt des von den Asymptoten und der Tangente begrenzten Dreiecks? **b)** In welchem Verhältnis teilt der Berührungspunkt das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente?

95. Die auf einer Hyperbelsekante von den Asymptoten und der Kurve begrenzten Strecken sind gleich. Beweise das.

Anleitung: Zeige, daß die Mitte der zwischen den Asymptoten liegenden Strecke mit der Mitte der zwischen den Hyperbelpunkten liegenden Strecke zusammenfällt.

96. Wie kann man den soeben (Aufg. 95) bewiesenen Satz dazu benutzen, Punkte der Hyperbel in beliebiger Zahl zu konstruieren, wenn ein Hyperbelpunkt und die Asymptoten gegeben sind?

97. **a)** Die Gleichung der Hyperbel ist auf das von den Asymptoten gebildete, im allgemeinen schiefwinklige Koordinatensystem zu transformieren. **b)** Durch Einführung einer Konstante c ist die Gleichung auf die Form $\xi \cdot \eta = c^2$ zu bringen; welchen Wert hat c?

Praktische Anwendungen

98. Ein prismatisches, mit einer farbigen Flüssigkeit gefülltes Gefäß hat einen Querschnitt, wie ihn Fig. 37 zeigt. Es wird mit der Kante fest auf den Boden gestellt und nun hin und her gekippt. An der Vorderwand wie an der Rückwand entsteht dann als Umhüllende der verschiedenen Lagen des Flüssigkeitsspiegels eine Kurve. Stelle fest, was für eine Kurve das ist.

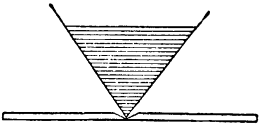

Fig. 37.

99. Beweise, daß vom Brennpunkt eines parabolischen Spiegels ausgehende Strahlen parallel der Hauptachse reflektiert werden.

Anleitung: Ein ebener Schnitt durch einen parabolischen Spiegel ist eine Parabel. Die Reflexion in einem Punkte einer Fläche ist durch die Tangentialebene in diesem Punkte bestimmt.

100. Die Ergebnisse der Aufg. 59, 75 und 84 liefern ein praktisches Verfahren, mit Hilfe eines beweglichen rechten Winkels die Kegelschnitte als umhüllende Kurven einer Tangentenschar zu zeichnen. Beweise das.

Überlegungen

101. Wenn man in die Tangentengleichung eines Kegelschnittes, etwa in $\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$, die laufenden Koordinaten für die Koordinaten des Berührungspunktes setzt, dann erhält man die Kegelschnittgleichung (das läßt sich als Gedächtnisregel anwenden). Begründe diese Tatsache. Gilt das allgemein?

102. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gerade $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ berührt, ist $\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1$. **a)** Beweise das; wie heißt die entsprechende Bedingung für **b)** Kreis, **c)** Hyperbel, **d)** Parabel?

103. Entwickle die Tangentengleichung im Punkte $(x_0; y_0)$ **a)** einer Ellipse $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, **b)** einer Hyperbel $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, **c)** einer Parabel $(y-q)^2 = 2p(x-s)$, **d)** eines Kegelschnittes

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

104. Untersuche die Anzahl **a)** der Schnittpunkte einer Geraden mit einem beliebigen Kegelschnitt, **b)** der Tangenten von einem Punkte an einen beliebigen Kegelschnitt.

105. Wie kann man den Koeffizienten einer beliebigen Kegelschnittgleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ansehen, welche Art von Kegelschnitten sie darstellt?

106. **a)** Wähle einen Brennpunkt des Kegelschnitts als Koordinatenanfangspunkt, die Hauptachse als Achse eines Polarkoordinatensystems und leite die Kegelschnittgleichung

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

ab. **b)** Diskutiere die Werte von ε für die einzelnen Kegelschnittarten, auch für Kreis und gleichseitige Hyperbel.

Aus der Geschichte der Geometrie

Das Problem der Würfelverdopplung

107. Menächmus (370 v. d. Ztr.) zeigte, daß die Würfelverdopplung mit der Lösung der Aufgabe erledigt sei, zwei Strecken x und y (die beiden mittleren Proportionalen) so zu finden, daß $a : x = x : y = y : b$ ist, wo a und b gegebene Strecken sind. **a)** Zeige, daß in der Tat $x^3 = a^2 b$ ist und daß also für $b = 2a$ der Fall der Würfelverdopplung vorliegt. **b)** Menächmus gab eine Lösung des Problems durch Schnitt einer Parabel $y^2 = bx$ mit der Parabel $x^2 = ay$. Erkläre diese Lösung.

108. Da in Aufg. 107 $x \cdot y = ab$ ist, kann man die Würfelverdopplung auch durch Schnitt einer Hyperbel mit einer Parabel leisten. Erläutere das.

109. Wenn man die in Aufg. 107 genannten Parabelgleichungen addiert, erhält man den Kegelschnitt $x^2 + y^2 = ay + bx$. a) Untersuche die Kurve. — Löse die Aufgabe der Würfelverdopplung durch Schnitt dieser Kurve b) mit einer der Parabeln (Nr. 107b), c) mit der Hyperbel (Nr. 108).

Das Problem der Dreiteilung des Winkels

110. Pappus (Ende des 4. Jahrh. n. d. Ztr. in Alexandrien) hat verschiedene Methoden angegeben, das Problem der Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von Hyperbeln zu lösen. Beweise die Richtigkeit des folgenden Verfahrens: Der Schenkel OX des gegebenen spitzen Winkels α sei eine Asymptote einer beliebigen gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkt O, deren einer Ast den freien Schenkel von α in A schneidet. Von A aus wird die Strecke $2OA$ als Sehne AB in die Hyperbel eingetragen; die Mitte dieser Sehne sei C. Dann ist $\sphericalangle\, COX = \frac{1}{3}\alpha$.

Anleitung: Beachte Nr. 95.

111. Wenn α gegeben ist, kann man $\cos\alpha$ konstruieren. Umgekehrt kann man $\frac{\alpha}{3}$ finden, wenn man $\cos\frac{\alpha}{3}$ hat. Nun ist

$$\cos\alpha = 4 \cdot \cos^3\frac{\alpha}{3} - 3 \cdot \cos\frac{\alpha}{3}. \tag{1}$$

Die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels führt also auf die Lösung der kubischen Gleichung

$$a = 4x^3 - 3x. \tag{2}$$

a) Beweise die Gleichung (1). b) Löse die Gleichung (2) durch Schnitt einer Parabel mit einer Hyperbel, c) durch Schnitt der Parabel $x^2 = y$ mit der Kurve $y^2 - \frac{3}{4}y = \frac{a}{4}x$. (Welcher Schnittpunkt ist außer acht zu lassen?) d) Durch Addition der beiden Gleichungen in c) erhält man die Gleichung $x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y = \frac{a}{4}x + y$. Löse das Problem durch Schnitt dieser Kurve mit einer der in c) genannten Parabeln.

§ 31. Vermischte Aufgaben

Flächeninhalt

1. Berechne den Inhalt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Von einer Parabel $y^2 = 2px$ wird durch die Gerade a) $x = \frac{p}{2}$, b) $x = a$ ein Stück abgeschnitten; wie groß ist der Flächeninhalt des Parabelabschnittes?

3. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird von der Geraden a) $y = mx$, b) $y = mx + n$ geschnitten. Wie groß ist der Inhalt des Parabelabschnittes?

4. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird an der Geraden $y = x$ gespiegelt; wie groß ist das beiden Parabeln gemeinsame Stück?

5. Von **a)** einer Hyperbel, **b)** einer Ellipse wird durch eine Senkrechte zur Hauptachse α) durch den Brennpunkt, β) im Abstande $x = m$ ein Stück abgeschnitten. Wie groß ist sein Inhalt?

6. Beweise (möglichst auf mehrere Arten), daß zwei konjugierte Durchmesser die Ellipse in vier inhaltsgleiche Stücke teilen.

7. Von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird durch die Gerade $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ ein Stück abgeschnitten. **a)** Bestimme den Inhalt des Abschnittes. **b)** Berechne ihn für $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 2$.

8. Beweise: Der Inhalt eines Parabelabschnittes ist $\frac{2}{3}$ von dem Inhalt des Dreiecks, das die begrenzende Sehne mit den in ihren Endpunkten gelegten Tangenten bildet.

9. Wie verhält sich der Inhalt eines von zwei Brennstrahlen gebildeten Parabelausschnittes zu dem Inhalt des Fünfecks, das durch den Brennpunkt, die beiden Kurvenpunkte und deren Projektionen auf die Leitlinie bestimmt wird?

Krümmungskreis

10. Berechne die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt $(x_1; y_1)$ **a)** einer Parabel $y^2 = 2px$, **b)** einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, **c)** einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

11. Gib die Größe des Krümmungsradius **a)** der Parabel, **b)** der Ellipse und **c)** der Hyperbel für den Punkt (x, y) an. Konstruiere den Krümmungsmittelpunkt **d)** zu dem Scheitel der Parabel, **e)** zu den Haupt- und Nebenscheiteln der Ellipse, **f)** zu den Scheiteln der Hyperbel.

12. In der Technik werden die in Aufg. 11e) verlangten Krümmungsmittelpunkte meist folgendermaßen konstruiert: $ABCD$ sei das der Ellipse umschriebene Rechteck, dessen Seiten den Achsen parallel sind. Man fälle von einer Ecke (B) aus auf die durch sie nicht hindurchgehende Diagonale (AC) des Rechteckes das Lot. Dieses schneidet aus den Achsen der Ellipse zwei der gesuchten vier Krümmungsmittelpunkte aus. — Beweise die Richtigkeit der Konstruktion.

13. Bestimme den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte **a)** der Parabel, **b)** der Ellipse und **c)** der Hyperbel und zeichne die Örter in jedem Falle.

Pol und Polare

14. Gegeben ist **a)** eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, **b)** eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, **c)** eine Parabel $y^2 = 2px$ und ein beliebiger, nicht auf dem Kegelschnitt

gelegener Punkt P $(x_1;\ y_1)$. Bestimme den geometrischen Ort der P zugeordneten vierten harmonischen Punkte auf den durch P gehenden Kegelschnittsehnen (Polare).

15. Entwickle die Gleichung der Polare eines Punktes $(x_1;\ y_1)$ in bezug auf den Kegelschnitt $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

16. Zeige analytisch, daß die Polaren der Punkte einer Geraden in bezug auf einen Kegelschnitt durch einen Punkt, den Pol der Geraden, gehen.

17. Die Tangente ist als Sonderfall der Polaren zu erweisen.

18. Von einem Punkte sind an einen Kegelschnitt die Tangenten gelegt. Zeige analytisch, daß die Berührungssehne mit der Polaren jenes Punktes zusammenfällt.

19. Was ist über die Polaren der Brennpunkte der Kegelschnitte zu sagen?

20. Bestimme in bezug auf die Ellipse a) $x^2 + 2y^2 = 1$, b) $7x^2 + 9y^2 = 25$, c) $20x^2 - 19xy + 42y^2 - 40x - 126y = 0$ den Pol zu der Geraden a) $x - 6y + 1 = 0$, b) $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = 1$, c) $19x - 55y + 134 = 0$.

21. Bestimme in bezug auf die gleichseitige Hyperbel $y^2 - x^2 = 100$ die Polare des Punktes $(5;\ 5)$.

22. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 100$ und die Parabel $y^2 = 20x$. Welches ist der geometrische Ort der Pole wenn a) die Tangenten des Kreises als Polaren in bezug auf die Parabel, b) die Tangenten der Parabel als Polaren in bezug auf den Kreis angesehen werden?

23. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Hyperbel $x^2 - y^2 = r^2$. Die Tangenten des Kreises sind als Polaren der Hyperbel aufzufassen, und der geometrische Ort der zugehörigen Pole ist anzugeben.

24. Ermittle die Polare des Punktes $(1;\ 5)$ in bezug auf den Kegelschnitt, der durch die Punkte $(0;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 3)$, $(4;\ 1)$ und $(3;\ 4)$ hindurchgeht, a) durch Konstruktion (vgl. § 24, Aufg. 37), b) durch Rechnung, ohne die Punkte selbst zu zeichnen.

25. Es sei ein Kegelschnitt gegeben, der von einer festen Tangente t in T, von einer beweglichen Tangente t' in T' berührt werde. Der Schnittpunkt S von t und t' werde mit einem festen Punkt P in der Ebene des Kegelschnittes verbunden; PS schneide TT' in X (so daß also X und S konjugierte Pole in bezug auf den Kegelschnitt sind). a) Beweise, daß X bei der Bewegung von t' einen Kegelschnitt beschreibt. b) Wie liegt dieser Kegelschnitt zu P, zu t und zu dem ursprünglichen Kegelschnitt?

26. Beweise: Die Polaren der Punkte eines Kegelschnittes in bezug auf einen zweiten Kegelschnitt umhüllen einen dritten Kegelschnitt.

Schnitt zweier Kegelschnitte

27. Der Mittelpunkt einer Ellipse, deren Halbachsen $a = 10$ und $b = 7$ sind, ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit einem Nebenscheitel der Ellipse zusammenfällt. Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind zu bestimmen.

28. Die Halbachsen einer Hyperbel sind $a = 7$ und $b = 8$. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit einem Scheitel der Hyperbel zusammenfällt. Wo schneiden sich die beiden Kurven?

29. Die Halbachsen einer Hyperbel sind $a = 6$ und $b = 15$; ihre Achsen fallen mit den Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel von $a_1 = 20$ Halbachsenlänge zusammen. Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Kurven?

30. Zwei kongruente, nach entgegengesetzten Seiten geöffnete Parabeln, deren Parameter 9 ist, sind derart übereinandergeschoben, daß ihre Leitlinien den Abstand 10, ihre Achsen den Abstand 3 haben. Wo schneiden sich die beiden Parabeln?

31. Zwei Ellipsen haben den gleichen Mittelpunkt und liegen so, daß ihre großen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Die Halbachsen der einen Ellipse sind $a_1 = 40$, $b_1 = 25$, die der anderen $a_2 = 52$, $b_2 = 26$. Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Ellipsen?

32. Zwei kongruente Ellipsen, bei denen die große Achse doppelt so lang ist wie die kleine, sind so gelegen, daß die kleine Achse der einen Ellipse sich mit einer großen Halbachse der anderen Ellipse deckt. Wo schneiden sich die beiden Ellipsen?

Kegelschnittsysteme: Kegelschnittbüschel

33. Welches ist der geometrische Ort der Pole einer Geraden in bezug auf die Parabeln, die die Achse und den Scheitel gemeinsam haben?

34. Zeige, daß die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

für veränderliches λ ein System konfokaler Kegelschnitte darstellt. Untersuche, a) wann man Ellipsen, wann Hyperbeln erhält, b) wie es mit den Schnittpunkten konfokaler Kegelschnitte steht, c) gegebenenfalls unter welchem Winkel sich konfokale Kegelschnitte schneiden.

35. Untersuche die Eigenschaften konfokaler Parabeln.

36. Gegeben ist ein System konfokaler Kegelschnitte und eine Gerade. Bestimme den geometrischen Ort der Pole, die zu jener Geraden in bezug auf die Kegelschnitte gehören.

37. a) Die Ellipsen, die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \lambda} + \frac{y^2}{b^2 \lambda} = 1$$

für verschiedene Werte von λ dargestellt werden, heißen ähnlich und ähnlich gelegen. Weise die Berechtigung dieser Bezeichnung nach. b) Durch welche Gleichungsform werden ähnliche und ähnlich gelegene Hyperbeln dargestellt?

38. a) Beweise, daß alle Parabeln untereinander ähnlich sind. b) Wann kann man zwei Parabeln als ähnlich gelegen bezeichnen?

39. Wieviel Schnittpunkte haben die Kegelschnitte

$$K_1 \equiv a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0$$

und

$$K_2 \equiv a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0?$$

Grund!

40. Zeige, daß $K_1 + \lambda K_2 = 0$ einen Kegelschnitt darstellt, der durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ hindurchgeht. Erläutere die Bezeichnung Kegelschnittbüschel und Grundpunkte des Büschels.

41. Es sei $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 25$; $K_2 \equiv 4x^2 + 25y^2 - 400$.
Welches ist der Kegelschnitt des Büschels $K_1 + \lambda K_2 = 0$, der a) durch den Punkt (6; 7), b) durch den Punkt (1; 2) geht?

42. Ermittle die Grundpunkte des Büschels, das durch

$$K_1 \equiv x^2 + 8xy + y^2 + 5x + 5y + 6 = 0$$

und

$$K_2 \equiv 7x^2 - xy + 4y^2 + 14x + 5y - 21 = 0$$

bestimmt wird.

Andeutung: Suche die Geradenpaare im Büschel oder m. a. W. stelle die Bedingung dafür auf, daß der Kegelschnitt $K_1 + \lambda K_2 = 0$ zerfällt.

43. Beweise: a) Die Polaren eines beliebigen Punktes in bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte. b) Sprich den hierzu dualen Satz aus und beweise ihn. (Vgl. § 24, Aufg. 10.)

Projektive Beziehungen

44. Auf der Zahlengeraden sind die Punkte $+1$, $+4$, -9, $+8$ gezeichnet. Berechne die Werte der durch diese vier Punkte bestimmten Doppelverhältnisse.

45. Bestimme zu den Punkten $+1$, $+4$, -9 der Zahlengeraden den dem Punkte $+4$ zugeordneten vierten harmonischen Punkt.

46. In einem regelmäßigen Fünfeck ist eine Ecke mit den vier anderen verbunden. Berechne die Werte der durch diese vier Strahlen bestimmten Doppelverhältnisse.

47. Zeige, daß die projektive Verwandtschaft analytisch durch eine lineare Substitution ausgedrückt wird.

48. Welches ist der analytische Ausdruck für die involutorische Lage dreier Punktepaare derselben Geraden?

49. Es seien G und L lineare Ausdrücke in x und y, also

$$G + \lambda_1 L = 0, \quad G + \lambda_2 L = 0, \quad G + \lambda_3 L = 0, \quad G + \lambda_4 L = 0$$

vier Strahlen des durch den Schnitt der Geraden $G = 0$ und $L = 0$ bestimmten Strahlenbüschels. Zeige, daß das Doppelverhältnis der vier Strahlen den Wert

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \quad \text{hat.}$$

50. Zeige, daß man zwei projektive Strahlenbüschel stets durch Gleichungen von der Form

$$G + \lambda L = 0, \qquad G_1 + \lambda L_1 = 0$$

darstellen kann, so daß zwei zu demselben Wert von λ gehörige Strahlen der beiden Büschel einander zugeordnet sind.

51. Beweise mittels des vorigen Satzes, daß zwei projektive Strahlenbüschel eine Kurve 2. Ordnung (2. Grades) erzeugen.

52. Wenn bei zwei projektiven Büscheln der Strahl, der die Träger der beiden Büschel verbindet, sich selbst entspricht, so zerfällt der durch die Büschel erzeugte Kegelschnitt in ein Geradenpaar (perspektive Lage). **a)** Beweise dies. **b)** Gib das analytische Kennzeichen der Perspektivität an.

53. Zeige, daß jede Gerade durch die Kegelschnitte des Büschels $K_1 + \lambda K_2 = 0$ in den Punktepaaren einer Involution geschnitten wird.

Sätze von Pascal, Brianchon und Carnot

54. In den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad K \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,\\
&(2) \qquad K + \lambda pq = 0,\\
&(3) \qquad K + \mu pr = 0
\end{aligned}$$

seien p, q, r lineare Ausdrücke in x und y. **a)** Beweise, daß die durch (1), (2) und (3) dargestellten Kegelschnitte die Sehne $p = 0$ gemeinsam haben. **b)** Wie liegt die Gerade $q = 0$ zu den Kegelschnitten (1) und (2), ebenso die Gerade $r = 0$ zu den Kegelschnitten (1) und (3)? **c)** Zeige, daß sich durch Subtraktion von (2) und (3) ein Kegelschnitt ergibt, der in die beiden Geraden $p = 0$ und $\lambda q - \mu r = 0$ zerfällt. **d)** Beweise so: Wenn drei Kegelschnitte eine gemeinsame Sehne haben, so schneiden sich die drei übrigen Sehnen, die je zwei der Kegelschnitte gemein haben, in einem Punkte (Plücker).

55. Folgere aus Aufg. 54d) den Pascalschen Satz (§ 22, Aufg. 23), indem du je ein passendes Seitenpaar des Sechsecks als einen zerfallenen Kegelschnitt ansiehst.

56. Beweise ebenso (oder durch polare Beziehungen mittels des Pascalschen Satzes) den Brianchonschen Satz.

57. Ein Kegelschnitt möge die Seiten eines Dreiecks ABC schneiden, und zwar die Seite BC in α_1 und α_2, die Seite AC in β_1 und β_2, die Seite AB in γ_1 und γ_2. Beweise, daß

$$\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1} \cdot \frac{A\gamma_2}{B\gamma_2} \cdot \frac{B\alpha_1}{C\alpha_1} \cdot \frac{B\alpha_2}{C\alpha_2} \cdot \frac{C\beta_1}{A\beta_1} \cdot \frac{C\beta_2}{A\beta_2} = 1$$

ist (Carnotscher Satz).

58. Zeige, daß der Satz von Menelaos (§ 19, Aufg. 1) ein Sonderfall des Carnotschen Satzes ist.

59. Beweise die Umkehrung des Carnotschen Satzes.

60. Mittels der Sätze von Carnot und Menelaos soll der Pascalsche Satz bewiesen werden.

Andeutung: Unter den Seiten des Sechsecks wähle man drei aus, die nicht aufeinanderfolgen, aber auch nicht einander gegenüberliegen (also z. B. die Seiten 1 2, 3 4, 5 6, wenn das Sechseck 1 2 3 4 5 6 heißt); die drei anderen Sechseckseiten (also in unserem Beispiel die Seiten 1 6, 2 3, 4 5) werden als Transversalen betrachtet, die das von den drei ersten Sechseckseiten gebildete Dreieck schneiden.

Überlegungen

61. Entwickle die Lehre von den konjugierten Durchmessern aus der Lehre von Pol und Polare.

62. Einer Ellipse ist ein Parallelogramm eingeschrieben. Untersuche die Bedeutung der Diagonalen des Parallelogrammes für die Ellipse.

63. Was läßt sich über das Dreieck aussagen, das von zwei konjugierten Halbmessern a) einer Ellipse, b) einer Hyperbel bestimmt wird?

64. Leite hieraus Sätze über die Flächeninhalte a) eingeschriebener, b) umgeschriebener Parallelogramme her, bei denen a) die Diagonalen, b) die Mittellinien (Verbindungen der Seitenmitten) konjugierte Durchmesser sind.

65. Untersuche das Strahlenbüschel, das von zwei konjugierten Durchmessern einer Hyperbel und ihren Asymptoten gebildet wird.

66. Erörtere den Zusammenhang des Hyperbelflächeninhalts mit der logarithmischen Funktion.

67. Gib eine vergleichende Darstellung der verschiedenen Arten von Kegelschnittdefinitionen.

68. Erörtere analytisch die Grundlagen verschiedener Arten von Kegelschnittzirkeln.

69. Stelle die Beziehung zwischen der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, den Keplerschen Gesetzen und der Newtonschen Gravitationslehre her.

LEITFADEN

§ 1. Ebene Trigonometrie

Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel

1. Erklärung. Man kann einen Winkel durch Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt erzeugen. Den beweglichen Schenkel nennen wir den Leitstrahl; der Winkel wird dann von der Anfangslage und der Endlage des Leitstrahls gebildet. Als positiven Drehungssinn bezeichnen wir denjenigen, durch den die positive (also im allgemeinen nach rechts gerichtete) x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf kürzestem Wege in die Lage der positiven (also im allgemeinen nach oben gerichteten) y-Achse gebracht wird. Den entgegengesetzten Drehungssinn, den wir z. B. bei den Zeigern der Uhr beobachten, bezeichnen wir als negativ. Winkel, die durch Drehung des Leitstrahls in positivem Sinne entstanden sind, werden positiv, solche, die durch Drehung in negativem Sinne entstanden sind, negativ genannt. Da man den Leitstrahl auch über die nach einmaliger voller Umdrehung wieder erreichte Anfangslage hinaus drehen kann, spricht man auch von Winkeln über 360^0 und unter -360^0. Alle Winkel $a + k \cdot 360^0$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, sind bezüglich ihrer Schenkel deckungsgleich.

Unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht man die Länge des Kreisbogens, den bei der Entstehung des Winkels derjenige Punkt des Leitstrahls beschreibt, der vom Scheitelpunkt den Abstand 1 hat. Im Einheitskreis mißt also der Kreisbogen den zugehörigen Zentriwinkel in Bogenmaß.

Da hiernach dem Vollwinkel von 360^0 der Wert 2π im Bogenmaß entspricht, so ist die Größe eines in Graden zu a^0 gemessenen Winkels in Bogenmaß $\frac{a \cdot \pi}{180}$. Alle Winkel vom Bogenmaß $a + 2k\pi$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, sind bezüglich ihrer Schenkel deckungsgleich.

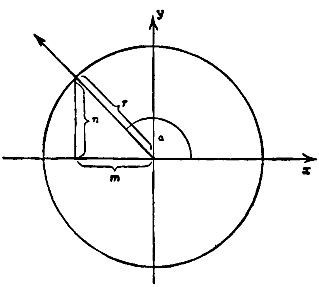

Fig. 1

2. Erklärung. Ein positiver oder negativer Winkel a sei durch Drehung des Leitstrahles entstanden (Fig. 1). Die von einem Punkt des Leitstrahls und dem Scheitelpunkt begrenzte Strecke r wird auf die Anfangslage projiziert. Die Projektion sei die mit Vorzeichen zu nehmende Strecke m, die Projizierende die gleichfalls mit Vorzeichen zu nehmende Strecke n. Man versteht dann unter dem **Sinus** des Winkels α den Quotienten aus der Projizierenden und der Strecke auf dem Leitstrahl

$$\sin\alpha = \frac{n}{r}.$$

Unter dem **Kosinus** versteht man den Quotienten aus der Projektion und der Strecke auf dem Leitstrahl

$$\cos\alpha = \frac{m}{r}.$$

Unter dem **Tangens** versteht man den Quotienten aus der Projizierenden und der Projektion

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{m}.$$

Unter dem **Kotangens** schließlich versteht man den Quotienten aus der Projektion und der Projizierenden

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m}{n}.$$

Dabei ist also die Projektion in der rechten Halbebene mit positivem, in der linken mit negativem Vorzeichen, die Projizierende in der oberen Halbebene mit positivem, in der unteren mit negativem Vorzeichen, die Strecke r immer absolut zu nehmen.

Über das Vorzeichen der vier Funktionen in den vier Quadranten gibt die folgende Tabelle Auskunft:

	sin	cos	tg	ctg
1. Quadrant	+	+	+	+
2. Quadrant	+	—	—	—
3. Quadrant	—	—	+	+
4. Quadrant	—	+	—	—

In Fig. 2 und 3 sind die vier trigonometrischen Funktionen für den Bereich der ersten vier Quadranten dargestellt. Dabei ist auf der x-Achse das Bogenmaß aufgetragen.

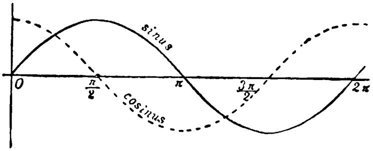

Fig. 2

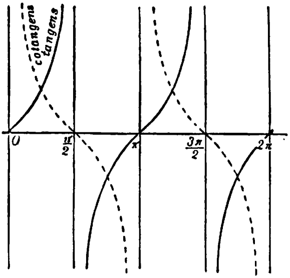

Fig. 3

3. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels. Es ist

(1) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

(2) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

(3) $$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Das folgt aus den Erklärungen in Nr. 2 unter Berücksichtigung der Vorzeichen; insbesondere ergibt sich die Formel (1) aus dem pythagoreischen Lehrsatz.

4. Satz der absoluten Beträge. Aus der zur Erklärung der trigonometrischen Funktionen herangezogenen Figur und aus den graphischen Darstellungen folgt für zwei Winkel α und β, deren Summe oder Differenz ein ganzes Vielfaches von 180^0 ist,

$$|\sin\alpha| = |\sin\beta|, \qquad |\cos\alpha| = |\cos\beta|,$$
$$|\operatorname{tg}\alpha| = |\operatorname{tg}\beta|, \qquad |\operatorname{ctg}\alpha| = |\operatorname{ctg}\beta|.$$

Mit Hilfe dieses ersten Satzes der absoluten Beträge lassen sich die Funktionswerte eines beliebig großen Winkels auf Funktionswerte eines Winkels im ersten Quadranten zurückführen. Auskunft über die Vorzeichen gibt in jedem einzelnen Falle die graphische Darstellung oder die Vorzeichentabelle in Nr. 2.

In gleicher Weise findet man (zweiter Satz der absoluten Beträge): Für zwei Winkel α und β, deren Summe oder Differenz ein ungerades Vielfaches von 90^0 ist, gilt

$$|\sin\alpha| = |\cos\beta|, \qquad |\cos\alpha| = |\sin\beta|,$$
$$|\operatorname{tg}\alpha| = |\operatorname{ctg}\beta|, \qquad |\operatorname{ctg}\alpha| = |\operatorname{tg}\beta|.$$

Auskunft über das Vorzeichen gibt wieder in jedem einzelnen Fall die graphische Darstellung oder die Vorzeichentabelle.

Mit Hilfe des ersten und des zweiten Satzes der absoluten Beträge läßt sich jeder Funktionswert auf den eines Winkels zwischen 0^0 und 45^0 zurückführen.

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

5. Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse, der Kosinus eines Winkels der Quotient aus Ankathete und Hypotenuse, der Tangens eines Winkels der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete, der Kotangens eines Winkels der Quotient aus Ankathete und Gegenkathete.

In dem bei C rechtwinkligen Dreieck (Fig. 4) ist also

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c},$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c},$$

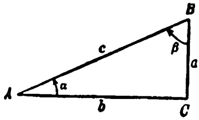

Fig. 4

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

6. Wurzelausdrücke für einige Werte trigonometrischer Funktionen. Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ist die Hypotenuse $\sqrt{2}$, wenn die Katheten die Länge 1 haben. Mithin ist

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} 45^0 = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^0 = 1.$$

Im rechtwinkligen Dreieck, in dem der eine spitze Winkel 30^0, der andere 60^0 ist, habe die Hypotenuse die Länge 1; dann hat eine Kathete die Länge $\frac{1}{2}$, die andere die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mithin ist

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} 30^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3},$$

$$\sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Sätze über das schiefwinklige Dreieck

7. Sinussatz. Im Dreieck ist

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Beweis. Fällt man im Dreieck ABC die Höhe AD, so ergeben sich aus den beiden Dreiecken, die dann entstehen, für die Höhe h_a zwei Ausdrücke. Setzt man sie gleich, so erhält man, wenn β und γ spitz sind (Fig. 5),

$$c \sin\beta = b \sin\gamma,$$

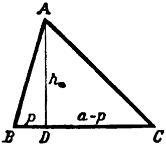

Fig. 5

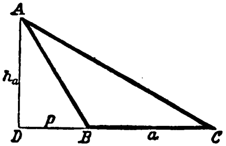

Fig. 6

wenn einer der Winkel β oder γ stumpf ist, etwa β (Fig. 6),

$$c \sin(180^0 - \beta) = b \sin\gamma.$$

Da nach der Erklärung der trigonometrischen Funktionen für stumpfe Winkel

$$\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$$

ist, hat man auch im zweiten Fall

$$c \sin\beta = b \sin\gamma.$$

Sieht man diese Gleichung als Produktengleichung einer Proportion an, dann folgt

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Das ist der Sinussatz, ausgesprochen für ein Winkelpaar.

8. Kosinussatz. Im Dreieck ist

(1) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

(2) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

(3) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Beweis. Es genügt, eine der drei Formeln zu beweisen. Für die Höhe h_a des Dreiecks ABC erhält man, wenn man den der Seite c anliegenden Abschnitt auf der Seite a mit p bezeichnet,

$$h_a^2 = c^2 - p^2,$$

und wenn β spitz ist (Fig. 5),

$$h_a^2 = b^2 - (a - p)^2,$$

wenn β stumpf ist (Fig. 6),

$$h_a^2 = b^2 - (a + p)^2.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man bei spitzem Winkel β.

$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 + 2ap - p^2,$$

bei stumpfem Winkel β hingegen

$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 - 2ap - p^2.$$

Beachtet man, daß sich aus dem einen rechtwinkligen Teildreieck bei spitzem Winkel β

$$p = c\cos\beta,$$

bei stumpfem Winkel β

$$p = c\cos(180^0 - \beta) = -c\cos\beta$$

ergibt, so erhält man in beiden Fällen, wenn man noch p^2 weghebt,

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ac\cos\beta$$

oder $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Folgerung. Es ist

(1) $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

(2) $$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

(3) $$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

9. Inhaltsformeln. Im Dreieck ist der Flächeninhalt

(1) $$f = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

(2) $$f = \frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

(3) $$f = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Beweis. Es genügt, eine der Formeln zu beweisen. Für die Höhe h_a ergibt sich aus dem Teildreieck im Falle eines spitzen Winkels β (Fig. 5)

$$h_a = c \sin\beta,$$

im Falle eines stumpfen Winkels β (Fig. 6)

$$h_a = c \sin(180^0 - \beta) = c \sin\beta.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für den Inhalt des Dreiecks

$$f = \tfrac{1}{2} a h_a$$

ein, so erhält man die zweite der obigen Formeln.

10. Satz. Ist r der Radius des Umkreises eines Dreiecks, so ist

(1) $$a = 2r \sin\alpha,$$

(2) $$b = 2r \sin\beta,$$

(3) $$c = 2r \sin\gamma.$$

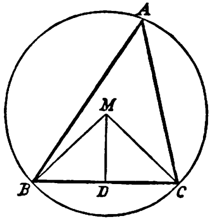

Fig. 7

Beweis. (Fig. 7.) Es genügt, eine der Formeln abzuleiten. Verbindet man den Mittelpunkt M des Umkreises mit den Punkten B und C des Dreiecks ABC und fällt von M auf BC das Lot MD, dann ist $\sphericalangle BMD$ nach dem Peripheriewinkelsatz gleich α, wenn α spitz ist (wie in Fig. 7), gleich $180^0 - \alpha$, wenn α stumpf ist. Aus dem Dreieck MBD ergibt sich also

$$\frac{a}{2} = r \sin\alpha$$

oder $$a = 2r \sin\alpha.$$

Weiterführende Formeln zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke

11. Mollweidesche Formeln. Im Dreieck ist

(1) $$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$ (4) $$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

(2) $$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$ (5) $$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

(3) $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$ (6) $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Beweis. 1. (Fig. 8.) Wir beweisen zunächst eine der drei ersten Formeln. Verlängert man die Seite AC des Dreiecks ABC über A hinaus um c bis D, dann ist $\triangle ADB$ gleichschenklig und nach dem Außenwinkelsatz

$$\sphericalangle CDB = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sphericalangle CBD = \beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{2\beta + \alpha}{2} = \frac{\beta + (180^\circ - \gamma)}{2} = 90^\circ + \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

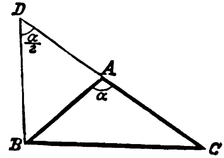

Fig. 8

Wendet man den Sinussatz auf $\triangle CBD$ an, so ergibt sich

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

2. (Fig. 9.) Wir wollen aus der zweiten Gruppe Mollweidescher Formeln Formel (4) beweisen und nehmen an, es sei $\beta > \gamma$. Trägt man AB auf AC von A bis D ab, dann ist $\triangle ABD$ gleichschenklig, mithin

$$\sphericalangle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle CDB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sphericalangle CBD = \beta - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\beta - 180^\circ + \alpha}{2} = \frac{\beta - 180^\circ + (180^\circ - \gamma)}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

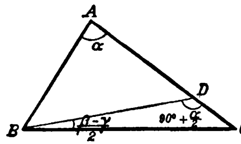

Fig. 9

Wendet man den Sinussatz auf $\triangle CBD$ an, so ergibt sich

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Folgerung. Da z. B. $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$ ist, lassen sich die Formeln (1) und (4) auch in der Form

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

aussprechen.

12. Tangenssatz. Im Dreieck ist

$$(1)\qquad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}},$$

$$(2)\qquad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

$$(3)\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Beweis. Auf Grund der Mollweideschen Formeln findet man (vgl. Nr. **11**, Folgerung)

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{b-c}{a}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\ \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Folgerung. Führt man an die Stelle der halben Winkelsumme den halben dritten Winkel ein, dann nimmt der Tangenssatz die Gestalt an

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}\ \text{usf.}$$

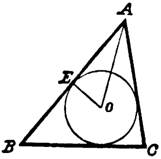

Fig. 10

13. Satz. Ist ϱ der Radius des Inkreises eines Dreiecks, dann ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a},\qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-b},\qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c}.$$

Beweis. (Fig. 10.) Ist E der Berührungspunkt des Inkreises (Mittelpunkt O) mit der Dreiecksseite AB, dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck AEO die Seite $AE=s-a$ (Buch für Kl. 7—9, § 4, Nr. 14) und $\sphericalangle EAO=\frac{\alpha}{2}$, mithin

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a}.$$

14. Halbwinkelsatz. Ist s der halbe Umfang eines Dreiecks, dann ist

(1) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

(2) $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

(3) $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Beweis. Aus der heronischen Formel für den Inhalt des Dreiecks (Buch für Kl. 7—9, § 6, Nr. 10)

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

und der anderen Inhaltsformel (Buch für Kl. 7—9, § 6, Nr. 6)

$$f = \varrho \cdot s$$

folgt für den Radius ϱ des Inkreises

$$\varrho = \frac{f}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Setzt man diesen Wert von ϱ in die in Nr. 13 entwickelte Formel für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ein, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Additionstheoreme

15. Satz. Es ist

(1) $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
(2) $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
(3) $$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
(4) $$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

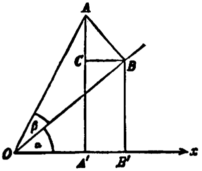

Fig. 11

Beweis. a) Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der Formeln (1) und (2) unter der Annahme, daß α und β spitze Winkel sind. Der Winkel β wird an den Winkel α mit dem Scheitelpunkt O angetragen. Auf dem freien Schenkel wird die Einheitsstrecke $OA = 1$ abgetragen. Von A wird auf den gemeinsamen Schenkel beider Winkel das Lot AB gefällt. Von A und B werden auf den freien Schenkel von α die Lote AA' und BB' gefällt, schließlich von B auf AA' das Lot BC. Fig. 11 zeigt den Fall, daß $\alpha+\beta$ spitz ist; für den Fall, daß $\alpha+\beta$ stumpf ist, gelten die gleichen Überlegungen unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Strecken. Es ist $\sphericalangle BAC = \alpha$. Aus der Figur liest man ab

$$\sin(\alpha+\beta) = AA' = CA' + AC = BB' + AC,$$

und da

$$BB' = \sin\alpha \cdot OB = \sin\alpha \cdot \cos\beta,$$
$$AC = \cos\alpha \cdot AB = \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

ist, so erhält man $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
Ebenso folgt (unter Berücksichtigung des Streckenvorzeichens)

$$\cos(\alpha+\beta) = OA' = OB' - A'B' = OB' - BC,$$

und da

$$OB' = \cos\alpha \cdot OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$
$$BC = \sin\alpha \cdot AB = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

ist, so erhält man $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

b) Wir beweisen jetzt die Formeln (3) und (4) unter der Annahme, daß $\alpha > \beta$ und beide Winkel spitz sind. Dann ist aus Fig. 12, in der wieder $OA = 1$, $AB \perp OB$, $BB' \perp OB'$, $AA' \perp OA'$, $AC \perp BB'$, $\sphericalangle CBA = \alpha$ ist, abzulesen

$$\sin(\alpha-\beta) = AA' = BB' - BC,$$
$$BB' = \sin\alpha \cdot OB = \sin\alpha \cdot \cos\beta,$$
$$BC = \cos\alpha \cdot BA = \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

folglich ist

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

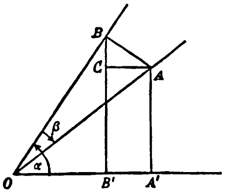

Fig. 12

Ebenso ergibt sich

$$\cos(\alpha-\beta) = OA' = OB' + CA,$$
$$OB' = \cos\alpha \cdot OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$
$$CA = \sin\alpha \cdot BA = \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

folglich ist

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

c) Um zunächst die Additionstheoreme (1) und (2) für beliebige Winkel zu beweisen, genügt der Nachweis, daß, wenn sie für die Winkel α und β gelten, sie auch für die Winkel $\alpha' = \alpha + 90^0$ und β gelten. Es ist in der Tat

$$\begin{aligned}\sin(\alpha'+\beta) &= \sin(90^0+\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ &= \cos(\alpha'-90^0) \cdot \cos\beta - \sin(\alpha'-90^0) \cdot \sin\beta \\ &= \sin\alpha' \cdot \cos\beta + \cos\alpha' \cdot \sin\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha'+\beta) &= \cos(90^0+\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\beta) = -\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ &= -\sin(\alpha'-90^0) \cdot \cos\beta - \cos(\alpha'-90^0) \cdot \sin\beta \\ &= \cos\alpha' \cdot \cos\beta - \sin\alpha' \cdot \sin\beta.\end{aligned}$$

In gleicher Weise kann man die Allgemeingültigkeit der Formeln (3) und (4) nachweisen.

16. Satz. Es ist

(1) $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

(2) $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Beweis. Nach Nr. 15 ist

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Dividiert man hierin Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ und berücksichtigt $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\operatorname{tg}\beta$, dann erhält man die erste Formel. In gleicher Weise liefern die Ausdrücke für $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ die zweite Formel.

17. Setzt man in den Formeln (1) und (2) von Nr. 15 und (1) von Nr. 16 $\alpha=\beta$, dann folgt

(1) $$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

(2) $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

(3) $$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ersetzt man in der Formel (2) $\sin^2\alpha$ durch $1-\cos^2\alpha$, so folgt

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

und daraus, wenn man noch 2α durch α, also α durch $\frac{\alpha}{2}$ ersetzt,

(4) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Ersetzt man in der Formel (2) $\cos^2\alpha$ durch $1-\sin^2\alpha$, so erhält man in gleicher Weise

(5) $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

18. Aus Formel (1) und (3) in Nr. 15 folgt

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\cdot\sin x\cdot\cos y.$$

Setzt man $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ und folglich $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, so geht die Gleichung über in

(1) $$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

In gleicher Weise leitet man her

(2) $$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

(3) $$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

(4) $$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

§ 2. Systematische Stereometrie

Punkte, Geraden und Ebenen im Raum

1. **Erklärung.** Im Raum betrachten wir drei Arten geometrischer Grundgebilde: Punkte, Geraden und Ebenen. Durch zwei Punkte des Raumes ist eine und nur eine Gerade bestimmt. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist eine und nur eine Ebene bestimmt.

Eine Gerade, die zwei Punkte mit einer Ebene gemeinsam hat, liegt ganz in der Ebene. Eine Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen; die Gerade heißt Grenzgerade jeder der beiden Halbebenen.

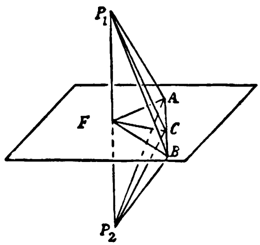

Fig. 13

Zwei verschiedene Geraden liegen entweder in einer Ebene, oder das ist nicht der Fall; im letzteren Fall heißen sie windschief. Wenn sie in einer Ebene liegen, haben sie entweder keinen Punkt gemeinsam; dann heißen sie parallel; oder aber die Geraden schneiden sich in einem Punkte. Dann teilen sie die Ebene in vier Ebenenstücke.

Zwei verschiedene Ebenen haben entweder einen Punkt gemeinsam, dann schneiden sie sich in einer Geraden (Durchschnittsgeraden), oder sie haben keinen Punkt gemeinsam, dann heißen sie parallel.

Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben entweder einen Punkt gemeinsam (den Fußpunkt); sie schneiden sich also in einem Punkte; oder aber sie haben keinen Punkt gemeinsam, dann heißen sie parallel.

Senkrechte Geraden und Ebenen

2. **Satz.** Wenn eine Gerade senkrecht auf zwei durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene steht, so steht sie senkrecht auf jeder durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden der Ebene.

Beweis. Auf der Geraden werde beiderseits der Ebene vom Fußpunkte F aus das beliebige Stück $FP_1 = FP_2$ abgetragen. (Fig. 13.) Es sei $P_1P_2 \perp FA$ und $P_1P_2 \perp FB$. FC sei ein beliebiger durch F gehender, in der Ebene AFB liegender Strahl, wobei C als Schnittpunkt des Strahles mit AB gewählt sei. Dann ist

$$\triangle P_1FA \cong \triangle P_2FA,$$
$$\triangle P_1FB \cong \triangle P_2FB.$$

Folglich $\triangle P_1AB \cong \triangle P_2AB.$
Folglich $\triangle P_1AC \cong \triangle P_2AC.$
Folglich $\triangle P_1FC \cong \triangle P_2FC,$
folglich $\sphericalangle P_1FC = \sphericalangle P_2FC,$

also sind beide rechte Winkel.

Erklärung. Wenn eine Gerade senkrecht steht auf zwei und damit nach dem eben bewiesenen Satz auf allen durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene, dann heißt die Gerade senkrecht auf der Ebene und die Ebene senkrecht auf der Geraden.

3. Satz. Von einem Punkte kann man auf eine Ebene nur ein Lot fällen.

Beweis. Gäbe es von P die beiden Lote PF_1 und PF_2, dann hätte $\triangle PF_1F_2$ zwei rechte Winkel.

Satz. In einem Punkte einer Ebene kann man auf ihr nur eine Senkrechte errichten.

Beweis. Gäbe es im Punkte F der Ebene die beiden Senkrechten FP_1 und FP_2, dann würden diese beiden Geraden in F auf der durch die gegebene Ebene und die Ebene FP_1P_2 bestimmten Durchschnittsgeraden senkrecht stehen. Das ist nicht möglich.

Satz. In einem Punkte einer Geraden kann man auf ihr nur eine senkrechte Ebene errichten.

Beweis. Gäbe es zwei Ebenen, so würde irgendeine durch die Gerade gelegte Ebene diese beiden Ebenen in zwei Durchschnittsgeraden schneiden, die beide im gleichen Punkt senkrecht auf der Geraden ständen. Das ist nicht möglich.

Folgerung. Die in einem Punkte einer Geraden errichteten Senkrechten liegen alle in einer Ebene.

Satz. Von einem Punkte kann man auf eine Gerade nur eine senkrechte Ebene fällen.

Beweis. Gäbe es durch den Punkt P zu einer Geraden zwei senkrechte Ebenen, so würde eine durch P und die Gerade gelegte Ebene diese beiden Ebenen in zwei Geraden, etwa PF_1 und PF_2, schneiden. PF_1F_2 wäre dann ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

4. Satz. Die Senkrechten auf einer Ebene sind parallel.

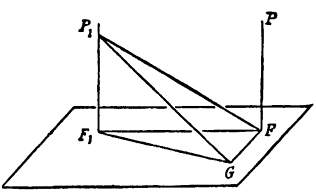

Fig. 14

Beweis. (Fig. 14.) Die beiden Senkrechten PF und P_1F_1 auf einer Ebene können sich nicht schneiden, denn sonst könnte man von ihrem Schnittpunkt aus auf die Ebene zwei Lote fällen. Zum Nachweis, daß sie parallel sind, genügt also, wenn wir zeigen, daß sie in einer Ebene liegen. In dem Fußpunkte F der einen Senkrechten wird in der Ebene auf FF_1 die Senkrechte errichtet. Auf ihr und auf der Senkrechten in F_1 werden die gleichen Strecken FG und F_1P_1 abgetragen. Es ist $\triangle P_1F_1F \cong \triangle GFF_1$, folglich $P_1F = F_1G$. Mithin ist

$$\triangle P_1FG \cong \triangle GF_1P_1$$

nach dem 3. Kongruenzsatz. Da aber $\sphericalangle P_1F_1G$ ein rechter ist, gilt gleiches auch von $\sphericalangle P_1FG$. FG steht also senkrecht auf F_1F, P_1F und PF; mithin liegen die drei Geraden und damit auch die beiden Senkrechten F_1P_1 und FP in einer Ebene.

Satz. Wenn von zwei parallelen Geraden eine senkrecht auf einer Ebene ist, dann ist es auch die andere.

Beweis. Wäre die zweite Gerade nicht senkrecht auf der Ebene, dann ließe sich in ihrem Fußpunkte auf der Ebene die Senkrechte errichten. Diese wäre aber nach dem soeben bewiesenen Satz gleichfalls parallel zur ersten Geraden. Wir hätten also durch einen Punkt zu einer Geraden zwei Parallelen. Das ist nicht möglich.

5. Satz. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie untereinander parallel.

Beweis. Man legt eine Ebene senkrecht zur dritten Geraden. Dann stehen nach Nr. 4 auch die beiden andern senkrecht auf der Ebene, sie sind also parallel.

6. Erklärung. Man projiziert einen Punkt auf eine Ebene, indem man von dem Punkt auf die Ebene das Lot fällt. Der Fußpunkt des Lotes heißt die Projektion des Punktes, das Lot heißt die Projizierende. — Unter der Projektion einer Linie auf eine Ebene versteht man die Figur, die von den Projektionen der einzelnen Punkte der Linie auf die Ebene gebildet wird.

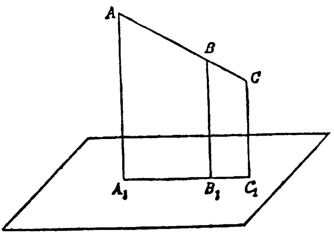

Fig. 15

Satz. Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene ist wieder eine Gerade.

Beweis. (Fig. 15.) Irgend drei Punkte der Geraden seien A, B und C; ihre Projektionen auf eine Ebene seien A_1, B_1 und C_1. Dann ist nach Nr. 4 $AA_1 \| BB_1$ und $BB_1 \| CC_1$. Die beiden Ebenen ABB_1A_1 und CBB_1C_1 haben dann die Geraden BB_1 und AC gemeinsam, fallen also zusammen. Mithin ist auch $A_1B_1C_1$ eine Gerade.

Bemerkung. Wenn eine Gerade senkrecht auf einer Ebene steht, wird ihre Projektion auf die Ebene ein Punkt.

Erklärung. Die durch eine Gerade und ihre Projektion auf eine Ebene bestimmte Ebene heißt projizierende Ebene.

Parallele Ebenen

7. Satz. Zwei Ebenen, die auf einer Geraden senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. Es werde angenommen, die beiden Ebenen wären nicht parallel, sondern schnitten sich. Dann könnte man durch einen Punkt der Schnittgeraden und die auf beiden Ebenen senkrechte Gerade eine Ebene legen. In ihr entstände dann ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln. Das ist nicht möglich.

Satz. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittsgeraden parallel.

Beweis. Da die Durchschnittsgeraden in einer Ebene liegen, sind sie nicht windschief. Hätten sie einen Punkt gemeinsam, so müßten ihn auch die beiden Ebenen gemeinsam haben; da die Ebenen parallel sind, ist das nicht möglich.

Satz. Ist eine Gerade irgendeiner Geraden in einer Ebene parallel, dann ist sie der Ebene parallel.

Beweis. Durch die Gerade g_1 und ihre in der Ebene **A** liegende Parallele g_2 läßt sich eine Ebene **B** legen. Hätten die Gerade g_1 und die Ebene **A** einen Schnittpunkt gemein, so müßte er, da es ja ein Punkt von g_1 ist, in der Ebene **B** liegen, d. h. es müßte ein Schnitt von g_1 und g_2 vorhanden sein. Das trifft nicht zu, weil g_1 und g_2 parallel sind.

Winkel im Raum

8. Satz. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweis parallel und gleichgerichtet, so sind die Winkel gleich.

Beweis. Auf den parallelen Schenkeln der beiden Winkel β_1 und β_2 (Fig. 16) werden die Strecken $B_1A_1 = B_2A_2$ und $B_1C_1 = B_2C_2$ abgetragen. Dann ist $A_1B_1B_2A_2$ ein Parallelogramm, mithin $B_1B_2 \# A_1A_2$; ebenso ist $C_1B_1B_2C_2$ ein Parallelogramm, mithin $B_1B_2 \# C_1C_2$. Also ist $A_1A_2 \# C_1C_2$, d. h. auch $A_1C_1C_2A_2$ ist ein Parallelogramm. Folglich ist $A_1C_1 = A_2C_2$, mithin $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ und $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$.

Satz. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweis parallel, so liegen sie in parallelen Ebenen.

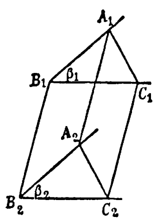

Fig. 16

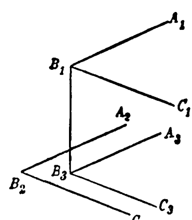

Fig. 17

Beweis. (Fig. 17.) Man fällt vom Scheitelpunkt B_1 des Winkels $A_1B_1C_1$ auf die Ebene des Winkels $A_2B_2C_2$ das Lot B_1B_3 und zieht $B_3A_3 \parallel B_2A_2$ und $B_3C_3 \parallel B_2C_2$. B_3C_3 steht senkrecht auf B_1B_3. Da $B_3C_3 \parallel B_2C_2$ und $B_2C_2 \parallel B_1C_1$, ist auch $B_3C_3 \parallel B_1C_1$, d. h. auch $B_1C_1 \perp B_1B_3$. Ebenso ist $B_1A_1 \perp B_1B_3$. Folglich ist B_1B_3 senkrecht auch zur Ebene $A_1B_1C_1$, d. h. aber nach Nr. 7, die Ebenen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind parallel.

