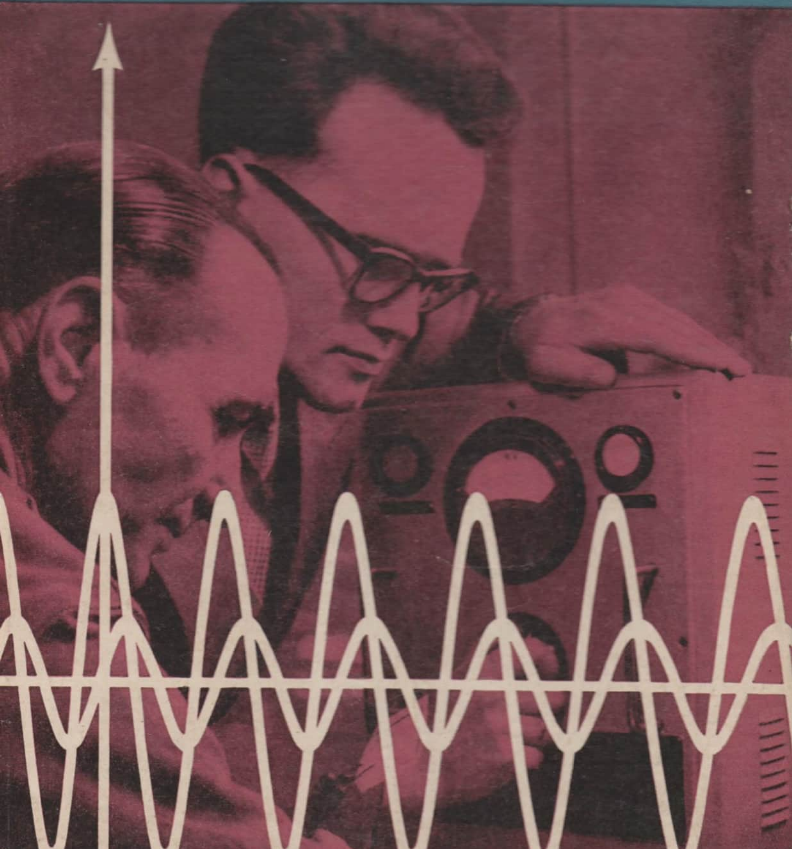
MATHEMATIK 10

ERWEITERTE OBERSCHULE



Mathematik

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule · Klasse 10

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1967

Verfasser:

Herbert Vockenberg	Kapitel 1 und 2 (außer Abschnitt 2.8.)
Prof. Dr. Werner Renneberg	Kapitel 3 (außer Abschnitt 3.12.)
Hans Simon	Kapitel 4
Dr. Hans Wußing	Abschnitte 2.8. und 3.12.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt

Ausgabe 1962

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einbandgestaltung: Werner Fahr
Redaktionsschluß: 20. Juli 1965
ES 11 G · Bestell-Nr. 00 10 59-7 · Preis: 5,25 · Lizenz 203/1000/67 (UN)
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

1. Exponential- und Logarithmusfunktion

Das Flaggschiff der sowjetischen Eismeerflotte ist der Eisbrecher „Lenin", der mit Kernenergie betrieben wird. Das Schiff, das eine Wasserverdrängung von 16000 t besitzt, entwickelt im freien Fahrwasser eine Geschwindigkeit von 18 kn, und selbst bei ununterbrochener Fahrt in 2,4 m dickem Eis vermag es noch 2 Seemeilen in der Stunde zurückzulegen. Der Kernbrennstoff, das angereicherte Uran 235, zerfällt im Reaktor des Eisbrechers und gibt Wärmeenergie frei. Der Zerfall eines radioaktiven Elements vollzieht sich nach folgendem Zerfallsgesetz:

(1) $n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}.$

Darin bedeuten:

- n_0 die Anzahl der zu einem (willkürlich angenommenen) Zeitpunkt Null vorhandenen unzerfallenen Atome;
- e eine wichtige Konstante, deren Wert 2,718 ... beträgt;
- λ eine Materialkonstante;
- t die (veränderliche) Zeit, gemessen vom (willkürlich angenommenen) Zeitpunkt Null;
- n die (veränderliche) Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome.

Durch (1) wird jedem Wert von t ein Wert n zugeordnet, (1) ist also der analytische Ausdruck einer Funktion. Funktionen, bei denen eine Veränderliche als Exponent einer Potenz auftritt, heißen **Exponentialfunktionen.**

1.1. Zur Wiederholung

1. Berechnen Sie 2^x und $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, wenn x nacheinander die folgenden Werte annimmt!

a) 2 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 10 **e)** 20 **f)** -1
g) -4 **h)** -5 **i)** -7 **k)** -10 **l)** -20

2. Berechnen Sie **a)** 10^x und **b)** $\left(\frac{1}{10}\right)^x$,
wenn x nacheinander die Werte $-10; -9; -8; \ldots; -1; 0; 1; \ldots; 10$ annimmt!

3. Welche Besonderheit ergibt sich in den Aufgaben **1** und **2** bei $x = 0$?

4. Berechnen Sie 2^x und $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, wenn x nacheinander die folgenden Werte annimmt!

a) 4,5 **b)** 3,75 **c)** $\frac{10}{3}$ **d)** 2,5 **e)** $\frac{9}{4}$ **f)** $\frac{11}{6}$ **g)** $1\frac{2}{3}$
h) $\frac{5}{4}$ **i)** 0,75 **k)** $\frac{2}{3}$ **l)** 0,5 **m)** $\frac{1}{3}$ **n)** $\frac{1}{4}$ **o)** $-\frac{1}{4}$
p) $-\frac{1}{2}$ **q)** $-\frac{3}{4}$ **r)** $-\frac{4}{3}$ **s)** $-\frac{5}{3}$ **t)** $-\frac{9}{4}$ **u)** $-\frac{5}{2}$ **v)** $-\frac{10}{3}$

5. Berechnen Sie 10^x und $\left(\frac{1}{10}\right)^x$, wenn x nacheinander die unter Aufgabe **4. a)** bis **v)** aufgeführten Werte annimmt!

6. Untersuchen Sie **A)** $(-3)^x$, **B)** $\left(-\frac{1}{5}\right)^x$, **C)** $(-10)^x$, wenn x nacheinander die folgenden Werte annimmt!

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** $\frac{1}{3}$
g) $-\frac{2}{3}$ **h)** $-\frac{3}{2}$ **i)** -2 **k)** -3 **l)** -4

Begründen Sie die Ergebnisse mit Hilfe der Potenz- und Wurzelrechnung!

7. Berechnen Sie **A)** 2^{-x}, **B)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$, **C)** 10^{-x}, wenn x nacheinander die folgenden Werte annimmt!

a) 3 **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 0 **e)** $-\frac{1}{2}$ **f)** -1 **g)** $-\frac{4}{3}$

8. Welche Exponenten gehören zu den folgenden Potenzwerten, wenn die Basis 2 ist?

a) 8 **b)** 128 **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{32}$ **e)** $\frac{1}{256}$ **f)** $\sqrt{2}$
g) $\sqrt[3]{4}$ **h)** $\sqrt[4]{32}$ **i)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **k)** $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ **l)** $\frac{1}{\sqrt[3]{64}}$

9. Welche Exponenten gehören zu den folgenden Potenzwerten, wenn die Basis 10 ist?

a) 100 **b)** 100 000 **c)** 1 Milliarde
d) 0,001 **e)** $\frac{1}{10\,000}$ **f)** $\sqrt[3]{100}$ **g)** $\sqrt[2]{0{,}1}$

10. a) Wie können Sie die Lösungen der Aufgaben **8** und **9** auf ihre Richtigkeit überprüfen?
b) Bilden Sie weitere Aufgaben dieser Art!

11. a) Erläutern Sie an Hand eines selbstgewählten Beispiels den Begriff „zueinander inverser Funktionen"!
b) Beschreiben Sie, wie Sie zu einer gegebenen Funktion (z. B. $y = x^2$) die inverse Funktion bestimmen!
c) Bestimmen Sie die zu $y = x^3$ inverse Funktion! Welcher Unterschied besteht zur Inversion von $y = x^2$?
d) Welche Eigenschaft besitzen die Bilder zueinander inverser Funktionen, die in dasselbe Koordinatensystem gezeichnet sind?
e) Welche Gesetzmäßigkeit besteht zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat zueinander inverser Funktionen?

1.2. Die Exponentialfunktionen $y = a^x \, (a > 0)$

Die Exponentialfunktionen $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Die Exponentialfunktionen

(2) $\quad y = 2^x; \; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \; y = 10^x; \; y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

sind Beispiele für die Exponentialfunktionen vom Typ

(3) $\quad y = a^x \; (a > 0)$,

wobei x die Gesamtheit aller reellen Zahlen, dagegen a eine bestimmte positive reelle Zahl bedeuten.

Rechnen Sie Funktionswerte für die in (2) angegebenen Exponentialfunktionen für rationale x-Werte aus, und tragen Sie die erhaltenen Wertepaare als Bildpunkte in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ein!

Eine Potenz a^x mit $a > 0$ und x rational ergibt genau einen positiven reellen Potenzwert, der entweder mit Hilfe der *Potenz-* bzw. *Wurzelrechnung* oder durch *Intervallschachtelung* als rationaler Näherungswert mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann.

Für irrationale Werte von x lassen sich in $y = a^x$ die Funktionswerte nur näherungsweise berechnen, indem man statt der irrationalen Exponenten rationale Näherungswerte benutzt. Durch Anwendung der Intervallschachtelung läßt sich der Potenzwert der Potenz mit irrationalem Exponenten zwischen zwei benachbarte Potenzen mit rationalem Exponenten einschachteln.

Beispiel 1: Es ist $10^{\sqrt{2}}$ näherungsweise zu berechnen.

Lösung: Aus $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

folgt $10^{1{,}4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}5}$.

Wegen $10^{1{,}4} = \sqrt[5]{10^7} = 25{,}12$ und $10^{1{,}5} = \sqrt{1000} = 31{,}62$

gilt demnach $\quad 25{,}12 < 10^{\sqrt{2}} < 31{,}62$.

Diese Intervallschranken lassen sich aber noch wesentlich einengen:

Aus $1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$

folgt $10^{1{,}41421} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}41422}$.

Wegen $10^{1{,}41421} = 25{,}9544$ und $10^{1{,}41422} = 25{,}9550$

gilt demnach $\quad 25{,}9544 < 10^{\sqrt{2}} < 25{,}9550$.

Die beiden Potenzen unterscheiden sich um weniger als $\frac{1}{1000}$.

Da die rationalen Zahlen dicht liegen, läßt sich jeder irrationale Exponent so weit durch rationale Exponenten annähern, daß die zugeordneten Potenzwerte zu einer festen Basis sich beliebig wenig unterscheiden. Somit kann der Potenzwert einer

Potenz mit irrationalem Exponenten mit jeder geforderten Genauigkeit näherungsweise berechnet werden.
Für die Exponentialfunktionen in (2) bedeutet das, daß jedem Wert von x genau ein y-Wert zugeordnet ist, so daß die Bilder dieser Funktionen zusammenhängende Kurvenzüge darstellen (Abb. 1.1.). Diese Bilder der Exponentialfunktionen (2) heißen **Exponentialkurven.**

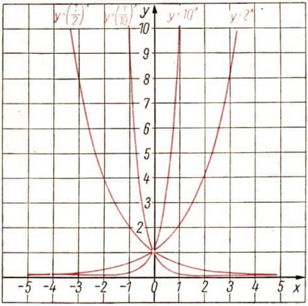


Abb. 1.1.

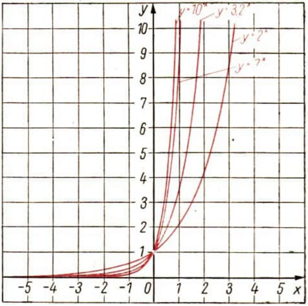


Abb. 1.2.

In Abbildung 1.2. ist die Schar der Exponentialkurven $y = a^x$ für $a > 1$ dargestellt. Außer $y = 2^x$ und $y = 10^x$ sind noch $y = 3{,}2^x$ und $y = 7^x$ eingezeichnet. Man erkennt für die Exponentialfunktionen

(4) $\quad y = a^x \ (a > 1)$

und die Schar ihrer Bilder folgende gemeinsame Eigenschaften:

1. Die Funktionen $y = a^x$ $(a > 1)$ sind **eineindeutig**, alle Kurven sind mit zunehmenden x-Werten steigend.
2. Da eine Potenz mit positiver Basis immer positiv ist, kommen die Kurven mit kleiner werdenden x-Werten zwar immer näher von „oben“ her an die x-Achse heran, ohne sie jedoch zu berühren oder gar zu schneiden. Man sagt, die Kurve nähert sich asymptotisch der x-Achse. Die x-Achse ist Asymptote für alle Kurven der Exponentialkurvenschar $y = a^x$ $(a > 1)$.
3. Je größer a, um so steiler ist der Anstieg, um so „schneller“ schmiegen sich die Kurven aber auch für negative x an die x-Achse an.
4. Aus dem Vorstehenden folgt für alle Exponentialfunktionen $y = a^x$ $(a > 1)$ der Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$ und der Wertevorrat: $0 < y < +\infty$.
5. Wegen der Festlegung $a^0 = 1$ ist allen Kurven der Schar der Punkt $P\,(0;\,1)$, also der Schnittpunkt mit der y-Achse, gemeinsam.

Das Additionstheorem $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$

Für die Funktionswerte in der Abbildung 1.1. gilt offensichtlich die Beziehung:

$$y_3 = y_1 \cdot y_2 = 2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2 \text{ bzw. } y_3 = y_1 \cdot y_2 = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 10^1;$$

für die zugehörigen x-Werte dagegen die Beziehung

$$x_3 = x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 \text{ bzw. } x_3 = x_1 + x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Es soll jetzt untersucht werden, ob dieser Zusammenhang allgemeingültig ist.
Ist $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$, $y_3 = a^{x_3}$ und $y_3 = y_1 \cdot y_2$, so gilt nach dem ersten Potenzgesetz

(5) $$y_3 = y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} = a^{x_3}.$$

In Worten:

> Bei der Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ist das Produkt zweier Funktionswerte gleich dem Funktionswert, der jenem x-Wert zugeordnet ist, der gleich der Summe der beiden den zwei Funktionswerten zugeordneten x-Werte ist.

Für die Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ist also charakteristisch, daß die Multiplikation zweier Funktionswerte gleichbedeutend mit der Addition der (im Exponenten stehenden) zugeordneten x-Werte ist, d. h., das Multiplizieren von Funktionswerten wird auf das Addieren von x-Werten zurückgeführt. Diese Gesetzmäßigkeit heißt deshalb **Additionstheorem**[1] **der Exponentialfunktion.**

Aufgaben

1. a) Untersuchen Sie die gemeinsamen Eigenschaften der Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ und ihrer Bilder an Hand der Abbildung 1.3.!

 b) Vergleichen Sie das Ergebnis von a) mit den gemeinsamen Eigenschaften von $y = a^x$ $(a > 1)$, die auf Seite 6 zusammengestellt wurden!

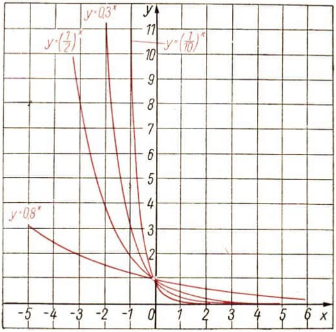
 c) Sind durch $y = a^x$ $(a > 1)$ und $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ alle Exponentialfunktionen $y = a^x$ $(a > 0)$ erfaßt?

 d) Inwiefern nimmt $y = 1^x$ eine Sonderstellung ein?
 Hinweis: Begründen Sie das mit Hilfe der Ergebnisse der Potenzrechnung bzw. des Bildes von $y = 1^x$!

 e) Welche gemeinsamen Eigenschaften weisen die Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ und $a > 1$ auf?

 f) Welche gemeinsamen Eigenschaften besitzen dagegen die Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $a > 0$?

Abb. 1.3.



[1] ϑεώρημα (griech.), Lehrsatz

2. a) Welche Lage haben die Bilder der Funktionen

$$y = 2^x \quad \text{und } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ bzw. } y = 10^x \text{ und } y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

zueinander (Abb. 1.1.)?

b) Zeigen Sie allgemein, daß die Bilder von $y = a^x$ $(a > 0)$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(a > 0)$ spiegelbildlich bezüglich der y-Achse sind!

c) Zeigen Sie, daß die Bilder von $y = a^x$ $(a > 0)$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ $(a > 0)$ bzw. von $y = a^{-x}$ $(a > 0)$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(a > 0)$ zusammenfallen!

d) Wie lautet der analytische Ausdruck der zu $y = a^x$ $(a > 0)$ bezüglich der x-Achse spiegelbildlichen Funktion?

3. a) Welches Bild hat die Funktion $y = 0^x$?

b) Wie unterscheidet es sich vom Bild der Funktion $y = 0$?

4. Jemand versucht bei $y = a^x$ einen Wert $a < 0$ zu verwenden.

a) Welche Schwierigkeiten entstehen dabei?

Hinweis: Beachten Sie die Basisvorzeichenregel für Potenzen!

b) Wie kann man begründen, daß als Bild von $y = a^x$ mit $a < 0$ keine zusammenhängende Kurve entsteht?

5. Stellen Sie folgende Exponentialfunktionen grafisch dar!

a) $y = 3^x$ b) $y + \left(\frac{5}{4}\right)^x = 0$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e) $y - 0{,}8 \cdot 5^x = 0$ f) $y = (0{,}8 \cdot 5)^x$

g) $y - \frac{1}{10} \cdot 4^x + 2 = 0$ h) $y - 2{,}5^{-x} = 0$

i) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} + 8$ k) $y - \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} - 5 = 0$

Hinweis: Berechnen Sie nur für ganzzahlige x die zugeordneten Funktionswerte, und verbinden Sie die erhaltenen Bildpunkte mit Hilfe eines Kurvenlineals!

1.3. Die Logarithmusfunktionen $\log_a x \; (a > 0;\ x > 0)$

Der Begriff „Logarithmus“

In der Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ist jedem reellen Exponenten x einer festen positiven Basis a ein positiver reeller Potenzwert y zugeordnet. Läßt sich auch umgekehrt jedem positiven reellen Potenzwert einer festen Basis ein reeller Exponent zuordnen?

In den Aufgaben **8** und **9** des Abschnitts 1.1. haben wir dieses Problem schon für einige spezielle Basen a und Potenzwerte c untersucht. Die dort gestellten Aufgaben lassen sich alle in der Form

(6) $a^x = c$

als Gleichungen mit einer Unbekannten, nämlich x, schreiben und durch sinnvolles Probieren lösen. Eine allgemeine Lösung von (6) ist aber weder durch Potenzieren noch durch Radizieren möglich, da ja gerade der Exponent x unbekannt ist.

Einen solchen (gesuchten) Exponent bezeichnet man als **Logarithmus**[1]. Allgemein gilt unter Verwendung der in (6) benutzten Symbole folgende Definition:

Der Logarithmus x ist der Exponent, mit dem man die (positive) Basis a potenzieren muß, um den Potenzwert c zu erhalten.

Statt (6) schreibt man auch

(7) $x = \log_a c$

und liest „x ist der Logarithmus von c zur Basis a".
Ist $a = 10$, so schreibt man statt

$x = \log_{10} c$ kürzer $x = \lg c$

und spricht von **dekadischen Logarithmen.**

Entsprechend läßt sich das **Logarithmieren** als die Berechnung des Exponenten erklären, der bei einer gegebenen festen positiven Basis zu einem gegebenen Potenzwert gehört.

Die Gleichungen (6) und (7) sind nur verschiedene Schreibweisen für denselben Sachverhalt. Das bedeutet, daß sich (6) als Probe beim Logarithmieren verwenden läßt.

Beispiele:

2) $x_1 = \log_2 8 = 3$, weil $2^3 = 8$

3) $x_2 = \log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{32}} = -\frac{5}{3}$, weil $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{32}}$

4) $x_3 = \lg 0{,}0001 = -4$, weil $10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

Schreiben Sie auch die Aufgaben 8 und 9 des Abschnitts 1.1. in der Form $\log_a c = x$, *und machen Sie zu jeder Lösung die Probe!*

Die Logarithmusfunktionen $y = \log_2 x$ und $y = \lg x$

Die Rechenoperation des Logarithmierens kann auch in Zuordnungsvorschriften auftreten, z. B. in

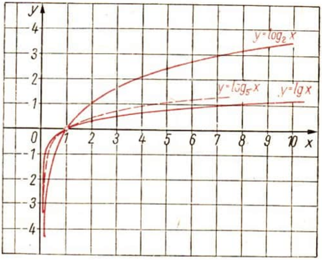
(8) $y = \log_2 x$ und $y = \lg x$.

Solche Funktionen heißen **Logarithmusfunktionen.**

Tragen Sie die Potenzwerte x aus Aufgabe 5 im Abschnitt 1.1. und die dazu berechneten Logarithmen y in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und verbinden Sie die sich ergebenden Bildpunkte zu zwei geschlossenen Linien!

Die Abbildung 1.4. zeigt die Bilder der Logarithmusfunktionen $y = \log_2 x$, $y = \lg x$ sowie $y = \log_5 x$.

Abb. 1.4.



[1] λόγος, ἀριθμός (griech.), Verhältniszahl

Die Logarithmusfunktion als inverse Funktion der Exponentialfunktion

Da die Exponentialfunktionen

(9) $y = a^x$ ($a > 1$ und $0 < a < 1$)

für ihren gesamten Definitionsbereich eineindeutig sind, lassen sie sich im ganzen Definitionsbereich umkehren.
Löst man (9) nach x auf, so erhält man unter Verwendung der Definition des Logarithmus [vgl. auch den Zusammenhang zwischen (6) und (7)!]

(10) $x = \log_a y$ ($a > 1$ und $0 < a < 1$)

und durch anschließende Vertauschung von x und y

(11) $y = \log_a x$ ($a > 1$ und $0 < a < 1$).

Für die zu den speziellen Exponentialfunktionen

(12) $y = 2^x$ und $y = 10^x$

inversen Funktionen erhält man entsprechend bei Auflösung nach x

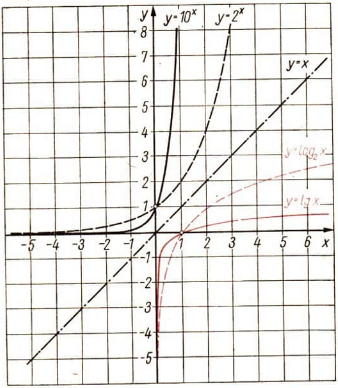
(13) $x = \log_2 y$ bzw. $x = \lg y$

und durch Vertauschung von x und y

(14) $y = \log_2 x$ bzw. $y = \lg x$,

also die Logarithmusfunktionen (8).

Abb. 1.5.



Das bedeutet:

Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion mit der gleichen von 1 verschiedenen positiven Basis sind zueinander invers.

Demnach erhält man das Bild einer Logarithmusfunktion mit der Basis a durch Spiegelung des Bildes der Exponentialfunktion mit der Basis a an der Geraden $y = x$.

In Abbildung 1.5. sind auf diese Weise die Bilder der Funktionen $y = \log_2 x$ bzw. $y = \lg x$ aus den Bildern der Funktionen $y = 2^x$ bzw. $y = 10^x$ gewonnen worden.

Für die Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ ($a > 1$) und ihre Bilder (Abb. 1.4.) können wir folgende gemeinsame Eigenschaften erkennen:

1. Die Funktionen $y = \log_a x$ $(a > 1)$ sind eineindeutig; alle Kurven sind mit zunehmenden x-Werten steigend.
2. Mit kleiner werdenden positiven x-Werten kommen die Kurven zwar immer näher von „rechts" her an die y-Achse heran, ohne sie jedoch zu berühren oder gar zu schneiden. Die y-Achse ist Asymptote für alle Kurven der Logarithmuskurvenschar $y = \log_a x$ $(a > 1)$.
3. Je kleiner a, um so steiler ist der Anstieg für $1 \leqq x < \infty$, um so „langsamer" schmiegen sich die Kurven aber auch für positive x $(x < 1)$ an die y-Achse an.
4. Daraus folgt für alle Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ $(a > 1)$
   der Definitionsbereich: $0 < x < +\infty$
   und der Wertevorrat: $-\infty < y < +\infty$.
   Wegen der Vertauschung von Definitionsbereich und Wertevorrat bei zueinander inversen Funktionen war das auch zu erwarten.
5. Wegen $\log_a 1 = 0$ (denn $a^0 = 1$) ist der Punkt $P(1; 0)$, also der Schnittpunkt mit der x-Achse, allen Kurven der Schar gemeinsam.

Das Additionstheorem $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

In Abbildung 1.6. ist noch einmal die logarithmische Funktion $y = \log_2 x$ dargestellt. Außerdem sind für $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$ die Funktionswerte $y_1 = \log_2 4 = 2$ und

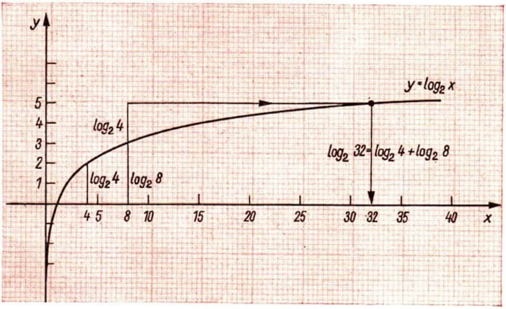


Abb. 1.6.

$y_2 = \log_2 8 = 3$ eingetragen. Welcher Wert x_3 gehört zum y-Wert $y_3 = y_1 + y_2$? Aus Abbildung 1.6. liest man ab $x_3 = 32 = x_1 \cdot x_2$. Demnach gilt im vorliegenden Fall:

(15) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$

Die Beziehung (15) bezeichnet man als das **Additionstheorem für die Logarithmusfunktion** $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$. Seine allgemeine Gültigkeit soll jetzt bewiesen werden. Für

(16) $y_1 = \log_a x_1;\ y_2 = \log_a x_2;\ y_3 = \log_a x_3$ mit $x_3 = x_1 \cdot x_2$

läßt sich nach der Definition des Logarithmus zu einer festen Basis schreiben:

$$x_1 = a^{y_1};\ x_2 = a^{y_2};\ x_3 = a^{y_3}.$$

Für $x_3 = x_1 \cdot x_2$ gilt dann unter Benutzung des ersten Potenzgesetzes

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$$

und in logarithmischer Schreibweise

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a a^{y_1 + y_2}.$$

Wegen $\log_a a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2$ und wegen (16) folgt daraus

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

In Worten:

In der logarithmischen Funktion $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ ist der dem Produkt zweier x-Werte zugeordnete Funktionswert gleich der Summe der beiden Funktionswerte, die den beiden x-Werten zugeordnet sind.

