

*Aufgabensammlung
und Leitfaden für*

ARITHMETIK

ALGEBRA

ANALYSIS

10.-12. SCHULJAHR

**Aufgabensammlung
und Leitfaden für Arithmetik,
Algebra und Analysis**

10. - 12. S C H U L J A H R



VOLK UND WISSEN VERLAGS GMBH • BERLIN/LEIPZIG

Lizenzausgabe des Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin/Leipzig
aus der B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Unveränderter Nachdruck der Auflage 1948

Bestell-Nr. 2021 4 DM (gbd.), 3,20 DM bei Lieferung über die Schule · 128.-139. Tausend

Lizenz-Nr. 334 · 1000/50-VIII-97/50

Satz: Leipziger Druckhaus, Leipzig (M 115)

Druck: G. Reichardt, Groitzsch, Bez. Leipzig (Bo 0180)

INHALTSÜBERSICHT

Aufgabensammlung

ERSTES KAPITEL

Arithmetische und geometrische Reihen und ihre Anwendungen

	Seite
§ 1. Arithmetische Reihen 1. Ordnung	1
§ 2. Arithmetische Reihen höherer Ordnung	7
§ 3. Endliche geometrische Reihen	11
§ 4. Unendliche geometrische Reihen	17
§ 5. Beziehungen zwischen arithmetischen und geometrischen Reihen	22
§ 6. Zinseszinsrechnung	23
§ 7. Rentenrechnung	27

ZWEITES KAPITEL

Komplexe Zahlen

§ 8. Vorübungen und einfachste Rechnungen mit imaginären und komplexen Zahlen	36
§ 9. Goniometrische Form der komplexen Zahlen. Moivrescher Lehrsatz	44
§ 10. Wiederholender Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen	50

DRITTES KAPITEL

Quadratische Gleichungen

§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten, die auf quadratische Gleichungen führen	58
§ 12. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten	60
§ 13. Anwendungen der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten	69

VIERTES KAPITEL

Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsrechnung

§ 14. Kombinatorik	77
§ 15. Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten	87
§ 16. Wahrscheinlichkeitsrechnung	92
§ 17. Versicherungsrechnung	98

FÜNFTES KAPITEL

Die rationalen ganzen und gebrochenen Funktionen

§ 18. Die rationale ganze Funktion 2. Grades	113
§ 19. Die rationale ganze Funktion 3. Grades	120
§ 20. Die Gleichung 3. Grades	125
§ 21. Anwendungen der kubischen Gleichungen	134
§ 22. Die rationale ganze Funktion 4. Grades und die Gleichung 4. Grades	139
§ 23. Die Wurzeln der Gleichung n ten Grades	144
§ 24. Differentiation rationaler ganzer Funktionen	148
§ 25. Angenäherte Bestimmung der reellen Wurzeln von Gleichungen	151
§ 26. Rationale gebrochene Funktionen	154

SECHSTES KAPITEL

Algebraische Funktionen

Seite

- § 27. Algebraische Funktionen; Funktionen von Funktionen; unentwickelte Funktionen 160
 § 28. Geometrische Anwendungen, insbesondere auf die Krümmung der Kurven . . . 166

SIEBENTES KAPITEL

Transzendente Funktionen

- § 29. Die trigonometrischen Funktionen 171
 § 30. Die zyklometrischen Funktionen 181
 § 31. Logarithmische Funktion und Exponentialfunktion 184

ACHTES KAPITEL

Unendliche Reihen. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

- § 32. Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen 190
 § 33. Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten 198
 § 34. Die Reihen der trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrungen 203
 § 35. Die Exponentialreihe und die logarithmische Reihe 208

NEUNTES KAPITEL

Integralrechnung

- § 36. Die Integration als Umkehrung der Differentiation 214
 § 37. Flächeninhalt und bestimmtes Integral 219
 § 38. Einige weitere Integrationsmethoden 226
 § 39. Anwendungen der Integralrechnung 229

ZEHNTES KAPITEL

Abbildungen durch Funktionen komplexer Veränderlicher

- § 40. Die lineare ganze Funktion 236
 § 41. Die lineare gebrochene Funktion 239

Leitfaden

- § 1. Arithmetische Reihen 1
 § 2. Geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung 4
 § 3. Komplexe Zahlen 14
 § 4. Quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten 28
 § 5. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung 36
 § 6. Versicherungsrechnung 44
 § 7. Die rationalen ganzen Funktionen 51
 § 8. Gleichungen 3. und n ten Grades 63
 § 9. Die rationalen gebrochenen Funktionen 72
 § 10. Algebraische Funktionen 76
 § 11. Transzendente Funktionen 81
 § 12. Unendliche Reihen. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen 88
 § 13. Integralrechnung 103
 § 14. Funktionen komplexer Veränderlicher 109

Arithmetische und geometrische Reihen und ihre Anwendungen

§ 1. Arithmetische Reihen 1. Ordnung

Begriff der arithmetischen Reihe

1. Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe heiße a , die Differenz d . Welchen Wert hat das 2. Glied, das 3., das 7., das k te Glied?
2. Sind u, v, w drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist $u - v = v - w$, also $v = \frac{u+w}{2}$. Wie kann man hiernach eine arithmetische Reihe definieren? (Benutze den Begriff des arithmetischen Mittels.)
3. a) Welche arithmetischen Reihen nennt man steigend, welche fallend? b) Wie sieht eine Reihe aus, bei der die Differenz d gleich 0 ist?
4. a) Das 1. Glied einer arithmetischen Reihe sei 1, die Differenz 2, die Anzahl der Glieder 10. Wie heißt die Reihe? b) Berechne durch möglichst zweckmäßige Addition die Summe aller Glieder.
5. Die beiden ersten Glieder einer arithmetischen Reihe sind:

a) 1 und 2,	b) 1 und 3,	c) 2 und 4,
d) 1 und -1 ,	e) 1 und -2 ,	f) -1 und $+1$,
g) $\frac{1}{2}$ und -1 ,	h) $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{4}$,	i) $0,1$ und $-0,2$,

 Gib jeweilig die nächsten drei Glieder an. k) a und b .
6. In einem in Kahun, südlich von der Pyramide von Illahun, gefundenen Papyrusfragment, das in das 2. Jahrtausend v. d. Ztr. gehört, findet sich eine 10gliedrige arithmetische Reihe, deren erste Glieder $13\frac{3}{4}$ und $12\frac{11}{12}$ lauten. Wie heißen die anderen Glieder?
7. Das Anfangsglied einer Reihe ist 0, die Differenz 5, das letzte Glied 30. Wie heißt die Reihe, wie viele Glieder hat sie, und wie groß ist die Summe aller Glieder?
8. Beantworte dieselben Fragen wie in Aufgabe 7 für eine Reihe mit dem Anfangsglied -10 , der Differenz 3, dem letzten Glied 17.
9. a-i) Gib eine graphische Veranschaulichung der in Aufgabe 5a bis i angegebenen arithmetischen Reihen in der Weise, daß du im Punkte 1 der x -Achse das 1. Glied, im Punkte 2 das 2. Glied, im Punkte 3 das 3. Glied usf.

(genauer: so viel Maßeinheiten, als jedes Glied anzeigt) senkrecht aufträgt. Was läßt sich über die Lage der Endpunkte der die einzelnen Glieder der Reihe darstellenden Strecken sagen?

10. a) Das 1. Glied einer Reihe ist 3, das 7. ist 6; b) das 1. ist 1, das 5. ist -5 . Bestimme die Zwischenglieder arithmetisch und graphisch.
11. a) Was ändert sich an der Differenz einer Reihe, wenn man die Gliederfolge umkehrt? b) Wie ändert sich das graphische Bild der Reihe?

Die Summe einer arithmetischen Reihe

12. Eine Reihe, in der das Anfangsglied a , die Differenz d , das Endglied z heißt, soll in umgekehrter Folge geschrieben werden; wie heißt in der neuen Reihe das Anfangsglied, das 2., das 3., das k te Glied, das Endglied?
13. Man addiere in einer n gliedrigen arithmetischen Reihe das 1. und n te Glied, dann das 2. und $(n-1)$ te, allgemein das k te und $(n-k+1)$ te Glied; welches Gesetz erkennt man?
14. Unter eine arithmetische Reihe schreibe man gliedweise die aus der ersten durch Umkehrung der Gliederfolge entstehende Reihe. a) Wie groß ist die Summe je zweier übereinanderstehender Glieder? b) Wie kann man hiermit die Summe der Reihe, d. h. die Summe aller Glieder bis zum n ten Gliede, bestimmen?
15. In welcher Weise kann man an der Hand der graphischen Veranschaulichung der arithmetischen Reihe den Wert der Summe ihrer Glieder durch den Flächeninhalt einer Figur veranschaulichen? Gib zu der in den Aufgaben 12 bis 14 gewonnenen arithmetischen Ableitung des Summenausdruckes die entsprechende geometrische Ableitung der Summenformel.

16. a) Leite an der Hand der Fig. 1 das von *Jamblichus* (Anfang des 4. Jahrhunderts n. d. Ztr.) gefundene Resultat ab, daß

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 + 9 + \dots + 3 + 2 + 1$$

gleich 10^2 ist. (Die Punkte sind in Parallelen zu einer Diagonale zusammenzufassen.)

b) Stelle in gleicher Weise a^2 als Summe einer mit 1 beginnenden und wieder mit 1 aufgehörenden Reihe dar.

17. a) Zeige an Fig. 1 dadurch, daß du erst einen Eckpunkt, dann die ihn umgebenden 3 Punkte, dann wieder die diese umgebenden 5 Punkte usf. zusammenfaßt, daß

$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 10^2$$

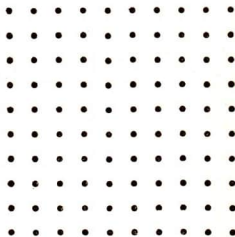


Fig. 1

ist. **b)** Zeige, daß sich allgemein jedes Quadrat einer ganzen Zahl als Summe einer mit 1 beginnenden Reihe der ungeraden Zahlen darstellen läßt. Wie heißt die letzte ungerade Zahl der Reihe?

18. Ist a das Anfangsglied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, z das Endglied und s die Summe der Reihe, so gelten die Formeln:

$$\text{I. } z = a + (n - 1) d,$$

$$\text{II. } s = \frac{(a + z) n}{2},$$

$$\text{III. } s = a n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d.$$

Leite die 3. der vorstehenden Formeln aus den Grundformeln I und II her.

19. Stelle für die Summe der Reihe eine Formel auf, in der die Anzahl der Glieder, die Differenz und das Endglied (n , d , z) vorkommen, und leite diese Formel auf doppelte Weise aus zwei der Formeln I, II und III der Aufgabe 18 her.
20. Wieviel Größen sind notwendig und hinreichend, um eine arithmetische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!)

Von einer arithmetischen Reihe¹⁾ sind

gegeben

gesucht

gegeben

gesucht

21.	n, z, s	a, d
22.	d, z, s	a, n
23.	d, n, s	a, z
24.	d, n, z	a, s
25.	a, z, s	d, n

26.	a, n, s	d, z
27.	a, n, z	d, s
28.	a, d, s	n, z
29.	a, d, z	n, s
30.	a, d, n	z, s

31. Warum führen Aufgabe 22 und 28 auf quadratische Gleichungen? (Achte auf die Grundformel II.) Warum genügt es zu wissen, daß Aufgabe 22 auf eine quadratische Gleichung führt, um schließen zu können, daß dies auch bei Aufgabe 28 zutrifft? (Achte auf die Gleichberechtigung von a und z ; Umkehrbarkeit einer Reihe.)

Beispiele

32. Wie heißt die n te ungerade Zahl, und wie groß ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen? Beispiel $n = 20^2$.
33. Wie heißt die n te gerade Zahl (0 nicht mitgerechnet), und wie groß ist die Summe der ersten n geraden Zahlen? Beispiel $n = 24$.

¹⁾ Zahlenbeispiele hierzu wähle man aus Aufgabe 42 bis 55.

²⁾ Die allgemeine Lösung der Aufgaben 32 bis 34 war schon den Pythagoräern im 6. und 5. Jahrhundert v. d. Ztr. bekannt. (Nach Theon von Smyrna, um 130 v. d. Ztr.)

34. Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen
a) von 1 bis 100, b) allgemein von 1 bis n ?
35. Wie groß ist die Summe aller dreiziffrigen Zahlen?
36. Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 13 bis 81?
37. Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen von 24 bis 98?
38. Wie groß ist die Summe aller durch 3 teilbaren Zahlen von 3 bis 99?
39. Wie groß ist die Summe aller durch 7 teilbaren Zahlen von 7 bis 343?
40. Wie groß ist die Summe aller durch p teilbaren Zahlen von p bis np ?
41. Wie groß ist die Summe aller durch k teilbaren Zahlen von nk bis mk ?

Betrachte in jeder der folgenden Aufgaben 42 bis 55 drei der Größen a , d , n , z , s als gegeben, die beiden anderen als gesucht. (Vgl. Aufgaben 21 bis 30.)

	a	d	n	z	s
42.	1	12	40	469	9400
43.	2	3	17	50	442
44.	21	-5	17	-59	-323
45.	$-37\frac{1}{2}$	4	22	$46\frac{1}{2}$	99
46.	29	$1\frac{1}{2}$	33	77	1749
47.	25	$-2\frac{1}{2}$	25	-35	-125
48.	-19	$1\frac{1}{2}$	29	23	58

	a	d	n	z	s
49.	5	$-3\frac{1}{2}$	13	-37	-208
50.	-4	$5\frac{1}{3}$	37	188	3404
51.	$-4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	20	100	955
52.	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	24	34	448
53.	60	$-1\frac{1}{4}$	21	35	$997\frac{1}{2}$
54.	5,2	0,4	43	22	584,8
55.	2,3	1,3	19	25,7	266

56. Zwischen je 2 Glieder der arithmetischen Reihe 1, 5, 9, 13 usw. sollen 5 Glieder so eingeschaltet werden, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht (*Interpolation*). a) Wie heißt die neue Reihe? b) Benutze die graphische Darstellung.
57. Zwischen je 2 Glieder der Reihe 2, 14, 26 usw. sollen 7 Glieder interpoliert werden. Wie heißen diese? (Graphische Darstellung!)
58. Zwischen a und b sollen n Größen interpoliert werden. a) Wie heißt die Differenz der entstehenden Reihe, und wie heißen die 3 ersten Glieder? – Man kann die Reihe auch über b hinaus fortsetzen (*Extrapolation*). b) Wie heißen die 3 nächsten auf b folgenden Glieder? c) Wie heißt das (n^2+n+1) te Glied der ganzen Reihe?
59. Das 7. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 10. Das 17. Glied heißt 50. Wie heißt das 1. Glied und die Differenz der Reihe? a) Arithmetisch, b) graphisch zu lösen!
60. Das 11. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 47, das 19. Glied 75. Wie heißt das 283. Glied?

61. Die Summe des 4. und 7. Gliedes einer arithmetischen Reihe ist 100, die Summe des 17. und 29. Gliedes ist 800. Wie heißt die Reihe?
62. Die Summe der 37 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe ist 888, die Differenz zwischen dem 13. und 31. Gliede 126. Wie heißt das 1. Glied und die Differenz der Reihe?
63. Zwei Reihen sind gegeben: Die eine hat das Anfangsglied 1 und als 7. Glied 4, die andere hat das Anfangsglied 11 und als 6. Glied 1. Bestimme graphisch, welches Glied beide Reihen *gemeinsam* haben (gemeinsam heißt ein in 2 Reihen vorkommendes Glied, das in beiden Reihen an gleicher Stelle steht).
- 64.¹⁾ Wie groß ist die Anzahl der Glieder und das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, deren 1. Glied -7 , deren Differenz 3 und deren Summe 430 ist? (Andere Zahlenbeispiele sind aus der letzten Tabelle – Aufgabe 42 bis 55 – zu entnehmen.)
65. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 97, die Differenz 3, die Summe 1612. Wie groß ist das 1. Glied und die Anzahl der Glieder? (Andere Zahlenbeispiele sind aus der letzten Tabelle – Aufgabe 42 bis 55 – zu entnehmen.)
66. In einer arithmetischen Reihe von 20 Gliedern ist das Produkt der beiden mittleren Glieder 725, die Summe des 3. und 12. Gliedes gleich 30. Wie heißt das 1. Glied und die Differenz der Reihe?
67. In einer arithmetischen Reihe von 10 Gliedern ist die Summe aller Glieder 65, die Summe ihrer Quadrate 1165. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz?
68. In einer arithmetischen Reihe von 14 Gliedern ist das Produkt des 1. und letzten Gliedes 276, das Produkt der beiden mittleren Glieder 1326. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz?
69. In einer arithmetischen Reihe von 100 Gliedern ist die Summe aller Glieder 8200, das Produkt der beiden mittleren Glieder 6723. Wie groß ist das 1. Glied und die Differenz?
70. Welche positive ganze Zahl ist gleich der Summe aller vorhergehenden ganzen Zahlen?
71. Welche positive ganze Zahl ist a) gleich dem 10. Teil, b) gleich dem k ten Teil der Summe aller vorhergehenden ganzen Zahlen?

Anwendungen

72. Wieviel Schläge tut eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie nur ganze Stunden schlägt?
73. Wieviel Schläge tut eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie außer den ganzen Stunden auch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ Stunden (durch 1, 2, 3 Schläge) anzeigt?

¹⁾ Die Aufgaben 64 bis 71 führen auf quadratische Gleichungen.

74. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
75. Ein Angestellter erhält ein Jahresgehalt von 3000 RM und soll nach Ablauf jedes Jahres 30 RM Zulage erhalten. a) Wie hoch beläuft sich sein Gehalt nach 10 Jahren? b) Wieviel Gehalt hat er in 10 Jahren insgesamt erhalten?
76. Ein Angestellter hat ein Jahresgehalt von 3600 RM und erhält jedes Jahr eine Zulage von 240 RM. Zugleich wachsen seine Ausgaben. Bis jetzt ist er mit 3000 RM jährlich ausgekommen, von nun an verbraucht er in jedem Jahr 300 RM mehr als im vorhergehenden. In welchem Jahr werden seine Ausgaben das ganze Gehalt in Anspruch nehmen, und wie hoch ist dann das Gehalt?
77. Jemand setzt beim Spiel erst 1 RM und verliert, dann 2 RM, 3 RM usw., jedesmal 1 RM mehr. Beim wievielten Spiele erhält er im Fall des Gewinnes all sein Geld wieder, wenn die Bank den zehnfachen Satz auszahlt?
78. Jemand wollte 1000 RM unter 16 Personen in der Weise verteilen, daß jede folgende immer 5 RM mehr erhielt als die vorhergehende. Wieviel erhielt die erste und wieviel die letzte?
79. A macht mit B eine Wette. A will nach einem 6000 Schritt entfernten Orte hin- und zurückgehen, bevor B 200 Äpfel in einen Korb gesammelt hat. Die Äpfel sollen in einer Reihe liegen, jeder von dem andern einen Schritt entfernt, und sollen einzeln herangeholt und einzeln in den Korb gelegt werden. Der Korb steht beim 1. Apfel. A soll ebenso schnell gehen wie B. Wer gewinnt die Wette?

Aufgaben aus der Physik

80. Eine Luftpumpe, deren Rezipient 1000 ccm faßt, und deren Stiefel einen freien Rauminhalt von 200 ccm hat, ist zugleich als Kompressionspumpe zu gebrauchen. Wie stark ist der Druck der komprimierten Luft nach 10 Kolbenstößen, wenn anfangs Atmosphärendruck herrschte?
81. Wieviel Kolbenstöße sind erforderlich, um eine Kompression von 2 Atmosphären mit einer Pumpe herbeizuführen, deren Rezipient 1200 ccm faßt, während der Stiefel (ohne den Raum für den Kolben) 150 ccm Rauminhalt hat?
82. Welche Größe hat in einer Kompressionspumpe der vom Kolben freigelassene Raum des Stiefels, wenn das Manometer des Rezipienten, der 0,8 l faßt, nach 10 Kolbenstößen einen Druck von $2\frac{1}{2}$ Atmosphären anzeigt?
83. Nach den Gesetzen der Physik fällt ein Körper im luftleeren Raum in der 1. Sekunde ungefähr 4,9 m, in jeder folgenden immer 9,8 m mehr als in der vorhergehenden. Welchen Raum durchfällt danach ein Körper in 12 Sekunden, und wieviel Meter in der 12. Sekunde?

84. Wieviel Meter fällt nach der vorigen Aufgabe ein Körper in einer halben Minute, und wieviel in der 30. Sekunde?
85. In wieviel Sekunden wird unter den in Aufgabe 83 angegebenen Bedingungen ein Körper einen Raum von 490 m durchfallen?

Aufgaben aus alter Zeit

Aus dem *Papyrus Rhind des Achmes* (um 1700 v. d. Ztr.):

86. 10 Maß Getreide unter 10 Personen so zu verteilen, daß jede folgende Person $\frac{1}{8}$ Maß weniger erhält als die vorhergehende.
87. 100 Brote sollen an 5 Personen so verteilt werden, daß die Anteile eine arithmetische Reihe bilden und die beiden geringsten Anteile zusammen $\frac{1}{7}$ der Summe der drei anderen Anteile ausmachen.

Aus dem (indischen) Rechenbuche von *Bakhshali* (300 bis 400 n. d. Ztr.):

88. Ein Reisender legt am 1. Tage 2 (a_1) Wegeeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 3 (d_1) mehr. Ein zweiter Reisender legt am 1. Tage 3 (a_2) Wegeeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 2 (d_2) mehr. Wann holt der erste den zweiten ein?

Aus *Diophants* Schrift über die Polygonalzahlen (um 300 n. d. Ztr.):

89. Beweise folgenden Satz: Sind p , q , r drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist $p^2 + 8qr = (2q + r)^2$.

Aus der Abhandlung „Anaphorikos“ von *Hypsikles* (um 170 v. d. Ztr.):

90. Beweise, daß in einer arithmetischen Reihe von gerader Gliederzahl die Summe der 2. Hälfte der Glieder die der 1. Hälfte um ein Vielfaches des Quadrats der halben Gliederzahl übertrifft.

Nach *Heron* von Alexandria (1. Jahrh. v. d. Ztr.):

91. Ein Amphitheater von n Sitzreihen hat in der untersten Reihe a Sitze, in der obersten Reihe z Sitze. Wieviel Personen faßt das Amphitheater?

§ 2. Arithmetische Reihen höherer Ordnung

Begriff der arithmetischen Reihen höherer Ordnung

Es sei eine beliebige Reihe

$$a, b, c, d, e \text{ usw.}$$

gegeben. Subtrahiert man jedes Glied dieser Reihe von dem darauffolgenden, so entsteht eine neue Reihe

$$b - a, c - b, d - c, e - d \text{ usw.,}$$

die man die 1. Differenzenreihe der ursprünglichen Reihe nennt.

Eine arithmetische Reihe 2. Ordnung ist eine Reihe, deren 1. Differenzenreihe eine arithmetische Reihe 1. Ordnung ist. Zum Beispiel hat die Reihe

$$1, 3, 8, 16, 27, \dots$$

als 1. Differenzenreihe:

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

1. a) Prüfe in der gleichen Weise, ob die Reihe

$$-6, -4, 4, 18, 38, \dots$$

eine arithmetische Reihe 2. Ordnung ist. b) Wie würde das 6. Glied dieser Reihe heißen?

2. Bildet man von der 1. Differenzenreihe abermals die Differenzenreihe, so entsteht eine neue Reihe, die man als die 2. Differenzenreihe der ursprünglichen Reihe bezeichnet. Entsprechend erklärt man die 3., 4., n te Differenzenreihe der gegebenen Reihe. a) Wie ist die 2. Differenzenreihe einer arithmetischen Reihe 2. Ordnung beschaffen? b) Wie kann man entsprechend der arithmetischen Reihen der 3., 4., n ten Ordnung definieren?
3. Kann man bei einer arithmetischen Reihe 2. Ordnung auch von einer 3. und 4. Differenzenreihe sprechen? Welchen Wert würden die Glieder dieser Reihe haben?
4. Wie sehen bei einer arithmetischen Reihe der n ten Ordnung die $(n+1)$ te Differenzenreihe und die folgenden Differenzenreihen aus?
5. Eine arithmetische Reihe 2. Ordnung habe das Anfangsglied $a_0=7$, ihre 1. Differenzenreihe beginne mit $a_1=5$, ihre 2. Differenzenreihe mit $a_2=3$. Gib an, wie die weiteren Glieder der 2. Differenzenreihe heißen, und bilde 8 Glieder der Hauptreihe.
6. Für eine arithmetische Reihe 3. Ordnung seien bei entsprechender Bezeichnung wie in Aufgabe 5 die Größen $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$ gegeben. Wie lauten die 7 ersten Glieder der Reihe?
7. Bilde die 9 ersten Glieder der Reihe 4. Ordnung, für die $a_0=1$, $a_1=15$, $a_2=50$, $a_3=60$, $a_4=24$ ist.
8. Von welcher Ordnung sind folgende arithmetische Reihen, und wie heißen die nächsten 5 Glieder?
- a) $-17, -8, +1, +10, +19, \dots$
 b) $-4, -3, 0, 8, 24, \dots$
 c) $1, -5, -9, -5, +13, \dots$
 d) $8, 10, 4, -5, -12, \dots$
 e) $11, 8, 0, -12, -25, -34, \dots$

9. Bilde die Reihe der Quadratzahlen bis zu 10^2 . a) Prüfe zunächst an den Differenzenreihen die Art dieser Reihe. b) Beweise das Ergebnis von a) allgemein an drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen $(n-1)^2$, n^2 , $(n+1)^2$ oder p^2 , $(p+1)^2$, $(p+2)^2$.
10. Löse die vorige Aufgabe entsprechend für die Kubikzahlen.
11. Bilde die ersten 10 Glieder der arithmetischen Reihen, deren allgemeine Glieder sind:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n-1, & \text{b) } n^2-1, \\ \text{c) } \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, & \text{d) } n^2-n+1, \\ \text{e) } \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{array}$$

12. Bilde die arithmetische Reihe 2. Ordnung, bei der $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=1$ ist, und untersuche an Fig. 2, mit welchem Rechte man die erhaltenen Zahlen als *Dreieckszahlen* bezeichnet. Gib das n te Glied der Reihe an.

Löse dieselbe Aufgabe für

	a_0	a_1	a_2
13.	1	3	2
14.	1	4	3
15.	1	5	4
16.	1	$p-1$	$p-2$

(*Viereckszahlen*, vgl. Fig. 3).

(*Fünfeckszahlen*, vgl. Fig. 4).

(*Sechseckszahlen*, vgl. Fig. 5).

(*p-Eckszahlen*).



Fig. 2

Die so erhaltenen Zahlen führen auch den gemeinsamen Namen *Polygonalzahlen*.



Fig. 3

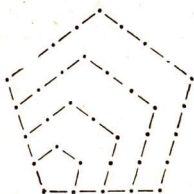


Fig. 4

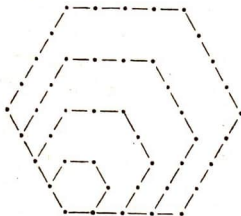


Fig. 5

Summe arithmetischer Reihen höherer Ordnung

17. Setze in der identischen Gleichung

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$

für n der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ und addiere die erhaltenen Gleichungen. Beweise durch passende Umformung des Ergebnisses, daß

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ist (*Archimedes*).

18. Zeige in entsprechender Weise unter Benutzung der Formel für
- $(n-1)^4$
- , daß sich für die Summe der
- n
- ersten Kubikzahlen

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

ergibt (*Nikomachus*, etwa 100 n. d. Ztr.).

19. Setze in dem allgemeinen Gliede einer arithmetischen Reihe 2. Ordnung

$$z_n = A + Bn + Cn^2$$

für n der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \dots, n$, addiere die erhaltenen Gleichungen und benutze die in Aufgabe 17 hergeleitete Formel für die Summe der Quadratzahlen; dann erscheint die Summenformel der arithmetischen Reihen 2. Ordnung¹⁾ in folgender Form

$$s_n = \mathfrak{A}n + \mathfrak{B}n^2 + \mathfrak{C}n^3.$$

Drücke die Koeffizienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ durch a_0, a_1, a_2 aus!

Anleitung: Die Koeffizienten hängen nur von a_0, a_1, a_2 ab, sind also für alle Werte von n konstant. Es genügt also, für n nacheinander 3 verschiedene Werte (etwa 1, 2, 3) und für z_n die entsprechenden Werte $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + 2a_1 + a_2)$ zu setzen, um 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zu erhalten.

20. In einer Kegelbahn sind Kugeln in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet. In den Seiten der Dreiecke, welche die einzelnen Kugelschichten bilden, liegen der Reihe nach
- $1, 2, 3, 4 \dots$
- Kugeln, in der Seite der untersten Schicht
- n
- Kugeln. Wieviel Kugeln liegen in jeder einzelnen Schicht, wieviel in der untersten Schicht, wieviel der Reihe nach in den einzelnen oben abgeschnittenen Pyramiden und wieviel in der ganzen Pyramide! (Beispiel:
- $n = 10$
- .)

¹⁾ Der erste, der Summenformeln für arithmetische Reihen höherer Ordnung – freilich auf empirischem Wege – aufstellte, war *Johann Faulhaber* von Ulm (Anf. des 17. Jahrh.). Unabhängig von ihm hat *Fermat* 1636 die Reihen beliebiger Potenzen der ganzen Zahlen summieren gelehrt (n:lt Beweis).

§ 3. Endliche geometrische Reihen

Begriff der geometrischen Reihe

1. Es sei a das Anfangsglied, q der Quotient einer geometrischen Reihe; wie lautet das 2., das 3., das 6., das n te Glied? (Beispiel: $a=3$, $q=2$, $n=10$.)
2. Wie groß ist der Quotient und das n te Glied der Reihe:
 - a) 2, 6, 18, 54, ...
 - b) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...
 - c) 1, -3, 9, -27, ...?
3. a) Es seien u , v , w drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Reihe; drücke v durch u und w aus. b) Wie kann man hiernach eine geometrische Reihe definieren?
4. a) Was ist eine steigende, was eine fallende geometrische Reihe? b) Wie ist eine Reihe beschaffen, bei der $q=1$ ist, c) bei der $q=-1$ ist?
5. Wie ändert sich der Quotient einer Reihe, wenn man ihre Glieder in umgekehrter Folge schreibt?
6. Die beiden ersten Glieder einer geometrischen Reihe sind:

a) 1 und 2,	b) 1 und 3,	e) 2 und 4,
d) 1 und -1,	e) 1 und -2,	f) $\frac{1}{2}$ und 1,
g) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$,	h) 3 und 4,	i) 1 und 0,1,

 Gib jeweilig die 3 nächsten Glieder und k) a und b .
das n te Glied an.
7. Gib eine Veranschaulichung des Wachstums der Glieder einer geometrischen Reihe in der Weise, daß du im Punkte 1 der x -Achse das 1. Glied, im Punkte 2 das 2. Glied usf. (genauer: so viel Maßeinheiten, wie jedes Glied anzeigt) senkrecht aufträgst. Was läßt sich über die Lage der Endpunkte der die einzelnen Glieder der Reihe darstellenden Strecken sagen, wenn a) der Quotient >1 (Aufgabe 6a, b, c, f, h als Beispiel), b) der Quotient ein positiver echter Bruch (Aufgabe 6g und i als Beispiel), c) eine negative Zahl (Aufgabe 6e als Beispiel), d) -1 oder $+1$ ist (Aufgabe 6d)?

Die Summe der geometrischen Reihe

8. a) Welche neue Reihe erhält man dadurch, daß man alle Glieder der in Aufgabe 1 bezeichneten Reihe mit q multipliziert? b) Die Summe der ursprünglichen n gliedrigen Reihe heiße s , welchen Wert hat dann die Summe der neuen Reihe?

9. Welche Gleichung für s erhält man, wenn man die Summe der ursprünglichen Reihe von der Summe der durch die Multiplikation mit q gewonnenen Reihe abzieht?
10. Ist a das 1. Glied einer geometrischen Reihe, q der Quotient, z das n te Glied und s die Summe aller Glieder bis zum n ten Glied, so gelten die folgenden Formeln:

$$\text{I. } z = a \cdot q^{n-1},$$

$$\text{II. } s = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

$$\text{III. } s = \frac{qz - a}{q - 1} = \frac{a - qz}{1 - q}.$$

- a) Leite die Formel III aus den Grundformeln I und II her. b) Welche der Summenformeln II und III wird man für steigende, welche für fallende Reihen anwenden?
11. Wie viele Größen sind notwendig und hinreichend, um eine geometrische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!)
Von einer geometrischen Reihe sind

gegeben¹⁾

gesucht

12.	n, z, s	a, q
13.	q, z, s	a, n
14.	q, n, s	a, z
15.	q, n, z	a, s
16.	a, z, s	q, n

gegeben

gesucht

17.	a, n, s	q, z
18.	a, n, z	q, s
19.	a, q, s	n, z
20.	a, q, z	n, s
21.	a, q, n	z, s

Die Aufgaben 13 bis 16 und 18 bis 21 führen auf einfache algebraische oder Exponentialgleichungen, dagegen die Aufgaben 12 und 17 auf höhere, mit elementaren Mitteln im allgemeinen nicht lösbare Gleichungen. Warum genügt es zu wissen, daß Aufgabe 12 auf eine höhere Gleichung führt, um dasselbe auch für Aufgabe 17 schließen zu können? (Achte auf die Gleichberechtigung von a und z ; Umkehrbarkeit der Reihe!)

22. a) Zeige mit Hilfe der Formel II in Aufgabe 10 (was man sonst auch ohne weiteres erkennt), daß in der Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \dots$$

die Summe aller Glieder bis zu einem geradem Stellenzeiger gleich 0, dagegen bis zu einem ungeradstelligen Gliede gleich a ist.

b) Warum kann man für eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern die Formel II nicht mehr anwenden?

¹⁾ Zahlenbeispiele hierzu wähle man aus Aufgabe 23 bis 45.

Beispiele

Betrachte in jeder der folgenden Aufgaben 23 bis 45 drei der Größen a , q , n , z , s als gegeben, die beiden anderen als gesucht. (Vgl. Aufgabe 12 bis 21 und die Bemerkungen betr. Aufgabe 12 und 17.)

	a	q	n	z	s
23.	2	3	15	9565938	14348906
24.	4	5	9	1562500	1953124
25.	1	7	9	5764801	6725601
26.	4	6	11	241864704	290237644
27.	1	-2	19	262144	174763
28.	1	-2	20	-524288	-349525
29.	32	$2\frac{1}{2}$	6	3125	5187
30.	512	$2\frac{1}{2}$	10	1953125	3254867
31.	$\frac{1}{9}$	3	10	2187	$3280\frac{4}{9}$
32.	$\frac{1}{64}$	2	13	64	$127\frac{63}{64}$
33.	2187	$\frac{2}{3}$	12	$25\frac{23}{81}$	$6510\frac{35}{81}$
34.	1024	$1\frac{1}{2}$	13	$132860\frac{1}{4}$	$396532\frac{3}{4}$
35.	2187	$1\frac{1}{3}$	10	$29127\frac{1}{9}$	$109947\frac{4}{9}$
36.	0,0256	-2,5	8	-15,625	-11,1534
37.	0,0256	-2,5	9	39,0625	27,9091
38.	6,25	0,4	7	0,0256	10,3996
39.	25600	0,5	13	6,25	51193,75
40. ¹⁾	100	1,04	10	142,33	1200,61
41. ¹⁾	500	0,6	17	0,14106	1249,79
42. ¹⁾	100	$\frac{7}{8}$	31	1,8207	787,26
43. ¹⁾	10	$\frac{181}{121}$	41	239,57	3017,39
44. ²⁾	2	1,22862	20	100	528,659
45. ²⁾	1	1,33352	25	1000	3995,310

¹⁾ Die Werte für z und s sind abgerundet.

²⁾ Die Werte für q und s sind abgerundet.

Wie groß ist die Summe der geometrischen Reihen:

46. $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1,$

47. $a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \dots + b^{10},$

48. $a^7 - a^6 b + a^5 b^2 - a^4 b^3 + \dots - b^7,$

49. $a^{20} - a^{19} b + a^{18} b^2 - a^{17} b^3 + \dots + b^{20},$

50. $a + \sqrt[5]{a^4 b} + \sqrt[5]{a^3 b^2} + \dots + b,$

51. $a + \sqrt[7]{a^6 b} + \sqrt[7]{a^5 b^2} + \dots + b,$

52. $\sqrt[8]{a^7} + \sqrt[8]{a^6 b} + \sqrt[8]{a^5 b^2} + \dots + \sqrt[8]{b^7}?$

53. In einer geometrischen Reihe von 20 Gliedern ist die Summe der geradstelligen Glieder gleich a , die Summe der ungeradstelligen gleich b . Wie heißt das 1. Glied und der Quotient der Reihe?
54. In einer geometrischen Reihe von 40 Gliedern ist die Summe der ersten 20 Glieder gleich a , die Summe der letzten 20 gleich b . Wie groß ist das 1. Glied und der Quotient?
55. In einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern ist die Summe des 1. und letzten Gliedes gleich a , die Summe der mittleren Glieder gleich b . Wie heißt das 1. Glied und der Quotient?
56. In einer geometrischen Reihe von 3 Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich a , die Summe ihrer Quadrate gleich b . Wie heißt das 1. Glied und der Quotient?
57. Wie lautet die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Reihe aus 4 Gliedern besteht?

Interpolationen

58. Zwischen je 2 Glieder der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 usw. ist noch 1 Glied einzuschalten, so daß wieder eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet die neue Reihe?
59. Zwischen 1 und 7 sollen 6 Zahlen eingeschaltet werden, so daß eine geometrische Reihe von 8 Gliedern entsteht. Welchen Wert hat der Quotient der Reihe?
60. Zwischen a^8 und b^8 sollen 7 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet diese Reihe?
61. Zwischen a und b sollen 5 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet diese Reihe?

62. Zwischen a und $2a$ sollen 11 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. (Chromatische Tonleiter bei der gleichschwebenden Temperatur.)
63. Bestimme das Intervall der Quinte in der gleichschwebenden Temperatur und vergleiche es mit dem Intervall der reinen Quinte, indem du den 1. Wert durch den 2. dividierst.
64. Untersuche ebenso das Intervall a) der Quarte, b) der großen Terz, c) der kleinen Terz, d) der Sexte, e) der verminderten Sexte.
65. Welches von den in den beiden letzten Aufgaben genannten Intervallen erfährt durch die gleichschwebende Temperatur die stärkste Veränderung gegen die reine Stimmung?
66. Bei welchem Intervall wird durch die gleichschwebende Temperatur die Reinheit am wenigsten beeinträchtigt?

Anwendungen

67. Nach einem Berichte des arabischen Geschichtsschreibers Ja'qūbi erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Belohnung die Summe der Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts 1 Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4 usw., auf jedes folgende der 64 Felder immer doppelt soviel als auf das vorhergehende. Das Wievielfache von ihrer wirklichen Größe müßte die Erdoberfläche haben, um die Weizenmenge zu liefern, wenn man die Erde als eine vollkommene Kugel von 6370000 m Radius annimmt, deren Oberfläche ein einziges Weizenfeld vorzüglichster Art mit einem Ertrage von 40 hl auf das Hektar bildete, das hl zu 1 600 000 Körner gerechnet?
68. Jemand erzählt eine Neuigkeit zwei Bekannten, von diesen erzählt jeder es wieder zwei Bekannten usw. Man nehme an, daß das Weitererzählen jeweilig in der nächsten Viertelstunde geschieht, daß außerdem die Neuigkeit stets anderen Menschen, die von ihr nichts wissen, auf diese Weise mitgeteilt wird. Wann würden alle in Groß-London wohnenden 7 Millionen Einwohner die Neuigkeit wissen, wenn sie früh um 7 Uhr die Runde zu machen beginnt?
69. Durch die Spektralanalyse ist $\frac{1}{8\,000\,000}$ eines Milligramms Kochsalz noch mit Sicherheit nachweisbar. Wie winzig diese Menge ist, soll das Folgende lehren: Von Steinsalz (Wichte $2,28 \text{ g/cm}^3$) ist bei Zimmertemperatur 1 Gewichtsteil in 2,8 Gewichtsteilen Wasser löslich; von einer so konzentrierten Lösung nehme man 1 cm^3 (d.i. etwa einen halben Fingerhut voll) und mische dies mit 1 l reinen Wassers. Von der Mischung nehme man wieder 1 cm^3 und verdünne es noch einmal mit 1 l reinen Wassers. Prüfe, ob bei dieser Verdünnung ein Flüssigkeitströpfchen, das man zu etwa 1 mm^3 rechnen kann, die oben genannte Menge Salz enthält. Wie oft müßte man die Verdünnung vornehmen, damit 1 cm^3 der Flüssigkeit ungefähr jene kleine Menge Salz enthielte?

70. Ein Spieler, der 1000 RM bei sich hat, setzt den 10. Teil seiner Barschaft, verliert, setzt den 10. Teil des ihm verbliebenen Geldes usw.; nachdem er 5 mal hintereinander verloren hat, setzt er seine gesamte Barschaft ein und gewann. Wieviel beträgt sein Gewinn, wenn die Bank den 3fachen Satz auszahlt?
71. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
72. Es erbot sich jemand, 20 große Holzblöcke zu spalten, wenn ihm als Spaltlohn für den ersten Block 1 Rpf., für den zweiten 2 Rpf., für den dritten 4 Rpf. usw., immer für jeden Block doppelt soviel als für den vorhergehenden, bezahlt würde. Was hätte er im ganzen erhalten, und wieviel durchschnittlich für das Spalten des einzelnen Blocks?
73. Jemand erklärte sich bereit, 22 abgebrannte Scheunen recht gut wieder aufbauen zu lassen, wenn man ihm für die erste 1 RM, für die zweite 2 RM, für die dritte 4 RM und so für jede folgende doppelt soviel als für die vorhergehende geben wollte. Konnte man darauf eingehen? Was hätte man ihm im ganzen zahlen müssen, und wieviel für eine Scheune im Durchschnitt?
74. In einem Gefäß sind 20 l Wein. Jemand füllt 1 l ab und gießt dafür 1 l Wasser hinzu, füllt wieder 1 l der Mischung ab und gießt dafür 1 l Wasser hinzu usw. Wieviel Liter des ursprünglichen Weins sind noch in dem Gefäß, nachdem 10 mal abgefüllt worden ist?
75. Ein Gefäß von 50 l Inhalt ist mit 80prozentigem Spiritus gefüllt. Wieviel Liter an reinem Spiritus sind noch in dem Gefäß, wenn man 20 mal 1 l der vorhandenen Flüssigkeit ausgeschöpft und dafür jedesmal 1 l Wasser hineingegossen hat? (Von den durch die chemischen Vorgänge bedingten Volumänderungen soll abgesehen werden.)
76. An 1250 l 80prozentigen Alkohols wird eine 3malige Verdünnung in der Weise vorgenommen, daß jedesmal die Hälfte der Flüssigkeit abgezapft und durch Wasser ersetzt wird. Wieviel Liter reinen Alkohols sind zuletzt noch vorhanden?
77. Wie groß ist beim Auspumpen die Dichte in dem Rezipienten einer Luftpumpe nach 20 Kolbenzügen, wenn der Rezipient (nebst dem Verbindungskanal) 30 dm^3 , der Stiefel, den Raum für den Kolben abgerechnet, 6 dm^3 hält und anfangs im Rezipienten Atmosphärendruck herrschte?
78. Wie wird das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn man statt der Zahlen 30, 6 und 20 die allgemeinen Zahlen a , b und n setzt?
79. Der Rezipient einer Luftpumpe enthalte 40 dm^3 , der Stiefel (ohne den Raum für den Kolben) 5 dm^3 . Nach wieviel Kolbenzügen wird die Luft im Rezipienten nur noch $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Dichte betragen?

7. Erkläre an der Figur, warum man eine solche Reihe „konvergent“ nennt.
8. Definiere (nach Aufgaben 6 und 7) eine konvergente Reihe.
9. Gib unter Benutzung von Aufgabe 4, 7 und 8 an, für welche Werte des Quotienten die unendliche geometrische Reihe konvergent bzw. divergent ist.
10. Welchem Grenzwerte nähert sich in dem Falle $q < 1$ die Potenz q^n , wenn n unbegrenzt wächst? (Vgl. die graphische Darstellung der Exponentialfunktion, 7.–9. Schuljahr § 43, Aufgabe 7.)
11. Beweise hieraus und aus § 3, Aufgabe 10, Formel II, daß die Summenformel für die unendliche konvergente geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede a und dem Quotienten q lautet:

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

12. Drücke a durch s und q aus.
13. Drücke q durch a und s aus.
14. Wie viele Größen sind notwendig und hinreichend, um eine unendliche konvergente geometrische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!)

Beispiele

15. Berechne die Summe der unendlichen geometrischen Reihe:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

Betrachte in jeder der folgenden Aufgaben 16 bis 25 zwei der Größen a , q , s als gegeben, die dritte als gesucht.

	a	q	s
16.	7	$\frac{1}{2}$	14
17.	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
18.	5	$\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{2}$
19.	14	$-\frac{2}{5}$	10
20.	12	0,2	15

	a	q	s
21.	117	-0,3	90
22.	10	0,96	250
23.	0,88	-0,76	0,5
24.	0,94	0,53	2
25.	1,32	-0,1	1,2

26. Wie groß sind Anfangsglied und Quotient der unendlichen konvergenten geometrischen Reihe, deren Summe den Wert $\frac{1}{2-y}$ hat, und welchen Wert darf y nicht überschreiten, wenn der vorstehende Bruch als eine solche Reihensumme darstellbar sein soll?

¹⁾ Bei dieser Reihe ist zum ersten Male das Problem, eine unendliche Reihe zu summieren, aufgetreten und von Archimedes (287–212 v. d. Ztr.) bei Gelegenheit der Parabelquadratur gelöst worden.

Beantworte die in Aufgabe 26 gestellten Fragen für die Brüche

$$27. \frac{1}{5+2y}.$$

$$28. \frac{3}{4+y}.$$

$$29. \frac{5}{3-7y}.$$

30. Wie kann man die Glieder der Reihen

a) $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \dots,$

b) $x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6 + \dots$

zusammenfassen, um zu erkennen, daß es geometrische Reihen sind? Bestimme Anfangsglied und Quotienten!

31. Fasse in der unendlichen Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ je 2 Glieder zusammen und beweise durch Aussonderung des diesen Gliedern gemeinschaftlichen Faktors die Richtigkeit der Gleichung

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = (1+x)(1+x^2+x^4+\dots).$$

32. Verfahre ebenso mit

a) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots,$

b) $1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots.$

33. Verwandle durch fortgesetzte Anwendung des Verfahrens in Aufgabe 31 und 32a, b die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \dots$ in ein „unendliches Produkt“, d. h. in ein Produkt von unendlich vielen Faktoren.

34. Welchen Wert darf x nicht übersteigen, wenn dieses Produkt einen bestimmten Wert besitzen soll?

35. Nenne die Wertgrenze, der sich jeder weitere Faktor des vorstehend erhaltenen Produkts immer mehr nähert und nähern muß.

36. Verwandle in ein unendliches Produkt die unendliche Reihe

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots.$$

37. Verwandle in unendliche Produkte die unendlichen Reihen

a) $1 + 3u + 9u^2 + 27u^3 + \dots,$

b) $1 - 2u^3 + 4u^6 - 8u^9 + \dots.$

Gib für beide den Wert an, den u nicht übersteigen darf, wenn eine solche Verwandlung möglich sein soll.

Anwendungen

Aus der Geometrie

38. Auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels ist vom Scheitel aus die Strecke a abgetragen. Man fällt von dem Endpunkte von a ein Lot x_0 auf den andern Schenkel; dadurch wird von diesem ein Stück b abgeschnitten. Von dem Endpunkte von b fällt man ein 2. Lot x_1 auf a , von dem Fußpunkte dieses Lotes ein 3. Lot x_2 auf b usw., immer wieder ein Lot von dem Fußpunkte des letzten Lotes auf den andern Schenkel. Wie groß ist die Summe

aller Lote $x_0 + x_1 + x_2 \dots$, die sich in der angegebenen Weise bis in die Spitze des Winkels fällen lassen?

39. Wie lautet das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn die Lote in der angegebenen Weise gefällt werden, aber sonst nichts gesagt ist, als daß das 1. Lot gleich c_0 , das 2. gleich c_1 sei?
40. Eine Strecke ($AB = s$ in Fig. 7) wird um die Hälfte verlängert, die Verlängerung (BC) wieder um die Hälfte usw. Über allen Strecken werden abwechselnd nach verschiedenen Seiten Halbkreise gezeichnet. Welches ist die Gesamtlänge der geschlängelten Linie?
41. Es ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a gegeben. In das Dreieck wird ein Kreis beschrieben, in den Kreis wieder ein gleichseitiges Dreieck, in das gleichseitige Dreieck wieder ein Kreis usw. bis zum Mittelpunkt. Wie groß ist die Summe der Radien aller dieser Kreise, und wie groß der Flächeninhalt a) aller Dreiecke, b) aller Kreise?
42. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Jeder der Schenkel hat die Länge a , die Basis die Länge b . In das Dreieck werden möglichst viele Kreise beschrieben, so daß der 1. die Basis und die beiden Schenkel, jeder folgende den vorhergehenden und die beiden Schenkel berührt, bis in die Spitze. Wie groß ist die Summe der Radien aller dieser Kreise und wie groß die Summe ihrer Flächen?
43. Es ist ein gleichseitiges Dreieck gegeben. Man konstruiert aus den Höhen dieses Dreiecks ein 2. gleichseitiges Dreieck, aus den Höhen des 2. ein 3. usw. bis ins Unendliche fort. Wie groß ist die Summe der Flächen aller so konstruierten Dreiecke einschließlich des gegebenen?
44. Wie lautet das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn das gegebene Dreieck ungleichseitig, sein Flächeninhalt gleich f_1 und der Inhalt des nächsten aus seinen Höhen konstruierten Dreiecks gleich f_2 ist?
45. Einem Kreise vom Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt fort. Wie groß ist die Summe der Flächen aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe der Flächen aller Quadrate?
46. Einem Würfel von der Kantenlänge a ist eine Kugel einbeschrieben, dieser wieder ein Würfel, diesem eine Kugel usw. Wie groß ist a) die Summe aller Würfelinhalte, b) die Summe aller Kugelinhalte? c) Was ändert sich an den Ergebnissen a und b, wenn man den 1. Würfel ersetzt durch einen Zylinder von quadratischem Achsenschnitt ($h = 2r = a$)?

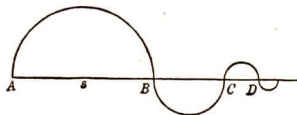


Fig. 7

47. Sophisma des Philosophen *Zeno* von Elea (um 450 v. d. Ztr.): Achilles verfolgt eine Schildkröte, die einen Vorsprung von einem Stadium hat, mit einer 12 mal so großen Geschwindigkeit. Wenn Achilles an die Stelle kommt, wo sich anfangs die Schildkröte befand, ist diese inzwischen um $\frac{1}{12}$ Stadium weitergekrochen; hat Achilles auch diese Stelle erreicht, so ist ihm die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium voraus usw.; Achilles muß immer erst an den Ort gelangen, den die Schildkröte schon verlassen hat, er kann sie also nie einholen. Zeige, worin der Trugschluß liegt, und gib an, wo Achilles die Schildkröte wirklich einholt.
48. Eine Strecke s ist so zu teilen, daß die Abschnitte eine unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{m}{n}$ bilden, wo $m < n$ ist. Beispiel: $s = 15$, $m = 2$, $n = 3$.

Aus der Arithmetik

49. a) Stelle den rein periodischen Dezimalbruch $0,2727\dots$ als Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe dar; gib für diese das Anfangsglied und den Quotienten an. – Verfahre entsprechend bei den folgenden Dezimalbrüchen
- b) $0,438438\dots$, c) $0,06120612\dots$, d) $0,428571428571\dots$
50. Benutze dies Verfahren, um die genannten Brüche in gemeine Brüche zu verwandeln, und leite hieraus die allgemeine Regel für die Verwandlung eines rein periodischen Bruchs in einen Dezimalbruch ab.
51. Teile den vorperiodischen Dezimalbruch $0,28157157\dots$ derart in zwei Teile, daß der eine als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe erscheint, gib für diesen das Anfangsglied und den Quotienten an.
52. Verfahre entsprechend mit dem Dezimalbruch $0,8174242\dots$
53. Verwandle unter Benutzung dieses Verfahrens die beiden eben genannten vorperiodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche.
54. Leite hieraus die allgemeine Regel für die Verwandlung vorperiodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche ab.
55. Inwiefern läßt sich ein rein periodischer Bruch, z. B. der obengenannte Bruch $0,438438\dots$, als ein periodischer Bruch mit beliebiger Vorperiode auffassen?
56. Betrachte den Dezimalbruch $0,438438\dots$ als vorperiodischen Bruch mit zweistelliger Vorperiode, wende auf ihn die Vorschrift über die Verwandlung vorperiodischer Brüche in gemeine Brüche an und zeige, daß das Ergebnis dasselbe ist wie bei der Behandlung des Bruchs als eines rein periodischen.
57. Verfahre entsprechend mit dem Bruche $0,142857142857\dots$ unter Annahme einer vierstelligen Vorperiode.

58. Vergleiche die Nenner der gemeinen Brüche, die man bei der Verwandlung von vollständigen, von reinperiodischen und von vorperiodischen Brüchen erhält, miteinander und leite daraus die Bedingungen her, von denen es abhängt, ob bei der Verwandlung eines gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch ein vollständiger, ein reinperiodischer oder ein vorperiodischer Bruch entsteht.

§ 5. Beziehungen zwischen arithmetischen und geometrischen Reihen

Einfache Aufgaben

1. Interpoliere zwischen 1 und 5 drei Glieder, so daß einmal eine arithmetische Reihe (1. Ordnung), das andere Mal eine geometrische Reihe entsteht, und vergleiche die entsprechenden Glieder beider Reihen nach ihrer Größe. (Graphische Darstellung!)
2. Führe bei den beiden vorigen Reihen eine Extrapolation über 1 und 5 hinaus um je 3 Glieder aus. Vergleiche die Glieder miteinander und das Ergebnis mit dem von Aufgabe 1. (Fortsetzung der dort benutzten graphischen Darstellung!)
3. Interpoliere in derselben Weise sowohl in arithmetischer als in geometrischer Reihe a) zwischen 4 und 13 je 4 Glieder, b) zwischen u und v je k Glieder. c) und d) Extrapoliere in beiden Fällen wie bei Aufgabe 2 und benutze die graphische Darstellung zur Vergleichung der Glieder.
4. Gibt es arithmetische Reihen 1. Ordnung, die zugleich geometrische Reihen sind? Wie groß müßte d und q in diesem Falle sein? Warum genügt es, die ersten 3 Glieder zu untersuchen? Welche Werte kann a dabei haben? (Vgl. die graphische Darstellung!)
5. Bilde zu der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 die 1. und 2. Differenzenreihe. Wie sehen sie aus?
6. Zeige allgemein, mit welchem Rechte man eine unendliche geometrische Reihe als eine arithmetische Reihe unendlich hoher Ordnung bezeichnen kann. Welcher Art sind alle hierbei auftretenden Differenzenreihen? Was ist ihnen gemeinsam? Wodurch unterscheiden sie sich?
7. 3 Zahlen, deren Summe 39 ist, bilden eine geometrische Reihe; vermindert man die größte der 3 Zahlen um 9, so entsteht eine arithmetische Reihe 1. Ordnung. Wie heißen die 3 ursprünglichen Zahlen?
8. Was für eine Reihe bilden die Logarithmen solcher Zahlen, die in geometrischer Reihe aufeinanderfolgen?¹⁾
9. Was für eine Reihe bilden die Zahlen, deren Logarithmen eine arithmetische Reihe 1. Ordnung bilden?¹⁾

¹⁾ Den Parallelismus arithmetischer und geometrischer Reihen erkannten schon vor *Neper* der Franzose *Chuquet* (1484) und die Deutschen *Michael Stifel* (1544) und *Jobst Burg* (1604).

Anwendungen

10. Der mittlere Barometerstand eines Ortes ist abhängig von der Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel, und zwar bilden nach den Gesetzen der Physik die Barometerstände verschiedener Orte eine fallende geometrische Reihe, wenn die Seehöhen der Orte eine steigende arithmetische Reihe bilden. Der Einfluß der Temperatur bleibt dabei unberücksichtigt. Durch direkte Messungen findet man, daß der Barometerstand von 760 mm auf 759 mm sinkt, wenn man vom Meeresspiegel um 10,5 m in die Höhe steigt. Welcher Quotient ergibt sich daraus für die Reihe der Barometerstände an Orten, die lauter Höhenunterschiede von 10,5 m aufweisen?
11. Um wieviel muß man sich danach a) von 105 m, b) von 210 m Seehöhe aus erheben, damit der Barometerstand um 1 m sinkt?
12. Wie groß ist der mittlere Barometerstand a) in Leipzig (110 m Seehöhe), b) in Zuoz im Engadin (1470 m; höchstgelegene höhere Lehranstalt der Schweiz), c) auf der Zugspitze (2968 m), d) auf dem Montblanc (4810 m; höchster Berg Europas)?
13. Welchen Höhenunterschied zeigen 2 Orte, deren mittlere Barometerstände 730 mm und 690 mm betragen?
14. Um wieviel sinkt das Barometer, wenn man sich von 600 m zu einer Höhe von 1100 m erhebt?
15. Wie groß ist die Differenz der mittleren Barometerstände auf dem Brocken (1141 m) und der Schneeköpfe (1605 m)?
16. Begründe nach Aufgabe 10 die Richtigkeit der Formel

$$H = 18400(\lg B - \lg \beta),$$

in der H die Meterzahl des Höhenunterschiedes zweier Orte bezeichnet, an denen die mittleren Barometerstände B und β herrschen.

§ 6. Zinseszinsrechnung

Die Grundformel

1. a) Was bedeutet die Aussage: Ein Kapital ist zu 3% ausgeliehen? b) desgleichen zu 4%, c) zu $p\%$?
2. Wieviel Zinsen bringen a Mark zu $p\%$ in 1 Jahr?
3. Auf wieviel wächst ein Kapital a innerhalb 1 Jahres bei $p\%$ Zinsen an?
4. Mit welchem Faktor hat man also das Kapital zu multiplizieren, um den Wert nach einjähriger Verzinsung zu erhalten?

5. Sprich die Antwort auf die vorige Frage noch einmal aus unter Benutzung der Abkürzung

$$I + \frac{p}{100} = q$$

und der Bezeichnung *Zinsfaktor*.

6. Wie groß ist der Zinsfaktor q , wenn p gleich a) 4%, b) 5%, c) $5\frac{1}{4}\%$, d) $4\frac{3}{4}\%$, e) $4\frac{2}{3}\%$, f) $5\frac{1}{3}\%$, g) $4\frac{5}{6}\%$ ist?
7. Wie groß ist der Prozentsatz, wenn der Zinsfaktor q gleich a) 1,05, b) 1,06, c) 1,045, d) 1,0475, e) 1,0525, f) $1\frac{1}{20}$, g) $1\frac{1}{33}$, h) $1\frac{1}{24}$, i) $\frac{20}{25}$ ist?
8. Beweise, daß ein Kapital a zu $p\%$ nach Ablauf von n Jahren mit den Zinsen und Zinseszinsen auf

$$b = aq^n$$

angewachsen ist, wobei $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist.

9. Drücke nach der Formel in Aufgabe 8 a) a durch b , n und q , b) q durch b , a und n , c) n durch b , a und q aus.
10. Auf welche Summe wächst ein Kapital von 100 RM durch Hinzufügen der Zinsen und Zinseszinsen in 1, 2, 3, 4, ... 10 Jahren an bei a) 3%, b) $3\frac{1}{2}\%$, c) 4%?
11. a-c) Stelle dieses Anwachsen (Aufgabe 10) graphisch dar unter Anwendung eines geeigneten Maßstabes und eines zweckmäßig gewählten Koordinatensystems (z.B. die Abszissenachse um 100 Einheiten nach unten verschoben gedacht).

Beispiele

12. Ein Kapital von 1500 RM ist zu 4% ausgeliehen. Zu welcher Summe wächst es mit den Zinsen und Zinseszinsen in 30 Jahren an?
13. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 3750 RM bei 5% in 20 Jahren an? Weitere Zahlenbeispiele zur Berechnung des Endkapitals:

	a	p	n
14.	2500	$3\frac{1}{2}$	20
15.	10000	$4\frac{1}{4}$	15
16.	6450	4	12

	a	p	n
17.	100	$4\frac{1}{5}$	18
18.	3680	5	7
19.	20000	$3\frac{1}{3}$	16

20. Ein Waldbestand vermehrt sich mehrere Jahre hindurch ständig um 4% im Jahre¹⁾. Wieviel m^3 Holz wird er nach 12 Jahren liefern, wenn er jetzt zu 2 Millionen m^3 veranschlagt wird?

¹⁾ Die Vermehrung des Waldbestandes selbst geht natürlich *stetig* vorwärts, die Rechnungsabschlüsse dagegen erfolgen bei Gütern und Forstverwaltungen in jährlichen Zwischenräumen.

21. Zu welcher Summe wäre 1 Pfennig von Christi Geburt an bis zum Ende des Jahres 1900 angewachsen, wenn es möglich wäre, daß sein Wert sich alljährlich um 4% des jeweiligen Betrages vermehrt hätte? Der Wert ist in Erdkugeln von reinem Gold anzugeben, es ist dabei das kg Gold zu 2800 RM zu rechnen; die Wichte des Goldes ist $19,25 \text{ g/cm}^3$, der mittlere Erdradius beträgt 6370 km.
22. Bringt ein Kapital in 10 Jahren zu 4% mehr Zinsen und Zinseszinsen oder dasselbe Kapital in 4 Jahren zu 10%?
23. Zu welcher Summe wachsen 25300 RM in 10 Jahren an, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen und halbjährlich $2\frac{1}{2}\%$ gerechnet werden?
24. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
25. Wie groß ist der Zuwachs von 1000 RM in 10 Jahren bei a) 6% jährlich, b) 3% halbjährlich, c) $1\frac{1}{2}\%$ vierteljährlich, d) $\frac{1}{2}\%$ monatlich, wenn die Zinsen a) jährlich, b) halbjährlich, c) vierteljährlich, d) monatlich zum Kapital gerechnet werden?
26. Ein Mann, der sich verpflichtet hat, nach 5 Jahren eine Summe von 10000 RM zu zahlen, will sich dieser Verpflichtung durch eine sofortige Zahlung entledigen. Wieviel beträgt diese, wenn $4\frac{3}{4}\%$ gerechnet werden?
27. Gib der vorigen Aufgabe eine andere Fassung mittels des Begriffes *Diskontierung*; sprich das Ergebnis allgemein aus, indem du für den Bruch $\frac{1}{q}$ die Bezeichnung *Diskontierungsfaktor* benutzt.
28. Diskontiere eine nach 10 Jahren zahlbare Summe von 15000 RM auf die Gegenwart unter Annahme eines Zinsfußes von 5%.
Weitere Zahlenbeispiele zur Diskontierung von Forderungen:

	b	p	n
29.	10000	$5\frac{1}{2}$	12
30.	18750	$5\frac{1}{4}$	4
31.	5600	6	2

	b	p	n
32.	25000	$4\frac{3}{4}$	5
33.	6200	$5\frac{1}{3}$	11
34.	75000	$5\frac{1}{5}$	9

35. Ein Kapital, das zu 4% stand, wuchs in 22 Jahren zu 17000 RM an. Wie groß war es?
36. Welches Kapital wächst in 30 Jahren bei $4\frac{1}{2}\%$ zu 30000 RM an?
37. Welches Kapital wächst bei $4\frac{1}{2}\%$ in 10 Jahren zu derselben Summe an, zu der 8549 RM bei 5% in 7 Jahren anwachsen?
38. Welche Verzinsung für ein ganzes Jahr ergibt sich, wenn am Ende eines jeden Monats $\frac{1}{2}\%$ zum Kapital geschlagen wird?
39. Zu wieviel Prozent steht ein Kapital, das sich in 20 Jahren verdreifacht?
40. Zu wieviel Prozent steht ein Kapital, das sich in 30 Jahren verfünffacht?

41. Ein Wucherer lieh jemand 700 RM und ließ sich dafür einen Wechsel auf 1000 RM, nach 3 Jahren zahlbar, ausstellen. Auf welche Verzinsung läuft das hinaus?
42. A leiht dem B 25 RM auf 2 Jahre gegen Zins und Zinseszins. Nach 2 Jahren zahlt B dem A außer der Schuld 24 RM zurück. Wieviel Prozent waren gerechnet? (Aus *Widmanns* Rechenbuch, 1489.)
43. Bei einem industriellen Unternehmen soll von der Schuldenlast alljährlich ein bestimmter Prozentsatz abgeschrieben werden, so daß nach 10 Jahren nur noch $\frac{2}{3}$ der jetzigen Schuld zu tilgen bleibt. Wieviel Prozent müssen jährlich abgeschrieben werden?
44. In welcher Zeit wachsen 8007 RM bei $4\frac{3}{4}\%$ zu 21218 RM an?
45. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei 3%iger Verzinsung?
Weitere Beispiele zur Berechnung der Zeit:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>p</i>
46.	16400	30665	$3\frac{3}{4}$
47.	25000	58914	3
48.	9600	33807	$4\frac{3}{4}$

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>p</i>
49.	9560	31000	4
50.	22500	59699	5
51.	6000	24623,50	4

52. Ein Erblasser vermacht einer Schule ein Kapital von 7500 RM mit der Bestimmung, daß die Zinsen der Stiftung zu Stipendienzwecken benutzt werden sollen, sobald das Kapital nebst den 4%igen Zinseszinsen auf 10000 RM angewachsen sein wird. Wann kann die Auszahlung der Stipendien beginnen?
53. Durch die Zeitungen ging im Sommer des Jahres 1912 die Nachricht, daß der Stadt Berlin 2000 M vermacht worden seien mit der Bestimmung, daß die Zinsen und Zinseszinsen so lange zum Kapital geschlagen werden sollten, bis dieses den Betrag der städtischen Schulden erreicht hätte. Wie lange (ungefähr) hätte man darauf warten müssen, wenn man auf 4% Zinsen rechnen durfte und die damaligen Schulden der Stadt Berlin (etwa 480 Millionen M) sich nicht wesentlich änderten?
54. Am 15. Mai 1926 wurde ein Betrag von 1200 RM bei einer Sparkasse eingezahlt, die $3\frac{1}{2}\%$ Jahreszinsen gab und halbjährigen Rechnungsabschluß am 30. Juni und 31. Dezember hatte. Wieviel betrug das Guthaben am 7. September 1939, wo es abgehoben wurde?¹⁾

¹⁾ Es ist zu beachten, daß die Zinsen nicht stetig, sondern nur am Ende gewisser Zeiträume (z.B. eines ganzen oder halben Jahres) zum Kapital geschlagen werden, daß also die Formeln der Zinseszinsrechnung immer nur für ganzzahlige Vielfache solcher Zeiträume gelten. Für überschneidende Bruchteile dieser Zeiträume ist die einfache Zinsrechnung anzuwenden. Das entspricht auch den Gepflogenheiten des Geschäftsverkehrs der Banken; bei diesen erfolgt die Hinzurechnung der Zinsen zum Kapital nur an bestimmten Tagen des Jahres, meist am 1. Januar und am 1. Juli. Auf die kürzeren Zeiträume vor oder nach diesen Abrechnungsterminen wird die einfache Zinsrechnung angewandt.

55. Für einen Bauernhof bot A 60000 RM bar, B 69500 RM nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar, C 72900 RM nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlbar. a) Wer bot am meisten, wenn 5% und Zinseszinsen gerechnet werden? b) Wieviel bot er mehr als die beiden andern?
56. Das Schloß zu Benrath bei Düsseldorf ist im Jahre 1911 von der Gemeinde Benrath für $1\frac{1}{2}$ Millionen M angekauft worden. Bei Abschluß des Kaufvertrages wurde vereinbart, daß der Kaufpreis in 3 gleichen Raten von je 500000 M gezahlt werden sollte, und zwar die 1. nach 1 Jahr ohne Zinsen, die 2. nach 3 Jahren mit 3%igen Zinsen für 2 Jahre, die letzte nach 5 Jahren mit 3%igen Zinsen für 4 Jahre. Wieviel hat die Gemeinde Benrath insgesamt bar zu bezahlen, a) wenn einfache Zinsen berechnet werden, b) wenn Zinseszinsen gezahlt werden? c) Man vergleiche zu dem Zeitpunkt der letzten Zahlung den Wert der geleisteten Zahlungen (a und b) mit dem Werte, auf den die $1\frac{1}{2}$ Millionen M angewachsen wären, wenn sie bei Abschluß des Kaufvertrags voll ausbezahlt und 5 Jahre hindurch zu 3% auf Zinseszinsen gelegt worden wären.
57. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
58. Es will jemand eine Summe Geldes 20 Jahre hindurch auf Zinsen geben, um sich nach Ablauf der Zeit durch die Zinsen des erlangten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 5%. Um den wievielten Teil muß er die Summe vermehren, wenn er nur 4% erhalten kann?

§ 7. Rentenrechnung

Vermehrung oder Verminderung des Kapitals am Ende des Jahres

1. Was wird aus einem Kapital a , das zu $p\%$ auf Zinsen steht, in n Jahren, wenn am Ende jedes Jahres die Zinsen zum Kapital geschlagen werden und außerdem eine konstante Summe r hinzugefügt oder abgehoben wird?

Anleitung: Denke dir, der Besitzer des Geldes lasse n Jahre lang sein Kapital a bei einer Bank auf Zinseszinsen stehen und verhandle im übrigen mit einer anderen Bank, der er am Ende jedes Jahres den Betrag r entweder einzahlt oder abborgt. Der Gesamtwert dieser Beträge bildet eine leicht summierbare geometrische Reihe. Beweise so, daß für das Endkapital b die Formel gilt:

$$b = aq^n \pm r \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wobei $q = 1 + \frac{p}{100}$ gesetzt ist¹⁾.

¹⁾ Bei der praktischen Anwendung der Formel ist es nützlich, in dem für b erhaltenen Ausdruck statt des Nenners $q - 1$ seinen Wert $\frac{p}{100}$ einzusetzen. Wie lautet die Gleichung für b dann?

2. Berechne aus dieser Gleichung
 - a) a als Funktion von b, n, q, r ,
 - b) n als Funktion von a, b, q, r ,
 - c) r als Funktion von a, b, n, q .
 - d) Warum kann man den Verzinsungsfaktor q (oder den Zinsfuß p) im allgemeinen nicht berechnen?
3. Was wird aus einem Kapital von 100 RM nach 1, 2, 3, 4 Jahren bei a) 3%, b) $3\frac{1}{2}\%$, c) 4% Verzinsung, wenn man am Ende jedes Jahres a) 8 RM, b) 10 RM, c) 9 RM hinzufügt? Stelle das Anwachsen des Kapitals in geeignetem Maßstabe graphisch dar.
4. Ein Kapital von 1000 RM steht zu 5% Zinsen und wird jährlich¹⁾ außer den Zinsen um 100 RM vermehrt. Wie groß ist die Summe nach 10 Jahren?
5. Was wird aus einem Kapital von 4500 RM in 12 Jahren, wenn es jährlich außer den Zinsen um 150 RM vermehrt wird, bei $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszinsen?
6. Ein Kapital von 10000 RM steht zu $5\frac{1}{4}\%$ und wird jährlich außer den Zinsen um 300 RM vermehrt. Wie groß wird es nach 8 Jahren sein?
7. Ein Waldbestand wird auf 100000 m³, sein jährlicher Zuwachs auf 4% geschätzt. Wieviel wird nach 20 Jahren vorhanden sein, wenn jährlich 1500 m³ abgeholzt werden?
8. Was bleibt von einer Schuld von 40000 RM, die zu 5% steht, nach 10 Jahren übrig, wenn jährlich einschließlich der Zinsen 5000 RM bezahlt werden?
9. Wieviel beträgt nach 8 Jahren der Rest einer Schuld von 4000 RM, die zu $4\frac{1}{2}\%$ stehen, wenn jährlich einschließlich der Zinsen 500 RM bezahlt werden?
10. Jemand hat ein Kapital von 8000 RM zu $5\frac{1}{4}\%$ auf Zinsen und vermehrt es nach Ablauf jedes Jahres um 400 RM. Nach wieviel Jahren²⁾ ist es auf 50000 RM angewachsen?
11. Ein Wald, dessen Bestand jetzt zu 20000 m³ und dessen Zuwachs jährlich auf 6% geschätzt wird, soll in der Art geschont werden, daß er nach 16 Jahren 30000 m³ beträgt. Wieviel kann man jährlich abholzen?
12. Jemand hat 3000 RM auf Zinsen zu $4\frac{1}{4}\%$. Wieviel muß er jährlich 24 Jahre hindurch zulegen, damit er nach Ablauf der Zeit 30000 RM Vermögen hat?
13. Ein Mann, dem anfänglich kein Kapital zur Verfügung steht, legt von seinem Verdienst alljährlich 200 RM zurück; wieviel hat er nach a) 10 Jahren, b) 20 Jahren bei 4% Zinseszinsen?
14. Ein Angestellter will von seinem Gehalt jährlich 150 RM zu 4% auf Zinsen legen. Wie groß werden seine Ersparnisse nach 30 Jahren sein?

¹⁾ d. h. am Ende jedes Jahres. Ähnliches gilt für halbjährlich, monatlich usw.; die Zahlungen geschehen also, wenn es nicht anders angegeben ist, am Ende des betreffenden Zeitschnittes.

²⁾ Vgl. die Fußnote zu § 8, Aufgabe 64.

15. Ein Pächter blieb von seiner Pacht jährlich 300 RM schuldig. Wie hoch belief sich seine Schuld nach 7 Jahren, wenn $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet werden?
16. Jemand erspart jährlich 50 RM und legt diese zu $4\frac{3}{4}\%$ auf Zinsen. Nach wieviel Jahren¹⁾ wird er ein Vermögen von 5000 RM zusammen haben?
17. Ein Angestellter erspart von seinem Gehalt 3 Jahre lang je 300 RM, dann (nach einer Gehaltserhöhung) 3 Jahre lang je 400 RM, dann 3 Jahre lang je 500 RM. Wieviel besitzt er nach Ablauf der 9 Jahre, wenn $3\frac{1}{2}\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?
18. Jemand hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 50000 RM, das zu 4% auf Zinsen steht. Es werden 6 Jahre hindurch jährlich 3000 RM für die Erziehung der Kinder ausgegeben. Dann wird das Vermögen unter die Kinder gleichmäßig verteilt. Wieviel kommt auf jedes Kind?
19. Ein Vater zahlt bei der Geburt eines Sohnes auf eine Sparkasse, die 3% Zinseszinsen gewährt, 200 RM ein und nimmt sich vor, am Schlusse jedes Jahres eine feste Summe zuzuzahlen, um dem Sohne mit Ablauf des 20. Jahres (für Berufsausbildung oder dgl.) den Besitz von 3000 RM zu sichern. a) Wieviel muß der Vater jährlich zahlen? b) Wie würde sich die Zahlung ändern, wenn die Sparkasse $3\frac{1}{4}\%$ gewährte?
20. Ein Erblasser trifft über sein Vermögen von 20000 RM folgende Bestimmung: Zunächst sollen seine Kinder 10 Jahre hindurch jährlich 1360 RM haben; dann sollen die Zinsen des noch vorhandenen Kapitals für die Schulen des Ortes verwendet werden. Wieviel macht das jährlich, wenn $4\frac{2}{3}\%$ gerechnet werden?
21. Von einer zu 5% verzinnten Schuld von 3000 RM werden jährlich 100 RM abgetragen. a) Wieviel beträgt die Schuld nach 10 Jahren? b) In welchem Sinne und um wieviel ändert sich das Ergebnis, wenn nur 3% Zinsen gerechnet werden?

Aufzehrung des Kapitals. Schuldentilgung

22. Ein Kapital wird durch fortgesetzte Abhebung völlig aufgezehrt: a) welcher Wert ist dann in der Formel in Aufgabe 1 für b einzusetzen? Berechne unter dieser Annahme b) r , c) a , d) n .
23. Jemand hat ein Vermögen von 30000 RM. Wieviel darf er davon jährlich verbrauchen, wenn das Geld 20 Jahre reichen soll? ($p = 4\%$.)
24. Ein Mann, der 50000 RM erbt, legt diese zu $4\frac{1}{2}\%$ auf Zinseszinsen und verbraucht davon alljährlich 4000 RM. Wie lange wird es dauern¹⁾, bis das Kapital aufgezehrt ist?
25. Jemand, der ein Vermögen von 16000 RM hat, das ihm 4% Zinsen bringt, verbraucht davon jährlich 1000 RM. Nach wieviel Jahren wird er sein Kapital aufgezehrt haben?

¹⁾ Vgl. die Fußnote zu § 6, Aufgabe 54.

26. Eine Stadt nahm im Jahre 1912 für den Umbau des Realgymnasiums eine Anleihe von 68000 RM auf, die mit $3\frac{1}{2}\%$ verzinst und mit $1\frac{1}{2}\%$ getilgt werden sollte. Welche Summe mußte hierzu in den Stadthaushaltplan des Jahres 1915 eingesetzt werden, und in welchem Jahre war die Schuld getilgt?
27. Eine Anleihe von 300000 RM wird mit 4% verzinst und mit $1\frac{1}{2}\%$ getilgt. Wann wird die Tilgung beendet sein? Stelle einen Tilgungsplan auf, bei dem die jährlich zu tilgenden Summen auf ganzzahlige Vielfache von 100 RM abgerundet werden¹⁾.
28. Durch eine Anleihe von 450000 RM wird der Jahreshaushalt einer Stadtgemeinde mit 22500 RM an Ausgaben für Verzinsung und Tilgung belastet. Der Zinsfuß beträgt $3\frac{3}{4}\%$. Wie hoch stellt sich die Tilgungssumme, und wie groß ist die Tilgungsfrist? Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn die Schuldverschreibungen teils auf 1000 RM, teils auf 500 RM lauten?
29. Jemand hat eine Schuld von 50000 RM zu tilgen, die zu 4% steht. Er zahlt alle Jahre einschließlich der Zinsen 10000 RM ab. Nach wieviel Jahren hat er die Schuld getilgt, und wieviel hat er im letzten Jahre noch zu zahlen?
30. Jemand will eine Schuld von 20000 RM, die er zu $4\frac{1}{2}\%$ verzinsen muß, in 8 Jahren abtragen. Wieviel hat er jährlich mit den Zinsen zu bezahlen?
31. Wieviel hat jemand jährlich mit den Zinsen zu bezahlen, um eine Schuld von 10000 RM, die zu 5% steht, in 6 Jahren zu tilgen?
32. Eine Anleihe von 250000 RM soll bei $3\frac{1}{2}\%$ iger Verzinsung in 25 Jahren getilgt werden. a) Wie groß ist die Tilgungsrate zu bemessen? b) Auf welchen Betrag ist die Anleihe nach 12 Jahren zusammengeschmolzen? c) Wann ist die Anleihe auf die Hälfte ihres Betrages gesunken? d) Wann ist von ihr nur noch ein Fünftel zu tilgen?
33. a) Wie groß ist der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung einer Anleihe von 1000000 RM zu bemessen, die bei Annahme eines Zinsfußes von 3% in 40 Jahren getilgt werden soll? b) Wie ändert sich der jährliche Gesamtaufwand, wenn von der Anleihe bei dem angegebenen Zinsfuß in 20 Jahren die Hälfte des Betrages getilgt sein soll? c) Desgl., wenn bei einem Zinsfuß von 4% in 40 Jahren drei Viertel getilgt werden sollen?

¹⁾ Kleinere Darlehen werden in der Regel an einer einzigen Stelle (z. B. von einer städtischen oder Kreissparkasse, von einer Bank oder auch von einem einzelnen Geldgeber) entnommen; dagegen gibt man für größere Darlehen (z. B. Staatsanleihen) eine große Menge Anteilscheine (Obligationen, Schuldverschreibungen) im Betrage von 100, 200, 500, 1000 RM aus. Während man im Falle der kleinen Anleihen jeden beliebigen Tilgungsbetrag dem einzelnen Gläubiger zurückzahlen kann, ist im Falle der großen Anleihen eine Tilgung nur dadurch möglich, daß man eine bestimmte Anzahl Anteilscheine zum Nennbetrage zurückkauft. Daher müssen für größere Anleihen besondere Tilgungspläne aufgestellt werden, bei denen die theoretisch berechneten Tilgungssummen bald nach oben, bald nach unten abgerundet werden.

Vermehrung oder Verminderung des Kapitals am Anfang des Jahres

34. Was wird aus einem Kapital a , das zu $p\%$ ausgeliehen ist, nach n Jahren, wenn am Ende jedes Jahres die Zinsen zum Kapital geschlagen werden und außerdem *am Anfang jedes Jahres* (beginnend mit dem zweiten) eine konstante Summe r hinzugezahlt oder abgehoben wird? Leite die hierfür gültige Formel

$$b = a q^n \pm r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a) aus der Formel in Aufgabe 1, b) unabhängig von dieser her.

35. Wird am Anfang jedes Jahres (auch des ersten) die Summe r auf Zinsen gelegt, so erhält man die sog. *Sparkassenformel*:

$$b = r \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Leite diese Formel aus der vorigen her.

36. a) A legt am Anfang jedes Jahres, B am Ende jedes Jahres r RM auf Zinsen, beide n Jahre hindurch und beide zu gleichem Zinsfuß. Wieviel hat A nach Ablauf der n Jahre mehr als B? b) Zahlenbeispiel: $a = 100$, $p = 4$, $n = 20$. c) In welchem Maße wüchse der Unterschied, wenn die eingezahlten Summen verdoppelt (allgemein vervielfacht) würden? (Nicht zahlenmäßig ausrechnen, nur überlegen!)
37. Wieviel muß jemand a) zu Anfang jedes Jahres, b) am Ende jedes Jahres auf Zinsen legen, damit er nach Ablauf von 25 Jahren ein Kapital von 25000 RM hat? ($p = 4\%$.)
38. Jemand versichert im Alter von 30 Jahren sein Leben mit 40000 RM und zahlt zu dem Zwecke zu Anfang jedes Jahres 900 RM bei einer Bank ein. Er stirbt 56 Jahre alt. Hat die Bank, welche 4% rechnet, gewonnen oder verloren, und wieviel?
39. Dieselbe Aufgabe wie Aufgabe 38 für 32 Jahre, 10000 RM, 400 RM, 49 Jahre, $4\frac{1}{2}\%$.
40. Jemand zahlt 5000 RM bei einer Bank ein, die 4% Zinsen gewährt, und fügt am Anfang jedes Jahres (vom zweiten an) 500 RM hinzu. Wieviel wird er nach Ablauf von 15 Jahren besitzen?
41. Dieselbe Aufgabe für a) 10000 RM, $3\frac{1}{2}\%$, 300 RM, 12 Jahre; b) 3000 RM, $3\frac{1}{4}\%$, 400 RM, 20 Jahre.

Vermehrung und Verzinsung in anderen als jährlichen Zwischenräumen

42. Durch welche Größen hat man q und n in den Aufgaben 1, 34 und 35 zu ersetzen, wenn die Verzinsung ebenso wie die Zahlung der konstanten Summe nicht jährlich, sondern a) halbjährlich, b) vierteljährlich, c) monatlich erfolgt?

43. Wie groß ist der Verzinsungsfaktor für a) 2%, b) 3%, c) 4% bei α) jährlicher, β) halbjährlicher, γ) vierteljährlicher, δ) monatlicher Verzinsung?
44. Desgl. für a) $2\frac{3}{4}\%$, b) $3\frac{1}{2}\%$, c) $4\frac{1}{4}\%$.
45. Desgl. für a) $3\frac{1}{8}\%$, b) $3\frac{7}{8}\%$, c) $4\frac{1}{8}\%$.
46. Wenn die Verzinsung jährlich erfolgt, die konstante Summe aber a) halbjährlich, b) vierteljährlich, c) monatlich gezahlt wird, so muß man q ersetzen durch a) $q^{\frac{1}{2}}$, b) $q^{\frac{1}{4}}$, c) $q^{\frac{1}{12}}$ und n durch a) $2n$, b) $4n$, c) $12n$. Gib den Grund hierfür an, indem du den Begriff „Jahr“ ersetzt durch „Verzinsungsperiode“ und den Begriff Verzinsungsfaktor in entsprechender Weise verallgemeinerst.
47. Gib ebenso die Veränderungen an, die man in den hergeleiteten Formeln vornehmen muß, wenn die Verzinsung jährlich erfolgt, die konstante Summe aber erst alle 2, 3, ..., k Jahre gezahlt wird.
48. Das Steuergesetz enthielt die Bestimmung, daß die im allgemeinen vierteljährlich pränumerando zu zahlenden Steuern auch auf einmal am Anfang des Steuerjahres gezahlt werden können; ein Steuernachlaß ist dabei aber nicht vorgesehen. Ein Mann will in dieser Weise seine Steuern, die vierteljährlich 150 RM betragen, mit 600 RM am Anfange des Jahres bezahlen. Wieviel würde der Staat dabei verdienen a) nach Ablauf eines Jahres, b) wenn es 5 Jahre hintereinander geschieht, c) nach 20 Jahren? (Verzinsung zu 4%.)
49. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
50. Jemand zahlt eine Erbschaft von 20000 RM an eine Bank ein, die jährlich 4% gewährt, die Zinsen aber halbjährlich zuschlägt; er verbraucht in jedem Halbjahre (und zwar zum ersten Male 6 Monate nach der Einzahlung des Kapitals) 500 RM. Wieviel wird er nach 20 Jahren noch besitzen?
51. Ein Mieter hat seinem Hauswirt 10 Jahre lang vierteljährlich 325 RM Miete bezahlt. Wieviel hätte er am Ende der 10 Jahre zahlen müssen, wenn der Hauswirt ihm die ganze Zeit hindurch die Miete gestundet und $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen (bei jährlichem Zinszuschlag) gerechnet hätte?
52. Eine Gesellschaft, die 100000 RM bei einer Bank zu $4\frac{1}{2}\%$ (bei jährlichem Zinszuschlag) angelegt hat, läßt durch diese Bank vierteljährlich pränumerando 1150 RM an die Steuerkasse abführen. Wieviel wird nach 10 Jahren ihr Bankguthaben betragen?
53. Ein Angestellter zahlt jetzt auf eine Sparkasse, die jährlich $3\frac{1}{2}\%$ gewährt, 500 RM ein und nimmt sich vor, alle 3 Jahre (gelegentlich der Gehaltserhöhungen) 200 RM einzuzahlen. Wie groß wird sein Vermögen nach Ablauf von 15 Jahren sein?
54. Jemand will am Ende jedes 5. Jahres 300 RM bei einer Bank einzahlen, die jährlich 4% gibt; wie hoch beläuft sich sein Guthaben unmittelbar nach der 4. Einzahlung?

55. Welcher Betrag muß alle 4 Jahre zinsbar angelegt werden, damit bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$ unmittelbar nach der 6. Einzahlung ein Guthaben von 11 500 RM vorhanden ist?
56. Welchen Betrag muß man alle 3 Jahre einzahlen, wenn man bei 4% iger Verzinsung unmittelbar nach der 7. Einzahlung ein Kapital von 13 000 RM beisammen haben will?
57. Wie viele Einzahlungen von 250 RM nach je 4 Jahren muß man leisten, um bei 3% iger Verzinsung auf 2065 RM zu gelangen?

Renten im engeren Sinne

58. Wenn jemand regelmäßig am Ende jedes Jahres eine konstante Summe r zu fordern oder zu zahlen hat, so kann er statt dessen auch eine einzige Zahlung a empfangen oder leisten; die Größe r heißt *Rente* oder *Kanon*, a der *Barwert der Rente* oder die *Ablösungssumme*. Besteht die Zahlungsverpflichtung noch n Jahre, so gilt die Beziehung

$$a q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wobei q wieder, wie früher, eine Abkürzung für $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ist. Leite die vorstehende Formel her a) aus der Formel in Aufgabe 1, b) unabhängig von dieser.

59. Berechne a) den Barwert, b) die Höhe der Rente, c) die Anzahl der Jahre. d) Warum kann man den Zinsfuß im allgemeinen nicht berechnen?
60. Soll die Rente *unaufhörlich* am Ende jedes Jahres gezahlt werden (wie z. B. bei Stiftungen u. dgl.), so ist der Barwert

$$a = \frac{r}{q - 1}.$$

Leite diese Formel her a) aus der Formel in Aufgabe 58, b) indem du bedenkst, daß in diesem Falle die Rente gleich den jährlichen Zinsen der Ablösungssumme ist.

61. Soll die Rente nicht am Ende jedes Jahres, sondern am Anfang jedes Jahres (auch des ersten) gezahlt werden, so gilt:

$$a q^n = r q \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Leite die Formel her a) aus Aufgabe 34, b) aus Aufgabe 58, c) unabhängig.

62. Berechne für diesen Fall a , r , n .

63. Für die pränumerando zahlbare ewige Rente gilt die Formel

$$a = \frac{rq}{q-1}.$$

Beweise sie auf mehrere Arten¹⁾.

64. Wie groß ist der gegenwärtige Wert einer Jahresrente von 1200 RM auf 10 Jahre, wenn $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszinsen gerechnet werden?
65. Jemand hat eine Jahresrente von 800 RM auf 20 Jahre zu beanspruchen. Mit welcher Barzahlung könnte seine Forderung bei $3\frac{1}{2}\%$ Verzinsung abgelöst werden?
66. Wieviel kann man bei $4\frac{3}{4}\%$ Verzinsung für eine Jahresrente von 900 RM zahlen, die 10 Jahre lang fällig ist?

Vermischte Aufgaben

67. Für ein Haus bietet A 30000 RM bar, B 35000 RM nach 3 Jahren, C 33000 RM in 3 jährlichen Terminen, jedesmal 11000 RM zu Anfang jedes Jahres. Wer bot am meisten, wieviel bot er, und wieviel mehr als die andern, wenn 5% gerechnet werden?
68. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
69. Jemand besitzt 20000 RM in bar und hat außerdem noch auf 13 Jahre eine Rente von jährlich 1075 RM zu beanspruchen. a) Wie hoch muß er sein Vermögen angeben, wenn 4% Zinsen gerechnet werden? b) Wieviel kleiner wäre der Betrag, wenn 3% gerechnet würden?
70. Die Bauern eines Dorfes an der Havel hatten die „Fischereigerechtigkeit“ (Erlaubnis, im Strome zu fischen) für die Verpflichtung übernommen, 30 Jahre lang einen Kanon von jährlich 900 RM zu zahlen. Durch welche einmalige Zahlung konnten sie sich dieser Verpflichtung entledigen? ($3\frac{1}{2}\%$.)
71. Jemand will von seinem Grundstück einen Kanon ablösen, der noch 50 Jahre darauf lastet und 450 RM jährlich beträgt. a) Wieviel muß er dafür zahlen bei 4% Verzinsung? b) Welche Summe muß er zahlen, wenn er die Ablösung in zwei gleichen Raten vornehmen will, von denen die eine sogleich, die andere nach 5 Jahren gezahlt werden soll? (Verzinsung wie bei a.) c) Wieviel beträgt die Zahlung, wenn sie in zwei Raten geleistet werden soll, von denen die zweite doppelt so groß ist wie die erste? (Zahlungstermine wie bei b.)
72. Zum Bau eines Badehauses in einem See sind 1000 RM erforderlich. Die Unterhaltungskosten belaufen sich jährlich auf 100 RM. Wegen des Wellenschlages und Eisganges hat man alle 10 Jahre auf einen Neubau zu rechnen.

¹⁾ Über die Verzinsung und Auszahlung zu anderen als jährlichen Terminen vgl. die Fragen zu Aufgabe 42 und 46.

Ein wie großes Kapital ist nötig, eine solche Badeeinrichtung für immer zu erhalten, wenn die Zinsen zu 4% gerechnet werden?

73. Jemand verkauft ein Grundstück mit der Bedingung, es nach 50 Jahren zu dem $1\frac{1}{2}$ -fachen Betrage des ursprünglichen Kaufpreises zurückzuerwerben. a) Wie groß ist der Kaufpreis zu bemessen, wenn der jährliche Nutzungswert abzüglich der Erhaltungskosten auf 2500 RM gerechnet wird, unter Annahme eines Zinsfußes von $3\frac{1}{2}$ %? b) Wie stellt sich der Kaufpreis, wenn der Kauf auf 99 Jahre geschlossen und der Rückkaufswert auf das Doppelte des gegenwärtigen Kaufpreises festgesetzt wird?
74. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
75. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
76. Bei der Geburt eines Knaben wollen die Eltern so viel Geld auf Zinsen (4%) legen, daß der Sohn nach Vollendung seines 20. Lebensjahres 4 Jahre hindurch zu Anfang jedes Halbjahres 500 RM erhalten kann. Wie groß muß die eingezahlte Summe sein?
77. Jemand spart 20 Jahre lang jährlich 600 RM und legt sie auf Zinsen. Wie lange kann er nach Ablauf der 20 Jahre noch eine Jahresrente von 2400 RM genießen, wenn beidemale 5% gerechnet werden?
78. Jemand will 10000 RM, die er auf Zinsen hat, 20 Jahre hindurch jährlich um eine solche Summe r vermehren, daß er nach Ablauf der 20 Jahre noch 20 Jahre hindurch eine Rente von 3000 RM beziehen kann. Wie groß ist r bei $4\frac{1}{2}$ % Verzinsung?
79. Jemand, der 10000 RM auf Zinsen hat, hofft noch 40 Jahre zu leben. Er will sein Kapital so lange jährlich um 400 RM vermehren, bis er für den Rest seines Lebens eine Jahresrente von 2000 RM hat. Wieviel Jahre muß er sparen, wenn 5% gerechnet werden, und wie groß wurde in dieser Zeit das Kapital?
80. Wie ändert sich das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn sowohl die 400 RM als auch die 2000 RM in halbjährlichen Raten (also $2 \cdot 200$ RM und $2 \cdot 1000$ RM) gezahlt werden sollen?
81. Eine Rente von 1050 RM, die noch 16 Jahre läuft, soll in eine andere verwandelt¹⁾ werden, die 20 Jahre läuft. Wie hoch ist die neue Rente, wenn beidemale $5\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?
82. Jemand bezieht auf 25 Jahre eine Jahresrente von 1500 RM, die er in eine andere Rente von jährlich 1800 RM umzuwandeln wünscht. Wie lange kann er diese beziehen, wenn die Verzinsung beidemale zu $4\frac{3}{4}$ % erfolgt?
83. Eine Stadtgemeinde will eine Anleihe von 500000 RM, die mit 4% verzinst und mit 1% getilgt wird, nach 10jährigem Bestande in eine Anleihe von $3\frac{1}{2}$ %

¹⁾ Bedingung für die Umwandlung ist, daß die Barwerte der beiden Renten zur Zeit der Umwandlung die gleichen sind.

umwandeln. Wie groß ist die neue Tilgungssumme zu bemessen, wenn die ursprüngliche Tilgungsfrist innegehalten werden soll?

84. Wie ändert sich in der vorigen Aufgabe die Tilgungsfrist, wenn der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung nach der Umwandlung dieselbe Höhe hat wie vorher?
85. Eine Anleihe von 800000 RM erfordert für Verzinsung und Tilgung einen jährlichen Gesamtaufwand von 36000 RM. Nachdem sie 15 Jahre bestanden hat, wird beschlossen, die Tilgung dadurch zu beschleunigen, daß jährlich 40000 RM für Verzinsung und Tilgung aufgewendet werden. Um wieviel verkürzt sich die Tilgungsfrist, wenn der Zinsfuß während der ganzen Zeit $3\frac{1}{2}\%$ beträgt?
86. Eine Anleihe, die zu 4% verzinst und mit 2% getilgt wird, soll, wenn ihr Betrag auf die Hälfte zusammengesmolzen ist, in eine mit $3\frac{1}{2}\%$ zu verzinsende Anleihe umgewandelt werden. Welche Verkürzung erfährt die Tilgungsfrist, wenn der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung derselbe bleibt?
87. Beantworte dieselbe Frage für den Fall, daß sich der ursprüngliche Zinsfuß auf $4\frac{1}{2}\%$, der neue Zinsfuß auf 4%, die Tilgungsquote auf $1\frac{1}{2}\%$ stellt.

Z W E I T E S K A P I T E L

Komplexe Zahlen

§ 8. Vorübungen und einfachste Rechnungen mit imaginären und komplexen Zahlen

Einführung der imaginären Einheit

Bei der Auflösung quadratischer Gleichungen stößt man häufig auf Quadratwurzeln aus negativen Zahlen. Die quadratischen Gleichungen wären in allen diesen Fällen unlösbar, wenn man sich dabei beruhigen wollte, daß man $\sqrt{-a}$ durch keine der bis dahin bekannten (positiven, negativen, ganzen, gebrochenen, rationalen, irrationalen, kurz:) *reellen* Zahlen ausdrücken kann. Deshalb führt man die imaginären Zahlen und eine besondere *imaginäre Einheit* $\sqrt{-1}$ ein, indem man festsetzt, daß der für positive Radikanden gültige Satz $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ auch gelten soll für

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}.$$

Bei Benutzung der von *Euler* (1777) eingeführten Abkürzung

$$\sqrt{-1} = i$$

lautet die vorige Gleichung dann:

$$\sqrt{-a} = i \sqrt{a}.$$

Schreibe hiernach die folgenden Wurzeln in möglichst einfacher Form¹⁾:

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------------------|
| 1. a) $\sqrt{-16}$, | b) $\sqrt{-25}$, | c) $3\sqrt{-9}$, | d) $2\sqrt{-36}$. |
| 2. a) $\sqrt{-m^2}$, | b) $\sqrt{-p^6}$, | c) $\sqrt{-q^{14}}$, | d) $\sqrt{-r^2}$. |
| 3. a) $\sqrt{-3}$, | b) $\sqrt{-17}$, | c) $\sqrt{-4a}$, | d) $\sqrt{-ab}$. |
| 4. a) $\sqrt{-20}$, | b) $\sqrt{-45}$, | c) $\sqrt{-8}$, | d) $\sqrt{-x^3}$. |
| 5. a) $\sqrt{-x^2y^2}$, | b) $\sqrt{-xy^3}$, | c) $\sqrt{-x^4y^3}$, | d) $\sqrt{-x^4my^6n}$. |
| 6. a) $5\sqrt{-12}$, | b) $2\sqrt{-50}$, | c) $3\sqrt{-80}$, | d) $\sqrt{-4ab^2}$. |
| 7. a) $\sqrt{-3a^4}$, | b) $2\sqrt{-18a^2b}$, | c) $\sqrt{-32a^5b^3}$, | d) $\frac{1}{2}\sqrt{-20a^3b^4}$. |

8. Schreibe die Definitionsgleichung $i = \sqrt{-1}$ in Form einer Potenzgleichung.

9. Wie groß ist hiernach: a) $2i^2$, b) $-5i^2$, c) $0,3i^2$, d) $17i^2 - 19i^2$, e) $-\frac{3i^2}{4}$?

Das Rechnen mit imaginären Zahlen

10. Aus der Einheit i bildet man alle imaginären Zahlen auf dieselbe Weise wie die reellen Zahlen aus der Einheit 1. Insbesondere setzt man fest, daß die für die reellen Zahlen aufgestellten Additions- und Subtraktionsgesetze auch für die imaginären Zahlen gelten sollen. Berechne hiernach:

- | | | |
|----------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $i + i + i + i + i$, | b) $3i + 4i$, | c) $7i - 2i$, |
| d) $i - i$, | e) $2i - 3i$, | f) $\frac{i}{2} + \frac{i}{2}$, |
| g) $\frac{i}{4} - \frac{i}{2}$, | h) $-\frac{i}{5} - \frac{i}{5} - \frac{i}{5}$, | i) $0,1i - 1,8i$. |

Graphische Darstellung der imaginären Zahlen. Errichte auf der Zahlengeraden, die bisher zur Darstellung der reellen Zahlen gedient hat, im Nullpunkte eine Senkrechte und trage auf dieser vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin die Einheitsstrecke wiederholt ab. Bezeichne die dadurch erhaltenen Teilpunkte (vom Nullpunkt anfangend) nach oben mit $i, 2i, 3i, \dots$, nach unten mit $-i, -2i, -3i, \dots$. Deute das Addieren einer imaginären Einheit als Aufwärtsrücken um eine Einheitsstrecke.

¹⁾ Die unter Nr. 1-7 angegebenen Wurzeln haben - wie jede Quadratwurzel - zwei durch das Vorzeichen unterschiedene Werte. Hier soll dieser Unterschied nicht berücksichtigt, vielmehr nur der sog. *Hauptwert* jeder Wurzel angegeben werden.

11. Um wieviel und in welchem Sinne muß man fortschreiten, wenn man gelangen will a) von $2i$ nach $5i$, b) von $6i$ nach $4i$, c) von 0 nach $-3i$, d) von $-3i$ nach i , e) von $-2i$ nach $-6i$?
12. Welche Strecke liegt zwischen a) $-3i$ und $8i$, b) $-6i$ und i , c) $4i$ und $-4i$, d) $-5i$ und $-i$?
13. Verfolge und prüfe die in Aufgabe 10 ausgeführten Rechnungen am graphischen Bilde.
Für die Multiplikation und Division mit imaginären Zahlen wird festgesetzt, daß der Faktor i genau so behandelt werden soll wie ein reeller Faktor, nur daß immer die Bedingung $i^2 = -1$ beobachtet wird.
14. Berechne a) $3i \cdot 2$, b) $5 \cdot 2i$, c) $2 \cdot (-4i)$, d) $(-0,5) \cdot (-6i)$,
e) $3i \cdot 4i$, f) $ai \cdot b$, g) $a \cdot bi$, h) $ai \cdot bi$.
15. Welchem Zahlengebiete gehört das Produkt zweier Zahlen an, wenn a) beide Zahlen reell sind, b) die eine Zahl reell, die andere imaginär ist, c) beide imaginär sind?
16. Berechne a) $\frac{9i}{3i}$, b) $\frac{ai}{bi}$, c) $\frac{6i}{2}$, d) $\frac{ai}{b}$, e) $\frac{10}{2i}$ (erweitere den Bruch mit i), f) $\frac{a}{bi}$.
17. Welchem Zahlengebiete gehört der Quotient zweier Zahlen an, wenn a) beide Zahlen reell sind, b) die eine Zahl reell, die andere imaginär ist, c) beide Zahlen imaginär sind?
18. Berechne a) $2 \cdot (-5i) \cdot (-i) \cdot (-3i)$, b) $2i \cdot 4i \cdot 5i \cdot 0,1i$.
19. Wann ist ein Produkt, das mehrere imaginäre Faktoren enthält, reell und wann imaginär?
20. Welche Potenzen von i sind reell, und welche sind imaginär?
21. Berechne die 10 ersten Potenzen von i .
22. Beweise, daß a) $i^{4n} = +1$ ist, wobei n eine beliebige positive, ganze Zahl ist, b) $i^{4n+1} = +i$, c) $i^{4n+2} = -1$, d) $i^{4n+3} = -i$. e) Sprich die Ergebnisse von a) bis d) in Form von Sätzen aus.