Winkel zwischen Ebene und Gerade

9. Erklärung. Unter dem Winkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den Winkel zwischen der Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene.

Bemerkung. Wenn die Projektion der Geraden ein Punkt ist, steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, der Winkel zwischen Gerade und Ebene ist dann ein rechter.

Satz. Eine Gerade schneidet parallele Ebenen unter gleichen Neigungswinkeln.

Beweis. Die projizierende Ebene schneidet die parallelen Ebenen in parallelen Geraden (Nr. 7). Die Winkel der Geraden mit den Ebenen sind dann Gegenwinkel an parallelen Geraden.

Ebenso gilt: Eine Ebene schneidet parallele Geraden unter gleichen Winkeln.

Winkel zwischen Ebene und Ebene

10. Erklärung. Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so entstehen an der Durchschnittsgeraden vier Ebenenwinkel. Ein Ebenenwinkel wird gebildet von zwei Halbebenen mit gemeinsamer Grenzgeraden. Um den Ebenenwinkel zu messen, errichtet man in einem Punkte der Grenzgeraden in den beiden Halbebenen Senkrechten. Der Winkel zwischen den beiden Senkrechten, der (Nr. 8) von der Wahl des Punktes auf der Grenzgeraden unabhängig ist, gibt die Größe des Ebenenwinkels an.

Bilden die beiden Ebenen einen rechten Winkel, dann sagt man, sie stehen senkrecht aufeinander.

Folgerung 1. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

Folgerung 2. Steht eine Ebene auf zwei anderen senkrecht, so steht sie auch auf der Schnittgeraden der beiden senkrecht.

Satz. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind gleichliegende Ebenenwinkel gleich groß.

Beweis. Legt man senkrecht zu den beiden Durchschnittsgeraden eine Ebene, so wird der Satz zurückgeführt auf den Satz von den Gegenwinkeln an parallelen Geraden.

Windschiefe Geraden

11. Erklärung. Um den Winkel zweier windschiefer Geraden zu bestimmen, zieht man durch irgendeinen Punkt des Raumes Parallelen zu den beiden Geraden. Der Winkel zwischen diesen beiden Parallelen mißt dann den Winkel zwischen den windschiefen Geraden. Die Größe des Winkels ist unabhängig von der Wahl des Punktes im Raum (Nr. 8); insbesondere kann man den Punkt auf einer der beiden windschiefen Geraden annehmen.

Folgerung 1. Eine Senkrechte auf einer Ebene steht senkrecht auf allen Geraden in der Ebene.

Folgerung 2. Wenn eine Gerade senkrecht auf zwei nichtparallelen Geraden einer Ebene steht, dann steht sie auf der Ebene senkrecht.

Ecken

12. Satz. Drei Ebenen schneiden sich entweder in einem Punkte, oder aber die drei Durchschnittsgeraden sind parallel.

Beweis. Die Durchschnittsgerade der Ebenen A und B sei c, der Ebenen B und Γ sei a, der Ebenen A und Γ sei b. a und b liegen in einer Ebene, nämlich in Γ; entweder schneiden sie sich also, oder sie sind parallel[1]).

Angenommen, sie schneiden sich in S. Dann liegt der Punkt S, da er auf a und auf b liegt, gleichzeitig in allen drei Ebenen, er gehört also zu den Punkten, die in den Ebenen A und B gleichzeitig liegen. Da diese alle der Durchschnittsgeraden c angehören, muß c durch S gehen. Alle drei Geraden gehen also durch einen Punkt. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, daß $a \parallel b$ ist. Dann ist auch $a \parallel c$. Windschief können nämlich a und c nicht sein, da sie in einer Ebene, nämlich in B, liegen. Wenn sie aber einen Schnittpunkt hätten, so müßte nach dem, was wir soeben bewiesen haben, auch b durch diesen Schnittpunkt gehen. Das widerspricht aber unserer Annahme $a \parallel b$. Also bleibt nur die Möglichkeit $a \parallel c$ übrig.

13. Erklärung. Von einem Punkte des Raumes gehen n Strahlen aus, von denen keine drei in einer Ebene liegen. Durch je zwei aufeinanderfolgende Strahlen wird ein Ebenenstück bestimmt. Die Zahl dieser Ebenenstücke ist dann auch n. Das aus den Strahlen und Ebenenstücken zusammengesetzte räumliche Gebilde heißt eine n-seitige Ecke. Der den Strahlen gemeinsame Punkt heißt Scheitel der Ecke, die Strahlen heißen Kanten, die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kanten heißen Seiten, die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ebenenstücken heißen Winkel der Ecke.

Wir beschränken uns im folgenden auf konvexe Ecken, d. h. auf solche, bei denen alle Seiten und Winkel kleiner als zwei Rechte sind, und bei denen die Ecke ganz auf irgendeiner Seite jedes Ebenenstückes liegt.

Folgerung. Irgend drei verschiedene nicht parallele Ebenen, deren Durchschnittsgeraden nicht parallel sind, bilden acht dreiseitige Ecken.

14. Erklärung. Die Verlängerungen der Kanten einer Ecke über den Scheitelpunkt hinaus bilden die Scheitelecke der Ecke.

Folgerung. Eine Ecke ist Scheitelecke ihrer Scheitelecke.

Erklärung. Zwei Ecken, die in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, heißen kongruent oder symmetrisch, je nachdem die einander gleichen Stücke in gleicher oder in entgegengesetzter Reihe aufeinanderfolgen.

Folgerung. Ecke und Scheitelecke sind symmetrisch.

15. Erklärung. Von einem Punkte im Innenraum einer n-seitigen Ecke werden die Lote auf die Seiten gefällt (Fig. 18). Die n Lote sind dann Kanten einer Ecke, die Polarecke der gegebenen Ecke heißt.

---

1) Auch in dem Falle, daß die drei Durchschnittsgeraden parallel sind, kann man sagen, sie schneiden sich in einem Punkte, nämlich in einem unendlich fernen Punkte.

Die Größe der Seiten und Winkel der Polarecke ist unabhängig von der Wahl ihres Scheitelpunktes (Nr. 8). Insbesondere kann man als Scheitelpunkt der Polarecke auch den Scheitelpunkt der Ecke selbst wählen.

Satz. Eine Ecke ist Polarecke ihrer Polarecke.

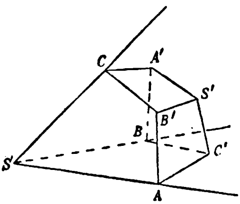

Fig. 18

Beweis. Die gegebene Ecke habe den Scheitelpunkt S; in ihrem Innenraum liege der Punkt S'. Von S' sind auf die Seiten der in Fig. 18 dreiseitig vorausgesetzten Ecke die Lote $S'A'$, $S'B'$ und $S'C'$ gefällt. Wir haben zu beweisen, daß die Kanten SA, SB und SC der ursprünglichen Ecke senkrecht zu den Seitenflächen $S'B'C'$, $S'A'C'$ und $S'A'B'$ stehen. Da $S'B' \perp SAC$ ist, ist $S'B' \perp SA$, weil eine Senkrechte zu einer Ebene senkrecht auf allen Geraden in der Ebene steht; da ferner $S'C' \perp SAB$ ist, ist $S'C' \perp SA$, mithin ist $SA \perp S'B'C'$. Entsprechendes gilt von den Kanten SB und SC.

16. Satz. Ist eine Ecke Polarecke einer anderen, so ergänzen sich die Seiten der einen und die entsprechenden Winkel der anderen jeweils zu zwei rechten Winkeln.

Beweis. (Fig. 18.) Die Seitenfläche $S'A'B'$ möge die entsprechende Kante der Ecke mit dem Scheitelpunkt S in C schneiden, die Seitenfläche $S'B'C'$ ebenso die entsprechende Kante in A. Dann mißt im Viereck $SAB'C$ der Winkel bei S die Seite b der S-Ecke, der Winkel bei B' den Winkel β' der S'-Ecke. Da die Winkel SCB' und SAB' rechte sind, ist $b + \beta' = 2\,R$. Gleiches gilt von den anderen entsprechenden Seiten und Winkeln.

17. Planimetrischer Hilfssatz. Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

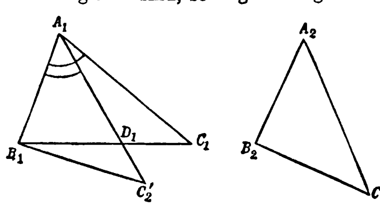

Fig. 19

Beweis. (Fig. 19.) Die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mögen in den Seiten $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ übereinstimmen; außerdem sei $a_1 > a_2$. Dann ist $\beta_1 + \gamma_1 < \beta_2 + \gamma_2$; es ist also mindestens einer der Winkel β_2 und γ_2 von $\triangle A_2B_2C_2$ größer als der entsprechende von $\triangle A_1B_1C_1$. Es sei $\beta_2 > \beta_1$. Dann lege ich $\triangle A_2B_2C_2$ so auf $\triangle A_1B_1C_1$, daß A_2 auf A_1, B_2 auf B_1 fällt und C_2 auf C_2', wobei es auf die gleiche Seite von A_1B_1 fällt wie C_1. C_2' liegt dann wegen $\beta_2 > \beta_1$ außerhalb $\triangle A_1B_1C_1$; A_1C_2' schneide B_1C_1 in D_1.

In $\triangle A_1D_1C_1$ ist $\quad A_1D_1 + D_1C_1 > A_1C_1,$
in $\triangle B_1D_1C_2'$ ist $\quad B_1D_1 + D_1C_2' > B_1C_2'.$

Addiert man beide Ungleichungen, so ist erst recht

$$A_1D_1 + D_1C_2' + B_1D_1 + D_1C_1 > A_1C_1 + B_1C_2',$$

oder
$$A_1C_2' + B_1C_1 > A_1C_1 + B_1C_2',$$
und da
$$A_1C_2' = A_1C_1$$
und
$$B_1C_2' = B_2C_2$$
ist, so folgt
$$B_1C_1 > B_2C_2.$$

Die Umkehrung des Satzes beweist man indirekt.

18. Satz. In der dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Beweis. Höchstens die größte Seite einer dreiseitigen Ecke könnte größer als die Summe der beiden anderen sein. Es sei (Fig. 20) b die größte Seite der Ecke mit dem Scheitel S. Man klappt die Seite c um den mit b gemeinsamen Schenkel in die Ebene von b hinein, dann wird ein Punkt B auf dem freien Schenkel von c in die Lage B' kommen. Durch B und B' legt man eine Ebene, die die anderen Kanten der Ecke in A und C schneidet. Dann ist $AB = AB'$ und $SB = SB'$. Im Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte, mithin ist

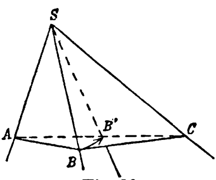

Fig. 20

$$BC > B'C.$$

Wendet man den Hilfssatz in Nr. 17 auf die zwei in Seiten übereinstimmenden Dreiecke BSC und $B'SC$ an, so ist

$$\sphericalangle BSC > \sphericalangle B'SC,$$

folglich
$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC.$$

19. Satz. Die Summe der Seiten einer Ecke ist kleiner als vier rechte Winkel.

Beweis. Die Kanten der n-seitigen Ecke mit dem Scheitelpunkt S werden durch eine Ebene in den Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ geschnitten. Dann entstehen bei $A_1, A_2, \ldots A_n$ dreiseitige Ecken. Nach dem Satz in Nr. 18 ist

$$\sphericalangle SA_1A_2 + \sphericalangle SA_1A_n > \sphericalangle A_nA_1A_2,$$
$$\sphericalangle SA_2A_3 + \sphericalangle SA_2A_1 > \sphericalangle A_1A_2A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sphericalangle SA_nA_1 + \sphericalangle SA_nA_{n-1} > \sphericalangle A_{n-1}A_nA_1.$$

Da die Summe der Winkel eines n-Ecks $(2n-4)$ rechte ist, erhält man durch Addition der n Ungleichungen

$$(1) \quad \sphericalangle SA_1A_2 + \sphericalangle SA_1A_n + \sphericalangle SA_2A_3 + \sphericalangle SA_2A_1 + \ldots + \sphericalangle SA_nA_1 + \sphericalangle SA_nA_{n-1} > (2n-4)R.$$

Nun ist
$$\sphericalangle SA_1A_2 + \sphericalangle SA_2A_1 = 2R - \sphericalangle A_1SA_2,$$
$$\sphericalangle SA_2A_3 + \sphericalangle SA_3A_2 = 2R - \sphericalangle A_2SA_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sphericalangle SA_nA_1 + \sphericalangle SA_1A_n = 2R - \sphericalangle A_nSA_1.$$

Addiert man diese n Gleichungen, so erhält man für die linke Seite der Ungleichung (1) einen andern Ausdruck; sie geht über in

$$2nR - (\sphericalangle A_1SA_2 + \sphericalangle A_2SA_3 + \cdots + \sphericalangle A_nSA_1) > (2n-4)R.$$

Daraus folgt $\sphericalangle A_1SA_2 + \sphericalangle A_2SA_3 + \cdots + \sphericalangle A_nSA_1 < 4R.$

20. Satz. Die Summe der Winkel einer Ecke ist größer als $(2n-4)$ rechte.

Beweis. Man konstruiere die Polarecke der vorgelegten Ecke. Ihre Seiten seien $a_1, a_2, \ldots a_n$. Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satz (Nr. 19)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 4R.$$

Bezeichnet man die Winkel der gegebenen Ecke mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, dann ist

$$a_1 = 2R - \alpha_1, \quad a_2 = 2R - \alpha_2, \quad \ldots a_n = 2R - \alpha_n.$$

Also wird $\qquad 2nR - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) < 4R.$

Daraus folgt $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > (2n-4)R.$

Der Eulersche Polyedersatz

21. Der Eulersche Satz für die Ebene. Eine Anzahl konvexer Vielecke sei lückenlos zu einem Vielecksnetz zusammengesetzt. Die Anzahl der Ecken des Netzes sei E, die Anzahl der Seiten K, die der Vielecke F, dann hat die Zahl

$$J = E - K + F$$

den Wert 1.

Beweis. Wir wollen zunächst alle Vielecke in Dreiecke zerteilen. Wir ziehen zu diesem Zweck in jedem n-Eck von irgendeiner Ecke aus $n-3$ Diagonalen. Dabei ändert sich der Ausdruck J nicht, denn die Vermehrung der Vielecke um $n-3$ wird durch die gleichzeitige Vermehrung der Seiten um $n-3$ jeweils ausgeglichen.

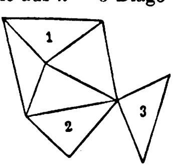

Fig. 21

Wir nehmen nun, vom Rande aus fortschreitend, ein Dreieck nach dem andern vom Vielecksnetz weg. Dabei sind drei Möglichkeiten zu berücksichtigen (Fig. 21):

1. Ein Dreieck hängt mit zwei Seiten am Netz (Dreieck 1 in der Figur). Läßt man es weg, so wird K um 1 und F um 1 vermindert; J ändert sich nicht.

2. Ein Dreieck hängt mit einer Seite am Netz (z. B. Dreieck 2 in der Figur). Läßt man es weg, so wird E um 1, K um 2, F um 1 vermindert; J ändert sich wieder nicht.

3. Ein Dreieck hängt mit nur einer Ecke am Netz (z. B. Dreieck 3 in der Figur). Läßt man es weg, so wird E um 2, K um 3, F um 1 vermindert; J ändert sich auch in diesem Falle nicht.

Nimmt man so ein Dreieck nach dem andern weg, so bleibt zum Schluß ein letztes übrig. Für dieses hat die Zahl J den Wert 1; mithin hatte J auch für das ursprüngliche Vielecksnetz den Wert 1.

22. **Erklärung.** Ein Körper, der von Ebenen begrenzt wird, heißt Polyeder (Vielflach). Wenn ein Polyeder stets nur auf einer Seite einer jeden ihn begrenzenden Ebene liegt, heißt es konvex. Konvexe Polyeder besitzen nur konvexe Ecken und konvexe Seitenvielecke.

Eulerscher Polyedersatz. Ist E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten, F die Anzahl der Flächen eines konvexen Polyeders, so hat die Zahl

$$J = E - K + F$$

den Wert 2.

Beweis. Projiziert man das Polyeder auf eine Ebene, die zu keiner Kante und zu keiner Fläche des Polyeders senkrecht steht, so daß also bei der Projektion keine Ecke, Kante oder Fläche verschwindet, dann erhält man zwei im Umriß des Körpers zusammenhängende Vielecksnetze. Der Umriß ist ein konvexes Vieleck. Für die Größe von J macht es nichts aus, daß dieser Umriß zweimal, für jedes Vielecksnetz einmal, in Rechnung gestellt wird, denn dadurch treten gleichviel Ecken und Kanten neu auf. Nun hat J für jedes Netz den Wert 1, für beide Netze also und damit für das Polyeder den Wert 2.

Bemerkung 1. Dem Eulerschen Polyedersatz kann man auch, indem man noch die Anzahl R der Körper einführt, die Gestalt geben

$$E - K + F - R = 1.$$

In dieser Form gilt er nicht nur für den Wert $R = 1$, sondern für einen beliebigen konvexen Haufen lückenlos aneinanderschließender konvexer Körper.

Bemerkung 2. Der Eulersche Polyedersatz läßt sich verallgemeinern auf nichtkonvexe Körper; die Größe J hat dann unter Umständen einen anderen Wert als 1. Man kann den Satz, den wir für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten ausgesprochen haben, auf den vierdimensionalen und allgemein n-dimensionalen Raum erweitern.

23. **Erklärung.** Ein regelmäßiges Polyeder wird von lauter kongruenten regelmäßigen Vielecken begrenzt und besitzt überdies lauter kongruente regelmäßige Ecken.

Die Arten regelmäßiger Polyeder. Um die verschiedenen möglichen regelmäßigen Polyeder zu bestimmen, gehen wir von dem Satz aus, daß die Summe der Seiten einer Ecke kleiner als vier rechte Winkel ist (Nr. 19).

Das Polyeder kann begrenzt sein

a) von gleichseitigen Dreiecken. Dann sind die Seiten jeder Ecke sämtlich 60^0. Die Zahl der Seiten jeder Ecke kann dann 3, 4 und 5 sein. Wären

6 oder mehr Seiten vorhanden, dann würde die Summe der Seiten 4 rechte Winkel erreichen oder übersteigen;

b) von Quadraten. Dann kann die Zahl der Seiten jeder Ecke nur 3 sein, bei 4 oder mehr Seiten würden 4 rechte Winkel erreicht oder überstiegen;

c) von regelmäßigen Fünfecken. Auch hier kann die Zahl der Seiten jeder Ecke nur 3 sein. Bei 4 Seiten erhielte man als Seitensumme schon $108^0 \cdot 4 = 432^0$.

Regelmäßige Sechsecke, erst recht regelmäßige Vielecke von noch größerer Seitenzahl können als Flächen regelmäßiger Polyeder überhaupt nicht auftreten; denn schon beim Sechseck erhält man als Summe dreier Seiten jeder Ecke $120^0 \cdot 3 = 360^0$.

Wir sind also auf fünf Arten von regelmäßigen Körpern gestoßen, die wir jetzt einzeln durchgehen:

1. Dreiseitige Ecken, dreieckige Flächen. Ist E die Anzahl der Ecken, so ist die Anzahl K der Kanten $\frac{3}{2}E$, die Anzahl F der Flächen $\frac{3}{3}E$. Nun ist nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$E - \tfrac{3}{2}E + E = 2,$$

mithin $$E = 4, \quad K = 6, \quad F = 4.$$

Der Körper heißt ein Tetraeder (regelmäßiges Vierflach).

2. Vierseitige Ecken, dreieckige Flächen. Ist E die Anzahl der Ecken, dann ist $K = \frac{4}{2}E$, $F = \frac{4}{3}E$. Also ist

$$E - 2E + \tfrac{4}{3}E = 2,$$

mithin $$E = 6, \quad K = 12, \quad F = 8.$$

Der Körper heißt ein Oktaeder (regelmäßiges Achtflach).

3. Fünfseitige Ecken, dreieckige Flächen. Ist E die Anzahl der Ecken, dann ist $K = \frac{5}{2}E$, $F = \frac{5}{3}E$. Also ist

$$E - \tfrac{5}{2}E + \tfrac{5}{3}E = 2,$$

mithin $$E = 12, \quad K = 30, \quad F = 20.$$

Der Körper heißt ein Ikosaeder (regelmäßiges Zwanzigflach).

4. Dreiseitige Ecken, viereckige Flächen. Ist E die Anzahl der Ecken, dann ist $K = \frac{3}{2}E$, $F = \frac{3}{4}E$. Also ist

$$E - \tfrac{3}{2}E + \tfrac{3}{4}E = 2,$$

mithin $$E = 8, \quad K = 12, \quad F = 6.$$

Der Körper heißt ein Hexaeder oder Würfel.

5. Dreiseitige Ecken, fünfeckige Flächen. Ist E die Anzahl der Ecken, dann ist $K = \frac{3}{2}E$, $F = \frac{3}{5}E$. Also ist

$$E - \tfrac{3}{2}E + \tfrac{3}{5}E = 2,$$

mithin $$E = 20, \quad K = 30, \quad F = 12.$$

Der Körper heißt ein Dodekaeder (regelmäßiges Zwölfflach).

Alle fünf regelmäßigen Körper, deren Möglichkeit eben nachgewiesen ist, existieren auch und lassen sich z. B. aus dem Netz ihrer Flächen zusammenfalten.

§ 3. Darstellende Geometrie

Grundlegende Konstruktionen und Lehrsätze

Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen

1. Die senkrechte (orthogonale) Projektion auf eine Ebene kann als ein besonderer Fall der schiefen Parallelprojektion aufgefaßt werden; in diesem Sonderfall treffen die abbildenden („projizierenden") Strahlen die Bildebene unter rechtem Winkel. Die Bilder werden bei der senkrechten Projektion oft weniger anschaulich als bei der schiefen Parallelprojektion; diesem

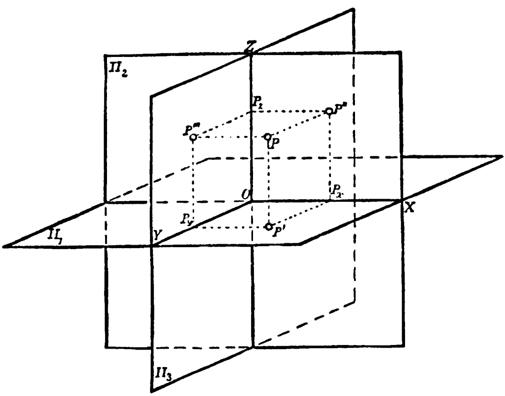

Fig. 22

Nachteil stehen aber die Vorzüge gegenüber, daß die orthogonalen Bilder meist leichter herzustellen sind als die Schrägbilder und daß die durch orthogonale Bilder dargestellten Körper aus ihren Bildern besonders leicht aufgebaut werden können (vgl. Werkstattzeichnungen, Baupläne u. ä.).

Der Eindeutigkeit und Zweckmäßigkeit wegen bildet man räumliche Dinge meist durch orthogonale Projektion auf zwei, zuweilen auch auf drei zueinander senkrechte Ebenen ab (vgl. das Schrägbild in Fig. 22). Die beiden ersten (meist allein benutzten) Ebenen Π_1 und Π_2 werden Grundrißebene und Aufrißebene (auch Horizontalebene und Vertikalebene) genannt, ihre Schnittgerade nennt man Projektionsachse; die dritte Ebene Π_3 heißt Seitenrißebene oder Kreuzrißebene. Die drei Projektionen eines Raumpunktes P auf die drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3

(kurz: die Risse eines Raumpunktes P) werden mit P', P'', P''' bezeichnet; PP' heißt der Höhenabstand oder die Kote, PP'' der Tiefenabstand, PP''' der Seitenabstand des Punktes P.

2. Ist O der Schnittpunkt der drei Rißebenen (Fig. 22), P_x der Schnittpunkt der Ebene $PP'P''$ mit der Projektionsachse OX, so kann man zunächst beweisen, daß $\sphericalangle P'P_xO = \sphericalangle P''P_xO = 1R$ ist. Da nämlich $PP' \perp \Pi_1$ und $PP'' \perp \Pi_2$, so ist $\sphericalangle PP'P_x = \sphericalangle PP''P_x = 1R$ (§ 2, Nr. 2), die Ebene $P''PP'P_x$ steht also sowohl auf Π_1 als auch auf Π_2 senkrecht (§ 2, Nr. 10, Folgerung 1), damit auch senkrecht auf ihrer Schnittgeraden, der Projektionsachse (§ 2, Nr. 10, Folgerung 2), also bildet OP_x sowohl mit $P'P_x$ wie auch mit $P''P_x$ rechte Winkel. — Ist P_y der Schnittpunkt der Ebene $PP'P'''$ mit der Achse OY und P_z der Schnittpunkt der Ebene $PP''P'''$ mit der Achse OZ, so folgt aus dem vorigen: Die Punkte P, P', P'', P''', O, P_x, P_y, P_z liegen wie die Ecken eines Quaders.

3. Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes kann man die Lage eines Raumpunktes P auch zahlenmäßig durch Koordinaten festlegen, z. B. soll $P \equiv (2, 5, 3)$ bedeuten, daß $OP_x = x = 2$, $OP_y = y = 5$, $OP_z = z = 3$ sein soll. Je nach der räumlichen Lage des Punktes P können seine

Quadrant	y	z
1.	+	+
2.	−	+
3.	−	−
4.	+	−

Risse über oder unter Π_1, vor oder hinter Π_2, rechts oder links von Π_3, in besonderen Fällen auch in den Projektionsebenen und -achsen liegen; in Übereinstimmung mit früheren Festsetzungen werden die Richtungen nach rechts, vorn und oben als positiv, die entgegengesetzten als negativ gerechnet. — Die vier Teile, in die der Raum durch die beiden Hauptrißebenen Π_1 und Π_2 zerlegt wird, heißen Raumviertel oder Quadranten; sie werden je nach dem Vorzeichen von y und z in der durch obenstehende Übersicht erläuternden Weise gezählt (s. auch Fig. 23).

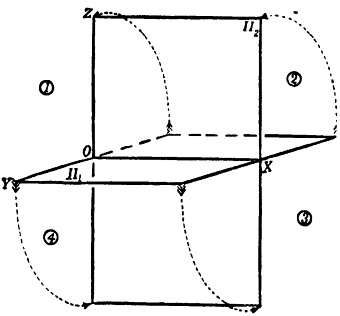

Fig. 23

4. Damit man die Bilder der einzelnen Raumpunkte nicht auf zwei verschiedenen Ebenen (also auch auf zwei verschiedenen Papierblättern) aufzuzeichnen braucht, trifft man nach Monge[1]) die Verabredung, daß die Horizontalebene um die Projektionsachse so in die Vertikalebene hineingeklappt werden soll, daß der vordere Teil der Horizontalebene mit dem unteren Teil der Vertikalebene zur Deckung gelangt (s. Fig. 23). Wenn

1) Gaspard Monge, Hauptwerk: Géométrie descriptive, Paris 1798.

in Zukunft von dem „Grundriß“ eines Punktes die Rede ist, so ist immer die Lage des Grundrisses nach der Klappung gemeint. Zunächst erkennt man, daß Grundriß und Aufriß jedes Raumpunktes P stets auf einer Senkrechten zur Projektionsachse liegen, weil (nach Nr. 2) die Winkel OP_xP' und OP_xP'' auch schon vor der Klappung rechte Winkel sind.

Da solche Senkrechten zur Projektionsachse in Zukunft außerordentlich häufig vorkommen, lohnt es sich, für sie eine besondere Bezeichnung einzuführen; sie sollen „Ordnungslinien“ heißen[1]). Unter Anwendung dieser Bezeichnung kann man also sagen:

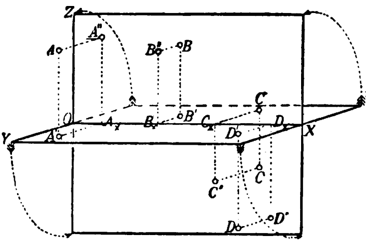

Fig. 24a

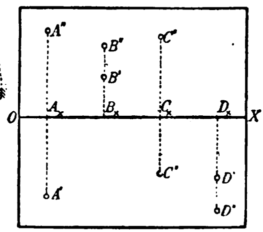

Fig. 24b

Satz. Grundriß und Aufriß jedes Raumpunktes liegen auf einer Ordnungslinie.

Wenn man auch beide Risse jedes Raumpunktes auf nur einem Blatte zeichnet, so muß man sich doch für die räumliche Vorstellung jedesmal die beiden Rißebenen in senkrechter Lage zueinander denken. Als Beispiel diene Fig. 24a, die vier in den verschiedenen Quadranten gelegene Punkte A, B, C, D im Schrägbilde darstellt; nach der Klappung, also bei der Zeichnung auf einem einzigen Zeichenblatt, ergibt sich der in Fig. 24b festgehaltene Anblick. Man muß sich für alle folgenden Betrachtungen daran gewöhnen, beim Anblick eines Bildes wie in Fig. 24b immer eine räumliche Lage wie in Fig. 24a vorzustellen, ohne erst ein Schrägbild zu entwerfen.

5. Bei späteren Konstruktionen, namentlich bei der Lösung mancher Aufgaben, spielen diejenigen Punkte eine besondere Rolle, bei denen Grundriß und Aufriß gleichen Abstand von der Achse haben. Sind Kote und Tiefenabstand eines Punktes P einander gleich (oder m. a. W. liegen P' und P'' symmetrisch in bezug auf die Achse), so liegt der Punkt P in einer Ebene, die den 1. und 3. Quadranten halbiert („erste Halbierungsebene“); unterscheiden sich Kote und Tiefenabstand des Punktes P nur

1) Nach E. Müller-Wien, der P' und P'' als „zugeordnete Normalrisse“ bezeichnet. — Man vergleiche auch die Bezeichnung „Ordnungslinie“ mit dem verwandten Begriff „Ordinate“.

durch das Vorzeichen [oder m. a. W. fällt P' mit P'' zusammen[1])], so liegt der Punkt P in einer Ebene, die den 2. und 4. Quadranten halbiert („zweite Halbierungsebene").

6. Für die Abbildung von Geraden gelten die Sätze:

Sätze. 1. Die Risse von Geraden sind im allgemeinen wieder Geraden. (§ 2, Nr. 6, Satz und Bemerkung.)

2. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegen seine Risse auf den gleichnamigen Rissen der Geraden, und umgekehrt.

3. Das Verhältnis, in dem eine Strecke des Raumes durch einen ihrer Punkte geteilt wird, bleibt bei der Projektion ungeändert.

(Folgerung aus § 2, 4 und Strahlensatz.)

4. Parallele Geraden haben parallele Risse.

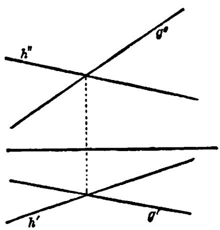

Fig. 25a

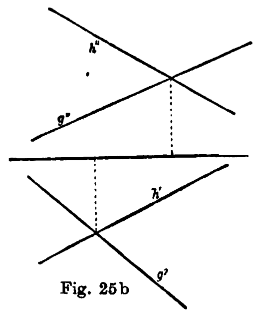

Fig. 25b

5. Ist eine Gerade parallel zur Grundrißebene (Aufrißebene), so ist ihr Aufriß (Grundriß) parallel zur Achse und ihr Grundriß (Aufriß) parallel zum Urbild.

(Folgerung aus § 2, Nr. 7, Satz 2.)

6. Steht eine Gerade senkrecht auf Π_1 (Π_2), so ist ihr Aufriß (Grundriß) senkrecht zur Achse.

7. Zwei Geraden schneiden sich (Fig. 25a) oder sie sind windschief (Fig. 25b), je nachdem die Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Risse auf einer Ordnungslinie liegen oder nicht (folgt aus Satz 2 dieser Nr.).

7. Die Schnittpunkte einer Geraden g mit den Rißebenen heißen Spuren der Geraden[2]); demgemäß unterscheidet man Grundrißspur (G_1), Aufriß-

1) Hier muß der Anfänger sorgfältig darauf achten, daß unter P', wie in Nr. 4 festgesetzt, der Grundriß von P nach der Klappung zu verstehen ist.

2) Man denke etwa an den Eindruck (Spur), den ein Spazierstock (Gerade) auf einem Feldwege (Ebene) hinterläßt.

spur (G_2) und Kreuzrißspur (G_3). Die Aufgabe, von einer durch ihre Risse g', g'' gegebenen Geraden g die Spuren G_1 und G_2 zu ermitteln, löst man folgendermaßen (Fig. 26): Um G_1 zu finden, beachtet man, daß alles, was in der Horizontalebene liegt, seinen Aufriß in der Achse hat[1]). Daher muß auch der Aufriß G_1'' der gesuchten Grundrißspur G_1 in der Achse liegen; er liegt aber auch auf g'' (nach Nr. 6, Satz 2), also auf dem Schnittpunkt von g'' mit der Achse. Der Grundriß G_1' der Spur (d. h. auch G_1 selbst) liegt dann auf einer durch G_1'' gehenden Ordnungslinie (Nr. 4) und auf g' (Nr. 6, Satz 2). — In entsprechender Weise findet man auch die Vertikalspur G_2.

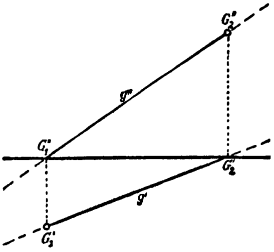

Fig. 26

8. Zur Unterscheidung sichtbarer und unsichtbarer Teile trifft man folgende Verabredungen:

Alle vorkommenden Flächen (einschließlich der Rißebenen) werden als undurchsichtig vorausgesetzt. Die projizierenden Strahlen gelten als Sehstrahlen aus einem unendlich fernen Auge, das für den Grundriß über Π_1, für den Aufriß vor Π_2 zu denken ist. Stücke, die hiernach sichtbar sind, werden in den Rissen durch voll ausgezogene Linien kenntlich gemacht, Unsichtbares wird langgestrichelt dargestellt. Hilfslinien (einschließlich der Ordnungslinien) werden kurzgestrichelt oder punktiert.

Auf Grund dieser Festsetzungen sind z. B. in Fig. 26 die Sichtbarkeitsverhältnisse folgendermaßen ermittelt worden: Wegen der Undurchsichtigkeit der Rißebenen ist nur das im ersten Quadranten gelegene Stück der Geraden (also hier das Stück zwischen G_1 und G_2) sichtbar, daher sind nur die Risse dieses Stückes voll ausgezogen.

9. Eine Gerade ist nicht immer so wie in Nr. 7 durch ihre beiden Risse eindeutig bestimmt, z. B. dann nicht, wenn sie die Achse senkrecht kreuzt; in diesem Falle muß man die Gerade durch zwei Punkte P, Q festlegen (Fig. 27). Die Bestimmung der Spuren ge-

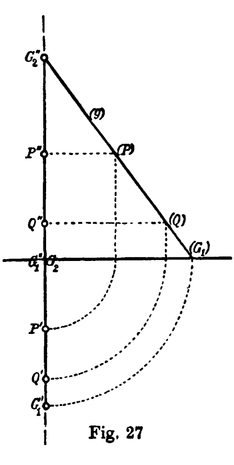

Fig. 27

1) Wenn der Schüler dies nicht ohne weiteres an der Orthogonalprojektion verfolgen kann, so entwerfe er sich erst ein Schrägbild oder verfolge die Lageverhältnisse an einem einfachen Modell (Tischplatte oder Pappdeckel als Rißebenen, Bleistift als Gerade). Allmählich muß er dann versuchen, ohne solche Behelfe auszukommen.

schieht durch Benutzung der Kreuzrißebene oder durch Umklappung des von der Geraden und ihren beiden Rissen gebildeten Dreiecks in eine der beiden Rißebenen, wobei jeder Punkt der Dreiecksebene einen Kreis beschreibt, der sich auf eine der Rißebenen (z. B. wie in Fig. 27 auf die Horizontalebene) als Kreis in wahrer Größe, auf die andere als Gerade parallel zur Achse abbildet. Die nach Vollendung der Umklappung erhaltenen Lagen der Punkte P und Q sind in Fig. 27 mit (P) und (Q) bezeichnet; ihre Verbindungsgerade liefert ohne weiteres die Vertikalspur G_2; durch Zurückklappen des Dreiecks findet man dann auch die Horizontalspur G_1.

10. Zur Darstellung ebener Flächenstücke benutzt man den Satz, daß eine Ebene durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist. Will man also z. B. ein beliebiges Dreieck darstellen, so kann man die Risse seiner Ecken auf drei willkürlich gewählten Ordnungslinien ganz beliebig annehmen. Will man aber ein ebenes Vieleck abbilden, so darf man, wenn der eine Riß beliebig angenommen ist, von dem anderen nur drei Ecken beliebig wählen; die noch fehlenden Ecken sind dann nach Nr. 6, Satz 7 mitbestimmt. Kennt man z. B. von einem ebenen Fünfeck $ABCDE$ den Grundriß vollständig, ferner von dem Aufriß die Ecken A'', B'', C'', so kann man die noch fehlenden Punkte D'', E'' auf folgende Weise finden (Fig. 28): Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in dem Punkte P, dessen Grundriß P' bekannt ist; der Aufriß P'' liegt auf der Ordnungslinie durch P' (Nr. 4) und auf $A''C''$ (Nr. 6, Satz 2). Die Verbindungslinie $B''P''$ bestimmt auf der durch D' gehenden Ordnungslinie den Punkt D''. Ebenso findet man E'' mittels des Diagonalenschnittpunktes Q.[1])

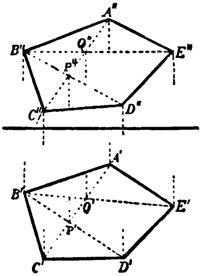

Fig. 28

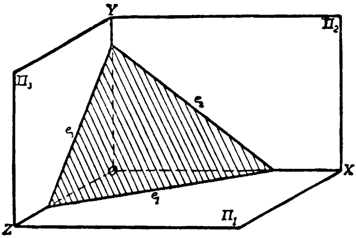

Fig. 29

11. Will man unbegrenzte Ebenen darstellen, so kommt man mit Rissen nicht aus, sondern muß Spuren benutzen. In Anlehnung an Nr. 7 erklärt man:

1) Genauigkeitsproben sind für die darstellende Geometrie noch wichtiger als für irgendeinen anderen Zweig der Mathematik. Man kann geradezu sagen: Konstruktionen, die keine Genauigkeitsprobe zulassen, sind für die darstellende Geometrie wertlos. — Bei der vorliegenden Konstruktion könnte man z. B. die Genauigkeit der Zeichnung an dem Schnitt der Diagonalen BD und CE prüfen. Eine andere Genauigkeitsprobe wird in Nr. 25 gelehrt.

Unter Spuren einer Ebene versteht man ihre Schnittgeraden mit den Rißebenen.

Die Ebenenspuren werden, wie schon in Nr. 7 die Geradenspuren, durch untere Indizes äußerlich kenntlich gemacht; z. B. werden die Spuren einer Ebene E (vgl. die Skizze in Fig. 29) mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet; entsprechend der Wichtigkeit der beiden Hauptrißebenen Π_1 und Π_2 benutzt man meist nur die Spuren e_1 und e_2. Zur Hebung der Anschaulichkeit zeichnet man meist von e_1 nur das vorn gelegene und von e_2 nur das oben gelegene Stück.

Über die Lage der Spuren gelten folgende Sätze:

1. Horizontal- und Vertikalspur einer Ebene müssen sich auf der Achse schneiden (nach § 2, Nr. 12).

2. Steht eine Ebene senkrecht auf Π_1 (Π_2), so steht ihre Vertikalspur (Horizontalspur) senkrecht zur Achse.

3. Steht eine Ebene senkrecht auf beiden Rißebenen, so sind beide Spuren senkrecht zur Achse (und fallen daher nach Satz 1 zusammen).

4. Ist eine Ebene parallel Π_1 (Π_2), so ist ihre Vertikalspur (Horizontalspur) parallel zur Achse. — Die andere Spur liegt im Unendlichen.

5. Ist eine Ebene geneigt gegen beide Rißebenen, aber parallel zur Achse, so sind beide Spuren parallel zur Achse.

12. Satz. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen die Spuren der Geraden in den gleichnamigen Spuren der Ebene, und umgekehrt.

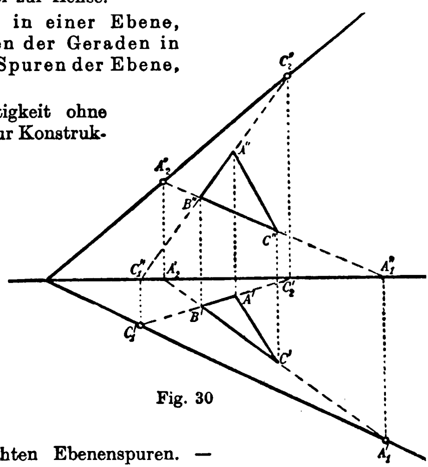

Fig. 30

Dieser Satz, dessen Richtigkeit ohne weiteres einleuchtet, dient zur Konstruktion der Spuren einer Ebene, von der andere Stücke (etwa drei Punkte oder zwei Geraden) gegeben sind. Soll man z. B. die Spuren der Ebene eines Dreiecks ABC ermitteln (Fig. 30), so braucht man nur die Spuren zweier Seiten des Dreiecks aufzusuchen. In Fig. 30 ist dies bei den Seiten BC und AB geschehen; ihre Spuren sind A_1, A_2 und C_1, C_2.[1] Die Verbindungsgeraden A_1C_1 und A_2C_2 sind die gesuchten Ebenenspuren. — Zur Prüfung der Genauigkeit kann man die Spuren

1) Der Schüler achte auf die Ausdrucksweise; man spricht z. B. von einem Punkte A_1, zeichnet aber seine beiden Risse A_1' und A_1''. Man muß sich eben daran gewöhnen, das Räumliche als das Wesentliche, dagegen das Zeichnerische als das Selbstverständliche anzusehen.

der dritten Dreiecksseite (also in Fig. 30 die Spuren der Seite AC) benutzen.

13. Eine Ebene ist nur dann durch Horizontal- und Vertikalspur nicht eindeutig bestimmt, wenn sie die Achse enthält, also wenn ihre beiden Spuren mit der Achse zusammenfallen. In diesem Falle müßte man zur vollständigen Bestimmung der Ebene außer den beiden in die Achse fallenden Spuren noch die Kreuzrißspur oder einen Punkt der Ebene geben. — Die Erledigung dieses Sonderfalles, der mit dem in Nr. 9 behandelten gewisse Ähnlichkeiten aufweist, wird dem Schüler überlassen.

Wahre Größen von Strecken und Winkeln

14. In Nr. 1 ist erwähnt worden, daß die in Orthogonalprojektion dargestellten Raumgebilde besonders leicht aus ihren Rissen aufgebaut oder wiederhergestellt werden können. Diese Tatsache ist wichtig, und die Aufgabe, die wahre Gestalt und Größe bildlich dargestellter Raumstücke zu ermitteln, kehrt in praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie tausendfach wieder. Das nötigt uns, im folgenden wenigstens an den einfachsten Gebilden ausführlicher zu zeigen, wie man ihre wahre Größe ermitteln kann. Wir behandeln zunächst die Aufgabe:

Die wahre Größe einer durch ihre Risse gegebenen Strecke AB zu ermitteln.

Man kann das Trapez $ABB'A'$[1]) um $A'B'$ in die Horizontalebene umlegen, wobei die Punkte A, B in die Lage A_0, B_0 kommen (Fig. 31); man braucht nur zu beachten, daß das Trapez bei A' und B' rechte Winkel

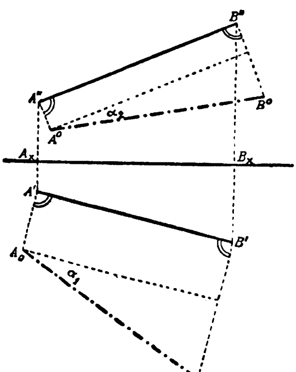

Fig. 31

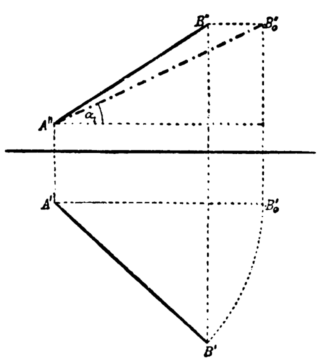

Fig. 32

1) Anders ausgedrückt: Das von den Raumpunkten A, B und ihren Grundrissen A', B' gebildete Trapez.

hat, und daß $A''A_x = A'A_0$ und $B''B_x = B'B_0$ wird. A_0B_0 ist dann die verlangte wahre Größe der Strecke AB. Zieht man noch durch A_0 die Parallele zu $A'B'$, so ist zugleich der Satz bewiesen (den man auch unmittelbar aus der räumlichen Lage hätte entnehmen können):

Die wahre Größe einer Strecke ist Hypotenuse eines Dreiecks, dessen eine Kathete der Grundriß der Strecke und dessen andere Kathete die Differenz der Koten ihrer Endpunkte ist.

Mittels dieses Satzes kann man u. U. eine erhebliche Platzersparnis erzielen.

15. Da im allgemeinen kein Grund vorliegt, die Horizontalebene besonders zu bevorzugen, kann man natürlich auch das bei A'' und B'' rechtwinklige Trapez $ABB''A''$ um $A''B''$ in die Vertikalebene umlegen, so daß AB in die Lage A^0B^0 kommt (Fig. 31). Um dies zu erreichen, braucht man nur $A'A_x = A''A^0$ und $B'B_x = B''B^0$ abzumessen. A^0B^0 ist dann die wahre Größe der Strecke AB. — Für die hier benutzte Art der Umlegung gilt ein Satz, der dem in Nr. 14 bewiesenen völlig entspricht; wie lautet er?

16. Durch die in Nr. 14 und 15 ausgeführten Konstruktionen sind auch noch, ohne daß dies verlangt worden wäre, die Neigungswinkel der Strecke AB gegen die beiden Rißebenen (kurz: die „Tafelneigungen" der Strecke AB) mitbestimmt: Der Winkel α_1 zwischen A_0B_0 und $A'B'$ (Fig. 31) ist der Neigungswinkel von AB gegen die Horizontalebene, ebenso ist der Winkel α_2 zwischen A^0B^0 und $A''B''$ der Neigungswinkel von AB gegen die Vertikalebene.

17. Ein anderes Verfahren, die wahre Größe von AB zu ermitteln, beruht auf der Tatsache, daß alles, was parallel zu einer Rißebene liegt, sich auf diese in wahrer Größe abbildet. Man kann z. B. das Trapez $ABB'A'$ um eine seiner parallelen Seiten, etwa um AA' drehen, bis es parallel der Vertikalebene liegt, also bis sein Grundriß als eine durch A' parallel zur Achse gezeichnete Strecke erscheint. Bei der Drehung beschreibt B einen Kreis, der sich auf die Grundrißebene als Kreis mit dem Mittelpunkt A' und auf die Aufrißebene als eine Strecke durch B'' parallel zur Achse abbildet. In Fig. 32 ist der Übersichtlichkeit wegen nur ein Bogen dieses Hilfskreises gezeichnet; die neue Lage, in die der Punkt B nach der Drehung des Trapezes gelangt, ist mit B_0 bezeichnet.[1]) Die Strecke $A''B''_0$ ist dann die wahre Größe von AB.

18. Statt die in Nr. 17 beschriebene Drehung auszuführen, kann man natürlich auch das Trapez $ABB''A''$ um eine seiner parallelen Seiten, etwa um AA'' drehen, bis es parallel zur Grundrißebene liegt (Fig. 33). Darüber, welche Konstruktionsart bei einer praktischen Anwendung gewählt wird, entscheidet der zur Verfügung stehende Platz, die Übersichtlichkeit der Zeichnung und die erreichbare Genauigkeit.

1) Vgl. die Fußnote zu Nr. 12.

19. Die in Nr. 17 und 18 ausgeführten Drehungen liefern auch gleichzeitig noch die Tafelneigungen der Geraden AB. Der Winkel der Strecke $A''B_0''$ gegen die Achse (Fig. 32) ist der Neigungswinkel von AB gegen die Horizontalebene; der Winkel der Strecke $A'B'_0$ gegen die Achse (Fig. 33) ist der Neigungswinkel von AB gegen die Vertikalebene.

Die in Nr. 17 und 18 besprochenen Lösungen der Aufgabe, die wahre Größe einer Strecke zu bestimmen, beruhen zwar rein theoretisch betrachtet auf denselben Sätzen und Tatsachen wie die Konstruktionen in Nr. 14 und 15, sind aber doch zeichnerisch empfehlenswerter als jene,

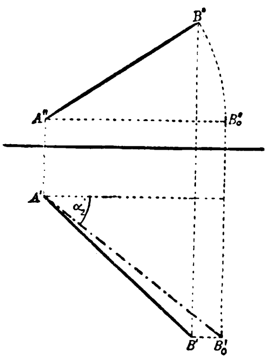

Fig. 33

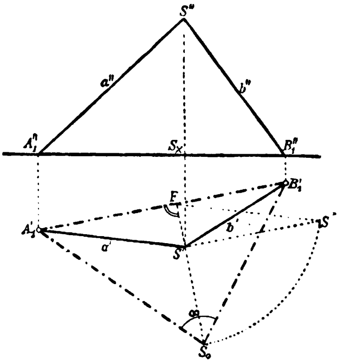

Fig. 34

weil sie bei der wirklichen Ausführung auf dem Zeichenblatt mit Reiß schiene und Schiebdreieck eine geringere Anzahl Hilfskonstruktionen er fordern als jene (bei Nr. 14 zwei rechte Winkel, bei Nr. 17 nur einen; bei Nr. 14 zwei Streckenmessungen, bei Nr. 17 nur eine).

20. Die in Nr. 14, 15, 17, 18 ausgeführten Konstruktionen kann man in Verbindung mit Nr. 6, Satz 3 benutzen zur Lösung der Aufgabe:

Auf einer durch ihre Risse gegebenen Geraden von einem ihrer Punkte aus eine Strecke von gegebener Länge abzutragen.

Man braucht nämlich nur von dem Punkte aus zunächst eine beliebige Strecke abgetragen zu denken, deren wahre Größe zu ermitteln und dann die Risse der beliebig angenommenen Strecke im richtigen Verhältnis zu vergrößern oder zu verkleinern.

21. Satz. Ein rechter Winkel, von dem ein Schenkel parallel einer Rißebene ist, projiziert sich auf diese wieder als rechter.

Beweis[1]). Die Schenkel des rechten Winkels seien a und b, sein Scheitel sei C, der Schenkel a sei parallel Π_1. Alle Geraden b, die in C auf a senkrecht

1) Es ist absichtlich keine Figur gezeichnet.

stehen, liegen in einer Ebene E (§ 2, Nr. 3, Folgerung), die auf a senkrecht steht (§ 2, Nr. 2); da aber $a \parallel \Pi_1$, also $a \parallel a'$ (§ 3, Nr. 6, Satz 5), so ist E auch senkrecht auf a' (§ 2, Nr. 4, Satz 2), also bildet a' mit jeder Geraden von E, besonders mit der Spur e_1 (die aber mit b' identisch ist), einen rechten Winkel. Wird der Schenkel a parallel der Aufrißebene angenommen, so bleibt der Beweis, abgesehen von dem Wechsel der Indizes, ungeändert.

Fällt der eine Schenkel des rechten Winkels in eine der Rißebenen, so bleibt der bewiesene Satz immer noch richtig, der Beweis vereinfacht sich sogar.

Auch der umgekehrte Satz (dessen Beweis hier übergangen werden soll) gilt: Wenn sich ein rechter Winkel auf eine der Rißebenen in wahrer Größe projiziert, so läuft einer seiner Schenkel parallel der Rißebene oder liegt ganz in ihr.

22. Es seien zwei sich schneidende Geraden a und b durch ihren Schnittpunkt S und ihre Horizontalspuren A_1 und B_1 gegeben (Fig. 34); gesucht wird die wahre Größe des von den beiden Geraden gebildeten Winkels. Zur Lösung dieser Aufgabe legt man das Dreieck $A_1 S B_1$ um $A_1 B_1$ in die Horizontalebene um; dabei beschreibt der Punkt S einen Kreis. Die Ebene dieses Kreises steht senkrecht auf $A_1 B_1$, der Radius des Kreises ist das von S auf $A_1 B_1$ gefällte Lot, der Mittelpunkt des Kreises ist der Fußpunkt F dieses Lotes. Nach Nr. 21 ist $S'F \perp A_1 B_1$, damit ist F bestimmt; die wahre Länge von SF wird nach Nr. 14 als Hypotenuse S^*F des Dreiecks $FS'S^*$ gefunden, in dem $S^*S' = S''S_x$ ist. Trägt man nun noch FS^* auf FS' ab bis S_0, so ist $A_1'S_0B_1'$ die wahre Größe des Winkels $A_1 S B_1$.

Ein besonderer Vorzug der besprochenen Konstruktion ist der, daß sie auch dann noch ausführbar ist, wenn die Spuren der Geraden a und b nicht mehr auf das Zeichenblatt fallen (was beim praktischen Zeichnen sehr oft vorkommt). Man braucht dann nämlich nur durch einen bequem gelegenen Punkt des Raumes zu den beiden Geraden a und b Parallelen zu legen, deren Spuren noch benutzbar sind; die beiden benutzten Hilfsparallelen schließen nach § 2, Nr. 8, Satz 1 denselben Winkel ein wie die Geraden a und b.