Aufgaben

1. Gibt es eine zu $y = 1^x$ inverse Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Potenzrechnung!

2. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \lg x$, und prüfen Sie für einige Werte von x nach, ob auch bei $y = \lg x$ die Beziehung (15) gilt!

3. Schreiben Sie folgende identische Gleichungen als Potenzen!

a) $\log_2 0{,}25 = -2$ **b)** $\log_5 0{,}008 = -3$ **c)** $\log_{11} \frac{1}{1331} = -3$

d) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ **e)** $\log_7 2401 = 4$ **f)** $\log_{15} \frac{1}{225^2} = -4$

g) $\log_{137} 1 = 0$ **h)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{256} = 8$ **i)** $\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8$

4. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen, und machen Sie die Probe!

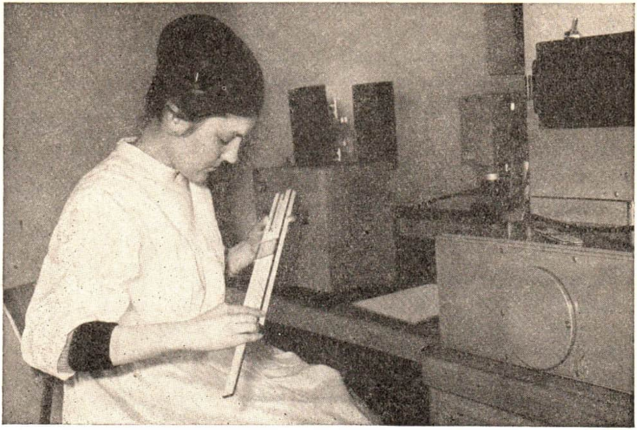
a) $\log_2 x$ für $x = 2048;\ 512;\ 128;\ 0{,}5;\ 0{,}125;\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{256}$

b) $\lg x$ für $x = 10\,000\,000\,000;\ 100\,000\,000;\ 1\,000;\ \frac{1}{10};\ 0{,}1;\ 0{,}0001;\ 0{,}000\,000\,01$

c) $\log_3 (3^{11})$ **d)** $\log_5 (25^2)$ **e)** $\log_2 (2^{-77})$ **f)** $\log_a (a^n)$ **g)** $\log_m (2\,m)$

5. Entwerfen Sie die Bilder der Funktionen

$y = \log_3 x$ und $y = \log_{\frac{1}{2}} x$!



2. Logarithmisches Rechnen

In der Mathematik ist man stets bemüht, möglichst einfache und zweckmäßige Rechenmethoden zu ermitteln, um den Forderungen der Technik und der wissenschaftlichen Forschung nach schneller, sicherer und dabei doch bequemer Lösung der stets umfangreicher werdenden Rechnungen gerecht zu werden.
Auch die logarithmischen Rechenverfahren, die eine wesentliche Hilfe bei Berechnungen in Verbindung mit den Rechenoperationen Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren darstellen, wurden zu diesem Zwecke auf der Grundlage der Logarithmengesetze entwickelt. Sie beruhen darauf, daß Rechenoperationen der zweiten und dritten Stufe auf die entsprechenden der ersten bzw. zweiten Stufe zurückgeführt werden. Dadurch bleibt dem Rechner mühsame Rechenarbeit erspart. Recht deutlich wird uns das beim Rechnen mit dem weit verbreiteten logarithmischen Rechenstab, mit dessen Hilfe Facharbeiter, Meister, Techniker, Konstrukteure, Ingenieure u. a. mühelos umfangreiche Überschlagsberechnungen ausführen.
So wie beim Rechenstab finden auch bei den kompliziertesten Rechenhilfsmitteln, den modernen Rechenautomaten, mathematische Erkenntnisse ihre Anwendung.

2.1. Zur Wiederholung

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Grundrechenoperationen

a) Addieren und Subtrahieren, **b)** Multiplizieren und Dividieren?

2. Wie heißen die Glieder **a)** einer Potenz, **b)** eines Wurzelausdrucks?

3. a) Berechnen Sie
10^n für $n = 20; 10; 9; \ldots; 1; 0; -1; \ldots; -9; -10; -20$!

b) Welche Beziehung besteht zwischen dem positiven ganzzahligen Exponenten einer Potenz zur Basis 10 und der Stellenzahl des Potenzwertes?

c) Welche entsprechende Gesetzmäßigkeit gilt für den Exponenten Null, welche für negative ganzzahlige Exponenten?

4. Wie kann man jeweils aus der ersten Zahl die zweite erhalten?

a) 30,57;	30 570	**b)** 0,021;	21
c) 55 555;	0,055555	**d)** 0,000042;	420 000

Worin stimmen jeweils die beiden Zahlen überein, wie unterscheiden sie sich?

5. Erklären Sie den Aufbau der Quadrat- und Kubikwurzeltafel (Tafel 7 und Tafel 9 der „Vierstelligen Logarithmen"), und erläutern Sie ihre Benutzung an folgenden Beispielen!

a) $\sqrt{24}$ **b)** $\sqrt{2{,}4}$ **c)** $\sqrt{0{,}5}$ **d)** $\sqrt{0{,}05}$ **e)** $\sqrt[3]{89}$

f) $\sqrt[3]{8{,}9}$ **g)** $\sqrt[3]{0{,}8}$ **h)** $\sqrt[3]{0{,}08}$ **i)** $\sqrt[3]{0{,}008}$

6. Das Runden von Zahlen erfolgt bekanntlich nach bestimmten, festgelegten Regeln:

a) Folgt auf die letzte noch anzugebende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so bleibt die letzte anzugebende Ziffer unverändert (Abrunden).
Beispiel: $0{,}724013 \approx 0{,}72401 \approx 0{,}7240 \approx 0{,}724 \approx 0{,}72 \approx 0{,}7$

b) Folgt auf die letzte noch anzugebende Ziffer eine 6, 7, 8 oder 9, so wird die letzte anzugebende Ziffer um 1 erhöht (Aufrunden).
Beispiel: $0{,}38679 \approx 0{,}3868 \approx 0{,}387 \approx 0{,}39 \approx 0{,}4$

Wenden Sie die vorstehenden Regeln für das Auf- und Abrunden auf folgende Zahlen an, indem Sie wie in den obigen Beispielen schrittweise bis auf eine von Null verschiedene Ziffer runden!

a) 7,38427 **b)** 0,004736 **c)** 58739 **d)** 156,84 **e)** 0,45832 **f)** 18,888 **g)** 9,7243

7. Für das Runden der Ziffer 5 gelten folgende Regeln:

a) Ist die Ziffer 5 nicht die letzte von Null verschiedene Ziffer, so wird die Ziffer vor der 5 um 1 erhöht (Aufrunden der 5).
Beispiel: $3{,}6501 \approx 3{,}7$

b) Ist die Ziffer 5 jedoch durch Aufrunden entstanden, so wird sie abgerundet.
Beispiel: $8{,}247 \approx 8{,}25 \approx 8{,}2$

c) Ist die Ziffer 5 die letzte von Null verschiedene Ziffer oder sind nachfolgende Ziffern nicht bekannt, so wird die Ziffer 5 so gerundet, daß die letzte Ziffer eine gerade Zahl wird (Gerade-Zahl-Regel).

Beispiele:

$\frac{1}{8} = 0{,}125 \approx 0{,}12$ (Abrundung!), aber $\frac{3}{8} = 0{,}375 \approx 0{,}38$ (Aufrundung!)

$6285 \approx 6280$ (Abrundung!), aber $6275 \approx 6280$ (Aufrundung!)

Wenden Sie die vorstehenden Regeln für das Runden der 5 auf folgende Zahlen an!

a) 72,853 **b)** 63,47 **c)** 1,35002 **d)** 1,35 **e)** 1,25 **f)** 1,248 **g)** 655 **h)** 665

8. Runden Sie die folgenden Zahlen schrittweise bis auf eine Ziffer!

a) 12,3456 **b)** 0,0876543 **c)** 214,49 **d)** 7245,38 **e)** 7284,5 **f)** 0,6483
g) 11,47 **h)** 5,5555 **i)** 4,54545 **k)** 0,5143 **l)** 0,7575 **m)** 6,2547

2.2. Logarithmen und Logarithmensysteme

Der Zusammenhang zwischen den Rechenoperationen der dritten Stufe, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren, soll im folgenden mit Hilfe der Gleichungen

(1) $3^4 = 81$ allgemein: $a^b = c$

verdeutlicht werden.

Grundrechenoperation	Gleichung	allgemein	gesuchtes Glied der Potenz
Potenzieren	$3^4 = x$	$a^b = x$	Potenzwert (81 bzw. c)
Radizieren	$x^4 = 81$ $x = \sqrt[4]{81}$	$x^b = c$ $x = \sqrt[b]{c}$	Basis (3 bzw. a)
Logarithmieren	$3^x = 81$ $x = \log_3 81$	$a^x = c$ $x = \log_a c$	Exponent (4 bzw. b)

Daraus folgt:

Das Logarithmieren ist, ebenso wie das Radizieren, eine Umkehrung des Potenzierens. Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren sind die drei Grundrechenoperationen der dritten Stufe.

Auch beim Logarithmieren werden wie beim Radizieren gegenüber dem Potenzieren neue Bezeichnungen für die Glieder verwendet.

Potenzieren — (2) $a^x = c$

Logarithmieren — (3) $x = \log_a c$

Dem Exponent x in (2) entspricht der Logarithmus x (zur Basis a) in (3).
Der Basis (der Potenz) a in (2) entspricht die Basis (des Logarithmus) a in (3).
Dem Potenzwert c in (2) entspricht der **Numerus**[1] c in (3).

Als Basen der Logarithmen sollen nur positive Zahlen verschieden von 1 zugelassen sein. Wegen (2) sind dann aber auch alle Numeri positiv.

[1] numerus (lat.), Zahl; Plural: numeri

Die Menge aller Logarithmen zu einer festen Basis ist ein **Logarithmensystem.** In den Logarithmensystemen zu den Basen 2 und 10, aber auch zu allen anderen Basen größer als 1, ist jedem positiven reellen Numerus ein Logarithmus eindeutig zugeordnet und umgekehrt (eineindeutige Zuordnung).

Aufgaben

1. Lesen Sie aus den Abbildungen 1.4. und 1.6. ab, wie groß ungefähr die Logarithmen mit der Basis 2 bzw. der Basis 10 zu den ganzzahligen positiven Numeri n ($n < 10$ bzw. $n < 35$) sind!

2. a) Warum sind 1 bzw. 0 als Basen eines Logarithmensystems ungeeignet?
Logarithmieren Sie!

b) $\lg 1$ **c)** $\log_2 1$ **d)** $\log_{135} 1$ **e)** $\log_1 1$

3. Gibt es Zahlen x und y, die die Gleichungen

$$\sqrt{x} = \log_y x \text{ und } \sqrt[y]{x} = \log_y x$$

erfüllen?

4. Überlegen Sie, warum das Addieren und das Multiplizieren nur je eine Umkehrung haben, während das Potenzieren zwei Umkehrungen besitzt!

5. Berechnen Sie folgende Logarithmen!

a) $\log_2 128$ **b)** $\log_2 \frac{1}{16}$ **c)** $\log_2 0{,}5$ **d)** $\log_2 0{,}125$ **e)** $\log_3 243$

f) $\log_3 \frac{1}{27}$ **g)** $\log_3 \frac{1}{81}$ **h)** $\log_3 0{,}1\bar{1}\ldots$ **i)** $\log_4 1024$ **k)** $\log_4 \frac{1}{64}$

l) $\log_5 3125$ **m)** $\log_5 \frac{1}{625}$ **n)** $\log_5 0{,}008$ **o)** $\lg 1000$ **p)** $\lg \frac{1}{100}$

Das dekadische Logarithmensystem

Von großer praktischer Bedeutung ist das Logarithmensystem mit der Basis 10, das sogenannte **dekadische Logarithmensystem.** Es zeichnet sich durch besondere Eigenschaften aus:

a) Die dekadischen Logarithmen der Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten sind ganzzahlig.

$$\begin{array}{lrl}
\lg 100\,000\,000 = & 8, & \text{weil } 10^8 = 100\,000\,000 \\
\lg 10\,000\,000 = & 7, & \text{weil } 10^7 = 10\,000\,000 \\
\vdots & & \vdots \\
\lg 100 = & 2, & \text{weil } 10^2 = 100 \\
\lg 10 = & 1, & \text{weil } 10^1 = 10 \\
\lg 1 = & 0, & \text{weil } 10^0 = 1 \\
\lg 0{,}1 = & -1, & \text{weil } 10^{-1} = 0{,}1 \\
\lg 0{,}01 = & -2, & \text{weil } 10^{-2} = 0{,}01 \\
\vdots & & \vdots \\
\lg 0{,}000\,01 = & -5, & \text{weil } 10^{-5} = 0{,}000\,01
\end{array}$$

Allgemein: $\lg 10^k = k$, weil $10^k = 10^k$ (k ganzzahlig) bzw. $\log_b b^k = k$, weil $b^k = b^k$ (k ganzzahlig).

b) Die dekadischen Logarithmen aller reellen Zahlen z mit $1 \leqq z < 10$ werden **Mantissen**[1] genannt. Die Mantissen sind reelle Zahlen, die größer als 0, aber kleiner als 1 sind (vgl. Abb. 1.4.), lassen sich also alle in der Form 0, ... schreiben. Einige Mantissen kann man leicht berechnen.

Beispiele:

1a) $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, weil $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Wegen $\sqrt{10} = 3{,}162$ gilt $\lg 3{,}162 = 0{,}5$.

1b) $\lg \sqrt[8]{10^5} = \frac{5}{8}$, weil $10^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{10^5}$.

Wegen $\sqrt[8]{10^5} = 4{,}217$ gilt $\lg 4{,}217 = 0{,}625$.

Berechnen Sie weitere dekadische Logarithmen, deren Numeri größer als 1, jedoch kleiner als 10 sind!

c) Die dekadischen Logarithmen für alle Numeri n $(n > 10)$ sind größer als 1.
Die dekadischen Logarithmen für alle Numeri n $(0 < n < 1)$ sind kleiner als 0.

d) Alle positiven reellen Numeri n $(0 < n < 1;\ n \geqq 10)$ lassen sich in ein Produkt aus einer reellen Zahl z $(1 \leqq z < 10)$ und einer Zehnerpotenz mit ganzzahligem Exponenten k zerlegen, also

$$n = z \cdot 10^k\ (1 \leqq z < 10;\ k \text{ ganzzahlig}).$$

Ist $\lg z = m$, so gilt nach dem Additionstheorem für logarithmische Funktionen

$$\lg n = \lg (z \cdot 10^k) = \lg z + \lg 10^k = m + k.$$

Der Summand m ist die aus **b)** bekannte Mantisse, der Summand k heißt **Kennzahl** des dekadischen Logarithmus von n.

Die dekadischen Logarithmen für alle Numeri $n = z \cdot 10^k$ mit $0 < n < 1$, $n \geqq 10$ und $1 \leqq z < 10$ sind Summen, deren einer Summand die z zugeordnete Mantisse m und deren zweiter Summand die ganzzahlige Kennzahl k ist.

Beispiel 2:

Wegen $\sqrt[8]{10} = 1{,}332$ ist

$\lg 1{,}332 = \frac{1}{8} = 0{,}125$, weil $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = 1{,}332$.

$\lg 13{,}32 = \lg (1{,}332 \cdot 10^1) = \lg 1{,}332 \cdot \lg 10^1 = 0{,}125 + 1 = 1{,}125$,

weil $10^{1{,}125} = 10^1 \cdot 10^{0{,}125} = 10 \cdot \sqrt[8]{10} = 13{,}32$.

$\lg 133{,}2 = \lg (1{,}332 \cdot 10^2) = \lg 1{,}332 \cdot \lg 10^2 = 0{,}125 + 2 = 2{,}125$,

weil $10^{2{,}125} = 10^2 \cdot 10^{0{,}125} = 100 \cdot \sqrt[8]{10} = 133{,}2$.

.
.
.

[1] mantissa (lat.), Zugabe

$$\lg 1\,332\,000 = \lg (1{,}332 \cdot 10^6) = \lg 1{,}332 \cdot \lg 10^6 = 0{,}125 + 6 = 6{,}125,$$
$$\text{weil } 10^{6,125} = 10^6 \cdot 10^{0,125} = 1\,000\,000 \cdot \sqrt[8]{10} = 1\,332\,000.$$

Numeri mit derselben Ziffernfolge, die kleiner als 1 sind, haben ebenfalls Logarithmen mit gleichen Mantissen.

$$\lg 0{,}1332 = \lg (1{,}332 \cdot 10^{-1}) = \lg 1{,}332 \cdot \lg 10^{-1} = 0{,}125 - 1,$$
$$\text{weil } 10^{(0,125-1)} = 10^{0,125} \cdot 10^{-1} = \tfrac{1}{10} \cdot \sqrt[8]{10} = 0{,}1332.$$
$$\lg 0{,}000\,1332 = \lg (1{,}332 \cdot 10^{-4}) = \lg 1{,}332 \cdot \lg 10^{-4} = 0{,}125 - 4,$$
$$\text{weil } 10^{(0,125-4)} = 10^{0,125} \cdot 10^{-4} = \tfrac{1}{10\,000} \cdot \sqrt[8]{10} = 0{,}000\,1332.$$

Die im Beispiel 2 betrachteten Numeri haben gleiche Ziffernfolgen, nämlich 1332, ihre Logarithmen haben gleiche Mantissen, nämlich 0,125, sie unterscheiden sich also nur in den Kennzahlen.

e) Wegen der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktion $y = \lg x$ haben die Zahlen zwischen 1 und 10 mit verschiedenen Ziffernfolgen auch verschiedene Mantissen.
Die vorstehend gewonnenen Gesetzmäßigkeiten für die dekadischen Logarithmen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Die Ziffernfolge des Numerus bestimmt die Mantisse. Numeri mit gleicher Ziffernfolge haben gleiche Mantissen, Numeri mit voneinander verschiedenen Ziffernfolgen haben verschiedene Mantissen.
Die Stellenzahl des Numerus bestimmt die Kennzahl des Logarithmus. Ist der Numerus größer als 1 und hat k Stellen vor dem Komma, so ist die Kennzahl $k - 1$. Ist der positive Numerus kleiner als 1 und hat k Nullen (die Null vor dem Komma mitgezählt) vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer seiner Ziffernfolge, so ist die Kennzahl $-k$.
Jedem positiven reellen Numerus ist genau ein reeller Logarithmus zugeordnet. Umgekehrt ist jedem reellen Logarithmus genau ein positiver reeller Numerus zugeordnet.

Aus den angeführten Beispielen entsteht leicht der falsche Eindruck, daß die dekadischen Logarithmen von positiven reellen Numeri rationale Zahlen sind, weil wir in den Beispielen auch für irrationale Numeri rationale Logarithmen erhalten haben. Das hat seine Ursache darin, daß wir bisher nur solche Numeri verwendet haben, die als Potenz der Basis 10 mit rationalen Exponenten darstellbar sind. Das ist aber nicht für alle Numeri möglich, wie schon das einfache Beispiel $10^{\sqrt{2}}$ beweist. Die dekadischen Logarithmen positiver reeller Numeri sind also reelle Zahlen. Wenn sie irrational sind, ist es üblich, mit rationalen Näherungswerten zu rechnen.

Beispiel 3: $\lg 10^{\sqrt{2}} \approx 1{,}414$, weil $10^{1,414} \approx 10^{\sqrt{2}}$.

Die Tafel der Mantissen der dekadischen Logarithmen

Die dekadischen Logarithmen aller positiven reellen Zahlen lassen sich zwar mit unseren bisherigen Kenntnissen näherungsweise berechnen, doch wäre dies überaus mühsam und zeitraubend. Wir benutzen deshalb die Tafel der vierstelligen Logarithmen im Tafelwerk (Tafel 1). Die Tafel enthält die allen verschiedenen dreiziffrigen Ziffernfolgen (und einigen vierziffrigen Ziffernfolgen) zugeordneten vierstelligen (bzw. fünfstelligen) Mantissen, wobei das für alle Mantissen gleiche 0, weggelassen wurde. Es ist also bei jeder Mantissenbestimmung zu ergänzen.

Beispiele:

Die zu einer Ziffernfolge gehörende Mantisse ermittelt man auf folgende Weise.

Ziffernfolge		Mantisse
4) 1007	Zeile 1, Spalte 7	[0,] 00303
5) 960	Zeile 96, Spalte 0	[0,] 9823

Auf umgekehrtem Wege findet man die zu einer Mantisse gehörende Ziffernfolge.

Mantisse		Ziffernfolge
6) [0,] 04060	Zeile 109, Spalte 8	1098
7) [0,] 9552	Zeile 90, Spalte 2	902

Ist der dekadische Logarithmus zu einem gegebenen Numerus zu bestimmen, so entnimmt man also nur die der Ziffernfolge zugeordnete Mantisse [ohne 0,] der Tafel. Die Kennzahl wird dann entsprechend dem Stellenwert des Numerus ermittelt.

Beispiele:

8) lg 2,34
Die Mantisse zum Numerus 2,34 ist 0,3692.
Ergebnis: $\lg 2{,}34 = 0{,}3692$

9) lg 50 700 (Mantisse: 0,7050)
$10^4 < 50\,700 < 10^5$
$4 < \lg 50\,700 < 5$ (Kennzahl: $+4$)
Ergebnis: $\lg 50\,700 = 0{,}7050 + 4 = 4{,}7050$

10) lg 0,0028 (Mantisse: 0,4472)
$10^{-3} < 0{,}0028 < 10^{-2}$
$-3 < \lg 0{,}0028 < -2$ (Kennzahl: -3)
Ergebnis: $\lg 0{,}0028 = 0{,}4472 - 3$

Bei der umgekehrten Aufgabenstellung, den Numerus aus seinem dekadischen Logarithmus zu ermitteln, kehren wir das obige Verfahren um.

Beispiele:

11) $\lg x = 0{,}7490$
Der Numerus zur Mantisse 0,7490 ist 5,61.
$x = 5{,}61$ *Probe:* $\lg 5{,}61 = 0{,}7490$

12) $\lg x = 4{,}02325 = 0{,}2325 + 4$

Die Ziffernfolge zur Mantisse 0,02325 ist 1055.

$4 < \lg x < 5$

$10^4 < x < 10^5$

$x = 10\,550$ *Probe:* $\lg 10\,550 = 4{,}02325$

13) $\lg x = 0{,}9586 - 3$ (Ziffernfolge: 909)

$-3 < \lg x < -2$

$10^{-3} < x < 10^{-2}$

$x = 0{,}00909$ *Probe:* $\lg 0{,}00909 = 0{,}9586 - 3$

Von den 10 000 möglichen verschiedenen vierstelligen Mantissen sind nur 990 in Tafel 1 enthalten, weil es nur 990 verschiedene dreiziffrige Ziffernfolgen zu 10 000 verschiedenen vierstelligen Mantissen gibt. Ist zu einer nicht eingetragenen Mantisse die zugeordnete dreiziffrige Ziffernfolge zu bestimmen, so ist dazu die nächstgelegene Mantisse, bei „Mittellage" die nächst kleinere, zu benutzen.

Beispiele:

14) Für $\lg x = 0{,}4020$ benutzt man $\lg x = 0{,}4014$

$[0{,}4014 < 0{,}4020 < 0{,}4031]$ $x = 2{,}52$

Differenz: 6 11

15) Für $\lg x = 0{,}4023$ benutzt man $\lg x = 0{,}4031$

$[0{,}4014 < 0{,}4023 < 0{,}4031]$ $x = 2{,}53$

Differenz: 9 8

Die Interpolation in Tafel 1

Unter bestimmten Umständen ist es sinnvoll, für eine nicht eingetragene vierstellige Mantisse eine vierziffrige Ziffernfolge zu bestimmen. Auch der umgekehrte Fall, die Bestimmung einer vierstelligen Mantisse zu einer gegebenen Ziffernfolge mit vier geltenden Ziffern, ist von Bedeutung. In beiden Fällen verwendet man das Verfahren der (linearen) Interpolation.

Für jede in der Tafel 1 nicht vorhandene vierziffrige Ziffernfolge gibt es (in Tafel 1) zwei benachbarte dreiziffrige Ziffernfolgen. In Abbildung 2.1. ist als Beispiel 3516 (zwischen 351 und 352) gewählt. Die Strecke zwischen 351 und 352 ist in 10 gleiche Teile geteilt, so daß jedem Teilstrich eine an 351 angehängte vierte Ziffer n ($n = 0, 1, \ldots, 9$) zugeordnet ist. Die zu den beiden dreiziffrigen Ziffernfolgen gehörenden Mantissen 0,5453 und 0,5465 unterscheiden sich um einen bestimmten Mantissenzuwachs Δm (hier $\Delta m = 0{,}0012$). Wird zwischen den beiden dreiziffrigen Ziffernfolgen ein linearer Mantissenzu-

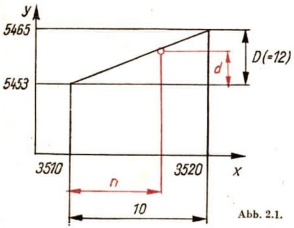


Abb. 2.1.

wachs angenommen, so läßt sich der zur vierten Ziffer n der Ziffernfolge gehörende Mantissenzuwachs $\Delta\, m'$ leicht berechnen. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\Delta\, m' : \Delta\, m = n : 10$$

(4) $\quad \Delta\, m' = \frac{\Delta\, m \cdot n}{10}$

und im Beispiel der Abbildung 2.1. ($n = 6$)

$$\Delta\, m' = \frac{0{,}0012 \cdot 6}{10} = 0{,}000\,72 \approx 0{,}0007.$$

Nun ist $\Delta\, m = 0{,}0007$ zu 0,5453 zu addieren, um die der Ziffernfolge 3516 zugeordnete Mantisse $m = 0{,}5460$ zu erhalten.
Das Rechnen mit Dezimalbrüchen bei der linearen Interpolation läßt sich vermeiden, wenn man die in der Tafel ohne 0, geschriebenen Mantissen als ganze Zahlen auffaßt und dann statt mit $\Delta\, m$ bzw. $\Delta\, m'$ mit der Tafeldifferenz $D = 10\,000 \cdot \Delta\, m = 12$ bzw. mit $d = 10\,000 \cdot \Delta\, m'$ rechnet. Man erhält dann aus (4)

(5) $\quad d = \frac{D \cdot n}{10}$

und im Beispiel der Abbildung 2.1. also

$$d = \frac{12 \cdot 6}{10} = 7{,}2 \approx 7\,.$$

Die für d erhaltene gerundete ganze Zahl ist dann zu der als ganze Zahl aufgefaßten Mantisse 5453 zu addieren.