Berechne

23. a) i^{12} , b) i^{15} , c) i^{25} , d) i^{74} .
24. a) $(-i)^{10}$, b) $(-i)^{32}$, c) $(-i)^{19}$, d) $(-i)^{13}$.
25. a) $-i^{10}$, b) $-i^{32}$, c) $-i^{19}$, d) $-i^{13}$.
- e) Vergleiche die Ergebnisse der Aufgabe 25 mit denen von Aufgabe 24.
26. a) i^{4n-2} , b) i^{4n-1} , c) i^{-4n+3} , d) i^{-12n} .

Bringe die folgenden Produkte auf möglichst einfache Form:

27. a) $7i \cdot i$, b) $3i \cdot 5i$, c) $-ai \cdot bi$, d) $a \cdot bi$.

28. a) $\left(-\frac{a}{3}i\right)\left(-\frac{6bi}{5}\right)$, b) $\left(-\frac{ai}{4}\right)\left(-\frac{2bi^5}{3}\right)$,

c) $ai^3 \cdot bi^5$, d) $i \cdot \sqrt{-4a^2}$.

29. 1) a) $\sqrt{-x^2} \cdot \sqrt{-y^2}$, b) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-1}$,

c) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$, d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$.

30. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-12}$, b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}$,

c) $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}$, d) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{-\frac{8}{3}}$.

31. a) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-ab^4}$, b) $\sqrt{-ab} \cdot i \cdot \sqrt{-ab}$,

c) $\sqrt{-ab^3} \cdot \sqrt{a^3b}$, d) $\frac{1}{i} \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b^3}$.

32. Berechne unter der Voraussetzung $a > b$:

a) $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a}$, b) $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{(b-a)^3}$,

c) $\sqrt{(a-b)^4} \cdot \sqrt{(b-a)^7}$.

Untersuche in jedem der 3 Fälle, ob die angegebene Voraussetzung notwendig oder entbehrlich ist.

33. Berechne $\frac{1}{i}$, indem du den Bruch a) mit i erweiterst (wie in Aufgabe 16e), b) mit i^4 multiplizierst.

Berechne in ähnlicher Weise die folgenden Ausdrücke:

34. a) $\frac{1}{i^3}$, b) $\frac{1}{i^5}$, c) $\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$, d) $\frac{1}{i^8} - \frac{1}{i^6}$.

35. a) $\frac{ai^2}{i^9}$, b) $\frac{(ai)^2}{a \cdot i^{11}}$, c) $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$, d) $\frac{2i^3}{\sqrt{-7}}$.

36. a) $\frac{\sqrt{-a^2}}{i^3}$, b) $\frac{ai^7}{\sqrt{-a^5}}$, c) $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}$, d) $\frac{a-b}{\sqrt{b-a}}$.

e) Untersuche, ob man bei den beiden letzten Quotienten angeben muß, welche der Größen a, b die kleinere sein soll (vgl. Aufgabe 32).

Das Rechnen mit komplexen Zahlen

37. Zahlen von der Form $a + bi$ (die also aus einem reellen und einem imaginären Teile bestehen) heißen *komplexe Zahlen*. Man rechnet mit solchen Zahlen wie mit gewöhnlichen Summen, insbesondere setzt man fest, daß

$$(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)i$$

¹⁾ Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß man diese Aufgaben nicht lösen darf, indem man zuerst die Radikanden multipliziert und dann aus dem Produkt die Wurzel auszieht; wenigstens kann man nicht mehr erwarten, daß der Hauptwert dieser Wurzel eine Lösung der Aufgabe ist. Grund?

sein soll, wobei a, b, c, d reelle Zahlen mit beliebigen Vorzeichen sind¹⁾. Fasse die in dieser Gleichung ausgesprochenen beiden Rechenregeln in Worte.

Berechne

38. a) $(3 + 4i) + (2 + 3i)$, b) $(2 - 3i) + (1 + i)$,
 c) $(-3 + 2i) + (2 - i)$, d) $(3,5 - 0,5i) + (1,5 - 2,5i)$.
39. a) $(1 + i) - (5 + 3i)$, b) $(-2 + 3i) - (2 - i)$,
 c) $(\frac{1}{4} - i) - (\frac{3}{4} + i)$, d) $(-\frac{1}{4} - 2i) - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i)$.

40. Gegeben seien die komplexen Zahlen

- a) $7 - i$, b) $5 - 3i$, c) $2 + 5i$, d) $-1 + 4i$, e) $a + bi$.

Beantworte für jede dieser Zahlen folgende Fragen: Wieviel muß man addieren (subtrahieren), um den reellen Bestandteil zu erhalten? Wieviel muß man addieren (subtrahieren), um den imaginären Bestandteil zu erhalten?

41. Wann ist die Summe zweier komplexer Zahlen a) reell, b) imaginär? c) Welchem Zahlengebiete gehört die Summe zweier komplexer Zahlen im allgemeinen an?
42. Man nennt zwei komplexe Zahlen einander gleich, wenn die reellen Bestandteile unter sich und die imaginären Bestandteile unter sich gleich sind; es ist also $a + bi = c + di$, wenn $a = c$ und $b = d$ ist. Zeige, daß diese Definition im Einklang ist mit der bei den reellen Zahlen oft benutzten Tatsache, daß die Differenz zweier gleicher Zahlen gleich Null ist.

Anleitung: Aus der Gleichung $a + bi = c + di$ läßt sich durch Addition und Subtraktion gleicher Größen die Gleichung $a - c = (d - b)i$ herleiten, die aussagt, daß in diesem Falle eine reelle Zahl gleich einer imaginären Größe ist. Wo liegen bei der graphischen Darstellung die Bilder aller reellen Zahlen? Wo liegen die Bilder der imaginären Zahlen? Wo liegt also das Bild einer Zahl, die zugleich reell und imaginär ist? Folgerung daraus?

43. *Graphische Darstellung der komplexen Zahlen.* Um die Zahl $a + bi$ abzubilden, stellt man zunächst die reelle Zahl a auf der gewöhnlichen Zahlengeraden und dann die imaginäre Zahl bi in der früher (s. Aufgabe 11 bis 13) geübten Weise dar. Die so erhaltenen Bildpunkte und der Nullpunkt bestimmen ein Rechteck, dessen vierte Ecke als das Bild der Zahl $a + bi$ gedeutet wird. Beschreibe die graphische Darstellung der komplexen Zahlen, indem du die Begriffe Abszisse und Ordinate benutzt.
44. Untersuche, ob jeder komplexen Zahl ein Punkt der „Zahlenebene“ eindeutig entspricht und ob auch das Umgekehrte richtig ist.

¹⁾ Dem Schüler wird die hier getroffene Festsetzung der Rechenregeln besonders vernünftig erscheinen, wenn er sie vergleicht mit der Addition und Subtraktion reeller, aber *ungleich benannter* Zahlen, wenn er also z.B. Aufgabe 38a vergleicht mit:

$$(3 \text{ cm} + 4 \text{ g}) + (2 \text{ cm} + 3 \text{ g}).$$

45. Stelle alle in Aufgabe 38 bis 40 vorkommenden komplexen Zahlen graphisch dar.
46. Verfolge die in Aufgabe 38 und 39 ausgeführten Additionen und Subtraktionen am graphischen Bilde; prüfe insbesondere, ob der den vier Fortschreitungsrichtungen (rechts, links; oben, unten) früher beigelegte Sinn auch jetzt noch erhalten bleibt.
47. Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Bestandteils unterscheiden, heißen *konjugiert* komplexe Zahlen. Nenne die konjugierten Zahlen zu den in Aufgabe 40 genannten.
48. Wie heißen die konjugierten Zahlen zu a) $m - ni$, b) $-p + qi$, c) $-a - bi$, d) $\frac{1}{2} - 3i$, e) $-0,4 + 1,2i$?
49. Beschreibe die Lage der Bilder zweier konjugiert komplexer Zahlen bei der graphischen Darstellung?
50. Addiere zu jeder der in Aufgabe 40 genannten komplexen Zahlen die konjugierte.
51. Welchem Zahlengebiete gehört die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen an?
52. Subtrahiere von jeder der in Aufgabe 48 genannten komplexen Zahlen die konjugierte.
53. Zu welcher Zahlenart gehört die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen?
- Für die Multiplikation und Division wird die oben aufgestellte Regel beibehalten, daß mit komplexen Zahlen wie mit gewöhnlichen Summen gerechnet werden soll; nur muß hier noch beachtet werden, daß $i^2 = -1$ ist.

Berechne

54. a) $3(2 + i)$, b) $-2(1 + 0,3i)$,
 c) $i(3 + 2i)$, d) $-\frac{i}{2}(1 + 2i)$.
55. a) $(2 + 3i)(3 + 5i)$, b) $(1 + i)(2 + i)$,
 c) $(3 + 4i)(1 - i)$, d) $(0,2 + 0,5i)(5 + 2i)$.
56. a) $(0,6 + 0,5i)(0,7 - 0,6i)$, b) $(3 + i\sqrt{2})(5 + 7i\sqrt{2})$,
 c) $(5 - 2i\sqrt{7})(6 - 2i\sqrt{7})$, d) $(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$.
57. a) $(a + bi)(c + di)$, b) $(x + iy)(2x + iy)$,
 c) $(p - 2qi)(2p + qi)$, d) $(a - i\sqrt{b})(-a - 2i\sqrt{b})$.
58. Welchem Zahlengebiete gehört das Produkt zweier komplexer Zahlen im allgemeinen an? Grund!

Berechne

59. a) $(3 + 2i)(3 - 2i)$, b) $(7 + i)(7 - i)$,
 c) $(1 - i)(1 + i)$, d) $(a + bi)(a - bi)$.
60. a) $(2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3})$, b) $(3 + 2i\sqrt{2})(3 - 2i\sqrt{2})$,
 c) $(a + i\sqrt{b})(a - i\sqrt{b})$, d) $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$.
61. Welchem Zahlengebiete gehört das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen an? Grund!

62. Zerlege in zwei konjugiert komplexe Faktoren:

- a) $x^2 + y^2$, b) $m^2 + 4n^2$, c) $9a^2 + 16b^2$, d) $a^2 + \frac{b^2}{4}$,
 e) $p^4 + \frac{q^2}{4}$, f) $p + q$, g) $q + 1$, h) $16 + 1$,
 i) $25 + 4$, k) 5, l) 37, m) 65.

63. Zu welcher Zahlenart gehören die Potenzen komplexer Zahlen? (Vgl. Aufgabe 58.)

Berechne

64. a) $(1 + i)^2$, b) $(1 - i)^2$, c) $(a + bi)^2$, d) $(4 + 3i)^2$.
65. a) $(2 + i\sqrt{3})^2$, b) $(5 + 3i\sqrt{2})^2$,
 c) $(2 - i\sqrt{2})^2$, d) $(\sqrt{a} - i\sqrt{b})^2$.
66. a) $(a + bi)^2 + (a - bi)^2$, b) $(a + bi)^2 - (a - bi)^2$.
67. a) $(1 + i)^3$, b) $(1 - i)^3$, c) $(1 + i)^4$, d) $(1 - i)^4$.
68. a) $(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})^2$, b) $(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})^3$.
69. a) $(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})^2$, b) $(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})^3$.
70. a) $(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^4 + (\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^4$, b) $(1 + i\sqrt{2})^5 + (1 - i\sqrt{2})^5$.

Berechne nach dem binomischen Satz (vgl. §15, Aufgabe 5):

71. a) $(1 + i)^8$, b) $(1 - i)^{10}$, c) $(\sqrt{3} + i)^9$.

Einen Bruch, dessen Nenner eine komplexe Zahl ist, berechnet man am einfachsten, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Berechne

72. a) $\frac{5}{1 + 2i}$, b) $\frac{17i}{3 + 5i}$, c) $\frac{1 + i}{1 - i}$, d) $\frac{4 - 3i}{2 + i}$.
73. a) $\frac{17 - 6i}{3 - 4i}$, b) $\frac{5 + 12i}{3 + 2i}$, c) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$, d) $\frac{56 + 33i}{12 - 5i}$.

$$74. a) \frac{4}{1+i\sqrt{3}}, \quad b) \frac{64}{1+3i\sqrt{7}}, \quad c) \frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}, \quad d) \frac{3i}{\sqrt{2}+i}.$$

$$75. a) \frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}, \quad b) \frac{5-29i\sqrt{5}}{7-3i\sqrt{5}}, \quad c) \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \quad d) \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}.$$

$$76. a) \frac{m+ni}{m-ni}, \quad b) \frac{1+i}{(1-i)^3}, \quad c) \frac{1-i^2}{(1+i)^3}.$$

$$77. a) \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}, \quad b) \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}, \quad c) \frac{1}{(1+i)^4} - \frac{1}{(1-i)^4}.$$

$$78. a) \frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{x-i\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1), \quad b) \frac{a+bi}{c+di} + \frac{a-bi}{c-di}, \quad c) \frac{a+bi}{c+di} - \frac{a-bi}{c-di}.$$

$$79. a) \frac{\sqrt{x+i\sqrt{y}}}{\sqrt{x-i\sqrt{y}}} - \frac{\sqrt{y+i\sqrt{x}}}{\sqrt{y-i\sqrt{x}}}, \quad b) \frac{\sqrt{1+a+i\sqrt{1-a}}}{\sqrt{1+a-i\sqrt{1-a}}} - \frac{\sqrt{1-a+i\sqrt{1+a}}}{\sqrt{1-a-i\sqrt{1+a}}}.$$

80. Um zu zeigen, daß die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ist, setzt man zunächst $\sqrt{a+bi} = c+di$, quadriert beiderseits und vergleicht die reellen Bestandteile miteinander und die imaginären miteinander. a) Zeige weiter nach dem Vietaschen Wurzelsatz (7.-9. Schuljahr § 37, Aufgabe 170), daß c^2 und $(-d^2)$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - ax - \frac{b^2}{4} = 0$ sind. b) Warum ergibt diese Gleichung stets reelle Werte für c und d ? (Achte auf die Diskriminante!)

Berechne so

$$81. a) \sqrt{2i}, \quad b) \sqrt{-i}, \quad c) \sqrt{5+12i}, \quad d) \sqrt{35-12i}.$$

$$82. a) \sqrt{21+20i}, \quad b) \sqrt{63-16i}, \quad c) \sqrt{15+8i}, \quad d) \sqrt{9+40i}.$$

$$83. a) \sqrt{-13+84i}, \quad b) \sqrt{8+6i}, \quad c) \sqrt{-77+36i}, \quad d) \sqrt{-33-56i}.$$

$$84. a) \sqrt{3,75+2i}, \quad b) \sqrt{-0,75+i}, \quad c) \sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}.$$

85. Berechne $(\sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi})^2$ und ziehe in der erhaltenen Gleichung auf beiden Seiten die Quadratwurzeln aus; beweise so die Richtigkeit der Formel¹⁾

$$\sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}.$$

86. Beweise auf ähnliche Art die Formel

$$\sqrt{a+bi} - \sqrt{a-bi} = i\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}.$$

87. a) Addiere, b) subtrahiere die beiden soeben genannten Formeln und zeige so

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

¹⁾ Daß $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ ist, hat schon *Leibniz* (1646-1716) gezeigt.

88. Berechne nach den Formeln in Aufgabe 85 und 86

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{8+6i} \pm \sqrt{8-6i}, & \text{b) } \sqrt{40+9i} \pm \sqrt{40-9i}, \\ \text{c) } \sqrt{15+8i} \pm \sqrt{15-8i}, & \text{d) } \sqrt{35+12i} \pm \sqrt{35-12i}. \end{array}$$

89.–91. Löse nach der Formel in Aufgabe 87 die Aufgaben 81 bis 83.

92. a) b) Desgl. die Aufgaben 84a und b.

93. Desgl.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{2+2i\sqrt{3}}, & \text{b) } \sqrt{7+30i\sqrt{2}}. \\ \text{c) } \sqrt{1-6i\sqrt{10}}, & \text{d) } \sqrt{-a} \quad \left(= \sqrt{0+i\sqrt{a}} \right). \end{array}$$

Über die graphische Ermittlung der Quadratwurzel siehe § 9, Aufgabe 28.

§ 9. Goniometrische Form der komplexen Zahlen.

Moivrescher Lehrsatz

1. Die komplexe Zahl $a+bi$ ist bisher durch einen Punkt bildlich dargestellt worden. Dieser Punkt wurde mit dem Nullpunkt verbunden, die Länge der Verbindungsstrecke sei r . Der Winkel, den sie gegen die horizontale Zahlengerade bildet, sei α ; er soll auf die in der Goniometrie übliche Weise gemessen werden (d.h. die positiv gerichtete Hälfte der horizontalen Zahlengeraden wird entgegengesetzt dem Bewegungssinn des Uhrzeigers gedreht).

Zeige, daß man unter dieser Voraussetzung jede komplexe Zahl in die *goniometrische Form*

$$a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

bringen kann, wobei

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(dieser Wert wird stets absolut genommen),

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}$$

ist. r heißt der *Modul* (oder *absoluter Betrag*), α das *Argument* der komplexen Zahl.

2. Wie groß ist der Modul und das Argument der Zahlen

$$\text{a) } 1+i, \quad \text{b) } -1+i, \quad \text{c) } i-1, \quad \text{d) } \sqrt{3}+i?$$

3. Desgl. von

$$\text{a) } i - \sqrt{3}, \quad \text{b) } -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \text{c) } -2i, \quad \text{d) } 3 + 4i?^1)$$

4. Bringe auf die goniometrische Form

$$\text{a) } 8 + 15i, \quad \text{b) } 12 - 5i, \quad \text{c) } 6 - 5i, \quad \text{d) } -11 - 3i.$$

5. Beschreibe die graphische Darstellung der komplexen Zahlen durch die Größen r und α , indem du den Begriff Polarkoordinaten benutzt.

6. Es ist bei der graphischen Darstellung vielfach zweckmäßig, die komplexen Zahlen nicht nur wie bisher durch Punkte, sondern auch durch *gerichtete Strecken* („Vektoren“) abzubilden, nämlich durch Strecken, deren Länge (durch r) und Richtung (durch α) bestimmt ist. Diese Deutung der komplexen Größen als Vektoren erweist sich als besonders anschaulich bei Einführung der Begriffe Verschiebung (das soll immer bedeuten: Parallelverschiebung) und Drehung (d. h. Drehung um den Anfangspunkt in dem vorhin festgesetzten Sinne). Beweise, daß man zwei komplexe Zahlen graphisch addieren kann, indem man den Vektor der einen verschiebt, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors der anderen fällt. Wo liegt dann die Summe der beiden dargestellten Zahlen?

7. Führe auf diese Weise die in § 8, Aufgabe 38 genannten Additionen graphisch aus.

8. Vergleiche das Gesetz der Addition von Vektoren mit dem physikalischen Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte. Was entspricht a) den Komponenten, b) der Resultante?

9. Erläutere die Subtraktion komplexer Zahlen durch eine Vektorverschiebung (s. Aufgabe 6) und vergleiche diese Operationen mit der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten. – Welches Stück des Kräfteparallelogramms entspricht dabei a) dem Minuendus der Differenz, b) dem Subtrahendus?

10. Führe die in § 8, Aufgabe 39 genannten Subtraktionen durch Vektorverschiebung aus.

11. Erläutere an Symmetrieeigenschaften des graphischen Bildes, daß a) die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen reell, b) die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen rein imaginär ist.

12. Welche der beiden Größen r und α bleibt ungeändert, wenn man die komplexe Zahl $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ mit einer reellen Zahl (z. B. 3) multipliziert?

¹⁾ Das Argument findet man in diesem Falle und in allen folgenden am schnellsten aus der Beziehung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ (unter sorgfältiger Beachtung der Vorzeichen von a und b).

13. Eine komplexe Zahl (z. B. $3 + 4i$) wird mit i multipliziert; in welchem Sinne und um wieviel unterscheidet sich das Argument des Produkts von dem der gegebenen komplexen Zahl?

Beachte, daß $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ und $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ ist.

14. Wie verändert sich also die Lage eines Vektors durch Multiplikation mit i ?
15. Inwiefern ist dies eine Verallgemeinerung der schon zu Anfang getroffenen Festsetzung, daß die imaginären Zahlen auf einer zur ursprünglichen (reellen) Zahlengeraden senkrechten Geraden abgebildet werden sollen?
16. Stelle für jeden der in § 8, Aufgabe 55 genannten Ausdrücke jeden Faktor einzeln und dann das Produkt durch Vektoren dar. Miß die Argumente aus; welche Beziehung erkennst du?
17. Beweise durch Ausführung der Multiplikation (und Anwendung der Additionssätze für \sin und \cos), daß allgemein gilt:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]. \end{aligned}$$

18. Sprich den in Aufgabe 17 enthaltenen Satz in Worten aus.
19. Deute jede der drei komplexen Zahlen als Vektor und benutze beim Aussprechen des vorigen Satzes auch die Begriffe Drehung und Streckung.
20. Bilde $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, und zwar a) rechnerisch, b) zeichnerisch.
21. a) b) Desgl. $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \cdot 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$.
22. Eine komplexe Zahl sei durch Multiplikation zweier anderer entstanden. Beweise allgemein, daß der Vektor des Produkts und der Vektor des einen Faktors ein Dreieck bestimmen, das ähnlich ist dem Dreieck, welches durch den Vektor des anderen Faktors und den Vektor 1 bestimmt wird.
23. Führe die in § 8, Aufgabe 55 geforderten Multiplikationen graphisch mittels ähnlicher Dreiecke aus.
24. Sprich den in Aufgabe 17 bewiesenen Satz als Divisionssatz aus.
25. Führe auf Grund dieses Satzes folgende Divisionen graphisch aus:

$$\text{a) } \frac{5}{1+2i}, \quad \text{b) } \frac{4-3i}{2+i}, \quad \text{c) } \frac{3i}{\sqrt{2}+i};$$

prüfe die Genauigkeit der Zeichnung.

26. Erhebe $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ins Quadrat (nach Aufgabe 17); wie groß ist a) der Modul, b) das Argument des Quadrats?

27. Ermittle graphisch

$$\text{a) } (1,5 + i)^2, \quad \text{b) } \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}\right)^2.$$

28. Eine Zahl $a + bi$ ist durch ihren Vektor gegeben; $\sqrt{a + bi}$ ist graphisch zu ermitteln.

29. Ermittle so

$$\text{a) } \sqrt{5 + 12i}, \quad \text{b) } \sqrt{3 + 4i}, \quad \text{c) } \sqrt{3,75 + 2i};$$

prüfe die Genauigkeit der Zeichnung durch Rechnung (vgl. § 8, Aufgabe 87) und nach Aufgabe 22.

Da die Zahl $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ sich von der Zahl $\cos\alpha + i\sin\alpha$ nur durch die Größe des Moduls unterscheidet, kann man für die Dauer der goniometrischen Umformungen den lästigen Faktor r beiseite lassen und erst am Ende der Operationen entweder (rechnerisch) durch einfache Multiplikation oder (zeichnerisch) durch Vergrößerung in passendem Maßstabe zu den Zahlen mit dem Modul r zurückkehren. Demgemäß beschäftigen sich die folgenden Aufgaben im wesentlichen mit komplexen Zahlen vom Modul 1.

30. Berechne $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)$, indem du zunächst die beiden ersten Faktoren (nach Aufgabe 17) zusammenfaßt und das Ergebnis dann mit dem dritten Faktor multiplizierst.

31. a) Zeige durch das Schlußverfahren der vollständigen Induktion, daß allgemein

$$\begin{aligned} &(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \dots (\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) \\ &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \end{aligned}$$

ist. b) Sprich diesen Satz in Worten aus.

32. Berechne auf möglichst einfache Weise

$$\text{a) } (\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ),$$

$$\text{b) } (\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ),$$

$$\text{c) } (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ),$$

$$\text{d) } (\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^2.$$

33. a) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$

$$\text{b) } (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ),$$

$$\text{c) } (\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ),$$

$$\text{d) } (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)^3.$$

34. Beweise nach Aufgabe 17, daß zunächst für positive ganzzahlige Werte von n der Moivresche Satz gilt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

35. Berechne hiermit

a) $(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)^9$,

b) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{10}$,

c) $(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^7$,

d) $(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)^6$.

36. Beweise folgenden Satz: Erhebt man zwei konjugiert komplexe Zahlen in dieselbe Potenz, so entstehen wieder konjugiert komplexe Zahlen.

Anleitung: 1) Beachte, daß man für $\cos \alpha - i \sin \alpha$ auch schreiben kann:

$$\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha);$$

2) benutze den *Moivreschen* Satz.

37. Berechne so

a) $(\cos 36^\circ - i \sin 36^\circ)^5$,

b) $(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)^4$,

c) $(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)^9$.

38. a) Wie groß ist $[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n$? b) Sprich die Antwort auch in Form eines Lehrsatzes aus.

39. Berechne

a) $(1 + i)^8$, b) $(1 - i)^{10}$, c) $(\sqrt{3} + i)^9$ (vgl. § 8, Aufgabe 71).

Unter x^{-n} versteht man, wenn die Basis x reell ist, den reziproken Wert von x^n ; es wird festgesetzt, daß das auch so bleiben soll, wenn die Basis x eine komplexe Zahl ist.

40. Erweitere den Ausdruck

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n} = \frac{1}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}$$

mit $(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n$ und zeige so, daß der *Moivresche* Satz auch für negative ganzzahlige Werte von n gilt.

41. Berechne

a) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{-9}$,

b) $(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^{-3}$,

c) $(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)^{-5}$.

Forme bei c) die Basis nach Aufgabe 36, Anleitung 1, um.

42. Setze in Nr. 34 statt α den Wert $\frac{\beta}{n}$, wobei n eine ganze Zahl sein soll. Potenziere die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{n}$ (welchem Potenzgesetz muß hier ein erweiterter Gültigkeitsbereich zugeschrieben werden?) und folgere daraus, daß der *Moivresche* Satz auch gilt, wenn der Exponent ein Stammbruch (mit dem Zähler 1) ist. b) Beweise aus der Periodizität der \cos - und \sin -Funktion, daß

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

ist, wobei k jede positive oder negative ganze Zahl (einschließlich Null) sein kann.

43. a) Welche Werte nimmt die rechte Seite der vorstehenden Gleichung (und also auch die linke) an für $k = n, n + 1, n + 2, \dots$? b) Vergleiche diese Werte mit denen, die man für $k = 0, 1, 2, \dots$ erhält. c) Beweise so, daß

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}}$$

nicht mehr und nicht weniger als n verschiedene Werte haben kann.

44. a) Welche Figur bilden die graphischen Bilder dieser n verschiedenen Werte? b) Beschreibe die Symmetrieverhältnisse der Figur.

Berechne alle Werte von

45. a) $\sqrt[4]{\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ}$,

b) $\sqrt[3]{\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ}$,

c) $\sqrt[5]{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ}$.

46. a) $\sqrt[6]{\cos 72^\circ - i \sin 72^\circ}$,

b) $\sqrt[3]{\cos 22^\circ 30' + i \sin 22^\circ 30'}$,

c) $\sqrt[5]{\cos 69^\circ - i \sin 69^\circ}$.

Prüfe bei den Aufgaben 45 und 46 die Richtigkeit der Ergebnisse am graphischen Bilde (Einheitsstrecke passend wählen!).

47. a) Warum braucht man den Moivre'schen Satz für den Fall, daß n ein Bruch von der Form $\frac{p}{q}$ ist, nicht mehr zu beweisen, wenn man nur die Gültigkeit des Potenzgesetzes

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

in geeigneter Weise ausdehnt? b) Welche der beiden Größen p, q entscheidet über die Anzahl der verschiedenen Werte von

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{p}{q}} ?$$

48. Löse die „binomische“ Gleichung $x^3 - 1 = 0$ oder $x^3 = 1$.

Anleitung: $x = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ}$; weiter nach der in Aufgabe 42 b bewiesenen Formel.

49. Gib in allgemeiner Form die Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ an (n te Einheitswurzeln).

50. Löse die Gleichung $x^n - a = 0$.

Anleitung: $x = \sqrt[n]{a} = \underline{a}^{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{1} = \underline{a}^{\frac{1}{n}} \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)^{\frac{1}{n}}$, wobei $\underline{a}^{\frac{1}{n}}$ den Hauptwert von $\sqrt[n]{a}$ bedeutet.

51. Wie viele der n ten Einheitswurzeln (vgl. Aufgabe 49) sind reell, wenn n a) gerade, b) ungerade ist?

52. Warum sind die komplexen Einheitswurzeln immer paarweise konjugiert? (Achte darauf, was in Aufgabe 42b geschieht, wenn man auf der rechten Seite k durch $n - k$ ersetzt, und vergleiche dann Aufgabe 43a und b.)

53. Erläutere am graphischen Bilde, warum die binomischen Gleichungen auch Kreisteilungsgleichungen genannt werden.

Ermittle zeichnerisch

54. a) $\sqrt[3]{1}$, b) $\sqrt[4]{-1}$, c) $\sqrt[6]{i}$.

55. a) $\sqrt[3]{8}$, b) $\sqrt[4]{-625}$, c) $\sqrt[5]{-243}$.

56. Berechne $\sqrt[3]{11 - 2i}$.

Anleitung: Bringe den Radikanden in die goniometrische Form und multipliziere den Hauptwert von $r^{\frac{1}{n}}$ mit den n Werten, die $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}}$ nach Aufgaben 42b, 43c annimmt.

Berechne

57. a) $\sqrt[4]{-1}$, b) $\sqrt[6]{i}$, c) $\sqrt[3]{2 + 3i}$.

58. a) $\sqrt[5]{9 - 8i}$, b) $\sqrt[4]{-3 - 5i}$, c) $\sqrt[6]{-3 + i\sqrt{2}}$.

Gib alle Wurzeln der folgenden binomischen Gleichungen an:

59. a) $x^3 = 7$, b) $x^3 + 10 = 0$, c) $x^5 = 5$.

60. a) $x^6 = 10$, b) $x^8 = 2$, c) $x^{10} = 10$.

61. a) $x^3 = i$, b) $x^4 = i$, c) $x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

62. a) $x^3 = 1 + i$, b) $x^4 = 1 + i$, c) $x^2 = 1 - i$.

§ 10. Wiederholender Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen

1. Nenne die sieben dir bekannten Rechnungsarten.

2. Gib von $m + n$, $m - n$, $m \cdot n$, $m : n$, m^n , $\sqrt[n]{m}$, ${}^n \log m$ folgendes an: a) Die Namen der auszuführenden Rechnungsarten, b) die Namen der Ausdrücke, c) die Namen der Bestandteile.

3. m und n seien zwei natürliche (positive und ganze) Zahlen; welche der sieben in voriger Aufgabe genannten Ausdrücke sind dann sicher auch natürliche Zahlen?

4. Warum führt a) das Addieren, b) das Multiplizieren, c) das Potenzieren mit natürlichen Zahlen stets wieder auf natürliche Zahlen?

5. Welche der sieben Rechnungsarten sind einander entgegengesetzt?
6. m und n seien zwei natürliche Zahlen. Welcher Beschränkung unterliegt die Ausführbarkeit der Rechnung, wenn man verlangt, daß a) die Differenz, b) der Quotient von m und n wieder eine natürliche Zahl sei?
7. Durch welche Rechnungsart wird man zur Einführung a) der negativen Zahlen und der Null, b) der gebrochenen Zahlen veranlaßt?
8. Warum führt man a) die negativen Zahlen und die Null, b) die gebrochenen Zahlen ein?
9. Definiere allgemein a) $m - n$, b) 0, c) $m : n$.

Addition und Subtraktion

10. Sprich das Gesetz

$$a + b = b + a$$

in Worten aus (*kommutatives Gesetz der Addition*).

11. Sprich das Gesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

in Worten aus (*assoziatives Gesetz der Addition*).

12. Ist die Gleichung $a - b = -(b - a)$ der Ausdruck eines Lehrsatzes oder einer Festsetzung?
13. Desgl. $m - m = 0$.
14. Desgl. $(a + b) - c = a + (b - c) = a - (c - b)$.
15. Stelle die Regeln für die Addition und Subtraktion zweier Zahlen m , n auf und gib an, ob diese Regeln beweisbare Lehrsätze oder einfache Festsetzungen sind, wenn m und n a) positive (beachte auch Frage 6a), b) negative, c) relative Zahlen (mit beliebigen Vorzeichen) sind.
16. Stelle ebenso die Gesetze für die Addition und Subtraktion von Klammern auf.

Multiplikation

17. Was versteht man unter $a \cdot b$, wenn a und b natürliche Zahlen sind?
18. Sprich das Gesetz

$$a \cdot b = b \cdot a$$

in Worten aus (*kommutatives Gesetz der Multiplikation*).

19. Unter welchen Voraussetzungen ist das kommutative Gesetz beweisbar?

20. Sprich das Gesetz

$$(a b) \cdot c = a \cdot (b c)$$

in Worten aus (*assoziatives Gesetz der Multiplikation*).

21. Unter welchen Voraussetzungen ist das assoziative Gesetz beweisbar?

22. Welche der vier Gesetze

$$(+a) \cdot (+b) = +ab, \quad (+a) \cdot (-b) = -ab,$$

$$(-a) \cdot (+b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = +ab$$

sind beweisbar? Wie lauten dabei die Voraussetzungen, und welche Gesetze über die Rechnung mit negativen Zahlen muß man zum Beweise benutzen?

Die Beantwortung dieser Fragen ist wesentlich davon abhängig, wie man die Multiplikation allgemein definiert (deswegen ist eine hierauf abzielende Frage vorher absichtlich vermieden worden). Man kann sehr wohl sagen, daß alle vier Gesetze Definitionen sind. Man kann aber auch so sagen: Eine Zahl mit einer positiven Zahl multiplizieren, heißt, sie so oft als Summand setzen, wie die positive Zahl angibt. Eine Zahl mit einer negativen Zahl multiplizieren, heißt, sie zunächst so oft als Summand setzen, wie der absolute Wert des Multiplikators angibt, und dann dem Ergebnis das entgegengesetzte Vorzeichen des Multiplikandus geben.

23. Warum setzt man fest, daß die nicht beweisbaren Gesetze (Aufgabe 22) doch gelten sollen? (*Permanenzprinzip*.)

24. Sprich das Permanenzprinzip in Worten aus, indem du die Begriffe „widerspruchsfrei“ und „ausnahmslos“ (oder gleichwertige) benutzt.

25. Zeige, wie man mittels des Permanenzprinzips und des kommutativen Gesetzes (Aufgabe 18) von dem „vernünftigen“ Ausdruck $(-a) \cdot (+b)$ zu einer Definition des nicht ohne weiteres verständlichen Ausdrucks $(+b) \cdot (-a)$ gelangen kann.

Division

26. Zeige, wie sich aus der allgemeinen Definition der Division (als Umkehrung der Multiplikation) und den Gesetzen in Aufgabe 22 die folgenden Regeln herleiten lassen:

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b},$$

$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

27. a) Wie lauten die Regeln für die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl und die für Division eines Bruches durch eine ganze Zahl? b) Sind das Lehrsätze oder Festsetzungen?

28. a) Wie multipliziert man eine ganze Zahl mit einem Bruch? b) Ist das beweisbar? c) Decke die Beziehungen dieses Gesetzes zu dem kommutativen Gesetz der Multiplikation auf.
29. Wie kommt man dazu, das Gesetz über die Multiplikation zweier Brüche
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
- aufzustellen?
30. Für welche Arten von Zahlen m, n ist bis hierher die Operation (das Symbol) $m \cdot n$ definiert?
31. a) Wie dividiert man eine ganze Zahl durch einen Bruch? b) Läßt sich das beweisen? c) Zeige im einzelnen, welche Schritte zu diesem Gesetz führen.
32. Beantworte dieselben Fragen für die Division eines Bruches durch einen anderen Bruch.
33. Für welche Arten von Zahlen m, n ist bis hierher das Symbol $m:n$ definiert?
34. Wie addiert und subtrahiert man a) gleichnamige, b) ungleichnamige Brüche?
35. Für welche Arten von Zahlen m, n sind die Operationen $m+n$ und $m-n$ nunmehr definiert?
36. Gib zusammenfassend an, für welche Arten von Zahlen die vier Grundrechenarten bis hierher definiert sind.

Potenzierung

37. Definiere die Potenz a^n .
38. Bei dieser ersten Erklärung der Potenz muß man den Exponenten n als eine natürliche Zahl voraussetzen. Warum?
39. Warum braucht über a keine einschränkende Voraussetzung gemacht zu werden?
40. Zähle die sechs Potenzgesetze auf, die man unter der Voraussetzung, daß die Exponenten natürliche Zahlen sind, beweisen kann.
41. Warum definiert man a) $a^0 = 1$, b) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$?
42. Wenn man negative (aber dabei vorläufig noch ganzzahlige) Exponenten zuläßt, kann man zwei von den sechs Potenzgesetzen (Aufgabe 40) entbehren. Nenne die vier unentbehrlichen Potenzgesetze.
43. Warum ist es zweckmäßig, negative Exponenten einzuführen?

Radizierung

44. Definiere $\sqrt[n]{a}$.
45. Schreibe die Gleichung $\sqrt[n]{a} = x$ als Potenzgleichung.
46. Welche Voraussetzung muß man in $\sqrt[n]{a}$ über den Exponenten n machen? Grund! (Einschränkende Voraussetzungen über den Radikanden a siehe unter Aufgabe 49 und 50.)
 $\sqrt[n]{a}$ soll im folgenden immer den sog. „Hauptwert“ der n ten Wurzel bedeuten.
47. a) Wievieldeutig ist x aus der Gleichung $x^2 = a$ bestimmt? b) Wodurch unterscheiden sich die Lösungen? c) Schreibe die Lösungen mittels des Hauptwertes der Quadratwurzel.
48. Wievieldeutig ist x aus der Gleichung $x = a^n$ bestimmt? (Beweis mittels des *Moiwreschen* Lehrsatzes § 9, Aufgabe 34 und 56.)
49. Man setzt bei der Definition von $\sqrt[n]{a}$ zunächst fest, daß a ein beliebiges Vorzeichen haben darf, wenn n ungerade ist, daß dagegen a positiv sein soll, wenn n gerade ist. Warum trifft man diese einschränkende Festsetzung? (Siehe Aufgabe 64.)
50. Welchen Beschränkungen unterliegt die Zahl a , wenn man verlangt, daß $\sqrt[n]{a}$ a) eine ganze Zahl, b) ein Bruch sein soll?
51. Welche Erweiterung erfährt das Zahlengebiet, wenn man diese Beschränkungen fallen läßt?
52. Definiere hiernach a) rationale Zahlen, b) irrationale Zahlen.
53. Welche bisher definierten Zahlengebiete werden a) von den rationalen Zahlen, b) von den irrationalen Zahlen umfaßt?
54. Beweise auf Grund der Definition der Wurzel die Gesetze
- $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$
55. Beachte, daß diese Gesetze nur für die Hauptwerte der Wurzeln (und auch nur für positive Radikanden) gelten. Gib Beispiele dafür an, daß die Gesetze ungültig werden, wenn man noch andere Werte außer den Hauptwerten zuläßt.
56. Auf welche Zahlengebiete können nunmehr die Definitionen der Operationen $m \cdot n$ und $m : n$ ausgedehnt werden?

57. Wie kommt man dazu, Wurzeln als Potenzen mit Bruchexponenten aufzulassen?

58. Was versteht man unter $a^{\frac{1}{n}}$?

59. a) Welche Potenzgesetze bleiben erhalten, wenn man definiert

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}?$$

b) Wie definiert man $a^{\frac{m}{n}}$?

60. Warum ist es zweckmäßig, allgemeine Potenzen mit gebrochenen Exponenten einzuführen?

61. Für welche Arten Exponenten ist das Symbol a^p bis jetzt definiert? (Zähle der Reihe nach alle Arten auf und bezeichne sie auch mit einem gemeinsamen Namen.)

Ist p irrational, so hat die Potenz a^p unendlich viele Werte. (Beweis mittels des *Moirreschen* Satzes.) Solche Potenzen werden daher von der Betrachtung ausgeschlossen.

62. Wie werden irrationale Zahlen a) addiert, b) subtrahiert?

63. Für welche verschiedenen Zahlengebiete sind nunmehr die Operationen $m+n$ und $m-n$ erklärt? (Einzeln aufzählen und auch mit Namen zusammenfassen!)

64. Warum kann man \sqrt{a} mit den bisher definierten Zahlen nicht mehr berechnen, wenn a negativ wird?

65. Welche neuen Zahlen muß man einführen, wenn man in \sqrt{a} für den Radikanden negative Werte zulassen will?

66. Definiere danach die imaginären Zahlen.

67. Welchen gemeinsamen Namen führen die positiven, negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen?

68. Welchen gemeinsamen Namen führen die rationalen und die irrationalen Zahlen?

69. Gib noch einmal zusammenfassend an, durch welche Rechnungsarten und unter welchen Voraussetzungen man geführt wird auf a) negative, b) gebrochene, c) irrationale, d) imaginäre Zahlen.

70. a) Wie bezeichnet man die Einheit der imaginären Zahlen? b) Wie folgt aus dieser Definition der Wert von i^2 ?

71. Was ist $\sqrt{-4}$? Sprich das Gesetz $\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$ in Worten aus. Ist das ein Lehrsatz oder eine Festsetzung? (Sei nicht leichtsinnig in der „Anwendung“ des Gesetzes in Aufgabe 54!)

72. Wie kann man allgemein $a \cdot i$ definieren?
73. Bilde $ai + bi$, $ai - bi$, $ai \cdot bi$, $\frac{ai}{bi}$ und sprich die Rechenregeln für imaginäre Zahlen aus. Sind diese Regeln beweisbar oder nicht?
74. Für welche Arten Zahlen sind jetzt die vier Grundrechnungsarten definiert? (Einzelnen aufzählen und auch mit gemeinsamen Namen nennen.)
75. Berechne die 10 ersten Potenzen von i . Welche in der Aufgabe 73 aufgestellten Rechenregeln muß man dazu benutzen?
76. Gib allgemein an, für welche Werte von k die Potenz i^k den Wert a) i , b) -1 , c) $-i$, d) $+1$ annimmt.
77. Bilde $a(bi)$, $ai(b)$, $\frac{ai}{b}$, $\frac{a}{bi}$. Muß das besonders definiert werden? (Grund!)
78. Was versteht man unter komplexen Zahlen?
79. Welche Beziehung besteht zwischen den quadratischen Gleichungen und a) rein imaginären Zahlen, b) komplexen Zahlen?
80. Inwiefern sind die reellen Zahlen und die rein imaginären Zahlen Sonderfälle der komplexen Zahlen?
81. Wann heißen zwei komplexe Zahlen einander gleich?
82. Bilde $(a + bi) + (c + di)$, $(a + bi) - (c + di)$; wie definiert man die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen?
83. Für welche Arten Summanden ist eine Summe oder Differenz von der Form $x \pm y$ nunmehr erklärt?
84. Wann ist a) die Summe, b) die Differenz zweier komplexer Zahlen reell?
85. Wann ist a) die Summe, b) die Differenz zweier komplexer Zahlen rein imaginär?
86. Wie multipliziert man eine komplexe Zahl a) mit einer reellen, b) mit einer rein imaginären, c) mit einer komplexen Zahl? Kann man das beweisen oder muß man das festsetzen? (Grund!)
87. Zu welchem Zahlengebiete gehören die Potenzen komplexer Zahlen? (Exponenten einstweilen alle ganzzahlig vorausgesetzt; warum?)
88. Was versteht man unter konjugiert komplexen Zahlen? Wie heißen die konjugierten Zahlen zu a) $m + ni$, b) $p - qi$, c) $-\frac{1}{2} - 3i$, d) $-a + bi$?
89. Wann ist das Produkt zweier komplexer Zahlen reell?
90. Wie könnte man hiernach die konjugiert komplexen Zahlen noch definieren?
91. Warum sind die komplexen Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reeller Koeffizienten stets konjugiert?

92. Welchen Zahlengebieten darf die Basis a der Potenz a^n (bei vorläufig ganzzahligem n) angehören?
93. Bringe $(x + iy)$ in die goniometrische Form und berechne mittels des *Moirveschen* Satzes $(x + iy)^{\frac{1}{n}}$ und $(x + iy)^{\frac{m}{n}}$.
94. Hierbei muß mehrfach der Gültigkeitsbereich der Potenzgesetze erweitert werden. An welchen Stellen?
95. Für welche Exponenten p ist jetzt die Potenz $(a + bi)^p$ definiert? Irrationale Zahlen werden aus dem hinter Aufgabe 61 genannten Grunde im allgemeinen ausgeschlossen¹⁾.
96. $\sqrt[n]{a}$ ist bisher definiert für reelle Werte von a , die im Falle $n = 2$ auch negativ sein durften. Zeige, wie man mittels des *Moirveschen* Satzes den Begriff $\sqrt[n]{a}$ erweitern kann für beliebiges ganzzahliges n und für beliebige (auch komplexe) Werte von a .
97. Zeige, daß es zwecklos und überflüssig ist, für andere Werte von n , etwa für gebrochene Werte, den Begriff $\sqrt[n]{a}$ noch besonders zu definieren.

Logarithmierung

98. Definiere ${}^a\log b$.
99. Schreibe die Gleichung ${}^a\log b = c$ in Form einer Potenzgleichung.
100. Gib ganzzahlige Werte von x an, die der Gleichung a) $(-1)^x = (-1)$, b) $i^x = i$ genügen.
101. Wievielwertig wäre also $(-1)\log(-1)$ und $i\log i$?
102. Bilde weitere Beispiele, aus denen man erkennt, daß es zunächst im Interesse der Eindeutigkeit erforderlich ist, in dem Ausdruck ${}^a\log b$ sowohl für a wie auch für b reelle, und zwar positive Werte vorzuschreiben²⁾.
103. Welchem Zahlengebiete gehört der so definierte Logarithmus an³⁾?
104. Wie verträgt sich die oben (Bemerkung hinter Aufgabe 61) getroffene Festsetzung, daß Potenzen mit irrationalen Exponenten ausgeschlossen werden sollen, mit der Benutzung der *Briggischen* Logarithmen, z. B. von $\lg 2 = x$ aus $10^x = 2$? (Benutze den Begriff „Hauptwert des Logarithmus“!)

¹⁾ Näheres über Potenzen mit komplexen Exponenten in der Reihenlehre, § 35.

²⁾ Die Logarithmen komplexer Zahlen kann man lediglich auf Grund unendlicher Reihen definieren. (Siehe § 35.)

³⁾ Über den Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten Irrationalzahlen siehe § 23, Fußnote zu Autg. 27 ff.

D R I T T E S K A P I T E L

Quadratische Gleichungen

§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten, die auf quadratische Gleichungen führen

Gleichungen mit einer leicht erkennbaren Wurzel

1. $x^2 - 4x = 0.$

2. $x^2 - \frac{x}{2} = 3.$

3. $x^3 - 9x = 0.$

4. $x^3 - \frac{x}{4} = 0.$

5. $x^3 - 4x^2 - x = 0.$

6. $x^3 - 6x^2 - 16x = 0.$

7. $10x^3 + 3x = 11x^2.$

8. $5x^3 + 24x = 43x^2.$

9. $x^3 - 1 = 0.$

10. $x^3 + 1 = 0.$

11. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$

12. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$

13. $x^4 = 1.$

14. $x^3 = a^3.$

Gleichungen, die in x^2 oder x^n quadratisch sind

Die folgenden Gleichungen sind durch Einführung einer Hilfsgröße zu lösen:

15. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

16. $x^4 - 21x^2 = 100.$

17. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

18. $x^4 + 9 = 10x^2.$

19. $(x^2 - 10) \cdot (x^2 - 3) = 79.$

20. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40.$

21. $10x^4 - 21 = x^2.$

22. $6x^4 - 35 = 11x^2.$

23. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2.$

24. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0.$

25. $x^4 - 4(a+b)x^2 + 16(a-b)^2 = 0.$

26. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

27. $(x^2 + ax)^2 + m(x^2 + ax) = p.$

28. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0.$

29. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$

30.¹⁾ $x^6 - 9x^3 + 8 = 0.$

31. $8x^6 - 215x^3 - 27 = 0.$

32. $x^6 + 2x^3 + 2 = 0.$

33. $x^6 - 2x^3 + 5 = 0.$

34. $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0.$

35. $(x+2)^8 - 4(x+2)^4 + 13 = 0.$

36. $x^{10} + 33x^5 + 32 = 0.$

37. $x^{10} - 6x^5 + 10 = 0.$

¹⁾ In den folgenden Gleichungen sind *alle* Wurzeln gesucht. (Anwendung der Rechnungen mit komplexen Zahlen, vgl. § 9.)

Wurzelgleichungen. Exponentialgleichungen. Logarithmgleichungen

Löse durch Einführung einer Hilfsgröße die folgenden Gleichungen:

38. $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$.
 39. $x + 10 = 7\sqrt{x}$.
 40. $x + \sqrt{x} = 30$.
 41. $x - 3\sqrt{x} = 28$.
 42. $(\sqrt{x} - 5) \cdot (\sqrt{x} - 7) = 3$.
 43. $(5 - \sqrt{x})^2 = 2(7 + \sqrt{x})$.
 44. $(4 - \sqrt[4]{x}) \cdot (5 - \sqrt[4]{x}) = 2(7 - \sqrt{x})$.
 45. $(\sqrt[4]{x} - 3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 1$.
 46. $(\sqrt[3]{x} - 1)^3 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$.
 47. $7\sqrt[7]{x^5} + 5x\sqrt[7]{x^3} = 66$.
 48. $\sqrt[5]{(3x-5)^3} - \sqrt[5]{(5-3x)^{-3}} = 5,2$.
 49. $x^2 + 5 = 8x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}$.
 50. $2x^2 + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 3$.
 51. $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$.
 52. $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$.
 53. $17^{\frac{x+1}{x-1}} = 71^{\frac{x-1}{x+1}}$.
 54. $5^{x(x-1)} \cdot 2^{x(x+1)} = 64 \cdot 10^{2x}$.
 55. $\lg(7x - 9)^2 + \lg(3x - 4)^2 = 2$.
 56. $\lg\sqrt{2x-1} + \lg\sqrt{x-9} = 1$.
 57. $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2$.
 58. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$.

Reziproke Gleichungen

59. Substituiere in folgenden Gleichungen $x = \frac{1}{y}$ und begründe, warum man sie reziproke Gleichungen nennt:

- a) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$,
 b) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,
 c) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Löse die folgenden reziproken Gleichungen:

60. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.
 61. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$.
 62. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.
 63. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
 64. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.
 65. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.
 66. $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$.
 67. $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$.
 68. $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$.
 69. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.
 70. $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$.
 71. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$.
 72. $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$.
 73. $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$.
 74. $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$.
 75. $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$.
 76. $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.
 77. $2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = 0$.

78. $3x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 7x - 3 = 0.$

79. $3x^5 - 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0.$

80. $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0.$

§ 12. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Summe oder Differenz und Produkt der Unbekannten sind gegeben

- 1.) a) Zeichne die gleichseitige Hyperbel $x \cdot y = 6$. b) Zeichne die Gerade $x + y = 5$. c) Bestimme die Schnittpunkte. d) Berechne aus $x + y = 5$ eine der Größen x oder y und setze ihren Wert in die andere Gleichung ein. Löse die entstehende quadratische Gleichung. e) Berechne aus $x + y = 5$ den Wert $(x + y)^2$. Subtrahiere $4xy$ und bestimme $x - y$.

Löse ebenso graphisch und arithmetisch die folgenden Gleichungen:

2. $x + y = 6$

3. $x - y = 2$

4. $x - y = 7$

5. $y - x = -3$

$x \cdot y = 8.$

$x \cdot y = 48.$

$xy = 30.$

$xy = 4.$

6. $x - y = 5$

7. $x + y = 2$

8. $x - y = \frac{5}{6}$

9. $x \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 19$

$xy = 36.$

$xy = -15.$

$xy = 1.$

$xy = 90.$

Die folgenden Gleichungen sind arithmetisch zu lösen:

10. $x + y = a$

$x \cdot y = b.$

11. $x - y = a$

$xy = b.$

12. $x + y = 2a$

$x \cdot y = a^2.$

13. $x - y = a - b$

$xy = ab.$

14. $x + xy + y = 7$

$x - xy + y = 1.$

15. $2x - xy + 2y = 4$

$2x + xy + 2y = 6.$

Benutze den Vietaschen Wurzelsatz zur Lösung folgender Gleichungen:

16. $x^2 - 8x + 15 = 0.$

17. $x^2 - 13x + 42 = 0.$

18. $x^2 - 2x - 63 = 0.$

19. $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$

20. $x^2 - 200x + 9996 = 0.$

21. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

22. $x^2 + (a - b)x - ab = 0.$

23. $x^2 + px + q = 0.$

*) Solange nur eine Gleichung zwischen x und y vorliegt, erscheinen die beiden Größen als *Variable*; tritt noch eine zweite Gleichung hinzu, so erscheinen sie als *bestimmte*, wenn auch anfangs noch *unbekannte Größen*. Achte auf den Unterschied, aber auch auf das Gemeinsame der beiden Begriffe.

Die folgenden Gleichungen sind arithmetisch durch Einführung von Hilfsgrößen zu lösen:

$$24. \quad \begin{aligned} x + y &= 12 \\ (x - 1) \cdot (y - 1) &= 24. \end{aligned}$$

$$25. \quad \begin{aligned} x + y &= 18 \\ (x - 7) \cdot (y + 3) &= 48. \end{aligned}$$

$$26. \quad \begin{aligned} (x - 8) \cdot (y - 6) &= 0 \\ x + y &= 13. \end{aligned}$$

$$27. \quad \begin{aligned} (x - 3) \cdot (y - 4) &= 0 \\ 4x + 3y &= 36. \end{aligned}$$

$$28. \quad \begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 4 \\ xy &= 9. \end{aligned}$$

$$29. \quad \begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 1 \\ xy &= 36. \end{aligned}$$

$$30. \quad \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 28 \\ xy &= 3. \end{aligned}$$

$$31. \quad \begin{aligned} x^3 - y^3 &= 19 \\ xy &= 6. \end{aligned}$$

Summe der Quadrate und Produkt der Unbekannten sind gegeben

32. a) Zeichne die gleichseitige Hyperbel $x \cdot y = 6$. b) Zeichne den Kreis $x^2 + y^2 = 13$. c) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven. d) Berechne aus $x^2 + y^2 = 13$ und $x \cdot y = 6$ die Werte $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$. Bestimme dann x und y .

Löse in ähnlicher Weise arithmetisch und geometrisch folgende Gleichungen:

$$33. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ xy &= 2. \end{aligned}$$

$$34. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 40 \\ xy &= 12. \end{aligned}$$

$$35. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 130 \\ xy &= 63. \end{aligned}$$

$$36. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4\frac{4}{9} \\ 3xy &= 4. \end{aligned}$$

$$37. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 52 \\ xy &= 24. \end{aligned}$$

$$38. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1,16 \\ 5xy &= 2. \end{aligned}$$

Löse arithmetisch folgende Gleichungen:

$$39. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ xy &= b. \end{aligned}$$

$$40. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2a^2 \\ xy &= a^2. \end{aligned}$$

$$41. \quad \begin{aligned} x^2 + xy &= 78 \\ y^2 - xy &= 7. \end{aligned}$$

$$42. \quad \begin{aligned} x^2 + xy &= 5 \\ y^2 - xy &= 12. \end{aligned}$$

$$43. \quad \begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 57 \\ x^2 - xy + y^2 &= 43. \end{aligned}$$

$$44. \quad \begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 2a \\ x^2 - xy + y^2 &= 2b. \end{aligned}$$

$$45. \quad \begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 39 \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 &= 43. \end{aligned}$$

$$46. \quad \begin{aligned} x^2 + 5xy + y^2 &= 79 \\ x^2 + 3xy + y^2 &= 59. \end{aligned}$$

Summe der Quadrate und Summe oder Differenz der Unbekannten sind gegeben

Löse arithmetisch und graphisch folgende Gleichungen:

47. $x^2 + y^2 = 250$

$x - y = 4.$

48. $x^2 + y^2 = 90$

$x + y = 12.$

49. $x^2 + y^2 = 136$

$x + y = 16.$

50. $x^2 + y^2 = 100$

$x - y = 2.$

Löse arithmetisch - gegebenenfalls durch Einführung von Hilfsgrößen - die Gleichungen:

51. $x^2 + y^2 = a$

$x + y = b.$

52. $x^2 + y^2 = a$

$x - y = b.$

53. $x^2 + y^2 = a^2$

$x + y = 2a.$

54. $x^2 + y^2 = a$

$x - y = 0.$

55. $x(x+2) + y(y+2) = 183$

$x + y = 17.$

56. $x(x+4) + y(y-4) = 9$

$x - y = 1.$

57. $x + y = 58$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10.$

58. $x + y = 100$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14.$

59. $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4$

$x + y = 5.$

60. $\sqrt{x+2} - \sqrt{y-1} = 1$

$x + y = 12.$

61. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 13$

$x - y = -3.$

62. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$

$x + y = 0.$

Differenz der Quadrate und Summe oder Differenz der Unbekannten sind gegeben

Bestimme graphisch und arithmetisch die Wurzeln der Gleichungen:

63. $x^2 - y^2 = 7$

$x - y = 1.$

64. $x^2 - y^2 = 24$

$x + y = 6.$

65. $x^2 - y^2 = 5$

$x - y = 4.$

66. $x^2 - y^2 = 20$

$y - x = 7.$

Arithmetisch - gegebenenfalls durch Einführung von Hilfsgrößen - sind zu lösen:

67. $x^2 - y^2 = a$

$x - y = b.$

68. $x^2 - y^2 = a$

$x + y = b.$

69. $x^2 - y^2 = a^2$

$x - y = a.$

70. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

$x + y = a - b.$

$$71. (x+2)^2 - y^2 = 56$$

$$x + y = 2.$$

$$72. (x-1)^2 - (y+3)^2 = 3$$

$$x - y = 1.$$

$$73. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$$

$$x - y = 72.$$

$$74. \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$$

$$x - y = 25.$$

Vermischte Beispiele

Löse arithmetisch und graphisch folgende Gleichungen:

$$75. x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 - y^2 = 5.$$

$$76. x^2 + y^2 = 50$$

$$x^2 - y^2 = -48.$$

$$77. x^2 - y^2 = 40$$

$$xy = 21.$$

$$78. x^2 - y^2 = 28$$

$$xy = 48.$$

$$79. x^2 - y^2 = 5$$

$$xy = 6.$$

$$80. x^2 - y^2 = 19$$

$$xy = -90.$$

$$81. x^2 + y^2 = 40$$

$$x = 3y.$$

$$82. x \cdot y = 12$$

$$2x + 3y = 18.$$

$$83. xy = 54$$

$$3x = 2y.$$

$$84. x^2 + y^2 = 50$$

$$9x + 7y = 70.$$

$$85. 4x - 3y = 24$$

$$xy = 96.$$

$$86. 3x - 2y = 11$$

$$x^2 + y^2 = 74.$$

$$87. x^2 + y^2 = 100$$

$$x : y = 3 : 4.$$

$$88. x^2 - y^2 = 640$$

$$x : y = 7 : 3.$$

$$89. x : y = 9 : 4$$

$$x : 12 = 12 : y.$$

$$90. x : y = 3 : 5$$

$$x : 5 = 12 : y.$$

$$91. x + y = 10$$

$$xy = 2(y + 6).$$

$$92. 2x - xy + y + 8 = 0$$

$$x + y = 10.$$

Löse arithmetisch die folgenden Gleichungen:

$$93. 2x^2 - 3y^2 = 24$$

$$2x = 3y.$$

$$94. x(x + y) = 25$$

$$2x + 3y = 10.$$

$$95. 3x^2 - 7y^2 = 84$$

$$3x + 7y = 42.$$

$$96. 5x^2 + y = 3xy$$

$$2x - y = 0.$$

$$97. x^2 + xu + y^2 = 343$$

$$2x - y = 21.$$

$$98. x^2 - xy + y^2 = 5$$

$$2x - 3y = 0.$$

$$99. x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y)$$

$$2x - y = 5.$$

100. $2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100$
 $2x - 3y = 1.$
101. $7(x + 5)^2 - 9(y + 4)^2 = 118$
 $x - y = 1.$
102. $x^2 + y^2 = 130$
 $\frac{x+y}{x-y} = 8.$
103. $(3x - y)(3y - x) = 36$
 $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}.$
104. $\frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 3$
 $\frac{5}{x+1} = \frac{2}{y-1}.$
105. $\frac{10}{x+2} + \frac{9}{y-1} = 5$
 $\frac{2}{x-1} = \frac{4}{y}.$
106. $x^2 + y = y^2 + x - 18$
 $x : y = 2 : 3.$
107. $xy + 72 = 6(2x + y)$
 $x : y = 2 : 3.$
108. $x \cdot y = a$
 $\frac{x}{y} = b.$
109. $x^2 + y^2 = a^2$
 $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$
110. $x^2 - 3xy + y^2 = -31$
 $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43.$
111. $x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8$
 $x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28.$
112. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29$
 $7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43.$
113. $3x^2 + 11xy + 3y^2 = 207$
 $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14.$
114. $x^3 + y^3 = 4x^2 - \frac{3}{4}xy + 4y^2 = 13(x + y).$
115. $x + xy + y = 5$
 $x^2 + xy + y^2 = 7.$
116. $x + xy + y = 11$
 $x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49.$
117. $(x^2 + y^2)(x + y) = a$
 $xy(x + y) = b.$
118. $x + y = a(1 + xy)$
 $x - y = b(1 - xy).$

Die allgemeine Gleichung 2. Grades

119. Beseitige aus der allgemeinen Gleichung 2. Grades

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

den Faktor a . Wann ist das nicht möglich?

120. Beseitige aus der Gleichung 2. Grades

$$x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$$

das Glied axy durch eine Substitution:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Welche geometrische Bedeutung hat diese Substitution? (Berechne α aus $\operatorname{tg} 2\alpha$.)

121. Beseitige aus der Gleichung 2. Grades

$$x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

die linearen Glieder durch eine Substitution:

$$x = x' + m,$$

$$y = y' + n.$$

Wann ist das nicht möglich?

122. Diskutiere die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$x^2 + ay^2 = b.$$

123. Diskutiere die geometrische Bedeutung der Gleichungen

$$x^2 + ax + by + c = 0,$$

$$y^2 + ax + by + c = 0.$$

124. Gib zusammenfassend an, welche geometrischen Gebilde durch die Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dargestellt werden können.

125. a) Wieviel wesentliche Konstanten kommen in der allgemeinen Gleichung 2. Grades vor? b) Gib den Größen x und y der Reihe nach verschiedene Werte, um die Größen a bis e zu bestimmen. c) Wieviel solcher Wertepaare sind notwendig und hinreichend, um die Konstanten a bis e zu bestimmen?

126. Bestimme die Gleichung des Kegelschnitts, der durch folgende 5 Punkte geht:

a) $(0; 1)$, $(2; 4,2)$, $(5; 5)$, $(8; -2,2)$, $(10; 1)$,

b) $(-4; 2)$, $(-3; 6)$, $(0; -3)$, $(5; 2)$, $(2; -4)$,

c) $(-3; -2)$, $(-1; -3)$, $(0; -5)$, $(2; 3)$, $(5; 0)$.

Schnitt zweier Kegelschnitte in allgemeiner Lage

127. Der Kegelschnitt

$$14x^2 + 4xy + 5y^2 + 26x - 5y - 102 = 0$$

liegt in Fig. 8 gezeichnet vor. a) Prüfe durch Berechnung möglichst vieler Punkte die Genauigkeit der Zeichnung¹⁾. b) Untersuche auf Grund der in Aufgabe 120 bis 124 hergeleiteten Kriterien die Gestalt und Lage des Kegelschnitts genauer. - c) Der Kegelschnitt

$$5x^2 + 14xy - 10y^2 - 17x + 50y - 40 = 0$$

¹⁾ Es ist lehrreich, in Fig. 8 einige optische Täuschungen zu beobachten: die Kurven erscheinen bei längerer Betrachtung an manchen Stellen geknickt, an anderen beulig; betrachtet man die Figur von der Seite, so erscheinen andere „Fehler“.

ist ebenfalls in Fig. 8 gezeichnet. d) Prüfe auch bei dieser Kurve die Genauigkeit der Zeichnung. e) Untersuche Gestalt und Lage der Kurve. f) Lies die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kegelschnitte aus der Figur ab. – Es

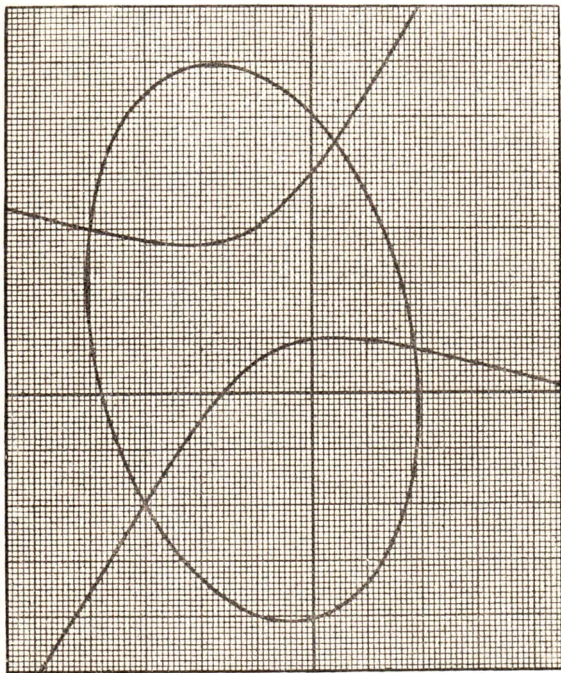


Fig. 8

zeigt sich, daß 2 der Schnittpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. g) Berechne auf Grund dieser Tatsache die Koordinaten der anderen Schnittpunkte genauer. (Andeutung: Gleichung 4. Grades, von der 2 Wurzeln bekannt sind.)

128. a) Zeichne die Kegelschnitte $xy - 2y = 16$,

$$x^2 - 2xy - 2x + 4y + 24 = 0.$$

b) Bestimme aus den beiden Koordinaten der beiden reellen Schnittpunkte die imaginären Lösungspaare des vorgelegten Gleichungssystems (nach der bei Aufgabe 127g gemachten Andeutung).

Löse geometrisch und soweit möglich arithmetisch folgende Gleichungen:

$$129. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 &= 0 \\ 7x + xy + 4y - 20 &= 0. \end{aligned}$$

$$130. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 2y &= 15 \\ 3x + xy + 3y &= 9. \end{aligned}$$

$$131. \quad \begin{aligned} xy &= 1 \\ x^2 + y^2 + 5x + 5y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

$$132. \quad \begin{aligned} 2y^2 - x + 4y + 2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 7x + 2y + 10 &= 0. \end{aligned}$$

$$133. \quad \begin{aligned} 2x^2 - 4x + 1 &= y \\ x^2 + y^2 - 2x - 5y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$$134. \quad \begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 2y &= 9\frac{1}{4} \\ xy &= 1. \end{aligned}$$

$$135. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x + 3y &= 14 \\ x + xy + y &= 5. \end{aligned}$$

Schnitt zweier Kegelschnitte in besonderer Lage

136. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 15$ cm, $b = 10$ cm wird von einer Parabel geschnitten, deren Brennpunkt und Scheitel auf derselben Hälfte der großen Ellipsenachse liegen, und zwar der Brennpunkt um 9 cm, der Scheitel um 13 cm vom Mittelpunkt der Ellipse entfernt. Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Kurven?

137. Dieselbe Ellipse wie in Aufgabe 136 wird von einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, deren Halbachse 12 cm lang ist und deren Asymptoten mit den Achsen der Ellipse zusammenfallen. Wo schneiden sich die beiden Kurven?

138. Dieselbe Ellipse wie in Aufgabe 136 wird von einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten, deren Halbachse 3 cm lang ist und deren Asymptoten die Symmetrielinien des durch 2 Ellipsenhalbachsen bestimmten Rechtecks sind. Wo liegen die Schnittpunkte der Kurven?

139. Der Mittelpunkt einer Ellipse, deren Halbachsen $a = 10$ cm, $b = 7$ cm sind, ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit einem Nebenscheitel der Ellipse zusammenfällt. Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind zu bestimmen.

140. Die Halbachsen einer Hyperbel sind $a = 7$ cm, $b = 8$ cm. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel mit einem Scheitel der Hyperbel zusammenfällt. Wo schneiden sich die beiden Kurven?

141. Die Halbachsen einer Hyperbel sind $a = 6$ cm, $b = 15$ cm; ihre Achsen fallen mit den Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel von $a_1 = 20$ cm Halbachsenlänge zusammen. Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Kurven?

142. Zwei kongruente, nach entgegengesetzten Seiten geöffnete Parabeln, deren Parameter 9 cm beträgt, sind derart übereinandergeschoben, daß ihre Leitlinien einen Abstand von 5 cm, ihre Achsen einen solchen von 3 cm haben. Wo schneiden sich die beiden Parabeln?
143. Zwei konzentrische Ellipsen sind derart gegeneinander gedreht, daß ihre großen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Die Halbachsen der einen sind 40 cm und 25 cm, die der anderen 52 cm und 26 cm lang. Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Ellipsen?
144. Zwei kongruente Ellipsen, bei denen die große Achse doppelt so lang ist wie die kleine, sind so gelegen, daß die kleine Achse der einen Ellipse sich mit einer großen Halbachse der anderen Ellipse deckt. Wo schneiden sich die beiden Ellipsen?

Quadratische Gleichungen mit mehr als 2 Unbekannten

Löse arithmetisch folgende Gleichungen:

145. $x(x + y + z) = -15$
 $y(x + y + z) = 10$
 $z(x + y + z) = 30.$
146. $x(x + y + z) = a$
 $y(x + y + z) = b$
 $z(x + y + z) = c.$
147. $2x - 4y + z = 0$
 $+ y - 4z = 0$
 $(x + 1)(z + 1) = (y - 1)(y + 6).$
148. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
149. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
150. $yz = a,$ $xz = b,$ $xy = c.$
151. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
152. $x + y = 5u$
 $x - y = 2u$
 $x^3 + y^3 = 185u.$
153. $x + y = 2u$
 $x^2 + y^2 = 5u$
 $x^3 + y^3 = 7u^2.$
154. $x : y = y : z$
 $x + y + z = 19$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 133.$
155. $x + y = 7$
 $u + v = 3$
 $x + u^2 = 8$
 $y + v^2 = 4.$
156. $x + y = 12$
 $u + v = 4$
 $x^2 + u^2 = 34$
 $y^2 + v^2 = 50.$
157. $xy = uv$
 $x + y = 16$
 $u + v = 14$
 $\frac{x}{v} + \frac{u}{y} = 4.$
158. $xy = 24$
 $uv = 6$
 $x + u = 14$
 $y + v = 4.$
159. $x + y = 16$
 $u + v = 12$
 $xy + uv = 95$
 $xu + yv = 100.$
160. $x^2 + y^2 = 17$
 $u^2 + v^2 = 13$
 $xy + uv = 10$
 $xu + yv = 14.$

§ 13. Anwendungen der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Vorübungen und Aufgaben aus der Arithmetik

1. Das Produkt zweier Zahlen, die sich wie 3:4 verhalten, ist 588; wie heißen die Zahlen?
2. Zwei Zahlen verhalten sich wie 4:7; die Summe ihrer Quadrate ist 585. Welche Zahlen sind es?
3. Die Quadrate zweier Zahlen, die sich wie 2:5 verhalten, unterscheiden sich um 1029. Wie heißen die Zahlen?
4. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5:11; das Quadrat der ersten ist um 90 kleiner als das 15fache der zweiten. Wie heißen die Zahlen?
5. Die Summe zweier Zahlen ist 90, ihr Produkt 2016. Wie heißen sie?
6. Die Zahl 84 ist in 2 Teile zu zerlegen, deren Produkt 1728 beträgt.
7. Die Zahl 864 ist in 2 Faktoren zu zerlegen, deren Summe gleich 60 ist.
8. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 25, ihr geometrisches Mittel 15. Wie heißen die Zahlen?
9. Die mittlere Proportionale zweier Zahlen, die sich um 21 unterscheiden, ist 14. Welche Zahlen sind es?
10. Vermehrt man das Produkt zweier Zahlen um die erste, so erhält man 300, vermehrt man es dagegen um die zweite, so erhält man 304. Wie heißen die beiden Zahlen?
11. Das Produkt zweier Zahlen ist um 91 größer als das 10fache der ersten Zahl und um 51 größer als das 10fache der zweiten Zahl. Wie heißen die Zahlen?
12. Die Zahl 100 ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß die Summe der Quadrate dieser Teile 5882 beträgt.
13. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 8, die Summe ihrer Quadrate 2210. Wie heißen sie?
14. Die Zahl 100 ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß das Quadrat des 1. Teils um 10 kleiner ist als das 7fache des 2. Teils.
15. Die Summe zweier Zahlen und die Summe ihrer Quadrate betragen zusammen 686, die Differenz der Zahlen und die Differenz ihrer Quadrate zusammen 74. Wie heißen die Zahlen?
16. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 370. Wäre die erste Zahl um 1, die zweite um 3 größer, so wäre die Summe der Quadrate gleich 500. Wie heißen die Zahlen?

17. Die Summe und das Produkt zweier Zahlen betragen zusammen 1063; das Produkt der Zahlen ist um 1099 kleiner als die Summe ihrer Quadrate. Welche Zahlen sind es?
18. In einer zweiziffrigen Zahl ist die Quersumme um 29 kleiner als das Produkt der Ziffern und um 72 kleiner als die Summe der Quadrate der Ziffern. Wie heißt die Zahl?
19. Eine zweiziffrige Zahl ist 3mal so groß wie das Produkt ihrer Ziffern; stellt man die Ziffern der Zahl um, so erhält man eine Zahl, die sich zur ursprünglichen wie 7:4 verhält. Wie heißt die Zahl?
20. Stellt man die Ziffern einer zweiziffrigen Zahl um, so ist die neue Zahl um 18 kleiner als die ursprüngliche; multipliziert man beide Zahlen miteinander, so erhält man 1008. Wie heißt die Zahl?
21. Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 5 als Quotienten und 2 als Rest. Stellt man die Ziffern der Zahl um und führt dann dieselbe Division aus, so erhält man 2 als Quotienten und 5 als Rest. Wie heißt die Zahl?
22. Eine zweiziffrige Zahl ist um 4 größer als die Summe der Quadrate ihrer Ziffern. Schreibt man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so ist die neue Zahl um 5 kleiner als die Summe der Quadrate ihrer Ziffern. Wie heißt die Zahl?
23. Welche zweiziffrige Zahl ist um 4 kleiner als die Summe der Quadrate ihrer Ziffern und um 5 größer als das doppelte Produkt der Ziffern?
24. Vermehrt man den Zähler eines Bruches um 6 und vermindert den Nenner um 2, so ist der neue Bruch doppelt so groß wie der ursprüngliche. Wenn man den Zähler um 3 vermehrt und den Nenner um 3 vermindert, so geht der Bruch in seinen Kehrwert über. Welcher Bruch ist es?
25. Zwei Zahlen unterscheiden sich um 7, ihre Kuben um 8071. Wie heißen die Zahlen?
26. Die Summe zweier Zahlen ist 50; vermehrt man die erste um 3 und vermindert die zweite um 3, so betragen die Kuben der neuen Zahlen zusammen 35000. Wie heißen die Zahlen?
27. Die Zahl 16120 ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß die Summe der Kubikwurzeln dieser Teile gleich 40 ist.
28. Die Summe zweier Zahlen ist um 76 größer als ihr geometrisches Mittel. Die Quadratwurzel aus der einen Zahl ist um 6 größer als die Quadratwurzel aus der anderen. Welche Zahlen sind es?

29. Multipliziert man die Summe zweier Zahlen mit der Differenz ihrer Quadrate, so erhält man 1296; multipliziert man dagegen die Differenz der Zahlen mit der Summe ihrer Quadrate, so erhält man 680. Wie heißen die Zahlen?
30. Drei Zahlen geben paarweise miteinander multipliziert die Produkte 84, 120, 280. Welche Zahlen sind es?
31. Multipliziert man die Summe dreier Zahlen mit je einer von ihnen, so erhält man die Produkte 240, 270, 390. Wie heißen die Zahlen?
32. Dividiert man 3 Zahlen, deren Summe 100 ist, der Reihe nach mit 3, 4, 5, so ist die Summe der erhaltenen Quotienten gleich 25. Das Produkt der beiden letzten Zahlen ist $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie das Quadrat der ersten. Welche Zahlen sind es?
33. Schreibt man die Ziffern einer dreiziffrigen Zahl in umgekehrter Folge, so erscheint eine um 198 kleinere Zahl. Die Summe der Ziffern ist 12, die Summe ihrer Quadrate 74. a) Wie heißt die ursprüngliche Zahl? b) Was würde sich an der Lösung ändern, wenn im ersten Satze das Wort „kleinere“ durch „größere“ ersetzt würde? (Nicht rechnen, nur überlegen!)
34. In einer stetigen Proportion $x:y = y:z$ ist die Summe der 3 Glieder 39, die Summe ihrer Quadrate 741. Wie heißt die Proportion?
35. Multipliziert man von 3 Zahlen die Summe je zweier mit der dritten, so erhält man der Reihe nach 810, 680, 572. Wie heißen die 3 Zahlen?
36. Von 3 Zahlen ist folgendes bekannt: Subtrahiert man von dem Quadrat je einer von ihnen das Quadrat der Differenz der beiden anderen, so erhält man der Reihe nach 3, 5, 15. Welche Zahlen sind es?
37. Vier Zahlen geben zu je 3 miteinander multipliziert die Produkte 120, 150, 240, 400. Wie heißen die Zahlen?
38. In einer Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich 24, die Summe der inneren gleich 16; die Summe der beiden ersten Glieder ist 3mal so groß wie die Summe der beiden letzten. Wie lautet die Proportion?
39. Vier Zahlen bilden eine Proportion. Die Summe des 1. und 4. Gliedes ist gleich 22, die Summe des 2. und 3. gleich 13; die Summe der Quadrate der 4 Zahlen ist gleich 493. Wie heißen die 4 Zahlen?

Aufgaben aus der Planimetrie

40. In einem *Kreise* von 13 cm Radius soll durch einen 5 cm vom Mittelpunkt entfernten Punkt eine Sehne von 25 cm Länge gezogen werden. Wie lang sind ihre Abschnitte?

41. In einem Kreise von 20 cm Radius ist eine Sehne von 24 cm Länge gezogen. Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat der Schnittpunkt der Geraden, die den Kreis in den Endpunkten jener Sehne berühren?
42. Durch 2 konzentrische Kreise von den Radien $r = 25$ cm, $\rho = 17$ cm soll eine Sehne so gelegt werden, daß das in den inneren Kreis fallende Stück 2 Fünftel der ganzen Sehnenlänge ausmacht. Wie lang ist die Sehne, und wie groß ist ihr Abstand vom Mittelpunkt?
43. Außerhalb eines Kreises von 21 cm Radius liegt ein Punkt, der um 29 cm vom Mittelpunkt absteht. Von ihm soll nach dem Kreise eine Sekante gezogen werden, deren innerer Abschnitt 9 cm beträgt. Wie lang ist die Sekante?
44. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 82 cm, die Diagonale 29 cm. Wie lang sind die Seiten?
45. Die Diagonale eines Rechtecks, dessen Fläche 120 m^2 beträgt, hat eine Länge von 17 m. Wie lang sind die Seiten?
46. Die Diagonale eines Rechtecks ist 85 m lang. Vergrößert man jede Seite um 2 m, so beträgt der Inhalt des neuen Rechtecks 230 m^2 mehr als der des früheren. Wie lang sind die Seiten?
47. Die Fläche eines Rechtecks beträgt 168 m^2 , der Umfang 62 m. Wie lang sind die Seiten?
48. Ein Rechteck mit den Seiten 5 cm und 7 cm soll in ein anderes verwandelt werden, dessen Umfang 3 mal so groß ist. Wie lang sind die Seiten des neuen Rechtecks?
49. Die Diagonale eines Rechtecks ist 89 m lang. Wäre jede Seite des Rechtecks 3 m kürzer, so wäre die Diagonale des neuen Rechtecks 4 m kürzer als die des alten. Wie lang sind die Seiten?
50. Die Diagonale eines Rechtecks ist 65 m lang. Wäre die kleinere Seite 17 m kürzer, die größere 7 m länger, so wäre die Diagonale des neuen Rechtecks wieder 65 m lang. Wie lang sind die Seiten?
51. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse 41 m lang ist, beträgt 180 m^2 . Wie lang sind die Katheten?
52. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 30 cm lang, die Höhe 12 cm. Wie lang sind die Hypotenusenabschnitte?
53. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge a ; die 3 Dreiecksseiten bilden eine stetige geometrische Proportion. Wie lang sind die Hypotenusenabschnitte, und durch welche Konstruktion werden sie bestimmt?
54. In einem Dreieck ist eine Seite 39 m, die Summe der beiden anderen 66 m lang. Wie lang sind diese beiden Seiten, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel 60° mißt?

55. Auf 2 sich unter 60° schneidenden Geraden liegen die Punkte A und B 31 m voneinander entfernt. Schiebt man den Punkt A 20 m weiter nach dem Schnittpunkt der Geraden hin, so beträgt die Entfernung zwischen A und B nur noch 21 m. Wie weit sind A und B vom Schnittpunkt entfernt?
56. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
57. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.

Aufgaben aus der Stereometrie

58. Von den 3 in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines *Quaders*, dessen Gesamtoberfläche 568 cm^2 beträgt, ist die erste um 4 cm länger als die zweite und um 4 cm kürzer als die dritte. Wie lang sind die Kanten?
59. Die 3 in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Quaders verhalten sich wie 3:4:12. Die Raundiagonale mißt 91 cm. Wie lang sind die Kanten?
60. Der Inhalt eines Quaders beträgt 595140 m^3 . Aus den 3 in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck von 2730 m^2 Flächeninhalt zusammensetzen. Wie lang sind die Kanten des Quaders?
61. Ein Quader hat eine Höhe von 12 cm, eine Raundiagonale von 13 cm und einen Inhalt von 144 cm^3 . Wie lang sind die Grundkanten?
62. Die Gesamtoberfläche eines Quaders beträgt 552 cm^2 , seine Raundiagonale 17 cm. Die Summe der 1. und der 2. Kante ist um 13 cm größer als die 3. Kante. Wie lang sind die Kanten?
63. Der Achsenschnitt eines *Zylinders* ist ein Rechteck von 26 cm Umfang, die Oberfläche beträgt $44\pi \text{ cm}^2$. Wie groß ist der Rauminhalt?
64. Der Achsenschnitt eines geraden Zylinders, dessen Mantel 220 cm^2 mißt, hat einen Umfang von 34 cm. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius des Zylinders¹⁾?
65. Einer Kugel von 25 m Radius soll ein Zylinder eingeschrieben werden, dessen Mantel 2112 m^2 beträgt. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius des Zylinders¹⁾?
66. Einer Kugel von 29 m Radius ist ein Zylinder eingeschrieben, dessen Achsenschnitt 164 m Umfang hat. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius? (Wie würde diese Aufgabe in planimetrischer Fassung lauten?)
67. Um einen Zylinder von 9680 cm^2 Gesamtoberfläche läßt sich eine Kugel von 50 cm Radius beschreiben. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius des Zylinders¹⁾?

¹⁾ Für π ist hier der Näherungswert $3\frac{1}{7}$ zu nehmen.

68. In einem geraden *Kegel* von $360\pi \text{ cm}^2$ Oberfläche verhält sich der Durchmesser des Grundkreises zur Seitenlinie wie 10:13. Wie lang sind diese beiden?
69. Die Seitenlinie eines geraden Kegels ist um 3 cm größer als der Durchmesser der Grundfläche; die Oberfläche beträgt $36\pi \text{ cm}^2$. Wie groß sind Mantel und Rauminhalt?
70. Die Höhe eines geraden Kegels beträgt 12 cm, der Mantel $135\pi \text{ cm}^2$. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt?
71. Ein gerader Kegel von 4 cm Höhe hat eine Gesamtoberfläche von $24\pi \text{ cm}^2$. Wie groß sind Grundkreisradius und Seitenlinie?
72. Ein gerader Kegel hat eine Gesamtoberfläche von $96\pi \text{ m}^2$ und einen Achsenschnitt von 48 m^2 Flächeninhalt. Wie groß sind Höhe, Grundkreisradius und Seitenlinie?
73. In einem geraden *Kegelstumpf* von $360\pi \text{ cm}^2$ Oberfläche und 10 cm Seitenlinie verhalten sich die Grundkreisradien wie 2:1. Wie lang sind sie?
74. In einem geraden Kegelstumpf von 10 cm Höhe und $390\pi \text{ cm}^3$ Rauminhalt verhalten sich die Grundkreisradien wie 1:3. Wie lang sind sie?
75. Die Summe der Grundkreisradien eines Kegelstumpfes von 21 cm Höhe und 2926 m^3 Volumen beträgt 13 cm. Wie lang sind diese Radien¹⁾?
76. In einem geraden Kegelstumpf von 5 cm Höhe und $140\pi \text{ cm}^3$ Rauminhalt unterscheiden sich die Grundkreisradien um 6 cm. Wie lang sind sie?
77. Ein Kegelstumpf hat eine Höhe von 12 m und ein Volumen von 616 m^3 . Wie lang sind seine Grundkreisradien, wenn deren Produkt 15 m^2 beträgt¹⁾?
78. Ein gerader Kegelstumpf von 12 cm Höhe und 13 cm Seitenlinie hat $532\pi \text{ cm}^3$ Rauminhalt. Wie lang sind die Grundkreisradien?
79. Einer Halbkugel von 3 cm Radius soll (nach Fig. 9) ein gerader Kegelstumpf von $31\pi \text{ cm}^3$ Volumen umschrieben werden. Wie lang sind die Grundkreisradien des Stumpfes? (Zeige zunächst geometrisch, daß die Seitenlinie gleich dem längeren Grundkreisradius ist!)
80. Wie lang sind die Grundkreisradien eines geraden Kegelstumpfes, der einer Kugel vom Radius r umschrieben ist und ein anderthalbmal so großes Volumen besitzt wie diese?
81. Ein gerader Kegelstumpf, der einer Kugel von 6 cm Radius umschrieben ist, hat einen Inhalt von 1672 cm^3 . Wie groß sind Höhe, Grundkreisradien und Mantel¹⁾?
82. Ein gerader Kegelstumpf von 6 cm Höhe hat $182\pi \text{ cm}^3$ Rauminhalt und $100\pi \text{ cm}^2$ Mantelfläche. Wie lang sind die Grundkreisradien?



Fig. 9

¹⁾ Für π ist hier der Näherungswert $3\frac{1}{7}$ zu nehmen.

83. Die Summe der Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes von 3 m Höhe beträgt $80\pi\text{ m}^2$, der Mantel $60\pi\text{ m}^2$. Wie lang sind die Grundkreisradien?
84. Ein gerader Kegelstumpf, dessen Achsenschnitt einem Kreise von $15\pi\text{ m}^2$ Fläche umschrieben ist, hat dieselbe Höhe und dasselbe Volumen wie ein Kegel, dessen Grundkreisradius 7 m lang ist. Wie groß sind Grundkreisradien und Höhe des Kegelstumpfes?
85. Eine Kugelhaube, deren Grundkreis um 16 cm vom Kugelmittelpunkt absteht, mißt $20,020\text{ cm}^2$. Wie lang ist der Kugelradius und wie groß ist die Höhe der Haube¹⁾?
86. Ein Kugelsektor hat $72\pi\text{ m}^3$, das zugehörige Kugelsegment $45\pi\text{ m}^3$ Rauminhalt. Wie lang ist der Radius und wie groß die Höhe des Segments?
87. Eine Kugelschicht von $98\pi\text{ cm}^2$ Gesamtoberfläche liegt zwischen zwei gleich großen Kugelkreisen, deren Ebenen 8 cm voneinander entfernt sind. Zu berechnen sind der Kugelradius, der Radius eines Begrenzungskreises, der Rauminhalt der Schicht und die Fläche der zugehörigen Zone.
88. Wie lang sind die beiden Radien einer Kugelschale, die bei einer Dicke von 3 cm ein Volumen von 792 cm^3 besitzt¹⁾?
89. Ein Kegel, der eine Höhe von 4 cm und einen Grundkreisradius von 13 cm hat, soll in eine Kugelschale von 1 cm Wandstärke verwandelt werden. Wie lang sind deren Radien?
90. Der Metallwert einer silbernen Kugelschale von 5 cm Dicke beträgt 9405 RM. Wie lang sind ihre Radien, wenn die Wichte des Silbers zu $10,5\text{ g/cm}^3$, der Wert von 1 kg Silber zu 90 RM angenommen wird?

Aufgaben aus der Physik

91. Zwei an einem Punkt angreifende Kräfte, die senkrecht zueinander wirken, verhalten sich wie 2:5; ihre Resultante ist 37,7. Wie groß sind die Kräfte?
92. Wie groß sind die Wichten zweier Körper, wenn $a\text{ kg}$ des ersten und $b\text{ kg}$ des zweiten eine Verbindung von der Wichte p , $c\text{ kg}$ des ersten und $d\text{ kg}$ des zweiten eine Verbindung von der Wichte q ergeben?
93. Aufgabe aus früheren Auflagen nicht übernommen.
94. Zwei unelastische Kugeln, von denen die eine 12 kg, die andere 8 kg wiegt, stoßen in genau entgegengesetzter Richtung aufeinander. Bei dem Stoß erleiden sie einen Energieverlust von $13,5\text{ mkg}^2$). Nach dem Stoß bewegen sie

¹⁾ Für π ist hier der Näherungswert $3\frac{1}{7}$ zu nehmen.

²⁾ Die Fallbeschleunigung g ist abgerundet gleich 10 m/s^2 zu setzen.

- sich mit 3 m/s Geschwindigkeit in derselben Richtung wie anfänglich die erste Kugel. Wie groß waren die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln vor dem Stoß?
95. Zwei Drähte setzen bei Hintereinanderschaltung dem elektrischen Strom einen Widerstand von 5 Ohm, bei Nebeneinanderschaltung einen Widerstand von 1,2 Ohm entgegen. Wie groß sind die Widerstände der einzelnen Drähte?
 96. Zwei Drähte, deren Widerstände sich um 1 Ohm unterscheiden, geben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 0,375 Ohm. Wie groß sind die Einzelwiderstände?
 97. Ein Strom von 45 Volt Spannung fließt durch 2 Drähte; die Stromstärke beträgt bei Hintereinanderschaltung der Drähte $\frac{1}{2}$ Ampere, bei Nebeneinanderschaltung $2\frac{1}{4}$ Ampere. Wie groß ist der Widerstand jedes Drahtes?
 98. Der Widerstand dreier Drähte beträgt bei Hintereinanderschaltung 168 Ohm, bei Nebeneinanderschaltung 12 Ohm. Die beiden ersten Drähte geben bei Nebeneinanderschaltung einen doppelt so großen Widerstand wie der dritte Draht allein. Wie groß ist der Widerstand jedes einzelnen Drahtes?
 99. Ein Hohlspiegel von 15 cm Brennweite entwirft von einem auf seiner Achse gelegenen leuchtenden Punkt ein Bild, das von diesem in der Richtung nach dem Spiegel zu um 72 cm entfernt ist. Wie groß sind Gegenstandsweite und Bildweite?
 100. Auf der Achse einer Linse von 24 cm Brennweite liegt ein leuchtender Punkt; das durch die Linse entworfene Bild dieses Punktes ist von ihm 150 cm entfernt. Wie groß sind Gegenstandsweite und Bildweite?
 101. Auf einen Hohlspiegel von 20 cm Brennweite fällt Licht von einem Punkt der Achse. Rückt dieser Punkt dem Spiegel um 40 cm näher, so entfernt sich sein Bild um 5 cm vom Spiegel. Wie weit sind beide von diesem entfernt?
 102. Eine Linse von 36 cm Brennweite erzeugt von einem Gegenstande ein Bild, das sich der Linse um 36 cm nähert, wenn sich der Gegenstand um 18 cm von ihr entfernt. Wie groß sind Gegenstandsweite und Bildweite?
 103. Zwei Linsen von 15 cm und 40 cm Brennweite haben dieselbe optische Achse und einen Abstand von 20 cm. Ein leuchtender Punkt ist von der ersten Linse ebensoweit entfernt wie sein durch die beiden Linsen erzeugtes Bild von der zweiten. Wie groß ist diese Entfernung?
 104. Zwei Linsen von 24 cm und 12 cm Brennweite haben dieselbe optische Achse und einen Abstand von 60 cm. Beide Linsen entwerfen von einem vor der ersten Linse stehenden Gegenstand ein Bild, das von diesem 150 cm entfernt ist. Man bestimme die Lage des Gegenstandes und des Bildes.

105. In einem Abstände von 60 cm vor einem Hohlspiegel von 24 cm Brennweite steht eine Linse, deren optische Achse mit der des Hohlspiegels zusammenfällt. Von einem leuchtenden Punkte, der sich 30 cm vor dem Spiegel befindet, wird durch diesen und die Linse zusammen ein Bild erzeugt, das dem Spiegel um 10 cm näher liegt als das Bild, welches von dem leuchtenden Punkte durch die Linse allein erzeugt wird. Die Brennweite der Linse und die Lage der beiden Bilder sind zu bestimmen.

V I E R T E S K A P I T E L

Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsrechnung

§ 14. Kombinatorik

Komplexionen

1. Eine Komplexion ist eine Zusammenstellung von Dingen; die die Komplexionen bildenden Dinge heißen *Elemente*. Bei den Komplexionen kommt es auf die Elemente, ihre Zahl und ihre Anordnung an. Gib die Elemente an, aus denen die Komplexion a) *aceg*, b) *otto*, c) *1234*, d) $+ - +$, e) $\alpha\beta\gamma abc$, f) $a_1, a_2 \dots a_n$ besteht. Bilde Komplexionen aus den Elementen g) a, b, c, d , h) x, y, z , i) $1, 0, 3$, k) $+, -$. Bilde Komplexionen aus l) 4, m) 6 Elementen. Bilde Komplexionen n) aus den 3 Elementen $+1, 0, -1$, o) aus den 5 Elementen A, B, C, D, E .
2. Es seien 3 Elemente a, b und c gegeben. Gib alle Komplexionen an, die man aus diesen Elementen bilden kann, und die aus a) 3 Elementen, b) 2 Elementen, c) 1 Element bestehen. Dabei sind auch die Komplexionen mitzurechnen, in die ein Element mehrfach eintritt. Komplexionen, die sich durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden, sind verschieden.
3. Es seien die 4 Elemente a, b, c, d gegeben. a) Bilde alle Komplexionen dieser Elemente, die aus 2 Elementen bestehen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommen soll, und wobei kein Element wiederholt vorkommen soll. b) Bilde alle Komplexionen dieser Elemente, die aus 3 Elementen bestehen, wobei Komplexionen mit verschiedener Reihenfolge als verschieden gezählt werden, aber kein Element wiederholt vorkommen soll. c) Bilde alle Komplexionen dieser Elemente, die aus 4 Elementen bestehen, wobei die Reihenfolge der Elemente nicht beachtet werden soll, aber Wiederholungen der Elemente gestattet sind.

Permutationen ohne Wiederholung

4. Unter den *Permutationen ohne Wiederholung* von n Elementen versteht man die Komplexionen, die alle n Elemente enthalten, und die sich also nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden. Stelle die verschiedenen Permutationen a) für 2 Elemente a, b , b) für 3 Elemente a, b, c und c) für 4 Elemente a, b, c, d dar, lexikographisch geordnet.
5. Wie oft lassen sich 2 voneinander verschiedene Elemente permutieren?
6. a) Auf wieviel Arten läßt sich bei den 3 voneinander verschiedenen Elementen a, b, c der 1. Platz besetzen? b) Wieviel Möglichkeiten gibt es dann noch für die Besetzung des 2. und 3. Platzes hinter dem Anfangselement? c) Welche Anzahl ergibt sich hiernach für die Permutationen von 3 untereinander verschiedenen Elementen?
7. a) In wieviel Abteilungen lassen sich die Permutationen von 4 Elementen a, b, c, d je nach der Art der Besetzung des 1. Platzes teilen? b) Wieviel Permutationen umfaßt jede dieser Abteilungen, da ja hinter dem Anfangselement noch 3 Plätze mit 3 voneinander verschiedenen Elementen zu besetzen sind?
8. Gib an, wie man die Zahl der Permutationen a) von 5 Elementen aus denen von 4 Elementen, b) von 6 Elementen aus denen von 7 Elementen erhält.
9. Beweise die Formel

$$P_n = n \cdot P_{n-1},$$

wo P_n die Zahl der Permutationen von n Elementen anzeigt.

10. Bestimme den Wert von P_n dadurch, daß du die Gleichungen

$$P_n = n P_{n-1},$$

$$P_{n-1} = (n-1) P_{n-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

miteinander multiplizierst.

11. Beweise die Formel

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n$$

dadurch, daß du ihre Richtigkeit für $n=1$ erweist, ihre Richtigkeit für n annimmst und daraus ihre Richtigkeit für $n+1$ nachweist (Verfahren der *vollständigen Induktion*).

Der Ausdruck $n!$

12. Es werde definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n.$$

Berechne a) $2!$, b) $3!$, c) $4!$, d) $5!$, e) $6!$, f) $7!$.

13. Gib den Ausdruck für a) $(n+1)!$, b) $(n-1)!$, c) $(n+3)!$, d) $(2n)!$, e) $(2n+1)!$ an.
14. Welcher Art darf die Zahl n in dem Ausdruck $n!$ sein?
15. Berechne den Ausdruck $\frac{n!}{n}$ und leite daraus her, welchen Wert man zweckmäßigerweise dem zunächst sinnlosen Werte 0! beilegt (*Permanenzgesetz*).
16. Gib die Produktdarstellung von a) $2(n!)$ und $(2n)!$, b) $1^1 \cdot \frac{1}{2}(n!)$ und $(\frac{1}{2}n)!$, c) $a(n!)$ und $(an)!$, d) $2n - 2!$ und $(2n - 2)!$.

Von den folgenden Ausdrücken ist der Wert einmal für beliebiges n , dann auch für $n = 4$ anzugeben:

17. a) $(n+1)(n!)$, b) $\frac{(n+1)!}{n+1}$, c) $n[(n-1)!]$.
18. a) $n(n+1)[(n-1)!]$, b) $\frac{(n+1)!}{n(n+1)}$, c) $\frac{(n+k)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$.
19. a) $\frac{n!}{3!}$, b) $\frac{n!}{5!}$, c) $\frac{(n+1)!}{n!}$.
20. a) $\frac{n!}{(n-2)!}$, b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$, c) $\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$.
21. a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$, b) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$, c) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$.
22. a) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$, b) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$, c) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

Permutationen mit Wiederholung

23. Bei den 6 Elementen a, b, c, d, e, f werde die Annahme gemacht, daß e und f einander gleich sind. Wieviel von den Permutationen fallen dann miteinander zusammen und welche?
24. Unter den 6 Elementen a, b, c, d, e, f mögen die 3 Elemente d, e, f einander gleich sein. Wieviel und welche Permutationen fallen jetzt miteinander zusammen?
25. a) Unter n Elementen mögen p , die bisher voneinander verschieden waren, einander gleich gesetzt werden. Wieviel Permutationen fallen dann miteinander zusammen? b) Wodurch muß man also die Größe $n!$ dividieren, um die Zahl der Permutationen von n Elementen zu erhalten, unter denen p einander gleich sind?
26. Zeige, daß die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen r, p und q gleiche vorkommen,

$$P w_n = \frac{n!}{r!p!q!} \quad \text{ist.}$$

1) Für geradzahliges n .

27. Stelle die Permutationen der 3 Elemente a, a, b dar, unter denen 2 gleiche sind.
28. Stelle die Permutationen der 4 Elemente a) a, a, a, b , b) a, a, b, c , c) a, a, b, b dar.
29. Stelle die Permutationen der 5 Elemente a) a, a, a, b, b , b) a, a, a, b, c , c) a, a, b, b, c dar.
30. Stelle die Permutationen der 6 Elemente a) a, a, a, a, b, c , b) a, a, a, b, b, c , c) a, a, a, b, c, d , d) a, a, b, b, c, d , e) a, a, b, c, d, e dar.

Gib die Anzahl der Permutationen für die Faktoren folgender Produkte an:

- | | | |
|--------------------------|------------------------|------------------------|
| 31. a) a^2b^5 , | b) $a^2b^2c^2$, | c) $a b^3c^5$. |
| 32. a) $a^3b^3c^3$, | b) $m^4n^4p^4$, | c) $x^5y^5z^5$. |
| 33. a) $a^3b^4c^5d^6$, | b) $ab^3c^5d^7$, | c) $a^2b^4c^6d^8$. |
| 34. a) $ab^2c^3d^4e^5$, | b) $a^2b^2c^2d^2e^2$, | c) $a^3b^3c^3d^3e^3$. |
| 35. a) $a^{m-1}b$, | b) $a^{m-2}b^2$, | c) $a^{m-3}b^3$. |
| 36. a) $a^{m-4}b^4$, | b) a^3b^{m-3} . | c) a^2b^{m-2} . |

Anwendungen

37. Berechne a) P_8 , b) P_{10} , c) P_{15} . - Wieviel Nullen hat die Zahl d) P_{100} , e) P_{1000} ?
38. Wieviel verschiedene a) 4stellige Zahlen kann man mit den Ziffern 1, 3, 5, 6, b) 5stellige Zahlen mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 schreiben, wenn jede Ziffer einmal und nur einmal vorkommen soll?
39. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man a) 10, b) 15 Schüler einer Klasse setzen?
40. Auf wieviel verschiedene Weisen lassen sich a) je 2 Pfennigstücke, Fünfpfennigstücke, Zehnpfennigstücke, Fünfzigpfennigstücke, b) 3 Fünf- und 5 Zehnpfennigstücke in eine Reihe legen?
41. Eine Gesellschaft besteht aus 6 Paaren. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man sie setzen, wenn man die Paare stets zusammenläßt?