Gegenseitige Lage der Raumgebilde

Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen

23. Im Anschluß an die in Nr. 6, 11 und 12 bewiesenen einfachen Sätze werden im folgenden Abschnitt (Nr. 23 bis 33) die wichtigeren Lageverhältnisse der Raumgebilde behandelt.

In einer durch ihre Spuren e_1, e_2 gegebenen Ebene E liegt eine Gerade g, deren Grundriß g' man kennt; gesucht ist der Aufriß g'' (Fig. 35). Die Spuren G_1 und G_2 von g liegen in e_1 und e_2 (nach Nr. 12), G_1' ist als Schnitt von g' mit e_1 bekannt, G_1'' liegt auf der Ordnungslinie durch G_1' und auf der Achse; G_2' ist als Schnitt von g' mit der Achse bekannt, G_2'' liegt auf der durch G_2' gehenden Ordnungslinie und auf e_2. Durch G_1'' und G_2'' ist g'' bestimmt.

24. Die in Nr. 23 angegebene Konstruktion löst auch gleichzeitig die Aufgabe: In einer durch ihre Spuren e_1, e_2 gegebenen Ebene E liegt ein Punkt P, dessen Grundriß P' gegeben ist; gesucht wird der Aufriß P'' (Fig. 35). Man braucht nur durch den Punkt P eine beliebige Gerade gezogen zu denken, die in E liegt. Man zieht also durch P' eine Gerade g' und bestimmt g'' nach Nr. 23; die durch P' gelegte Ordnungslinie schneidet g'' in P''.

Statt eine beliebige Gerade g zu wählen, kann man auch zwei ausgezeichnete Sonderlagen benutzen, nämlich die sog. Spurparallelen, d. h. Geraden in der Ebene E parallel zu e_1 oder zu e_2. In Fig. 35 ist z. B. eine durch P gehende horizontale Spurparallele h benutzt. Solche horizontalen Spurparallelen heißen auch Streichlinien der Ebene E (vgl. den Schlußsatz von Nr. 30).

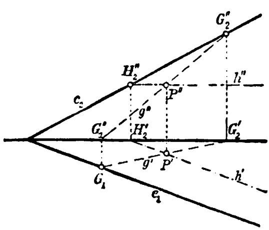

Fig. 35

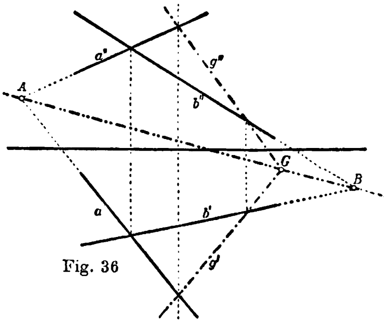

Fig. 36

25. Da bei praktischen Anwendungen Ebenen nur selten durch ihre Spuren gegeben sind, werden wir die in Nr. 23 behandelte Aufgabe jetzt auch noch für den allgemeinen Fall lösen: In einer durch zwei sich schneidende Geraden a und b bestimmten Ebene liegt eine Gerade g, von der man einen Riß (z. B. g') kennt; gesucht ist der andere Riß (g'') (Fig. 36). Da g die beiden Geraden a und b schneidet, so muß der Schnitt von a'' und g'' auf einer durch den Schnitt von a' und g' gehenden Ordnungslinie und ebenso der Schnitt von b'' und g'' auf einer durch den Schnitt von b' und g' gehenden Ordnungslinie liegen (Nr. 6, Satz 7); dadurch ist g'' eindeutig bestimmt.

Die angegebene Konstruktion erlaubt eine zeichnerisch scharfe und sachlich wertvolle Genauigkeitsprobe: Bringt man a' mit a'', b' mit b'', g' mit g'' zum Schnitt in A, B, G, so müssen diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, denn sie sind nach Nr. 5 nichts anderes als die Schnittpunkte der drei Geraden a, b, g mit der „2. Halbierungsebene", und die

Gerade ABG ist nichts anderes als die Schnittgerade der gegebenen Ebene (ab) mit jener Halbierungsebene.[1])

Man kann die drei Geraden a, b, g auch als Seiten eines (beliebigen) Dreiecks auffassen und dann über die Risse dieses Dreiecks folgendes aussagen: Entsprechende Seiten der beiden Risse schneiden sich auf einer Geraden, während gleichzeitig entsprechende Ecken auf Parallelen liegen (nämlich auf Ordnungslinien). Das führt uns auf eine neue Beziehung, die Affinität.

Erklärung. Unter affinen Figuren in perspektiver Lage versteht man solche Figuren, bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (Ecken) parallel laufen („Affinitätsstrahlen") und die Schnittpunkte entsprechender Geraden (Seiten) auf einer Geraden (Affinitätsachse) liegen. Hiernach kann man also sagen:

Die Risse eines beliebigen Dreiecks (und damit jedes beliebigen Vielecks) sind perspektiv-affin; die Affinitätsachse ist die Schnittgerade der Ebene des Dreiecks (Vielecks) mit der 2. Halbierungsebene.

Natürlich kann man nun auch die in Nr. 24 behandelte Aufgabe für den allgemeinsten Fall lösen, daß die Ebenen durch zwei sich schneidende Geraden gegeben ist.

Schnitte von Ebenen und Geraden

26. Wir wenden uns jetzt zur Lösung einer besonders wichtigen, weil bei praktischen Anwendungen hundertfach wiederkehrenden Aufgabe: Den Schnittpunkt einer Geraden g und einer Ebene E zu bestimmen. Die Ebene sei durch zwei sich schneidende Geraden oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Ecken eines Dreiecks ABC gegeben (Fig. 37). Der gesuchte Schnittpunkt S muß in einer Geraden liegen, in der irgendeine durch g gelegte Hilfsebene die Ebene E schneidet. Als eine solche Hilfsebene wählt man zweckmäßig eine projizierende Ebene, z. B. wie in Fig. 37 die

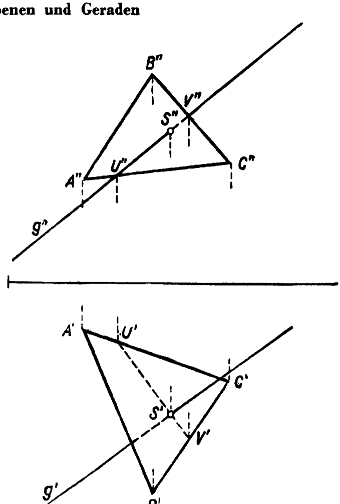

Fig. 37

1) Ist die Ebene (ab) gegen die Halbierungsebene nur wenig geneigt, so versagt natürlich diese Genauigkeitsprobe: dann stehen andere zur Verfügung (s. Nr. 10. Fig. 28).

vertikalprojizierende Ebene von g; diese Hilfsebene schneidet die Dreiecksebene in einer Geraden UV, von der man den Aufriß $U''V''$ kennt, weil er mit g'' zusammenfällt. Den Grundriß $U'V'$ ermittelt man nach Nr. 25. $U'V'$ schneidet g' in S'; S'' liegt auf der durch S' gehenden Ordnungslinie und auf g''.

Es muß noch ein Wort darüber gesagt werden, wie in Fig. 37 die Sichtbarkeitsverhältnisse ermittelt worden sind. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Aufriß und stellen fest, ob $U''S''$ oder $V''S''$ als sichtbar zu zeichnen ist. Es gibt einen und nur einen vertikalprojizierenden Strahl, der sowohl g als auch AC im Raume schneidet; es ist der Strahl, dessen Aufriß der Punkt U'' ist. Wir blicken längs dieses Strahles aus einem weit vor Π_2 gelegenen Punkt; der Grundriß lehrt uns, daß wir dabei zuerst auf einen Punkt von g, dann auf einen Punkt von AC (nämlich U) treffen, also liegt das von dem vertikalprojizierenden Strahl getroffene Stück von g vor der Dreiecksfläche, wir zeichnen seinen Aufriß, d. h. hier besonders das Stück $U''S''$, als sichtbar. — Eine entsprechende Betrachtung führt man am Grundriß durch.

Ist die Ebene nicht durch drei Punkte, sondern durch ihre Spuren gegeben, so bleibt die Konstruktion genau dieselbe, nur fallen einige Punkte

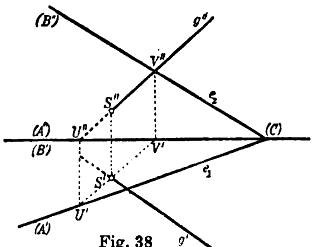

Fig. 38

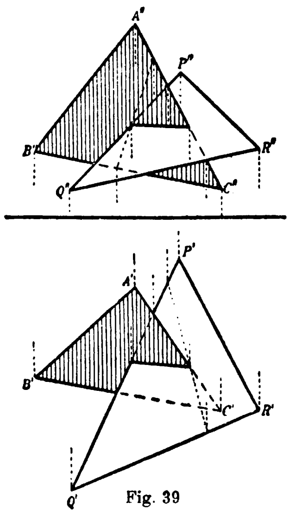

Fig. 39

und Geraden, die in Fig. 37 noch getrennt waren, jetzt zusammen, z. B. fällt (in Fig. 38) C' mit C'', $C'A'$ mit e_1, $C''B''$ mit e_2, $C''A''$ und $C'B'$ mit der Achse zusammen. — Es wird dem Schüler dringend geraten, die Zeichnung noch einmal besonders zu entwerfen und auch Sonderlagen zu berücksichtigen.

27. Mittels der in Nr. 26 besprochenen Konstruktion kann man auch die Schnittgerade zweier Ebenen bestimmen. Wenn z. B. die beiden Ebenen durch je zwei sich schneidende Geraden a, b und p, q gegeben sind, so braucht man nur etwa die Gerade a mit der Ebene (pq) und die

Gerade b mit der Ebene (pq) zum Schnitt zu bringen; die Verbindungslinie der beiden Punkte ist dann die gesuchte Schnittgerade.

In Fig. 39 ist die in Rede stehende Aufgabe in der Form behandelt, daß die Schnittgerade zweier durch ihre Risse gegebenen Dreiecke ABC und PQR gesucht wird. Als Hilfsebene sind eine horizontalprojizierende Ebene durch PQ und eine vertikalprojizierende Ebene durch AC benutzt. Die Sichtbarkeitsverhältnisse ermittelt man wie bei Nr. 26.

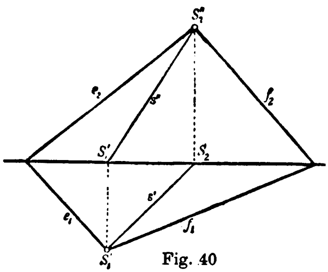

Fig. 40

Der besondere Fall, daß die Schnittgerade s zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen E_1 und E_2 gesucht wird, ist in Fig. 40 erläutert. Die Lösung beruht auf der aus Nr 12 folgenden Tatsache, daß die Spuren von s die Schnittpunkte der gleichnamigen Spuren von E_1 und E_2 sind.

28. Unter allen Geraden, die eine Ebene schneiden, haben die Lote die größte Bedeutung, sowohl für die Stereometrie wie auch für die praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie. Wir beschäftigen uns daher etwas genauer mit dem Falle, daß eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht. Es sei zunächst die Ebene E durch ihre Spuren e_1 und e_2 gegeben. Eine Gerade g, die auf dieser Ebene senkrecht steht, kreuzt alle Geraden von E, also auch e_1 und e_2 rechtwinklig. Nach Nr. 21 projiziert sich der von e_1 und g gebildete rechte Winkel auf Π_1, ebenso der von e_2 und g gebildete rechte Winkel auf Π_2 in wahrer Größe, d. h. g' steht auf e_1, ebenso g'' auf e_2 senkrecht. Auch der umgekehrte Gedankengang ist zulässig. Damit ist der Satz bewiesen: Eine Gerade steht dann und nur dann auf einer Ebene senkrecht, wenn ihre Risse auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht stehen. In Verbindung mit Nr. 24 und 26 kann man jetzt in einem gegebenen Punkte auf einer gegebenen Ebene die Senkrechte errichten, von einem Punkte auf eine Ebene das Lot fällen und endlich durch einen Punkt eine Ebene senkrecht zu einer Geraden legen. Die zeichnerische Durchführung dieser drei wichtigen Aufgaben wird dem Schüler überlassen.

29. Wenn die Spuren der Ebene weder gegeben sind noch überhaupt auf das Zeichenblatt fallen, so kann man den soeben bewiesenen Satz doch noch benutzen. Soll man z. B. (Fig. 41) auf der Ebene des Dreiecks ABC in dem Punkte F die Senkrechte

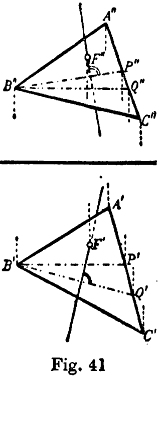

Fig. 41

errichten[1]), so kann man durch eine geeignete Dreiecksecke, etwa durch B, je eine horizontale und vertikale Spurparallele legen, also z. B.: man zieht $B'P'$ parallel zur Achse bis $A'C'$, legt durch P' die Ordnungslinie, die auf $A''C''$ den Punkt P'' bestimmt; dann ist $B''P''$ die Richtung der vertikalen Spurparallelen der Dreiecksebene. In entsprechender Weise findet man die Risse der horizontalen Spurparallelen BQ. Die von F' auf $B'Q'$ und von F'' auf $B''Q''$ gefällten Lote sind die Risse der gesuchten Senkrechten.

Mit der besprochenen Konstruktion hat man auch gleichzeitig die Aufgabe gelöst, von einem Punkte auf eine durch ein Geradenpaar gegebene Ebene das Lot zu fällen oder auch (mit Anwendung von Nr. 14 oder 15) den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu bestimmen. Soll man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g finden, so kann man durch P eine Ebene $\perp g$ legen (unter Anwendung von Nr. 28) und den Schnittpunkt dieser Hilfsebene mit der Geraden g ermitteln.

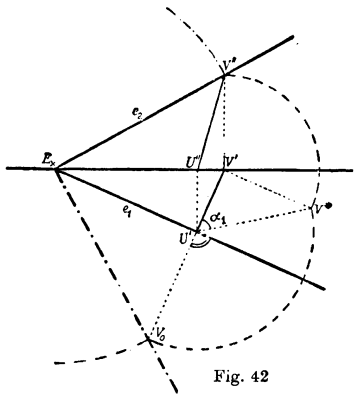

Fig. 42

30. Will man die Tafelneigungen einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene E bestimmen, so schneidet man E durch projizierende Ebenen senkrecht zu den Spuren, z. B. (Fig. 42) durch eine senkrecht zu e_1 gelegte horizontalprojizierende Ebene, die E in UV schneidet. Legt man das von den Punkten U, V', V'' gebildete rechtwinklige Dreieck um $U'V'$ in die Horizontalebene um, wobei V'' in die Lage V^* kommt, so ist der Winkel $V'U'V^*$ die gesuchte Horizontalneigung α_1 von E. Die Vertikalneigung α_2 findet man in entsprechender Weise (in Fig. 42 nicht ausgeführt).

Wenn die Spuren von E weder gegeben noch zugänglich sind, so kann man diese Schwierigkeit durch Spurparallelen ähnlich wie in Nr. 29 beseitigen. Ist W irgendein (in Fig. 42 nicht gezeichneter) Punkt von e_1, so ist $V'U' < V'W$, in den rechtwinkligen Dreiecken $UV'V''$ und $WV'V''$ ist also $\alpha_1 > \sphericalangle V''WV'$. Daraus folgt: UV hat unter allen durch V gehenden Geraden von E die größte Horizontalneigung (das stärkste „Gefälle"); eine von V aus losgelassene, nur der Erdschwere unterworfene Kugel würde also nach U rollen. Darum bezeichnet man UV (und jede andere in E liegende und senkrecht zu e_1 verlaufende Gerade) mit dem Namen

---

1) Die nach Nr. 24 oder 25 (Schlußsatz) erforderlichen Hilfskonstruktionen, mittels deren man F' aus F' oder F'' aus F' finden kann, sind in Fig. 41 nicht angegeben, um eine störende Überfülle der Linien zu vermeiden.

Fallinie. Für die Geologie und Kartenkunde haben die Fallinien ebenso wie die in Nr. 24 erwähnten Streichlinien eine besondere Bedeutung.

31. Wir beschäftigen uns jetzt etwas genauer mit der Umklappung, von der wir die einfachsten Fälle (in Nr. 14, 22 und 30) bereits kennengelernt haben.

Erklärung. Eine ebene Figur umklappen, heißt: die Ebene, in der sie liegt, so lange um ihre Horizontal- oder Vertikalspur drehen, bis sie in die Grundriß- oder Aufrißebene fällt.

Wir untersuchen zunächst, in welche Lage ein Punkt von e_2, z. B. der schon in Fig. 42 benutzte Punkt V gelangt, wenn man die Ebene E um e_1 in die Horizontalebene umklappt. Jeder Punkt von E beschreibt bei der angegebenen Drehung einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf e_1 steht. V beschreibt also einen Kreis, dessen Grundriß in $U'V'$ fällt und dessen Mittelpunkt U' ist. Der Radius des Kreises ist die (in Nr. 30 nebenbei schon ermittelte) wahre Größe von UV; man hat also nur noch $U'V^*$ auf $U'V'$ oder seiner Verlängerung von U' aus abzumessen, um die neue Lage V_0 zu erhalten, in die V nach der Klappung fällt.

Man kann V_0 noch auf andere Weise finden: e_2 beschreibt nämlich bei der angegebenen Drehung einen Kegelmantel; die Spitze des Kegels liegt in dem Spurenschnittpunkt E_x, und die Strecke $E_x V''$ erscheint nach der Klappung in ihrer alten Größe als $E_x V_0$. — Es ist klar, daß jede der beiden Konstruktionen zur Prüfung der anderen benutzt werden kann.

Statt der schleppenden Ausdrucksweise „die aus einer ebenen Figur durch Umklappung in eine der Rißebenen entstandene neue Figur" werden wir kurz auch sagen „die Umklappung der Figur"; wir bezeichnen also V_0 als Umklappung von V.

32. Wenn man einen nicht in e_2, sondern beliebig in E gelegenen Punkt P umzuklappen hat, von dem etwa der Grundriß P' gegeben ist, so ermittelt man zunächst P'' mittels einer Spurparallelen (Fig. 43) und legt durch P eine zu e_1 senkrechte horizontalprojizierende Ebene, die e_1 in P_1 schneidet, bestimmt die wahre Größe von P_1P (d. i. P_1P^*) und mißt $P_1P_0 = P_1P^*$ ab, dann ist P_0 die Umklappung von P.

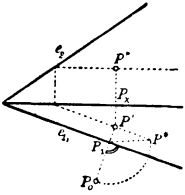

Fig. 43

Hat man mehrere in E gelegene Punkte, also außer P etwa noch die (in Fig. 43 nicht dargestellten) Punkte Q, R, S ... um e_1 umzuklappen, so braucht man die im vorigen angegebene Konstruktion nicht jedesmal von neuem auszuführen, kann vielmehr die Zeichnung außerordentlich vereinfachen. Da nämlich alle Punkte von e_1 beim Umklappen unbewegt bleiben, so müssen sich entsprechende Geraden des Grundrisses und seiner Umklappung (also etwa $P'Q'$ und P_0Q_0) in einem Punkte von e_1 (nämlich in der Grundrißspur von PQ) schneiden; andererseits liegen aber entsprechende Punkte des Grundrisses und der Umklappung (also P' und P_0, ebenso Q' und Q_0) auf Parallelen (nämlich auf Senkrechten zu e_1). Also kann man nach Nr. 25 sagen:

Der Riß einer ebenen Figur und ihre Umklappung sind perspektiv-affin in bezug auf die Umklappungsspur als Affinitätsachse.

Diese Tatsache führt zu einer guten Lösung der Aufgabe: *Aus dem Grundriß eines ebenen Vielecks und den Spuren seiner Ebene die wahre Größe des Vielecks zu ermitteln.* Man braucht nämlich nur einen zweckmäßig gewählten Punkt von e_2, etwa den Punkt V (Fig. 44), auf die in Nr. 31 beschriebene Art umzuklappen, dann findet man alle übrigen Punkte der Umklappung und damit auch die wahre Größe des Vielecks durch die affinen Beziehungen. — Der große Vorzug dieser Konstruktion ist der, daß zahlreiche Genauigkeitsproben zur Verfügung stehen.

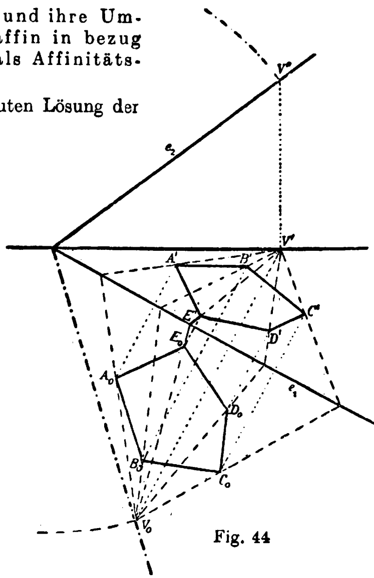

Fig. 44

Natürlich kann man mittels der angegebenen Konstruktion auch umgekehrt die Risse einer ebenen Figur bestimmen, wenn ihre Umklappung und die Spuren der Ebene gegeben sind.

Bemerkenswert ist, daß bei den Rissen eines ebenen Vielecks drei Affinitätsachsen auftreten, nämlich die beiden Umklappungsspuren und die in Nr. 25 besprochene Schnittgerade der Vieleckebene und der 2. Halbierungsebene.

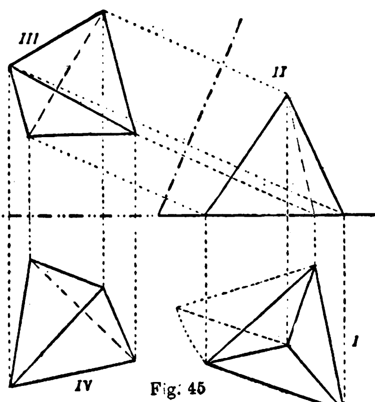

Fig. 45

33. Oft kann man Aufgaben besonders einfach und genau lösen durch *Einführung neuer Rißebenen*, deren Lage den Anforderungen der zu lösenden Aufgabe angepaßt ist. Ersetzt man eine der Rißebenen, z. B. Π_1, durch eine neue Ebene Π_3, die auf Π_2 senkrecht steht, während sie gegen Π_1 unter beliebigem Winkel geneigt ist[1]), so gilt, wie aus den Betrachtungen in Nr. 2 und 4 folgt, für jeden Punkt des Raumes der Satz:

Der Abstand des neuen Risses von der neuen Achse ist gleich dem Abstand des wegfallenden Risses von der alten Achse.

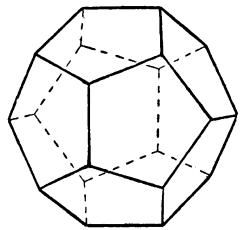

Fig. 46

Hat man Körper in einfachen Stellungen (also meist recht unanschaulich) dargestellt, so bietet die Einführung neuer Projektionsebenen oft ein Mittel dar, recht anschauliche Bilder zu entwerfen, wie etwa bei den Rissen III und IV des Tetraeders in Fig. 45 und bei dem auf dieselbe Weise entstandenen Bilde des Dodekaeders in Fig. 46. Umgekehrt kann man bei allzu allgemeiner Lage der Raumgebilde durch Einführung neuer Rißebenen einfache Lageverhältnisse und damit einfache Konstruktionsmöglichkeiten schaffen. Als lehrreiches Beispiel hierfür sei die Aufgabe genannt, den kürzesten Abstand zweier windschiefen Geraden zu ermitteln.

Schneidende und berührende Ebenen bei ebenflächigen und runden Körpern

Schnitte von Körpern. Abwicklungen und Durchdringungen

34. Hat man einen ebenen Schnitt eines von ebenen Flächen begrenzten Körpers darzustellen, so kann man nach dem in Nr. 26 besprochenen Verfahren jede Kante des Körpers mit der Ebene zum Schnitt bringen. Das ist z. B. in Fig. 47 geschehen, wo der ebene Schnitt eines regelmäßig sechskantigen Pyramidenstumpfes dargestellt ist; um die Zeichnung nicht mit Hilfslinien zu überlasten, ist nur bei einer Seitenkante (a) des Pyramidenstumpfes die Hilfskonstruktion angegeben. Damit das Bild einen

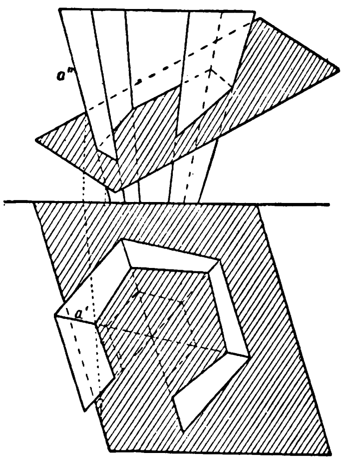

Fig. 47

1) Von dieser neuen Rißebene Π_3 ist also die in Nr. 1 erwähnte Kreuzrißebene, die auf Π_1 und Π_2 senkrecht steht, nur ein Sonderfall.

möglichst körperlichen Eindruck erweckt, ist angenommen worden, daß der Pyramidenstumpf hohl ist und daß die Deckfläche und die vorderste Seitenfläche entfernt worden ist, so daß man von vorn und oben in den Stumpf hineinsehen kann.

Das in Nr. 26 behandelte und hier benutzte Verfahren ist zwar immer anwendbar, aber zeichnerisch nicht immer befriedigend, weil die Hilfskonstruktionen unübersichtlich werden und die Genauigkeit der Zeichnung leidet, wenn jeder Schnittpunkt unabhängig vom anderen bestimmt wird. Deshalb beschäftigen wir uns mit einigen Lösungsarten, bei denen die zwischen den einzelnen Schnitten bestehenden verwandtschaftlichen Beziehungen benutzt werden.

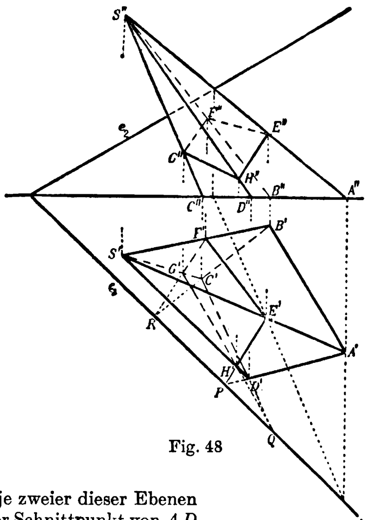

Fig. 48

35. In Fig. 48 ist der S c h n i t t einer s c h i e f e n P y r a m i d e m i t einer E b e n e E gezeichnet[1]. Die Spitze der Pyramide ist S, die Grundfläche $ABCD$, die Schnittfigur $EFGH$. Von dieser Schnittfigur ist nur e i n Punkt (E) mittels des in Nr. 34 benutzten Verfahrens ermittelt worden, die anderen sind durch die folgende Überlegung gefunden worden:

Die drei Ebenen Π_1, E und SAD müssen sich in einem Punkte schneiden; durch diesen Punkt müssen also die Schnittgeraden je zweier dieser Ebenen hindurchgehen. Demnach liegt der Schnittpunkt von AD und EH auf e_1; er heiße P. Ebenso liegen auf e_1 der Schnittpunkt Q von CD und GH und der Schnittpunkt R von BC und FG. Hat man also E, wie oben angegeben, ermittelt, so fährt man folgendermaßen fort: $A'D'$ bestimmt P auf e_1, PE' schneidet $S'D'$ in H', $C'D'$ bestimmt Q auf e_1, QH' schneidet $S'C'$ in G' usw. Die Aufrisse der Punkte E, F, G, H findet man durch Ordnungslinien.

Bezeichnet man A und E, B und F, C und G, D und H als entsprechende Punkte und beachtet man, daß die vorhin angestellte Überlegung nicht bloß für die Grundfläche und die Schnittfigur, sondern ebenso für irgend zwei beliebige Pyramidenschnitte gilt, so kann man sagen: Irgend zwei ebene Schnitte einer Pyramide haben die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt (nämlich die Pyra-

1) Damit von der Pyramide nicht allzuviel unsichtbar erscheint, ist diesmal ausnahmsweise angenommen, daß die schneidende Ebene E durchsichtig sei.

midenspitze) gehen, während die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen; zwei ebene Figuren, die diese Eigenschaft haben, nennt man „kollineare Figuren in perspektiver Lage“, der ausgezeichnete Punkt, durch den die Verbindungslinien entsprechender Punkte hindurchgehen, heißt Kollineationszentrum, die ausgezeichnete Gerade, auf der sich entsprechende Geraden schneiden, heißt Kollineationsachse. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen kann man also sagen:

Die Figuren, die aus einer Pyramide durch irgend zwei Ebenen herausgeschnitten werden, sind perspektiv-kollinear, das Kollineationszentrum ist die Pyramidenspitze, die Kollineationsachse ist die Schnittgerade der beiden schneidenden Ebenen.

Bei dieser Aussage handelt es sich um räumliche Kollineation, da beide Schnittfiguren in verschiedenen Ebenen liegen. Projiziert man alle Punkte und Geraden auf eine Ebene (in unserem Beispiel auf Π_1), so bleibt die kollineare Beziehung erhalten; man spricht dann von einer ebenen Kollineation. Diese Beziehung, die wir in Fig. 48 schon benutzt haben, ist von der räumlichen Kollineation nicht wesensverschieden.

Will man die in Fig. 48 gezeichnete Pyramide „abwickeln“, d. h. ihr Netz zeichnen, so verfährt man am einfachsten, wenn man die wahren Längen der Pyramidenkanten nach Nr. 17 bestimmt; man würde also alle durch S gehenden Kanten um $S'S$ parallel zur Vertikalebene drehen. Man braucht hierzu nur eine Hilfslinie durch S'' parallel zur Achse und so viel Hilfskreise um S', wie Pyramidenkanten vorhanden sind. Die wahren Längen der auf den Pyramidenkanten durch die Punkte E, F usw. abgeschnittenen Stücke bestimmt man nicht etwa auf dieselbe Weise, sondern unter Beachtung von Nr. 6, Satz 3, indem man durch E'', F'' usf. Parallelen zur Achse zieht. Die wahre Größe der Schnittfigur erhält man entweder schon hieraus oder durch Umklappung.

36. Wenn man einen ebenen Schnitt eines geraden oder schiefen Prismas darstellen will, so erkennt man, daß dieselben Überlegungen wie die in Nr. 35 angestellten zum Ziele führen, der einzige Unterschied ist der, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Schnittfiguren nicht mehr wie dort durch einen im Endlichen gelegenen Punkt gehen, sondern parallel laufen, während entsprechende Geraden sich immer noch auf einer festen Geraden schneiden. Diese Beziehung ist aber schon in Nr. 25 ausführlich besprochen worden. Wir sehen also:

Je zwei Schnitte eines Prismas sind perspektiv-affin, die Affinitätsstrahlen sind den Prismenseitenkanten parallel, die Affinitätsachse ist die den Schnittebenen gemeinsame Schnittgerade.

Zugleich erkennt man: Die Affinität ist nur ein Sonderfall der Kollineation; sie entsteht aus dieser, wenn das Kollineationszentrum ins Unendliche fällt.

Die Aufgabe, ein schiefes Prisma abzuwickeln, führt man am besten zurück auf die viel einfachere und schon im Buch für Kl. 7—9 behandelte Aufgabe, das Netz eines geraden Prismas zu zeichnen. Man führt zunächst nach Nr. 33 eine neue Projektionsebene parallel zu den Prismenkanten ein, schneidet dann das Prisma durch irgendeine Ebene senkrecht zu den Kanten und zerlegt auf diese Weise das schiefe Prisma in zwei gerade, aber schief abgeschnittene Prismen. Die wahre Größe des senkrechten Schnittes ermittelt man durch Drehung nach dem Muster von Nr. 17.

37. Eine bei praktischen Anwendungen sehr häufig auftretende Aufgabe ist die, den Schnitt zweier Körper, ihre sog. Durchdringung, zu zeichnen. Wenn die beiden Körper von ebenen Flächen begrenzt sind, so führt eines der in Nr. 26, 33, 35 und 36 besprochenen Verfahren immer zum Ziele. Wenn hiernach auch rein theoretisch genommen für das Auffinden der einzelnen Durchdringungspunkte keinerlei Schwierigkeit mehr vorliegt, so merkt man aber beim praktischen Zeichnen sehr bald, daß, wenn die Schnittfigur nur einigermaßen kompliziert ist, das Verbinden der aufeinanderfolgenden Ecken der Schnittfigur nicht ganz einfach wird. Daher zeigen wir jetzt an einem Beispiel, wie man leicht und sicher feststellen kann, in welcher Reihenfolge die Ecken der Schnittfigur miteinander zu verbinden sind.

In Fig. 49 ist die Durchdringung einer fünfkantigen Pyramide mit den Seitenkanten a, b, c, d, e und einer vierkantigen Pyramide mit den Seitenkanten p, q, r, s dargestellt. Die auf der Kante a gelegenen Ecken der Durchdringungsfigur sind mit 1 und 2 bezeichnet, die auf b gelegenen mit 3, 4 usw. Während des Zeichnens hat man dann die Lage der einzelnen Punkte 1, 2, ... 14 in die untenstehende Übersicht eingetragen. (Beispiel: Die Zeichnung lehrt, daß der Punkt 11 auf der Kante p und in der Ebene ab liegt, also ist er der Schnittpunkt der Ebenen ab, pq und ps, wie in Zeile 11 der Übersicht eingetragen ist.)

<table>
<tr><th rowspan="2">Ecken der Schnittfigur</th><th colspan="2">Flächen der fünfkantigen | vierkantigen Pyramide</th><th rowspan="2">Ecken der Schnittfigur</th><th colspan="2">Flächen der fünfkantigen | vierkantigen Pyramide</th></tr>
<tr><th>fünfkantigen</th><th>vierkantigen</th><th>fünfkantigen</th><th>vierkantigen</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">ab, ae</td><td>ps</td><td>8</td><td>cd, de</td><td>qr</td></tr>
<tr><td>2</td><td>rs</td><td>9</td><td rowspan="2">de, ae</td><td>pq</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">ab, bc</td><td>pq</td><td>10</td><td>rs</td></tr>
<tr><td>4</td><td>qr</td><td>11</td><td>ab</td><td rowspan="2">pq, ps</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">bc, cd</td><td>pq</td><td>12</td><td>ae</td></tr>
<tr><td>6</td><td>qr</td><td>13</td><td>ab</td><td rowspan="2">qr, rs</td></tr>
<tr><td>7</td><td>cd, de</td><td>pq</td><td>14</td><td>de</td></tr>
</table>

Wir wollen jetzt zeigen, daß man, ohne die Figur anzusehen, aus dieser Übersicht feststellen kann, in welcher Reihenfolge die Punkte zu verbinden sind. Geht man vom Punkte 1 längs der Geraden ab, ps (mit dieser Abkürzung wollen wir die Schnittgerade der Ebene ab und ps bezeichnen), so kann man, wie die Zeile 1 lehrt, nur noch auf die Gerade ae, ps stoßen. Man sucht nun in der Übersicht eine Zeile, in der noch einmal ae und ps gleichzeitig vorkommen; das ist Zeile 12, also ist 1 mit 12 zu verbinden. Da wir soeben auf der Geraden ae, ps nach 12 gelangt sind, bleibt nur noch eine Möglichkeit, von dem Punkte 12 weiterzukommen, nämlich auf *ae*, *pq*. Wo kommt *ae*, *pq* in der Übersicht schon einmal vor? Bei Zeile 9. Also ist 12 mit 9 zu verbinden usf.

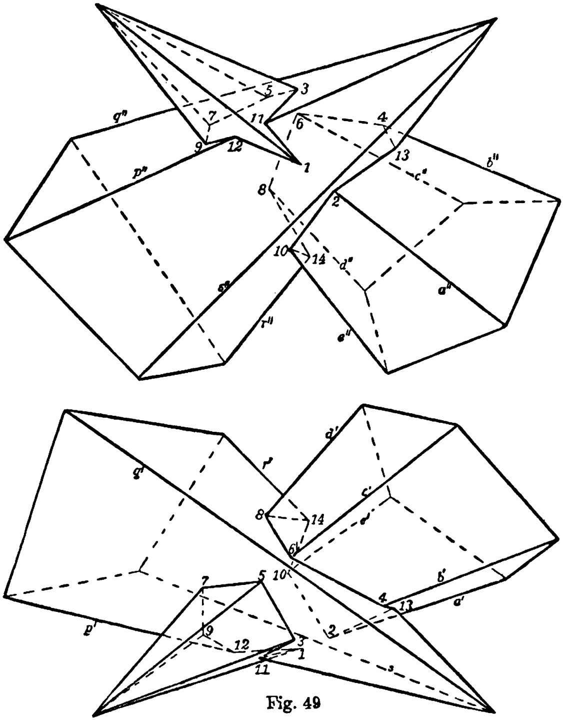

Fig. 49

Man merkt bei dem beschriebenen Verfahren auch ohne weiteres, ob die Durchdringungsfigur aus einem einzigen windschiefen Vieleck oder aus zwei getrennten Linienzügen besteht. Wenn man nämlich zum Ausgangspunkt 1 zurückgelangt, ohne daß alle Zeilen der Übersicht benutzt worden sind, so ist die Durchdringungsfigur zweizügig.

Aufgaben über runde Körper

38. Wir beschäftigen uns im folgenden (Nr. 38—40) zunächst mit der Darstellung von Punkten, die auf einem Zylinder, auf einem Kegel und auf

einer Kugel gelegen sind. Ein **schiefer Kreiszylinder**[1]), der mit seinem Grundkreis auf Π_1 steht, ist durch seine beiden Risse gegeben (Fig. 50). Von einem Punkt C, der auf der Zylinderfläche gelegen sein soll, kennt man den einen Riß (z. B. C'), gesucht ist der andere (C''). Da der durch C gehende horizontalprojizierende Strahl die Zylinderfläche im allgemeinen zweimal schneidet, gibt es zwei Punkte C, deren Grundriß C' ist, einen auf der Oberseite und einen auf der Unterseite des Zylinders; wir stellen, um die Figur nicht zu verwirren, nur den auf der Oberseite gelegenen Punkt dar. Wir denken uns durch C eine Mantellinie c gelegt, also durch C' die Parallele c' zum Grundriß der Erzeugenden gezogen; c' schneidet den Grundkreis in einem Punkte C_1'. Dieser ist die Horizontalspur der Mantellinie c; durch C_1'' und die Richtung des Aufrisses der Mantellinien ist auch c'' bekannt. Der gesuchte Aufriß C'' liegt auf c'' und auf der durch C' gehenden Ordnungslinie. — Wäre nicht C' gegeben und C'' gesucht, sondern C'' gegeben und C' gesucht, so hätten wir, um ans Ziel zu gelangen, den entgegengesetzten Weg wie hier einschlagen müssen. Man kann auch sehr leicht die durch den Punkt C gehende **Berührungsebene des Zylinders** finden. Diese Ebene streift nämlich den Zylinder längs der Erzeugenden c, und ihre Horizontalspur e_1 ist die in C_1' an den Grundkreis gelegte Tangente; um die Vertikalspur e_2 zu finden, braucht man nur durch C die Parallele h zu der Spur e_1 zu legen; die Vertikalspur H_2 von h ist ein Punkt von e_2.

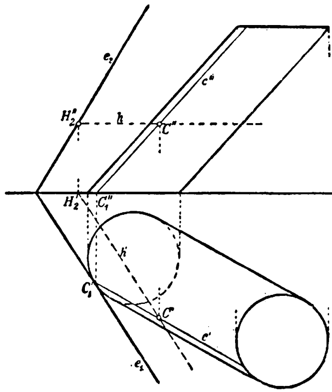

Fig. 50.

39. Ein **schiefer Kreiskegel**, der auf Π_1 steht, ist durch seinen Grundkreis und die Risse der Spitze S gegeben (Fig. 51). Von einem auf dem Kegel gelegenen Punkt K ist der eine Riß (z. B. K') gegeben; gesucht ist der andere (K''). Der Eindeutigkeit wegen wollen wir wieder, wie bei Nr. 38, nur den auf der Oberseite des Kegels gelegenen Punkt ermitteln. Wir legen durch K eine Mantellinie k; ihr Grundriß k' ist durch S' und K' bestimmt. Der Schnitt von k' mit dem Grundkreis ist die Horizontalspur K_1 von k; die Verbindung von K_1'' mit S'' gibt k''. Der gesuchte Aufriß K'' liegt auf k'' und auf der Ordnungslinie durch K'.

1) Man kann, wenn man will, zwischen dem (begrenzten) „Zylinder“ und der (unbegrenzten) „Zylinderfläche“ unterscheiden. Der Mantel des Zylinders ist ein Teil der Zylinderfläche, die Mantellinien sind Teile der geradlinigen Erzeugenden der Zylinderfläche, der Grundkreis ist Leitkurve (Direktrix) der Zylinderfläche.

Auch hier kann man (ähnlich wie in Nr. 38) die durch den Punkt K gehende **Berührungsebene des Kegels** sehr leicht ermitteln. Die in K_1 an den Grundkreis gelegte Tangente ist die Horizontalspur e_1 der Tangentialebene; einen Punkt der Vertikalspur e_2 erhält man, wenn man durch einen Punkt von k (am einfachsten durch die Spitze S selbst) zur Horizontalspur e_1 die Parallele h legt. Deren Vertikalspur H_2 ist ein Punkt von e_2.

40. Eine **Kugel** ist durch ihre beiden Risse gegeben (Fig. 52). Von einem auf der Kugel gelegenen Punkt K kennt man einen Riß (z. B. K'); man sucht den anderen (K''). Man denke sich durch K parallel zu Π_2 eine Ebene gelegt. Diese schneidet die Kugel in einem Kreise k, der im Grundriß als eine Sehne k', im Aufriß als ein Kreis k'' erscheint, dessen Durchmesser gleich der

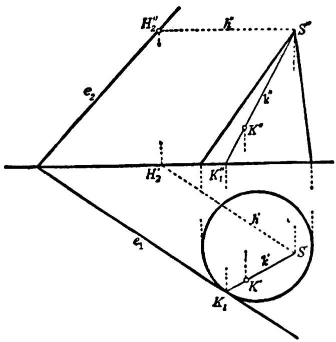

Fig. 51

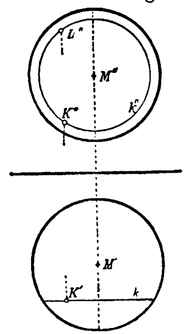

Fig. 52

Sehne k' ist. Die durch K' gehende Ordnungslinie schneidet den Kreis k' in zwei Punkten K'' und L'', die beide der gestellten Bedingung genügen.

Wollte man auch hier wie beim Zylinder und Kegel die Tangentialebene in K ermitteln, so würde man dies am einfachsten durch zwei (in Fig. 52 nicht gezeichnete) Spurparallelen g und h bestimmen, die beide durch K gehen, also z. B. $g' \perp M'K'$, g'' parallel zur Achse; $h'' \perp M''K''$, h' parallel zur Achse.

41. Die in Nr. 38—40 besprochenen Konstruktionen setzen uns in den Stand, auch die **Schnitte** einer gegebenen **Geraden** g mit einem auf Π_1 stehenden **schiefen Kreiszylinder** oder **Kreiskegel** oder auch mit einer **Kugel** zu bestimmen. Wir überlassen dem Leser die zeichnerische Durchführung dieser Konstruktionen und begnügen uns mit folgenden Andeutungen: Im Falle des Zylinders könnte man durch einen beliebigen Punkt von g die Parallele zu den Erzeugenden des Zylinders (etwa p) ziehen; g und p bestimmen eine Ebene, deren Horizontalspur den Grundkreis des Zylinders in zwei Punkten schneidet, durch die man nur noch Mantellinien zu legen braucht. Beim Kegel würde man eine Hilfsebene durch g und die Kegelspitze S legen. Im Kugelfalle würde man am besten nach Nr. 33 eine neue Rißebene parallel zu g einführen oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, durch g eine projizierende Ebene legen und den von dieser Ebene und der Kugel erzeugten Schnittkreis umklappen.

42. Wir bestimmen jetzt (Nr. 42—46) die Schnitte eines geraden Kreiskegels mit einer beliebigen Ebene E. Wie in § 6 Nr. 1 und 2 genauer gezeigt wird, ergibt sich als Schnittgebilde entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel. Diese Kurven führen daher auch den gemeinsamen Namen Kegelschnitte. Rein theoretisch genommen, könnte man die Kegelschnitte punktweise darstellen, indem man die schneidende Ebene E mit einer hinreichend großen Anzahl einzelner Mantellinien zum Schnitt bringt (etwa nach Nr. 26 oder 34), doch würde sich der schon in Nr. 34 bemängelte Übelstand hier noch unangenehmer als dort bemerkbar machen. Wir werden daher, um genauere Zeichnungen zu erhalten, die kollinearen Beziehungen und auch einige erst in § 6 recht verständlich werdende Eigenschaften der Kegelschnitte benutzen. Steht der Kegel, wie in jedem der drei zu behandelnden Fälle angenommen werden soll, auf Π_1, so ist aus Symmetriegründen klar, daß die Hauptachse der Schnittkurve eine Fallinie der Ebene E ist, und zwar diejenige Fallinie, deren Grundriß durch den Grundriß der Kegelspitze S hindurchgeht. Legt man also durch S senkrecht zu e_1 eine horizontal-projizierende Ebene, so schneidet diese aus dem Kegel zwei Mantellinien aus, deren Schnittpunkte mit E die Hauptscheitel A und B der Schnittkurve sind (Fig. 53). Die durch A und B gelegten Horizontalspurparallelen sind die Scheiteltangenten der Kurve. Der Mittelpunkt O von $A\,B$ ist Mittelpunkt der Kurve. Legt man durch O eine Ebene parallel zu Π_1, so schneidet diese aus dem Kegel einen Kreis heraus. Dieser erscheint im Aufriß als die Strecke $U''\,V''$; schlägt man mit

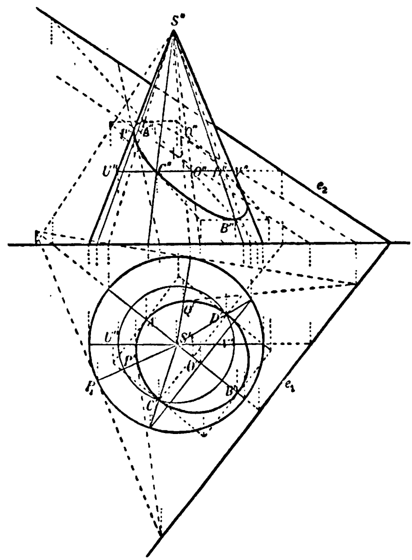

Fig. 53

der Hälfte von $U''V''$ um S' einen Kreis, so hat man damit den Grundriß jenes Schnittkreises; er schneidet die durch O parallel zu e_1 gelegte Gerade in den Nebenscheiteln C und D der Kurve[1]). Das der Kurve umschriebene Rechteck, dessen Symmetrielinien AB und CD die Achsen der Kurve sind, erscheint im Aufriß als ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm mit konjugierten Seitenrichtungen. Kennt man aber von einer Ellipse ein Parallelogramm mit konjugierten Seitenrichtungen oder, was dasselbe sagt, ein Parallelogramm, dessen Mittellinien konjugierte Durchmesser sind, so kann man die Ellipse mit hervorragender Genauigkeit zeichnen, wie im folgenden gezeigt wird.

43. Es sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M gezeichnet (Fig. 54), in diesem ein fester Durchmesser AB, ein dazu senkrechter CD, ein beweglicher Punkt X, ferner das umschriebene Quadrat $EFGH$, dessen Seitenmitten A, B, C, D sind. AX und BX schneiden GD und MD in P und Q. Aus der Kongruenz der Dreiecke BMQ und AGP folgt $MQ = GP$ und hieraus nach der Umkehrung des Strahlensatzes $PQ \parallel GM$. Bildet man also die ganze Figur durch Parallelprojektion (schief oder orthogonal) auf eine Ebene ab, so erscheinen PQ und GM wieder als Parallelen, der Kreis als eine Ellipse und das Quadrat $EFGH$ als ein dieser Ellipse umschriebenes Parallelogramm mit konjugierten Seitenrichtungen. Das zeichnerisch Wichtige hierbei ist, daß man in diesem Parallelogramm die einzelnen Ellipsenpunkte allein durch Parallelen, also mit Hilfe von Schiebdreiecken konstruieren kann.

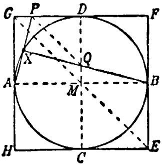

Fig. 54

44. Ein besonders gutes Hilfsmittel für das genaue Zeichnen eines Kurvenzuges ist die Konstruktion von Tangenten in wichtigen Punkten oder von Berührungspunkten auf wichtigen Tangenten; z. B. sind in Fig. 53 noch die Punkte der Schnittkurve ermittelt, die auf dem scheinbaren Umriß des Aufrisses liegen. Man findet sie am einfachsten, wenn man durch die Kegelspitze S eine Ebene parallel zu Π_2 legt; diese schneidet E in einer Vertikalspurparallelen, deren Aufriß den Umriß des Kegelaufrisses in den gesuchten Punkten schneidet. Ein anderes Hilfsmittel, die Genauigkeit der Zeichnungen mit Hilfe der Tangenteneigenschaften zu erhöhen, bietet die Tatsache, daß nach Nr. 35 zwischen der Schnittfigur und dem Grundkreis eine perspektiv-kollineare Beziehung besteht. Soll man also z. B. in dem Punkte P der Schnittkurve die Tangente zeichnen, so sucht man zunächst auf dem Grundkreis den Punkt P_1 auf, der dem Punkte P entspricht, also den Schnittpunkt von $P'S'$ und dem Grundkreis. Die Tangente in P_1 und die Tangente in P müssen sich auf e_1 schneiden, weil

1) Eine gute Genauigkeitsprobe für die Konstruktion der Punkte C und D ist folgende. Legt man durch die Horizontalspur der Geraden SO zu e_1 die Parallele, so schneidet diese aus dem Grundkreis zwei Punkte aus, deren Verbindungslinien mit S durch C und D gehen müssen (in Fig. 53 noch angegeben). Natürlich hätte man C und D auch auf diese Weise allein konstruieren können.

beide in der durch P gehenden Tangentialebene des Kegels liegen (siehe Nr. 39); die Konstruktion ist in Fig. 53 für die Punkte P und Q ausgeführt.

45. In Fig. 55 ist ein gerader Kreiskegel dargestellt, der von der Ebene E in einer Parabel geschnitten wird. Dieser Fall tritt ein, wenn E zu einer Mantellinie des Kegels, etwa zu SA parallel liegt. Dann muß natürlich e_1 parallel der in A an den Grundkreis gelegten Tangente sein. Führt man nach Nr. 33 eine neue Rißebene parallel zu SA ein, so erscheint e_3 als Parallele zu $S'''A'''$. Man kennt damit den Scheitel B und die beiden in der Horizontalebene gelegenen Punkte C und D der Schnittparabel. Weitere Punkte erhält man am einfachsten, wenn man eine Schar von Hilfsebenen benutzt, die parallel zu Π_1 verlaufen. Diese Ebenen schneiden den Kegel in Kreisen, die sich auf Π_2 und Π_3 als Parallelen zur Achse abbilden; der Fortgang der Konstruktion ist aus Fig. 55 ohne weiteres ersichtlich. Daß man auch hier wieder die in Nr. 44 angegebenen Hilfsmittel benutzen wird, versteht sich von selbst.

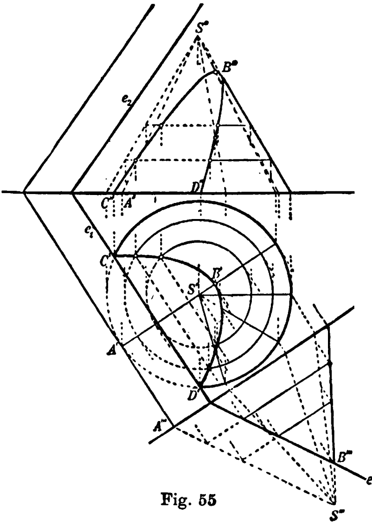

Fig. 55

46. Wir behandeln nun noch den Fall, daß der gerade Kreiskegel von einer Ebene E in einer Hyperbel geschnitten wird. Dies geschieht, wenn es auf dem Kegel zwei Mantellinien gibt, die zu E parallel sind oder m. a. W., wenn die durch die Kegelspitze S zu E gelegte Parallelebene zwei Erzeugende SP und SQ aus dem Kegel herausschneidet (Fig. 56). Diese Erzeugenden geben zugleich die Asymptotenrichtungen der Schnitt-

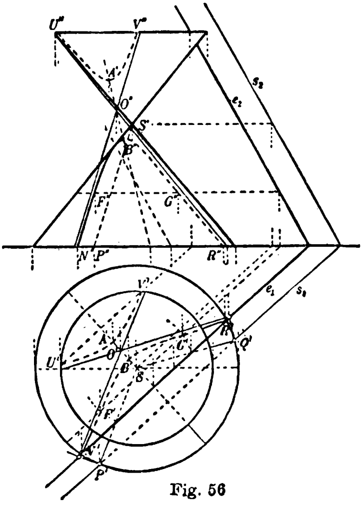

Fig. 56

hyperbel an. Schneidet die Ebene E aus dem Grundkreise die Sehne NR und aus dem oberen Begrenzungskreise die Sehne UV heraus, so hat man in den Punkten N, R, U, V schon vier wichtige Punkte der Hyperbel. Die Scheitel A, B der Kurve, die Scheiteltangenten und den Mittelpunkt O findet man genau wie in Nr. 42. Die Asymptoten der Kurve könnte man zwar leicht dadurch finden, daß man durch O Parallelen zu SP und SQ zieht; aber wir wollen nicht unterlassen, noch auf eine hübsche Kollineationsbeziehung hinzuweisen, zu der die Asymptoten Anlaß geben. Entsprechende Tangenten der Schnittkurve und des Grundkreises müssen sich auf e_1 schneiden. Da nun die unendlich fernen Punkte der Schnitthyperbel zu den Punkten P und Q des Grundkreises perspektiv-kollinear sind, so braucht man nur in P und Q an den Grundkreis die Tangenten zu legen. Diese schneiden dann e_1 in je einem Punkte der Asymptoten.