Beispiel 16:

Es ist lg 65,08 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} \lg 65{,}1 & = & 1{,}8136 \\ \lg 65{,}0 & = & 1{,}8129 \\ + \quad d & = & 6 \\ \hline \lg 65{,}08 & = & 1{,}8135 \end{array} \qquad \begin{array}{l} D = 7;\; n = 8 \\ d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{7 \cdot 8}{10} = 5{,}6 \approx 6 \end{array}$$

Soll umgekehrt zu einer gegebenen vierstelligen Mantisse eine Ziffernfolge mit vier geltenden Ziffern bestimmt werden, so sind D und d bekannt, und (5) muß nach n aufgelöst werden.

(6) $\quad n = \frac{10 \cdot d}{D}.$

Es ist dann n diejenige Ziffer 0, 1, ..., 9, die an die dreiziffrige Ziffernfolge, die zu der nächst kleineren Mantisse gehört, anzuhängen ist.

Beispiel 17:

Die Ziffernfolge zu der Mantisse 1020 ist zu ermitteln.
Die Mantisse 1020 liegt zwischen den Mantissen 1004 und 1038. Die zugeordneten Ziffernfolgen sind 126 und 127.
Wegen $D = 34$ und $d = 1020 - 1004 = 16$ gilt $n = \frac{160}{34} \approx 4{,}7 \approx 5$.
Die erhaltene Ziffer 5 ist an die Ziffernfolge 126 anzuhängen;
also:
Der Mantisse 1020 ist die Ziffernfolge 1265 zugeordnet.

Probe: Zur Ziffernfolge 126 gehört die Mantisse 1004.

$$D = 34;\ n = 5;\ d = 17$$

Damit gehört zur Ziffernfolge 1265 die Mantisse $1004 + 17 = 1021$.
Die Abweichung bei der Probe um $+1$ in der letzten Stelle der Mantisse ist auf Grund der Rundung und der Linearität der Interpolation an einer nichtgeraden Kurve unvermeidlich.

Beispiel 18:

Es ist x in $\lg x = 1{,}6870$ zu berechnen.
Man findet zunächst für die nächst kleinere Mantisse 0,6886 die Ziffernfolge 486.
Wegen $D = 9$ und $d = 4$ gilt $n = \frac{40}{9} \approx 4$. Also erhält man $x = 48{,}64$.

Probe: $\lg 48{,}6 \ = 1{,}6866$ $\qquad D = 9;\ n = 4 \qquad d \approx 4$
$\qquad\qquad\qquad 4$
$\lg 48{,}64 = 1{,}6870$

Aufgaben

6. **a)** lg 11 **b)** lg 37 **c)** lg 66 **d)** lg 89 **e)** lg 100

7. **a)** lg 3,3 **b)** lg 5,4 **c)** lg 8,5 **d)** lg 0,25 **e)** lg 0,10

8. **a)** lg 550 **b)** lg 7100 **c)** lg 41 000 **d)** lg 28 000 000
e) lg 0,28 **f)** lg 0,0041 **g)** lg 0,0003 **h)** lg 0,000000028

9. **a)** lg 72,3 **b)** lg 0,584 **c)** lg 0,00321 **d)** lg 321 000
e) lg 1,28 **f)** lg 0,302 **g)** lg 538 000 **h)** lg 34,8
i) lg 0,32 **k)** lg 2,03 **l)** lg 54,4 **m)** lg 7,59
n) lg 13,4 **o)** lg 0,000437 **p)** lg 1,25 **q)** lg 37,7
r) lg 0,00432 **s)** lg 8,94 **t)** lg 0,298 **u)** lg 0,0517
v) lg 0,0000707 **w)** lg 80 000 **x)** lg 0,0000000045
y) lg 0,000372 **z)** lg 821

10. **a)** lg 3,579 **b)** lg 821,3 **c)** lg 50 340 **d)** lg 20,02
e) lg 0,5723 **f)** lg 0,0004807 **g)** lg 0,002038
h) lg 0,07543 **i)** lg 0,01528 **k)** lg 0,0000001037
l) lg 28,28 **m)** lg 310,4 **n)** lg 5 003 000
o) lg 0,03050 **p)** lg 27 450 **q)** lg 1018
r) lg 10 030 **s)** lg 190 500 **t)** lg 20 830 000
u) lg 0,01407 **v)** lg 0,0001013 **w)** lg 30,71
x) lg 0,002704 **y)** lg 0,1099 **z)** lg 5038
Bei welchen der vorstehenden Aufgaben braucht man nicht zu interpolieren? Schreiben Sie für alle Aufgaben die Mantisse vierstellig!

11. Ermitteln Sie x aus den folgenden Gleichungen!
a) $\lg x = 0{,}1523$ **b)** $\lg x = 2{,}7810$ **c)** $\lg x = 0{,}8785-1$ **d)** $\lg x = 0{,}0453-3$
e) $\lg x = 1{,}9031$ **f)** $\lg x = 0{,}9004$ **g)** $\lg x = 3{,}7372$ **h)** $\lg x = 0{,}8261-4$
i) $\lg x = 0{,}9415-1$ **k)** $\lg x = 0{,}03019$ **l)** $\lg x = 4{,}6730$ **m)** $\lg x = 2{,}9818$
n) $\lg x = 0{,}4654-6$ **o)** $\lg x = 0{,}5092-2$ **p)** $\lg x = 0{,}3324-5$ **q)** $\lg x = 0{,}4900$
r) $\lg x = 8{,}6385$ **s)** $\lg x = 5{,}4871$ **t)** $\lg x = 0{,}02160-1$ **u)** $\lg x = 0{,}6964-3$
v) $\lg x = 7{,}9294$ **w)** $\lg x = 0{,}4425-10$ **x)** $\lg x = 1{,}1553$ **y)** $\lg x = 0{,}0792-4$
Bei welchen Aufgaben erhalten Sie vierziffrige Ziffernfolgen, bei welchen vierstellige Zahlen?

12. Ermitteln Sie (ohne Interpolation) x aus den folgenden Gleichungen!

a) $\lg x = 3{,}4305$ **b)** $\lg x = 0{,}5360$ **c)** $\lg x = 0{,}8930-3$ **d)** $\lg x = 0{,}0090-4$
e) $\lg x = 1{,}5619$ **f)** $\lg x = 5{,}6005$ **g)** $\lg x = 2{,}3170$ **h)** $\lg x = 0{,}5031-2$

13. Ermitteln Sie x als vierziffrige Zahl aus den folgenden Gleichungen!

a) $\lg x = 0{,}8145-2$ **b)** $\lg x = 2{,}7524$ **c)** $\lg x = 0{,}6991-5$ **d)** $\lg x = 0{,}5125$
e) $\lg x = 1{,}0249$ **f)** $\lg x = 4{,}6000$ **g)** $\lg x = 0{,}9120-1$ **h)** $\lg x = 0{,}5085-3$
i) $\lg x = 0{,}6563$ **k)** $\lg x = 0{,}6489-2$ **l)** $\lg x = 3{,}1630$ **m)** $\lg x = 5{,}0410$
n) $\lg x = 4{,}01368$ **o)** $\lg x = 0{,}3680-4$ **p)** $\lg x = 0{,}2570-2$ **q)** $\lg x = 1{,}2730$
r) $\lg x = 0{,}0162-1$ **s)** $\lg x = 0{,}1137-11$ **t)** $\lg x = 3{,}0141$ **u)** $\lg x = 2{,}2399$
v) $\lg x = 0{,}0900-4$ **w)** $\lg x = 4{,}3691$ **x)** $\lg x = 10{,}6500$ **y)** $\lg x = 0{,}1580$

Bei welchen Aufgaben brauchen Sie nicht zu interpolieren?

14. Warum ist die lineare Interpolation in Tafel 1 grundsätzlich ungenau?
Hinweis: Vergleichen Sie das Bild der Funktion $y = \lg x$ mit der Abbildung 2.1.!

15. Ermitteln Sie durch Interpolieren in den folgenden Aufgaben x als fünfziffrige Zahl!

a) $\lg x = 1{,}00050$ **b)** $\lg x = 0{,}01299$ **c)** $\lg x = 0{,}03400-2$
d) $\lg x = 0{,}03609-1$ **e)** $\lg x = 2{,}02301$ **f)** $\lg x = 0{,}04089-3$

2.3. Das Rechnen mit Logarithmen

Aufgaben zur Wiederholung

1. a) Fassen Sie den Inhalt der folgenden identischen Gleichungen in Worte!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

b) Wie heißen die vorstehenden drei Beziehungen?

c) Für welche Zahlen a, m und n sind die vorstehenden Potenzgesetze erklärt?

d) Welche andere Schreibweise können Sie für $a^{\frac{1}{m}}$ bzw. $a^{\frac{n}{m}}$ (n, m ganzzahlig) verwenden?

2. Schreiben Sie die folgenden Produkte, Quotienten und Potenzen von Potenzen als einen Potenz- bzw. Wurzelausdruck!

a) $13^{\frac{7}{3}} \cdot 13^{\frac{2}{3}}$ **b)** $19^{\frac{5}{3}} \cdot 19^{-\frac{5}{12}}$ **c)** $7^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{7^3}$ **d)** $\frac{7^3}{7^{\frac{1}{3}}}$ **e)** $a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}}$ **f)** $\frac{b^p}{b^3}$ **g)** $(3^4)^5$

h) $(a^m)^{-\frac{3}{4}}$ **i)** $(r^s)^t$ **k)** $\frac{a^n}{b^n}$ **l)** $\frac{5^{11}}{10^2}$ **m)** $3^7 \cdot 6^3$ **n)** $(5^r)^5$ **o)** $(5^5)^r$ **p)** $\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

3. Berechnen Sie x aus folgenden Gleichungen!

a) $\lg x = \lg 4 + \lg 25$ **b)** $\log_2 x = \log_2 8 + \log_2 128$
c) $\lg x = \lg 80 - \lg 20$ **d)** $\log_2 x = \log_2 32 - \log_2 16$
e) $\lg x = \lg 51 - \lg 12$ **f)** $\lg x = \lg 15 - \lg 450$
g) $\lg x = 3 \cdot \lg 12$ **h)** $\lg x = 5 \cdot \lg 3$
i) $\log_2 x = 4 \cdot \log_2 4$ **k)** $\lg x = 3 \cdot \lg 0{,}01$
l) $\log_2 x = 10 \cdot \log_2 \frac{1}{2}$ **m)** $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 2$
n) $\lg x = \frac{1}{3} \cdot \lg 125$ **o)** $\lg x = \frac{2}{3} \cdot \lg 27$

Welche Beziehungen können Sie jeweils zwischen dem gesuchten Numerus x und den gegebenen Numeri bzw. zwischen dem gesuchten Numerus x und dem n-fachen des gegebenen Numerus feststellen?

Logarithmengesetze

Die große Bedeutung der Logarithmen besteht in ihrer Verwendung als Rechenhilfsmittel. Produkte und Quotienten von rationalen Zahlen sowie Potenzen mit rationalen Exponenten lassen sich unter Verwendung der Logarithmen leicht berechnen.

Der Logarithmus eines Produktes

Für die drei identischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0{,}3010 \\ \lg 5 &= 0{,}6990 \\ \lg 10 &= 1{,}0000 \end{aligned}$$

gilt die folgende Gesetzmäßigkeit:
Der Numerus in der dritten Gleichung ist gleich dem Produkt der Numeri der beiden vorhergehenden ($10 = 2 \cdot 5$).
Der Logarithmus in der dritten Gleichung ist gleich der Summe der beiden vorhergehenden Logarithmen ($1{,}0000 = 0{,}3010 + 0{,}6990$).
Benutzt man für die obigen drei Gleichungen die Potenzschreibweise, so gilt für das Produkt

$$2 \cdot 5 = 10^{0,3010} \cdot 10^{0,6990} = 10^{0,3010 + 0,6990} = 10^{1}$$

Allgemein: Wenn

(7) $\log_a c_1 = b_1$, also $a^{b_1} = c_1$

und

(8) $\log_a c_2 = b^2$, also $a^{b_2} = c_2$,

so ist

(9) $c_1 \cdot c_2 = a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1 + b_2}$

und in logarithmischer Schreibweise

(10) $\log_a (c_1 \cdot c_2) = b_1 + b_2$,

wofür man wegen (7) bzw. (8)

(11) $\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$

schreiben kann.

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren des Produktes.
(Die gleiche Basis dieser Logarithmen wird vorausgesetzt.)

Beispiel 1:

Wie groß ist das Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche $A = 59{,}4\ \text{cm}^2$ und dessen Höhe $h = 11{,}3$ cm beträgt?
Gegeben: $A = 59{,}4\ \text{cm}^2$; $h = 11{,}3$ cm. Gesucht: V (in cm^3).

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h \\ V &= 59{,}4 \cdot 11{,}3\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Überschlag: $V \approx 60 \cdot 10\ \text{cm}^3 = 600\ \text{cm}^3$

Die logarithmische Rechnung wird nur mit den Maßzahlen durchgeführt.

$$\begin{array}{rl} \lg 59{,}4 &= 1{,}7738 \\ +\ \lg 11{,}3 &= 1{,}0531 \\ \hline \lg(59{,}4 \cdot 11{,}3) &= 2{,}8269 \\ \lg V &= 2{,}8269 \end{array}$$

$V = 671\ \text{cm}^3$

Ergebnis: Das Volumen beträgt 671 cm³.

Die in (11) für den Logarithmus eines Produktes formulierte Gesetzmäßigkeit gilt auch für mehr als zwei Faktoren, und zwar für endlich viele. Für i Faktoren folgt also:

(11 a) $\log_a (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_i) = \log_a c_1 + \log_a c_2 + \ldots + \log_a c_i$.

Weisen Sie die Gültigkeit von **(11 a)** ***für ein Produkt aus drei Faktoren nach, und erläutern Sie den Nachweis für vier Faktoren!***

Beispiel 2:

Welche Masse hat ein Quader aus Eichenholz ($\varrho = 0{,}75\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) mit den Kantenlängen $a = 13{,}2$ cm, $b = 4{,}5$ cm und $c = 11{,}3$ cm?

$$m = V \cdot \varrho = a \cdot b \cdot c \cdot \varrho$$
$$m = 13{,}2 \cdot 4{,}5 \cdot 11{,}3 \cdot 0{,}75\ \text{g}$$

Überschlag: $m \approx 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 1\ \text{g} = 500\ \text{g}$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 13{,}2 &= 1{,}1206 \\ +\ \lg 4{,}5 &= 0{,}6532 \\ +\ \lg 11{,}3 &= 1{,}0531 \\ +\ \lg 0{,}75 &= 0{,}8751 - 1 \\ \hline \lg m &= 3{,}7020 - 1 \\ \lg m &= 2{,}7020 \end{array}$$

Ergebnis: Der Eichenholzquader hat eine Masse von 504 g.

Der Logarithmus eines Quotienten

Da die Division die Umkehrung der Multiplikation und die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist, können wir vermuten:

(12) $\log_a \left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \log_a c_1 - \log_a c_2$.

Beweis:

Aus $\log_a c_1 = b_1$, also $a^{b_1} = c_1$, und $\log_a c_2 = b_2$, also $a^{b_2} = c_2$

folgt $$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1 - b_2}.$$

Dafür kann man

(13) $\log_a \left(\frac{c_1}{c_2}\right) = b_1 - b_2$

bzw. wegen $b_1 = \log_a c_1$ und $b_2 = \log_a c_2$

(14) $\log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \log_a c_1 - \log_a c_2$

schreiben. Das stimmt mit der Vermutung (12) überein.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor des Quotienten.
(Die gleiche Basis dieser Logarithmen wird vorausgesetzt.)

Beispiel 3:

Die Pro-Kopf-Produktion an Rohbraunkohle in der Deutschen Demokratischen Republik für das Jahr 1960 ist zu berechnen. Die Jahresproduktion an Rohbraunkohle lag 1960 bei $225{,}5 \cdot 10^6$ t. Die Bevölkerung betrug im gleichen Jahr etwa $17{,}24 \cdot 10^6$ Menschen.

Pro-Kopf-Produktion $= \frac{\text{Jahresproduktion}}{\text{Bevölkerung}} = \frac{225{,}5 \cdot 10^6}{17{,}24 \cdot 10^6}$ t je Einwohner.

$$x = \frac{225{,}5 \cdot 10^6}{17{,}24 \cdot 10^6} = \frac{225{,}5}{17{,}24}.$$

Überschlag: $\frac{225{,}5 \cdot 10^6}{17{,}24 \cdot 10^6} \approx \frac{220}{20} \approx 11.$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 225\,500\,000 &= 8{,}3532 \\ -\lg \;\; 17\,240\,000 &= 7{,}2365 \\ \hline \lg x &= 1{,}1167 \\ x &= 13{,}08 \end{array}$$

Ergebnis: Die Pro-Kopf-Produktion an Rohbraunkohle betrug in der Deutschen Demokratischen Republik im Jahre 1960 rund 13,1 t.

Beispiel 4:

Der Quotient $q = \frac{27}{243}$ ist auf logarithmischem Wege zu berechnen.

Überschlag: $q = \frac{27}{243} \approx \frac{25}{250} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

a) Bei Benutzung von Logarithmen zur Basis 3

$$\begin{array}{rl} \log_3 27 &= 3 \text{ (denn } 3^3 = 27) \\ -\log_3 243 &= 5 \text{ (denn } 3^5 = 243) \\ \hline \log_3 \frac{27}{243} &= 3 - 5 = -2 \\ \log_3 q &= -2 \\ q &= 3^{-2} = \frac{1}{9} \\ q &= 0{,}11\ldots \end{array}$$

b) Bei Benutzung von Logarithmen zur Basis 10

$$\begin{array}{rl} & \quad\; 2 \qquad\quad -1 \\ \lg 27 &= 1{,}4314 \\ -\lg 243 &= 2{,}3856 \\ \hline \lg \frac{27}{243} &= 0{,}0458 - 1 \\ \lg q &= 0{,}0458 - 1 \\ q &= 0{,}111 \end{array}$$

Für $\lg 27 = 1{,}4314$ wurde $2{,}4314 - 1$ geschrieben, um bei der Subtraktion ein Ergebnis zu erhalten, das unmittelbar in der Tafel aufgesucht werden kann.

Der Logarithmus einer Potenz mit rationalem Exponenten

Eine Potenz mit positiven ganzen Exponenten läßt sich als Produkt gleicher Faktoren darstellen:

(15) $c^i = \underbrace{c \cdot c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{i \text{ Faktoren } c}$

Wegen (11) gilt dann

(16) $\log_a (c^i) = \log_a \underbrace{(c \cdot c \cdot \ldots \cdot c)}_{i \text{ Faktoren}} = \underbrace{\log_a c + \log_a c + \ldots + \log_a c}_{i \text{ Summanden } \log_a c} = i \cdot \log_a c$

Diese Gesetzmäßigkeit gilt aber nicht nur für positive ganzzahlige, sondern auch für rationale Exponenten.

Für

(17) $x = \log_a (c^n)$ $\quad$ n rational; $a > 0$

folgt aus der Definition des Logarithmus

(18) $a^x = c^n$.

Löst man (18) nach c auf, so erhält man

(19) $c = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$.

Das ist gleichbedeutend mit der Schreibweise

(20) $\log_a c = \frac{x}{n}$.

Auflösung nach x liefert dann

(21) $x = n \cdot \log_a c$.

Daraus folgt wegen (17)

(22) $\log_a (c^n) = n \cdot \log_a c$ (n rational, $a > 0$).

Der Logarithmus einer Potenz c^n (n rational; $c > 0$) ist gleich dem n-fachen des Logarithmus der Potenzbasis c.

Da n in (22) rational ist, ergeben sich folgende Sonderfälle:

a) Für n positiv ganzzahlig stimmt (22) mit (16) überein.

b) Für $n = \frac{1}{m}$ mit m positiv ganzzahlig gilt demnach

(23) $\log_a \left(c^{\frac{1}{m}}\right) = \log_a \left(\sqrt[m]{c}\right) = \frac{1}{m} \cdot \log_a c$.

Drücken Sie die Gleichung (23) in Worten aus!

c) Für $n = \frac{p}{q}$ (p, q positiv, ganzzahlig) gilt demnach

(24) $\log_a \left(c^{\frac{p}{q}}\right) = \log_a \left(\sqrt[q]{c^p}\right) = \frac{p}{q} \cdot \log_a c$.

Drücken Sie die Gleichung (24) in Worten aus!

Die Benutzung von negativen n in (22) ist beim logarithmischen Rechnen nicht üblich. Um negative n zu vermeiden, rechnet man in solchen Fällen mit der Basis, die zur gegebenen reziprok ist.

Beispiel 5:

Wie groß ist das Volumen eines Würfels mit 28,5 mm Kantenlänge?

$$V = a^3$$
$$V = (28{,}5\ \text{mm})^3$$

Überschlag: $V \approx (30\ \text{mm})^3 = 27\,000\ \text{mm}^3 = 27\ \text{cm}^3$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 28{,}5^3 = & 1{,}4548 \cdot 3 \\ \hline \lg V = & 4{,}3644 \\ V = & 23\,100\ \text{mm}^3 \end{array}$$

Ergebnis: Das Volumen des Würfels beträgt 23,1 cm³.

Führen Sie die Berechnung des Würfels aus Beispiel 5 unter Benutzung der Maßeinheit Dezimeter durch!

Beispiel 6:

Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit dem Volumen 0,100 dm³?

$a = \sqrt[3]{V}$

$a = \sqrt[3]{0{,}100}\ \text{dm}$

Überschlag: $a \approx \sqrt[3]{0{,}125}\ \text{dm} = 0{,}5\ \text{dm}$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 0{,}1^{\frac{1}{3}} = & (0{,}0000 - 1) \cdot \frac{1}{3} \\ \lg 0{,}1^{\frac{1}{3}} = & (2{,}0000 - 3) \cdot \frac{1}{3} \\ \hline \lg a = & 0{,}6667 - 1 \\ a = & 0{,}464\ \text{dm} \end{array}$$

Um ganzzahlige Kennzahlen zu behalten, wurde vor der Multiplikation $\lg 0{,}1 = 0{,}0000 - 1$ in $2{,}0000 - 3$ umgeformt.

Ergebnis: Die Kantenlänge des Würfels beträgt 4,64 cm.

Beispiel 7:

$x = \sqrt[5]{0{,}051\,82^3}$ ist logarithmisch zu berechnen.

Überschlag: $\sqrt[5]{0{,}0518^3} \approx \sqrt[5]{\frac{125}{1\,000\,000}} = \sqrt[5]{\frac{12{,}5}{100\,000}} = \frac{1}{10}\sqrt[5]{12{,}5} \approx \frac{1}{10}\sqrt[5]{32} = 0{,}2$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 0{,}051\,82 = & 0{,}7145 - 2 \\ \lg x = & (0{,}7145 - 2) \cdot \frac{3}{5} \\ \lg x = & (3{,}7145 - 5) \cdot 0{,}6 \\ \hline \lg x = & 2{,}2287 - 3 \\ \lg x = & 0{,}2287 - 1 \\ x = & 0{,}169 \end{array}$$

Beachten Sie die Umformung des Logarithmus, damit die Kennzahl bei der Multiplikation mit 0,6 ganzzahlig bleibt!

Logarithmengesetze und Potenzgesetze

Die Logarithmengesetze (11), (14) und (22) besagen, daß der Logarithmus zur Basis b

a) eines Produktes (Multiplikation) durch Addieren der Logarithmen der Faktoren [vgl. (11)];
b) eines Quotienten (Division) durch Subtrahieren der Logarithmen von Dividend und Divisor [vgl. (16)] und
c) einer Potenz mit rationalen Exponenten (Potenzieren) durch Multiplizieren des Logarithmus der Potenzbasis mit dem rationalen Exponenten [vgl. (22)]

erhalten wird.

Die gleichen Gesetzmäßigkeiten hatten wir auch beim Rechnen mit Potenzen, also bei den Potenzgesetzen kennengelernt. Durch das Rechnen mit Logarithmen wird ebenso wie beim Rechnen mit Potenzen eine Rechenoperation der

3. Stufe (Potenzieren) auf eine Rechenoperation der 2. Stufe (Multiplizieren) und der
2. Stufe (Multiplizieren, Dividieren) auf eine Rechenoperation der 1. Stufe (Addieren, Subtrahieren)

zurückgeführt. Darauf beruhen die durch die Logarithmen- bzw. Potenzgesetze erzielten Vereinfachungen.

Beziehungen zwischen Logarithmen verschiedener Basen

Die Logarithmengesetze ermöglichen auch bei gegebenem Logarithmus einer Zahl zu einer festen Basis die Bestimmung des Logarithmus derselben Zahl zu einer anderen festen Basis. Ist etwa

(25) $\log_a c = b$

gegeben und

(26) $\log_{\bar{a}} c = x$

gesucht, so gilt wegen (25) $a^b = c$ und (26) $\bar{a}^x = c$

(27) $\bar{a}^x = a^b$

oder in logarithmischer Schreibweise bei Verwendung der Basis a

(28) $\log_a (\bar{a}^x) = \log_a (a^b)$.

Wegen (22) folgt daraus

(29) $x \cdot \log_a \bar{a} = b \cdot \log_a a$

und wegen $\log_a a = 1$ und (25) $b = \log_a c$ nach Division durch $\log_a \bar{a}$:

(30) $x = \frac{\log_a c}{\log_a \bar{a}}$.

Wegen (26) folgt dann:

(31) $\log_{\bar{a}} c = \frac{\log_a c}{\log_a \bar{a}}$.

Beispiel 8:

$x = \log_7 343$ ist mit Hilfe der dekadischen Logarithmen zu berechnen.

$c = 343;\ a = 10;\ \bar{a} = 7$

$$\log_7 343 = \frac{\lg 343}{\lg 7}$$

$$\log_7 343 = \frac{2{,}5353}{0{,}8451}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l} 2{,}5353 : 0{,}8451 = 3{,}00 \\ \underline{2{,}5353} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Überschlag: $\frac{24}{8} = 3$

Ergebnis: $\log_7 343 = 3$

Probe: $7^3 = 343$

Da die dekadischen Logarithmen aller Zahlen mit Hilfe der Tafel 1 ermittelt werden können, ermöglicht (31) die Berechnung des Logarithmus jeder positiven reellen Zahl zu jeder beliebigen positiven Basis $\bar{a}$ ($\bar{a} \neq 1$). Weil a hierbei stets 10 ist, wird (31) in der Form

(32) $\log_{\bar{a}} c = \frac{\lg c}{\lg \bar{a}}$

benutzt.

Wird dagegen in der Gleichung

(33) $\bar{b} = \log_{\bar{a}} x$

der zugeordnete Numerus x gesucht, so erhält man mittels der Potenzschreibweise

(34) $x = \bar{a}^{\bar{b}}$

und mit Hilfe des Logarithmengesetzes (22) unter Benutzung von dekadischen Logarithmen

(35) $\lg x = \bar{b} \cdot \lg \bar{a}$.