Variationen ohne Wiederholung

42. Die aus jedesmal k Elementen bestehenden Komplexionen, die man aus n Elementen ($n > k$) bilden kann, nennt man *Variationen von n Elementen zur k ten Klasse*, und zwar *ohne Wiederholung*, wenn kein Element mehr als einmal vorkommt. Wie groß ist danach die Anzahl der Variationen von n Elementen zur 1. Klasse?

43. Stelle die Variationen der 2. Klasse ohne Wiederholung zusammen von den Elementen a) a, b , b) a, b, c , c) a, b, c, d , d) a, b, c, d, e .
44. Stelle die Variationen der 3. Klasse ohne Wiederholung zusammen von den Elementen a) a, b, c , b) a, b, c, d , c) a, b, c, d, e .
45. Stelle die Variationen der 4. Klasse ohne Wiederholung zusammen von den Elementen a) a, b, c, d und b) die ersten 20 von den Elementen a, b, c, d, e .
46. a) Auf wieviel Arten läßt sich bei 7 Elementen, die zu je 2 ohne Wiederholung variiert werden sollen, der 1. Platz besetzen? b) Wieviel Besetzungsmöglichkeiten bleiben dann noch für den 2. Platz? c) Wieviel Variationen ohne Wiederholung zu je 2 gibt es demnach für 7 Elemente?
47. Wieviel Variationen 2. Klasse ohne Wiederholung gibt es a) für 3, b) für 8, c) für n Elemente?
48. Es sollen 7 Elemente zu je 3 ohne Wiederholungen variiert werden. a) Auf wieviel Arten läßt sich der 3. Platz besetzen? b) Wieviel Variationen zu je 3 ohne Wiederholungen gibt es demnach für 7 Elemente?
49. Wie groß ist die Anzahl der Variationen 3. Klasse ohne Wiederholung a) von 3, b) von 8, c) von n Elementen?
50. Welche Anzahl ergibt sich durch Fortsetzung und Verallgemeinerung dieser Betrachtung für die Variationen ohne Wiederholungen a) von 7 Elementen zu je 4, b) von 7 Elementen zu je 6, c) von n Elementen zu je 4?
51. Beweise die Rekursionsformel

$$V_n^{(k)} = (n - k + 1) V_n^{(k-1)},$$

wo $V_n^{(k)}$ die Variationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholungen bezeichnet.

52. Beweise durch Multiplikation der für k , für $k-1$, für $k-2$ usw. gebildeten Rekursionsformeln die Formel

$$V_n^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1),$$

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

53. Beweise die soeben (Aufgabe 52) genannte Formel für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung durch vollständige Induktion.
54. Wie oft lassen sich n Elemente zu je n ohne Wiederholungen variieren? Wie kann man diesen Sonderfall des Variierens mit einem einzigen Worte bezeichnen?

Variationen mit Wiederholung

55. Stelle die Variationen 2. Klasse mit Wiederholung dar von a) a, b , b) a, b, c , c) a, b, c, d , d) a, b, c, d, e .
56. Stelle die Variationen 3. Klasse dar mit Wiederholung von a) a, b , b) a, b, c , c) a, b, c, d .
57. Gib die Variationen der 4. Klasse von den Elementen a) a, b , b) a, b, c an.
58. Es seien n Elemente zu je k mit Wiederholungen zu variieren. a) Auf wieviel Arten läßt sich der 1. Platz besetzen, b) auf wieviel Arten der 2., c) auf wieviel der 3., d) auf wieviel der p te Platz?
59. Welche Anzahl ergibt sich hieraus für die Variationen mit Wiederholungen von n Elementen zu je 2, welche für die zu je 3, welche für die zu je 5?
60. Beweise die Rekursionsformel

$$Vw_n^{(k)} = n \cdot Vw_n^{(k-1)},$$

wo $Vw_n^{(k)}$ die Variationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholungen bezeichnet.

61. Beweise durch Multiplikation der für k , für $k-1$, für $k-2$ usw. gebildeten Rekursionsformeln die Formel

$$Vw_n^{(k)} = n^k.$$

62. Gib an, welche Voraussetzungen über die Zahlen n und k zu machen sind
a) für die Variationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung,
b) für die Variationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung.

Anwendungen

63. Berechne a) $V_7^{(5)}$, b) $V_{10}^{(2)}$, c) $V_{12}^{(3)}$.
64. Berechne a) $V_n^{(2)}$, b) $V_n^{(n-1)}$, c) $V_n^{(n-2)}$.
65. Berechne a) $Vw_5^{(3)}$, b) $Vw_7^{(2)}$, c) $Vw_{15}^{(3)}$.
66. Berechne a) $Vw_n^{(3)}$, b) $Vw_n^{(n-1)}$, c) $Vw_n^{(n)}$.
67. Wieviel verschiedene Variationen 5. Klasse mit Wiederholung gibt es von den Zahlen a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, b) 0, 2, 4, 6, 8?
68. Wieviel verschiedene Variationen 6. Klasse ohne Wiederholung gibt es von den Zahlen a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, b) 1, 3, 5, 7, 9?
69. Wieviel Würfe (gemeint ist nicht die Augensumme) mit verschiedenen Zahlen sind beim Werfen a) mit 2, b) mit 3 Würfeln möglich?
70. Wieviel Würfe sind überhaupt beim Werfen a) mit 2, b) mit 3 Würfeln möglich?

71. Wieviel verschiedene Variationen a) 1., b) 2., c) 3., d) 4. Klasse mit Wiederholung sind bei den Zeichen +, - möglich? Wieviel Morsezeichen ließen sich aus · und - zusammensetzen, wenn man e) bis zu 3, f) bis zu 4 aufeinanderfolgende Zahlen zuläßt?

Kombinationen ohne Wiederholung

72. Die aus jedesmal k Elementen bestehenden Komplexionen, die man aus n Elementen bilden kann, heißen *Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse*, wenn man die Anordnung der Elemente innerhalb der Komplexionen außer Betracht läßt. Es sind *Kombinationen ohne Wiederholung*, wenn in den Kombinationen kein Element wiederholt vorkommt. Bilde danach die Kombinationen ohne Wiederholung a) der 1., b) der 2., c) der 3. Klasse von den 3 Elementen a, b, c .
73. Bilde die Kombinationen ohne Wiederholung a) 2., b) 3., c) 4. Klasse von den Elementen a, b, c, d .
74. Bilde die Kombinationen ohne Wiederholung a) 1., b) 2., c) 3., d) 4. Klasse der 5 Elemente a, b, c, d, e .
75. Wie groß ist die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen a) zur 1., b) zur n ten Klasse?
76. Wieviel *Amben* (Kombinationen 2. Klasse) ohne Wiederholung sind a) bei 3, b) bei 4, c) bei 5, d) bei 6 Elementen vorhanden?
77. Wieviel *Ternen* (Kombinationen 3. Klasse) ohne Wiederholung sind a) bei 3, b) bei 4, c) bei 5, d) bei 6 Elementen vorhanden?
78. Wieviel *Quaternen* (Kombinationen 4. Klasse) ohne Wiederholung sind a) bei 4, b) bei 5, c) bei 6 Elementen vorhanden?
79. Berechne aus der Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen a) der 1. Klasse die der 2., b) der 2. Klasse die der 3., c) der 3. Klasse die der 4. - Achte darauf, daß die neuen Kombinationen auch wirklich verschieden voneinander sind und sich nicht etwa nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden.
80. Beweise die Rekursionsformel

$$C_n^{(k)} = \frac{n-k+1}{k} C_n^{(k-1)},$$

wo $C_n^{(k)}$ die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung bedeutet.

81. Beweise durch Multiplikation der für k , für $k-1$, für $k-2$ usw. gebildeten Rekursionsformeln die Formel¹⁾

$$C_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

82. Beweise die Formel in der vorhergehenden Aufgabe 81 durch vollständige Induktion.
83. Es seien die Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung gebildet. Wieviel Variationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung lassen sich aus jeder dieser Kombinationen bilden?
84. Beweise die Gleichung

$$V_n^{(k)} = k! C_n^{(k)}.$$

Kombinationen mit Wiederholung

85. Bilde die Kombinationen mit Wiederholung a) der 1., b) der 2., c) der 3. Klasse von den Elementen a, b, c .
86. Bilde die Kombinationen mit Wiederholung a) der 2., b) der 3., c) der 4., d) der 5. Klasse von den Elementen a, b, c, d .
87. Bilde die Kombinationen mit Wiederholung a) der 1., b) der 2., c) der 3. Klasse von den Elementen a, b, c, d, e .
88. Wie groß ist die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen a) zur 1., b) zur n ten Klasse?
89. Berechne aus der Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen a) der 1. Klasse die der 2., b) der 2. Klasse die der 3., c) der 3. Klasse die der 4. - Achte darauf, daß die neuen Kombinationen auch wirklich verschieden voneinander sind.
90. Beweise die Rekursionsformel

$$C w_n^{(k)} = \frac{n+k-1}{k} \cdot C w_n^{(k-1)},$$

wo $C w_n^{(k)}$ die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung bedeutet.

91. a) Beweise durch Multiplikation der für $k-1$, für $k-2$ usw. gebildeten Rekursionsformeln die Formel²⁾

$$C w_n^{(k)} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}.$$

¹⁾ Wenn man das Symbol $\binom{n}{k}$ einführt, was in § 15, Aufgabe 6ff. geschieht, so lautet die Formel kürzer

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}.$$

²⁾ Benutzt man das Symbol $\binom{n}{k}$, so lautet die Formel kürzer

$$C w_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}.$$

b) Zeige, daß man diese Formel auch schreiben kann

$$Cw_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

92. Beweise die Formel in der vorstehenden Aufgabe 91 durch vollständige Induktion.
93. Gib an, welche Voraussetzungen über die Zahlen n und k in den Formeln für die Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung zu machen sind.

Anwendungen

94. Berechne a) $C_7^{(5)}$, b) $C_{10}^{(3)}$, c) $C_{12}^{(2)}$.
95. Berechne a) $C_n^{(2)}$, b) $C_n^{(n-1)}$, c) $C_n^{(n-2)}$.
96. Berechne a) $Cw_5^{(2)}$, b) $Cw_7^{(3)}$, c) $Cw_{15}^{(3)}$.
97. Berechne a) $Cw_n^{(3)}$, b) $Cw_n^{(n-1)}$, c) $Cw_n^{(n)}$.
98. Ein sphärisches Dreieck ist durch 3 der Stücke $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bestimmt, wo a, b und c die Seiten, α, β und γ die Winkel bedeuten. Wieviel Berechnungsaufgaben lassen sich also aus diesen Stücken herstellen?
99. Ein ebenes Dreieck ist durch 3 der Stücke a, b, c, α, β bestimmt, wo a, b und c die Seiten, α und β 2 Winkel bedeuten. (Dabei ist die Bestimmung unter Umständen nicht eindeutig!) Wieviel Konstruktionsaufgaben lassen sich daraus bilden? ● ●
100. Bei der Blindenschrift werden die Buchstaben durch 1 bis 6 Punkte bezeichnet, die irgendwie an eine Stelle des beigegebenen Schemas (Fig. 10) gesetzt werden. Wieviel verschiedene Zeichen a) aus 1, b) aus 2, c) aus 3, d) aus 4, e) aus 5, f) aus 6 Punkten lassen sich bilden, g) wieviel also insgesamt? ● ●
● ●
Fig. 10
101. Beim Kegelspiel werden die Kegel auf ein Feld aufgesetzt, das in Fig. 11 wiedergegeben ist. Wenn irgendeine bestimmte Kegelzahl auf bestimmten Feldern steht, so nennt man das ein „Bild“. Wie viele „Bilder“ gibt es a) mit 1, b) mit 2, c) mit 3, d) mit 4, e) mit 5, f) mit 6, g) mit 7, h) mit 8, i) mit 9 Kegeln; k) wieviel also insgesamt, wenn das Bild mit 0 Kegeln mitgezählt wird? (Achte auf die Symmetrie der Ergebnisse!) ●
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○

Vermischte Aufgaben

102. Es wollen 10 Personen, die bei einem Wirte täglich zu Mittag und zu Abend essen, ihn überreden, ●
Fig. 11

- ihnen so lange die Bezahlung zu stunden, als sie ihre Plätze wechseln können. Wieviel Jahre müßte bei einer solchen Verabredung der Wirt auf sein Geld warten?
103. Wieviel Gerade gibt es, die je 2 von a) 5, b) 6, c) n Punkten verbinden, von denen niemals 3 in einer Geraden liegen?
 104. In wieviel Punkten können sich a) 3, b) 5, c) n Gerade höchstens schneiden?
 105. Auf wieviel Arten lassen sich 7 Karten unter 2 Personen so verteilen, daß die eine 3, die andere 4 erhält?
 106. Auf wieviel Arten lassen sich 9 Karten unter 3 Personen so verteilen, daß die erste 2, die zweite 3, die dritte 4 erhält?
 107. Auf wieviel Arten lassen sich a) 6 Karten unter 3 Personen so verteilen, daß jede 2 erhält, b) 12 Karten unter 4 Personen so, daß jede 3 erhält?
 108. a) Auf wieviel Arten lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so verteilen, daß jeder 8 Karten erhält? b) Auf wieviel Arten kann dasselbe mit 52 Karten geschehen, für jeden Spieler 13 Karten?
 109. Auf wieviel Arten läßt sich ein Produkt aus $2n$ Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 2 Faktoren?
 110. Auf wievielfache Weise läßt sich ein Produkt aus $2n$ Faktoren in 2 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?
 111. Auf wieviel Arten läßt sich ein Produkt aus $3n$ Faktoren in n andere zerlegen, jedes zu 3 Faktoren?
 112. Auf wieviel Arten läßt sich ein Produkt aus $3n$ Faktoren in 3 andere zerlegen, jedes zu n Faktoren?
 113. Wieviel einsilbige Wörter gibt es, die aus 2 Konsonanten bestehen und 1 Vokal, der zwischen jenen steht, wenn man 20 Konsonanten und mit den Umlauten 8 Vokale rechnet?
 114. Wieviel Wörter gibt es bei den Annahmen von Aufgabe 113, die mit 2 Vokalen und 4 Konsonanten geschrieben werden, vorausgesetzt, daß die beiden Vokale die 2. und die 5. Stelle im Worte einnehmen?
 115. Wieviel Würfe, bei denen alle Würfel verschiedene Augenzahl zeigen, lassen sich mit 3 Würfeln tun?
 116. Wieviel Würfe, bei denen 2 Würfel (aber nur 2) gleiche Augenzahl haben, lassen sich mit 4 Würfeln tun?
 117. Wieviel Würfe lassen sich mit 4 Würfeln tun, a) bei denen 2 und 2 Würfel

gleiche Augenzahl haben (aber nicht alle 4), **b**) bei denen 3 (nur 3) Würfel gleiche Augenzahl haben?

118. Das „Internationale Signalbuch“ benutzt 26 Flaggen. Wieviel Signale **a**) mit 2 Flaggen, **b**) mit 3 Flaggen, **c**) mit 4 Flaggen lassen sich festlegen?

119. Früher wurden nicht selten wichtige Erfindungen und Entdeckungen, um die Priorität zu wahren, in Anagrammen niedergelegt, die man durch Buchstabenvertauschungen unkenntlich machte. So hat *Rheita* seine Erfindung des aus 4 konvexen Linsen bestehenden Fernrohrs in das Anagramm *convexa quattuor gefaßt*. Das Anagramm gab er in der Form *cqotunavteuxoar* wieder (nach *Heis*). Nimm an, jemand wollte durch Ausprobieren das richtige Anagramm finden und machte sich daran, alle Buchstabenvertauschungen durchzugehen. Wie lange hätte er damit zu tun gehabt, wenn er in jeder Minute 3 Vertauschungen ausprobierte und jeden Tag 10 Stunden dieser interessanten Arbeit widmete?

§ 15. Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten

Herleitung des binomischen Lehrsatzes

1. Gib an, welche aus a und b als Faktoren gebildeten Produkte beim Ausmultiplizieren **a**) von $(a+b) \cdot (a+b)$, **b**) von $(a+b)(a+b)(a+b)$ auftreten, und wie oft jedes der Produkte auftritt.

2. Von dem Produkt

$$(a+b)(a+b) \dots (a+b)(a+b),$$

dessen Faktorenzahl n sei, sollen die einzelnen Faktoren gliedweise miteinander multipliziert werden. Wie groß ist die Anzahl der Glieder, die **a**) $(n-1)$ mal den Faktor a und einmal den Faktor b , **b**) $(n-2)$ mal den Faktor a und zweimal den Faktor b enthalten?

3. **a**) Zeige, daß der Ausdruck $(a+b)^n$ *homogen* in bezug auf a und b ist, d. h. daß in jedem Gliede des (ausmultiplizierten) Aggregates die Summe der Exponenten die gleiche ist. **b**) Gib die Reihe der Glieder an, abgesehen von ihren Koeffizienten, mit $a^n, a^{n-1}b$ beginnend.

4. Gib den zu dem Gliede **a**) $a^{n-3}b^3$, **b**) a^3b^{n-3} , **c**) $a^{n-k}b^k$, **d**) $a^k b^{n-k}$ gehörigen Koeffizienten in der Entwicklung von $(a+b)^n$ an.

5. Beweise den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \\ + \dots + n a b^{n-1} + b^n.$$

14. a) $\binom{28}{27}$, b) $\binom{56}{55}$, c) $\binom{100}{99}$, d) $\binom{18}{17}$.
15. a) $\binom{27}{25}$, b) $\binom{16}{14}$, c) $\binom{50}{48}$, d) $\binom{51}{49}$.
16. a) $\binom{17}{14}$, b) $\binom{20}{15}$, c) $\binom{25}{20}$, d) $\binom{30}{27}$.
17. a) $\binom{n}{n-1}$, b) $\binom{n+1}{n}$, c) $\binom{n+1}{n-1}$, d) $\binom{n+2}{n-2}$.

18. Begründe, warum man

$$\binom{n}{0} = 1$$

zu setzen hat¹⁾.

19. Wie heißt a) das 7. Glied der Entwicklung von $(a+b)^{10}$, b) das 11. Glied von $(x+y)^{15}$, c) das 8. Glied von $(p+q)^{20}$?
20. Wie heißt a) der 6. und b) der 10. Koeffizient in der 14. Potenz eines Binoms, wie c) der 8. und d) der 18. Koeffizient der 20. Potenz?
21. Wie heißt der r te Koeffizient in den Entwicklungen von a) $(a+b)^n$, b) $(a+b)^{2r}$, c) $(a+b)^{2r-1}$?
22. Wie heißt der Koeffizient a) von a^4b^5 , b) von a^2b^7 in der Entwicklung von $(a+b)^9$?
23. Wie heißt der Koeffizient a) von $a^{10}b^5$, b) von a^3b^{12} in der Entwicklung von $(a+b)^{15}$?
24. Wie heißt der Koeffizient von a) a^7b^3 , b) a^5b^5 , c) a^2b^8 in der Entwicklung von $(a+b)^{10}$? Wie der von d) x^5y^6 und e) x^6y^5 in der Entwicklung von $(x+y)^{11}$?
25. Welche Glieder haben in der Entwicklung von $(a+y)^n$ dieselben Koeffizienten wie a) das 5., b) das 7. und c) das r te Glied, und wie heißen diese Glieder?
26. Welche Glieder haben in der 31. Potenz eines Binoms dieselben Koeffizienten wie a) das 7., b) das 12., c) das 27. Glied, und wie heißen sie?
27. Es sei A der 9. Binomialkoeffizient der Entwicklung von $(a+b)^n$; wie heißt dann der 10. Koeffizient?
28. Die wievielten Koeffizienten sind die beiden größten in den Entwicklungen a) von $(a+b)^9$, b) von $(a+b)^{13}$, und wie heißen sie?
29. Welche Koeffizienten sind die größten in der Entwicklung a) von $(a+b)^7$, b) von $(a+b)^{11}$, c) von $(a+b)^{16}$, und wie heißen sie?

¹⁾ Diese Fassung der Frage ist nur dann berechtigt, wenn man, wie dies in § 14, Aufgabe 15 geschehen ist, bereits $0! = 1$ definiert hat. Sonst muß es statt „zu setzen hat“ heißen „definiert“.

Beispiele

Entwickle nach dem binomischen Satz:

30. a) $(x + a)^6$, b) $(y + b)^8$, c) $(p + q)^{10}$.
 31. a) $(r + t)^5$, b) $(x + y)^7$, c) $(u + v)^9$.
 32. a) $(a - x)^5$, b) $(t - x)^7$, c) $(x - a)^6$.
 33. a) $(1 + x)^6$, b) $(1 - x)^7$, c) $(1 - t)^8$.
 34.¹⁾ a) $(1 + x)^7 + (1 - x)^7$, b) $(x + 1)^7 + (x - 1)^7$.
 35. a) $(1 + x)^8 + (1 - x)^8$, b) $(x + 1)^8 + (x - 1)^8$.
 36. a) $(1 + x)^7 - (1 - x)^7$, b) $(x + 1)^9 - (x - 1)^9$.
 37. a) $(1 + x)^8 - (1 - x)^8$, b) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$.
 38. a) $(a + b)^n + (a - b)^n$, b) $(a + b)^n - (a - b)^n$.

Beweis des binomischen Lehrsatzes durch vollständige Induktion

39. Da $(a + b)^7 = (a + b)^6 \cdot (a + b)$ ist, so kann der binomische Satz für die 7. Potenz aus dem für die 6. Potenz durch Multiplikation sämtlicher Glieder zunächst mit a und danach mit b unter Zusammenziehung der Glieder, die gleiche Potenzen von a und b aufweisen, erhalten werden. a) Wie setzt sich dabei der 3. Koeffizient von $(a + b)^7$ aus 2 Koeffizienten von $(a + b)^6$ zusammen und aus welchen? Aus welchen beiden Koeffizienten von $(a + b)^6$ bildet sich b) der 4. Koeffizient von $(a + b)^7$, aus welchen c) der 5.?
 40. Setze entsprechend a) den 4., b) den 6., c) den 9. Koeffizienten für $(a + b)^{12}$ aus 2 Koeffizienten von $(a + b)^{11}$ zusammen.
 41. Zeige das Bildungsgesetz eines Binomialkoeffizienten aus zweien der vorangehenden Potenz am Pascalschen Dreieck (Aufgabe 12).
 42. Beweise die Formel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

durch Rückgang auf die Bruchdefinition der Binomialkoeffizienten.

43. Beweise den binomischen Lehrsatz mittels der Gleichung in Aufgabe 42 durch vollständige Induktion.

Aufgaben

Entwickle nach dem binomischen Satz:

44. a) $(x - 2y)^7$, b) $(3x + y)^8$, c) $(2x + 3y)^5$.
 45. a) $(1 + x^2)^4$, b) $(1 - x^3)^7$, c) $(1 + x^2)^5$.

¹⁾ In den Aufgaben 34 bis 38 ist nicht erst die ganze Entwicklung der beiden Summanden hinzuschreiben, sondern gleich das Ergebnis.

46. a) $(\frac{1}{2}x + 2)^5$, b) $(\frac{1}{3}x - 3y)^6$, c) $(x^2 - y^3)^6$.
47. a) $(5 - 2t)^6$, b) $(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x)^7$, c) $(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3}y)^4$.
48. a) $(x + \frac{1}{x})^8$, b) $(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})^7$, c) $(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{2a})^6$.
49. a) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^6$, b) $(1 + \sqrt{x})^7 - (1 - \sqrt{x})^7$.
50. a) $(a + bi)^5 + (a - bi)^5$, b) $(a + bi)^6 - (a - bi)^6$.
51. a) $(1 + i)^8 + (1 - i)^8$, b) $(1 + i)^9 + (1 - i)^9$.
52. a) $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$, b) $(1 + i)^{11} - (1 - i)^{11}$.
53. a) $(3 + i\sqrt{5})^7 + (3 - i\sqrt{5})^7$, b) $(3 + i\sqrt{5})^7 - (3 - i\sqrt{5})^7$.
54. a) $(1 + i\sqrt{3})^9 + (1 - i\sqrt{3})^9$, b) $(1 + i\sqrt{3})^9 - (1 - i\sqrt{3})^9$.

Berechne (bis auf 4 Dezimalstellen) mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die folgenden Zahlenwerte:

55. a) $1,1^{10}$, b) $1,02^{20}$, c) $1,003^{22}$, d) $1,0007^{27}$.
56. a) $0,9^9$, b) $0,98^{15}$, c) $0,997^{24}$, d) $0,9995^{30}$.
57. a) $(\frac{91}{90})^{10}$, b) $(\frac{79}{80})^{11}$, c) $(\frac{51}{50})^{12}$, d) $(\frac{29}{30})^{13}$.
58. a) $(\frac{48}{47})^6$, b) $(\frac{83}{84})^7$, c) $(\frac{565}{563})^8$, d) $(\frac{872}{875})^9$.

Berechne (bis auf 6 Dezimalstellen) mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die folgenden Zinsfaktoren:

59. a) $1,04^4$, b) $1,03^5$, c) $1,05^4$, d) $1,03^8$.
60. a) $1,035^6$, b) $1,033 \dots^5$, c) $1,0433 \dots^7$, d) $1,0466 \dots^{10}$.

Vermischte Aufgaben

61. Beweise, daß die Binomialkoeffizienten trotz der Bruchdefinition ganze Zahlen sind.
62. Leite eine einfache Beziehung für die Summe der n ten Binomialkoeffizienten ab, indem du a) in der Entwicklung von $(a + b)^n$ einsetzt $a = b = 1$, oder indem du b) von dem Pascalschen Dreieck ausgehst.
63. Setze in der Entwicklung von $(a - b)^n$ ein $a = b = 1$ und bestimme daraus den Wert der Summe der Binomialkoeffizienten mit alternierendem Vorzeichen.
64. Es möge A die Summe der geradzahigen, B die Summe der ungeradzahigen Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen sein. Was gilt dann von $A + B$ und von $A - B$?
65. Beweise, daß

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1}$$

ist. Erbringe durch fortgesetzte Zerlegung dieser Art den Nachweis, daß $\binom{n}{k}$ eine Summe von ganzen Zahlen, also selbst eine ganze Zahl ist (Aufgabe 61).

66. Bei der Einführung des kubischen Ausdehnungskoeffizienten setzt man

$$(1 + \alpha t)^3 \approx 1 + 3\alpha t.$$

Beurteile den Fehler, den man bei $t = 10^\circ$ und dem mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten a) von Eisen, $\alpha = 0,000012$, b) von Aluminium, $\alpha = 0,000023$, c) von Zink, $\alpha = 0,000036$, begeht.

§ 16. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition der Wahrscheinlichkeit

1. Man definiert die mathematische Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten eines Ereignisses durch die Gleichung

$$w = \frac{m}{n},$$

wo m die Anzahl der günstigen, n die Anzahl der möglichen Fälle ist. Fasse diese Definition in Worte! a) Wie groß ist w im Falle der Gewißheit, b) im Falle der Unmöglichkeit? c) Bei welchen Werten von w wird man sagen, das Eintreten eines Ereignisses sei unwahrscheinlich? d) Wie groß wird w sein, wenn das Einsetzen eines Ereignisses ebenso wahrscheinlich ist wie das Nicht-eintreten?

2. Zeige, daß die Eingrenzung der mathematischen Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 aus der an sich willkürlichen (wenn auch zweckmäßigen) Definition der Wahrscheinlichkeit folgt. Definiere etwa die Wahrscheinlichkeit durch $\frac{m}{m'}$, wo m die Anzahl der günstigen, m' die der ungünstigen Fälle ist; wie sind hier die Werte für die Wahrscheinlichkeit a) im Falle der Gewißheit, b) der Unmöglichkeit, c) bei gleicher Wahrscheinlichkeit für und wider das Eintreten des Ereignisses?
3. a) Gib an, wie groß die mathematische Wahrscheinlichkeit w' dafür ist, daß ein Ereignis *nicht* eintritt, wenn m die Anzahl der für das Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle, n die Anzahl der möglichen Fälle ist. b) Beweise die Gleichung

$$w + w' = 1.$$

4. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit a) mit der Zunahme der günstigen Fälle, b) mit der Abnahme der möglichen Fälle, c) mit der Zunahme der möglichen Fälle, d) mit der Zunahme der ungünstigen Fälle, e) mit der Abnahme der ungünstigen Fälle?

Einfache Beispiele

5. Wie groß ist beim Aufwerfen einer Münze die Wahrscheinlichkeit, Kopf zu werfen?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei einem Wurf a) 6 zu werfen, b) 3 oder 4 zu werfen, c) weder 3 noch 4 zu werfen?
7. In einem Kästchen liegen 4 rote, 8 schwarze und 12 weiße Kugeln. Wie groß ist beim Herausnehmen einer Kugel die Wahrscheinlichkeit, a) eine rote Kugel, b) eine weiße, c) eine schwarze oder eine weiße, d) keine schwarze zu ziehen?
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln in gleichzeitigem Wurf a) zwei 4, b) irgendeinen Pasch, d.h. entweder 1, 1 oder 2, 2 oder 3, 3 usw., c) 4 und 5, d) 1 und 6 zu werfen?
9. a) Untersuche die Wahrscheinlichkeit, daß bei Würfeln mit 2 Würfeln eine Augensumme von 2, von 3, von 4 usw. bis 12 auftritt. b) Stelle die Werte graphisch dar. c) Erkläre die Symmetrie der Werte.
10. a) Untersuche die Wahrscheinlichkeit, daß bei Würfeln mit 3 Würfeln eine Augensumme von 3, von 4 usw. bis 18 auftritt, benutze dabei die Symmetrieeigenschaft der Werte. b) Stelle die Werte graphisch dar.
11. Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) einmal und nur einmal Kopf zu werfen, b) mindestens einmal Kopf zu werfen, c) zweimal Kopf zu werfen?
12. Mit einem Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) einmal und nur einmal 6, b) mindestens einmal 6, c) beide Male 6 zu werfen?

Zur Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung

13. Die folgende Tabelle gibt die von *R. Wolf* erhaltenen Ergebnisse wieder, der mit einem roten und einem weißen Würfel 20000 Würfe gemacht hat.

	1	2	3	4	5	6	
1	547	587	500	462	621	690	weiß
2	609	655	497	535	651	684	
3	514	540	468	438	587	629	
4	462	507	414	413	509	611	
5	551	562	499	506	658	672	
6	563	598	519	487	609	646	

rot

a) Berechne, wie oft jeder Wurf hätte vorkommen müssen; b) stelle eine Tabelle der Abweichungen auf, c) mache (etwa durch farbige Umrandung und Schraffierungen) diejenigen Kombinationen sichtbar, die von der zu erwartenden Zahl nach der einen oder nach der anderen Seite abweichen, hebe diejenigen hervor, die um mehr als 50 abweichen, und von diesen wieder die, die um mehr als 100 abweichen. d) Welche Augenkombinationen sind bei diesen offenbar „schlechten“ Würfeln¹⁾ am häufigsten, welche am seltensten?

14. O. Meißner machte 1800 Würfe mit einem weißen Hornwürfel und erhielt dabei folgende Wurfzahlen:

1	2	3	4	5	6
299	295	303	307	289	307.

Stelle eine Tabelle der Abweichungen von der errechneten Wahrscheinlichkeit auf.

15. Bei den soeben (Aufgabe 14) genannten 1800 Würfeln erschien in 293 Fällen zweimal hintereinander dieselbe Zahl, in 50 Fällen dreimal hintereinander dieselbe Zahl, in 6 Fällen viermal hintereinander dieselbe Zahl. Wie groß sind die Abweichungen von den errechneten Wahrscheinlichkeiten dieser „Sequenzen“?
16. Belege mit Beispielen, daß die Angabe der möglichen Fälle vielfach mit Schwierigkeiten verknüpft ist, wenn sie auf Vollständigkeit Anspruch machen soll (das „Brennen“ beim Würfeln u. dgl.).
17. Belege mit Beispielen, daß die Voraussetzung der Gleichberechtigung aller möglichen Fälle gewisse Forderungen verlangt (z. B. „ideale Unordnung“ der verschiedenfarbigen Kugeln in einer Urne).

Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten

18. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines ersten Ereignisses sei w_1 , diejenige für das Eintreffen eines anderen Ereignisses sei w_2 . Zeige durch Rückgang auf die Definition der Wahrscheinlichkeit, daß dann die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß *entweder* das eine *oder* das andere Ereignis eintritt,

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{ist.}$$

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel a) entweder 1 oder 3 zu werfen, b) entweder 1 oder 3 oder 6 zu werfen?
20. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 7 weißen, 3 roten und 5 schwarzen Kugeln a) entweder eine weiße oder eine rote, b) entweder eine weiße oder eine schwarze, c) entweder eine rote oder eine schwarze zu ziehen?

¹⁾ „Schlecht“ wird man inhomogene Würfel nennen, z. B. solche, deren Schwerpunkt nicht in der Mitte liegt.

21. Sprich das in der Gleichung

$$w = w_1 + w_2 = w_3 + \dots + w_n$$

niedergelegte Gesetz in Worten aus.

22. Zeige, daß bei der Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten die Summe stets ≤ 1 sein muß. Wann ist sie 1?

23. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses sei w_1 , diejenige für das Eintreffen eines anderen, davon unabhängigen Ereignisses sei w_2 . Beweise durch Rückgang auf die Definition der Wahrscheinlichkeit, daß dann die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß *sowohl* das erste *als auch* das zweite Ereignis eintritt,

$$w = w_1 \cdot w_2 \quad \text{ist.}$$

24. Sprich die in den Gleichungen

$$\text{a) } w = w_1 \cdot w_2 \dots w_n,$$

$$\text{b) } w = w_1^n$$

niedergelegten Gesetze in Worten aus.

25. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in 2 Würfeln a) erst 1 und dann 5, b) erst 5 und dann wieder 5, c) erst eine gerade und dann eine ungerade Zahl zu werfen?

26. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 7 weißen, 3 roten und 5 schwarzen Kugeln a) erst eine rote, dann eine schwarze, b) erst eine schwarze, dann eine rote, c) erst eine weiße, dann eine schwarze, d) erst eine weiße und dann wieder eine weiße Kugel zu ziehen? In jedem Falle ist die zuerst gezogene Kugel vor der 2. Ziehung in die Urne zurückzulegen¹⁾.

27. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 10 weißen, 6 roten und 4 schwarzen Kugeln a) erst eine rote, dann eine schwarze, b) erst eine schwarze, dann eine rote, c) erst eine weiße, dann eine schwarze, d) erst eine weiße und dann wieder eine weiße Kugel zu ziehen? Die zuerst gezogene Kugel ist *nicht* wieder in die Urne zurückzulegen.

28. Bei den Wetterprognosen ist die Wahrscheinlichkeit für die richtige Angabe der Temperatur $\frac{1}{3}$, der Bewölkung $\frac{1}{4}$, des Windes $\frac{1}{5}$, des Niederschlages $\frac{1}{6}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wetterprognose mit allen ihren Angaben das Richtige trifft? – Dabei ist die nicht ganz zutreffende Annahme zu machen, daß die 4 Größen unabhängig voneinander sind.

29. Zur Unterscheidung der Fälle, in denen die Wahrscheinlichkeiten zu addieren sind, von denen, in denen sie zu multiplizieren sind, kann die folgende Regel dienen: Stehen die Ereignisse im Verhältnis des „Sowohl – als auch“, so sind

¹⁾ Will man gewissenhaft sein, so müßte man noch hinzufügen: Die Kugeln sind nach dem Zurücklegen durch Schütteln erneut in „ideale Unordnung“ zu bringen.

die Wahrscheinlichkeiten zu *multiplizieren*, stehen die Ereignisse im Verhältnis des „*Entweder – oder*“, so sind die Wahrscheinlichkeiten zu *addieren*. Belege die Regel mit einigen Beispielen aus den Angaben 18 bis 29.

Vermischte Aufgaben

30. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit 3 Würfeln a) 3 ungleiche Augenzahlen, b) 3 aufeinanderfolgende Augenzahlen zu werfen?
31. Eine Münze wird dreimal aufgeworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) einmal und nur einmal, b) mindestens einmal, c) dreimal, d) mindestens zweimal Kopf zu werfen?
32. D'Alembert berechnete die Wahrscheinlichkeit, daß bei zweimal aufgeworfener Münze mindestens einmal Kopf erscheint, zu $\frac{2}{3}$, indem er 3 mögliche Fälle unterschied: 1. beim ersten Male Kopf, 2. beim ersten Male nicht Kopf, aber beim zweiten Male, 3. beim ersten und beim zweiten Male Schrift (bzw. Wappen). Decke den Fehlschluß auf und vergleiche den falschen mit dem richtigen Wert der Wahrscheinlichkeit (siehe Aufgabe 11).
33. Eine Münze wird n mal aufgeworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) jedesmal Kopf zu werfen, b) nur einmal Kopf zu werfen, c) mindestens einmal Kopf zu werfen?
34. In einer Urne sind 12 weiße und 8 schwarze Kugeln. Wie groß ist bei gleichzeitigem Herausnehmen zweier Kugeln die Wahrscheinlichkeit, a) 1 weiße und 1 schwarze, b) 2 weiße, c) 2 schwarze zu fassen? d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei gleichzeitigem Herausnehmen von 5 Kugeln 3 weiße und 2 schwarze zu fassen?
35. In einer Urne sind 18 weiße, 12 schwarze und 6 rote Kugeln. Wie groß ist bei gleichzeitigem Herausnehmen von 3 Kugeln die Wahrscheinlichkeit, a) nur weiße, b) nur schwarze, c) 3 Kugeln von verschiedener Farbe zu fassen?
36. In einer Urne sind a weiße, b rote und c schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) erst 1 weiße, dann 1 schwarze, b) hintereinander 2 rote, c) hintereinander erst 2 rote, dann 1 schwarze herauszuziehen?
37. In einer Urne sind a weiße, b rote und c schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei gleichzeitigem Herausnehmen von 3 Kugeln a) lauter weiße, b) 1 weiße, 1 rote und 1 schwarze zu fassen?
38. In einer Urne sind a weiße und b schwarze Kugeln. Man greift n Kugeln heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter α weiße und β schwarze Kugeln befinden?
39. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die letzte Ziffer einer Quadratzahl a) eine 0, b) eine 1, c) eine 2, d) eine 5 ist?

40. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die letzte Ziffer einer Kubikzahl
a) eine 0, b) eine 1, c) eine 2 ist?
41. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Produkt zweier Zahlen a) mit 0,
b) mit 3, c) mit 5 endet, daß es d) gerade, e) ungerade ist?
42. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Produkt a) von 3 Zahlen, b) von
5 Zahlen ungerade ist?
43. In einer Lotterie von 90 Nummern werden 5 Treffer gezogen. Wie groß ist
die Wahrscheinlichkeit, a) daß 1 Los gewinnt, b) daß von 2 Losen 1 und
nur 1 Los gewinnt, c) daß von 12 Losen mindestens 1 Los gewinnt, d) daß
von 12 Losen 3 und nur 3 Lose gewinnen, e) daß 5 Lose gewinnen?
44. A wettet mit B 10 Rpf., in 1 Wurf mit 2 Würfeln 5 oder 6 oder 7 zu werfen.
Wieviel kann B dagegen wagen? (Vgl. Aufgabe 9.)
45. A wettet mit B, in 1 Wurf mit 2 Würfeln weder 2, noch 3, noch 4, weder 10,
noch 11, noch 12 zu werfen. Wer hat Aussicht, die Wette zu gewinnen? (Vgl.
Aufgabe 9.)
46. Jemand will in 2 Würfen mit 2 Würfeln das erste Mal 7 und das zweite Mal 9
werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß mindestens 1 Wurf ge-
lingt, b) daß beide Würfe gelingen, c) daß nur der 1. Wurf gelingt, d) daß
beide Würfe mißlingen, e) daß 1 Wurf (nicht mehr) gelingt?
47. Wie groß ist bei 2 Würfen mit 2 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, a) einmal 5
und einmal 10 zu werfen, b) entweder einmal 5 oder einmal 10, c) weder 5
noch 10 zu werfen?
48. Wie groß ist bei 3 Würfen mit 2 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, a) dreimal
hintereinander 7 zu werfen, b) der Reihe nach 7, 8, 10, c) überhaupt in einem
der 3 Würfe 7, in einem 9, in einem 10 zu werfen?
49. Jemand will mit 3 Würfeln in 3 Würfen das erste Mal 8 oder 10, das zweite
Mal 7 oder 13, das dritte Mal 11 oder 14 werfen. Wie groß ist die Wahr-
scheinlichkeit, a) daß kein Wurf gelingt, b) daß mindestens einer gelingt,
c) daß nur einer, d) daß die beiden ersten gelingen, der dritte nicht, e) daß
zwei gelingen, einer nicht, f) daß zwei gelingen oder einer?
50. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder beim 1. Wurf
12 Augen oder, wenn das mißlingt, beim 2. Wurf einen beliebigen Pasch zu
werfen?
51. Jemand zieht aus einem Spiel von 32 Karten 2 heraus, steckt sie nicht zurück
und zieht dann noch einmal 2 Karten heraus. Wie groß ist die Wahrschein-
lichkeit, entweder schon das erste Mal oder, wenn das nicht gelingt, das zweite
Mal 2 Bilder zu ziehen?

Geometrische Wahrscheinlichkeit

52. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein auf einem Meterstabe gleitender Ring sich a) zwischen 0 cm und 10 cm, b) zwischen 40 cm und 60 cm, c) zwischen 60 cm und 100 cm befindet?
53. Ein Ball von 5 cm Durchmesser wird gegen ein Drahtgitter mit quadratischen Maschen von 8 cm Weite geworfen; die Drahtdicke werde vernachlässigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Ball hindurchfliegt? Vorauszusetzen ist natürlich, daß beim Wurf nicht gezielt wird. Wieviel Treffer sind daher bei 30 Würfeln zu erwarten?
54. Ein Geldstück – 24 mm Durchmesser – fällt auf ein Schachbrett, dessen Quadrate eine Seitenlänge von 4 cm haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Geldstück auf eine Ritze fällt? Auch hier ist Zielen verboten!
55. Ein Fenster ist gegen Steinwürfe durch ein Drahtgitter mit gleichseitig-sechseckigen Maschen geschützt. Die Seiten der Maschen, innen gemessen, haben eine Länge von 2 cm. Untersuche die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein angenähert kugeliges Stein von 3 cm Durchmesser (ohne Zielen!) hindurchfliegt.

§ 17. Versicherungsrechnung¹⁾

Vorübungen. Sterblichkeitstafeln

Die Versicherungsanstalt, bei der man sich versichert, soll im folgenden als *Versicherer* oder *Versicherungsgesellschaft*, derjenige, der sich versichert, als *Versicherungsnehmer* oder *Versicherter* bezeichnet werden. Die Grundlage der Lebensversicherungsrechnung bilden die sogenannten Sterblichkeitstafeln; sie sind teils auf Grund umfassender und regelmäßig wiederkehrender Volkszählungen, teils nach den langjährigen Erfahrungen der Lebensversicherungsgesellschaften aufgestellt²⁾. Sie gehen von einer bestimmten großen (im übrigen willkürlich gewählten) Anzahl l_n gleichaltriger, nämlich n jähriger Personen aus und geben an, wie viele von diesen das x te Jahr erleben, die Anzahl dieser Personen wird mit l_x bezeichnet³⁾ und heißt die *Anzahl der Lebenden des Alters x* (Spalte 2 der Tafel auf Seite 100). Man benutzt auch noch die Differenz

$$l_x - l_{x+1} = d_x \text{ (Toten der Sterbetafel)}$$

¹⁾ Die Aufgaben dieses Paragraphen (mit alleiniger Ausnahme der Aufgaben 1 bis 6) können auch ohne Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst werden.

²⁾ Die Lebensversicherungsgesellschaften benutzen andere Sterblichkeitstafeln als die Rentenversicherungsanstalten. Jede Art Anstalt gründet nämlich ihre Berechnung auf den für die betreffende Anstalt ungünstigsten Fall; dieser tritt bei der Lebensversicherung ein, wenn der Versicherte früh stirbt, bei der Rentenversicherung dagegen, wenn der Versicherte lange lebt. – Wir gehen auf diesen Unterschied im folgenden nicht ein, sondern benutzen nur *eine* Sterblichkeitstafel.

³⁾ Alle hier benutzten Bezeichnungen stimmen überein mit denjenigen, die auf dem internationalen Kongreß in London im Jahre 1898 allgemein festgesetzt worden sind.

sowie die Quotienten

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (\text{Lebenswahrscheinlichkeit der } x\text{-jährigen})$$

$$\text{und} \quad q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (\text{Sterbenswahrscheinlichkeit der } x\text{-jährigen}).$$

- Die Quotienten p_x und q_x haben die Form der mathematischen Wahrscheinlichkeit (s. § 16). Gib an, inwiefern sie sich dem Wesen nach von dieser unterscheiden (statistische Wahrscheinlichkeit). Beachte dabei besonders die Gleichartigkeit der Elemente und Gleichberechtigung der Erscheinungen auf der einen Seite (gleichfarbige Kugeln, gleichhäufige Würfe) und die individuellen Unterschiede auf der anderen Seite (Abhängigkeit der Lebensdauer von dem Gesundheitszustand, der Lebensweise, dem Klima des Aufenthaltsortes, dem Beruf usw.).
- Zeige auf Grund der vorhin angegebenen Definitionen, daß $p_x + q_x = 1$ ist (vgl. mit dem Satze $w + w' = 1$ in § 16, Aufgabe 3).
- Wie groß ist (auf 3 Dezimalen abgerundet) die Sterbenswahrscheinlichkeit und Lebenswahrscheinlichkeit für Personen im Alter von a) 20, b) 31, c) 39, d) 50, e) 57, f) 65, g) 70, h) 75 Jahren?
- Gib zunächst schätzungsweise, dann auf Grund rechnerischer Versuche aus der Sterbetafel an, für welches Lebensalter die Sterbenswahrscheinlichkeit ungefähr a) $\frac{1}{100}$, b) $\frac{1}{4}$ ist. c) Entwirf eine graphische Darstellung der Lebenswahrscheinlichkeit für das Alter von 20, 30, 40, ... 80 Jahren in geeignetem Maßstabe (etwa: Abszissen 1 cm = 10 Jahre; Einheit der Ordinate 10 cm).
- Beweise, daß die „fernere mittlere Lebensdauer“ oder „Lebenserwartung“ des x -jährigen gleich

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{100}}{l_x} + \frac{1}{2} \quad \text{ist}^1).$$

(Anleitung: Wenn alle Todesfälle am Ende des jeweiligen Versicherungsjahres eintreten, so würden, wie leicht zu zeigen, alle l_x Personen zusammen $l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{100}$ Jahre durchleben, der einzelne also den l_x ten Teil davon. Um wieviel geringer wird dieser Bruch, wenn man annimmt, daß die Todesfälle nicht erst am Ende, sondern schon in der Mitte des Jahres eintreten?)

¹⁾ Für die Versicherungsrechnung ist dieser Begriff der ferneren mittleren Lebensdauer nahezu bedeutungslos und führt leicht zu groben Fehlern, von denen hier nur einer genannt sei: Der augenblickliche Wert einer beim Tode des Versicherungsnehmers fälligen Zahlung K (Aufgaben 39 bis 51) ist durchaus nicht identisch mit dem auf die Gegenwart diskontierten Wert einer Summe K , die nach Ablauf der ferneren mittleren Lebensdauer des Betroffenen zahlbar ist. Ähnliches gilt auch von dem Begriff der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer (Aufgabe 6). - Wir erwähnen die beiden Begriffe hier nur, um einmal ausdrücklich sagen zu können, daß es vom praktischen Standpunkt aus sinnlos erscheint, sogenannte Versicherungsaufgaben zu stellen, bei denen die fernere Lebensdauer des Versicherten bekannt ist - zuweilen fehlt sogar noch die Angabe, ob es sich um die mittlere oder wahrscheinliche Lebensdauer handelt.

**Sterblichkeitstafel der 23 deutschen Gesellschaften für normal versicherte Männer
und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung**

Alter in Jahren	Anzahl der Lebenden	Diskon- tierte Zahl der Lebenden	Summe der diskontier- ten Lebens- zahlen	Alter in Jahren	Anzahl der Lebenden	Diskon- tierte Zahl der Lebenden	Summe der diskontier- ten Lebens- zahlen
x	l_x	D_x	N_x	x	l_x	D_x	N_x
20	100000	50257	1031224	60	55892	7094,6	72808,2
21	99081	48111	980967	61	53916	6612,3	65713,6
22	98173	46058	932856	62	51878	6147,3	59101,3
23	97286	44098	886798	63	49781	5699,3	52954,0
24	96425	42230	842700	64	47632	5268,8	47254,7
25	95590	40449	800470	65	45435	4855,9	41985,9
26	94774	38747	760021	66	43189	4459,7	37130,0
27	93970	37119	721274	67	40887	4079,3	32670,3
28	93173	35560	684155	68	38532	3714,3	28591,0
29	92378	34064	648595	69	36133	3365,3	24876,7
30	91578	32627	614531	70	33701	3032,6	21511,4
31	90770	31246	581904	71	31249	2716,9	18478,8
32	89952	29917	550658	72	28794	2418,8	15761,9
33	89121	28639	520741	73	26358	2139,3	13343,1
34	88280	27409	492102	74	23952	1878,2	11203,8
35	87424	26225	464693	75	21592	1635,9	9325,6
36	86551	25085	438468	76	19293	1412,3	7689,7
37	85662	23988	413383	77	17083	1208,3	6277,4
38	84756	22932	389395	78	14980	1023,7	5069,1
39	83828	21914	366463	79	12998	858,2	4045,4
40	82878	20933	344549	80	11150	711,29	3187,2
41	81903	19987	323616	81	9420	580,61	2475,91
42	80897	19074	303629	82	7821	465,75	1895,30
43	79862	18193	284555	83	6378	366,97	1429,55
44	78799	17344	266362	84	5114	284,30	1062,58
45	77707	16525	249018	85	4034	216,67	778,28
46	76590	15737	232493	86	3138	162,85	561,61
47	75450	14978	216756	87	2423	121,488	398,76
48	74281	14247	201778	88	1857	89,962	277,272
49	73077	13543	187531	89	1415	66,232	187,310
50	71831	12861	173988	90	1071	48,435	121,078
51	70528	12201	161127	91	714	31,635	72,643
52	69166	11561	148926	92	463	19,546	41,008
53	67741	10940	137365	93	275	11,217	21,462
54	66251	10337,5	126425	94	149	5,872	10,245
55	64695	9753,3	116087,5	95	72	2,742	4,373
56	63074	9187,4	106334,2	96	30	1,104	1,631
57	61383	8638,7	97146,8	97	11	0,391	0,527
58	59624	8107,4	88508,1	98	3	0,103	0,136
59	57792	7592,5	80400,7	99	1	0,033	0,033
60	55892	7094,6	72808,2	100	0	0	0

6. Wenn $l_{x+n} = \frac{1}{2} l_x$ ist, so bezeichnet man n als die „fernere wahrscheinliche Lebensdauer“ des x jährigen. a) Wie groß ist die fernere wahrscheinliche Lebensdauer eines 68jährigen? (Ganzzahlig abrunden!) b) Wie unterscheidet sich diese von der ferneren mittleren Lebensdauer des 68jährigen?

Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Sterblichkeitstabeln bildet das Gesetz der großen Zahlen, welches aussagt, daß eine Reihe von Ereignissen, deren Eintreten oder Nichteintreten sehr oft beobachtet worden ist, sich auch weiterhin nach gleichem Zahlenverhältnis wiederholen wird, solange sich an den Vorbedingungen nichts ändert. Also wenn z. B. durch viele Volkszählungen festgestellt ist, daß in Deutschland die Anzahl der 80jährigen halb so groß ist wie die Anzahl der 75jährigen, so darf angenommen werden, daß das auch in den nächsten Jahren für große Bevölkerungsteile (Provinzen, Großstädte) so bleiben wird; es ist aber unzulässig zu folgern, daß von den wenigen 75jährigen, die in einer kleinen Stadt wohnen, nach 5 Jahren nur noch die Hälfte am Leben sein wird.

7. a) 15 Abiturienten einer Schule, die soeben im Alter von durchschnittlich 20 Jahren die Reifeprüfung bestanden haben, gaben sich das Versprechen, nach 20 Jahren wieder zusammenzukommen. Wie viele von ihnen müßten inzwischen sterben, wenn das Gesetz der großen Zahlen auch in diesem Falle anwendbar wäre? Beurteile die Zulässigkeit der Schlußweise! b) Warum findet man in der Sterblichkeitstafel keine 100jährigen, während man doch fast alle Monate einmal in der Zeitung lesen kann, daß jemand seinen 100. Geburtstag feiert?

Versicherung auf den Erlebensfall

Die Versicherung heißt Kapitalversicherung oder Rentenversicherung, je nachdem der Versicherer einmal oder wiederholt zu zahlen hat.

Vorschüssige (Pränumerando-) Leibrente. l_x Personen, die im Alter von x Jahren sterben, kaufen sich bei einer Versicherungsgesellschaft ein mit der Bedingung, daß ihnen sofort sowie am Anfange jedes weiteren Lebensjahres, das der einzelne erreicht, die Rente 1 ausgezahlt wird.

8. Welche Zahlungen hat die Versicherungsgesellschaft zu leisten a) sofort, b) nach Ablauf eines Jahres (beachte, daß dann nur noch l_{x+1} Versicherte am Leben sind), c) beim Beginn des m ten Versicherungsjahres, d) im ganzen?
9. Wie ändern sich die Leistungen der Gesellschaft, wenn alljährlich nicht die Rente 1, sondern die Rente r ausgezahlt wird?
10. Untersuche auf Grund des Gesetzes der großen Zahlen, ob sich die Leistung der Gesellschaft gegenüber jedem einzelnen Versicherungsnehmer ändert,

wenn statt der l_x Versicherten eine andere große Anzahl (z. B. k) Personen die Versicherung eingeht.

Der Zinsfuß, mit dem die Gesellschaft rechnen muß, sei p , der Zinsfaktor, $1 + \frac{p}{100}$, sei wie früher (§ 6) mit q bezeichnet. Die weitaus meisten Versicherungsgesellschaften rechnen mit einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$; dieser ist auch im folgenden stets zugrunde gelegt, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist.

Um die gesamte von der Gesellschaft zu übernehmende Zahlungsverpflichtung (s. Aufgabe 8d) bequem ausdrücken zu können, diskontiert man alle Zahlungen auf den gleichen Termin¹⁾.

11. Diskontiere die von der Gesellschaft zu leistenden Zahlungen (Aufgaben 8 und 9) a) auf den Zeitpunkt des Versicherungsbeginns, b) auf den Zeitpunkt der Geburt der Versicherungsnehmer!

Weil bei der zweiten Art der Diskontierung die Ausdrücke erheblich übersichtlicher werden als bei der ersten, diskontiert man in der Versicherungsmathematik stets auf den Zeitpunkt der Geburt. Für die hierbei erhaltenen Quotienten führt man die Abkürzung $\frac{l_x}{q^x} = D_x$ ein und bezeichnet diese Zahl als die *diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x* (Spalte 3 der Tafel). Auch die Abkürzung

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{100} = N_x$$

(Summe der diskontierten Lebenszahlen; Spalte 4 der Tafel) ist nützlich.

12. Beweise unter Anwendung dieser Bezeichnungen und auf Grund des Ergebnisses der Aufgaben 8 und 11 b, daß für eine jetzt x jährige Person die vorschüssige Leibrente 1 den

$$\text{Barwert } \frac{N_x}{D_x} \text{ hat!}$$

13. Was ändert sich hieran, wenn die Jahresrente nicht 1, sondern r beträgt? Will sich jemand eine Leibrente kaufen, so müßte er den Barwert der Rente als Einkaufssumme – „einmalige Prämie“ – bezahlen, wenn die Gesellschaft keinerlei Verwaltungskosten hätte und auf jeden Gewinn verzichten wollte. Allgemein wird für den theoretischen Teil der Versicherungsrechnung als Grundsatz angenommen, daß die Leistungen des Versicherten und des Versicherers einander gleich sein müssen, wenn die Versicherung „billig“ sein soll. In Wirklichkeit muß die Gesellschaft statt der theoretisch berechneten („Netto“-) Prämie eine höhere („Brutto“-) Prämie erheben, die durchschnittlich etwa $\frac{1}{2}$ mehr beträgt als jene. Wir begnügen uns hier mit der Berechnung der „Nettoprämien“.

¹⁾Vorübungen dazu in § 6, Aufgaben 27 bis 36.

14. Ein 40jähriger Mann will sich eine vorschüssige Leibrente von 1500 RM sichern; wieviel muß er einzahlen?
15. Ein soeben verstorbener Vater hat seinem Sohn sein ganzes Vermögen vermacht mit der Bedingung, daß er einer jetzt 58jährigen Verwandten eine lebenslängliche Rente von jährlich 1000 RM (pränumerando) auszahlt. Der Sohn wünscht sich dieser Verpflichtung durch eine einmalige Zahlung zu entledigen; wieviel beträgt diese?
16. Ein 53jähriger, der eine Erbschaft von 17000 RM gemacht hat, will diese zum Ankauf einer vorschüssigen Leibrente benutzen; wie hoch wird diese sein?
17. Welche Leibrente kann man im Alter von 28 Jahren für 23000 RM kaufen?
18. Eine Leibrente, deren Auszahlung nicht sogleich beginnt, heißt *aufgeschoben*. Beweise (ähnlich wie in Aufgabe 12), daß eine um m Jahre aufgeschobene vorschüssige Leibrente vom Betrage r den

$$\text{Barwert } r \cdot \frac{N_x + m}{D_x} \text{ hat.}$$

19. Welche Einlage hat man zu machen, wenn man im Alter von a) 39, b) 51, c) 27 Jahren eine um a) 10, b) 5, c) 20 Jahre aufgeschobene vorschüssige Leibrente von jährlich a) 1250 RM, b) 2300 RM, c) 900 RM kaufen will?
20. Ein 50jähriger will eine ihm soeben durch Erbschaft zugefallene Summe von 21500 RM dazu benutzen, sich vom 60. Jahre ab eine vorschüssige Leibrente zu sichern. Welche Rente kann er erhalten?
21. Eine *nachschüssige* (Postnumerando-) *Leibrente* kann man auch auffassen als eine um 1 Jahr aufgeschobene vorschüssige Leibrente; wie groß ist also der Barwert einer solchen Rente a) vom Jahresbetrage 1, b) vom Jahresbetrage r ?
22. Welche Einkaufssumme muß ein 37jähriger für eine nachschüssige Leibrente von 1750 RM zahlen?
23. Welche nachschüssige Leibrente kann sich ein 43jähriger für 20000 RM kaufen?
24. Eine Leibrente, deren Auszahlung höchstens n Jahre hindurch erfolgen soll, heißt *kurz* (oder temporär). Beweise, daß eine sofort beginnende, auf n Jahre pränumerando zahlbare kurze Leibrente vom Betrage r den

$$\text{Barwert } r \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \text{ hat.}$$

25. Wie kann man hieraus das Ergebnis der Aufgabe 12 herleiten?
26. Wieviel muß ein 47jähriger einzahlen, der sich bis zu seinem 67. Jahre eine vorschüssige Leibrente von 1800 RM sichern will?

27. Welche Rente kann ein 51-jähriger 15 Jahre hindurch pränumerando bei einer Einkaufssumme von 24000 RM erhalten?
28. Beweise, daß eine um m Jahre aufgeschobene, auf n Jahre pränumerando zahlbare kurze Leibrente vom Betrage r den

$$\text{Barwert } r \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \text{ hat.}$$

29. Gib den Zusammenhang zwischen diesem Werte und demjenigen in Aufgaben 12, 18 und 24 an.
30. Ein 44-jähriger wünscht von seinem 55. bis zu seinem 65. Lebensjahre eine vorschüssige Leibrente von 1200 RM zu beziehen; wieviel muß er jetzt dafür einzahlen?
31. Ein 40-jähriger zahlt 27000 RM ein, um von seinem 50. bis zu seinem 65. Lebensjahre eine Rente zu beziehen; wie hoch wird diese sein?
32. *Kapitalversicherung auf den Erlebensfall.* l_x Personen kaufen sich bei einer Versicherungsanstalt ein mit der Bedingung, daß jedem von ihnen, der nach n Jahren noch lebt, 1 RM ausgezahlt wird. a) Wie viele sind von den l_x nach n Jahren noch am Leben, wieviel hat also die Anstalt nach n Jahren auszuzahlen? b) Welchen Barwert hat diese Summe jetzt? c) Wieviel müßte also (nach dem Grundsatz der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung) jeder der Versicherten jetzt einzahlen? d) Wie ändert sich diese Zahlung, wenn die Versicherung nicht über 1 RM, sondern über das Kapital K abgeschlossen wird?
33. Erweitere den in Aufgabe 32 erhaltenen Quotienten mit q^x und beweise so, daß der x -jährige Versicherungsnehmer die

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

einzuzahlen hat, wenn er sich nach n Jahren im Erlebensfalle das Kapital K sichern will.

34. Wie hoch ist die Einkaufssumme für a) $x=30$, $n=25$, $K=10000$, b) $x=35$, $n=20$, $K=10000$ (vgl. mit a; beidemal erhält der 55-jährige 10000 RM ausgezahlt und doch sind die Einkaufssummen sehr verschieden. Warum?), c) $x=41$, $n=16$, $K=15000$, d) $x=37$, $n=13$, $K=20000$.
35. Welche Summe muß man für einen 1-jährigen Knaben einzahlen, wenn man ihm nach 19 Jahren (z. B. zur Berufsausbildung) ein Kapital von 3000 RM sichern will? Berechne die Zahlen D_{x+n} und D_x besonders, und zwar diesmal unter Annahme eines Zinsfußes von 4% und auf Grund einer Absterbeordnung, die (nach *Florencourt*) von $l_0=10000$ ausgeht und $l_1=7450$, $l_{20}=5558$ angibt.

36. Man zahlt unter denselben Bedingungen wie in voriger Aufgabe für einen 1-jährigen Knaben 2500 RM ein. a) Welches Kapital kann er im Erlebensfalle im Alter von 20 Jahren erhalten? b) Dieses Kapital soll ihm nicht auf einmal ausgezahlt, sondern einer Bank übergeben werden, die ihm 4 Jahre hindurch zu Anfang jedes Halbjahres die gleiche Summe (etwa zu Studienzwecken) auszahlen soll. Wieviel erhält der junge Mann halbjährlich, wenn die Bank ebenso wie die Versicherungsanstalt jährlich 4% rechnet?
- 37–38. Rechne die Aufgaben 35 und 36 ohne Benutzung der Sterblichkeitstafel und vergleiche die Ergebnisse mit denen von Aufgabe 35 und 36. Wie ist die starke Abweichung der Ergebnisse zu erklären?

Versicherung auf Todesfall

39. l_x Personen versichern ihr Leben mit der Bedingung, daß bei jedem Todesfall die Summe K an die Hinterbliebenen des verstorbenen Versicherungsnehmers ausgezahlt wird. (Es ist bei Todesfallversicherungen allgemein üblich, am Ende jedes Versicherungsjahres abzurechnen.)¹⁾ Welche Zahlung hat die Gesellschaft zu leisten a) am Ende des 1. Versicherungsjahres, b) am Ende des 2. Jahres, c) nach Ablauf von m Jahren? d) Wie groß ist die gesamte Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft? e) Beweise durch passende Umformung, daß für den einzelnen Versicherungsnehmer die

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{\frac{1}{q} N_x - N_{x+1}}{D_x} \text{ ist.}$$

40. Wie groß ist die Einkaufssumme, wenn beim Tode des Versicherten an dessen Hinterbliebene ein Kapital von a) 8000 RM, b) 5000 RM, c) 3000 RM, d) 15000 RM ausgezahlt werden soll und der Versicherte bei Abschluß der Versicherung a) 23, b) 32, c) 46, d) 52 Jahre alt ist?

Mit niedrigen Todesfallversicherungen befassen sich hauptsächlich die sog. *Sterbekassen*.

41. Welche Summe muß man im Alter von a) 33, b) 49, c) 54, d) 59 Jahren bei einer Sterbekasse einzahlen, wenn den Hinterbliebenen beim Tode des Versicherten eine Summe von a) 500 RM, b) 200 RM, c) 1000 RM, d) 750 RM ausgezahlt werden soll?
42. Jemand zahlt im Alter von a) 34, b) 42, c) 48 Jahren eine Summe von a) 300, b) 250, c) 400 RM bei einer Sterbekasse ein; wie hoch wird das Sterbegeld sein?

Todesfallversicherung mit Karenzzeit ist eine solche, bei der der Versicherer keinerlei Zahlungsverpflichtungen gegen den Versicherten haben soll, wenn

¹⁾ Dafür, daß die Versicherungsgesellschaften bei einem Todesfall sofort und nicht erst am Ende des Todesjahres zahlen, wird bei den einzelnen Prämien ein kleiner Zuschlag erhoben.

dieser innerhalb der ersten m Jahre stirbt. Eine solche Versicherung heißt auch aufgeschobene Todesfallversicherung, und jene Frist von m Jahren heißt Karenzzeit oder Probezeit.

43. l_x Personen schließen unter der soeben angegebenen Bedingung eine Lebensversicherung auf das Kapital K ab. a) Welche Zahlung hat die Gesellschaft nach Ablauf des m ten Jahres zu leisten? b) Welches ist die Gesamtzahlungsverpflichtung des Versicherten? c) Welche Zahlungen haben dagegen die Versicherungsnehmer zu leisten? d) Beweise so, daß für den einzelnen Versicherungsteilnehmer die

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{\frac{1}{q} N_{x+m} - N_{x+m+1}}{D_x} \text{ beträgt.}$$

44. Wie hoch ist die Einkaufssumme für eine Lebensversicherung mit a) 2jähriger, b) 3jähriger, c) 5jähriger Karenzzeit über eine Versicherungssumme von a) 10000 RM, b) 5000 RM, c) 7000 RM, wenn der Versicherte beim Kauf a) 56, b) 48, c) 26 Jahre alt ist?
45. Das Einkaufsalter und die Versicherungssumme sei vorgeschrieben. In welchem Sinne ändert sich mit der Karenzzeit die Einkaufssumme?
46. Ein 34jähriger erwirbt für 3500 RM eine Todesfallversicherung mit 4jähriger Karenzzeit. Welche Summe kann den Hinterbliebenen ausgezahlt werden?
Durch die *abgekürzte Todesfallversicherung* wird den Hinterbliebenen eines jetzt x jährigen, falls dieser während der nächsten n Jahre stirbt, für das Ende des Todesjahres das Kapital K gesichert.
47. Beweise, daß in diesem Falle die

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{\frac{1}{q} (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x} \text{ ist.}$$

48. Erörtere den Zusammenhang zwischen diesem Werte und denen in Aufgaben 39 und 43. Gib insbesondere auch an, ob der in Aufgabe 47 genannte Wert mit wachsendem n wächst oder abnimmt.
49. Wieviel muß man im Alter von a) 34, b) 42, c) 61 Jahren einzahlen, um eine Todesfallversicherung über a) 2500 RM, b) 4000 RM, c) 9000 RM abzuschließen, die a) 15, b) 18, c) 4 Jahre läuft?
50. Welches Kapital kann man seinen Hinterbliebenen sichern, wenn man im Alter von a) 37, b) 41, c) 50 Jahren eine a) 20, b) 10, c) 6 Jahre laufende Todesfallversicherung durch Einzahlung von a) 10000 RM, b) 3000 RM, c) 7500 RM abschließt?
51. Das Einkaufsalter und die Einkaufssumme sei gegeben. In welchem Sinne ändert sich das versicherte Kapital mit der Anzahl der Jahre, während deren die Versicherung gelten soll?

Gemischte Versicherung

Die beliebteste Art der Versicherung ist diese: Ein x jähriger versichert sein Leben unter der Bedingung, daß die Versicherungssumme K im Falle seines Todes, spätestens aber nach n Jahren ausbezahlt werden soll. (*Gemischte Versicherung.*)

52. Für die gemischte Versicherung beträgt die

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{\frac{1}{q} (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n})}{D_x}.$$

Beweise dies a) auf direktem Wege, b) indem du beachtest, daß die in Rede stehende Versicherung nichts weiter ist als die Vereinigung einer abgekürzten Todesfallversicherung mit einer einfachen Kapitalversicherung auf den Erlebensfall.

53. Zahlenbeispiele für die gemischte Versicherung:

	K	x	n
a)	2500	34	15
b)	4000	42	18
c)	9000	61	4

54. Vergleiche die Ergebnisse der vorigen Aufgabe mit denen in Aufgaben 49a, b, c und gib (unter Berücksichtigung des bei Aufgabe 52b Gesagten) den Wert der entsprechenden Erlebensfallversicherung an.

55. Löse die Aufgaben in 34a, b, c für den Fall der gemischten Lebensversicherung.

56. Weitere Zahlenbeispiele zur gemischten Lebensversicherung:

	K	x	n
a)	20000	30	20
b)	24000	35	25
c)	10000	25	30

Jahresprämien

Alle bisherigen Aufgaben hatten zur Voraussetzung, daß die Versicherungen durch eine einmalige Zahlung gekauft werden. In Wirklichkeit wird aber nur selten ein Lebensversicherungsvertrag auf Grund einer einmaligen Einlage abgeschlossen; weit häufiger ist der Fall, daß entweder dauernd oder längere Zeit hindurch von dem Versicherten an den Versicherer *Jahres-*

prämien gezahlt werden. Für den Barwert dieser Jahresprämien ist es aber gleichgültig, wer sie leistet oder empfängt; man kann sich also auch die Rollen des Versicherten und des Versicherers vertauscht denken und dann erscheint die Jahreszahlung als Leibrente¹⁾.

57. Beweise so, daß allgemein die Jahresprämie gleich ist dem Quotienten aus dem Werte der abzuschließenden Versicherung und dem Werte derjenigen Leibrente, die der Prämienzahlung entspricht. Beachte, daß diese Beziehung sowohl für die dauernde wie für die abgekürzte Prämienzahlung gilt, die t Jahre hintereinander erfolgt.
58. Zeige insbesondere, daß die um m Jahre aufgeschobene Leibrente im Betrage von r (vgl. Aufgabe 18) durch t Jahresprämien von je

$$r \cdot \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+t}}$$

erkauft werden kann.

59. Die in Aufgabe 19 genannten Renten sollen durch t Jahresprämien erworben werden. Berechne die Höhe dieser Prämien, wenn t den Wert a) 5, b) 3, c) 15 hat.
60. Untersuche, ob die in Nr. 58 angegebene Beziehung auch gilt, wenn $t = m$ ist.
61. Löse die Aufgaben 59 a, b, c für den Fall, daß t die in Aufgabe 19 für m angegebenen Werte a) 10, b) 5, c) 20 hat.
62. Zeige auf Grund der in Aufgabe 57 angegebenen Beziehung, daß die um m Jahre aufgeschobene, auf n Jahre zahlbare Leibrente (vgl. Aufgabe 28) durch t Jahresprämien von je

$$r \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+t}}$$

erworben werden kann.

63. Welche Annahme muß man über n machen, wenn man aus dem soeben angegebenen Werte den in Aufgabe 58 genannten erhalten will?
64. Löse Aufgabe 30 durch t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 5, b) 10, c) 11 haben soll.
65. Welche Prämie muß ein a) 34, b) 40, c) 45 Jahre alter Versicherungsnehmer a) 10, b) 7, c) 8 Jahre lang zahlen, wenn er von seinem 55. bis zu seinem 70. Lebensjahre eine Rente von 1500 RM beziehen will?

¹⁾ Die Übereinstimmung erstreckt sich auch auf die Zahlungstermine; sowohl die Versicherungsprämien als auch die Leibrenten werden in der Regel *pränumerando* gezahlt.

66. Beweise mit Benutzung von Aufgabe 33, daß die Erlebensfallversicherung über ein Kapital K durch t Jahresprämien von je

$$K \cdot \frac{D_x + n}{N_x - N_{x+t}}$$

erkauft werden kann.

67. a) Welchen einfachen Wert erhält der Nenner dieses Bruches, wenn man $t = 1$ annimmt? b) Welchen Sinn hat diese Annahme? (Vgl. Aufgabe 33.)
c) Erörtere unter der Annahme $t = n$ die Beziehungen zwischen Aufgabe 66 und 24.
68. Löse Aufgabe 34 durch t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 15, b) 10, c) 9 haben soll.

69. a) Löse die Aufgabe 35 durch 10 Jahresprämien, wenn bekannt ist, daß (unter der dort gemachten Annahme eines Zinsfußes von 4%) $N_1 = 130474$ und $N_{11} = 77140$ ist. b) Beachte und erkläre die Abweichung gegen das Ergebnis, zu dem die gewöhnliche Rentenrechnung (ohne Benutzung der Sterblichkeitstafel) führt.

70. a) Beweise auf Grund von Aufgabe 39, daß die Versicherung auf den Todesfall durch lebenslängliche Jahresprämien von je

$$K \cdot \left(\frac{D_x}{N_x} - \frac{q-1}{q} \right)$$

erworben werden kann. b) Zeige durch passende Umformung, daß dieser Wert gleich

$$\frac{1}{q} - \frac{N_{x+1}}{N_x} \quad \text{ist.}$$

71. Löse die Aufgaben 40a bis d für dauernde Prämienzahlung.

72. Welche Jahresprämien muß man bis an sein Lebensende zahlen, wenn man im Alter von a) 25, b) 33, c) 37, d) 45 Jahren eine Todesfallversicherung über a) 7500 RM, b) 10000 RM, c) 6000 RM, d) 4000 RM abschließt?

73. Löse die Aufgaben 41a bis d für dauernde Prämienzahlung.

74. Ein Versicherungsnehmer, der sein Leben im Alter von a) 40, b) 35 Jahren mit a) 20000 RM, b) 30000 RM gegen lebenslängliche Prämienzahlung versichert hat, stirbt im a) 55., b) 70. Lebensjahre. Um wieviel und in welchem Sinne unterscheidet sich die ausgezahlte Versicherungssumme von dem Betrage, der den Erben zugefallen wäre, wenn der Versicherungsnehmer die Beträge der Jahresprämien jedesmal bei einer Bank zu 4% Zinseszinsen angelegt hätte?

75. Eine Sterbekasse setzt in ihrem Tarife für ein Eintrittsalter von a) 20, b) 30, c) 40, d) 50, e) 60 Jahren eine Jahresprämie von a) 2,00 RM, b) 2,56 RM, c) 3,44 RM, d) 4,92 RM, e) 7,64 RM auf je 100 RM Versicherungssumme fest. Untersuche, um wieviel diese Bruttoprämien höher sind als die theoretisch berechneten Nettoprämien.
76. Beweise auf Grund von Aufgabe 39, daß die Versicherung auf den Todesfall durch t Jahresprämien von je

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} N_x - N_{x+1}}{N_x - N_{x+t}}$$

erworben werden kann.

77. Welchen Wert hat man in Aufgabe 76 für t zu setzen, um zu dem Ergebnis von Aufgabe 70 zu gelangen?
78. Löse die Aufgaben 40 a bis d für t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 20, b) 15, c) 12, d) 8 haben soll.
79. Löse die Aufgaben 41 a bis d für t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 17, b) 16, c) 11, d) 6 haben soll.
80. Beweise auf Grund von Aufgabe 43, daß die Todesfallversicherung mit Karenzzeit durch dauernde Jahresprämien von je

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} N_{x+m} - N_{x+m+1}}{N_x}$$

erkauft werden kann.

81. Löse die Aufgaben 44 a bis c für lebenslängliche Jahresprämien.
82. Welche Jahresprämien muß man lebenslänglich zahlen, wenn man im Alter von a) 25, b) 34, c) 45 Jahren eine Todesfallversicherung mit a) 10jähriger, b) 6jähriger, c) 2jähriger Karenzzeit über a) 15000 RM, b) 8000 RM, c) 10000 RM abschließt?
83. Beweise auf Grund von Aufgabe 43, daß die Todesfallversicherung mit Karenzzeit durch t Jahresprämien von je

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} N_{x+m} - N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+t}}$$

erworben werden kann.

84. Erörtere den Zusammenhang zwischen dem vorstehenden Werte und dem in Aufgabe 80.
85. Löse die Aufgaben 44 a bis c für t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 6, b) 12, c) 20 hat.
86. Löse Aufgabe 82 durch t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 15, b) 11, c) 10 haben soll.
87. Beweise auf Grund von Aufgabe 52, daß die gemischte Versicherung durch t Jahresprämien von je

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n})}{N_x - N_{x+t}}$$

gekauft werden kann.

88. Löse die Aufgaben 53 a bis c für t Jahresprämien, wenn t den Wert a) 10, b) 12, c) 3 hat.
89. Desgleichen, wenn t den Wert n hat.
90. Löse die Aufgabe 34 für den Fall einer gemischten Versicherung (vgl. Aufgabe 55) durch Zahlung von t Jahresprämien, wobei t (wie in Aufgabe 68) den Wert a) 15, b) 10, c) 9 haben soll.
91. Desgleichen, wenn t den Wert a) 20, b) 12, c) 10 hat.
92. Desgleichen, wenn t den Wert n hat.
93. Löse die Aufgaben 56 a bis c durch t Jahresprämien, wobei t den Wert a) 10, b) 12, c) 18 haben soll.
94. Desgleichen, wenn t den Wert n hat.

Prämienreserve

Ein Versicherungsvertrag, den l_x Personen abgeschlossen hatten, sei schon m Jahre in Gültigkeit. Man diskontiere auf das $(x+m)$ te Versicherungsjahr sowohl das, was die Gesellschaft bis dahin empfangen hat, als auch das, was sie bis dahin gezahlt hat. Die Differenz dieser Beträge heißt die *Prämienreserve* der l_x Versicherten für das m te Versicherungsjahr.

95. Hätte man im vorigen ebensogut sagen können: Man diskontiere auf das $(x+m)$ te Jahr sowohl die an die Gesellschaft noch zu zahlenden Prämien als auch die von der Gesellschaft noch zu leistenden Zahlungen? Erörtere die Beziehungen der so erhaltenen Differenz zu der vorigen a) dem absoluten Betrage nach, b) dem Vorzeichen nach. c) Welche Bedeutung hat eine negative Prämienreserve?

96. Sprich in Worten aus, wie groß ganz allgemein die Prämienreserve einer (irgendwie gearteten) Versicherung, die von l_x Personen durch *einmaligen Kauf* abgeschlossen worden ist, nach m jähriger Versicherungsdauer ist.
97. Wie groß ist hiernach die Prämienreserve für einen Versicherten, der eine der in Aufgabe 34 genannten Versicherungen abgeschlossen hat, nach a) 10jähriger, b) 8jähriger, c) 5jähriger Versicherungsdauer?

Für weitere Aufgaben dieser Art können Zahlenangaben aus den Aufgaben 14 bis 56 entnommen werden.

Etwas umständlicher als in Aufgaben 96 und 97 gestaltet sich die Berechnung der Prämienreserve für den Fall, daß noch *Prämien fällig* sind. Beispiel:

98. Wie groß ist für die in Aufgabe 72a genannte Versicherung die Prämienreserve nach 5jähriger Versicherungsdauer?

Anleitung: Wieviel beträgt die Jahresprämie? Wieviel ist also in den 5 Jahren von allen Versicherten eingezahlt worden? (Beachte, daß im 2. Versicherungsjahre nur noch l_{26} am Leben sind usw.) Wieviel hat die Gesellschaft im Laufe der 5 Jahre ausgezahlt? Diskontiere diese beiden Beträge auf das 5. Versicherungsjahr. Verteile den Betrag der Differenz auf die l_{30} noch lebenden Versicherungsnehmer. Mache die Probe, indem du die von der Gesellschaft noch zu leistenden Zahlungen und die bei ihr noch einzuzahlenden Prämien auf denselben Termin wie vorher diskontierst.

99. Wie groß ist für die in Aufgabe 82 genannten Versicherungen die Prämienreserve nach a) 15jähriger, b) 10jähriger, c) 5jähriger Versicherungsdauer?

Für andere Aufgaben dieser Art können Zahlenbeispiele aus den Aufgaben 59 bis 94 ausgewählt werden.

100. Ein Mann hat im Alter von x Jahren eine Todesfallversicherung auf das Kapital K abgeschlossen, kann aber nach m Jahren wegen Geldmangels die Jahresprämien nicht weiterzahlen und wünscht daher die Versicherung in eine prämienfreie umzuwandeln. Wie hoch ist in diesem Fall die beim Tode zu zahlende Versicherungssumme?

Anleitung: Berechne die Prämienreserve für das Ende des m ten Versicherungsjahres. Überlege, wieviel der jetzt $(x+m)$ jährige Mann als Einkaufssumme bezahlen müßte, um für den Todesfall das Kapital 1 zu versichern. Zeige durch einfachen Regeldetrißschluß, daß die gesuchte Versicherungssumme gleich dem Quotienten der beiden vorhergehenden Beträge ist.

Für weitere Aufgaben dieser Art – auch für die Umwandlung von einfachen Versicherungen in gemischte oder für den Rückkauf von Versicherungen nach m jähriger Vertragsdauer – können Zahlenbeispiele aus den Aufgaben 14 bis 94 entnommen werden.

F Ü N F T E S K A P I T E L

Die rationalen ganzen und gebrochenen Funktionen

§ 18. Die rationale ganze Funktion 2. Grades

Differentiation der ganzen Funktion 2. Grades

1. Berechne von der Funktion
- $y = x^2$
- den
- Differenzenquotienten*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

und zeige am graphischen Bilde der Funktion seine Bedeutung (Beispiel: $x_1 = 1,5$).

Bestimme den Differenzenquotienten der folgenden Funktionen (in jedem Falle ist der Nenner $x_1 - x$ durch Kürzung des Bruches zu beseitigen):

2. $y = x.$

3. $y = 2x.$

4. $y = ax.$

5. $y = 2\pi x.$

6. $y = x + 4.$

7. $y = -3x + 2.$

8. $y = \frac{x}{2} + \sqrt{2}.$

9. $y = ax + b.$

10. $y = 2x^2.$

11. $y = \frac{x^2}{3}.$

12. $y = ax^2.$

13. $y = 4\pi x^2.$

14. $y = x^2 + 2.$

15. $y = \frac{x^2}{2} - 4.$

16. $y = \frac{x^2}{a} + b.$

17. $y = x^2 + x.$

18. $y = x^2 - 2x + 3.$

19. $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2}.$

20. $y = ax^2 + bx.$

21. $y = x^2 + ax + b.$

22. $y = ax^2 + bx + c.$

23. $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{b} + c.$

24. Von der Funktion $y = x^2$ werde der Differenzenquotient gebildet, und zwar für den Punkt mit der Abszisse $x_1 = 3$. Die Abszisse des anderen Punktes x soll nacheinander die Werte $x = 0; 1; 2; 2,9; 2,99; \dots$ annehmen. Zeige arithmetisch und soweit möglich am graphischen Bilde, welcher Grenze der Differenzenquotient zustrebt, wenn der Abstand des variablen Punktes von dem festgehaltenen Punkte kleiner und kleiner wird.

25/46. Bilde von den in Aufgaben 2 bis 23 genannten Funktionen den *Differentialquotienten* (die *Ableitung*), indem du, vom Differenzenquotienten ausgehend, den Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{bildest.}$$

47. (*Scherzfrage.*) Darf man in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder in $\frac{dy}{dx}$ das Δ oder d wegheben? (Grund!)
48. Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die Winkel, welche bei den graphischen Bildern der Funktion a) $y = \frac{x^2}{12}$, b) $y = \frac{x^2}{10}$ die nach oben gerichteten Tangenten in den Punkten 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 , ± 6 mit der nach rechts gerichteten x -Achse bilden. Benutze diese Angaben zu einer genaueren Zeichnung des graphischen Bildes der Funktionen.
- 49/70. Gib für die in den Aufgaben 2 bis 23 genannten Funktionen den Tangens des Winkels an, den die im Punkte a) $x = 0$, b) $x = +1$, c) $x = -3$ des graphischen Bildes konstruierte, nach oben gerichtete Tangente mit der nach rechts gerichteten x -Achse bildet.

Minimum oder Maximum der ganzen Funktion 2. Grades

Die folgenden Funktionen sind zusammen mit ihren Differentialquotienten graphisch darzustellen. Achte darauf, ob Beziehungen besonderer Art zwischen dem Bilde der Funktion und dem der Ableitung bestehen:

71. $y = x^2$.

72. $y = x^2 + 1$.

73. $y = x^2 - 1$.

74. $y = x^2 + 2x + 1$.

75. $y = x^2 - 5x + 6$.

76. $y = x^2 + 5x + 6$.

77. $y = x^2 - x - 6$.

78. $y = x^2 + x - 6$.

79. Verfolge die Größe des Tangens des Winkels, den die an die Kurve $y = x^2 - 2$ im Punkte x konstruierte, nach oben gerichtete Tangente mit der nach rechts gerichteten x -Achse bildet, wenn man x variiert. a) Welches ist der absolut kleinste Wert, den dieser Tangens und damit der Winkel überhaupt annimmt, und für welchen Wert von x wird er erreicht? b) Wie heißt das zugehörige y ? Welchem Werte nähert sich der Tangens und welchem der Winkel, wenn sich x dem Werte c) $+\infty$, d) $-\infty$ nähert¹⁾? Verfolge alle diese Dinge arithmetisch und graphisch.

Bestimme das Minimum (den Wert, den die unabhängige, und denjenigen, den die abhängige Veränderliche an der Stelle des Minimums annimmt) bei folgenden Funktionen:

¹⁾ Das ist der übliche Ausdruck dafür, daß x über jeden positiven Wert hinauswächst oder jeden negativen Wert unterschreitet.

80. $y = x^2 + 2.$

81. $y = x^2 - 3.$

82. $y = 3x^2 - 1.$

83. $y = x^2 + 3x.$

84. $y = \frac{x^2}{4} + 2x.$

85. $y = 3x^2 - x.$

86. $y = x^2 + 3x + 4.$

87. $y = x^2 - 4x + 2.$

88. $y = 2x^2 - \frac{x}{2} + 4.$

89. $y = 2x^2 - 8x + 1.$

90. $y = \frac{x^2}{2} + x - 17.$

91. $y = 10x^2 + 10x + 7.$

92. $y = (a - x)^2 + (b + x)^2.$

93. $y = (9 - 3x)^2 - (1 - 2x)^2.$

94. $y = (a - x)(b - x).$

95. $y = (x + a)(x + b).$

96. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Koeffizienten

a) der Funktion $y = x^2 + ax + b,$

b) der Funktion $y = ax^2 + bx + c,$

wo a (in b) eine positive Zahl ist, und den Koordinaten m und n des Punktes, in dem die Funktion ihr Minimum erreicht (des *Scheitelpunktes* der Parabel)?

97. a) Substituiere in die Funktion

$$y = x^2 + ax + b$$

die neue Variable x' , wo $x = x' + m$ ist. Welchen Wert muß man m erteilen, damit in der neuen, nach Potenzen von x' geordneten Funktion das lineare Glied wegfällt? b) Welche geometrische Bedeutung hat die Parallelverschiebung des Koordinatensystems, die der Substitution $x = x' + m$ entspricht, wo m den nach a) bestimmten Wert hat? (Scheitelpunkt! evtl. Nullstellen!)

98. Welche Form hat die Funktion 2. Grades $y = x^2 + ax + b$, die für den Wert a) $x_m = 2$, b) $x_m = -3$, c) $x_m = 0$, d) $x_m = p$ ein Minimum hat?

99. Wie lautet die Funktion 2. Grades

$$y = x^2 + ax + b,$$

die a) für den Wert $x_m = 1$ ein Minimum besitzt und an dieser Stelle den Wert $y_m = -3$ hat, b) für den Wert $x_m = 0$ ein Minimum besitzt und hier den Wert $y_m = -2,5$ hat, c) für $x_m = +1,5$ ein Minimum besitzt und hier den Wert $y_m = +2$ hat, d) für $x_m = p$ ein Minimum besitzt und hier den Wert $y_m = q$ hat?

100. Untersuche, welche Beziehung zwischen der Diskriminante d der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ und dem Werte n besteht, den die Funktion

$$y = x^2 + ax + b$$

im Minimum erreicht.

101. Um das Minimum einer Funktion 2. Grades

$$y = x^2 + ax + b$$

zu finden, kann man so verfahren: Man löst die Gleichung nach x auf und setzt die Diskriminante gleich Null. Beweise die Richtigkeit dieses Verfahrens und verfolge an einer Zeichnung, was für eine geometrische Bedeutung das Verschwinden der Diskriminante hat.

102. Man kann die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ dadurch graphisch lösen, daß man die Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y + ax + b = 0$ zum Schnitt bringt. Welche Ungleichungen oder Gleichungen zwischen a und b müssen erfüllt sein, wenn Parabel und Gerade a) zwei, b) einen und c) keinen Schnittpunkt haben sollen? Zeige, daß im Falle eines Schnittpunktes die Gerade Tangente an die Parabel ist.

Untersuche am graphischen Bilde die Stellen, in denen der Differentialquotient der folgenden Funktionen Null wird:

103. $y = -\frac{x^2}{4}$.

104. $y = -2x^2 + 3$.

105. $y = -x^2 + 2x - 1$.

106.¹⁾ $y = -ax^2 + bx + c$.

107. $y = (8 - 2x)^2 - (1 - 3x)^2$.

108.¹⁾ $y = (x - a)(b - x)$.

109. Was kann man über die Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$y = -ax^2 + bx + c,$$

wo a eine positive Zahl ist, aussagen, wenn der Wert des Maximums positiv, Null, negativ ist?

110. Welche Form hat die Funktion 2. Grades

$$y = -x^2 + ax + b,$$

die für den Wert a) $x_m = +1$, b) $x_m = -3$ ein Maximum besitzt?

111. Wann hat eine ganze Funktion 2. Grades

$$y = ax^2 + bx + c$$

ein Minimum, wann ein Maximum?

112. Warum liefert das Nullsetzen des Differentialquotienten nicht auch die Werte, denen die Funktion 2. Grades zustrebt, wenn sich die unabhängige Variable den Werten $x = +\infty$ und $x = -\infty$ nähert?

113. Hat eine lineare Funktion Maxima oder Minima? (Grund!)

¹⁾ Für a und b sind positive Zahlen zu setzen.

Vermischte Aufgaben zur Differentiation

114. Differenziere den Ausdruck für das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, ausgedrückt durch die Katheten,

$$z = a^2 + b^2$$

a) bei konstant gehaltenem b nach a , b) bei konstant gehaltenem a nach b .

115. Differenziere den Ausdruck für das Quadrat einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, ausgedrückt durch die Hypotenuse c und die andere Kathete a ,

$$z = c^2 - a^2$$

a) bei konstant gehaltenem a nach c , b) bei konstant gehaltenem c nach a .

116. Differenziere den Ausdruck für das Quadrat der Resultierenden zweier Kräftekomponenten a und b , die in einem Punkte angreifen und den konstanten Winkel φ bilden,

$$y = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$$

a) bei konstant gehaltenem b nach a , b) bei konstant gehaltenem a nach b .

117. Jemand löst die Gleichung 2. Grades

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

in der Weise, daß er den Ausdruck differenziert und aus $2x + 2a = 0$ sofort als Wurzel der Gleichung $x = -a$ erhält. Wo steckt der Fehler?

In den folgenden Aufgaben ist zu benutzen, daß der Differentialquotient des Weges nach der Zeit die Geschwindigkeit ist. Natürlich muß dabei der Weg als Funktion der Zeit bekannt sein.

118. Der Weg eines im luftleeren Raum frei fallenden Körpers ist

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Wie groß ist seine Geschwindigkeit a) nach 1, b) nach 2, c) nach 3,2 Sekunden ($g = 9,81$, wenn s in Metern, t in Sekunden gegeben ist)?

119. Der Weg eines mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach unten geschleuderten Körpers ist

$$s = ct + \frac{1}{2} g t^2.$$

Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn $c = 12,5$ m pro Sekunde ist, a) nach 1, b) nach $\frac{1}{4}$, c) nach 2,5 Sekunden?

120. Der Weg eines mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben geschleuderten Körpers (genauer die Entfernung des Körpers von der Anfangslage) ist

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2.$$

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Körpers a) nach 3 Sekunden, b) nach $\frac{c}{g}$ Sekunden? c) Vergleiche die Geschwindigkeiten zu den Zeiten $\frac{c}{g} - t_1$ und $\frac{c}{g} + t_1$.

121. Beim schrägen Wurf aufwärts wird der Weg in 2 Komponenten s_x und s_y , die eine in Richtung der Horizontalen, die andere in Richtung der Vertikalen, zerlegt, und es ist, wenn c die Anfangsgeschwindigkeit, α der Elevationswinkel ist,

$$s_x = ct \cdot \cos \alpha, \quad s_y = ct \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Gib a) die Geschwindigkeit v_x in der Richtung der Horizontalen, b) die Geschwindigkeit v_y in der Richtung der Vertikalen an.

Aufgaben über Maxima und Minima¹⁾

122. a) Wie hoch steigt ein mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben geschleudertes Körper, d. h. für welchen Wert von t erreicht die Entfernung $s = ct - \frac{g}{2} t^2$ des Körpers vom Ausgangspunkt ihr Maximum, und wie groß ist der Wert des Maximums? (Vgl. Aufgabe 120.) b) Wann wird beim schrägen Wurf aufwärts der höchste Punkt der Wurfbahn erreicht, d. h. für welches t wird s_y (Aufgabe 121) ein Maximum?
123. Man will eine Größe x ablesen, begeht dabei aber den Fehler f , d. h. man liest tatsächlich $x - f$ ab. Macht man n Ablesungen und begeht dabei die Fehler f_1, \dots, f_n , so untersucht man den Ausdruck

$$y = (x - f_1)^2 + (x - f_2)^2 + \dots + (x - f_n)^2.$$

Für welchen Wert von x wird diese Funktion ein Minimum?

124. Eine Strecke von 100 m Länge ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß das Rechteck aus diesen ein Maximum wird.
125. Zerlege eine Strecke von 24 m Länge so in 2 Teile, daß die Summe der Quadrate über den Teilen möglichst klein wird.

¹⁾ Für den Fall, daß die Lehre von den Maximis und Minimis im Zusammenhang behandelt wird, folgt hier eine Zusammenstellung von Aufgaben dieses Gebietes, die je nach der Art der auftretenden Funktionen in diesem Buche verstreut stehen; § 18, Aufgaben 122 bis 130; § 19, Aufgaben 42 bis 116; § 22, Aufgaben 45 bis 63; § 24, Aufgaben 56 bis 67; § 26, Aufgaben 53 bis 58, 70 bis 85, 110 bis 126; § 27, Aufgaben 28 bis 37; § 28, Aufgaben 11 bis 27, 36 bis 58; § 29, Aufgaben 90 bis 99, 142 bis 149, 152 bis 159, 175 bis 182.

126. In welche Summanden muß man eine Zahl a zerlegen, damit deren Produkt möglichst groß werde?
127. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat den größten Inhalt?
128. Welches von allen Dreiecken, deren Grundlinie und Höhe die Summe a haben, hat den größten Inhalt, und wie groß ist dieser?
129. Die lange Seite a eines Rechtecks ist um ebensoviel kürzer wie die kurze b länger zu machen; wie ist die Gestaltänderung einzurichten, damit der Inhalt des Rechtecks ein Maximum wird? Wie groß ist der Inhalt des neuen Rechtecks, und um wieviel übertrifft er den Inhalt des alten Rechtecks? (Vgl. Aufgabe 127.)

130. Untersuche, für welches Dreieck ABC mit der Basis a und der zugehörigen Höhe h der Ausdruck $AB^2 + AC^2$ ein Minimum wird (als Veränderliche wähle den einen Abschnitt auf der Basis!).
131. Nach dem Kosinussatz gilt für eine Dreiecksseite a die Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$$

wo b und c die anderen Dreiecksseiten sind und α der a gegenüberliegende Winkel ist. a) Untersuche, wann a^2 und damit a einen extremen Wert annimmt, wenn α und c konstant bleiben, b aber veränderlich ist. b) Entscheide, ob der Extremwert ein Maximum oder Minimum ist, und gib eine geometrische Deutung des Ergebnisses.

132. In einem Dreieck mit dem konstanten Winkel α ist die Summe der beiden anliegenden Seiten s . Welchen Wert müssen die beiden Seiten haben, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?
133. Einem Kreise ist das Rechteck größten Inhalts einzuschreiben.
134. Einem Kreise ist das Rechteck mit dem größten Umfange einzuschreiben.
135. Einem Dreieck ist das größte einer Seite anliegende Rechteck einzuzichnen (vgl. Fig. 12).

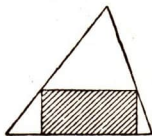


Fig. 12

136. Über den Seiten eines Rechtecks, dessen Umfang $2s$ gegeben ist, werden nach außen a) Quadrate, b) gleichseitige Dreiecke errichtet. Wie groß müssen die Seiten des Rechtecks sein, wenn der Flächeninhalt der ganzen Figur ein Minimum werden soll?
137. Gegeben ist der Mittelpunkt M eines Kreises mit veränderlichem Radius, ferner ein Punkt A , von dem aus die Tangenten AB und AC an den Kreis gelegt sind. Wie groß muß der Radius sein, damit die Berührungssehne BC möglichst groß wird?

138. Ein Kegelstumpf hat eine gegebene Höhe h , und die Summe seiner Grundkreisradien ist a . Unter welchen Umständen ist sein Volumen ein Maximum und ein Minimum?
139. Aus einem gegebenen Kreise ist das Filter von größtem Kubikinhalte auszuschneiden; mit anderen Worten: Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Halbmesser ist derjenige gesucht, der den Kegel von größtem Inhalt als Mantel begrenzt.

Anleitung: Wähle als Unbekannte den Zentriwinkel des Kreisabschnittes und untersuche nicht das Volumen selbst, sondern das Quadrat des Volumens.

§ 19. Die rationale ganze Funktion 3. Grades

Das Kurvenbild der Funktion

Gib eine graphische Darstellung der folgenden Funktionen 3. Grades durch Konstruktion einer ausreichenden Anzahl von Punkten:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $y = x^3 - 4.$ | 2. $y = (x - 2)^3.$ |
| 3. $y = x^3 + 2x^2 - x - 2.$ | 4. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$ |
| 5. $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$ | 6. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2.$ |
| 7. $y = x^3 - x^2 + x - 1.$ | 8. $y = x^3 + 2x^2 + x + 2.$ |

Gib die ganzzahligen Grenzen an, zwischen denen die Nullstellen der folgenden Funktionen liegen:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 9. $y = x^3 - 2x^2 - 10.$ | 10. $y = x^3 - 3x + 7.$ |
| 11. $y = x^3 - 17x + 100.$ | 12. $y = x^3 - 9x + 5.$ |
| 13. $y = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 5.$ | 14. $y = 5x^3 - 7x^2 + 3x + 9.$ |

15. a) Berechne von der Funktion $y = x^3$ den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

wobei der Nenner $x_1 - x$ durch Kürzung des Bruches zu beseitigen ist.

b) Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = x^3$, indem du

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bildest.

16. Bestimme den Differentialquotienten a) der Funktion $y = x^3$, b) der Funktion $y = \frac{x^3}{12}$ für die Werte $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$ und berechne die Lage der in diesen Punkten an die Kurve gelegten Tangenten.

Bestimme die Differentialquotienten der folgenden Funktionen:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| 17. $y = 2x^3.$ | 18. $y = \frac{x^3}{3}.$ |
| 19. $y = \frac{4}{3}\pi x^3.$ | 20. $y = \sqrt{2}x^3.$ |

21. $y = ax^3.$

22. $y = a \cdot \frac{x^3}{b}.$

23. $y = x^3 + x^2.$

24. $y = ax^3 + bx.$

25. $y = x^3 - 12x + 5.$

26. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2.$

27. $y = x^3 - x^2 - 16x + 10.$

28. $y = x^3 - 13x^2 - 64x + 32.$

29. $y = x^3 - 11x^2 - 16x + 98.$

30. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 10.$

31. $y = x^3 - x^2 - 4x + 4.$

32. $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$

33. $y = x^3 + ax^2 + bx + c.$

34. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Bestimme die Differentialquotienten folgender Funktionen:

35. $y = x^3 + x$ und $y = x^3 - x.$

36. $y = x^3 + 3$ und $y = x^3 - 3.$

37. $y = 2x^3$ und $y = -2x^3.$

38. $y = 5x^3$ und $y = \frac{x^3}{5}.$

39. $y = (x + 1)^3$ und $y = (x - 1)^3.$

40. $y = (x + 2)^3$ und $y = (x + 3)^3.$

41. $y = x^3$ und $y = (2x)^3.$

Maxima und Minima der Funktion

42. a) Welche Lage hat die Tangente in einem Punkte der Kurve, in dem die Kurve ein Maximum oder Minimum hat? b) Welche Gleichung ergibt sich daraus unter Verwendung des Differentialquotienten zur Bestimmung der Stelle, wo ein Maximum oder Minimum ist? c) Ist die nach b gewonnene notwendige Bedingung hinreichend dafür, daß ein Maximum oder Minimum eintritt? (Grund!)

Untersuche bei den folgenden Funktionen, ob Maxima und Minima vorhanden sind, und wenn sie vorhanden sind, bestimme die zugehörigen Werte der unabhängigen Variablen und das Maximum und Minimum der Funktion selbst:

43. $y = x^3.$

44. $y = x^3 + x.$

45. $y = 2x^3 + x^2.$

46. $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7.$

47. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$

48. $y = x(x - 1)(x + 3).$

49. $y = x(x^2 + x + 1).$

50. $y = (x - 1)(x^2 + 1).$

51. $y = (x - 1)(x^2 - 1).$

52. $y = (x + 1)(x^2 - 1).$

53. $y = x^3 + 9x^2 + 27x - 5.$

54. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 3.$

55. $y = x^3 + ax + b.$

56. $y = x^2 + ax^2 + bx.$

57. $y = (x - a)(x - b)^2.$

58. $y = (x - a)(x - b)(x - c).$

59. $y = (x - a)^3 + (x - b)^3.$

60. $y = (x - a)^3 + (x - b)^3 + (x - c)^3.$

61. Welchen Bedingungen unterliegen die Koeffizienten p und q einer Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + px - q,$$

wenn die Funktion ein Minimum und ein Maximum für

a) $x_m = \pm 3,$ b) $x_m = \pm \frac{4}{3},$ c) $x_m = \pm t$

besitzen soll (der positive Wert soll dem Minimum, der negative dem Maximum entsprechen)?

62. Wie lautet die allgemeine Form einer Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

(d. h. welchen Bedingungen unterliegen die Koeffizienten a , b und c), die a) ein Minimum bei $x_{\min} = 2$, ein Maximum bei $x_{\max} = -3$, b) ein Minimum bei $x_{\min} = +1$, ein Maximum bei $x_{\max} = -1$, c) ein Minimum bei $x_{\min} = m$, ein Maximum bei $x_{\max} = n$ besitzt?