Auch hier wieder kann man, wie schon bei Nr. 42 einmal und in Nr. 45 wiederholt geschehen ist, einzelne Punkte der Schnittkurve finden, indem man den Kegel durch Hilfsebenen parallel zu Π_1 schneidet; die Punkte F und G in Fig. 56 sind auf diese Weise konstruiert worden.

47. Wie man den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ermittelt, ist nach dem Vorhergehenden leicht anzugeben. Die zeichnerische Ausführung kann dem Leser überlassen bleiben; es genügt zu sagen, daß man am einfachsten eine neue Rißebene einführt, die auf den Streichlinien der schneidenden Ebene senkrecht steht. Der Schnittkreis erscheint dann in dem neuen Riß als Sehne des Kugelbildes. Ausgezeichnete Punkte, z. B. die Scheitel und Mittelpunkte der Risse des Schnittkreises, kann man dann leicht nach dem Muster von Nr. 42 und 46 konstruieren.

Schattenlehre und Perspektive

Schattenlehre

48. Man kann die Anschaulichkeit darstellend-geometrischer Zeichnungen dadurch erhöhen, daß man sich die dargestellten Raumgebilde beleuchtet vorstellt und ihre Schatten ermittelt. Wir gehen hierbei von folgenden Voraussetzungen aus:

1. als Lichtquelle dient ein leuchtender Punkt,
2. das Licht pflanzt sich geradlinig fort,
3. alle dargestellten Raumgebilde sind undurchsichtig.

Unter diesen Voraussetzungen wirft ein Punkt P des Raumes, der von einer Lichtquelle S beleuchtet wird, auf eine Ebene E_1 einen Schatten P_1, der als Schlagschatten von P auf E_1 bezeichnet wird; geometrisch ist er nichts anderes als der Schnittpunkt der Geraden SP mit der Ebene E_1.

Fallen die von S ausgehenden Lichtstrahlen auf einen Körper, z. B. ein Vielflach, so wird ein Teil der Körperoberfläche beleuchtet, ein anderer bleibt dunkel. Von diesem dunklen Teile sagt man, er liege im Eigenschatten. Die Grenze zwischen dem beleuchteten und dem im Eigenschatten liegenden Teile des Körpers ist im allgemeinen ein windschiefes Vieleck, längs dessen die von S ausgehenden Lichtstrahlen den Körper gerade **streifen**, also je einen und nur einen Punkt mit ihm gemeinsam haben. — Wenn man z. B. den in Fig. 57 skizzierten Würfel $ABCDEFGH$ von einem Punkte S der verlängerten Körperdiagonale GA aus beleuchtet, so sind die drei in A zusammenstoßenden Quadrate erhellt, und die drei in G zusammenstoßenden Würfelflächen liegen im Eigenschatten. Das „Streifvieleck" ist in diesem Falle das windschiefe Sechseck $BCDHEF$. — Allgemein ist der Schlagschatten des Streifvielecks auf irgendeine Ebene der Umriß des Schlagschattens, den das Vielflach auf diese Ebene wirft. Wenn ein Lichtstrahl einen oder mehrere Körper bei ausreichender Verlängerung in mehr als zwei Punkten schneidet, so liegt der erste Durchstoßpunkt im Lichte, der 2., 4. usw. im Eigenschatten, der 3., 5. usw. im Schlagschatten.

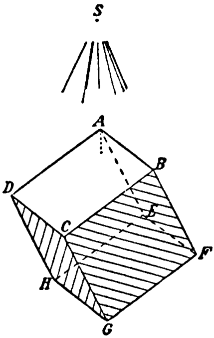

Fig. 57

49. Rückt der in Nr. 48 mit S bezeichnete leuchtende Punkt in unendliche Entfernung, so erhält man **Parallelbeleuchtung**. Eine bemerkenswerte Annäherung an diese Beleuchtungsart bieten die **Sonnenstrahlen**.

Bei Ausführung **technischer** Zeichnungen nimmt man meist an, daß die parallel einfallenden Strahlen eine ganz bestimmte Lage zu den Rißebenen haben, nämlich so, daß Grundriß und Aufriß der Lichtstrahlen mit der Projektionsachse einen Winkel von 45° bilden; die Strahlen haben also dieselbe Lage wie die von links oben vorn nach rechts unten hinten verlaufende Körperdiagonale eines Würfels in Frontstellung. — Wir setzen im folgenden immer dieses sogenannte 45°-Licht voraus.

Der Schlagschatten eines Punktes P auf eine der Rißebenen ist hiernach nichts anderes als die Horizontal- oder Vertikalspur des durch P gehenden 45°-Lichtstrahls, und zwar fällt der Schatten von P auf diejenige der beiden Rißebenen, der er am nächsten gelegen ist (Fig. 58).

Ist P von beiden Rißebenen gleich weit entfernt (und im ersten Quadranten gelegen), so fällt sein Schatten auf die Projektionsachse.

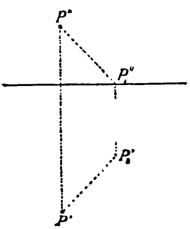

Fig. 58

50. Auf Grund der in Nr. 48 und 49 getroffenen Festsetzungen kann man den Schlagschatten eines Punktes auf eine der Rißebenen nach Nr. 7, ebenso den Schlagschatten auf eine andere Ebene nach Nr. 26 finden. Da die Projektionsebenen als undurchsichtig vorausgesetzt sind, kann jeder Punkt (abgesehen von dem in Nr. 49 am Schlusse erwähnten Sonderfall) nur auf eine der Rißebenen Schatten werfen. Man konstruiert aber doch meist Horizontal- und Vertikalschatten, und zwar deshalb, weil man dadurch scharfe Genauigkeitsproben gewinnt. Bezeichnet man den

Horizontalschatten eines Punktes P mit P_1 und den Vertikalschatten mit P_2, so folgt aus der in Nr. 49 getroffenen Festsetzung über die Lage der Lichtstrahlen, daß P_1 und P_2 voneinander und von der Projektionsachse gleich weit entfernt sind (weil $P_2''P_2'P_1''$ und $P_2'P_1''P_1'$ gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sind, die $P_2'P_1''$ gemeinsam haben) oder m. a. W., daß Horizontal- und Vertikalschatten eines Punktes zwei Ecken eines Quadrates bilden, dessen andere Ecken auf der Projektionsachse liegen (Fig. 59).

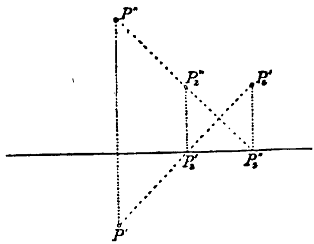

Fig. 59

Zeichnet man also von einer Geraden PQ den Horizontalschatten P_1Q_1 und den Vertikalschatten P_2Q_2 unabhängig voneinander, so müssen sich $P_1'Q_1'$ und $P_2''Q_2''$ in einem Punkte der Projektionsachse schneiden. Dieser Punkt, in dem der Schatten der Geraden PQ geknickt erscheint,

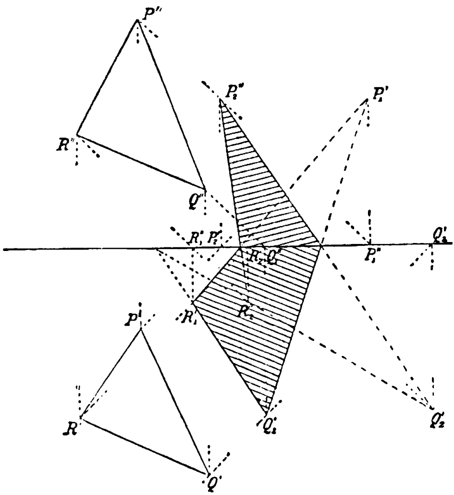

Fig. 60

ist nichts anderes als der Schlagschatten des Schnittpunktes der Geraden PQ mit der „ersten Halbierungsebene“ (siehe Nr. 5). – Die soeben aufgestellte Beziehung läßt sich noch in anderer Weise aussprechen. Im

Horizontal- und Vertikalschatten haben entsprechende Punkte (z. B. P_1' und P_2'' oder Q_1' und Q_2'') parallele Verbindungslinien (nämlich parallel der Projektionsachse), und entsprechende Geraden (z. B. $P_1'Q_1'$ und $P_2''Q_2''$) schneiden sich auf einer Geraden (nämlich auf der Projektionsachse). Das ist aber nichts anderes als die am Schlusse von Nr. 25 betrachtete Affinitätsbeziehung. Wir können also auch sagen: Horizontal- und Vertikalschatten sind perspektiv-affin. Die Affinitätsachse ist die Projektionsachse, und die Affinitätsstrahlen laufen parallel zu dieser.

Mittels dieser Beziehung kann man die Genauigkeit der Schattenkonstruktionen scharf prüfen. Als Beispiel ist in Fig. 60 der Schatten eines Dreiecks PQR gezeichnet; dabei sind die Horizontal- und Vertikalschatten der einzelnen Seiten unabhängig voneinander ermittelt und dann die Richtigkeit der Zeichnung unter Benutzung der affinen Verwandtschaft geprüft worden.

Aus der Art unserer Beweisführung ergibt sich, daß die besprochene Affinitätsbeziehung ganz allgemein (z. B. auch für die Schlagschatten runder Körper) gilt.

Hätte man z. B. den Schlagschatten einer Kugel zu ermitteln, so könnte man zunächst durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht zur Richtung des 45°-Lichtes eine Ebene legen, die einen Großkreis der Kugel herausschneidet (dieser ist zugleich das „Streifvieleck" im Sinne von Nr. 48). Dem Großkreis würde man ein Quadrat umschreiben (etwa so, daß zwei Seiten parallel zur Grundrißebene laufen) und dessen Horizontal- und Vertikalschatten unabhängig voneinander ermitteln, dann mittels der angegebenen Affinitätsbeziehung auf Genauigkeit prüfen. In die beiden Parallelogramme, die als Schatten des Quadrates auftreten, hätte man dann nur noch die Ellipsen einzuzeichnen, welche die Parallelogrammseiten in den Mitten berühren (z. B. nach Nr. 42 und 43).

Perspektive

51. Um einen Körper aus einem Zentrum O (Auge) auf eine Bildebene $\mathbf{B}$ perspektivisch abzubilden, verbindet man jeden Punkt des Körpers mit O und bringt die Verbindungslinie zum Schnitt mit $\mathbf{B}$. Benutzt man als Bildebene eine durchsichtige Zeichenfläche, etwa eine Glasscheibe, und steht der abzubildende Körper hinter der Bildebene, so kann man alle sichtbaren Begrenzungslinien des Körpers auf der Glastafel nachzeichnen und so eine perspektivische Abbildung (kurz „Perspektive") des Körpers erhalten.

Zu beachten ist, daß der Körper aus einem Zentrum projiziert wird und daß daher auch die Perspektive des Körpers nur dann einen natürlichen Eindruck machen kann, wenn sie mit einem Auge betrachtet und dabei das Auge in die Lage gebracht wird, die das Projektionszentrum hatte.

52. Wir behandeln zunächst die Ermittelung der Perspektive eines Körpers nach der sog. Schnittmethode.

Der perspektivisch abzubildende Körper sei durch Grundriß und Aufriß gegeben; in Fig. 61 ist als Beispiel ein Würfel gewählt. Die durch ihre

Spuren b_1 und b_2 gegebene Bildebene **B** sei senkrecht zur Horizontalebene und beliebig geneigt zur Vertikalebene; das Projektionszentrum O sei durch seine beiden Risse gegeben. Um irgendeine Ecke des Würfels, etwa P, auf die Ebene **B** abzubilden, ermittelt man den Schnitt der Geraden OP mit **B**; es sei der Punkt $\mathfrak{P}$. Verfährt man so mit allen Ecken des Würfels, so erhält man die beiden Risse des perspektivischen Bildes; der Grundriß fällt ganz in die Horizontalspur b_1, der Aufriß ist $\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''\mathfrak{R}''\mathfrak{S}''\mathfrak{T}''\mathfrak{U}''\mathfrak{V}''\mathfrak{W}''$. Die wahre Gestalt des Bildes (also die gesuchte

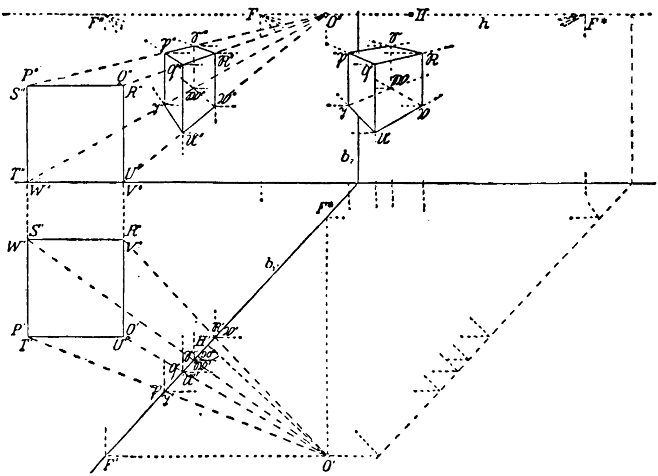

Fig. 61

Perspektive) ist in Fig. 61 nach dem in Nr. 17 angegebenen Verfahren ermittelt, nämlich durch Drehung des in **B** gelegenen Bildes um b_2; dabei ist der Übersichtlichkeit wegen die wahre Größe des Bildes um ein passendes Stück nach rechts parallel verschoben gezeichnet, weil andernfalls wichtige Linien der Perspektive mit ebensolchen des Aufrisses durcheinandergelaufen wären.

53. In Fig. 61 ist vom Auge O noch das Lot OH auf die Bildebene **B** gefällt. Der Fußpunkt H dieses Lotes wird Augenpunkt oder Hauptpunkt genannt. Die Länge OH des Lotes heißt Distanz (Entfernung des Auges von der Bildebene). Die durch H parallel zu b_1 gelegte Gerade h wird Horizontalgerade, auch kurz Horizont genannt; die Ebene durch O und h heißt Horizontebene. Die Ebene, auf der der Würfel steht, wird als Grundebene und ihr Schnitt mit der Bildebene (also hier die Spur b_1)

als Grundlinie bezeichnet. (In Fig. 65 sind dieselben Gebilde noch einmal für den Fall dargestellt, daß der abzubildende Körper nicht durch seine Risse gegeben ist.)

Zieht man durch O zu den Kanten PQ, RS, TU und VW die Parallele, so schneidet diese die Bildebene in einem Punkte F des Horizontes h, der nichts anderes ist als das Bild des unendlich fernen Punktes der genannten vier Geraden. Da hiernach die Bilder der vier Würfelkanten bei gehöriger Verlängerung durch den Punkt F gehen (nach ihm „fliehen"), wird F der Fluchtpunkt der vier parallelen Geraden genannt. Ebenso schneiden sich die Bilder der parallelen Kanten PS, QR, UV und TW in einem anderen auf h gelegenen Fluchtpunkte F^* (dessen Aufriß mit O'' zusammenfällt).

54. Die soeben erklärten Begriffe kann man zu einem anderen Abbildungsverfahren benutzen, das wir des lehrreichen Vergleiches wegen an genau demselben Körper bei genau derselben Lage zur Bildebene durchführen wollen. Irgendeine Kante des Würfels, z. B. TU, wird bis zum Schnitt mit der Bildebene verlängert. Der erhaltene Punkt X, der Spurpunkt von TU, ist mit seinem Bilde identisch. Ein weiterer Punkt des Bildes von TU ist der Fluchtpunkt F. Um also das Bild von TU zu finden, braucht man nur noch den Spurpunkt X mit dem Fluchtpunkt F zu verbinden. Diese Abbildung einer Geraden durch Spurpunkt und Fluchtpunkt ist in Fig. 62 zunächst für alle in der Grundebene gelegenen Kanten des Würfels durchgeführt. Um eine nicht in der Grundebene gelegene, aber zu ihr parallele Gerade, z. B. PQ, abzubilden, braucht man nur zu beachten, daß der Spurpunkt von PQ (er heiße Y) senkrecht über X liegt und daß die Strecke XY, weil sie in der Bildebene liegt, sich in wahrer Größe abbildet. Als Genauigkeitsprobe kann man z. B. die Tatsache benutzen, daß

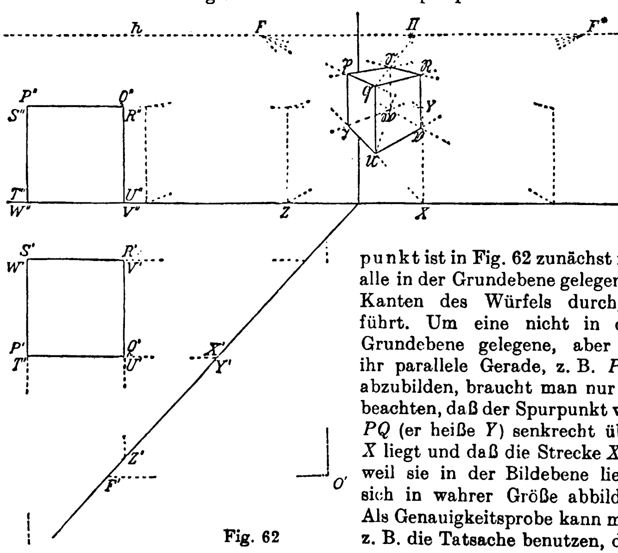

Fig. 62

sich die Bilder der Diagonalen QS und UW auf dem Horizonte schneiden müssen; natürlich kann man auch prüfen, ob die unabhängig voneinander gefundenen Strecken 𝔓𝔗, 𝔔𝔘, ℜ𝔙 und 𝔖𝔚 untereinander parallel sind.

Bemerkenswert ist, daß der in Fig. 61 noch gebrauchte Aufriß des Bildes hier nicht mehr erforderlich ist. Die Perspektive könnte übrigens auch in eine ganz getrennte Figur übertragen werden.

55. Noch einfacher als in Nr. 52 und 54 läßt sich das Bild des Körpers ermitteln, wenn man die Ebene des Papiers, die bisher als Aufrißebene gedient hat, nunmehr als Bildebene benutzt und die Grundebene mit allem,

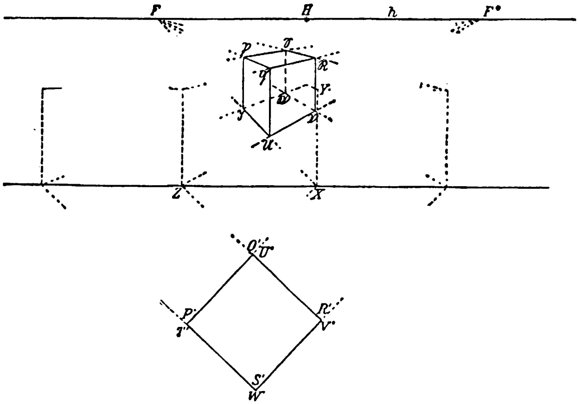

Fig. 63

was in ihr liegt, „herabschlägt". Das muß freilich (damit die Linien des Grundrisses die des Bildes nicht verwirren) in der Weise geschehen, daß der Grundriß von unten her, nicht wie gewöhnlich (vgl. Nr. 1 und 4) von oben her betrachtet wird. (Fig. 63.) Den Punkt 𝔘 findet man z. B. dadurch, daß man die Spuren von TU und UV in der Grundlinie ermittelt; es sind die Punkte X und Z. Verbindet man X mit F und Z mit F^*, so bestimmen die beiden Verbindungslinien den Punkt 𝔘. Ähnlich findet man das Bild der senkrecht über U gelegenen Ecke Q, nur hat man hierbei die Würfelkante QU bis an die Bildebene herangeschoben zu denken, so daß also $XY = QU$ wird. Die Verbindungslinie YF ist ein Ort für 𝔔, ein zweiter ist die Verbindung der Spur von QR mit F^*. Zur Prüfung der Genauigkeit benutzt man hier die Tatsache, daß 𝔔𝔘 auf der Grundlinie senkrecht steht.

56. Die in Nr. 55 ausgeführte Konstruktion lehrt zugleich allgemein, wie man verfahren kann, wenn man in dem perspektivischen Bilde eines in der

Grundebene gelegenen Punktes G eine Vertikale von gegebener Länge errichten soll.[1]) Man verbindet den Bildpunkt $\mathfrak{G}$ mit einem der Fluchtpunkte, z. B. mit F, bringt die Verbindungslinie $F\mathfrak{G}$ zum Schnitt mit der Grundlinie in L, trägt auf der in L auf der Grundlinie errichteten Senkrechten die gegebene Länge ab bis M und zieht MF. Diese Gerade begrenzt auf der in $\mathfrak{G}$ errichteten Senkrechten ($\perp h$) die gesuchte Länge $\mathfrak{G}\mathfrak{N}$. Man erkennt sogleich, daß die Konstruktion auf folgenden beiden Grundgedanken beruht: $\mathfrak{G}F$ und $\mathfrak{N}F$ sind Bilder zweier Parallelen. Die Strecke LM wird, weil sie in der Bildebene liegt, in wahrer Größe abgebildet.

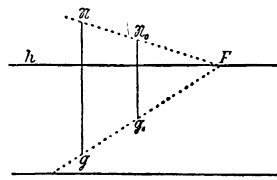

Fig. 64

Hat man eine in der Perspektive gegebene Vertikale auf der Grundebene (z. B. die Strecke $\mathfrak{G}\mathfrak{N}$) an andere Stellen des Bildes (z. B. $\mathfrak{G}_0$) in gleicher wahrer Länge zu übertragen (z. B. perspektivische Darstellung von Telegraphenstangen), so kann man nach dem Vorhergehenden so verfahren: Die Gerade $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0$ schneide den Horizont h in F (Fig. 64). Man verbinde F mit $\mathfrak{N}$ und ziehe durch $\mathfrak{G}_0$ zu $\mathfrak{G}\mathfrak{N}$ die Parallele. Auf dieser begrenzt $F\mathfrak{N}$ die gesuchte Länge $\mathfrak{G}_0\mathfrak{N}_0$.

57. Die in Nr. 55 und 56 angegebenen Konstruktionen leiten zu einer anderen Abbildungsart über, die man als freie Perspektive bezeichnet. In Fig. 65 sind die in Nr. 53 erklärten Begriffe noch einmal zeichnerisch erläutert. Überdies sind die von O ausgehenden, in der Horizontalebene gelegenen und gegen die Bildebene unter 45^0 geneigten Geraden OD_1 und OD_2 dargestellt. Die Punkte D_1 und D_2, die (nach der in Nr. 53 gegebenen Erklärung) nichts anderes sind als die Fluchtpunkte aller zur Grundebene parallelen und gegen die Bildebene unter 45^0 geneigten Geraden, heißen die Distanzpunkte (weil HD_1 und HD_2 gleich der Distanz OH sind). Soll ein Punkt P der Grundebene abgebildet werden, so kann man durch ihn zwei horizontale Geraden PX_1 und PX_2 legen, die gegen die Bildebene unter 45^0 geneigt sind. Ihre Fluchtpunkte sind die Distanzpunkte D_1 und D_2, also bilden sich die Geraden PX_1 und PX_2 als D_1X_1 und D_2X_2 ab. Der Schnitt dieser Geraden ist das Bild $\mathfrak{P}$ des Punktes P. Klappt man die Grundebene und die Horizontalebene in dem durch Pfeile angegebenen Sinne (Fig. 65) in die Bildebene um, so erhält man Fig. 66. Darin ist (O) das „umgeklappte Auge" und die Gerade D_1D_2 der Horizont.

Die Benutzung der Distanzpunkte D_1 und D_2 ist besonders dann bequem, wenn ein Körper abzubilden ist, bei dem an irgendwelchen Stellen Quadrate in Frontlage eine Rolle spielen (z. B. Schachbrett, Parkettbodenmuster o. ä.); hierbei sind dann D_1 und D_2 die „Diagonalfluchtpunkte". In anderen Fällen kann man den Punkt P der Grundebene natürlich auch

1) Der Schüler möge die zugehörige, sehr einfache Zeichnung selbst entwerfen.

durch beliebige andere Geraden abbilden, z. B. durch eine unter beliebigem Winkel gegen die Grundebene geneigte Gerade PU, der in der Horizontebene die zu PU parallele Gerade OV entspricht; insbesondere kann man auch von P auf die Grundlinie das Lot PL fällen, dem in der Horizontebene die Distanz OH entspricht.

Hat man irgendeinen nur rechte Winkel enthaltenden Grundriß (z. B. wie in Fig. 67 ein Kreuz) abzubilden, ohne daß die Lage des Auges gegeben ist, so kann man die Fluchtpunkte F und F^* der beiden Hauptrichtungen des Grundrisses beliebig wählen. Durch die Spuren der einzelnen Grund-

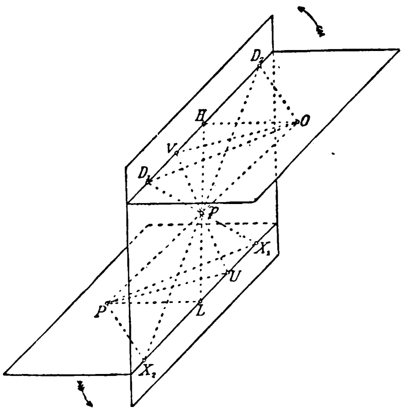

Fig. 65

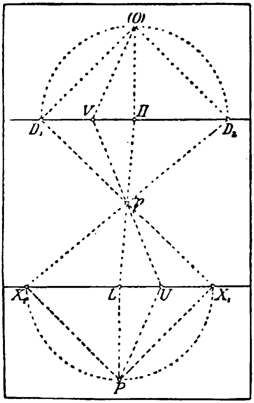

Fig. 66

rißseiten und die beiden Fluchtpunkte F und F^* sind dann die Punkte der Perspektive bestimmt. Die Konstruktion erlaubt eine gute Genauigkeitsprobe: Da der Winkel FOF^* ein rechter ist, so muß das umgeklappte Auge (O) auf dem Halbkreis liegen, der FF^* als Durchmesser hat, und die Verbindungslinie jedes Grundrißpunktes mit seiner Perspektive muß durch (O) gehen. Diese Probe ist in Fig. 67 bei den sieben am weitesten nach rechts gelegenen Ecken des Kreuzes ausgeführt.

58. Unter den Aufgaben, die für die freie Perspektive Bedeutung haben, wollen wir als eine der einfachsten die perspektivische Teilung einer Strecke in n gleiche Teile behandeln.

Wir nehmen zunächst an, die zu teilende Strecke PQ liege in einer horizontalen Ebene. Man zieht (Fig. 68) durch einen der Endpunkte, etwa P, die Parallele zum Horizont, trägt auf ihr von P aus hintereinander n beliebige, aber gleiche Strecken ab bis R; die Verbindungslinie QR schneidet den Horizont in einem Punkte F, den man nur noch mit den einzelnen Teilpunkten von PR zu verbinden hat. Die Begründung der Konstruktion beruht darauf, daß die auf PR bestimmten Teilungsverhältnisse (weil PR parallel zur Bildebene ist) bei der Abbildung ungeändert bleiben und daß die durch F nach den einzelnen Teilpunkten von PR laufenden Geraden Bilder von Parallelen sind.

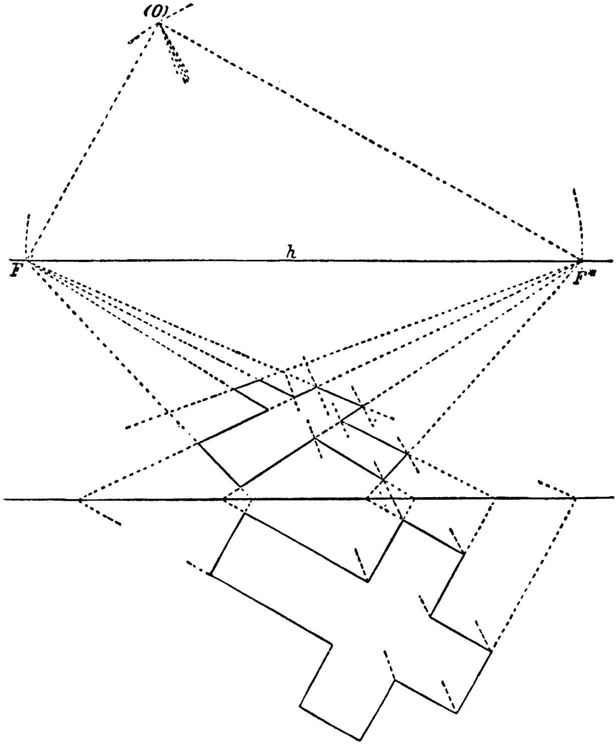

Fig. 67

Ist die zu teilende Strecke PQ gegen die Grundebene geneigt, so muß noch, wenn die Teilung ausführbar sein soll, der Grundriß der Strecke gegeben sein. Man lege durch P die horizontale Ebene und projiziere auf diese den Punkt Q in Q'. Man teilt dann den Grundriß PQ' in der verlangten Art und zieht durch die erhaltenen Teilpunkte Vertikalen. Diese teilen PQ in der verlangten Weise.

Die besprochenen Konstruktionen können auch unmittelbar dazu benutzt werden, auf dem Bilde einer beliebigen Geraden eine Strecke, deren wahre Größe gegeben ist, abzutragen.

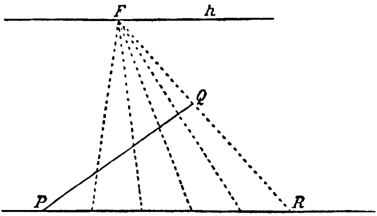

Fig. 68

Ebenso läßt sich die Übertragung von Höhen in ein perspektivisches Bild (in Anlehnung an Nr. 56) leicht ausführen.

59. Wegen der hohen Bedeutung, die den Kegelschnitten als Zentralprojektionen des Kreises zukommt (vgl. § 6, Nr. 19 und 20), wollen wir noch einiges über die perspektivischen Bilder des Kreises anführen. Man lege durch das Auge zur Bildebene die Parallelebene; diese schneidet die Grundebene in einer Geraden, die man Verschwindungsgerade nennt. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß alle ihre Punkte sich im Unendlichen abbilden. Die Verschwindungsgerade verläuft (nach der Klappung) oberhalb der Grundlinie parallel zu ihr, und zwar in einem Abstande, der gleich der Distanz ist. Hat man nun einen Kreis der Grundebene abzubilden, so wird die Gestalt des Bildes wesentlich von der Lage des Kreises zur Verschwindungsgeraden abhängen. Wie nämlich eine einfache Überlegung zeigt, ist das perspektivische Bild eines in der Grundebene gelegenen Kreises eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Kreis die Verschwindungsgerade meidet, berührt oder schneidet. Zur wirklichen Ausführung der Zeichnung (die hier übergangen wird, weil sie den Übungen überlassen bleiben kann) umhüllt man den Kreis mit passenden Tangenten, die man perspektivisch abbildet.

Kartenentwurfslehre

60. Die Aufgabe, die Oberfläche der Erde auf eine andere Fläche abzubilden, läßt sich in jeder Hinsicht befriedigend nur dann lösen, wenn die Bildfläche selbst wieder eine Kugelfläche ist. Denkt man sich nämlich in diesem Falle die Bildkugel mit der Erdkugel in konzentrische Lage gebracht, so wird durch jeden Halbmesser einem Punkte der Erdoberfläche eindeutig ein Punkt der Bildkugel (Globus) zugeordnet, und jeder Teil der Erdoberfläche wird so abgebildet, daß Urbild und Abbild einander in mathematischem Sinne ähnlich sind. Bildet man dagegen die Oberfläche der Erde auf irgendeine nichtkugelige Fläche ab, so weicht das Abbild vom Urbild entweder in den Winkeln oder in den Seitenverhältnissen (vielfach auch in beiden) ab. Den gesetzmäßigen Verlauf der einfachsten unter diesen Abbildungen untersucht die Kartenentwurfslehre, die sich mit der Aufgabe befaßt, die Erdoberfläche oder Teile von dieser auf eine ebene Fläche abzubilden.

Die Lage eines Punktes auf der Erde ist durch seine geographische Länge und Breite festgelegt (für die scheinbare Himmelskugel sind entsprechende Koordinatensysteme erdacht worden, vgl. § 5, Nr. 6 bis 18). Es genügt also in jedem Falle, zu zeigen, wie ein Längenkreis und ein Breitenkreis abgebildet werden; hierbei wird die Erde als völlig kugelig vorausgesetzt, also z. B. von der Abplattung (§ 5, Nr. 18) ausdrücklich abgesehen.

61. Alle im folgenden behandelten Kartennetzentwürfe lassen sich von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus betrachten. Man lege an den Globus einen berührenden Kegel derart, daß die Spitze auf der Verlängerung der Globusachse liegt, daß also der Kegel die Kugel längs eines Breitenkreises berührt. Wird nun das Globusgradnetz und das darin etwa eingezeichnete Kartenbild auf irgendeine Weise auf den Kegel projiziert, dieser längs einer Mantellinie aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so erhält man eine Kegelprojektion des betreffenden Stücks der Erdoberfläche. Läßt man die Kegelspitze auf der Globusachse wandern, so ergeben sich die verschiedensten Arten von Kegelprojektionen; unter ihnen sind zwei Sonderfälle bemerkenswert:

a) Rückt die Kegelspitze in den unendlich fernen Punkt der Achse, wird also der Berührungskreis zum Äquator, so erhält man eine Zylinderprojektion.

b) Fällt dagegen die Kegelspitze mit einem der beiden Pole zusammen, wird also der Berührungskegel zur Bildebene, so wird aus der allgemeinen Kegelprojektion eine „polständige Azimutalprojektion“; sie verdankt ihren Namen dem Umstande, daß die Ebenen irgend zweier Längenkreise die Bildebene in Geraden schneiden, die denselben Winkel bilden wie die Längenkreise selbst, so daß also am Pol die Azimute auf der Karte mit den Azimuten auf dem Globus übereinstimmen. (Näheres über den Begriff Azimut siehe § 5, Nr. 6.)

Natürlich lassen sich diese Projektionen noch in der Weise verallgemeinern, daß man die Kegelachse nicht mit der Globusachse zusammenfallen läßt, sondern beliebig wählt.

Jede der im vorigen genannten Darstellungsarten, für deren Einteilung bisher allein Gestalt und Lage der Bildfläche maßgebend waren, läßt sich noch abwandeln je nach der Wahl der Projektionsart. Alle wirklichen Projektionen (d. h. alle räumlichen Abbildungen durch geradlinige Strahlen) lassen sich als irgendwie geartete Sonderfälle der Zentralprojektion auffassen; wandert das Projektionszentrum — bei festgehaltener Bildfläche —, so ändert sich auch die Projektion. Für besonders bemerkenswerte Lagen des Projektionszentrums hat man den dabei erhaltenen Projektionen besondere Namen gegeben; je nachdem das Projektionszentrum im Globusmittelpunkt, in einem der Pole oder unendlich fern liegt, spricht man von gnomonischer (Nr. 62), stereographischer (Nr. 63) und orthographischer Projektion (Nr. 64). Wir behandeln hier nur einige wichtige Kartenentwürfe.

62. Wir beginnen mit dem Falle, daß die Bildebene den Globus in einem der Pole berührt und daß die projizierenden Strahlen vom Kugelmittelpunkt ausgehen. Nach der in Nr. 61 angegebenen Bezeichnungsweise handelt es sich also um einen polständigen gnomonischen Azimutalentwurf. Die Abbildung ist zwar nicht winkeltreu, hat dafür aber den Vorzug, daß sie alle kürzesten Linien der Kugel, also alle Großkreise (insbesondere auch die Längenkreise) als gerade Linien wiedergibt. Die Parallelkreise werden als konzentrische Kreise abgebildet; die Radien dieser Kreise sind aus Fig. 69 leicht zu entnehmen, die wegen ihrer Einfachheit keiner weiteren Erklärung bedarf (der Platzersparnis halber ist sowohl von dem abzubildenden Hauptmeridian wie von jedem Parallelkreisbild — in der umgeklappt gedachten Bildebene — nur ein Quadrant gezeichnet). Man erkennt sogleich, daß die Abbildung nur für hohe geographische Breiten brauchbar ist; mit wachsendem Polabstand nehmen die Längen-, Flächen- und Winkelverzerrungen rasch zu. Will man Gegenden mit geringeren geographischen Breiten in gnomonischer Azimutalprojektion darstellen, so muß man als Berührungspunkt der Bildebene nicht den Pol, sondern einen anderen, passend erscheinenden Punkt (ungefähr die Mitte des darzustellenden Gebietes) wählen.

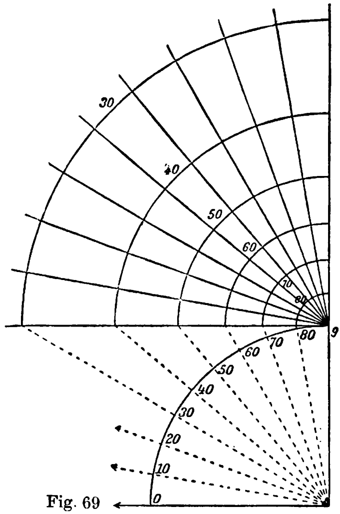

Fig. 69

63. Wir wählen wieder (wie im Anfange von Nr. 62) als Bildfläche die Ebene, die in einem der Pole (z. B. dem Nordpol N) berührt; das Projektionszentrum liegt jetzt aber im entgegengesetzten Pol (also beispielsweise im Südpol S). Wir erhalten dann die sogenannte stereographische Polarprojektion (Fig. 70)[1]: sie ist von Hipparch erdacht worden, der sie zur Abbildung der Himmelskugel benutzte. Wir zeigen zunächst, daß diese Abbildung winkeltreu ist.[2] Sind g und h zwei Tangenten an die Kugel im Punkte P (Figur entbehrlich), ferner S das Projektionszentrum und Π die Bildebene, so schneiden die Ebenen Sg und Sh die Ebene Π und die parallele Tangentialebene Π_0 (Berührungspunkt S) in parallelen Geradenpaaren: $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ in Π und $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ in Π_0. Wegen der

1) Die Figuren 69 bis 72 sind sämtlich für einen Kugeldurchmesser 63,7 mm, also im Längenmaßstab 1 : 2 · 10^8 entworfen; will man sie recht handgreiflich miteinander vergleichen, so kann man die vier Figuren zu einer vereinigen, indem man die vier Quadranten des Meridians passend zu einem vollen Meridian zusammenschiebt.

2) Beweis nach L. Eckhardt - Wien (Zeitschr. f. math. u. nat. Unt., Bd. 58, S. 325).

Symmetrie bezüglich der Symmetrieebene der Sehne SP ist $\sphericalangle gh = \sphericalangle \mathfrak{g}_0\mathfrak{h}_0$ und weiter $\sphericalangle \mathfrak{g}_0\mathfrak{h}_0 = \sphericalangle \mathfrak{g}\mathfrak{h}$. Damit ist die Winkeltreue für beliebige Kurven, die in P die Tangenten g und h haben, bewiesen. — Aus dieser Eigenschaft folgt weiter, daß jeder Kreis der Kugel bei der stereographischen Projektion wieder als Kreis oder als Gerade abgebildet wird. Für jeden Kreis k der Kugel gibt es nämlich einen Drehkegel — seine Spitze heiße M —, der die Kugel längs k berührt. Die Erzeugenden dieses Kegels sind Kugeltangenten, die je eine Tangente von k normal schneiden. Projiziert man die Kegelerzeugenden von S auf Π, so erhält man ein Strahlenbüschel mit dem Scheitelpunkt $\mathfrak{M}$, der das Bild von M ist. Das Bild von k muß nun eine Kurve $\mathfrak{k}$ sein, die alle Strahlen des Büschels $\mathfrak{M}$ normal schneidet; $\mathfrak{k}$ kann also nur ein Kreis mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ sein.

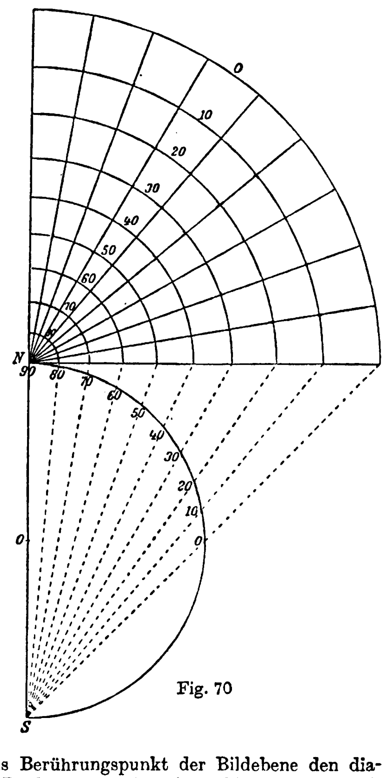

Fig. 70

Trotz dieser Vorzüge, die eine leichte Herstellung der Kartenbilder ermöglichen, ist natürlich auch die Brauchbarkeit stereographischer Netzentwürfe begrenzt, insbesondere kann man Gegenden in der Nähe des Äquators nicht mehr ohne starke Verzerrungen auf eine polständige Bildebene projizieren. Man wählt daher in diesem Falle als Projektionszentrum einen Punkt des Äquators und als Berührungspunkt der Bildebene den diametral gegenüberliegenden Punkt; diese Art der Abbildung wird als stereographische Äquatorialprojektion bezeichnet.

64. Projiziert man den Globus aus dem unendlich fernen Punkt der Achse auf die Äquatorebene oder eine dazu parallele Ebene, so erhält man die orthographische Projektion (Fig. 71); sie ist eigentlich nur eine Anwendung der in Nr. 40 beschriebenen Orthogonalprojektion der Kugel.

Diese Abbildungsart hat für die Herstellung von Erdkarten nur eine sehr beschränkte Bedeutung; denn abgesehen von den Polargegenden, die ziemlich genau in natürlichen Verhältnissen abgebildet werden, erleiden die übrigen Gebiete mit zunehmendem Polabstand eine immer peinlicher fühlbar werdende Verzerrung. Dagegen ist die in Rede stehende Abbildungsart für die Herstellung von Mondkarten hervorragend wertvoll; wir

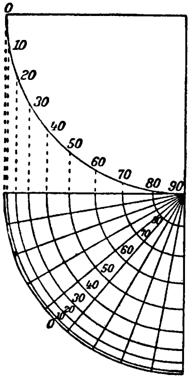

Fig. 71

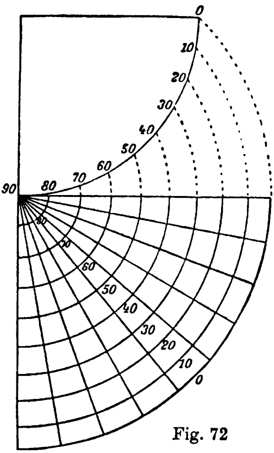

Fig. 72

sehen ja unseren Trabanten wegen seiner recht beträchtlichen Entfernung von der Erde nahezu in Parallelprojektion, und da er uns immer dieselbe Seite zuwendet, so erscheinen uns die am Rande seines sichtbaren Teiles liegenden Gebiete nie anders als in der bei der orthographischen Projektion unvermeidlichen Verzerrung.

65. Als Beispiel für eine unechte (nicht „perspektivische") Projektion, die aber erdkundlich eine hohe Bedeutung hat, wollen wir die von Lambert (1772) erdachte flächentreue azimutale Polarprojektion behandeln; sie geht aus von der Aufgabe, die Kugelzonen, die um den Mittelpunkt des darzustellenden Gebietes (z. B. den Pol) herum liegen, durch flächengleiche ebene Kreisringe abzubilden. In anderer Fassung lautet die Aufgabe: Wie groß ist die Kugelkappe, die man mit der Zirkelöffnung z auf der Kugel vom Radius r zeichnen kann? Ist h die Höhe der Kappe, so ist nach dem Kathetensatz (Buch für Kl. 7—9, § 7, Nr. 9 und § 9, Nr. 31) $z^2 = h \cdot 2r$; daraus folgt sogleich $\pi z^2 = 2\pi r h$, d. h. der gesuchte Flächeninhalt ist — unabhängig vom Radius der Kugel — gleich dem Inhalt des Kreises vom Radius z. Um also die gesuchte Azimutalprojektion zu erhalten, braucht man nur vom Pol aus die zu den einzelnen Bogen des Meridians gehörigen Sehnen als Radien konzentrischer Kreise zu wählen (Fig. 72). Da alle so

erhaltenen Kreise den entsprechenden Kugelkappen flächeninhaltsgleich sind, so sind auch die Kreisringe den entsprechenden Kugelzonen flächengleich, und daher stimmen auch die von irgend zwei Radien ausgeschnittenen Teile dieser Kreisringe mit den von den entsprechenden Längenkreisen ausgeschnittenen Teilen der Kugelzonen überein.

Will man nicht Polargebiete, sondern etwa Äquatorialgegenden abbilden, so wählt man als Mittelpunkt des Netzentwurfes einen Punkt des Äquators und gelangt ebenso leicht wie vorher zur flächentreuen azimutalen Äquatorialprojektion. Wegen der recht geringen Winkel- und Längenverzerrungen eignet sie sich besonders zur Darstellung der östlichen und westlichen Erdhalbkugeln (Planigloben).

§ 4. Sphärische Trigonometrie

Inhalt des Kugelzweiecks und Kugeldreiecks

1. **Erklärung.** Eine Ebene, die durch den Mittelpunkt einer Kugel geht, schneidet die Oberfläche der Kugel in einem größten Kugelkreis. Zwei durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebenen zerlegen die Oberfläche in vier Kugelzweiecke. Ein Kugelzweieck wird also von den Hälften zweier größten Kreise begrenzt.
Unter dem Winkel eines Kugelzweiecks verstehen wir den Neigungswinkel der das Zweieck erzeugenden Halbebenen. Diesen Winkel bilden auch die Tangenten, die man in einem Eckpunkt des Zweiecks an die größten Kugelkreise legt.

2. **Inhalt des Kugelzweiecks.** α sei der in Graden gemessene Winkel eines Kugelzweiecks, f sein Flächeninhalt, dann ist

$$f : 4\pi r^2 = \alpha : 360,$$

mithin
$$f = \frac{\alpha \pi r^2}{90}.$$

Ist α in Bogenmaß gemessen $= \widehat{\alpha}$, dann ist

$$f : 4\pi r^2 = \widehat{\alpha} : 2\pi$$
$$f = 2\widehat{\alpha} r^2.$$

3. **Erklärung.** Drei durch den Mittelpunkt einer Kugel gehende Ebenen zerlegen die Oberfläche in acht Kugeldreiecke (sphärische Dreiecke). Ein Kugeldreieck ist also ein von drei größten Kreisen begrenztes Stück der Kugeloberfläche. Unter den Seiten und Winkeln des Kugeldreiecks verstehen wir die Seiten und Winkel der von den drei Schnittebenen gebildeten, dem Kugeldreieck entsprechenden dreiseitigen Ecke.
Für Winkel und Seiten des Kugeldreiecks gelten also die von der dreiseitigen Ecke ausgesprochenen Sätze (§ 2, Nr. 13ff.).

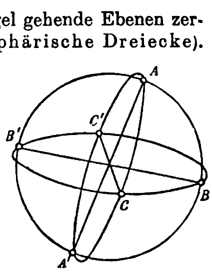

Fig. 73

4. **Inhalt des Kugeldreiecks.** Es sei f die Fläche eines sphärischen Dreiecks ABC, α, β und γ

seien die drei Winkel. Die Durchschnittsgeraden der drei erzeugenden Ebenen seien AA', BB' und CC'. (In der Fig. 73 sind nur die größten Kugelkreise gezeichnet, der Umriß der Kugel fehlt.) Dann ist nach der in Nr. 2 für das Kugelzweieck aufgestellten Flächenformel

$$f + \triangle CBA' = \frac{\alpha\pi r^2}{90},$$

$$f + \triangle ACB' = \frac{\beta\pi r^2}{90},$$

$$f + \triangle ABC' = \frac{\gamma\pi r^2}{90}.$$

Nun ist $\triangle ABC' = \triangle CA'B'$;

denn die beiden Dreiecke sind flächengleich, da die zugehörigen Ecken Scheitelecken sind. Mithin wird

$$3f + \triangle CBA' + \triangle ACB' + \triangle CA'B' = (\alpha + \beta + \gamma)\frac{\pi r^2}{90}.$$

Nun ist $f + \triangle CBA' + \triangle ACB' + \triangle CA'B' = 2\pi r^2$,

weil die vier Dreiecke zusammen die Oberfläche der Halbkugel bilden; so wird

$$2f = (\alpha + \beta + \gamma - 180)\frac{\pi r^2}{90},$$

$$f = (\alpha + \beta + \gamma - 180)\frac{\pi r^2}{180}.$$

Werden die Winkel in Bogenmaß gemessen, dann lautet die Formel

$$f = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)r^2.$$

Den Wert $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180$, wenn das Gradmaß,

$$\widehat{\varepsilon} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi,$$

wenn das Bogenmaß benutzt wird, nennt man sphärischen Exzeß. Als Formel für den Inhalt des sphärischen Dreiecks erhält man dann

$$f = \frac{\varepsilon\pi r^2}{180} \qquad \text{(Gradmaß)},$$

$$f = \widehat{\varepsilon} r^2 \qquad \text{(Bogenmaß)}.$$

Das rechtwinklige sphärische Dreieck

5. **Erklärung.** Ein sphärisches Dreieck heißt rechtwinklig, wenn ein Winkel ein rechter ist. Die gegenüberliegende Seite heißt dann Hypotenuse, die beiden anliegenden Seiten heißen Katheten.

Satz. In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit der Hypotenuse c ist

$$(1)\qquad \cos c = \cos a \cdot \cos b;$$

$$(2)\qquad \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c};$$

$$(3)\qquad \cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta, \qquad \cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha;$$

$$(4)\qquad \cos c = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta;$$

$$(5)\qquad \sin a = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg}\beta, \qquad \sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$(6)\qquad \cos\alpha = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c, \qquad \cos\beta = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c.$$

Beweis. Von der Ecke B des bei C rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wird (Fig. 74) $BE \perp MC$ gezogen, dann ist BE, da die Ebenen MCB und MCA senkrecht aufeinander stehen, senkrecht zur Ebene CMA, mithin ist $BE \perp MA$. Von B wird auf MA das Lot BD gefällt. Da $BD \perp MA$ und $BE \perp MA$, ist auch die Ebene $BDE \perp MA$, mithin ist $\sphericalangle BDE = \alpha$.

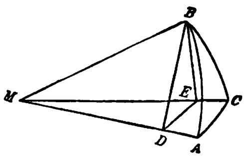

Fig. 74

a) In dem bei D rechtwinkligen Dreieck DMB ist

$$\cos c = \frac{MD}{MB},$$

in dem bei D rechtwinkligen Dreieck DME ist

$$MD = \cos b \cdot ME,$$

in dem bei E rechtwinkligen Dreieck EMB ist

$$MB = \frac{ME}{\cos a}.$$

Mithin ist

$$(1)\qquad \cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

b) In dem bei E rechtwinkligen Dreieck EDB ist

$$\sin\alpha = \frac{BE}{BD}.$$

Aus $\triangle EMB$ folgt $\qquad BE = BM \cdot \sin a,$

aus $\triangle DMB$ $\qquad BD = BM \cdot \sin c.$

Mithin ist

$$(2)\qquad \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

In gleicher Weise läßt sich die Formel für $\sin\beta$ herleiten.

c) In $\triangle EDB$ ist $\qquad \cos\alpha = \dfrac{DE}{DB}.$

Aus $\triangle DME$ folgt $\quad DE = ME \sin b,$

aus $\triangle DMB$ $\quad DB = MB \sin c;$

folglich ist $\quad \cos a = \dfrac{ME \cdot \sin b}{MB \cdot \sin c}.$

Da $\dfrac{ME}{MB} = \cos a$ und $\dfrac{\sin b}{\sin c} = \sin\beta$ ist, so folgt

(3) $$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta.$$

In gleicher Weise läßt sich die Formel für $\cos\beta$ herleiten.

d) Setzt man in die Formel (1) die sich aus (3) ergebenden Werte

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

ein, so erhält man

(4) $$\cos c = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

e) Setzt man in die erste Formel (2) die aus (3) und (2) folgenden Werte

$$\sin\alpha = \frac{\cos\beta}{\cos b}, \qquad \sin c = \frac{\sin b}{\sin\beta}$$

ein, so erhält man

(5) $$\sin a = \frac{\cos\beta}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin\beta} = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

In gleicher Weise läßt sich die Formel für $\sin b$ herleiten.

f) Setzt man in die erste Formel (3) die aus (1) und (2) folgenden Werte

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}, \qquad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

ein, so erhält man $\quad \cos\alpha = \dfrac{\cos c}{\cos b} \cdot \dfrac{\sin b}{\sin c} = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c.$

In gleicher Weise läßt sich die Formel für $\cos\beta$ herleiten.