Beispiel 9:

Es ist x in $\log_2 x = 5{,}280$ zu bestimmen.

$x = 2^{5{,}280}$

Überschlag: $x \approx 2^5 = 32$

Logarithmische Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \lg 2^{5{,}280} = & \underline{0{,}3010 \cdot 5{,}280} \\ & 1{,}5050 \\ & 06020 \\ & \underline{024080} \\ \lg x = & 1{,}5893 \\ x = & 38{,}85 \end{array}$$

Führen Sie die Probe mit Hilfe von (32) selbst durch!

Aufgaben

4. Wie lauten die Logarithmengesetze (11), (14), (22) und dessen Sonderfälle (23) und (24) für dekadische Logarithmen?

5. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Produkte!

a) $3{,}81 \cdot 17{,}8$ **b)** $0{,}51 \cdot 23$ **c)** $1{,}024 \cdot 872$ **d)** $0{,}0257 \cdot 3410$
e) $0{,}702 \cdot 0{,}0578$ **f)** $631 \cdot 70\,800$ **g)** $0{,}1304 \cdot 5{,}288$ **h)** $854{,}3 \cdot 0{,}2871$

Hinweis: Bestimmen Sie die vierte Ziffer im Produkt nur dann, wenn auch die Faktoren vierziffrig gegeben sind!

6. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Produkte!

a) $5{,}28 \cdot 7{,}41 \cdot 9{,}99$ **b)** $4{,}07 \cdot 0{,}00273 \cdot 181$ **c)** $755 \cdot 602 \cdot 830$
d) $0{,}00265 \cdot 0{,}341 \cdot 0{,}0827$ **e)** $5{,}28 \cdot 0{,}0101 \cdot 9{,}72$ **f)** $631 \cdot 0{,}00047 \cdot 8{,}15$
g) $39{,}42 \cdot 5{,}783 \cdot 210{,}8$ **h)** $7777 \cdot 0{,}9093 \cdot 0{,}002002$ **i)** $0{,}8311 \cdot 0{,}01074 \cdot 0{,}08718$
k) $23{,}7 \cdot 0{,}0875 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}543$ **l)** $0{,}00732 \cdot 0{,}518 \cdot 5{,}57 \cdot 98{,}2$
m) $124 \cdot 5{,}38 \cdot 0{,}0277 \cdot 0{,}741 \cdot 0{,}000318$ **n)** $312 \cdot 0{,}525 \cdot 0{,}842 \cdot 0{,}00717 \cdot 15{,}2$

Beachten Sie den Hinweis zu Aufgabe **5**!

7. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

a) $\lg \ldots = \lg 5 + \lg 22$ **b)** $\lg 777 = \lg 14 + \lg \ldots$
c) $\log_3 \ldots = \log_3 17 + \log_3 10$ **d)** $\log_2 5000 = \log_2 \ldots + \log_2 25$
e) $\log_3 126 = \log_3 9 + \log_3 \ldots$ **f)** $\log_{130} 121 = \log_{130} \ldots + \log_{130} 11$
g) $\lg \ldots = \lg 6 + \lg 5 + \lg 4$ **h)** $\lg 720 = \lg 5 + \lg \ldots + \lg 9$
i) $\lg \ldots = \lg a + \lg b$ **k)** $\lg m = \lg \frac{m}{2} + \lg \ldots$
l) $\lg \ldots = \lg \frac{m}{2} + \lg \frac{m}{2}$ **m)** $\log_a \ldots = \log_a r + \log_a 2r$

8. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Quotienten!

a) $53\,100 : 72{,}3$ **b)** $72{,}3 : 501$ **c)** $2{,}38 : 0{,}476$
d) $0{,}842 : 83{,}2$ **e)** $0{,}575 : 0{,}241$ **f)** $0{,}608 : 0{,}879$
g) $\frac{5{,}87}{29{,}3}$ **h)** $\frac{72{,}4}{0{,}00503}$ **i)** $\frac{82\,200}{0{,}0242}$ **k)** $\frac{0{,}00708}{9770}$
l) $\frac{0{,}0418}{5{,}32}$ **m)** $\frac{0{,}000587}{13{,}2}$ **n)** $\frac{0{,}00271}{0{,}801}$ **o)** $\frac{0{,}0572}{0{,}0000504}$
p) $720{,}8 : 155{,}4$ **q)** $10{,}01 : 1{,}010$ **r)** $50\,080 : 2{,}701$
s) $0{,}2718 : 44{,}44$ **t)** $0{,}005072 : 1{,}099$ **u)** $38{,}05 : 0{,}07052$
v) $0{,}0719 : 821$ **w)** $21{,}84 : 0{,}0005433$

9. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

a) $\lg \ldots = \lg 2000 - \lg 25$ **b)** $\lg 144 = \lg \ldots - \lg 5$
c) $\lg 13 = \lg 26 - \lg \ldots$ **d)** $\lg m = \lg \ldots - \lg \frac{m}{5}$
e) $\log_5 2 = \log_5 20\,000 - \log_5 \ldots$ **f)** $\log_a z^3 = \log_a \ldots - \log_a z^2$
g) $\log_3 \ldots = \log_3 781 - \log_3 11$ **h)** $\log_r \ldots = \log_r 4\,m - \log_r 2\,m$

10. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Potenzen!

a) $15{,}2^7$ **b)** $0{,}518^3$ **c)** 1029^4 **d)** $1{,}05^{13}$
e) $0{,}025^5$ **f)** $0{,}0208^4$ **g)** $0{,}999^5$ **h)** $0{,}000708^3$
i) $32{,}48^6$ **k)** $10\,720^3$ **l)** $95{,}08^{10}$ **m)** $78{,}03^5$
n) $103{,}4^5$ **o)** $0{,}1023^4$ **p)** $0{,}00207^3$

11. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

a) $\lg \ldots = 3 \cdot \lg 6$ **b)** $\lg 3125 = \ldots \cdot \lg 5$
c) $\log_3 3125 = 5 \cdot \log_3 \ldots$ **d)** $\log_7 13^5 = 5 \cdot \log_7 \ldots$
e) $\log_{11} 243 = \ldots \cdot \log_{11} 3$ **f)** $\log_a \ldots = 12 \cdot \log_a s$
g) $\lg \ldots = 2 \cdot \lg 17$ **h)** $\lg a^z = z \cdot \lg \ldots$
i) $\lg a^2 = \ldots \lg a$

12. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Wurzeln!

a) $\sqrt[3]{5}$; **b)** $\sqrt{1{,}414}$ **c)** $\sqrt[7]{7}$ **d)** $\sqrt[5]{13{,}8}$ **e)** $\sqrt[4]{0{,}246}$ **f)** $\sqrt[5]{871{,}4}$ **g)** $\sqrt[4]{0{,}0207}$

h) $\sqrt[5]{0{,}0351}$ **i)** $\sqrt{1000}$ **k)** $\sqrt[3]{0{,}0281}$ **l)** $\sqrt[7]{25\,800\,000}$ **m)** $\sqrt[3]{0{,}000\,0417}$ **n)** $\sqrt[5]{91{,}4}$ **o)** $\sqrt{829\,000}$

p) $\sqrt[3]{35\,070}$ **q)** $\sqrt{0{,}02905}$ **r)** $\sqrt[3]{0{,}01012}$ **s)** $\sqrt[4]{0{,}005\,107}$ **t)** $\sqrt[5]{0{,}2008}$

13. Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

a) $\lg 3 = \frac{1}{6} \cdot \lg \ldots$ **b)** $\log_a \ldots = \frac{1}{4} \cdot \log_a 625$

c) $\log_5 2 = \ldots \cdot \log_5 128$ **d)** $\lg \ldots = \frac{1}{5} \cdot \lg 243$

e) $\log_6 10 = \ldots \cdot \log_6 10\,000$ **f)** $\lg \ldots = \frac{1}{6} \cdot \lg a$

g) $\lg \ldots = \frac{1}{5} \lg 17$ **h)** $\log_a 11 = \frac{1}{2} \cdot \log_a \ldots$

14. Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Ausdrücke!

a) $\sqrt[5]{13{,}7^2}$ **b)** $\sqrt{0{,}241^5}$ **c)** $\sqrt[4]{3{,}33^7}$ **d)** $\sqrt[5]{0{,}0542^3}$ **e)** $1440^{\frac{3}{5}}$

f) $1440^{\frac{5}{3}}$ **g)** $85\,300^{\frac{4}{3}}$ **h)** $0{,}275^{\frac{3}{7}}$ **i)** $\sqrt{0{,}005\,183^5}$ **k)** $17{,}04^{\frac{2}{5}}$

l) $154{,}3^{\frac{3}{4}}$ **m)** $\sqrt[5]{0{,}0003042^2}$ **n)** $\sqrt[5]{853^4}$ **o)** $\sqrt[5]{38{,}2^6}$ **p)** $\sqrt{0{,}507^3}$

15. Mit jeweils drei Neunen lassen sich die folgenden Potenzen schreiben.

a) 99^9 **b)** 9^{99} **c)** $(9^9)^9$ **d)** $9^{(9^9)}$

Ordnen Sie die Potenzen der Größe nach!
Bestimmen Sie nach Möglichkeit die ersten drei Ziffern ihres Potenzwertes!

16. Berechnen Sie mit Hilfe der dekadischen Logarithmen!

a) $\log_5 8$ **b)** $\log_2 0{,}3$ **c)** $\log_{11} 0{,}0213$
d) $\log_4 138$ **e)** $\log_6 0{,}1296$ **f)** $\log_4 10{,}24$
g) $\log_{17} 3810$ **h)** $\log_3 0{,}0027$ **i)** $\log_{0,5} 0{,}0625$
k) $\log_{0,3} 38{,}4$ **l)** $\log_9 999$ **m)** $\log_2 17700$
n) $\log_3 520{,}8$ **o)** $\log_5 0{,}371$ **p)** $\log_8 28{,}3$
q) $\log_7 0{,}0132$ **r)** $\log_5 15^3$ **s)** $\log_3 2{,}2^{\frac{4}{3}}$
t) $\log_2 0{,}47^{\frac{3}{5}}$

17. Berechnen Sie x in den folgenden Gleichungen!

a) $\log_3 x = 0{,}83$ **b)** $\log_5 x = 0{,}0051$ **c)** $\log_{12} x = -0{,}25$
d) $\log_4 x = 1{,}77$ **e)** $\log_{33} x = 0{,}07$ **f)** $\log_8 x = -1{,}85$
g) $\log_7 x = 13{,}2$ **h)** $\log_{11} x = 7{,}82$ **i)** $\log_{0,5} x = 4$

2.4. Weitere logarithmische Rechenhilfsmittel

Aufgaben zur Wiederholung

1. a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \lg x$ für $0 < x \leqq 12$!

b) Projizieren Sie die Bildpunkte für alle ganzzahligen x des Intervalls $0 < x \leqq 12$ auf die y-Achse!

c) Kennzeichnen Sie die so auf der y-Achse erhaltenen Punkte mit den zugeordneten Numeri 1 bis 12!

d) Welchen Abstand haben die Punkte 1 bis 12 vom Koordinatenursprung (ausgedrückt in Einheiten der Abszissenachse)?

2. a) Wie können Sie aus dem Bild der Funktion $y = \lg x$ aus Aufgabe **1a** das Bild der Funktion $y = \log_2 x$ erhalten? Konstruieren Sie das Bild von $y = \log_2 x$ im gleichen Koordinatensystem!
   b) Verfahren Sie entsprechend den Aufgaben **1b** und **c**!
   c) Welchen Abstand haben die erhaltenen Punkte vom Koordinatenursprung (ausgedrückt in Einheiten der Abszissenachse)?

3. a) Wie heißen die Hauptteile eines Rechenstabes?
   b) Welche Rechenoperationen können auf dem Rechenstab durchgeführt, welche Rechenoperationen können nicht durchgeführt werden?
   c) Beschreiben Sie, wie auf dem Rechenstab eine Multiplikation von zwei und von mehr als zwei Zahlen durchgeführt wird!
   d) Beschreiben Sie, wie auf dem Rechenstab eine Division von zwei Zahlen durchgeführt wird!
   e) Erläutern Sie die Skaleneinteilung Ihres Rechenstabes!

4. Berechnen Sie mit dem Rechenstab!

   a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{4000}$; $\sqrt{0,4}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,004}$

   b) $\sqrt{0,081}$; $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{8,1}$; $\sqrt{81}$

   c) $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{80}$; $\sqrt[3]{800}$; $\sqrt[3]{8000}$; $\sqrt[3]{80\,000\,000}$;
   $\sqrt[3]{0,8}$; $\sqrt[3]{0,08}$; $\sqrt[3]{0,008}$; $\sqrt[3]{0,0008}$; $\sqrt[3]{0,000\,000\,8}$

   d) $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{640}$; $\sqrt[3]{6400}$; $\sqrt[3]{64000}$; $\sqrt[3]{640\,000}$;
   $\sqrt[3]{6,4}$; $\sqrt[3]{0,64}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{0,000\,006\,4}$

   e) $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[3]{3430}$; $\sqrt[3]{34\,300}$; $\sqrt[3]{343\,000}$; $\sqrt[3]{34\,300\,000}$;
   $\sqrt[3]{34,3}$; $\sqrt[3]{3,43}$; $\sqrt[3]{0,343}$; $\sqrt[3]{0,003\,43}$

   Erläutern Sie die auftretenden Gesetzmäßigkeiten!

5. Welche Logarithmengesetze kennen Sie? Erläutern Sie ihren Inhalt!

6. a) Welche Längen-, Flächen- und Volumenmaßeinheiten kennen Sie?
   b) Rechnen Sie selbstgewählte Längen-, Flächen- und Volumenmaße in andere Längen-, Flächen- und Volumenmaße um!

Logarithmische Leitern und Netze

In Abbildung 2.2. sind auf einer 1 dm langen Strecke die Mantissen aller ganzen Zahlen zwischen 1 und 10 in Dezimeter vom Anfangspunkt aus abgetragen und mit den zugeordneten Numeri bezeichnet worden. Eine auf solche Weise unterteilte Strecke ist eine **logarithmische Leitereinheit.** Ihrem Anfangspunkt ist der Numerus 1 [$\lg 1 = 0,0000$], ihrem Endpunkt der Numerus 10 [$\lg 10 = 1,0000$] zugeordnet.

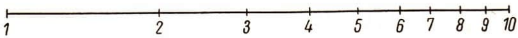


Abb. 2.2.

Trägt man eine logarithmische Leitereinheit in einem beliebigen, aber gleichbleibenden Maßstab auf einer Geraden mehrfach nebeneinander ab, so entsteht eine **log-**

arithmische Leiter, bei der jeder der gleich großen Leitereinheiten die Zahlen zwischen zwei benachbarten Zehnerpotenzen zugeordnet sind. Die Abbildung 2.3. stellt eine solche logarithmische Leiter dar. Als Länge für die logarithmische Leitereinheit wurden 2 cm gewählt.

Abb. 2.3.

Im Gegensatz zu einer linear (metrisch) geteilten Leiter sind die Strecken zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen nicht gleich groß, sondern werden mit größer werdenden Zahlen immer kleiner. Deshalb wird bei der **Feineinteilung** einer logarithmischen Leitereinheit von dem bei metrischen Leitern üblichen Prinzip der gleichmäßigen dezimalen Unterteilung abgegangen. Da beispielsweise in Abbildung 2.2. der Abstand zwischen 2 und 3 wesentlich größer ist als zwischen 8 und 9, wird die logarithmische Leiter zwischen 2 und 3 feiner unterteilt als zwischen 8 und 9.

Zeichnet man ein Achsenkreuz und unterteilt eine Achse logarithmisch, die andere dagegen linear, so erhält man ein einfach logarithmisches Netz (Abb. 2.4.).

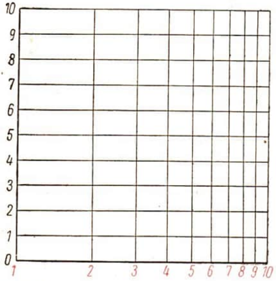


Abb. 2.4.

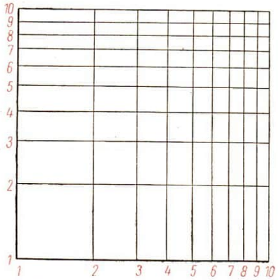


Abb. 2.5.

Ersetzt man die lineare Leiter ebenfalls durch eine logarithmische Leiter, so entsteht ein (doppelt) **logarithmisches Netz** (Abb. 2.5.). Solche **Logarithmenpapiere** finden in vielen Bereichen unserer Volkswirtschaft vielfältige Verwendung.

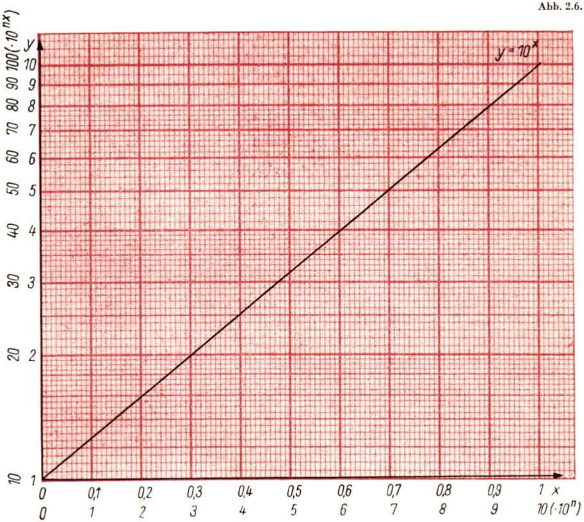
Im Gegensatz zum Millimeterpapier besteht die Einteilung bei den Logarithmenpapieren im allgemeinen nicht mehr aus Quadraten, sondern aus Rechtecken, die bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Die logarithmischen Papiere kann man zu graphischen Darstellungen und zum „graphischen Rechnen" verwenden.

Die Abbildung 2.6. stellt die Exponentialfunktion

(36) $y = 10^x$

im einfachen logarithmischen Netz dar. Als Abszissenachse wurde eine lineare und als Ordinatenachse eine logarithmische Leiter benutzt. Auf diese Weise wird jedem x-Wert der Wert $y = \lg 10^x = x$ zugeordnet. Für die metrische Einheit und für die logarithmische Einheit wurden jeweils gleich lange Strecken gewählt. Sind die Leitern in diesem Verhältnis geteilt, so sind alle Bildpunkte der Funktion $y = 10^x$ jeweils von der x-Achse und der y-Achse gleich weit entfernt. Es ergibt sich als Bild der Funktion $y = 10^x$ in diesem Koordinatensystem eine durch den Ursprung gehende und unter 45° ansteigende Gerade.

Abb. 2.6.



In dem in Abbildung 2.6. benutzten Koordinatensystem sind aber auch die Bilder derjenigen Exponentialfunktionen $y = a^x$ Geraden, deren Basen $a \neq 10$ $(a > 0)$ sind. Durch Aufstellen einer Wertetabelle, etwa für

$$y = 2^x,$$

und durch Eintragen der Bildpunkte für alle ganzzahligen Werte von x kann man das leicht bestätigen.

Auch die zur Exponentialfunktion inverse logarithmische Funktion ergibt als Bild in einem einfach logarithmisch geteilten Netz eine Gerade, wenn man die lineare Leiter als Ordinatenachse und die logarithmische Leiter als Abszissenachse benutzt (Abb. 2.7.), weil für jede der gleich großen logarithmischen Leitereinheiten der Ordinatenwert um 1 zunimmt.

Der Vorteil der Verwendung einfach geteilter logarithmischer Netze für die graphische Darstellung der Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ und der logarithmischen

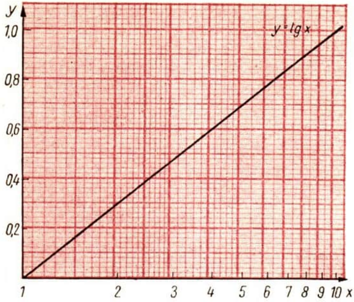


Abb. 2.7.

Funktion $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ liegt in der schnellen Zeichenmöglichkeit ihrer Bilder als Geraden. Außerdem wird ein wesentlich größerer Teilbereich des gesamten Definitionsbereiches bzw. Wertevorrates als bei linearer Achsenteilung auf derselben Fläche darstellbar. Andererseits besteht aber auch die Möglichkeit, einen sehr kleinen Teilbereich in starker Vergrößerung sehr schnell darzustellen und so sehr genaue Ablesungen vornehmen zu können.

Ein einfaches Anwendungsbeispiel zeigt die Abbildung 2.8. Ihr liegt folgender Sachverhalt zugrunde:

Unsere volkseigenen Sparkassen gewähren bekanntlich auf jedes Sparguthaben Zinsen, und zwar bei täglicher Kündigung 3 %, bei dreimonatiger Kündigungsfrist $3^1/_2$ % und bei einjähriger Kündigungsfrist 4 % jährlich. Bringt man ein Sparguthaben s_0 zur Sparkasse, so ist s_0 bei 4 % Verzinsung und bei keiner weiteren Einzahlung oder Abhebung (auch nicht der Zinsen!)

nach 1 Jahr auf $s_1 = s_0 + 0{,}04 \cdot s_0 = s_0 \cdot 1{,}04$,
nach 2 Jahren auf $s_2 = (s_0 \cdot 1{,}04) \cdot 1{,}04 = s_0 \cdot 1{,}04^2$,
nach 3 Jahren auf $s_3 = (s_0 \cdot 1{,}04^2) \cdot 1{,}04 = s_0 \cdot 1{,}04^3$,

.
.
.

(37a) nach n Jahren auf $s_n = (s_0 \cdot 1{,}04^{n-1}) \cdot 1{,}04 = s_0 \cdot 1{,}04^n$

angewachsen.

Für 3,5 % gilt entsprechend für das Sparguthaben nach n Jahren

(37b) $s_n = s_0 \cdot 1{,}035^n$,

und für 3 % erhält man nach n Jahren

(37c) $s_n = s_0 \cdot 1{,}03^n$.

Die Gleichungen (37a), (37b) und (37c) sind Exponentialfunktionen, ihre Bilder sind also in einem Koordinatensystem mit einfach logarithmisch geteiltem Netz (n-Achse linear, s_n-Achse logarithmisch geteilt) Geraden.

Aus $s_n = s_0 \cdot 1{,}04^n$ bzw. $s_n = s_0 \cdot 1{,}035^n$ bzw. $s_n = 1{,}03^n$

folgen wegen der logarithmisch geteilten s_n-Achse die Geradengleichungen

$$\lg s_n = \lg s_0 + n \cdot \lg 1{,}04 \text{ bzw.}$$
$$\lg s_n = \lg s_0 + n \cdot \lg 1{,}035 \text{ bzw.}$$
$$\lg s_n = \lg s_0 + n \cdot \lg 1{,}03\,.$$

Mit Hilfe der Punktpaare $(0;\ s_0)$ und $(n;\ s_1)$ [z. B. $(1;\ s_1)$] lassen sich die Geraden schnell zeichnen. Die Abbildung 2.8. zeigt diese drei Geraden für $s_0 = 10$ MDN. Für

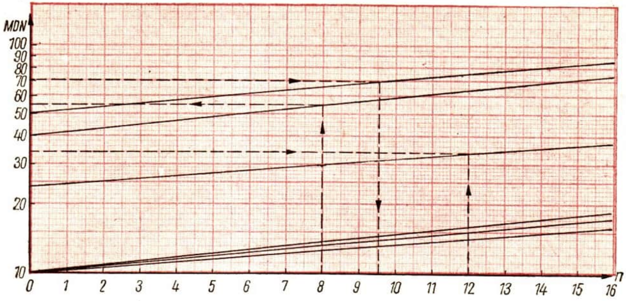


Abb. 2.8.

alle anderen Werte von s_0 tritt lediglich eine Schiebung der Geraden des betreffenden Zinssatzes in den neuen Ausgangspunkt s_0 auf.
Zeichnet man die Geraden auf eine durchsichtige Schablone mit markierter Gerade vom Anstieg Null, so läßt sich mit Hilfe dieser Schablone für jede eingetragene Zeit n der zu jedem s_0 gehörende Wert s_n, aber auch zu jedem Wert s_n und zu jedem s_0 die Zeit n und schließlich auch zu jedem Wert s_n und zu jeder eingetragenen Zeit n der Wert s_0 mit für Übersichten ausreichender Genauigkeit ermitteln. In Abbildung 2.8. ist für jeden Fall ein Beispiel eingetragen worden.
Die Darstellung in Abbildung 2.8. heißt ein **Nomogramm**[1], und das Verfahren, das Rechnen durch Ablesen der gesuchten Werte aus einem Nomogramm zu ersetzen, heißt **Nomographie.** In fast allen Bereichen unserer Volkswirtschaft findet es in zunehmendem Maße Anwendung.

Aufgaben

7. a) Zeichnen Sie eine logarithmische Leiter in einem beliebigen Maßstab und parallel zu dieser eine zweite logarithmische Leiter in einem halb so großen Maßstab, deren Anfangspunkt genau senkrecht über dem Anfangspunkt der ersten liegt!
b) Welche Beziehungen bestehen dann zwischen den genau senkrecht übereinanderliegenden Zahlen auf beiden Leitern?

8. Bestimmen Sie aus Abbildung 2.8.
a) s_n, wenn $s_0 = 12$ MDN, $n = 1, 2, \ldots, 15$ Jahre und der Zinssatz $p = 3\,\%$,
b) s_n, wenn $s_0 = 17$ MDN, $n = 1, 2, \ldots, 15$ Jahre und $p = 3{,}5\,\%$,
c) s_0, wenn $s_{10} = 22{,}20$ MDN ($n = 10$ Jahre) und $p = 4\,\%$,
d) s_0, wenn $s_5 = 80$ MDN ($n = 5$ Jahre) und $p = 3\,\%$,
e) n, wenn $s_0 = 75$ MDN, $s_n = 102{,}65$ MDN und $p = 4\,\%$,
f) n, wenn $s_0 = 10$ MDN, $s_n = 11{,}86$ MDN und $p = 3{,}5\,\%$
beträgt!

[1] νομος (griech.), das Verteilte; γραμμα (griech.), Verzeichnis

9. Welche Gesetzmäßigkeiten gelten für die Rechteckseiten, die die Rasterung
   a) eines einfach logarithmisch geteilten Papiers;
   b) eines doppelt logarithmisch geteilten Papiers
   bilden? Begründen Sie diese Gesetzmäßigkeiten!

10. Das Nomogramm (Abb. 2.8.) läßt sich auch für $s_n > 120$ MDN und für $s_0 < 10$ MDN benutzen. Überlegen Sie, weshalb das möglich ist!
    Hinweis: Vergleichen Sie die logarithmische Leitereinheit für 10^1 bis 10^2 mit der für 10^n bis 10^{n+1} gleichen Maßstabs!