63. Wie lautet die Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

wenn a) die Bedingung a der Aufgabe 62 erfüllt ist und die zur Funktion gehörige Kurve durch den Nullpunkt geht, b) die Bedingung b der Aufgabe 62 erfüllt ist und die Funktion für $x = 1$ den Wert $y = 1$ erhält, c) die Bedingung a der Aufgabe 62 erfüllt ist und der Wert des Minimums 3 ist, d) die Bedingung c der Aufgabe 62 erfüllt ist und das Maximum den Wert M hat?

Gecmetrische Anwendungen

64. Welcher von allen Kegeln, für die die Summe von Grundkreisradius und Höhe einen gegebenen Wert besitzt, hat das größte Volumen?
65. Einer gegebenen Kugel ist ein Zylinder mit möglichst großem Volumen einzuschreiben.
66. Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kegel mit möglichst großem Volumen eingeschrieben werden.
67. In eine Halbkugel, deren Radius gegeben ist, soll der Kegel von größtem Volumen eingeschrieben werden, der seine Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche hat.

68. Einer Kugel soll der Kegel von größtem Volumen eingeschrieben werden, der seine Spitze in einem gegebenen Punkte P des Kugelinnern hat. (P sei gegeben durch seinen Abstand a vom Mittelpunkt der Kugel.) – Lasse im Ergebnis den Abstand a von 0 bis r variieren und beachte die Beziehung zu den Aufgaben 66 und 67.
69. Ein rechtwinkliges Stück Pappe ist a cm lang und b cm breit. Aus jeder seiner Ecken soll ein Quadrat so ausgeschnitten werden, daß der aus dem Rest zusammengebogene offene Kasten einen möglichst großen Inhalt hat (Beispiel $a = 25$, $b = 17$). Welche Ausmaße hat der Kasten?

Der 2. Differentialquotient

70. Stelle die Funktion

$$y = x^3 - 3x + 2$$

und ihre erste Ableitung in dem gleichen Achsensystem graphisch dar. Zeichne diejenigen Teile der Funktion, wo die abgeleitete Funktion fällt, schwarz, und diejenigen Teile, wo die abgeleitete Funktion steigt, rot. Untersuche, ob die abgeleitete Funktion dort, wo das Minimum der Funktion ist, steigt oder fällt. Stelle die gleiche Untersuchung beim Maximum an.

71. Beweise durch Untersuchung der Tangentenrichtung, daß an der Stelle, wo die Funktion 3. Grades ein Minimum hat, die zugehörige abgeleitete Funktion steigt.
72. Beweise durch Untersuchung der Tangentenrichtung, daß an der Stelle, wo die Funktion 3. Grades ein Maximum hat, die zugehörige abgeleitete Funktion fällt.
73. a) Bilde von der Funktion

$$y = x^3 - 3x + 2$$

auch die 2. Ableitung (den 2. Differentialquotienten), d. h. die Ableitung der 1. Ableitung. b) Trage das graphische Bild der 2. Ableitung in das nach Aufgabe 70 hergestellte Bild ein. Welchen Teil dieses Bildes wird man hier schwarz und welchen rot zu machen haben?

74. Beweise, daß an der Stelle, wo die Funktion ein Minimum hat, die 2. Ableitung positiv ist, und daß an der Stelle, wo die Funktion ein Maximum hat, die 2. Ableitung negativ ist.
75. Welche Eigenschaften hat die Kurve und die graphische Darstellung ihrer 1. Ableitung in dem Punkte, in dem die 2. Ableitung Null ist (*Wendepunkt, Wendetangente*)?

Gib von den folgenden Funktionen eine graphische Darstellung und ebenso von ihren 1. und 2. Ableitungen, und zeige in jedem Falle, daß das

Vorzeichen der 2. Ableitung darüber entscheidet, ob die Kurve nach oben oder unten gekrümmt ist. Was tritt ein, wenn die 2. Ableitung Null wird?

76. $y = 3x^2.$

78. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} - 1.$

80. $y = x^3.$

82. $y = \frac{x^3}{6}.$

84. $y = x^3 + 3x^2 + x - 1.$

86. $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2.$

88. $y = x^3 + 3x^2 + 9x + 2.$

90. $y = (x - 2)^2(x + 2).$

77. $y = -2x^2.$

79. $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2.$

81. $y = -x^3.$

83. $y = -\frac{x^3}{6}.$

85. $y = x^3 - x^2 - 4x + 4.$

87. $y = x^3 - 3x + 2.$

89. $y = (x - 1)^3.$

91. $y = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$

Bei den folgenden Funktionen ist ohne graphische Veranschaulichung, lediglich durch Diskussion der 1. und 2. Ableitung, die Art der auftretenden Extremwerte, ob Maximum, Minimum oder keines von beiden, festzustellen. Die auftretenden Koeffizienten a , b , c sollen *positive* Zahlen sein.

92. $y = ax^2 + bx.$

94. $y = ax^2 - bx.$

96. $y = ax^3 + b.$

98. $y = ax^3 + bx^2.$

93. $y = -ax^2 + bx.$

95. $y = ax^2 - bx + c.$

97. $y = -ax^3 + bx.$

99. $y = ax^3 - bx^2.$

Wendepunkt und Wendetangente

Bestimme **a**) die Koordinaten des Wendepunktes, **b**) die Lage der Wendetangente (der Richtungsfaktor ist anzugeben!) bei den folgenden Kurven:

100. $y = x^3 - x^2 + 2x + 1.$

102. $y = 2x^2 - 3x + 25.$

104. $y = (x - 1)(x - 7)(x + 5).$

106. $y = (x - 3)^2(x - 10).$

108. $y = (x + 1)^3 + (x - 1)^3.$

101. $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 4x + 16.$

103. $y = 10x^3 - 15x^2 - 11.$

105. $y = (x - 6)(x + 7)x.$

107. $y = (x + 2)^2x.$

109. $y = (2x + 1)^3 - (x - 2)^3.$

Bestimme **a**) die Lage des Wendepunktes, **b**) den Richtungsfaktor der Wendetangente bei den Funktionen

110. $y = x^3 + ax^2 + bx + c.$

111. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

112. $y = x^3 + px + q.$

113. Teile die Funktionen 3. Grades in 2 Typen ein, von denen der eine keine Extremwerte (Maximum und Minimum), der andere 2 besitzt. Welche Ungleichung ist für die Koeffizienten der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

entscheidend? Wie gestalten sich die Verhältnisse, wenn an die Stelle der die beiden Typen kennzeichnenden Ungleichungen die Gleichung tritt?

114. Welche Bedingungen müssen für die Koeffizienten der Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

erfüllt sein, wenn die Funktion bei **a)** $x_w = 1$, **b)** $x_w = 1\frac{1}{3}$, **c)** $x_w = -\frac{2}{3}$, **d)** $x_w = w$ einen Wendepunkt haben soll?

115. Welche Bedingungen müssen für die Koeffizienten der Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

erfüllt sein, wenn die Funktion **a)** bei $x_w = -1$ einen Wendepunkt haben und wenn die Wendetangente parallel zur x -Achse verlaufen soll; **b)** wenn sie bei $x_w = -\frac{1}{3}$ einen Wendepunkt haben und wenn die Wendetangente mit der x -Achse einen Winkel von 45° bilden soll?

116. Welche Bedingungen müssen für die Koeffizienten der Funktion 3. Grades

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

erfüllt sein, wenn **a)** Wendepunkt und Wendetangente den in Aufgabe 115a ausgesprochenen Bedingungen genügen und wenn die Funktion im Wendepunkte den Wert $+2$ annimmt; **b)** wenn Wendepunkt und Wendetangente die in Aufgabe 115b ausgesprochenen Bedingungen erfüllen und wenn die Kurve durch den Nullpunkt geht?

§ 20. Die Gleichung 3. Grades

Koeffizienten und Wurzeln

1. Es sei x_1 eine reelle oder imaginäre Nullstelle der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

d. h. der Wert

$$y_1 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c$$

sei gleich Null. **a)** Bilde $y - y_1$ und untersuche diesen Ausdruck auf seine Teilbarkeit durch $x - x_1$. **b)** Welchen Grad hat der Quotient $\frac{y - y_1}{x - x_1}$? **c)** Zeige, daß die Nullstellen des Quotienten auch Nullstellen der Funktion y sind; gilt auch das Umgekehrte? (Grund!)

2. a) Von der Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ ist $x_1 = 2$ eine Wurzel, b) von der Gleichung $2x^3 = 5x^2 + 9$ ebenso $x_1 = 3$; welche Gleichungen hat man weiter zu lösen, um auch die anderen Wurzeln zu finden? Wie heißen diese?
3. Welche Produktdarstellung ergibt sich auf Grund der Überlegung in Aufgabe 1 für die Funktion 3. Grades, wenn x_1 , x_2 und x_3 Nullstellen sind?

Beweise folgende Sätze:

4. Eine Gleichung 3. Grades kann nicht mehr als 3 Wurzeln haben.
5. Eine rationale ganze Funktion 3. Grades (mit reellen Koeffizienten) hat mindestens eine reelle Nullstelle. (Untersuche den Wert der Funktion für $x = +\infty$ und $x = -\infty$; graphische Darstellung!)
6. Eine Gleichung 3. Grades hat 3 Wurzeln.
7. Eine Gleichung 3. Grades (mit reellen Koeffizienten) hat entweder 3 reelle oder 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.
8. Hat eine Gleichung 3. Grades (mit reellen Koeffizienten) 2 imaginäre Wurzeln, so sind diese konjugiert komplex.

Bilde die Gleichungen 3. Grades, die folgende Wurzeln haben (die Ausdrücke sind nach fallenden Potenzen der Unbekannten zu ordnen!):

- | | |
|--|---|
| 9. 1, 2, 3. | 10. 1, 1, -2. |
| 11. 2, 3, -5. | 12. 3, -4, -7. |
| 13. 7, $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$. | 14. 2, $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$. |
| 15. -8, 0,36, 0,75. | 16. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, -0,75. |
| 17. 7, $-3\frac{1}{2}$, $-4\frac{1}{4}$. | 18. $3\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$, -1,5. |
| 19. 3, $1+i$, $1-i$. | 20. -5, $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$. |
| 21. 3, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. | 22. -1, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. |
23. Bilde die Gleichung 3. Grades, in der alle 3 Wurzeln a) $+5$, b) -4 , c) w sind.
24. Bilde die Gleichung 3. Grades, in der 2 Wurzeln a) $x_1 = x_2 = 10$, b) $x_1 = x_2 = a$ zusammenfallen, während die 3. Wurzel im Falle a) $x_3 = -10$, im Falle b) $x_3 = b$ ist.
25. Zeige, daß eine Gleichung 3. Grades, die a) 2 reelle Wurzeln a und b und 1 imaginäre Wurzel, etwa $1+i$, hat, b) 3 imaginäre Wurzeln, etwa $1+i$, $1-i$, $1+2i$, hat, imaginäre Koeffizienten hat.

26. (*Vietascher Wurzelsatz*.) Beweise durch Koeffizientenvergleichung die Richtigkeit folgender Gleichungen zwischen den Koeffizienten a , b und c und den Wurzeln x_1 , x_2 und x_3 der Gleichung 3. Grades $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$:

$$\text{I.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$

$$\text{II.} \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$

$$\text{III.} \quad x_1x_2x_3 = -c.$$

27. Wie lauten die 3 Gleichungen der Aufgabe 26, wenn die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

vorgelegt wird?

Bilde unter Benutzung der Gleichungen I, II, III der Aufgabe 26 die Gleichungen 3. Grades, die folgende Wurzeln haben¹⁾:

$$28. \quad 2, 3, 4.$$

$$29. \quad -2, -3, -4.$$

$$30. \quad 2, -3, 4.$$

$$31. \quad -2, +3, -4.$$

$$32. \quad +1, +1, +1.$$

$$33. \quad -1, -1, -1.$$

$$34. \quad +1, -1, +1.$$

$$35. \quad -1, +1, -1.$$

$$36. \quad a, b, c.$$

$$37. \quad a, -b, c.$$

$$38. \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$

$$39. \quad +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}.$$

$$40. \quad 2, 1\frac{1}{2}, \frac{2}{3}.$$

$$41. \quad 2, -1\frac{1}{2}, \frac{2}{3}.$$

$$42. \quad 1, 1 + 2i, 1 - 2i.$$

$$43. \quad -2, 1 + i, 1 - i.$$

Aus dem *Vietaschen Wurzelsatz* folgt, daß eine rationale Wurzel einer Gleichung 3. Grades mit ganzen Koeffizienten (wofern eine solche überhaupt vorhanden ist) ein Faktor des von x freien Gliedes ist. Benutze diese Tatsache, um erst eine Wurzel und dann nach dem in Aufgabe 2 angewandten Verfahren die anderen Wurzeln zu bestimmen.

$$44. \quad x^3 - 5x = 12.$$

$$45. \quad x^3 - 7x^2 + 50 = 0.$$

$$46. \quad x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0.$$

$$47. \quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

$$48. \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

$$49. \quad x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0.$$

$$50. \quad x^3 + 2x^2 - 23x + 6 = 0.$$

$$51. \quad x^3 - 4x^2 - 15x - 42 = 0.$$

$$52. \quad x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0.$$

$$53. \quad x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0.$$

$$54. \quad x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{5}{8} = 0.$$

$$55. \quad x^3 - 2\frac{5}{8}x^2 + 2\frac{3}{4}x - 1 = 0.$$

$$56. \quad 6x^3 - 29x^2 = 45 - 53x.$$

$$57. \quad 70 + 71x = 47x^2 - 6x^3.$$

¹⁾ Vgl. auch Aufgaben 9 bis 22.

Auch bei den folgenden Gleichungen mit allgemeinen Zahlen ist eine Wurzel leicht zu finden. Bestimme die anderen:

58. $x^3 + px = 0.$

59. $x^3 + ax^2 - bx = 0.$

60. $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0.$

61. $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$

62. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0.$

63. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$

Die folgenden ganzen Funktionen 3. Grades sind als Produkte linearer Funktionen darzustellen¹⁾:

64. $y = x^3 + 4x^2 + x - 6.$

65. $y = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$

66. $y = x^3 - 19x + 30.$

67. $y = x^3 - 12x^2 + 47x - 60.$

68. $y = x^3 + 4x^2 + 4x.$

69. $y = 16x^3 - 16x^2 - x + 1.$

70. $y = 18x^3 + 45x^2 - 26x + 3.$

71. $y = 4x^3 - x^2 - 16x + 4.$

72. $y = x^3 + 2ax^2 + a^2x.$

73. $y = x^3 + (b - 2a)x^2 + a(a - 2b)x + a^2b.$

74. $y = x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b.$

Die reduzierte Form der Gleichung 3. Grades

75. a) Substituiere in die Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

die neue Veränderliche x' , die mit x durch die Gleichung

$$x = x' + m$$

verbunden ist. b) Bestimme m so, daß in der neuen nach fallenden Potenzen von x' geordneten Funktion der Koeffizient des quadratischen Gliedes Null wird.

76. Die reduzierte Form der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

heiße

$$x'^3 + px' + q = 0.$$

Welche Gleichungen bestehen zwischen den Koeffizienten a , b , c und den Koeffizienten p , q ?

Verwandle folgende Gleichungen in reduzierte kubische Gleichungen:

77. $x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0.$

78. $2x^3 - 12x^2 + 8x - 19 = 0.$

79. $x^3 + 5x^2 - 3x - 16 = 0.$

80. $5x^3 - 7x^2 + 3x - 8 = 0.$

¹⁾ Während in den vorhergehenden Gleichungen die Größe x eine Unbekannte war, bedeutet x in den folgenden Funktionen eine Variable. Achte auf den Unterschied von Funktion und Gleichung, von Variable und Unbekannte und auf die engen Beziehungen, die zwischen beiden herrschen.

81. $7x^3 + 3x^2 + 10 = 0.$

82. $19x^3 - 10x^2 + 8 = 0.$

83. $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0.$

84. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$

85. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$

86. $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0.$

87. Zeige, daß der zur reduzierten Form der Gleichung führenden Substitution eine Verschiebung der zugehörigen Kurve entspricht, durch die der Wendepunkt auf die y -Achse zu liegen kommt.

88. Beweise, daß die der Funktion 3. Grades entsprechende Kurve zentral-symmetrisch in bezug auf ihren Wendepunkt ist.

89. Welche Gleichungen gelten zwischen den reellen Wurzeln x_1 , x_2 und x_3 einer reduzierten Gleichung $x^3 + px + q = 0$?

90. Welche Gleichungen gelten zwischen der reellen Wurzel x_1 und den imaginären Wurzeln $x_2 = a_2 + b_2i$ und $x_3 = a_3 + b_3i$ einer reduzierten Gleichung $x^3 + px + q = 0$?

91. Drücke durch die Koeffizienten a und b der reduzierten Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

die Größen a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, c) $x_1^2 - x_2x_3$ aus.

92. a) Bringe durch die Substitution $x = \frac{1}{x}$ die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + b = 0$$

auf die reduzierte Form. b) Untersuche, ob diese Substitution schneller zum Ziel führt als die in Aufgabe 75 angegebene Substitution. c) Bei welchen Gleichungen 3. Grades führt die in a) angegebene Substitution zum Ziel?

Reduziere die folgenden Gleichungen:

93. $x^3 + 5x^2 - 4 = 0.$

94. $x^3 + 2x^2 + 5 = 0.$

95. $x^3 + \frac{x^2}{2} + 2 = 0.$

96. $x^3 - \frac{x^2}{3} + 6 = 0.$

97. $2x^3 + x^2 + 1 = 0.$

98. $8x^3 - 5x^2 - 8 = 0.$

99. $x^3 - ax^2 + b = 0.$

100. $ax^3 + bx^2 + c = 0.$

Die Cardanische Formel

101. Gib die Lösungen der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ an, wenn a) $p = 0$, b) $q = 0$ ist.

102. In der reduzierten Form der Gleichung 3. Grades

$$\text{I. } x^3 + px + q = 0$$

sei $p \neq 0$ und $q \neq 0$. a) Substituiere $x = u + v$ und zeige, daß I erfüllt ist, wenn

$$\text{II. } u^3 + v^3 = -q,$$

$$\text{III. } uv = -\frac{p}{3}$$

ist. b) Sind die Gleichungen II und III notwendige und hinreichende Bedingungen für I oder nur hinreichende Bedingungen? c) Bestimme aus II und III erst u^3 und v^3 , dann u und v .

103. Mache die Probe darauf, daß die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

durch den Ausdruck (*Cardanische Formel*)

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

befriedigt wird.

104. a) Welche Ungleichung muß erfüllt sein, wenn die in der Cardanischen Formel auftretenden Quadratwurzeln reell sein sollen? (Unterscheide die Fälle p positiv und p negativ!) b) Welchen Wert erhält der Ausdruck der Cardanischen Formel, wenn die *Diskriminante der kubischen Gleichung*

$$d = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Null wird?

105. Wie lautet die Diskriminante der noch nicht reduzierten Gleichungen

$$a) x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$b) ax^3 + bx^2 + cx + d = 0?$$

In folgenden Gleichungen ist eine Wurzel nach der Cardanischen Formel zu bestimmen; die beiden anderen Wurzeln sind durch Division mit $x - x_1$ zu finden (vgl. Aufgaben 1 u. 2):

$$106. x^3 = 3x + 2.$$

$$107. x^3 = 36x + 91.$$

$$108. x^3 = 9x - 28.$$

$$109. x^3 + 9x + 26 = 0.$$

$$110. x^3 - 18x = 35.$$

$$111. x^3 - 72x - 280 = 0.$$

112. a) Gib die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $x^3 = 1$ an. b) Zeige, daß zwischen den komplexen Wurzeln ε_1 und ε_2 dieser Gleichung (den *3. Einheitswurzeln*) folgende Gleichungen bestehen:

$$I. \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1,$$

$$II. \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2,$$

$$III. \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1.$$

113. Gib die 3 Wurzeln u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 der Gleichungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{an.}$$

114. a) Welche von den an sich 9 Möglichkeiten $w = u_n + v_n$, wo $n = 1, 2, 3$ ist, kommen mit Rücksicht auf Gleichung III, Aufgabe 102 allein als Wurzeln der kubischen Gleichung in Betracht? b) Fasse in diesen Ausdrücken für die 2. und 3. Wurzel der kubischen Gleichung

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

die reellen und die rein imaginären Teile zusammen.

- 115–120. Bestimme bei den Aufgaben 106 bis 111 die 2. und 3. Wurzel nach der in Aufgaben 112 bis 114 angegebenen Methode unmittelbar aus der Cardanischen Formel.

Löse folgende Gleichungen:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 121. $x^3 = 2x + 3$. | 122. $x^3 = x - 7$. |
| 123. $x^3 + 5x - 4 = 0$. | 124. $x^3 = 4x + 15$. |
| 125. $x^3 + 7x - 8 = 0$. | 126. $x^3 = 26x + 60$. |
| 127. $4x^3 - 5x - 6 = 0$. | 128. $7x^3 + 3x - 100 = 0$. |
| 129. $15x^3 + 13x^2 - 2 = 0$. | 130. $111x^3 = 5x^2 + 4$. |
| 131. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$. | 132. $5x^3 + 10x^2 + 7x - 2 = 0$. |
| 133. $3x^3 + 13x^2 + 11x - 14 = 0$. | 134. $28x^3 - 126x^2 + 195x - 139 = 0$. |

Der Casus irreducibilis

135. Die Diskriminante der kubischen Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

sei negativ. (Achte auf die Vorzeichenänderung gegen Aufgabe 76! Warum ist sie vorgenommen?) Schreibe die Radikanden der 3. Wurzeln in der Cardanischen Formel als komplexe Zahlen und ziehe die 3. Wurzeln unter Verwendung des Moivreschen Satzes (vgl. § 9, Aufgabe 34, 42, 43).

136. Zeige so, daß die Wurzeln der kubischen Gleichung mit negativer Diskriminante

$$x^3 - px + q = 0$$

die folgenden sind:

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ \right),$$

$$x_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ \right),$$

worin φ durch die Gleichung

$$\cos \varphi = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} \quad \text{bestimmt ist.}$$

137. Beweise die goniometrische Formel

$$\cos \varphi = 4 \cdot \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cdot \cos \frac{\varphi}{3}.$$

138. a) Überzeuge dich von der Richtigkeit der Gleichung

$$\left(r \cdot \cos \frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4} r^2 \left(r \cdot \cos \frac{\varphi}{3}\right) - \frac{r^3}{4} \cdot \cos \varphi = 0.$$

b) Bringe diese Gleichung in Übereinstimmung mit der kubischen Gleichung

$$x^3 - px + q = 0,$$

indem du

$$x = r \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$$

setzest und r und φ geeignet bestimmst. c) Welches sind die beiden anderen Wurzeln der Gleichung? d) Zeige die Übereinstimmung dieser Lösung mit jener der Aufgabe 136.

Folgende kubische Gleichungen haben 3 reelle Wurzeln, teils rationale, teils irrationale. Ist die Gleichung nicht in der reduzierten Form gegeben, so muß die Gleichung erst auf diese Form gebracht werden.

139. $x^3 - 7x - 6 = 0.$

140. $x^3 = 12x + 14.$

141. $x^3 - 19x + 30 = 0.$

142. $x^3 = 7x - 5.$

143. $4x^3 - 13x + 6 = 0.$

144. $30x^3 - 61x^2 + 36 = 0.$

145. $8x^3 + 12x^2 - 4x - 1 = 0.$

146. $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0.$

147. $27x^3 - 54x^2 + 25x + 1 = 0.$

148. $x^3 - 12x = 16.$

149. $x^3 - 27x = 54.$

150. $4x^3 = 27(x + 1).$

Vermischte Gleichungen

151. $x^3 = 37x + 84.$

152. $x^3 = 45x - 152.$

153. $x^3 + 41x = 1000.$

154. $x^3 - 61x + 180 = 0.$

155. $x^3 = 30x - 20.$

156. $x^3 = 90x + 341.$

157. $x^3 = 31x - 19.$

158. $x^3 = 75x - 250.$

159. $x^3 + 10x - 13 = 0.$

160. $x^3 = 126x + 559.$

161. $x^3 = 144x + 728.$

162. $x^3 - 216x + 1241 = 0.$

163. $x^3 + 2x = 357$.
 165. $x^3 - 5x = 12$.
 167. $x^3 + 3x^2 - 7x = 84$.
 169. $3x^3 - 2x^2 = \frac{25}{3}$.
 171. $20x^3 + 11x = 8$.
 173. $7x^3 = 9x + 5$.
 175. $9x^3 - 61x - 60 = 0$.
 177. $6x^3 + 5x^2 - 2 = 0$.
 179. $x^3 + 9x^2 + 27x + 26 = 0$.
 181. $x^3 - 8x^2 + 19x - 20 = 0$.
 183. $8x^3 - 18x^2 + 17x - 6 = 0$.
 185. $10x^3 - 26x^2 + 13x + 10 = 0$.
 187. $2x^3 - 21x^2 + 74x - 85 = 0$.
 189. $12x^3 - 52x^2 + 23x + 42 = 0$.
 191. $4x^3 - 60x^2 + 309x + 500 = 0$.
164. $4x^3 - 7x = 87$.
 166. $x^3 - 9x + 10 = 0$.
 168. $2x^3 + 5x^2 = 36$.
 170. $8x^3 - 8x^2 = 9$.
 172. $7x^3 + 9x^2 - 2 = 0$.
 174. $9x^3 - 16x + 15 = 0$.
 176. $17x^3 - 33x^2 + 11 = 0$.
 178. $10x^3 - 8x^2 + 5 = 0$.
 180. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$.
 182. $x^3 - 9x^2 - 2x + 101 = 0$.
 184. $3x^3 + 18x^2 + 67x = 914$.
 186. $9x^3 - 45x^2 + 34x + 37 = 0$.
 188. $18x^3 - 36x^2 + 9x + 8 = 0$.
 190. $20x^3 - 90x^2 + 126x - 53 = 0$.

Graphische Lösungsmethoden

Durch Schnitt einer festgezeichneten Parabel 3. Grades $y = x^3$ mit einer Geraden bestimme die reellen Wurzeln folgender Gleichungen:

192. $x^3 + x = 10$.
 194. $x^3 - 3x = 2$.
 196. $x^3 + x = 2$.
 198. $x^3 + x = 1$.
 200. $x^3 + x + 1 = 0$.
193. $x^3 - x + 10 = 0$.
 195. $x^3 - 4x = 0$.
 197. $x^3 + x + 2 = 0$.
 199. $x^3 - x = 1$.
 201. $x^3 + 2x = 1$.

202. Zeige, daß die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

durch Schnitt einer Parabel

$$\text{I. } y = x^2 + ax + b$$

mit der gleichseitigen Hyperbel

$$\text{II. } x \cdot y + c = 0$$

graphisch gelöst wird.

203. Welche Parabel und Hyperbel (vgl. Aufgabe 202) bringt man zum Schnitt, wenn eine reduzierte Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

vorgelegt ist?

Löse nach der in den Aufgaben 202 und 203 angegebenen Methode graphisch die Gleichungen:

204. $x^3 - x = 6.$

205. $x^3 + x + 7 = 0.$

206. $x^3 - 4x^2 + 4x = 1.$

207. $x^3 - 4x^2 + 7x = 6.$

208. $x^3 + 4x^2 - 12x + 7 = 0.$

209. $x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0.$

210. Multipliziert man die vorgelegte Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

mit x , so erhält man

$$x^4 + px^2 + qx = 0.$$

Man setze darin

$$\text{I. } y = x^2,$$

addiere und subtrahiere x^2 , dann erhält man:

$$x^2 + y^2 + qx + (p-1)y = 0$$

oder II. $\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4}.$

Die Wurzeln der Gleichungen ergeben sich also aus den Koordinaten der Schnittpunkte einer festen Parabel I mit einem Kreis II. Welches sind die Koordinaten des Kreismittelpunktes, welches ist der Radius?

Löse nach der in der vorstehenden Aufgabe angegebenen graphischen Methode die kubischen Gleichungen:

211. $x^3 + x - 2 = 0.$

212. $x^3 + 5x + 3 = 0.$

213. $x^3 - 5x + 3 = 0.$

214. $x^3 - 13x + 5 = 0.$

215. $x^3 - 3x - 2 = 0.$

216. $x^3 + 5x = 18.$

217. Erkläre, warum der Kreis in allen Fällen von graphischen Lösungen der eben angegebenen Art durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

§ 21. Anwendungen der kubischen Gleichungen

Aufgaben aus der Geometrie

Planimetrie

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe h und die Summe s aus der Hypotenuse und einer Kathete gegeben. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks? (Zahlenbeispiel: $h = 12$, $s = 46,8$.)

2. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man den Umfang $2s$ und den Radius ρ des eingeschriebenen Kreises. Die Seiten sind zu berechnen.
3. In einem Dreieck mit den Seiten a , b und c sind 3 durch einen Punkt gehende Ecktransversalen so zu ziehen, daß 3 nicht aufeinanderfolgende Seitenabschnitte gleich werden. (Zahlenbeispiel: $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.)

Anleitung: Wende den Lehrsatz von Ceva an!

Stereometrie

4. In einem rechtwinkligen Quader ist die Summe dreier anstoßender Kanten a , die Oberfläche b , der Inhalt c . Berechne die Kanten! (Zahlenbeispiel: $a = 12$, $b = 88$, $c = 48$.)
Anleitung: Wähle die Kanten als Wurzeln einer kubischen Gleichung, die sich leicht aufstellen läßt.
5. Ein Rechteck von 34 dm Umfang rotiert um seine kürzere Mittellinie, der dadurch entstehende gerade Zylinder hat ein Volumen von 550 dm^3 . Wie lang sind die Rechtecksseiten¹⁾?
6. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius eines geraden Zylinders von 385 cm^3 Volumen, den ein um eine Mittellinie rotierendes Rechteck von 33 cm Umfang erzeugt?
7. Höhe und Grundkreisradius eines Kegels von 66 cm^3 Inhalt betragen zusammen 10 cm, wie lang ist jede dieser Linien?
8. Die Höhe eines Kegels, der ein Volumen von 462 dm^3 besitzt, übertrifft den Grundkreisradius um 2 dm. Wie lang sind beide Linien?
9. Wie groß sind Grundkreisradius und Höhe eines geraden Zylinders von 52800 cm^3 Inhalt, der einer Kugel von 29 cm Radius eingeschrieben ist?
10. Wie dick ist eine silberne Kugelschale von 2 cm innerem Radius, die 836 g wiegt, wenn man die Wichte des Silbers zu $10,5 \text{ g/cm}^3$ annimmt?
11. Eine goldene Kugelschale, deren Radien zusammen 15 cm betragen, besitzt einen Metallwert von 115869,60 RM. Die Wichte des Goldes werde zu $19\frac{1}{4} \text{ g/cm}^3$, der Wert von 1 kg Gold zu 2800 RM angenommen. Wie groß sind die Radien einzeln?
12. Wie tief taucht eine Vollkugel in Wasser ein, wenn ihre Wichte a) den Wert $0,896 \text{ g/cm}^3$, b) den Wert $0,84575 \text{ g/cm}^3$ hat?
13. Wie tief taucht eine Bleikugel (Wichte $11,35 \text{ g/cm}^3$) in Quecksilber (Wichte $13,6 \text{ g/cm}^3$) ein?

¹⁾ In den Aufgaben 5 bis 14 ist für π der Näherungswert $3\frac{1}{7}$ anzuwenden.

14. Die beiden Grenzkreise einer Kugelschicht haben Radien von 4 cm und 3 cm, das Volumen der Schicht beträgt 132 cm^3 . Wie groß ist die Höhe der Schicht und wie groß der Kugelradius?
15. Eine Kugelschale, deren beide Radien 6 cm und 5 cm lang sind, hat dasselbe Volumen wie die Summe zweier Kugeln, deren Radien sich um 1 cm unterscheiden. Welche Länge haben diese Radien?
16. Eine Kugelschale, deren beide Radien eine Summe von 22 cm ergeben, hat dasselbe Volumen wie die Summe zweier Kugeln von 8 cm und 6 cm Radius. Welche Dicke hat die Kugelschale?
17. Ein Kugelsegment vom Inhalt v hat den Grundkreisradius a . Wie hoch ist es und wie groß ist der Kugelradius?

Aufgaben aus der Arithmetik

18. Für welchen Exponenten eines Binoms besitzt der 3. Binomialkoeffizient
a) den Wert 10, b) den Wert 56?
19. Die Exponenten der Potenzen eines Binoms unterscheiden sich um 4, die Summe der 3. Binomialkoeffizienten beträgt 36. Welche Exponenten sind dies?
20. Welche beiden Exponenten eines Binoms geben die Summe 10, während die 3. Binomialkoeffizienten der beiden Binome sich um 16 unterscheiden?
21. Die Anzahl der Kombinationen einer gewissen Anzahl von Elementen zur 3. Klasse beträgt 455. Wie groß ist die Anzahl der Elemente?
22. 4 Kugeln haben Radien, die eine arithmetische Reihe von der Differenz 1 cm bilden. Die größte von diesen Kugeln ist so groß wie die 3 übrigen zusammengenommen. Wie groß sind die Radien?
23. Die Volumina dreier Kugeln, deren Radien eine arithmetische Reihe von der Differenz 1 cm bilden, sind zusammen gleich dem Volumen einer Kugel, deren Radius das Doppelte vom Radius der kleinsten jener 3 Kugeln ist. Bestimme die Radien.
24. In einer geometrischen Reihe ist das Anfangsglied 8, die Summe der ersten 4 Glieder 65. Wie groß ist der Quotient?

Löse folgende Gleichungssysteme:

$$25. \quad x + y + z = 2$$

$$xy + xz + yz = -1$$

$$xyz = -2.$$

$$27. \quad x + y + z = 15$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 147$$

$$xyz = 147.$$

$$26. \quad x + y - z = -1$$

$$-xy + xz + yz = 10$$

$$xyz = 8.$$

$$28. \quad x - y + z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$xyz = 16.$$

Aufgaben aus der Physik

29. 3 Drähte, von denen der erste einen um 1 Ohm größeren elektrischen Stromwiderstand aufweist als der zweite, aber einen um 4 Ohm geringeren als der dritte, geben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 0,6 Ohm. Wie groß sind die Widerstände der einzelnen Drähte?
30. Die Bahn eines elektrischen Stromes besteht auf einer gewissen Strecke aus 2 Zweigen A und B, von denen der letztere einen um 8 Ohm größeren Widerstand leistet als der erstere. Erhöht man den Widerstand des Zweiges A um 2 Ohm, so muß der Widerstand im Zweige B auf den Gesamtwert von 6 Ohm gebracht werden, wenn die Stromstärke keine Veränderung erleiden soll. Wie groß sind die Widerstände beider Zweige und wie groß der der verzweigten Strecke im ganzen?
31. Das Bild, das eine Glaslinse von einem leuchtenden Punkte erzeugt, steht um 3 dm näher an der Linse als der leuchtende Punkt selbst. Nähert sich dieser der Linse um 2 dm, so erscheint das Bild in einem Abstände von 4 dm von der Linse. Die ursprüngliche Entfernung des leuchtenden Punktes von der Linse und deren Brennweite sind zu bestimmen.

Aufgaben aus alter Zeit

Das Delische Problem, die Verdoppelung des Würfels

32. Aufgabe des *Menächmus* (370 v. d. Ztr.): Zu 2 gegebenen Strecken a und b sind 2 mittlere Proportionalen zu finden, also 2 Strecken x und y so, daß

$$a : x = x : y = y : b$$

ist. a) Bestimme x . b) Zeige den Zusammenhang mit dem Problem der Würfelverdoppelung. c) Löse die Proportion graphisch durch Schnitt zweier Kegelschnitte.

33. *Beispiel*: Der Quader mit den Kanten 8 cm, 5 cm und 2 cm soll durch gleichmäßige Verlängerung aller Kanten a) verdoppelt, b) verdreifacht werden.

Die Dreiteilung des Winkels

34. Es sei ein Winkel α gegeben; zeichne im Einheitskreis die Strecke von der Länge $\cos \alpha$. Berechne $\cos \frac{\alpha}{3}$ (vgl. § 20, Aufg. 137).
35. *Lösung von Descartes* (1596–1650). Man bringe die Parabel $y^2 = x$ zum Schnitt mit dem Kreis

$$(x - 2)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}.$$

a) Zeige den Zusammenhang der Schnittpunkte mit der Gleichung

$$y^3 = 3y - q.$$

(Vgl. § 20, Aufgabe 210.) b) Löse die Gleichung algebraisch.

Ein Problem von Archimedes (287–212 v. d. Ztr.): Eine Kugel soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, daß die Körperinhalte der so gebildeten Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnis stehen.

36. Zeige den Zusammenhang des Problems mit der Proportion

$$(a - x) : b = c^2 : x^2$$

und bestimme x .

37. Löse die Proportion graphisch durch Schnitt einer Parabel

$$x^2 = \frac{c^2}{a} y$$

und einer Hyperbel

$$y(a - x) = ba.$$

Bestätige die Richtigkeit dieser *Archimedes* zugeschriebenen Lösung.

38. Löse die Proportion graphisch durch Schnitt einer Parabel

$$x^2 = cy$$

und einer Hyperbel

$$y(a - x) = bc.$$

Bestätige die Richtigkeit dieser *arabischen* Lösung.

39. *Beispiel 1:* Die Kugel mit dem Radius 36 cm soll durch einen ebenen Schnitt im Verhältnis 1 ; 3 geteilt werden.

40. *Beispiel 2:* Eine Halbkugel mit dem Radius 45 cm soll durch Ebenen parallel zum Grundkreise in 4 gleiche Teile geteilt werden.

Aus *Leonardo Pisanos Flos* (um 1200).

41. Ut inveniretur cubus numerus qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti. (Es soll eine Zahl gefunden werden, deren Zehnfaches zusammen mit ihrem Kubus und 2 Quadraten gleich 20 ist.)

42. In seiner *Coss* behandelt *Rudolff* (1553) die Gleichung

$$x^3 = 10x^2 + 20x + 48$$

folgendermaßen: Er addiert beiderseits 8

$$(I) \quad x^3 + 8 = 10x^2 + 20x + 56$$

und dividiert durch $x + 2$

$$x^2 - 2x + 4 = 10x + \frac{56}{x+2}.$$

Nun werden die beiden Gleichungen:

$$(II) \quad x^2 - 2x = 10x$$

$$(III) \quad 4 = \frac{56}{x+2}$$

durch $x = 12$ befriedigt; dieser Wert ist also auch eine Wurzel der Gleichung I.

a) Prüfe das Verfahren auf seine allgemeine Verwendbarkeit. b) Löse die vorgelegte Gleichung vollständig.

Tartaglia (1501–1557) wurden 1530 von einem gewissen Zuane de Tonini da Coi, mit lateinischer Namensform Colla, folgende 2 Aufgaben vorgelegt:

43. Eine Zahl zu finden, welche mit ihrer um 3 vermehrten Quadratwurzel vervielfacht das Produkt 5 gibt.
44. 3 Zahlen zu finden, von welchen jede folgende um 2 größer ist als die vorhergehende und die als Produkt 1000 geben.

§ 22. Die rationale ganze Funktion 4. Grades und die Gleichung 4. Grades

Der Verlauf der Funktion 4. Grades

Gib eine graphische Darstellung der folgenden Funktionen 4. Grades (evtl. verkürzter Maßstab auf der y -Achse) und achte dabei insbesondere auf die ganzzahligen Grenzen, zwischen denen die Nullstellen liegen:

- | | |
|--|--|
| 1. $y = x^4 - 2.$ | 2. $y = x^4 - 10.$ |
| 3. $y = x^4 - x.$ | 4. $y = x^4 - x^2 - 2.$ |
| 5. $y = x^4 + x^2 + 1.$ | 6. $y = x^4 + 2x^2 - 3x - 8.$ |
| 7. $y = x^4 - 3x^2 + 4.$ | 8. $y = x^4 - 19x + 11.$ |
| 9. $y = x^4 - 3x^2 - 9x - 31.$ | 10. $y = (x - 1)^4.$ |
| 11. $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 20x - 47.$ | 12. $y = x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 210x + 241.$ |
| 13. $y = x^4 - 7x^3 + 33x^2 - 55x + 80.$ | |
14. Untersuche den Wert einer rationalen ganzen Funktion

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

a) für den Fall $a > 0$, b) für den Fall $a < 0$ hinsichtlich ihres Verhaltens für $x = +\infty$ und $x = -\infty$. Was folgt daraus für die Anzahl der reellen Nullstellen der Funktion?

15. Bestimme erst den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ der Funktion $y = x^4$ und, wenn du den Nenner $x_1 - x$ durch Kürzung weggeschafft hast, den Differentialquotienten.

Berechne a) den ersten, b) den zweiten, c) den dritten Differentialquotienten der folgenden Funktionen:

- | | |
|--|---|
| 16. $y = 7x^4$. | 17. $y = 2x^4 + 32x^2$. |
| 18. $y = \frac{x^4}{2} - 10^5$. | 19. $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. |
| 20. $y = (x - 1)^4 + (x + 1)^4$. | 21. $y = (x + 2)^4 - (2x + 1)^4$. |
| 22. $y = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 1)$. | 23. $y = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$. |
| 24. $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. | 25. $y = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$. |
| 26. $y = ax^4$. | 27. $y = ax^4 + bx^2$. |
| 28. $y = ax^4 - b$. | 29. $y = \frac{x^4}{a} - \frac{x^3}{b}$. |
| 30. $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. | 31. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. |

Bestimme die Maxima und Minima der folgenden Funktionen (d. h. die Werte der unabhängigen und der abhängigen Variablen) und gib jeweilig an, welcher Art der errechnete Extremwert ist:

- | | |
|---|---|
| 32. $y = x^4 - 8$. | 33. $y = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5$. |
| 34. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 10$. | 35. $y = x^4 - x^2 + 15$. |
| 36. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$. | 37. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 4x - 10$. |
| 38. $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 + 8x - 12$. | 39. $y = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x - 100$. |
| 40. $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$. | 41. $y = x^4 - 12x^2 - 36x + 8$. |
| 42. $y = x^4 - 4x^2 + 4x - 1$. | 43. $y = x^4 - 26x^2 + 48x - 36$. |
| 44. $y = x^4 + 6\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 96x + 50$. | |
45. Was läßt sich über die Anzahl der reellen Extremwerte einer Funktion 4. Grades sagen? (Erläuterung am Kurvenbild!)
46. Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und gib durch Diskussion der zur Lösung führenden Gleichung die Ungleichungen an, die zwischen den Koeffizienten bestehen, wenn 3 oder 1 reeller Extremwert vorhanden sind.

47. Wie heißen die Koeffizienten a , b , c , d einer ganzen Funktion 4. Grades

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

deren graphisches Bild durch den Nullpunkt geht und die a) für die Werte $x = +1$, $x = +2$ und $x = -3$, b) für $x = -1$, $x = -3$ und $x = +5$, c) für $x = m_1$, $x = m_2$ und $x = m_3$ Extremwerte hat? d) Welche Form nimmt die Funktion an, wenn $m_1 = m_2 = m$ ist, e) wenn $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ist?

48.—60. Bestimme die Wendepunkte der in Aufgaben 32 bis 44 genannten Funktionen 4. Grades, soweit solche vorhanden sind.

61. Was läßt sich über die Anzahl der (reellen) Wendepunkte der zu einer Funktion 4. Grades gehörenden Kurve sagen? (Erläuterung am Kurvenbild!)

62. Bestimme die Wendepunkte der Kurve

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und gib durch Diskussion der zur Lösung führenden Gleichung die Ungleichungen an, die zwischen den Koeffizienten bestehen müssen, damit (reelle) Wendepunkte vorhanden sind.

63. Welche Bedingungen gelten für die Koeffizienten a , b , c , d in der Gleichung einer Kurve

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

bei der die Wendepunkte a) bei $x = +3$ und $x = -4$, b) bei $x = w_1$ und $x = w_2$, c) bei $x = +w$ und $x = -w$ liegen?

Koeffizienten und Nullstellen

64. Zeige, daß eine Funktion $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ durch $x - x_1$ ohne Rest teilbar ist, wenn x_1 eine (reelle oder imaginäre) Nullstelle der Funktion ist, d. h. wenn

$$y_1 = x_1^4 + ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$$

ist. (Bilde $y - y_1$!)

65. Welche Produktdarstellung ergibt sich auf Grund der Überlegungen in der vorangehenden Aufgabe für die Funktion 4. Grades, wenn x_1 , x_2 , x_3 und x_4 die Nullstellen der Funktion sind?

66. Beweise die folgenden Sätze:

- Eine Gleichung 4. Grades kann nicht mehr als 4 Wurzeln haben.
- Wenn eine Gleichung 4. Grades eine Wurzel hat, so hat sie 4 Wurzeln, die freilich zum Teil zusammenfallen können. (Was heißt das?)
- Eine Gleichung 4. Grades mit reellen Koeffizienten und nicht zusammenfallenden Wurzeln besitzt entweder 4 oder 2 oder keine reellen Wurzeln, niemals aber eine ungerade Anzahl. (Diskussion des Kurvenbildes!)

Bilde die Gleichungen 4. Grades, welche folgende Wurzeln haben:

67. 1, 2, 3, 4.

68. 1, 2, -1, -2.

69. -1, +2, +3, -4.

70. $\pm 2, \pm \sqrt{3}$.

71. $\pm \sqrt{5}, \pm i \sqrt{7}$.

72. 1, 2, $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.

73. 2, 3, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

74. $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, -1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{3}$.

75. -0,2, -0,5, 2,2, 3,3.

76. $3\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1,8, 2,5$.

77. -4, -3, $3 \pm \sqrt{5}$.

78. $1 \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-1})$.

79. $\frac{1}{2}(1 \pm i \sqrt{3}), \pm \sqrt{5}$.

80. $\frac{1 \pm i \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2}$.

81. Bilde die Gleichungen 4. Grades, in der a) 2 Wurzeln 3, 2 Wurzeln -2, b) 2 Wurzeln p , 2 Wurzeln q , c) 2 Wurzeln p , eine q , eine r , d) 3 Wurzeln w , die vierte 1, e) alle Wurzeln -2, f) alle Wurzeln w sind.

82. (Vietascher Wurzelsatz.) Beweise durch Koeffizientenvergleich die Richtigkeit folgender Gleichungen zwischen den Koeffizienten a, b, c und d und den Wurzeln x_1, x_2, x_3 und x_4 der Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0:$$

I. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,$

II. $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = b,$

III. $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -c,$

IV. $x_1 x_2 x_3 x_4 = d.$

Aus dem Vietaschen Wurzelsatz folgt, daß eine rationale Wurzel einer Gleichung 4. Grades, sofern eine solche vorhanden ist, ein Faktor des von x freien Gliedes ist. Benutze diese Tatsache, um erst eine Wurzel und danach in geeigneter Weise die übrigen Wurzeln zu bestimmen:

83. $x^4 - 3x^3 = 6x - 18.$

84. $x^4 - 3x^3 = 5x - 18.$

85. $x^4 - 13x^2 - 7x = 20.$

86. $x^4 - 19x = 3x^3 + 7x^2.$

87. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

88. $x^4 - 3ax^3 + 3a^2x^2 - a^3x = 0.$

89. $x^4 - 2x^3 + (1 - a^2)x^2 + 2a^2x - a^2 = 0.$

90. $x^4 + 2x^3 + (1 - a^2)x^2 - 2a^2x - a^2 = 0.$

91. $x^4 - 3x^3 - 34x^2 + 18x + 168 = 0.$

92. $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 24x - 72 = 0.$

93. $x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x + 90 = 0.$

94. $x^4 - 13x^2 + 48x - 60 = 0.$

95. $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0.$

96. $x^4 + 3x^3 - 52x^2 - 60x + 288 = 0$.
 97. $x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 175x - 300 = 0$.
 98. $x^4 - 17x^3 + 95x^2 - 199x + 120 = 0$.
 99. $x^4 + 19x^3 + 123x^2 + 305x + 200 = 0$.
 100. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 19x - 10 = 0$.
 101. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 52x - 40 = 0$.
 102. $x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 13x + 6 = 0$.
 103. $x^4 - 17x^2 + x + 20 = 0$.
 104. $2x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 9x + 20 = 0$.
 105. $3x^4 - 8x^3 - 36x^2 + 25 = 0$.
 106. $6x^4 - x^3 - 8x^2 - 14x + 12 = 0$.
 107. $6x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 37x + 24 = 0$.
 108. $6x^4 - x^3 - 49x^2 + 55x - 50 = 0$.
 109. $10x^4 + 17x^3 - 16x^2 + 2x - 20 = 0$.
 110. $12x^4 + 5x^3 - 23x^2 - 5x + 6 = 0$.
 111. $26x^4 - 108x^3 + 323x^2 - 241x + 60 = 0$.
 112. $36x^4 - 72x^3 - 31x^2 + 67x + 30 = 0$.

Graphische Lösung der Gleichungen 4. Grades

113. Substituiere in die Funktion

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

die neue Variable x' , die mit x durch die Gleichung

$$x = x' + m$$

verbunden ist, und bestimme m so, daß in der neuen, nach fallenden Potenzen von x' geordneten Funktion der Koeffizient des Gliedes x'^3 Null wird. Reduziere in der Weise von Aufgabe 113 die Gleichungen:

114. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$.
 115. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$.
 116. $x^4 + 8x^3 + x - 1 = 0$.
 117. $x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x + 2 = 0$.
 118. $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0$.

119. Zeige, daß sich die (reellen) Wurzeln der reduzierten Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

finden lassen als Schnitt der Parabeln

$$\text{I. } y = x^2$$

$$\text{II. } x = -\frac{1}{b}y^2 - \frac{a}{b}y - \frac{c}{b}.$$

120. Zeige, daß sich die (reellen) Wurzeln der reduzierten Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

finden lassen als Schnitt der festen Parabel

$$\text{I. } y = x^2$$

mit einem Kreise

$$\text{II. } (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

wo die Konstanten p , q und r sich aus den Konstanten a , b und c bestimmen lassen. Gib die Beziehungen an, die zwischen a , b und c einerseits und p , q und r andererseits herrschen

Löse entweder nach der in Aufgabe 119 oder nach der in Aufgabe 120 angegebenen Methode die Gleichungen

$$121. x^4 - 4x^2 + 5x - 4 = 0.$$

$$122. x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0.$$

$$123. x^4 - 6x^2 - 3x + 2 = 0.$$

$$124. x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

§ 23. Die Wurzeln der Gleichung n ten Grades

Allgemeines über die Nullstellen ganzer Funktionen

1. In dem Ausdruck

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

sei n eine ungerade Zahl. **a)** Untersuche die Funktion für die Grenzen $x = +\infty$ und $x = -\infty$. **b)** Was folgt aus dieser Untersuchung (und der Stetigkeit der Funktion) für die Anzahl der reellen Nullstellen einer solchen Funktion? **c)** Stelle die gleiche Untersuchung für den Fall an, daß n gerade ist; was folgt daraus für die Anzahl der reellen Nullstellen einer solchen Funktion? **d)** Was läßt sich aus diesen Überlegungen für die Anzahl der imaginären Nullstellen einer rationalen ganzen Funktion schließen?

2. Es sei x_1 eine Nullstelle der ganzen Funktion n ten Grades

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

d. h. es sei

$$y_1 = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0.$$

Zeige, daß dann y durch $x - x_1$ ohne Rest teilbar ist. (Bilde $y - y_1$!)

3. a) Beweise, daß eine ganze Funktion n ten Grades $y = f_n(x)$ als Produkt darstellbar ist:

$$f_n(x) = (x - x_1) f_{n-1}(x),$$

wo x_1 eine Nullstelle von $f_n(x)$ ist, während f_{n-1} eine ganze Funktion $(n - 1)$ ten Grades ist. b) Beweise, daß eine Nullstelle von $f_{n-1}(x)$ auch eine solche von $f_n(x)$ ist.

4. Folgere aus dem Satze, daß die Gleichung n ten Grades mindestens eine Wurzel hat (*Fundamentalsatz der Algebra*), die folgenden Sätze:

a) Eine ganze Funktion n ten Grades hat n Nullstellen (von denen einzelne unter Umständen „zusammenfallen“ können).

b) Eine ganze Funktion n ten Grades, deren reelle oder imaginäre Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n sind, läßt sich als Produkt von n linearen Faktoren darstellen:

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \\ = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n). \end{aligned}$$

c) (*Vietascher Wurzelsatz*.) Zwischen den Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n einer Gleichung n ten Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

und den Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n bestehen die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -a_1,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = a_2,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n = (-1)^n a_n.$$

5. Welche Form hat eine Gleichung n ten Grades, deren eine Wurzel Null ist?

Rationale Wurzeln der Gleichung n ten Grades

Eine rationale Wurzel einer Gleichung ist nach dem Vietaschen Wurzelsatz in dem konstanten Gliede als Faktor enthalten. Bestimme danach und nach den Überlegungen der Aufgabe 3 die Wurzeln folgender Gleichungen:

6. $x^5 - x^4 - 12x^3 - 53x^2 + 65x = 0$.
7. $x^5 = x^2$.
8. $x^5 + 3x^4 - 4x^2 - x + 1 = 0$.
9. $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$.
10. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$.
11. $x^5 + x^4 - 27x^3 - x^2 + 146x - 120 = 0$.
12. $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 65x^2 + 36x - 180 = 0$.
13. Welche Gleichung hat die Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6?
14. Welche Gleichung hat die Wurzeln +1, -1, +2, -2, +3, -3?
15. Welche Gleichung hat die Wurzeln 1, 2, 4, 8, 16?
16. Welche Gleichung hat die Wurzeln $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$?
17. Welche Gleichung hat die Wurzeln $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$?
18. Welche Gleichung 6. Grades hat die Doppelwurzeln 1, 2 und 3?
19. Welche Gleichung 6. Grades hat die Doppelwurzeln -1, -2, -3?
20. Eine Gleichung 5. Grades hat die Wurzel 2 dreifach, außerdem die Wurzeln -5 und +5. Wie heißt sie?
21. Eine Gleichung 6. Grades hat die Wurzeln +3 und -3 dreifach. Wie heißt sie?
22. Wenn eine geordnete Gleichung, deren 1. Glied den Koeffizienten 1 hat und deren Koeffizienten sonst lauter ganze Zahlen sind, nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, so können die Wurzeln auch keine rationalen Brüche sein. Hat sie reelle Wurzeln, so sind diese weder ganze Zahlen noch Brüche, sondern irrational. a) Beweise das! b) Wende den Satz im besonderen auf die Gleichung $x^n - a = 0$ an, wo a eine positive ganze Zahl ist.

Imaginäre Wurzeln der Gleichung n ten Grades

23. Es sei $p + qi$ eine imaginäre Nullstelle der Funktion
- a) $y = x^2 + a_1x + a_2$,
- b) $y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,
- c) $y = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$,
- d) $y = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Beweise, daß dann auch $p - qi$ eine Nullstelle der gleichen Funktion ist, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n reelle Zahlen sind.

e) Was folgt daraus für die Anzahl der imaginären Wurzeln einer Gleichung n ten Grades (vgl. Aufgabe 1)?

24. Gib den in x quadratischen Faktor an, durch den eine ganze Funktion n ten Grades teilbar ist, wenn a) i , b) $1 + i$, c) $1 - i$, d) $1 + 2i$, e) $2 + i$, f) pi , g) $p + qi$ eine imaginäre Nullstelle der Funktion ist.
25. Bestimme die Funktion 4. Grades mit reellen Koeffizienten, die die Nullstellen a) i und $1 + i$, b) $1 + i$ und $1 + 2i$, c) $2 + i$ und $1 + 2i$, d) ai und bi , e) $a + bi$ und $c + di$ besitzt.
26. Bestimme die Funktion 6. Grades, die die reellen Wurzeln $+1$ und -1 und die imaginären $3 + i$ und $1 + 3i$ besitzt.

Algebraische Zahlen

Unter einer *algebraischen Zahl* versteht man eine Zahl, die Wurzel einer Gleichung n ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten ist¹⁾. Gib an, welcher Gleichung die folgenden algebraischen Zahlen genügen (wo a , b , m und n ganze Zahlen sind):

27. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{7}{8}$, c) n , d) $\frac{m}{n}$.
28. a) -4 , b) $-\frac{1}{4}$, c) $-\frac{m}{n}$, d) $-7\frac{1}{2}$.
29. a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt[3]{5}$, c) $\sqrt[n]{7}$, d) \sqrt{n} .
30. a) $\sqrt[m]{m}$, b) $\sqrt[3]{3^2}$, c) $\sqrt[m]{n}$, d) $\sqrt[m]{a^n}$.
31. a) $\sqrt{2} + 3$, b) $\sqrt[3]{4} - 5$, c) $\sqrt{\frac{1}{2}} - 1$, d) $\sqrt[4]{a} - b$.
32. a) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, b) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, c) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, d) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.
33. a) $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$, b) $\sqrt{a+b}$, c) $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, d) $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$.
34. a) $\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}$, b) $\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, c) $\sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}}$.
35. a) i , b) $1 + i$, c) $a + bi$, d) ai .
36. a) $\sqrt{a} + i\sqrt{b}$, b) $\sqrt{a} - i\sqrt{b}$, c) $\sqrt{a + bi}$, d) $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b} \cdot i}$.
- 37.²⁾ a) Beweise, daß ein aus ganzen oder rationalen Zahlen durch eine endliche Anzahl irgendwelcher Wurzeloperationen gebildeter Ausdruck stets eine algebraische Zahl ist. b) Sind alle algebraischen Zahlen durch Wurzeln aus reellen und komplexen rationalen Zahlen in irgendwelcher beliebigen Anordnung darstellbar?

¹⁾ Es gibt auch Zahlen, die nichtalgebraische Zahlen sind; der Nachweis dafür, daß eine Zahl nichtalgebraisch ist, ist im allgemeinen nicht leicht zu führen. Nichtalgebraische, sog. *transzendente* Zahlen sind z.B. die Zahlen π und e .

²⁾ Bei der Beantwortung der Frage b) ist der -elementar nicht beweisbare - Satz zu benutzen, daß Gleichungen fünften und höheren Grades nur in besonderen Fällen durch Wurzelausdrücke lösbar sind.

§ 24. Differentiation rationaler ganzer Funktionen

Der Differentialquotient einer Potenz und einer Konstanten

1. Zeige, daß die folgenden beiden Ausdrücke für den Differentialquotienten einer als stetig und differenzierbar vorausgesetzten¹⁾ Funktion $y = f(x)$, nämlich

$$\text{I. } f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

$$\text{II. } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gleichbedeutend sind.

2. Beweise die Differentiationsregel

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1},$$

wo n eine positive ganze Zahl ist, indem du nach der Gleichung I von Aufgabe 1 verfährt (den Nenner $x_1 - x$ wegschaffen, ehe der Grenzübergang vorgenommen wird!).

3. a) Beweise die Differentiationsregel

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

wo a eine Konstante ist. b) Zeige, daß also die Gleichung der Aufgabe 2 auch gilt, wenn $n = 0$ ist.

- c) Beweise die Differentiationsregel

$$\frac{daf(x)}{dx} = a \frac{df(x)}{dx},$$

wo a eine Konstante ist.

Bilde den Differentialquotienten von folgenden Funktionen (a und b sind darin stets Konstanten, n ist eine positive ganze Zahl):

- | | | |
|---------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| 4. a) $y = x^4,$ | b) $y = x^7,$ | e) $y = x^{15}.$ |
| 5. a) $y = 3x^5,$ | b) $y = \frac{x^6}{6},$ | e) $y = \frac{2}{3}x^8.$ |
| 6. a) $y = (2x)^4,$ | b) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^3,$ | e) $y = (ax)^5.$ |
| 7. a) $y = 7,$ | b) $y = 5^2,$ | e) $y = 3 \cdot 7^{18}.$ |
| 8. a) $y = a,$ | b) $y = x^0,$ | e) $y = a^3.$ |
| 9. a) $y = x^n,$ | b) $y = x^{n+1},$ | e) $y = x^{2n-1}.$ |

¹⁾ Diese Voraussetzung wird im folgenden nicht immer ausdrücklich wiederholt.

10. a) $y = a x^n$, b) $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, c) $y = \frac{a x^{n-1}}{n-1}$.
11. a) $y = \sqrt{5} \cdot x^5$, b) $y = \sin \frac{\pi}{2} x^n$, c) $y = (\pi \cdot x^3)^2$.
- Bilde den 1., 2. und 3. Differentialquotienten von:
12. a) $y = x^5$, b) $y = \frac{x^4}{4}$, c) $y = \frac{x^6}{3}$.
13. a) $y = x^{n-1}$, b) $y = a x^{n+1}$, c) $y = \frac{x^n}{n}$.
14. a) $y = \frac{x^n}{n!}$, b) $y = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, c) $y = \frac{a x^{n-1}}{b}$.

Der Differentialquotient einer Summe und einer Differenz

15. Bestimme den Differentialquotienten von

a) $y = x^3 + x^2$, b) $y = x^5 + x^4$, c) $y = x^n + x$.

16. Beweise die Differentiationsregel

$$\frac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

17. Erweitere die Differentiationsregel a) auf eine Differenz, b) auf eine Summe von 3, c) von n Gliedern (n eine positive ganze *endliche* Zahl).

Bilde den Differentialquotienten folgender Funktionen:

18. $y = x^n + x^{n-1}$. 19. $y = a x^n + b x^{n-2} + c x^{n-4}$.

20. $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$.

21. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$.

22. $y = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}$.

23. $y = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!}$.

24. $y = (1+x)^4$. 25. $y = (1-x)^5$.

26. $y = (1+x)^n$. 27. $y = (a+bx)^n$.

28.—37. Bilde von den in den vorstehenden Aufgaben 18—27 genannten Funktionen a) den 2., b) den 3. Differentialquotienten.

38. Wie lautet a) der n te, b) der $(n-1)$ te, c) der $(n+1)$ te Differentialquotient einer Funktion n ten Grades

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n?$$

Der Differentialquotient eines Produktes

39. Beweise die Differentiationsregel

$$\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

Mache die Probe auf die Richtigkeit dieser Regel, indem du die folgenden Funktionen einmal direkt, das andere Mal von der angegebenen Produkt-darstellung ausgehend differenzierst:

40. $y = x^2 = x \cdot x.$

41. $y = ax^n = a \cdot x^n.$

42. $y = x^n = x \cdot x^{n-1}.$

43. $y = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1).$

44. $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$

45. $y = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

46. $y = af(x) = a \cdot f(x).$

Differenziere die folgenden Funktionen:

47. a) $y = (x^5 + x^3 + x)^2,$

b) $y = (x^n - x^{n-2} + 1)^2.$

48. $y = (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)^2.$

49. $y = (x^3 + 7x^2 + 2x + 5)(x^4 + 8x^3 - 27x^2 - 11x + 5).$

50. $y = (x^2 - bx + \frac{1}{2}b^2)(x^2 + bx + \frac{1}{2}b^2).$

51. $y = (x^2 + a)(x^3 + b)(x^4 + c).$

52. $y = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1).$

53. $y = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \cdot (x^2 + ex + f).$

54. a) $y = x \cdot f(x),$

b) $y = x^n \cdot f(x),$

c) $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x),$

d) $y = [f(x)]^2.$

55. Bilde den a) 3., b) 4., c) 5., d) n ten Differentialquotienten von $y = f(x) \cdot g(x)$ und decke den Zusammenhang zwischen dem so erhaltenen Ausdruck und dem binomischen Lehrsatz auf.

Vermischte Aufgaben

56. Diskutiere die Kurve

$$y = (x^2 - 1)^2,$$

d. h. gib ihre Schnitte mit der x -Achse, Maxima und Minima, Wendepunkte und Wendetangenten an.

57. Diskutiere die Kurve

$$y = (x^2 - 1)^3.$$

58. Diskutiere die Kurve

$$y = (x^3 - 1)^2.$$

59. Bestimme die Wendepunkte der Kurve

$$y = x^5 - 30x^3 + 5x - 10.$$

60. Bestimme die Extremwerte und die Wendepunkte der Kurve

$$y = 3x^5 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + 4.$$

61. Untersuche, ob die Kurve

$$y = (x^2 - x + 2)(x^2 - 2x + 1)$$

a) im Punkte $x = 0$, b) im Punkte $x = +3$, c) im Punkte $x = 1$ steigt oder fällt.

62. a) Welches ist die Steigung der Kurve

$$y = ax^n + bx + c$$

im Punkte $x = 0$? b) Wo hat die Kurve einen Wendepunkt, sofern sie überhaupt einen besitzt?

63. Einem Rotationsellipsoid ist ein gerader Kegel von größtem Volumen einzuschreiben, der seine Spitze in einem Scheitel des Rotationsellipsoids hat.

64. Einer Ellipse ist ein größtes gleichschenkliges Dreieck einzuschreiben, dessen Spitze in einem Scheitel der Ellipse liegt. (Betrachte das Quadrat des Dreiecksinhaltes als Funktion, die du untersuchst.)¹⁾

65. Einem geraden Kegel soll der gerade Zylinder von größtem Volumen eingeschrieben werden.

66. Einem Rotationsellipsoid soll ein Zylinder größten Inhaltes eingeschrieben werden. (Nimm als Funktion, die diskutiert wird, das Quadrat des Inhalts, um die Wurzel zu vermeiden!)

67. Innerhalb oder außerhalb eines Kreises mit dem Radius r ist ein Punkt gegeben. Welches ist das größte gleichschenklige Dreieck, das seine Spitze in dem gegebenen Punkte und seine Basisecken auf dem Kreise hat? (Sonderfall: Der gegebene Punkt liegt auf dem Kreise!)

§ 25. Angenäherte Bestimmung der reellen Wurzeln von Gleichungen

Regula falsi

1. Gegeben ist eine Funktion $y = x^3 - 2$. a) Bestimme 2 aufeinanderfolgende ganzzahlige Werte x_1 und x_2 der Variablen derart, daß von den zugehörigen Funktionswerten y_1 und y_2 der eine positiv, der andere negativ ist. b) Ver-

¹⁾ Beachte, daß dieses Problem der ebenen Geometrie auf eine Funktion von höherem Grade führt als das des entsprechenden räumlichen Problems der Aufgabe 63.

binde die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der der Funktion entsprechenden Kurve durch eine Strecke. In welchem Punkte x_3 schneidet diese Sekante die x -Achse? (Anwendung von Ähnlichkeitssätzen!) c) Erläutere an der Figur, daß dieser Schnittpunkt x_3 der Sekante und x -Achse dem Schnitt der Kurve mit der x -Achse näher liegt als x_1 oder x_2 . d) Berechne den Wert y_3 , den die Funktion $y = x^3 - 2$ für diesen Näherungswert x_3 der Nullstelle annimmt.

2. Gegeben sind eine beliebige Funktion $y = f(x)$ und 2 Werte x_1 und x_2 in der Nähe einer Nullstelle der Funktion so, daß von den Funktionswerten $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ der eine positiv und der andere negativ ist (Fig. 13). Verbinde wieder in der zugehörigen graphischen Darstellung (x_1, y_1) mit (x_2, y_2) und gib für den Schnitt x_3 der Geraden mit der x -Achse, der dem Näherungswert der Nullstelle entspricht, einen Ausdruck in x_1, x_2, y_1, y_2 an.

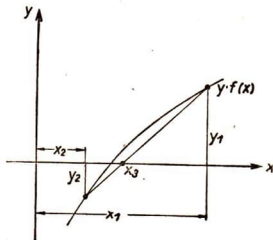


Fig. 13

3. Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß für die Funktion $y = f(x)$, für die nach Art der Aufgaben 1 und 2 Näherungswerte berechnet werden sollen, die Voraussetzung der Stetigkeit zwischen x_1 und x_2 gebraucht wird.

4. Wie kann man durch Fortsetzung des Verfahrens der Aufgaben 1 und 2 eine immer größere Annäherung an die Nullstelle der Funktion erreichen? (Erläuterung an der Hand einer graphischen Darstellung!)

Bestimme nach der Regula falsi die reellen Wurzeln der folgenden Gleichungen:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 5. $x^3 + x = 20$. | 6. $x^3 + x^2 = 100$. |
| 7. $x^3 + x^2 + x = 99$. | 8. $x^3 = 8(x + 3)$. |
| 9. $x^3 + 35x + 50 = 10x^2$. | 10. $x^4 + x = 100$. |
| 11. $x^4 + x^3 = 1000$. | 12. $x^4 + x^3 + x^2 = 88$. |
| 13. $x^4 - 10x^2 + x = 61$. | 14. $x^5 + 7x = 3$. |
| 15. $x^7 + 5 = 10x$. | |

Bestimme auch die Wurzeln der folgenden transzendenten Gleichungen:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 16. $x + \lg x = 5$. | 17. $x - \lg x = 2$. |
| 18. $x = 20 \lg x$. | 19. $x \lg x = 7$. |
| 20. $x^x = 100$. | 21. $\sqrt[x]{x} = \frac{1}{2}$. |

Newtons Näherungsverfahren

22. Gegeben ist eine Funktion $y = x^5 - 30$. Es sei x_1 ein Näherungswert der Nullstelle, y_1 der zugehörige Funktionswert. (Die Fig. 14 zeigt eine beliebige Funktion $y = f(x)$, und es ist bei ihr als Näherungswert ein solcher gewählt, für den die Funktion negativ ist.) Im Punkte (x_1, y_1) der zugehörigen graphischen Darstellung werde die Tangente an die Kurve gelegt. Der Schnitt der Tangente mit der x -Achse sei x_2 . a) Drücke $\delta = x_1 - x_2$ durch y_1 und den Differentialquotienten der Funktion in x_1 aus. b) Wie groß ist im vorliegenden Falle der bessere Näherungswert $x_2 = x_1 - \delta$, wenn du von $x_1 = 2$ ausgehst?
23. Untersuche an verschieden gestalteten Kurven und an einer festen Kurve bei verschiedener Lage des Punktes, in dem die Tangente gezogen wird, wann der nach Aufgabe 22 gefundene Näherungswert für die Nullstelle einer Funktion $y = f(x)$ tatsächlich besser ist als der Ausgangswert und wann nicht.
24. Gib einige Beispiele von Kurven (beschreibe ihre Krümmungen!), in denen der zum neuen Näherungswert gehörige Kurvenpunkt a) auf derselben Seite der x -Achse liegt wie der Ausgangswert, b) auf der anderen Seite.
25. Wie kann man durch Fortsetzung des in Aufgabe 22 angewandten Verfahrens eine immer größere Annäherung an die Nullstelle der Funktion erreichen? Erläutere das an einer Figur und unterscheide dabei die beiden Fälle, daß der neue Näherungswert jeweilig auf derselben oder jeweilig auf der anderen Seite von der wirklichen Nullstelle aus liegt. Sind noch andere Fälle möglich?

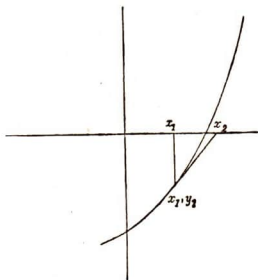


Fig. 14

Berechne nach dem *Newtonschen Verfahren* Näherungswerte für die Wurzeln folgender Gleichungen:

26. $x^3 - x = 33$.

27. $x^3 - x^2 = 10$.

28. $x^3 - x^2 + x = 44$.

29. $28x^3 + 3x = 50$.

30. $x^4 - x = 66$.

31. $x^4 - x^3 = 555$.

32. $x^4 + x^2 + x = 111$.

33. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

Vermischte Aufgaben

Berechne entweder nach der Regula falsi oder nach der *Newtonschen Näherungsmethode* die reellen Wurzeln folgender Gleichungen:

34. $x^3 - 6x^2 + 5x + 11 = 0.$

35. $x^3 + 3x^2 = 2x + 1.$

36. $x^3 - 3x^2 + 3,09x + 1 = 0.$

37. $x^3 - 6x^2 + 4\frac{1}{2}x + 12 = 0.$

38. $x^4 - 3x^2 - 2x + 2\frac{9}{16} = 0.$

39. $3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 11 = 0.$

40. $10x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 2x + 3\frac{1}{2} = 0.$

41. $x^5 - 8x - 1 = 0.$

42. $x^5 + (1-x)^5 = \frac{1}{3}.$

43. $x^5 + (1-x)^5 = 0,17.$

44. $x^7 + (1-x)^7 = 0,21.$

45. *Newton* knüpft die Darstellung seiner Lösungsmethode an die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

an. Er rechnet dann folgendermaßen: Ein erster Näherungswert ist $x_1 = 2$. Setzt man $x = 2 + p$ in die Gleichung ein, so ergibt sich für p die Bestimmungsgleichung

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Da p klein ist, so werden die Glieder p^3 und $6p^2$ vernachlässigt, man erhält also für p den Wert $p = 0,1$, und so ist der 2. Näherungswert $x_2 = 2,1$. In dieser Weise wird fortgefahren. Zeige, daß diese scheinbar ganz andere Form der Lösung mit unserer Darstellung der *Newtonschen* Näherungsmethode gleichwertig ist.

46. Um $\sin 10^\circ$ zu berechnen, setze man $\sin 10^\circ = x$ und wende die Formel an

$$\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha.$$

Das liefert, da $\sin 3\alpha$ bekannt ist, eine Gleichung für $\sin 10^\circ$, deren Wurzel angenähert zu berechnen ist.

47. Von einem Kreise ist durch eine Sehne ein Viertel der Fläche abzuschneiden.

Anleitung: Nimm als Zentriwinkel des Einheitskreises den Winkel $2x$, wo x in Bogenmaß (vgl. § 29, Aufgabe 1f.) zu messen ist.

§ 26. Rationale gebrochene Funktionen

Nullstellen und Unendlichkeitsstellen

Bestimme die Nullstellen der folgenden rationalen gebrochenen Funktionen:

1. $y = \frac{x-1}{x^2+1}.$

2. $y = \frac{x^2-4x}{x+1}.$

3. $y = \frac{x-5}{x^2+x+1}.$

4. $y = \frac{x^2+2x-8}{x^2-1}.$

5. $y = \frac{x^2-1}{x^2+x+2}.$

6. $y = \frac{x^3-1}{x^2+x+2}.$

7. $y = \frac{x^3-2}{x^3-1}.$

8. $y = \frac{x^2-3}{x^2+3x-1}.$

9. In welchen Fällen hat eine rationale gebrochene Funktion keine Nullstellen? (Beispiele!)

Untersuche die Nullstellen der folgenden rationalen gebrochenen Funktionen (oder gib an, warum sie fehlen!):

10. $y = \frac{7}{x^2 - 1}$.

11. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

12. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$.

13. $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

14. $y = \frac{x + 1}{x^2 - 5x - 6}$.

15. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x - 6}$.

Bestimme die Unendlichkeitsstellen der folgenden rationalen gebrochenen Funktionen:

16. a) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$,

b) $y = \frac{x - 7}{x}$.

17. $y = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$.

18. $y = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$.

19. $y = \frac{x - 1}{x^2 - x - 2}$.

20. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + \frac{1}{4}}$.

21. $y = \frac{x' - x + 1}{(x^2 - 2)(x^2 - 3)}$.

22. Wann hat eine rationale gebrochene Funktion keine Unendlichkeitsstellen? (Beispiele!)

Untersuche, ob Unendlichkeitsstellen bei den folgenden Funktionen vorhanden sind und, wenn ja, welche:

23. $y = \frac{x}{x^2 + 4}$.

24. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$.

25. $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$.

26. $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 10}$.

Von den folgenden rationalen gebrochenen Funktionen sollen zuerst die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen berechnet werden, dann sollen die Funktionen graphisch dargestellt werden:

27. $y = \frac{1}{x + 1}$.

28. $y = \frac{1 + x}{x}$.

29. $y = \frac{x}{x - 1}$.

30. $y = \frac{x + 1}{x - 2}$.

31. $y = \frac{3x}{x - 4}$.

32. $y = \frac{2x}{x + 3}$.

33. $y = \frac{2x + 5}{3x - 1}$.

34. $y = \frac{4x - 1}{3x - 2}$.

35. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$.

36. $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$.

37. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

38. $y = \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 4}$.

Differentialquotienten. Maxima und Minima

39. Bilde von der Funktion $y = x^{-1}$ a) den Differenzenquotienten (der im Nenner auftretende Faktor $x_1 - x$ ist wegzuschaffen), b) den Differentialquotienten.

40. Welche Lage hat die Tangente an die gleichseitige Hyperbel $y = x^{-1}$ in den Punkten, deren Abszisse a) $x = 1$, b) $x = 2$, c) $x = -1$, d) $x = \frac{1}{2}$ ist?

Welcher Grenzlage strebt die Richtung zu, wenn die Abszisse sich e) der Null nähert, f) positiv oder negativ unendlich wird?

Bilde die Differentialquotienten folgender Funktionen:

$$41. \text{ a) } y = \frac{a}{x}, \quad \text{ b) } y = \frac{1}{x^2}. \quad 42. \text{ a) } y = \frac{a}{x^2} + b, \quad \text{ b) } y = \frac{1}{x^3}.$$

$$43. \text{ Bestimme den Differentialquotienten der Funktion } y = \frac{1}{x^n}.$$

44. Zeige, daß die Differentiationsregel

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

auch gilt, wenn n eine negative ganze Zahl ist.

Bilde a) den 1., b) den 2. Differentialquotienten folgender Funktionen:

$$45. y = \frac{1}{nx^n}. \quad 46. y = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}. \quad 47. y = \frac{a}{x} + x.$$

$$48. y = \frac{a}{x^n} + x^n. \quad 49. y = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}. \quad 50. y = x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

$$51. y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

$$52. y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} + \dots + \frac{1}{n!x^n}.$$

Bestimme die Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

$$53. y = 9x + \frac{1}{x}. \quad 54. y = x + \frac{1}{4x}. \quad 55. y = x^2 + \frac{16}{x^2}.$$

$$56. y = 3x^2 + \frac{2}{x}. \quad 57. y = \frac{3x}{2} + \frac{8}{x^3}. \quad 58. y = \frac{x^2 - 9}{2x}.$$

59. Beweise die Differentiationsregel:

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Mache die Probe auf die Richtigkeit dieser Regel, indem du die folgenden Funktionen a) direkt, b) von der angegebenen Quotientendarstellung ausgehend differenzierst:

$$60. y = ax^{-n} = \frac{a}{x^n}. \quad 61. y = x + 1 = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \quad 62. y = x - 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$63. y = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

64. Differenziere die Funktion

$$y = \frac{x + x^3 + x^5}{1 + x^2 + x^4}$$

und erkläre das Ergebnis.

Differenziere die folgenden Funktionen:

65. $y = \frac{x}{x^2 - a}$.

66. $y = \frac{x^n}{x^{n-1} - n}$.

67. $y = \frac{x^2 - a}{x^t + b}$.

68. $y = \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$.

69. $y = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$.

Bestimme die Maxima und Minima folgender Funktionen:

70. $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

71. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

72. $y = \frac{x - 4}{x^2 - 7}$.

73. $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

74. $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4}$.

75. $y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$.

76. $y = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 7}$.

77. $y = \frac{2x - 5}{x^2 - 6x + 11}$.

78. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^t - 4x + 5}$.

79. $y = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^t - 2x + 2}$.

80. $y = \frac{7x^2 + 2x + 3}{9x^2 + 6x - 2}$.

81. $y = \frac{19 + 2x - x^2}{15 + 6x + x^2}$.

82. $y = \frac{9}{x - 3} - \frac{1}{x - 5}$.

83. $y = \frac{9}{x - 1} - \frac{4}{x - 6}$.

84. $y = \frac{4}{x - 3} - \frac{16}{x - 7}$.

85. $y = \frac{25}{7 - x} - \frac{9}{3 - x}$.

86. Beweise durch Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotient die folgende Differentiationsregel: Es sei $y = f(z)$, wo $z = g(x)$ ist. Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

Mache die Probe auf die Richtigkeit dieser Regel, indem du die folgenden Funktionen differenzierst a) direkt als Funktionen von x , b) als Funktionen einer anderen Funktion:

87. $y = (ax)^n = a^n \cdot x^n$.

88. $y = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

89. $y = \frac{1}{x - a} = (x - a)^{-1}$.

90. $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = (x + 1)^{-2}$.

91. $y = \frac{a}{(x + a)^2} = a(x + a)^{-2}$.

Differenziere die folgenden Funktionen:

92. $y = (ax + b)^n.$

93. $y = (x^2 - 1)^m.$

94. $y = (x^2 + ax + b)^5.$

95. $y = (x^n - 1)^n.$

96. $y = (ax + b)^n (cx + d)^m.$

97. $y = \frac{(ax + b)^n}{(cx + d)^m}.$

98. $y = \frac{1}{(x-3)^5}.$

99. $y = \frac{1}{(x^2 - a^2)^n}.$

Grenzwerte

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

100. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 3}{7x - 2},$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + x + 1}.$

101. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{5x^2 - 1}.$

102. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 7}{x + 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x - 4}.$

103. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 10}{2x^2 + 5},$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 8}{10x^2 + x}.$

104. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$

105. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}.$

106. a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a},$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}.$

107. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2},$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 64}.$

108. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - x - 15},$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + x + 2}.$

109. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1},$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 - x}.$

Vermischte Aufgaben

Kurvendiskussionen

110. Untersuche, ob die Kurve

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

die Koordinatenachsen schneidet und, wenn ja, unter welchem Winkel.

111. Diskutiere die Kurve

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}.$$

112. Welche Tangenten an die Kurve

$$y = \frac{x-1}{x^2+1}$$

sind a) parallel zur x -Achse, b) gegen die x -Achse unter 45° geneigt?¹⁾

113. Vergleiche die Kurven

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

miteinander (graphische Darstellung auf Grund ausführlicher Diskussion).

114. Gib eine graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{x-4}{x^2-3x-3}$$

auf Grund ausführlicher Diskussion.

115. Bestimme die extremen Werte der Funktion:

$$y = \frac{a^3}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

und untersuche, was bei einer Variation von a zu beachten ist.

116. Bestimme Maximum und Minimum der Funktion

$$y = \frac{a-x}{a^2+x^2}.$$

117. a) Diskutiere die Kurve

$$x^3 - axy - b^2y = 0.$$

b) Gib die Asymptote an. c) Vom Koordinatenanfangspunkt lege eine Tangente an die Kurve. Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

118. Bestimme die Koordinaten des Minimums und des Maximums der Kurve

$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}.$$

119. Lege vom Punkte $(\frac{4}{7}m, \frac{6}{7}m)$ die Tangenten an die gleichseitige Hyperbel

$$xy = m^2.$$

Andere geometrische Aufgaben

120. Welches von allen Rechtecken mit gleichem Inhalt hat den kleinsten Umfang? (Vgl. § 18, Aufgabe 127.)

121. Welche Gestalt müßten unsere Münzen haben, wenn man ihnen ihre zylindrische Form ließe, diese aber so abänderte, daß die Abnutzung möglichst gering ist, d. h. daß die Oberfläche möglichst klein ist?

¹⁾ Die bei der Lösung auftretende kubische Gleichung ist entweder angenähert nach den Methoden von § 25 oder aber nach § 20 zu lösen.

Beispiel: Ein Zwanzigmarkstück wog 7,965 g. Das Gold, aus dem es bestand, hatte 900 Feingehalt. Die Wichte des Goldes ist $19,2 \text{ g/cm}^3$, das des Kupfers $8,5 \text{ g/cm}^3$.

122. Ein rechtwinkliger Quader hat das Volumen V und eine Kante a . Wie groß muß man die anderen Kanten wählen, wenn die Oberfläche ein Minimum werden soll?
123. Es soll ein zylindrisches, oben offenes Litermaß aus möglichst wenig Blech hergestellt werden. Wie hoch und wie breit muß das Maß werden?
124. Um eine Kugel mit dem Radius r ist ein Kegel zu beschreiben, so daß
a) der Inhalt, b) der Mantel, c) die Oberfläche des Kegels möglichst klein wird.

Aus der Physik

125. Eine Batterie von n Elementen, deren jedes eine elektromotorische Kraft von e Volt und einen inneren Widerstand von w_i Ohm besitzt, soll bei Vorhandensein eines äußeren Widerstandes von w_a Ohm so in y hintereinandergeschaltete Gruppen von je x parallel geschalteten Elementen eingeteilt werden, daß die Stromstärke den größtmöglichen Wert erhält.

Beispiel: $n = 48$, $w_i = \frac{1}{4}$, $w_a = 3$.

SECHSTES KAPITEL

Algebraische Funktionen

§ 27. Algebraische Funktionen; Funktionen von Funktionen; unentwickelte Funktionen

Algebraische Funktionen

1. Was versteht man unter algebraischen Funktionen?

2. Welche der folgenden Funktionen sind algebraisch:

a) $y = x^3$,

b) $y = x^{-\frac{1}{3}}$,

c) $y = x^{-5}$,

d) $y = \lg x$,

e) $y = \sqrt{x}$,

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$,

g) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$,

i) $y = x - 2\sqrt{x}$,

k) $y = (a + bx)^{-1\frac{1}{2}}$,

l) $y = x^2$,

m) $y = \sin x$,

n) $y = 2^x$,

o) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$?

Gib eine graphische Darstellung der hierbei genannten algebraischen Funktionen. Ermittle ihre Nullstellen und Unendlichkeitsstellen (rechnerisch und zeichnerisch). Vergleiche insbesondere die Kurve $y = \sqrt{x}$ mit der Kurve $y = x^2$.

- Bilde von der Funktion $y = \sqrt{x}$ a) den Differenzenquotienten (schaffe die im Nenner auftretende Differenz $x_1 - x$ fort, indem du den Bruch mit der Summe der im Zähler auftretenden Wurzeln erweiterst), b) den Differentialquotienten. c) Vergleiche den erhaltenen Wert mit dem Differentialquotienten einer gewöhnlichen Potenz. d) Zeige so, daß die Regel für die Differentiation einer Potenz mit ganzzahligem Exponenten (§ 24, Aufgabe 2) auch noch für den Exponenten $\frac{1}{2}$ gilt. e) Beweise dasselbe für den Exponenten $\frac{1}{3}$, indem du wie vorher den Differenzenquotienten von $\sqrt[3]{x}$ bildest und den Bruch mit $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_1} + \sqrt[3]{x_1^2})$ erweiterst.
- Es sei irgendeine Funktion gegeben. Was versteht man unter ihrer inversen Funktion (Umkehrung)? Bilde die inversen Funktionen zu a) $y = x + a$, b) $y = ax$, c) $y = x^2$, d) $y = ax^3$.
- In welcher Beziehung stehen die graphischen Bilder einer Funktion und ihrer Umkehrung? (Benutze den Begriff der Spiegelung oder auch den der Umklappung.)
- Beweise durch Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten den Satz: Ist eine Funktion die Umkehrung einer anderen, so ist das Produkt ihrer Differentialquotienten gleich 1.
- Zeige hiermit, daß die Regel für die Differentiation einer Potenz mit ganzzahligem Exponenten (§ 24, Aufgabe 2),

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1},$$

auch für gebrochene Exponenten n gilt.

Differenziere folgende Ausdrücke nach x , indem du zunächst alle Funktionen als Potenzen von x mit gebrochenen Exponenten ausdrückst:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 8. a) \sqrt{x} , | b) $a\sqrt{x}$, | c) $\sqrt{\pi x}$. |
| 9. a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, | b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, | c) $\frac{a}{\sqrt{bx}}$. |
| 10. a) $\sqrt{x^3}$, | b) $\sqrt[3]{x^2}$, | c) $3\sqrt[3]{x^5}$. |
| 11. a) $a\sqrt[4]{x^3}$, | b) $n\sqrt[n]{x^m}$, | c) $x\sqrt{x\sqrt{x}}$. |
| 12. a) $\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$, | b) $\frac{2}{7x^4\sqrt{x}}$, | c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$. |

Funktionen von Funktionen

13. Zur Wiederholung: Sprich den Satz § 26, Aufgabe 86 in Worten aus. Differenziere auf Grund dieses Satzes folgende Funktionen:

14. a) $(2 + x)^2$, b) $(a + bx)^2$, c) $(a - bx)^2$.

15. a) $(1 + x^2)^3$, b) $(ax^2 + b)^3$, c) $(a + bx)^n$.

16. a) $(a - bx^3)^4$, b) $(a + bx + cx^2)^n$, c) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

17. a) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$, b) $(a - \sqrt[3]{x})^2$, c) $\frac{1}{(1 - \sqrt{x})^3}$.

18. a) $\sqrt{1 + 2x}$, b) $\sqrt{a - x}$, c) $\sqrt{a + bx}$.

19. a) $\sqrt{1 - x^2}$, b) $\sqrt{a + bx^2}$, c) $\frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$.

Differenziere nach x (unter Benutzung der Regeln über Differentiation von Produkten und Quotienten):

20. a) $(2 + 5x)(1 - 3x)$, b) $(a + bx)(m + nx)$, c) $x^4(a - 2x^3)^2$.

21. a) $\frac{(2x + 3)^3(4x + 5)^5}{(3x + 4)^8}$, b) $x\sqrt{1 + x}$, c) $x\sqrt{a + bx}$.

22. a) $x^2\sqrt{1 - x}$, b) $x\sqrt{1 - x^2}$, c) $x\sqrt{a^2 + b^2x^2}$.

23. a) bis c) Bilde von den 3 letzten Funktionen auch den 2. Differentialquotienten.

Differenziere nach x :

24. a) $\frac{x}{\sqrt{1 + x}}$, b) $\frac{x^2}{\sqrt{a + bx}}$, c) $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

25. a) $\frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$, b) $\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$, c) $\sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}}$.

26. a) $\frac{1}{x\sqrt{1 + x}}$, b) $\frac{1}{x\sqrt{b + cx}}$, c) $\frac{1}{\sqrt{x}(2a - x)}$.

27. a) $[x + \sqrt{x(a + bx)}]^2$, b) $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{x^3}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$, c) $\frac{x^3}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}} - \frac{x^5}{5\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

Maxima und Minima

Ermittle die Maxima und Minima folgender algebraischer Funktionen:

28. a) $x\sqrt{3 - x}$, b) $x : \sqrt{2x - 3}$.

29. a) $x\sqrt{x^2 - 4}$, b) $x : \sqrt{x^2 - 4}$.

30. a) $x + \sqrt{3 - 2x}$, b) $\frac{1}{2}x + \sqrt{5 - x}$.

31. a) $2x + \sqrt{13 - 4x}$, b) $\frac{1}{2}x - \sqrt{x - 3}$.

32. a) $2x + \sqrt{5 - x^2}$, b) $2x - \sqrt{x^2 - 12}$.
33. a) $2x - \sqrt{x^2 - 4x - 23}$, b) $x + \sqrt{31 + 2x - x^2}$.
34. a) $2x + \sqrt{61 - 16x + x^2}$, b) $2x - \sqrt{61 + 16x - x^2}$.
35. a) $x - \sqrt{2x^2 + 10x + 13}$, b) $3x + \sqrt{24x - 54 - x^2}$.
36. a) $\sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}$, b) $\sqrt{ax} - \sqrt{ax - x^2}$.
37. a) $\sqrt{ax} - x$, b) $\sqrt{ax - x^2} + x$.

Grenzwerte

Berechne die folgenden Grenzwerte:

38. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.
39. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-2}$.
40. a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-x}}{5-\sqrt{8x+1}}$.
41. a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{7x-13}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{11-x}}$, b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}-2}$.
42. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{3(2-x)}}{\sqrt{x+1}}$, b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2(1-x)}}{x+\sqrt{3+2x}}$.

Unentwickelte Funktionen

43. a) Wann sagt man, y sei eine unentwickelte (*implizite*) Funktion von x ?
Berechne y direkt (*explizite*) als Funktion von x aus folgenden Gleichungen:
- b) $x + 5y^2 - 3x^2 = 2$, c) $xy - 4x + 6 = 0$,
d) $7x - y^2 + 2xy = 3x^2$, e) $x\sqrt{y} - y = 2$.
44. Was versteht man unter der partiellen Ableitung einer Funktion $f(x, y)$ nach x ?
45. Wie schreibt man die partielle Ableitung
- a) von $f(x, y)$ nach x , b) von $f(x, y)$ nach y ?
46. Bilde die partiellen Ableitungen $\alpha)$ nach x , $\beta)$ nach y von folgenden Funktionen:
- a) $7x + 2y$, b) $3x^2 + 5xy$, c) $7xy + 4y^2$,
d) $7x^2y^3$, e) $\frac{x}{y}$, f) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 4y + 11$,
g) $x\sqrt{1+y}$, h) $y^2\sqrt{1-x^2}$, i) $\frac{xy}{\sqrt{1-xy}}$,
k) $\frac{x}{\sqrt{1+y}} + \frac{y}{\sqrt{1+x}}$.

47. Beweise, daß, wenn x und y durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden sind, die Beziehung gilt:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Sprich diesen Satz über die Differentiation unentwickelter Funktionen in Worten aus.

48. Bilde hiernach den Differentialquotienten y' aus den Gleichungen:

$$\text{a) } 3x + 4y = 11, \quad \text{b) } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Deute die Gleichungen und die für y' erhaltenen Werte geometrisch.

49. Berechne ebenso y' aus a) $x^2 + y^2 = 25$ für $x = \pm 3, \pm 4$, b) $xy = 24$, für $x = \pm 4, \pm 3, \pm 2$. (Geometrische Deutung!)

50. Stelle y aus den vorigen Gleichungen explizite als Funktion von x dar, dann y' nach den Regeln in Aufgabe 7 und § 26, Aufgabe 86, und prüfe so die Richtigkeit der Ergebnisse von Aufgabe 49.

51. Bilde y' aus folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{b) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

(Geometrische Deutung!) Probe wie Aufgabe 50. — Welche Art der Differentiation von y ist hierbei die einfachere, die implizite oder die explizite?

52. Bilde y' aus: a) $y^2 - 2px = 0$, b) $y^2 - 2px - \frac{p}{a}x^2 = 0$,
c) $y^2 - 2px + \frac{p}{a}x^2 = 0$.

53. Zeichne die Tangenten a) an die Kurve

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$$

in den Punkten $x = 1, 2, 3, 4$, b) an die Kurve

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 12x - 40y + 4 = 0$$

in den Punkten $x = -3, -2, -1, 0, \dots, 8, 9$. — Zusatzfrage zu a und b: In welchen Punkten laufen die Tangenten parallel einer der Koordinatenachsen? Zusatzfrage zu b: Wird die Kurve von der x -Achse geschnitten, berührt oder gar nicht getroffen?

54. Bilde y' aus

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

In welchen Punkten laufen die Tangenten der Kurven parallel einer der Koordinatenachsen?

55. y kann auch noch auf eine andere Weise implizite von x abhängen, wenn nämlich sowohl y als auch x von einer 3. Größe t abhängen, etwa $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, wobei aber t aus diesen beiden Gleichungen nicht eliminiert werden soll. In diesem Falle ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

- a) Beweise dies durch Bildung der einzelnen Differenzenquotienten und Übergang zu den Differentialquotienten. b) Sprich das Ergebnis in Worten aus. c) Vergleiche diese Regel mit der in § 26, Aufgabe 86 aufgestellten.
56. Differenziere auf Grund dieser Regel y nach x aus den Gleichungen:

$$y = at + b, \quad x = ct$$

Prüfe das Ergebnis durch Elimination von t .

57. Desgleichen aus

$$\text{a) } y = \frac{1}{1-t}, \quad x = \frac{1}{t}, \quad \text{b) } y = 3t^2\sqrt{2}, \quad x = 4\sqrt{2}t^3,$$

$$\text{c) } x = a \cdot t, \quad y = b\sqrt{1-t^2}.$$

58. a) bis d) Gib eine graphische Darstellung der in Aufgaben 56 und 57 a bis c genannten Funktionen, und zwar bei jeder Funktion in 3 verschiedenen Farben: 1) x als Funktion von t , 2) y als Funktion von t , 3) y als Funktion von x . (Passender Maßstab!)
59. Welche Kurven werden durch 57a und 57c dargestellt? (Beweis durch Elimination von t .)
60. Soll von y der 2. Differentialquotient nach x auf Grund der Gleichungen $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ gebildet werden, so gilt die Beziehung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Beweise dies aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

indem du auf beiden Seiten nach x differenzierst¹⁾ und passend umformst.

¹⁾ Es ist für den Schüler wichtig, zu bemerken, daß man diese Gleichung deswegen auf beiden Seiten differenzieren darf, weil es eine Identität ist. Vgl. § 29, Aufgaben 121 bis 130.

61. a) bis c) Bilde auf diese Weise die 2. Differentialquotienten von y aus den in Aufgabe 57 genannten Gleichungen.

62. Bilde y'' aus

$$x = at^3, \quad y = \frac{2}{3}a(t - \frac{1}{3}t^5).$$

§ 23. Geometrische Anwendungen,

insbesondere auf die Krümmung der Kurven

Krümmung und Krümmungsmittelpunkt

- An die Parabel $y = x^2$ sind in zweien ihrer Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Normalen gelegt. Bestimme die Gleichungen dieser Normalen und untersuche, welche Grenzwerte (X_1, Y_1) die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Normalen annehmen, wenn der Punkt (x_2, y_2) sich dem Punkte (x_1, y_1) unbegrenzt nähert. Vereinfache die Ausdrücke bis auf die Formen $X_1 = -4x_1^3$, $Y_1 = 3y_1 + \frac{1}{2}$ und ermittle dann die Entfernung R_1 des Punktes (X_1, Y_1) vom Kurvenpunkte (x_1, y_1) . (Alles in x_1 oder alles in y_1 ausdrücken!) — Der Punkt (X_1, Y_1) heißt der *Krümmungsmittelpunkt*, die Entfernung R_1 der *Krümmungsradius* der Kurve für den Punkt (x_1, y_1) ; der Kreis, dessen Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt und dessen Radius der Krümmungsradius ist, heißt *Krümmungskreis*, der Wert $\frac{1}{R_1}$ wird die *Krümmung* der Kurve an der Stelle (x_1, y_1) genannt.
- Zeige allgemein, daß bei einer Kurve $y = f(x)$ der Krümmungsmittelpunkt (X, Y) und der Krümmungsradius R für den Kurvenpunkt (x, y) bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\text{I. } \begin{cases} X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \\ Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}; \end{cases}$$

$$\text{II. } R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

- Bestimme den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius im Punkte $x = 1$ von folgenden Kurven: a) $y = x^3$, b) $y = x^4$, c) $y = x^5$.
- Desgleichen für $x = 1$ bei a) $y = \sqrt{x}$, b) $y = \sqrt[3]{x}$, c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Desgleichen für $x = 1$ bei der Kurve $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Deute das Ergebnis geometrisch!
- Bestimme Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius a) der Kurve $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ im Punkte $(1; 2)$, b) der gleichseitigen Hyperbel $xy = 12$

im Punkte (3; 4), e) der Parabel $y^2 = 2px$ im Punkte $x = p$, d) der Kurve $ay^3 = x^4$ im Punkte $x = a$.

7. Zeige unter Benutzung von § 27, Aufgaben 55 und 60, daß für die Kurven $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ die bei Aufgabe 2 angegebenen Werte die folgenden Formen annehmen:

$$\text{I. } \begin{cases} X = x - \frac{[f'(t)^2 + \varphi'(t)^2] \cdot \varphi'(t)}{f'(t) \cdot \varphi''(t) - \varphi'(t) \cdot f''(t)}, \\ Y = y + \frac{[f'(t)^2 + \varphi'(t)^2] \cdot f'(t)}{f'(t) \cdot \varphi''(t) - \varphi'(t) \cdot f''(t)}; \end{cases}$$

$$\text{II. } R = \frac{\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}^3}{f'(t) \cdot \varphi''(t) - \varphi'(t) \cdot f''(t)}.$$

8. Bestimme hiernach Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius der in § 27, Aufgaben 57a–c und 62 angegebenen Kurven.
9. Der Krümmungsradius R ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x , kann also z. B. auf Maxima und Minima untersucht werden. Die Punkte, in denen der Krümmungsradius Extremwerte hat, heißen *Scheitel* der Kurve, und zwar *Hauptscheitel* oder *Nebenscheitel*, je nachdem der Krümmungsradius ein Minimum oder Maximum hat. a) Wo liegt der (Haupt-) Scheitel der Parabel

$$y = x^2 + 2x + 1?$$

- b) Ermittle (unter Benutzung der Differentiationsregel § 27, Aufgabe 47) die Krümmungsradien in den Hauptscheiteln und Nebenscheiteln der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- c) Untersuche auf dieselbe Weise die Scheitel des Kegelschnitts

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

- d) Wie kann man aus dem Ergebnis von c) ersehen, wann der Kegelschnitt eine Ellipse darstellt, wann eine Hyperbel, wann eine Parabel?

10. a) Wo ist die Kurve $x^2y = a^3$ am stärksten gekrümmt?

- b) Desgleichen $a^2y = x^3$ (Kurve für Anschlüsse von Eisenbahngleisen verschiedener Krümmung).

c) $x = at^3$, $y = \frac{3}{2}a \left(t - \frac{1}{5}t^5\right)$.

Kurvendiskussionen

Untersuche auf a) Maxima und Minima, b) Wendepunkte, c) Krümmungsverhältnisse folgende Kurven:

11. $y^2 = a(x - 2b)^2(x - b)$.

12. $y^2 = a(x - b)^3$.

13. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Kurven, in die sich jede Kurve 3. Ordnung projizieren läßt).
14. $(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$ (Strophoide).
15. $x^3 - y^2(2a - x) = 0$ oder $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ (Kissoide des Diokles).
16. $x^3 - ay^2 = 0$ (Neilsche Parabel; vgl. mit Nr. 12).
17. $x^3 + y^2 - 3axy = 0$ (Cartesisches Blatt).
18. $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$ (Konchoide des Nikomedes).
19. $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (Lemniskate).
20. $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) - k^2 = 0$ (Cassinische Kurven; vgl. mit vor.).
21. $(x^2 + y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2)^2 - k^2 = 0$ (Spirische Kurven des Perseus).
22. $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) - k^2 = 0$ (Cartesische Ovale).
23. $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$ (Kreiskonchoide, Pascalsche Schnecke; vgl. mit vor.).
24. $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ (Kardioide; vgl. mit vor.).
25. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Astroide; zeige, daß die Gleichung der Kurve sich auch in die Form $(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$ setzen läßt).
26. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$. 27. $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$.
28. 29. Zeichne die Tangenten der beiden letzten Kurven in den Punkten $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
30. Unter welchen Winkeln schneidet die Kurve 26 die Abszissenachse? (Warum kann man bei der Kurve 27 nicht dieselbe Frage stellen?)
31. Berechne für die Kurve 25 das von den Koordinatenachsen begrenzte Stück einer beliebigen Tangente. Benutze das Ergebnis zu einer Umhüllungskonstruktion der Kurve.
32. Berechne für die Kurve 15 die Länge der *Subtangente*. (Die Subtangente erhält man, wenn man das von dem Berührungspunkt und der x -Achse begrenzte Stück der Tangente auf die x -Achse projiziert.)
33. Wie lautet für die Kurve $a^2y = x^2(a - x)$ die Gleichung der Wendetangente?
34. Beweise, daß bei der gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ der Krümmungsmittelpunkt die von der Normalen bestimmte Sehne halbiert.
35. Legt man an die Kurve 16 in einem beliebigen ihrer Punkte (x_1, y_1) die Tangente, so schneidet diese die Kurve noch einmal; drücke die Koordinaten dieses Schnittpunktes durch x_1 und y_1 aus.