Die fünf Formeln des Satzes lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Nepersche Regel. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der Kotangenten der anliegenden Stücke, wenn man den rechten Winkel nicht mitzählt und die Katheten durch die Bogen ersetzt, die sie zu 90^0 ergänzen.

Das schiefwinklige sphärische Dreieck

6. Sinussatz. Im sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Sind a, b und c die Seiten, α, β und γ die Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, dann ist

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Beweis. Von A wird auf BC die Höhe $h = AD$ gefällt (mit anderen Worten: es wird durch die Kante MA der Ecke $MABC$ die zu MBC senkrechte Ebene gelegt). Dann ist in den rechtwinkligen Dreiecken DAB und DAC

$$\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin c}; \qquad \sin\gamma = \frac{\sin h}{\sin b};$$

mithin ist $$\sin\beta : \sin\gamma = \sin b : \sin c.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

7. Seitenkosinussatz. Im sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c und den Winkeln α, β und γ ist

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta,$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma.$$

Beweis. Es genügt, eine der Formeln zu beweisen. Die Höhe $AD = h$ teilt die Seite a in einen Abschnitt $BD = p$ und einen andern $CD = a - p$. In $\triangle ACD$ ist

$$\cos b = \cos h \cdot \cos(a - p)$$

oder $$\cos b = \cos h \cdot \cos a \cdot \cos p + \cos h \cdot \sin a \cdot \sin p.$$

Nun ist nach Nr. 5 in $\triangle ABD$

$$\cos p \cdot \cos h = \cos c$$

und $$\cos h \cdot \sin p = \sin c \cdot \cos\beta,$$

weil $$\frac{\sin p}{\sin c} = \frac{\cos\beta}{\cos h}$$

ist; beide Quotienten sind nämlich gleich dem Sinus des Winkels zwischen c und h. Mithin ist $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta$.

8. Winkelkosinussatz. Ersetzt man die dem sphärischen Dreieck ABC entsprechende Ecke durch ihre Polarecke mit dem gleichen Scheitel (§ 2, Nr. 16), so bestimmt diese ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$. Zwischen den Seiten und Winkeln der beiden Ecken bestehen dann die Beziehungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} a + \alpha' = 2R; & b + \beta' = 2R; & c + \gamma' = 2R; \\ a' + \alpha = 2R; & b' + \beta = 2R; & c' + \gamma = 2R. \end{cases}$$

Nach dem Seitenkosinussatz ist im Dreieck $A'B'C'$

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos\alpha';$$

daraus folgt auf Grund der Gleichungen (1) für das Dreieck ABC

$$-\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a.$$

Ebenso ist $$-\cos\beta = \cos\alpha \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos b,$$
$$-\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c.$$

Die Halbwinkelsätze und Halbseitensätze

9. Im sphärischen Dreieck mit den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c werde

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \qquad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

gesetzt. Dann ist

(1) $$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}};$$

(1′) $$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}};$$

(2) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}};$$

(2′) $$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}};$$

(3) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}};$$

(3′) $$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}}.$$

Beweis. a) In die Formel (§ 1, Nr. 17 (5))

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

setzt man für $\cos\alpha$ den Wert ein, der sich aus dem Seitenkosinussatz ergibt. Dann erhält man

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}\right)} = \sqrt{\frac{\sin b\cdot\sin c+\cos b\cdot\cos c-\cos a}{2\cdot\sin b\cdot\sin c}},$$

und dafür kann man nach § 1, Nr. 15 (4) schreiben

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\cdot\sin b\cdot\sin c}}.$$

Wendet man auf den Zähler des Radikanden die Formel (4) von § 1, Nr. 18 an, dann folgt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

b) Um die Formel (2) herzuleiten, geht man von (§ 1, Nr. 17 (4))

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

aus und erhält in gleicher Weise wie bei *a* unter Anwendung der Formeln (3) von § 1, Nr. 15 und (4) von § 1, Nr. 18 das gewünschte Ergebnis.

c) Die Formel (3) folgt aus der Division von (1) und (2).

d) Die Formeln (1'), (2') und (3') lassen sich aus den entsprechenden Formeln (1), (2) und (3) gewinnen, wenn man von der Ecke zur Polarecke übergeht.

Die Mollweideschen Formeln und die Neperschen Analogien

10. Mollweidesche Formeln. Im sphärischen Dreieck mit den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c ist

$$\text{(1)}\qquad \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

$$\text{(2)}\qquad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}};$$

$$\text{(3)}\qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

$$\text{(4)}\qquad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Beweis. Es genügt, den Beweisgang für eine der vier Formeln klarzulegen. Wir wählen (1). Es ist

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$

Hierauf wenden wir die Halbwinkelsätze an und erhalten

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$+\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-c)\cdot\sin s}{\sin b\cdot\sin a}}+\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin a}}$$

$$=\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Zähler und Nenner werden nach § 1, Nr. 18 (1) und Nr. 17 (1) in Produkte verwandelt:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\cdot\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{2\cdot\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Daraus folgt die Formel (1).

11. **Npersche Analogien.** Im sphärischen Dreieck mit den Winkeln α β, γ und den Seiten a, b, c ist

(1) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};$$

(2) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}};$$

(3) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

(4) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Beweis. Die Neperschen Analogien folgen durch Division aus geeigneten Mollweideschen Formeln, so z. B. die Formel (1), wenn man die 1. durch die 3. Mollweidesche Formel dividiert.

Berechnung sphärischer Dreiecke

12. Im Gegensatz zu den ebenen Dreiecken sind bei den Kugeldreiecken sechs Hauptfälle zu unterscheiden, weil hier der für das ebene Dreieck geltende Winkelsatz, nach dem mit zwei Winkeln des Dreiecks bereits der dritte gegeben ist, nicht zutrifft.

a) Dreieck aus a, b, γ. Der Seitenkosinussatz liefert c, der Sinussatz dann α und β. Für die logarithmische Rechnung brauchbarer sind die Neperschen Analogien; zwei von ihnen liefern $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und damit α und β. c erhält man dann z. B. durch den Sinussatz.

b) Dreieck aus α, β, c. Die Aufgabe ist derjenigen von a) polar zugeordnet, man wendet also auch die den eben genannten polar zugeordneten Formeln an, also etwa den Winkelkosinussatz, um γ, den Sinussatz, um a und b zu finden.

c) Dreieck aus a, b und c. Man kann hier den Seitenkosinussatz benutzen, um einen der Winkel zu finden, die fehlenden anderen liefert dann der Sinussatz. Für die logarithmische Rechnung brauchbarer sind die Halbwinkelsätze.

d) Dreieck aus α, β und γ. Die Aufgabe ist derjenigen von c) polar zugeordnet und entsprechend zu lösen.

e) Dreieck aus a, b, α. Der Sinussatz liefert β. Während man bei den Aufgaben a) bis d) zur Not mit dem Sinussatz und den beiden Kosinussätzen auskommt, wird man hier, wenn man nicht etwa die Dreieckshöhe als Hilfsstück benutzen will, die Neperschen Analogien (oder die Mollweideschen Formeln) hinzunehmen. Man kann mit ihnen γ und c bestimmen.

f) Dreieck aus α, β, a. Die Aufgabe ist der Aufgabe e) polar zugeordnet und wie diese zu lösen.

§ 5. Mathematische Erd- und Himmelskunde

Grundbegriffe

1. Einem unbefangenen Beobachter erscheint die Erde bei freier Sicht als eine flache Scheibe, über der sich der Himmel halbkugelig wölbt. Der scheinbare Schnitt des Himmelsgewölbes und der Standebene des Beobachters heißt Horizont; der Standpunkt des Beobachters ist der Mittelpunkt des Horizonts.

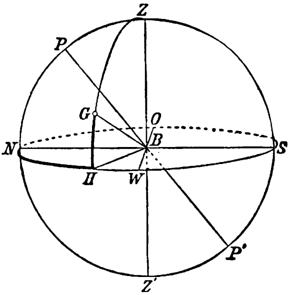

Fig. 75

Der Umstand, daß man die weitaus meisten Sterne immer in derselben Anordnung beieinander sieht (Sternbilder), hat zu der Vorstellung geführt, sie seien mit dem Himmelsgewölbe fest verbunden, daran „angeheftet" (stellae fixae, Fixsterne). Eine wiederholte Beobachtung lehrt, daß das Himmelsgewölbe mit den scheinbar an ihm befestigten Sternen im Laufe von 24 Stunden eine Umdrehung ausführt, wobei viele Sterne zu bestimmter Zeit über dem Horizont erscheinen („aufgehen") und nach einiger Zeit wieder unter dem Horizont verschwinden („untergehen"). Die Hälfte des Horizonts, in der die Aufgangspunkte liegen, heißt östliche Hälfte, die andere die westliche Hälfte.

2. Da man in einer Nacht immer wieder andere Sterne am östlichen Horizont erscheinen sieht, so kann der gestirnte Himmel nicht eine Halbkugel sein, er muß sich unter dem Horizont zu einer ganzen Kugel abrunden. — Bei der scheinbaren Drehung der Himmelskugel bleiben zwei Punkte fest, die

man als Himmelspole (P und P' in Fig. 75) bezeichnet; der in unseren Gegenden über dem Horizont befindliche Pol heißt der Nordpol, der entgegengesetzte Südpol. Da sich die ganze Sternenwelt um die Verbindungslinie der beiden Pole zu drehen scheint, so bezeichnet man die Gerade PP' auch als Weltachse. Die Projektion der Weltachse auf die Ebene des Horizonts heißt Mittagslinie des Beobachtungsortes; ihre Schnittpunkte mit dem Horizont heißen Nordpunkt (N) und Südpunkt (S).

Die Ebene, die auf der Weltachse im Beobachtungspunkt senkrecht steht, schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise den man Himmelsäquator nennt. Die Punkte, in denen der Himmelsäquator den Horizont schneidet, heißen Ostpunkt (O) und Westpunkt (W). Ein Stern, der im Äquator steht, geht im Ostpunkt auf und im Westpunkt unter. Sterne nördlich des Äquators gehen zwischen Ostpunkt und Nordpunkt auf und zwischen Westpunkt und Nordpunkt unter; entsprechend gehen Sterne, die auf der südlichen Himmelshalbkugel liegen, zwischen Osten und Süden auf und zwischen Westen und Süden unter.

3. Die Beobachtung lehrt, daß der Sehstrahl nach einem (Fix-) Stern im Laufe eines Tages einen Kegelmantel beschreibt, dessen Achse die Weltachse ist. Der Schnitt dieses Kegelmantels mit der Himmelskugel, also die scheinbare tägliche Bahn des Sternes, ist ein Kreis, der wegen seiner Lage zum Himmelsäquator als Parallelkreis bezeichnet wird. Schneidet ein solcher Parallelkreis den Horizont, so bezeichnet man den über dem Horizont gelegenen Bogen als den Tagbogen, den unter dem Horizont gelegenen Teil als Nachtbogen. Sterne, die einen entweder ganz über oder ganz unter dem Horizont gelegenen Parallelkreis durchlaufen, heißen Zirkumpolarsterne (hierzu gehören z. B. in unseren Gegenden alle Sterne des Großen Bären). Für einen Beobachter, der am Nordpol oder Südpol der Erde steht, sind alle Sterne zirkumpolar.

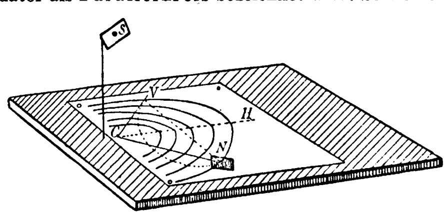

Fig. 76

Die im Beobachtungspunkt auf der Ebene des Horizonts errichtete Senkrechte schneidet das Himmelsgewölbe in zwei Punkten, von denen der über dem Horizont gelegene als Zenit (Scheitelpunkt, Z in Fig. 75), der unter dem Horizont gelegene als Nadir (Fußpunkt, Z' in Fig. 75) bezeichnet wird. Der durch den Zenit und durch die Pole bestimmte größte Kugelkreis heißt Meridian (Mittagskreis) des Beobachtungsortes; seine Projektion auf die Ebene des Horizonts ist die Mittagslinie (s. Nr. 2). Zur praktischen Ermittelung der Mittagslinie bedienten sich schon die alten Griechen eines Gnomon (Fig. 76).

4. Größte Kugelkreise, die durch Zenit und Nadir hindurchgehen, heißen Höhenkreise (auch Vertikalkreise oder Scheitelkreise). Der Bogen eines solchen Kreises von einem seiner Punkte bis zum Horizont heißt Höhe dieses Punktes; mit anderen Worten ist also die Höhe eines Sternes sein (Bogen-) Abstand vom Horizont (z. B. GH in Fig. 75). Gleichbedeutend hiermit ist die Erklärung: die Höhe eines Sternes ist der Winkel, den der nach dem Sterne gehende Sehstrahl mit dem Horizont bildet (z. B. $\sphericalangle GBH$ in Fig. 75). Die Zenitdistanz des Sternes, d. h. der Abstand des Sternes vom Zenit, ist das Komplement der Höhe. — Der ausgezeichnete Höhenkreis, der durch Ost- und Westpunkt geht, heißt der erste Vertikal.

5. Kugelkreise, deren Durchmesser die Weltachse ist, heißen Stundenkreise; der Winkel, den ein solcher Kreis mit dem (Himmels-) Meridian bildet (z. B. $\sphericalangle GPZ$ in Fig. 77), heißt Stundenwinkel, weil man aus der Größe dieses Winkels leicht eine Aussage über die Zeit herleiten kann, zu der die Beobachtung stattgefunden hat (der Stundenkreis eines Sternes führt in 24 Stunden eine Drehung um 360^0 aus, einem Stundenwinkel von 15^0 entspricht also 1 Stunde oder einem Winkel von 1^0 eine Zeit von 4 Minuten).

Die bisherigen Erörterungen setzen uns in den Stand, einen Punkt der Himmelskugel seiner Lage nach zu bestimmen; dies geschieht durch eines der im folgenden behandelten Koordinatensysteme.

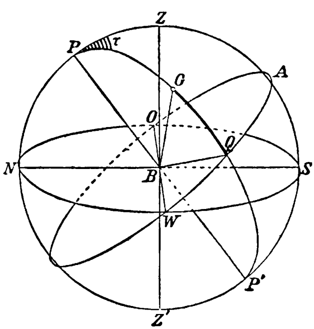

Fig. 77

Azimut und Höhe

6. Die Grundebene des ersten Koordinatensystems ist die Ebene des Horizonts (daher nennt man das System auch Horizontalsystem). Sternhöhen über dem Horizont werden als positiv, Sternhöhen unter dem Horizont als negativ bezeichnet. Da die Lage eines Sternes durch Feststellung seiner Höhe noch nicht eindeutig bestimmt ist (Lage auf einem „Höhenparallel"), gibt man noch an, wo der Höhenkreis des Sternes den Horizont schneidet. Den Schnittpunkt legt man fest durch seinen (Bogen-) Abstand von einem willkürlichen Anfangspunkt des Horizontes. Als diesen Anfangspunkt wählen die Astronomen den Südpunkt, und zwar rechnen sie den Bogen vom Südpunkt aus über Westen (also entsprechend dem Drehungssinn des Uhrzeigers) von 0^0 bis 360^0. Dieser Bogen heißt Azimut. (Das Azimut eines Sternes kann m. a. W. auch erklärt werden als der Winkel, den der Höhenkreis des Sternes mit dem [Himmels-] Meridian bildet.)

Da sich Höhe und Azimut eines Sternes in jedem Augenblick ändern (Ausnahmen gelten nur für Beobachtungen an den Polen und am Äquator), so benutzt man das Horizontalsystem meist nur zur Angabe des Ortes einer am Tage beobachteten Erscheinung (etwa eines Kugelblitzes) und zur Festlegung gewisser Punkte der Erdoberfläche (z. B. einer Bergspitze von einem Beobachtungspunkt im Tal aus, oder einer bestimmten Stelle eines Gletschers von einem Punkte eines Berges aus — zur Prüfung des Wanderns der Gletscher). Man beachte, daß das Horizontalsystem von dem Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines Himmelsgewölbes völlig unabhängig ist und allein von der Richtung der Erdschwere abhängt — wofern man eine beliebige Vertikalebene, die nicht die Meridianebene zu sein braucht, als Ausgangsebene für die Zählung des Azimuts benutzt.

7. Eine wichtige erdkundliche Anwendung findet die Höhenbeobachtung bei der genauen Bestimmung der Mittagslinie nach der Methode der gleichen Höhen. Man stellt das — zunächst auf einen beliebigen Vertikalkreis bezogene — Azimut eines Sternes in irgendeinem Augenblicke fest, wo er im Aufsteigen begriffen ist, dann wieder in dem Augenblicke, wo er beim Absteigen dieselbe Höhe erreicht hat wie bei der ersten Beobachtung. Aus dem arithmetischen Mittel der beiden Azimute ergibt sich die Lage des Mittagskreises.

8. Der Durchgang eines Sternes durch den Mittagskreis heißt Kulmination. Die Höhe des Sternes nimmt bei der oberen Kulmination den größten, bei der unteren den kleinsten Wert an. (Von Sternen, die nicht Zirkumpolarsterne sind, kann man nur die obere Kulmination beobachten.) Auch das Azimut nimmt bei der Kulmination ausgezeichnete Werte an (0°, 180°, 360°).

Deklination und Stundenwinkel

9 Da die Sterne bei der täglichen Umdrehung der Himmelskugel ihren Abstand vom Äquator beibehalten, empfiehlt es sich, diesen als Grundebene eines Koordinatensystems zu wählen. Man bezeichnet den (auf dem Stundenkreis gemessenen) Abstand eines Sternes vom Äquator als seine Deklination (sie kann auch erklärt werden als der Neigungswinkel des nach dem Stern gehenden Sehstrahles gegen die Ebene des Äquators). Nördliche Deklinationen rechnen wir als positiv, südliche als negativ. Aus Zweckmäßigkeitsgründen benutzt man zuweilen nicht die Deklination selbst, sondern den Polabstand des Sternes (also die Ergänzung der Deklination zu 90°). Als zweite Koordinate zur Festlegung des Sternortes benutzt man den Stundenwinkel (s. Nr. 5). Dieser wird vom südlichen Teil des Meridians nach Westen hin (also im Sinne der Drehung des Himmelsgewölbes) von 0° bis 360° gezählt oder auch (zur Vermeidung der sonst nötigen Umrechnungen) von 0^h bis 24^h. In Fig. 77 ist der Bogen GQ die Deklination und $\sphericalangle GPS = \tau$ der Stundenwinkel des Gestirns G.

10. Auf den Sternwarten wird der Gang der Hauptuhren so verbessert, daß bei jeder Kulmination eines Sternes die Zeiger der Uhr genau denselben Stand haben wie bei der vorhergehenden Kulmination desselben Sternes,

wobei das Zifferblatt in 24 gleiche Teile geteilt ist. Eine so geregelte Uhr zeigt Sternzeit (s. Nr. 13); sie geht gegen eine bürgerliche Uhr täglich rund 4 Minuten vor (s. Nr. 27). Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen eines Sternes heißt ein Sterntag.

11. Auf jeder Sternwarte ist ein besonderes Fernrohr so aufgestellt, daß es um eine horizontale, genau von O nach W verlaufende Achse drehbar ist, sich also nur in der Mittagsebene bewegen kann; ein solches Fernrohr, das nur zur Beobachtung von Kulminationen dient, heißt Meridianfernrohr. Mit seiner Hilfe kann man z. B. die Polhöhe des Beobachtungsortes aus einer oberen und der darauffolgenden unteren Kulmination eines (Zirkumpolar-) Sternes sehr genau ermitteln. So wurden beim Polarstern (α Ursae minoris) auf der Berliner Universitätssternwarte (Babelsberg) am 8. Mai 1915 $10^h\,5^m$ bei der oberen Kulmination und $22^h\,5^m$ bei der unteren Kulmination folgende Höhen gemessen:

$$h_1 = 53^\circ\,33'\,14{,}7'',$$
$$h_2 = 51^\circ\,15'\,34{,}5''.$$

Als arithmetisches Mittel dieser beiden Werte ergibt sich für die Berliner Sternwarte die Polhöhe $\varphi = 52^\circ\,24'\,24{,}6''$.

Am 1. Oktober 1925 1 Uhr bei der oberen Kulmination und 13 Uhr bei der unteren Kulmination waren die entsprechenden Werte:

$$h_1' = 53^\circ\,30'\,12{,}2'',$$
$$h_2' = 51^\circ\,18'\,37{,}0'',$$

also $$\varphi = 52^\circ\,24'\,24{,}6''.$$

12. Zuweilen benutzt man noch die „Äquatorhöhe“ SA (Fig. 77), d. h. die Höhe des Punktes, in dem der Tagbogen des Äquators den Meridian schneidet. Der Bogen SA ist zugleich ein Maß für den Neigungswinkel der Ebene des Äquators gegen die Ebene des Horizonts. Polhöhe und Äquatorhöhe ergänzen sich zu 90°.

Zur praktischen Bestimmung der Deklination eines Sternes beobachtet man ihn bei der Kulmination. Die Differenz aus der Kulminationshöhe und der Äquatorhöhe ist die Deklination; bei Sternen, die zwischen Zenit und Pol kulminieren, ist die Differenz aus der Kulminationshöhe und der Polhöhe gleich dem Polabstand des Sternes (Komplement der Deklination). Bei dem in Nr. 11 genannten Zahlenbeispiel ergibt sich als Poldistanz des Polarsternes aus dem ersten Wertepaar $1^\circ\,8'\,50{,}1''$ und aus dem zweiten $1^\circ\,5'\,47{,}6''$. — Wie es kommt, daß der Polarstern in wenig mehr als 10 Jahren seine Deklination merklich (um mehr als 3 Minuten) ändert, wird in Nr. 18 besprochen werden.

Von den beiden Koordinaten des Deklination-Stundenwinkel-Systems ist nur die eine in mäßigen Zeiträumen konstant, während die andere sich in jedem Augenblicke ändert. Will man die Lage eines Sternes zu den übrigen Gestirnen so festlegen, daß beide Koordinaten unveränderlich werden, so liegt es nahe, neben der Deklination als erster Koordinate den Winkel des Sternmeridians gegen einen an der Himmelskugel festen (also mit ihr sich drehenden) Meridian als zweite Koordinate zu benutzen. Dies führt auf ein neues Koordinatensystem:

Deklination und Rektaszension

13. Wird ein zur Weltachse paralleler Stab von der Sonne beschienen und der Schatten, den der Stab wirft, auf einer zum Himmelsäquator parallelen Ebene aufgefangen, so kann man den Stundenwinkel der Sonne ohne weiteres ablesen, wofern der Meridian des Beobachtungsortes einmal bestimmt worden ist. Man kann auf diese Weise leicht eine Äquatorialsonnenuhr anfertigen, deren Zifferblatt in 24 gleiche Teile geteilt ist (Fig. 78). Der Stab PMP' hat die Richtung der Weltachse; die Uhr gibt die wahre Sonnenzeit des Beobachtungsortes an.

Schon eine rohe Messung der Kulminationshöhe der Sonne (etwa mit einem Pappwinkelmesser oder einem Edlerschen Meßblatt) lehrt, daß die Sonne im Winter unter, im Sommer über dem Himmelsäquator steht (das Zifferblatt der Äquatorialsonnenuhr wird also im Winter von unten, im Sommer von oben her besonnt). Der Punkt, in dem die Sonne bei ihrem scheinbaren Lauf am Himmelsgewölbe von der südlichen auf die nördliche Halbkugel übertritt, heißt Frühlingstagundnacht-

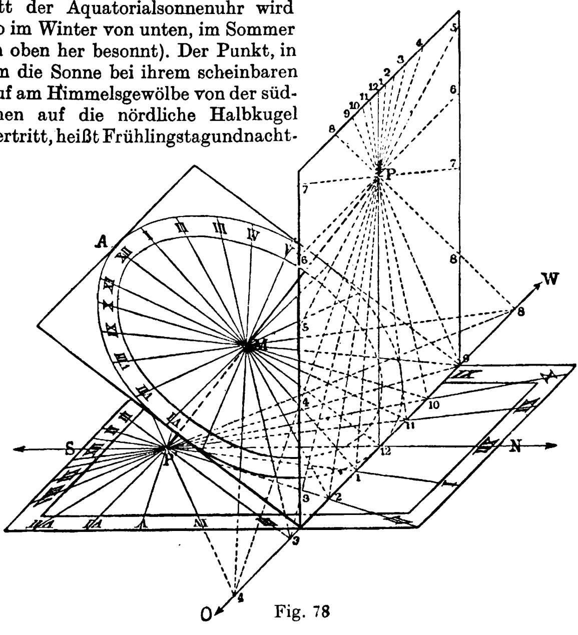

Fig. 78

gleichenpunkt, auch kurz Frühlingspunkt oder Widderpunkt; der ihm genau gegenüberliegende Punkt der Himmelskugel heißt Herbstpunkt (er liegt im Sternbild der Waage). Frühlings- und Herbstpunkt können mit einer gewissen Einschränkung, von der in Nr. 18 die Rede sein wird, als feste Punkte der Ekliptik betrachtet werden.
Eine nach Sternzeit gehende Uhr zeigt $0^h\,0^m\,0^s$, wenn der Frühlingspunkt kulminiert.

14. Von dem durch den Frühlingspunkt gehenden Meridian aus mißt man die Rektaszension (gerade Aufsteigung) eines Sternes, d. h. den Winkel, den der Meridian des Sternes mit jenem Anfangsmeridian bildet; der Winkel wird vom Nordpol aus gesehen in mathematisch positivem Sinn von 0^0 bis 360^0 gezählt. Die Rektaszension kann auch als Bogen auf dem Äquator vom Frühlingspunkt bis zum Meridian des Sternes gemessen werden.
Vergleicht man den Himmelsäquator mit dem Erdäquator, den Frühlingspunktmeridian mit dem Meridian von Greenwich, so entspricht der Deklination die geographische Breite, der Rektaszension die östliche geographische Länge. Die Rektaszension wird ebenso wie der Stundenwinkel oft in Zeitmaß angegeben; z. B. hatte der Sirius am 1. Januar 1927 die Rektaszension $6^h\,41^m\,56^s$ (nach der Angabe im letzten Satz von Nr. 13 mußte also zu Neujahr 1927 eine nach Sternzeit gehende Uhr $6^h\,41^m\,56^s$ zeigen, wenn der Sirius kulminiert).

Länge und Breite

15. Trägt man die täglich bei der Kulmination zu beobachtende Deklination und Rektaszension des Sonnenmittelpunktes in einen Himmelsglobus ein, so erkennt man, daß die Sonne im Verlaufe von etwas mehr als 365 Tagen unter den Sternen einen größten Kreis durchläuft. Die Alten bezeichneten diesen als Tierkreis (Zodiakus); heute wird er allgemein Ekliptik genannt[1]). Der wahre Grund der scheinbaren Wanderung der Sonne unter den Sternen ist nach unserer heutigen Überzeugung der Umlauf der Erde um die Sonne. Die Erde erscheint von der Sonne aus gesehen natürlich in genau entgegengesetzter Richtung wie die Sonne von der Erde aus gesehen. Wollte man also einen Himmelsglobus herstellen, wie man ihn von der Sonne aus sieht, so erhielte man bei täglicher Eintragung des Standes der Erde im Laufe des Jahres eine Bahn, die mit der Ekliptik identisch ist; auch der Umlaufssinn würde in beiden Fällen übereinstimmen (vom Nordpol aus gesehen mathematisch positiv).

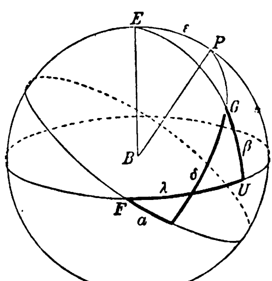

Fig. 79

1) Man zerlegt die Ekliptik vom Widderpunkte an in zwölf gleiche Teile. Die Teilpunkte, Zeichen genannt, führen die Namen der benachbarten Sternbilder: Widder ♈, Stier ♉, Zwillinge ♊, Krebs ♋, Löwe ♌, Jungfrau ♍, Waage ♎, Skorpion ♏, Schütze ♐, Steinbock ♑, Wassermann ♒, Fische ♓.

Die Ekliptik ist gegen den Äquator unter einem Winkel von rund 23° 27′ geneigt (Schiefe der Ekliptik); wir sind daher genötigt zu der Annahme, daß die Erdachse gegen die Ebene der Erdbahn unter 66° 33′ geneigt ist.

16. Für manche Aufgaben empfiehlt es sich, die Ekliptik zur Grundebene eines besonderen (des vierten) Koordinatensystems zu wählen. Legt man durch ein Gestirn G einen größten Kreis senkrecht zur Ekliptik, so heißt der Abstand GU des Sternes von der Ekliptik die Breite des Sternes (β), der Abstand des Fußpunktes U vom Frühlingspunkt F die Länge (λ) des Sternes (im Sinne des Fortschreitens der Sonne — „rechtläufig" gemessen).

Die ekliptischen Koordinaten Breite und Länge entsprechen nicht den geographischen Koordinaten Breite und Länge (vgl. hierzu Nr. 14).

Die Lagebeziehungen zwischen Deklination-Rektaszension und Länge-Breite läßt Fig. 79 erkennen.

17. Der Anfangspunkt des ekliptischen Systems (d. h. der Widderpunkt) ist nicht durch einen hellen Stern ausgezeichnet. Will man die Lage dieses Punktes ungefähr angeben, so kann man vom Polarstern aus den Hauptkreis verfolgen, der durch β Cassiopejae (Fig. 80) geht. Hierbei kommt man auf einen Stern erster Größe, α Andromedae. Die Bogen vom Polarstern bis β Cassiopejae, von da bis α Andromedae und von hier bis zum Widderpunkt sind drei annähernd gleiche Teile des Kreisquadranten.

Fig. 80

Wenn die Sonne vom Widderpunkt aus das erste Viertel der Ekliptik durchlaufen hat (21. Juni) — mit anderen Worten: wenn ihre Länge 90° beträgt —, so nimmt ihre Deklination, die bis dahin von 0° bis 23° 27′ gewachsen war, wieder ab, die Sonne wendet ihren Lauf dem Äquator wieder zu; das Entsprechende geschieht, wenn die Sonne drei Viertel der Ekliptik durchmessen hat (22. Dezember). Daher heißen die Ekliptikpunkte, deren Länge 90° und 270° beträgt, auch Sonnenwendepunkte (Solstitien). Die Parallelkreise, die sie am Himmelsgewölbe beschreiben, werden als Wendekreise bezeichnet, und zwar je nach dem Sternbilde, in dem die Sonne dann gerade steht, als Wendekreis des Krebses (nördlich) und Wendekreis des Steinbocks (südlich).

18. Die Bewegung der Sonne in der Ekliptik zeigt noch eine Besonderheit, die für kurzfristige Beobachtungen belanglos ist, aber für längere Zeiträume von Bedeutung wird. Wir haben bisher immer angenommen, daß die Erdachse sich selbst parallel bleibt. Diese Annahme trifft aber nur innerhalb begrenzter Zeitspannen zu. Da nämlich die Erdachse gegen die Ebene der Erdbahn um einen nennenswerten Winkel geneigt ist und da die Erde keine vollkommene Kugel ist, sondern eine merkliche Abplattung zeigt[1]), so kann die Erdachse ihre Richtung nicht dauernd beibehalten, vielmehr

1) Die halbe Achse des „Erdsphäroids" ist 6356,81 km lang, der Radius des Äquators 6378,37 km; die Erdachse ist also rund 43 km kürzer als der Äquatordurchmesser. Die Abplattung des Erdsphäroids beträgt 1 : 295,9.

sucht sowohl die Anziehung der in der Ebene der Ekliptik stehenden Sonne als auch die Anziehung des noch näheren Mondes den Äquatorwulst der Erde in die Ekliptik zu bringen, oder m. a. W. die Erdachse aufzurichten. Die Folge davon ist nach den Gesetzen der Kreiselbewegung, daß die Erdachse — allerdings in sehr langer Zeit — einen Drehkegel beschreibt, dessen Achse auf der Ebene der Ekliptik senkrecht steht und dessen halber Öffnungswinkel gleich der Schiefe der Ekliptik ist. Auf unsere Sinne und Meßinstrumente wirkt diese Bewegung so ein, als ob der Nordpol des Äquators um den Nordpol der Ekliptik sehr langsam einen Kreis beschreibt, dessen sphärischer Radius gleich 23° 27′ ist. Diese Bewegung geht, vom Nordpol der Ekliptik aus betrachtet, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers vor sich, also der scheinbaren jährlichen Bewegung der Sonne entgegengesetzt. Hieraus ergibt sich, daß auch jeder Punkt des Äquators einen zur Ekliptik parallelen Kreis in dem genannten Sinne durchläuft, so daß sich Frühlings- und Herbstpunkt auf der Ekliptik fortbewegen. Diese Bewegung heißt die Präzession der Tagundnachtgleichen; ihr zufolge verschieben sich der Frühlings- und Herbstpunkt jährlich im Mittel um 50,2″ der Bewegung der Sonne entgegen. Eine einfache Dreisatzrechnung lehrt, daß sie zu einem vollen Umlauf rund 26000 Jahre brauchen. Während der Frühlingspunkt vor 2300 Jahren im Sternbilde des Widders lag (daher noch der jetzige Name Widderpunkt), befindet er sich jetzt im Sternbilde der Fische (nur das „Zeichen" Widder ist zur Kennzeichnung des Frühlingspunktes beibehalten worden).

Eine bemerkenswerte Folge der Präzession ist eine scheinbare Veränderung in der Lage der Sternbilder zur Weltachse; hierfür seien nur einige Beispiele genannt. Homer sagt in der Ilias (XVIII, 489) von dem Sternbild des Großen Bären, daß es sich nie im Okeanos bade; es müssen also um 1000 v.d.Ztr. für Griechenland und Kleinasien alle Sterne des Großen Bären zirkumpolar gewesen sein, was jetzt für jene Breiten nicht mehr der Fall ist. Das prächtige Sternbild des Südlichen Kreuzes war vor 5000 Jahren nicht bloß in unseren Gegenden, sondern sogar in ganz Nordeuropa sichtbar, während man jetzt nach Nordafrika reisen muß, um es zu sehen. Der jetzige Polarstern α ursae minoris, der zu Anfang 1927 eine Deklination von 88° 55′ und eine Rektaszension von $1^h\ 35^m\ 29^s$ hatte, wird infolge der Präzession dem Pole bis zum Jahre 2100 näher rücken und nur etwa $\frac{1}{2}$ Grad von ihm entfernt sein, sich aber dann von ihm so weit entfernen, daß andere Sterne (z. B. nach 12000 Jahren der helle Stern Wega in der Leyer) den Namen Polarstern mehr verdienen werden als er; zur Zeit Hipparchs, des Entdeckers der Präzession, war unser jetziger Polarstern um etwa 12° vom Pol entfernt.

In diesem Zusammenhang kann noch eine andere Ursache des Schwankens der Erdachse erwähnt werden. Da die scheinbare Mondbahn gegen die Ekliptik um etwa 5° geneigt ist und die — als Knoten bezeichneten — Schnittpunkte der Mondbahn mit der Ekliptik in etwa 19 Jahren die ganze Ekliptik durchlaufen, so übt der Mond eine veränderliche Anziehung auf den Äquatorwulst der Erde aus und bringt die Erdachse ins

Schwanken. Diese Störung heißt die Nutation der Erdachse; sie macht sich dadurch bemerkbar, daß die Schiefe der Ekliptik in einer Periode von rund 19 Jahren kleine Schwankungen aufweist.

Beziehungen zwischen der geographischen Breite des Beobachtungsortes und den Koordinaten eines Sternes

19. Die bisher betrachteten astronomischen Bestimmungsstücke stehen in enger Beziehung zu den geographischen Koordinaten des Beobachtungspunktes. Die wichtigste dieser Beziehungen ist die Gleichheit von Polhöhe und geographischer Breite; sie läßt sich auf zweierlei Arten erweisen. Fig. 81 stelle einen durch die Ebene des Ortsmeridians gehenden Schnitt der Himmelskugel dar; B sei die (gegenüber den Ausmaßen des Fixsternhimmels winzig kleine, punktförmig erscheinende) Erde, P der Himmelspol, Z das Zenit des Beobachtungsortes. Die Ebene der Zeichnung schneide den Äquator in AA', den Horizont in NS. Da die Ebene des Erdäquators mit der des Himmelsäquators identisch ist und die Zenitrichtung BZ nichts anderes ist als die Richtung des Erdradius zum Beobachtungsort, so stellt $\sphericalangle ZBA = \beta$ die geographische Breite des Ortes dar. Die Polhöhe ($\sphericalangle PBN$) ist aber diesem Winkel gleich, da die Schenkel der beiden Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.

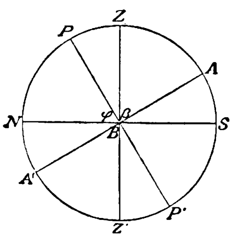

Fig. 81

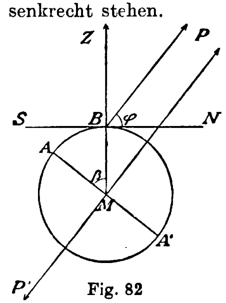

Fig. 82

Will man die Erde nicht als verschwindend klein annehmen, so kann man den Satz, daß die Polhöhe gleich der geographischen Breite ist, auf andere Art beweisen. In Fig. 82 sei die Ebene der Zeichnung wieder die des Meridians des Beobachtungsortes, M der Erdmittelpunkt, AA' der Durchmesser des Erdäquators, B der Beobachtungsort, NS der Schnitt durch die Ebene des Horizontes, Z das Zenit, P und P' die Himmelspole, β die geographische Breite von B, φ die Polhöhe. Da $BP \parallel MP$ und $MP \perp AM$, ferner $ZB \perp SN$, so ist $\varphi = \beta$.

20. Im Augenblicke der Kulmination eines Gestirns sei h seine Höhe, z sein Abstand vom Zenit („Meridian-Zenit-Distanz"). Diese beiden Größen stehen in einfachen Beziehungen zu der Deklination des Gestirns und der geographischen Breite des Beobachtungsortes. In Fig. 83 sei die Ebene der

Zeichnung wieder die des Meridians, M der Beobachtungsort (punktförmig gedachte Erde), Z das Zenit, NS die Nordsüdlinie des Horizontes, EQ der Schnitt durch den Äquator. Für ein in oberer Kulmination befindliches Gestirn G sind dann folgende 6 Fälle denkbar:

Ist sowohl die geographische Breite φ wie die Deklination δ nördlich und für ein Gestirn

$$\begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \delta > \varphi \\ \varphi > \delta \end{matrix}\right\}, \quad \text{so ist} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad EZ = \left\{\begin{matrix} EG_1 - ZG_1, \\ ZG_2 + EG_2. \end{matrix}\right.$$

Bei nördlicher Breite und südlicher Deklination (Gestirn G_3) gilt

$$EZ = ZG_3 - EG_3. \tag{3}$$

Ist die Breite südlich und die Deklination nördlich, so hat man (für ein Gestirn G_4 in Fig. 84)

$$EZ = ZG_4 - EG_4. \tag{4}$$

Ist dagegen die Breite ebenso wie die Deklination südlich und abgesehen vom Vorzeichen

$$\left.\begin{matrix} \varphi > \delta \\ \delta > \varphi \end{matrix}\right\}, \quad \text{so ist für ein Gestirn} \quad \left.\begin{matrix} G_5 \\ G_6 \end{matrix}\right\} EZ = \left\{\begin{matrix} ZG_5 + EG_5, \\ EG_6 - ZG_6. \end{matrix}\right.$$

Dabei sind bisher alle Bogen ohne Vorzeichen genommen. Rechnet man jetzt nördliche Breiten als positiv, südliche als negativ und (wie schon in

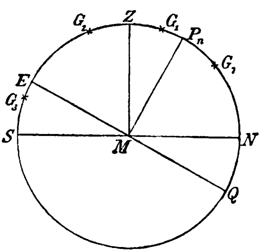

Fig. 83

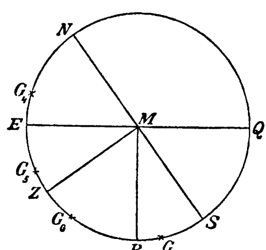

Fig. 84

Nr. 9 festgesetzt) nördliche Deklinationen als positiv, südliche als negativ, setzt man ferner fest, daß die Meridian-Zenit-Distanz von Z aus nach S positiv, nach N negativ gerechnet werden soll, so gehen die vorstehenden 6 Gleichungen über in die eine

$$\varphi = z + \delta.$$

Man bemerkt leicht, daß die zuletzt hergeleitete Gleichung für den Sonderfall $\delta = 90^0$ in die unter Nr. 19 aufgestellte Beziehung übergeht.

Für ein in unterer Kulmination befindliches Gestirn sind zwei Fälle zu unterscheiden: Auf der nördlichen Erdhalbkugel gilt (für ein Gestirn G_7, Fig. 83)

$$N P_N = NG_7 + P_n G_7;$$

auf der südlichen Halbkugel dagegen hat man (für ein Gestirn G_8, Fig. 84)

$$S P_S = SG_8 + P_s G_8,$$

wobei alle Bogen zunächst in absolutem Betrage gerechnet sind. Führt man für den Polabstand noch die Größe p und für die Höhe im Augenblick der unteren Kulmination h' ein, so gilt also, abgesehen vom Vorzeichen auf der nördlichen wie auf der südlichen Halbkugel, die Beziehung

$$\varphi = h' + p.$$

Diese Gleichung gilt natürlich nur für Zirkumpolarsterne, weil nur diese in der unteren Kulmination beobachtet werden können. Wie der Anblick der Figur sogleich lehrt, sind für jeden Beobachtungsort nur solche Sterne zirkumpolar, deren Deklination

$$\delta \geqq 90^0 - \varphi$$

ist oder m. a. W. deren Deklination mindestens gleich der Äquatorhöhe ist (Nr. 12).

21. Zahlreiche Beziehungen zwischen den astronomischen Daten eines Gestirns und der geographischen Breite des Beobachtungsortes ergeben sich aus dem sog. Aufgangsdreieck; die Ecken dieses rechtwinkligen Dreiecks sind der Aufgangspunkt A des Gestirns, der sichtbare Himmelspol P und (in unseren Breiten) der Südpunkt S (Fig. 85). In diesem Dreieck ist $PS = 180^0 - \varphi$ und $PA = 90^0 - \delta$; der Stundenwinkel $\tau = APS$, der angibt, wieviel Zeit vom Aufgang des Gestirns bis zu seiner Kulmination vergeht, wird nach der Neperschen Regel (§ 4, Nr. 5) gefunden aus

$$\cos\tau = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta.$$

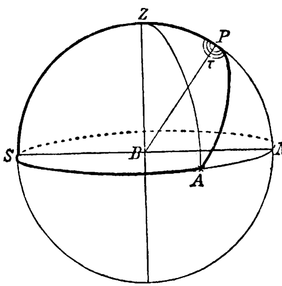

Fig. 85

Dieselbe Beziehung hätte man natürlich auch aus dem rechtwinkligen Dreieck APN mit der Neperschen Regel oder aus dem rechtseitigen Dreieck APZ mittels des Seitenkosinussatzes (§ 4, Nr. 7) erhalten können.

Eine Erörterung der hergeleiteten Beziehung ist sehr lehrreich: 1. Für $\delta = 0$ ergibt sich $\tau = 90^0$ oder in Zeitmaß 6^h. Ein Stern, der im Äquator steht, braucht also 6 Stunden von seinem Aufgange bis zur Kulmination und — wegen der Symmetrieverhältnisse — auch 6 Stunden von der Kulmination bis zum Untergange (Untergangsdreieck). 2. Ist $\delta > 0$, so ist für nördliche Breiten $\cos\tau < 0$, also $\tau > 90^0$, der Stern ist deshalb länger über als unter dem Horizont oder m. a. W. sein Tagbogen größer als sein Nachtbogen. 3. Für einen Stern mit südlicher Deklination ($\delta < 0$) wird in unseren Breiten $\cos\tau > 0$, also τ ein spitzer Winkel, der Stern ist also länger unter als über dem Horizont. 4. Da $\cos\tau$ dem absoluten Betrage nach höchstens gleich 1 sein darf, so muß für einen Stern, der auf- und untergeht,

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq |\operatorname{ctg}\varphi|,$$

also

$$|\delta| \leqq |90^0 - \varphi|$$

sein. Gilt hierin das Gleichheitszeichen, so handelt es sich um einen Stern, der bei seiner Kulmination gerade noch den Horizont berührt (z. B. Mitternachtssonne für Bewohner des Polarkreises). 5. Ist $\varphi = 0$, so folgt (ohne Rücksicht auf die Größe von δ) $\cos\tau = 0$, also $\tau = 90^0$ (in Zeitmaß 6^h); d. h. für einen Beobachter am Äquator sind alle Sterne 12 Stunden über dem Horizont.

22. Bei Sternen, die nicht im Äquator stehen, also nicht im Ostpunkt aufgehen, bezeichnet man den Abstand des Aufgangspunktes vom Ostpunkt als Morgenweite (m) und ebenso den Abstand des Untergangspunktes vom Westpunkte als Abendweite. Der Bogen ($90^0 + m$) ist eine Kathete des Aufgangsdreiecks (Fig. 85); man hat also nach der Neperschen Regel

$$\sin m = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Ist also z. B. für nördliche Breiten $\delta < 0$, so ist auch $m < 0$, d. h. der Stern geht zwischen Süden und Osten auf.

23. Ein für praktische Aufgaben aus der Himmelskunde wichtiges sphärisches Dreieck ist das Poldreieck am ersten Vertikal; seine Ecken sind der sichtbare Himmelspol P, das Zenit Z und ein Gestirn G, das man während seines Durchganges durch den Ost-West-Höhenkreis beobachtet. Der Stundenwinkel τ des bei Z rechtwinkligen Dreiecks PZG wird nach der Neperschen Regel gefunden aus

$$\cos\tau = \operatorname{ctg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta.$$

Diese Beziehung erlaubt eine scharfe Bestimmung der Polhöhe, wenn man die Deklination des Sterns aus dem Nautischen Jahrbuch entnehmen kann und eine nach Sternzeit geregelte Uhr hat (man beobachtet praktisch nicht τ, sondern 2τ, d. h. die Zeit zwischen dem Durchgang des Sternes durch den östlichen Teil des ersten Vertikals und dem Durchgang durch den westlichen Teil).

24. Unter den rechtwinkligen Dreiecken, die mit der Ekliptik in Beziehung stehen, greifen wir dasjenige heraus, dessen Katheten die Deklination δ und Rektaszension α der Sonne sind. Kennt man diese beiden Stücke (etwa aus dem Nautischen Jahrbuch), so kann man die Schiefe der Ekliptik ε (also den der Kathete δ gegenüberliegenden Winkel) nach der Neperschen Regel berechnen:

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \sin\alpha \operatorname{ctg}\delta.$$

In dem betrachteten Dreieck ist die Hypotenuse die Länge (λ) der Sonne in der Ekliptik. Die Nepersche Regel lehrt, daß

$$\cos\lambda = \cos a \cos\delta$$

ist. Die Beachtung der Veränderlichkeit der drei hierin vorkommenden Größen führt wieder wie bei den in Nr. 21—23 aufgestellten Gleichungen zu lehrreichen Ergebnissen, die aber hier nicht weiter verfolgt werden sollen.

25. Wird ein Stern beobachtet, der sich in keiner ausgezeichneten Lage befindet, so benutzt man das allgemeine nautische Dreieck, dessen Ecken der Stern, der sichtbare Himmelspol und das Zenit des Beobachtungsortes (kurz: Pol, Zenit, Stern) sind. In diesem Dreieck sind die Seiten die Komplemente der Polhöhe, der Sternhöhe und der Deklination. Die Winkel

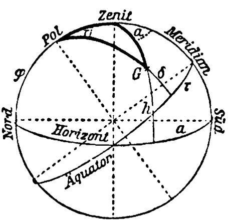

Fig. 86

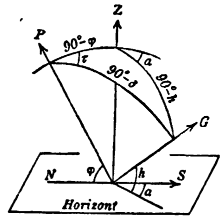

Fig. 87

sind der Stundenwinkel τ oder sein Supplement, das Azimut a (wegen der Zählung vgl. Nr. 6) und der — nur höchst selten benutzte — „parallaktische Winkel“ PGZ. Die Lageverhältnisse sind in Fig. 86 dargestellt; wer eine noch einfachere schematische Darstellung vorzieht, kann sich eine Zeichnung nach dem Muster von Fig. 87 entwerfen.

Zur Berechnung benutzt man je nach der gestellten Aufgabe die Kosinussätze oder den Sinussatz (§ 4, Nr. 6—8). Diese reichen für alle praktisch vorkommenden Aufgaben aus, wofern man nicht auf Eleganz und Kürze der Rechnung oder auf besondere Genauigkeit Wert legt (für solche Fälle kommen die Formeln in § 4, Nr. 9—11 in Betracht).

Erwähnt sei noch, daß die für das nautische Dreieck geltenden Gleichungen die unter Nr. 20 bis 23 aufgestellten Beziehungen als Sonderfälle enthalten; z. B. geht das allgemeine nautische Dreieck für $h = 0$ über in das Aufgangsdreieck, für $a = 90^0$ in das Poldreieck am ersten Vertikal usw.

26 Ein Gegenstück zu dem allgemeinen nautischen Dreieck, das einen Übergang vom Horizontalsystem zum Äquatorialsystem erlaubt, bildet das allgemeine Dreieck, das Beziehungen zwischen den äquatorialen Koordinaten (α und δ) eines beliebigen Sternes und seinen ekliptischen Koordinaten (λ und β) erschließt (der Sonderfall der Sonne ist in Nr. 24 behandelt worden). Die Ecken dieses allgemeinen Dreiecks sind ein Ge-

stirn G, ein Himmelspol (etwa der Nordpol P) und einer der beiden Ekliptikpole (etwa der sichtbare E). Die Stücke dieses Dreiecks sind (Fig. 79)

$$PE = \varepsilon, \quad PG = 90^0 - \delta, \quad EG = 90^0 - \beta, \quad \sphericalangle GPE = 90^0 + \alpha,$$
$$\sphericalangle PEG = 90^0 - \lambda.$$

Der Sinussatz liefert $\quad \cos\beta\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta,$

der Seitenkosinussatz

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda;$$

man kann also α und δ aus β und λ berechnen, und umgekehrt.

Zeitmaße und Zeitrechnung

27. Die Drehung der Erde um ihre Achse oder, was dasselbe sagt, die scheinbare Drehung des Fixsternhimmels um die Weltachse vollzieht sich mit solcher Regelmäßigkeit, daß irgendwelche erheblichen Ungleichheiten der Drehungsdauer nicht festgestellt werden konnten, seitdem sich die Menschheit überhaupt mit der Zeitmessung befaßt. Wäre die Sonne ein Fixstern, so hätte man also in der Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen der Sonne — oder eines anderen Sternes — eine leicht bestimmbare Zeiteinheit, ja man brauchte nicht einmal die Meridianebene zu ermitteln, es würde schon genügen, von einem festen Punkte aus den Vorübergang eines festen Sternes an einer Mauerkante o. dgl. zu beobachten. Alle Schwierigkeiten der Zeitmessung und Zeitrechnung beruhen nun darauf, daß die Sonne kein Fixstern ist, sondern im Laufe eines Jahres die Ekliptik, und zwar mit wechselnder Geschwindigkeit, durchläuft.

Da die Beobachtung lehrt, daß die Sonne bei der täglichen Umdrehung der Himmelskugel stets hinter den Sternen zurückbleibt (Nr. 15), so ist ein Sonnentag (d. h. die Zeit von einer Sonnenkulmination bis zu der darauffolgenden) länger als ein Sterntag, die Stunden einer nach Sternzeit gehenden Uhr sind also kürzer als die von einer Sonnenuhr angegebenen. Im Laufe eines Jahres ist die Sonne gegenüber den Umdrehungen des Fixsternhimmels um einen ganzen Tag zurück (siehe wieder Nr. 15), es sind also

$$365 \text{ Sonnentage} \approx 366 \text{ Sterntagen},$$

ein Sonnentag ist also rund 4 Minuten (genauer $3^m\,56^s$) länger als ein Sterntag. Wenn man z. B. am 1. Dezember irgendein Sternbild um 20 Uhr in bestimmter Lage zum Horizont beobachtet, so sieht man am 16. Dezember dasselbe Sternbild in derselben Lage schon um 19 Uhr.

Denkt man sich am dunklen Himmelsgewölbe den Pol mit irgendeinem Fixstern (etwa im Großen Bären) durch einen leuchtenden Bogen verbunden, so könnte man diesen Bogen als den Stundenzeiger einer Uhr (Sternenuhr) ansehen. Das Zifferblatt dieser Uhr müßte freilich in 24 (statt wie üblich in 12) gleiche Teile geteilt werden.