11. Bestimmen Sie aus Abbildung 2.8.
    a) s_n, wenn $s_0 = 2000$ MDN, $n = 7$ Jahre und $p = 4\%$,
    b) s_n, wenn $s_0 = 540$ MDN, $n = 13$ Jahre und $p = 3{,}5\%$,
    c) s_n, wenn $s_0 = 0{,}35$ MDN, $n = 4$ Jahre und $p = 3\%$,
    d) s_0, wenn $s_6 = 15000$ MDN, $n = 6$ Jahre und $p = 4\%$,
    e) n, wenn $s_0 = 4300$ MDN, $s_n = 5613$ MDN und $p = 3\%$
    beträgt!

12. a) Warum läßt sich das Nomogramm in Abbildung 2.8. auch für einen längeren Zeitraum als 13 Jahre benutzen?
    b) Lesen Sie weitere Werte auch für Bruchteile des Jahres ab!
    c) Wie ist das Nomogramm zu ändern, damit man ohne Interpolation der Zeitwerte von Monat zu Monat ablesen kann?

13. Wie läßt sich aus dem Nomogramm in Abbildung 2.8. der Zinssatz p bestimmen, wenn s_0 und s_n, d. h. also auch n, gegeben sind?

14. Überlegen Sie an Hand des Beispiels in Abbildung 2.8., welche Vorteile die Nomographie bietet!

15. In einer Betriebsabteilung eines volkseigenen Betriebes soll die Arbeitsproduktivität jährlich um 8% steigen. Überlegen Sie, wie Sie mit Hilfe von Abbildung 2.8. folgende Fragen beantworten können!
    a) In welchem Zeitraum hat sich dann die Arbeitsproduktivität verdoppelt?
    b) Um wieviel Prozent ist die Arbeitsproduktivität nach 2, 3, 4, ..., 10 Jahren gestiegen?
    c) Nach wieviel Jahren erreicht man eine Steigerung um 40%, 60%, 80%?
    d) Wie groß ist die jeweilige jährliche prozentuale Zunahme der Arbeitsproduktivität, bezogen auf die ursprüngliche Arbeitsproduktivität gleich 100% in den ersten zehn Jahren?

Schüleraufträge:

1. Stellen Sie während Ihrer beruflichen Grundausbildung fest, wo Nomogramme in der Betriebspraxis verwendet werden!
2. Bitten Sie Ihren Betreuer oder einen anderen Mitarbeiter des Betriebes, Ihnen Aufbau, Anwendung und volkswirtschaftliche Bedeutung der verwendeten Nomogramme zu erklären! Lassen Sie sich, wenn möglich, auch bei der Beantwortung der Aufgabe 14 helfen!
3. Wenn Sie an der beruflichen Grundausbildung für metallverarbeitende Berufe teilnehmen, lassen Sie sich das **Sägediagramm** für Werkzeugmaschinen mit kreisender Arbeitsbewegung erklären!

Der Rechenstab

Der Rechenstab ist eine wichtige Anwendung von logarithmischen Leitern. Die Skalen A bis D und die am oberen Stabkörperrand meist vorhandene Skale K sind logarithmisch unterteilt, d. h., die Mantissen bestimmter Ziffernfolgen sind als

Strecken vom Anfangspunkt der Skale in einem bestimmten Maßstab eingetragen. Bei dem am meisten benutzten 25-cm-Stab ist die Länge (in Zentimetern) der „Mantissenstrecken“ auf den Skalen C und D durch Multiplikation der jeweiligen Mantisse zur logarithmischen Basis 10 mit 25 cm erhalten worden. Wie bei logarithmischen Leitern üblich, sind die Endpunkte der Mantissenstrecken nicht mit den Mantissen, sondern mit den zugeordneten Ziffernfolgen gekennzeichnet. Durch die maßstäbliche Vergrößerung der Leitereinheit durch Multiplikation mit 25 cm wird auf den Skalen C und D eine gute Feineinteilung möglich.
Da sich die dekadischen Logarithmen von Zahlen mit gleicher Ziffernfolge, aber verschiedenem Stellenwert, nur in ihren Kennzahlen, nicht aber in ihren Mantissen unterscheiden, sind durch die oben beschriebene Skaleneinteilung alle Zahlen mit den in den Skalen C und D markierten Ziffernfolgen erfaßt. Beispielsweise gehören zu dem Skalenstrich, dem die Ziffernfolge 197 zugeordnet ist, alle Zahlen von der Form

(38) $1{,}97 \cdot 10^n$ (n ganzzahlig).

Die Skalen A und B des Rechenstabes sind beim 25-cm-Stab durch Abtragen der mit $\frac{25}{2}\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}$ multiplizierten Mantissen entstanden. Verglichen mit den Skalen C und D ist hier derselben Ziffernfolge nur eine halb so lange Mantissenstrecke zugeordnet worden, was das Nebeneinandersetzen von zwei logarithmischen Leitereinheiten auf der Strecke von 25 cm ermöglicht. Durch den kleineren Maßstab ist aber keine so gute Feineinteilung der logarithmischen Skale wie bei den Skalen C und D möglich. Auf den Skalen A und B sind die in der rechten logarithmischen Leitereinheit zur Orientierung eingetragenen Zahlen alle zehnmal so groß wie die an entsprechender Stelle in der linken logarithmischen Leitereinheit eingetragenen.
Ganz entsprechend ist die Skale K aufgebaut worden, indem die Mantissen bestimmter Ziffernfolgen mit $\frac{25}{3}\,\text{cm} = 8\frac{1}{3}\,\text{cm}$ multipliziert und die so erhaltenen Mantissenstrecken vom Anfangspunkt aus abgetragen wurden. Der Maßstab ist so gewählt, daß auf 25 cm drei logarithmische Leitereinheiten nebeneinander aufgetragen werden konnten.
Die **Reziprokskale** R entspricht in ihrem Aufbau völlig den Skalen C und D. Sie stellt also eine logarithmische Leitereinheit dar, die jedoch in umgekehrter Richtung wie die Skalen C und D abgetragen ist. Sie gibt so jeweils zu der auf der Skale C genau darunterstehenden Ziffernfolge die reziproke Ziffernfolge an und umgekehrt.

Beispiel:

Über der Ziffernfolge 800 auf C steht die Ziffernfolge 125. Das ist wegen $1:8 = 0{,}125$ tatsächlich die zu 800 reziproke Ziffernfolge.

Bei vielen Rechenstäben sind an die Anfangs- bzw. Endpunkte der eingetragenen logarithmischen Leitern je ein End- bzw. Anfangsstück einer weiteren logarithmischen Leitereinheit angeschlossen. Dadurch wird das Rechnen mit dem Stab in bestimmten Fällen erleichtert.
Schließlich sind auf den meisten Stäben noch besondere Marken (Teilstriche) für die Kreisberechnung angebracht, nämlich auf der Skale C die Marken

$$\pi = 3{,}14;\quad c = \sqrt{\tfrac{4}{\pi}} \approx \sqrt{1{,}28} \approx 1{,}13 \quad\text{und}\quad c_1 = \sqrt{\tfrac{40}{\pi}} \approx \sqrt{12{,}75} \approx 3{,}57.$$

In fast allen Bereichen der Volkswirtschaft werden Rechenstäbe als Rechenhilfsmittel benutzt. Sie sind alle nach dem Prinzip der logarithmischen Leitern aufgebaut, weisen jedoch je nach Einsatzbereich oder Verwendungszweck gewisse Besonderheiten in der Form, Größe oder Skaleneinteilung (beispielsweise durch Angabe weiterer Marken für Materialkonstanten usw.) auf.

Aufgaben

16. Untersuchen Sie, ob sich der Aufbau Ihres Rechenstabes von dem des vorstehend beschriebenen 25-cm-Stabes unterscheidet!

17. Stellen Sie auf der jeweils mit angegebenen Skale C bzw. D folgende Ziffernfolgen mit Hilfe des (mittleren) Läuferstriches ein!
- **a)** D 102; D 120; D 785; D 405; D 450; D 342; D 324
- **b)** C 108; C 110; C 204; C 378; C 495; C 535; C 995
- **c)** Schätzen Sie die Lage folgender Ziffernfolgen auf den Skalen C bzw. D, und markieren Sie diese durch den (mittleren) Läuferstrich!
  D 1355; C 1996; D 221; C 353; C 502; D 777; C 821

18. Welche Ziffernfolge gehört auf C bzw. D zu dem Skalenstrich, der vor bzw. nach dem Skalenstrich für die Ziffernfolge
110; 200; 300; 400; 500; 600; 750; 920; 990; 995 liegt?

19. Zwischen welchen durch einen Skalenstrich auf C bzw. D gekennzeichneten Ziffernfolgen liegt die Ziffernfolge
1053; 1802; 1995; 201; 243; 311; 403; 507; 537; 621; 732; 854; 888; 899; 904; 996?

20. Stellen Sie auf der Reziprokskale R die folgenden Zahlen ein!

a) $\frac{1}{108}$ **b)** $\frac{1}{522}$ **c)** $\frac{1}{358}$ **d)** $\frac{1}{972}$ **e)** $\frac{1}{444}$ **f)** $\frac{1}{555}$ **g)** $\frac{1}{174}$

Welche von ihnen sind auf Ihrem Rechenstab durch einen Skalenstrich gekennzeichnet, welche nicht?

21. Stellen Sie auf den Skalen A und B die folgenden Ziffernfolgen an zwei verschiedenen Stellen ein!

a) 108	**b)** 210	**c)** 307	**d)** 204	**e)** 455	**f)** 197	**g)** 55
h) 393	**i)** 295	**k)** 555	**l)** 168	**m)** 702	**n)** 920	**o)** 105

Welche sind auf Ihrem Rechenstab durch einen Skalenstrich gekennzeichnet, welche nicht?

22. Stellen Sie die folgenden ein- bzw. zweistelligen Zahlen auf den Skalen A bzw. B ein!

a) A 5,8	**b)** B 13,5	**c)** B 21,4	**d)** A 35,0	**e)** B 3,5
f) A 1,02	**g)** B 3,84	**h)** A 15,7	**i)** B 4,25	**k)** B 42,5
l) B 21,3	**m)** A 17,8	**n)** A 17,9	**o)** A 1,78	**p)** B 2,84
q) B 28,7	**r)** A 49,9	**s)** A 9,94	**t)** B 18,7	**u)** A 72,5
v) B 33,3	**w)** A 5,55	**x)** B 8,75	**y)** A 91,4	**z)** B 63

Welche sind auf Ihrem Rechenstab durch einen Skalenstrich gekennzeichnet, welche nicht?

23. Zwischen welchen durch Skalenstriche auf den Skalen A und B gekennzeichneten Ziffernfolgen liegen die folgenden Ziffernfolgen?

a) A 107	**b)** A 254	**c)** B 628	**d)** A 703	**e)** B 311
f) A 472	**g)** B 898	**h)** B 135	**i)** A 297	**k)** B 908

24. Stellen Sie auf der Skale K die folgenden Ziffernfolgen ein!

a) 355	**b)** 210	**c)** 670	**d)** 725	**e)** 872	**f)** 112
g) 107	**h)** 420	**i)** 535	**k)** 905	**l)** 598	**m)** 199

An wieviel Stellen ist die Einstellung möglich?

25. Stellen Sie die folgenden ein- bzw. zwei- bzw. dreistelligen Zahlen auf der Skale K ein!

a) 1,54	**b)** 2,12	**c)** 21,2	**d)** 14,8	**e)** 275	**f)** 198
g) 410	**h)** 4,05	**i)** 1,93	**k)** 5,55	**l)** 317	**m)** 98
n) 7,2	**o)** 30,8	**p)** 189	**q)** 42,5	**r)** 66,6	**s)** 777

26. Stellen Sie die folgenden Ziffernfolgen nacheinander auf allen Skalen Ihres Rechenstabes ein!

a) 131	**b)** 186	**c)** 560	**d)** 475	**e)** 702	**f)** 644
g) 295	**h)** 324	**i)** 485	**k)** 515	**l)** 872	**m)** 995

Die Grundrechenoperationen mit dem Stab

Den auf dem Rechenstab (Skalen C, D und R) abgetragenen Mantissenstrecken sind nur reelle Zahlen z ($1 \leqq z < 10$) zugeordnet. Demnach können beim Rechnen mit diesen Skalen nur Ergebnisse in diesem Intervall ermittelt werden. Auch die Tafel der Zehnerlogarithmen enthält nur Mantissen. Dort wurde die Stellenzahl eines Rechenergebnisses mit Hilfe der Kennzahlen ermittelt. Beim Rechnen mit dem Stab bedienen wir uns eines entsprechenden Verfahrens, der **Methode der abgetrennten Zehnerpotenzen.** Mit Hilfe dieser Methode lassen sich alle reellen Zahlen als Produkt aus einer reellen Zahl z mit $1 \leqq z < 10$ (einstellige Zahl) und einer Zehnerpotenz 10^n mit ganzzahligem n darstellen.

Beispiele:

$835 = 8{,}35 \cdot 10^2$

$2{,}28 = 2{,}28 \cdot 10^0$

$0{,}41 = 4{,}1 \cdot 10^{-1}$

$0{,}00053 = 5{,}3 \cdot 10^{-4}$

$2{,}3^2 = 2{,}3^2 \cdot 10^0$

$23^2 = 2{,}3^2 \cdot 10^2$

$550^2 = 5{,}5^2 \cdot 10^4$

$17^3 = 1{,}7^3 \cdot 10^3$

$97\,000^3 = 9{,}7^3 \cdot 10^{12}$

$\sqrt{644} = \sqrt{6{,}44} \cdot 10^1$

$\sqrt{6440} = \sqrt{64{,}4} \cdot 10^1$

$\sqrt[3]{1{,}5} = \sqrt[3]{1{,}5} \cdot 10^0$

$\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{15} \cdot 10^0$

$\sqrt[3]{150} = \sqrt[3]{150} \cdot 10^0$

$\sqrt[3]{1500} = \sqrt[3]{1{,}5} \cdot 10^1$

$\sqrt{0{,}33} = \sqrt{33} \cdot 10^{-1}$

$\sqrt{0{,}033} = \sqrt{3{,}3} \cdot 10^{-1}$

Untersuchen Sie, ob jeder der in den vorstehenden Beispielen vorkommenden Faktoren vor der Zehnerpotenz eine reelle Zahl z mit $1 \leqq z < 10$ ist! Wie läßt sich in jenen Fällen, wo das nicht zutrifft, die Zahl dennoch in der geforderten Form schreiben?

Mit Hilfe der Methode der abgetrennten Zehnerpotenzen können alle Aufgaben des Multiplizierens, Dividierens, Quadrierens, Quadratwurzelziehens, Kubierens und Kubikwurzelziehens oder aus diesen Operationen zusammengesetzte Aufgaben auf solche mit einstelligen Zahlen reduziert werden.

Beispiele:

$x_1 = 5780 \cdot 0{,}0246 = 5{,}78 \cdot 10^3 \cdot 2{,}46 \cdot 10^{-2} = 5{,}78 \cdot 2{,}46 \cdot 10^1$

$x_2 = \frac{15{,}4}{729} = \frac{1{,}54 \cdot 10^1}{7{,}29 \cdot 10^2} = \frac{1{,}54}{7{,}29} \cdot 10^{-1}$

$x_3 = 0{,}42^2 = (4{,}2 \cdot 10^{-1})^2 = 4{,}2^2 \cdot 10^{-2}$

$x_4 = \sqrt{1800} = \sqrt{18 \cdot 10^2} = \sqrt{18} \cdot 10^1$

$x_5 = 11{,}3^3 = (1{,}13 \cdot 10^1)^3 = 1{,}13^3 \cdot 10^3$

$x_6 = \sqrt[3]{0{,}0518} = \sqrt[3]{51{,}8 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{51{,}8} \cdot 10^{-1}$

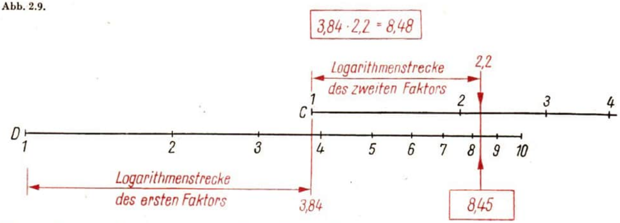
Da alle einstelligen Zahlen die Kennzahl Null haben, bedeutet das Rechnen auf dem Stab mit einstelligen Zahlen das Rechnen mit den dekadischen Logarithmen dieser einstelligen Zahlen. Es gelten demnach für das Stabrechnen die uns bekannten Logarithmengesetze.

Dem **Multiplizieren** auf dem Rechenstab liegt das Logarithmengesetz

(11) $\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$

zugrunde. Statt die Faktoren zu multiplizieren, werden ihre Logarithmen addiert und der zur Logarithmensumme gehörende Numerus ermittelt. Auf dem Stab werden also die entsprechenden Logarithmenstrecken aneinandergesetzt (Abb. 2.9.).

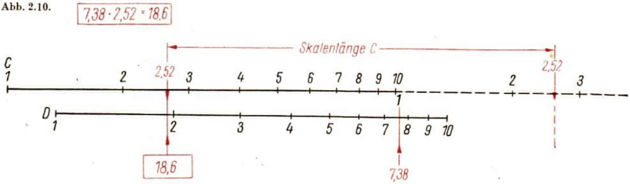
Abb. 2.9.



Hierzu lassen sich die gleich geteilten Doppelleitern A/B bzw. C/D verwenden, jedoch ist C/D wegen der besseren Feineinteilung prinzipiell vorzuziehen.

Wenn durch die Multiplikation der beiden einstelligen Zahlen das Produkt größer als 11,2 wird, ist die **Multiplikation mit Rückschlag** erforderlich (Abb. 2.10.). Um die

Abb. 2.10.



zum Produkt gehörende Zahl auf D ablesen zu können, müßte noch eine zweite Skale D rechts an D angesetzt werden, d. h., die Logarithmenstrecke müßte größer als eine logarithmische Leitereinheit sein, das Produkt wird also zweistellig. Statt dessen kann man auch die Skale C um ihre ganze Länge nach links verschieben, so daß der Endpunkt 10 der Skale C über dem zum ersten Faktor gehörenden Punkt auf der Skale D zu stehen kommt. Der Endpunkt der Logarithmenstrecke auf C liegt über der Skale D, und die Ablesung des zweistelligen Produktes wird möglich. Auch die Multiplikation von mehr als zwei Faktoren läßt sich entsprechend durchführen.

Beispiel:

$$x = 5{,}27 \cdot 166 \cdot 0{,}000\,695$$

Lösung: $x = 5{,}27 \cdot 1{,}66 \cdot 10^2 \cdot 6{,}95 \cdot 10^{-4} = 5{,}27 \cdot 1{,}66 \cdot 6{,}95 \cdot 10^{-2}$

Überschlag: $x \approx 5 \cdot 1{,}6 \cdot 7 \cdot 10^{-2} = 56 \cdot 10^{-2}$

a) C 1 über D 5,27 (geschätzt) einstellen;
b) unter C 1,66 auf D die Zahl 8,75 mit Läufermittelstrich markieren;
c) C 10 über 8,75 bzw. unter Läufermittelstrich einstellen;
d) unter C 6,95 auf D die Zahl 60,8 (geschätzt) ablesen.

$$x = 60{,}8 \cdot 10^{-2}$$
$$x = 0{,}608$$

Dem **Dividieren** auf dem Rechenstab liegt das Logarithmengesetz

(14) $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

zugrunde. Der zu der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem des Divisors gehörende Numerus ist der gesuchte Quotient.
Beim Dividieren von einstelligen Zahlen auf dem Rechenstab ist demnach von der zum Dividenden gehörenden Logarithmenstrecke die Logarithmenstrecke des Divisors zu subtrahieren und der zu dieser Streckendifferenz gehörende Numerus festzustellen. Sind Dividend und Divisor keine einstelligen Zahlen, so sind diese durch die Methode der abgetrennten Zehnerpotenzen auf einstellige Zahlen zurückzuführen.

Erläutern Sie am Beispiel $x = \frac{0{,}00537}{34{,}7}$ die Division mit Hilfe des Rechenstabes!

Ist der einstellige Dividend kleiner als der einstellige Divisor, so liegt C 1 außerhalb der Skale D, die zum Quotienten gehörende Zahl kann also nicht abgelesen werden. Ein Rückschlag ist hierbei aber nicht erforderlich. Vielmehr liest man unter C 10 den 10mal zu großen Quotienten ab.

Erläutern Sie das Dividieren durch eine kleinere Zahl am Beispiel $x = \frac{228}{0{,}053}$!

Da man jede Divisionsaufgabe $x = \frac{a}{b}$ auch als Multiplikationsaufgabe $x = a \cdot \frac{1}{b}$ auffassen kann, läßt sich die Division auch mit Hilfe der Reziprokskale R durchführen. Hierbei ist wieder zwischen den beiden Fällen „ohne Rückschlag“ und „mit Rückschlag“ zu unterscheiden.

Erklären Sie die Division unter Benutzung der Reziprokskale an Hand der Aufgaben $x = \frac{0{,}00537}{34{,}7}$ und $x = \frac{228}{0{,}053}$!

Das **Quadrieren** und das **Quadratwurzelziehen** mit Hilfe des Rechenstabes beruhen auf dem Logarithmengesetz

(22) $\lg a^n = n \cdot \lg a$ (n rational).

Für das Quadrieren gilt wegen $n = 2$

(39) $\lg a^2 = 2 \cdot \lg a$,

und für das Quadratwurzelziehen wegen $n = \frac{1}{2}$

(40) $\lg \sqrt{a} = \lg a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lg a$.

Für das Quadrieren bzw. Quadratwurzelziehen sind demnach zwei logarithmische Leitern besonders geeignet, die in ihren Anfangspunkten übereinstimmen und von denen die eine doppelt so stark vergrößert ist wie die andere. Das trifft sowohl für die Rechenstabskalen A und D (beide auf dem Stabkörper!) als auch für die Rechenstabskalen B und C (beide auf der Zunge!) zu. Der einstelligen Zahl a ist auf D bzw. C wegen des Vergrößerungsfaktors 25 cm die Logarithmenstrecke von der Länge $l = 25 \cdot \lg a$ (in cm) zugeordnet. Für die Logarithmenstrecke von derselben Länge l auf den Skalen A und B gilt wegen des Vergrößerungsfaktors $\frac{25}{2}$ cm

(41) $l = 25 \cdot \lg a = \frac{25}{2} \cdot 2 \lg a = \frac{25}{2} \cdot \lg a^2$ (in cm).

Demnach ist der gleichen Logarithmenstrecke l auf den Skalen A und B die ein- oder zweistellige Zahl a^2 zugeordnet. Da das Quadratwurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens ist, ist dabei genau umgekehrt wie beim Quadrieren zu verfahren. Weil die Quadratwurzeln aller ein- und zweistelligen Zahlen einstellig sind, ist der gleichen Logarithmenstrecke l auf den Skalen D bzw. C die einstellige Zahl $\sqrt{a}$ zugeordnet.

Beim Quadratwurzelziehen aus einer einstelligen (zweistelligen) Zahl ist demnach die Zahl auf der linken (rechten) logarithmischen Leitereinheit der Skalen A bzw. B aufzusuchen und mittels Läuferstrichs die auf den Skalen D bzw. C genau darunterliegende einstellige Zahl abzulesen. Auch hier wird die Methode der abgetrennten Zehnerpotenzen beim Quadratwurzelziehen aus mehrstelligen Zahlen angewendet, jedoch ist dabei zu beachten, daß nur Zehnerpotenzen mit geradzahligem Exponenten abgetrennt werden dürfen, da nur die Quadratwurzeln dieser Zehnerpotenzen wieder ganzzahlige Zehnerpotenzen sind.

Auch das **Kubieren** und **Kubikwurzelziehen** beruht auf dem Logarithmengesetz

(22) $\lg a^n = n \cdot \lg a$ (n rational),

und zwar ist beim Kubieren $n = 3$ und beim Kubikwurzelziehen $n = \frac{1}{3}$. Man verwendet hierfür die Skalen D und K.

Aufgaben

Lösen Sie auf dem Rechenstab die folgenden Aufgaben!

27. S. 31, Nr. **5**

28. S. 31, Nr. **6**

29. S. 31, Nr. **8**

30. S. 31, Nr. **10 b), k), p)**

31. S. 32, Nr. **12 a), b), i), k), m), o), p), q), r)**

32. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite mit
a) 3,5 cm, **b)** 37,2 mm, **c)** 500 m, **d)** 0,782 m, **e)** 0,002 03 m,
f) 17,8 dm, **g)** 0,0294 cm, **h)** 0,000 682 m, **i)** 15 000 m
gegeben ist?

33. Welche Würfelvolumen würden sich ergeben, wenn die in Aufgabe **6** angegebenen Längen die Kanten dieser Würfel wären?

34. Rechnen Sie die Ergebnisse von **6** und **7** in die jeweils nächst größere und kleinere Flächen- bzw. Volumenmaßeinheit um!

35. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist mit
a) 13,8 mm², **b)** 0,790 m², **c)** 0,0368 dm², **d)** 10,0 cm², **e)** 505 mm²,
f) 0,0278 dm², **g)** 0,278 cm², **h)** 0,0004 m², **i)** 580 cm², **k)** 128 000 mm²
gegeben. Wie groß ist jeweils eine Quadratseite?

36. Das Volumen eines Würfels ist mit
a) 572 cm³, **b)** 28,7 m³, **c)** 5,51 dm³, **d)** 0,378 cm³,
e) 0,00708 m³, **f)** 0,0972 mm³, **g)** 0,000 053 m³, **h)** 1008 dm³
gegeben. Wie groß ist jeweils die Kante, die Grundfläche?

2.5. Anwendungen der logarithmischen Rechenhilfsmittel

Aufgaben zur Wiederholung

1. Lösen Sie noch einmal Aufgabe **8** von Seite 31!

2. Berechnen Sie
a) $(a + b)\ (c + d)$, **b)** $(a + b)\ (c + d)\ (e + f)$, **c)** $(a + b)\ (c + d)\ (e + f)\ (g + h)$!

3. Wie ändern sich die Ergebnisse in den Aufgaben **2a** bis **2c**, wenn jeweils die zweiten Glieder der algebraischen Summen gleich sind?

4. Angenommen, das zweite Glied in Aufgabe **3** ist sehr klein gegenüber dem ersten Glied (etwa 1% des ersten Gliedes). Beurteilen Sie die Größe der einzelnen Summanden der für die Produkte erhaltenen algebraischen Summe!

Hinweis: Berechnen Sie $\left(a + \frac{a}{100}\right)\left(b + \frac{b}{100}\right)$ bzw. $\left(a + \frac{a}{100}\right)\left(b + \frac{b}{100}\right)\left(c + \frac{c}{100}\right)$, und überlegen Sie dann, welche Glieder des ausmultiplizierten Produktes sehr klein gegenüber den größten Gliedern sind!