Maxima und Minima

36. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird von einem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$, dessen Mittelpunkt der Scheitel der Parabel ist, geschnitten. Welchen Wert muß r annehmen, damit die Kurven sich unter möglichst großem Winkel schneiden, und welches ist dieser größte Winkel?
37. a) Es ist zu beweisen, daß die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Ellipse auf der durch jenen Punkt gehenden Normalen zu messen ist. b) Desgleichen für die Parabel, c) desgleichen für die Hyperbel.
38. Welches unter allen Rechtecken, die a) einer Ellipse, b) einem Kreise eingeschrieben werden können, hat den größten Umfang? (Leite das Ergebnis von b selbständig und auch aus dem von a her; vgl. § 18, 134.)
39. a) Einer Ellipse ist ein gleichschenkliges Dreieck derart eingeschrieben, daß seine Spitze in einem Scheitel der Ellipse liegt. Welche Gestalt muß das Dreieck haben, damit sein Umfang möglichst groß wird? b) Stelle und löse die entsprechende Aufgabe für den Kreis.
40. Einer Halbellipse, die a) die große Achse, b) die kleine Achse der Ellipse zur Basis hat, ist ein Rechteck von möglichst großem Umfange einzuschreiben. c) Dieselbe Aufgabe für den Halbkreis.
41. Welchen Abstand vom Mittelpunkt eines gegebenen Kreises muß ein Punkt P , der a) innerhalb, b) außerhalb des Kreises liegt, a) mindestens, b) höchstens haben, wenn es eine durch P gehende Sehne geben soll, die in P nach dem Verhältnis $2 : 1$ a) innerlich, b) äußerlich geteilt wird?
42. In einem Kreise mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist ein fester Durchmesser AB gezogen. Durch einen beweglichen Punkt C des Kreises ist die Sehne $CD \perp AB$ gelegt und von D auf CM das Lot DE gefällt. Bei welcher Lage von C hat das Dreieck CDE den größten Flächeninhalt?
43. Es sind 2 sich schneidende Kreise gegeben. Durch einen der Schnittpunkte soll eine Gerade so gelegt werden, daß a) das arithmetische Mittel, b) das geometrische Mittel der in beiden Kreisen entstehenden Sehnen ein Maximum wird.
44. 2 Sehnen eines Kreises AB und CD schneiden sich im Punkt O dergestalt, daß $AO = \frac{AB}{2}$, $CO = \frac{CD}{3}$ ist. Welchen Bogenabstand dürfen die Punkte A und C höchstens haben, damit von diesen Punkten aus solche Sehnen noch gezogen werden können?
45. Löse dieselbe Aufgabe für den Fall, daß $AO = \frac{2}{3} AB$, $CO = \frac{CD}{5}$ ist.
46. 2 konzentrische Kreise haben die Radien r und ρ ($r > \rho$). a) Unter welchen Wert darf bei gegebenem r die Größe von ρ nicht sinken, wenn es möglich sein soll, eine Sehne so durch beide Kreise zu legen, daß das in den inneren Kreis fallende Stück die Hälfte der ganzen Sehne ist? b) Welches ist bei

gegebenem ϱ der größte Wert von r , für den es noch möglich ist, eine Sehne so zu ziehen, daß das in den inneren Kreis fallende Stück $2/3$ der ganzen Sehne ausmacht?

47. Beweise, daß von allen Dreiecken mit gegebener Grundlinie und Höhe das gleichschenklige den kleinsten Umfang hat.
48. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit gegebenem Flächeninhalt ist dasjenige zu bestimmen, das den kleinsten Umfang hat.
49. Welchem von allen geraden Kegeln mit gegebener Seitenlinie läßt sich die größte Kugel einbeschreiben? Wie kann man die Aufgabe planimetrisch deuten?
50. Es soll ein Eimer in Gestalt eines abgestumpften Kegels hergestellt werden, so daß bei gegebenem Inhalt V und gegebener Neigung der Seitenlinie $\left(\frac{h}{r-\varrho}\right)$ die Oberfläche des Gefäßes möglichst klein wird.
51. Einer Halbkugel soll ein gerader Zylinder mit möglichst großer Oberfläche eingeschrieben werden.
52. Einer Halbkugel soll ein gerader Kegelstumpf von möglichst kleinem Rauminhalt umschrieben werden.
53. Wie groß muß der Radius einer Kugel sein, aus der sich ein Sektor von gegebenem Volumen und möglichst großer Gesamtoberfläche heraus schneiden läßt?
54. Einem gegebenen Rechteck soll ein anderes umschrieben werden, dessen Flächeninhalt möglichst groß ist.
55. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels ist ein Punkt $P \equiv (a, b)$ gegeben. Es soll durch P eine Gerade so gelegt werden, daß die Schenkel des rechten Winkels auf ihr ein möglichst kleines Stück abschneiden. (Praktischer Fall: Durch die b m hohe Tür eines zylindrischen Turmes von a m Innendurchmesser soll ein Balken ins Innere gebracht werden. Wie lang darf er höchstens sein?)

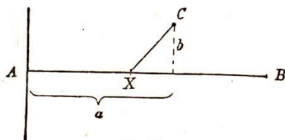


Fig. 15

56. Von A aus fährt geradlinig nach B ein Straßenbahnwagen mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 (Fig. 15). An welchem Punkte X von AB muß ein auf dem Wagen stehender Mensch abspringen, um möglichst schnell einen seitlich der Fahrtrichtung gelegenen Punkt $C \equiv (a, b)$ zu erreichen, wenn der Mensch nach dem Abspringen mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 läuft? (Mit anderen Worten: Die Gesamtzeit, die der Weg $AX + XC$ erfordert, soll ein Minimum sein.)
57. AB sei ein geradliniger Wassergraben, $P \equiv (a, b)$ ein ländliches Spritzenhaus, $Q \equiv (c, d)$ ein brennendes Gehöft (Fig. 16). Die leeren Wasserwagen

fahren mit der konstanten Geschwindigkeit v an den Wassergraben heran, werden dort gefüllt, inzwischen trifft Vorspann ein, wodurch erreicht wird, daß die Wagen in gefülltem Zustande ebenso schnell nach Q fahren können wie vordem in leerem Zustande. An welchem Punkte X des Grabens AB muß die Füllung vorgenommen werden, wenn der Weg PXQ möglichst wenig Zeit erfordern soll? (Deute das Ergebnis als Reflexionsgesetz!)

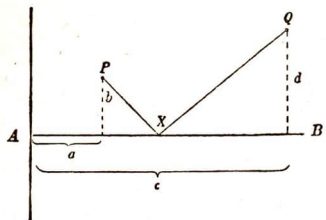


Fig. 16

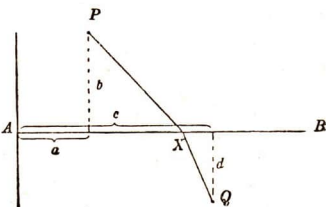


Fig. 17

58. AB bedeutet die Grenze zweier verschiedener Geländearten, z. B. Wiesboden und Sturzacker. Auf dem einen ist der Punkt $P \equiv (a, b)$, auf dem anderen der Punkt $Q \equiv (c, d)$ gegeben (Fig. 17). Ein Reiter, der auf dem glatten Wiesboden mit der Geschwindigkeit v_1 reiten kann, während er auf dem Sturzacker nur mit der Geschwindigkeit v_2 vorwärts kommt, soll in kürzester Zeit eine Nachricht von P nach Q bringen. Wie muß er reiten? (Wie kann man das Ergebnis auch optisch deuten?)

S I E B E N T E S K A P I T E L

Transzendente Funktionen

§ 29. Die trigonometrischen Funktionen

Bogenmaß

1. Ein Winkel von α° entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt. Welchen Weg legt ein Punkt des Strahles zurück, der vom Scheitelpunkt a) den Abstand r , b) den Abstand l hat?

Rechne in *Bogenmaß* um:

- | | | | |
|---------------------|------------------|------------------|-----------------|
| 2. a) 360° , | b) 180° , | c) 270° , | d) 90° , |
| 3. a) 45° , | b) 60° , | c) 30° , | d) 10° . |

4. a) -45° , b) 1° , c) $22^\circ 30'$, d) 540° .
 5. a) α° , b) $n \cdot 360^\circ$, c) $\frac{\alpha^\circ}{n}$, d) $n \cdot 90^\circ$.

Rechne in Gradmaß um:

6. a) π , b) $\frac{\pi}{2}$, c) -2π , d) $\frac{\pi}{3}$,
 7. a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $-\frac{5\pi}{6}$.
 8. a) 1, b) 2, c) 0,1, d) 10.
 9. a) φ , b) $n\varphi$, c) $n\frac{\pi}{2}$, d) $2n\pi$.

Graphische Darstellung

10. a) Stelle die Funktion $y = \sin x$ graphisch dar (x im Bogenmaß!). b) Welches sind die Nullstellen, c) welches ist die Periode der Funktion?

Stelle die Funktion

$$y = a \cdot \sin bx$$

graphisch dar und gib a) ihre Nullstellen, b) ihre Periode, c) die Stellen ihrer größten, d) die Stellen ihrer kleinsten Werte an, wenn gegeben ist:

11. $a = 1$, $b = 2, 3, 4$. 12. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.
 13. $b = 1$, $a = 2, 3, 4$. 14. $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

15. a) Stelle die Funktion $y = \cos x$ graphisch dar (x im Bogenmaß!). b) Welches sind die Nullstellen, c) welches ist die Periode der Funktion?

Stelle die Funktion $y = a \cdot \cos(bx + c)$ graphisch dar und gib a) ihre Nullstellen, b) ihre Periode, c) die Stellen ihrer größten, d) die Stellen ihrer kleinsten Werte an, wenn gegeben ist:

16. $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$. 17. $a = 2$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{4}$.
 18. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{\pi}{4}$. 19. $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \pi$.

20. a) Stelle die Funktion $y = \operatorname{tg} x$ graphisch dar (x im Bogenmaß!). b) Welches sind die Nullstellen, c) welches die Unendlichkeitsstellen, d) welches ist die Periode der Funktion?

21. a) Stelle die Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ graphisch dar (x im Bogenmaß!). b) Welches sind die Nullstellen, c) welches die Unendlichkeitsstellen, d) welches ist die Periode der Funktion?

22. Gib die Symmetrieachsen a) der Funktion $y = \sin x$, b) der Funktion $y = \cos x$ an.

23. Gib die Lage der Symmetriezentren (Mittelpunkte zentraler Symmetrie) der Funktionen

a) $y = \sin ax$, b) $y = a \cdot \cos x$, c) $y = \operatorname{tg} x$, d) $y = \operatorname{ctg} x$ an.

24. Die Sinuskurve soll durch Spiegelung an einer Geraden in die Kosinuskurve übergeführt werden. Gib die Gleichung einer solchen Geraden an.

25. Die Tangenskurve soll durch Spiegelung an einer Geraden in die Kotangenskurve übergeführt werden. Gib die Gleichung einer solchen Geraden an.

26. Bei der einfachen Sinusschwingung ist der jeweilige Ausschlag durch die Funktion

$$s = a \sin bt$$

gegeben, wo a der größte Ausschlag ist, während b der Quotient aus 2π und der Schwingungsdauer ist; t ist die veränderliche Zeit. — Stelle die Sinusschwingung für $a = 1$, $b = 1$ und $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ graphisch dar und addiere beide Kurven graphisch.

27. Zu der Sinusschwingung $s = a \sin bt$ für $a = 1$, $b = 1$ ist die um a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{3}{4}$ ihrer Periode verschobene Sinusschwingung für $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, graphisch zu addieren.

28. Einem Grundton mit 2 Obertönen entspricht die Schwingung

$$s = a \sin \alpha t + \frac{a}{3} \sin 2\alpha t + \frac{a}{6} \sin 3\alpha t.$$

Die Schwingung ist durch graphische Addition in geeignetem Maßstabe aus den Teilschwingungen darzustellen.

29. Zeige durch graphische Darstellung, daß durch Übereinanderlagerung a) von 3 um je ein Drittel der Periode, b) von 4 um je ein Viertel der Periode, c) von 5 um je ein Fünftel der Periode gegeneinander verschobenen Sinusschwingungen derselben Amplitude vollständige Auslöschung eintritt, mit anderen Worten, daß

$$\text{a) } a \sin \alpha + a \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + a \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0,$$

$$\text{b) } a \sin \alpha + a \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + a \sin \left(\alpha + \pi \right) + a \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\text{c) } a \sin \alpha + a \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right) + a \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{5} \right) + a \sin \left(\alpha + \frac{6\pi}{5} \right) \\ + a \sin \left(\alpha + \frac{8\pi}{5} \right) = 0 \quad \text{ist.}$$

30. Durch Übereinanderlagerung zweier in entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellen $y = \sin x$ entsteht eine stehende Welle. Bestimme a) graphisch, b) rechnerisch die Periode der Welle. c) Berechne die Amplitude der stehenden Welle als Funktion des Phasenunterschiedes der beiden erzeugenden Wellen.

31. Die elektromotorische Kraft eines Wechselstromes sei durch eine Sinuskurve

$$e = a \sin \alpha t,$$

die Stromstärke durch

$$i = b \sin \alpha t$$

gegeben. An der Hand von Messungen an der graphischen Darstellung ist in geeignetem Maßstabe für den Effekt des Stromes, das Produkt $e \cdot i$, die Kurve zu zeichnen, wenn der Phasenunterschied, d. h. der Abstand entsprechender Nullpunkte der Kurven, a) 0, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{\pi}{3}$, e) $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

32. Untersuche die Kurven

$$\text{a) } y = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha \quad \text{und} \quad \text{b) } y = a \sin \alpha + b \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

auf ihre Symmetrieeigenschaften: gib bei Axialsymmetrie die Achsen, bei Zentralsymmetrie die Symmetriezentren an.

Graphische Lösung goniometrischer Gleichungen

Löse graphisch die Gleichungen

$$33. \operatorname{tg} x = x. \quad 34. \sin x = x. \quad 35. \operatorname{ctg} x = x. \quad 36. \cos x = x.$$

Löse graphisch und rechnerisch die folgenden Gleichungen:

Anleitung: Setze $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$ und beachte, daß $x^2 + y^2 = 1$ ist:

$$37. 4 \cos \alpha = 3 \sin \alpha. \quad 38. 6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha = 3.$$

$$39. 4 \sin \alpha = 6 + 7 \cos \alpha. \quad 40. \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}.$$

$$41. \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 0. \quad 42. 3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 1.$$

$$43. 2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha = 3. \quad 44. \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$45. \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{3}. \quad 46. 2 \sin \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Die Differentialquotienten der Funktionen Sinus und Kosinus

$$47. \text{Berechne } \frac{\sin x}{x} \text{ für a) } x = 0,1, \text{ b) } x = 0,01, \text{ c) } x = 0,001.$$

48. In der Fig. 18 ist der Kreisabschnitt MCB größer als das Dreieck MAB und kleiner als das Dreieck MCD . Bringe diese Ungleichungen in eine andere Form, indem du die auftretenden Größen durch den Radius $MC = r$ und den in Bogenmaß gemessenen Winkel α ausdrückst. Leite daraus eine obere und eine untere Grenze für $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ ab.

49. Gib auf Grund der Überlegungen in der vorangehenden Aufgabe an

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

50. Untersuche mit Hilfe einer Tafel der trigonometrischen Funktionen, bis zu welchem Winkel, ge-

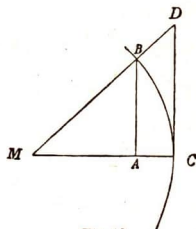


Fig. 18

messen in Graden, $\sin \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ a) bis auf 4 Dezimalen, b) bis auf 3 Dezimalen übereinstimmen.

Bestimme unter Anwendung der in Aufgabe 49 abgeleiteten Beziehung die folgenden Grenzwerte:

51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$.

53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$.

54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{x}$.

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$.

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx}{cx}$.

57. $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sin(x - x_1)}{x - x_1}$.

58. $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sin 2(x - x_1)}{x - x_1}$.

59. $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sin \frac{1}{a}(x - x_1)}{x - x_1}$.

60. $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sin a(x - x_1)}{x - x_1}$.

61. a) Bilde den Differenzenquotienten der Funktion $y = \sin x$ und durch Grenzübergang – unter Benutzung von Aufgabe 49 – den Differentialquotienten. b) Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = \sin ax$, indem du vom Differenzenquotienten ausgehst.

62. a) Bilde den Differenzenquotienten der Funktion $y = \cos x$ und durch Grenzübergang den Differentialquotienten (benutze Aufgabe 49). b) Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = \cos ax$, indem du vom Differenzenquotienten ausgehst.

Von den folgenden Funktionen¹⁾ sind a) die ersten, b) die zweiten Differentialquotienten zu bilden (benutze dabei die Differentiationsregeln für Produkte, Quotienten und Funktionen von Funktionen):

63. $y = a \sin x$.

64. $y = \sin 2x$.

65. $y = \sin \frac{x}{2}$.

66. $y = a \sin bx$.

67. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

68. $y = \sin^2 x$.

69. $y = \sin^3 x$.

70. $y = \sin^4 x$.

71. $y = \sin^n x$.

72. $y = \sin^2 x - 1$.

73. $y = x \sin x$.

74. $y = \frac{\sin x}{x}$.

75. $y = \sin \frac{\pi}{2}$.

76. $y = x \cdot \sin 2\pi$.

77. $y = \frac{1}{\sin x}$.

78. $y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

79. $y = \cos^2 x$.

80. $y = \cos 2x$.

81. $y = \sin x \cdot \cos x$.

82. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

83. $y = \frac{1}{\cos x}$.

84. $y = \frac{x}{\cos x}$.

85. $y = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x}$.

86. $y = x \cdot \cos x$.

¹⁾ Bei bemerkenswerten Ergebnissen der Aufgaben 63 bis 86 gib eine Erklärung!

87. Welche Lage hat die Tangente an die Sinuskurve $y = \sin x$ a) im Punkte $x = 0$, b) im Punkte $x = \pi$?
88. Berechne die Lage der Tangente an die Kurve $y = \sin bx$ im Punkte $x = 0$.
89. Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = \cos x$, indem du die Beziehung a) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ benutzt.

Ermittle rechnerisch oder zeichnerisch die Maxima und Minima folgender Funktionen:

90. $y = \sin 3x$. 91. $y = \sin \frac{x}{3}$. 92. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
93. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. 94. $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$. 95. $y = a \sin(bx + c)$.
96. $y = \frac{\sin x}{x}$. 97. $y = x \cdot \sin x$.

98. Die Wurfweite bei horizontalem Gelände ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes

$$w = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g},$$

wo c die Anfangsgeschwindigkeit, α der Erhebungswinkel ist. Bei welchem Erhebungswinkel ist die Wurfweite am größten?

99. Der Effekt eines Wechselstroms, dessen elektromotorische Kraft durch $e = a \sin \alpha t$ und dessen Stromstärke durch $i = b \sin \alpha t$ gegeben ist (a , b und α sind Konstanten, t ist die variable Zeit), wird durch das Produkt $e \cdot i$ dargestellt (vgl. Aufgabe 31). Gib die Maxima und Minima des Effektes an, wenn zwischen e und i keine Phasendifferenz herrschte. (Das Produkt im Differentialquotienten des Effektes ist erst nach einer bekannten trigonometrischen Formel umzuformen.)

100. Bei einer einfachen Schiebersteuerung ist die Bewegung durch das Gesetz

$$s = a_1 \sin(bt + c_1) + a_2 \sin(2bt + c_2)$$

gegeben, wo a_1 , a_2 , b , c_1 und c_2 Konstanten sind, während t die variable Zeit bedeutet. Wie groß ist die Geschwindigkeit $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ des Schiebers?

Die Differentialquotienten der übrigen trigonometrischen Funktionen

101. Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = \operatorname{tg} x$, indem du von $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ausgehst.
102. Bilde den Differentialquotienten der Funktion $y = \operatorname{ctg} x$, indem du a) von $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, b) von $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, c) von $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ausgehst.

Bilde **a)** die erste, **b)** die zweite Ableitung der folgenden Funktionen (bei bemerkenswerten Ergebnissen gib Erklärungen dafür!):

103. $y = \operatorname{tg} x.$

104. $y = \operatorname{ctg} x.$

105. $y = \operatorname{tg} 2x.$

106. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$

107. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{n}.$

108. $y = \operatorname{ctg} nx.$

109. $y = \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin x}.$

110. $y = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$

111. $y = a \operatorname{tg}(bx + c).$

112. $y = a \operatorname{ctg}(bx + c).$

113. $y = a^2 + b^2 - 2ab \cos x.$

114. $y = r \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

115. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$

116. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$

117. $y = \sin x - x \cdot \cos x.$

118. $y = \sin x \cdot \sin(1 - x).$

119. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

120. $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$

Differenziere beide Seiten folgender identischer Gleichungen:

121. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

122. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$

123. $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$

124. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

125. $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}.$

126. $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x).$

127. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$

128. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

129. $\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x.$

130. $\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x.$

Vermischte Aufgaben

131. Jemand löst die trigonometrische Gleichung

$$3 \sin x + \cos x = 5$$

dadurch, daß er sie differenziert und dann x aus dem Ergebnis berechnet. Wo steckt der Fehler?

132. Die harmonische Bewegung ist gegeben durch die Weggleichung

$$s_x = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

wo a den größten Ausschlag, t die variable Zeit, T die Zeit eines Hin- und Herganges bedeutet. Bestimme **a)** die Geschwindigkeit $v_x = \frac{ds_x}{dt}$, **b)** die Beschleunigung $b_x = \frac{d^2 s_x}{dt^2}$.

133. Bestimme a) die Geschwindigkeit v_y und b) die Beschleunigung b_y der harmonischen Bewegung

$$s_y = a \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

- c) Zeige, daß durch Zusammensetzung dieser Bewegung und derjenigen in Aufgabe 132 eine Kreisbewegung entsteht. Bestimme d) die Geschwindigkeit der Bewegung auf diesem Kreise, e) die Normalbeschleunigung.

Untersuche, welche von den im folgenden genannten Funktionen die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 y$$

erfüllen. Gib jeweilig den Wert der Konstanten k an.

134. $y = \sin x$. 135. $y = \cos x$. 136. $y = \operatorname{tg} x$.
 137. $y = \operatorname{ctg} x$. 138. $y = a \sin x + b \cos x$. 139. $y = \sin ax$.
 140. $y = \cos ax$. 141. $y = m \sin ax + m \cos ax$.

Anwendung auf Kurvendiskussionen

Bestimme die Wendepunkte und die Lage der Wendetangenten bei den folgenden Kurven:

142. $y = \sin x$. 143. $y = \cos x$. 144. $y = \operatorname{tg} x$.
 145. $y = \operatorname{ctg} x$. 146. $y = a \sin x$. 147. $y = \cos ax$.
 148. $y = a \sin bx$. 149. $y = a \cos bx$.

150. Gib an, welchen Winkel die Tangenten, die man an die Kurven $y = \sin x$ und $y = \cos x$ an den Stellen a) $x = 0$, b) $x = \frac{\pi}{4}$, c) $x = \frac{\pi}{2}$, d) $x = \pi$, e) $x = \frac{3\pi}{2}$ legt, miteinander bilden.

151. Untersuche, unter welchem Winkel sich die Tangens- und die Kotangenskurve schneiden.

Bestimme die Nullstellen, Unendlichkeitsstellen (soweit vorhanden), Maxima und Minima und gib eine graphische Darstellung folgender Funktionen:

152. $y = \sin x + \cos x$. 153. $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$.
 154. $y = \sin(x^2)$. 155. $x = \sin^2 x$.
 156. $y = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. 157. $y = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
 158. $y = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. 159. $y = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

160. Die 1. Ableitung a) der Funktion $y = \operatorname{tg} x$, b) der Funktion $y = \operatorname{ctg} x$ ist zu diskutieren und graphisch darzustellen.

161–168. Bestimme bei den Kurven, die den in Aufgaben 142–149 genannten Funktionen entsprechen, den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius in den Punkten

$$\text{a) } x = 0, \quad \text{b) } x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{c) } x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d) } x = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{e) } x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bestimme unter Benutzung der in § 28, Aufgabe 7 abgeleiteten Formeln den Krümmungsmittelpunkt und den Krümmungsradius a) für $t = \alpha$, b) für $t = 0$, c) für $t = \frac{\pi}{2}$, d) für $t = \pi$ bei den folgenden Kurven:

$$169. \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t \text{ (Ellipse).}$$

$$170. \quad x = \sin 2t, \quad y = \sin^2 t.$$

$$171. \quad x = 2(t - \sin t), \quad y = 1 - \cos t \text{ (Zykloidenart).}$$

$$172. \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \text{ (Galileische Zykloide).}$$

$$173. \quad x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t \text{ (Trochoide, für } b > a \text{ verschlungene T., für } b < a \text{ verkürzte T., für } b = a \text{ vgl. Aufgabe 172).}$$

$$174. \quad x = r \cos t + rt \sin t, \quad y = r \sin t - rt \cos t \text{ (Kreisevolvente).}$$

$$175. \quad x = a \cdot \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \text{ (Astroide).}$$

Anwendung auf die Bestimmung von Extremwerten

Aus der Geometrie

176. Wie groß muß der zwischen den gegebenen Seiten a und b eines Dreiecks liegende Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks zu einem Maximum wird?

177.¹⁾ Durch einen Punkt, der zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels liegt, soll eine Gerade so gelegt werden, daß das zwischen die Schenkel fallende Stück von ihr ein Minimum werde. Welche Lage hat die Gerade? Der Punkt hat von den Schenkeln die Abstände a und b .

Aus der Physik

178. Über der Mitte eines runden Tisches (Radius r) hängt eine Lampe. Wie hoch muß die Lampe über dem Tisch angebracht werden, damit ein am Rande des Tisches liegendes Buch ein Maximum der Beleuchtung erfährt?

179. Für welchen Erhebungswinkel α ergibt sich die größte Wurfweite, wenn der Boden in der Wurfrichtung unter dem Winkel β ansteigt?

¹⁾ Vgl. § 28, Aufgabe 55.

180. Wie hoch müssen zwei 50 m voneinander entfernte Bogenlampen angebracht werden, wenn die in der Mitte zwischen beiden liegende Stelle der Straße ein Maximum der Beleuchtung erfahren soll?
181. (*Reflexionsgesetz*¹⁾.) Auf der gleichen Seite einer Geraden seien 2 Punkte P_1 und P_2 gegeben. Auf der Geraden ist ein Punkt Q so zu bestimmen, daß $\overline{P_1Q} + \overline{P_2Q}$ ein Minimum wird. Untersuche insbesondere, welche Aussagen man über die Winkel machen kann, die die Strahlen P_1Q und P_2Q mit der Geraden bilden.
182. (*Brechungsgesetz*²⁾.) Auf der einen Seite einer Geraden möge das Licht sich mit der Geschwindigkeit c_1 , auf der anderen Seite mit der Geschwindigkeit c_2 bewegen. Das Licht soll von einem Punkte P_1 auf der einen Seite ausgehen, die Gerade in einem Punkt Q schneiden und nach dem Punkte P_2 auf der anderen Seite der Geraden gehen. Wie muß Q liegen, damit der gebrochene Streckenzug $\overline{P_1Q} + \overline{QP_2}$ in möglichst kurzer Zeit zurückgelegt wird? Achte insbesondere auf die Sinus der Winkel, die die Strahlen P_1Q und P_2Q mit der Geraden bilden.

Fehlerrechnung

183. Zeige, daß, wenn der Beobachtungsfehler Δx ein kleiner Wert ist, der bei der Bestimmung der Funktion $y = f(x)$ gemachte absolute Fehler Δy ist: $\Delta y \approx \Delta x \cdot f'(x)$.
184. Es ist ein angenähert rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten 1 gegeben, dessen Hypotenuse aber statt $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ als $1,414141 \dots$ gezeichnet ist. Um wieviel verkleinert sich der Winkel?
185. Es ist ein Dreieck aus $b = 7$, $c = 3$, $\alpha = 60^\circ$ zu berechnen. Dann ergibt sich a zu $\sqrt{37}$. Um wieviel ist a fehlerhaft, wenn
a) $\Delta b = -0,0002$, b) $\Delta c = 0,001$, c) $\Delta \alpha = \text{arc}1' = 0,0002909$ ist?
186. Es ist $\text{tg}30^\circ 1'$ zu berechnen.

Anleitung: In $\Delta \text{tg} x \approx \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x$ ist $\cos^2 x$ leicht zu finden und Δx (Bogenmaß!) bekannt. Damit ist auch $\Delta \text{tg} x$ und also $\text{tg}30^\circ 1' = \text{tg}30^\circ + \Delta \text{tg}30^\circ$ bekannt.

187. Es ist $\sin 45^\circ 1'$ zu berechnen, wenn $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ gegeben ist.

¹⁾ Vgl. § 28, Aufgabe 57.

²⁾ Vgl. § 28, Aufgabe 58.

§ 30. Die zyklometrischen Funktionen

Definition der zyklometrischen Funktionen

Die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x = \sin y,$$

$$\text{II. } y = \arcsin x$$

sind gleichwertig. Bestimme auf Grund dieser Definition die Unbekannte x oder y in den folgenden Gleichungen (achte dabei besonders auf die Mehrdeutigkeit der Funktion!):

- | | | |
|---|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $y = \arcsin 0.$ | 2. $y = \arcsin 1.$ | 3. $\frac{\pi}{2} = \arcsin x.$ |
| 4. $2\pi = \arcsin x.$ | 5. $y = \arcsin \frac{1}{2}.$ | 6. $y = \arcsin(-1).$ |
| 7. $\frac{\pi}{3} = \arcsin x.$ | 8. $\frac{2\pi}{3} = \arcsin x.$ | 9. $y = \arcsin(-\frac{1}{2}).$ |
| 10. $y = \arcsin(-\sqrt{\frac{1}{2}}).$ | 11. $y = \arcsin \frac{1}{3}.$ | 12. $y = \arcsin(-\frac{2}{3}).$ |
| 13. $y = \arcsin 0,1.$ | 14. $y = \arcsin 0,9.$ | |
15. In welcher Beziehung stehen $y = \sin x$ und $y = \arcsin x$ zueinander in geometrischer Hinsicht?
16. Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = \arcsin x$.
17. Welche Gleichungen sind gleichbedeutend mit den folgenden
- | | | |
|--------------------------|--|--|
| a) $y = \arcsin \cos x,$ | b) $y = \arcsin \operatorname{ctg} x,$ | c) $y = \arcsin \operatorname{ctg} x?$ |
|--------------------------|--|--|

Bestimme auf Grund der Definitionsgleichungen (Aufgabe 17) x oder y in den folgenden Gleichungen (achte auf die Mehrdeutigkeit der Funktionen!):

- | | | |
|--|--|--|
| 18. $y = \arcsin 0.$ | 19. $y = \arcsin \operatorname{ctg} 0.$ | 20. $y = \arcsin \cos 0.$ |
| 21. $y = \arcsin \cos 1.$ | 22. $y = \arcsin \cos \frac{1}{2}.$ | 23. $y = \arcsin \operatorname{tg} 1.$ |
| 24. $y = \arcsin \operatorname{ctg}(-1).$ | 25. $y = \arcsin \cos(-\frac{1}{2}).$ | 26. $y = \arcsin \operatorname{tg} \sqrt{3}.$ |
| 27. $y = \arcsin \operatorname{ctg}(-\frac{1}{3} \sqrt{3}).$ | 28. $y = \arcsin \operatorname{tg} 2.$ | 29. $y = \arcsin \operatorname{ctg}(-2).$ |
| 30. $y = \arcsin \operatorname{tg} 10.$ | 31. $y = \arcsin \operatorname{ctg}(-10).$ | 32. $y = \arcsin \operatorname{tg} 0,13.$ |
| 33. $y = \arcsin \operatorname{ctg} 3,14.$ | 34. $0 = \arcsin \operatorname{tg} x.$ | 35. $0 = \arcsin \cos x.$ |
| 36. $\frac{\pi}{2} = \arcsin \cos x.$ | 37. $\frac{-3\pi}{2} = \arcsin \cos x.$ | 38. $\frac{\pi}{2} = \arcsin \operatorname{tg} x.$ |
| 39. $\frac{-2\pi}{3} = \arcsin \operatorname{ctg} x.$ | 40. $11\pi = \arcsin \operatorname{tg} x.$ | 41. $-17\pi = \arcsin \operatorname{ctg} x.$ |
| 42. $1 = \arcsin \cos x.$ | 43. $1 = \arcsin \operatorname{tg} x.$ | 44. $1 = \arcsin \operatorname{ctg} x.$ |
| 45. $-3 = \arcsin \cos x.$ | | |

46. a) Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = \arccos x$. b) Untersuche, in welcher Beziehung die durch diese Funktion gegebene Kurve zu der Kurve $y = \arcsin x$ steht. c) Bestimme in der Gleichung

$$\arcsin a = \arccos x$$

die Unbekannte x durch die Größe a .

47. a) Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = \arctg x$. b) Kennzeichne die Eigenschaften, durch die sich diese Funktion von der Funktion

$$y = \arcsin x \quad \text{oder} \quad y = \arccos x$$

unterscheidet.

48. a) Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = \operatorname{arctg} x$. b) Untersuche, in welcher Beziehung diese Kurve zu der Kurve $y = \arctg x$ steht.

49. Untersuche, welche von den Funktionen $y = \sin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ und $y = \operatorname{arctg} x$ a) axial-symmetrisch sind, und welches die Lage der Symmetrieachsen ist, b) zentral-symmetrisch sind, und welches die Lage der Symmetriezentren ist.

Differentiation inverser Funktionen

50. Wiederhole die früher (§ 27, Aufgabe 6) abgeleitete Differentiationsregel

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

51. Stelle eine Funktion $y = f(x)$ graphisch dar, zeichne die Tangente in einem Punkte der Kurve und nenne die Winkel dieser Tangente mit der x -Achse und der y -Achse φ_1 und φ_2 . Welche Beziehung besteht zwischen φ_1 und φ_2 , welche Beziehung also zwischen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$?

Wende die Differentiationsregel auf folgende Paare inverser Funktionen in der Weise an, daß du aus dem als bekannt vorausgesetzten Differentialquotienten der ersten Funktion den der zweiten bestimmst:

52. $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$.

53. $y = x^n$ und $y = \sqrt[n]{x}$.

54. $y = ax + b$ und $y = \frac{x-b}{a}$.

55. $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x}$.

56. $y = x^2 + ax + b$ und $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{x - b + \frac{a^2}{4}}$.

57. $y = x^{-n}$ und $y = \sqrt[n]{x^{-1}}$.

Differentiation der zyklometrischen Funktionen

58. Benutze die Regel über die Differentiation inverser Funktionen zur Herstellung der Differentialquotienten der Funktionen

$$\text{a) } y = \arcsin x, \quad \text{b) } y = \arccos x, \quad \text{c) } y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{d) } y = \operatorname{arcctg} x.$$

59. Gib eine graphische Darstellung a) der Funktion $y = \arcsin x$ und ihrer Ableitung, b) der Funktion $y = \arccos x$ und ihrer Ableitung, c) der Funktion $y = \operatorname{arctg} x$ und ihrer Ableitung, d) der Funktion $y = \operatorname{arcctg} x$ und ihrer Ableitung. e) Erkläre an Figuren die in den Formeln

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

zum Ausdruck kommende Beziehung zwischen den Differentialquotienten der Funktionen \arcsin und \arccos . f) Tue das gleiche für die in den Gleichungen

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arcctg} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

zum Ausdruck kommende Beziehung der Funktionen arctg und arcctg .

Differenziere die folgenden Funktionen:

$$60. y = \arcsin(x^2).$$

$$61. y = \arccos \frac{x}{2}.$$

$$62. y = \arcsin nx.$$

$$63. y = \arcsin \frac{x}{n}.$$

$$64. y = \arcsin(x + \frac{1}{2}).$$

$$65. y = \arccos(x^2).$$

$$66. y = \operatorname{arctg} \frac{x}{n}.$$

$$67. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$68. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.$$

$$69. y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$70. y = x \arcsin x.$$

$$71. y = \arcsin x \cdot \arccos x.$$

$$72. y = \frac{\arcsin x}{x}.$$

$$73. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$74. y = \arccos \frac{a+b \cos x}{b+a \cos x}.$$

$$75. y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}).$$

Bestimme die 2. Ableitung der Funktionen:

$$76. y = \arcsin x.$$

$$77. y = \arccos x.$$

$$78. y = \operatorname{arctg} x.$$

$$79. y = \operatorname{arcctg} x.$$

$$80. y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$81. y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Bestimme a) die Wendepunkte und die Lage der Wendetangenten, b) Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt der Kurven:

82. $y = \arcsin x.$

83. $y = \arccos x.$

84. $y = \operatorname{arctg} x.$

85. $y = \operatorname{arccot} x.$

§ 31. Logarithmische Funktion und Exponentialfunktion

Differentiation des Logarithmus

1. Untersuche den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für wachsendes n , indem du nacheinander setzt a) $n = 1$, b) $n = 10$, c) $n = 100$, d) $n = 1000$, e) $n = 10000$, f) $n = 100000$, g) $n = 1000000$. Die Berechnung ist logarithmisch durchzuführen¹⁾. Welcher Grenze strebt der Ausdruck mit wachsendem n zu?

2. a) Bilde den Differenzenquotienten $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ von der Funktion $y = {}^a\log x$. b) Führe für Δx den Wert $\frac{x}{n}$ ein und zeige, daß dem Grenzübergang von $\Delta x \rightarrow 0$ der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ entspricht. c) Bringe den Differenzenquotienten auf die Form $\frac{1}{x} \cdot {}^a\log \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$.

3. Zeige die Richtigkeit der Formel

$$\frac{d {}^a\log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e,$$

wo

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \quad \text{bedeutet.}$$

Die Beziehungen der Logarithmen verschiedener Basis zueinander

4. Die natürlichen Logarithmen, d. h. die Logarithmen mit der Basis e , werden mit $\log nat x$ oder kurz $\ln x$ bezeichnet. Wie groß ist der Differentialquotient der Funktion $y = \ln x$?

Gib die Werte folgender natürlicher Logarithmen an:

5. a) $\ln 1,$

b) $\ln e,$

c) $\ln e^2.$

6. a) $\ln \sqrt{e},$

b) $\ln \frac{1}{e},$

c) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}.$

7. a) $\ln e^n,$

b) $\ln \frac{1}{e^n},$

c) $\ln \sqrt[n]{e}.$

¹⁾ Bei der Berechnung benutze die folgenden 10stelligen Logarithmen, die nach Bedarf abzukürzen sind:

$\lg 1,1 = 0,0413926852$

$\lg 1,01 = 0,0043213738$

$\lg 1,001 = 0,0004340775$

$\lg 1,0001 = 0,0000434273$

$\lg 1,00001 = 0,0000043429$

$\lg 1,000001 = 0,0000004343.$

8. Bei den Briggsschen Logarithmen, d. h. bei den Logarithmen mit der Basis 10, unterbleibt die Angabe der Basis. Man bezeichnet den Briggsschen Logarithmus mit $\lg x$. Wie lautet der Differentialquotient der Funktion $y = \lg x$?
9. Stelle graphisch dar a) $y = \lg x$, b) $y = {}^2\log x$, c) $y = {}^3\log x$, d) $y = \ln x$. Im letzteren Falle benutze den Wert

$$e = 2,7182818284 \dots$$

auf so viel Stellen, als nötig ist.

10. Stelle die in den Logarithmentafeln gegebene Funktion a) $y = \lg \sin x$ zusammen mit der Funktion $y = \sin x$, b) $y = \lg \cos x$ zusammen mit $y = \cos x$, c) $y \lg \operatorname{tg} x$ zusammen mit $y = \operatorname{tg} x$, d) $y = \lg \operatorname{ctg} x$ zusammen mit $y = \operatorname{ctg} x$ graphisch dar. (Achte darauf, daß die Logarithmen vielfach negativ sind!)
11. Bestimme aus den Gleichungen

$$y = {}^a\log x$$

$$z = \ln x$$

jeweilig x und setze beide Werte gleich. Diese Gleichung logarithmiere dann (natürliche Logarithmen!). Zeige, daß daraus

$${}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{folgt.}$$

Berechne auf Grund dieser Formel unter Benutzung der Konstanten

$$\ln 10 = 2,302585093 \dots$$

aus den Briggsschen Logarithmen, die einer Tafel zu entnehmen sind, die folgenden natürlichen Logarithmen¹⁾:

- | | | |
|----------------------|---------------------------|---------------------------|
| 12. a) $\ln 5$, | b) $\ln 2$, | c) $\ln 10$. |
| 13. a) $\ln 1$, | b) $\ln 100$, | c) $\ln 1000$. |
| 14. a) $\ln 0,5$, | b) $\ln 0,1$, | c) $\ln 17,4$. |
| 15. a) $\ln \pi$, | b) $\ln \frac{1}{\pi}$, | c) $\ln 2\pi$. |
| 16. a) $\ln \pi^2$, | b) $\ln \frac{1}{2\pi}$, | c) $\ln \frac{4}{3}\pi$. |
| 17. a) $\ln 9,745$, | b) $\ln 1,388$, | c) $\ln 13,22$. |
| 18. a) $\ln 27,17$, | b) $\ln 87,78$, | c) $\ln 95,18$. |

¹⁾ Der in der Praxis eingeschlagene Weg ist der umgekehrte. In § 35 wird gezeigt, wie man die natürlichen Logarithmen berechnen kann. Daraus lassen sich dann die Briggsschen finden.

19. Berechne den *Modul* M der Briggsschen Logarithmen, d. h. den Faktor, mit dem man den natürlichen Logarithmus multiplizieren muß, um den Briggsschen zu erhalten.

$$20. \text{ Aus } \quad {}^a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\quad \quad \quad {}^b \log x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

ist durch Division die Gleichung

$${}^a \log x = \frac{1}{b \cdot \log a} \cdot {}^b \log x \quad \text{abzuleiten}^1).$$

Berechne auf Grund der in der vorangehenden Aufgabe hergeleiteten Gleichung folgende Logarithmen unter Benutzung einer Tafel der Briggsschen Logarithmen:

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 21. a) ${}^2 \log 3$, | b) ${}^5 \log 7$, | c) ${}^6 \log 4$. |
| 22. a) ${}^2 \log 10$, | b) ${}^3 \log 10$, | c) ${}^4 \log 10$. |
| 23. a) ${}^5 \log 10$, | b) ${}^6 \log 10$, | c) ${}^7 \log 10$. |
| 24. a) ${}^8 \log 10$, | b) ${}^9 \log 10$, | c) ${}^{11} \log 10$. |
| 25. a) ${}^{100} \log 2,75$, | b) ${}^{100} \log 17,28$, | c) ${}^{1000} \log 0,1384$. |
| 26. a) ${}^2 \log 3,148$, | b) ${}^5 \log 13,71$, | c) ${}^6 \log 28,87$. |
| 27. a) ${}^5 \log 0,1895$, | b) ${}^3 \log 2,018$, | c) ${}^7 \log 0,001415$. |

Übungen im Differenzieren

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 28. $y = \ln(ax)$. | 29. $y = \ln \frac{x}{a}$. | 30. $y = \ln(a + bx)$. |
| 31. $y = \ln \frac{a + bx}{a - bx}$. | 32. $y = \lg(x^2)$. | 33. $y = x \lg x$. |
| 34. $y = \frac{\ln x}{x}$. | 35. $y = \lg \frac{1}{x}$. | 36. $y = {}^2 \log(x + a)$. |
| 37. $y = {}^5 \log(ax + b)$. | 38. $y = {}^2 \log x$. | 39. $y = {}^7 \log 5$. |
| 40. $y = \ln \frac{1}{1 + x}$. | 41. $y = \ln \frac{1}{1 - x}$. | 42. $y = \ln(\sin x)$. |
| 43. $y = \ln(\cos x)$. | 44. $y = \ln(\operatorname{tg} x)$. | 45. $y = \ln(\operatorname{ctg} x)$. |
| 46. $y = \ln(\ln x)$. | 47. $y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$. | 48. $y = x(\ln x - 1)$. |
| 49. $y = \ln^2 x$. | 50. $y = {}^a \log x \cdot {}^b \log x$. | 51. $y = \frac{{}^a \log x}{{}^b \log x}$. |

¹⁾ Bezeichnet man ${}^b \log a$ mit $\frac{a}{b}$, so ist $\frac{x}{a} = \frac{x}{b} \cdot \frac{b}{a}$. (Analogie mit der Bruchrechnung!)

52. Welche Lage hat die Tangente an die Kurve $y = \ln x$ a) im Schnittpunkte mit der x -Achse, b) im Punkte $x = e$, c) im Punkte $x = \frac{1}{e}$, d) im Punkte $x = 10$?
53. Welche Lage hat die Tangente an die Kurve $y = \lg x$ a) im Schnittpunkte mit der x -Achse, b) im Punkte $x = 10$, c) im Punkte $x = 0,1$? d) In welchem Punkte der Kurve bildet die Tangente mit der x -Achse einen Winkel von 45° ?
54. Welche Lage hat die Tangente an die Kurve $y = {}^a\log x$ a) im Schnittpunkte mit der x -Achse, b) im Punkte $x = a$, c) im Punkte $x = a^2$?
- Bilde die 2. Ableitung der folgenden Funktionen:
55. $y = \ln x$. 56. $y = {}^a\log x$. 57. $y = x \cdot \ln x$.
58. $y = \ln(x^2)$. 59. $y = \frac{\ln x}{x}$. 60. $y = \frac{1}{\ln x}$.
61. Beweise durch Untersuchung der 2. Ableitung, daß die Kurve a) $y = \ln x$, b) $y = {}^a\log x$ in ihrem ganzen Verlauf nach der gleichen Seite, und zwar nach unten, gekrümmt ist.
62. Untersuche, ob die Kurve a) $y = \ln x$, b) $y = {}^a\log x$ im Endlichen ein Maximum oder Minimum oder Wendepunkte (vgl. Aufgabe 61) besitzt.
63. Diskutiere die Änderung des Krümmungsradius der Kurve a) $y = \ln x$, b) $y = {}^a\log x$.

Die Exponentialfunktion und ihre Differentiation

Die folgenden Funktionen sind graphisch darzustellen:

64. $y = 2^x$. 65. $y = 2,5^x$. 66. $y = e^x$.
67. $y = e^{-x}$. 68. $y = e^{\frac{x}{2}}$. 69. $y = e^{2x}$.
70. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. 71. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
72. Die Funktion $y = e^x$ ist zu differenzieren, indem man sie als inverse Funktion von $y = \ln x$ auffaßt.
73. Die Funktion $y = a^x$ ist zu differenzieren, indem man sie als inverse Funktion von $y = {}^a\log x$ auffaßt.

Differenziere die folgenden Funktionen:

74. $y = e^{2x}$. 75. $y = e^{\frac{x}{2}}$. 76. $y = a^{2x}$.
77. $y = a^{\frac{x}{2}}$. 78. $y = a \cdot e^{-bx}$. 79. $y = xe^x$.

80. $y = (x - 1)e^x$. 81. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$. 82. $y = x^n e^x$.
 83. $y = \sin x \cdot e^x$. 84. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. 85. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
 86. $y = e^{\sin x}$. 87. $y = e^{\cos x}$. 88. $y = x \cdot a^x$.
 89. $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. 90. $y = \frac{e^x - a}{e^x + a}$. 91. $y = \frac{a^x}{b^x}$.
 92. $y = e^{\frac{1}{x}}$. 93. $y = a^{x^2}$. 94. $y = e^{-ax} \sin(bx + c)$.
 95. $y = e^{ax} \cos(bx + c)$.

Welches ist die Lage der Tangenten an die folgenden Kurven in dem Schnittpunkte der Kurve mit der y -Achse:

96. $y = e^x$. 97. $y = e^{-x}$. 98. $y = a^x$.
 99. $y = a^{-x}$. 100. $y = e^{ax}$. 101. $y = e^{-ax}$.
 102. Untersuche, ob die Kurven a) $y = e^x$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = e^{ax}$, d) $y = a^x$ (wo a positiv) ein Maximum oder Minimum besitzen.
 103. Beweise durch Untersuchung der 2. Ableitung, daß die Kurve a) $y = e^x$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = e^{ax}$ in ihrem ganzen Verlauf nach der gleichen Seite, und zwar nach oben, gekrümmt ist, daß also ein Wendepunkt nicht vorhanden ist (vgl. 61).
 104. Diskutiere die Veränderung des Krümmungsradius der Kurve a) $y = e^x$, b) $y = e^{ax}$, c) $y = a^x$.

105. Gib Funktionen an, die die Differentialgleichung

$$\text{I. } \frac{dy}{dx} = y$$

erfüllen.

106. Gib Funktionen an, die die Differentialgleichung

$$\text{II. } \frac{dy}{dx} = ky$$

erfüllen (k eine Konstante).

107. Zeige, daß die Differentialgleichung

$$\text{III. } \frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 y$$

erfüllt wird durch die Funktionen a) $y = e^{kx}$, b) $y = b \cdot e^{kx}$.

108. Untersuche, welche der Differentialgleichungen I, II und III von der Funktion $y = a^x$ erfüllt wird.

109. Zeige, daß die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y$$

erfüllt wird durch die Funktionen¹⁾:

$$\text{a) } y = e^{iax}, \quad \text{b) } y = e^{-iax}, \quad \text{c) } y = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax}), \quad \text{d) } y = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax}).$$

(Vgl. hierzu § 35, Aufgabe 27.)

Vermischte Aufgaben

110. Wenn man in $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in der Weise zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergeht, daß man erst in der Klammer den Grenzübergang ausführt und dann im Exponenten, so erhält man als Grenzwert 1. Was ist an dieser Schlußweise unzulässig?

111. Die Unzulässigkeit folgender Überlegung ist zu zeigen; $1 + \frac{1}{n}$ ist stets, wie groß auch n sei, eine Zahl größer als 1. Da der Grenzwert von a^n für $n \rightarrow \infty$, wenn a eine Zahl größer als 1 ist, über jedes Maß hinauswächst, so ist der Grenzwert $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ unendlich groß.

112. Wenn 1 RM in der Weise auf Zinseszins gelegt wird, daß die Zinsen monatlich zum Kapital geschlagen werden, so erhält man, bei der Annahme von $p\%$ als Jahreszinsfuß,

$$k = \left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12}$$

als Endkapital. a) Wie groß ist das Endkapital bei täglicher Zinszuschreibung? b) Wie groß ist es, wenn die Zinszuschreibung in jedem Augenblick, also stetig, erfolgt?

113. Die Richtung der Tangente an die Kurve

$$y = ae^{bx}$$

im Punkte x_1, y_1 ist zu bestimmen.

114. An die Kettenlinie

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

ist die Tangente a) im Punkte $x = 0$, b) im Punkte $x = x_1$ gezogen. Welche Lage hat sie?

115. Bestimme und diskutiere die Extremwerte der Kettenlinie

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right).$$

¹⁾ Potenzen mit imaginären Exponenten sind freilich bisher noch nicht definiert. Das wird im § 35 nachgeholt. Hier genügt es zu sagen, daß die Definition so eingerichtet wird, daß die Rechengesetze auch für imaginäre Exponenten erhalten bleiben.

116. Die Funktion
- $$y = ae^{\frac{b}{x}}$$

ist graphisch darzustellen, und die Lage der *Asymptote* ist durch Rechnung zu bestimmen.

117. Der Luftdruck in der Höhe h über dem Meeresniveau ist

$$p = p_1 \cdot e^{-mh},$$

wo m eine Konstante und p_1 der Luftdruck im Meeresniveau ist. Freilich ist vorausgesetzt, daß die Temperatur der Luft in den verschiedenen Höhen gleich bleibt. Wie groß ist die Änderung des Druckes mit der Höhe (d. h. der Differentialquotient des Druckes nach der Höhe)?

118. Ein Schwungrad wird durch Reibung in einer Flüssigkeit gebremst. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades und T , sein Trägheitsmoment, dem Widerstand der Flüssigkeit proportional, also gleich $F\omega$, so ist, wenn ω_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist,

$$\omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{F}{T}t}.$$

Wie groß ist die Winkelbeschleunigung, d. h. der Differentialquotient der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit?

119. Die Gleichung für den Ausschlag bei einer gedämpften Schwingung sei

$$s = 2 \cdot e^{-0,3t} \cdot \sin 3t,$$

wo t die variable Zeit ist. Stelle s als Funktion von t graphisch dar und untersuche die Lage der Maxima und Minima.

A C H T E S K A P I T E L

Unendliche Reihen.

Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

§ 32. Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen

Das Bildungsgesetz der Glieder von Reihen

Wie heißt in den nachstehenden Folgen von Zahlen a) das n te, b) das $(n - 1)$ te, c) das $(n + 1)$ te Glied:

1. 2, 4, 6, 8, 10, ... 2. 7, 8, 9, 10, 11, ...
 3. 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ 5. $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots$

6. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$ 7. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

8. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{14}, \dots$

9. $2, \frac{2^2}{1!}, \frac{2^3}{2!}, \frac{2^4}{3!}, \frac{2^5}{4!}, \dots$

10. $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \dots$

11. $1, -1, +1, -1, +1, \dots$

12. $\frac{1}{p}, -\frac{1}{2p}, +\frac{1}{3p}, -\frac{1}{4p}, +\frac{1}{5p}, \dots$

13. $\frac{1}{\lg 2}, \frac{1}{\lg 3}, \frac{1}{\lg 4}, \frac{1}{\lg 5}, \frac{1}{\lg 6}, \dots$

14. $\sin 0, \sin \frac{\pi}{2}, \sin \pi, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin 2\pi, \dots$

15. $\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \frac{1}{8!}, \frac{1}{10!}, \dots$

16. $1, -\frac{1}{3!}, +\frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, +\frac{1}{9!}, \dots$

17. a, a^2, a^4, a^8, \dots

18. $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[8]{a}, \sqrt[16]{a}, \dots$

19. $\frac{a}{b}, \frac{2a}{b^2}, \frac{3a}{b^3}, \frac{4a}{b^4}, \frac{5a}{b^5}, \dots$

20. $1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^4}{4!}, \dots$

Gib die ersten 5 Glieder (von $n = 1$ anfangend) der folgenden Reihen an:

21. $\sum_n \frac{1}{n^2}$ 22. $\sum_n \frac{1}{(n+2)^2}$ 23. $\sum_n \frac{1}{n(n+2)}$

24. $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ 25. $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^3}$ 26. $\sum_n \frac{n!}{4^{n-1}}$

27. $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$ 28. $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot na}{b^n}$ 29. $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n}$

Die Summe unendlicher Reihen

30. Es sei s_n die Summe der n ersten Glieder. Dann sind 3 Fälle möglich:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existiert nicht, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ hat den Wert ∞ , c) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

existiert und hat einen endlichen Wert. Gib für jeden der 3 Fälle 2 Beispiele von Reihen an.

31. Zeige, daß das Hinzufügen und Wegnehmen einer endlichen Zahl von Gliedern endlicher Größe an der Tatsache der *Konvergenz* oder *Divergenz* nichts ändert.

Bilde bei den folgenden konvergenten Reihen die Summen der ersten 2, 3, 4 usw. bis 10 Glieder, soweit die Hinzunahme neuer Glieder noch Einfluß auf die ersten 5 Ziffern hat. Beurteile danach, ob die Konvergenz rasch oder langsam ist:

$$32. 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$33. 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \dots$$

$$34. 1 - \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^4}{4!} - \frac{(0,1)^6}{6!} + \frac{(0,1)^8}{8!} - + \dots$$

$$35. 10 - \frac{10^3}{3!} + \frac{10^5}{5!} - \frac{10^7}{7!} + \frac{10^9}{9!} - + \dots$$

$$36. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

$$37. \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - + \dots$$

$$38. \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} + \dots$$

$$39.^1) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

$$40.^2) \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots$$

$$41.^3) \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - + \dots$$

Zeige an den folgenden Beispielen, daß eine Reihe von Gliedern *nicht* konvergieren *kann*, wenn ihre Glieder mit wachsender Gliederzahl zunehmen oder unverändert bleiben (beachte jedoch Beispiel 47!).

$$42. 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$43. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots$$

$$44. 0,01 + 0,02 + 0,03 + 0,04 + 0,05 + \dots$$

$$45. a + 2a + 3a + 4a + 5a + \dots$$

$$46. \frac{1!}{1^2} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^2} + \frac{4!}{4^2} + \frac{5!}{5^2} + \dots$$

$$47. 3 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

¹⁾ Nach *Poncelet* sind ungefähr 50000 Glieder auszurechnen, wenn der Fehler 0,00001 nicht übersteigen soll.

²⁾ Um 14 richtige Dezimalstellen zu bekommen, muß man nach *Kummer* mehr als 10 Millionen Glieder berücksichtigen.

³⁾ Zur Berechnung auf 26 richtige Dezimalstellen wären nach *Bresse* mehr als 1080 Billionen Glieder nötig.

Zeige an den folgenden Reihen, daß nicht jede Reihe mit positiven Gliedern, die mit wachsender Gliederzahl abnehmen, konvergiert:

$$48. 2 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{16} + \dots$$

$$49. 1,1 + 1,01 + 1,001 + 1,001 + 1,0001 + 1,00001 + \dots$$

$$50. (a + b) + (a + bq) + (a + bq^2) + (a + bq^3) + \dots$$

$$51. (a + b) + \left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(a + \frac{b}{3}\right) + \left(a + \frac{b}{4}\right) + \dots$$

$$52. (a + b) + \left(a + \frac{b}{3}\right) + \left(a + \frac{b}{3^2}\right) + \left(a + \frac{b}{3^3}\right) + \dots,$$

wo a und b positive Größen, q eine positive Zahl kleiner als 1 ist.

Zeige an den folgenden Reihen, daß nicht jede Reihe mit positiven Gliedern, die mit wachsender Gliederzahl gegen Null konvergieren, konvergent ist¹⁾:

$$53. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$54. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$55. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots$$

$$56. \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} + \dots$$

57. Zeige, daß eine Reihe aus positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

konvergiert, wenn eine Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots$$

konvergiert, und wenn gleichzeitig von einem endlichen n ab

$$b_n \geq a_n \quad \text{ist.}$$

58. Zeige, daß eine Reihe aus positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

divergiert, wenn eine Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots$$

divergiert, und wenn gleichzeitig von einem endlichen n ab

$$b_n \leq a_n \quad \text{ist.}$$

¹⁾ In der ersten Reihe ist z. B. das 3. und 4. Glied zusammen größer als $\frac{1}{2}$, ebenso das 5., 6., 7. und 8. Glied, das 9. bis 16. usw.

Konvergenzkriterium für Reihen mit positiven Gliedern

59. Man wisse von einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

daß von einem endlichen n ab

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

ist, wo q eine fest angebbare Zahl kleiner als 1 ist. Dann ist

$$a_{n+1} < a_n q,$$

$$a_{n+2} < a_n q^2,$$

$$a_{n+3} < a_n q^3,$$

$$\dots$$

Vergleiche die gegebene Reihe mit einer anderen, deren Glieder vom $(n+1)$ ten an kleiner sind, und die sich als unendliche geometrische Reihe summieren läßt. Formuliere danach ein Konvergenzkriterium.

60. Man wisse von einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots,$$

daß von einem endlichen n ab

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$$

ist, wo q eine Zahl größer als 1 ist. Zeige in ähnlicher Weise wie nach der Vorschrift in Aufgabe 59, daß dann die Reihe divergiert.

Bestimme in den folgenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

und entscheide danach, ob die Reihe konvergiert, oder ob sie divergiert, oder ob eine Entscheidung nach diesem Kriterium nicht möglich ist:

61. a) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$, b) $1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots$

62. a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$, b) $1 + \frac{1!}{100} + \frac{2!}{100^2} + \frac{3!}{100^3} + \dots$

63. a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$, b) $\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$

64. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$

65. $\frac{1}{2 \lg 2} + \frac{1}{3 \lg 3} + \frac{1}{4 \lg 4} + \frac{1}{5 \lg 5} + \dots$

$$66. a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots,$$

$$b) \frac{1}{3^1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{3^2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3^3 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3^4 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$67. \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{6}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$68. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 6}} + \dots$$

$$69. \frac{1}{a+1} + \frac{1 \cdot 2}{(a+1)(a+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots,$$

wo a eine positive Zahl ist.

Konvergenzkriterium für Reihen mit Gliedern, die abwechselnde Vorzeichen haben

70. Man wisse von einer unendlichen Reihe mit Gliedern abwechselnden Vorzeichens (mit anderen Worten von einer *alternierenden* Reihe)

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - + \dots,$$

daß die Glieder kleiner und kleiner werden und gegen 0 konvergieren, d. h. daß

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ist. Zeige, daß dann von einem genügend großen n an die Summe der Reihe zwischen s_n und s_{n+1} liegt, wo s_n die Summe der ersten n Glieder ist, mit anderen Worten, daß die Reihe konvergiert¹⁾.

71. Zeichne in eine Zahlgerade (Maßstab $1 \equiv 1 \text{ dm}$) die Teilsummen, d. h. die Summen $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$

$$a) \text{ der Reihe } s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots,$$

$$b) \text{ der Reihe } s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + - \dots \text{ ein.}$$

Entscheide bei den folgenden Reihen, ob sich ihre Konvergenz nach dem oben (Aufgabe 70) genannten Konvergenzkriterium nachweisen läßt:

$$72. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots \quad 73. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \dots$$

$$74. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + - \dots \quad 75. 1 - \frac{10}{11} + \frac{10}{2!} - \frac{10}{3!} + \frac{10}{4!} - + \dots$$

$$76. 1 - \frac{100^2}{2!} + \frac{100^4}{4!} - \frac{100^6}{6!} + \frac{100^8}{8!} - + \dots$$

¹⁾ Diese Konvergenzbedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig.

$$77. \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} - \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{6}{5 \cdot 7} - + \dots$$

$$78. \frac{1}{\sqrt[m]{1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \frac{1}{\sqrt[m]{4}} + \frac{1}{\sqrt[m]{5}} - + \dots,$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

$$79. \frac{1}{\lg 2} - \frac{1}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 4} - \frac{1}{\lg 5} + \frac{1}{\lg 6} - + \dots$$

$$80. \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+5} - + \dots,$$

wo a eine positive Zahl ist.

$$81. \sin a - \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{3} - \sin \frac{a}{4} + - \dots,$$

wo a eine positive Zahl ist.

$$82. \cos a - \cos \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{3} - \cos \frac{a}{4} + - \dots,$$

wo a eine positive Zahl ist.

Konvergenz von Potenzreihen

Bei den folgenden Reihen ist zu untersuchen, für welche Werte der Variablen x Konvergenz eintritt (wenn möglich, untersuche auch die Konvergenz für Grenzwerte, bei denen das Konvergenzkriterium versagt!).

$$83. 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad 84. 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$85. 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \quad 86. 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$87. 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} + \dots \quad 88. 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \dots$$

$$89. 1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \dots$$

$$90. 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots$$

$$91. 3x - 3^2x^2 + 3^3x^3 - 3^4x^4 + 3^5x^5 - + \dots$$

$$92. 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots \quad 93. x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots$$

$$94. x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

$$95. x + 2! \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3! \left(\frac{x}{3}\right)^3 + 4! \left(\frac{x}{4}\right)^4 + 5! \left(\frac{x}{5}\right)^5 + \dots$$

Vermischte Aufgaben

96. Zeige die Richtigkeit der folgenden Reihensummationen durch Division:

$$a) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots,$$

$$b) \quad \frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + - \dots,$$

$$c) \quad \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + - \dots.$$

97. a) bis c) Gib für die in Aufgabe 96 genannten Reihen das allgemeine Glied an und untersuche, für welche Werte der Variablen die Reihen konvergieren.

98. Erörtere die von *Waring* (1781) ausgesprochene Tatsache, daß, wenn man in die 3 Reihen der Aufgabe 96 für x den Wert 1 einsetzt, als Summe der Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \dots$$

sich einmal $\frac{1}{2}$, das andere Mal $\frac{1}{3}$, das 3. Mal $\frac{1}{4}$ ergibt.

99. *Jacob Bernoulli* (1689) leitete eine Summenformel in folgender Weise ab, wobei ihm übrigens selbst das Bedenkliche seiner Schlußweise nicht entging:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{2b} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{4b} + \dots = S,$$

folglich ist

$$\frac{a}{2b} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{4b} + \frac{a}{5b} + \dots = S - \frac{a}{b}.$$

Durch Subtraktion folgt daraus:

$$\frac{a}{1 \cdot 2 \cdot b} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot b} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot b} + \frac{a}{4 \cdot 5 \cdot b} + \dots = \frac{a}{b}.$$

Erörtere diese Schlußweise!

100. *Bernoulli* hat folgende Reihensummationen ausgeführt:

$$+ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \dots = \frac{1}{2}.$$

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + - \dots = \frac{1}{3}.$$

$$1 + 0 - 1 + 1 - 0 - 1 + - \dots = \frac{2}{3}.$$

Erörtere, wie er auf diese unrichtigen Ergebnisse gekommen sein mag.

101. Es sei $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$,

dann ist $s = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots)$.

Folglich ist

$$s = [(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots)] - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) \\ = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) = 0.$$

Wo liegt der Fehler in dieser Schlußfolge?

102. Es sei
$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Dann ist
$$2s = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \dots$$

oder, anders angeordnet,

$$2s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

mithin
$$2s = s.$$

Wo steckt der Fehler in der Schlußweise?

103. Bestimme den Wert der unendlichen Reihe

$$s = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots,$$

indem du das erste Glied als Differenz von 1 und $\frac{1}{2}$, das zweite von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, das dritte von $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ usw. auffaßt und dann die Summation ausführst.

104. Es ist
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \dots = 1$$

und andererseits

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots = \frac{1}{2}.$$

Wo steckt der Fehler?

105. Für die alternierende Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \dots$$

ist
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Trotzdem ist die Reihe divergent, da die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ divergent, die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ konvergent ist. Wo steckt der Fehler?

§ 33. Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten

Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten¹⁾

1. In dem Reihenansatz

$$(1 + x)^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k,$$

wo k eine positive ganze Zahl ist, sind die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ dadurch zu bestimmen, daß nach Bedarf $x = 0$ gesetzt wird, und daß der Ausdruck schrittweise differenziert wird [*Methode der unbestimmten Koeffi-*

¹⁾ Vgl. § 15.

zienten¹⁾]. Warum ist ein Glied $a_n x^n$, wo $n > k$ ist, nicht mehr vorhanden, x^k also die höchste in der Entwicklung auftretende Potenz?

2. Der Reihenansatz

$$(1+x)^k = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k$$

ist einmal zu differenzieren. Links ist für $(1+x)^{k-1}$ der auf Grund des Reihenansatzes (setze $k-1$ an die Stelle von $k!$) sich ergebende Wert einzusetzen. Durch Vergleichung der Faktoren gleicher Potenzen von x sind dann die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ zu bestimmen (*Methode der Koeffizientenvergleichung*). Begründe diese Methode! Zeige auch hier, daß Glieder höherer Potenz von x als x^k nicht vorhanden sind.

Binomialkoeffizienten

3. Untersuche, welcher Wert dem durch

$$\binom{k}{p} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$$

zunächst für positive ganze Zahlen k und p , wo $k \geq p$ ist, definierten Binomialkoeffizienten beizulegen sein wird, wenn man die Definition ausdehnt

a) auf positive ganze Zahlen $p > k$, b) auf negative ganze Zahlen k ,
c) auf gebrochene Zahlen k .

d) Ist eine Erweiterung der Definition auch auf den Fall, daß p eine negative oder eine gebrochene Zahl ist, zugänglich? (Grund!)

e) Erörtere den Fall, daß p oder k gleich 0 wird.

Gib den Wert folgender Binomialkoeffizienten an:

4. a) $\binom{7}{7}$, b) $\binom{7}{1}$, c) $\binom{5}{5}$, d) $\binom{9}{5}$.

5. a) $\binom{-1}{3}$, b) $\binom{-2}{5}$, c) $\binom{-7}{2}$, d) $\binom{-3}{2}$.

6. a) $\binom{0}{5}$, b) $\binom{3}{4}$, c) $\binom{2}{8}$, d) $\binom{5}{10}$.

7. a) $\binom{-n}{1}$, b) $\binom{-n}{3}$, c) $\binom{-n}{5}$, d) $\binom{1-n}{2}$.

8. a) $\binom{-1}{n}$, b) $\binom{n}{0}$, c) $\binom{0}{n}$, d) $\binom{-n}{n}$.

9. a) $\binom{1}{2}$, b) $\binom{1}{4}$, c) $\binom{1}{7}$, d) $\binom{1}{5}$.

10. a) $\binom{1}{n}$, b) $\binom{1}{2}$, c) $\binom{1}{3}$, d) $\binom{1}{7}$.

¹⁾ Hier wird die Tatsache benutzt, daß die Funktion genügend oft differenzierbar ist. Diese Forderung ist nicht für alle Funktionen erfüllt. Wir beschränken uns aber in diesem Kapitel auf „vernünftige“ Funktionen, bei denen die Forderung erfüllt ist.

11. a) $\left(\frac{2}{3}\right)$, b) $\left(\frac{2}{3}\right)$, c) $\left(\frac{2}{5}\right)$, d) $\left(\frac{3}{4}\right)$.
12. a) $\left(-\frac{1}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{1}{5}\right)$, c) $\left(-\frac{1}{10}\right)$, d) $\left(-\frac{1}{3}\right)$.
13. a) $\left(-\frac{3}{4}\right)$, b) $\left(-\frac{3}{4}\right)$, c) $\left(-\frac{2}{5}\right)$, d) $\left(-\frac{2}{4}\right)$.
14. a) $\left(\frac{4}{3}\right)$, b) $\left(\frac{1\frac{2}{5}}{2}\right)$, c) $\left(-\frac{1\frac{1}{2}}{3}\right)$, d) $\left(-\frac{10,2}{1}\right)$.
15. a) $\left(-\frac{2}{n}\right)$, b) $\left(-\frac{m}{1}\right)$, c) $\left(-\frac{3}{3}\right)$, d) $\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

16. Untersuche, was aus den beiden für positive ganze k geltenden Gesetzen über Binomialkoeffizienten

$$\text{I. } \binom{k}{p} = \binom{k}{k-p},$$

$$\text{II. } \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$$

wird, wenn für k auch negative und gebrochene Zahlen zugelassen werden.

Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten

17. Entwickle die Funktion $(1+x)^k$, wo k eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ist, schrittweise durch Differentiation (nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten) in eine unendliche Reihe¹⁾.
18. Entwickle die Funktion $(1+x)^k$, wo k eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ist, nach der Methode der Koeffizientenvergleichung in eine unendliche Reihe.
19. Untersuche die Konvergenz der Reihe

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \binom{k}{3}x^3 + \dots$$

Wie lautet die Reihenentwicklung folgender Funktionen:

$$20. y = \frac{1}{1+x}.$$

$$21. y = \sqrt{1+x}.$$

$$22. y = \sqrt[4]{1+x}.$$

$$23. y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

$$24. y = \sqrt[3]{1+x}.$$

$$25. y = \sqrt[7]{x+1}.$$

$$26. y = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

$$27. y = \frac{1}{(1+x)^4}.$$

$$28. y = \sqrt[5]{1+x}.$$

¹⁾ Hier und an den entsprechenden Stellen im folgenden wird die Voraussetzung gemacht, daß die Regel von der Differentiation einer Summe von endlich vielen Summanden auch anwendbar ist auf eine Summe von unendlich vielen Summanden. Das ist bei konvergenten Potenzreihen für Werte im Innern des Konvergenzbereiches immer gestattet.

29. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$. 30. $y = (1+x)\sqrt{1+x}$. 31. $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$.
32. $y = \frac{1}{1-x}$. 33. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. 34. $y = \sqrt{1-x}$.
35. $y = \frac{1}{(1-x)^2}$. 36. $y = \sqrt[3]{1-x}$. 37. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.
38. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. 39. $y = \frac{1}{1+2x}$. 40. $y = \sqrt{1+2x}$.
41. $y = \frac{1}{1+x^2}$. 42. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 43. $y = \frac{3}{1+x}$.
44. $y = \sqrt{2+2x}$. 45. $y = \sqrt[4]{4+2x}$. 46. $y = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$.
47. $y = \sqrt{x^2+a^2}$. 48. $y = \sqrt[3]{a^3+x^3}$. 49. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
50. $y = \frac{1}{(1+x)^n}$. 51. $y = \frac{1}{1+x^n}$. 52. $y = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$.

Von welchem Gliede an werden in den Reihenentwicklungen der nachfolgenden Funktionen die Glieder kleiner als ihre Vorgänger:

53. $y = \frac{1}{1+x}$ für $x = \frac{1}{2}$. 54. $y = \sqrt{1+x}$ für $x = \frac{1}{3}$.
55. $y = \sqrt[3]{1+x}$ „ $x = \frac{2}{3}$. 56. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ „ $x = \frac{3}{4}$.
57. $y = \sqrt{1+x^2}$ „ $x = \frac{1}{2}$. 58. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$ „ $x = -\frac{1}{2}$.
59. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$ „ $x = 0,1$. 60. $y = \sqrt[4]{(1+x)^3}$ „ $x = 0,1$.

61. *Bernoulli* schloß aus der Entwicklung

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$

indem er $x = 1$ setzte:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - + \dots = \frac{1}{4}.$$

Decke den Fehler auf!

62. *Newton* hat in einem Briefe vom 24. Oktober 1676 die Reihe für $y = \sqrt{1-x^2}$ angegeben. Auf die Richtigkeit der Entwicklung hat er in zweifacher Weise die Probe gemacht. Er hat a) die Reihe mit sich selbst vervielfacht, und er hat b) in der Weise, wie man z. B. aus Dezimalbrüchen Wurzeln zieht,

die Quadratwurzel aus dem algebraischen Ausdruck $1 - x^2$ gezogen. Wiederhole die Rechnungen, die Newton auszuführen hatte.

63. Zeige, daß man für kleine x ansetzen darf

$$\text{a) } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \quad \text{b) } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2},$$

und untersuche die Genauigkeit dieser Näherungsformeln.

Schmiegungsparabeln

64. a) Von der durch die Funktion $y = (1+x)^{-1}$ dargestellten Kurve, einer Hyperbel, sind Mittelpunkt, Asymptoten und danach die Kurvenäste zu zeichnen. b) Zeichne die Gerade $y = 1 + \binom{-1}{1}x$ in die graphische Darstellung ein. c) Zeichne die 2. Schmiegungsparabel, indem du zu der nach b gezeichneten Geraden die Parabel $y = \binom{-1}{2}x^2$ graphisch addierst. d) Zeichne die 3. Schmiegungsparabel, indem du zu der 2. Schmiegungsparabel die Parabel $y = \binom{-1}{3}x^3$ graphisch addierst. e) Zeichne noch die 4. Schmiegungsparabel. f) In welchem Bereiche ist der Ersatz der Kurve durch die Schmiegungsparabeln möglich? (Vergleich mit dem Konvergenzbereich.)
65. Zeichne die Kurve $y = \sqrt{1+x}$ und ihre ersten 4 Schmiegungsparabeln. Stelle auf Grund der Zeichnung den Konvergenzbereich fest.
66. Zeichne die ersten 4 Schmiegungsparabeln der Kurve $y = \frac{1}{(1+x)^2}$ und verschaffe dir von der Funktion selbst ein Kurvenbild durch Punkt konstruktion.
67. Zeichne die Kurve $y = \sqrt[3]{1+x}$ und ihre ersten 4 Schmiegungsparabeln. In welchem Gebiet läßt sich die Kurve durch die Schmiegungsparabeln ersetzen?
68. Zeichne die ersten 4 Schmiegungsparabeln a) der Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ b) der Kurve $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$.

Numerische Bestimmung von Wurzeln

Berechne mit Hilfe der Binomialreihe ohne Benutzung von Logarithmen die folgenden Wurzeln auf 4 Ziffern:

69. a) $\sqrt[3]{1,1}$, b) $\sqrt[3]{0,98}$, c) $\sqrt[3]{1,01}$, d) $\sqrt[4]{0,9}$.
70. a) $\sqrt[4]{0,97}$, b) $\sqrt[3]{1,03}$, c) $\sqrt{17}$, d) $\sqrt{37}$.
71. a) $\sqrt[3]{65}$, b) $\sqrt{18}$, c) $\sqrt[5]{1020}$, d) $\sqrt[4]{82}$.
72. a) $\sqrt{0,99^2}$, b) $\sqrt[4]{1,02^3}$, c) $\sqrt[8]{1,02}$, d) $\sqrt[10]{0,98}$.
73. a) $\sqrt[7]{1,1}$, b) $\sqrt{403}$, c) $\sqrt[8]{255}$, d) $\sqrt[3]{120}$.

Berechne nachstehende Zahlenwerte auf 6 Ziffern:

74. a) $\sqrt{1,0001}$, b) $\sqrt{1,001}$, c) $\sqrt{1,01}$, d) $\sqrt{1,1}$.
 75. a) $\sqrt{0,9999}$, b) $\sqrt{0,999}$, c) $\sqrt{0,99}$, d) $\sqrt{0,9}$.
 76. a) $\sqrt[3]{1,0004}$, b) $\sqrt[3]{1,003}$, c) $\sqrt[3]{1,02}$, d) $\sqrt[3]{0,997}$.
 77. a) $\sqrt[3]{0,99}$, b) $\sqrt[4]{0,99}$, c) $\sqrt[5]{0,99}$, d) $\sqrt[6]{0,99}$.
 78. a) $\sqrt{10}$, b) $\sqrt{26}$, c) $\sqrt{102}$, d) $\sqrt{905}$.
 79. a) $\sqrt{8}$, b) $\sqrt{143}$, c) $\sqrt{253}$, d) $\sqrt{959}$.
 80. a) $\sqrt[3]{65}$, b) $\sqrt[3]{511}$, c) $\sqrt[3]{731}$, d) $\sqrt[3]{1003}$.

Berechne auf 5 Stellen¹⁾:

81. a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{7}$.
 82. a) $\sqrt{11}$, b) $\sqrt{13}$, c) $\sqrt{14}$, d) $\sqrt{19}$.
 83. a) $\sqrt[3]{2}$, b) $\sqrt[3]{3}$, c) $\sqrt[3]{4}$, d) $\sqrt[3]{5}$.
 84. a) $\sqrt[5]{234}$, b) $\sqrt[6]{727}$, c) $\sqrt[7]{131}$, d) $\sqrt[7]{2190}$.

Grenzwerte

Die folgenden Grenzwerte sind zunächst von der Form $\frac{0}{0}$. Durch Einführung der Reihenentwicklungen läßt sich aber der Grenzwert finden:

85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$. 86. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.
 87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{1-x}}{x}$. 88. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

§ 34. Die Reihen der trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrungen

Die Sinusreihe

1. Entwickle die Funktion $y = \sin x$ schrittweise durch Differentiation in eine Reihe.

¹⁾ Statt $\sqrt{2}$ in der Form $2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}}$ zu schreiben, kann man auch die vorteilhaftere Umformung $\frac{1}{5}\sqrt{25 \cdot 2} = \frac{2}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ oder noch besser $\frac{10}{7}\sqrt{1 - \frac{1}{50}}$ wählen. Ähnliche Umformungen sind auch bei den weiter folgenden Aufgaben 81 bis 84 möglich.

2. Entwickle die Funktion $y = \sin x$ in der Weise in eine Reihe, daß du für die zunächst unbestimmten Koeffizienten durch zweimalige Differentiation Rekursionsformeln gewinnst¹⁾.

3. Untersuche die Konvergenz der Sinusreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Entwickle die folgenden Funktionen in eine Reihe, indem du dabei die Sinusreihe anwendest:

4. $y = \sin 2x$.

5. $y = \sin 3x$.

6. $y = \sin(ax)$.

7. $y = \sin \frac{x}{2}$.

8. $y = \sin \frac{x}{4}$.

9. $y = \sin \frac{x}{a}$.

10. $y = \sin(x^2)$.

11. $y = \sin(x + a)$.

12. Gib eine graphische Darstellung von der Annäherung der Sinuskurve

a) $y = \sin x$, b) $y = b \sin(x + a)$ durch die 4 ersten Schmiegungsparabeln.

Berechne durch Reihenentwicklung (ohne Anwendung von Logarithmen!):

13. a) $\sin \frac{\pi}{10}$,

b) $\sin \frac{\pi}{100}$,

c) $\sin \frac{\pi}{20}$.

14. a) $\sin \frac{\pi}{180}$,

b) $\sin \frac{\pi}{360}$,

c) $\sin \frac{\pi}{60}$.

15. a) $\sin 10^\circ$,

b) $\sin 5^\circ$,

c) $\sin 2^\circ$.

16. a) $\sin 1^\circ 30'$,

b) $\sin 45'$,

c) $\sin 4^\circ 30'$.

Der Mac Laurinsche und der Taylorsche Satz

17. Eine Funktion²⁾ $f(x)$ sei durch eine innerhalb eines gewissen Bereiches von x konvergente Potenzreihe darstellbar:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Bestimme durch wiederholte Differentiation und Nullsetzung der Variablen die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots

18. Zeige an den Funktionen a) $y = \frac{1}{x}$, b) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $y = \lg x$, daß eine Reihendarstellung der Form (Mac Laurinscher Satz)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + R_n,$$

¹⁾ Hier und in ähnlicher Weise an späteren Stellen wird von dem Satz, daß zwei gleiche Potenzreihen in den Koeffizienten übereinstimmen, auch bei unendlichen Potenzreihen Gebrauch gemacht. Dieser Satz ist dadurch zu beweisen, daß man die beiderseits vorhandenen Glieder gleicher Potenz zusammenfaßt und schrittweise differenziert. Dann müssen alle Koeffizienten der Differenzenreihe Null werden, wie man bei Nullsetzung der Variablen erfährt.

²⁾ Von den Funktionen, von denen hier die Rede ist, werden gewisse Voraussetzungen gemacht, z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit usf. Es sollen, kurz gesagt, „vernünftige“ Funktionen sein.

wo der Rest R_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähert, nicht immer möglich ist¹⁾. Gib die Gründe an! d) Nenne andere Beispiele, in denen die Reihendarstellung nach MacLaurin versagt.

19. Eine Funktion $f(x+a)$ sei durch eine innerhalb eines gewissen Bereiches von x konvergente Potenzreihe darstellbar:

$$f(x+a) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

Bestimme durch wiederholte Differentiation und Nullsetzung der Variablen x die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, \dots

20. Zeige an den Funktionen a) $y = \frac{1}{x-a}$, b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$, daß eine Reihendarstellung der Form (Taylorscher Satz)

$$f(x+a) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \frac{x^3}{3!} f'''(a) + \dots + R_n,$$

wo der Rest R_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähert, nicht immer möglich ist. Gib die Gründe an! c) Nenne andere Beispiele, in denen die Reihendarstellung nach Taylor versagt.

21. Gib der Taylorschen Reihe die folgende Gestalt:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

22. Leite an der Hand der MacLaurinschen Reihe a) die Reihe für $y = \sin x$, b) die Reihe für $y = \cos x$ ab.

23. Untersuche die Konvergenz²⁾ der Kosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

24. Die Reihe für $\cos x$ ist durch Differentiation der Sinusreihe zu gewinnen.

25. Gib eine graphische Darstellung von der Annäherung der Kosinuskurve $y = \cos x$ durch die 4 ersten Schmiegungsparabeln.

Entwickle in eine Reihe die folgenden Funktionen (benutze dabei die Kosinusreihe):

26. $y = \cos 2x$.

27. $y = \cos ax$.

28. $y = \cos \frac{x}{3}$.

29. $y = \cos \frac{x}{a}$.

30. $y = \cos(x+a)$.

31. $y = \cos(x^2)$.

¹⁾ Achte in dieser Darstellung auf den Unterschied zwischen $f'(0)$, das heißt dem Wert, den $f'(x)$ für $x=0$ annimmt, und dem Differentialquotienten von $f(0)$.

²⁾ Nach der Aufstellung der Reihe nach MacLaurin gibt die Untersuchung des Restgliedes Auskunft darüber, ob die Reihe konvergiert und die Funktion wirklich darstellt. Die Konvergenz der Reihe allein genügt nicht, um behaupten zu können, daß die Funktion von der Reihe dargestellt wird. Doch sind unsere Beispiele alle so, daß die als konvergent erwiesene Reihe auch wirklich die Funktion darstellt.

Bei den folgenden Funktionen ist zur Reihenentwicklung der MacLaurinsche Satz zu benutzen; von den Reihen sind die ersten 5 Glieder anzugeben:

32. $y = \sin x \cdot \cos x$. 33. $y = \sin^2 x$. 34. $y = \cos^2 x$. 35. $y = \operatorname{tg} x$.

36. Begründe, warum in der Umgebung der Stelle $x = 0$ eine Potenzreihe für $y = \operatorname{ctg} x$ nicht möglich ist.

Berechne durch Reihenentwicklung:

37. a) $\cos \frac{\pi}{10}$, b) $\cos \frac{\pi}{100}$, c) $\cos \frac{\pi}{30}$.

38. a) $\cos \frac{\pi}{180}$, b) $\cos \frac{\pi}{720}$, c) $\cos \frac{\pi}{270}$.

39. a) $\cos 1^\circ$, b) $\cos 2^\circ$, c) $\cos 10^\circ$.

40. a) $\operatorname{tg} 3^\circ$, b) $\operatorname{tg} 4^\circ$, c) $\operatorname{ctg} 5^\circ$.

41. a) $\operatorname{ctg} 6^\circ$, b) $\operatorname{ctg} 10^\circ$, c) $\operatorname{tg} 10^\circ$.

Grenzwerte

42. a) Zeige durch Ersatz zweier in konvergenten Reihen in der Nähe von $x = 0$ darstellbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch die nach MacLaurin bestimmten Reihen, daß

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

ist, wenn der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x = 0$ nicht existiert, weil $f(x)$ und $g(x)$ gleichzeitig 0 werden. b) Wie hat man zu verfahren, wenn $f'(0)$ und $g'(0)$ auch beide Null werden? c) bis f) Berechne als Beispiel die schon in § 33 unter Nr. 85 bis 88 gelösten Aufgaben.

43. a) Zeige in ähnlicher Weise unter Benutzung der Taylorsche Reihe, daß

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ist, wenn $f(a)$ und $g(a)$ gleichzeitig Null werden. b) Wie hat man zu verfahren, wenn auch $f'(a)$ und $g'(a)$ gleichzeitig Null werden?

Berechne die folgenden Grenzwerte, a) indem du die Funktionen durch ihre Reihen ersetzt und mit diesen rechnest, b) indem du — das Verfahren abkürzend — die in den Aufgaben 42 und 43 entwickelte Methode benutzt:

44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. 45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$. 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3}$. 48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. 49. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

50. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$.

Die folgenden Formeln aus der sphärischen Trigonometrie sollen in solche der ebenen Trigonometrie umgesetzt werden, in der Weise, daß der Grenzübergang Kugelradius $r \rightarrow \infty$ ausgeführt wird:

$$51. \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (\text{rechtwinkliges Dreieck bei } \gamma; a, b, c \text{ die Seiten}).$$

$$52. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin b}{\operatorname{tg} a} \quad (\text{wie 51}). \quad 53. \cos \alpha = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} b \quad (\text{wie 51}).$$

$$54. \operatorname{csc} c = \cos a \cdot \cos b \quad (\text{wie 51}).$$

$$55. \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin a : \sin b : \sin c \quad (\text{Sinussatz für beliebige sphärische Dreiecke}).$$

$$56. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad (\text{Halbwinkelsatz für beliebige Dreiecke}).$$

$$57. \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \quad (\text{Mollweidesche Formel für beliebige Dreiecke}).$$

$$58. \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}} \quad (\text{Nepersche Analogie für beliebige Dreiecke}).$$

$$59. \cos a = \cos b \cdot \operatorname{csc} c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (\text{Seitenkosinussatz für beliebige Dreiecke}).$$

$$60. \cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \quad (\text{Winkelkosinussatz für beliebige Dreiecke}).$$

Die Reihen für die zyklometrischen Funktionen

61. Die Potenzreihe für $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ist in der Weise zu finden, daß die mit unbestimmten Koeffizienten angesetzte Reihe differenziert, die linke Seite durch eine Binomialreihe ersetzt wird, und daß die Koeffizienten durch Koeffizientenvergleichung bestimmt werden.

62. Untersuche, in welchem Bereiche die Reihe

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

konvergiert.

63. Gib eine graphische Darstellung der Annäherung der Kurve $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ durch die 4 ersten Schmiegungsparabeln.

64. Erörtere die Tatsache, daß die $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ -Funktion vieldeutig ist.

65. Entwickle die Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$ in eine Potenzreihe, indem du dabei die Binomialreihe benutzt.

66. Untersuche die Konvergenz der $\operatorname{arc} \sin$ -Reihe.

67. Entwickle die Funktion $y = \arccos x$ in eine Potenzreihe, indem du dabei die Binomialreihe benutzt.
68. Untersuche die Konvergenz der \arccos -Reihe.

Berechnung von π

69. Versuche die Berechnung von π an der Hand der Reihe für die \arctg -Funktion, wenn darin die Variable $x = 1$ gesetzt wird. Erörtere die praktischen Schwierigkeiten bei diesem Vorgehen.

Beweise die folgenden Gleichungen:

$$70. \frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}.$$

$$71. \frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}.$$

$$72. \frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{8}.$$

$$73. \frac{\pi}{4} = 2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7}.$$

$$74. \frac{\pi}{4} = 3 \arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{5}{99}.$$

- 75.–79. Berechne an Hand der in Aufgaben 70 bis 74 hergeleiteten Gleichungen, in die die Reihenentwicklungen einzuführen sind, $\frac{\pi}{4}$ numerisch auf 6 Dezimalen.

§ 35. Die Exponentialreihe und die logarithmische Reihe

Die Exponentialreihe

1. Entwickle die Funktion $y = e^x$ nach dem MacLaurinschen Satz in eine Potenzreihe.
2. Untersuche die Konvergenz der Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

3. Führe den Nachweis, daß die Reihe

$$s(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

tatsächlich die Funktion e^x darstellt, in folgender Weise: Zeige durch Untersuchung des Differentialquotienten, daß $\frac{s(x)}{e^x}$ zunächst eine Konstante, dann aber, wie sich aus dem Werte des Quotienten für $x = 0$ ergibt, die Konstante 1 ist.

4. Berechne die Größe e auf Grund dieser Potenzreihe für e^x auf 6 Dezimalen.
5. Entwickle die Funktion $y = a^x$ nach dem MacLaurinschen Satz in eine Potenzreihe.

6. Untersuche die Konvergenz der Reihe

$$a^x = 1 + \ln a \frac{x}{1!} + \ln^2 a \frac{x^2}{2!} + \dots$$

7. Gib eine graphische Darstellung von der Annäherung der Exponentialkurve $y = e^x$ durch die ersten 4 Schmiegungsparabeln.

8. Gib eine Reihenentwicklung für die *hyperbolischen Funktionen*:

$$\text{a) } y = \text{Sin } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{b) } y = \text{Cos } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

c) Zeige, daß sich die Funktionen für große x nur wenig voneinander unterscheiden.

9. Definiere die Funktionen $y = \text{Ztg } x$ und $y = \text{Utg } x$.

Entwickle in eine Reihe und berechne

$$10. \text{ a) } y = e^2, \quad \text{b) } y = \sqrt{e}, \quad \text{c) } y = \frac{1}{e}.$$

$$11. \text{ a) } y = \frac{1}{e^2}, \quad \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \text{c) } y = \sqrt[3]{e}.$$

Entwickle die folgenden Funktionen in Reihen:

$$12. y = e^{3x}, \quad 13. y = e^{\frac{x}{2}}, \quad 14. y = e^{-x}.$$

$$15. y = e^{nx}, \quad 16. y = e^{x^2}, \quad 17. y = e^{\frac{x}{n}}.$$

$$18. y = a^{-x}, \quad 19. y = a^{x+1}, \quad 20. y = a^{2x}.$$

21. Zeige durch Multiplikation der Reihen, daß $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ist.

22. Zeige durch Multiplikation der Reihen, daß $e^x \cdot e^{-y} = e^{x-y}$ ist.

23. Zeige durch Multiplikation der Reihen, daß $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ist.

24. Gib eine Reihe für x^x an, die nach Potenzen von $x \ln x$ fortschreitet.

Imaginäre Exponenten

Unter einer Potenz der Basis e mit imaginärem Exponenten versteht man den Wert, den die zugehörige Reihe annimmt, wenn man für die Variable jenen Wert setzt. Gib also den Wert an von

$$25. \text{ a) } e^{ix}, \quad \text{b) } e^{-ix}, \quad \text{c) } a^{ix}, \quad \text{d) } a^{-ix}.$$

$$26. \text{ a) } e^i, \quad \text{b) } e^{2\pi i}, \quad \text{c) } e^{-i}, \quad \text{d) } e^{2i}.$$

27. Beweise durch Reihenvergleichung die folgenden Formeln, von denen c und d auch unmittelbar aus a und b folgen:

$$\text{a) } e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \text{b) } e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

$$\text{c) } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{d) } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

28. Beweise die folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}, \quad \text{b) } e^{2ix} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x},$$

$$\text{c) } x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}.$$

29. a) Beweise, daß $e^{2\pi i} = 1$ ist. b) Wenn man unter a^{m+ni} den Wert $a^m \cdot a^{ni}$ versteht, so ist

$$e^x = e^{x+2n\pi i},$$

wo n eine ganze Zahl ist.

30. Beweise auf Grund von Aufgabe 27a und b

$$\text{a) } e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad \text{b) } e^{ix} : e^{iy} = e^{i(x-y)}.$$

31. Bringe die Gleichungen des *Moivreschen Satzes*¹⁾:

$$\text{a) } (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

$$\text{b) } \sqrt[n]{\cos x + i \sin x} = \cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}$$

auf eine Potenzform.

Läßt man als Argumente der trigonometrischen Funktionen auch imaginäre Zahlen zu, so gelten die folgenden Sätze, die auf Grund der Reihenentwicklung zu beweisen sind:

$$\text{32. } \sin(ix) = i \operatorname{Sh} x. \quad \text{33. } \cos(ix) = \operatorname{Cof} x. \quad \text{34. } \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{Tg} x.$$

$$\text{35. } \operatorname{ctg}(ix) = -i \operatorname{Ctg} x. \quad \text{36. } \operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1.$$

37. Leite das Additionstheorem der hyperbolischen Funktionen ab:

$$\operatorname{Sin}(x+y) = \operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Cof} y + \operatorname{Sin} y \cdot \operatorname{Cof} x.$$

38. Leite die Formeln für a) $\operatorname{Sin}(x-y)$, b) $\operatorname{Cof}(x+y)$, c) $\operatorname{Cof}(x-y)$ ab.

Grenzwerte

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$\text{39. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

$$\text{40. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$\text{41. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$\text{42. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$\text{43. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x.$$

$$\text{44. } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right).$$

$$\text{45. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin x}.$$

$$\text{46. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}.$$

$$\text{47. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - \sin x}.$$

$$\text{48. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x - x^2}{x - \sin x}.$$

¹⁾ Vgl. § 9, Aufgabe 34.

49. Gauß gibt in einem Briefe an Schumacher vom 12. Juni 1831 als Umfang des Kreises in einer nichteuklidischen Geometrie an¹⁾:

$$u = \pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right).$$

Zeige, daß für $k \rightarrow \infty$ dieser Wert in die bekannte Formel der euklidischen Geometrie übergeht.

Die logarithmische Reihe

50. Entwickle die Funktion $y = \ln(1+x)$ in eine Reihe, indem du von der mit unbestimmten Koeffizienten angesetzten Reihe die Ableitung bildest, dann für den Differentialquotienten von $\ln(1+x)$ die Reihenentwicklung einsetzt und durch Koeffizientenvergleichung die in der Entwicklung von $\ln(1+x)$ auftretenden Koeffizienten bestimmst.

51. Entwickle die Funktion $y = \ln(1+x)$ nach dem Taylorschen Satz in eine Reihe.

52. Entwickle die Funktion $y = {}^a\log(1+x)$ in eine Reihe.

53. Untersuche den Konvergenzbereich der Reihen

a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

b) ${}^a\log(1+x) = {}^a\log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$

54. Gib eine graphische Darstellung von der Annäherung der logarithmischen Kurve $y = \ln(1+x)$ durch die ersten 4 Schmiegungsparabeln.

55. Warum ist der Versuch, die Funktion $y = \ln x$ nach dem MacLaurinschen Satze (also in der Umgebung der Stelle $x = 0$) in eine Reihe zu entwickeln, aussichtslos?

Entwickle in unendliche Reihen die folgenden Funktionen und untersuche jeweilig ihren Konvergenzbereich:

56. $y = \ln(1-x)$. 57. $y = \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. 58. $y = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$.

59. $y = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$. 60. $y = \ln(2+x)$. 61. $y = \ln(n+x)$.

62. $y = \lg(n+x)$. 63. $y = {}^a\log(n+x)$.

Untersuche die folgenden Grenzwerte:

64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1 - x^2}{x^3}$.

66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$. 67. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$.

¹⁾ Das heißt in einer Geometrie, für die das Parallelenaxiom nicht zutrifft.

Berechnung von Logarithmen

Berechne mit Hilfe der logarithmischen Reihe folgende Logarithmen:

68. a) $\ln 1,05$, b) $\ln 0,9$, c) $\ln 1,1$.
 69. a) $\ln 0,85$, b) $\ln 0,95$, c) $\ln 1,03$.
 70. a) $\ln 1,025$, b) $\ln 0,995$, c) $\ln 0,998$.

Bei den in den folgenden Aufgaben verlangten Berechnungen Briggscher Logarithmen ist der Modul des Briggschen Logarithmensystems

$$M = 0,4342945 \dots$$

zu benutzen¹⁾:

71. a) $\lg 1,02$, b) $\lg 0,89$, c) $\lg 1,15$.
 72. a) $\lg 101$, b) $\lg 99$, c) $\lg 1002$.
 73. a) $\lg 0,999$, b) $\lg 0,01024$, c) $\lg 1,0001$.
 74. a) $\lg 111$, b) $\lg 11,03$, c) $\lg 1033$.

75. Subtrahiere von der Reihe für $\ln(1+x)$ die Reihe für $\ln(1-x)$ und be-
weise, daß

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad \text{ist.}$$

76. a) Leite aus der in Aufgabe 75 angegebenen Reihe durch eine geeignete Substitution die Reihe

$$\ln z = 2 \left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right)$$

ab. b) Früher (Aufgabe 55) ist gesagt worden, daß eine Potenzreihe für $\ln x$ in der Umgegend von $x=0$ nicht vorhanden sei; wie stimmt das mit der vorliegenden Reihe zusammen?

77. Untersuche den Konvergenzbereich der in Aufgabe 75 genannten Reihe für $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Berechne auf Grund der neuen Reihe:

78. a) $\ln 1,01$, b) $\ln 0,99$, c) $\ln 1,5$.
 79. a) $\ln 2$, b) $\ln 7$, c) $\ln 3$.
 80. a) $\ln 5$, b) $\ln \frac{1}{2}$, c) $\ln 0,75$.

¹⁾ Vgl. § 31, Aufgabe 19.

81. Leite die Reihe

$$\ln(1+x) = \ln x + 2 \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2x+1)^5} + \dots \right]$$

ab, indem du in der Reihe der Aufgabe 76 die Substitution

$$\frac{1}{2x+1} = \frac{z-1}{z+1}$$

ausführst.

82. Untersuche, für welchen Bereich von x die Reihe der vorhergehenden Aufgabe 81 konvergiert.
83. Um wieviel unterscheiden sich die natürlichen Logarithmen a) von 1 und 2, b) von 10 und 11, c) von 100 und 101, d) von 1000 und 1001?
84. Benutze $\lg 2 = 0,30103$ und berechne a) $\lg 17$, b) $\lg 31$, c) $\lg 63$.
85. Benutze $\lg 3 = 0,47712$ und berechne a) $\lg 26$, b) $\lg 82$, c) $\lg 299$, d) $\lg 301$.
86. Bestimme 3 Zahlenfolgen (d. h. je 2 aufeinanderfolgende ganze Zahlen), in denen als Primfaktoren nur die Zahlen 2, 3 und 5 vorkommen, z. B.:

$$n_1 = 3 \cdot 5, \quad n_1 + 1 = 2^4.$$

$$n_2 = 2^3 \cdot 3, \quad n_2 + 1 = 5^2.$$

$$n_3 = 2^4 \cdot 5, \quad n_3 + 1 = 3^4.$$

Aus den Reihen für $\lg(n_1 + 1) - \lg n_1$, $\lg(n_2 + 1) - \lg n_2$, $\lg(n_3 + 1) - \lg n_3$ sind 3 lineare Gleichungen mit den 3 Unbekannten $\lg 2$, $\lg 3$, $\lg 5$ zu gewinnen, deren erste z. B. heißt

$$4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5 = 2 \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3 \cdot 31^3} + \dots \right).$$

Diese Gleichungen sind zur Bestimmung der Unbekannten zu benutzen (nach *Kowalewski*).

87. Bestimme in gleicher Weise wie oben $\lg 2$, $\lg 3$ und $\lg 7$.
88. Bestimme auf Grund der Zahlenfolge 44, 45 aus den natürlichen Logarithmen von 2, 3 und 5 den natürlichen Logarithmus von 11.
89. Gib eine Zahlenfolge an, auf Grund deren man $\ln 13$ bestimmen kann, und führe die Bestimmung aus.