28. Wie man durch Abzählung (am Kalender) leicht findet, dauert der Frühling 92 Tage, der Sommer 94, der Herbst 89, der Winter 90 Tage; die

Sonne durchläuft also die vier durch den Äquator und die Sonnenwendepunkte begrenzten Viertel der Ekliptik in ungleichen Zeiten, sie verweilt auf der nördlichen Hälfte der Ekliptik eine Woche länger als auf der südlichen. Das liegt, wie wir heute anzunehmen berechtigt sind, daran, daß sich die Erde bei ihrem Laufe um die Sonne nicht in einer kreisförmigen, sondern in einer elliptischen Bahn bewegt und daß sie — nach dem 2. Keplerschen Gesetze — in der Sonnennähe (wenn auf der nördlichen Halbkugel Winter ist) schneller läuft als in der Sonnenferne. Schon diese ungleichförmige Bewegung der Sonne innerhalb der Ekliptik hat eine Ungleichheit der wahren Sonnentage zur Folge; in erhöhtem Maße aber ist diese Ungleichheit eine Folge davon, daß die Ekliptik gegen den Äquator geneigt ist. Dächte man sich nämlich durch Halbmeridiane, die von Pol zu Pol gehen, die Punkte der Ekliptik auf den Äquator projiziert, so erhielte man selbst dann, wenn die täglichen Kulminationspunkte der Sonne auf der Ekliptik gleichmäßig verteilt wären, in der Nähe der Punkte, die einer Rektaszension von 90^0 und 270^0 entsprechen, erheblich größere Äquatorabschnitte als in der Nähe des Frühlings- und Herbstpunktes.

Um den Schwierigkeiten, die mit dieser peinlich fühlbaren Ungleichheit der wahren Sonnentage verbunden sind, zu entgehen, hat man den Begriff mittlere Sonnenzeit geschaffen[1]). Auf den Sternwarten sind außer den Hauptuhren, die Sternzeit anzeigen, noch andere vortrefflich gebaute Pendeluhren aufgestellt, die folgendermaßen geregelt werden können: Wenn sie am 15. April bei Kulmination des Sonnenmittelpunktes 12 Uhr zeigten, so stehen die Zeiger im nächsten Jahre am 15. April (also nachdem der Stundenzeiger $2 \cdot 365$ Umläufe gemacht hat) bei Kulmination der Sonne wieder auf 12 Uhr. Eine solche Uhr zeigt mittlere Sonnenzeit an. 365 der so definierten mittleren Sonnentage sind, wie man durch Beobachtung der Kulminationen eines beliebigen Fixsternes feststellen kann, gleich $365^d\ 23^h\ 59^m\ 5^s$ Sternzeit, also ein mittlerer Sonnentag $= 1{,}002738^d$ (oder $24^h\ 3^m\ 56{,}6^s$) Sternzeit[2]). Hieraus ergibt sich

ein Sterntag $= 23^h\ 56^m\ 4{,}1^s$ mittlerer Zeit.

29. Um die mit der Einführung einer mittleren Sonnenzeit verbundenen Vorstellungen zu erleichtern, denkt man sich eine sog. mittlere Sonne, die ihre scheinbare Bahn am Himmel während eines Jahres mit einer hinsichtlich der Rektaszension völlig gleichförmigen Geschwindigkeit durchläuft (am einfachsten denkt man sie sich also im Äquator laufend); der Stundenwinkel dieser erdichteten Sonne ist dann die mittlere Sonnenzeit des Ortes oder kurz mittlere Zeit, und der Augenblick, in dem diese Sonne durch den oberen Meridian geht, heißt mittlerer Mittag.

---

1) Die mittlere Sonnenzeit wurde 1780 im Kanton Genf, der Heimat der Uhrenfabrikation, auf Anregung des Astronomen Mallet eingeführt; es dauerte noch 30 Jahre, bis man sich in Berlin der Neuerung anschloß, und weitere 6 Jahre, bis man sie in Paris einführte.

2) Vgl. Nr. 31.

Der Unterschied **„mittlere Zeit minus wahre Zeit“** heißt **Zeitgleichung.** (Besser spräche man von Zeitausgleichung oder Korrektion, aber der Name Zeitgleichung hat sich nun einmal allgemein eingebürgert.)

Für die gedächtnismäßige Aneignung merke man: „Minuend ist mittlere Zeit“, im übrigen alphabetische Folge der Anfangsbuchstaben: Mittlere Zeit, Wahre Zeit, Zeitgleichung.

Welchen Zeitpunkt man als Ausgang für die Bewegung der mittleren Sonne wählt, ist an sich gleichgültig, doch wird man den Tag nicht in eine Jahreszeit legen, in der die wahre Sonne ungewöhnlich schnell oder langsam fortschreitet. Als ein geeigneter Tag für den Beginn des Umlaufs der mittleren Sonne hat sich der 15. April erwiesen, weil bei Zugrundelegung dieses Tages die positiven und negativen Werte der Zeitgleichung möglichst gering ausfallen. Wie die Zeitgleichung im Verlaufe eines Jahres schwankt, ist aus der graphischen Darstellung in Fig. 88 ersichtlich; wir wollen

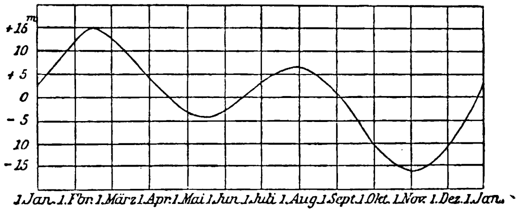

Fig. 88

hier nur die wichtigsten Angaben machen: Das Hauptmaximum trat für das Jahr 1945[1]) am 11. Februar ein, nämlich $+14^m$, das Hauptminimum am 3. November, nämlich $-16^m\,22^s$; ein Nebenmaximum ($+6^m\,21^s$) zeigt sich am 27. Juli, ein Nebenminimum ($-3^m\,46^s$) am 15. Mai. Für die Zwischenwerte kann man die Angaben des Nautischen Jahrbuchs oder eines guten Kalenders nicht entbehren.

30. Durch die Annahme einer mittleren Sonne ist zwar die Tageslänge festgesetzt, es ist aber noch keine Bestimmung darüber getroffen, wann der Tag an irgendeinem Orte zu beginnen hat. Wollte man die Begriffe 12 Uhr und mittlerer Mittag als gleichbedeutend ansehen, so müßte jeder Meridian der Erde eine besondere Zeit haben. Das ist tatsächlich bis zu Anfang der neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts so gewesen. Erst am 1. April 1893 wurde die mitteleuropäische Zeit eingeführt, d. h. es wurde in Deutschland und einigen angrenzenden Ländern (nach der heutigen Staatsbezeichnung: Norwegen, Schweden, Dänemark, Luxemburg, Schweiz,

1) Nach dem Nautischen Jahrbuch; wegen der Schaltjahre (s. Nr. 31) ist der Betrag der Zeitgleichung in den verschiedenen Jahren nicht immer am gleichen Datum genau der gleiche.

Italien, Tschechoslowakei, Österreich, Ungarn und Jugoslawien) die mittlere Zeit des 15. Meridians ö. Gr. (der durch Görlitz geht) der Zeitmessung zugrunde gelegt. Da 15° Längenunterschied einer Stunde Zeitunterschied entsprechen, gehen alle Uhren, die nach mitteleuropäischer Zeit gestellt sind, eine Stunde vor im Vergleich zur mittleren Ortszeit in Greenwich[1]).

Will man aus der mittleren Ortszeit die mitteleuropäische Zeit ermitteln, so hat man, wenn λ die östliche Gr. Länge des Ortes in Gradmaß ist, zur mittleren Ortszeit $4 \cdot (15 - \lambda)$ Minuten zu addieren; dieser Betrag wird auch Längenzeit des Ortes genannt. Es gilt also (in leichtverständlicher Abkürzung) die Beziehung

$$WZ + ZGl + LZ = MEZ.$$

31. Wir haben oben wiederholt den Ausdruck Jahr gebraucht für die Zeit, während der die Sonne einen Umlauf in der Ekliptik vollendet; wir müssen jetzt diesen Ausdruck noch schärfer fassen. Wir definieren zunächst das siderische Jahr als den Zeitabschnitt, den die Sonne braucht, um von einem Stern, bei dem sie gerade steht, bis wieder zu diesem Stern zu gelangen; es ist gleich

$$365{,}25637 \text{ Tagen oder } 365^d\, 6^h\, 9^m\, 11^s \text{ mittlerer Zeit.}$$

Etwas kürzer ist das tropische Jahr; man versteht darunter den Zeitraum, den die Sonne braucht, um vom Frühlingspunkt bis wieder zum Frühlingspunkte zu gelangen. Wegen der Präzession der Tagundnachtgleichen (siehe Nr. 18) ist das tropische Jahr um so viel kürzer als das siderische, wie die mittlere Sonne braucht, um 50,2 Bogensekunden der Ekliptik zu durchmessen, d. h. $20^m\, 34^s$ mittlerer Zeit. Das tropische Jahr umfaßt mithin

$$365{,}2422 \text{ Tage oder } 365^d\, 5^h\, 48^m\, 37^s \text{ mittlerer Zeit.}$$

Ein bürgerliches Gemeinjahr wird zu 365 Tagen gerechnet und ist damit um rund $\frac{1}{4}$ Tag zu kurz; daher wird jedem 4. Jahr ein Tag (29. Februar) eingeschaltet (Schaltjahr). Doch auch dies genügt noch nicht, denn 100 Jahre bekämen bei diesem Schaltverfahren 36525 Tage, während es nur 36524 Tage sein dürften. Um hierfür einen Ausgleich zu schaffen, wird alle 100 Jahre, wenn die Jahreszahl ein Vielfaches von 100 ist, der Schalttag ausgelassen, so daß auf ein Jahrhundert 36524 Tage kommen. Auf diese Weise würde man aber in 400 Jahren $4 \cdot 0{,}22$ Tg., also fast einen ganzen Tag zuwenig haben, daher wird der Schalttag, wenn die Jahreszahl durch 400 teilbar ist, wieder eingefügt.

1) Außer der mitteleuropäischen Zeit gibt es noch folgende Normalzeiten: Greenwicher Zeit, osteuropäische (30° ö. L.), japanische (135° ö. L.), ostaustralische (150° ö. L.), ostbrasilianische (45° w. L.), atlantische (60° w. L.) und pazifische Zeit (120° w. L.)

§ 6. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte

Ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels

1. In Fig. 89 bis 91 ist ein Drehkegel gezeichnet, der von einer Ebene E geschnitten wird, und zwar sind drei Fälle unterschieden, je nachdem die durch den Kegelscheitelpunkt M parallel zu E gelegte Ebene keine, zwei oder eine Erzeugende mit dem Kegel gemein hat. Man legt in den Kegel zwei Kugeln, die den Kegel in den Kreisen k_1 und k_2 und die Ebene E in den Punkten F_1 und F_2 berühren[1]). Die Ebene des zu E senkrechten Achsenschnittes wird als Zeichenebene gewählt; sie schneidet die Schnittkurve (in Fig. 89 und 90) in den auf der Geraden F_1F_2 gelegenen Punkten S_1, S_2 und die durch M zu E parallel gelegte Ebene in einer Geraden, welche die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 in D_1 und D_2 schneidet. Ist C ein Punkt der Schnittkurve und sind A_1, A_2 die Punkte, in denen die Mantellinie MC die Kreise k_1 und k_2 schneidet, so ist $CA_1 = CF_1$ (als Tangenten von C aus an die erste Kugel), ebenso $CA_2 = CF_2$, also im Falle der Fig. 89

$$CF_1 + CF_2 = CA_1 + CA_2 = A_1A_2 = S_1S_2$$

und im Falle der Fig. 90

$$CF_1 - CF_2 = CA_1 - CA_2 = A_1A_2 = S_1S_2.$$

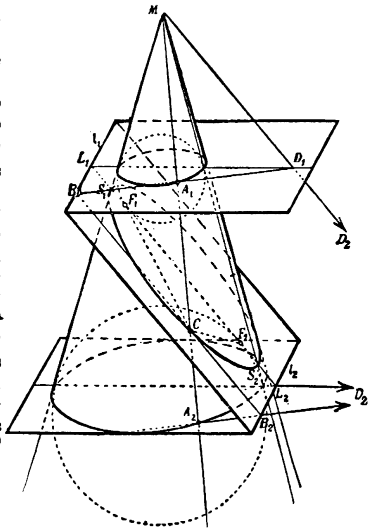

Fig. 89

Die Strecke A_1A_2 oder S_1S_2 ist aber konstant (sie wird meist mit $2a$ bezeichnet), man hat also gezeigt: die Abstände des beweglichen Punktes C von den festen Punkten F_1 und F_2 haben im Falle der Fig. 89 eine konstante Summe, im Fall der Fig. 90 eine konstante Differenz. Die Schnittkurve in Fig. 89 bezeichnet man als eine Ellipse, die in Fig. 90 als eine Hyperbel. Man erklärt nämlich:

Erklärung. Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Summe

1) Um die Figuren nicht zu sehr zu belasten, sind die Buchstaben k_1 und k_2 fortgelassen; ferner sind die scheinbaren Umrisse der Hilfskugeln nicht mitgezeichnet, sondern nur die Schnittkreise der Hilfskugeln mit der Zeichenebene.

haben. Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Differenz haben.

Die beiden Hilfskugeln heißen nach ihrem Entdecker Dandelinsche Kugeln. Im Falle der Fig. 91 liegt die zweite Dandelinsche Kugel im Unendlichen, ebenso auch die Punkte A_2, F_2, D_2, S_2, daher ist in Fig. 91 bei allen Buchstaben, die in Fig. 89 und 90 den Index 1 haben, dieser Index weggelassen. Die Gerade MD_2 ist jetzt zu einer Mantellinie geworden, die den Kreis k in D

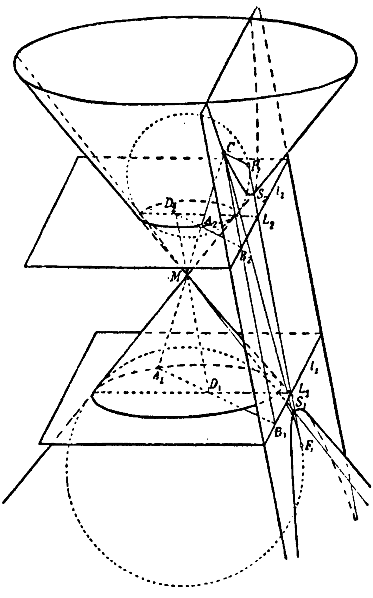

Fig. 90

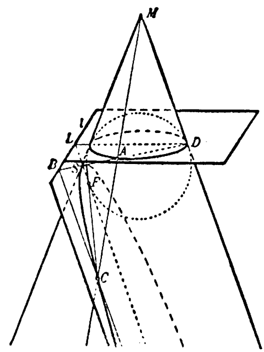

Fig. 91

schneidet. Die Ebene des Kreises k schneidet die Ebene E in einer Geraden l, die auf SF senkrecht steht; zieht man noch $CB \perp l$, so muß die Gerade BD in der durch die Parallelen BC und MD bestimmten Ebene liegen, also MC in A schneiden, und es folgt aus dem Strahlensatz $CA = CB$ (weil $MA = MD$) also (weil $CA = CF$) auch $CF = CB$. Es ist also gezeigt: Der Punkt C ist von dem festen Punkt F ebenso weit entfernt wie von der festen Geraden l. Die Schnittkurve bezeichnet man als eine Parabel. Man erklärt nämlich:

Erklärung. Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden gleich weit entfernt sind.

2. Wegen ihrer Erzeugungsweise werden die drei Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel mit dem gemeinsamen Namen Kegelschnitte bezeichnet. — Daß man für sie auch eine gemeinsame planimetrische Definition aufstellen kann, erkennt man in folgender Weise:

Schneidet man in Fig. 89 und 90 die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 mit der Ebene E in den Geraden l_1 und l_2 und zieht man noch $CB_1 \perp l_1$ und $CB_2 \perp l_2$, so folgt aus dem Strahlensatz $CA_1 : CB_1 = MA_1 : MD_1 = \varepsilon$, also auch $CF_1 : CB_1 = \varepsilon$, wo ε eine konstante Zahl ist (weil MA_1 als Tangente von M aus an die erste Dandelinsche Kugel für jede Lage des Punktes C dieselbe Länge hat). Ebenso ist $CA_2 : CB_2 = MA_2 : MD_2 = \varepsilon$ und daher auch $CF_2 : CB_2 = \varepsilon$. Bei dem Ellipsenschnitt liegen D_1 und D_2 außerhalb von k_1 und k_2, beim Hyperbelschnitt innerhalb; deshalb ist im ersten Falle $\varepsilon < 1$, im zweiten $\varepsilon > 1$. Man kann also sagen:

Erklärung. Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein konstantes Verhältnis haben, und zwar ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem dieses Verhältnis $\lesseqgtr 1$ ist.

Wir führen noch einige später oft gebrauchte Bezeichnungen und Abkürzungen ein: Die festen Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, ihre halbe Entfernung heißt lineare Exzentrizität und wird mit e bezeichnet. Die festen Geraden l_1 und l_2 heißen Leitlinien, das konstante Verhältnis ε heißt numerische Exzentrizität.

Ellipse

3. Wir wollen jetzt Eigenschaften jedes der drei Kegelschnitte auf Grund der in Nr. 1 gegebenen Definitionen herleiten und uns zunächst mit der Ellipse beschäftigen.

Befestigt man einen Faden von der unveränderlichen Länge $2a$ in den beiden festen Punkten F_1, F_2 und führt einen Stift so, daß er den Faden stets straff gespannt hält, so beschreibt der Stift (nach der Definition in Nr. 1) eine Ellipse (Fadenkonstruktion).

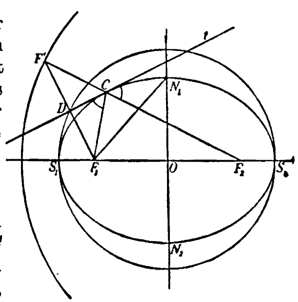

Fig. 92

Um die Ellipse punktweise zu konstruieren, zerlegt man die konstante Strecke $2a$ in zwei Stücke r_1, r_2 und zeichnet über F_1F_2 ein Dreieck F_1F_2C (Fig. 92) mit den Seiten $2e$, r_1 und r_2; aus der Definition folgt dann, daß C ein Punkt der Ellipse ist. Das Dreieck kann vier verschiedene Lagen haben, die in bezug auf die Grundlinie F_1F_2 und deren Mittellot paarweise symmetrisch sind; also ist die ganze Ellipse symmetrisch in bezug auf die Verbindungslinie der festen Punkte F_1, F_2 und deren Mittellot. Daraus folgt, daß die Ellipse auch symmetrisch in bezug auf den Schnittpunkt O dieser beiden Geraden ist oder m.a.W., daß jede durch O gehende Sehne in O halbiert wird, daß also für O die Bezeichnung **Mittelpunkt der Ellipse** und für jede durch O gehende Sehne die Bezeichnung **Durchmesser** gerechtfertigt ist. Trägt man von O aus auf der Geraden F_1F_2 die Strecke a bis S_1 und S_2 ab, zeichnet man ferner um F_1 und F_2 Kreise mit a, die sich in N_1 und N_2 schneiden, so sind nach der Definition S_1, S_2 und N_1, N_2 Punkte der Ellipse, und zwar ausgezeichnete Punkte, die **Scheitel**. S_1 und S_2 heißen Hauptscheitel, N_1 und N_2 Nebenscheitel. Die Strecke S_1S_2 heißt **Hauptachse**, die Strecke N_1N_2 **Nebenachse**. Hiernach kann man die Aussagen über Symmetrieverhältnisse zusammenfassen in den Satz:

Satz. Die Ellipse ist symmetrisch in bezug auf Hauptachse, Nebenachse und Mittelpunkt.

Der Kreis, der die Hauptachse zum Durchmesser hat, heißt **Hauptscheitelkreis**, der Kreis, der die Nebenachse zum Durchmesser hat, heißt **Nebenscheitelkreis**. Setzt man noch $N_1N_2 = 2b$, so folgt aus dem Dreieck F_1ON_1 die Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$.

4. Schneidet CO die Ellipse zum zweiten Male in C' (in Fig. 92 nicht gezeichnet), so ist $CC' < CF_2 + F_2C'$ (weil jede Dreiecksseite kleiner ist als die Summe der beiden anderen), da aber $CF_1 = C'F_2$, so ist

$$CC' < CF_2 + CF_1,$$

d. h. $CC' < 2a$, d. h.:

Satz. Die Hauptachse ist der größte von allen Ellipsendurchmessern; die Ellipse liegt ganz innerhalb des Hauptscheitelkreises.

Ähnlich beweist man:

Satz. Die Nebenachse ist der kleinste unter allen Ellipsendurchmessern; die Ellipse liegt ganz außerhalb des Nebenscheitelkreises.

5. Verlängert man F_2C um F_1C bis F' (Fig. 92), so folgt aus der Definition der Ellipse: $F_1C + CF_2 = F'C + CF_2 = F'F_2 = 2a$. Bewegt sich also der Punkt C auf der Ellipse, so bewegt sich F' auf einem Kreise um F_2 mit $2a$. Dieser Kreis heißt „der zu F_2 gehörige Leitkreis" der Ellipse. Sind F_1, F_2 und $2a$ gegeben, so kann man jetzt einen Punkt C der Ellipse auf eine neue Art konstruieren: Man zeichnet um F_2 den Kreis mit $2a$ und zieht einen beliebigen Radius F_2F'; die Mittelsenkrechte von F_1F' schneidet F_2F' in einem Punkte C der Ellipse. Wäre P irgendein anderer Punkt der Mittelsenkrechten, so wäre $PF_1 + PF_2 = PF' + PF_2 > F'F_2$, also $> 2a$, C ist also der einzige Punkt der Mittelsenkrechten, für den $CF_1 + CF_2 = 2a$ ist, oder von allen Punkten der Mittelsenkrechten liegt nur C auf der Ellipse, m.a.W.: Die Mittelsenkrechte ist **Tangente** an die Ellipse (daher in Fig. 92 mit t bezeichnet). Aus den Symmetrieeigenschaften der Mittelsenkrechten folgt

sogleich, daß die Tangente den Nebenwinkel von F_1CF_2 halbiert oder mit den Strahlen CF_1 und CF_2 gleiche Winkel bildet; also werden Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen, an der Ellipse in C so zurückgeworfen, daß sie nach F_2 gelangen, und umgekehrt. Daher rührt der Name Brennpunkt für F_1 und F_2 und Brennstrahlen für CF_1 und CF_2.

6. Die in Nr. 5 bewiesene Tatsache, daß die Mittelsenkrechte auf F_1F' Tangente an die Ellipse ist, läßt sich auch so aussprechen:

Satz. Der geometrische Ort der symmetrischen Gegenpunkte eines Brennpunktes in bezug auf alle Tangenten ist der zum anderen Brennpunkt gehörige Leitkreis.

Beschreibt man um C mit dem Radius CF_1 einen Kreis, so berührt dieser den Leitkreis um F_2 in F'; da F_1 und der Leitkreis um F_2 fest, der Punkt C aber beweglich ist, so kann man sagen:

Satz. Die Ellipse ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis (um F_2) berühren und durch einen festen Punkt (F_1) innerhalb dieses festen Kreises hindurchgehen.

Daß im Ellipsenfalle F_1 innerhalb des Leitkreises um F_2 liegen muß, folgt daraus, daß $F_1F_2 = 2e < 2a$ ist.

Hyperbel

7. Die Hyperbel läßt sich auf Grund ihrer Definition genau so, wie dies in Nr. 3 für die Ellipse gezeigt worden ist, punktweise konstruieren (Fig. 93). Die Symmetrieeigenschaften der Kurve in bezug auf die beiden Achsen und den Mittelpunkt gelten wie bei der Ellipse. Bei der Hyperbel ist aber $a < e$, weil die Differenz zweier Dreiecksseiten kleiner ist als die dritte ($2a < 2e$). Daraus folgt noch:

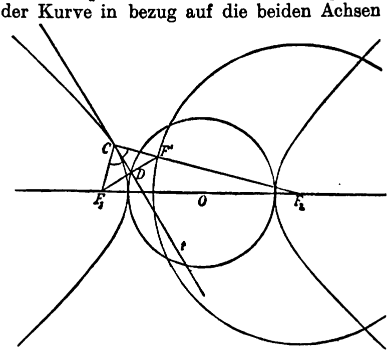

Fig. 93

Satz. Die Hauptachse ist der kleinste unter allen Hyperbeldurchmessern; die Hyperbel liegt ganz außerhalb des (Haupt-) Scheitelkreises. Nebenscheitel sind nicht vorhanden.

Jeder Brennpunkt liegt außerhalb des Leitkreises um den andern Brennpunkt.

Die Tangente halbiert den inneren Winkel der beiden Brennstrahlen, d. h. Strahlen, die von dem einen Brennpunkt ausgehen, werden an der Hyperbel so zurückgeworfen, als kämen sie vom andern Brennpunkt.

Satz. Die Hyperbel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen festen Kreis (um F_2) berühren und durch einen festen Punkt (F_1) **außerhalb** dieses festen Kreises hindurchgehen.

Allgemein gilt wie bei der Ellipse für die Konstruktion eines beliebigen Hyperbelpunktes: Ist F' ein beliebiger Punkt des Leitkreises um F_2, so schneidet die Mittelsenkrechte von F_1F' den Strahl F_2F' in einem Punkte C der Hyperbel, und die Mittelsenkrechte von F_1F' ist Tangente in C.

8. Hält man in Fig. 93 die Punkte F_1 und F_2, den Leitkreis um F_2 und den Scheitelkreis fest, läßt aber F' auf dem Leitkreise wandern, bis F_1F' zur Tangente wird, so erhält man die in Fig. 94 dargestellten Lageverhältnisse; F_1F' ist zur Tangente F_1T geworden. Aus $F_1O : F_1F_2 = 1 : 2$ folgt, daß F_1T auch den Scheitelkreis berührt; der Berührungspunkt heiße U. Da $F_2T \parallel OU$ und $F_1U : UT = F_1O : OF_2 = 1 : 1$ ist, so ist OU Mittelsenkrechte von F_1T. Im vorliegenden Falle schneidet also F_2T die Mittelsenkrechte von F_1T in einem unendlich fernen Punkte der Hyperbel, und OU ist Tangente in diesem unendlich fernen Punkt.

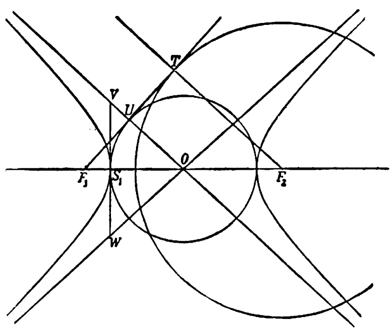

Fig. 94

Erklärung. Tangenten, die eine Kurve im Unendlichen berühren, heißen **Asymptoten**.

Da sich von F_1 aus zwei Tangenten an den Leitkreis um F_2 legen lassen, so hat die Hyperbel zwei Asymptoten.

Die Hyperbel besteht aus zwei getrennten Ästen; der eine wendet dem Brennpunkt F_1, der andere dem Brennpunkt F_2 seine hohle Seite zu. Für die Punkte des ersten Astes ist $CF_2 - CF_1 = 2a$, für die Punkte des anderen $CF_1 - CF_2 = 2a$. Für einen Punkt P, der nicht auf der Hyperbel liegt, ist

$$|PF_1 - PF_2| \lesseqgtr 2a,$$

je nachdem P außerhalb oder innerhalb der Hyperbel liegt, oder m. a. W. je nachdem der dem Punkte P zunächst gelegene Hyperbelast ihm die gewölbte oder hohle Seite zukehrt.

9. Die Scheiteltangente in S_1 schneide die Asymptoten in V und W (Fig. 94); dann sind die rechtwinkligen Dreiecke OS_1V und OUF_1 kongruent (weil $OS_1 = OU = a$ ist), also ist $OV = OF_1 = e$. Setzt man $VW = 2b$, so hat man die Beziehung $e^2 = a^2 + b^2$, die der in Nr. 3 für die Ellipse bewiesenen entspricht. Man kann also, obgleich die Hyperbel die Nebenachse nicht schneidet, doch von einer „Länge der Nebenachse" sprechen; man versteht darunter das von den Asymptoten begrenzte Stück der Scheiteltangenten.

Parabel

10. Die Parabel ist am Schlusse von Nr. 1 definiert worden; der dabei erwähnte feste Punkt F heißt Brennpunkt, die feste Gerade l Leitlinie, das von F auf l gefällte Lot FL heißt Achse (Fig. 95). Wenn man zu l auf der dem Punkte F zugewandten Seite in beliebigem Abstande c ($> \frac{1}{2}FL$) die Parallele zieht und um F den Kreis mit dem Radius c zeichnet, so schneidet der Kreis die Parallele in zwei Punkten der Parabel. Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zur Achse, also ist die ganze Parabel symmetrisch zur Achse. Der Mittelpunkt S von FL ist Scheitel der Parabel. Zieht man durch irgendeinen Punkt F' der Leitlinie zur Achse die Parallele, so schneidet diese die Mittelsenkrechte von FF' in einem Punkte C der Parabel. Ist P ein anderer (in Fig. 95 nicht gezeichneter) Punkt der Mittelsenkrechten und PQ das von P auf l gefällte Lot, so ist zwar auch $PF = PF'$, da aber (im rechtwinkligen Dreieck PQF') $PF' > PQ$ ist, so ist auch $PF > PQ$, d. h. P liegt außerhalb der Parabel. Es gibt also außer C keinen anderen Punkt P der Mittelsenkrechten, der gleichzeitig ein Parabelpunkt wäre; die Mittelsenkrechte ist also Tangente der Parabel und C der Berührungspunkt.

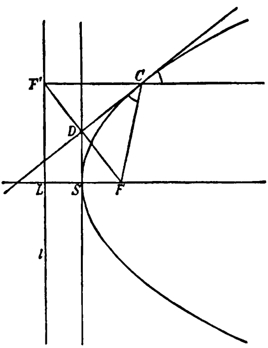

Fig. 95

Aus den Symmetrieeigenschaften der Mittelsenkrechten folgt, daß die Tangente mit dem Brennstrahl FC und dem Lote CF' gleiche Winkel bildet. Daher werden Lichtstrahlen, die von F ausgehen, an der Parabel so zurückgeworfen, daß sie parallel der Achse laufen; umgekehrt werden Lichtstrahlen, die parallel der Achse auffallen, an der Parabel so gespiegelt, daß sie sich in F sammeln (daher der Name Brennpunkt).

11. Die soeben benutzte Symmetrieeigenschaft des Mittellotes läßt sich auch aussprechen in der Form:

Satz. Der geometrische Ort der symmetrischen Gegenpunkte des Brennpunktes in bezug auf alle Tangenten ist die Leitlinie.

Durchläuft F' diesen Ort ganz, so dreht sich FF' um F und nimmt jede Richtung einmal, aber nur einmal an, daher nimmt auch das Mittellot von FF' jede Richtung einmal und nur einmal an, es gibt also bei der Parabel keine zwei Tangenten, die einander parallel sind.

Beschreibt man um C mit CF einen Kreis, so berührt dieser die Leitlinie. Man kann also sagen:

Satz. Die Parabel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die durch einen festen Punkt hindurchgehen und eine feste Gerade berühren.

12. Aus der Definition der Parabel folgt noch, daß die durch F' zur Achse gezogene Parallele die Parabel außer in C noch in einem unendlich fernen Punkte schneiden muß. In der Tat, je weiter man auf $F'C$ einen Punkt (er heiße für einen Augenblick C') fortschreiten läßt, um so mehr nähert sich das Verhältnis $C'F : C'F'$ dem Werte 1; es erreicht diesen Wert, wenn C' in den unendlich fernen Punkt der Parabelachse eingerückt ist. Dieser unendlich ferne Punkt der Parabel kann gleichzeitig als zweiter Scheitel, als zweiter Brennpunkt und auch als Mittelpunkt der Kurve angesehen werden. Deshalb bezeichnet man die Parallelen zur Achse auch als Durchmesser der Parabel.

Gemeinsame Eigenschaften der drei Kegelschnitte

13. Die in Nr. 6, 7 und 11 hergeleiteten Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel lassen sich zusammenfassen, wenn man die Leitlinie der Parabel als Leitkreis mit unendlich großem Radius ansieht. Man kann dann sagen:

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die durch einen festen Punkt gehen und einen festen Kreis berühren, ist ein Kegelschnitt,

und zwar eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des festen Kreises liegt, eine Parabel, wenn der feste Kreis in eine Gerade entartet ist (so daß man nicht entscheiden kann, ob der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des festen Kreises liegt). Der feste Kreis ist Leitkreis des Kegelschnitts, der feste Punkt und der Mittelpunkt des festen Kreises sind Brennpunkte des Kegelschnitts.

Wir betrachten jetzt die Übergänge von einer Kegelschnittart zur anderen. Wie früher sei F_1 der feste Punkt und F_2 der Mittelpunkt des festen Kreises; ferner sei L einer der Punkte, in denen der Kreis um F_2 die Gerade F_1F_2 schneidet. Hält man nicht mehr F_1 und den Kreis um F_2, sondern nur F_1 und L fest, während F_2 die Gerade F_1L durchläuft, so erhält man eine Ellipse, wenn F_1 und F_2 auf derselben Seite von L liegen, eine Hyperbel, wenn F_1 und F_2 auf verschiedenen Seiten von L liegen, eine Parabel, wenn F_2 ins Unendliche fällt. „In dieser Weise ist also die Parabel als Verbindungsglied zwischen Ellipse und Hyperbel und als spezieller Fall beider Arten von Kegelschnitten dargestellt“ (J. Steiner).

14. Ein Kegelschnitt sei durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und den zu einem von ihnen gehörigen Leitkreis (z. B. durch den Leitkreis um F_2) bestimmt, ferner sei eine Gerade g in der Ebene des Kegelschnitts gegeben.

Wir wollen zeigen, wie man die **Schnittpunkte** der Geraden und des Kegelschnitts ermittelt (Fig. 96). Nach Nr. 13 sind die auf g gesuchten Punkte die Mittelpunkte von Kreisen, die den Leitkreis um F_2 berühren und durch F_1 gehen. Ist F' der symmetrische Gegenpunkt von F_1 in bezug auf g, so müssen die in Rede stehenden Kreise auch durch F' gehen. Man legt durch F_1 und F' einen Hilfskreis, der den gegebenen Leitkreis in X und Y schneidet. Der Schnittpunkt von XY und F_1F' sei M. Von M aus seien an den Leitkreis die Tangenten MT_1 und MT_2 gezogen. Eine zweimalige Anwendung des Sekantentangentensatzes lehrt, daß in T_1 und T_2 auch die Kreise um C_1 und C_2 durch F_1 (und F') den Leitkreis um F_2 berühren müssen; also schneiden die Radien F_2T_1 und F_2T_2 des Leitkreises

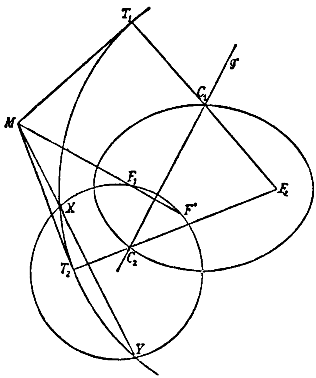

Fig. 96

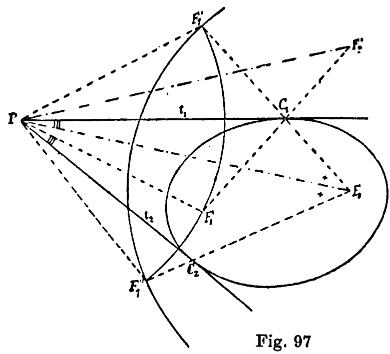

Fig. 97

die Gerade g in den gesuchten Punkten C_1 und C_2. Liegt F_2 im Unendlichen, handelt es sich also um eine Parabel, so vereinfacht sich die Betrachtung dadurch, daß der Punkt M auf der Leitlinie liegt. — Die Aufgabe hat zwei Lösungen, wenn F_1 und F' entweder beide innerhalb oder beide außerhalb des Leitkreises liegen,

nur eine Lösung (d. h. g berührt den Kegelschnitt), wenn F' auf dem Leitkreise liegt,

keine Lösung, wenn von den Punkten F_1 und F' einer innerhalb, der andere außerhalb des Leitkreises liegt.

Da von M aus an den Leitkreis im allgemeinen zwei Tangenten möglich sind, so hat die Aufgabe im allgemeinen zwei Lösungen, d. h. eine Gerade schneidet einen Kegelschnitt im allgemeinen in zwei Punkten, m. a. W. die Kegelschnitte sind **Kurven zweiter Ordnung**.

15. Wir zeigen jetzt, wie man an den Kegelschnitt von einem Punkt P die **Tangenten** findet. Schneidet der um P durch F_1 gelegte Kreis den Leitkreis (oder bei der Parabel die Leitlinie) in F_1' und F_1'' (Fig. 97—99),

so sind die Mittellote von F_1F_1' und F_1F_1'' Tangenten an den Kegelschnitt, und zwar sind die Schnittpunkte der Mittellote mit F_2F_1' und F_2F_1'' die Berührungspunkte C_1 und C_2 der Tangenten. Es gibt zwei Tangenten, eine oder keine, je nachdem der Kreis um P den Leitkreis (bei der Parabel die Leitlinie) schneidet, berührt oder meidet, m. a. W. je nachdem der Punkt P außerhalb, auf dem Kegelschnitt oder innerhalb gelegen ist. Da zwei Kreise im allgemeinen zwei Schnittpunkte haben, so hat die Aufgabe im allgemeinen zwei Lösungen, m. a. W. die Kegelschnitte sind Kurven zweiter Klasse.

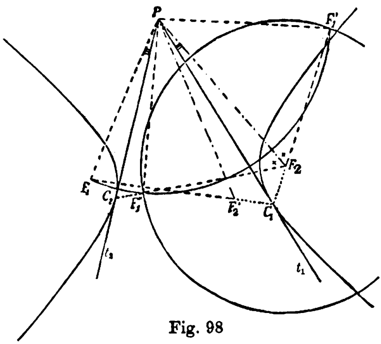

Fig. 98

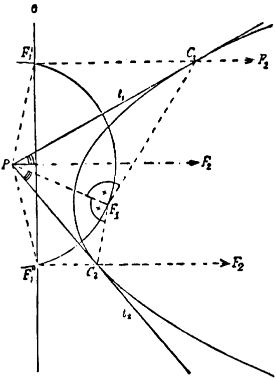

Fig. 99

16. Sind wieder wie in Nr. 15 (Fig. 97—99) F_1' und F_1'' die symmetrischen Gegenpunkte von F_1 in bezug auf die Tangenten t_1 und t_2, ebenso F_2' und F_2'' die Gegenpunkte von F_2 in bezug auf t_1 und t_2, so ist bei der Ellipse und Hyperbel

$$F_2F_1' = F_2F_1''(=2a), \quad PF_1' = PF_1''(=PF_1),$$

also $\triangle PF_2F_1' \cong \triangle PF_2F_1''$, daher $\sphericalangle PF_2F_1' = \sphericalangle PF_2F_1''$.

Bei der Parabel liegen F_1' und F_1'' auf der Leitlinie, und es ist

$$\sphericalangle PF_1C_1 = PF_1'C_1 = PF_1''C_2 = PF_1C_2.$$

Es gilt also für alle drei Kegelschnitte der

Satz: Die von einem Brennpunkt nach den Berührungspunkten zweier Tangenten gezogenen Strahlen bilden gleiche Winkel mit dem Brennstrahl nach dem Schnittpunkt der Tangenten.

Liegen bei der Hyperbel die Berührungspunkte auf verschiedenen Ästen, so tritt an die Stelle des einen Brennstrahles seine Verlängerung.

17. In Fig. 97 und 98 sind noch zwei andere Dreiecke einander kongruent; weil nämlich bei der Ellipse und Hyperbel $PF_1 = PF_1''$, $PF_2 = PF_2'$ und $F_2F_1'' = F_1F_2' (= 2a)$ ist, so ist $\triangle PF_1''F_2 \cong \triangle PF_1F_2'$. Das erste dieser Dreiecke kommt aber mit dem zweiten zur Deckung, wenn man es um den Winkel $F_1''PF_1$ oder um den Winkel F_2PF_2' dreht. Diese beiden Winkel müssen also gleich sein, daher müssen auch ihre Hälften übereinstimmen, d. h. es muß sein

$$\sphericalangle C_2PF_1 = \sphericalangle C_1PF_2.$$

Bei der Parabel ist $\quad \sphericalangle F_1'PF_2 = \frac{1}{2} F_1'PF_1''$

oder $\quad F_1PF_1' - F_1PF_2 = F_1PF_1'' + F_1PF_2,$

also $\quad F_1PF_1' - 2F_1PF_2 = F_1PF_1''.$

Dividiert man hier gliedweise durch 2, so folgt

$$F_1PC_1 - F_1PF_2 = F_1PC_2,$$

also auch $\quad C_1PF_2 = F_1PC_2.$

Für alle drei Kurvenarten gilt also der

Satz: Die Brennstrahlen nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten bilden mit den Tangenten gleiche Winkel.

Aus diesem Satz und dem in Nr. 16 bewiesenen fließt eine Fülle neuer Beziehungen, auf die wir hier nicht eingehen können, die wir vielmehr den Übungen überlassen.

18. Bezeichnet man in Fig. 92 und 93 den Schnittpunkt der Strecke F_1F' und ihres Mittellotes mit D, so ist, weil $F_1D : F_1F' = F_1O : F_1F_2 = 1 : 2$ ist, auch $DO : F'F_2 = 1 : 2$, also $DO = a$, d. h. D liegt auf dem Scheitelkreis. Bei der Parabel (Fig. 95) ist $FD = DF'$, aber auch $FS = SL$, also $DS \parallel F'L$, d. h. D liegt auf der Scheiteltangente. Betrachtet man die

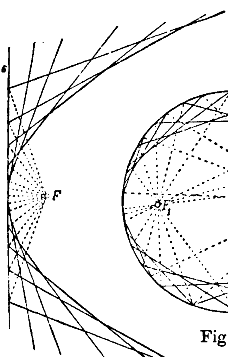

Fig. 100

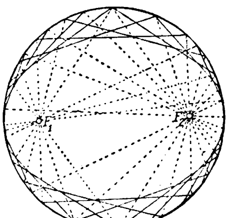

Fig. 101

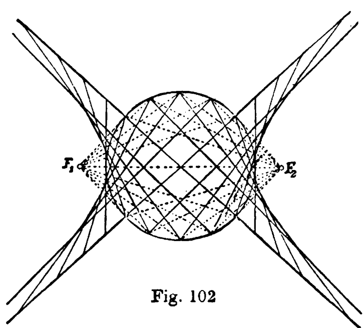

Fig. 102

Scheiteltangente der Parabel als entarteten (Haupt-) Scheitelkreis, so hat man also für alle drei Kurven bewiesen:

Satz. Der Fußpunkt des von einem Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Scheitelkreis.

Läßt man den Fußpunkt den ganzen Scheitelkreis durchlaufen, so erhält man der Reihe nach alle Tangenten der Kurve, und man kann die soeben bewiesene Tatsache auch so aussprechen:

Satz. Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem festen Kreise, während einer seiner Schenkel durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt.

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des festen Kreises liegt, eine Parabel, wenn der Kreis zu einer Geraden entartet ist. — Der feste Punkt ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts, der feste Kreis Scheitelkreis.

In Fig. 100 bis 102 sind die drei Kurven auf Grund dieses Satzes als Erzeugnis ihrer Tangenten gezeichnet.

Die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises

Umkehrung der Dandelinschen Sätze

19. Wir werden jetzt beweisen, daß die in Nr. 1 aufgestellten Sätze umkehrbar sind, daß man also jede Ellipse, Parabel und Hyperbel als ebenen Schnitt eines geraden Kreiskegels darstellen kann.

Die Ebene E der vorgelegten Kurve (Ellipse, Parabel oder Hyperbel) werde von einer Kugel derart berührt, daß der Berührungspunkt mit einem der Brennpunkte, etwa mit F_1 zusammenfällt. In der Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt O und die Hauptachse der Kurve bestimmt wird, ziehe man von den Scheiteln S_1 und S_2 der Kurve die beiden noch möglichen Tangenten an die Kugel. Von dem Schnittpunkt M dieser beiden Tangenten legt man an die Kugel einen Berührungskegel. Die Kurve, in der die Ebene E von diesem Kegel geschnitten wird, ist nach Nr. 1 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Diese aber hat mit der Ausgangskurve die Scheitel und einen Brennpunkt gemeinsam, fällt also ganz mit ihr zusammen.

20. Die soeben bewiesene Tatsache lautet in anderer Fassung:

Satz. Jede Ellipse, Parabel und Hyperbel kann als Zentralprojektion eines Kreises angesehen werden.

Der Mittelpunkt der zentralen Projektion ist die Kegelspitze M; der Kreis, in dem der von M ausstrahlende gerade Kegel die Kugel berührt, projiziert sich in den vorgelegten Kegelschnitt; Punkte und Geraden der Kreisebene projizieren sich in Punkte und Geraden der Kegelschnittebene, Tangenten des Kreises in Tangenten des Kegelschnitts (weil für beide die projizierende Ebene eine Tangentialebene des Kegels ist). Hieraus folgt:

Satz. Jeder für den Kreis gültige Lehrsatz, der nur von Lagebeziehungen, nicht von Maßbeziehungen handelt, ist durch Zentralprojektion ohne weiteres auch auf Kegelschnitte übertragbar.

Hilfssätze über Dreieckstransversalen. Pascalscher Satz

21. Unter einer Transversale eines Dreiecks versteht man eine Gerade, die die Seiten des Dreiecks schneidet. Sofern die Transversale nicht durch eine Ecke des Dreiecks geht, liegen von den drei Schnittpunkten entweder zwei auf den Seiten selbst und eine auf der Verlängerung der dritten oder alle drei auf den Verlängerungen der Seiten. Eine durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehende Gerade heißt Ecktransversale.

Ist P ein Punkt der Seite BC, so heißen die Strecken PB und PC Seitenabschnitte, gleichgültig ob P zwischen B und C oder auf einer der Verlängerungen liegt.

Nicht aneinanderstoßende Seitenabschnitte heißen solche, die keinen Endpunkt gemeinsam haben.

22. Satz von Menelaus. Eine Transversale schneidet die Seiten eines Dreiecks so, daß die Produkte von je drei nicht aneinanderstoßenden Seitenabschnitten gleich sind.

Beweis. Eine Transversale des Dreiecks ABC schneide CB in P, AC in Q, AB in R; von A, B und C werden auf die Transversale die Lote AA', BB' und CC' gefällt (Fig. 103). Dann ist

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{RA}{RB}; \quad \frac{BB'}{CC'} = \frac{PB}{PC}; \quad \frac{CC'}{AA'} = \frac{QC}{QA}.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen erhält man

$$\frac{RA}{RB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1$$

oder

$$RA \cdot PB \cdot QC = RB \cdot PC \cdot QA.$$

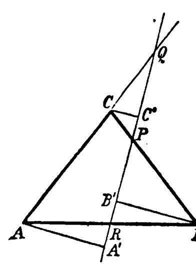

Fig. 103

23. Umkehrung des Satzes von Menelaus. Liegt entweder je ein Punkt auf zwei Seiten eines Dreiecks und einer auf der Verlängerung der dritten, oder liegen drei Punkte auf den Verlängerungen der drei Seiten eines Dreiecks derart, daß die Produkte aus je drei nicht aneinanderstoßenden Seitenabschnitten gleich sind, dann liegen die drei Punkte in einer Geraden.

Beweis. Das Dreieck sei ABC, auf CB liege Punkt P, auf AC Punkt Q, auf AB Punkt R so, daß

(1) $$RA \cdot PB \cdot QC = RB \cdot PC \cdot QA$$

ist. Die Gerade PQ mag AB nicht in R, sondern in R' treffen, dann ist nach dem Satz von Menelaus

(2) $$R'A \cdot PB \cdot QC = R'B \cdot PC \cdot QA.$$

Dividiert man (1) durch (2), dann erhält man

$$\frac{RA}{R'A} = \frac{RB}{R'B}$$

oder

$$\frac{RA}{RB} = \frac{R'A}{R'B}.$$

R und R' müssen also zusammenfallen, da auch die einzige noch verbleibende Möglichkeit, daß R die Strecke AB innerlich, R' sie äußerlich im gleichen Verhältnis teilt, ausscheidet.

24. Satz von Ceva. Drei Ecktransversalen eines Dreiecks, die durch einen Punkt gehen, schneiden die Seiten so, daß die Produkte von je drei nicht aneinanderstoßenden Seitenabschnitten gleich sind.

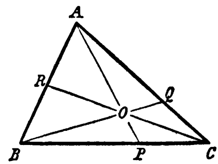

Fig. 104

Beweis. Die Ecktransversalen AP, BQ und CR mögen durch den Punkt O gehen (Fig. 104). Dann ist nach dem Satz von Menelaus (Schnitt von $\triangle ABP$ mit der Transversale RC)

(1) $$AR \cdot BC \cdot PO = BR \cdot PC \cdot AO,$$

und nach dem gleichen Satz (Schnitt von $\triangle APC$ mit der Transversale BQ)

(2) $$CQ \cdot AO \cdot PB = AQ \cdot OP \cdot CB.$$

Das Produkt der Gleichungen (1) und (2) liefert die gesuchte Gleichung.

$$\boldsymbol{AR \cdot BP \cdot CQ = BR \cdot CP \cdot AQ.}$$

25. Umkehrung des Satzes von Ceva. Liegt je ein Punkt entweder auf den drei Seiten eines Dreiecks oder auf einer Seite und den Verlängerungen der beiden andern, und sind die Produkte aus je drei nicht aneinanderstoßenden Seitenabschnitten gleich, dann gehen die durch die drei Punkte bestimmten Ecktransversalen durch einen Punkt.

Beweis. Im Dreieck ABC möge auf BC der Punkt P, auf AC der Punkt Q, auf AB der Punkt R so liegen, daß

(1) $$RA \cdot PB \cdot QC = RB \cdot PC \cdot QA$$

ist. AP und BQ mögen sich in O schneiden, CO möge AB in R' schneiden. Dann ist nach dem Satz von Ceva

(2) $$R'A \cdot PB \cdot QC = R'B \cdot PC \cdot QA.$$

Dividiert man (1) durch (2), dann erhält man

$$\frac{RA}{R'A} = \frac{RB}{R'B}$$

oder

$$\frac{RA}{RB} = \frac{R'A}{R'B}.$$

R und R' müssen also zusammenfallen, da auch die Möglichkeit, daß R die Strecke AB innerlich, R' sie äußerlich im gleichen Verhältnis teilt, ausscheidet.

26. Satz von Pascal. Im Sehnensechseck liegen die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden.

Beweis. Es sei P der Schnittpunkt der Seiten AB und DE, Q der von BC und EF, R der von CD und FA, L der Schnittpunkt von FA und BC, M der von BC und ED, N der von ED und FA (Fig. 105). Auf Dreieck LMN wird dreimal der Satz von Menelaus angewandt, und zwar wird 1. die Seite AB, 2. die Seite CD, 3. die Seite EF als Transversale betrachtet. Dann erhält man

$$BL \cdot PM \cdot AN = BM \cdot PN \cdot AL,$$
$$CL \cdot DM \cdot RN = CM \cdot DN \cdot RL,$$
$$QL \cdot EM \cdot FN = QM \cdot EN \cdot FL.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen und berücksichtigt, daß nach dem Sekantensatz

$$LB \cdot LC = LA \cdot LF,$$
$$MD \cdot ME = MC \cdot MB,$$
$$NF \cdot NA = NE \cdot ND$$

ist, so erhält man

$$PM \cdot RN \cdot QL = PN \cdot RL \cdot QM;$$

nach der Umkehrung des Satzes von Menelaus liegen also P, Q und R auf einer Geraden.

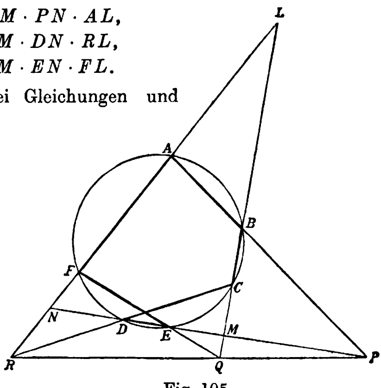

Fig. 105

Hilfssätze über das vollständige Vierseit

27. Erklärungen. Vier Gerade, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, bilden ein vollständiges Vierseit. Die vier Geraden schneiden sich in sechs Punkten, den Eckpunkten des vollständigen Vierseits, die, wenn keine zwei Geraden parallel sind, im Endlichen liegen. Von den Eckpunkten liegen je drei in einer Geraden: Ecken, die nicht auf der gleichen Seite liegen, heißen Gegenecken. Geraden, die je einen Eckpunkt mit seiner Gegenecke verbinden, heißen Diagonalen. Ein vollständiges Vierseit hat drei Diagonalen (Fig. 106).

28. Satz vom vollständigen Vierseit. Auf jeder Diagonale des vollständigen Vierseits bilden die beiden Gegenecken und die Schnitte mit den andern Diagonalen eine harmonische Punktreihe.

Beweis. (Fig. 106.) Die Diagonale BE des Vierseits $ABCDEF$ werde von der Diagonale AD in P, von der Diagonale CF in Q geschnitten. Wendet man auf $\triangle ABE$ den Satz von Ceva an, so erhält man

(1) $AF \cdot BP \cdot EC = BF \cdot EP \cdot AC,$

wendet man den Satz von Menelaus an, so wird

(2) $AF \cdot BQ \cdot EC = BF \cdot EQ \cdot AC.$

Durch Division erhält man aus (1) und (2)

$$BP : BQ = EP : EQ,$$

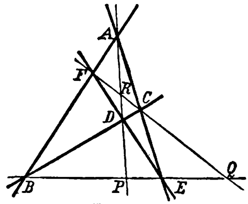

Fig. 106

d. h. B, P, E, Q bilden eine harmonische Punktreihe. Da ein durch diese Punkte gelegtes Strahlenbüschel mit dem Scheitel A harmonisch ist, ist auch die Punktreihe $FRCQ$ auf der Diagonale FC harmonisch. In gleicher Weise zeigt das durch F, R, C und Q gelegte harmonische Strahlenbüschel mit dem Scheitelpunkt B, daß auch die Punktreihe $ARDP$ auf der Diagonale AD harmonisch ist.