5. Wie groß ist der Unterschied zwischen
a) $9{,}9^2$ und 10^2, **b)** $9{,}99^2$ und 10^2, **c)** $39{,}9 \cdot 49{,}8$ und $40 \cdot 50$,
d) 10,1 und 10^2, **e)** $102 \cdot 504$ und $100 \cdot 500$?

6. Untersuchen Sie den Einfluß eines kleinen Fehlers auch für dritte Potenzen und für Produkte aus drei und vier Faktoren an selbstgewählten Aufgaben! Benutzen Sie dazu auch die Ergebnisse von Aufgabe **4**!

7. Welche Lösungswege können Sie beim Ausrechnen
a) des Quotienten $\frac{a \cdot b}{c}$,

b) des Produktes $a \cdot b \cdot c^2$ bzw. $a \cdot b \cdot c$,

c) des Quotienten $\frac{a \cdot b^2}{c}$ bzw. $\frac{a \cdot b}{c}$

einschlagen?

8. Jemand rechnet für $x = 3 \cdot 4 \cdot 5^2$ folgendermaßen

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60; \quad 60^2 = 3600.$

Was ist daran falsch? Wie lautet das richtige Ergebnis?

9. Erläutern Sie die Logarithmengesetze (11), (14), (22) auf den Seiten 24 bzw. 26 bzw. 27 an selbstgewählten Zahlenbeispielen!

10. Begründen Sie, daß $\lg\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\lg\left(\frac{4}{\pi}\right)$ und allgemein $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = -\lg\left(\frac{b}{a}\right)$ ist!

Die Bedeutung der logarithmischen Rechenhilfsmittel

Die logarithmischen Rechenhilfsmittel Rechenstab, Logarithmentafel (Tafel der Mantissen der dekadischen Logarithmen) und logarithmisches Papier ermöglichen die einfache, schnelle und sichere Durchführung von solchen Berechnungen in der Schule, der Volkswirtschaft und der Wissenschaft, in denen die logarithmisch ausführbaren Rechenoperationen der zweiten und dritten Stufe vorkommen. Dabei sind grundsätzlich alle diese Aufgaben oder Aufgabenserien mit jedem einzelnen oder auch unter Verwendung von mehreren logarithmischen Rechenhilfsmitteln lösbar. Im allgemeinen ist jedoch, je nach den Besonderheiten der Aufgabenstellung, die Verwendung eines der drei Rechenhilfsmittel besonders zweckmäßig, so daß ihre bloße Beherrschung für die praktischen Erfordernisse nicht ausreicht. Vielmehr ist bei jeder Aufgabe zunächst zu entscheiden, welches der drei Rechenhilfsmittel das gewünschte Resultat mit der erforderlichen Genauigkeit möglichst sicher und schnell und unter geringstem Aufwand liefert.
Als typisches Anwendungsgebiet logarithmischer Papiere haben wir die Nomographie kennengelernt. Sie findet dann Verwendung, wenn ein Überblick über die Lösungen sämtlicher nur denkbarer oder zumindest sehr zahlreicher Aufgaben zu einem bestimmten Problem erforderlich ist.
Während die sinnvollen Anwendungsmöglichkeiten des logarithmischen Papiers durch die Eigenschaften des Nomogramms scharf begrenzt sind, gehen, schon wegen ihrer engen Verwandtschaft, die sinnvollen Anwendungsmöglichkeiten von Rechenstab und Logarithmentafel ineinander über.
Zweifellos weist der Rechenstab gegenüber der Logarithmentafel eine Reihe von deutlichen Vorteilen auf: Der Stab ist handlich, leicht transportierbar, sofort betriebsbereit und unmittelbar am Arbeitsplatz einsetzbar. Diese Eigenschaften treffen für die Logarithmentafel in dem Maße nicht zu. Deshalb hat sich der Rechenstab in fast allen Bereichen der Praxis gegenüber der Logarithmentafel völlig durchgesetzt.
Allerdings ist er der Logarithmentafel in bezug auf die Genauigkeit der Ergebnisse unterlegen. Während auf dem Stab häufig schon die dritte Ziffer des Ergebnisses geschätzt werden muß, ist aus der Logarithmentafel die dritte Ziffer immer und — meist durch Anwendung der Interpolation — auch die vierte Ziffer zu entnehmen. Wann die geringere Rechenstabgenauigkeit genügt und wann die größere „Tafelgenauigkeit“ erforderlich ist, ergibt sich aus der jeweiligen Aufgabenstellung.

Genauigkeitsgrenzen beim Rechnen mit gerundeten Zahlen

Alle in der Praxis zu messenden Größen sind nicht absolut genau ermittelbar. Die Genauigkeit der Messung hängt hauptsächlich von den verwendeten Meßgeräten und Meßmethoden, vom Meßobjekt und nicht zuletzt von der Sorgfältigkeit und vom Können des Messenden ab. Die Meßgrößen enthalten demnach gerundete Zahlen. Beim Rechnen mit gerundeten Zahlen wird man zwangsläufig ungenaue Rechenergebnisse erhalten.

Beispiel 1:

Die Fläche A einer rechteckigen Blechtafel mit
$a = 455$ mm und $b = 373$ mm ist zu ermitteln.

$A = a \cdot b$

$A = 455 \text{ mm} \cdot 373 \text{ mm}$

Durch schriftliches Multiplizieren erhält man das Ergebnis $A = 169\,715 \text{ mm}^2$. Die Genauigkeit auf sechs Ziffern ist aber nur vorgetäuscht, wie folgende Überlegung zeigt: Länge und Breite der Blechtafel sind dreiziffrig auf mm genau angegeben, d. h., Bruchteile des mm sind nicht erfaßt, was beim vorliegenden praktischen Sachverhalt auch nicht sinnvoll wäre. Für die wahre Länge $\bar{a}$ bzw. Breite $\bar{b}$ gilt also

$454{,}5 \text{ mm} \leqq \bar{a} \leqq 455{,}5 \text{ mm}$ oder $\bar{a} = (455 \pm 0{,}5)$ mm bzw.

$372{,}5 \text{ mm} \leqq \bar{b} \leqq 373{,}5 \text{ mm}$ oder $\bar{b} = (373 \pm 0{,}5)$ mm.

Die Länge a und die Breite b sind mit dem hier gleichen größtmöglichen **absoluten Fehler** von $\pm 0{,}5$ mm behaftet. Wie sich dieser Fehler beim Multiplizieren der beiden Zahlenwerte fortpflanzt, soll allgemeingültig für die Multiplikation zweier mit gleichem positiven oder negativen absoluten Fehler Δx behafteten Zahlen a und b untersucht werden. Es gilt

(42) $p = (a + \Delta x)(b + \Delta x) = ab + \Delta x\,(a + b) + \Delta x^2.$

Da Δx^2 bei kleinerem Fehler Δx vernachlässigt werden kann, beträgt der absolute Fehler Δp des Produktes

(43) $\Delta p = \Delta x\,(a + b)\,,$

in diesem Beispiel also $\Delta p = \pm 0{,}5 \cdot 828 \text{ mm}^2 = \pm 414 \text{ mm}^2$. Demnach gilt für die Fläche A der rechteckigen Blechtafel

(44) $169\,301 \text{ mm}^2 \leqq A \leqq 170\,129 \text{ mm}^2.$

Es ist also nur sinnvoll, das Ergebnis dreiziffrig anzugeben, also

(45) $A = 170\,000 \text{ mm}^2$

oder besser

(46) $A = 17{,}0 \text{ dm}^2$

zu schreiben.

Demnach reicht die Genauigkeit des Rechenstabes für diese Aufgabe völlig aus.

Beispiel 2:

Es ist die Masse m eines quaderförmigen Graugußblockes mit $a = 455$ mm, $b = 373$ mm, $c = 298$ mm und $\varrho = 7{,}25\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ zu ermitteln.

$m = V \cdot \varrho$

$m = a \cdot b \cdot c \cdot \varrho$

$m = 4{,}55\ \mathrm{dm} \cdot 3{,}73\ \mathrm{dm} \cdot 2{,}98\ \mathrm{dm} \cdot 7{,}25\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$

Einheitenkontrolle: $\mathrm{dm \cdot dm \cdot dm \cdot kg \cdot dm^{-3} = kg}$ (im Kopf auszuführen!)

Überschlag: $m \approx 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7\ \mathrm{kg} = 420\ \mathrm{kg}$

Da nicht anders angegeben, ist für alle vier Faktoren der größtmögliche absolute Fehler $\Delta x = \pm\, 0{,}005$.

Für den absoluten Fehler Δp des Produktes aus den vier Faktoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ mit dem gleichen absoluten Fehler Δx gilt wegen

(47) $$(a + \Delta x)(b + \Delta x)(c + \Delta x)(d + \Delta x) = abcd + \Delta x\,(abc + abd + acd + bcd) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)\,\Delta x^2 + (a + b + c + d)\,\Delta x^3$$

und bei sehr kleinem Δx gegenüber den Faktoren a, b, c und d

(48) $$\Delta p = \Delta x\,(abc + abd + acd + bcd)\,.$$

Im Beispiel 2 erhält man demnach:

$$\Delta m = \pm\, 0{,}005 \cdot (4{,}55 \cdot 3{,}73 \cdot 2{,}98 + 4{,}55 \cdot 3{,}73 \cdot 7{,}25 + 4{,}55 \cdot 2{,}98 \cdot 7{,}25 + 3{,}73 \cdot 2{,}98 \cdot 7{,}25)\ \mathrm{kg} = \pm\, 1{,}76\ \mathrm{kg}.$$

Das Ergebnis für m ist laut Überschlag dreistellig, der absolute Fehler beeinflußt die dritte Ziffer um rund $\pm\, 2$. Demnach genügt ebenfalls Rechenstabgenauigkeit. Man erhält auf dem Stab $m = 367$ kg.

Aus den beiden Beispielen ist zu entnehmen, daß im allgemeinen ein Produkt nur auf so viel Ziffern genau angegeben werden kann, wie seine Faktoren Ziffern enthalten. Entsprechendes gilt, wie hier nicht nachgewiesen werden kann, auch für solche Berechnungen, in denen dividiert, potenziert oder radiziert wird, bzw. bei solchen Berechnungen, in denen verschiedene dieser Rechenoperationen anzuwenden sind.

Sind in den einzelnen Ausgangswerten verschieden viele Ziffern angegeben, so wird die Ungenauigkeit noch größer. Wäre im Beispiel 2 die Dichte von Grauguß mit $7{,}2\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ statt mit $7{,}25\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ angegeben worden, so hätte sich der Fehler dadurch fast verdreifacht! Die Angabe von drei Ziffern wäre dann gerade noch sinnvoll gewesen. Dagegen hätte eine gleichzeitige Erhöhung der Längenmeßgenauigkeit um eine weitere Ziffer (Länge, Breite und Höhe vierziffrig) nicht mehr eine auf vier Ziffern genaue Angabe des Ergebnisses gerechtfertigt.

Bei verschieden vielen Ziffern in den Ausgangswerten kann das Ergebnis demnach nur auf die durchschnittliche Ziffernzahl genau angegeben werden.

Nicht jede in Berechnungen vorkommende Zahl ist jedoch ungenau. Beispielsweise bedeutet die in der Flächenformel für das Dreieck

(49) $$A = \frac{g \cdot h_g}{2}$$

als Divisor vorkommende Zahl 2 keineswegs nur eine gültige Ziffer, denn jedes Parallelogramm mit der Fläche $A = g \cdot h_g$ kann in zwei kongruente Dreiecke zerlegt werden, von denen dann jedes g e n a u halb so groß ist wie die Fläche des Parallelogramms.

Aufgaben

11. Stellen Sie fest, auf wieviel Ziffern genau das Ergebnis der folgenden Aufgaben sinnvoll angegeben werden kann:

a) $A = \frac{\pi}{4} \cdot 3{,}15^2\ \mathrm{m}^2$ **b)** $m = \frac{1}{3} \cdot 73{,}85 \cdot 55{,}24 \cdot 83{,}36 \cdot 7{,}86\ \mathrm{g}$

c) $p_2 = \frac{288{,}8 \cdot 2158 \cdot 355{,}5}{273{,}2 \cdot 2234} \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^2}$ **d)** $V = \frac{4\pi}{3} \cdot 28{,}7^3\ \mathrm{cm}^3$

e) $A = \frac{20 + 13{,}5}{2} \cdot 4{,}1\ \mathrm{cm}^2$ **f)** $V = \frac{\pi}{4} \cdot 185{,}5^2 \cdot 27{,}2\ \mathrm{cm}^3$

g) $A = 1{,}28^2 + \frac{\pi}{8} \cdot 1{,}28^2\ \mathrm{m}^2$ **h)** $V = \frac{\pi}{3} \cdot 17{,}1^2 \cdot 5{,}8\ \mathrm{cm}^3$

Wo genügt Rechenstabgenauigkeit, wo ist Tafelgenauigkeit erforderlich?
Welche der vorkommenden einziffrigen Zahlen sind offensichtlich genaue Zahlen?

12. Der Flächeninhalt A eines Rechtecks ist mit $13{,}8\ \mathrm{cm}^2$ gegeben, die Seite a mit 5,2 cm.
a) Wie groß ist die andere Seite mindestens bzw. höchstens, wenn der absolute Fehler für beide Werte nicht näher bekannt ist? Auf wieviel Ziffern ist die Maßangabe für die gesuchte Seite sinnvoll?
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn
b) $A = 13{,}8\ \mathrm{cm}^2$; $a = 5{,}20$ cm,
c) $A = 14\ \mathrm{cm}^2$; $a = 5{,}2$ cm (A wurde auf 2 Stellen gerundet!)
gegeben sind? Auf wieviel Ziffern läßt sich das Ergebnis genau angeben?

13. Die Diagonale eines Quadrates ist mit 34 mm bzw. mit 34,0 m vermessen worden. Wie groß ist jeweils die Quadratseite bzw. die Quadratfläche mindestens, wie groß ist sie höchstens? Hinweis: Tafel 7 bzw. Tafel 1 benutzen!

14. **a)** Berechnen Sie $2{,}00^{10}$ logarithmisch und durch Ausmultiplizieren!
b) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse!

Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke unter Benutzung von Rechenstab und Logarithmentafel

Kommen in einer Aufgabe verschiedene logarithmisch durchführbare Rechenoperationen vor, so bietet die Benutzung logarithmischer Rechenhilfsmittel besondere Vorteile. Deswegen stellen solche Aufgaben auch das hauptsächliche Anwendungsgebiet von Rechenstab und Logarithmentafel dar.

1. Die Verbindung von Multiplikation und Division

Soll der Ausdruck

(50) $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e} = \frac{Z}{N}$

mit Hilfe von dekadischen Logarithmen berechnet werden, so gilt unter Benutzung der Logarithmengesetze (11) und (14)

(51) $\lg x = \lg Z - \lg N = (\lg a + \lg b + \lg c) - (\lg d + \lg e)$

Beispiel 3:

$$p = \frac{288{,}8 \cdot 2158 \cdot 355{,}5}{273{,}2 \cdot 2234}\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-2} \text{ ist zu berechnen.}$$

Überschlag: $p = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^2 = 400$

Lösung: $\lg p = (\lg 288{,}8 + \lg 2158 + \lg 355{,}5) - (\lg 273{,}2 + \lg 2234)$

Wir verwenden folgendes Schema:
links die Numeri (N.), rechts die dekadischen Logarithmen (L.).

N.	L.		
288,8	2,4606		$(D = 15;\ n = 8;\ d = 1{,}5 \cdot 8 = 12)$
2158	3,3341	+	$(D = 21;\ n = 8;\ d = 2{,}1 \cdot 8 \approx 17)$
355,5	2,5508	+	$(D = 12;\ n = 5;\ d = 6)$
(Zähler)	8,3455		
273,2	2,4365		$(D = 16;\ n = 2;\ d \approx 3)$
2234	3,3491	—	$(D = 19;\ n = 4;\ d \approx 8)$
363	2,5599		

Die Interpolation ist hier sinnvoll, da lauter vierziffrige Zahlen gegeben sind. Ergebnis ebenfalls vierziffrig.

Ergebnis: $p = 363{,}0\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-2}$

Ein zusammengesetzter Ausdruck wie (50) läßt sich auch sehr einfach auf dem Stab berechnen. Hierbei führt man abwechselnd eine Division und eine Multiplikation aus.

Beispiel 4:

Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kreissektors, dessen Radius $r = 5{,}7$ cm und dessen Bogen $b = 0{,}83$ dm ist?

Lösung: x = Zentriwinkel (in °) $\quad d = 11{,}4$ cm; $b = 8{,}3$ cm

$$x : 360 = 8{,}3 : \pi \cdot 11{,}4$$

$$x = \frac{360 \cdot 8{,}3}{\pi \cdot 11{,}4} = \frac{3{,}6 \cdot 8{,}3}{\pi \cdot 1{,}14} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}$$

Überschlag: $x \approx \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 1} \cdot 10^1 = 80$.

Stabrechnung: C π über D 3,60 (nicht ablesen unter C 1!);
Läuferstrich über C 8,3 (nicht ablesen unter Läuferstrich!);
C 1,14 unter (festgehaltenem!) Läuferstrich
und unter C 1 auf D 8,34 ablesen.

$$x = 8{,}34 \cdot 10^1$$
$$x = 83{,}4$$

Ergebnis: Der Zentriwinkel beträgt 83,4°.

2. *Die Verbindung von Multiplikation und Division mit dem Potenzieren und Radizieren*

Die aus (50) erhaltene Beziehung (51) gilt auch, wenn einige oder alle Faktoren a, b, c, d, e Potenzen mit rationalem Exponenten sind. Ist etwa $a = \bar{a}^n$, $b = \sqrt[m]{\bar{b}}$, $c = \sqrt[r]{\bar{c}^s}$, $d = \bar{d}^p$ und $e = \bar{e}^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{\bar{e}}$, so folgt aus (51)

$$\lg x = \left(n \cdot \lg \bar{a} + \frac{1}{m} \cdot \lg \bar{b} + \frac{s}{r} \cdot \lg \bar{c}\right) - \left(p \cdot \lg \bar{d} + \frac{1}{q} \cdot \lg \bar{e}\right). \tag{52}$$

Beispiel 5:

Wie groß ist das Volumen eines Tetraeders (Pyramide mit vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Begrenzungsflächen, Abb. 2.11.) mit der Kantenlänge $s = 13{,}5$ cm?

$$V_{\text{Pyr.}} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

Für Tetraeder gilt:

$$A = A_{\text{gleichseitiges Dreieck}} = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{s}{3}\sqrt{6}$$

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{s}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{s^3}{12} \cdot \sqrt{2}$$

$$V_T = \frac{13{,}5^3 \cdot \sqrt{2}}{12}\ \text{cm}^3$$

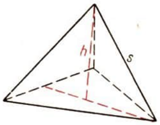


Abb. 2.11.

Überschlag: $V_T \approx 14^2 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^3 \approx 200 \cdot 1{,}4 = 280\ \text{cm}^3$

$$\lg V_T = 3 \cdot \lg 13{,}5 + \frac{1}{2} \cdot \lg 2 - \lg 12$$

N.	L_1	L_2	
$13{,}5^3$	$1{,}1303 \cdot 3$	3,3909	
$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	$0{,}3010 \cdot \frac{1}{2}$	0,1505	+
Zähler		3,5414	
12		1,0792	−
290		2,4622	

$$V_T = 290\ \text{cm}^3$$

Ergebnis: Das Volumen des Tetraeders beträgt 290 cm³.

Während alle Aufgaben vom Typ (52) mit Hilfe der Logarithmentafel nach dem gleichen Schema gelöst werden können, ergeben sich für Aufgaben dieses Typs auf dem Rechenstab je nach den speziellen Gegebenheiten in der Aufgabenstellung unterschiedliche oder auch keine Lösungswege. Letzteres ist dann der Fall, wenn die Wurzelexponenten größer als 3, aber keine Vielfachen von 2 bzw. 3 sind. Auch bei Potenzexponenten größer als 3 wird das Ausrechnen mit dem Stab langwierig und ist nicht üblich. Die Benutzung des Stabes wird hier deshalb auf die Potenzexponenten 2, 3, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ beschränkt, für die logarithmische Leitern auf dem Stab vorhanden sind.

Die Verbindung von Multiplizieren, Dividieren und Quadrieren auf dem Stab

Da beim Quadrieren von dem Skalenpaar C/D zum Skalenpaar A/B übergegangen wird, sind die Lösungen solcher Aufgaben auf dem Stab ohne Ablesen von Zwischenergebnissen nur durch Benutzung des Skalenpaares A/B möglich, worunter allerdings die Ablesegenauigkeit leidet. Alle Berechnungen sind dann mit dem Quadrieren zu beginnen.

Beispiel 6:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines kreisförmigen Verschlußdeckels mit dem Durchmesser $d = 575$ mm?

Lösung: $A_{\text{Kreis}} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$

$A_{\text{Kreis}} = \frac{\pi}{4} \cdot (5{,}75 \cdot 10^2)^2 \text{ mm}^2 = \frac{5{,}75^2 \cdot \pi}{4} \cdot 10^4 \text{ mm}^2$

Überschlag: $A_{\text{Kreis}} \approx \frac{\pi}{4} \cdot 6^2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 = 360\,000 \text{ mm}^2$

Stabrechnung:

a) mittlerer Läuferstrich über D 5,75 (nichts ablesen!);
b) B 4,00 unter mittleren Läuferstrich (nichts ablesen!);
c) über B π auf A 26,0 ablesen.
$A = 26 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 = 260\,000 \text{ mm}^2$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Kreises beträgt 26,0 dm².

Besonders einfach ist diese Aufgabe mit Hilfe eines **Dreistrichläufers** lösbar. Stellt man den mittleren Läuferstrich über den gegebenen Durchmesser auf Skale D, so steht der linke Läuferstrich über dem gesuchten Flächeninhalt auf Skale A, weil die logarithmische Strecke zwischen den beiden Läuferstrichen gleich $\lg\left(\frac{4}{\pi}\right) \cdot 12{,}5$ cm ist.

Die Verbindung von Multiplizieren, Dividieren und Quadratwurzelziehen auf dem Stab

Beim Quadratwurzelziehen wird umgekehrt vom Skalenpaar A/B zum Skalenpaar C/D übergegangen. Mit dem Radizieren ist zu beginnen und dann auf dem Skalenpaar C/D mit der Multiplikation und Division fortzufahren.

Beispiel 7:

Wie groß ist die Höhe des Tetraeders aus Beispiel 5?

Lösung: $h_{\text{Tetraeder}} = \frac{s}{3} \cdot \sqrt{6}$

$h_{\text{Tetraeder}} = \frac{13{,}5}{3} \cdot \sqrt{6} \text{ cm} = \frac{\sqrt{6} \cdot 1{,}35}{3} \cdot 10^1 \text{ cm}$

Überschlag: $h_{\text{Tetraeder}} \approx \frac{2 \cdot 1{,}5}{3} \cdot 10 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Stabrechnung:

a) mittlerer Läuferstrich über A 6,00;
b) C 3,00 unter mittleren Läuferstrich;
c) unter C 1,35 auf D 1,105 ablesen.
$h_{\text{Tetraeder}} = 1{,}105 \cdot 10$ cm
$h_{\text{Tetraeder}} = 11{,}0$ cm (Abrundung: Gerade-Zahl-Regel)

Ergebnis: Die Höhe des Tetraeders beträgt 11,0 cm.

Potenzieren oder Radizieren mit zusammengesetzter Basis (Radikanden) auf dem Stab

Zwischen Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren kann außer dem in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Fall noch ein anderer Zusammenhang existieren, indem ein Produkt oder ein Quotient Basis der zu errechnenden Potenz ist.

Beispiel 8:

$$x = \left(\frac{\sqrt{7{,}28} \cdot 0{,}0254}{0{,}581}\right)^n \qquad n = 2;\ n = 3$$

Lösung: Entsprechendes Vorgehen wie im vorigen Beispiel, anschließend Kubieren (bei $n = 3$) mit Hilfe von Skale K oder Quadrieren (bei $n = 2$) mit Hilfe von Skale A.

Ist der Exponent n gleich $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$, so ist das für die Basis auf dem Skalenpaar C/D ermittelte Ergebnis abzulesen und auf den Skalen K (bei $n = \frac{1}{3}$) oder A (bei $n = \frac{1}{2}$) wieder aufzusuchen (Stellenzahlregel beachten!) und dann mit Hilfe des Läufers auf D abzulesen.
Die Ablesung eines Zwischenergebnisses ist für $n = \frac{1}{2}$ vermeidbar, wenn alle vorhergehenden Operationen auf den Skalen A und B durchführbar sind.

Aufgaben, in denen Potenzieren und Radizieren mit Multiplizieren und Dividieren verknüpft sind

Bei Aufgaben von der Form

$$(53)\quad x = \frac{a \cdot b^n \cdot \sqrt[m]{c}}{\sqrt[n]{d^m} \cdot e^m} \qquad n, m = 2;\ n, m = 3$$

wird ebenfalls das Ablesen von Zwischenergebnissen notwendig. Um auf dem genaueren Skalenpaar C/D rechnen zu können, ist es notwendig, die vorkommenden Potenzen zweiten bzw. dritten Grades abzulesen. Sodann ist die Stabrechnung mit dem Quadrat- bzw. Kubikwurzelziehen zu beginnen.

Beispiel 9:

Das Volumen des Tetraeders aus Beispiel 5 ist auf dem Stab zu berechnen.

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{13{,}5^3 \cdot \sqrt{2}}{12}\ \text{cm}^3 = \frac{1{,}35^3 \cdot \sqrt{2}}{1{,}2} \cdot 10^2\ \text{cm}^3$$

Stabrechnung: a) Läuferstrich über D 1,35;
b) unter Läuferstrich K 2,46 ablesen.
$V_T = \frac{2{,}46 \cdot \sqrt{2}}{1{,}2} \cdot 10^2\ \text{cm}^3$
c) Läuferstrich über A 2,00;
d) C 1,2 unter Läuferstrich;
e) unter C 2,46 ablesen D 2,90.
$V_T = 2{,}9 \cdot 10^2\ \text{cm}^3$

Ergebnis: Das Volumen des Tetraeders beträgt 290 cm³.