Berechne die folgenden Briggsschen Logarithmen:

- | | | |
|--------------------|-----------------|-----------------|
| 90. a) $\lg 7$, | b) $\lg 8$, | c) $\lg 13$. |
| 91. a) $\lg 213$, | b) $\lg 117$, | c) $\lg 523$. |
| 92. a) $\lg 719$, | b) $\lg 1312$, | c) $\lg 5425$. |

NEUNTES KAPITEL

Integralrechnung

§ 36. Die Integration als Umkehrung der Differentiation

Der Begriff des unbestimmten Integrals

Die Gleichungen (I) $\frac{df(x)}{dx} = F(x)$

$$(II) f(x) = \int F(x) dx$$

sind gleichbedeutend¹⁾. Die eine ist die Umkehrung der anderen. Schreibe dementsprechend die folgenden Differentialquotienten in Integrale um:

$$1. \text{ a) } \frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \quad \text{b) } \frac{d(x^4)}{dx} = 4x^3, \quad \text{c) } \frac{d(x^{10})}{dx} = 10x^9.$$

$$2. \text{ a) } \frac{d(3x^2)}{dx} = 6x, \quad \text{b) } \frac{d(3x^3)}{dx} = 9x^2, \quad \text{c) } \frac{d\frac{1}{4}x^4}{dx} = x^3.$$

$$3. \text{ a) } \frac{d\frac{1}{x^2}}{dx} = -\frac{2}{x^3}, \quad \text{b) } \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{c) } \frac{d(7x^{-7})}{dx} = -\frac{49}{x^8}.$$

$$4. \text{ a) } \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{b) } \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \text{c) } \frac{d\sqrt[3]{x^2}}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Bestimme $f(x)$ in den folgenden Gleichungen, die du zuerst in die entsprechenden Differentialquotienten umschreibst:

$$5. \text{ a) } \int f(x) dx = x, \quad \text{b) } \int f(x) dx = 7x.$$

$$6. \text{ a) } \int f(x) dx = 3x^2, \quad \text{b) } \int f(x) dx = 7x^6.$$

$$7. \text{ a) } \int f(x) dx = x^3, \quad \text{b) } \int f(x) dx = x^7.$$

$$8. \text{ a) } \int f(x) dx = 7x^2, \quad \text{b) } \int f(x) dx = 5x.$$

$$9. \text{ a) } \int f(x) dx = x^{-3}, \quad \text{b) } \int f(x) dx = x^{-5}.$$

$$10. \text{ a) } \int f(x) dx = \sqrt{x}, \quad \text{b) } \int f(x) dx = \frac{-1}{\sqrt{x}}.$$

$$11. \text{ a) } \int x dx = f(x), \quad \text{b) } \int x^2 dx = f(x).$$

¹⁾Vgl. jedoch das später über die Integrationskonstante Gesagte (Aufgaben 18 bis 21)!

12. a) $\int \frac{x^3}{3} dx = f(x),$

b) $\int 7x^4 dx = f(x).$

13. a) $\int x^6 dx = f(x),$

b) $\int 2x^{10} dx = f(x).$

14. a) $\int 5 dx = f(x),$

b) $\int dx = f(x).$

15. a) $\int \frac{dx}{x^2} = f(x),$

b) $\int \frac{dx}{x^3} = f(x).$

16. a) $\int \sqrt{x} dx = f(x),$

b) $\int \sqrt[3]{x} dx = f(x).$

17. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = f(x),$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = f(x).$

18. Stelle die Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 1$, $f_3(x) = x^2 + 2$, $f_4(x) = x^2 - 1$, $f_5(x) = x^2 - 2$ graphisch dar und zeige, daß bei allen Kurven an Stellen des gleichen Arguments x die durch Gleichung $f'(x) = 2x$ gegebene Lage der Tangente die gleiche ist.

19. Zeige, daß $f(x)$ in den folgenden Integralen stets das gleiche ist:

a) $\int f(x) dx = x^7 + 3,$

b) $\int f(x) dx = x^7 + \frac{1}{2},$

c) $\int f(x) dx = x^7 + \sqrt{2},$

d) $\int f(x) dx = x^7 + \pi.$

20. Tue das gleiche bei den folgenden Integralen (a ist eine Konstante):

a) $\int f(x) dx = \sqrt{x},$

b) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + 7,$

c) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + 0,001,$

d) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + a,$

e) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + \sqrt{a},$

f) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$

21. Es sei $\int F(x) dx = f_1(x),$

und auch $\int F(x) dx = f_2(x).$

a) Schreibe die Ausdrücke in Differentialquotienten um und bilde die Differenz. b) Beweise, daß sich $f_1(x)$ und $f_2(x)$ nur um eine additive Konstante unterscheiden, mit anderen Worten, daß in

$$\int F(x) dx = f(x)$$

die Funktion $f(x)$ bis auf eine Konstante (*Integrationskonstante*) bestimmt ist, daß man also die allgemeine Lösung in folgender Form angeben kann:

$$\int F(x) dx = f(x) + c.$$

Die Integration einer Potenz

22. a) Beweise die Grundformel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

wo c eine Konstante und n eine beliebige rationale Zahl außer -1 ist.
 b) Darf n auch den Wert Null annehmen? c) Erläutere, warum man den Wert $n = -1$ ausnimmt.

Berechne folgende Integrale (die Zahl n ist eine Konstante):

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---|
| 23. a) $\int x^2 dx,$ | b) $\int x^5 dx,$ | c) $\int x^{12} dx.$ |
| 24. a) $\int 7x^3 dx,$ | b) $\int 5x^4 dx,$ | c) $\int 12x^{12} dx.$ |
| 25. a) $\int \frac{x^2}{4} dx,$ | b) $\int \frac{x^7}{8} dx,$ | c) $\int \frac{3}{4} x^3 dx.$ |
| 26. a) $\int x dx,$ | b) $\int 3x dx,$ | c) $\int \frac{x}{10} dx.$ |
| 27. a) $\int 3 dx,$ | b) $\int dx,$ | c) $\int \pi dx.$ |
| 28. a) $\int x^{n+1} dx,$ | b) $\int x^{n-1} dx,$ | c) $\int \frac{x^n}{n} dx.$ |
| 29. a) $\int \frac{dx}{x^2},$ | b) $\int x^{-4} dx,$ | c) $\int \frac{dx}{5x^3}.$ |
| 30. a) $\int \sqrt{x} dx,$ | b) $\int \sqrt[5]{x} dx,$ | c) $\int \sqrt[7]{x^3} dx.$ |
| 31. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}},$ | b) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}}$ | c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2}}.$ |
| 32. a) $\int x^{-n} dx,$ | b) $\int \frac{x^m}{x^n} dx,$ | c) $\int \frac{dx}{x^{n+1}}.$ |
| 33. a) $\int \sqrt[m]{x^n} dx,$ | b) $\int \frac{dx}{\sqrt[m]{x^n}},$ | c) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$ |

34. Beweise, daß

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

ist, wo a eine Konstante ist.

In den folgenden Integralen, die auszuwerten sind, bedeuten x und t Variable, a , b , c und α Konstanten:

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 35. a) $\int ax dx$ | b) $\int \frac{ax^2}{b} dx,$ | c) $\int abx^5 dx.$ |
| 36. a) $\int \sqrt[3]{3} dx,$ | b) $\int \sqrt{a} dx,$ | c) $\int \frac{dx}{\pi}.$ |

37. a) $\int \frac{dx}{2x^2}$, b) $\int \sqrt{\frac{x}{a}} dx$, c) $\int \sqrt[n]{\frac{x}{a}} dx$.
38. a) $\int \sqrt{ax} dx$, b) $\int \sqrt[n]{ax} dx$, c) $\int \frac{1}{\sqrt{ax}} dx$.
39. a) $\int at^2 dt$, b) $\int \frac{a}{t^2} dt$, c) $\int ct dt$.
40. a) $\int ct \sin \alpha dt$, b) $\int ct \cos \alpha dt$, c) $\int \sin \alpha dt$.

Integrale von Summen

41. Beweise, daß

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

ist, wo $f(x)$ und $g(x)$ integrierbare Funktionen sind.

Berechne folgende Integrale (a und b Konstanten!):

42. a) $\int (x^2 + 1) dx$, b) $\int (x^2 + ax + b) dx$.
43. a) $\int (x^3 - 1) dx$, b) $\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$.
44. a) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, b) $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$.
45. a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx$, b) $\int (a\sqrt[n]{x^m} + b\sqrt[m]{x^n}) dx$.
46. a) $\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx$,
 b) $\int \left(a_1 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right) dx$.
47. $\int (x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1) dx$.
48. $\int \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}\right) dx$.
49. a) $\int \frac{x+1}{x^3} dx$, b) $\int \frac{x^2+1}{x^4} dx$.
50. a) $\int \frac{x^2+ax+b}{x^5} dx$, b) $\int \frac{x^7+3x^2+7}{x^2} dx$.
51. a) $\int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x}} dx$.
52. a) $\int (x^2+x+1)(x+1) dx$, b) $\int (x^2-1)(x^2+1) dx$.
53. a) $\int (x^2+ax+b)^2 dx$, b) $\int (x^3+x)^2 dx$.

Weitere Grundformeln

54. Beweise die Grundformeln:

$$\text{a) } \int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad \text{b) } \int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

Berechne die folgenden Integrale (x und t sind Variable, a, b, T Konstanten):

55. a) $\int -\cos x \, dx,$

b) $\int \frac{\sin x}{2} \, dx.$

56. a) $\int (1 - \sin x) \, dx,$

b) $\int (\sin x + \cos x) \, dx.$

57. a) $\int (a \sin x - b \cos x) \, dx,$

b) $\int (x - \sin x) \, dx.$

58. a) $\int \left(\sin x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx,$

b) $\int (x^2 - 2 \sin x) \, dx.$

59. a) $\int (5x + 5 \cos x) \, dx,$

b) $\int \sin ax \, dx.$

60. a) $\int \cos ax \, dx,$

b) $\int a \cos bx \, dx.$

61. a) $\int a \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt,$

b) $\int \sin \frac{2\pi}{T} t + \cos \frac{2\pi}{T} t \, dt.$

62. a) $\int \sin a \sin x \, dx,$

b) $\int (\sin(x+a)) \, dx.$

63. Beweise die Grundformeln:

a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$

Berechne die folgenden Integrale:

64. a) $\int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx,$

b) $\int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} \, dx.$

65. a) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx,$

b) $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx.$

66. a) $\int \left(x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \, dx,$

b) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx.$

67. a) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx,$

b) $\int \left(\sin x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx.$

68. Beweise die Grundformeln:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + c_1 = -\operatorname{arc} \cos x + c_2,$

b) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c_1 = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + c_2.$

69. Erkläre a) durch Differentiation, b) durch Erläuterung an der graphischen Darstellung der Kreisfunktion, weshalb $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ scheinbar zweiwertig ist.

c) Tue das gleiche für $\int \frac{dx}{1+x^2}.$

70. Gib den Bereich an, auf den man die Variable bei dem Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ beschränken wird.

Berechne die folgenden Integrale:

71. a) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{2+2x} \right) dx$.

72. a) $\int \left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{b}{1+x^2} \right) dx$, b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$.

73. Beweise die Grundformeln:

a) $\int e^x dx = e^x + c$, b) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,

c) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$, d) $\int \frac{dx}{x \ln a} = \log x + c$.

Berechne die folgenden Integrale:

74. a) $\int (e^x - \sin x) dx$, b) $\int (e^x + \cos x) dx$.

75. a) $\int \left(\frac{1}{x} + x \right) dx$, b) $\int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$.

76. a) $\int (a^x + b^x) dx$, b) $\int (a^x + x^a) dx$.

77. a) $\int \lg 10 dx$, b) $\int \lg e dx$.

78. a) $\int \frac{\lg e}{x} dx$, b) $\int \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx$.

79. a) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$, b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} \right) dx$.

80. a) $\int \frac{1}{x(1+x)} dx$, b) $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

§ 37. Flächeninhalt und bestimmtes Integral

Mechanische Quadraturen

1. Zeichne auf Millimeterpapier einen Kreisquadranten mit dem Radius $r = 10$ cm und bestimme a) die Zahl der Quadratmillimeter, die ganz im Kreise liegen¹⁾, b) die Zahl der Quadratmillimeter, die im Kreise liegen oder aber von seinem Umfange durchsetzt werden. c) Vergleiche das arithmetische Mittel der nach a und b gefundenen Werte mit dem nach der üblichen Kreisberechnung erhaltenen Wert.

¹⁾ Es ist zu empfehlen, erst die ganzen Quadratzentimeter auszuzählen!

2. Zeichne auf starkes, möglichst gleichmäßiges Papier den zu dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ gehörigen Bogen der Sinuskurve (Maßstab $1 \equiv 10$ cm) und bestimme die Größe der von der Sinuskurve und der x -Achse begrenzten Fläche in der Weise, daß du das Gewicht des Stückes mit dem eines 1 qdm großen Stückes des betreffenden Papiers vergleichst. (Briefwaage!)

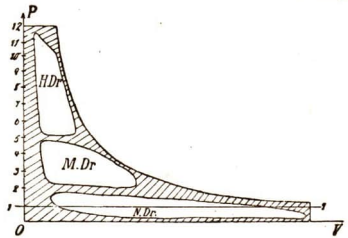


Fig. 19

3. Fig. 19 gibt das Indikatordiagramm einer Dampfmaschine wieder, und zwar die „theoretische“ und die „indizierte“ Arbeit in einem Bilde. a) Bestimme die geleistete Arbeit durch geeignete Ausmessung des Flächeninhaltes. b) Bestimme den (in der Figur schraffierten) Unterschied zwischen „theoretischer“ und „indizierter“ Arbeit¹⁾.

4. Fig. 20 gibt die hypsographische Kurve der Erdoberfläche wieder (nach Davis). Erkläre die Figur und stelle durch mechanische Quadratur das Verhältnis des Landvolumens über dem Meeresspiegel und des Wasservolumens fest.

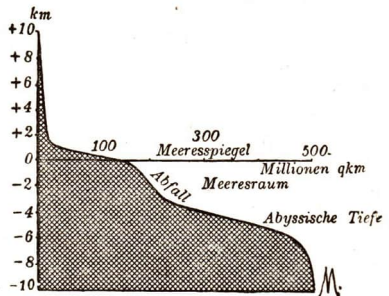


Fig. 20

5. Die folgende Tabelle gibt den Stromverbrauch in einem Elektrizitätswerk für die einzelnen Stunden des Tages an:

1 Uhr	100 Amp.	7 Uhr	400 Amp.	13 Uhr	650 Amp.	19 Uhr	2250 Amp.
2 „	100 „	8 „	800 „	14 „	800 „	20 „	2050 „
3 „	50 „	9 „	700 „	15 „	800 „	21 „	400 „
4 „	50 „	10 „	750 „	16 „	1200 „	22 „	300 „
5 „	100 „	11 „	750 „	17 „	2000 „	23 „	300 „
6 „	250 „	12 „	650 „	18 „	2450 „	24 „	150 „

¹⁾ Fig. 21 zeigt (nach Neuendorff) ein auf photographischem Wege gewonnenes Indikatordiagramm. Stelle dir eine Kopie her und beurteile die Genauigkeit (in Prozenten), mit der sich die Arbeit feststellen läßt.



Fig. 21

- a) Gib eine graphische Darstellung des Verlaufes in geeignetem Maßstabe.
- b) Bestimme durch mechanische Quadratur die Anzahl der Amperestunden.
- c) Beurteile die Genauigkeit der Methode!

„Elementare“ Integrationsmethoden

6. Eine Sinuskurve $y = \sin x$ ist um die Strecke h in der Richtung der positiven y -Achse nach oben verschoben. Wie groß ist der Flächeninhalt des von der ursprünglichen und der verschobenen Kurve sowie von den Ordinaten $x = 0$ und $x = a$ begrenzten Stückes?

Anleitung: Zerlege das Stück durch Parallelen zur y -Achse in Parallelogramme mit der Grundseite h und der Höhe Δx und untersuche $\sum h \Delta x$ für den Fall, daß die Höhe Δx immer kleiner und kleiner wird.

7. Verschiebe eine Parabel $y = ax^2$ um die Strecke b nach unten in Richtung der y -Achse. Wie groß ist der Flächeninhalt des von den beiden Parabeln, der Ordinate $+m$ und der Ordinate $-m$ begrenzten Stückes?
8. Zeige, daß der Mantel eines schief abgeschnittenen geraden Kreiszyklinders $2\pi r a$ ist, wo r der Radius des Grundkreises, a die Länge der Achse des Zylinderstumpfes ist.

Anleitung: Wickle den Mantel in die Zeichenebene ab und bestimme seine Fläche!

9. Eine Ellipse sei in der Weise aus einem Kreise hergestellt, daß die Ordinaten der einzelnen Kreispunkte a) halbiert werden, b) auf $\frac{a}{b}$ verkleinert, c) auf $\frac{m}{n}$ vergrößert werden. Zerlege die Ellipsen- und die Kreisfläche in Streifen, leite eine Beziehung zwischen den Ausdrücken

$$\sum y_k \Delta x \quad \text{und} \quad \sum y_e \Delta x$$

her, wo y_k und y_e einander entsprechende Ordinaten von Kreis und Ellipse sind, und berechne danach

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y_e \Delta x.$$

10. (*Cavalierisches Prinzip*.) Erläutere den Prozeß, den man bei der Vergleichung a) eines schiefen und eines geraden Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe, b) eines schiefen und eines geraden Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe, c) eines Kegels und einer Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe vornimmt.
11. Eine durch den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems gehende Gerade habe die Gleichung $y = \frac{x}{2}$. Berechne den Flächeninhalt des von der Geraden, der x -Achse und der Geraden $x = 10$ begrenzten Stückes a) (genau) nach der bekannten Dreiecksformel, b) (angenähert) durch den Ausdruck

$\sum y \Delta x$, wenn $\Delta x = 1$ cm angenommen wird, c) wenn $\Delta x = 1$ mm angenommen wird, d) wenn $\Delta x = 0,1$ mm angenommen wird, e) wenn zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ übergegangen wird.

12. Führe die Überlegungen der Aufgabe 11 für den Fall der durch $x = a$ begrenzten Geraden $y = mx$ durch, wenn erst $\Delta x = \frac{a}{n}$ genommen und dann zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$ übergegangen wird.
13. Berechne das Flächenstück, das von der Parabel $y = x^2$, der x -Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, indem du in dem Ausdruck $\sum y \Delta x$ a) zunächst die Streifenbreite $\Delta x = 0,1$, b) dann $\Delta x = 0,01$ annimmst und schließlich c) zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ übergehst. Dabei ist die Formel (vgl. § 2, Aufgabe 17)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3!} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

anzuwenden.

14. Führe die Überlegungen der Aufgabe 13 für den Fall der durch $x = a$ begrenzten Parabel $y = bx^2$ durch, wenn $\Delta x = \frac{a}{n}$ genommen wird und dann zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$ übergegangen wird.

Flächeninhalt und Integral

15. Es sei F die Fläche, die begrenzt wird von einer Linie $f(x)$, der x -Achse und 2 Ordinaten, von denen die eine, etwa die linke, bei $x = a$ festliege, während die andere Ordinate x beweglich ist. Dann ist F eine Funktion von x . Gib diese Funktion an, wenn
- a) die Linie eine Gerade parallel zur x -Achse, also $y = n$, und die Konstante $a = 0$, b) $a = +3$, c) $a = -7$, d) $a = p$ ist,
- e) die Linie eine Gerade $y = mx$ und die Konstante $a = 0$, f) $a = +3$, g) $a = n$ (positiv) ist,
- h) die Linie eine Gerade $y = mx + n$ (m und n positiv) und $a = 0$, i) $a = +3$, k) $a = +7$ ist.
16. Zeige, daß der Quotient aus ΔF , d. h. der Zunahme der Fläche bei einer Zunahme der Abszisse um Δx , und Δx angenähert $f(x)$ ist.
17. Leite durch Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten die Beziehung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

oder die damit identische Gleichung

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \text{ab.}$$

18. Gib die Linien $y = f(x)$ an, bei denen F als Funktion von x betrachtet,
 a) x , b) $7x$, c) x^2 , d) $3x^2$, e) $2x^3$, f) $5x^{10}$ ist.

19. Zeige, daß das zwischen den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ liegende Flächenstück F einer Kurve $x = f(x)$ ist

$$F = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Bestimmte Integrale

Die folgenden bestimmten Integrale sind numerisch auszuwerten und die Ergebnisse sind als Flächeninhalte in entsprechenden graphischen Darstellungen zu deuten:

20. a) $\int_0^{10} dx,$

b) $\int_{0,5}^{1,5} x dx,$

c) $\int_{-2}^0 \frac{x}{2} dx.$

21. a) $\int_0^2 x^2 dx,$

b) $\int_1^3 x^2 dx,$

c) $\int_{-3}^{-1} x^2 dx.$

22. a) $\int_2^4 5x^2 dx,$

b) $\int_1^{1,5} \frac{x^2}{2} dx,$

c) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{3} dx.$

23. a) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx,$

b) $\int_0^{10} (x+1)(x-1) dx,$

c) $\int_{-1}^{+1} (3x^2 + 10) dx.$

24. a) $\int_0^1 \frac{x^3}{10} dx,$

b) $\int_1^5 \frac{x^4}{100} dx,$

c) $\int_{100}^{101} 5x^3 dx.$

25. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$

b) $\int_0^{\pi} \sin x dx,$

c) $\int_0^{\pi} a \sin x dx.$

26. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) dx,$

b) $\int_0^{2\pi} (\sin x + 1) dx,$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx.$

27. a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x},$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x},$

c) $\int_0^1 e^x dx.$

28. a) $\int_1^2 \frac{dx}{x},$

b) $\int_1^3 \frac{dx}{x},$

c) $\int_0^1 a^x dx.$

29. a) $\int_0^3 \sqrt{x} dx,$

b) $\int_0^3 \sqrt[3]{x} dx,$

c) $\int_0^3 \sqrt{x^2} dx.$

30. a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

31. Erläutere die geometrische Bedeutung der Gleichungen:

$$\text{a) } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \text{b) } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Bei den folgenden bestimmten Integralen achte auf das Vorzeichen der ihnen im graphischen Bilde entsprechenden Flächeninhalte und untersuche, wie gegebenenfalls der absolute Wert des Flächeninhaltes zu bestimmen ist, zumal wenn von ihm ein Teil ein positives, ein anderer ein negatives Vorzeichen hat:

32. a) $\int_0^{-1} x^2 dx,$

b) $\int_{-1}^{-2} x^2 dx,$

c) $\int_{-1}^{-11} x^2 dx.$

33. a) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$

b) $\int_0^{-5} x^4 dx,$

c) $\int_0^{-2} (x+2) dx.$

34. a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx,$

b) $\int_{-4}^0 x^3 dx,$

c) $\int_0^2 (-x)^3 dx.$

35. a) $\int_{\pi}^0 \frac{\sin x}{2} dx,$

b) $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x},$

c) $\int_{-1}^0 x^5 dx.$

36. a) $\int_{-1}^{+1} x^2 dx,$

b) $\int_{-2}^{+2} x dx,$

c) $\int_{-3}^{+3} x^3 dx.$

37. a) $\int_0^{\pi} \cos x dx,$

b) $\int_0^{2\pi} \sin x dx,$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

38. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x},$

b) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2},$

c) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Beispiele

Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

39. a) $\int_0^3 (3x^2 + 4x + 5) dx,$

b) $\int_{-1}^{+2} (7x^2 - 2x + 16) dx.$

40. a) $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx,$

b) $\int_{+1}^{-1} (x^3 + x^2 + x + 1) dx.$

41. a) $\int_0^{10} (x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1) dx,$

b) $\int_0^2 (5x^3 - 1) dx.$

42. a) $\int_0^1 (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx.$

b) $\int_{-1}^{+1} x^{2n} dx.$

43. a) $\int_0^1 (x - 1)^n dx,$

b) $\int_{-1}^{+1} a x^{2n+1} dx.$

44. a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2},$

b) $\int_1^{-3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$

45. a) $\int_2^3 \frac{dx}{x^4},$

b) $\int_3^4 \left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} \right) dx.$

46. a) $\int_1^4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx,$

b) $\int_{-3}^{-1} \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) dx.$

47. a) $\int_1^{10} \left(x^4 + \frac{1}{x^2} \right) dx,$

b) $\int_1^{+5} \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$

48. a) $\int_0^{64} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx,$

b) $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2}) dx.$

49. a) $\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx,$

b) $\int_1^{27} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

50. a) $\int_0^{\pi} (x + \sin x) dx,$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + b \cos x) dx.$

$$51. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin x + \frac{\cos x}{2} \right) dx,$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x) dx.$$

$$52. \text{ a) } \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$\text{b) } \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx.$$

$$53. \text{ a) } \int_0^1 (\sin x + e^x + \cos x) dx,$$

$$\text{b) } \int_0^3 (a^x + x^a) dx.$$

§ 38. Einige weitere Integrationsmethoden¹⁾

Ersatz der Variablen durch eine andere mittels einer linearen Substitution

1. Statt der Variablen x werde die Variable y durch die lineare Substitution

$$y = ax + b$$

eingeführt, wo a und b Konstanten sind. Zeige, daß dann

$$\int f(x) dx = \int f_1(y) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \int f_1(y) dy$$

ist, wo $f_1(y)$ durch die Substitution aus $f(x)$ entsteht.

Führe in die folgenden Integrale eine geeignete neue Variable ein, integriere und führe dann wieder die alte Variable ein:

$$2. \text{ a) } \int (x+1)^n dx,$$

$$\text{b) } \int (x+11)^{n-1} dx,$$

$$\text{c) } \int (ax+b)^5 dx.$$

$$3. \text{ a) } \int \frac{dx}{(x-a)^n},$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{(2-3x)^n},$$

$$\text{c) } \int \left(a + \frac{x}{b} \right)^{n+1} dx.$$

$$4. \text{ a) } \int \frac{dx}{x-1},$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{5-x},$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{ax+b}.$$

$$5. \text{ a) } \int \sin(a+x) dx,$$

$$\text{b) } \int \sin 2x dx,$$

$$\text{c) } \int \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$6. \text{ a) } \int \cos(x-a) dx,$$

$$\text{b) } \int \cos 3x dx,$$

$$\text{c) } \int \cos \frac{x}{4} dx.$$

$$7. \text{ a) }^2) \int \sin^2 x dx,$$

$$\text{b) }^3) \int \cos^2 x dx,$$

$$\text{c) } \int \cos \frac{x+1}{n} dx.$$

$$8. \text{ a) } \int \sin x \cos x dx,$$

$$\text{b) } \int e^{2x} dx,$$

$$\text{c) } \int e^{\frac{x}{n}} dx.$$

$$9. \text{ a) } \int a e^{nx} dx,$$

$$\text{b) } \int a^b x dx,$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

¹⁾ Für eine erste Einführung in die Integralrechnung sind diese Methoden nicht unbedingt notwendig.

²⁾ Beachte die Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$.

³⁾ Beachte die Formel $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$.

Die folgenden bestimmten Integrale sind auszuwerten — achte dabei auf die Änderung der Grenzen bei Einführung der neuen Variablen —:

10. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin ax dx$.
11. a) $\int_0^4 e^{3x} dx$, b) $\int_0^{10} a^{10x} dx$, c) $\int_0^1 (x+1)^3 dx$.
12. a) $\int_2^3 \sqrt{x-1} dx$, b) $\int_2^3 \sqrt[3]{x-1} dx$, c) $\int_1^3 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx$.
13. a) $\int_5^6 \sqrt[6]{3x-1} dx$, b) $\int_0^1 \sqrt{ax+b} dx$, c) $\int_0^1 \sqrt{x-4} dx$.

14. Beweise die Formel

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy,$$

wo $x = \varphi(y)$ die Substitution, $\varphi'(y)$ die Ableitung nach y anzeigt.

Berechne

15. a) $\int \frac{dx}{x^2+9}$, b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
16. a) $\int \frac{x dx}{x^2+9}$, b) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4}}$, c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
17. a) $\int \frac{dx}{x \ln x}$, b) $\int \operatorname{tg} x dx$, c) $\int \cos^n x \sin x dx$.

18. Es sei $g(x)$ eine gerade Funktion, d. h. $g(x) = g(-x)$. Zeige, daß

$$\text{a) } \int_a^b g(x) dx = \int_a^{-b} g(x) dx$$

ist, und ferner, daß wegen a)

$$\text{b) } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

ist. c) Gib eine geometrische Erläuterung dieser Formel an der Hand bestimmter Beispiele.

19. Es sei $g(x)$ eine ungerade Funktion, d. h. $g(-x) = -g(x)$. a) Zeige, daß dann

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

ist. b) Gib eine geometrische Erläuterung der Formel an der Hand bestimmter Beispiele.

Integration rationaler gebrochener Funktionen

Bei den folgenden Integralen ist der Integrand, eine rationale gebrochene Funktion, erst in Partialbrüche der Form $\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$ zu zerlegen¹⁾ und dann ist zu integrieren:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 20. a) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$, | b) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. |
| 21. a) $\int \frac{2dx}{x^2-1}$, | b) $\int \frac{(4+x)dx}{2x-x^2}$. |
| 22. a) $\int \frac{xdx}{(2-x)(3+x)}$, | b) $\int \frac{dx}{3x-2x^2}$. |
| 23. a) $\int \frac{(a-b)dx}{(x-a)(x-b)}$, | b) $\int \frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}$. |
| 24. a) $\int \frac{dx}{1+x-x^2}$, | b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$. |

Partielle Integration

25. Beweise die Formel:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Die folgenden Integrale sind in der Weise zu berechnen, daß der Integrand als ein Produkt $f(x) \cdot g'(x)$ angesehen wird²⁾, wobei dann die Faktorenzersetzung so einzurichten ist, daß der Wert des Integrals von $f'(x)g(x)$ angebar ist.

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 26. a) $\int x \sin x dx$, | b) $\int x \cos x dx$, | c) $\int x e^x dx$. |
| 27. a) $\int \arcsin x dx$, | b) $\int \arctg x dx$, | c) $\int \ln x dx$. |
| 28. a) $\int x \cdot e^{n x} dx$, | b) $\int x^2 \ln x dx$, | c) $\int x^2 e^x dx$. |

In den folgenden Fällen kommt man nicht auf ein sofort integrierbares Integral, sondern muß weitergehende Überlegungen anstellen:

- | | |
|---|-------------------------|
| 29. a) ³⁾ $\int \sin^2 x dx$, | b) $\int \cos^2 x dx$. |
|---|-------------------------|

Beachte, daß das Integral a auf das Integral b führt, b wieder auf a, und benutze diese Beziehung bei der Lösung.

¹⁾ Vgl. 7—9. Schuljahr, § 38, Aufgaben 23 bis 32.

²⁾ Beachte, daß auch 1 ein Faktor ist!

³⁾ Die Integrale sind schon früher einmal (Aufgabe 7) auf anderem Wege ausgewertet worden.

$$30. \text{ a) } \int \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad \text{ b) } \int \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Beachte bei diesen Integralen, die bei der Inhaltsberechnung des Kreises und der Ellipse auftreten, daß eine Substitution $x = r \cdot \cos \varphi$, wo φ die neue Variable ist, auf ein bereits ausgewertetes Integral führt.

$$31. \text{ a) } \int e^x \cos x dx, \quad \text{ b) } \int e^x \sin x dx.$$

Beachte, daß das Integral a bei geeigneter partieller Integration auf das Integral b führt, b wieder auf a. Benutze diese Beziehung bei der Lösung.

$$32. \text{ a) } \int e^{ax} \sin b x dx, \quad \text{ b) } \int e^{ax} \cos b x dx.$$

Hier gilt dasselbe wie bei der vorangehenden Aufgabe.

Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

$$33. \text{ 1) a) } \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad \text{ b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$$

$$34. \text{ 1) a) } \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad \text{ b) } \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$35. \text{ a) } \int_0^1 e^x \cos x dx, \quad \text{ b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$$

$$36. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^3 x dx, \quad \text{ b) } \int_0^{\pi} e^{3x} \sin \frac{x}{2} dx.$$

§ 39. Anwendungen der Integralrechnung²⁾

Quadratur von Kurven

Parabeln

- Das von der Parabel $y = x^2$, der x -Achse und der Geraden $x = 10$ begrenzte Flächenstück ist durch eine Senkrechte zur x -Achse a) zu halbieren, b) im Verhältnis $m : m : n$ zu teilen. Welche Lage hat die Senkrechte?
- In welchem Verhältnis stehen a) bei der Parabel $y = x^2$, b) bei der Parabel $y = x^3$ die Flächen der Streifen zwischen Kurve und x -Achse, die zwischen den Abszissen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4 usw. liegen?

¹⁾ Gib die geometrische Bedeutung an!

²⁾ Bei den mit * bezeichneten Aufgaben wird eine weitergehende Vertrautheit mit den Methoden der Integralrechnung vorausgesetzt.

3. Von der Parabel $y^2 = 2px$ wird a) durch die Gerade $x = \frac{p}{2}$, b) durch die Gerade $x = a$ ein Stück abgeschnitten. Wie groß ist sein Flächeninhalt?
4. Die Parabel $y^2 = 2px$ wird an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Wie groß ist das beiden Parabeln gemeinsame Stück?
5. Die kubische Parabel $y = ax^3$ wird an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Wie groß ist das von beiden Parabeln begrenzte Stück? (Beachte auch den negativen Ast der Kurve!)
6. Die Parabel $y = ax^3$ wird von der Geraden $y = mx$ geschnitten. Wie groß ist der Inhalt der beiden Parabelsegmente?
7. Von der Parabel $y^2 = 2px$ wird durch die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, wo a und b positive Zahlen sind, ein Stück abgeschnitten. Wie groß ist dieses Parabelsegment? *Beispiel:* $a = b = 1$, $p = 2$.
8. Die kubische Parabel
 a) $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, b) $y = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$, c) $y = x^3 - 49x - 120$
 schneidet die x -Achse dreimal. Berechne die Flächeninhalte der beiden endlichen, von der x -Achse und der Kurve begrenzten Stücke.

Sinuskurven

9. Ein von der Sinuskurve $y = \sin x$ und der x -Achse begrenztes, von $x = 0$ bis $x = \pi$ reichendes Flächenstück soll durch eine Senkrechte zur x -Achse a) im Verhältnis $1 : 2$, b) im Verhältnis $m : n$ geteilt werden. Welche Lage hat die Senkrechte?
10. Das von der Kurve $y = a \cos bx$, der y -Achse und der x -Achse von $x = 0$ bis zum 1. Schnitt der Kurve mit der x -Achse begrenzte Flächenstück soll durch eine Parallele zur y -Achse halbiert werden. Welche Lage hat die Senkrechte?
- 11.¹⁾ Gegeben ist das Flächenstück, das von der x -Achse und einem halben Wellenzuge der Kurve $y = \sin ax$ begrenzt ist. Eine Parallele zur x -Achse soll so gelegt werden, daß das von ihr, der x -Achse, der y -Achse und der Parallelen zur y -Achse durch den 1. Schnittpunkt von Kurve und x -Achse begrenzte Rechteck der gegebenen Fläche gleich ist. Welchen Abstand hat die Parallele von der x -Achse?

Kreis, Ellipse, Hyperbel

- 12.* Von dem Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2$$

wird durch die Gerade

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

¹⁾ Eine solche Aufgabe spielt bei der Definition der Begriffe Stromstärke und elektromotorische Kraft bei Wechselströmen eine Rolle.

wo a und b positive Zahlen kleiner als r sind, ein Stück abgeschnitten. Bestimme den Flächeninhalt des Segments.

13.* Von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird durch die Gerade

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1,$$

wo c und d positiv sind und $c < a$, $d < b$, ein Stück abgeschnitten. Bestimme den Flächeninhalt des Segments.

14.* Der Kreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

und die Ellipse

$$\frac{x^2}{3} + 4y^2 = 1$$

begrenzen 4 sichelförmige Stücke. Berechne ihren Flächeninhalt.

15.* Berechne den Inhalt der von den Ellipsen

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

begrenzten Sichel.

16. Die gleichseitige Hyperbel

$$xy = 16$$

wird von der Geraden

$$x + y = 16$$

geschnitten. Wie groß ist der Flächeninhalt des Hyperbelsegments?

Andere Kurven

17. Berechne den Flächeninhalt des von der Kurve

$$y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{x^2}{2b},$$

der x -Achse, der Geraden $x = a$ und der Geraden $x = b$ begrenzten Stückes.

18. Berechne den Flächeninhalt des von der x -Achse, der y -Achse, der Geraden $x = a$ und a) der Kettenlinie

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

b) der Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

begrenzten Stückes.

Kubatur von Rotationskörpern

19. Beweise, daß der Inhalt des zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegenden Stückes des Rotationskörpers, der durch die Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse entsteht,

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{ist.}$$

20. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der Geraden $y = r$ um die x -Achse entsteht und zwischen $x = 0$ und $x = h$ liegt (*Zylinder*).
21. Berechne das Volumen des von der Geraden $y = mx$ bei Rotation um die x -Achse erzeugten Körpers zwischen a) $x = 0$ und $x = h$ (*Kegel*), b) zwischen $x = a$ und $x = b$ (*Kegelstumpf*).
22. Eine Parabel a) $y = ax^2$, b) $y = ax^3$ rotiert um die x -Achse. Berechne das von der Ebene $x = m$ begrenzte Stück des Rotationskörpers.
23. Eine Parabel $y^2 = 2px$ rotiert um die x -Achse. Berechne das von der Ebene $x = h$ begrenzte Stück des entstehenden *Rotationsparaboloides*.
24. Durch Rotation der Kurve $y = \sin x$ um die x -Achse entsteht eine unendliche Reihe von Wulsten. Berechne das Volumen eines dieser Wulste.
25. Die *Halbkugel* entsteht durch Rotation eines Kreisquadranten um den einen Radius. Berechne danach den Rauminhalt der Halbkugel.
26. Ein *Rotationsellipsoid* entsteht dadurch, daß man die etwa oberhalb der x -Achse liegende Hälfte einer Ellipse um die Hauptachse rotieren läßt. a) Wie groß ist der Rauminhalt eines Rotationsellipsoids? b) Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Rotationsellipsoide, die entstehen, wenn eine Ellipse einmal um die große, das andere Mal um die kleine Achse (*Sphäroid*) rotiert?
- 27.* Der durch Rotation der Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

um die x -Achse entstehende Körper, das *Katenoid*, sei durch den *Kehlkreis* (Ebene $x = 0$) und die Ebene $x = h$ geschnitten. Wie groß ist der Rauminhalt des herausgeschnittenen Stückes?

28. Eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiere um die x -Achse. Von dem entstehenden *zweischaligen Rotationshyperboloid* soll ein durch die Ebene $x = m$ abgeschnittenes Stück seinem Rauminhalt nach bestimmt werden.
29. Eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die y -Achse; dann entsteht ein *einschaliges Rotationshyperboloid*. Bestimme den Rauminhalt des von zwei Parallelen zum Kehlkreis begrenzten Körperstückes.

Anwendungen aus der Physik

Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Benutze in den folgenden Aufgaben die Tatsache, daß die Geschwindigkeit eines Körpers das Integral der Beschleunigung, der Weg das Integral der Geschwindigkeit ist, wobei als Variable immer die Zeit zu nehmen ist. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind die gegebenen „Anfangsbedingungen“ heranzuziehen.

30. Ein senkrecht abwärts geworfener Körper erfährt die Beschleunigung g .
- a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit c war? b) Wie groß ist unter der gleichen Voraussetzung der von ihm zurückgelegte Weg, wenn die Zeit von dem Beginn des Falles an rechnet?
31. Die Beschleunigung eines um eine Ruhelage schwingenden Körpers sei

$$b = -a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

wo a und T Konstanten (charakteristische Beschleunigung und Schwingungszeit) bedeuten. Berechne die Geschwindigkeit des Körpers und die jeweilige Entfernung von seiner Ruhelage.

32. Die Beschleunigung, die ein auf einer schiefen Ebene mit dem Steigungswinkel φ befindlicher Körper infolge der Erdanziehung erfährt, ist

$$b = g \sin \varphi.$$

Berechne Geschwindigkeit und Weg, wenn angenommen wird, daß die Bewegung im Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit c beginnt.

Arbeit

33. Die Arbeit, die zur Überwindung eines in dyn gemessenen Widerstandes k längs eines Weges von $s = a$ bis $s = b$ erforderlich ist, ist

$$A = \int_a^b k ds.$$

Berechne die Arbeit, die nötig ist, um einen Körper gegen einen konstanten Widerstand $k = c$ längs der Strecke l zu bewegen.

34. Bei der Arbeit gegen elastische Kräfte läßt sich $k = \kappa \cdot s$ ansetzen, wo κ eine Konstante ist. Wie groß ist in diesem Falle die bei einer Bewegung gegen elastische Kräfte geleistete Arbeit?
35. Die Arbeit, die geleistet wird, wenn ein Gas von dem Volumen v_1 und dem Druck p_1 bei gleichbleibender Temperatur auf das Volumen v_2 gebracht wird, ist dem Integral

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v}$$

proportional. Berechne das Integral.

36. Wie groß ist die Arbeit, die gegen die Gravitation $k = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ geleistet wird (m_1 und m_2 sind die Massen der beiden Körper, r ist ihr Abstand, f eine Konstante, die Gravitationskonstante), wenn der Abstand des angezogenen Körpers von dem anziehenden Körper von r_1 auf r_2 vergrößert wird?
37. Wie groß ist die Arbeit, die gegen die Gravitation geleistet wird, wenn der angezogene Körper aus der Entfernung r in unendlich weite Entfernung gebracht wird? (*Potential.*)
38. Die Höhe h einer überall gleich warmen Luftschicht, in der am Grunde der Barometerstand b_0 , in der Höhe h der Barometerstand b_h herrscht, ist

$$h = \kappa \int_{b_h}^{b_0} \frac{db}{b},$$

wo κ eine Konstante ist. Berechne das Integral und vergleiche das Ergebnis mit der „elementaren“ Formel $b_h = b_0 \cdot k^h$, wo k eine Konstante ist. Welche Beziehung besteht zwischen k und κ ?

Schwerpunkt

39. Bestimme den Schwerpunkt **a)** des Halbkreises, **b)** eines Kreisabschnittes, **c)** eines Kreisabschnittes.
40. Wo liegt der Schwerpunkt des den Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ gemeinsamen Flächenstückes (vgl. 4)?
41. Ein Rotationshyperboloid ist durch eine Ebene abgeschnitten, und eine Halbkugel ist ihr aufgesetzt. Berechne **a)** das Volumen und **b)** den Schwerpunkt des Körpers.
42. Die Kurve $x^2 \cdot y = a^3$ rotiert um die x -Achse. Berechne **a)** das Volumen, **b)** den Schwerpunkt des von $x = a$ und der beliebigen Ebene $x = x$ begrenzten Rotationskörpers. **c)** bis **d)** Die Kurve rotiere um die y -Achse. Beantworte die gleichen Fragen.
43. Die Kurve $ay^3 = x^4$ rotiert um die y -Achse. Berechne **a)** das Volumen, **b)** den Schwerpunkt des Rotationskörpers.
44. Die Kurve $a^4y^2 - a^2x^4 + x^2 = 0$ rotiert um die x -Achse. Berechne **a)** das Volumen, **b)** den Schwerpunkt des Rotationskörpers. (Diskutiere die gegebene Kurve!)
45. Die Kurve $a^2y^2 = bx^3 - x^4$ rotiert um die x -Achse. Berechne **a)** das Volumen, **b)** den Schwerpunkt des Rotationskörpers.
46. Aus einer Halbkugel ist ein gerader Kreiszyylinder ausgebohrt, dessen Achse senkrecht auf der Grundfläche steht und durch den Kugelmittel-

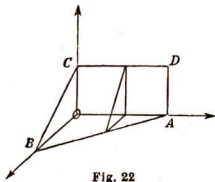


Fig. 22

punkt geht. **a)** Bestimme den Schwerpunkt des Restkörpers. **b)** Wann liegt der Schwerpunkt möglichst hoch?

47. Ein Körper $OABCD$ hat die in Fig. 22 angedeutete Gestalt. Gegeben ist $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; $OADC$ ist ein Rechteck. Berechne die Lage des Schwerpunktes dieses Körpers.

Trägheitsmoment

48. Berechne das Trägheitsmoment einer Rechtecksfläche **a)** in bezug auf eine Seite, **b)** in bezug auf eine Diagonale, **c)** in bezug auf die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Seitenmitten, **d)** in bezug auf eine zur Diagonale in einem ihrer Endpunkte errichtete Senkrechte.
49. Berechne das Trägheitsmoment einer Wetterfahne, wie sie Fig. 23 darstellt, in bezug auf ihre Drehachse.
50. Berechne das Trägheitsmoment eines Dreiecks **a)** in bezug auf eine Dreiecksseite, **b)** in bezug auf die zu einer Dreiecksseite durch die gegenüberliegende Ecke gezogene Parallele.
51. Berechne das Trägheitsmoment einer Kreisfläche **a)** in bezug auf einen Durchmesser, **b)** in bezug auf eine Tangente.
52. Berechne das Trägheitsmoment einer Halbkreisfläche **a)** in bezug auf den die Halbkreisfläche begrenzenden Durchmesser, **b)** in bezug auf die zu diesem Durchmesser parallele Tangente.
53. Berechne das Trägheitsmoment eines Parabelsegmentes **a)** in bezug auf die x -Achse, **b)** in bezug auf die y -Achse.
54. Berechne das Trägheitsmoment eines homogenen, geraden Zylinders (Dichte d , Radius r , Höhe h) **a)** in bezug auf eine Achse, **b)** in bezug auf eine Seitenlinie.

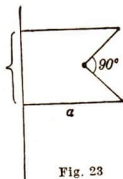


Fig. 23

Vermischte Aufgaben

55. Was für einen Ausdruck erhält man, wenn man **a)** ein unbestimmtes Integral, **b)** ein bestimmtes Integral mit den konstanten Grenzen a und b , **c)** ein bestimmtes Integral mit der konstanten Grenze a und der variablen Grenze x differenziert?
56. Man kann den natürlichen Logarithmus als den Wert des Integrals

$$\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x}$$

definieren. Zeige am Integral, daß dann das Gesetz

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \text{gilt.}$$

57. Entwickle in den folgenden Integralen den Integranden in eine unendliche Reihe, integriere gliedweise¹⁾ und gib so eine neue Ableitung der Reihen für die betreffenden Funktionen:

$$\text{a) } \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{b) } \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Erörtere auch die Konvergenz.

58. Die Funktionen **a)** $\operatorname{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$ (Integralsinus), **b)** $\int e^{-x^2} dx$ (von einem konstanten Faktor abgesehen das „Gaußsche Fehlerintegral“), **c)** $\int \frac{e^x - 1}{x} dx$ (mit dem „Integrallogarithmus“ zusammenhängend), **d)** $\int \frac{1 - \cos x}{x} dx$ (mit dem „Integralkosinus“ zusammenhängend) lassen sich nicht in elementarer Weise integrieren. Wohl aber kann man leicht Potenzreihen für sie angeben. Wie heißen diese?

ZEHNTES KAPITEL

Abbildungen durch Funktionen komplexer Veränderlicher

§ 40. Die lineare ganze Funktion

Kongruente Abbildung: Verschiebung

1. Durch die Funktion $Z = z + a$, wo a eine reelle Zahl ist, wird die komplexe z -Ebene auf die komplexe Z -Ebene abgebildet. **a)** Es sei $a = 3$; bilde die Punkte $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$, 0 , $x_0 + iy_0$ der z -Ebene auf die Z -Ebene ab. **b)** Zeige, daß die Abbildung eineindeutig ist. **c)** Lege die Z -Ebene auf die z -Ebene, und zwar reelle auf reelle, imaginäre auf imaginäre Achse. Wie gehen die Punkte der Z -Ebene aus derjenigen der z -Ebene hervor?

Bemerkung. Es ist zweckmäßig, die den beiden aufeinandergelegten Ebenen angehörenden Punkte durch verschiedenartige Bezeichnung (etwa durch schwarze und rote Tinte) und einander entsprechende Punkte durch die gleiche Buchstabenbezeichnung zu kennzeichnen.

2. Untersuche die Abbildung der in 1a) genannten Punkte der z -Ebene auf die Z -Ebene durch die Funktion

$$\text{a) } Z = z + 2i,$$

$$\text{b) } Z = z - 2i,$$

$$\text{c) } Z = z + ai.$$

¹⁾ Freilich fehlt der Nachweis, daß das gestattet ist. Man darf in der Tat Potenzreihen unter bestimmter Voraussetzungen gliedweise integrieren.

3. Untersuche die Abbildung der z -Ebene auf die Z -Ebene im Falle folgender Funktionen:

$$\text{a) } Z = z + 1 + 2i,$$

$$\text{b) } Z = z + 2 - i,$$

$$\text{c) } Z = z - 2 - 3i,$$

$$\text{d) } Z = z + a + bi.$$

4. a) Zeige, daß durch die Funktion $Z = z + c$, wo $c = a + bi$ eine komplexe Zahl ist, eine *Verschiebung* der z -Ebene in die Z -Ebene gegeben ist. Wodurch ist b) die Größe, c) die Richtung der Verschiebung gegeben?
5. In der z -Ebene sind 2 Punkte $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ gegeben. Untersuche, was für die durch die beiden Punkte gegebene Strecke bei der Abbildung durch eine Funktion $Z = z + c$ invariant (unverändert) bleibt.
6. Stelle eine der Aufgabe 5 entsprechende Untersuchung für das aus 3 Punkten $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, $x_3 + iy_3$ gebildete Dreieck an.

Kongruente Abbildung: Drehung

7. Durch die Funktion $Z = iz$ wird die z -Ebene auf die komplexe Z -Ebene abgebildet. a) Führe das für die Punkte $1 + 2i$, $1 - 2i$, $-1 + 2i$, $-1 - 2i$, 0 , $x_0 + iy_0$ aus. b) Wie ist die Abbildung geometrisch zu deuten? c) Beantworte die gleichen Fragen für die Funktion $Z = -iz$.
8. a) Untersuche die Abbildung durch die Funktion $Z = \varepsilon z$, wo ε die 3. Einheitswurzel $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ist. b) Wie gestaltet sich die Sachlage, wenn für ε die 3. Einheitswurzel $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ gewählt wird?
9. Es sei ε_m eine m te Einheitswurzel. Wie sieht dann die durch $Z = \varepsilon_m z$ gegebene Abbildung aus?
10. Untersuche, in welchen Fällen eine Funktion $Z = cz$ eine *Drehung* der z -Ebene in die Z -Ebene bewirkt und wodurch der Drehungswinkel bestimmt ist.
11. Es sei $c = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Zeige, daß dann die durch $Z = cz$ bewirkte Drehung durch den Winkel φ gekennzeichnet wird.
12. Zeige, daß bei der Abbildung durch eine Funktion $Z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$ a) Strecken in ihrer Länge, b) Dreiecke in Größe und Gestalt, c) Winkel in ihrer Größe invariant bleiben.

Ähnlichkeitstransformation. Streckung

13. Die Funktion $Z = az$ ist vorgelegt, wo a eine von 1 und 0 verschiedene reelle Zahl ist. a) Untersuche unter der Annahme $a = 2$ die durch die Funktion bewirkte Abbildung an den Punkten $1 + i$, $1 + 2i$, $1 - 2i$, $-1 + 2i$, 0 , x_0 , iy_0 , $x_0 + iy_0$. Stelle die gleiche Untersuchung unter der Annahme b) $a = \frac{1}{2}$, c) $a = -2$ an.

14. Wie ändert die Abbildung durch die Funktion $Z = az$ a) den Abstand eines Punktes $x_0 + iy_0$ vom Koordinatenanfangspunkt, b) den Abstand zweier Punkte $x_1 + iy_1$ und $x_2 + iy_2$?
15. Wie werden durch eine Abbildung durch die Funktion $Z = az$ Winkel verändert?
16. Zeige, daß durch die Funktion $Z = az$ ein Dreieck in ein ihm ähnliches abgebildet wird.

Ähnlichkeitstransformation: Drehstreckung

17. Die Funktion $Z = cz$ ist vorgelegt, wo $c = bi$ ist. Untersuche die Abbildung, indem du zuerst die z -Ebene durch eine Funktion $Z = bz$, dann die neue Ebene durch eine Funktion $Z = iz$ abbildest.
18. Stelle die gleiche Untersuchung wie in 17 für $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ an, indem du die eine Abbildung in die 2 Abbildungen $Z = rz$ und $Z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)Z$ zerlegst.
19. Untersuche die Veränderung a) von Strecken, b) von Dreiecken, c) von Winkeln durch eine Abbildung, die durch eine Funktion $Z = cz$ gegeben ist. d) Erkläre den Namen *Drehstreckung*.

Die lineare ganze Funktion

20. Zeige, daß die durch die lineare ganze Funktion $Z = c_1z + c_2$ bewirkte Abbildung sich immer auf eine Verschiebung und Drehstreckung zurückführen läßt.
21. Welches sind die Bedingungen dafür, daß die Funktion $Z = c_1z + c_2$ a) eine reine Verschiebung, b) eine reine Drehung, c) eine reine Drehstreckung darstellt?
22. Ein Dreieck wird mitsamt a) seinen Höhen, b) seinen Seitenhalbierenden, c) seinen Winkelhalbierenden durch eine lineare ganze Funktion abgebildet. Untersuche, ob die abgebildeten Linien ihren Charakter beibehalten.
23. Ein Kreis in der z -Ebene a) mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, b) mit beliebigem Mittelpunkt wird durch eine lineare ganze Funktion auf eine Z -Ebene abgebildet. Wie sieht das Bild aus?
24. In der z -Ebene befindet sich a) ein quadratisches Netz, dessen Geraden den beiden Achsen parallel sind, b) ein Polarnetz, d. h. ein System äquidistanter konzentrischer Kreise um den Nullpunkt, die von Geraden durch den Nullpunkt geschnitten werden. Wie werden diese Liniensysteme durch die verschiedenen Arten einer linearen ganzen Funktion abgebildet?
25. Zeige, daß die Abbildung durch eine lineare ganze Funktion eineindeutig ist.

26. Durch welche Bewegungen wird im Falle a) der Funktion $Z = z + c$, b) der Funktion $Z = cz$, c) der Funktion $Z = c_1 z + c_2$ die Z -Ebene in die z -Ebene übergeführt?
27. Zeige, daß die Abbildungen durch lineare ganze Funktionen eine „Gruppe“ bilden, d. h. daß zwei nacheinander ausgeführte Abbildungen sich durch eine einzige Abbildung ersetzen lassen.

§ 41. Die lineare gebrochene Funktion

Spiegelung an der reellen Achse

- Der Punkt a) $a + bi$, b) $r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ist an der reellen Achse zu spiegeln. Wie heißt das Spiegelbild?
- Spiegele an der reellen Achse a) eine Gerade, b) einen Kreis, c) einen Winkel. Was bleibt erhalten, was ändert sich? (Achte auf den Drehsinn!)
- Der Einheitskreis wird an der reellen Achse gespiegelt. Welche Punkte werden von der Spiegelung nicht betroffen?
- Untersuche, ob die durch die Spiegelung an der reellen Achse gegebene Abbildung a) eineindeutig ist, b) ob sie Gruppencharakter hat.

Abbildung durch reziproke Radien

- (Hilfssatz.) Von einem Punkte P_1 außerhalb eines Kreises mit dem Radius ρ , der den Mittelpunktsabstand r_1 hat, sind die Tangenten an den Kreis gelegt. Die Berührungsehne schneidet die durch den Punkt gehende Zentrale in einem Punkte P_2 , der den Mittelpunktsabstand r_2 hat. Dann ist $r_1 \cdot r_2 = \rho^2$. Beweise das. — Die Abbildung des Punktes P_1 durch P_2 heißt Spiegelung am Kreis mit dem Radius ρ .
- Die Funktion $Z = \frac{1}{z}$ ist gegeben. Bringe Z und z in die trigonometrische Form $R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$ und $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und beweise (Moivrescher Satz), daß $R = \frac{1}{r}$ und $\Phi = -\varphi$ ist.
- Zerlege die durch die Funktion $Z = \frac{1}{z}$ gegebene Abbildung durch reziproke Radien in eine Spiegelung am Einheitskreis und eine Spiegelung an der reellen Achse.
- Wie werden durch reziproke Radien abgebildet: a) Punkte außerhalb des Einheitskreises, b) Punkte innerhalb des Einheitskreises, c) Punkte der oberen, d) Punkte der unteren Halbebene, e) Punkte des Einheitskreises?
- Welche Punkte bleiben bei der Abbildung durch reziproke Radien in ihrer Lage ungeändert?

10. Welche Punkte wird man bei der Abbildung durch reziproke Radien dem Mittelpunkt des Einheitskreises zuordnen? Wie steht es mit der Eineindeutigkeit der Abbildung?
11. Es ist a) eine durch den Nullpunkt gehende Gerade, b) eine beliebige Gerade durch reziproke Radien abzubilden. Wie sieht das Bild aus?
12. Ein Quadrat liegt a) im Innern, b) im Äußeren des Einheitskreises so, daß sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfällt. Zeichne die durch Abbildung durch reziproke Radien sich ergebende Figur.
13. a) Es ist ein Kreis durch reziproke Radien abzubilden. b) Wann wird das Bild eines Kreises eine Gerade?

Die lineare gebrochene Funktion

14. Untersuche die Abbildung, die durch die Funktion $Z = \frac{a}{z}$, wo a eine reelle Zahl ist, bewirkt wird. — Was tritt an die Stelle des Einheitskreises?
Beispiel: $a = 9$.
15. Untersuche die Abbildung, die durch die Funktion $Z = \frac{c}{z}$, wo c eine komplexe Zahl ist, bewirkt wird. Beispiele: a) $c = i$, b) $c = -i$,
c) $c = \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, d) $c = 3 + 4i$, e) $c = 1 - i$, f) $c = a + bi$.
16. Untersuche die Abbildung, die durch die Funktion $Z = \frac{1}{z} + c$ bewirkt wird.
Beispiele: a) $c = 1$, b) $c = i$, c) $c = 1 - 2i$, d) $c = a + bi$.
17. Beachte, daß aus $Z = \frac{1}{z}$ folgt $z = \frac{1}{Z}$, und benutze das, um die Abbildung zu untersuchen, die durch $Z = \frac{1}{z+c}$ bewirkt wird. Beispiele: a) $c = 2$,
b) $c = -2i$, c) $c = i$, d) $-2 + 3i$, e) $a + bi$.
18. Wie sieht die durch die Funktion a) $Z = \frac{c_1}{z+c_2} + c_3$, b) $Z = \frac{c_1 z + c_2}{z+c_3}$,
c) $Z = \frac{c_1 z + c_2}{c_3 z + c_4}$ bewirkte Abbildung aus?

Überlegungen

19. Untersuche die Frage der Eineindeutigkeit der Abbildung durch die allgemeine lineare gebrochene Funktion und achte dabei besonders auf Nullpunkt und unendlich ferne Elemente.
20. Beweise, daß die Abbildung durch reziproke Radien winkeltreu ist.
21. Untersuche den Zusammenhang der Abbildung durch reziproke Radien mit der harmonischen Teilung.

Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis

§ 1. Arithmetische Reihen

Allgemeines über mathematische Reihen

1. Eine *Reihe* ist eine *gesetzmäßig gebildete Folge* von Zahlen. Die Zahlen heißen die *Glieder* der Reihe.

Eine Reihe heißt *steigend*, wenn jedes Glied größer ist als das vorhergehende, sie heißt *fallend*, wenn jedes Glied kleiner ist als das vorhergehende.

Begriff der arithmetischen Reihe 1. Ordnung

2. *Erklärung*: Eine *arithmetische Reihe (1. Ordnung)* ist eine Reihe, bei der die *Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist*.

So ist z. B. die Reihe

$$4, 7, 10, 13 \dots$$

eine arithmetische Reihe mit der Differenz 3.

Natürlich muß man, um Irrtümer oder Zweideutigkeiten zu vermeiden, ein für allemal festsetzen, *in welchem Sinne* man die Differenz bilden will: Minuendus ist irgendein Glied der Reihe, *Subtrahendus ist das vorhergehende Glied*.

Eine arithmetische Reihe steigt oder fällt, je nachdem die Differenz der Reihe positiv oder negativ ist.

3. Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe heiße a , die Differenz d , die Anzahl der Glieder n ; dann lautet die Reihe in allgemeiner Form

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 2)d, a + (n - 1)d.$$

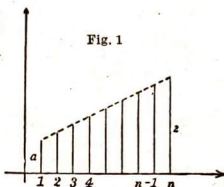
Bezeichnet man das letzte Glied einer Reihe zur Abkürzung mit z , so ist also

$$(1) \quad z = a + (n - 1)d.$$

4. Man kann eine arithmetische Reihe auch erklären als eine Reihe, bei der jedes Glied um einen konstanten Betrag (d) größer ist als das vorhergehende.

Eine früher vielfach übliche Erklärung, die sich inhaltlich mit der vorigen und der unter Nr. 2 angegebenen deckt, ist diese: Eine arithmetische Reihe ist eine Reihe, bei der jedes Glied das arithmetische Mittel der beiden Nachbarglieder ist. (Daher stammt der Name arithmetische Reihe.)

5. Fig. 1 veranschaulicht die Glieder einer arithmetischen Reihe in der Weise, daß im Punkte 1 der x -Achse die Maßzahl des 1. Gliedes der Reihe, im Punkte 2 die Maßzahl des 2. Gliedes usw. als Ordinate aufgetragen ist. Die Endpunkte der einzelnen Strecken liegen auf einer Geraden, die uns von der



graphischen Darstellung einer *ganzen Funktion 1. Grades* her bekannt ist (vgl. 7.-9. Schuljahr, § 6, Nr. 7).

Die Differenz d erscheint hier als Anstieg der Geraden; genauer gesagt, ist der Anstieg der Geraden gleich einem Bruche, dessen Zähler die Differenz der Reihe und dessen Nenner die gewählte Einheit ist.

Summe der arithmetischen Reihe 1. Ordnung

6. Einen geschlossenen Ausdruck für die Summe einer arithmetischen Reihe erhält man am einfachsten, indem man die Reihe einmal in ihrer natürlichen Gliederfolge, ein zweites Mal in umgekehrter Folge schreibt; bezeichnet man die Summe der Reihe mit s , und benutzt man bei Umkehrung der Reihe die unter Nr. 3 eingeführte Abkürzung für das Endglied der 1. Reihe, so hat man

$$\begin{aligned} s &= a + (a + d) + \cdots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d], \\ s &= z + (z - d) + \cdots + [z - (n - 2)d] + [z - (n - 1)d]. \end{aligned}$$

Je zwei übereinanderstehende Summanden dieser beiden Reihen ergeben als Summe $(a + z)$; es sind n solcher Teilsummen vorhanden, also ist

$$2s = n(a + z), \quad \text{d. h.}$$

$$(2) \quad s = \frac{n}{2} (a + z).$$

Zu demselben Ergebnis wäre man auch gekommen, wenn man in der ursprünglichen Reihe das 1. und letzte, das 2. und vorletzte, allgemein das k te und $(n - k + 1)$ te Glied addiert hätte; nur hätte man dann den Fall eines geradzahigen n von dem Fall eines ungeradzahigen n getrennt behandeln müssen.

7. Setzt man in die Formel (2) an Stelle von z nach (1) den Wert $a + (n - 1)d$ ein, so erhält man

$$s = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

oder in anderer Form

$$(3) \quad s = an + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d.$$

8. Zu einer sehr anschaulichen geometrischen Herleitung der Summenformel (2) gelangt man, wenn man die unter Nr. 5 gegebene graphische Darstellung ein wenig abändert: Faßt man die Glieder der Reihe als Rechtecke von der Breite 1 auf, so ergibt sich als

Summe s der Reihe eine treppenförmig begrenzte Fläche (in Fig. 2 schraffiert), die man durch umgekehrtes Aufsetzen einer ebensolchen Fläche zu einem Rechteck ($= 2s$) von der Höhe $a + z$ und der Breite n ergänzen kann; also ist $2s = n(a + z)$, wie in Nr. 6.

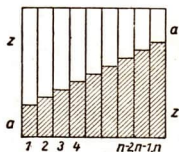


Fig. 2

9. Die Grundformeln (1) und (2) stellen Beziehungen zwischen den 5 Größen a , d , n , s , z her. Da durch 2 voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen nur 2 Unbekannte bestimmbar sind, müssen 3 der 5 Größen a , d , n , s , z bekannt sein, wenn die arithmetische Reihe bestimmt sein soll.

Interpolation und Extrapolation

10. Bei den praktischen Anwendungen tritt häufig die Forderung auf, zwischen 2 Glieder einer arithmetischen Reihe andere Glieder derart einzuschalten, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht (*Interpolation*). Ist d die Differenz einer Reihe und sollen zwischen 2 Glieder dieser Reihe m neue Glieder interpoliert werden, so hat die Differenz der neuen Reihe den Wert $\frac{d}{m+1}$. Der Beweis kann rechnerisch und graphisch geführt werden; wegen des Wertes, den die Steigung der Geraden bei der graphischen Darstellung einnimmt, vergleiche man die Bemerkung unter Nr. 5, Abs. 2.
11. Aus irgendeinem Gliede einer arithmetischen Reihe erhält man das folgende durch Addition, das vorhergehende durch Subtraktion der Differenz. Setzt man fest, daß dieses Bildungsgesetz auch für das Anfangs- und Endglied einer Reihe gelten soll, so hat man damit die Möglichkeit, jede arithmetische Reihe über ihr 1. und letztes Glied hinaus beliebig weit fortzusetzen (*Extrapolation*). Bezeichnet man das allgemeine (k te) Glied einer so erweiterten Reihe mit a_k , so ist

$$a_k = \frac{1}{2} (a_{k+p} + a_{k-p}),$$

wo p eine beliebige positive ganze Zahl ist. — Man vergleiche hiermit die Definition der arithmetischen Reihe in Nr. 4, Abs. 2.

Arithmetische Reihen höherer Ordnung

12. Es sei eine beliebige Reihe

$$a, b, c, d, e, \dots$$

gegeben. Subtrahiert man jedes Glied dieser Reihe von dem darauffolgenden, so entsteht eine neue Reihe

$$b - a, c - b, d - c, e - d, \dots,$$

die man die *1. Differenzenreihe* der ursprünglichen Reihe nennt.

Eine arithmetische Reihe *2. Ordnung* ist eine Reihe, deren *1. Differenzenreihe* eine arithmetische Reihe *1. Ordnung* ist. Zum Beispiel hat die Reihe

$$1, 3, 8, 16, 27, \dots$$

als *1. Differenzenreihe*

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

13. Bildet man von der *1. Differenzenreihe* abermals die *Differenzenreihe*, so entsteht eine neue Reihe, die man als die *2. Differenzenreihe* der ursprünglichen

Reihe bezeichnet. Entsprechend erklärt man die 3., 4., k te Differenzenreihe der gegebenen Reihe.

Eine arithmetische Reihe k ter Ordnung ist eine Reihe, deren $(k-1)$ te Differenzenreihe eine arithmetische Reihe 1. Ordnung ist.

14. Die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen bildet eine arithmetische Reihe 2. Ordnung; das läßt sich allgemein an 3 aufeinanderfolgenden Zahlen $(n-1)^2$, n^2 , $(n+1)^2$ beweisen; die 1. Differenzenreihe $2n-1$, $2n+1$ ist nämlich eine arithmetische Reihe 1. Ordnung.

Ebenso läßt sich zeigen, daß die Reihe der Kubikzahlen eine Reihe 3. Ordnung, allgemein die Reihe der k ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine Reihe k ter Ordnung bildet.

15. Setzt man in die identische Gleichung

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$

für n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, ..., n und addiert die erhaltenen Gleichungen, so folgt nach einfacher Umformung (*Archimedes*)

$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ebenso findet man unter Benutzung der Formel für $(n-1)^4$, daß

$$(2) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

ist (*Nikomachus*, etwa 100 n. d. Ztr.).

§ 2. Geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung

Begriff der geometrischen Reihe

1. *Erklärung: Eine geometrische Reihe ist eine Reihe, bei der der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.*

So ist z. B. die Reihe

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 3.

Auch hier muß man (wie bei der Erklärung der arithmetischen Reihe in § 1, Nr. 2) ein für allemal festsetzen, in welchem Sinne man den Quotienten bilden will: Dividendus ist irgendein Glied in der Reihe, Divisor ist das vorhergehende Glied.

2. Von dem *Steigen* oder *Fallen* einer geometrischen Reihe kann man nur sprechen, wenn alle Glieder das gleiche Vorzeichen haben, also wenn der Quotient *positiv* ist; doch muß man auch hier wieder noch je 2 Fälle unterscheiden:
- a) Eine geometrische Reihe aus lauter positiven Gliedern steigt oder fällt, je nachdem der Quotient größer oder kleiner als 1 ist.

Beispiele: 1, 3, 9, 27, ... steigende Reihe,
1, 0,1 0,01, 0,001, ... fallende Reihe.

b) Eine geometrische Reihe aus lauter negativen Gliedern steigt oder fällt, je nachdem der Quotient kleiner oder größer als 1 ist.

Beispiele: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ steigende Reihe,
 $-2, -6, -18, -54, \dots$ fallende Reihe.

Geometrische Reihen, bei denen der Quotient negativ ist, bei denen also das Vorzeichen von Glied zu Glied wechselt, heißen auch *alternierende Reihen*.

8. Das Anfangsglied einer geometrischen Reihe heiße a , der Quotient q , die Anzahl der Glieder n ; dann lautet die Reihe in allgemeiner Form:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, \dots, a \cdot q^{n-2}, a \cdot q^{n-1}.$$

Bezeichnet man das letzte (n te) Glied der Reihe zur Abkürzung mit z , so ist also

$$(1) \quad z = a \cdot q^{n-1}.$$

4. Man kann eine geometrische Reihe auch erklären als eine Reihe, bei der jedes Glied ein bestimmtes Vielfaches (nämlich das q fache) des vorhergehenden Gliedes ist.

Eine andere Erklärung, die sich aber mit der vorigen und der in Nr. 1 gegebenen deckt, ist folgende: Eine geometrische Reihe ist eine Reihe, bei der jedes Glied das geometrische Mittel der beiden Nachbarglieder ist (Entstehung des Namens geometrische Reihe).

5. Die Glieder einer steigenden geometrischen Reihe mit positivem q lassen sich nach dem Muster von § 1, Nr. 5 graphisch als Strecken darstellen; die Endpunkte der Strecken liegen auf einer Kurve, dem nach oben verzerrten Bilde der *Exponentialfunktion*. Man beachte aber, daß es sich hier einstweilen um getrennte Punkte, nicht um einen zusammenhängenden Kurvenzug handelt. Eine zweite, sehr anschauliche Art graphischer Darstellung der Glieder einer geometrischen Reihe wird in Nr. 11 gegeben.

Summe der geometrischen Reihe

6. Um für die Summe s einer geometrischen Reihe einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten, multipliziert man alle Glieder der Reihe mit q und subtrahiert die gegebene Reihe von der neu gewonnenen. Dadurch erhält man

$$sq - s = aq^n - a,$$

also

$$(2) \quad s = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Von diesen beiden Formen wird man die erste oder zweite bevorzugen, je nachdem q größer oder kleiner als 1 ist.

Führt man in die Gleichungen (2) an Stelle von aq^{n-1} nach (1) den Wert z ein, so erhält man die Summenformeln in der neuen Gestalt

$$(3) \quad s = \frac{qz - a}{q - 1} = \frac{a - qz}{1 - q}.$$

7. Durch die Gleichungen (1) und (2) oder (1) und (3) oder (2) und (3) werden Beziehungen zwischen den Größen a, n, q, s, z hergestellt. Da man durch 2 voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen nur 2 Unbekannte berechnen kann, sind zur vollständigen Bestimmung einer geometrischen Reihe 3 der Größen a, n, q, s, z notwendig und hinreichend.

Interpolation und Extrapolation

8. Sollen zwischen 2 Glieder einer geometrischen Reihe, deren Quotient q ist, m andere Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß wieder eine geometrische Reihe entsteht, so findet man den Quotienten q_1 der neuen Reihe durch folgende Überlegung: Zwei aufeinanderfolgende Glieder der alten Reihe, etwa aq^k und aq^{k+1} , bilden Anfangs- und Endglied der neuen Reihe, deren Gliederzahl $m+2$ beträgt, also ist nach Formel (1)

$$a \cdot q^{k+1} = a \cdot q^k \cdot q_1^{m+2-1}, \quad \text{d. h. } q_1 = \sqrt[m+1]{q}.$$

9. Setzt man fest, daß das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe (Nr. 1 oder 4) auch für das Anfangs- oder Endglied einer Reihe gelten soll, so läßt sich damit jede geometrische Reihe über ihr 1. und letztes Glied hinaus beliebig weit fortsetzen (Extrapolation). Bezeichnet man das allgemeine (k te) Glied einer so erweiterten Reihe mit a_k , so ist

$$a_k = \sqrt[a_{k+p} \cdot a_{k-p}],$$

wobei p eine beliebige, positive ganze Zahl ist.

Die Summe unendlicher geometrischer Reihen

10. *Vorbemerkung.* Eine unendliche Reihe heißt *konvergent*, wenn sich ihre Summe mit unbegrenzt wachsender Gliederzahl einem bestimmten, und zwar *endlichen Grenzwerte* beliebig annähert. Vgl. zum Begriff der Konvergenz später § 12

Die Summenformel (2) in Nr. 6 läßt sich in folgender Weise schreiben:

$$s = \frac{a}{1 - q} - a \frac{q^n}{1 - q}.$$

Hierin hängt nur das 2. Glied, das sogenannte Restglied, von der Gliederzahl n ab.

Wir betrachten zunächst die Fälle, wo q positiv ist.

a) Ist $q > 1$, so wächst q^n und damit das Restglied mit unbegrenzt wachsender Gliederzahl selbst über alle Grenzen, oder kürzer ausgedrückt, die Reihe ist *divergent*.

b) Für $q = 1$ werden alle Glieder der Reihe gleich a , die Summe der Reihe also unendlich groß.

c) Ist dagegen $q < 1$, so nähert sich q^n und damit das Restglied mit wachsender Gliederzahl dem Grenzwerte 0, und die Summe der *konvergenten* Reihe wird

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Es sind jetzt noch die Fälle zu untersuchen, in denen q negativ ist, etwa $q = -p$, wo p eine positive Zahl ist.

a) Ist $p > 1$, so wächst p^n und damit der absolute Wert des Restgliedes mit unbegrenzt wachsender Gliederzahl wieder über alle Grenzen, die Summe der Reihe ändert aber bei jedem Wachstum der Gliederzahl ihr Vorzeichen, ist also *unbestimmt*.

b) Ist $p = 1$, also $q = -1$, so schwankt die Summe der Reihe schon im Endlichen von Glied zu Glied zwischen den Werten a und 0 hin und her (*oszillierende Reihe*).

c) Ist $p < 1$, so nähert sich p^n und damit das Restglied mit unbegrenzt wachsender Gliederzahl dem Grenzwert 0, die Reihe ist *konvergent*, ihre Summe wird wieder

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Eine unendliche geometrische Reihe ist konvergent, wenn der Quotient ein positiver oder negativer echter Bruch ist.

Die Summe der Reihe ist

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Den absoluten Wert einer Größe x bezeichnet man oft durch das Symbol $|x|$. Bei Anwendung dieser Bezeichnungsweise läßt sich das Schlußergebnis auch so aussprechen: Eine unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten q ist konvergent, wenn $|q| < 1$ ist; die Summe der Reihe ist

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

11. Eine sehr anschauliche Art, die Begriffe Konvergenz, Divergenz, Summe einer unendlichen Reihe zu erläutern, ist die folgende: Man stelle nach Fig. 3 eine

geometrische Reihe, deren Quotient als positiv vorausgesetzt werde, durch eine Reihe von Treppenstufen dar, deren Höhe und Breite gleich den einzelnen Gliedern der Reihe sind, also

$$A_1 B_1 = a$$

$$A_2 B_2 = A_2 B_1 = aq$$

$$A_3 B_3 = A_3 B_2 = aq^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n B_n = A_n B_{n-1} = aq^{n-1}.$$

Die Dreiecke $B_1 A_2 B_2$, $B_2 A_3 B_3$, ..., $B_{n-1} A_n B_n$ sind gleichschenkelig-rechtwinklig, also ist z. B. die Winkelsumme $B_1 B_2 A_2 + A_2 B_2 A_3 + A_3 B_2 B_3 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, oder die Punkte B_1 , B_2 , B_3 (und ebenso die folgenden

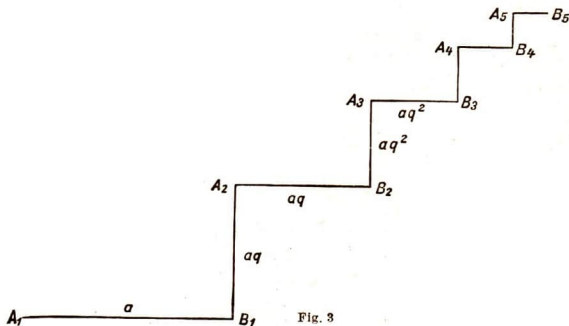


Fig. 3

Punkte B_4, \dots, B_n liegen in einer Geraden, die gegen die Verlängerung von $A_1 B_1$ unter 45° geneigt ist. In gleicher Weise zeigt man, daß die Punkte A_1, A_2, \dots, A_n in einer Geraden liegen, deren Neigungswinkel φ gegen $A_1 B_1$ durch die Beziehung $\operatorname{tg} \varphi = q$ gegeben ist.

Mit wachsender Gliederzahl konvergieren oder divergieren die beiden Geraden, je nachdem $\varphi \leq 45^\circ$, d. h. je nachdem $q \leq 1$ ist. Im Falle $q = 1$ sind die beiden Geraden parallel.

Projiziert man die Punkte B_2, B_3, \dots, B_n auf die Gerade $A_1 B_1$ in $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_n$, so stellt die Strecke $A_1 \mathfrak{B}_k$ die Summe der k ersten Glieder der geometrischen Reihe dar. Bezeichnet man im Falle der Konvergenz den Schnittpunkt der A -Geraden und der B -Geraden mit S und seine Projektion auf $A_1 B_1$ mit \mathfrak{S} , so stellt $A_1 \mathfrak{S}$ die Summe der unendlichen geometrischen Reihe dar.

Zinseszinsrechnung

Die Grundformel

12. Aufgabe der Zinseszinsrechnung ist: zu berechnen, auf welchen Betrag ein Kapital a nach n Jahren angewachsen ist, wenn alljährlich die Zinsen zum Kapital geschlagen und mitverzinst werden.

Ist das Kapital a zu $p\%$ ausgeliehen, so bringt es in einem Jahre $a \cdot \frac{p}{100}$ Zinsen, ist also nach Ablauf des Jahres auf $a + a \cdot \frac{p}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ angewachsen. Der Koeffizient $1 + \frac{p}{100}$, der sogenannte *Zinsfaktor* (oder auch *Aufzinsungsfaktor*), tritt im weiteren Verlaufe der Rechnung so häufig auf, daß es sich lohnt, für ihn eine Abkürzung q einzuführen; man definiert also den *Zinsfaktor* q durch die Gleichung

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

und kann das Ergebnis der ersten Betrachtung so aussprechen: Um den Wert eines Kapitals nach 1 jähriger Verzinsung zu erhalten, hat man den Anfangswert des Kapitals mit dem Zinsfaktor q zu multiplizieren.

Am Anfange des 2. Jahres beträgt das Kapital $a \cdot q$, also (nach dem vorigen Satze) am Ende des 2. Jahres $a \cdot q^2$. Dies ist zugleich der Anfangswert für das 3. Zinsjahr, daher hat das Kapital am Ende des 3. Jahres den Wert $a \cdot q^3$ usw., allgemein am Ende des n ten Jahres den Wert $a \cdot q^n$. Bezeichnet man den Endwert des Kapitals zur Abkürzung mit b , so hat man als *Grundformel*

$$b = a \cdot q^n.$$

Man kann den Inhalt der Grundformel auch folgendermaßen aussprechen: Die Werte, die ein auf Zinseszinsen stehendes Kapital nach alljährlichem Zinszuschlag annimmt, bilden eine geometrische Reihe.

Um den Zusammenhang mit der Praxis nicht zu verlieren, muß hier bemerkt werden, daß die Sparkassen, die ja auch die am Jahresschluß nicht abgehobenen Zinsen der eingezahlten Sparbeträge weiter verzinsen, *nicht* ohne weiteres nach der soeben hergeleiteten Grundformel rechnen, sondern bestimmte Beschränkungen festlegen, z. B. daß von einem eingezahlten oder durch Zinszuschlag gewachsenen Kapital nur die vollen Mark, nicht aber die überschießenden Pfennigbeträge verzinst werden. Das macht bei kleinen Einzahlungen unter Umständen einen nennenswerten Unterschied gegen die Grundformel aus.

13. Will man das Anwachsen eines bestimmten, zahlenmäßig gegebenen Kapitals graphisch darstellen, so gelangt man für einigermaßen übersehbare Zeiträume nur dann zu einem wirklich anschaulichen Ergebnis, wenn man einen günstigen Maßstab und ein zweckmäßig gelegenes Koordinatensystem wählt. So ist z. B.

in Fig. 4 das Anwachsen eines Kapitals von 100 RM, das zu 5% auf Zinseszinsen steht, bis zum 15. Zinsjahr dargestellt; dabei ist für die Abszissen der Maßstab $\frac{1}{2}$ cm \equiv 1 Jahr, für die Ordinaten der Maßstab 1 mm \equiv 1 RM gewählt und die Abszissenachse 10 cm unterhalb des unteren Randes der Zeichnung liegend gedacht.

Besondere Fälle

14. Im geschäftlichen Leben handelt es sich häufig um die Aufgabe, den augenblicklichen Barwert eines Kapitals anzugeben, das nach n Jahren den Wert b haben wird. Die Grundformel liefert sofort

$$a = \frac{b}{q^n} = b \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^n.$$

Man nennt $\frac{1}{q}$ den *Diskontierungsfaktor* (auch *Abzinsungsfaktor*) und bezeichnet das Rechnungsverfahren als „*Diskontierung* der nach n Jahren fälligen Zahlung b auf den jetzigen Augenblick“.

15. Soll berechnet werden, zu wieviel Prozent ein Kapital ausgeliehen werden muß, damit es in n Jahren auf b angewachsen ist, so findet man aus der Grundformel

$$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right).$$

16. Die Anzahl der Jahre, während deren ein Kapital a zu $p\%$ auf Zinseszinsen stehen muß, damit es den Wert b erreicht, ist nach der Grundformel

$$n = \frac{\lg b - \lg a}{\lg q}.$$

Diese Gleichung ist streng genommen nur dann richtig, wenn n sich aus ihr ganzzahlig ergibt, denn bei der Herleitung der Grundformel ist angenommen

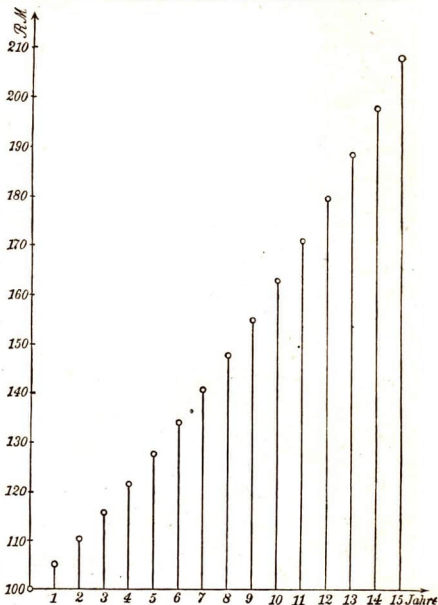


Fig. 4

Der Gesamtwert der Zahlungen ist also gleich der Summe einer n gliedrigen geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede r und dem Quotienten q , d. h. der Besitzer des Geldes hat nach n Jahren bei dem zweiten Bankhause ein Guthaben von $r \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Wird die konstante Summe r nicht hinzugefügt, sondern abgehoben, so bleibt die Betrachtungsweise genau die gleiche, nur erscheint dann die Summe der geometrischen Reihe nicht mehr als ein Guthaben, sondern als eine Schuld des Kapitalbesitzers, oder was dasselbe sagt, die Größe $r \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ist in diesem Falle von dem Werte aq^n abzuziehen.

Endergebnis: Wenn bei einem Kapital a , das zu $p\%$ ausgeliehen ist, am Ende jedes Jahres nicht bloß die Zinsen zugeschlagen werden, sondern außerdem noch eine konstante Summe r hinzugefügt oder abgehoben wird, so ist nach n Jahren der Endwert des Kapitals (*Grundformel der Rentenrechnung*)

$$b = aq^n \pm r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

19. Durch einfache Umformung läßt sich aus dieser *Grundformel der Rentenrechnung* je eine der Größen a , n , r leicht ausdrücken, dagegen ist es im allgemeinen unmöglich, den Verzinsungsfaktor q (und damit den Zinsfuß p) für solche Fälle, wo $n > 3$ ist, zu berechnen, denn die Gleichung ist in q vom $(n + 1)$ ten Grade. Sind a , b , n , r zahlenmäßig gegeben, so kann man q mittels irgendeiner Näherungsmethode (§ 8, Nr. 11 ff.) berechnen.
20. Wenn ein Kapital a zu $p\%$ n Jahre lang ausgeliehen, der Zinsbetrag am Ende jedes Jahres zum Kapital geschlagen und außerdem *am Anfange jedes Jahres* eine konstante Summe r hinzugezahlt oder abgehoben wird, so erhält man als Endwert des Kapitals nach Ablauf von n Jahren

$$b = aq^n \pm rq \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

was man entweder aus der Grundformel in Nr. 18 oder auch unabhängig von ihr, aber mittels des dort benutzten Verfahrens beweisen kann.

21. Wird am Anfange jedes Jahres (auch des ersten) die Summe r auf Zinsen gelegt, so erhält man die Formel (sog. *Sparkassenformel*)

$$b = rq \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

22. Findet die Vermehrung oder Verminderung des Kapitals und die Verzinsung in anderen als jährlichen Zwischenräumen statt, etwa alle m tel Jahre, so verfährt man wie in Nr. 17 angegeben.

Aufzehrung des Kapitals. Renten im engeren Sinne. Schuldentilgung

23. Ein Kapital kann durch alljährlich wiederkehrende Abhebung einer konstanten Summe r , die größer ist als die jährlichen Zinsen des Kapitals, allmählich völlig *aufgezehrt* werden. In diesem Falle ergibt die Grundformel in Nr. 18 für $b = 0$ die Beziehung

$$a q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Diese Formel ist von besonderer Bedeutung, weil sie, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, einer vielseitigen Deutung fähig ist.

24. Wenn jemand regelmäßig am Ende jedes Jahres eine konstante Summe r zu fordern oder zu zahlen hat, so kann er statt dessen auch eine einzige Zahlung a empfangen oder leisten; je nachdem es sich um eine Empfangsberechtigung oder aber um eine Zahlungsverpflichtung handelt, heißt die Größe r *Rente* oder *Kanon*, a der *Barwert der Rente* oder die *Ablösungssumme*. Besteht die Zahlungsverpflichtung noch n Jahre, so gilt die Beziehung

$$a q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

also dieselbe wie in Nr. 23. Das läßt sich entweder als Sonderfall von Nr. 23 oder auch unmittelbar zeigen: Der Empfangsberechtigte kann jede der n Zahlungen r sofort nach Empfang bei einem Bankhause oder auf einer Sparkasse einzahlen und so auf Zinseszinsen legen; die Endwerte dieser n Zahlungen bilden eine geometrische Reihe (siehe die Aufstellung in Nr. 18) und haben den Gesamtwert $r \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Wenn daher diese n Zahlungen für den Empfangsberechtigten wirklich ebensoviel wert sein sollen wie der *Barwert* a , der ihm gleich am Anfang ausgezahlt worden, also inzwischen mit Zinseszinsen auf $a q^n$ angewachsen wäre, so muß

$$a q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

sein.

25. Soll die Rente *unaufhörlich* am Ende jedes Jahres gezahlt werden (wie z. B. bei Stiftungen, Stipendien u. dgl.), so ist der Barwert

$$a = \frac{r}{q - 1}.$$

Dies kann man z. B. aus der Formel in Nr. 24 beweisen, indem man zunächst auf beiden Seiten durch q^n dividiert und dann n unbegrenzt wachsen läßt. – Man kann aber auch von der Tatsache ausgehen, daß eine unaufhörlich zahlbare Rente einfach gleich den Jahreszinsen der Ablösungssumme ist.

26. Soll die Rente *am Anfang jedes Jahres* (auch des ersten) gezahlt werden, so ist

$$a q^n = r q \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wie man aus Nr. 21 oder aus Nr. 23 oder auch unabhängig beweisen kann. Für die am *Anfange* jedes Jahres zahlbare *unaufhörliche* Rente gilt

$$a = \frac{r q}{q - 1},$$

was man ebenfalls auf mehrere Arten zeigen kann.

Wegen der Verzinsung und Auszahlung zu anderen als jährlichen Terminen vergleiche man die Bemerkung in Nr. 22.

27. Will man eine *Anleihe* (Schuld) a durch alljährliche Zurückzahlung einer Summe r , die größer ist als die Jahreszinsen der Schuldsomme, allmählich *tilgen* (amortisieren), so gilt wieder die in Nr. 23 hergeleitete Beziehung (*Tilgungsformel*)

$$a q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wie man sofort einsieht, wenn man sich in Nr. 23 die Rollen des Gläubigers und Schuldners vertauscht denkt; r heißt *Jahreszahlung* (Annuität), n *Tilgungsfrist*.

Kleinere Darlehen werden in der Regel an einer einzigen Stelle (z. B. von einer städtischen oder Kreissparkasse, von einer Bank, einem Vorschußverein oder auch von einem einzelnen Geldgeber) entnommen; dagegen gibt man für größere Darlehen (z. B. Staatsanleihen, städtische Anleihen, Gründungen von Aktiengesellschaften) eine große Menge *Anteilscheine* (Obligationen, Schuldverschreibungen, Aktien u. dgl.) im Betrage von 100 RM, 200 RM, 500 RM, 1000 RM aus. Während man im Falle der kleinen Darlehen dem Einzelgläubiger jeden beliebigen Tilgungsbetrag (z. B. 758,43 RM) zurückzahlen kann, ist im Falle der großen Anleihen eine Tilgung nur dadurch möglich, daß man eine bestimmte Anzahl Anleihscheine zum Nennbetrage zurückkauft. Daher müssen für größere Anleihen besondere *Tilgungspläne* aufgestellt werden, bei denen die theoretisch berechneten Tilgungssummen bald nach oben, bald nach unten (nämlich auf Vielfache des kleinsten Nennbetrages, also etwa auf Vielfache von 100 RM) abgerundet werden.

§ 3. Komplexe Zahlen

Einführung der imaginären Einheit. Rechnen mit imaginären Zahlen

1. So wie man bis zum 16. Jahrhundert Differenzen, bei denen der Subtrahendus den Minuendus überzog, als „unmöglich“ (fictae, falsae) verwarf, so bezeichnete man im 18. Jahrhundert Quadratwurzeln aus negativen Zahlen als „unmöglich“, weil man sie durch keine der bis dahin bekannten Zahlen ausdrücken konnte. Solche Beschränkungen in der Ausführung einfachster Rechnungen sind aber für die mathematische Wissenschaft auf die Dauer unerträglich und deuten darauf hin, daß an den Stellen, wo sich die Beschränkung zeigt, das

Zahlengebiet durch Einführung neuer Zahlen erweitert und damit auch der Bereich der bis dahin ausführbaren Rechenoperationen ausgedehnt werden kann. Genau so wie die „unmöglichen“ Differenzen zur Einführung der negativen Zahlen Veranlassung gaben, so weckte die „Unmöglichkeit“, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auszuziehen, den Wunsch nach Einführung der *imaginären Zahlen* und einer besonderen *imaginären Einheit* $\sqrt{-1}$; man setzte fest, daß der für positive Radikanden gültige Satz $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ auch gilt für $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$. Bei Benutzung der von Euler (1777) eingeführten Abkürzung

$$(1) \quad \sqrt{-1} = i$$

lautet die letzte Gleichung dann

$$(2) \quad \sqrt{-a} = i \sqrt{a}.$$

Die so definierten Zahlen heißen *imaginäre Zahlen* im Gegensatz zu den bisher bekannten (positiven, negativen, ganzen, gebrochenen, rationalen und irrationalen) Zahlen, die unter dem Namen *reelle Zahlen* zusammengefaßt werden.

2. Aus der durch die Gleichung (1) definierten Einheit i bildet man alle imaginären Zahlen auf dieselbe Weise wie die reellen Zahlen aus der Einheit 1 , indem man zunächst festsetzt, daß die für die reellen Zahlen aufgestellten *Additions-* und *Subtraktionsgesetze* auch für die imaginären Zahlen gelten sollen, also z. B.

$$ai + bi = (a + b)i, \quad ai - bi = (a - b)i, \quad ai - ai = 0.$$

3. Mit dieser Eigenschaft ist auch zugleich die Möglichkeit gegeben, die imaginären Zahlen als Punkte einer Geraden *graphisch darzustellen*. Man errichtet auf der Zahlengeraden, die bisher zur Darstellung der reellen Zahlen gedient hat, im Nullpunkte die Senkrechte und trägt auf dieser vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin die Einheitsstrecke wiederholt ab (Fig. 5). Bezeichnet man die dadurch erhaltenen Teilpunkte (vom Nullpunkte anfangend) nach oben mit i , $2i$, $3i$, ..., nach unten mit $-i$, $-2i$, $-3i$, ... und deutet das Addieren einer

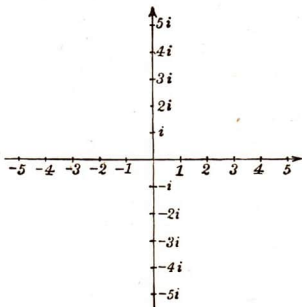


Fig. 5

imaginären Einheit als Aufwärtstrücken um eine Einheitsstrecke, das Subtrahieren einer imaginären Einheit als Abwärtstrücken um eine Einheitsstrecke,

so hat man damit eine bildliche Darstellung der imaginären Zahlen gewonnen, die der Darstellung der reellen Zahlen auf der „horizontalen“ Zahlengeraden völlig entspricht.

4. Bei der *Multiplikation* und *Division* mit imaginären Zahlen muß neben der Forderung, daß der Faktor i rein formal genau so behandelt werden soll wie ein reeller Faktor, noch immer die Bedingung

$$i^2 = -1$$

beachtet werden, die ja nur eine andere Form der Definitionsgleichung (1) ist. Es ist also z. B. $ai \cdot bi = abi^2 = -ab$. Allgemein gilt dann:

Ein Produkt aus mehreren Faktoren ist reell oder imaginär, je nachdem es eine gerade oder ungerade Anzahl imaginärer Faktoren enthält.

5. Für die Potenzen von i folgt aus den getroffenen Festsetzungen

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1 \quad \text{usw.}$$

$$\text{allgemein } i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i,$$

wobei n eine beliebige positive Zahl ist.

6. Die Division wird wie bei reellen Zahlen als Umkehrung der Multiplikation gedeutet; die rechnerische Auswertung von Brüchen mit reellem Zähler und imaginärem Nenner geschieht am einfachsten durch Erweiterung mit einer passenden Potenz von i oder durch Multiplikation mit i^4 , also z. B.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad \text{oder auch} \quad \frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i.$$

Aus $i^{-1} = -i$ folgt dann allgemein

$$i^{-n} = (-i)^n,$$

wobei n eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl sein darf.

7. Während die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung imaginärer Zahlen, wie die vorigen Betrachtungen zeigten, immer *entweder* wieder auf imaginäre Zahlen *oder* auf die schon bekannten reellen Zahlen führen, bildet das Radizieren eine Ausnahme, denn schon die Quadratwurzeln aus imaginären Zahlen führen auf eine neue Art Zahlen, die aus einem reellen *und* einem imaginären Bestandteil zusammengesetzt sind.

Einführung der komplexen Zahlen. Rechnen mit komplexen Zahlen

8. Zahlen, die aus einem reellen und einem imaginären Teile bestehen, heißen *komplexe Zahlen*; sie erscheinen in der Form $a + bi$, wobei a und b (wie überhaupt im folgenden alle Buchstabengrößen außer i) reelle Zahlen mit beliebigen Vorzeichen bedeuten sollen.

Die Zahlen von der Form $a + bi$ umfassen alle bisher bekannten Zahlen: Für $b=0$ erhält man die reelle Zahl a , dagegen für $a=0$ die imaginäre Zahl bi . Die reellen Zahlen und die imaginären Zahlen erscheinen also als Sonderfälle der komplexen Zahlen.

9. Man rechnet mit den komplexen Zahlen wie mit gewöhnlichen Summen, insbesondere setzt man für die Addition und Subtraktion fest, daß

$$(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)i$$

sein soll, oder in Worten: Man addiert (oder subtrahiert) komplexe Zahlen, indem man die reellen Bestandteile für sich und die imaginären Bestandteile für sich addiert (oder subtrahiert).

Die Zweckmäßigkeit dieser Festsetzung leuchtet besonders ein, wenn man zum Vergleich die Addition und Subtraktion reeller, aber *ungleich benannter* Zahlen heranzieht, also wenn man z. B. die Aufgabe $(2 + 5i) + (3 + 4i)$ vergleicht mit der Aufgabe $(2 \text{ cm} + 5 \text{ g}) + (3 \text{ cm} + 4 \text{ g})$, bei der ja niemand im Zweifel ist, wie man zu verfahren hat.

10. Von der Gleichheit zweier komplexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ kann man nur dann sprechen, wenn $a = c$ und $b = d$ ist. In der Tat kann man statt der Gleichung $a + bi = c + di$ auch die Gleichung $a - c = (d - b)i$ schreiben, die aussagt, daß in diesem Falle eine reelle Zahl gleich einer imaginären ist. Das ist aber nur denkbar, wenn beide gleich 0 sind, d. h. wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

Ein Sonderfall des vorigen ist der, daß eine komplexe Zahl nur gleich 0 sein kann, wenn sowohl der reelle Bestandteil als auch der Faktor des imaginären Bestandteils verschwindet.

11. Die bei den reellen und imaginären Zahlen angewandte Art bildlicher Darstellung führt auch unmittelbar zu einer *graphischen Darstellung der komplexen Zahlen*. Um die Zahl $a + bi$ abzubilden, stellt man zunächst die reelle Zahl a auf der gewöhnlichen Zahlengeraden, der „Achse des Reellen“, dann die imaginäre Zahl bi (nach Nr. 3) auf der „Achse des Imaginären“ dar. Die so erhaltenen Bildpunkte und der Nullpunkt bestimmen ein Rechteck, dessen 4. Ecke als das Bild der Zahl $a + bi$ gedeutet wird (Fig. 6). Mit anderen Worten: Die Zahl $a + bi$ wird durch einen Punkt der Ebene abgebildet, dessen Abszisse a und dessen Ordinate b ist.

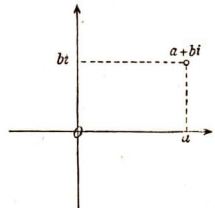


Fig. 6

Durch diese Art der Abbildung ist jeder komplexen Zahl ein Punkt der „Zahlenebene“ (und auch umgekehrt: jedem Punkte der Zahlenebene eine komplexe Zahl) *eindeutig* zugeordnet.

Man überzeugt sich leicht, daß der den 4 Fortschreitungsrichtungen früher beigelegte Sinn (nach rechts und oben positiv, nach links und unten negativ) auch jetzt noch erhalten geblieben und mit den in Nr. 9 getroffenen Festsetzungen im Einklang ist.

12. Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Bestandteils unterscheiden, also Zahlen von der Form $a + bi$ und $a - bi$, heißen *konjugiert* komplexe Zahlen; ihre graphischen Bilder liegen symmetrisch in bezug auf die Abszissenachse.
13. Für die Multiplikation komplexer Zahlen wird die unter Nr. 9 aufgestellte Regel beibehalten, daß mit komplexen Zahlen wie mit gewöhnlichen Summen gerechnet werden soll, nur daß hier noch die Bedingung $i^2 = -1$ hinzukommt; z. B. ist

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist also im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl; von den Sonderfällen ist besonders derjenige wichtig, bei dem das Produkt aus zwei konjugiert komplexen Faktoren besteht:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

14. Die Division wird wie bei reellen und rein imaginären Zahlen (Nr. 6) als Umkehrung der Multiplikation gedeutet. Rechnerisch wertet man einen Bruch, dessen Nenner eine komplexe Zahl ist, am einfachsten aus, indem man ihn mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert, z. B.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Der Quotient zweier komplexer Zahlen ist also im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl.

15. Aus Nr. 13 folgt noch: Durch Potenzieren einer komplexen Zahl erhält man wieder eine komplexe Zahl.

Natürlich stößt man auch hier, wie bei den Rechnungsarten 1. und 2. Stufe, häufig auf Fälle, in denen das Ergebnis entweder reell oder rein imaginär ist [z. B. $(1 + i)^4$ reell, $(1 + i)^6$ rein imaginär]. Das darf uns nicht wundern, denn nach Nr. 8 sind ja reelle und rein imaginäre Zahlen nur besondere Fälle der komplexen Zahlen; das Wichtige ist, daß man durch die bisher behandelten Rechnungsarten *aus dem Gebiete der komplexen Zahlen nicht herauskommt*.

16. Um zu zeigen, daß auch die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ist, setzt man zunächst versuchsweise

$$\sqrt{a + bi} = c + di$$

und muß dann zeigen, daß man für c und d stets reelle Werte angeben kann. Aus der angesetzten Gleichung folgt durch Quadrieren

$$a + bi = c^2 - d^2 + 2cdi.$$

Vergleicht man hierin die reellen Bestandteile miteinander und die imaginären miteinander, so erhält man für c und d zwei Gleichungen, die man am besten

nach c^2 und $(-d^2)$ auflöst. Es sind dann c^2 und $(-d^2)$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - ax - \frac{b^2}{4} = 0;$$

daraus ergeben sich für c und d die stets reellen Werte

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad d = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

d. h.

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ist.

Der allgemeine Nachweis, daß jede (n te) Wurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ist, kann erst später (Nr. 28) geführt werden; man muß dabei für die komplexen Zahlen eine andere Form benutzen, die wir im folgenden genauer kennenlernen werden.

Goniometrische Form der komplexen Zahlen. Moivrescher Lehrsatz

17. Die komplexe Zahl $a + bi$ ist bisher (nach Nr. 11) durch einen Punkt P – bildlich dargestellt worden. Man verbinde P mit dem Koordinatenanfangspunkt O (Fig. 7); die Länge der Verbindungsstrecke sei r . Der Winkel, den sie gegen die Achse des Reellen bildet, sei α ; er soll auf die in der Goniometrie übliche Weise gemessen werden (d. h. die positiv gerichtete Hälfte der horizontalen Zahlengeraden wird entgegengesetzt dem Bewegungssinn des Uhrzeigers gedreht, bis sie mit OP zusammenfällt). Es wird ferner festgesetzt, daß der Wert

$$(1) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

stets *absolut* genommen werden soll.