Pol und Polare beim Kreis

29. Erklärungen. Der Durchmesser eines Kreises werde durch zwei Punkte P und P' harmonisch geteilt; P und P' heißen dann konjugierte Pole des Kreises.

In P' werde auf der Geraden PP' die Senkrechte p errichtet. Dann heißt p die Polare des Punktes P, und P heißt der Pol der Geraden p in bezug auf den gegebenen Kreis.

Insbesondere ist der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt, die Polare eines Punktes des Kreisumfanges die in diesem Punkt an den Kreis gelegte Tangente.

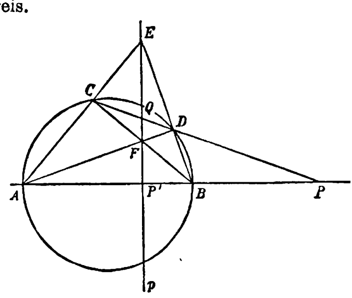

Fig. 107

30. Satz. Pol und Polare eines Kreises teilen jede durch den Pol gezogene Sehne harmonisch.

Beweis. P sei der Pol einer Geraden p, AB der durch P gehende Durchmesser, CD eine beliebige durch P gehende Sehne (Fig. 107), AC

und BD mögen sich in E schneiden; das Lot von E auf AB schneidet CD in Q, AB in P'. Die Gerade AD ist nach dem Satz von Thales senkrecht auf EB, und ebenso ist CB senkrecht auf EA. Es sind danach EP', AD und BC Höhen des Dreiecks AEB; sie schneiden sich also in einem Punkte F. $ABCDEF$ ist ein vollständiges Vierseit mit den Diagonalen AB, CD und EF. Nach dem Satz vom vollständigen Vierseit ist erstlich $AP'BP$ eine harmonische Punktreihe, EF also mit der Polaren p des Punktes P identisch, und weiter ist $CQDP$ eine harmonische Punktreihe. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1. Die Polare ist der geometrische Ort der vierten dem Pol zugeordneten harmonischen Punkte auf den durch den Pol gehenden Sehnen.

Folgerung 2. Durch Grenzübergang von der Sekante zur Tangente findet man: Die Berührungssehne zweier Tangenten ist Polare zum Schnittpunkt der Tangenten.

31. Satz. Die Polaren zu den Punkten einer Geraden bilden ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Pol jener Geraden ist.

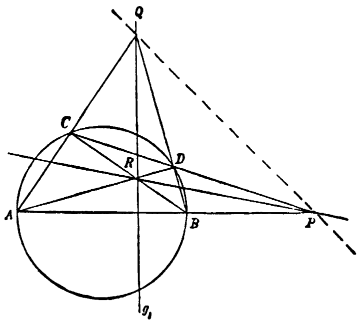

Fig. 108

Beweis. Es sei g_1 die gegebene Gerade und R ein beliebiger Punkt auf ihr. (In der Fig. 108 schneidet g_1 den Kreis, und R liegt im Kreis; der Beweis geht genau so, wenn R nicht im Kreis liegt und wenn g_1 den Kreis nicht schneidet.) AB sei der zu g_1 senkrechte Durchmesser durch P. AR schneidet den Kreis zum zweitenmal in D, BR schneidet den Kreis zum zweitenmal in C. AC und BD schneiden sich dann nach dem Höhensatz des Dreiecks in einem Punkte Q der Geraden g_1. $ABCDQR$ sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen eine Diagonale g_1 ist, während die beiden andern Diagonalen AB und DC sich in dem Pole P von g_1 schneiden. Die Gerade PQ ist dann nach der Folgerung 1 in Nr. 30 Polare zu R, weil auf ihr sowohl die auf AD wie die auf CB liegenden vierten, R zugeordneten Punkte liegen. Wo also auch R auf der Geraden g_1 liegt, immer geht die Polare von R durch P, den Pol von g_1.

32. Satz. Die Pole aller Geraden eines Büschels liegen auf einer Geraden, der Polaren des Scheitelpunktes dieses Büschels.

Beweis. P sei der Scheitel des Geradenbüschels (Fig. 108), g_1 die zu P gehörige Polare, RP irgendeine Gerade des Büschels, wobei R der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_1 ist. Der zu g_1 senkrechte Durchmesser des Kreises sei AB, ein vollständiges Vierseit mit den Ecken $ABCDRQ$ sei konstruiert in gleicher Weise wie in Nr. 30. Dann ist der Punkt Q, der auf g_1 liegt, der Pol von RP. Welche Gerade RP des Geradenbüschels mit P als Scheitel man also auch wählt, immer liegt ihr Pol Q auf g_1, der Polaren von P.

33. Satz von Brianchon. Im Tangentensechseck schneiden sich die drei Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken in einem Punkte.

Beweis. Wenn die Seiten des Tangentensechsecks $ABCDEF$ den Inkreis in den Punkten L, M, N, O, P, Q berühren, wobei L auf AB liegt usf., dann ist $LMNOPQ$ ein Sehnensechseck. Nach dem Satz von Pascal liegen der Schnittpunkt X von LM und OP, Y von MN und PQ, Z von NO und QL auf einer Geraden. Nun sind die Punkte A, B, C, D, E, F die Pole der Seiten des Sehnensechsecks, folglich X, Y und Z die Pole der drei Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken. Da sie auf einer Geraden liegen, gehen die drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt.

Pol und Polare bei den Kegelschnitten

34. Zu den Sätzen, die durch Zentralprojektion nicht in ihrer Gültigkeit beeinträchtigt werden, gehören auch die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen; denn es ist im Buch für Kl. 7—9, § 7, Nr. 15 und 16 bewiesen worden, daß vier harmonische Punkte aus jedem beliebigen Punkt durch vier harmonische Strahlen projiziert werden und daß vier harmonische Strahlen durch jede Gerade in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Daher läßt sich der in Nr. 30 (Folgerung 1) für den Kreis aufgestellte Satz auf die Kegelschnitte übertragen. Es gilt also:

Satz. Der geometrische Ort der Punkte, die von einem festen Punkte P durch einen Kegelschnitt harmonisch getrennt werden, ist eine Gerade p. Diese heißt die Polare von P, entsprechend heißt P der Pol von p.

Die in Nr. 29—32 über die gegenseitige Lage von Pol und Polare bewiesenen Sätze gelten auch für die Kegelschnitte.

35. Aus dem in Nr. 2 bewiesenen Satze folgt, daß die Hauptachse jedes der drei Kegelschnitte durch einen Brennpunkt und seine zugehörige Leitlinie harmonisch geteilt wird. Dies läßt sich nach Nr. 34 aussprechen in der Form:

Satz. Jede Leitlinie eines Kegelschnitts ist die Polare des zugehörigen Brennpunktes.

Aus Nr. 30 folgt noch durch Zentralprojektion:

Satz. In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen vollständigen Viereck bilden die Nebenecken ein Polardreieck, d. h. ein Dreieck,

in dem jede Ecke Pol zur Gegenseite und jede Seite Polare zur Gegenecke ist. Mittels dieses Satzes kann man zu einem Punkte P die Polare in bezug auf einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt und ebenso die von P ausgehenden Tangenten mit alleiniger Hilfe des Lineals finden.

36. Die in Nr. 29 aufgestellten Erklärungen lassen sich auch in der Form aussprechen:

Zwei Punkte heißen konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jeder auf der Polaren des anderen liegt.	Zwei Geraden heißen konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der anderen geht.

Nun folgt aber aus § 7 des Buches für Kl. 7—9, Nr. 15:

Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.	Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt des konjugierten Durchmessers.

Daraus folgt weiter:

Satz. Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zum anderen parallelen Sehnen,

und als Sonderfall:

Satz. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.

Pascalscher und Brianchonscher Satz

37. Aus dem in Nr. 20 angegebenen Übertragungsverfahren folgt, daß der in Nr. 26 für den Kreis bewiesene Lehrsatz von Pascal auch für die Kegelschnitte gilt. Er lautet dann:

Satz von Pascal. In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten auf einer Geraden.

Wenn also von einem Kegelschnitt 5 Punkte, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, und eine durch einen von diesen (z. B. durch C_5) gehende Gerade g gegeben sind, so kann man den zweiten auf g gelegenen Kegelschnittpunkt auf folgende Weise bestimmen (Fig. 109):

Man faßt den gesuchten Punkt C_6 als sechste Ecke eines Pascalschen Sechsecks auf und sorgt dafür, daß die Gerade g (also C_5C_6) als eine Seite des Sechsecks

$C_1C_2C_3$	$C_4C_5C_6$		
C_1C_2	C_4C_5	$\mathfrak{A}$	
C_2C_3	C_5C_6	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{p}$
C_3C_4	C_6C_1	$\mathfrak{C}$	

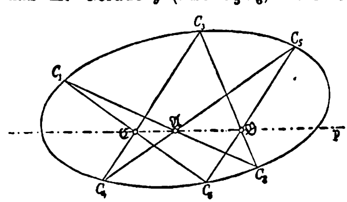

Fig. 109

auftritt. Die Konstruktion kann man kurz und zweckmäßig in die obenstehende Übersicht zusammendrängen. Die in der ersten Zeile stehenden Buchstaben bezeichnen die Ecken des Sechsecks in der gewählten Reihenfolge. Die drei darunterstehenden Zeilen enthalten je ein Paar Gegenseiten des Sechsecks mit ihren Schnittpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (3. Spalte), die auf der Pascalschen Geraden $\mathfrak{p}$ gelegen sind (4. Spalte).

Da bei dieser Konstruktion nur gerade Linien benutzt werden, so kann man sagen:

Der Kegelschnitt ist durch 5 Punkte eindeutig bestimmt.

Durchläuft der soeben ermittelte Punkt C_6 den ganzen Kegelschnitt, so dreht sich die Pascalsche Gerade $\mathfrak{p}$ um den Punkt $\mathfrak{A}$.

38. Ebenso wie der Pascalsche Satz läßt sich auch der in Nr. 33 bewiesene Lehrsatz von Brianchon ohne weiteres durch Zentralprojektion auf Kegelschnitte übertragen. Es gilt also:

Satz von Brianchon. In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseit gehen die Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken durch einen Punkt.

Sind also von einem Kegelschnitt 5 Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 und auf einer von diesen (z. B. auf t_5) ein Punkt P gegeben, so kann man die zweite durch P gehende Tangente auf folgende Weise finden (Fig. 110):

Man faßt die gesuchte Tangente t_6 als sechste Seite eines Brianchonschen Sechsseits auf und sorgt dafür, daß der gegebene Punkt P (also $t_5 t_6$) als eine Ecke des Sechsseits erscheint

$t_1 t_2 t_3$	$t_4 t_5 t_6$		
$t_1 t_2$	$t_4 t_5$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{B}$
$t_2 t_3$	$t_5 t_6$	$\mathfrak{b}$	
$t_3 t_4$	$t_6 t_1$	$\mathfrak{c}$	

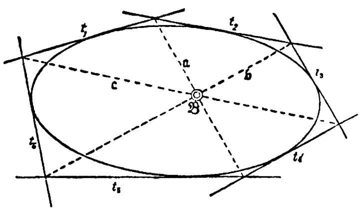

Fig. 110

(siehe das vorstehende Schema). Von den Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken sind zwei (nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) durch die gegebenen Tangenten bestimmt. Durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, den Brianchonschen Punkt $\mathfrak{B}$, geht auch die dritte Verbindungslinie $\mathfrak{c}$, von der ein Punkt $t_3 t_4$ bereits bekannt ist.

Da bei der Zeichnung nur das Lineal benutzt wird, so folgt:

Satz. Ein Kegelschnitt ist durch 5 Tangenten eindeutig bestimmt.

Wälzt sich t_6 am Kegelschnitt ab, so durchläuft der Brianchonsche Punkt $\mathfrak{B}$ die Gerade $\mathfrak{a}$.

39. Wie außerordentlich fruchtbar die Sätze von Pascal und Brianchon sind, erkennt man erst, wenn man die Sonderfälle dieser Sätze berücksichtigt, die sich ergeben, wenn man von den Ecken des eingeschriebenen Sechsecks oder den Seiten des umgeschriebenen Sechsseits ein Paar oder mehrere zusammenfallen läßt. Mit Rücksicht auf die Kürze dieses Leitfadens können im folgenden nur einige wenige dieser Sonderfälle (Nr. 40—43) zur Sprache kommen; treten hierbei Tangenten mit ihren Berührungspunkten auf, so erscheint (im Falle des Pascalschen Satzes) eine Tangente als Verbindungslinie zweier zusammenfallender Punkte und (im Falle des Brianchonschen

Satzes) ein Berührungspunkt als Schnittpunkt zweier zusammenfallender Tangenten.

40. Kennt man von einer Parabel drei Punkte C_1, C_2, C_3 und die Achsenrichtung, so ist zu beachten, daß mit der Achsenrichtung zwei zusammenfallende Parabelpunkte C_∞, C_∞ gegeben sind, weil die Parabel die unendlich ferne Gerade berührt. Soll man also z. B. in einem der drei im Endlichen gelegenen Punkte, z. B. in C_1, die Tangente zeichnen (Fig. 111), so geschieht dies leicht nach dem untenstehenden Schema.

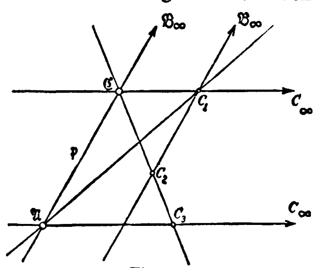

Fig. 111

$C_1 C_1 C_2$	$C_3 C_\infty C_\infty$		
$C_1 C_1$	$C_3 C_\infty$	$\mathfrak{A}$	
$C_1 C_2$	$C_\infty C_\infty$	$\mathfrak{B}_\infty$	$\mathfrak{p}$
$C_2 C_3$	$C_\infty C_1$	$\mathfrak{C}$	

41. Sind von einer Parabel zwei Tangenten t_1, t_2 mit ihren Berührungspunkten C_1, C_2 gegeben und eine dritte Tangente t_3 gesucht, so kann man unter Anwendung des Brianchonschen Satzes nach einer der beiden folgenden Übersichten

$t_1 t_1 t_3$	$t_2 t_2 t_\infty$
$t_1 t_1$	$t_2 t_2$
$t_1 t_3$	$t_2 t_\infty$
$t_3 t_2$	$t_\infty t_1$

$t_1 t_1 t_2$	$t_2 t_3 t_\infty$
$t_1 t_1$	$t_2 t_3$
$t_1 t_2$	$t_3 t_\infty$
$t_2 t_2$	$t_\infty t_1$

verfahren, und zwar wird man die erste oder die zweite Art wählen, je nachdem von der Tangente t_3 ein im Endlichen gelegener Punkt (etwa auf t_1) oder ihre Richtung (also ihr Schnittpunkt mit der als t_∞ erscheinenden unendlich fernen Geraden der Ebene) gegeben ist.

42. Wenn von einer Parabel zwei Tangenten t_1, t_2 mit ihren Berührungspunkten C_1, C_2 gegeben sind und die Achsenrichtung gesucht ist, so verfährt man am besten in folgender Weise (Fig. 112):

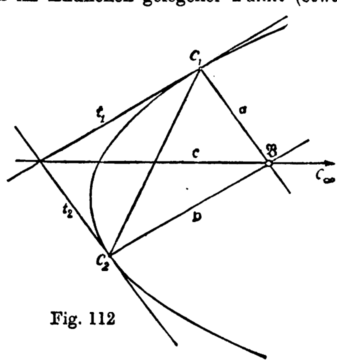

Fig. 112

$t_1 t_1 t_\infty$	$t_\infty t_2 t_2$	
$t_1 t_1$	$t_\infty t_2$	$\mathfrak{a}$
$t_1 t_\infty$	$t_2 t_2$	$\mathfrak{b}$
$t_\infty t_\infty$	$t_2 t_1$	$\mathfrak{c}$

Hier erscheinen also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als zwei Seiten und eine Diagonale eines Parallelogramms, von dem die beiden anderen Seiten (t_1, t_2) und die zweite Diagonale (C_1, C_2) gegeben sind. Zugleich ist der Satz bewiesen:

Satz. Der Durchmesser vom Schnittpunkt zweier Parabeltangenten halbiert die Berührungssehne.

43. Von einer Hyperbel seien zwei Punkte C_1, C_2, eine Asymptote t_1 und die Richtung der anderen Asymptote gegeben. Man sucht die zweite Asymptote t_2.

$C_\infty C_\infty C_1$	$C_2 C_\infty' C_\infty'$	
$C_\infty C_\infty$	$C_2\ C_\infty'$	$\mathfrak{A}$
$C_\infty C_1$	$C_\infty' C_\infty'$	$\mathfrak{B}$
$C_1\ C_2$	$C_\infty' C_\infty$	$\mathfrak{C}_\infty$

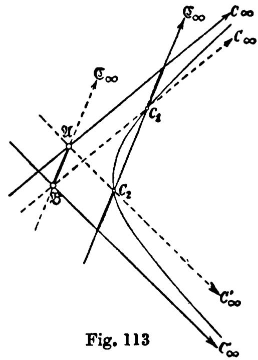

Fig. 113

Beachtet man, daß jede Asymptote als Verbindungslinie zweier im Unendlichen gelegener und zusammenfallender Punkte betrachtet werden kann ($t_1 \equiv C_\infty C_\infty$, $t_2 \equiv C_\infty' C_\infty'$), so führt der Pascalsche Satz zu dem gewünschten Ziele, wenn man die Konstruktion in die obenstehende Übersicht bringt. Da hierbei die auf der Hyperbelsekante $C_1 C_2$ von den Asymptoten und der Kurve begrenzten Stücke (in der Fig. 113 dick ausgezogen) je gleich $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sind (als gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm), so ist bewiesen:

Satz. Auf jeder Hyperbelsekante sind die von der Kurve und den Asymptoten begrenzten Stücke einander gleich.

Mittels dieses Satzes kann man eine Hyperbel, von der die beiden Asymptoten und ein Punkt gegeben sind, bequem und genau punktweise konstruieren. Als Sonderfall des soeben Bewiesenen erscheint der bei Übungsaufgaben oft benutzte Satz:

Satz: Das von den Asymptoten begrenzte Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkt halbiert.

Projektive Eigenschaften

Perspektive und projektive Punktreihen und Strahlenbüschel

44. Die Gesamtheit der Punkte, die auf einer Geraden s liegen, heißt eine Punktreihe; s heißt der Träger der Punktreihe.

Die Gesamtheit der in einer Ebene gelegenen Geraden, die durch einen Punkt S gehen, heißt ein Strahlenbüschel; S heißt der Träger des Büschels.

Wählt man

in der Punktreihe einen Punkt | im Strahlenbüschel einen Strahl als Grundelement, so kann man jeden anderen

Punkt der Punktreihe	Strahl des Strahlenbüschels

dadurch festlegen, daß man

die Strecke zwischen ihm und dem Grundpunkt	den Winkel zwischen ihm und dem Grundstrahl

mißt und überdies einen bestimmten

Richtungssinn	Umlaufssinn

als positiv und den entgegengesetzten als negativ festsetzt.

45. Besser noch als die in Nr. 44 angegebene Art der Lagenbestimmung ist die, statt eines Grundelementes deren zwei festzulegen. Auf dem geradlinigen Träger s seien zwei Punkte A und B als Grundpunkte gewählt. Ein dritter Punkt C (Teilpunkt) bestimmt auf s zwei Strecken („Teilstrecken") CA und BC; wir bezeichnen nämlich als Teilstrecken die Entfernungen des Teilpunktes von den Grundpunkten (oder, was dasselbe sagt, von den Endpunkten der Strecke AB), und zwar mit Vorzeichen genommen. Liegt also C zwischen A und B, so haben CA und CB entgegengesetzte Vorzeichen, liegt C außerhalb der Strecke AB, so haben CA und CB gleiche Vorzeichen; für jede Lage des Punktes C gilt die Gleichung

$$BC + CA = BA \quad \text{oder} \quad AB + BC + CA = 0.$$

Das Verhältnis der beiden Teilstrecken, also der Quotient $CA : CB$, wird als Teilungsverhältnis bezeichnet; es ist positiv für Punkte außerhalb der Strecke AB, negativ für Punkte zwischen A und B. Für jede Lage des Punktes C erhält das Teilungsverhältnis einen ganz bestimmten Wert; umgekehrt gehört auch zu jedem Wert des Teilungsverhältnisses eindeutig ein Punkt C. Wählt man in einem Strahlenbüschel zwei Strahlen a und b als Grundstrahlen, so bildet ein dritter Strahl c des Büschels mit den Grundstrahlen die Winkel (ca) und (cb), die wieder mit Vorzeichen genommen werden. Als das Teilungsverhältnis kann man diesmal $\sin(ca) : \sin(cb)$ erklären; daß diese Definition zweckmäßig ist, wird in Nr. 47 deutlich werden.

46. Projiziert man eine Punktreihe mit dem Träger s aus irgendeinem Punkte S der Ebene durch ein Strahlenbüschel, so wird jedem Punkte X der Punktreihe ein Strahl x des Strahlenbüschels zugeordnet, und umgekehrt. Man bezeichnet x und X als entsprechende Elemente der beiden Träger und nennt die Lage, in der sich die Punktreihe und das Strahlenbüschel befinden, perspektive Lage; man erklärt also:

Satz. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel liegen perspektiv, wenn jeder Strahl des Strahlenbüschels durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe geht.

„Die durch die perspektive Lage beider Gebilde hergestellte eindeutige Beziehung der Elemente aufeinander kann nun festgehalten werden, während die perspektive Lage aufgehoben wird (etwa dadurch, daß das Strahlenbüschel S und die Punktreihe s beliebig in der Ebene verschoben werden), aber die entsprechenden Elemente in irgendeiner Weise, z. B. durch Bezeichnung mit gleichlautenden Buchstaben, fixiert werden. Die auf diese Art von der perspektiven Lage unabhängig gemachte eindeutige Beziehung der Elemente aufeinander heißt projektive Beziehung und die Gebilde selbst projektiv" (J. Steiner). — Wir stellen also die Erklärung auf:

Erklärung. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heißen projektiv, wenn sie in perspektive Lage gebracht werden können.

47. Wir untersuchen jetzt, welche Beziehung zwischen den Teilungsverhältnissen von vier Punkten einer Punktreihe A, B, C, D und den entsprechenden vier Strahlen eines Strahlenbüschels a, b, c, d bestehen müssen, wenn die Punktreihe und das Strahlenbüschel projektiv sein sollen[1]). Nach der Definition der projektiven Gebilde müssen sich die Punktreihe und das Strahlenbüschel in perspektive Lage bringen lassen, wie dies in Fig. 114 geschehen ist. Wenn man für einen Augenblick den Abstand des Trägers S von dem Träger s mit h bezeichnet und den Flächeninhalt des Dreiecks SCA doppelt ausdrückt, so erhält man

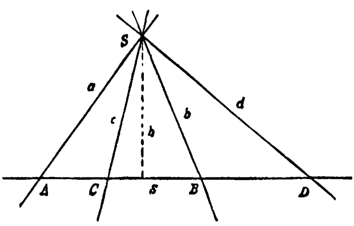

Fig. 114

(1) $$\tfrac{1}{2}CA \cdot h = \tfrac{1}{2}SC \cdot SA \cdot \sin(ca).$$

Ebenso folgt durch doppeltes Ausdrücken des Flächeninhaltes von SCB

(2) $$\tfrac{1}{2}CB \cdot h = \tfrac{1}{2}SC \cdot SB \cdot \sin(cb).$$

Aus (1) und (2) folgt durch Division

(3) $$\frac{CA}{CB} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin(ca)}{\sin(cb)}.$$

Auf genau dieselbe Weise erhält man durch Betrachtung der Dreiecke SDA und SDB

(4) $$\frac{DA}{DB} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin(da)}{\sin(db)}.$$

---

1) Sind aus einem Strahlenbüschel drei Strahlen a, b, c und ebenso aus einer Punktreihe drei Punkte A, B, C willkürlich herausgegriffen, so kann man immer das Strahlenbüschel a, b, c so verschieben, daß es durch die Punkte A, B, C hindurchgeht. Man braucht nämlich nur über AC den Kreisbogen zu zeichnen, der den Winkel (ac) als Peripheriewinkel faßt, und ebenso über CB den Kreisbogen, der (cb) zum Peripheriewinkel hat. Den Schnitt S, den die beiden Bogen außer C noch gemeinsam haben, braucht man nur noch mit A, B, C zu verbinden. Der Punkt S ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, wenn Richtungssinn der Strecken und Drehungssinn der Winkel festgelegt sind.

Aus (3) und (4) erhält man durch Division

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin(ca)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(da)}{\sin(db)}.$$

Die auf beiden Seiten dieser Gleichung stehenden Quotienten bezeichnet man (weil jeder von ihnen ein Verhältnis zweier Teilungsverhältnisse ist) als Doppelverhältnis und schreibt an Stelle des links stehenden Doppelverhältnisses die kurze Bezeichnung $(ABCD)$ und an Stelle des rechtsstehenden Doppelverhältnisses die Bezeichnung $(abcd)$. Wir können also sagen:

Satz. Ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe sind projektiv, wenn vier Strahlen des Strahlenbüschels dasselbe Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden vier Punkte der Punktreihe[1])

oder in etwas formelhafterer Ausdrucksweise:

Die Punktreihe A, B, C, D ist projektiv zu dem Strahlenbüschel a, b, c, d, wenn

$$(ABCD) = (abcd)$$

ist. — Für das Doppelverhältnis von vier Strahlen benutzt man zuweilen noch eine besondere Schreibweise, nämlich $S(ABCD)$. Darunter soll das Doppelverhältnis der vier Strahlen verstanden werden, durch die A, B, C, D aus S projiziert werden.

48. Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D, von denen zwei (etwa A und B) als Grundpunkte angesehen werden mögen, ist positiv, wenn C und D entweder beide innere oder äußere Teilpunkte sind, dagegen negativ, wenn der eine von ihnen ein innerer, der andere ein äußerer Teilpunkt ist. Will man das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D zurückführen auf ein einfaches Verhältnis, so kann man durch B zu SA die Parallele ziehen (Fig. 115), die SC und SD in P und Q schneidet. Dann gilt (mit Berücksichtigung der Vorzeichen)

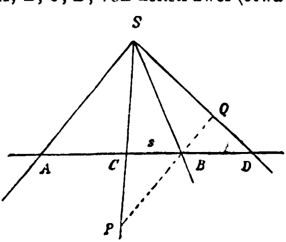

Fig. 115

$$CA : CB = SA : PB \quad \text{und} \quad DA : DB = SA : QB,$$

also $(ABCD) = QB : PB$.

1) Man kann die grundlegende Beziehung $(ABCD) = (abcd)$ auch ohne Benutzung von Maßbeziehungen, wie Inhaltsgleichheit u. ä., herleiten, doch haben wir hier, wo die Maßgeometrie dem Schüler bereits bekannt ist, darauf verzichtet, weil ein völlig neuer Aufbau der Geometrie der Lage (ohne Benutzung von Maßbeziehungen) nahezu soviel Platz erfordern würde, wie in diesem Leitfaden für die ganze Geometrie der Kegelschnitte zur Verfügung stand.

49. Benutzt man die Sätze über die Division zweier Brüche und beachtet man, daß ein Bruch ungeändert bleibt, wenn man in Zähler und Nenner das Vorzeichen ändert, so erhält man

$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{DB}{DA}:\frac{CB}{CA}=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB).$$

Dasselbe gilt natürlich auch für das Doppelverhältnis von vier Strahlen; wir haben also den Satz:

Satz. Der Wert eines Doppelverhältnisses von vier Punkten (Strahlen) bleibt ungeändert, wenn man die Punkte (Strahlen) jedes Paares oder auch die Punktepaare (Strahlenpaare) miteinander vertauscht.

50. Hält man in Fig. 115 die Punkte A, B, C, P, S fest und läßt den Punkt D die Punktreihe s ganz durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von D ein und nur ein Punkt Q auf BP, also nimmt $(ABCD)$ jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ einmal und nur einmal an, weil in der unter Nr. 48 hergeleiteten Beziehung die Strecke PB konstant bleibt, während die Strecke QB jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ und jeden nur einmal annimmt. Wir haben also gezeigt:

Satz. Es gibt einen und nur einen Punkt der Reihe, der mit drei anderen Punkten dieser Reihe ein vorgeschriebenes Doppelverhältnis bildet.

In formelhafter Schreibweise würde dieser Satz lauten:

$$\text{Aus } (ABCD)=(ABCD') \text{ folgt } D\equiv D'.$$

Unter allen Werten, die das Doppelverhältnis $(ABCD)$ annehmen kann, spielt derjenige eine besondere Rolle, der erreicht wird, wenn A, B, C, D eine harmonische Punktgruppe bilden. In diesem Fall ist $(ABCD)=-1$, wie aus § 7 des Buches für Kl. 7—9, Nr. 14 folgt, wenn man die dort außer acht gelassenen Vorzeichen jetzt berücksichtigt.

51. Erklärung.

Zwei Punktreihen heißen projektiv, wenn sie zu einem und demselben Strahlenbüschel in perspektive Lage gebracht werden können.	Zwei Strahlenbüschel heißen projektiv, wenn sie zu einer und derselben Punktreihe in perspektive Lage gebracht werden können.

Aus Nr. 47 folgt sogleich:

Ein Strahlenbüschel wird von allen Geraden in projektiven Punktreihen geschnitten.	Eine Punktreihe wird aus allen Punkten durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

Man kann diese beiden Aussagen auch zusammenfassen in die eine:

Satz. Der Wert eines Doppelverhältnisses wird durch Projizieren und Schneiden nicht geändert.

Ferner folgt aus Nr. 47 noch:

Zwei projektive Punktreihen liegen perspektiv, wenn die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, oder auch, wenn zwei entsprechende Punkte zusammenfallen.	Zwei projektive Strahlenbüschel liegen perspektiv, wenn die Schnittpunkte von drei Paaren entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, oder auch, wenn zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen.

52. Als Beispiel für eine Anwendung der soeben bewiesenen Sätze behandeln wir den Lehrsatz von Desargues (Fig. 116):

Satz. Liegen zwei Dreiecke ($A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$) in einer Ebene so, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) durch einen Punkt (S) gehen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) auf einer Geraden.

Wenn man die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ohne weiteres als Bilder zweier nicht in einer Ebene gelegenen Dreiecke ansehen dürfte, so wäre die Richtigkeit des Satzes sofort erwiesen; er wäre dann nichts anderes als der Ausdruck dafür, daß die Schnitte einer dreikantigen Pyramide perspektiv-kollinear sind (siehe § 3, Nr. 35). Das Kollineationszentrum S wäre das Bild der Pyramidenspitze, die Kollineationsachse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ wäre das Bild der Geraden, die den beiden Dreiecksebenen gemeinsam ist. Man kann aber den Satz auch mittels der in Nr. 51 aufgestellten Sätze beweisen, ohne räumliche Betrachtungen anzustellen. Der Schnittpunkt von A_1C_1 und A_2C_2 sei $\mathfrak{B}$. Bezeichnet man die Punkte, die SB_1B_2 auf A_1C_1 und A_2C_2 bestimmen, mit D_1 und D_2, so ist $(A_1\mathfrak{B}C_1D_1) = (A_2\mathfrak{B}C_2D_2)$, weil die Punktreihen sogar perspektiv gelegen sind. Daher ist auch $B_1(A_1\mathfrak{B}C_1D_1) = B_2(A_2\mathfrak{B}C_2D_2)$; die beiden Büschel B_1 und B_2 sind aber perspektiv, weil im Verbindungsstrahl ihrer Träger zwei entsprechende Strahlen (B_1D_1 und B_2D_2) zusammenfallen, also liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen (nämlich erstens der Schnitt von B_1C_1 und B_2C_2 und zweitens der Schnitt von A_1B_1 und A_2B_2) auf einer Geraden, die durch $\mathfrak{B}$ geht.

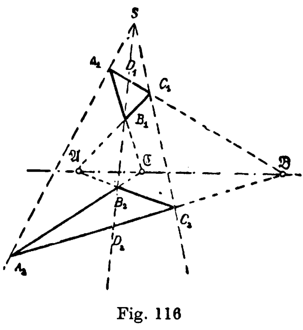

Fig. 116

53. Die soeben ausgesprochenen Sätze kann man benutzen zur Lösung der Aufgabe:

Von zwei projektiven Punktreihen s_1 und s_2 sind drei Paare entsprechender Punkte A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 gegeben. Zu einem beliebigen Punkte D_1 der ersten Reihe soll der entsprechende Punkt D_2 der zweiten Reihe gefunden werden (Fig. 117).

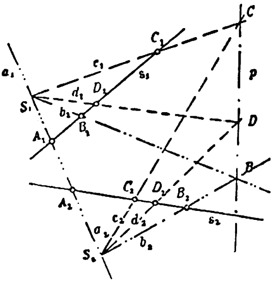

Fig. 117

Man nehme auf der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte, z. B. auf A_1A_2, zwei beliebige Punkte S_1, S_2 an und projiziere die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 aus S_1 durch die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, ebenso die Punkte A_2, B_2, C_2 aus S_2 durch die Strahlen a_2, b_2, c_2. Der Schnitt von b_1 und b_2 sei mit B, der Schnitt von c_1 und c_2 sei mit C bezeichnet. Die Büschel S_1 und S_2 liegen perspektiv, weil zwei entsprechende Strahlen a_1 und a_2 zusammenfallen; also liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in einer Geraden, der Perspektivitätsachse p (d. h. BC). Der Schnitt von d_1 und p sei D; S_2D schneidet s_2 in dem gesuchten Punkt D_2.

Von zwei projektiven Strahlenbüscheln S_1 und S_2 kennt man drei Paare entsprechender Strahlen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2. Zu einem Strahl d_1 des

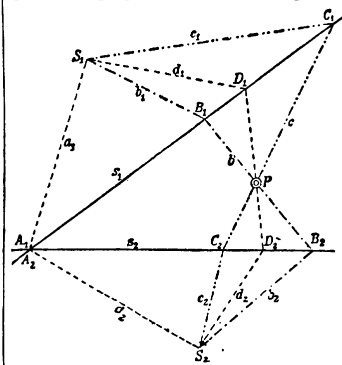

Fig. 118

ersten Büschels soll der entsprechende Strahl d_2 des zweiten Büschels gezeichnet werden (Fig. 118).

Durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen, z. B. der Strahlen a_1 und a_2, lege man zwei beliebige Geraden s_1 und s_2. Die Gerade s_1 schneide a_1, b_1, c_1, d_1 in A_1, B_1, C_1, D_1; die Gerade s_2 schneide a_2, b_2, c_2 in A_2, B_2, C_2. Die Verbindungslinie B_1B_2 sei mit b, die Verbindungslinie C_1C_2 sei mit c bezeichnet. Die Punktreihen s_1 und s_2 liegen perspektiv, weil zwei entsprechende Punkte A_1 und A_2 zusammenfallen. Also gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt, das Perspektivitätszentrum P (nämlich den Schnitt von b und c). Die Verbindungslinie D_1P schneidet s_2 in D_2. S_2D_2 ist der gesuchte Strahl d_2.

54. Genau in derselben Weise kann man auch, wenn drei gegebene Punkte A_1, B_1, C_1 einer Punktreihe s_1 drei gegebenen Strahlen a_1, b_1, c_1 eines Strahlenbüschels S_1 zugeordnet sein sollen, zu jedem Punkt D_1 der Punktreihe den zugeordneten Strahl d_1 des Büschels finden. Man schneidet nämlich entweder die Strahlen von S_1 durch eine beliebige Gerade s_2 und verfährt dann, wie in Nr. 53 in der linken Spalte angegeben, oder man projiziert die Punkte von s_1 aus einem beliebigen Zentrum S_2 und benutzt dann das in Nr. 53 in der rechten Spalte dargelegte Verfahren. — Die in Nr. 50 ausgesprochene Tatsache, daß eine projektive Beziehung durch drei Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt ist, macht sich bei den hier und in Nr. 53 behandelten Konstruktionen darin bemerkbar, daß nur das Lineal benutzt wird.

Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel und Punktreihen

55. Wir werden jetzt zeigen, daß die Punkte eines Kegelschnittes aus zwei beliebigen, aber festen Punkten dieses Kegelschnittes durch projektive Büschel projiziert werden. Sind also A, B, C, D vier bewegliche Punkte und S_1, S_2 zwei beliebige, aber feste Punkte des Kegelschnitts, so wird behauptet

$$S_1(ABCD) = S_2(ABCD).$$

Zunächst ist klar, daß der Satz für den Kreis gilt, denn hier sind die Büschel S_1 und S_2 (Fig. 119) wegen des Satzes über die Gleichheit der Peripheriewinkel sogar kongruent, also sicherlich projektiv. Da Doppelverhältnisse durch Projizieren und Schneiden nicht geändert werden (Nr. 51), so gilt der Satz nach dem in Nr. 20 angegebenen Übertragungsverfahren auch für alle Kreisprojektionen, d. h. für die Kegelschnitte, wie sie in Nr. 1 definiert sind. Freilich ist damit noch nicht bewiesen, daß auch umgekehrt jede Kurve, die als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel definiert ist, sich auch als Zentralprojektion eines Kreises darstellen läßt. Wir können hier unter Berufung darauf, daß dieser Beweis in Nr. 58 nachgeholt werden wird, den Satz aussprechen:

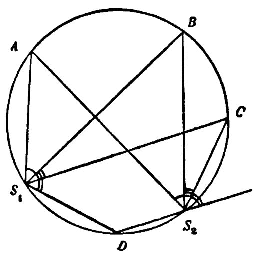

Fig. 119

Satz. Der geometrische Ort für die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in zwei projektiven Strahlenbüscheln ist ein Kegelschnitt, der durch die Träger der beiden Büschel hindurchgeht.

Eine besondere Rolle spielen in diesen Büscheln die Strahlen, die dem Verbindungsstrahl der beiden Träger jeweils entsprechen; rückt D nach S_2, so fällt S_1D mit S_1S_2 zusammen, während der entsprechende Strahl S_2D zur Tangente wird; dasselbe gilt für den Strahl S_1D, wenn D nach S_1 rückt. Damit ist gezeigt:

Die Tangenten in den Trägern der beiden Büschel, die den Kegelschnitt erzeugen, sind die Strahlen, die der Verbindungslinie der beiden Träger jeweils im anderen Büschel entsprechen.

Dieser Satz bietet (in Verbindung mit der in Nr. 53 gelehrten Konstruktion) die Möglichkeit, die Tangenten in S_1 und S_2 mit dem Lineal allein zu ziehen.

56. Wir beweisen jetzt das Gegenstück zu dem in Nr. 55 aufgestellten Satz:

Satz. Zwei beliebige aber feste Tangenten eines (zunächst nach Nr. 1 definierten) Kegelschnitts werden von den anderen Tangenten dieses Kegelschnitts in projektiven Punktreihen geschnitten.

Die beliebigen aber festen Tangenten seien s_1 und s_2 (Fig. 120), ihre Berührungspunkte S_1 und S_2. Andere Tangenten mögen s_1 und s_2 in A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2, D_1 und D_2 schneiden. Es wird behauptet, daß

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$$

ist.

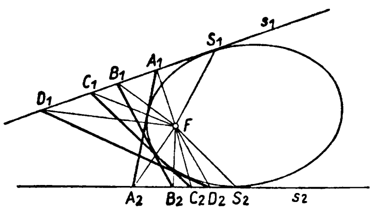

Fig. 120

Ist F der eine Brennpunkt, so folgt aus Nr. 16 sogleich

$$\sphericalangle\, A_1FA_2 = B_1FB_2 = C_1FC_2 = D_1FD_2 = \tfrac{1}{2}\, S_1FS_2,$$

wenn jedesmal derselbe Drehungssinn gewählt wird. Daher sind die Büschel $F(A_1B_1C_1D_1)$ und $F(A_2B_2C_2D_2)$ kongruent, also ihre Schnitte A_1, B_1, C_1, D_1 und A_2, B_2, C_2, D_2 sicher projektiv (Nr. 51).

Daß auch umgekehrt das Erzeugnis projektiver Punktreihen ein Kegelschnitt der alten Art ist, folgt erst einwandfrei, wenn der in Nr. 55 angekündigte Beweis in Nr. 58 nachgetragen sein wird; die Umkehrung lautet:

Satz. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei projektiven Punktreihen berühren einen Kegelschnitt, zu dessen Tangenten auch die Träger der beiden Punktreihen gehören.

Durch ähnliche Betrachtungen wie am Schlusse von Nr. 55 erkennt man noch: Die Berührungspunkte auf den beiden Trägern sind diejenigen Punkte, die dem Schnittpunkt der Träger entsprechen.

57. Für jeden als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel definierten Kegelschnitt gilt der Pascalsche Lehrsatz.

Beweis. Sind C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 sechs Punkte der Kurve (Fig. 121), so ist nach der Definition des Kegelschnitts

$$C_3(C_1C_2C_4C_6) = C_5(C_1C_2C_4C_6).$$

Jeder Schnitt des Büschels C_3 ist also zu jedem Schnitt des Büschels C_5 projektiv[1]). Die Punkte, in denen C_1C_2 die Strahlen C_4C_5 und C_5C_6 schneidet, seien $\mathfrak{A}$ und V; die Punkte, in denen C_1C_6 die Strahlen C_2C_3 und C_3C_4 schneidet, seien U und $\mathfrak{C}$. Dann muß $(C_1U\mathfrak{C}C_6) = (C_1C_2\mathfrak{A}V)$ sein. In diesen beiden Punktreihen fällt aber ein Paar entsprechender Punkte in C_1 zusammen, also liegen die Punktreihen nach Nr. 51 perspektiv, daher geht $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ von UC_2 und VC_6.

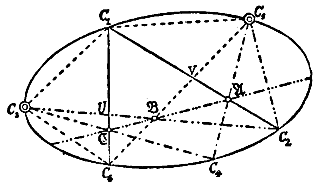

Fig. 121

58. Jetzt sind wir in der Lage, den in Nr. 55 in Aussicht gestellten Beweis zu führen. S_1 und S_2 seien die erzeugenden Büschel des Kegelschnittes, C irgendein Punkt der Kurve, t_1 und t_2 die Tangenten in S_1 und S_2. Man lege durch S_1 und S_2 einen Kreis, dessen Ebene mit der Ebene des Kegelschnitts nicht zusammenfällt; die Kreistangenten in S_1 und S_2 seien t_1' und t_2'. Die Ebenen t_1t_1' und t_2t_2' mögen sich in a schneiden; die Ebene aC schneide den Kreis in C' (und einem zweiten, hier nicht benutzten Punkt C''). CC' schneide a in P. Projiziert man aus P die Kurve in die Kreisebene, so werden auch die erzeugenden Büschel in die Kreisebene abgebildet; sie bleiben projektiv, und zwar entsprechen sich

$$t_1' \text{ und } S_2S_1,$$
$$S_1C' \text{ und } S_2C',$$
$$S_1S_2 \text{ und } t_2'.$$

Dieselben Strahlen entsprechen sich aber auch in den kongruenten Kreisbüscheln S_1 und S_2. Da die Projektivität durch 3 Strahlenpaare eindeutig bestimmt ist, so sind Kreis und Projektion der Kurve identisch. Die Kurve ist also ein Kreisbild. Daraus folgt nach Nr. 55, daß zwei beliebige Büschel als erzeugende angesehen werden können, und daraus nach Nr. 57 der Pascalsche Satz allgemeingültig.

Mit Vorstehendem ist der Nachweis geführt, daß **jeder Kegelschnitt, der als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel definiert ist, auch als Zentralprojektion eines Kreises angesehen werden kann.**

Zugleich ist (wegen der Gleichberechtigung von C' und C'') klar, daß jeder (schiefe) „Kegel zweiter Ordnung“ zwei Scharen von Kreisschnitten hat.

---

1) Damit man die jetzigen Verhältnisse bequemer mit den früher behandelten vergleichen kann, seien hier die sechs Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 wie früher zu einem Sechseck zusammengestellt. Daß die im nebenstehenden Schema auftretenden Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen, wird durch die Betrachtungen in Nr. 57 von neuem bewiesen.

$C_1C_2C_3$	$C_4C_5C_6$	
C_1C_2	C_4C_5	$\mathfrak{A}$
C_2C_3	C_5C_6	$\mathfrak{B}$
C_3C_4	C_6C_1	$\mathfrak{C}$

59. Sind zwei projektive Strahlenbüschel mit demselben Träger S durch je drei entsprechende Strahlen gegeben, so kann man leicht die Doppelstrahlen der beiden Büschel finden, d. h. die Strahlen, in denen je zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen. Man legt durch S einen Kreis, der die Strahlen des einen Büschels in A_1, B_1, C_1, D_1 ..., die des anderen in A_2, B_2, C_2, D_2 ... zum zweitenmal schneidet (Fig. 122). Dann ist

$$S(A_1B_1C_1D_1) = A_2(A_1B_1C_1D_1),$$

ebenso

$$S(A_2B_2C_2D_2) = A_1(A_2B_2C_2D_2),$$

also sind auch die beiden auf der rechten Seite stehenden Doppelverhältnisse einander gleich. Die Büschel A_1 und A_2 haben aber den Strahl A_1A_2 entsprechend gemein, also sind sie nach Nr. 51 perspektiv, d. h. die Schnittpunkte von A_1B_2 und A_2B_1, A_1C_2 und A_2C_1 usw. liegen in einer Geraden, der Perspektivitätsachse p. Ein beliebiger Punkt P auf p bestimmt in den Büscheln A_2 und A_1 entsprechende Strahlen; deren Schnittpunkte X_1 und X_2 mit dem Kreise geben dann die entsprechenden Strahlen SX_1 und SX_2. Schneidet die Perspektivitätsachse p den Kreis in Q und R, so fallen in SQ und SR je zwei entsprechende Strahlen zusammen; dies sind also die gesuchten Doppelstrahlen. Zwei projektive Strahlenbüschel mit demselben Träger haben also zwei Doppelstrahlen, einen oder keinen, je nachdem die Perspektivitätsachse p den Hilfskreis schneidet, berührt oder meidet. Mittels des soeben besprochenen Verfahrens kann man auch die Doppelpunkte zweier auf demselben Träger gelegener Punktreihen finden. Man braucht nur beide Reihen von einem Punkte S aus zu projizieren und dann die Doppelstrahlen der Strahlenbüschel des Trägers S zu ermitteln.

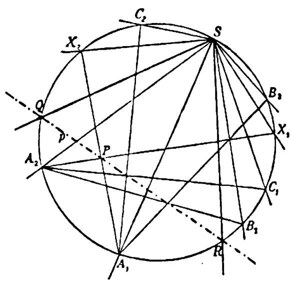

Fig. 122

Warum die Konstruktion der Doppelstrahlen und Doppelpunkte besondere Bedeutung hat, ist leicht einzusehen. Die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnitts sind nämlich nichts anderes als die Doppelpunkte der beiden Punktreihen, die auf dieser Geraden dadurch erzeugt werden, daß man die Punkte des Kegelschnitts aus zwei beliebigen von ihnen durch projektive Strahlenbüschel projiziert. Ebenso sind die von einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten nichts anderes als die Doppelstrahlen der beiden Strahlenbüschel, die man erhält, wenn man aus dem gegebenen Punkte die beiden Punktreihen projiziert, die auf zwei beliebigen Tangenten des Kegelschnitts durch alle übrigen ausgeschnitten werden.

§ 7. Analytische Geometrie der Geraden und des Kreises[1])

Strecke

1. Länge und Neigungswinkel der Strecke. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2. Die Parallele zur x-Achse durch P_1 und die Parallele zur y-Achse durch P_2 haben den Schnittpunkt Q [vgl. Fig. 123[2])], dann ist im rechtwinkligen Dreieck P_1QP_2 die Kathete $P_1Q = x_2 - x_1$, die Kathete $P_2Q = y_2 - y_1$. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist dann die Länge der Strecke P_1P_2

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

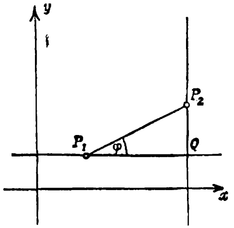

Fig. 123

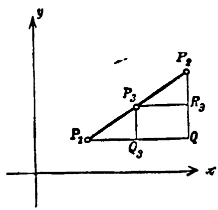

Fig. 124

Für den Neigungswinkel φ der Strecke gegen die positive x-Achse erhält man aus dem gleichen rechtwinkligen Dreieck die Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2. Teilung der Strecke. Die Strecke P_1P_2 werde durch den Punkt P_3 halbiert (Fig. 124). Die Koordinaten x_3, y_3 von P_3 sollen durch diejenigen von P_1 und P_2 bestimmt werden. Zieht man durch P_3 zu den Koordinatenachsen Parallelen, die P_1Q in Q_3, P_2Q in R_3 schneiden, dann ist nach dem ersten Strahlensatz (Buch für Kl. 7—9. § 6, Nr. 2) Q_3 Mittelpunkt von P_1Q und R_3 Mittelpunkt von P_2Q. Mithin ist

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

1) Die in diesem Paragraphen behandelten Tatsachen sind z. T. schon früher im geometrischen und arithmetischen Unterricht berührt worden; sie werden trotzdem hier noch einmal im Zusammenhang dargestellt.

2) Zu den Figuren dieses Abschnittes ist zu bemerken, daß sie sich nur auf irgendeine Lage der auftretenden Elemente in dem Bereiche der vier Quadranten eines Koordinatensystems beziehen, während die Ausführungen für alle beliebigen Lagen gelten.

Teilt der Punkt P_3 die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n$, dann liefert die gleiche Überlegung wie eben:

$$(x_3 - x_1) : (x_2 - x_3) = m : n,$$
$$n x_3 - n x_1 = m x_2 - m x_3,$$
$$x_3 = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n}$$

und ebenso
$$y_3 = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n}.$$

Dreiecksfläche

3. **Flächeninhalt des Dreiecks.** Das von der Strecke $P_1 P_2$, der x-Achse und den Parallelen $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ zur y-Achse bestimmte Trapez hat eine Mittelparallele von der Länge $\frac{y_1 + y_2}{2}$; sein Inhalt ist also $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$.

Der Flächeninhalt f eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, dessen Eckpunkte die Koordinaten $(x_1;\, y_1)$, $(x_2;\, y_2)$ und $(x_3;\, y_3)$ haben, läßt sich (Fig. 125) als algebraische Summe dreier Trapeze bestimmen. Es ist

$$f = \tfrac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_2 + y_1)(x_2 - x_1)]$$

oder nach Umordnung der Glieder

$$f = \frac{1}{2}\,[x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)]\,.$$

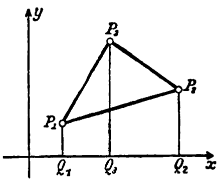

Fig. 125

Bemerkung. Der eben abgeleitete Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks ist nicht ein absoluter Wert, sondern hat positives oder negatives Vorzeichen. Das Vorzeichen des Flächeninhalts hängt davon ab, ob die Punkte P_1, P_2 und P_3 entgegengesetzt dem Drehsinn des Uhrzeigers aufeinanderfolgen (positives Vorzeichen) oder im gleichen Drehsinn (negatives Vorzeichen).

Gleichung der Geraden

4. **Erste Form der Gleichung.** P sei ein beliebiger Punkt einer Geraden (Fig. 126), die auf der y-Achse die (mit Vorzeichen zu nehmende) Strecke n abschneidet; die Gerade bilde mit der positiven x-Achse den Winkel φ. Der Abschnitt auf der x-Achse ist dann $-\frac{n}{\operatorname{tg}\varphi}$. Sind x und y die Koordinaten von P, dann ist, wo auch der Punkt auf der Geraden liegen mag,

$$y : \left(x + \frac{n}{\operatorname{tg}\varphi}\right) = n : \frac{n}{\operatorname{tg}\varphi}$$

oder
$$y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi + n.$$

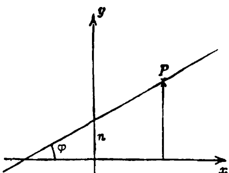

Fig. 126

Führt man hier noch den Richtungsfaktor $m = \operatorname{tg} \varphi$ ein, so erhält man als erste Form der Gleichung einer Geraden

$$y = mx + n,$$

wo m den Richtungsfaktor, n den Abschnitt auf der y-Achse bedeutet.

Bemerkung. Diese Form der Gleichung versagt, wenn m und n beide ∞ werden, d. h. wenn die Gerade der y-Achse parallel ist. Die Gleichung lautet dann, wie man unmittelbar erkennt,

$$x = a,$$

wenn a der (mit Vorzeichen zu nehmende) Abstand der Geraden von der y-Achse ist.