3. Unterbrochene logarithmische Rechnung

Kommen in Aufgaben, die mit Hilfe von Logarithmentafel und Rechenstab gelöst werden sollen, die Grundrechenarten der ersten Stufe vor, so ist eine durchgehende logarithmische Rechnung nicht möglich. Ist etwa folgender Ausdruck

$$(54)\quad x = \frac{a \cdot \sqrt{b} - c^3 \cdot d}{e + \sqrt[3]{f} \cdot g^2} = \frac{Z}{N}$$

zu berechnen, so können nur die Teilprodukte $p_1 = a \cdot \sqrt{b}$, $p_2 = c^3 \cdot d$ und $p_3 = \sqrt[3]{f} \cdot g^2$ mit dem Stab bzw. der Logarithmentafel ermittelt werden. Nachdem dann durch Subtraktion bzw. Addition $Z = p_1 - p_2$ und $N = e + p_3$ bestimmt sind, läßt sich $x = \frac{Z}{N}$ wiederum mit logarithmischen Hilfsmitteln berechnen. Man bezeichnet dieses Verfahren auch als **unterbrochene logarithmische Rechnung.**

Für (54) ergibt sich bei Benutzung der Logarithmentafel folgender Lösungsweg:

1. $\lg p_1 = \lg a + \frac{1}{2} \cdot \lg b$, p_1 wird bestimmt
2. $\lg p_2 = 3 \lg c + \lg d$, p_2 wird bestimmt
3. $Z = p_1 - p_2$ wird bestimmt
4. $\lg p_3 = \frac{1}{3} \cdot \lg f + 2 \lg g$, p_3 wird bestimmt
5. $N = e + p_3$ wird bestimmt
6. $\lg x = \lg Z - \lg N$, x wird bestimmt

Beispiel 10:

$$x = \frac{7{,}32^3 \cdot \sqrt{1025} + 82700 \cdot \sqrt[3]{0{,}597}}{0{,}0274 \cdot \sqrt[3]{355^4} - 18{,}5^2 \cdot \sqrt{0{,}0483} - 55{,}5}$$

Führen Sie die Berechnung selbst durch!

Sollen Aufgaben, in denen Additionen bzw. Subtraktionen vorkommen, auf dem Rechenstab gelöst werden, so ist zwar im allgemeinen kein Berechnungsschema erforderlich, aber einer übersichtlichen und mathematisch einwandfreien Schreibweise ist besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Beispiel 11:

Ein kegelförmiges Turmdach mit 6,84 m Grundkreisdurchmesser und 7,56 m Höhe soll neu mit Schiefer belegt werden. Wieviel Quadratmeter Schieferplatten muß man anfahren, wenn man einen Aufschlag von 34 % zu der zu belegenden Fläche für Verschnitt und Bruch in Rechnung stellt?
Zur Veranschaulichung diene die Überlegungsfigur in Abbildung 2.12.

$M_{\text{Dach}} = \pi r s$

$r = \frac{d}{2} = 3{,}42 \text{ m}; \; s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{3{,}42^2 + 7{,}56^2}$

$M_{\text{Dach}} = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \pi \cdot 3{,}42 \cdot \sqrt{3{,}42^2 + 7{,}56^2}$

Menge der benötigten Schieferplatten: $x \text{ m}^2$

$x \text{ m}^2 : M = 100\,\% : 66\,\%$

$x \text{ m}^2 = \frac{100}{66} \cdot M = \frac{100}{66} \cdot \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$x = \frac{100}{66} \cdot \pi \cdot 3{,}42 \cdot \sqrt{3{,}42^2 + 7{,}56^2}$

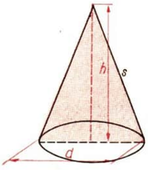


Abb. 2.12.

Überschlag: $x \approx 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{10 + 50} \approx 18 \cdot \sqrt{64} = 144$

Stabrechnung: $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & 3{,}42^2 = 11{,}7 \\ \text{b)} & 7{,}56^2 = 57{,}2 \end{array}\right\} +$ Diese Quadrate sind schriftlich zu addieren.

$\quad 68{,}9$

c) B 100 unter A 68,9;
d) Läuferstrich über C 3,42 (nichts ablesen!);
e) C 66 unter (festgehaltenem!) Läuferstrich (nichts ablesen!);
f) Läuferstrich über C π und auf D 1,35 ablesen.

Ergebnis: Es werden 135 m^2 Schieferplatten benötigt.

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke auf dem Stab oder mit Logarithmentafel!

15. **a)** $\frac{23,4 \cdot 0,827}{0,0573}$ **b)** $\frac{0,0728 \cdot 11,4}{0,973}$ **c)** $\frac{567 \cdot 811}{5,67}$ **d)** $\frac{238,5 \cdot 0,5384}{7777}$

e) $\frac{0,387 \cdot 5,426}{13,8}$ **f)** $\frac{5120 \cdot 0,543}{0,003\,71}$ **g)** $\frac{7,862 \cdot 0,3503}{6,528}$ **h)** $\frac{50\,000 \cdot 0,237}{480,2}$ **i)** $\frac{11,44 \cdot 8,502}{0,0358}$

Benutzen Sie auch die Reziprokskale R!

16. **a)** $\frac{13,8 \cdot 538 \cdot 2000}{5,21 \cdot 30,4}$ **b)** $\frac{44,7 \cdot 0,0522 \cdot 3,01}{0,371 \cdot 17,4}$ **c)** $\frac{0,587 \cdot 0,000\,243 \cdot 2,58}{722 \cdot 458}$

d) $\frac{532 \cdot 82,7 \cdot 1024}{0,537 \cdot 63,4}$ **e)** $\frac{0,2468 \cdot 0,035\,79 \cdot 0,000\,528\,3}{621,7 \cdot 3,528}$ **f)** $\frac{0,11 \cdot 18,4 \cdot 0,053\,74}{52,82 \cdot 0,781}$

g) $\frac{0,237 \cdot 44,8}{15,33 \cdot 0,0027}$ **h)** $\frac{5,874 \cdot 73,75}{604,6 \cdot 5483}$ **i)** $\frac{218 \cdot 0,004\,03 \cdot 53,8}{72,4 \cdot 4,28 \cdot 0,000\,020\,1}$

k) $\frac{21,8 \cdot 154 \cdot 1001}{8,72 \cdot 0,104 \cdot 0,007\,82}$

17. **a)** $\frac{7,44}{18,3 \cdot 2,74}$ **b)** $\frac{82\,200}{135 \cdot 702}$ **c)** $\frac{0,0438}{2,09 \cdot 0,747}$

d) $\frac{0,000\,527 \cdot 35,2}{12,1 \cdot 0,354 \cdot 0,002\,84}$ **e)** $\frac{13,8 \cdot 20\,000}{100 \cdot 50,0 \cdot 27,6}$

Benutzen Sie auch die Reziprokskale!

18. **a)** Bei welchen der vorstehenden Aufgaben genügt Stabgenauigkeit, bei welchen nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!
b) Welche Aufgabe aus **15** (aus **17**) ist ohne Benutzung von Stab oder Logarithmentafel lösbar?

19. Ein Rechteck hat die Seiten a_1 und b_1. Ein zu diesem flächeninhaltsgleiches Rechteck hat die Seite b_2. Wie groß ist jeweils die andere Rechteckseite?
a) $a_1 = 13,5$ cm; $b_1 = 8,2$ dm; $b_2 = 0,37$ dm
b) $a_1 = 450$ m; $b_1 = 0,284$ km; $b_2 = 1$ km
c) $a_1 = 253$ mm; $b_1 = 77,7$ cm; $b_2 = 1,89$ m

20. Ein Quader hat die Abmessungen a_1, b_1 und c_1. Ein volumengleicher Quader hat die Abmessungen a_2, b_2 und c_2.
a) $a_1 = 33,4$ cm; $b_1 = 7,21$ dm; $c_1 = 555$ mm
$a_2 = 0,982$ m; $b_2 = 7,21$ cm; $c_2 = x_1$
b) $a_1 = 15,4$ mm; $b_1 = 0,272$ m; $c_1 = x_2$
$a_2 = 3,08$ cm; $b_2 = 136$ mm; $c_2 = 17,99$ cm
c) $a_1 = 144$ cm; $b_1 = 382$ mm; $c_1 = 17,8$ dm
$a_2 = x_3$; $b_2 = 30,2$ cm; $c_2 = 258$ mm

Berechnen Sie die Kanten mit den Längen x_1, x_2 und x_3!

21. **a)** Welche Aufgabe aus **20** läßt sich schneller ohne Stab und Logarithmentafel lösen?
Wie würden Sie in Aufgabe **20** das Lösungsverfahren bei Benutzung
b) des Stabes, **c)** der Logarithmentafel
ändern, wenn auch jeweils das Volumen gesucht wäre?

22. Zu den Kreisen mit den Durchmessern

a) $d_1 = 1{,}2$ cm, **b)** $d_2 = 35{,}8$ mm, **c)** $d_3 = 420$ m

sind die zugeordneten Bogenlängen b für die Zentriwinkel 5°, 10°, 15°, …, 180° und die Zentriwinkel für die Bogenlängen **a)** 0,1; 0,2; …; 1,2 cm **b)** 2, 4, 6, …, 34 mm **c)** 1 m, 10 m, 20 m, …, 420 m
zu berechnen!

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke auf dem Stab oder mit Hilfe der Logarithmentafel!

23. **a)** $134 \cdot 17{,}3^2$ **b)** $0{,}0237 \cdot 2{,}08^2$ **c)** $12{,}54 \cdot 0{,}03507^2$ **d)** $\frac{1{,}28^2}{254}$

e) $\frac{0{,}054\,08^2}{0{,}007\,014}$ **f)** $\frac{730{,}9^2}{0{,}020\,41}$ **g)** $\frac{0{,}328}{54{,}2^2}$ **h)** $\frac{52{,}4}{0{,}45^2}$

i) $\frac{0{,}037\,82}{0{,}251^2}$ **k)** $635{,}4 \cdot 8{,}32^3$ **l)** $0{,}218 \cdot 14{,}2^3$ **m)** $17{,}31 \cdot 0{,}518^3$

n) $\frac{0{,}042^3}{20{,}8}$ **o)** $\frac{844}{9{,}02^3}$ **p)** $\frac{0{,}027}{0{,}0043^3}$ **q)** $7{,}05^2 \cdot 0{,}03^2$

r) $210^3 \cdot 0{,}34^3$ **s)** $19{,}5^2 \cdot 0{,}028^3$ **t)** $\frac{0{,}4502^2}{7{,}013^2}$ **u)** $\frac{17{,}6^3}{0{,}167^3}$

v) $\frac{45{,}4^3}{13{,}4^2}$ **w)** $(5{,}13 \cdot 0{,}77)^2$ **x)** $(755 \cdot 0{,}0438)^3$ **y)** $\left(\frac{34{,}2}{0{,}002\,78}\right)^3$

24. **a)** $2{,}13 \cdot 0{,}841^7$ **b)** $(0{,}0902 \cdot 507)^3$ **c)** $(3{,}02 \cdot 84{,}1)^6$

d) $\frac{5810}{9{,}81^4}$ **e)** $\frac{0{,}356^3}{2{,}55}$ **f)** $\frac{18{,}7^4}{19{,}7^3}$

g) $\left(\frac{72{,}03}{0{,}5421}\right)^5$ **h)** $\left(\frac{0{,}0784}{21{,}8}\right)^3$ **i)** $233^2 \cdot 23{,}3^3$

25. **a)** Bei welchen Aufgaben in **23** und **24** ist die Benutzung der Logarithmentafel der Benutzung des Stabes vorzuziehen?
b) Welche Aufgaben lassen sich besonders einfach auf dem Stab lösen?

26. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat
a) die Grundkantenlänge $a = 77{,}8$ cm und die Höhe $h = 7{,}25$ m;
b) die Grundkantenlänge $r = 0{,}342$ m und die Höhe $h = 0{,}774$ m;
c) die Grundkantenlänge $s = 0{,}0238$ m und die Höhe $h = 7580$ mm.
Wie groß ist jeweils das Volumen?

27. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat
a) das Volumen $V_1 = 758\ \text{cm}^3$ und die Grundkantenlänge $a_1 = 5{,}4$ cm;
b) das Volumen $V_2 = 0{,}002\,708\ \text{m}^3$ und die Grundkantenlänge $a_2 = 23$ mm.
Wie groß ist jeweils die Höhe des Quaders?

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke auf dem Stab oder mit Hilfe der Logarithmentafel!

28. **a)** $5{,}38 \cdot \sqrt{11{,}4}$ **b)** $0{,}023 \cdot \sqrt[3]{3640}$ **c)** $0{,}258 \cdot \sqrt{0{,}0781}$ **d)** $\frac{\sqrt{0{,}32}}{1{,}414}$

e) $\frac{\sqrt[3]{155{,}8}}{0{,}0473}$ **f)** $\frac{\sqrt{0{,}003\,072}}{24{,}35}$ **g)** $\frac{21{,}8}{\sqrt{744}}$ **h)** $\frac{0{,}070\,82}{\sqrt[3]{0{,}070\,82}}$

i) $\frac{53\,800}{\sqrt[3]{0{,}993}}$ **k)** $\frac{\sqrt{528}}{\sqrt{6{,}28}}$ **l)** $\frac{\sqrt{731{,}8}}{\sqrt[3]{0{,}547}}$ **m)** $\frac{\sqrt[3]{0{,}078\,24}}{\sqrt{2{,}308}}$

n) $\sqrt{\frac{0{,}348}{73{,}2}}$ **o)** $\sqrt{\frac{581{,}4}{7{,}282}}$ **p)** $\sqrt{\frac{0{,}004\,814}{0{,}7521}}$ **q)** $\sqrt{0{,}0279 \cdot 53{,}3}$

r) $\sqrt[3]{0{,}584 \cdot 0{,}00291}$ **s)** $\sqrt{21040 \cdot 5632}$ **t)** $\sqrt{13{,}7} \cdot \sqrt{0{,}921}$ **u)** $\sqrt[3]{33{,}45} \cdot \sqrt[3]{0{,}4585}$

29. **a)** $0{,}728 \cdot \sqrt[5]{51{,}3}$ **b)** $2{,}54 \cdot \sqrt[4]{10\,200}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{71{,}05}}{12{,}21}$ **d)** $\frac{\sqrt[6]{17{,}8}}{\sqrt[5]{17{,}8}}$

e) $\sqrt[12]{\frac{4096}{729}}$ **f)** $\frac{0{,}199}{\sqrt[5]{31{,}8}}$ **g)** $\left(\sqrt[7]{\frac{0{,}0421}{3{,}14}}\right)^2$ **h)** $\sqrt[4]{\left(\frac{5318}{0{,}027\,03}\right)^3}$

30. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat
a) das Volumen $V_1 = 981\ \text{cm}^3$ und die Höhe $h_1 = 7{,}34$ cm;
b) das Volumen $V_2 = 0{,}0538\ \text{m}^3$ und die Höhe $h_2 = 21{,}3$ cm;
c) das Volumen $V_3 = 27\,000\ \text{dm}^3$ und die Höhe $h_3 = 0{,}9$ m.
Wie groß ist jeweils die Grundkantenlänge?

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke auf dem Stab oder mit Hilfe der Logarithmentafel!

31. **a)** $\dfrac{3{,}872 \cdot 13{,}41^2}{0{,}5281 \cdot 0{,}734}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{0{,}0728} \cdot 5{,}27}{22{,}4^2}$ **c)** $\dfrac{155{,}3^3}{\sqrt{91{,}8} \cdot 0{,}003\,91}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{5{,}31} \cdot 0{,}408^3}{11{,}8^2 \cdot \sqrt[3]{555}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{22{,}4} \cdot 0{,}138^5}$ **f)** $\dfrac{55{,}8 \cdot \sqrt{9{,}81}}{\sqrt[3]{0{,}531} \cdot 22{,}1}$ **g)** $\left(\dfrac{13{,}8^2}{\sqrt{5500} \cdot 17{,}4}\right)^3$ **h)** $\sqrt{\dfrac{671{,}8 \cdot 4{,}83^2}{\sqrt{521{,}3} \cdot 0{,}538}}$

32. **a)** $\dfrac{8{,}51^3 - 528}{\sqrt[3]{83{,}4} \cdot 2{,}91^2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}537} \cdot 21{,}7}{5{,}37 + 0{,}82^2}$ **c)** $\dfrac{21{,}3^2 + \sqrt[3]{56\,700}}{0{,}79^3 - \sqrt{0{,}082}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{551{,}8} - 2270 \cdot 0{,}0532}{15^3 + 33{,}8^2 \cdot \sqrt{0{,}0571}}$

e) $\dfrac{729 \cdot \sqrt{13{,}4} - 2850}{\sqrt{6\,050\,000} \cdot 0{,}0278^2}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{853 - 16{,}2^2}{\sqrt{544} + 16{,}2^2}}$ **g)** $\left(\dfrac{\sqrt{1080} \cdot 3{,}51^3}{22{,}8^2 - \sqrt{855}}\right)^3$ **h)** $\dfrac{\sqrt{544 \cdot 0{,}381^2}}{(\sqrt{0{,}0231} - 1{,}88)^2}$

i) $\dfrac{84{,}52^3 \cdot \sqrt[3]{164{,}2} \cdot 0{,}3}{\sqrt{111{,}2} \cdot 0{,}0092^3}$ **k)** $\dfrac{12\,470 - \sqrt[3]{0{,}063} + 13{,}32^2}{\sqrt{32{,}64} - 8{,}97^3}$ **l)** $\dfrac{\sqrt[4]{0{,}9876} - 0{,}5131^2 - 5 \cdot \sqrt{3}}{51{,}71 - \sqrt{0{,}240 \cdot 5{,}30^2}}$

33. Füllen Sie die folgende Tabelle, die Aufgaben zur Kreisberechnung enthält, aus!

r	d	$A_\circ$	$u_\circ$	Gleichung
28,3 mm				
	0,53 mm			
		1000 cm²		
			852 dm	
	77,4 m			
			0,00523 km	
		0,0000783 dm²		

34. Von einem Zylinder sind

	gegeben		gesucht
a)	$d = 55{,}3$ mm	$h = 7{,}18$ cm	r, V, A_O, A_M
b)	$r = 77{,}7$ cm	$h = 0{,}158$ m	d, V, A_O, A_M
c)	$V = 1000\ \text{cm}^3$	$h = 10{,}0$ cm	r, d, A_O, A_M
d)	$A_O = 2240\ \text{cm}^2$	$h = 0{,}57$ dm	r, d, V, A_M
e)	$A_M = 551\ \text{cm}^2$	$h = 13{,}4$ cm	r, d, V, A_O
f)	$V = 5\ l$	$d = 28{,}2$ cm	r, h, A_O, A_M
g)	$A_O = 1\ \text{m}^2$	$d = 0{,}5$ m	r, h, V, A_M
h)	$A_M = 14{,}5\ \text{cm}^2$	$d = 0{,}75$ cm	r, h, V, A_O
i)	$V = 0{,}205\ \text{m}^3$	$r = 55{,}4$ cm	d, h, A_O, A_M
k)	$A_O = 1000\ \text{cm}^2$	$r = 0{,}072$ m	d, h, V, A_M
l)	$A_M = 200\ \text{cm}^2$	$r = 1{,}58$ cm	d, h, V, A_O
m)	$A_M = 50\ \text{dm}^2$	$V = 10\ l$	r, d, h, A_O

2.6. Exponentialgleichungen

Aufgaben zur Wiederholung

1. a) Welche andere Schreibweise ist Ihnen für $a^x = b$ bekannt?

b) Formen Sie auf gleiche Art die folgenden Ausdrücke um!

$3^x = 243$; $5^x = 625$; $13^x = 1{,}3$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 12$

2. Schreiben Sie die folgenden Aufgaben als Potenzen!

a) $x = \log_3 720$ **b)** $x = \lg 2$ **c)** $x = \log_5 8000$ **d)** $x = \log_r s$

3. a) Wie können Sie x in Aufgabe **2 a** und **2 c** berechnen?

b) Geben Sie $x = \log_r s$ mit Hilfe von dekadischen Logarithmen an!

4. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

a) $x = 3^{\log_3 9}$ **b)** $x = 3^{\log_3 15}$ **c)** $x = 10^{\lg 5}$ **d)** $x = 10^{\lg b}$

e) $x = a^{\log_a b}$ **f)** $x = \log_a a$ **g)** $x = \log_a (a^n)$ **h)** $x = \log_a \sqrt[m]{a}$

Die Exponentialgleichung $a^x = b$ und ihre Lösung

Eine Bestimmungsgleichung, in der die Unbekannte x als Exponent einer Potenz vorkommt, heißt **Exponentialgleichung.** Soweit Exponentialgleichungen auf die Form

(55) $a^x = b$

gebracht werden können, sollen sie hier betrachtet und gelöst werden. Unter der Berücksichtigung der Definition des Logarithmus zu einer festen Basis kann für (55) auch

(56) $x = \log_a b$

geschrieben werden, womit die Exponentialgleichung (55) prinzipiell gelöst ist.

Beispiel 1:

$2^x = 512$
$x = \log_2 512$
$x = 9$

Probe: linke Seite: $2^9 = 512$
rechte Seite: 512
Vergleich: $512 = 512$

Ist in (56) b jedoch keine bekannte oder durch Probieren zu findende Potenz zur Basis a, so macht die praktische Berechnung von $\log_a b$ Schwierigkeiten, weil uns nur die dekadischen Logarithmen tabelliert zur Verfügung stehen. Nach (32) auf S. 30 ist aber

(57) $x = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$.

Die Unbekannte x ist also mit Hilfe der dekadischen Logarithmen leicht zu berechnen.

Beispiel 2:

$$2^x = 511$$

$$x = \log_2 511$$

$$x = \frac{\lg 511}{\lg 2}$$

$$x = \frac{2{,}7084}{0{,}3010}$$

$$x = 8{,}998$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l}
2{,}7084 : 0{,}3010 = 8{,}998 \\
\underline{2\,4080} \\
30040 \\
\underline{27090} \\
29500 \\
\underline{27090} \\
24100 \\
\underline{24080} \\
00020
\end{array}$$

Verwenden Sie statt der schriftlichen Division die Division mit Hilfe der Logarithmentafel! Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse, und erläutern Sie die Ursache für die Abweichung! Führen Sie die Probe selbst durch!

Zum gleichen Ergebnis für x wie in (57) kommt man auch mit Hilfe des Logarithmengesetzes

(22) $\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$.

Da zwischen jedem Numerus und seinem Logarithmus eines Systems eine eineindeutige Zuordnung besteht, folgt aus der Gleichheit zweier Numeri auch die Gleichheit ihrer Logarithmen zur gleichen Basis. Damit folgt aus (55)

(58) $\log_c a^x = \log_c b$ („Logarithmieren" der Exponentialgleichung).

Für dekadische Logarithmen folgt aus (58) unter Verwendung von (22)

(59) $x \cdot \lg a = \lg b$

und daraus wieder (57).

Dieses Verfahren werden wir hauptsächlich bei der Lösung von Exponentialgleichungen verwenden.

Häufig sind erst Umformungen einer gegebenen Exponentialgleichung notwendig, um sie auf die Form $a^x = b$ zu bringen.

Beispiel 3:

$$3 \cdot 2{,}4^x = 12^5$$

Umformen zu $a^x = b$: $2{,}4^x = \frac{12^5}{3}$

Logarithmieren: $\lg 2{,}4^x = \lg\left(\frac{12^5}{3}\right)$

$$x \cdot \lg 2{,}4 = 5 \cdot \lg 12 - \lg 3$$

$$x = \frac{5 \cdot \lg 12 - \lg 3}{\lg 2{,}4}$$

$$x = \frac{4{,}9189}{0{,}3802}$$

$$x = 12{,}94$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r}
5 \cdot \lg 12 = 5 \cdot 1{,}0792 = 5{,}3960 \\
- \lg 3 = 0{,}4771 \\
\hline
4{,}9189
\end{array}$$

N.	L.	
4,919	0,6919	
0,3802	0,5800 − 1	−
	0,1119 + 1	
12,94	1,1119	

Probe: linke Seite:

$\lg (3 \cdot 2{,}4^{12{,}94}) = \lg 3 + 12{,}94 \cdot \lg 2{,}4 = 0{,}4771 + 4{,}9190 = 5{,}3961$

rechte Seite: $\lg (12^5) = 5 \cdot \lg 12 = 5 \cdot 1{,}0792 = 5{,}3960$

Vergleich: Die dekadischen Logarithmen stimmen überein, folglich auch die zugeordneten Numeri.

Beispiel 4:

Für eine wichtige Produktionsabteilung eines volkseigenen Konfektionsbetriebes ist eine jährliche Produktionssteigerung um 9 % geplant. Die Werktätigen stellen sich im Produktionsaufgebot das hohe Ziel, 15 % jährliche Produktionssteigerung zu erreichen. Nach wieviel Jahren hat sich jeweils die Produktion verdoppelt?

Lösung:

a) Ermittlung der beiden Bestimmungsgleichungen

	Ursprünglicher Plan	Plan im Produktionsaufgebot
Produktion am Ende des 1. Jahres:	$109\,\% = \frac{109}{100} = 1{,}09$	$115\,\% = \frac{115}{100} = 1{,}15$
Produktion am Ende des 2. Jahres:	$1{,}09 \cdot 109\,\% = 1{,}09^2$	$1{,}15 \cdot 115\,\% = 1{,}15^2$
Produktion am Ende des 3. Jahres:	$1{,}09^2 \cdot 1{,}09 = 1{,}09^3$	$1{,}15^2 \cdot 1{,}15 = 1{,}15^3$
Verdoppelte Produktion am Ende des x. Jahres:	$1{,}09^x = 2$	$1{,}15^x = 2$

b) Lösung der Bestimmungsgleichungen

$$1{,}09^x = 2 \qquad\qquad 1{,}15^x = 2$$

Logarithmieren:

$$x \cdot \lg 1{,}09 = \lg 2 \qquad\qquad x \cdot \lg 1{,}15 = \lg 2$$

$$x = \frac{0{,}3010}{0{,}03743} \qquad\qquad x = \frac{0{,}3010}{0{,}0607}$$

$$x \approx 8 \qquad\qquad x \approx 5$$

Probe:

linke Seite:	$\lg 1{,}09^8 \approx 8 \cdot 0{,}037 \approx 0{,}3$	$\lg 1{,}15^5 \approx 5 \cdot 0{,}0607 \approx 0{,}3$
rechte Seite:	$\lg 2 \approx 0{,}3$	$\lg 2 \approx 0{,}3$
Vergleich:	$0{,}3 = 0{,}3$	$0{,}3 = 0{,}3$

Ergebnis: Nach dem ursprünglichen Plan würde die Produktion erst nach 8 Jahren, nach dem im Produktionsaufgebot beschlossenen Plan schon nach 5 Jahren verdoppelt.

Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen!