Unter diesen Voraussetzungen gelten dann die Beziehungen

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

für jeden Quadranten, d. h. für alle möglichen Vorzeichen von a und b , und es wird

$$(2) \quad a + bi = r (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Dies ist die *goniometrische Form* (auch *Normalform*) der komplexen Zahl $a + bi$; r heißt der *Modul* (oder *absoluter Betrag*), α das *Argument* der komplexen Zahl.

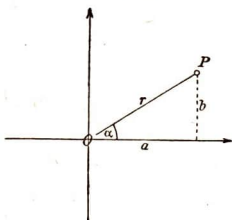


Fig. 7

Beispiel: $\sqrt{3} - i$ ist auf die Normalform zu bringen. Hier ist $a = \sqrt{3}$, $b = -1$; man findet zunächst den Modul $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, dann das Argument aus $\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ und $\sin \alpha = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$, also $\alpha = 330^\circ$, d. h.

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ).$$

Die Überführung einer komplexen Zahl $a + bi$ in die Form $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ erscheint graphisch als Übergang zu einem neuen Koordinatensystem: statt der rechtwinkligen Koordinaten a , b des Produktes P sind dessen *Polarkoordinaten* r , α eingeführt worden.

18. Daß man *jede* komplexe Zahl $a + bi$ auf die Form $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ bringen kann, folgt am einfachsten aus der identischen Gleichung

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Die in der Klammer stehenden Quotienten können *stets* als Kosinus und Sinus eines gewissen Winkels gedeutet werden, weil es echte Brüche sind und die Summe ihrer Quadrate gleich 1 ist.

Genau genommen ergeben sich aus den Gleichungen für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ außer dem Winkel α noch unzählig viele andere Argumente, nämlich $\alpha + k \cdot 360^\circ$, wo k irgendeine ganze Zahl sein kann. Diese Vieldeutigkeit stört hier nicht, weil jede Vermehrung des Argumentes um 360° immer wieder nur denselben Punkt P liefert; an anderer Stelle freilich (vgl. Nr. 28) führt diese Vieldeutigkeit zu sehr beachtenswerten Ergebnissen.

19. Bei der graphischen Darstellung ist es vielfach zweckmäßig, die komplexen Zahlen nicht nur wie bisher durch Punkte, sondern auch durch *gerichtete Strecken* (oder „*Vektoren*“) abzubilden, nämlich durch Strecken, deren Länge (durch r) und Richtung (durch α) bestimmt ist. Diese Deutung der komplexen Größen als Vektoren erweist sich besonders anschaulich bei der Einführung der Begriffe *Verschiebung* (das soll immer bedeuten: Parallelverschiebung) und *Drehung* (das soll heißen: Drehung um den Anfangspunkt des betreffenden Vektors in dem oben bei Nr. 17 festgesetzten Sinne).

In Fig. 8 stellen zunächst die Punkte P_1 und P_2 zwei komplexe Zahlen $(a + bi)$ und $(c + di)$, der dritte Punkt P die Summe der beiden Zahlen $(a + c) + (b + d)i$ bildlich dar. Aus der Kongruenz der beiden rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen OP_2 und P_1P sind, folgt sogleich, daß die Strecken OP_2 und P_1P parallel und gleich sind, d. h. daß OP_1PP_2 ein Parallelogramm ist.

Deutet man nunmehr die Zahlen nicht mehr als Punkte, sondern als *Vektoren*, sind also die gerichteten Strecken OP_1 und OP_2 die Summanden, OP die Summe der beiden, so folgt aus dem Vorigen:

Man kann zwei durch Vektoren dargestellte komplexe Zahlen graphisch addieren, indem man den einen Vektor verschiebt, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des zweiten Vektors fällt; die Summe ist dann der Vektor vom Anfangspunkt des festgebliebenen Vektors zum Endpunkt des verschobenen Vektors. Oder mit anderen Worten: Der Vektor der Summe zweier komplexer Zahlen ist die Diagonale des Parallelogramms, das von den Vektoren der beiden Summanden bestimmt wird. Die geometrische Addition komplexer Zahlen läßt sich also vergleichen mit der Addition von Kräften in der Mechanik

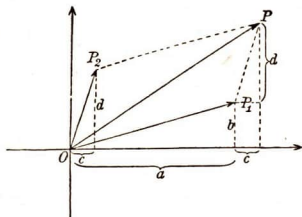


Fig. 8

bestimmt wird. Die geometrische Addition komplexer Zahlen läßt sich also vergleichen mit der Addition von Kräften in der Mechanik

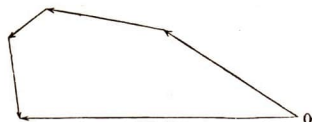


Fig. 9

(Kräfteparallelogramm); den Summanden entsprechen die Komponenten, der Summe entspricht die Resultante der Kräfte.

Bei mehr als 2 Summanden tritt an die Stelle des Vektordreiecks OP_1P der Fig. 8 ein offenes Vektorviereck; die Summe aller Vektoren ist dann die letzte, noch fehlende Seite des Vielecks, nämlich die Verbindungsstrecke vom Anfangspunkte des festgebliebenen Vektors zum Endpunkt (Pfeilspitze) des letzten der verschobenen Vektoren. (Siehe die schematische Fig. 9.)

20. Ebenso wie die Addition läßt sich auch die Subtraktion komplexer Zahlen geometrisch als eine Vektorverschiebung deuten. Dabei faßt man die Subtraktion eines beliebigen Vektors am einfachsten als Addition einer gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Strecke auf.
21. Die Vorzüge der goniometrischen Form komplexer Zahlen treten besonders deutlich hervor bei der Multiplikation und den damit zusammenhängenden Rechnungsarten.

Für das Produkt zweier komplexer Zahlen, von denen die eine durch r_1 und α_1 , die zweite durch r_2 und α_2 bestimmt ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} & r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]. \end{aligned}$$

Man kann also das Produkt zweier komplexer Zahlen bilden, indem man ihre *Moduln multipliziert* und ihre *Argumente addiert*.

22. Stellt man die komplexen Zahlen durch Vektoren dar, so ist nach dem Vorigen die Multiplikation als Drehung und Streckung zu deuten.

Diese geometrische Beziehung läßt sich noch anders ausdrücken: Es seien in Fig. 10 OP_1 und OP_2 die Vektoren der Faktoren, OP der Vektor des Produktes, OE der Einheitsvektor; dann ist

$$\triangle POP_2 \sim \triangle P_1OE,$$

weil die Dreiecke übereinstimmen in dem Verhältnis zweier Seiten ($r_1 r_2 : r_2 = r_1 : 1$) und dem eingeschlossenen Winkel (α_1). Also: Das durch den Vektor des Produkts und den Vektor eines Faktors bestimmte Dreieck ist ähnlich dem durch den Vektor des anderen Faktors und den Vektor 1 bestimmten Dreieck.

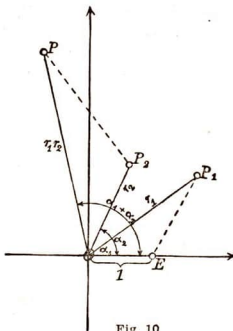


Fig. 10

23. Den in Nr. 21 bewiesenen Satz kann man auch als Divisionssatz aussprechen; dabei erscheint der Modul des Quotienten als Quotient der Moduln, das Argument des Quotienten als Differenz der Argumente von Dividendus und Divisor.

Geometrisch kann man den Quotienten am einfachsten nach dem Muster von Nr. 22 mittels ähnlicher Dreiecke finden.

24. Sind bei dem in Nr. 21 bewiesenen Satze die beiden Faktoren gleich, so erhält man für das Quadrat einer komplexen Zahl

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^2 = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

Die Umkehrung dieses Satzes erlaubt, die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl auch graphisch auf einfache Weise zu ermitteln: Der Modul von $\sqrt{a+bi}$ ist mittlere Proportionale zu 1 und dem Modul von $a+bi$, das Argument von $\sqrt{a+bi}$ ist halb so groß wie das von $a+bi$.

25. Da die Zahl $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ sich von der Zahl $\cos \alpha + i \sin \alpha$ nur durch die Größe des Moduls unterscheidet, kann man für die Dauer der goniometrischen Umformungen den lästigen Faktor r beiseite lassen und erst am Ende der Operationen entweder (rechnerisch) durch einfache Multiplikation oder (zeichnerisch) durch Vergrößerung in passendem Maßstabe zu den Zahlen mit dem Modul r zurückkehren. Demgemäß beschäftigen sich die folgenden Untersuchungen im wesentlichen mit komplexen Zahlen vom Modul 1.

26. Wir zeigen zunächst, daß der in Nr. 21 für 2 Faktoren bewiesene Satz für beliebig viele Faktoren gilt. Wir nehmen einmal an, der Satz wäre für n Faktoren schon bewiesen, es gelte also

$$\begin{aligned} &(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \dots (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n) \\ &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n). \end{aligned}$$

Die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ werde für einen Augenblick mit β bezeichnet, so daß die rechte Seite in der Form $\cos \beta + i \sin \beta$ erscheint. Multipliziert man jetzt noch beiderseits mit einem neuen Faktor, etwa mit

$$\cos \alpha_{n+1} + i \sin \alpha_{n+1},$$

so hat man rechts

$$(\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \alpha_{n+1} + i \sin \alpha_{n+1})$$

zu bilden; das ist aber nach Nr. 21 nichts anderes als

$$\cos(\beta + \alpha_{n+1}) + i \sin(\beta + \alpha_{n+1})$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}).$$

Gilt also der in Rede stehende Satz für n Faktoren, so gilt er auch für $(n+1)$ Faktoren; nun ist er aber in Nr. 21 für 2 Faktoren bewiesen worden, also gilt er jetzt auch für 3, 4, ..., allgemein für beliebig viele Faktoren.

Diese Art der Beweisführung heißt der *Schluß von n auf $(n+1)$* oder auch das *Beweisverfahren der vollständigen Induktion*.

27. Setzt man in dem soeben bewiesenen Satze $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, so erhält man

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Dieser Satz heißt der *Moivresche Lehrsatz*¹⁾. Da bei unserer Herleitung n die Anzahl der Faktoren bedeutet, ist der Lehrsatz einstweilen nur für positive ganzzahlige Werte von n bewiesen. Er gilt aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch für negative und gebrochene Werte von n . Über das Argument sind bei unserer Herleitung keinerlei Voraussetzungen gemacht worden, α kann also ganz beliebige Werte annehmen.

Um zu zeigen, daß der Moivresche Satz auch für negative (zunächst noch ganzzahlige) Exponenten gilt, muß man die für reelle Werte der Basis gegebene Definition x^{-n} auch auf komplexe Werte von x ausdehnen, also festsetzen, daß

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n} = \frac{1}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}$$

¹⁾ Wir wollen diesen Namen, weil er sich anscheinend unausrottbar eingebürgert hat, hier beibehalten, obgleich *Moivre* den Satz in der oben mitgeteilten Form nicht gefunden hat. Er hat zwar 2 Gleichungen aufgestellt:

$$2 \cos n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n,$$

$$2i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n,$$

aus denen man den oben bewiesenen Satz leicht erhalten kann, aber *Moivre* wollte diese beiden Gleichungen, in denen er auf der rechten Seite die Potenzen nach dem *binomischen Satze* (s. § 5, Aufgaben 16 bis 19) entwickelt dachte, lediglich dazu benutzen, $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ durch $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ auszudrücken. Die wirkliche Potenzierung einer komplexen Zahl durch Multiplikation des Arguments, also der eigentliche Inhalt des „*Moivreschen Satzes*“, ist erst von *Euler* (1748) gefunden worden.

gesetzt werden soll. Erweitert man rechts mit $(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n$ und beachtet, daß man wegen der Symmetrieeigenschaften der Funktionen \sin und \cos statt $\cos \alpha - i \sin \alpha$ auch schreiben kann $\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$, so erhält man

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n} = \cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha).$$

Damit ist der Moivresche Satz für negative ganzzahlige Werte des Exponenten bewiesen.

Es ist nun noch zu zeigen, daß der Satz auch gilt, wenn n ein Bruch von der Form $\frac{p}{q}$ ist, wo p und q positive oder negative Zahlen sein sollen. Zunächst gilt, weil q ganzzahlig ist,

$$\left(\cos \frac{p}{q} \alpha + i \sin \frac{p}{q} \alpha\right)^q = \cos p\alpha + i \sin p\alpha;$$

es ist aber für ganzzahlige Werte von p auch

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^p = \cos p\alpha + i \sin p\alpha.$$

Da die rechten Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen, sind auch die linken Seiten gleich; also gilt

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^p = \left(\cos \frac{p}{q} \alpha + i \sin \frac{p}{q} \alpha\right)^q.$$

Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung in die Potenz $\frac{1}{q}$ und setzt fest,

daß die für reelle Werte von x aufgestellte Identität $(x^{\frac{1}{q}})^q = x$ auch für komplexe Werte von x bestehen bleiben soll, daß also mit anderen Worten auch für komplexe Basen das Potenzieren und Radizieren mit gleichen Exponenten sich gegenseitig aufheben sollen, so erhält man

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{p}{q}} = \cos \frac{p}{q} \alpha + i \sin \frac{p}{q} \alpha.$$

Damit ist der Satz für alle möglichen rationalen Werte von n bewiesen.

28. Ein besonders wichtiges Anwendungsgebiet des Moivreschen Satzes ist die Berechnung der n ten Wurzeln aus komplexen Zahlen, und zwar erweist sich hier der Moivresche Satz nicht bloß als ein bequemes Rechenhilfsmittel, sondern er lehrt auch auf einfache und durchsichtige Weise eine bemerkenswerte Eigenschaft der n ten Wurzeln erkennen.

Im 7.-9. Schuljahr § 9, Nr. 2 und 12 ist gezeigt worden, daß jede Quadratwurzel zweiwertig ist. Mittels des Moivreschen Satzes kann man allgemein zeigen, daß jede n te Wurzel n verschiedene Werte hat.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, daß der Radikand eine komplexe Zahl vom Modul 1 ist; hierfür gilt nach Nr. 27

$$\sqrt[n]{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n}.$$

Da die Werte der Funktionen \sin und \cos ungeändert bleiben, wenn man die Argumente um ein Vielfaches von 360° vermehrt oder vermindert, hat auf der linken Seite der Gleichung – und folglich auch auf der rechten Seite – das Argument α dieselbe Berechtigung wie die Argumente von der Form $\alpha + k \cdot 360^\circ$, wobei k jede positive oder negative ganze Zahl (einschließlich 0) sein darf. Man kann also schreiben

$$\sqrt[n]{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}.$$

Legt man hierin der Zahl k der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ bei, so nimmt die rechte Seite der Reihe nach n verschiedene Werte an. Sobald k größer wird als $n-1$, wiederholen sich die Werte; man erhält nämlich für $k=n$ denselben Wert wie für $k=0$, ebenso für $k=n+1$ denselben Wert wie für $k=1$ usw.

Damit ist gezeigt, daß $\sqrt[n]{\cos \alpha + i \sin \alpha}$ nicht mehr und nicht weniger als n verschiedene Werte hat.

Die graphischen Bilder dieser n verschiedenen Werte sind, wenn man für die komplexen Zahlen die Punktdarstellung (Nr. 11) gewählt hat, die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks, das dem Einheitskreise eingeschrieben ist; stellt man die komplexen Zahlen durch Vektoren (Nr. 19) dar, so erscheinen die n Werte von $\sqrt[n]{\cos \alpha + i \sin \alpha}$ als die nach den Ecken jenes Vielecks gehenden Radien des Einheitskreises. Die Figur ist in allen Fällen axial-symmetrisch; ist n gerade, so ist sie überdies noch zentrisch-symmetrisch.

Nach der in Nr. 25 gemachten Bemerkung ist jetzt leicht einzusehen, daß auch die n te Wurzel aus einer ganz allgemeinen Zahl $a+bi$ (deren Modul also nicht gleich 1 ist) genau n verschiedene Werte hat. Wie man diese n Werte zahlenmäßig am einfachsten findet, ist in Nr. 31 angegeben.

29. Wir wollen noch zwei besondere Fälle des soeben bewiesenen Satzes kennenlernen, die für die praktische Berechnung der n ten Wurzeln einige Bedeutung haben.

Wir behandeln zunächst die Aufgabe, die n ten Wurzeln aus 1 zu ermitteln oder die „binomische“ Gleichung $x^n = 1$ zu lösen.

Die Zahl 1 läßt sich als Sonderfall der komplexen Zahlen in der Form $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ darstellen, also ist nach Nr. 28

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{n},$$

wobei k der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ annehmen soll. Die n verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ heißen die n ten Einheitswurzeln. Über die Lage der graphischen Bilder dieser verschiedenen Einheitswurzeln ist schon in Nr. 28

einiges gesagt worden; hier kommt als neu hinzu, daß der eine Eckpunkt des schon erwähnten regelmäßigen n -Ecks der Punkt $+1$ ist. Daraus folgt, daß, wenn n gerade ist, also wenn die Figur zentrisch-symmetrisch ist, noch ein 2. Eckpunkt auf der Achse des Reellen gelegen ist, nämlich der Punkt -1 ; im Falle des ungeraden n dagegen, wo die Figur nicht zentrisch-, sondern nur axial-symmetrisch ist, gibt es keinen 2. Eckpunkt auf der Abszissenachse. Mit anderen Worten:

Die Gleichung $x^n = 1$ hat eine oder zwei reelle Lösungen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

In allen Fällen ist aber die Abszissenachse eine Symmetrieachse der Figur, also gilt der Satz:

Die nichtreellen Einheitswurzeln sind paarweise konjugiert komplex.

Dies könnte man natürlich auch rein rechnerisch erkennen, indem man in der letzten Gleichung die für irgendeinen Wert von k erhaltene Einheitswurzel vergleicht mit der für $(n - k)$ erhaltenen.

Zahlenbeispiel: $\sqrt[3]{1}$ hat außer der reellen Wurzel $+1$ noch die beiden konjugiert komplexen Lösungen $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Da man statt der allgemeinen n ten Einheitswurzel $\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{n}$ nach dem Moivreschen Satze auch schreiben kann $\left(\cos \frac{360^\circ}{n} + i \sin \frac{360^\circ}{n}\right)^k$ [wo $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$], so folgt:

Alle n ten Einheitswurzeln lassen sich als Potenzen einer einzigen darstellen.

Zahlenbeispiel: Die 3. Potenz der 5. Einheitswurzel

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

ist wieder eine 5. Einheitswurzel, nämlich $-\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) - \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Ebenso läßt sich allgemein zeigen: Das Produkt zweier n ter Einheitswurzeln ist wieder eine n te Einheitswurzel.

Anmerkung. Da die graphischen Bilder der n Einheitswurzeln den Einheitskreis vom Punkte 1 anfangend in n gleiche Bogen teilen, so heißen die binomischen Gleichungen auch *Kreisteilungsgleichungen*. Es erhebt sich hier die Frage, in welchen Fällen diese Teilungen geometrisch mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden können. Die Antwort auf diese Frage hat *Gauß* (1801) gegeben: Die Gleichung $x^n = 1$ ist immer dann und nur dann durch eine endliche Kette quadratischer Gleichungen, also mit Zirkel und Lineal lösbar, 1. wenn n von der Form 2^m , oder 2. wenn n eine Primzahl von der Form $2^{(2^k)} + 1$ ist, oder 3. wenn n ein Produkt aus einer Potenz von 2 und beliebig vielen Primfaktoren von der Form $2^{(2^k)} + 1$ ist.

Ähnlich wie die Berechnung der n ten Einheitswurzeln gestaltet sich die Lösung der Gleichung $x^n = -1$, also die Berechnung von $\sqrt[n]{-1}$. Man setzt hier $-1 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$, so daß

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ}{n} + i \sin \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ}{n} \quad \text{wird.}$$

30. Ein zweiter Sonderfall, der sich nach Nr. 28 erledigen läßt, ist die Auflösung der allgemeinen binomischen Gleichung $x^n = a$, wo a irgendeine positive Zahl ist. Man löst diese Art Gleichungen am einfachsten in folgender Weise: Der Hauptwert von $\sqrt[n]{a}$, also derjenige reelle Wert, den man entweder mittels der Logarithmentafel oder nach irgendeiner Näherungsmethode oder durch Probieren finden kann, werde für einen Augenblick mit $\underline{a}^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet. Dann ist

$$x = \sqrt[n]{a} = \underline{a}^{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{1} = \underline{a}^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right) \\ [k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)].$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Gleichung $x^n = -a$, wo a eine positive ganze Zahl ist, lösen.

31. Hat man die allgemeinste binomische Gleichung $x^n = a + bi$ zu lösen, so bringt man $a + bi$ zunächst auf die Form $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und hat dann den Hauptwert von $\sqrt[n]{r}$ der Reihe nach mit den n Werten zu multiplizieren, die $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}}$ nach Nr. 28 annimmt. Den dort auftretenden Ausdruck $\cos \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$ kann man aber nach Nr. 21 in 2 Faktoren zerlegen und erhält schließlich

$$\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right) \left(\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right) \\ [k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)],$$

oder in Worten: *Man erhält alle Werte von $\sqrt[n]{a + bi}$, wenn man einen von ihnen der Reihe nach mit allen n ten Einheitswurzeln multipliziert.*

Geometrisch gesprochen erfordert die Auflösung einer allgemeinen binomischen Gleichung von der Form $x^n = a + bi$ erstens eine Teilung des Winkels α in n gleiche Teile und zweitens eine Teilung des Kreisumfangs in n gleiche Bogen. Die geometrische Konstruktion der n ten Wurzeln aus einer komplexen Zahl ist daher mit Zirkel und Lineal nur ausführbar, wenn der Exponent n von der Form 2^m ist. (Vgl. die Anmerkung in Nr. 29.)

§ 4. Quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten

Grundbegriffe und einfachste Fälle

1. Eine Gleichung 2. Grades mit 2 Unbekannten hat im allgemeinsten Falle die Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

sie erhält also 3 Glieder 2. Grades, 2 lineare Glieder und 1 absolutes Glied. Zur Berechnung von 2 Unbekannten sind, wie bei den linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten, 2 Gleichungen notwendig und hinreichend, die voneinander unabhängig sein müssen und sich nicht widersprechen dürfen. Haben beide Gleichungen die oben angegebene *allgemeinste* Form, so führt ihre Lösung auf eine allgemeine Gleichung 4. oder 3. Grades. Wir verschieben die Erledigung dieses Falles auf später (vgl. Nr. 10) und beschränken uns zunächst auf die Besprechung einiger Fälle, in denen die Lösung zweier Gleichungen mit 2 Unbekannten auf neue Gleichungen von höchstens 2. Grades führt.

Ist eine der beiden vorgelegten Gleichungen linear, während die andere die oben angegebene allgemeinste Form hat, so braucht man nur aus der linearen Gleichung eine der Unbekannten, etwa y , durch eine lineare Substitution auszudrücken und ihren Wert in die Gleichung 2. Grades einzusetzen. So erhält man eine in x quadratische Gleichung; ihre Lösungen setzt man in die Substitutionsgleichung ein und erhält die zugehörigen Werte von y .

Zahlenbeispiel: Es seien vorgelegt

$$(1) \quad x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x - y - 19 = 0,$$

$$(2) \quad 3x + 2y - 7 = 0.$$

Setzt man den aus (2) abzulesenden Wert $y = \frac{7-3x}{2}$ in (1) ein, so erhält man nach einfacher Umformung die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$; aus ihr ergibt sich $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, und die Substitutionsgleichung liefert $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

Statt der hier benutzten Substitutionsmethode wählt man in solchen Fällen, wo die vorgelegten Gleichungen eine besonders einfache Form haben, lieber andere Methoden, die schneller zum Ziele führen. Wir behandeln im folgenden die wichtigsten dieser Sonderfälle.

2. Gegeben ist die Summe und das Produkt der Unbekannten, also etwa

$$x + y = a, \quad x \cdot y = b.$$

Quadriert man beide Seiten der 1. Gleichung und subtrahiert dann $4xy = 4b$, so erhält man $(x-y)^2$ und damit auch $x-y$. Aus $x+y$ und $x-y$ findet man durch Addition und Subtraktion x und y .

Ist statt der Summe der Unbekannten die Differenz gegeben, so ermittelt man in entsprechender Weise zunächst die Summe der Unbekannten.

Noch schöner ist die Lösung, die der Vietasche Wurzelsatz (vgl. 7.-9. Schuljahr § 10, Nr. 6) erlaubt; nach diesem folgt aus $x + y = a$ und $x \cdot y = b$, daß x und y die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - az + b = 0$ sind. Ist $x - y = a$, $x \cdot y = b$ gegeben, so schreibt man diese Gleichungen in der Form $x + (-y) = a$, $x \cdot (-y) = -b$ und erhält dann nach dem Vietaschen Wurzelsatz x und $(-y)$ als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - az - b = 0$.

Graphisch läuft die Lösung der beiden vorgelegten Gleichungen auf die Aufgabe hinaus, den Schnitt der Geraden $x \pm y = a$ mit der gleichseitigen Hyperbel $x \cdot y = b$ zu ermitteln.

3. Gegeben ist die Summe der Quadrate der Unbekannten und das Produkt der Unbekannten, also etwa

$$x^2 + y^2 = a, \quad x \cdot y = b.$$

Graphisch ergeben sich hier die Lösungen als Schnitte eines Kreises mit einer zu ihm konzentrischen gleichseitigen Hyperbel.

Arithmetisch kann man das Gleichungssystem lösen, indem man $2xy = 2b$ einmal zur 1. Gleichung addiert, das zweite Mal von ihr subtrahiert. Dadurch erhält man $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$, hieraus durch Wurzelziehen $x + y$ und $x - y$. Im ganzen erhält man 4 Lösungspaare, weil sich aus $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$ je 2 Werte für $x + y$ und $x - y$ ergeben.

Auch hier läßt sich, wie in Nr. 2, der Vietasche Wurzelsatz mit Vorteil benutzen; aus $x^2 + y^2 = a$ und $x^2 y^2 = b^2$ erkennt man, daß x^2 und y^2 Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - az + b^2 = 0$ sind.

4. Gegeben ist die Summe der Quadrate der Unbekannten und die Summe oder Differenz der Unbekannten, also

$$x^2 + y^2 = a, \quad x \pm y = b.$$

Aus der 2. Gleichung erhält man durch Quadrieren eine neue Gleichung, von der man nur die 1. Gleichung abzuziehen braucht, um $\pm 2xy$ und damit xy zu erhalten. Dadurch ist der vorliegende Fall auf einen der in Nr. 2 oder 3 behandelten zurückgeführt.

Graphisch ergeben sich die Wertepaare für (x, y) als Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden.

5. Gegeben ist die Differenz der Quadrate der Unbekannten und die Summe oder Differenz der Unbekannten, z. B.

$$x^2 - y^2 = a, \quad x \pm y = b.$$

Dividiert man die 1. Gleichung durch die 2., so erhält man $x \mp y = \frac{a}{b}$ und hieraus in Verbindung mit der 2. Gleichung x und y . — (Die Division ist hier immer erlaubt, abgesehen von dem trivialen Fall, daß a und b beide 0 sind.)

Graphisch handelt es sich hier um den Schnitt einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Geraden.

6. Außer den bisher besprochenen Fällen lassen sich noch einige andere dadurch erledigen, daß man die gegebenen Gleichungen in geeigneter Weise umformt und in ihnen gewisse Verbindungen der Unbekannten als neue Unbekannte einführt. Wir werden uns mit dieser Art Aufgaben nicht beschäftigen, weil ihre Lösung mehr oder weniger auf Kniffe und Künsteleien hinausläuft; wir können auf solche Dinge um so eher verzichten, als sich die reellen Lösungen eines Systems von Gleichungen 2. Grades mit zahlenmäßig gegebenen Koeffizienten immer auf graphischem Wege ermitteln lassen. Mit dieser Lösungsart werden wir uns im folgenden noch eingehender befassen; hier sei zum Abschluß des arithmetischen Verfahrens nur noch angemerkt, daß man bei quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten am Schlusse der Rechnung zu prüfen hat, wie viele der erhaltenen Wertepaare brauchbar sind; denn da mehrfach im Laufe der Rechnung Gleichungen dadurch erhalten werden, daß man gegebene Gleichungen quadriert oder in Hilfsgleichungen Wurzeln zieht, so kann es vorkommen, daß nicht alle errechneten Lösungen der neu erhaltenen Gleichungen auch Lösungen der ursprünglichen Gleichungen sind. (Vgl. die Bemerkungen in 7.-9. Schuljahr § 10, Nr. 7 und 8.)

Die allgemeine Gleichung 2. Grades zwischen 2 Veränderlichen

7. Faßt man x und y nicht wie bisher als bestimmte, wenn auch anfänglich noch unbekannte Größen, sondern als *Veränderliche* auf, so stellt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Gleichung 2. Grades

$$(1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

eine *Kurve* dar. Wie diese Kurve gestaltet sein kann, werden wir im folgenden genauer untersuchen.

Eine Gleichung von der Form (1) läßt sich durch eine geeignete Substitution so umformen, daß das Glied mit xy verschwindet. Dreht man nämlich das Koordinatensystem um den Winkel α , d. h. setzt man (Fig. 11)

$$(2) \quad \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

so erhält man eine neue Gleichung, in der das Glied mit $x'y'$ den Koeffizienten

$$\begin{aligned} & -2a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha + 2c \sin \alpha \cos \alpha \\ & = b \cos 2\alpha - (a - c) \sin 2\alpha \end{aligned}$$

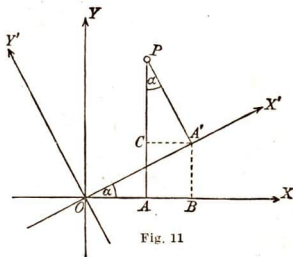


Fig. 11

erhält. Wünscht man also, daß dieser Koeffizient gleich 0 wird, so muß man den Winkel α so wählen, daß

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a-c}$$

wird. Die Gleichung (1) erscheint dann in der Form

$$(1a) \quad Ax'^2 + Cy'^2 + Dx' + Ey' + f = 0,$$

wobei

$$D = d \cos \alpha + e \sin \alpha, \quad E = e \cos \alpha - d \sin \alpha,$$

$$A = a \cos^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha \\ = \frac{1}{2} [a + c + (a - c) \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha],$$

$$C = a \sin^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha \\ = \frac{1}{2} [a + c - (a - c) \cos 2\alpha - b \sin 2\alpha]$$

ist. Wenn man in den beiden letzten Ausdrücken $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ durch $\operatorname{tg} 2\alpha$ ausdrückt und die Beziehung (3) benutzt, so erhält man

$$(4) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} (a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}), \\ C = \frac{1}{2} (a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}). \end{cases}$$

Eine solche Überführung der Gleichung (1) in die Form (1a) ist *immer* möglich, denn der Fall, daß der aus (3) erhaltene Winkel α unbestimmt wird, kann nur eintreten, wenn gleichzeitig $b=0$ und $a=c$ wird. In diesem Falle ist die Transformation zwar unausführbar, aber auch unnötig, denn dann hat ja die Gleichung (1) schon von vornherein die Form (1a), nur mit der Besonderheit, daß $A=C$ ist; die Gleichung stellt in diesem Sonderfall einen *Kreis* dar.

Geometrisch bedeutet die Transformation der Gleichung (1) in die Form (1a), daß die Achsen des neuen Koordinatensystems den Symmetrieachsen der Kurve parallel geworden sind.

Die Gleichung (1a) läßt sich noch weiter vereinfachen durch eine Verschiebung des Koordinatensystems, d. h. durch eine Substitution

$$(5) \quad \begin{cases} x' = x'' + m, \\ y' = y'' + n. \end{cases}$$

Dadurch bleiben die Koeffizienten der quadratischen Glieder ungeändert, das Glied mit x'' erhält den Koeffizienten $2Am + D$, das Glied mit y'' den Koeffizienten $2Cn + E$. Bringt man diese beiden Koeffizienten zum Verschwinden, wählt man also

$$(6) \quad m = -\frac{D}{2A}, \quad n = -\frac{E}{2C},$$

so nimmt die Gleichung (1a) die Form

$$(1b) \quad Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$$

an, wobei A und C die in (4) angegebene Bedeutung haben und

$$F = Am^2 + Cn^2 + Dm + En + f \quad \text{ist.}$$

Geometrisch bedeutet die Transformation von (1a) in (1b), daß jetzt die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen der Kurve zusammenfallen, so daß der Mittelpunkt der Kurve Koordinatenanfangspunkt geworden ist. Die Transformation wird unausführbar, wenn einer der in (6) angegebenen Werte von m und n unendlich groß oder unbestimmt wird. Wir wollen diese Ausnahmefälle vorweg behandeln.

Der Fall, daß A und C gleichzeitig verschwinden, ist undenkbar, weil dann die Gleichung (1a) gar nicht mehr quadratisch wäre. Es sind also noch die Fälle zu untersuchen, wo entweder A oder C gleich 0 ist. Wenn $A=0$, aber $D \neq 0$ ist, so lautet die Gleichung (1a) jetzt

$$Cy'^2 + Dx' + Ey' + f = 0;$$

sie stellt (vgl. 7.-9. Schuljahr § 10, Nr. 12ff.) eine *Parabel* dar, deren Achse parallel der Abszissenachse verläuft.

Ist $A=0$ und $D=0$, so hat die Gleichung (1a) die Form

$$Cy'^2 + Ey' + f = 0;$$

ihre linke Seite ist nach dem Vietaschen Wurzelsatze in zwei lineare Faktoren zerlegbar, also stellt die Gleichung, wenn sie überhaupt reelle Wurzeln hat, ein Paar zur Abszissenachse *paralleler Geraden* dar.

Ist $C=0$, aber $E \neq 0$, so erscheint die Gleichung (1a) in der Form

$$Ax'^2 + Dx' + Ey' + f = 0,$$

stellt also eine *Parabel* dar, deren Achse parallel zur Ordinatenachse ist. Wenn $C=0$ und $E=0$ ist, so lautet (1a) jetzt

$$Ax'^2 + Dx' + f = 0;$$

hier läßt sich wieder die linke Seite in 2 Linearfaktoren zerlegen, d. h. die Gleichung stellt ein Paar zur Ordinatenachse *paralleler Geraden* dar, die unter Umständen auch imaginär sein können.

Wir haben also bisher gefunden: Die in (5) und (6) definierte Koordinatentransformation, durch welche die Gleichung (1a) in die Form (1b) übergeführt werden kann, wird unausführbar, wenn die Gleichung (1) eine Parabel oder ein Paar paralleler Geraden darstellt; man erkennt das Eintreten eines dieser Fälle daran, daß eine der Größen A und C verschwindet, oder mit anderen Worten gesagt, daran, daß $AC=0$ wird. Nach (4) ist aber $AC=4ac-b^2$, man kann daher sagen: Die Gleichung (1) stellt eine Parabel oder ein Paar paralleler Geraden dar, wenn $4ac-b^2=0$ ist.

Die Fälle, in denen $4ac - b^2 \geq 0$ ist, oder mit anderen Worten die Fälle, in denen die Gleichung (1) in die Form (1b) transformiert werden kann, sind jetzt leicht zu erledigen. Wir dürfen in der Gleichung (1b) den Koeffizienten A stets als positiv annehmen (wäre er nämlich negativ, so würde es genügen, die Gleichung gliedweise mit -1 zu multiplizieren); wir brauchen daher nur noch die beiden Fälle $C \geq 0$ zu untersuchen.

Ist $C > 0$ und $F > 0$, so hat die Gleichung (1b) *keine geometrische Bedeutung*, weil nur imaginäre Werte von x und y der Gleichung genügen („imaginäre Ellipse“). Ist $C > 0$ und $F = 0$, so sind $x = 0$, $y = 0$ die einzigen reellen Werte, die der Gleichung genügen, diese stellt also einen *einzelnen Punkt*, den Koordinatenanfang, dar. Ist $C > 0$ und $F < 0$, so erscheint die Gleichung (1b) in der Form

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1,$$

sie stellt also eine reelle *Ellipse* dar, deren Halbachsen die Werte $\sqrt{-\frac{F}{A}}$ und $\sqrt{-\frac{F}{C}}$ haben. Ist $C = A$, so haben wir den schon bei der Drehung des Koordinatensystems erwähnten Sonderfall, daß die Ellipse zu einem *Kreise* wird.

Ist $C < 0$, so stellt die Gleichung (1b) eine *Hyperbel* dar, die im Falle $F = 0$ in ein *Paar sich schneidender*, nämlich durch den Anfangspunkt gehender *Geraden* ausartet.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Gleichung (1) stellt, wenn sie überhaupt eine geometrische Bedeutung hat, eine *Ellipse, Parabel oder Hyperbel* dar, je nachdem $4ac - b^2$ *positiv, 0 oder negativ* ist; unter Umständen kann die Kurve auch in eine ihrer Grenzformen entarten. In der Geometrie wird gezeigt, daß man die Ellipse, Parabel und Hyperbel als ebene Schnitte eines Kreiskegels erhalten kann und daß man daher berechtigt ist, die 3 Kurven mit dem gemeinsamen Namen „*Kegelschnitte*“ zu bezeichnen. Wir können daher das Ergebnis unserer Untersuchungen auch so aussprechen:

Satz. Die allgemeine Gleichung 2. Grades zwischen 2 Veränderlichen stellt einen Kegelschnitt oder eine seiner Grenzformen dar.

8. Wir wollen noch untersuchen, wieviel Punkte zur Bestimmung eines allgemeinen Kegelschnittes notwendig und hinreichend sind. Dividiert man in der allgemeinen Gleichung 2. Grades alle Glieder durch einen der vorhandenen Koeffizienten, etwa durch den Koeffizienten von x^2 , so nimmt die Gleichung die Form
- $$x^2 + k_1 xy + k_2 y^2 + k_3 x + k_4 y + k_5 = 0$$

an. Die Kegelschnittsgleichung enthält also 5 wesentliche Konstanten; sie ist bestimmt, wenn man die 5 Konstanten k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 kennt. Zur Bestim-

mung dieser 5 Größen sind aber 5 Gleichungen erforderlich, also 5 Wertepaare (x, y) oder, was dasselbe sagt, 5 Punkte. Wir können also sagen: *Ein allgemeiner Kegelschnitt ist durch 5 Punkte bestimmt*. Weitere Punkte kann man dann entweder rechnerisch aus der Gleichung oder zeichnerisch mittels des *Pascalschen Satzes* finden. Warum wir diesen rein geometrischen Weg hier erwähnen, wird sich in Nr.9 zeigen.

Graphische Lösung zweier Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten

9. Sind 2 Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten in allgemeiner Form

$$a_1 x^2 + b_1 x y + c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0,$$

$$a_2 x^2 + b_2 x y + c_2 y^2 + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0,$$

aber mit zahlenmäßig gegebenen Koeffizienten vorgelegt, so kann man in beiden Gleichungen die Größen x, y einstweilen als *veränderlich* ansehen. Die Gleichungen stellen dann, wie in Nr.7 gezeigt, 2 Kegelschnitte dar. Um diese zu zeichnen, braucht man nur in der üblichen Weise einer der Veränderlichen, etwa der Größe x , der Reihe nach irgendwelche passend erscheinenden (z. B. ganzzahlige) Werte beizulegen, dann die zugehörigen Werte von y aus der Kurvengleichung zu berechnen und schließlich die so gefundenen Wertepaare

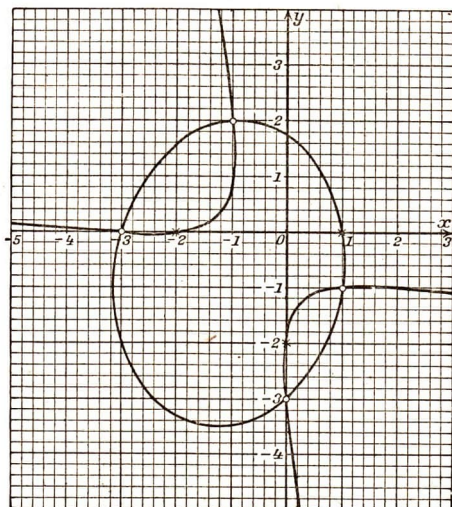


Fig. 12

als Punkte in ein Koordinatennetz einzutragen. Als Beispiel diene die in Fig. 12 gegebene graphische Lösung des Gleichungspaares

$$(1) \quad x^2 + 8xy + y^2 + 5x + 5y + 6 = 0,$$

$$(2) \quad 7x^2 - xy + 4y^2 + 14x + 5y - 21 = 0.$$

Man erhält hierbei folgende Übersicht:

Kegelschnitt 1			Kegelschnitt 2		
x	y		x	y	
-5	0,17	(34,8)	-4	(imag.)	(imag.)
-4	0,08	(26,9)	-3	0	-2
-3	0	(19)	-2	1,58	-3,33
-2	0	(9)	-1	2	-3,5
-1,5	0,11	(6,89)	-0,5	1,97	-3,34
-1,11	0,5	3,38	0	1,75	-3
-1	1	2	0,5	1,28	-2,4
0	-3	-2	1	0	-1
0,5	(-7,89)	-1,11	2	(imag.)	(imag.)
1	(-12)	-1			
2	(-20)	-1			
3	(-27,4)	-1,08			

Die in der Figur nicht benutzten Werte sind in der Tabelle eingeklammert.

Verbindet man die in das Koordinatensystem eingezeichneten Punkte freihändig zu Kurvenzügen, so findet man bald heraus, ob die beiden Kurven sich schneiden oder nicht, mit anderen Worten, ob die vorgelegten Gleichungen reelle Lösungspaare (x, y) haben oder nicht. Erkennt man etwa nach den ersten Versuchen, daß die Kegelschnitte keine gemeinsamen Punkte haben, so ist die Fortsetzung des Verfahrens als aussichtslos aufzugeben, denn auf graphischem Wege kann man keine imaginären Wurzeln finden.

Diesem ungünstigsten Falle steht der günstigste gegenüber, daß man schon aus der Tabelle erkennt, welche Wertepaare (x, y) in beiden Übersichten vorkommen; in unserem Zahlenbeispiel sind es die Wertepaare $(-3; 0)$, $(-1; 2)$, $(0, -3)$, $(1, -1)$.

Gewissermaßen ein Mittelding zwischen diesen beiden ist der Fall, daß man beim freihändigen Verbinden der einzelnen konstruierten Punkte die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte schon mit einiger Annäherung zeichnen kann; man wird dann in der Nähe dieser Stellen noch weitere Punkte zu finden suchen, um so die Schnittpunkte und damit die Lösungspaare der vorgelegten Gleichungen so genau wie nötig zu bestimmen. Zur Erreichung dieses Zieles muß jedes Mittel willkommen sein, man braucht nicht ängstlich darauf bedacht zu sein, die Genauigkeit gerade auf rechnerischem Wege soweit wie möglich zu treiben, denn da das graphische Verfahren ein geometrisches ist,

so handelt man durchaus folgerichtig, wenn man auch rein geometrische Sätze, wie etwa den *Pascalschen* Satz, benutzt. Dieser Satz kann deswegen mit großem Vorteil benutzt werden, weil er nicht bloß neue Punkte finden lehrt, sondern weil er auch erlaubt, in jedem einzelnen Punkte schnell und einfach ohne Zirkel, mit alleiniger Hilfe des Lineals die Tangente zu konstruieren. Kennt man die Tangenten, so kann man den Verlauf der Kurve an der betreffenden Stelle mit weit größerer Sicherheit angeben, als wenn man nur die einzelnen Punkte freihändig oder auch mit einem Kurvenlineal verbindet. — Eine weitere Möglichkeit, neue Punkte des gesuchten Kegelschnittes zu konstruieren, bietet die in Nr. 7 gelehrt Transformation auf die Achsenrichtungen und den Mittelpunkt der Kurve.

10. Um 2 allgemeine Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten auf rechnerischem Wege zu lösen, könnte man folgendermaßen verfahren. Mittels einer der Gleichungen drückt man eine der Unbekannten durch die andere, also etwa y durch x , aus und setzt den erhaltenen Wert in die 2. Gleichung ein. Dadurch erhält man eine neue Gleichung, die sich, sobald man die Quadratwurzeln auf die übliche Weise entfernt, als eine in x biquadratische Gleichung erweist. Eine solche Gleichung 4. Grades hat 4 reelle oder 2 Paare konjugiert komplexer Wurzeln (§ 8, Nr. 8), die man graphisch oder mit Annäherungsmethoden (§ 8, Nr. 11—13) bestimmen kann. Aus den 4 Werten von x ergeben sich dann vermöge der Substitutionsgleichung auch 4 Werte von y . Wir können also sagen:

Satz. Zwei allgemeine Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten haben 4 Lösungspaare.

Geometrisch gesprochen heißt dies: *Zwei Kegelschnitte haben im allgemeinen 4 Schnittpunkte.*

§ 5. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Permutationen

1. Eine *Komplexion* ist eine Aneinanderreihung von Dingen; die Dinge heißen *Elemente*. Bei den Komplexionen kommt es auf die Elemente, ihre Anzahl und ihre Anordnung an.

Unter den *Permutationen* von n Elementen versteht man die Komplexionen, die alle n Elemente, und zwar jedes nur einmal enthalten. Die Permutationen von n Elementen unterscheiden sich also nur durch die Anordnung oder Reihenfolge der Elemente, die auch Glieder der Komplexion heißen.

Beispiel: Die Permutationen der 3 Elemente a , b und c sind

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen bezeichnen wir mit P_n . Es ist beispielsweise $P_1 = 1$ und, wie wir eben gesehen haben, $P_3 = 6$.

2. Jede der Permutationen von $n - 1$ Elementen führt auf n Permutationen von n Elementen, da man das n te Glied vor jedes der $n - 1$ Glieder und hinter das letzte Glied stellen kann. Man erhält also die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn man die Anzahl der Permutationen von $n - 1$ Gliedern mit n multipliziert:

$$(1) \quad P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Nach der Rekursionsformel (1) ist

$$P_n = n P_{n-1}$$

$$P_{n-1} = (n-1) \cdot P_{n-2}$$

$$P_{n-2} = (n-2) \cdot P_{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_3 = 3 \cdot P_2$$

$$P_2 = 2 \cdot P_1$$

$$P_1 = 1.$$

Durch Multiplikation aller dieser Gleichungen erhält man

$$(2) \quad P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) (n-1) n.$$

3. Man führt für das Produkt auf der rechten Seite der Formel (2) das Symbol $n!$ (gelesen n -Fakultät) ein, setzt also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) (n-1) n.$$

Für die Anzahl der Permutationen von n Elementen erhält man danach die Formel

$$(3) \quad P_n = n!.$$

4. Sind unter den n Elementen, deren Permutationen gebildet werden sollen, a gleiche, so stimmen $a!$ Permutationen miteinander überein, werden also jetzt nur als *eine* gezählt. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, von denen a gleich sind, ist also $\frac{n!}{a!}$. Sind außerdem noch b Elemente und noch c weitere Elemente untereinander gleich, so ist die Anzahl der Permutationen, die wir mit Pw_n bezeichnen wollen,

$$Pw_n = \frac{n!}{a! b! c!}.$$

Variationen¹⁾

5. Die aus jedesmal k Elementen bestehenden Komplexionen, die man aus n verschiedenen Elementen ($n \geq k$) bilden kann, nennt man *Variationen von n Elementen zur k ten Klasse*, und zwar *ohne Wiederholung*, wenn kein Element in

¹⁾ Man kann auch zuerst den Begriff der Kombinationen (Nr. 11) definieren und ihre Anzahl ähnlich wie hier in Nr. 6 die der Variationen bestimmen. Die in Nr. 12 abgeleitete Beziehung liefert dann die Anzahl der Variationen.

irgendeiner der Variationen mehrfach vorkommt. Komplexionen, die aus den gleichen Elementen bestehen, sich aber durch deren Anordnung unterscheiden, sind als verschiedene Variationen zu zählen.

Beispiel: Sollen aus den 4 Elementen a, b, c und d die Variationen zur 2. Klasse ohne Wiederholung gebildet werden, so erhält man

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.$$

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k ten Klasse bezeichnen wir mit $V_n^{(k)}$. Es ist beispielsweise $V_n^{(1)} = n$ und, wie wir eben gefunden haben, $V_4^{(2)} = 12$.

6. Wir leiten zunächst eine Rekursionsformel für die Anzahl $V_n^{(k)}$ ab. Es seien alle Variationen von n Elementen zur $(k-1)$ ten Klasse ohne Wiederholung gebildet. Wir greifen eine von ihnen beliebig heraus. Es gibt noch $n-k+1 = [n-(k-1)]$ Elemente, die in dieser Variation nicht vorkommen. Jedes dieser $n-k+1$ Elemente liefert, da wir es vor jedes der $k-1$ Elemente und hinter das letzte setzen können, k neue Variationen. Insgesamt entstehen also $k \cdot (n-k+1)$ neue Variationen zur k ten Klasse aus dieser einen Variation zur $(k-1)$ ten Klasse. Verfährt man so mit jeder der $V_n^{(k-1)}$ Variationen, so kommt man auf insgesamt $k \cdot (n-k+1) \cdot V_n^{(k-1)}$ Variationen zur k ten Klasse. Dabei ist aber jede Variation zur k ten Klasse k mal gezählt, denn jede von ihnen kann man auf diese Weise durch Hinzufügen des 1., des 2., bis hin zum k ten Gliede aus einer Variation $(k-1)$ ter Klasse entstanden denken. Wir müssen also die eben erhaltene Anzahl noch durch k dividieren. So ergibt sich

$$(1) \quad V_n^{(k)} = (n-k+1) \cdot V_n^{(k-1)}.$$

7. Nach der Rekursionsformel (1) ist

$$V_n^{(k)} = (n-k+1) \cdot V_n^{(k-1)}$$

$$V_n^{(k-1)} = (n-k+2) \cdot V_n^{(k-2)}$$

$$V_n^{(k-2)} = (n-k+3) \cdot V_n^{(k-3)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$V_n^{(2)} = (n-1) \cdot V_n^{(1)}$$

$$V_n^{(1)} = n.$$

Durch Multiplikation folgt daraus

$$(2) \quad V_n^{(k)} = n(n-1) \cdots (n-k+2)(n-k+1).$$

Benutzt man die in Nr. 3 eingeführte Schreibweise, dann erhält man

$$(3) \quad V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

8. Liegen wieder n verschiedene Elemente vor, und bildet man aus ihnen Komplexionen von je k Elementen unter Berücksichtigung der Anordnung, läßt

aber zu, daß die Elemente wiederholt auftreten können, dann erhält man die *Variationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung*.

Beispiel: Sollen aus den 4 Elementen a, b, c und d die Variationen zur 2. Klasse mit Wiederholung gebildet werden, so erhält man

$aa, ab, ba, ac, ca, ad, da, bb, bc, cb, bd, db, cc, cd, dc, dd$.

Wir bezeichnen die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung mit $Vw_n^{(k)}$. Es ist z. B. $Vw_n^{(1)} = n$ und, wie wir eben gefunden haben, $Vw_4^{(2)} = 16$.

9. Greift man irgendeine der aus n Elementen zur $(k-1)$ ten Klasse gebildeten Variationen mit Wiederholung heraus, so kann man aus ihr dadurch, daß man irgendeines der n Elemente an irgendeiner der k möglichen Stellen einschaltet, insgesamt $n \cdot k$ Variationen zur k ten Klasse bilden. Aus allen $Vw_n^{(k-1)}$ Variationen zur $(k-1)$ ten Klasse kann man also insgesamt $n \cdot k \cdot Vw_n^{(k-1)}$ Variationen zur k ten Klasse bilden. Diese sind aber nicht alle verschieden. Jede dieser Variationen zur k ten Klasse kann nämlich dadurch aus einer der Variationen der $(k-1)$ ten Klasse entstanden gedacht werden, daß das 1., das 2. usf. bis zum k ten Gliede hinzugefügt wurde. Die Zahl der verschiedenen Variationen zur k ten Klasse ist also nur gleich dem k ten Teil der eben berechneten Anzahl. So erhalten wir die Rekursionsformel

$$(1) \quad Vw_n^{(k)} = n \cdot Vw_n^{(k-1)}.$$

10. Bildet man nacheinander

$$\begin{aligned} Vw_n^{(k)} &= n \cdot Vw_n^{(k-1)} \\ Vw_n^{(k-1)} &= n \cdot Vw_n^{(k-2)} \\ &\dots \dots \dots \\ Vw_n^{(2)} &= n \cdot Vw_n^{(1)} \\ Vw_n^{(1)} &= n, \end{aligned}$$

dann erhält man durch Multiplikation

$$(2) \quad Vw_n^{(k)} = n^k.$$

Kombinationen

11. Die aus jedesmal k verschiedenen Elementen bestehenden Komplexionen, die man aus n Elementen bilden kann, heißen *Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung*, wenn man die Anordnung der Elemente innerhalb der Komplexion außer Betracht läßt.

Beispiel: Sollen aus den 4 Elementen a, b, c und d die Kombinationen zur 2. Klasse ohne Wiederholung gebildet werden, so erhält man

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd.$$

Wir bezeichnen die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung mit $C_n^{(k)}$. Es ist beispielsweise $C_n^{(1)} = n$ und, wie wir eben gefunden haben, $C_4^{(2)} = 6$.

12. Wir erhalten die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung aus den Variationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung, wenn wir von allen nur durch die Anordnung der k Elemente unterschiedenen Variationen immer nur eine Komplexion herausgreifen. Die k Elemente kann man auf $k!$ verschiedene Weise anordnen (Nr. 3). Mit- hin ist

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{k!} V_n^{(k)}.$$

Setzt man in diese Gleichung den in Nr. 7 gefundenen Wert für die Anzahl der Variationen ein, dann erhält man

$$C_n^{(k)} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

13. Liegen wieder n Elemente vor, und bildet man aus ihnen Komplexionen zu je k Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung, läßt aber zu, daß die Elemente auch wiederholt auftreten können, dann erhält man die *Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung*.

Beispiel: Sollen aus den 4 Elementen a, b, c und d die Kombinationen zur 2. Klasse mit Wiederholung gebildet werden, so erhält man

$$aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd.$$

Wir bezeichnen die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung mit $Cw_n^{(k)}$. Es ist z. B. $Cw_n^{(1)} = n$ und, wie wir eben gesehen haben, $Cw_4^{(2)} = 10$.

14. Es seien die sämtlichen Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung gebildet. Die Elemente seien in jeder Komplexion der Reihe nach geordnet. Wir wollen annehmen, die n Elemente heißen ihrer Reihenfolge nach a_1, a_2, \dots, a_n . Dann führen wir noch $(k-1)$ weitere Elemente $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k-1}$ ein. Wir nehmen nun mit jeder der vorliegenden Komplexionen folgende Veränderung vor: Das 1. Element lassen wir unverändert. Das 2. Element in jeder Komplexion ersetzen wir durch das auf dieses Element in der Reihe a_1, a_2, \dots folgende (also z. B. a_1 durch a_2, a_2 durch a_3 usw.). Das 3. Element in jeder Komplexion ersetzen wir durch das drittfolgende in der Reihe a_1, a_2, \dots (also z. B. a_1 durch a_3, a_2 durch a_4 usw.). Damit fahren wir fort, bis schließlich das letzte Glied jeder Komplexion, also das k te, durch das auf dieses an k ter Stelle in der Reihe a_1, a_2, \dots folgende ersetzt ist. Mehr als $n+k-1$ Glieder braucht man dazu nicht. Durch diese Veränderung der Komplexionen sind alle Wiederholungen beseitigt worden. Wir sind auf Kombinationen *ohne* Wiederholung gekommen, nun aber nicht mehr aus n Ele-

menten, sondern aus $n+k-1$ Elementen; es ist auch keine dieser Kombinationen zweimal aufgetreten. Geht man auf dem umgekehrten Wege von den Kombinationen von $n+k-1$ Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung zu den Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse mit Wiederholung zurück, so liefert jede Kombination der $n+k-1$ Elemente ohne Wiederholung eine und nur eine Kombination der n Elemente mit Wiederholung. Es ist also

$$Cw_n^{(k)} = C_{n+k-1}^{(k)}.$$

Setzt man hierin aus Nr. 12 den Ausdruck für $C_{n+k-1}^{(k)}$ ein, so erhält man

$$Cw_n^{(k)} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}.$$

15. Blicken wir noch einmal zurück auf die Definition der 3 Begriffe: Permutation, Variation und Kombination. Der wesentliche Unterschied zwischen ihnen, mag man nun die Wiederholungen berücksichtigen oder nicht, läßt sich kurz so kennzeichnen: *Permutationen* unterscheiden sich *nur* durch die *Anordnung* der Elemente, *Kombinationen* *nur* durch die *Auswahl* der Elemente, *Variationen* durch *Auswahl und Anordnung* der Elemente gleichzeitig.

Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten

16. Wenn man das Produkt aus n Faktoren

$$(a+b)(a+b)\cdots(a+b)(a+b)$$

berechnen will, so kann man zunächst feststellen, daß die folgenden $n+1$ Teilprodukte $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n$ und nur diese auftreten. Wir stellen fest, wie oft jedes dieser Teilprodukte auftritt. a^n und ebenso b^n erscheinen nur einmal. $a^{n-1}b$ erscheint n mal, denn auf n verschiedene Weisen kann ich aus den n Klammern einen Summanden b herausgreifen. Das Teilprodukt $a^{n-k}b^k$ erscheint so oft, als ich aus den n Klammern k Summanden b ohne Rücksicht auf die Reihenfolge herausgreifen kann. Diese Anzahl ist $C_n^{(k)}$. Mithin ist (*binomischer Lehrsatz*)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^{(1)} a^{n-1} b + C_n^{(2)} a^{n-2} b^2 + \dots \\ + C_n^{(n-1)} a b^{n-1} + b^n.$$

17. Als Abkürzung für die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k ten Klasse ohne Wiederholung führt man das Symbol $\binom{n}{k}$ ein [lies: n über k]. Es ist also (Nr. 12)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wo n und k positive ganze Zahlen sind und $n > k$ ist.

so gibt der 1. Satz in Nr. 18 die Symmetrieeigenschaft dieses Zahlendreiecks in bezug auf die Mittelsenkrechte an.

Der 2. Satz gibt an, wie eine Reihe von Binomialkoeffizienten aus der vorangehenden entsteht. Den $(k+1)$ ten Binomialkoeffizienten der $(n+1)$ ten Reihe $\binom{n+1}{k+1}$ erhält man, indem man die links und rechts über ihm stehenden Binomialkoeffizienten der n ten Reihe, es sind der k te und der $(k+1)$ te, addiert.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit

20. Als *mathematische Wahrscheinlichkeit* w für das Eintreten eines Ereignisses definiert man den Wert des Bruches

$$w = \frac{m}{n},$$

wo m die Anzahl der für das Eintreten des Ereignisses günstigen, n die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ist. Um z. B. die Wahrscheinlichkeit festzustellen dafür, daß man mit einem gewöhnlichen Würfel eine gerade Zahl wirft, dividiert man die Anzahl der günstigen Fälle (das sind die, bei denen der Wurf 2, 4 oder 6 fällt) durch die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle, das sind 6. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$.

Es kommt bei der Ausrechnung der Wahrscheinlichkeit sehr darauf an, daß man angibt, was man als überhaupt mögliche Fälle berücksichtigt; danach richtet sich dann die Zahl der günstigen Fälle. In unserem Beispiel ist z. B. der Fall, daß der Würfel auf keine der Seitenflächen fällt, daß er „brennt“, nicht als möglicher Fall in Rechnung gezogen worden. Es ist weiter notwendig, daß die als möglich betrachteten Fälle als gleichberechtigt angesehen werden. Das würden sie in unserem Falle z. B. dann nicht sein, wenn der Würfel etwa dadurch gefälscht wäre, daß die eine Seite mit Blei ausgelegt und deshalb schwerer gemacht worden wäre. Dann würde der Würfel auf die so ausgezeichnete Seite häufiger fallen als auf die andere.

Ist das Eintreten des Ereignisses unmöglich, dann ist $m=0$ und damit $w=0$. Ist das Eintreten des Ereignisses gewiß, d. h. tritt das Ereignis in allen überhaupt möglichen Fällen ein, dann ist $m=n$ und mithin $w=1$.

21. Ist $w = \frac{m}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses, dann ist die Wahrscheinlichkeit w' dafür, daß das Ereignis nicht eintritt,

$$w' = 1 - w.$$

Von den n möglichen Fällen sind nämlich hier $n - m$ günstige Fälle zu zählen; es ist also $w' = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$.

Es ist also $w + w' = 1$.

22. Ist w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines 1. Ereignisses, w_2 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines 2., dann ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß entweder das eine oder das andere Ereignis eintritt,

$$w = w_1 + w_2.$$

Es sei nämlich $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$ und $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$. Dann erhält man durch Kombination der für beide Ereignisse in Betracht kommenden Fälle $n_1 \cdot n_2$ mögliche Fälle, von denen $m_1 n_2$ für das Eintreten des 1., $m_2 n_1$ für das Eintreten des 2. Ereignisses günstig sind. Dafür, daß das eine oder das andere Ereignis eintritt, sind also $m_1 n_2 + m_2 n_1$ Fälle günstig. Die Wahrscheinlichkeit w ist deshalb

$$\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = w_1 + w_2.$$

Handelt es sich um mehrere Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, \dots, w_n , dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eines von ihnen eintritt,

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

23. Ist w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses, w_2 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines anderen, davon unabhängigen Ereignisses, dann ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß sowohl das eine wie das andere Ereignis eintritt,

$$w = w_1 \cdot w_2.$$

Es sei nämlich $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$ und $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$, dann erhält man durch Kombination der für beide Ereignisse in Betracht kommenden Fälle insgesamt $n_1 \cdot n_2$ mögliche Fälle. Günstig sind davon $m_1 \cdot m_2$, mithin ist $w = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = w_1 \cdot w_2$. Handelt es sich um mehrere Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, \dots, w_n , dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl das 1. wie das 2., 3. usf. Ereignis eintritt,

$$w = w_1 \cdot w_2 \dots w_n.$$

§ 6. Versicherungsrechnung¹⁾

Grundbegriffe

1. Man schließt Versicherungsverträge ab, um für sich oder seine Angehörigen bei Eintritt eines Schadens eine bestimmte Geldsumme zur Verfügung zu haben. Der Schaden kann von zweierlei Art sein, entweder ein solcher, der eintreten *kann*, oder ein solcher, der sicher einmal eintreten *muß* und bei dem nur der Zeitpunkt des Eintretens ungewiß ist. Als Beispiele für Ver-

¹⁾ Der Inhalt dieses Paragraphen, mit alleiniger Ausnahme von Nr. 3, ist auch ohne Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung verständlich.

sicherungen, die sich mit einem möglicherweise eintretenden Schaden befassen, nennen wir Feuerversicherung, Hagelversicherung, Unfallversicherung. Die einzige Versicherungsart, die es mit einem notwendig einmal eintretenden Schaden zu tun hat, ist die Lebensversicherung; sie ist daher auch (ganz abgesehen von ihrer großen wirtschaftlichen Bedeutung) die einzige Versicherungsart, die ein hohes mathematisches Interesse beanspruchen kann. Aus diesem Grunde beschränken wir uns im folgenden auf die Lebensversicherungsrechnung.

Die Grundlage der Lebensversicherungsrechnung bilden die sogenannten Sterblichkeitstafeln; sie sind teils auf Grund umfassender und regelmäßig wiederkehrender Volkszählungen, teils nach den langjährigen Erfahrungen der Lebensversicherungsgesellschaften aufgestellt. Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit solcher Sterblichkeitstafeln bildet das Gesetz *der großen Zahlen*, welches aussagt, daß eine Reihe von Ereignissen, deren Eintreten oder Nichteintreten sehr oft beobachtet worden ist, sich auch weiterhin nach gleichem Zahlenverhältnis wiederholen wird, solange sich an den Vorbedingungen nichts ändert. Wenn z. B. durch viele Volkszählungen festgestellt ist, daß in Deutschland die Anzahl der 80jährigen ungefähr halb so groß ist wie die Anzahl der 75jährigen, so darf angenommen werden, daß das auch in den nächsten Jahren für große Bevölkerungsteile (Provinzen, Großstädte) so bleiben wird; es ist aber unzulässig zu folgern, daß von den wenigen 75jährigen, die in einer kleinen Stadt wohnen, nach 5 Jahren nur noch die Hälfte am Leben sein wird.

2. Die Sterblichkeitstafeln gehen von einer bestimmten großen (im übrigen willkürlich gewählten) Anzahl l_n gleichaltriger, nämlich n jähriger Personen aus und geben an, wie viele von diesen das x te Jahr erleben; die Anzahl dieser Personen wird mit l_x bezeichnet und heißt die *Anzahl der Lebenden des Alters x* (Spalte 2 der Tafel in § 17 der Aufgabensammlung).

Beispiel: Von 100000 20jährigen Personen erleben erfahrungsgemäß 91578 das 30. Jahr und 33701 das 70. Jahr.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen kann man mittels eines Regeldetritschlusses aus der Sterblichkeitstafel berechnen, wieviel von einer beliebigen, wenn nur hinreichend großen Anzahl Personen irgendeines Alters ein bestimmtes anderes Alter erreichen.

Beispiel: Man gehe von 100000 40jährigen Personen aus; wie viele von diesen werden nach 10 Jahren noch am Leben sein? Die Sterblichkeitstafel lehrt, daß von 82878 40jährigen Personen erfahrungsgemäß 71831 das 50. Jahr erreichen, also werden von 100000 40jährigen Personen nach 10 Jahren noch $100000 \cdot 71831 : 82878$, d. h. 86671 Personen am Leben sein.

3. Außer den l_x benutzt man zuweilen auch noch die Differenz

$$l_x - l_{x+1} = d_x \quad (\text{Toten der Sterbetafel}),$$

sowie die Quotienten

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (\text{Lebenswahrscheinlichkeit der } x\text{-jährigen})$$

und

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (\text{Sterbenswahrscheinlichkeit der } x\text{-jährigen}).$$

Die Quotienten p_x und q_x haben die Form der mathematischen Wahrscheinlichkeiten (§ 5, Nr. 20). Sie unterscheiden sich aber ihrem Wesen nach von jenen, denn dort handelt es sich um Ereignisse, bei denen man sowohl die Anzahl der günstigen Fälle als auch die Anzahl aller möglichen Fälle von vornherein genau kennt, hier dagegen handelt es sich um Ereignisse, bei denen man weder die Anzahl der günstigen Fälle noch die Anzahl aller möglichen Fälle von vornherein kennt. Man muß sich also hier auf Zahlen stützen, die früheren Erfahrungen entnommen sind, und kann nur annehmen, daß dieselben Erfahrungen auch in Zukunft gemacht werden, solange sich an den Grundbedingungen nichts ändert (statistische Wahrscheinlichkeit). Ein andersgearteter Unterschied ist folgender: Bei der mathematischen Wahrscheinlichkeit handelt es sich um durchaus gleichartige Elemente und gleichberechtigte Erscheinungen, hier dagegen um stark ausgeprägte, persönliche Eigentümlichkeiten, z. B. Abhängigkeit der Lebensdauer von dem Gesundheitszustand, der Lebensweise, dem Klima des Aufenthaltsortes, dem Beruf usw.

So groß der Wesensunterschied zwischen mathematischer und statistischer Wahrscheinlichkeit ist, so finden sich doch andererseits rein formal viele Ähnlichkeiten, z. B. folgt aus den oben gegebenen Definitionen der Satz $p_x + q_x = 1$, der sich mit dem in § 5, Nr. 21 bewiesenen Satze $w + w' = 1$ vergleichen läßt.

4. Die Versicherungsanstalt, bei der man sich versichert, soll im folgenden als *Versicherer* oder *Versicherungsgesellschaft*, derjenige, der sich versichert, als *Versicherungsnehmer* oder *Versicherter* bezeichnet werden. Der Versicherte zahlt der Versicherungsgesellschaft eine bestimmte Summe ein, und zwar entweder einmal (*Mise*) oder wiederholt (*Prämie*); die Versicherungsgesellschaft zahlt dafür dem Versicherten zu festgesetzter Zeit eine bestimmte „Versicherungssumme“ aus, und zwar spricht man hier von *Kapitalversicherung* oder von *Rentenversicherung*, je nachdem der Versicherer einmal oder wiederholt zu zahlen hat.

Allgemein wird für den theoretischen Teil der Versicherungsrechnung als Grundsatz angenommen, daß die Leistungen des Versicherten und des Versicherers einander gleich sein müssen, wenn die Versicherung „billig“ sein soll. (Der Gegensatz von „billig“ wäre hier nicht etwa „teuer“, sondern „unbillig“.)

Freilich könnte diese theoretische Forderung der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung praktisch nur dann durchgeführt werden, wenn die Gesellschaft keinerlei Verwaltungskosten hätte und auf jeden Gewinn verzichten wollte. Da man das keiner Gesellschaft zumuten kann, muß statt der theoretisch berechneten („Netto“-) Prämie eine höhere („Brutto“-) Prämie erhoben werden, die durchschnittlich etwa $\frac{1}{3}$ mehr beträgt als jene. Wir begnügen uns hier mit der Berechnung der Nettoprämien.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen hat die Forderung, daß die Leistungen des Versicherers und des Versicherten gleich sein sollen, nur dann einen Sinn, wenn sich eine hinreichend große Anzahl von Versicherungsnehmern gleichzeitig an der Versicherung beteiligen. Wie groß diese Anzahl genommen wird, ist an sich gleichgültig, der Bequemlichkeit wegen wählt man dafür die Zahl l_x der Sterblichkeitstafel; also wenn z. B. ein 31-jähriger irgendeine Versicherung abschließen will, so nimmt man an, daß sich alle $l_{31} = 90770$ Personen zu denselben Bedingungen versichern wie der einzelne.

Versicherung auf den Erlebensfall

5. l_x Personen, die im Alter von x Jahren stehen, kaufen sich bei einer Versicherungsanstalt ein mit der Bedingung, daß ihnen sofort sowie am Anfange jedes weiteren Lebensjahres, das der einzelne erreicht, die Rente 1 ausgezahlt wird. Eine solche Rente heißt *sofort beginnende, vorschüssige* (Pränumerando-) *Leibrente*. Nach den Versicherungsbedingungen hat die Gesellschaft sofort l_x , nach einem Jahre l_{x+1} , nach m Jahren l_{x+m} zu zahlen; nach $(100 - x)$ Jahren hört die Zahlung von selbst auf. Um die gesamte von der Gesellschaft zu übernehmende Zahlungsverpflichtung bequem ausdrücken zu können, diskontiert man alle Zahlungen auf den gleichen Termin. Wie man diesen Termin wählt, ist zwar an sich gleichgültig, doch werden die Rechnungen besonders einfach, wenn man alle Zahlungen *auf das Geburtsjahr der Versicherungsnehmer diskontiert*. Diese Art der Diskontierung wird daher in der Versicherungsmathematik *stets* angewandt.

Der Zinsfuß, mit dem die Gesellschaft rechnen muß, sei p , der Zinsfaktor $1 + \frac{p}{100}$ sei wie früher (§ 2, Nr. 12) mit q bezeichnet. Die weitaus meisten Versicherungsgesellschaften rechnen mit einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$; dieser ist auch im folgenden stets zugrunde gelegt.

Diskontiert man die von der Gesellschaft sogleich zu leistende Zahlung l_x auf das Geburtsjahr der Versicherungsnehmer, so erhält man $\frac{l_x}{q^x}$. Ausdrücke von dieser Form kommen in der Versicherungsrechnung so häufig vor, daß es zweckmäßig ist, für sie eine besondere Abkürzung einzuführen; man setzt $\frac{l_x}{q^x} = D_x$ und bezeichnet dies als die *diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x* (Spalte 3 der Tafel). Für die gesamte auf das Geburtsjahr der Versicherungs-

nehmer diskontierte Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft erhält man eine Summe, die wir zur Abkürzung mit N_x bezeichnen wollen, nämlich

$$D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{99} + D_{100} = N_x;$$

man bezeichnet sie als die *Summe der diskontierten Lebenszahlen* (Spalte 4 der Tafel).

Der durch N_x dargestellten Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft steht die Zahlungsverpflichtung der Versicherten gegenüber. Bezeichnen wir die einmalige Zahlung, die jeder Versicherte beim Beginn der Versicherung zu leisten hat (also den Barwert der Rente 1), mit b , so hat diese Zahlung, wenn man sie auf das Geburtsjahr diskontiert, den Wert $\frac{b}{q^x}$, und da alle l_x Personen diese Zahlung zu leisten haben, so beträgt die gesamte diskontierte Zahlungsverpflichtung der Versicherten $b \cdot \frac{l_x}{q^x} = b \cdot D_x$. Nach dem Grundsatz der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß dieser Wert gleich dem oben berechneten Betrage N_x sein; also hat die vorschüssige Leibrente 1 den Barwert $b = \frac{N_x}{D_x}$ und daher die *vorschüssige Leibrente vom Betrage r* den

$$\text{Barwert} \quad r \cdot \frac{N_x}{D_x}.$$

Dies ist also die (Netto-) Einkaufssumme, die der einzelne x jährige Versicherungsnehmer einzuzahlen hat.

6. Eine Leibrente, deren Auszahlung nicht sogleich beginnt, heißt *aufgeschoben*. Für eine um m Jahre aufgeschobene Rente vom Jahresbetrage 1 ist die diskontierte Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft

$$D_{x+m} + D_{x+m+1} + \cdots + D_{99} + D_{100} = N_{x+m},$$

während die diskontierte Zahlungsverpflichtung aller Versicherten, wenn b wieder den Barwert der Rente 1 bedeutet, $b \cdot D_x$ ist. Aus $b \cdot D_x = N_{x+m}$ folgt $b = \frac{N_{x+m}}{D_x}$, also hat eine um m Jahre aufgeschobene vorschüssige Leibrente vom Jahresbetrage r den

$$\text{Barwert} \quad r \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x}.$$

Eine *nachschüssige* (Postnumerando-) *Leibrente* läßt sich auch als eine um 1 Jahr aufgeschobene vorschüssige Leibrente auffassen und erscheint damit als Sonderfall des vorigen.

7. Eine Leibrente, deren Auszahlung höchstens n Jahre hindurch erfolgen soll, heißt *kurz* (oder temporär). Wenn die Zahlung sofort beginnen und nach n Jahren aufhören soll, so beträgt die gesamte diskontierte Leistung der Gesellschaft

$$D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}.$$

Mittels der schon in Nr. 5 und 6 angewandten Schlußweise erhält man hieraus als Barwert einer sofort beginnenden, auf n Jahre vorschüssig zahlbaren kurzen Leibrente vom Betrage r den

$$\text{Barwert } r \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Soll die Rente um m Jahre aufgeschoben sein, so hat man im Zähler an Stelle von x den Wert $x+m$ zu setzen.

8. l_x Personen kaufen sich bei einer Versicherungsanstalt ein mit der Bedingung, daß jeder von ihnen, die nach n Jahren noch lebt, das Kapital K ausgezahlt wird. Eine solche Versicherung heißt *Kapitalversicherung auf den Erlebensfall*. Da nach n Jahren noch l_{x+n} Versicherungsnehmer am Leben sind, hat die Gesellschaft dann den Betrag $K \cdot l_{x+n}$ auszuführen. Diskontiert man diesen auf das Geburtsjahr der Versicherten, so erhält man $K \cdot D_{x+n}$, also muß jeder der l_x Versicherungsnehmer als

$$\text{Einkaufssumme } K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

zahlen.

Versicherung auf den Todesfall

9. l_x Personen versichern ihr Leben mit der Bedingung, daß bei jedem Todesfall der Betrag K an die Hinterbliebenen des verstorbenen Versicherungsnehmers ausgezahlt wird; man nennt dies *Kapitalversicherung auf den Todesfall*. Es ist bei solchen Versicherungen allgemein üblich, am Ende jedes Versicherungsjahres *abzurechnen*¹⁾. Da im 1. Jahre $l_x - l_{x+1}$ Todesfälle eintreten, hat die Gesellschaft am Ende des 1. Jahres $K \cdot (l_x - l_{x+1})$ zu zahlen. Das Geburtsjahr der Teilnehmer liegt $(x+1)$ Jahre zurück, also ist der diskontierte Wert der 1. Zahlung $\frac{K}{q^{x+1}}(l_x - l_{x+1})$; ebenso ist der diskontierte Wert der 2. Zahlung $\frac{K}{q^{x+2}}(l_{x+1} - l_{x+2})$, allgemein der Wert der m ten Zahlung

$$\frac{K}{q^{x+m}}(l_{x+m-1} - l_{x+m}).$$

Wenn man alle diese Ausdrücke addiert, die Klammern auflöst, aus den positiven Gliedern den Faktor $\frac{1}{q}$ herausnimmt und alles passend zusammenfaßt, so erhält man als diskontierten Wert aller von der Gesellschaft zu leistenden Zahlungen:

$$\begin{aligned} & \frac{K}{q} \left[\frac{l_x}{q^x} + \frac{l_{x+1}}{q^{x+1}} + \dots + \frac{l_{100}}{q^{100}} \right] - K \left[\frac{l_{x+1}}{q^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{q^{x+2}} + \dots + \frac{l_{100}}{q^{100}} \right] \\ &= \frac{K}{q} (D_x + D_{x+1} + \dots + D_{100}) - K (D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{100}) \\ &= \frac{K}{q} \cdot N_x - K \cdot N_{x+1} = K \left(\frac{1}{q} N_x - N_{x+1} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Dafür, daß die Versicherungsgesellschaften bei einem Todesfall *sofort* und nicht erst am Ende des Todesjahres zahlen, wird bei den einzelnen Prämien ein kleiner Zuschlag erhoben, der hier, wo es sich nur um Berechnung der Nettowerte handelt, natürlich außer Betracht bleibt.

Als **Einkaufssumme**, die der einzelne Versicherungsnehmer zu zahlen hat, erhält man also

$$K \frac{\frac{1}{q} N_x - N_{x+1}}{D_x}.$$

10. Eine Todesfallversicherung, bei der die Gesellschaft keinerlei Zahlungsverpflichtungen gegen den Versicherten haben soll, wenn dieser innerhalb der ersten n Jahre stirbt, heißt *Todesfallversicherung mit Karenzzeit* (auch aufgeschobene Todesfallversicherung). Auf genau dieselbe Weise wie in Nr. 9 beweist man, daß in diesem Falle jeder Versicherungsnehmer als

$$\text{Einkaufssumme } K \frac{\frac{1}{q} N_{x+n} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

zu zahlen hat.

11. Durch die *abgekürzte Todesfallversicherung* wird den Hinterbliebenen eines jetzt x jährigen, falls dieser während der nächsten n Jahre stirbt, für das Ende des Todesjahres das Kapital K gesichert. Diese Versicherungsart ist leicht mit den beiden in Nr. 9 und 10 besprochenen in Beziehung zu bringen, denn während bei der in Rede stehenden Versicherungsart die Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft nur während der ersten n Jahre besteht, beginnt bei der in Nr. 10 behandelten Versicherungsart die Zahlungspflicht der Gesellschaft gerade nach Ablauf des n ten Jahres. Eine Vereinigung dieser beiden Versicherungsarten würde daher auf eine lückenlose Zahlungsverpflichtung der Gesellschaft wie in Nr. 9 führen. Im vorliegenden Falle ist also die **Einkaufssumme** nichts anderes als die Differenz der in Nr. 9 und 10 erhaltenen Einkaufssummen, nämlich

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x}.$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man natürlich, wenn man die n Jahresleistungen der Gesellschaft unmittelbar berechnet und auf das Geburtsjahr der Versicherungsnehmer diskontiert.

Gemischte Versicherung

12. Eine besonders beliebte Versicherungsart ist die sogenannte *gemischte Versicherung*, bei der festgesetzt wird, daß die Versicherungssumme K im Falle des Todes, spätestens aber **nach** n Jahren ausgezahlt werden soll. Die **Einkaufssumme** für diese Versicherungsart beträgt

$$K \cdot \frac{\frac{1}{q} (N_x - N_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n})}{D_x},$$

denn die vorliegende Versicherung ist nichts anderes als die Vereinigung einer abgekürzten Todesfallversicherung und einer einfachen Kapitalversicherung auf den Erlebensfall; die Versicherungssumme soll nämlich gezahlt werden, 1. wenn der Versicherte im Laufe von n Jahren stirbt, 2. wenn der Versicherte nach n Jahren noch lebt, also ist das Einkaufsgeld gleich der Summe der in Nr. 11 und 8 hergeleiteten Einkaufssummen.

Jahresprämien

13. Bisher war immer angenommen worden, daß die Versicherungen durch eine einmalige Zahlung gekauft werden. In Wirklichkeit wird aber nur selten ein Lebensversicherungsvertrag auf Grund einer einmaligen Einlage abgeschlossen; weit häufiger ist der Fall, daß entweder dauernd oder längere Zeit hindurch von dem Versicherten an den Versicherer *Jahresprämien* gezahlt werden. Für den Barwert dieser Jahresprämien ist es aber gleichgültig, wer sie leistet oder empfängt; man kann sich also auch die Rollen des Versicherten und des Versicherers vertauscht denken, und dann erscheint die Jahresleistung als Leibrente.

Daraus folgt allgemein, daß die Jahresprämie gleich ist dem Quotienten aus dem Werte der abzuschließenden Versicherung und dem Werte derjenigen Leibrente, die der Prämienzahlung entspricht. Da wir für diese beiden Werte bei allen wichtigen Versicherungsarten geschlossene Ausdrücke hergeleitet haben, können wir auf die Aufstellung besonderer Formeln für Jahresprämien hier verzichten.

§ 7. Die rationalen ganzen Funktionen

Begriff der rationalen ganzen Funktion

1. Wir hatten früher unter anderen die lineare Funktion (7.-9. Schuljahr § 6) und die quadratische Funktion (7.-9. Schuljahr § 10, Nr. 12 ff.) untersucht. Beides sind besondere Fälle der *rationalen ganzen Funktion*. Man versteht darunter eine Funktion der Form

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Darin ist x die unabhängige Veränderliche, a_0, a_1, \dots, a_n sind endliche, reelle Konstanten, n ist eine positive ganze Zahl. n heißt der *Grad* der Funktion, wenn $a_0 \neq 0$ ist. Die lineare Funktion ist eine rationale ganze Funktion 1. Grades, die quadratische eine solche 2. Grades.

Verhalten im Unendlichen

2. Es sei a_0 eine positive Zahl. Wir wollen untersuchen, welche Werte die rationale ganze Funktion für die Grenzen $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ annimmt. Die vorgelegte Funktion läßt sich auch in der Form

$$y = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)$$

schreiben. Man bestimmt den Grenzwert dieses Produktes, indem man zunächst die Grenzwerte der beiden Faktoren bildet und diese Grenzwerte dann multipliziert. Wird $x \rightarrow \infty$, so nimmt der 1. Faktor den Wert $+\infty$, der 2. den endlichen Wert a_0 an; also ist der Grenzwert, den y für $x \rightarrow \infty$ erreicht, gleichfalls $+\infty$.

Nimmt x ab und nähert sich der Grenze $-\infty$, dann sind 2 Fälle zu unterscheiden: Ist n eine gerade Zahl, dann nähert sich die Funktion dem Wert $+\infty$, ist n eine ungerade Zahl, dann nähert sich die Funktion dem Wert $-\infty$. Um das nachzuweisen, untersuchen wir zunächst den Wert von x^n für $x \rightarrow -\infty$. Wir können x^n als Produkt aus n Faktoren x auffassen. Wird $x \rightarrow -\infty$, so wird das Produkt dieser n Faktoren $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Das gleiche lehrt auch die graphische Darstellung der Funktion $y = x^n$ (7.-9. Schuljahr § 7, Nr. 12).

Wir zerlegen jetzt die rationale ganze Funktion in der gleichen Weise wie oben in 2 Faktoren. Da der 2. Faktor für $x \rightarrow -\infty$ den Wert a_0 erhält, so nimmt y für $x \rightarrow -\infty$ den Wert $+\infty$ oder $-\infty$ an, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist der Faktor a_0 der höchsten Potenz nicht positiv, sondern negativ, dann nimmt y für $x \rightarrow +\infty$ den Wert $-\infty$ an; ist dagegen $x \rightarrow -\infty$, so wird y gleich $-\infty$ oder $+\infty$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Stellt man die rationale ganze Funktion durch eine Kurve graphisch dar, dann verläuft die Kurve, wenn a_0 positiv ist, bei einer Funktion geraden Grades vom positiven Unendlichen zum positiven Unendlichen, bei einer Funktion ungeraden Grades vom negativen Unendlichen zum positiven Unendlichen. Dabei ist hier und im folgenden immer angenommen worden, daß das Durchlaufen im Sinne der wachsenden x , also auf der Abszissenachse von links nach rechts geschieht.

Die graphische Darstellung lehrt weiter, daß die Kurve in ihrem ganzen Verlauf keine Unterbrechungen (*Unstetigkeiten*) hat und daß sie im Endlichen frei von Unendlichkeitsstellen ist, d. h. daß sie für keinen endlichen Wert von x den Wert $\pm \infty$ annimmt.

Begriff des Differentialquotienten

- Ein für die Beurteilung des Verlaufes einer Kurve wichtiges Hilfsmittel ist der Begriff der *Steigung*. Man versteht unter der Steigung einer Kurve in einem Punkte den Tangens des Winkels zwischen der x -Achse und der Tangente, die man in jenem Punkte an die Kurve legt; dabei ist der Winkel so zu messen, daß die positiv gerichtete Hälfte der x -Achse entgegengesetzt dem Bewegungssinn des Uhrzeigers gedreht wird, bis sie erstmalig mit der Tangente zusammenfällt. Wir müssen zunächst angeben, was unter der Tangente in einem Punkte an eine Kurve zu verstehen ist.

Wir setzen voraus, es handle sich um einen Punkt im Endlichen. Fig. 13 zeigt eine Kurve und einen Punkt P auf ihr. Ein 2. Punkt der Kurve in der Nähe des 1. sei P_1 . PP_1 bestimmt dann eine Sekante. Nähert sich jetzt P_1 immer mehr dem Punkte P , dann dreht sich die Sekante um den Punkt P . Die Grenzlage, der die Sekante zustrebt, wenn P_1 sich P nähert, gibt die

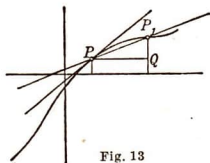


Fig. 13

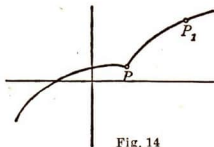


Fig. 14

Lage der Tangente der Kurve im Punkte P an. Bewegt sich P_1 über P hinaus, dann erhalten wir wieder eine Sekante. Die Tangente wird also als Grenzlage der Sekante aufgefaßt.

Vorausgesetzt ist dabei, daß eine solche Grenzlage überhaupt vorhanden ist. Wir setzen auch die Kurve so gestaltet voraus, daß sich bei der Annäherung von beiden Seiten an den Punkt P nur eine Grenzlage ergibt. Daß das nicht selbstverständlich ist, zeigt Fig. 14: Nähert sich P_1 dem Punkte P , dann erhält man 2 Grenzlagen, je nachdem die Annäherung von der einen oder der anderen Seite erfolgt.

4. Wir setzen nun die geometrische Betrachtung in eine analytische Form um. Die Kurve sei das Bild der Funktion $f(x)$. Der Punkt P habe die Koordinaten x und y , für y können wir auch $f(x)$ setzen. Der Punkt P_1 habe die Koordinaten x_1 und y_1 . Für y_1 können wir auch $f(x_1)$ sagen. Ist dann φ_1 der Winkel zwischen der nach rechts gerichteten x -Achse und der Sekante PP_1 , dann ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck PP_1Q , das man (Fig. 13) erhält, wenn man die Parallele zur x -Achse durch P zieht,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P_1Q}{PQ} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Rechts steht ein Quotient aus 2 Differenzen; man gebraucht für diesen häufig auftretenden Ausdruck das Wort *Differenzenquotient* und schreibt ihn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei Δ ein Zeichen für den Zuwachs ist, Δy also der Zuwachs von y , Δx der Zuwachs von x ; Δx kann positiv und negativ sein. Es ist dann

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Führen wir den jetzt in Nr. 3 beschriebenen Grenzübergang aus, der die Sekante zur Tangente werden läßt, so erhalten wir auf der einen Seite der

Gleichung den Tangens des Winkels, den die nach rechts gerichtete x -Achse mit der Tangente bildet; wir nennen den Winkel φ . Auf der anderen Seite der Gleichung ist ein Grenzübergang auszuführen, den wir entweder mit

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

oder mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bezeichnen können. Das Symbol \lim (lies: Limes) gibt an, daß ein Grenzübergang auszuführen ist, und die darunterstehende Angabe fügt hinzu, welcher Grenzübergang zu nehmen ist.

Den Grenzwert dieser Differenzenquotienten nennt man den *Differentialquotienten*. Man schreibt ihn $\frac{dy}{dx}$ (gelesen dy nach dx). Es ist zu beachten, daß $\frac{dy}{dx}$ nicht als ein Quotient, sondern als der Grenzwert eines Quotienten anzusehen ist.

Es bleibt bei dieser Erklärung des Differentialquotienten die Frage offen, ob überhaupt die vorgelegte Funktion $f(x)$ für die in Frage kommenden Punkte einen Differentialquotienten besitzt. Die Frage erledigt sich für uns dadurch, daß wir für die Funktionen, die wir hier behandeln, den Differentialquotienten durch Rechnung finden werden. Im übrigen muß die Bemerkung genügen, daß es Funktionen gibt, die gar keinen Differentialquotienten besitzen, solche, die an gewissen Stellen keinen besitzen, und schließlich solche, die, wie schon Fig. 14 lehrt, an bestimmten Stellen nicht nur *einen* Differentialquotienten besitzen.

Der Wert des Differentialquotienten ist im allgemeinen von der Lage des gewählten Punktes abhängig. Er ist also wieder eine Funktion von x . Man nennt ihn deshalb auch die abgeleitete Funktion, kurz die Ableitung, und bezeichnet ihn mit y' oder $f'(x)$.

So haben wir, wenn wir die ganze Reihe verschiedener Schreibweisen noch einmal vereinigen:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

Der Differentialquotient der rationalen ganzen Funktion

5. Nach der Erklärung des Differentialquotienten ist im Falle der Funktion $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Nun ist $\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1},$

wovon man sich durch Ausführung der durch den Quotienten angegebenen Division oder aber auch einfach durch die Probe überzeugen kann.

Geht man zur Grenze $x_1 \rightarrow x$ über, so nehmen alle n Summanden den gleichen Wert x^{n-1} an, man erhält also

$$\frac{d x^n}{d x} = n x^{n-1}.$$

In diesem Beweise ist n als positive ganze Zahl ≥ 1 vorausgesetzt.

Mit Hilfe des Differentialquotienten läßt sich für jede Parabel $y = x^n$ die Lage der in irgendeinem Punkte an die Kurve gelegten Tangente berechnen. Wir sehen z. B., daß für den Koordinatenanfangspunkt $\operatorname{tg} \varphi = 0$, also $\varphi = 0$ wird; d. h. die Tangente fällt mit der x -Achse zusammen.

6. Es sei a eine Konstante. Die Funktion $y = a$ wird dann graphisch durch eine Parallele zur x -Achse dargestellt. Der Neigungswinkel dieser „Kurve“ zur x -Achse ist also 0, die Steigung ebenfalls. Die geometrische Überlegung zeigt also, daß der Differentialquotient einer Konstanten 0 ist. Das gleiche folgt auf analytischem Wege; der Differenzenquotient ist nämlich in diesem Falle

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0.$$

Mithin ist auch der Grenzwert des Differenzenquotienten, der Differentialquotient $\frac{d y}{d x} = 0$; wir haben also

$$\frac{d a}{d x} = 0.$$

7. Die beiden in Nr. 5 und 6 hergeleiteten Differentiationsformeln zeigen uns den Weg, von jeder ganzen rationalen Funktion den Differentialquotienten zu bestimmen, mit anderen Worten sie zu differenzieren. Wir brauchen nur noch 2 Rechenregeln hinzuzunehmen:

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ 2 differenzierbare Funktionen; a sei eine Konstante. Dann ist

$$(1) \quad \frac{d a f(x)}{d x} = a \frac{d f(x)}{d x},$$

$$(2) \quad \frac{d(f(x) + g(x))}{d x} = \frac{d f(x)}{d x} + \frac{d g(x)}{d x}.$$

Man kann die Sätze auch abkürzend so aussprechen:

- (1) *Einen konstanten Faktor darf man vor das Differentiationszeichen ziehen.*
- (2) *Eine Summe differenziert man gliedweise.*

Beide Sätze beweist man durch Rückgang auf den Differenzenquotienten¹⁾:

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d a f(x)}{d x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{a f(x_1) - a f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} a \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \\ &= a \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a \frac{d f(x)}{d x} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \frac{d(f(x) + g(x))}{d x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) + g(x_1) - (f(x) + g(x))}{x_1 - x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \left[\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} + \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \right] \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} + \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = \frac{d f(x)}{d x} + \frac{d g(x)}{d x}. \end{aligned}$$

Diese beiden Sätze gelten, wie nochmals hervorgehoben sei, nicht nur für rationale Funktionen, sondern für Funktionen überhaupt, sofern sie überhaupt differenzierbar sind.

8. Jetzt ist es möglich, die rationale ganze Funktion zu differenzieren. Es sei

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

dann wird bei Anwendung der in Nr. 5, 6, 7 entwickelten Gesetze

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Beispiele: Die lineare Funktion

$$y = m x + n$$

hat den konstanten Differentialquotienten $y' = m$.

Der Differentialquotient der quadratischen Funktion

$$y = a x^2 + b x + c$$

ist $y' = 2 a x + b$.

Folgerung: Die Ableitung einer rationalen ganzen Funktion n ten Grades ist eine rationale ganze Funktion $(n-1)$ ten Grades.

Maxima und Minima

9. Es sei die rationale ganze Funktion 2. Grades vorgelegt:

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2.$$

Das graphische Bild dieser Kurve ist eine Parabel (vgl. 7.-9. Schuljahr § 10, Nr. 12 ff.). Wir haben im 7.-9. Schuljahr die Parabel in der Weise konstruiert,

¹⁾ Bei diesem Beweis werden ohne weitere Erläuterung die schon früher (Nr. 2) benutzten Sätze angewandt, daß der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden und daß der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren ist.

daß wir einzelne Punkte auf Grund der Funktionsgleichung berechneten. Der Differentialquotient gibt uns jetzt die Möglichkeit, in jedem solcher Punkte auch die Lage der Tangente zu berechnen und diese für die Zeichnung der Kurve zu verwenden. Nun haben für die Gestalt irgendwelcher Kurven besonders diejenigen Tangenten eine Bedeutung, die parallel zur x -Achse liegen. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden. Entweder liegt die Kurve in der Nähe der Berührungsstelle der Tangente unterhalb der Tangente (Fig. 15), oder sie liegt oberhalb der Tangente (Fig. 16), oder schließlich die Tangente durchsetzt an dieser Stelle die Kurve. Im 1. Falle sagt man, die Kurve hat an der betreffenden Stelle ein Maximum, im 2. Falle, sie hat ein Minimum. Mit dem 3. Falle werden wir uns noch später (Nr. 10) beschäftigen; er ist uns z. B. bei der Parabel $y = x^3$ begegnet, die im Nullpunkt die x -Achse zur Tangente hat (7.-9. Schuljahr § 7, Nr. 11).

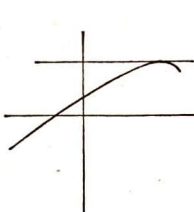


Fig. 15

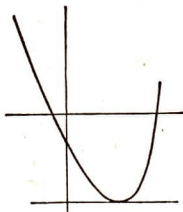


Fig. 16

Die rationale ganze Funktion 2. Grades, um die es sich hier handelt, hat, wie wir vom 7.-9. Schuljahr her wissen, ein Minimum, wenn a_0 positiv ist. Wie läßt sich die Lage des Minimums feststellen? Wir haben diese Aufgabe früher, als es sich um die graphische Lösung der quadratischen Gleichungen handelte, für den Fall $a_0 = 1$ schon gelöst. Wir lernen jetzt eine neue Lösungsmethode kennen. An der Stelle des Minimums ist die Tangente parallel zur x -Achse. Der Neigungswinkel der Tangente gegen die x -Achse ist also 0. Das heißt aber, der Differentialquotient der Funktion hat für diesen Minimumswert den Wert 0. Nun ist für unsere Funktion (Nr. 8)

$$\frac{dy}{dx} = 2a_0x + a_1.$$

Soll der Differentialquotient den Wert 0 haben, dann ist, wenn wir den gesuchten Wert der Variablen x mit x_m bezeichnen,

$$2x_m a_0 + a_1 = 0,$$

$$x_m = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

Für diesen Wert also erreicht die Funktion ihr Minimum. Den Wert, den die Funktion dort erreicht, kann man finden, wenn man x_m in die Funktionsgleichung einsetzt; es ergibt sich

$$y_m = a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}.$$

10. Wir wollen jetzt ebenso die rationale ganze Funktion 3. Grades

$$y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

auf ihre Maxima und Minima untersuchen. Wir setzen voraus, a_0 ist eine positive Zahl. Um dann diejenigen Kurvenpunkte zu finden, in denen die Tangente der x -Achse parallel ist, setzen wir die Ableitung

$$y' = 3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$$

gleich 0. Wir erhalten für die gesuchten Werte x_m die quadratische Gleichung

$$3a_0 x_m^2 + 2a_1 x_m + a_2 = 0.$$

Die Gleichung hat entweder 2 reelle oder 2 komplexe Wurzeln. In dem besonderen Falle, wo der Radikand in der Quadratwurzel den Wert 0 hat, besitzt die Gleichung eine Doppelwurzel.

Es sind also 2 Typen der rationalen ganzen Funktion 3. Grades zu unterscheiden. Entweder ist überhaupt kein Punkt vorhanden derart, daß die Tangente in ihm parallel zur x -Achse ist; dann ist also weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden. Beim 2. Typus sind 2 Stellen vorhanden, in denen die Tangenten der x -Achse parallel laufen. Die graphische Darstellung (siehe auch Nr. 15) zeigt, daß dann ein Maximum und ein Minimum vorhanden ist; die Kurve erreicht, aus dem negativen Unendlichen kommend, ein Maximum, fällt dann wieder bis zum Minimum und steigt dann zum positiven Unendlichen. In dem besonderen Falle, wo die 1. Ableitung eine Doppelwurzel liefert, sind Maximum und Minimum zusammengerückt oder, wenn man will, verschwunden; wir erhalten eine Kurve, bei der in dem errechneten Punkt die Kurve von der Tangente durchsetzt wird.

Für Maximum und Minimum benutzt man den gemeinsamen Namen *Extremwert*.

Die Betrachtungen an der rationalen ganzen Funktion 3. Grades lehren, daß es sich bei den Extremwerten nicht um *absolute* Maxima und Minima der Funktion handelt, sondern um *relative*. Die Kurve erreicht in einem Punkte ein Maximum oder Minimum, wenn die Nachbarwerte alle kleiner bzw. größer sind als der Maximal- bzw. Minimalwert.

11. Liegt die allgemeine rationale ganze Funktion n ten Grades

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

vor, so erhält man, wenn man die 1. Ableitung 0 setzt,

$$n a_0 x_m^{n-1} + (n-1) a_1 x_m^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0,$$

mit den reellen Wurzeln dieser Gleichung die Abszissen x_m derjenigen Punkte der zur Funktion gehörigen Kurve, in denen die Tangenten parallel zur x -Achse sind. Das werden im allgemeinen relative Maxima und Minima sein.

Ob nicht abweichende Sonderfälle vorliegen, und ob es sich an einer Stelle um ein Maximum oder um ein Minimum handelt, darüber kann die Untersuchung der Nachbarwerte Auskunft geben (vgl. aber Nr. 15).

Wendepunkt und Wendetangente

12. Bildet man von dem Differentialquotienten einer Funktion noch einmal den Differentialquotienten, so erhält man den 2. Differentialquotienten oder die 2. Ableitung. Man schreibt ihn $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (lies d zwei y nach dx Quadrat), y'' (lies y zwei Strich) oder $f''(x)$ (lies f zwei Strich x). Ist z. B. die Funktion

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

vorgelegt, so ist

$$y' = 2a_0 x + a_1,$$

$$y'' = 2a_0.$$

Differenziert man die 2. Ableitung abermals, so erhält man den 3. Differentialquotienten, geschrieben $\frac{d^3 y}{dx^3}$, y''' oder $f'''(x)$. Allgemein liefert n malige Differentiation den n ten Differentialquotienten, geschrieben $\frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n)}$ oder $f^{(n)}(x)$.

Beispiel: Der 2. Differentialquotient von x^n wird $n(n-1)x^{n-2}$, der n te Differentialquotient wird $n!$. Der $(n+1)$ te und alle folgenden Differentialquotienten einer rationalen ganzen Funktion n ten Grades werden 0.

13. Wir betrachten eine rationale ganze Funktion 3. Grades vom 2. Typus (Nr. 10), etwa

$$(1) \quad y = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Sie ist in Fig. 17 graphisch dargestellt. Wir verfolgen die Lage der Tangente in einem Punkte, der von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ auf der Kurve wandert. Die Steigung der Geraden ist anfangs sehr groß und sinkt dann bis zu 0; der Punkt erreicht das Maximum. Geht der Punkt über das Maximum hinaus, so wird die Steigung weiter geringer, sie hat nämlich einen negativen Wert. Sie nimmt aber nicht unbegrenzt ab, sondern erreicht einen kleinsten Wert und nimmt von da an wieder zu, so daß sie, wenn der Punkt beim Minimum angelangt ist, schon wieder den Wert 0 erreicht hat. Dann steigt sie weiter, und zwar unbegrenzt.

Es ist leicht, diese Ab- und Zunahme der Steigung genauer zu verfolgen: Die Steigung der Tangente wird durch die 1. Ableitung der Funktion wiedergegeben; wir stellen also

$$(2) \quad y' = 3x^2 - 6x - 1$$

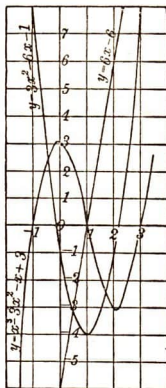


Fig. 17

graphisch dar, um ein Bild von der Sachlage zu haben. Dabei entsprechen den Stellen, in denen die Kurve (1) steigt, positive Werte, denjenigen, in denen die Kurve fällt, negative Werte der Parabel (2). Den Nullwerten der Parabel (2) entsprechen Maximum und Minimum der Kurve (1); dem tiefsten Wert der Parabel entspricht diejenige Lage der Tangente, in der die Steigung den kleinsten Wert hat. Man nennt diese Tangente die *Wendetangente*, den Punkt, in dem sie an die Kurve gelegt wird, den *Wendepunkt*.