5. **Zweite Form der Gleichung.** Eine Gerade schneide auf den beiden Achsen die (mit Vorzeichen zu nehmenden) Strecken a (auf der x-Achse) und b (auf der y-Achse) ab (Fig. 127). Dann ist $b = n$ und $\frac{b}{a} = -m$. Mithin nimmt die Gleichung der Geraden die Gestalt an

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

oder

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bemerkung. Diese Form der Gleichung versagt, wenn a und damit auch b den Wert 0 hat, wenn also die Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

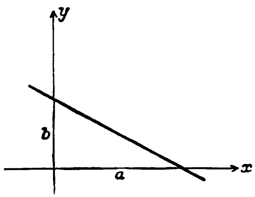

Fig. 127

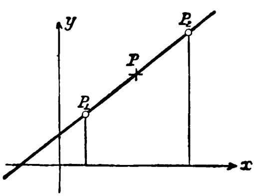

Fig. 128

6. **Dritte Form der Gleichung.** Ist $P_1(x_1; y_1)$ ein fester Punkt der Geraden mit dem Richtungsfaktor m (Fig. 128), $P(x; y)$ ein beliebiger auf der Geraden beweglicher Punkt, so ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m. \tag{1}$$

Ist noch ein zweiter fester Punkt auf der Geraden $P_2(x_2; y_2)$ gegeben, dann hat der Richtungsfaktor den Wert

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m,$$

mithin ist

(2) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Die erste Gleichung wird man benutzen, wenn man von der Geraden einen Punkt und den Richtungsfaktor kennt, die zweite, wenn man zwei Punkte kennt.

7. Allgemeine Form der Gleichung. Eine beliebige Funktionsgleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y läßt sich stets auf die Form

(1) $$Ax + By + C = 0$$

bringen, wo A, B und C irgendwelche reelle Zahlen sind.

a) Es sei $B \neq 0$, dann kann man die Gleichung durch B dividieren; man erhält

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Dem entspricht eine Gerade mit dem Richtungsfaktor $-\frac{A}{B}$ und dem Abschnitt $-\frac{C}{B}$ auf der y-Achse.

b) **Ist $B = 0$, so läßt sich jedenfalls $A \neq 0$ voraussetzen (denn sonst kämen wir auf den trivialen Fall $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$). Ich kann also durch A dividieren und erhalte**

$$x = -\frac{C}{A},$$

d. h. wieder eine Gerade, und zwar eine Parallele zur y-Achse. Das geometrische Bild der Funktionsgleichung (1) ist also in jedem Falle eine Gerade.

Zwei Geraden

8. Schnitt zweier Geraden. Es mögen zwei Geraden vorliegen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Ihr Schnittpunkt habe die Koordinaten $(x_0; y_0)$. Dann genügen die Koordinaten des Schnittpunktes beiden Gleichungen gleichzeitig. Man erhält also für x_0 und y_0 zwei Bestimmungsgleichungen:

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0,$$
$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0.$$

Daraus folgt (vgl. Arithmetischer Leitfaden, Buch für Kl. 7—9, § 5, Nr. 9ff.)

$$x_0 = \frac{C_2 B_1 - C_1 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$y_0 = \frac{A_1 C_2 - C_1 A_2}{B_1 A_2 - A_1 B_2}.$$

Der Schnittpunkt fällt ins Unendliche, m. a. W. die Geraden sind parallel, wenn $A_1 B_2 = A_2 B_1$ oder $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ ist, d. h. wenn die Richtungsfaktoren (Nr. 7) gleich sind.

9. Winkel zweier Geraden. Die Richtungsfaktoren zweier Geraden (Fig. 129) seien m_1 und m_2, die Neigungswinkel gegen die positive x-Achse φ_1 und φ_2, der Winkel zwischen den beiden Geraden sei φ_0, dann ist

$$\varphi_1 + (180^0 - \varphi_2) + \varphi_0 = 180^0,$$

$$\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Mithin ist $$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}$$

oder $$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

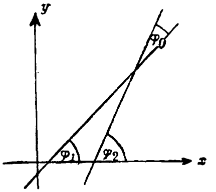

Fig. 129

Man hat beim Schnitt zweier Geraden zwei Winkel zu unterscheiden, einen spitzen und einen stumpfen, es sei denn, daß die Geraden senkrecht aufeinander stehen. Beide Winkel sind aber Nebenwinkel, und ihre Tangensfunktionen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Versteht man unter φ_0 den spitzen Winkel, dann ist stets

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

10. Parallele und senkrechte Geraden. Sind zwei Geraden parallel, so ist der Winkel zwischen ihnen 0; aus Nr. 9 folgt dann

$$m_1 = m_2.$$

Man erhält erneut das Ergebnis von Nr. 8, daß parallele Geraden — wie sich auch unmittelbar ergibt — gleichen Richtungsfaktor haben.

Stehen zwei Geraden senkrecht aufeinander, so ist $\varphi_0 = 90^0$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \infty$; der Nenner des Bruches in Nr. 9 hat also den Wert 0. Aus $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ folgt

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn der eine Richtungsfaktor gleich dem reziproken Wert des andern mit entgegengesetztem Vorzeichen ist.

Hessesche Normalform der Geradengleichung

11. Auf eine Gerade mit der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist vom Koordinatenanfangspunkt das Lot gefällt (Fig. 130). Die Länge des Lotes sei p, der Winkel mit der positiven x-Achse φ. Dann ist der

Abschnitt der Geraden auf der x-Achse

$$a = \frac{p}{\cos\varphi},$$

der Abschnitt auf der y-Achse

$$b = \frac{p}{\sin\varphi}.$$

Die Gleichung der Geraden nimmt die Gestalt an

$$\frac{x \cdot \cos\varphi}{p} + \frac{y \cdot \sin\varphi}{p} = 1$$

oder $\quad x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0.$

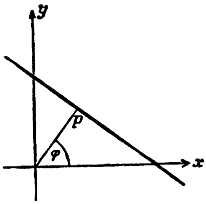

Fig. 130

Bei der Ableitung wurde vorausgesetzt, daß die Gerade nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

Es sei ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ außerhalb der Geraden $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$ gegeben. Die durch P_1 zu der gegebenen Geraden gezogene Parallele hat die Gleichung

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p_1 = 0,$$

wenn p_1 der Abstand der Parallelen vom Nullpunkt ist. Da P_1 ein Punkt der Parallelen ist, hat p_1 den Wert

$$x_1 \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi.$$

Der (absolut genommene) Abstand der beiden Geraden und damit auch der des Punktes P_1 von der Geraden ist dann

$$d = |p_1 - p| = |x_1 \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi - p|.$$

Man erhält also den Abstand eines beliebigen Punktes $(x_1; y_1)$ von einer Geraden, wenn man seine Koordinaten x_1 und y_1 in die linke Seite der Hesseschen Normalform der Geradengleichung einsetzt.

Kreis

12. **Gleichung des Kreises.** Ist r der Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt, so gilt für jeden Punkt der Kreisperipherie $C(x; y)$ nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Hat der Mittelpunkt des Kreises die Koordinaten a und b, dann erhält man ebenso als Gleichung des Kreises

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Tangente an den Kreis. $(x_0; y_0)$ sei ein Punkt der Peripherie eines um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kreises mit dem Radius r.

Dann ist $y = \frac{y_0}{x_0}x$ die Gleichung des durch $(x_0; y_0)$ gehenden Radius.

Die in $(x_0; y_0)$ an den Kreis gelegte Tangente hat deshalb (Nr. 10) den Richtungsfaktor $-\frac{x_0}{y_0}$; die Gleichung der Tangente ist also (Nr. 6)

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$$

oder $$y \cdot y_0 - y_0^2 = x_0^2 - x x_0 .$$

Da $$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

ist, nimmt diese Gleichung auch die Form an:

$$x x_0 + y y_0 = r^2 .$$

Verschiebung und Drehung rechtwinkliger Koordinatensysteme

13. Verschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems. Ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem werde um die (mit Vorzeichen zu nehmende) Strecke a nach rechts, um b nach oben verschoben. Zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P im neuen ξ-η-System und denen im alten x-y-System gelten dann (Fig. 131) die Transformationsgleichungen

$$\xi = x - a, \qquad \eta = y - b .$$

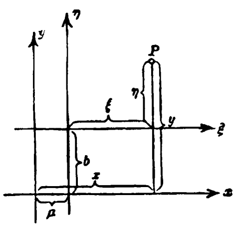

Fig. 131

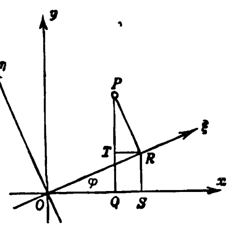

Fig. 132

Beispiel. Der Kreis mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt in einem x-y-System die Koordinaten a und b hat, besitzt in einem ξ-η-System, dessen Koordinatenanfangspunkt im Kreismittelpunkt liegt, die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 ,$$

mithin im x-y-System die Gleichung (Nr. 12)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 .$$

14. Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem werde um den Winkel φ um den Koordinatenanfangspunkt gedreht. Zwischen den Koordinaten im neuen ξ-η-System und denen im alten x-y-System gelten dann die Transformationsgleichungen

$$x = \xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi$$
$$y = \xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi .$$

In Fig. 132 ist $PQ = y$, $OQ = x$, $PR = \eta$, $OR = \xi$. Außerdem ist $RS \perp OS$, $RT \perp PQ$, $\sphericalangle TPR = \varphi$. Dann ist

$$x = OQ = OS - TR = \xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi,$$
$$y = PQ = RS + PT = \xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi.$$

Beispiel. Dreht man das x-y-Koordinatensystem, auf das der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ bezogen ist, um den Winkel φ, so wird im neuen ξ-η-System

$$(\xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi)^2 + (\xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi)^2 = r^2,$$

d. h.
$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Andere Koordinatensysteme

15. Schiefwinkliges Koordinatensystem. Es seien zwei Geraden X und Y mit dem Schnittpunkt O gegeben, deren positive Richtungen den beliebigen Winkel φ bilden (Fig. 133). Durch einen Punkt P zieht man zu den Geraden Parallelen. Der Schnittpunkt mit der Geraden X sei Q, derjenige mit der Geraden Y sei R. Unter den Koordinaten X und Y des Punktes P in bezug auf dieses (im allgemeinen schiefwinklige) Koordinatensystem versteht man dann die (mit Vorzeichen zu nehmenden) Strecken OQ und $OR = PQ$.

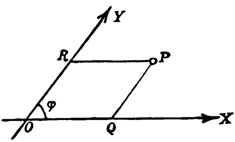

Fig. 133

Beispiel. Eine Gerade schneide auf den Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems die Strecken a und b ab. Ist dann $P(X; Y)$ ein beliebiger Punkt der Geraden, dann erhält man (Fig. 134)

$$(a - X) : Y = a : b,$$
$$ab - bX = aY$$

oder
$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$

als Gleichung der Geraden im schiefwinkligen Koordinatensystem.

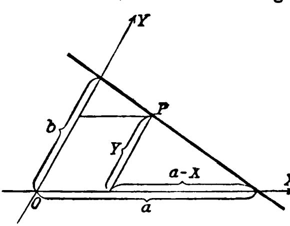

Fig. 134

16. Transformation eines rechtwinkligen in ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Der Punkt P habe in bezug auf ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem die Koordinaten $x = OQ$ und $y = PQ$ (Fig. 135). Ein schiefwinkliges X-Y-Koordinatensystem habe mit dem rechtwinkligen gleichen Koordinatenanfangspunkt. Der Winkel der x-Achse mit der X-Achse sei φ_1, der mit der Y-Achse sei φ_2. Die Koordinaten des Punktes P in bezug auf dieses schiefwinklige System seien $X = OQ_1$ und $Y = PQ_1$.

Man ziehe durch Q_1 die Parallele zur x-Achse, die PQ in R, und die Parallele zur y-Achse, die die x-Achse in S schneidet. Im Dreieck PRQ_1 ist $\sphericalangle PQ_1R = \varphi_2$. Man hat

$$OQ = OS + Q_1R,$$

und

$$PQ = Q_1S + PR,$$

also

$$x = X \cdot \cos\varphi_1 + Y \cdot \cos\varphi_2,$$
$$y = X \cdot \sin\varphi_1 + Y \cdot \sin\varphi_2.$$

Bemerkung. Setzt man hierin $\varphi_2 = 90^0 + \varphi_1$, so wird auch das X-Y-Koordinatensystem rechtwinklig; es handelt sich um eine reine Drehung, und wir finden als Sonderfall die bereits in Nr. 14 abgeleiteten Transformationsgleichungen. Die Transformation eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein schiefwinkliges, das nicht den gleichen Anfangspunkt hat, läuft auf den eben behandelten Fall hinaus, wenn man noch eine reine Translation (Nr. 13) hinzunimmt.

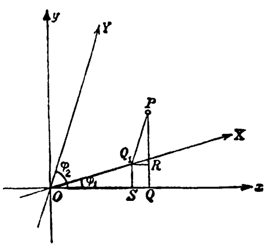

Fig. 135

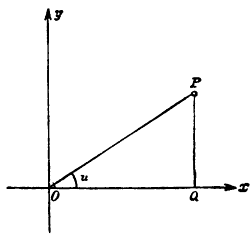

Fig. 136

17. Polarkoordinatensystem. Es sei ein Strahl mit dem Anfangspunkt O gegeben. Ein Punkt P wird mit O verbunden. Dann nennt man die Strecke $r = PO$ und den Winkel u, den PO mit dem Strahl bildet, die Polarkoordinaten des Punktes P.

Beispiel. In Polarkoordinaten lautet die Gleichung einer Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt O geht und mit dem Strahl den Winkel α_0 bildet, $u = \alpha_0$. Die Gleichung eines Kreises um den Koordinatenanfangspunkt mit dem Radius r_0 lautet $r = r_0$.

Transformation eines rechtwinkligen in ein Polarkoordinatensystem. Der Punkt P habe in bezug auf ein rechtwinkliges x-y-System die Koordinaten $x = OQ$ und $y = PQ$ (Fig. 136). Ein Polarkoordinatensystem sei durch die Richtung der positiven x-Achse und den gleichen Koordinatenanfangspunkt bestimmt. Der Punkt P habe die Polarkoordinaten $r = PO$ und $u = \sphericalangle POQ$. Dann lauten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos u,$$
$$y = r \cdot \sin u.$$

Beispiel. Die Hessesche Normalform der Gleichung einer Geraden lautet

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0.$$

Führt man hier Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$r \cdot \cos u \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin u \cdot \sin\varphi - p = 0$$

oder
$$r \cdot \cos(u - \varphi) - p = 0.$$

§ 8. Analytische Geometrie der Kegelschnitte

Ellipsengleichung

1. **Erklärung.** Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine konstante Summe haben (§ 6, Nr. 1). Der halbe Abstand der Brennpunkte heißt die lineare Exzentrizität der Ellipse. Die Verbindungsstrecken eines Ellipsenpunktes mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen des Punktes.

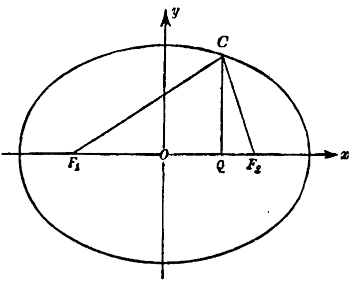

Fig. 137

2. **Gleichung der Ellipse.** Es seien F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte der Ellipse (Fig. 137), F_1F_2 sei $2e$; C sei ein Punkt der Ellipse, der in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit F_1F_2 als x-Achse und der Mitte O von F_1F_2 als Anfangspunkt die Koordinaten $OQ = x$ und $CQ = y$ hat. Dann ist nach der Definition der Ellipse die Summe der Brennstrahlen $F_1C + CF_2$ eine konstante Größe, etwa $2a$. Drückt man F_1C aus $\triangle F_1CQ$ und F_2C aus $\triangle F_2CQ$ mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus, so erhält man die Gleichung

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a.$$

Trennt man die Quadratwurzeln und quadriert, so folgt

$$y^2 + e^2 - 2xe + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + y^2 + e^2 + 2ex + x^2.$$

Durch Vereinfachung geht die Gleichung über in

$$xe + a^2 = a\sqrt{y^2 + (e + x)^2}.$$

Quadriert man abermals, so folgt

$$x^2e^2 + 2xea^2 + a^4 = a^2(y^2 + e^2 + 2ex + x^2)$$

oder
$$x^2(a^2 - e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Da $CF_1 + CF_2 > F_1F_2$ ist, ist $a > e$. Man darf also

$$a^2 - e^2 = b^2$$

setzen. Dividiert man noch die erhaltene Gleichung durch $a^2 b^2$, so findet man als Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. **Erörterung der Ellipsengleichung.** Die Ellipse schneidet die x-Achse in den Punkten $\pm a$, die y-Achse in den Punkten $\pm b$. Diese Punkte heißen Scheitel der Ellipse. Es ist $a > b$; a heißt die große, b die kleine Halbachse der Ellipse.

Die Ellipsengleichung ändert sich nicht, wenn man $+x$ mit $-x$ oder $+y$ mit $-y$ vertauscht; die Ellipse ist also axialsymmetrisch in bezug auf die beiden Koordinatenachsen und zentralsymmetrisch in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt. Man nennt die x-Achse Hauptachse, die y-Achse Nebenachse, den Koordinatenanfangspunkt Mittelpunkt der Ellipse.

Wird $e = 0$, dann ist $a = b$, und die Ellipse geht in einen Kreis mit dem Radius a über.

Hyperbelgleichung

4. **Erklärung.** Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine konstante Differenz haben (§ 6, Nr. 1). Der halbe Abstand der Brennpunkte heißt die lineare Exzentrizität der Hyperbel. Die Verbindungsstrecken eines Hyperbelpunktes mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen.

5. **Gleichung der Hyperbel.** Es seien F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte der Hyperbel (Fig. 138). F_1F_2 sei $2e$, C sei ein Punkt der Hyperbel, der in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit F_1F_2 als x-Achse und der Mitte O von F_1F_2 als Anfangspunkt die Koordinaten $OQ = x$ und $CQ = y$ hat. Dann ist nach der Definition der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen $CF_1 - CF_2$, abgesehen vom Vorzeichen, eine konstante Größe, etwa $\pm 2a$. Drückt man CF_1 aus $\triangle F_1CQ$ und CF_2 aus $\triangle F_2CQ$ mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus, so erhält man die Gleichung

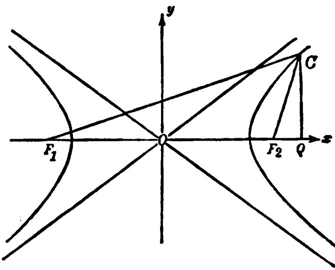

Fig. 138

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \pm 2a.$$

Trennt man die Quadratwurzeln und quadriert, so folgt

$$y^2 + e^2 + 2ex + x^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} + y^2 + e^2 - 2ex + x^2.$$

Durch Vereinfachung geht die Gleichung über in

$$xe - a^2 = \pm a \sqrt{y^2 + (e - x)^2}.$$

Quadriert man abermals, so folgt

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2(y^2 + e^2 - 2xe + x^2)$$

oder
$$x^2(e^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(e^2 - a^2).$$

Da $|CF_1 - CF_2| < F_1F_2$ ist, ist $a < e$. Man darf also

$$e^2 - a^2 = b^2$$

setzen. Dividiert man noch die erhaltene Gleichung durch a^2b^2, so findet man als Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

6. **Erörterung der Hyperbelgleichung.** Die Hyperbel schneidet die x-Achse in den Punkten $\pm a$. Diese Punkte heißen Scheitel der Hyperbel. Ein Schnitt der Kurve mit der y-Achse ist nicht vorhanden. Die Hyperbelgleichung ändert sich nicht, wenn man $+x$ mit $-x$ oder $+y$ mit $-y$ vertauscht; die Hyperbel ist also axialsymmetrisch in bezug auf die beiden Koordinatenachsen und zentralsymmetrisch in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt. Man nennt die x-Achse Hauptachse, die y-Achse Nebenachse, den Koordinatenanfangspunkt Mittelpunkt der Hyperbel. Wenn $a = b$ ist, nimmt die Hyperbelgleichung die Form $x^2 - y^2 = a^2$ an. Man nennt eine solche Hyperbel gleichseitig.

Parabelgleichung

7. **Erklärung.** Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, die gleichen Abstand von einer Geraden, der Leitlinie, und einem Punkte, dem Brennpunkt, haben (§ 6, Nr. 1). Der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie heißt der Halbparameter der Parabel. Die Verbindungsstrecke eines Parabelpunktes mit dem Brennpunkt heißt Brennstrahl.

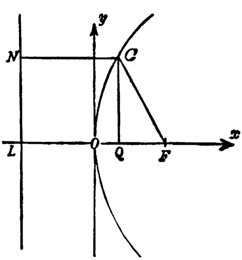

Fig. 139

8. **Gleichung der Parabel.** Es sei F der Brennpunkt der Parabel (Fig. 139), FL das Lot von F auf die Leitlinie, $FL = p$; C sei ein Punkt der Parabel, der in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit LF als x-Achse und der Mitte O von LF als Anfangspunkt die Koordinaten $OQ = x$ und $CQ = y$ hat. Wenn dann $CN \perp NL$ ist, so ist nach der Definition der Parabel $CF = CN$. Drückt man beide Strecken durch x, y und p aus, so erhält man je nach der Lage des Parabelpunktes C die Gleichung

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

oder
$$\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Man quadriert und erhält in jedem Falle

$$y^2 + x^2 - xp + \frac{p^2}{4} = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$

und durch Vereinfachung als Scheitelgleichung der Parabel

$$y^2 = 2px.$$

9. Erörterung der Parabelgleichung. Die Parabel geht durch den Koordinatenanfangspunkt. Dieser Punkt heißt auch Scheitel der Parabel. Die Parabelgleichung ändert sich nicht, wenn man $+y$ mit $-y$ vertauscht; die Parabel ist also axialsymmetrisch in bezug auf die x-Achse. Man nennt die x-Achse die Hauptachse der Parabel. Wenn p positiv ist, liegt die Parabel ganz in der rechten, ist p negativ, ganz in der linken Halbebene.

Scheitelgleichung der drei Kegelschnitte

10. Wir hatten in § 6, Nr. 2 gesehen: Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte — es ist das ein Brennpunkt — und einer festen Geraden, der Leitlinie, ein konstantes Verhältnis haben. Wir nennen dieses Verhältnis die numerische Exzentrizität ε und erhalten eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$, eine Hyperbel, wenn $\varepsilon > 1$, eine Parabel, wenn $\varepsilon = 1$ ist.

C sei der Punkt des Kegelschnittes, CL das Lot von C auf die Leitlinie, F der Brennpunkt, dann ist $CF : CL = \varepsilon$. Das Lot von F auf die Leitlinie sei FM, O sei ein Punkt auf FM derart, daß $OF : OM = \varepsilon$ ist, dann ist O ein Punkt des Kegelschnittes. Es sei $FM = p'$, dann folgt aus

$$OF : OM = \varepsilon \quad \text{und} \quad OF + OM = p'$$

$$OM = \frac{p'}{1+\varepsilon}; \quad OF = \frac{\varepsilon p'}{1+\varepsilon}.$$

Wir wollen nun das rechtwinklige Koordinatensystem, auf das wir den Kegelschnitt beziehen, so legen, daß die Parallele durch O zur Leitlinie y-Achse wird und die x-Achse durch F geht. Hat jetzt C die Koordinaten x und y, so ist

$$CF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon p'}{1+\varepsilon}\right)^2},$$

$$CL = x + \frac{p'}{1+\varepsilon},$$

mithin
$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon p'}{1+\varepsilon}\right)^2} : \left(x + \frac{p'}{1+\varepsilon}\right) = \varepsilon.$$

Quadriert man die Gleichung und stellt die Glieder um, so ergibt sich

$$y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon p'}{1+\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon^2\left(x + \frac{p'}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Daraus folgt $$y^2 + x^2 - \frac{2\varepsilon p' x}{1+\varepsilon} = \varepsilon^2 x^2 + \frac{2\varepsilon^2 p' x}{1+\varepsilon}$$

oder $$y^2 = 2\varepsilon p' x + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Ist $\varepsilon < 1$, handelt es sich also um eine Ellipse, dann ist $\varepsilon^2 - 1$ eine negative Größe; setzt man $\varepsilon p' = p$, $1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a}$ (wobei also a den Wert $\frac{\varepsilon p'}{1-\varepsilon^2}$ hat), so erhält man die Gleichung

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Ist $\varepsilon > 1$, handelt es sich also um eine Hyperbel, dann ist $\varepsilon^2 - 1$ eine positive Größe; setzt man wieder $\varepsilon p' = p$, jetzt aber $\varepsilon^2 - 1 = \frac{p}{a}$, so erhält man die Gleichung

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Ist schließlich $\varepsilon = 1$, handelt es sich also um eine Parabel, dann wird man auf die bereits bekannte Scheitelgleichung der Parabel geführt

$$y^2 = 2px.$$

11. **Erörterung der allgemeinen Scheitelgleichung.** Die in der Scheitelgleichung von Ellipse und Hyperbel auftretende Größe a ist die große Halbachse. Setzt man nämlich $x = 2a$ ein, so ergibt sich

$$y^2 = 2p \cdot 2a - \frac{p \cdot 4a^2}{a},$$

d. h. $y = 0$. Daraus folgt in der Tat, daß $2a$ die große Achse des Kegelschnitts ist.

Wir definieren als Halbparameter des Kegelschnittes die Länge der zum Brennpunkt gehörigen Ordinate. Bei der Parabel wird also $y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2}$, also der Halbparameter in der Tat p, so daß unsere früher (Nr. 7) gegebene Erklärung mit unserer jetzigen in Einklang steht. Um den Halbparameter bei Ellipse und Hyperbel zu finden, haben wir etwa in der Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

für x den Wert e einzusetzen und danach y zu bestimmen. Man erhält als Wert für den Halbparameter

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Wir weisen nach, daß die in der allgemeinen Scheitelgleichung auftretende Größe p der eben definierte Halbparameter ist. Bei der Parabel liegt es auf der Hand. Im Falle der Ellipse setzen wir in die allgemeine Scheitelgleichung für x den Wert $a - e$ ein und müssen dann für die zugehörige Ordinate y den Wert p einsetzen. Man erhält dann in der Tat die identische Gleichung

$$p^2 = 2p(a-e) - \frac{p(a-e)^2}{a},$$

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Im Falle der Hyperbel ist für x der Wert $e - a$, für die zugehörige Ordinate y der Wert p einzusetzen. Man erhält

$$p^2 = 2p(e-a) + \frac{p(e-a)^2}{a},$$

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Wir hatten in Nr. 10 die Größen ε, p und a im Falle der Ellipse durch die Gleichung $1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a}$ verbunden. Berücksichtigt man den eben gefundenen Wert von p, so ergibt sich daraus

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

und daraus $$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Im Falle der Hyperbel folgt in gleicher Weise aus $\varepsilon^2 - 1 = \frac{p}{a}$ zunächst

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

und daraus wieder $$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

12. In der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

seien die Koeffizienten a, b, c, d, e, f irgendwelche reelle Zahlen. b sei $\neq 0$, dann wollen wir die Substitution

$$x = \xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha,$$
$$y = \xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha$$

vornehmen und darin α so wählen, daß der Koeffizient des Gliedes mit $\xi\eta$ den Wert 0 erhält. Geometrisch gesprochen heißt das: Wir drehen das x-y-Koordinatensystem, auf das die der Gleichung (1) entsprechende Kurve bezogen ist, um einen solchen Winkel α, daß die Kurvengleichung im neuen ξ-η-Koordinatensystem kein Glied mit $\xi \cdot \eta$ mehr besitzt.

Es ist

$$\begin{aligned} a(\xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha)^2 &+ b(\xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha)(\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha) \\ &+ c(\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha)^2 + d(\xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha) \\ &+ e(\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha) + f = 0. \end{aligned}$$

Der Faktor des Gliedes mit $\xi\eta$ ist darin $= 0$ zu setzen und liefert damit die Bestimmungsgleichung für α. Es ist

$$-2a \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$b \cdot \cos 2\alpha - (a - c)\sin 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a - c}.$$

Daraus ist α stets zu bestimmen.

13. Eine allgemeine Gleichung zweiten Grades läßt sich nach Nr. 12 immer auf die Form

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

bringen, wo jetzt die Koeffizienten a, b, c, d und e wieder irgendwelche reelle Zahlen sind. Wir setzen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ voraus.

Wir wollen jetzt die Substitution

$$x = \xi + m; \qquad y = \eta + n$$

vornehmen und m und n so wählen, daß die Koeffizienten der linearen Glieder in der neuen Gleichung 0 werden. Geometrisch gesprochen heißt das: Wir verschieben das x-y-Koordinatensystem, auf das die der Gleichung (1) entsprechende Kurve bezogen ist, derart, daß die Kurvengleichung im neuen ξ-η-Koordinatensystem keine linearen Glieder mehr besitzt.

Es ist $\quad a(\xi + m)^2 + b(\eta + n)^2 + c(\xi + m) + d(\eta + n) + e = 0.$

Der Faktor des Gliedes mit ξ ist dann gleich 0 zu setzen und liefert die Bestimmungsgleichung für m. Es ist

$$2am + c = 0, \qquad m = -\frac{c}{2a}.$$

Ebenso ist der Faktor des Gliedes mit η gleich 0 zu setzen und liefert die Bestimmungsgleichung für n. Es ist

$$2bn + d = 0, \qquad n = -\frac{d}{2b}.$$

Da a und b von Null verschieden vorausgesetzt waren, sind m und n in jedem Falle endliche Größen.

14. Die Gleichung zweiten Grades hat jetzt die Gestalt

(1) $$ax^2 + by^2 = c$$

angenommen, wo a, b und c irgendwelche reelle Zahlen und a und b von 0 verschieden sind.

Wenn $c \neq 0$ ist, läßt es sich stets, gegebenenfalls durch Multiplikation der Gleichung mit -1, erreichen, daß c positives Vorzeichen hat.

Sind a und b beide positiv, dann stellt (1) eine Ellipse dar.

Haben a und b verschiedenes Vorzeichen, dann stellt (1) eine Hyperbel dar, haben a und b beide negatives Vorzeichen, dann entspricht der Gleichung keine Kurve im reellen Gebiet.

Ist $c = 0$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Wenn a und b gleiches Vorzeichen haben, entspricht der Gleichung im reellen Gebiet nur der Nullpunkt.

Haben a und b verschiedenes Vorzeichen, ist also etwa $a = m^2$ und $-b = n^2$, so läßt sich die Gleichung in der Form

$$(mx + ny) \cdot (mx - ny) = 0$$

schreiben und stellt also ein durch den Koordinatenanfangspunkt gehendes Geradenpaar $y = \pm \frac{m}{n} x$ dar.

15. Es bleibt noch der Fall zu erledigen (Nr. 13), daß in

(1) $$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

einer der beiden Koeffizienten a und b Null wird. Wenn beide Null werden, haben wir es mit der Gleichung einer Geraden zu tun. Es sei $a = 0$, $b \neq 0$. Wir dividieren durch b und bringen die Gleichung auf die Form

(2) $$y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0.$$

Wir führen eine Substitution

$$x = \xi + m; \quad y = \eta + n$$

ein und bestimmen m und n, so daß in der neuen Gleichung das lineare Glied mit η und das konstante Glied fortfällt. Der Substitution entspricht eine Verschiebung des Koordinatensystems. Es ist

$$\eta^2 + 2\eta n + n^2 + a_1\xi + a_1 m + b_1\eta + b_1 n + c_1 = 0,$$

wir erhalten also die Gleichung

$$2n + b_1 = 0; \quad n = -\frac{b_1}{2}$$

und $$n^2 + a_1 m + b_1 n + c_1 = 0$$

oder $$m = -\frac{c_1 + b_1 n + n^2}{a_1},$$

wobei noch der Wert für n einzusetzen ist. Es ist hierbei notwendig, $a_1 \neq 0$ vorauszusetzen.

Die Gleichung ist jetzt auf die Form

(3) $$y^2 = kx$$

gebracht und stellt eine Parabel dar. Sollte $k = 0$ werden, so ist die x-Achse das Bild der Gleichung.

In dem noch zu erledigenden Falle $a_1 = 0$ der Gleichung (2) wird

$$y^2 + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$y = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - c_1},$$

stellt also, wenn der Radikand positiv ist, ein zur x-Achse paralleles Geradenpaar dar.

Genau die gleichen Überlegungen führen zum Ziel, wenn in Gleichung (1) $a \neq 0$, aber $b = 0$ ist.

Tangentengleichungen[1]

16. Gleichung der Ellipsentangente. Um die Gleichung der Tangente in einem Punkte $(x_0; y_0)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aufzustellen, bestimmen wir zunächst ihren Richtungsfaktor m. Wenn $(x_1; y_1)$ ein zweiter Punkt der Ellipse ist, so geht die durch $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$ gelegte Sekante in die Tangente über, wenn $x_0 = x_1$ wird. Es ist also der Richtungsfaktor der Tangente

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

Nun ist

$$y_0^2 = -\frac{b^2}{a^2} x_0^2 + b^2,$$

$$y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2} x_1^2 + b^2,$$

mithin

$$y_0^2 - y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - x_1^2)$$

oder

$$(y_0 - y_1)(y_0 + y_1) = -\frac{b^2}{a^2}(x_0 - x_1)(x_0 + x_1).$$

Es wird also

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0 + x_1}{y_0 + y_1}.$$

Geht man darin zur Grenze $x_1 \to x_0$ über, so folgt

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

als Richtungsfaktor der Tangente im Punkte $(x_0; y_0)$.

1) Es ist in Nr. 16, 17 und 18 zunächst die Voraussetzung gemacht, daß die Differentiation algebraischer Funktionen dem Schüler nicht bekannt ist. Ist sie es doch, dann ist der Richtungsfaktor unmittelbar durch Differentiation zu gewinnen, wie in jedem der drei Fälle kurz angedeutet ist.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man von der Funktion

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

an der Stelle $(x_0; y_0)$ den Differentialquotienten nimmt:

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \pm \frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{-2x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}, \quad m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Auch wenn man die Funktionsgleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ unmittelbar nach x differenziert, erhält man dieses Ergebnis. Es wird

$$2b^2x + 2a^2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

also
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Um die Gleichung der Tangente zu erhalten, setzt man den Richtungsfaktor in die Geradengleichung $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$ ein. Dann wird

$$a^2y_0y - a^2y_0^2 = -b^2x_0x + b^2x_0^2$$

oder, da
$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

ist,
$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

17. Gleichung der Hyperbeltangente. Den Richtungsfaktor m der im Punkte $(x_0; y_0)$ an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gelegten Tangente bestimmen wir ebenso wie in Nr. 16. Es ist, wenn $(x_1; y_1)$ ein zweiter Hyperbelpunkt ist,

$$y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2,$$

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}x_1^2 - b^2,$$

mithin
$$y_0^2 - y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - x_1^2)$$

und
$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0 + x_1}{y_0 + y_1}.$$

Durch Grenzübergang $x_1 \to x_0$ ergibt sich hieraus der Richtungsfaktor der Hyperbeitangente

$$m = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man von dei Funktion

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

an der Stelle $(x_0; y_0)$ den Differentialquotienten nimmt:

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \pm \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,\frac{2x_0}{\sqrt{x_0{}^2 - a^2}},$$

$$m = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_0}{y_0}.$$

Kürzer kann man dies Ergebnis erhalten, wenn man die Funktionsgleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ unmittelbar nach x differenziert. Es wird

$$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Als Gleichung der Tangente in $(x_0; y_0)$ an die Hyperbel erhält man also

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_0}{y_0}$$

oder
$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

18. **Gleichung der Parabeltangente.** Der Richtungsfaktor der im Punkte $(x_0; y_0)$ an die Parabel $y^2 = 2px$ gelegten Tangente wird in gleicher Weise bestimmt. Ist $(x_1; y_1)$ ein zweiter Parabelpunkt, also

$$y_0{}^2 = 2px_0,$$

$$y_1{}^2 = 2px_1,$$

dann wird
$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{2p}{y_0 + y_1}.$$

Als Richtungsfaktor erhält man also durch Grenzübergang

$$m = \frac{p}{y_0}.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man von der Funktion $y = \pm\sqrt{2px}$ an der Stelle $(x_0; y_0)$ den Differentialquotienten nimmt:

$$m = \frac{1}{2}\;\frac{2p}{\pm\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0},$$

oder, wenn man $y^2 = 2px$ unmittelbar differenziert,

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Die Gleichung der Parabeltangente lautet

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{p}{y_0}$$

oder $$y \cdot y_0 - y_0^2 = xp - x_0 p.$$

Setzt man hierin $y_0^2 = 2px_0$, so folgt

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0).$$

Die Asymptoten der Hyperbel

19 **Gleichung der Hyperbel-Asymptoten.** Eine Gerade $y = mx$ wird mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zum Schnitt gebracht. Für den Schnittpunkt $(x_1; y_1)$ erhält man

$$b^2 x_1^2 - a^2 m^2 x_1^2 = a^2 b^2,$$

$$x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}};$$

$$y_1 = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}.$$

x_1 und y_1 sind reell, wenn $b^2 > a^2 m^2$, sie sind imaginär, wenn $b^2 < a^2 m^2$ ist. Ist $b^2 = a^2 m^2$, dann wird $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$. Für diesen Fall wird die Gerade $y = mx$ zur Asymptote. Es ist $m = \pm \frac{b}{a}$, mithin lauten die Gleichungen der beiden Asymptoten

$$y = \frac{b}{a} x; \qquad y = -\frac{b}{a} x.$$

Folgerung. Die beiden Asymptotengleichungen lassen sich in eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

zusammenfassen..

Gleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten

20. **Mittelpunktsgleichung der Ellipse.** Führt man in die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nach § 7, Nr. 17 durch $x = r \cdot \cos u$, $y = r \cdot \sin u$ Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$b^2 r^2 \cos^2 u + a^2 r^2 \sin^2 u = a^2 b^2$$

und daraus $$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cdot \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}.$$

Darin setzt man $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ und führt e ein; dann folgt

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cdot \cos^2 u}$$

oder, wenn man noch $\varepsilon = \frac{e}{a}$ einführt (Nr. 11),

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2 u}.$$

21. **Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.** Von der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ausgehend, kommt man in gleicher Weise wie bei der Ellipse erst auf

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cdot \cos^2 u - a^2 \sin^2 u}$$

und
$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos^2 u - a^2},$$

wo jetzt $e^2 = a^2 + b^2$ ist, und nach Einführung von $\varepsilon = \frac{e}{a}$ auf

$$r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 u - 1}.$$

22. **Erörterung der Mittelpunktsgleichungen.** Aus der Ellipsengleichung ist abzulesen, daß r seinen größten Wert für $u = 0^0$ hat; dann wird $r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2}$, und das liefert $r = a$. Mit wachsendem u nimmt r ab und erreicht seinen kleinsten Wert für $u = 90^0$, dann wird $r = b$.

Aus der Hyperbelgleichung ist abzulesen, daß r den kleinsten Wert für $u = 0^0$ annimmt; dann wird $r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 - 1}$, und das liefert $r = a$. Dann nimmt mit wachsendem u auch r zu. Es erreicht den Wert ∞, wenn

$$b^2 \cdot \cos^2 u - a^2 \sin^2 u = 0$$

ist, wie man am besten aus der zweiten Gleichung von Nr. 21 ersieht. Das liefert also die eine Asymptotenrichtung, die durch

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a}$$

bestimmt ist (Nr. 19). r bleibt dann bei zunehmendem u imaginär bis zu dem Winkel, der die andere Asymptotenrichtung durch

$$\operatorname{tg} u = -\frac{b}{a}$$

festlegt, und fällt dann wieder von ∞ bis auf a; dieser Wert wird für $u = 180^0$ erreicht.

23. Brennpunktsgleichung der Ellipse. Bei der Ableitung der Mittelpunktsgleichung der Ellipse im rechtwinkligen Koordinatensystem (Nr. 2) hatte sich die Beziehung

$$a\sqrt{y^2+(e+x)^2}=x\cdot e+a^2$$

ergeben, woraus $\sqrt{y^2+(e+x)^2}=\varepsilon x+a$

folgt. Wir führen nun ein Polarkoordinatensystem mit dem Brennpunkt $(0;\ -e)$ als Anfangspunkt, der positiven x-Achse als Anfangslage ein.

Dann ist $r=\sqrt{y^2+(e+x)^2}$

und $x=r\cdot\cos u-e$.

Es ergibt sich also $r=\varepsilon(r\cdot\cos u-e)+a$

und daraus $r=\dfrac{a-\varepsilon e}{1-\varepsilon\cdot\cos u}$.

Andererseits ist $a-\varepsilon e=a-\dfrac{e^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}=p$,

wo p der Halbparameter (Nr. 11) ist, so daß sich also die Gleichung

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos u}\quad\text{ergibt.}$$

24. Brennpunktsgleichung der Hyperbel. Bei der Ableitung der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel im rechtwinkligen Koordinatensystem (Nr. 5) hatte sich die Beziehung

$$\pm a\sqrt{y^2+(e-x)^2}=xe-a^2$$

ergeben, woraus $\pm\sqrt{y^2+(e-x)^2}=\varepsilon x-a$

folgt. Wir führen nun ein Polarkoordinatensystem mit dem Brennpunkt $(0;\ +e)$ als Anfangspunkt, der positiven x-Achse als Anfangslage ein. Dann ist, da wir von r nur den absoluten Wert nehmen,

$$r=\sqrt{y^2+(e-x)^2}$$

und $x=r\cdot\cos u+e$.

Es ergibt sich also $r=\varepsilon(r\cdot\cos u+e)-a$

und daraus $r=\dfrac{\varepsilon e-a}{1-\varepsilon\cdot\cos u}$.

Andererseits ist $\varepsilon e-a=\dfrac{e^2}{a}-a=\dfrac{b^2}{a}=p$,

so daß sich wieder die Gleichung

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos u}\quad\text{ergibt.}$$

25. **Brennpunktsgleichung der Parabel.** Wir legen das Polarkoordinatensystem so, daß Anfangspunkt der Brennpunkt, Anfangslage die positive x-Achse wird. Dann folgt unmittelbar aus der Definition der Parabel

$$r = p + r \cdot \cos u$$

und also
$$r = \frac{p}{1 - \cos u}.$$

Auch diese Gleichung stimmt mit den in den vorangehenden Nummern hergeleiteten Gleichungen überein, da ja bei der Parabel $\varepsilon = 1$ ist. Man findet also als Brennpunktsgleichung aller drei Kegelschnitte in Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos u}}.$$

Konjugierte Durchmesser

26. In § 6, Nr. 36 wurde der Begriff der konjugierten Durchmesser von Kegelschnitten eingeführt und der Satz bewiesen: Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zum andern parallelen Sehnen. Wir wollen hier auch analytisch zeigen, daß der geometrische Ort der Mitten einer Schar paralleler Kegelschnittsehnen eine Gerade ist. Eine Ellipse oder Hyperbel habe die Gleichung

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2, \tag{1}$$

sie wird geschnitten von einer Schar von Geraden

$$y = m x + n, \tag{2}$$

wobei n veränderlich, m konstant gehalten wird. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$b^2 x^2 \pm a^2 (m^2 x^2 + 2 m n x + n^2) = a^2 b^2. \tag{3}$$

Die Schnittpunkte selbst kommen für unsere Aufgabe, die sich mit den Sehnenmitten beschäftigt, nicht in Betracht, nur die Größen

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Diese Koordinaten der Sehnenmitten lassen sich aber nach dem Lehrsatz von Vieta sofort aus der quadratischen Gleichung (3) herauslesen. Es wird

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \mp \frac{a^2 m n}{b^2 \pm a^2 m^2}; \tag{4}$$

nimmt man die Gleichung (2) der Sehne hinzu, so ergibt sich auch

$$y = \frac{b^2 n}{b^2 \pm a^2 m^2}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt als Gleichung des gesuchten Ortes

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Der Ort ist also ein Durchmesser mit dem Richtungsfaktor $\mp \frac{b^2}{a^2 m}$.

Folgerung. Geht ein Durchmesser durch den Punkt $(x_0; y_0)$, ist also sein Richtungsfaktor $m = \frac{y_0}{x_0}$, so lautet die Gleichung des konjugierten Durchmessers

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 0.$$

27. Wenn die Parabel mit der Gleichung

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

von einer Schar von Sehnen

$$(2) \qquad y = mx + n$$

geschnitten wird, so lautet die quadratische Gleichung, die die y-Koordinaten der Schnittpunkte gibt,

$$(3) \qquad y = m \cdot \frac{y^2}{2p} + n,$$

man erhält also für die Sehnenmitte den Wert

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}.$$

Das heißt aber, die Mitten der Sehnen haben sämtlich die konstante y-Koordinate $\frac{p}{m}$, liegen also auf einer Geraden im Abstand $\frac{p}{m}$ zur x-Achse. Die Gleichung dieser Geraden ist

$$y = \frac{p}{m}.$$

28. Beziehungen zwischen den Richtungen konjugierter Durchmesser. Ist m_1 der Richtungsfaktor eines Ellipsen- oder Hyperbeldurchmessers, dann ist $m_2 = \mp \frac{b^2}{a^2 m_1}$ der Richtungsfaktor des konjugierten Durchmessers. Es ist also

$$m_1 \cdot m_2 = \mp \frac{b^2}{a^2}.$$

Daraus folgt, daß der zu dem konjugierten Durchmesser konjugierte Durchmesser der ursprüngliche Durchmesser ist. Aus der Gleichung folgt weiter, daß m_1 und m_2 bei der Ellipse entgegengesetztes, bei der Hyperbel gleiches

Vorzeichen besitzen. Konjugierte Durchmesser werden also bei der Ellipse stets, bei der Hyperbel niemals durch die Hauptachsen getrennt.

Ist bei der Hyperbel $m_1 < \frac{b}{a}$, schneidet also der erste Durchmesser die Hyperbeläste, dann wird $m_2 > \frac{b}{a}$, d. h. der konjugierte Durchmesser schneidet die Hyperbel nicht. Die Asymptoten trennen also die konjugierten Durchmesser. Ist $m_1 = \frac{a}{b}$, so wird auch $m_2 = \frac{a}{b}$, d. h. die Asymptoten sind sich selbst konjugiert.

Ist α der Winkel zwischen zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse oder Hyperbel, dann findet man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\mp b^2 - m_1{}^2 a^2}{(a^2 \mp b^2) m_1}.$$

Aus dieser Beziehung kann man ablesen, wie sich α ändert, wenn sich m_1 ändert. Ist insbesondere $m_1 = 0$, dann wird $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, α also ein rechter Winkel. Ist andererseits $m_1 = \infty$, so wird wieder α ein rechter, wie schon aus der eben ausgesprochenen Wechselseitigkeit der Beziehung konjugierter Durchmesser folgt. Die Achsen sind also ein Sonderfall konjugierter Durchmesser.

29. Beziehungen zwischen Längen konjugierter Durchmesser. Es seien im Falle der Ellipse a_1 und b_1 die Hälften konjugierter Durchmesser, φ_1 und φ_2 die zugehörigen Winkel mit der positiven x-Achse. Dann folgt aus den Entwicklungen von Nr. 20

$$a_1{}^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cdot \cos^2\varphi_1}; \quad b_1{}^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cdot \cos^2\varphi_2}.$$

Nun ist $$\cos^2\varphi_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1} = \frac{1}{1 + m_1{}^2},$$

$$\cos^2\varphi_2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2} = \frac{1}{1 + \frac{b^4}{a^4 m_1{}^2}} = \frac{a^4 m_1{}^2}{a^4 m_1{}^2 + b^4}.$$

Daraus folgt nach einigen Umrechnungen, bei denen e^2 durch $a^2 - b^2$ ersetzt wird,

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2.$$

Im Falle der Hyperbel sei a_1 ein reeller Halbmesser, dann liefert die in Nr. 21 hergeleitete Formel

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos^2\varphi_2 - a^2}$$

nach den Erörterungen in Nr. 22 und 28 für den konjugierten Halbmesser r einen imaginären Wert. Wenn wir also

$$b_1{}^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cdot \cos^2\varphi_2}$$

setzen, so wird b_1 ein reeller Wert, den wir als Länge des konjugierten halben Durchmessers bezeichnen wollen. Wie oben folgt dann aus

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{e^2 \cos^2 \varphi_1 - a^2}; \quad b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi_2}$$

die Beziehung $$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Gleichungen der Kegelschnitte in schiefwinkligen Koordinaten

30. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse und der Hyperbel. Wir beziehen jetzt die Kegelschnitte auf ein von einem Paar konjugierter Durchmesser gebildetes schiefwinkliges Koordinatensystem. Wir behandeln zunächst Ellipse und Hyperbel. Wir gehen von der Mittelpunktsgleichung in rechtwinkligen Koordinaten aus:

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Die konjugierten Durchmesser mögen mit der x-Achse die Winkel φ_1 und φ_2 bilden. Dann haben wir nach § 7, Nr. 16 die neuen Koordinaten durch die Transformationsgleichungen

$$x = X \cdot \cos\varphi_1 + Y \cdot \cos\varphi_2,$$
$$y = X \cdot \sin\varphi_1 + Y \cdot \sin\varphi_2$$

einzuführen. Wir erhalten

$$(b^2 \cos^2\varphi_1 \pm a^2 \sin^2\varphi_1) X^2 + (b^2 \cos^2\varphi_2 \pm a^2 \sin^2\varphi_2) Y^2$$
$$+ 2(b^2 \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \pm a^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) X Y = a^2 b^2.$$

Der Faktor des dritten Gliedes wird Null, weil man (Nr. 28)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

in $$a^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \mp b^2 \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2$$

umschreiben kann.

Nach Nr. 20 und 21 ist $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u \pm a^2 \sin^2 u}$;

mithin ist $$b^2 \cdot \cos^2\varphi_1 \pm a^2 \cdot \sin^2\varphi_1 = \frac{a^2 b^2}{a_1^2},$$

$$b^2 \cdot \cos^2\varphi_2 \pm a^2 \cdot \sin^2\varphi_2 = \frac{a^2 b^2}{b_1^2}.$$

Die Gleichung der Ellipse und Hyperbel nimmt also die Gestalt an

$$\frac{X^2}{a_1^2} \pm \frac{Y^2}{b_1^2} = 1.$$

Damit erscheinen die in Nr. 2 und 5 aufgestellten Gleichungen nur als Sonderfälle — vgl. den Schluß von Nr. 28.

31. **Die Scheitelgleichung der Parabel.** Wir beziehen die Parabel auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, das von einer Tangente und der durch ihren Berührungspunkt gehenden Parallelen zur Hauptachse gebildet wird.

Wir hatten in Nr. 27 eine Parabel von einer Schar paralleler Sehnen mit dem Richtungsfaktor m geschnitten. Es ergab sich, daß die Sehnenmitten auf einer Parallelen zur Hauptachse lagen. Wir zeigen nun zunächst, daß die Tangente, die man im Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Parabel zieht, gleichfalls den Richtungsfaktor m hat. Wenn (x_0, y_0) der Schnittpunkt ist, so haben wir $y_0 = \frac{p}{m}$, also $m = \frac{p}{y_0}$. Andererseits folgt aus der Tangentengleichung der Parabel (Nr. 18) $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$ der gleiche Richtungsfaktor.

Wir gehen von der Scheitelgleichung in rechtwinkligen Koordinaten aus

$$y^2 = 2px.$$

Wir transformieren das Koordinatensystem zunächst in ein rechtwinkliges ξ-η-System mit $(x_0; y_0)$ als Anfangspunkt. Dann wird (§ 7, Nr. 13)

$$(\eta + y_0)^2 = 2p(\xi + x_0) \quad \text{oder} \quad \eta^2 + 2\eta y_0 = 2p\xi.$$

Wir führen jetzt ein schiefwinkliges X-Y-System ein, dessen eine Achse die Parallele zur Hauptachse, dessen andere Achse die Tangente ist. Dann ist in die Transformationsgleichungen (§ 7, Nr. 16) einzusetzen

$$\varphi_1 = 0; \quad \sin\varphi_1 = 0; \quad \cos\varphi_1 = 1;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{p}{y_0}; \quad \sin\varphi_2 = \frac{p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}; \quad \cos\varphi_2 = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$$

Sie lauten also $\xi = X + \frac{Y y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}, \quad \eta = \frac{Y p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$

Man erhält
$$\frac{Y^2 p}{y_0^2 + p^2} = 2X.$$

Setzt man hierin
$$\frac{y_0^2 + p^2}{p} = \frac{2px_0 + p^2}{p} = 2x_0 + p = p',$$

dann lautet die Gleichung $Y^2 = 2p'X.$

Man erkennt, daß die gewöhnliche Parabelgleichung (Nr. 8) als Sonderfall der soeben aufgestellten erscheint.

32. **Die Asymptotengleichung der Hyperbel.** Wir beziehen die Hyperbel auf ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem, das von den beiden Asymptoten gebildet wird. Damit ein Ast der Hyperbel im ersten Quadranten liegt, nehmen wir als X-Achse die Asymptote mit der Gleichung $y = -\frac{b}{a}x$, als Y-Achse die Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{b}{a}x$. Dann

erhält man für die Winkel φ_1 und φ_2 in den Transformationsgleichungen (§ 7, Nr. 16)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b}{a}; \quad \sin\varphi_1 = \frac{b}{e}; \quad \cos\varphi_1 = -\frac{a}{e};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{b}{a}; \quad \sin\varphi_2 = -\frac{b}{e}; \quad \cos\varphi_2 = -\frac{a}{e}.$$

Die Transformationsgleichungen lauten also

$$x = -(X + Y)\frac{a}{e},$$

$$y = (X - Y)\frac{b}{e}.$$

Setzt man das in $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ein, so folgt $$X \cdot Y = \frac{e^2}{4}.$$

Wir haben diese Gleichungsform für den Fall, daß die Hyperbel gleichseitig ist, bereits im Buch für Kl. 7—9 bei der Erörterung der Funktion $y = c \cdot x^{-1}$ kennengelernt.