Um den Wendepunkt einer rationalen ganzen Funktion 3. Grades aufzusuchen, hat man also das Minimum der 1. Ableitung zu bestimmen; das tut man, indem man die Ableitung der 1. Ableitung – also die 2. Ableitung der ursprünglichen Funktion – bildet und ihren Nullwert sucht. In unserem Falle erhalten wir

$$(3) \quad y'' = 6x - 6.$$

Ist x_w die gesuchte Abszisse des Wendepunktes, so wird

$$\begin{aligned} 6x_w - 6 &= 0, \\ x_w &= 1. \end{aligned}$$

Den Wert, den die Funktion besitzt, erhält man, wenn man x_w in den Funktionsausdruck einsetzt, hier also

$$y_w = 0.$$

Auch die Lage der Wendetangente ist leicht zu bestimmen, man hat nur $x_w = 1$ in die 1. Ableitung einzusetzen. In unserem Falle ist

$$y'_w = \operatorname{tg} \varphi = -4.$$

In die graphische Darstellung (Fig. 17) ist auch die 2. Ableitung, die Gerade $y = 6x - 6$ eingetragen.

Zwischen den graphischen Bildern der untersuchten Funktion und ihren beiden Ableitungen bestehen folgende Beziehungen: Für diejenigen Werte der unabhängigen Variablen, in denen die Funktion ihr Maximum und ihr Minimum erreicht, wird die 1. Ableitung 0; für denjenigen Wert, in dem die Kurve eine Wendetangente hat, hat die 1. Ableitung ein Minimum, die 2. Ableitung den Wert 0.

14. Die Überlegungen von Nr. 13 lassen sich in gleicher Weise für alle rationalen ganzen Funktionen 3. Grades

$$y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

mit positivem Anfangskoeffizienten a_0 anstellen; ist a_0 nicht positiv, dann sind die Abänderungen leicht zu übersehen. Wir wollen aber an einem Beispiel zeigen, wie die Dinge liegen, wenn der in Nr. 10 erwähnte Sonderfall eintritt, daß Maximum und Minimum der Kurve zusammenfallen. Es sei die Funktion

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

vorgelegt. Dann lauten die beiden ersten Ableitungen

$$y' = 3x^2 - 6x + 3,$$

$$y'' = 6x - 6.$$

Setzt man die 1. Ableitung 0, so erhält man hier in der Tat nur eine Wurzel:

$$3x_m^2 - 6x_m + 3 = 0,$$

$$x_m^2 - 2x_m + 1 = 0,$$

$$x_m = 1.$$

Die 2. Ableitung liefert gleichfalls den Wert

$$x_w = 1.$$

Ist das Zufall? Die Kurve $y' = 3x^2 - 6x + 3$ stellt eine Parabel dar, die die x -Achse nicht zweimal schneidet, sondern berührt. Der Berührungspunkt ist gleichzeitig der Scheitel der Parabel, also ein Minimum. Aus diesem Grunde muß $y'' = 0$ gleichfalls den Wert $x = 1$ liefern. In diesem Punkte haben wir eine Wendetangente, die parallel der x -Achse liegt.

15. Die 2. Ableitung leistet für die Diskussion der Kurve noch mehr. Wenn wir in der Umgebung eines Maximums die Änderung der Tangente untersuchen, so sehen wir, daß die Steigung abnimmt, wenn der Berührungspunkt sich in der Richtung der positiven x -Achse bewegt. In der Umgebung eines Minimums nimmt die Steigung zu. In der Fig. 18 ist die Kurve von $-\infty$ über das Maximum hin bis zum Wendepunkt ausgezogen, von dort über das Minimum nach $+\infty$ hin gestrichelt. Dem 1. Teil entspricht der absteigende, dem 2. der aufsteigende Teil der Parabel, die die 1. Ableitung darstellt (Nr. 13). Auch hier ist ausgezogener und gestrichelter Teil unterschieden. Dem absteigenden Teil der Parabel entspricht nun wieder bei der Geraden, die das Bild der 2. Ableitung ist, der Teil unterhalb der x -Achse, er ist ausgezogen und damit von dem gestrichelten Teil oberhalb der x -Achse unterschieden, der dem aufsteigenden Ast der Parabel entspricht.

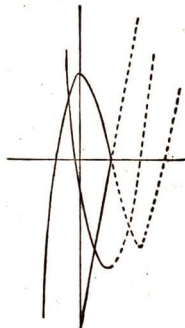


Fig. 18

In der Gegend des Minimums hat also die 2. Ableitung positive, in der Gegend des Maximums negative Werte. Das liefert eine brauchbare Regel, um ohne weitere Untersuchung von Nachbarwerten (Nr. 11) zu entscheiden, ob ein Extremwert Maximum oder Minimum ist. Man bildet die 2. Ableitung und setzt den Wert x_m ein. Erhält man einen positiven Wert, so handelt es sich um ein Minimum, erhält man einen negativen Wert, so handelt

es sich um ein Maximum. Erhält man schließlich den Wert 0, so tritt ein Sonderfall ein; bei der rationalen ganzen Funktion 3. Grades kommen wir dann auf einen Wendepunkt.

16. Wir wollen jetzt unsere Überlegungen von Nr. 13–15 auf rationale ganze Funktionen n ten Grades ausdehnen. Es sei vorgelegt die Funktion

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

und diese Funktion sei graphisch dargestellt durch die Kurve k . Wir bilden die 1. Ableitung

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Die ihr entsprechende Kurve k' hat überall da positive Ordinaten, wo das Bild der gegebenen Funktion steigt, negative, wo k fällt. An den Stellen, wo k' die x -Achse schneidet, hat k entweder ein Maximum oder ein Minimum oder eine zur x -Achse parallele Wendetangente. Ein Maximum tritt auf, wenn k' die x -Achse von der positiven zur negativen Seite übergehend schneidet, ein Minimum tritt auf, wenn k' die x -Achse von der negativen zur positiven Seite übergehend schneidet, eine zur x -Achse parallele Wendetangente ist vorhanden, wenn die x -Achse von k' so berührt wird, daß sie die x -Achse nicht schneidet.

Wir nehmen jetzt noch die 2. Ableitung

$$y'' = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \dots + 2 \cdot a_{n-2}$$

hinzu. Ihr graphisches Bild sei k'' . Diese Kurve k'' spielt jetzt für k' die gleiche Rolle wie k' für k . Insbesondere ist y'' also positiv, wenn k' steigt, negativ, wenn k' fällt; k'' schneidet oder berührt die x -Achse, wenn k' ein Maximum, ein Minimum oder eine zur x -Achse parallele Wendetangente hat.

Daraus folgt zunächst:

1. Ist an einer Stelle, wo k' die x -Achse schneidet, k'' negativ, so hat k ein Maximum, ist k'' positiv, so hat k ein Minimum.

Um also die Maxima und Minima einer Funktion festzustellen, setzt man die 1. Ableitung 0. Die Werte für x , die man dann erhält, setzt man in die 2. Ableitung ein. Erhält man für einen dieser Werte ein negatives Ergebnis, so handelt es sich um ein Maximum, erhält man ein positives Ergebnis, so handelt es sich um ein Minimum. Im Fall, in dem auch die 2. Ableitung 0 wird, bleibt die Sachlage noch unentschieden.

2. Durchsetzt an einer Stelle k'' die x -Achse, und zwar ohne sie zur Tangente zu haben, so hat an dieser Stelle k einen Wendepunkt.

Um also die Wendepunkte einer Funktion festzustellen, setzt man die 2. Ableitung 0 und untersucht, ob für einen solchen Wert auch die 3. Ableitung 0 wird. Ist das nicht der Fall, dann hat man einen Wendepunkt gefunden.

Den Fall, daß mit der 2. gleichzeitig die 3. Ableitung 0 werden kann, lassen wir außer acht. Es handelt sich dann um Berührungen höherer Ordnung. Wir wollen uns in einem solchen Falle mit der Entscheidung auf Grund der Nachbarwerte begnügen.

Beispiel: Die Funktion

$$y = x^4$$

hat die Ableitungen

$$y' = 4x^3,$$

$$y'' = 12x^2,$$

$$y''' = 24x,$$

$$y^{(4)} = 24,$$

$$y^{(5)} = 0.$$

Hier werden für $x_0 = 0$ die sämtlichen drei ersten Ableitungen 0. Die graphische Darstellung zeigt, daß es sich um ein Minimum handelt, man erhält nämlich für irgendwelche positiven oder negativen Nachbarwerte von $x = 0$ stets für y einen positiven Wert.

§ 8. Gleichungen 3. und nten Grades

Anzahl der Wurzeln einer kubischen Gleichung

1. Eine Gleichung 3. Grades (eine kubische Gleichung) hat die Form

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Darin muß $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt werden, denn andernfalls wäre die Gleichung nicht wirklich vom 3. Grade. Dividiere ich die Gleichung durch a_0 und setze $\frac{a_1}{a_0} = a$, $\frac{a_2}{a_0} = b$, $\frac{a_3}{a_0} = c$, dann erhalte ich als Form der Gleichung 3. Grades (Normalform)

$$(1) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Die Wurzeln einer solchen Gleichung 3. Grades zu bestimmen, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Nullstellen der rationalen ganzen Funktion 3. Grades

$$(2) \quad y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

oder die Schnittpunkte der ihr entsprechenden Kurve mit der x -Achse zu finden. Da diese Funktion für $x \rightarrow -\infty$ den Wert $-\infty$, für $x \rightarrow +\infty$ den Wert $+\infty$ annimmt und dazwischen weder Unstetigkeiten noch Unendlichkeitsstellen besitzt, hat die Kurve mindestens einen Schnittpunkt mit der x -Achse, die Funktion mindestens eine Nullstelle. Wir bezeichnen sie mit x_1 .

2. Wenn x_1 eine Wurzel der kubischen Gleichung (1) ist, dann wird

$$0 = x_1^3 + a x_1^2 + b x_1 + c.$$

Subtrahiert man das von der (identischen) Funktionsgleichung (2), so folgt

$$y = (x^3 - x_1^3) + a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1).$$

Darin sind die sämtlichen Summanden restlos durch $(x - x_1)$ teilbar, man erhält

$$y = (x - x_1)(x^2 + x x_1 + x_1^2 + a x + a x_1 + b).$$

Die Funktion läßt sich also als ein Produkt schreiben, deren einer Faktor $(x - x_1)$ ist, während der andere quadratisch in x ist.

Ein Produkt wird 0, wenn entweder der eine oder der andere Faktor 0 wird. Setzen wir den 1. Faktor 0, dann erhalten wir die uns schon bekannte Nullstelle x_1 der Funktion. Setzen wir den anderen Faktor 0, so liefert uns das zwei weitere Nullstellen; wir wollen sie mit x_2 und x_3 bezeichnen.

Diese Werte können reell oder komplex (und zwar dann konjugiert komplex) sein. Nach dem Satz von Vieta können wir dem 2. Faktor auch die Gestalt $(x - x_2) \cdot (x - x_3)$ geben.

Wir haben damit folgende Ergebnisse gefunden:

Eine kubische Gleichung hat 3 Wurzeln, und zwar entweder 3 reelle oder 1 reelle und 2 konjugiert komplexe Wurzeln. Sind x_1 , x_2 und x_3 diese Wurzeln, dann kann man der so erhaltenen kubischen Gleichung die Form

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

geben. Kennt man eine Wurzel x_1 der kubischen Gleichung, so lassen sich die beiden anderen in der Weise finden, daß man die linke Seite der auf 0 gebrachten Gleichung durch $(x - x_1)$ dividiert, den quadratischen Ausdruck, den man dann erhält, 0 setzt und die Wurzeln der Gleichung bestimmt.

Beispiel: Die Gleichung $x^3 = 1$ hat offensichtlich die Wurzel $x_1 = 1$.

Man erhält

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1.$$

Die Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

liefert die Wurzeln

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}.$$

Wir wollen den häufig vorkommenden Wert von x_2 mit ε bezeichnen, setzen also

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}.$$

Dann sind also die Wurzeln unserer Gleichung $1, \varepsilon, \varepsilon^2$. (Man überzeugt sich durch Rechnung, daß x_3 das Quadrat von x_2 ist; vgl. auch § 3, Nr. 29.)

3. Zwei rationale ganze Funktionen stimmen nur dann für alle Werte der Variablen überein, wenn die Koeffizienten gleicher Potenzen der Veränderlichen übereinstimmen. Ist nämlich etwa

$$(1) \quad \begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n, \end{aligned}$$

dann ergibt sich, wenn man $x=0$ einsetzt,

$$a_n = b_n.$$

Wenn 2 Funktionen in allen Werten der Variablen übereinstimmen, dann stimmen sie auch in den Ableitungen überein. Differenziert man beide Seiten der Gleichung (1) nach x und setzt dann wieder $x=0$, dann erhält man

$$a_{n-1} = b_{n-1} \quad \text{usf.}$$

Wir beseitigen die Produktenform der Gleichung 3. Grades in der Weise, daß wir ausmultiplizieren; dann erhalten wir

$$y = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3.$$

Vergleichen wir diese Form der Funktion mit der ursprünglichen

$$y = x^3 + a x^2 + b x + c,$$

dann erhalten wir die folgenden Gleichungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer Gleichung 3. Grades (*Satz von Vieta*):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= b, \\ x_1 x_2 x_3 &= -c. \end{aligned}$$

Hat eine kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Wurzel x_1 , so muß diese ein Faktor des konstanten Gliedes der Gleichung, der ganzen Zahl $c = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, sein, weil $x_2 x_3 = x_1^2 + a x_1 + b$ (vgl. Nr. 2) mit x_1 , a und b auch eine ganze Zahl ist.

Um festzustellen, ob eine kubische Gleichung eine ganzzahlige Wurzel hat, braucht man also nur mit den Faktoren des konstanten Gliedes, und zwar mit den negativen ebenso wie mit den positiven, die Probe zu machen.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

kann, wenn sie überhaupt eine rationale ganze Wurzel hat, nur eine der folgenden Zahlen als Wurzel haben: $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$. Man überzeugt sich durch Probieren, daß -1 eine Wurzel ist. Die anderen Wurzeln kann man jetzt auf Grund der Überlegungen in Nr. 2 finden.

Die reduzierte Form der kubischen Gleichung

4. Führt man in die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

die neue Unbekannte x_0 durch die Substitutionsgleichung

$$x = x_0 + m$$

ein, so erhält man

$$(x_0 + m)^3 + a(x_0 + m)^2 + b(x_0 + m) + c = 0.$$

Man kann jetzt m so bestimmen, daß in der nach den Potenzen der neuen Unbekannten geordneten Gleichung das quadratische Glied wegfällt, man braucht nur

$$3m + a = 0$$

zu setzen und also

$$m = -\frac{a}{3}.$$

Durch die Substitution

$$x = x_0 - \frac{a}{3}$$

geht also die allgemeine kubische Gleichung in eine Gleichung der Form

$$x^3 + px + q = 0$$

über, wo p und q reelle Zahlen sind und statt x_0 jetzt wieder x geschrieben ist. Man nennt eine solche Gleichung eine *reduzierte* kubische Gleichung. Wenn man in die rationale ganze Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

eine neue Variable x_0 mittels der Substitution $x = x_0 - \frac{a}{3}$ einführt, so entspricht dieser Transformation geometrisch eine Verschiebung des Koordinatensystems, und zwar nach § 7 eine solche Verschiebung, daß der Wendepunkt der Kurve jetzt auf der y -Achse liegt.

Die Cardanische Formel¹⁾

5. Eine kubische Gleichung sei in der reduzierten Form vorgelegt

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ist $q=0$, dann läßt sich eine Wurzel $x_1=0$ absondern, und man erhält für die beiden anderen Wurzeln die Werte $x_2 = +\sqrt{-p}$, $x_3 = -\sqrt{-p}$. Ist hingegen $q \neq 0$, aber $p=0$, so erhält man als Wurzeln der kubischen Gleichung $x_1 = \sqrt[3]{-q}$, $x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{-q}$, $x_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{-q}$. Im folgenden setzen wir $p \neq 0$ und $q \neq 0$ voraus.

¹⁾ Kann übergangen werden.

Wir setzen den Wurzelwert x_1 in der Form

$$x_1 = u + v$$

an und erhalten dann

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0.$$

Diese Gleichung kann dadurch erfüllt werden, daß man

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + q &= 0, \\ 3uv + p &= 0 \quad \text{setzt.} \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

ergeben sich u^3 und v^3 als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Es ist also

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

und

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; & v_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ u_2 &= \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; & v_2 &= \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ u_3 &= \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; & v_3 &= \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{aligned}$$

Um hieraus x zu erhalten, dürfen wir nicht alle Werte von u und v kombinieren, sondern nur solche, die ein reelles Produkt $u \cdot v$ ergeben. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ x_2 &= \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ x_3 &= \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{aligned}$$

Man nennt diese Form der Wurzeln die Cardanische Formel.

Der Casus irreducibilis¹⁾

6. In den Fällen, wo der Radikand der Quadratwurzel, die *Diskriminante*, negativ ist, wird der Radikand der 3. Wurzeln komplex. Wir wollen für diesen sogenannten Casus irreducibilis, der sich nach den Methoden für das Radizieren komplexer Größen (§ 3, Nr. 28) auch unmittelbar erledigen läßt, eine andere allgemeine Form der Lösung ableiten.

Der Casus irreducibilis *kann* nur eintreten, wenn der Koeffizient des linearen Gliedes negativ ist (er *braucht* aber dann nicht immer einzutreten). Wir gehen deshalb gleich von der Form

$$x^3 - px + q = 0$$

der kubischen Gleichung aus. Wir setzen

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und erhalten

$$r = \sqrt{\frac{p^3}{27}}; \quad \cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

Dann wird

$$x_1 = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right) + r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right)$$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}.$$

Die beiden anderen Wurzeln kann man erhalten, wenn man an die Stelle von φ die Werte $\varphi + 360^\circ$ und $\varphi + 720^\circ$ setzt. Dann wird

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 360^\circ}{3} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) \\ &= -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 720^\circ}{3} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) \\ &= -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ \right). \end{aligned}$$

Vietascher Wurzelsatz für die Gleichungen n ten Grades

7. Eine Gleichung n ten Grades hat die Form

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0.$$

Darin ist $A_0 \neq 0$, denn sonst hätten wir es mit einer Gleichung niederen Grades zu tun. Dividiert man durch A_0 und setzt $\frac{A_1}{A_0} = a_1$, $\frac{A_2}{A_0} = a_2$, ...,

¹⁾ Kann übergangen werden.

$\frac{A_{n-1}}{A_0} = a_{n-1}$, $\frac{A_n}{A_0} = a_n$, dann erhält man als allgemeinste Form der Gleichung nten Grades

$$(1) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung (1) zu bestimmen, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Nullstellen der rationalen ganzen Funktion nten Grades

$$(2) \quad y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

aufzusuchen. Ist n eine ungerade Zahl, so wird für $x \rightarrow -\infty$ auch $y = -\infty$; für $x \rightarrow +\infty$ wird $y = +\infty$ (§ 7, Nr. 2), die der Funktion entsprechende Kurve schneidet also mindestens einmal die x -Achse: Es ist mindestens eine reelle Nullstelle vorhanden. Ist n eine gerade Zahl, so wird sowohl für $x \rightarrow -\infty$ wie für $x \rightarrow +\infty$ der Wert der Funktion $y = +\infty$. Wir können also nicht schließen, daß mindestens eine Nullstelle vorhanden ist. Ist a_n eine negative Größe, dann nimmt y für $x=0$ einen negativen Wert an: Es sind mindestens zwei reelle Wurzeln vorhanden. Ist a_n positiv, so kann man auf diesem Wege die Existenz einer Nullstelle nicht nachweisen.

Der *Fundamentalsatz der Algebra* sagt aus, daß jede Gleichung nten Grades (1) *mindestens* eine Wurzel besitzt. Das soll nicht heißen, daß immer eine *reelle* Wurzel vorhanden ist, es können sehr wohl auch nur komplexe Wurzeln vorhanden sein (z. B. bei der Gleichung $x^2 + 1 = 0$). – Den Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra können wir hier nicht geben.

8. Es sei x_1 eine Wurzel der Gleichung nten Grades (1), dann ist also

$$0 = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der Funktionsgleichung (2), so folgt

$$y = (x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - x_1).$$

Darin sind sämtliche Summanden durch $x - x_1$ teilbar. Es läßt sich also die Funktion als Produkt des linearen Ausdrucks $(x - x_1)$ und eines zweiten Ausdrucks darstellen, der in x vom $(n-1)$ ten Grade ist; wir wollen ihn $x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$ schreiben:

$$y = (x - x_1)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}).$$

Das Ergebnis läßt sich so aussprechen: Ist x_1 eine Wurzel einer Gleichung nten Grades, so ist die linke Seite der auf 0 gebrachten Gleichung restlos durch $(x - x_1)$ teilbar.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jetzt die Funktion

$$y_1 = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

Der Ausdruck wird aber, weil $P_1=0$ und $Q_1=0$ ist, selbst 0; mithin ist $(p_1 - iq_1)$ gleichfalls eine Wurzel der Gleichung.

Die komplexen Wurzeln einer Gleichung n ten Grades treten also paarweise auf; jeder komplexen Wurzel tritt die konjugiert komplexe Zahl zur Seite. — Eine wesentliche Voraussetzung für dieses Ergebnis ist, daß die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n der Gleichung reelle Zahlen sind.

Angenäherte Bestimmungen reeller Wurzeln von Gleichungen. Regula falsi

11. Es seien x_1 und x_2 zwei so gewählte Werte der unabhängigen Variablen, daß von den zugehörigen Werten einer rationalen ganzen Funktion $y=f(x)$, also $f(x_1)$ und $f(x_2)$, der eine positiv, der andere negativ ist (Fig. 19). Zwischen x_1 und x_2 liegt eine Nullstelle der Funktion. Ersetzt man die Kurve zwischen $x_1, f(x_1)$ und $x_2, f(x_2)$ durch die Sekante, die die x -Achse im Punkte x_0 schneidet, so hat man nach der Ähnlichkeitslehre

$$|f(x_1)| : |f(x_2)| = (x_0 - x_1) : (x_2 - x_0).$$

Daraus erhält man für den Näherungswert x_0 die Gleichung

$$|f(x_1)| \cdot (x_2 - x_0) = |f(x_2)| \cdot (x_0 - x_1)$$

und daraus

$$x_0 = \frac{|f(x_1)| \cdot x_2 + |f(x_2)| \cdot x_1}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}.$$

Diese Methode heißt Regula falsi.

12. Für die praktische Benutzung der Regula falsi ist es von Bedeutung, daß x_1 und x_2 recht nahe der wirklichen Nullstelle liegen. Wenn der Verlauf der Funktion sich übersehen läßt, vermeide man, daß zwischen x_1 und x_2 noch ein Maximum oder Minimum liegt.

Die wiederholte Anwendung der Regula falsi gibt die Möglichkeit, die Annäherung an die Nullstelle immer schärfer zu erreichen.

Die Regula falsi ist nicht auf rationale ganze Funktionen beschränkt. Es wird nur vorausgesetzt, daß die Funktion zwischen x_1 und x_2 keine Unstetigkeiten besitzt.

Newtons Näherungsverfahren

13. Es sei x_1 ein Wert der Variablen in der Nähe einer Nullstelle der rationalen ganzen Funktion $y=f(x)$. Im Punkte $x_1, f(x_1)$ zeichnet man an die Kurve, die das Bild der Funktion ist, die Tangente. Deren Schnitt mit der x -Achse (x_0) gibt dann einen Näherungswert für den Nullwert der Funktion. Ist φ der Winkel zwischen Tangente und positiv gerichteter x -Achse, dann ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

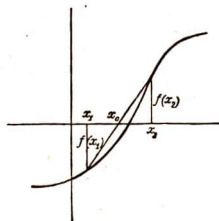


Fig. 19

Nun erhält man $\operatorname{tg} \varphi$, wenn man in die 1. Ableitung von $f(x)$ den Wert x_1 der Variablen einsetzt; wir schreiben das $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_1)$. Wir erhalten also

$$x_0 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Auch dieses *Newtonsche Verfahren* ist wiederholt anzuwenden, wenn man schärfere Annäherung erhalten will. Es ist gleichfalls nicht auf rationale ganze Funktionen beschränkt. Das Verfahren versagt u. a., wenn sich zwischen Nullstelle und Ausgangspunkt noch Maxima oder Minima befinden.

§ 9. Die rationalen gebrochenen Funktionen

Verhalten im Endlichen

1. Eine rationale gebrochene Funktion hat die Gestalt

$$(1) \quad y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ rationale ganze Funktionen sind. Ist also $f(x)$ vom n ten Grade, $g(x)$ vom m ten Grade, so hat die rationale gebrochene Funktion die Form

$$(2) \quad y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m},$$

wobei a_0, a_1, \dots, a_n und b_0, b_1, \dots, b_n reelle Zahlen sind.

Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationaler gebrochener Funktionen sind wieder rationale gebrochene Funktionen und lassen sich auf die Form (1) oder (2) bringen.

2. Ein Bruch hat den Wert 0, wenn der Zähler 0 wird, während der Nenner von 0 verschieden ist, oder wenn der Zähler endlich bleibt, während der Nenner unendlich wird. Der Bruch hat den Wert ∞ , wenn der Nenner 0 wird, während der Zähler von 0 verschieden wird, oder wenn der Zähler unendlich wird, während der Nenner endlich bleibt.

Man erhält danach die im Endlichen liegenden *Nullstellen* der rationalen gebrochenen Funktion

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wenn man die Nullstellen von $f(x)$ bestimmt und für jeden der so erhaltenen Werte feststellt, ob die Funktion $g(x)$ einen von 0 verschiedenen Wert annimmt.

Beispiel: Die Funktion $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ hat bei $x_1 = -2$ eine Nullstelle.

Man erhält die im Endlichen liegenden *Unendlichkeitsstellen*, wenn man die Nullstellen von $g(x)$ bestimmt und für jeden der so erhaltenen Werte feststellt, ob die Funktion $f(x)$ einen von 0 verschiedenen Wert annimmt.

Beispiel: Die Funktion $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ hat für $x_1 = 1$ und für $x_2 = -1$ je eine Unendlichkeitsstelle.

Es bleiben noch die endlichen Werte der Variablen zu untersuchen, für die gleichzeitig $f(x)$ und $g(x)$ den Wert 0 annimmt. x_1 sei ein solcher Wert.

Es sei also $f(x_1) = 0; \quad g(x_1) = 0.$

Dann ist nach § 8, Nr. 8 die rationale ganze Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x)$$

darstellbar, wobei $f_1(x)$ eine rationale ganze Funktion ist, deren Grad um 1 niedriger als der von $f(x)$ ist. Das Entsprechende gilt von $g(x)$; es ist etwa

$$g(x) = (x - x_1) g_1(x).$$

Zähler und Nenner der rationalen gebrochenen Funktion haben also in diesem Falle einen gemeinsamen Faktor. Wir heben ihn weg; die Funktion

$$y = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

stimmt mit der ursprünglichen in allen Werten außer für $x = x_1$ überein. Wegen der Stetigkeit legen wir auch der ursprünglichen Funktion in x_1 den Wert dieser gekürzten Funktion bei. Sollte sich der Fall wiederholen, daß die Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ für irgendeinen Wert von x gleichzeitig verschwinden, so ist ein weiterer gemeinsamer Faktor in Zähler und Nenner vorhanden, der beseitigt werden kann.

Beispiel: Die Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ läßt sich durch Kürzen mit $(x+1)$ auf die einfachere Form $y = \frac{x-1}{x+1}$ bringen und hat die Nullstelle $x_1 = 1$, die Unendlichkeitsstelle $x_2 = -1$.

3. Die Höchstzahl der Nullstellen einer rationalen gebrochenen Funktion ist durch den Grad des Zählers angegeben. Der Zähler kann auch eine Konstante sein, dann ist keine Nullstelle im Endlichen vorhanden. Für die Schnittpunkte der x -Achse mit dem Kurvenbild der Funktion kommen natürlich nur die reellen Nullstellen in Frage.

Die Höchstzahl der Unendlichkeitsstellen einer rationalen gebrochenen Funktion ist durch den Grad des Nenners angegeben. Auch die Unendlichkeitsstellen können zum Teil oder sämtlich komplex werden.

Beispiel: Die Funktion $y = \frac{a}{x^2 + 1}$ hat keine Nullstelle und keine reelle Unendlichkeitsstelle.

Verhalten im Unendlichen

4. Wir setzen die rationale gebrochene Funktion in der Form

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

voraus ($a \neq 0, b_0 \neq 0$). Wir unterscheiden 3 Fälle:

a) Es ist $n > m$. Wir dividieren Zähler und Nenner durch x^m und erhalten

$$y = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_n}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}}$$

Gehen wir hierin zur Grenze $x \rightarrow +\infty$ über, so ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \pm \infty,$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\frac{a_0}{b_0}$ positiv oder negativ ist.

Um den Wert der Funktion für $x \rightarrow -\infty$ zu untersuchen, unterscheiden wir die Fälle

α) $n - m$ ist gerade, dann ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \pm \infty$,

β) $n - m$ ist ungerade, dann ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \mp \infty$,

wobei wieder das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\frac{a_0}{b_0}$ positiv oder negativ ist.

b) Es sei $m > n$. Wir dividieren Zähler und Nenner durch x^n und erhalten

$$y = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 x^{m-n} + b_1 x^{m-n-1} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_m}{x^n}}$$

Gehen wir hierin zur Grenze $x \rightarrow +\infty$ und zur Grenze $x \rightarrow -\infty$ über, so erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

c) Es sei schließlich $m = n$. Wir dividieren Zähler und Nenner durch $x^n = x^m$ und erhalten

$$y = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n}{x^n}}$$

Gehen wir hierin zur Grenze $x \rightarrow +\infty$ und zur Grenze $x \rightarrow -\infty$ über, so erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{a_0}{b_0}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{a_0}{b_0}.$$

5. Wir setzen jetzt das Ergebnis der analytischen Betrachtung in Nr. 4 in die geometrischen Eigenschaften der Kurve um, die das Bild der rationalen gebrochenen Funktion ist.

Im Falle a), bei dem $n > m$ war, erhalten wir eine Kurve, die, je nachdem, ob $n - m$ gerade oder ungerade ist, und je nach dem Vorzeichen von $\frac{a_0}{b_0}$ aus dem positiven oder negativen Unendlichen kommt und in das positive oder negative Unendliche geht.

Beispiel: Die der Funktion $y = \frac{x^2}{x-1}$ entsprechende Kurve kommt aus dem negativen Unendlichen und geht ins positive Unendliche.

Im Falle b), bei dem $m > n$ war, erhalten wir eine Kurve, die sich nach dem negativen wie nach dem positiven Unendlichen der x -Achse anschmiegt, die x -Achse zur *Asymptote* hat.

Beispiel: Die der Funktion $y = \frac{x}{x^2-1}$ entsprechende Kurve.

Im Falle c), bei dem $m = n$ war, erhalten wir eine Kurve, die sich nach dem negativen wie nach dem positiven Unendlichen der Geraden anschmiegt, die im Abstände $\frac{a_0}{b_0}$ (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) parallel zur x -Achse gezogen wird.

Beispiel: Die der Funktion $y = \frac{x+1}{x-1}$ entsprechende Kurve hat die Gerade $y = +1$ zur *Asymptote*.

Differentiation eines Produktes und eines Quotienten

6. Was über die Bestimmung der Maxima und Minima, der Wendepunkte und Wendetangenten bei den rationalen ganzen Funktionen gesagt ist, gilt auch für rationale gebrochene Funktionen. Wir müssen also in der Lage sein, die Ableitungen rationaler gebrochener Funktionen bilden zu können. Dazu genügt es, eine Regel für die Differentiation eines Quotienten anzugeben. Wir wollen aber zuvor noch die Differentiation eines Produktes behandeln.

Es sei $y = f(x) \cdot g(x)$,

wo $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Funktionen sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x) \cdot g(x)}{x_1 - x}, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_1) \cdot g(x) + f(x_1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{x_1 - x}, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f(x_1) \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} + g(x) \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \end{aligned}$$

Geht man beiderseits zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ oder $x_1 \rightarrow x$ über, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

7. Es sei

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar sind [x sei so gewählt, daß $g(x) \neq 0$ ist].

Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{x_1 - x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x_1) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x_1)g(x) - g(x_1)f(x)}{x_1 - x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x_1) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x_1)g(x) - f(x)g(x) - g(x_1)f(x) + f(x)g(x)}{x_1 - x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x_1) \cdot g(x)} \cdot \left(g(x) \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} - f(x) \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \right).$$

Geht man beiderseits zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ oder $x_1 \rightarrow x$ über, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

8. Wendet man die in Nr. 7 entwickelte Regel auf die Funktion

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

an, so erhält man $y' = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = (-n) x^{-n-1}$.

Die Regel für die Differentiation einer Potenz, $\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}$, gilt also nicht nur für positive (§ 7, Nr. 5), sondern auch für negative ganze Exponenten.

§ 10. Algebraische Funktionen

Grundbegriffe und einfachste Sätze

1. Unter algebraischen Operationen versteht man das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und das Potenzieren mit rationalen, konstanten Exponenten. Wenn eine Größe y aus einer unabhängigen veränderlichen Größe x durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen hervorgeht¹⁾, so nennt man y eine *algebraische Funktion* von x .

Beispiele: $5x^4$, $(a + bx)^n$, x^{-3} , $1 - \sqrt[5]{x^7}$, $\sqrt[n]{x^m - a}$.

¹⁾ Auf Fälle, in denen eine algebraische Funktion nicht auf diese Weise entsteht, wird hier nicht eingegangen.

Alle Funktionen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendente Funktionen* (vgl. § 11).

Beispiele: 2^x , $\sin x$, $\lg x$.

2. Zu jeder Gleichung von der Form $y = f(x)$ kann man sich eine andere Gleichung von der Form $x = \varphi(y)$ vorstellen, so daß irgendein Wertepaar (x, y) , das der 1. Gleichung genügt, auch die 2. Gleichung befriedigt; vertauscht man dann in der 2. Gleichung x mit y , so bezeichnet man $y = \varphi(x)$ als die *inverse Funktion* (*Umkehrung*) von $y = f(x)$.

Beispiele:

gegebene Funktion	inverse Funktion
$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
$y = \sqrt{1 + x^2}$	$y = \sqrt{x^2 - 1}$
$y = (a + bx)^2$	$y = \frac{\sqrt{x} - a}{b}$

Die graphischen Bilder einer Funktion und ihrer Umkehrung stehen in einer sehr einfachen Beziehung zueinander, jedes ist nämlich das Spiegelbild des anderen in bezug auf die Halbierungslinie des 1. und 3. Quadranten der Koordinatenebene.

3. Es seien (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ zwei verschiedene Wertepaare, die den beiden Gleichungen $y = f(x)$ und $x = \varphi(y)$ genügen. Dann gilt die Identität

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1.$$

Geht man hierin vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten über, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

oder in Worten: Sind zwei Funktionen Umkehrungen voneinander, so ist das Produkt der beiden Differentialquotienten gleich 1.

4. Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes kann man die Gültigkeit des in § 7, Nr. 5 für ganzzahlige Exponenten bewiesenen Satzes auch für gebrochene Exponenten nachweisen. Es sei zunächst $y = x^{\frac{1}{n}}$, wobei n ganzzahlig ist. Durch Umkehrung folgt hieraus $x = y^n$, also $\frac{dx}{dy} = n y^{n-1}$, ferner nach Nr. 3

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Damit ist die in § 7, Nr.5 bewiesene Regel zunächst für den Fall bewiesen, daß der Exponent ein Stammbruch ist. Um den Satz auch für den Fall zu beweisen, daß der Exponent ein Bruch von der Form $\frac{m}{n}$ ist, stellen wir erst noch eine allgemeine Betrachtung an.

5. Es sei y eine differenzierbare Funktion einer Veränderlichen z , etwa $y = f(z)$, und z selbst eine differenzierbare Funktion von x , etwa $z = g(x)$; man sagt dann, y sei eine Funktion von einer Funktion. Läßt man den Wert von x sich um einen gewissen Betrag Δx ändern, so ändert sich auch z um eine gewisse Größe Δz und daher auch y um einen bestimmten Betrag Δy . Dann gilt die Identität¹⁾

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Läßt man hierin Δx und damit auch Δz und Δy gegen 0 konvergieren, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

6. Diesen Satz wenden wir auf den Fall an, daß eine Funktion $y = x^{\frac{m}{n}}$ zu differenzieren ist. Wir setzen $y = z^m$ und $z = x^{\frac{1}{n}}$. Dann ist nach dem Vorigen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(z^m)}{dz} \cdot \frac{d(x^{\frac{1}{n}})}{dx},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = m z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = m \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Damit ist die Regel über die Differentiation einer Potenz für alle rationalen Werte des Exponenten bewiesen.

Partielle Differentiationen. Unentwickelte Funktionen

7. Ist $z = f(x, y)$ eine Funktion von 2 Veränderlichen x und y , so muß man verschiedene Arten der Differentiation unterscheiden. Zum Beispiel kann man y als konstant ansehen und z nur nach x differenzieren oder andererseits x als konstant betrachten und die Differentiation nur nach y ausführen. Solche Differentiation nach einer der beiden Veränderlichen heißt *partielle Differentiation*, ihr Ergebnis *partieller Differentialquotient nach x oder nach y* . Um dies auch in äußerlich erkennbarer Schreibweise anzudeuten, benutzt man für partielle Differentiation ein rundes ∂ im Gegensatz zu dem geraden d der „totalen“ Differentialquotienten. Man schreibt also

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

¹⁾ Die Möglichkeit, daß $\Delta z = 0$ wird, lassen wir außer acht; sie läßt sich als „ungefährlich“ erweisen.

In der Funktion $z = f(x, y)$ seien jetzt x, y selbst wieder Funktionen einer Veränderlichen u ; es soll angegeben werden, wie man den (totalen) Differentialquotienten von z nach u findet. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Differenzenquotienten. So wie zu dem Werte u die Werte x, y, z gehören, so mögen zu einem von ihm verschiedenen Werte u_1 die Werte x_1, y_1, z_1 gehören. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z}{u_1 - u} &= \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{u_1 - u} = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y_1) - f(x, y)}{u_1 - u} \\ &= \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{x_1 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{u_1 - u} + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{u_1 - u}. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang erfordert nur der erste der 4 rechtsstehenden Quotienten einige Überlegung; dieser Quotient hat nämlich denselben Grenzwert wie der Quotient $\frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}$, d. h. sein Grenzwert ist $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Also wird

$$\frac{dz}{du} = \frac{df(x, y)}{du} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}.$$

8. Für unsere Untersuchungen kommt von dem soeben bewiesenen Satze hauptsächlich der Sonderfall $z=0$ und $u=x$ in Betracht. Dann erfüllen also x und y dauernd die Gleichung $f(x, y)=0$, und y ist eine sogenannte *unentwickelte Funktion von x* , d. h. eine Funktion, deren Abhängigkeit von x nicht durch einen geschlossenen Ausdruck, sondern eben durch die Gleichung $f(x, y)=0$ festgelegt ist. In diesem Falle erscheint der in Nr. 7 bewiesene Satz in der Form

$$0 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Beispiel: Aus der Ellipsengleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

folgt sofort

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Geometrische Anwendungen. Krümmung

9. An die Kurve $y=f(x)$ seien in zweien ihrer Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Normalen gelegt. (Unter Normale versteht man die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte errichtete Senkrechte.) Der Schnittpunkt der beiden Normalen habe die Koordinaten (X_1, Y_1) . Es soll untersucht werden, welche Grenzwerte X_1 und Y_1 annehmen, wenn sich der Punkt (x_2, y_2) dem Punkte (x_1, y_1) unbegrenzt nähert. Die Gleichungen der beiden Normalen lauten

$$(1) \quad y - y_1 = \frac{x_1 - x}{y_1'}, \quad y - y_2 = \frac{x_2 - x}{y_2'},$$

wobei y'_1 (sprich „y-Strich, 1.“) und y'_2 die Richtungen der in den beiden Kurvenpunkten gelegten Tangenten bedeuten; die Bildung dieser Ausdrücke ist so gemeint, daß zunächst y' gebildet und dann in den Ausdruck für y' an Stelle von x der Wert x_1 bzw. x_2 eingesetzt wird. Da für den Schnittpunkt (X_1, Y_1) der beiden Normalen die beiden Gleichungen (1) gleichzeitig gelten, so folgt aus ihnen durch Subtraktion

$$y_1 - y_2 = \frac{x_2 - X_1}{y'_2} - \frac{x_1 - X_1}{y'_1}$$

und hieraus durch einfache Umformung

$$X_1 = \frac{x_1 y'_2 - x_2 y'_1 + y'_1 y'_2 (y_1 - y_2)}{y'_2 - y'_1}.$$

Addiert und subtrahiert man im Zähler das Glied $x_1 y'_1$, so wird

$$X_1 = x_1 - \frac{y'_1 (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) y'_1 y'_2}{y'_2 - y'_1},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $x_2 - x_1$ dividiert,

$$X_1 = x_1 - \frac{y'_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot y'_1 y'_2}{\frac{y'_2 - y'_1}{x_2 - x_1}}.$$

Geht man hierin von den Differenzenquotienten zu den Differentialquotienten über, wobei $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $y'_2 = y'_1$ wird, so erhält man

$$(2a) \quad X_1 = x_1 - \frac{y'_1 + y_1''}{y_1''}.$$

Setzt man dies in die erste der Gleichungen (1) ein, so wird

$$(2b) \quad Y_1 = y_1 + \frac{1 + y_1'^2}{y_1''}.$$

Die so bestimmte Grenzlage des Punktes (X_1, Y_1) heißt *Krümmungsmittelpunkt*.

10. Aus den in (2) angegebenen Werten kann man ohne weiteres ablesen, daß der Krümmungsmittelpunkt (X_1, Y_1) vom Kurvenpunkte (x_1, y_1) die Entfernung

$$R_1 = \frac{\sqrt{1 + y_1'^2}}{y_1''}$$

hat. Diese Entfernung heißt *Krümmungsradius*, ihr Kehrwert heißt *Krümmung*. Der Kreis, dessen Mittelpunkt (X_1, Y_1) und dessen Radius R_1 ist, heißt *Krümmungskreis*. Läßt man den Index 1 der einfacheren Schreibweise

wegen jetzt wieder fort, so hat man also als Ergebnis, daß der Krümmungsmittelpunkt (X, Y) und der Krümmungsradius R für den Kurvenpunkt (x, y) bestimmt werden durch die Gleichungen

$$X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \quad R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

An den vorstehenden Ausdrücken ist bemerkenswert, daß y'' im Nenner auftritt; wird also bei einem (im Endlichen gelegenen) Kurvenpunkte $y'' = 0$, so wird der Krümmungsradius unendlich groß und umgekehrt. Diese Punkte, in denen die Krümmung der Kurve verschwindet, sind uns schon in § 7, Nr. 13 begegnet; es sind die *Wendepunkte* der Kurve.

§ 11. Transzendente Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen

Nullstellen. Unendlichkeitsstellen

1. Als Maß des Winkels benutzt man auch die Länge des Bogens im Einheitskreis, der den Winkel zum Zentriwinkel hat. Es entspricht also dem Winkel 360° der Bogen 2π , und allgemein ist

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360},$$

wobei φ die Bogenmaßzahl eines beliebigen Winkels und α die Gradmaßzahl desselben Winkels ist. Wir setzen im folgenden immer voraus, daß die Winkel im Bogenmaß gemessen sind.

Die *Sinusfunktion* hat unendlich viele Nullstellen. Sie nimmt den Wert 0 für $x = n\pi$ an, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Die *Kosinusfunktion* hat unendlich viele Nullstellen. Sie nimmt den Wert 0 für $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ an, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Die *Tangensfunktion* hat unendlich viele Nullstellen und unendlich viele Unendlichkeitsstellen. Die Nullstellen liegen bei $x = n\pi$, die Unendlichkeitsstellen bei $x = \frac{2n+1}{2}\pi$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Die *Kotangensfunktion* hat unendlich viele Nullstellen und unendlich viele Unendlichkeitsstellen. Die Nullstellen liegen bei $x = \frac{2n+1}{2}\pi$, die Unendlichkeitsstellen bei $x = n\pi$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Sinusfunktion und Kosinusfunktion haben die *Periode* 2π , Tangensfunktion und Kotangensfunktion die Periode π .

Ableitung

2. In der Fig. 20 sei $\sphericalangle BMC = x$, $MB = MC = r$, dann ist $MA = r \cdot \cos x$, $AB = r \cdot \sin x$, $DC = r \cdot \operatorname{tg} x$. Wir setzen voraus, daß der Winkel x positiv und spitz ist. Der Flächeninhalt des Kreisabschnittes BMC liegt seiner Größe nach zwischen den Dreiecksflächen BMA und DMC . Man erhält also die Ungleichung

$$\frac{r \cdot \cos x \cdot r \cdot \sin x}{2} < \frac{r^2 x}{2} < \frac{r \cdot r \cdot \operatorname{tg} x}{2},$$

und wenn man durch den positiven Wert $\frac{r^2 \cdot \sin x}{2}$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

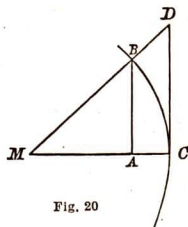


Fig. 20

Geht man in dieser Ungleichung zur Grenze $x \rightarrow 0$ über, so wird $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ in die Grenzen $+1$ und $+1$ eingeschlossen; es ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

und deshalb auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Diese Tatsache kommt an der Sinuskurve darin zum Ausdruck, daß sich die Kurve in der Gegend der Nullstelle wie die Gerade $y = x$ verhält, d. h. die x -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet.

3. Wir können nun mit Hilfe des in Nr. 2 hergeleiteten Grenzwertes die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen bilden. Es sei

$$y = \sin x,$$

dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \frac{2 \cdot \cos \frac{x_1 + x}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x}{2}}{x_1 - x} = \cos \frac{x_1 + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}}.$$

Geht man hier zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ oder $x_1 \rightarrow x$ über, dann erhält man unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Nr. 2

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Es ist also

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

4. In gleicher Weise können wir die Ableitung von

$$y = \cos x$$

finden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos x_1 - \cos x}{x_1 - x} = \frac{-2 \cdot \sin \frac{x_1 - x}{2} \cdot \sin \frac{x_1 + x}{2}}{x_1 - x} \\ &= -\sin \frac{x_1 + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}}. \end{aligned}$$

Geht man hierin zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ oder $x_1 \rightarrow x$ über, so erhält man

$$\frac{d \cos x}{d x} = -\sin x.$$

5. Die Ableitungen von $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \operatorname{ctg} x$ lassen sich nach der Regel von der Differentiation eines Quotienten finden. Es ist

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

mithin

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Ebenso liefert die Differentiation von

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{d y}{d x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

also

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

oder

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x.$$

Die zyklometrischen Funktionen

6. Man definiert die zyklometrische Funktion

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

als Umkehrung der Funktion $x = \sin y$. Die beiden zwischen zwei Werten x_0 und y_0 bestehenden Gleichungen

$$y_0 = \operatorname{arc} \sin x_0 \quad \text{und} \quad x_0 = \sin y_0$$

sind also gleichbedeutend.

Man erhält (nach § 10, Nr. 2) die zu einer Kurve inverse Kurve, indem man die Kurve an der Winkelhalbierenden $y = x$ des Koordinatensystems spiegelt. Fig. 21 zeigt den Verlauf der arc sin-Kurve.

Die Funktion $y = \arcsin x$ hat reelle Werte nur zwischen $+1$ und -1 . Sie ist unendlich vieldeutig, d. h. zu einem Werte von x gehören unendlich viele Werte der Funktion.

Die zyklometrische Funktion

$$y = \arccos x$$

wird definiert als die Umkehrung der Funktion $y = \cos x$. Die arccos-Kurve entsteht aus der arcsin-Kurve durch eine reine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in der Richtung der negativen y -Achse.

Die zyklometrischen Funktionen

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{und} \quad y = \operatorname{arccotg} x$$

werden definiert als Umkehrungen der Funktionen $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \operatorname{ctg} x$. Fig. 22 zeigt den Verlauf der arctg-Kurve. Auch diese Funktionen sind un-

endlich vieldeutig, man erhält zu jedem positiven oder negativen Wert von x unendlich viele Werte der Funktion, die sich um ganze Vielfache von π unterscheiden.

7. Um die Ableitungen der zyklometrischen Funktionen zu bilden, gehen wir von der Differentiationsregel für inverse Funktionen aus (§ 10, Nr. 3)

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

Es ist

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\frac{d \sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

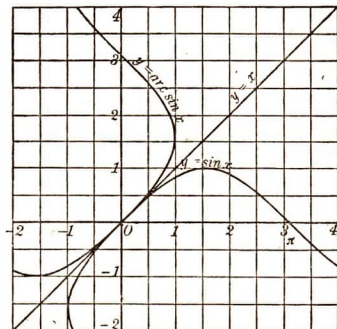


Fig. 21

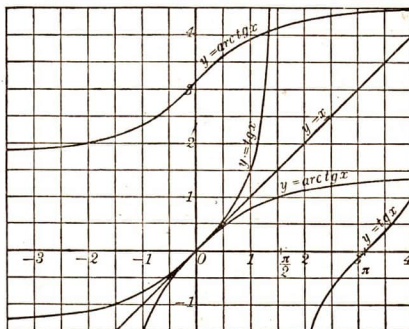


Fig. 22

Führt man für $\cos y$ den Wert $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ ein und setzt $x = \sin y$, so erhält man

$$\frac{d \operatorname{arcsin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Wir haben uns dabei, um Vieldeutigkeit zu vermeiden, auf das Kurvenstück vom Punkt $(-1, -\frac{\pi}{2})$ bis zum Punkt $(1, \frac{\pi}{2})$ beschränkt.

Es ist

$$\frac{d \operatorname{arccos} x}{dx} = \frac{1}{\frac{d \cos y}{dy}} = \frac{-1}{\sin y},$$

und wenn man $\sin y$ durch $\sqrt{1 - \cos^2 y}$ ersetzt und darin wieder $x = \cos y$ einführt,

$$\frac{d \operatorname{arccos} x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auch hier haben wir uns mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit auf ein Stück der Kurve, und zwar von $(1, 0)$ bis $(-1, \pi)$ beschränkt.

Unsere Ergebnisse gestatten aber die Angabe der Lage der Tangente auch für beliebige andere Stücke der Kurve.

8. Es ist

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{\frac{d \operatorname{tg} y}{dy}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

mithin

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ebenso erhalten wir

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{\frac{d \operatorname{ctg} y}{dy}} = \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y},$$

mithin

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Die logarithmische Funktion

9. Um den Differentialquotienten der Funktion $y = \log x$ zu bilden, schreiben wir den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

in der Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Im Falle der logarithmischen Funktion wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{}^e \log(x + \Delta x) - {}^e \log x}{\Delta x} = \frac{{}^e \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Wir setzen nun $\Delta x = \frac{x}{n}$ und haben dann später statt des Grenzüberganges $\Delta x \rightarrow 0$ den anderen $n \rightarrow \infty$ vorzunehmen. x soll nicht den Wert ∞ annehmen.

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{\frac{x}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a^{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\log \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]}.$$

Man setzt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

wobei freilich noch die Frage zu erledigen ist, ob dieser Grenzwert endlich und bestimmt ist. Dann erhalten wir

$$\frac{d a^{\log x}}{dx} = \frac{1}{x} a^{\log e}.$$

Man kann auf elementarem Wege, indem man etwa der Zahl n sehr große Werte beilegt, Näherungswerte für e berechnen. Es ergibt sich

$$e = 2,7182818284 \dots$$

10. Von besonderer Bedeutung sind außer den uns vom 7.-9. Schuljahr her bekannten Logarithmen mit der Basis 10, die man statt ${}^{10}\log x$ einfacher $\lg x$ schreibt, die Logarithmen, deren Basis e ist. Man nennt sie die *natürlichen Logarithmen* und schreibt sie \ln . Da

$$\ln e = 1$$

ist, ergibt sich nämlich bei dieser Basis der Differentialquotient in besonders einfacher Form:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

11. Es sei $z = \ln x$,

$$\text{also } x = e^z.$$

Dann erhält man durch Logarithmieren dieser Gleichung (Basis 10)

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e,$$

$$\text{also (1) } \ln x = \frac{\lg x}{\lg e}.$$

Diese Gleichung zeigt uns, wie wir aus den uns durch die Tabellen bekannten dekadischen Logarithmen die natürlichen Logarithmen berechnen können. Wir entnehmen der Gleichung insbesondere die Beziehung

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e}.$$

Wir werden § 12, Nr. 25 ein Verfahren zur unmittelbaren Berechnung der natürlichen Logarithmen kennenlernen. Die dekadischen Logarithmen lassen sich dann umgekehrt aus den natürlichen gewinnen. Um das einzusehen, geht man aus von dem Ansatz

$$z = \lg x,$$

also $x = 10^z.$

Dann erhält man durch Logarithmieren dieser Gleichung (Basis e)

$$\ln x = \lg x \cdot \ln 10,$$

also (2) $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$

Setzen wir hier $x = e$, so erhalten wir die mit der eben schon abgeleiteten identische Formel

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10}.$$

Wir wollen nun auch noch die Frage beantworten, wie man den Logarithmus eines Systems mit der beliebigen Basis a aus den Logarithmen eines Systems mit der Basis b findet. Ist

$$z = {}^a\log x,$$

also $x = a^z,$

so ergibt sich durch Logarithmieren (Basis b)

$${}^b\log x = {}^a\log x \cdot {}^b\log a,$$

mithin (3) ${}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}.$

Diese Gleichung, von der (1) und (2) besondere Fälle sind, vermittelt den Übergang von einem Logarithmensystem zu einem beliebigen anderen.

Die Exponentialfunktion

12. Um die Ableitung der Funktion $y = a^x$ zu bilden, benutzen wir wieder die Umkehrung dieser Funktion, $y = {}^a\log x$. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d {}^a\log y}{dy}} = \frac{y}{{}^a\log e},$$

also $\frac{d a^x}{dx} = \frac{a^x}{{}^a\log e} = a^x \cdot \ln a,$

denn nach (1) ist

$$\ln a = \frac{{}^a\log a}{{}^a\log e} = \frac{1}{{}^a\log e}.$$

Ist insbesondere $a = e$, so wird

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Die 1. Ableitung von e^x (und damit auch jede folgende) wird wieder gleich e^x .

§ 12. Unendliche Reihen. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Die Summe unendlicher Reihen

1. Zahlenfolgen, deren Gliederzahl unendlich groß ist, heißen unendlich. Wir setzen die Glieder im allgemeinen reell voraus. Summen von Zahlenfolgen nennt man Reihen. Da sich nicht alle Glieder einer unendlichen Folge oder Reihe hinschreiben lassen, muß das Bildungsgesetz der Glieder bekannt sein.

Beispiel: Das n te Glied der geometrischen Reihe $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ hat die Form aq^{n-1} (vgl. § 2, Nr. 3).

Das n te Glied einer Folge heißt auch das *allgemeine* Glied.

2. Es sei s_n die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen Zahlenfolge. Wir wollen dann den Ausdruck $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ untersuchen. 3 Fälle sind möglich:

1. Der Grenzausdruck läßt sich überhaupt nicht auswerten, er ist unbestimmt.

Beispiel: Die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ liefert für s_n , je nachdem n ungerade oder gerade ist, den Wert $+1$ oder 0 . Ein Grenzwert von s_n für $n \rightarrow \infty$ ist also nicht vorhanden.

2. Der Grenzausdruck hat einen *bestimmten, endlichen* Wert s . Man sagt in diesem Falle, die Reihe ist *konvergent*; s heißt ihre Summe.

Beispiel: Die Reihe $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$ hat zur Summe den Wert $\frac{1}{3}$.

3. Der Grenzausdruck hat zwar einen *bestimmten*, aber *unendlich großen Wert*. Die Reihe nennt man in diesem Falle *divergent*.

Beispiel: Divergent ist die Reihe der positiven ganzen Zahlen oder auch eine Reihe, deren sämtliche Glieder den gleichen konstanten Wert a haben.

3. Wir erinnern an ein uns schon von früher (§ 2, Nr. 10) her bekanntes Beispiel einer unendlichen Reihe, auf das wir im folgenden zurückgreifen müssen (Nr. 6). Die Summe der n ersten Glieder der geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

ist

$$s_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Um festzustellen, unter welchen Umständen die geometrische Reihe konvergiert, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ zu untersuchen. Die Ausführungen in § 2, Nr. 10 haben gezeigt: Die unendliche geometrische Reihe konvergiert, wenn der Quotient q

zwischen $+1$ und -1 liegt, sie divergiert, wenn der Quotient den Wert 1 hat oder größer als 1 ist, sie ist unbestimmt, wenn der Quotient den Wert -1 hat oder kleiner als -1 ist.

4. Es sei eine Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

vorgelegt. Außerdem sei von einer 2. Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$(2) \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

bekannt, einmal, daß sie konvergiert, und weiter, daß für jedes n

$$b_n \geq a_n$$

ist. Dann konvergiert auch die 1. Reihe. Denn wenn ich schrittweise die Glieder b durch die entsprechenden Glieder a ersetze, so verkleinert sich dadurch der positive endliche Wert der Summe (2) oder bleibt höchstens unverändert; er bleibt jedenfalls endlich. Die Reihe (1) konvergiert also gleichfalls. Ein entsprechender Satz gilt über die Divergenz der Reihen und läßt sich durch eine ähnliche Überlegung beweisen: Es sei eine Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

vorgelegt. Von einer 2. Reihe aus lauter positiven Gliedern

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

sei bekannt, daß sie divergiert und daß für jedes n

$$b_n \leq a_n$$

ist. Dann divergiert auch die 1. Reihe.

5. Wir wollen die Ergebnisse von Nr. 4 anwenden auf die Untersuchung der *harmonischen* Reihe

$$(1) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Wir vergleichen die Reihe mit der unendlichen Reihe

$$(2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

Diese letztere Reihe divergiert, denn wenn ich nacheinander das 1., dann die 2 folgenden, dann die 4 folgenden, dann die 8 folgenden usf. Glieder zusammenfasse, so erhalte ich eine Reihe aus lauter Gliedern $\frac{1}{2}$. Diese Reihe divergiert, also auch die Reihe (2). Da aber jedes Glied der Reihe (2) kleiner, höchstens gleich dem entsprechenden Gliede der Reihe (1) ist, divergiert auch die Reihe (1).

Die harmonische Reihe ist ein Beispiel dafür, daß die Glieder einer Reihe sehr wohl dauernd abnehmen können, ja daß sie gegen 0 konvergieren können,

ohne daß die Reihe selbst konvergiert. Es genügt also nicht zum Nachweis der Konvergenz einer Reihe, daß die Glieder sich mit wachsendem n der Null beliebig nähern.

Konvergenzkriterien

6. Für die Untersuchung der Konvergenz einer Reihe ist eine endliche Anzahl zu Anfang stehender Glieder nicht von Belang. Man wisse von einer unendlichen Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

daß von einem endlichen n ab der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ kleiner als eine angebbare Zahl q ist und daß diese Zahl q kleiner als 1 ist. Es ist also (q als eine bestimmte positive, nicht veränderliche Zahl vorausgesetzt)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < q$$

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < q$$

.....

Aus der Folge dieser Ungleichungen läßt sich eine andere Folge von Ungleichungen ableiten:

$$a_{n+1} < a_n \cdot q,$$

$$a_{n+2} < a_n \cdot q^2,$$

$$a_{n+3} < a_n \cdot q^3,$$

.....

Ersetzt man nun in der vorgelegten Reihe (1) von a_{n+1} an die Glieder durch die größeren Werte, die diese Ungleichungen angeben, dann geht die Reihe (1) über in die Reihe

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n q + a_n q^2 + a_n q^3 + \dots$$

Kann man noch nachweisen, daß diese Reihe konvergiert, so konvergiert nach Nr. 4 erst recht die Reihe (1). Die Vergleichsreihe (2) hat aber die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \cdot \frac{1}{1-q},$$

denn es handelt sich vom n ten Gliede an um eine unendliche geometrische Reihe, die wegen $q < 1$ konvergiert.

Wir können der Bedingung für die Konvergenz einer Reihe mit lauter positiven Gliedern, die wir damit gefunden haben, auch die Form geben:

Konvergenzkriterium. Eine unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern konvergiert, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ ist.}$$

7. Die in Nr. 6 entwickelte Bedingung ist hinreichend, d. h. wenn sie erfüllt ist, konvergiert die Reihe; sie ist aber nicht notwendig, d. h. wenn sie nicht erfüllt ist, könnte die Reihe doch noch konvergieren.

Der Grenzwert der Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder sei größer als 1. Dann läßt sich also n so angeben, daß von a_n an der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ größer bleibt als eine Zahl q , die wieder größer als 1 ist. Dann kann man in ähnlicher Weise wie in Nr. 6 die Reihe mit einer vom n ten Gliede an geometrischen Reihe vergleichen, deren Glieder jeweils kleiner werden als die entsprechenden der ursprünglichen Reihe, die dann aber divergiert. Erst recht divergiert mithin nach den Überlegungen in Nr. 4 die vorgelegte Reihe. Wir haben damit gefunden:

Divergenzkriterium. Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern divergiert, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ ist.}$$

Auch dieses Kriterium ist kein notwendiges, sondern nur hinreichend. Es bleibt nämlich, sofern $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ überhaupt existiert¹⁾, als 3. Möglichkeit noch die, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

wird. In diesem Falle läßt sich aus dem Kriterium nicht ersehen, ob die Reihe konvergiert oder ob sie divergiert.

Ein Beispiel zeige, daß eine solche Reihe tatsächlich konvergieren kann, daß also wirklich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ keine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist. Das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \text{ ist } \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n},$$

es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)(2n+2)} = 1.$$

¹⁾ Auch wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht existiert, kann die Reihe konvergieren, wie z. B. die Reihe $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$ zeigt, die durch Vertauschung von Nachbargliedern aus $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ entstanden ist und konvergiert, obwohl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dauernd zwischen 2 und $\frac{1}{8}$ wechselt, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ also nicht existiert.

Daß die Reihe konvergiert, sieht man auf Grund des gleich in Nr. 8 abzuleitenden Kriteriums ein, wenn man $\frac{1}{(2n-1)2n}$ durch $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ ersetzt, die Reihe also schreibt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert.

Man hat auch für diesen Fall eine Anzahl immer schärfer werdender Konvergenzkriterien entwickelt; auch sie sind aber alle nur hinreichend, nicht notwendig. Für unsere Zwecke genügt das in Nr. 6 entwickelte Kriterium.

8. Neben den Reihen mit positiven Gliedern sind die *alternierenden* Reihen von Wichtigkeit, bei denen die Vorzeichen der Glieder abwechseln. Es sei die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

vorgelegt, wo nun a_1, a_2, \dots positive und von einem endlichen Gliede an ständig abnehmende Zahlen sind. In diesem Falle lautet ein hinreichendes *Konvergenzkriterium für die alternierende Reihe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auch so aussprechen: Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder (vgl. § 1, Nr. 2) ist von einem endlichen Gliede n an immer eine negative Größe, der Ausdruck $a_n - a_{n+1}$ also stets positiv. Es sei s_n die Summe der n ersten Glieder, also s_{n-1} die Summe der $n-1$ ersten Glieder. Dann ist die unendliche Reihe

$$s_{n-1} + (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots,$$

wenn n überdies so gewählt ist – man kann das immer so einrichten –, daß a_n gerade ein Glied mit positivem Vorzeichen ist, entweder konvergent oder positiv unendlich.

Andererseits läßt sich die Reihe auch schreiben:

$$s_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) - \dots,$$

ihre Summe also ist kleiner als die endliche Zahl s_n ¹⁾. Mithin ist die Reihe konvergent.

Bemerkung: Wir haben hier zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe zusammengefaßt. Das gibt Anlaß zu der Bemerkung, daß es nicht ohne weiteres erlaubt ist, nicht aufeinanderfolgende Glieder einer konvergenten Reihe zusammenzufassen. Das für eine endliche Gliederanzahl gültige kommutative Gesetz der Rechenoperationen I. Stufe gilt nicht für alle unendlichen Reihen.

¹⁾ Ein strenger Beweis dafür, daß eine „beschränkte“ Reihe mit lauter positiven Gliedern konvergiert, ist hier übergangen.

Beispiel: Die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist nach dem soeben entwickelten Konvergenzkriterium konvergent. Die Summe liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, ist also jedenfalls von 0 verschieden. Würde man auf die Reihe ohne weiteres das kommutative Gesetz anwenden und sie schreiben

$$s = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots),$$

so könnte man weiter folgern

$$\begin{aligned} s &= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt also schon die Unrichtigkeit eines solchen Verfahrens.

Man nennt Reihen, bei denen die Reihenfolge der Glieder geändert werden darf, *unbedingt konvergente* Reihen. Es sind beispielsweise die Reihen mit lauter positiven Gliedern stets, wenn sie konvergent sind, auch unbedingt konvergent.

9. Nicht selten läßt sich auch bei einer alternierenden Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

der Nachweis sehr leicht erbringen, daß

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

ist. Dann folgt zunächst, daß (nach Nr. 6) die Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

konvergiert. Damit das möglich ist, müssen die Glieder gegen 0 konvergieren, d. h. es ist

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Außerdem folgt aus der Bedingung (1), daß die Glieder mit wachsendem, genügend großem n immer kleiner werden. Wenn das aber der Fall ist, konvergiert die alternierende Reihe (Nr. 8).

Weiß man von einer Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

nicht, ob sie lauter positive oder lauter negative Glieder besitzt oder ob sie alternierend ist, kann aber nachweisen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ist, dann ist die Reihe jedenfalls konvergent.

Potenzreihen

10. Eine Reihe der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

nennt man eine *Potenzreihe*, genauer eine nach positiven ganzen Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe. Eine solche Reihe ist als bekannt anzusehen, wenn man das Bildungsgesetz der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots kennt. Die unendliche Potenzreihe wird zu einer endlichen, wenn von einem endlichen Gliede $a_n x^n$ an alle folgenden Koeffizienten a_{n+1}, a_{n+2}, \dots den Wert 0 haben.

Die Frage nach der Konvergenz einer unendlichen Potenzreihe läuft hier auf die Untersuchung hinaus, für welche Werte der Variablen x die Reihe konvergiert. Dabei sind die in Nr. 6 bis 9 entwickelten Konvergenzkriterien in Anwendung zu bringen.

11. Wir wollen eine beliebige Funktion $f(x)$ durch eine zunächst endliche Potenzreihe annähern. Wir setzen sie mit unbestimmten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ an:

$$(1) \quad \varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Die Näherungsfunktion $\varphi_n(x)$ sei so beschaffen, daß für $x=0$ die gegebene Funktion $f(x)$ und $\varphi_n(x)$ selbst sowie die ersten n Ableitungen übereinstimmen. Eine erste notwendige Voraussetzung ist also, daß $f(x)$ jedenfalls n mal differenzierbar ist, eine zweite, daß $f(x)$ und ihre n Ableitungen $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ für $x=0$ bestimmte endliche Werte haben. Man bezeichnet diese Werte mit $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0)$.

Setzt man in (1) den Wert $x=0$ ein, so folgt, da $\varphi_n(0) = f(0)$ sein soll,

$$a_0 = f(0).$$

Differenziert man die identische Beziehung (1),

$$\varphi_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1},$$

und setzt wieder $x=0$, so folgt, da $\varphi_n'(0) = f'(0)$ sein soll,

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}.$$

Differenziert man die Beziehung ein zweites Mal,

$$\varphi_n''(x) = 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \dots + (n-1) n a_n x^{n-2},$$

und setzt wieder $x=0$, so folgt, da $\varphi_n''(0) = f''(0)$ sein soll,

$$f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2; \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}.$$

Durch fortschreitendes Differenzieren erhält man weiter

$$f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3; \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) n \cdot a_n; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

So nimmt die Näherungsfunktion $\varphi_n(x)$ von $f(x)$ die Gestalt an

$$\varphi_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Unter den angegebenen Bedingungen ist die Näherungsfunktion stets eindeutig zu finden.

12. Wir wollen eine Anwendung der in Nr. 11 abgeleiteten Formel auf eine rationale ganze Funktion machen. Die Funktion $f(x) = (1+x)^n$ ist vom n ten Grade. Die bis zur n ten Potenz fortschreitende Näherungsfunktion $\varphi_n(x)$ ist also in diesem Falle mit der Funktion $f(x)$ gleichbedeutend. Die Näherungsfunktion liefert uns also einen Ausdruck, der uns schon als binomischer Satz in § 5, Nr. 16 entgegengetreten ist. Es ist

$$f(x) = (1+x)^n; \quad f(0) = 1.$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}; \quad f'(0) = n.$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}; \quad f''(0) = n(n-1).$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}; \quad f'''(0) = n(n-1)(n-2).$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1; \quad f^{(n)}(0) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1.$$

Mithin ist

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} x^n,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + x^n.$$

13. Die Differenz von $f(x)$ und $\varphi_n(x)$ bezeichnet man als Restglied $R_{n+1}(x)$. Es ist also

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi_n(x).$$

Die hiernach aus Nr. 11 folgende Gleichung

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$$

heißt die *MacLaurinsche Formel*.

Ersetzt man in genau der gleichen Weise wie in Nr. 11 die Funktion $f(x+a)$, wo a eine Konstante ist, durch eine Näherungsfunktion

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

so erhält man, wenn wieder vorausgesetzt wird, daß $f(x+a)$ n mal differenzierbar ist und daß die Funktion und ihre n Ableitungen für $x=0$ endliche bestimmte Werte $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$ annehmen,

$$\varphi_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n,$$

Wenn auch hier durch die Gleichung

$$R_{n+1}(x) = f(x+a) - \varphi_n(x)$$

das Restglied eingeführt wird, erhält man

$$f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

Diese Gleichung heißt die *Taylor'sche Formel*. Die Taylor'sche Formel nähert die Funktion an der Stelle $x=a$ an, die MacLaurinsche an der Stelle $x=0$. Die Taylor'sche geht in die MacLaurinsche Formel über, wenn man $a=0$ setzt.

14. Es liegt nahe, zu untersuchen, was aus der MacLaurinschen und der Taylor'schen Formel wird, wenn man zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergeht. Aus der Näherungsfunktion wird dann eine unendliche Potenzreihe, wenn wir von dem Falle einer rationalen ganzen Funktion absehen. Wir müssen folgende Voraussetzungen machen:

1. Die Funktion $f(x)$ muß für den Bereich, für den die Entwicklung in eine Potenzreihe gelten soll, überall einen bestimmten, endlichen Wert haben;
2. die Funktion $f(x)$ muß beliebig oft differenzierbar sein;
3. auch die sämtlichen Ableitungen müssen für den Bereich, für den die Entwicklung gelten soll, endliche, bestimmte Werte haben;
4. aber muß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

sein. Trifft alles das zu, dann ist

$$(1) \quad f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots$$

und im besonderen Fall $a=0$

$$(2) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

(1) nennt man die *Taylor'sche*, (2) die *MacLaurinsche Reihe*.

Davon, ob die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt sind, werden wir uns in jedem Falle, der uns begegnet, an der Hand unserer Kenntnis von der Funktion und ihren Ableitungen überzeugen können. Schwieriger liegt es mit der Be-

dingung (4). Man braucht hier geschlossene Ausdrücke für das Restglied, in denen man den Grenzübergang vornehmen kann. Es gibt verschiedene Formen solcher Restgliedausdrücke. Wir sehen aber hier von Restglieduntersuchungen ab und beschränken uns darauf, in den einzelnen Fällen die Konvergenz der Potenzreihen nachzuweisen. An und für sich wäre es möglich, daß das Restglied, obwohl die Reihe konvergiert, in der Grenze nicht verschwindet. Es muß die Bemerkung genügen, daß dieser mißliche Fall bei den Funktionen, die wir hier in Reihen entwickeln, nicht eintritt.

Die binomische Reihe

15. Wir haben in Nr. 12 für $(1+x)^n$, wo n eine ganze positive Zahl ist, eine endliche Potenzreihe entwickelt. Wir stellen jetzt die gleiche Untersuchung für den Fall an, daß n keine positive ganze, aber doch eine rationale Zahl ist. Es ist ebenso wie in Nr. 12

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n; & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= n(1+x)^{n-1}; & f'(0) &= n; \\ f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2}; & f''(0) &= n(n-1); \end{aligned}$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}; \quad f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(n-k+1);$$

wobei aber jetzt die Reihe der Ableitungen nicht abbricht. Mithin ist nach der MacLaurinschen Reihe

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots \end{aligned}$$

Wir hatten früher (§ 5, Nr. 17) das Symbol $\binom{n}{k}$ durch die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

definiert, wobei seinerzeit n als positive ganze Zahl vorausgesetzt war. Behalten wir diese Definition bei, auch wenn n irgendeine rationale Zahl ist, dann erhalten wir die

binomische Reihe

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

16. Um den Konvergenzbereich der Reihe festzustellen, bestimmen wir

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1) x^k (k-1)!}{n(n-1) \cdots (n-k+2) x^{k-1} k!} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n-k+1)}{k} \right| = |x|. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also, wenn $|x| < 1$ ist, mit anderen Worten, wenn x zwischen $+1$ und -1 liegt.

Sinus- und Kosinusreihe

17. Um $f(x) = \sin x$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, stellen wir die Folge der Ableitungen auf:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x; & f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x; & f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x; & f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x; & f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) = \sin x; & f^{(4)}(0) = 0, \\ \dots & \dots \\ f^{(4k)}(x) = \sin x; & f^{(4k)}(0) = 0, \\ f^{(4k+1)}(x) = \cos x; & f^{(4k+1)}(0) = 1, \\ f^{(4k+2)}(x) = -\sin x; & f^{(4k+2)}(0) = 0, \\ f^{(4k+3)}(x) = -\cos x; & f^{(4k+3)}(0) = -1. \end{array}$$

Also lautet die

Sinusreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

18. Um den Konvergenzbereich der Sinusreihe festzustellen, bestimmen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! x^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = 0,$$

solange x endlich ist. Die Sinusreihe konvergiert also für alle endlichen Werte von x .

19. Für die Entwicklung von $f(x) = \cos x$ genügt ein Blick auf die Folge der Ableitungen in Nr. 17. Man erhält die

Kosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \cdots$$

Die Konvergenzuntersuchung führt in gleicher Weise wie in Nr. 18 zu dem Ergebnis, daß die Kosinusreihe für alle endlichen Werte von x konvergiert.

Die Arcustangensreihe und die Berechnung von π

20. Um $f(x) = \operatorname{arctg} x$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, stellen wir zunächst die Folge der Ableitungen auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}; & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}; & f'''(0) &= -2; \end{aligned}$$

so kommen wir sehr bald auf verwickelte Ausdrücke. Wir wollen deshalb ein anderes Verfahren einschlagen. Es sei

$$\operatorname{arctg} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots;$$

daß nämlich das konstante Glied fortfällt, folgt aus $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Durch Differenzieren (vgl. aber unten!) erhält man gliedweise

$$\frac{1}{1+x^2} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Setzt man links für den Ausdruck $(1+x^2)^{-1}$ die binomische Reihe ein, so erhält man

$$1 + \binom{-1}{1} x^2 + \binom{-1}{2} x^4 + \binom{-1}{3} x^6 + \dots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Durch Koeffizientenvergleichung, d. h. dadurch, daß man die Koeffizienten gleicher Potenzen von x gleich setzt (vgl. weiter unten), erhält man, wenn man beachtet, daß $\binom{-1}{1} = -1$, $\binom{-1}{2} = +1$, $\binom{-1}{3} = -1$, ... ist,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = +\frac{1}{5}, \dots$$

Damit erhalten wir die

Arcustangensreihe

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Zu der Herleitung sind zwei Bemerkungen zu machen. Wir sind auf diesem kurzen Wege zum Ziel gekommen auf Kosten zweier Rechenverfahren, deren Berechtigung wir nicht bewiesen haben. Einmal haben wir die Potenzreihe gliedweise differenziert und damit einen nur für eine endliche Anzahl von Summanden (in § 7, Nr. 7) bewiesenen Satz auf eine unendliche Anzahl von Summanden ausgedehnt. Den Beweis, daß das gestattet ist, müssen wir hier übergehen. Das zweite ist die in § 7 bereits für eine endliche Anzahl von Gliedern benutzte Methode der Koeffizientenvergleichung. Ihre Gültigkeit

auch bei Potenzreihen läßt sich auf den eben erwähnten Satz zurückführen. Es gelte in einem gewissen Konvergenzbereich, der $x=0$ einschließt, die identische Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots,$$

dann ist $a_0 = b_0$, weil die Gleichung auch für $x=0$ gilt. Differenziert man einmal und setzt wieder $x=0$, so folgt $a_1 = b_1$; differenziert man zweimal, so folgt $a_2 = b_2$ usw.

21. Um den Konvergenzbereich der Arcustangensreihe zu bestimmen, untersuchen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot x^{2n-1}} = x^2.$$

Die Reihe konvergiert also, wenn $x^2 < 1$ ist, d. h. wenn x zwischen $+1$ und -1 liegt. Für $x = +1$ und $x = -1$ konvergiert die Reihe ebenfalls.

22. Da $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, brauchte man nur $x=1$ in die Arcustangensreihe einzusetzen, um $\frac{\pi}{4}$ und damit π zu erhalten. Die Reihe, die man erhält, konvergiert aber sehr schlecht, d. h. man müßte außerordentlich viele Glieder bestimmen, um einen auch nur einigermaßen genauen Wert zu erhalten.

Um schneller konvergierende Reihen zu erhalten, kann man ein Verfahren einschlagen, das wir an einem besonders schnell zum Ziele führenden Fall zeigen wollen. Es sei

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{5}, \quad \text{also} \quad u = \arctg \frac{1}{5},$$

dann ist

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} = \frac{5}{12}$$

und

$$\operatorname{tg} 4u = \frac{2 \operatorname{tg} (2u)}{1 - \operatorname{tg}^2 (2u)} = \frac{120}{119};$$

weiter sei

$$\operatorname{tg} v = \frac{1}{239}, \quad \text{also} \quad v = \arctg \frac{1}{239};$$

dann ist

$$\operatorname{tg} (4u - v) = \frac{\operatorname{tg} 4u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} 4u \cdot \operatorname{tg} v} = 1, \quad \text{also} \quad 4u - v = \arctg 1.$$

Hier mag eine Bemerkung eingeschaltet werden. Es ist nicht bloßer Zufall, daß $\operatorname{tg} (4u - v) = 1$ ist, vielmehr ist, nachdem $\operatorname{tg} u = \frac{1}{5}$ angesetzt worden ist, der Wert von $\operatorname{tg} v$ gerade so gewählt worden, daß diese Gleichung $\operatorname{tg} (4u - v) = 1$ erfüllt wird. - Es wird nun

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239},$$

und wenn man für die arctg-Funktionen die Reihen einsetzt:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + - \dots \right).$$

Diese Reihen konvergieren rasch und geben schon mit wenigen Gliedern sehr genaue Näherungswerte von π .

Die Exponentialreihe

23. Um die Funktion $f(x) = e^x$ in eine Reihe zu entwickeln, wenden wir wieder unsere alte Methode an. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x; & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= e^x; & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= 1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(x) &= e^x; & f^{(k)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

So erhalten wir die

Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Zur Feststellung des Konvergenzbereiches untersuchen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n (n-1)!}{n! x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = 0,$$

solange x endlich ist. Die Reihe konvergiert also für alle endlichen x . Setzt man in die Reihe den Wert $x=1$ ein, so erhält man mit

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

eine recht gut konvergierende Reihe zur Berechnung von e .

24. In gleicher Weise entwickelt man die Funktion $f(x) = a^x$ in eine Reihe. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x; & f(0) &= a^0 = 1, \\ f'(x) &= \ln a \cdot a^x; & f'(0) &= \ln a, \\ f''(x) &= \ln^2 a \cdot a^x; & f''(0) &= \ln^2 a, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(x) &= \ln^k a \cdot a^x; & f^{(k)}(0) &= \ln^k a, \end{aligned}$$

und so erhält man die Reihe

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \frac{\ln^2 a}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!} x^3 + \dots$$

Auch diese Reihe konvergiert für alle endlichen Werte von x ; man erkennt dies durch eine ähnliche Überlegung wie in Nr. 23.

Die logarithmische Reihe

25. Die Funktion $\ln x$ ist ein Beispiel dafür, daß sich nicht jede Funktion im Anschluß an den Wert, den sie für $x=0$ annimmt, in eine Reihe entwickeln läßt. $\ln x$ nimmt nämlich für $x=0$ den Wert $-\infty$ an. Wir wollen die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ in eine Reihe entwickeln, könnten ebensogut aber auch $\ln(2+x)$ oder $\ln(3+x)$ usf. entwickeln.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x); & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}; & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}; & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}; & f'''(0) &= +2!, \\ & \dots & & \dots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)(-2)\cdots(-k+1)(1+x)^{-k}; & f^{(k)}(0) &= (-1)^{k-1}(k-1)! \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir die

logarithmische Reihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Um den Konvergenzbereich zu ermitteln, untersuchen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot x^n} \right| = |x|.$$

Die Reihe konvergiert also, wenn x zwischen $+1$ und -1 liegt. Übrigens konvergiert die Reihe auch noch für $x=+1$, divergiert aber für $x=-1$ (vgl. Nr.5 und 8).

26. Da $\ln m = \frac{{}^a \log m}{\log e}$ ist, wie man aus der Formel (3) in § 11 erhält, wenn man a für b , e für a , m für x setzt, so ist

$${}^a \log m = {}^a \log e \cdot \ln m,$$

und man kann – obwohl das nichts Neues aussagt – für ${}^a \log(1+x)$ die Reihe hinschreiben

$${}^a \log(1+x) = {}^a \log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \right);$$

sie hat naturgemäß den gleichen Konvergenzbereich, wie die in Nr. 25 hergeleitete Reihe.

27. Die in Nr.25 hergeleitete logarithmische Reihe ist zur Berechnung von Logarithmen, selbst wenn die Numeri in der Nähe von 1 liegen, nicht geeignet,

da sie schlecht konvergiert. Man gewinnt eine besser konvergierende Reihe auf folgende Weise. Es ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Subtrahiert man die zweite Reihe von der ersten und beachtet, daß

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

ist, dann erhält man

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Führt man hier die neue Variable z durch die Substitutionsgleichung

$$z = \frac{1+x}{1-x}$$

ein, so erhält man, da

$$x = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{wird,}$$

$$\ln z = 2 \left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right).$$

Diese Reihe ist zur Berechnung von Logarithmen, deren Numeri in der Nähe von 1 liegen, sehr gut geeignet. Man denke übrigens nicht, daß man in ihr eine Potenzreihe für $\ln x$ gewonnen habe, deren Möglichkeit wir oben (Nr. 25) abgeleugnet hatten. Die Reihe schreitet gar nicht nach Potenzen von z fort.

§ 13. Integralrechnung

Das unbestimmte Integral

1. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, von denen $g(x)$ differenzierbar ist. Dann schreibt man

$$(1) \quad \int f(x) dx = g(x)$$

[gelesen Integral $f(x) dx$], wenn

$$(2) \quad \frac{dg(x)}{dx} = f(x)$$

ist. Die *Integration* ist also die Umkehrung der *Differentiation*.

Geometrisch entspricht daher der *Integration* die Aufgabe, eine Funktion zu suchen, von der man für jeden Punkt die Richtung (der Tangente) kennt.

2. Da zwei Funktionen $g(x)$ und $g(x) + c$, die sich nur um eine Konstante c unterscheiden, den gleichen Differentialquotienten haben, so ist das Integral einer Funktion nur bis auf eine Konstante bestimmt. An Stelle von (1) in Nr. 1 erhalten wir also genauer

$$\int f(x) dx = g(x) + c,$$

wo c eine beliebige (reelle) Konstante ist.

Um die geometrische Bedeutung dieser Tatsache zu erkennen, verschieben wir irgendeine Kurve mit der Gleichung $y = g(x)$ in Richtung der positiven y -Achse um die Strecke c . Die neue Kurve hat die Gleichung $y = g(x) + c$. Beide Kurven haben aber für gleiche Abszissen die gleiche Steigung. Denn für irgendeinen Wert x haben beide den gleichen Differentialquotienten [wofür $g(x)$ überhaupt differenzierbar ist]. Wenn also die Steigung einer Kurve gegeben ist, so ist die Kurve selbst dadurch bis auf eine Konstante bestimmt.

3. Es ist (1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$

$$\text{denn (2) } \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n.$$

In dieser Formel kann n irgendein rationaler Wert sein, mit einziger Ausnahme des Wertes $n = -1$. In diesem Falle ist nämlich die Formel (2) nicht richtig (vgl. Nr. 7).

4. Es ist

$$(1) \quad \int a f(x) dx = a \int f(x) dx,$$

wenn a eine Konstante, f eine integrierbare Funktion ist. Man darf also einen konstanten Faktor vor das Integralzeichen ziehen. Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch Differentiation.

Es ist

$$(2) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

wenn $f(x)$ und $g(x)$ integrierbare Funktionen sind; man integriert also eine Summe, indem man die Summanden einzeln integriert und sie dann addiert. Wieder überzeugt man sich von der Richtigkeit durch Anwendung der entsprechenden Differentiationsregel.

Wir haben jetzt die Möglichkeit, jede rationale ganze Funktion zu integrieren.

Es ist

$$\int (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n x + c.$$

5. Setzt man die Differentiationsformeln der trigonometrischen Funktionen

$$(1) \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x; \quad (2) \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x;$$

$$(3) \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (4) \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

in Integrationsformeln um, so erhält man

$$(1) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

$$(2) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$$

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

6. Setzt man die Differentiationsformeln der zyklometrischen Funktionen

$$(1) \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) \quad \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}; \quad (4) \quad \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

in Integrationsformeln um, so erhält man

$$(1, 2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c;$$

$$(3, 4) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arctg} x + c.$$

Daß man für jedes der beiden Integrale zwei scheinbar verschiedene Lösungen erhält, ist nur so zu erklären, daß sich beide Lösungsfunktionen nur durch Konstanten unterscheiden. In Fig. 23 ist z. B. der in Frage kommende Teil der Kurve $y = \arcsin x$ ausgezogen. Der entsprechende Teil der Kurve $y = \arccos x$ ist punktiert, der entsprechende Teil der Kurve $y = -\arccos x$ gestrichelt gezeichnet. Man sieht, daß ausgezogene und gestrichelte Kurven durch eine Verschiebung in der Richtung der y -Achse (um $\frac{\pi}{2}$) ineinander übergehen.

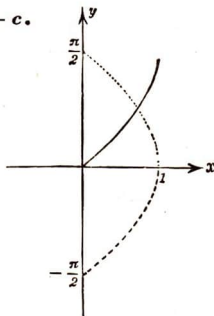


Fig. 23

7. Setzt man die Differentiationsformeln der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion

$$(1) \quad \frac{d c^x}{d x} = e^x;$$

$$(2) \quad \frac{d a^x}{d x} = a^x \cdot \ln a;$$

$$(3) \quad \frac{d \ln x}{d x} = \frac{1}{x}$$

in Integrationsformeln um, so erhält man

$$(1) \quad \int e^x dx = e^x + c;$$

$$(2) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

Das bestimmte Integral und der Flächeninhalt

8. Wir wollen die allgemeine Aufgabe lösen, das Flächenstück zu bestimmen, das von einer Kurve mit der Funktionalgleichung $y = f(x)$, der x -Achse und zwei Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Wir führen die Rechnung zunächst für einen einfachen Fall durch: Die Fläche werde von der Parabel $y = kx^2$, der x -Achse und der Ordinate $x = a$ begrenzt.

Wir teilen das Flächenstück in n gleich breite Streifen parallel der y -Achse. Der Streifen wird ersetzt durch ein Rechteck von der Höhe der kleineren Grenzordinate, die ganze Fläche damit also durch ein ganz im Innern der ursprünglichen Fläche liegendes stufenförmiges Flächenstück. Alle Rechtecke haben die Breite $\frac{a}{n}$, die Höhe des ersten ist 0, die des zweiten $k \left(\frac{a}{n}\right)^2$, die des dritten $k \left(\frac{2a}{n}\right)^2$, die des vierten $k \left(\frac{3a}{n}\right)^2$, die des letzten $k \left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2$.

Das stufenförmige Flächenstück hat also den Flächeninhalt

$$f_n = k \left(\frac{a}{n}\right)^2 \left(\frac{a}{n}\right) + k \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \left(\frac{a}{n}\right) + \dots + k \left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2 \left(\frac{a}{n}\right),$$

$$f_n = k \frac{a^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Für die Summe der Quadrate kann man nach § 1, Nr. 15 das Produkt $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ schreiben. Es ist also

$$f_n = k \cdot \frac{a^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Man erhält nun die gewünschte Fläche, wenn man in diesem Ausdruck zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergeht. Dann wird

$$f = \frac{ka^3}{3}.$$

Zum gleichen Grenzwert wäre man gekommen, wenn man die Fläche durch dasjenige stufenförmige Flächenstück ersetzt hätte, das aus Rechtecken von jeweils der größeren Grenzordinate als Höhe gebildet wird, das also das Flächenstück f ganz umschließt.

Die Fläche erscheint also hier als Grenzwert einer Summe von Produkten, den man kurz durch

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(x) \Delta x$$

andeuten kann, wenn Δx die Breite der Streifen ist, während $f(x)$ jeweils die zugehörige Höhe liefert.

Die wirkliche Auswertung dieses Grenzausdruckes wird aber nicht immer so leicht möglich sein wie in dem vorliegenden Falle.

9. Die Fläche, die von der Kurve $y=f(x)$, der x -Achse, der festen Ordinate $x=p$ und einer veränderlichen Ordinate x begrenzt wird, ist eine Funktion dieser veränderlichen Ordinate x . Wenn wir diese Funktion mit $F(x)$ bezeichnen, so wird $F(x+\Delta x)$ die Fläche sein, deren veränderliche Grenzordinate um Δx in Richtung der positiven x -Achse verschoben ist. Der Streifen, um den $F(x+\Delta x)$ den Wert $F(x)$ übertrifft, ist angenähert ein Rechteck von der Breite Δx und der Höhe $f(x)$. Es ist also

$$F(x+\Delta x) - F(x) \approx \Delta x \cdot f(x).$$

Dividiert man durch Δx und geht zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ über, dann tritt links der Differentialquotient von $F(x)$ nach der Variablen x auf; es wird

$$F'(x) = f(x).$$

Nach Nr. 1, 2 kann ich diese Gleichung umschreiben in die Gleichung

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

10. Die in Nr. 9 hergeleitete Beziehung zwischen der Kurve $y=f(x)$ und dem Flächeninhalt $y=F(x)$ läßt ganz außer acht, daß der Flächeninhalt von einer festen Ordinate $x=p$ an gerechnet werden soll. Die Folge ist das Auftreten der unbestimmten Konstanten c . Wenn der Flächeninhalt von irgendeiner

ganz beliebigen Ordinate $x=p$ an bis zur beliebigen Ordinate x gerechnet wird, so erhalte ich, wenn ich diese Grenzen am Integral andeute,

$$\int_p^x f(x) dx = F(x) + c_1$$

[gelesen Integral von p bis x $f(x) dx$], wo jetzt c_1 eine Konstante ist, deren Wert sich danach bestimmt, wie die Konstante in der Funktion $F(x)$ gewählt ist. Es ist dann

$$\int_p^b f(x) dx = F(b) + c_1$$

und

$$\int_p^a f(x) dx = F(a) + c_1.$$

Mithin ist das von a bis b erstreckte Integral, das dem von $x=a$ bis $x=b$ erstreckten Flächenstück entspricht,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Man nennt ein solches Integral, bei dem die Grenzen angegeben sind, ein *bestimmtes Integral*. Bei ihm fehlt die beliebige Konstante, die beim *unbestimmten Integral* auftritt.

11. Das bestimmte Integral liefert stets einen konstanten Wert, der positiv oder negativ sein kann. Der Flächeninhalt erhält damit gleichfalls ein Vorzeichen. Insbesondere ist, wie aus Nr. 10 zu ersehen ist,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Kommt das Vorzeichen des Flächeninhaltes nicht in Frage, so ist der absolute Wert des Integrals zu nehmen; dabei ist unter Umständen das Flächenstück in Teilstücke zu zerlegen, die verschiedenes Vorzeichen haben. Allgemein ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beispiel: $\int_0^\pi \cos x dx = 0$; handelt es sich um den absoluten Wert der Fläche, so ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = +1$ und $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx = -1$ getrennt zu berechnen. Der absolute Wert der Fläche ist 2 .

§ 14. Funktionen komplexer Veränderlicher

Die lineare ganze Funktion

1. Es sei zunächst die Funktion $Z = z + c$ vorgelegt, wo z die komplexe unabhängige Veränderliche, $c = a + bi$ eine komplexe Konstante ist. Dann stellt sich auch die abhängige Veränderliche Z als komplexe Zahl $X + iY$ dar. Die durch die Funktion gegebene Abhängigkeit stellen wir uns in der Weise vor, daß wir eine komplexe z -Ebene und eine komplexe Z -Ebene betrachten. Dann ist jedem Punkte der z -Ebene eindeutig ein Punkt der Z -Ebene zugeordnet, und zwar besteht zwischen einem Punkte $x_0 + iy_0$ der z -Ebene und dem ihm entsprechenden Punkte $X_0 + iY_0$ der Z -Ebene die Beziehung $X_0 = x_0 + a$, $Y_0 = y_0 + b$. Legt man die Z -Ebene so auf die z -Ebene, daß die X -Achse auf die x -Achse, die Y -Achse auf die y -Achse fällt, dann kann man die durch die Funktion $Z = z + c$ gegebene Beziehung durch eine *Abbildung* der z -Ebene auf die Z -Ebene darstellen, die eine *Verschiebung* um a in Richtung der reellen, um b in Richtung der imaginären Achse bedeutet, mit anderen Worten um eine Verschiebung, die durch den Vektor c bestimmt ist.
2. Bei der durch die Funktion $Z = z + c$ bewirkten Abbildung werden Strecken in gleich lange Strecken, Winkel in gleich große Winkel, also z.B. Dreiecke in kongruente Dreiecke übergeführt.
3. In der Funktion $Z = e_1 z$ sei $e_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, d.h. eine komplexe Zahl mit dem absoluten Werte 1. Um die durch diese Funktion gegebene Abbildung kennenzulernen, stellen wir unabhängige und abhängige Veränderliche in trigonometrischer Form dar. Dann ist

$$R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

oder nach dem Satz von *Moirve*

$$R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = r(\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)),$$

d.h. es ist $R = r$, $\Phi = \varphi + \alpha$. Irgendein Punkt der z -Ebene wird also durch einen Punkt der Z -Ebene dargestellt, der gleichen Radiusvektor, aber ein um α vermehrtes Argument hat. Mit anderen Worten: Die Abbildung stellt sich als eine *Drehung* um den Winkel α dar.

4. Bei der durch die Funktion $Z = e_1 z$, wobei $|e_1| = 1$ ist, bewirkten Abbildung werden Strecken in gleich lange Strecken, Winkel in gleich große Winkel, Dreiecke in kongruente Dreiecke übergeführt.
5. In der Funktion $Z = az$ sei a eine reelle Zahl. Dann erhält man bei Trennung der reellen und imaginären Teile die Beziehungen $X = ax$, $Y = ay$. Die durch die Funktion bewirkte Abbildung stellt sich danach, sofern a positiv ist, als

eine *Streckung* im Verhältnis $1:a$ dar, bei der der Nullpunkt unverändert bleibt. Ist a negativ, so kommt noch eine Spiegelung jedes Punktes am Nullpunkt hinzu.

6. Bei der durch die Funktion $Z = az$ bewirkten Abbildung werden Strecken im Verhältnis $1:|a|$ vergrößert bzw. verkleinert, Winkel in gleich große Winkel übergeführt und Dreiecke in ähnliche Dreiecke transformiert. Man spricht deshalb auch von einer *Ähnlichkeitstransformation*.
7. Die durch eine allgemeine lineare Funktion $Z = c_1z + c_2$ einer komplexen Veränderlichen gegebene Abbildung der z -Ebene auf die Z -Ebene läßt sich durch Zusammensetzung der bisher behandelten Transformationen: Verschiebung, Drehung, Streckung gewinnen. Es sei $c_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, dann liefert $Z = r_1 \cdot z$ eine Streckung, $Z = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)z$ eine Drehung, $Z = c_1z$ also eine *Drehstreckung*. Die Konstante $c_2 = a_2 + b_2i$ fügt noch eine Verschiebung hinzu. Die Streckung erfolgt im Verhältnis $1:r_1$, die Drehung um den Winkel φ_1 , die Verschiebung um a_2 in Richtung der reellen, um b_2 in Richtung der imaginären Achse. Die durch die lineare ganze Funktion bewirkte Abbildung ist hiernach eine Ähnlichkeitstransformation, die im Falle $|c_1|=1$ in eine Kongruenztransformation übergeht.
8. Transformationen bilden eine Gruppe, wenn zwei nacheinander ausgeführte Transformationen durch eine einzige gleichartige ersetzt werden können. Hiernach haben die Verschiebungen, Drehungen und Streckungen Gruppencharakter, und die durch eine lineare ganze Funktion bewirkten Ähnlichkeitstransformationen, ebenso wie ihr Sonderfall der Kongruenztransformation, bilden eine Gruppe.

Die Abbildung durch reziproke Radien

9. (*Hilfssatz.*) Ein Kreis mit dem Radius ρ ist gegeben. Von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkte P_1 mit dem Mittelpunktsabstand r_1 werden die Tangenten an den Kreis gelegt, sie mögen P_1T_1 und P_1T_2 heißen. Man verbindet P_1 , T_1 und T_2 mit dem Kreismittelpunkt M und bezeichnet den Schnittpunkt von P_1M mit der Berührungsehne T_1T_2 mit P_2 . Den Mittelpunktsabstand P_2M nennt man r_2 . Dann ist $r_1 \cdot r_2 = \rho^2$, wie der Lehrsatz von *Euklid* für das rechtwinklige Dreieck P_1T_1M unmittelbar ergibt.
Wenn in dieser Weise ein Punkt P_1 des Kreisäußern durch einen Punkt P_2 des Kreisinnern abgebildet wird oder wenn umgekehrt ein Punkt P_2 des Kreisinnern durch einen Punkt P_1 des Kreisäußern abgebildet wird, dann spricht man von einer *Spiegelung am Kreise* mit dem Radius ρ .
10. Ein Punkt $a + bi$ der komplexen Ebene hat den zu ihm *konjugierten* Punkt $a - bi$. Man spricht in diesem Falle von einer *Spiegelung an der reellen Achse*. Ist der Punkt in trigonometrischer Form gegeben $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dann

nimmt der konjugierte, an der reellen Achse gespiegelte Punkt die Form $r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$ an, d. h. der Radiusvektor bleibt unverändert, das Argument ändert das Vorzeichen.

11. Vorgelegt ist die Funktion $Z = \frac{1}{z}$. Man nennt die durch sie bewirkte Abbildung die Transformation durch reziproke Radien. Bringen wir Z und z in die trigonometrische Form, so geht die Gleichung

$$R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

nach dem Lehrsatz von *Moirve* in die Beziehung

$$R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

über. Die Transformation durch reziproke Radien läßt sich also erreichen durch ein Nacheinander der Transformation $R = \frac{1}{r}$ oder $R \cdot r = 1$, d. h. einer Spiegelung am Einheitskreis, und einer Transformation $\Phi = -\varphi$, d. h. einer Spiegelung an der reellen Achse.

12. Die Abbildung durch reziproke Radien ist eindeutig, wenn man, zur Beseitigung der einzigen Ausnahme, die Festsetzung trifft, daß dem Nullpunkt der z -Ebene die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte der Z -Ebene entspricht und umgekehrt.
13. Um zu sehen, wie die Bilder von Geraden und Kreisen der z -Ebene in der Z -Ebene aussehen, bilden wir eine in der z -Ebene durch die Beziehung $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ gegebene Linie ab, die im Falle $a \neq 0$ einen Kreis, im Falle $a = 0$ eine Gerade darstellt. Aus

$$X + iY = \frac{1}{x + iy}$$

gewinnt man

$$Xx - Yy = 1 \quad \text{und} \quad xY + yX = 0$$

und damit

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2}; \quad y = -\frac{Y}{X^2 + Y^2}.$$

Mithin geht die Gleichung in x und y jetzt über in

$$a + bX - cY + d(X^2 + Y^2) = 0,$$

d. h. in einen Kreis, falls $d \neq 0$ ist, in eine Gerade, falls $d = 0$ ist. Es wird also ein nicht durch den Nullpunkt gehender ($d \neq 0$) Kreis ($a \neq 0$) in einen nicht durch den Nullpunkt gehenden Kreis, ein durch den Nullpunkt gehen-

der ($d=0$) Kreis ($a \neq 0$) durch eine Gerade, eine nicht durch den Nullpunkt gehende ($d \neq 0$) Gerade ($a=0$) durch einen durch den Nullpunkt gehenden Kreis, eine durch den Nullpunkt gehende ($d=0$) Gerade ($a=0$) durch eine gleichfalls durch den Nullpunkt gehende Gerade, nämlich ihr Spiegelbild an der reellen Achse, abgebildet.

14. Die linear gebrochene Funktion $Z = \frac{c_1 z + c_2}{c_3 z + c_4}$ läßt sich, da $c_3 \neq 0$ vorausgesetzt werden kann – andernfalls handelt es sich um eine lineare ganze Funktion –, auf die Form $Z = \frac{d_1 z + d_2}{z + d_3}$ bringen. Dabei kann noch $d_2 \neq d_1 d_3$ vorausgesetzt werden, weil sich sonst die Funktion auf $Z = d_1$ reduziert. Durch geeignete Wahl der Konstanten e_1, e_2, e_3 läßt sich die Funktion auf die Form $Z = \frac{e_1}{z + e_2} + e_3$ bringen. Nun läßt sich die Funktion $Z = \frac{e_1}{z}$ als Überlagerung einer Abbildung durch reziproke Radien und einer Streckung, die Funktion $Z = \frac{1}{z} + e_3$ als Überlagerung einer Abbildung durch reziproke Radien und einer Verschiebung, die Funktion $Z = \frac{1}{z + e_2}$ oder $z = \frac{1}{Z} - e_2$ gleichfalls als Überlagerung einer Abbildung durch reziproke Radien und einer Verschiebung erklären. Damit wird die durch die Funktion $Z = \frac{e_1}{z + e_2} + e_3$ gegebene Abbildung als eine Überlagerung von Verschiebungen, Streckungen und Abbildungen durch reziproke Radien gekennzeichnet.