5. a) $3^x = 243$ **b)** $1{,}8^x = 1{,}8^4$ **c)** $5{,}38^x = 0{,}27$
d) $12{,}7^x = (3{,}2^3 + 4{,}18)^2$ **e)** $4{,}21^x = 421$ **f)** $421^x = 4{,}21$
g) $0{,}47^x = \sqrt{13}$ **h)** $5{,}2^x = \sqrt{152}$ **i)** $5 \cdot 80{,}3^x = \sqrt[3]{21{,}4}$
k) $\frac{7}{13} \cdot 0{,}02^x = 14$ **l)** $16^2 \cdot 5^x = 22^3$

6. a) $4^{3x} = 4096$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{7x} = 202$ c) $8a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x+4} = 125a$

d) $17^{2x-5} = 17$ e) $0{,}78^{5x-\frac{1}{2}} = 1$ f) $28{,}4^{\frac{x}{5}} = \sqrt{128^3}$

g) $0{,}34^{\frac{7}{13}x} = \sqrt{200}$ h) $81^{\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}} = 734$ i) $0{,}1^{\frac{22}{3}x-4} = 130 \cdot 3{,}7^4$

7. a) $\sqrt[x]{0{,}000\,008} = \frac{1}{2 \cdot 5^2}$ b) $\sqrt[3x]{55} = 2{,}88$ c) $12^{\frac{1}{x}} = 120$

d) $\sqrt[x+5]{100} = 10$ e) $\sqrt[\frac{3}{4}x-2]{33{,}8} = 1{,}98^2$ f) $7^{\frac{1}{x}-3} = \sqrt[3]{15}$

g) $\frac{4^x}{3^x} = \frac{256}{81}$ h) $13{,}2^x = 14{,}2^{2x}$ i) $2{,}4^{x-3} = 4{,}2^{x+3}$

8. a) $3 \cdot 7^x - 7^{x-2} = 1022$ b) $\frac{2}{3} \cdot 5{,}5^x + 5{,}5^{x+2} = 428$ c) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}2^x = 10 \cdot 0{,}2^{x+1} + 13$

d) $5\sqrt[x]{982} + \frac{1}{4}\sqrt[x]{982} = \sqrt{\frac{728}{13}}$

9. a) Welche besondere Schwierigkeit entsteht bei der Lösung der Aufgaben **5 g** und **5 k**?
b) Wie läßt sie sich überwinden?
c) Bei welchen Aufgaben treten noch Schwierigkeiten auf?

10. Geben Sie aus den Aufgaben **5** bis **8** diejenigen Gleichungen an, deren Lösung Sie genau ermitteln konnten! Begründen Sie, warum die Lösungen der anderen Gleichungen nur Näherungswerte sind!

11. Das durchschnittliche jährliche Wachstum der industriellen Produktion betrug in der Zeit von 1955 bis 1959, bezogen auf 1950 ≙ 100%,
a) in der Sowjetunion jährlich 18%,
b) in den USA jährlich 2,4% (starke Schwankungen!),
c) in der DDR jährlich 16,2%,
d) in Westdeutschland jährlich 9,4% (Schwankungen!).
In welchem Zeitraum steigt bei gleichbleibendem durchschnittlichem Wachstum in den vier angeführten Staaten die Produktion
α) um 50%, β) um 80%, γ) um 100%, δ) um 200%,
bezogen auf 1950 ≙ 100%?
Nehmen Sie kritisch zu den Ergebnissen Stellung!

2.7. Anwendungsaufgaben

Aus der Physik

1. Berechnen Sie die Masse einer Wasserstoffmenge, die bei 35,2 °C und 8,45 at Druck ein Volumen von 10,05 dm³ hat!
Hinweis: Benutzen Sie die allgemeine Zustandsgleichung für ideale Gase!

2. Welches Volumen nimmt 1,000 kg H_2 bei 20 °C und 4,35 at Druck ein?

3. Bekanntlich haben 22,42 l (Molvolumen) reiner Sauerstoff unter Normalbedingungen eine Masse von 32,00 g.
a) Bestimmen Sie die Dichte des Sauerstoffs!
b) Welche Masse hat 1,000 m³ O_2 unter Normalbedingungen?
c) Welches Volumen nehmen 1,000 kg O_2 unter Normalbedingungen ein?

4. a) Wie groß ist die Masse reinen Sauerstoffs, der in einer Stahlflasche von 40,02 l Volumen bei einer Temperatur von 18 °C einen Druck von 148,5 at hat?

b) Wieviel Meter Nahtlänge von 20 mm starkem Blech lassen sich mit dem Inhalt dieser Sauerstoffflasche schneiden, wenn (bei 20 mm Blechstärke) der Sauerstoffdruck 4,6 at betragen muß und der Sauerstoffverbrauch je Meter Nahtlänge 210 l (unter Normalbedingungen) beträgt?

5. Mit Hilfe der LOSCHMIDTschen Zahl $L = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, die die Zahl der Moleküle in 22,42 l eines Gases (Molvolumen V_M) angibt, und der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie $p = \frac{1}{3}\, n \cdot m \cdot \bar{v}^2$ ist es beispielsweise möglich, die Masse m eines Wasserstoffmoleküls zu berechnen. Wegen $L = n \cdot V_M$ folgt aus der Grundgleichung

$$p \cdot V_M = \frac{1}{3}\, L \cdot m \cdot \bar{v}^2,$$

worin bei Wasserstoff für $p = 760$ Torr die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = 1694\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$ ist.

a) Berechnen Sie die Masse eines Wasserstoffmoleküls!

b) Kontrollieren Sie das Ergebnis auf einem anderen, wesentlich einfacheren Weg ebenfalls mit Hilfe der LOSCHMIDTschen Zahl!

6. Bestimmen Sie aus der mittleren Molekülgeschwindigkeit des Wasserstoffs ($\bar{v} = 1694\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$) und aus den Dichten der jeweiligen beiden Stoffe die mittlere Molekülgeschwindigkeit für Sauerstoff, Stickstoff und Kohlendioxyd mit Hilfe der Formel

$$\frac{\bar{v}_1^{\,2}}{\bar{v}_2^{\,2}} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

aus der kinetischen Gastheorie!

7. Berechnen Sie mit Hilfe des Widerstandsgesetzes der Strömungslehre

$$W \approx c_\omega \cdot \frac{1}{16}\, v^2 \cdot A$$

den Widerstand W der in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Körperformen!

Körperform		Widerstandsbeiwert c_ω	Körperform		Widerstandsbeiwert c_ω
	Halbkugelschale (gegen Strömung)	1,35		Vollkugel	0,45
	Kreisscheibe	1,11		Stromlinienkörper (Spitze gegen Strömung)	0,18
	Halbkugelschale (Wölb. gegen Strömung)	0,35		Stromlinienkörper (Wölb. gegen Strömung)	0,05

Diese Körper sollen eine Stirnfläche A von

a) 1 cm², **b)** 1 dm², **c)** 1 m²

haben, und die Strömungsgeschwindigkeit v der Luft soll

α) $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, β) $15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, γ) $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, δ) $108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (Orkan)

betragen.

8. Nach dem HOOKEschen Gesetz erfährt ein Draht von der Länge l und dem Querschnitt A bei einer Belastung von F die Verlängerung

$$\Delta l = \frac{lF}{AE}.$$

Die Konstante E wird als Elastizitätsmodul bezeichnet; er ist von der Art des Stoffes abhängig. Werden Δl und l in cm, A in cm² und F in kp gemessen, so ist

$$E_{\text{Stahl}} = 2\,100\,000\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2},\quad E_{\text{Kupfer}} = 1\,200\,000\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Berechnen Sie

a) die Verlängerung für einen Stahldraht mit $F = 2{,}7$ kp; $l = 4{,}72$ m; $d = 0{,}5$ cm;
b) die Verlängerung für einen Kupferdraht mit $F = 15{,}2$ kp; $l = 612$ cm; $d = 8$ mm!
c) Stellen Sie $\Delta l = f(F)$ und $\Delta l = f(A)$ graphisch dar!

9. Ein Stab mit rechteckigem Querschnitt sei an einem Ende fest eingeklemmt, das andere Ende sei mit F (in kp) belastet. Die Durchbiegung des Stabes beträgt $B = \frac{4Fl^3}{Ebh^3}$.
Berechnen Sie die Durchbiegung von Stäben aus
a) Stahl: Länge $l = 75$ cm; Breite $b = 1{,}5$ cm; Höhe $h = 2{,}2$ cm; $F = 2{,}5$; 172; 8,75 kp und
b) Kupfer: Länge $l = 64$ cm; Breite $b = 1{,}8$ cm; Höhe $h = 3{,}0$ cm; $F = 1{,}3$; 4,72; 6,95 kp!

10. Der Abstand Erde–Mond beträgt rund 384 000 km.
Welche Zeit benötigt ein Lichtstrahl zum Durchlaufen dieser Strecke?

Aufgaben aus der Technik

11. Bei der Spannschraube gilt zwischen der aufzuwendenden Kraft F_1 und der Druckkraft F_2 die Beziehung

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{h}{2\pi R}.$$

Hierin bedeuten h die Steigung des Schraubengewindes und R den Durchmesser des Handrades. Wie groß ist jeweils die gesuchte Größe für

a) $F_2 = 1\,000$ kp; $h = 4{,}2$ mm; $R = 55{,}8$ cm;
b) $F_1 = 5{,}2$ kp; $h = 3{,}6$ mm; $R = 55{,}8$ cm;
c) $F_1 = 2{,}5$ kp; $h = 2{,}3$ mm; $F_2 = 1830$ kp?

12. Bei Mehrfachübersetzungen von Zahnrädern (Abb. 2.13.) gilt für die Übersetzung i die Beziehung

$$i = \frac{\text{Produkt d. Zähnezahlen d. getriebenen Räder}}{\text{Produkt d. Zähnezahlen d. treibenden Räder}}.$$

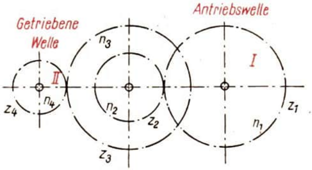


Abb. 2.13.

a) Leiten Sie diese Beziehung her!
b) Wie groß ist die Übersetzung i, wenn $Z_1 = 52$, $Z_2 = 25$, $Z_3 = 52$, $Z_4 = 17$ ist?
c) Wie groß ist die Drehzahl n_4, wenn die Drehzahl der Antriebswelle $n_1 = 520$ Umdrehungen $\cdot$ min^{-1} ist?
d) Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit der getriebenen Welle, wenn deren Teilkreisdurchmesser $d_4 = 152$ mm ist, der Teilkreisdurchmesser der Antriebswelle $d_1 = 494$ mm und ihre Drehzahl $n_1 = 380$ Umdrehungen $\cdot$ min^{-1} beträgt?
e) Besorgen Sie sich die Werte für das Wechselgetriebe des PKW Wartburg 312 und des PKW Trabant P 50 und eines LKW sowie deren Motordrehzahlen, und rechnen Sie selbst!

13. Für den notwendigen Querschnitt A eines auf Zug beanspruchten Bauteils gilt

$$A = \frac{F}{\sigma_{z\,\text{zul}}}.$$

Darin ist F die angreifende Zugkraft und $\sigma_{z\,\text{zul}}$ die vom Material abhängige zulässige Beanspruchung.
Für St 42 (Stahlsorte) ist die Zugfestigkeit $\sigma_{z\,B} = 4\,200$ kp $\cdot$ cm^{-2}, und für die zulässige Beanspruchung $\sigma_{z\,\text{zul}}$ bei ν-facher Sicherheit gilt

$$\sigma_{z\,\text{zul}} = \frac{\sigma_{z\,B}}{\nu}.$$

a) Wie groß ist der Durchmesser eines Rundstahls St 42 zu wählen, damit bei vierfachem Sicherheitsfaktor der Rundstahl mit $F = 10\,000$ kp auf Zug belastet werden kann?

b) Welche Zugbelastung hält ein Rundstahl St 42 von 95 mm Durchmesser bei fünffacher Sicherheit aus?

c) Bei welcher Zugbelastung zerreißt der Rundstahl aus Aufgabe **b**?

14. Benutzen Sie die in Aufgabe 7 verwendete Widerstandsformel für die Berechnung des Luftwiderstandes eines PKW F 9 für die folgenden Geschwindigkeiten!

a) $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ **b)** $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ **c)** $70\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ **d)** $100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

Für den PKW F 9 gelten etwa folgende Werte $c_\omega = 0{,}3$; $A = 1{,}7\ \mathrm{m^2}$.

15. Wie ändert sich das Ergebnis von Aufgabe **14**, wenn jeweils **a)** ein Rückenwind, **b)** ein Gegenwind von $v_w = 22\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ herrscht?

c) Wieviel Prozent der Motorleistung (30 PS) werden jeweils durch den Luftwiderstand verbraucht?

16. Die Absaugöffnung einer Absaugvorrichtung hat den in Abbildung 2.14. dargestellten Querschnitt.

Welchen Durchmesser muß die runde Absaugleitung erhalten, wenn die Luftgeschwindigkeit in der Öffnung doppelt so groß sein soll wie in der Leitung?

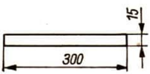


Abb. 2.14.

17. Eine Rohrleitung mit einem Durchmesser von 400 mm soll in einem rechteckigen Anschlußstück mit gleicher Querschnittsfläche ausmünden. Die Seiten des Rechtecks sollen sich wie 5:2 verhalten.

18. Eine Getriebewelle ($d = 80$ mm, $l = 780$ mm) ist einmal zu überdrehen. Die Schnittgeschwindigkeit beträgt $45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$ und der Vorschub $0{,}6\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Umdreh.}}$.

Berechnen Sie

a) die erforderliche Umdrehungszahl der Arbeitsspindel,

b) die erforderliche Arbeitszeit!

19. Eine Antriebswelle ($d = 160$ mm) wird überdreht. Die Arbeitsspindel der Drehmaschine macht 90 Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit?

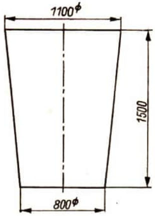


Abb. 2.15.

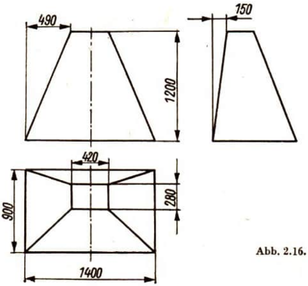


Abb. 2.16.

20. Die Abbildung 2.15. zeigt den Innenraum einer Gießpfanne.

Berechnen Sie

a) das Fassungsvermögen der Gießpfanne, wenn sie bis 180 mm unterhalb der oberen Kante gefüllt werden darf;

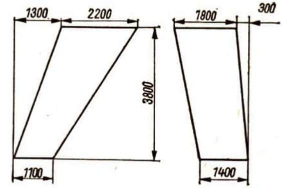
b) die Masse des Pfanneninhaltes (Dichte des flüssigen Eisens $\varrho = 6{,}9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)!

21. Die in Abbildung 2.16. durch eine technische Zeichnung wiedergegebene Entlüftungshaube, oben und unten offen, wird aus 2 mm dickem Blech gefertigt; die Kanten werden geschweißt.

Berechnen Sie

a) die Länge der Schweißnähte;

b) die Masse der Haube (1 mm dickes Blech wiegt $8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$)!



22. Die in Abbildung 2.17. dargestellte oben und unten offene Übergabeschurre wird aus 5 mm dickem Blech gefertigt; die Kanten werden geschweißt.

Berechnen Sie

a) die Länge der Schweißnähte,

b) die Masse!

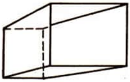


Abb. 2.17.

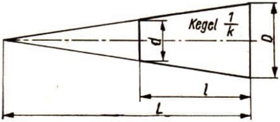
23. Beim Kegel gibt die Bezeichnung „Kegel $\frac{1}{k}$" das Verhältnis $\frac{\text{Änderung des Durchmessers}}{\text{Länge des Kegelstumpfes}}$ an (Abb. 2.18.):

$$\frac{1}{k} = \frac{D - d}{l}.$$

a) Berechnen Sie d aus
$D = 60$ mm; $l = 120$ mm; Kegel $\frac{1}{8}$!

b) Berechnen Sie $\frac{1}{k}$ aus
$D = 150$ mm; $d = 120$ mm; $l = 360$ mm!

Abb. 2.18.



24. Für den Differentialflaschenzug gelten die Formeln

$$F_1 = F_2 \frac{D - d}{2\,D} \text{ und } s_{F_2} = \frac{D - d}{2\,D} s_{F_1},$$

wobei F_1 die Kraft, F_2 die Last ist und D bzw. d die Durchmesser der koaxialen Kettenräder sind, während s_{F_2} den Lastweg und s_{F_1} den Kraftweg bedeuten.

a) Welche Kraft ist notwendig, um eine Last von 40 Mp anzuheben, wenn $D = 555$ mm und $d = 550$ mm ist?

b) Wie groß ist in **a** der Kraftweg s_{F_1}, wenn die Last um 12,5 cm angehoben werden soll?

c) Welche Last kann im vorliegenden Fall höchstens gehoben werden, wenn die Kraft $F \leqq 0{,}098$ Mp ist?

d) Was erhält man in den Aufgaben **a** bis **c**, wenn $D = 13{,}5$ cm und $d = 131$ mm ist?

25. Soll der prozentuale Gehalt eines bestimmten Elementes in einem gegebenen Stoff (chemische Verbindung oder Gemisch) bestimmt werden, so rechnet man nach der Formel

$$x(\%) = \frac{F_s \cdot A \cdot 100}{E}.$$

Darin ist

der stöchiometrische Faktor $F_s = \frac{\text{n-g-Atom (bzw. Molekulargewicht des gesuchten Stoffes)}^{1}}{\text{Molekulargewicht des erhaltenen (bestimmten) Stoffes}}$, die Masse des erhaltenen Stoffes gleich A (Auswaage), die Masse des eingewogenen Stoffes gleich E (Einwaage).

Beispiel: Wieviel Prozent Ca sind in 355,4 mg Kalkstein enthalten, wenn nach chemischer Umsetzung 470,3 mg $CaSO_4$ ausfallen? Wie hoch ist der prozentuale Gehalt des Kalksteins an CaO?

Lösung:

a) für Ca: $x \text{ (in \%)} = \frac{\frac{40,08}{136,15} \cdot 470,3 \cdot 100}{355,4}$

$x \text{ (in \%)} = 38,96\,\%$

N.	L.	
40,08	1,6029	
136,15	2,1340	—
F_s	0,4689–1	
470,3	2,6724	
100	2,0000	+
	4,1413	
355,4	2,5507	—
38,96	1,5906	

b) für CaO: $x \text{ (in \%)} = \frac{\frac{56,08}{136,15} \cdot 470,3 \cdot 100}{355,4}$

Berechnen Sie $x\%$!

26. Lösen Sie entsprechend folgende Aufgaben:

a) Aus 1,304 g Eisenerz erhält man 998 mg Fe_2O_3. Wieviel Prozent beträgt der Eisengehalt dieses Erzes?

b) Aus 845,3 mg eines Minerals erhält man 644,0 mg $BaSO_4$. Wieviel Prozent beträgt der Bariumgehalt des Minerals?

c) Aus 570,8 mg Schwefelsäure erhält man 358,3 mg $BaSO_4$. Wieviel Prozent Schwefel, Schwefeldioxyd, H_2SO_4 enthält die Schwefelsäure?

d) Ein Mineraldünger soll auf Phosphor- und Kalziumgehalt untersucht werden. Aus 522,0 mg Mineraldünger erhält man 204,8 mg CaO und aus 877,4 mg Mineraldünger 551,5 mg $Mg_2P_2O_7$. Bestimmen Sie den Ca- und P-Gehalt sowie den Anteil an sonstigen Stoffen des Mineraldüngers!

27. Salzsäure mit einer Dichte von $\varrho = 1,15\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ soll in kugelförmige Behälter mit 70,2 cm Innendurchmesser gefüllt werden.

a) Wieviel Salzsäure faßt ein Behälter?

b) Wieviel Behälter werden benötigt, um 2,48 t Salzsäure abzufüllen?

28. Das Achsgewicht eines Traktors wirkt bei waagerechtem Stand des Fahrzeuges je zur Hälfte auf die beiden Räder. Das Gewicht, das auf einem Rad lastet, ist auf dessen Auflagefläche verteilt. Um den Bodendruck zu ermitteln, müssen wir ausrechnen, wieviel Kilopond auf ein Quadratzentimeter der Auflagefläche drücken.
Das Achsgewicht der „Brockenhexe" beträgt vorn 600 kp und hinten 1100 kp, die Auflagefläche je Rad vorn 290 cm² und hinten bei 3 at Reifendruck 945 cm².

a) Berechnen Sie den Bodendruck der Vorder- und der Hinterräder!

b) Vergleichen Sie den Bodendruck der Hinterräder mit dem Druck, den Sie auf den Boden ausüben, wenn die Auflagefläche Ihrer Schuhsohlen 200 cm² beträgt!

c) Besorgen Sie sich die Zahlenwerte, um den von einem Pferd ausgeübten Bodendruck berechnen zu können!

[1] Unter n-g-Atom versteht man soviel Gramm eines chemischen Elementes, wie sein Atomgewicht, multipliziert mit der Anzahl der Atome im Molekül, des bestimmten Stoffes angibt.

29. Die günstigste Form der Bewässerung größerer Flächen ist das Beregnen. Meist werden Drehstrahlregner verwendet. Diese Apparate beregnen eine Kreisfläche.
Ein 0,45 ha großes Gemüsefeld einer LPG wird mit einer Regenhöhe von 25 Millimetern aus der Wasserleitung beregnet.

a) Wieviel Kubikmeter Wasser werden dabei verregnet?

b) Welche Wasserkosten entstehen, wenn der Preis 0,30 MDN je Kubikmeter beträgt?

c) Wie hoch sind die Wasserkosten, wenn ein Vorzugspreis von 0,16 MDN gewährt wird?

Zusatz: Der LPG steht aus einem Bach Wasser kostenlos zur Verfügung, jedoch entstehen für den Transport des Wassers vom Bach zum Gemüsefeld Selbstkosten in Höhe von 0,02 MDN $\cdot$ m^{-3}. Wie hoch sind dann die Wasserkosten?

30. Die Rübenvollerntemaschine SKM 3 köpft, erntet und ladet die Rüben in einem Arbeitsgang. Mit ihrer Hilfe ist es unseren Genossenschaftsbauern möglich, mit viel weniger Aufwand an Handarbeit als bei den veralteten Erntemethoden die Rübenernte zu meistern. Folgende Untersuchungen zeigen die Steigerung der Arbeitsproduktivität der Rübenernte bei den verschiedenen Erntemethoden. So beträgt der Aufwand an Handarbeitsstunden bei:

1. Handroden und Abschneiden .... 195 $\frac{h}{ha}$
2. Köpfschlitten und Rodepflug .... 115 $\frac{h}{ha}$
3. Köpfschlitten und Schatzgräber .... 80 $\frac{h}{ha}$
4. Köpfschlitten und Schatzgräber mit Rucksack .... 45 $\frac{h}{ha}$
5. Rübenvollerntemaschine .... 28 $\frac{h}{ha}$

Um wieviel Prozent konnte die Arbeitsproduktivität der einzelnen Methoden gegenüber der ersten Methode gesteigert werden?

31. Wird Stallmist 6 Stunden nach dem Ausbringen untergepflügt, so beträgt die Ertragswirkung gegenüber sofortigem Unterpflügen nur noch 97%. Nach 24 Stunden beträgt sie 94% und nach 4 Tagen nur noch 86%.

Berechnen Sie die entsprechenden Ertragsverluste

a) für 15 ha Kartoffeln bei einem erwarteten Ertrag von 240 $\frac{dt}{ha}$,

b) für 12 ha Zuckerrüben bei einem erwarteten Ertrag von 380 $\frac{dt}{ha}$!

32. Die Hackfruchtflächen eines VEG sollen je Hektar mit 34 kg, der Raps mit 51 kg, die Erbsen mit 17 kg, die Getreidearten mit 17 kg und die Luzerne mit 20 kg Phosphorsäure (P_2O_5) gedüngt werden. Wiesen und Weiden erhalten 36 $\frac{kg}{ha}$ Phosphorsäure in Form von Thomasphosphat.

a) Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17% Phosphorsäure enthält und 73,5 ha Getreide, 37,81 ha Hackfrüchte, 5,33 ha Winterraps, 5,33 ha Erbsen und 23,43 ha Luzerne vorhanden sind?

b) Berechnen Sie die erforderliche Menge an Thomasphosphat, wenn dieser Dünger 15% Phosphorsäure enthält!

33. Die Aussaatmenge je Hektar wird wie folgt berechnet:

Aussaatmenge je Hektar $= \frac{s \cdot m_P}{m_D \cdot K}$.

Dabei sind s: ortsübliche Aussaatmenge in $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$,

m_D: die durchschnittliche Tausendkornmasse der betreffenden Art in Gramm,

m_p: die Tausendkornmasse der Prüfnummer in Gramm,

K: die Keimfähigkeit der Prüfnummer.

$$\text{Keimfähigkeit} = \frac{\text{Anzahl der ausgekeimten Samen}}{\text{Gesamtzahl der Samen}}$$

Berechnen Sie die Aussaatmengen für die Kulturen und Flächen der LPG bzw. des VEG Ihres Ortes!

34. Das Abdrehen von Drillmaschinen zur Feststellung der benötigten Saatgutmenge.

Gegeben: s: ortsübliche Aussaatmenge in $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$,

r: Radius des Rades in m,

b: Säbreite der Maschine in m.

Wenn die Aussaatmenge $s \frac{\text{kg}}{\text{ha}}$ aus der Maschine fallen soll, beträgt die Saatgutmenge x bei n Umdrehungen

$$x = \frac{s \cdot n \cdot 2\pi r b}{10\,000}\ \text{kg}.$$

2.8 Zur Geschichte des logarithmischen Rechnens

Die Geschichte des logarithmischen Rechnens zeigt außerordentlich eindrucksvoll, wie die Entwicklung der Mathematik durch gesellschaftliche Bedürfnisse vorangetrieben wird.

Ursprünglich schien nichts anderes als eine interessante Zahlenspielerei vorzuliegen, wenn man die arithmetische Folge

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

mit der geometrischen Folge

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$$

verglich und eine Beziehung zwischen

> dem Produkt zweier Glieder der unteren Folge und der Summe der darüberliegenden Glieder der oberen Folge erkannte.

Der Deutsche Michael Stifel (1486 oder 1487–1567) schwärmte in seinem bedeutenden algebraischen Werk *Arithmetica integra* (Gesamte Arithmetik, 1539) von den Beziehungen beider Reihen. Er brachte zum Ausdruck, daß man „ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben könnte". Stifel hatte auch erkannt, daß jeweils das Subtrahieren dem Dividieren, das Multiplizieren dem Potenzieren und das Dividieren dem Radizieren entspricht. Somit waren eigentlich seit Stifel die theoretischen Grundlagen des logarithmischen Rechnens vorhanden.

Den Anstoß für die praktische Auswertung dieser Erkenntnisse gab die Trigonometrie. Im 16. Jahrhundert nahm die praktische Astronomie eine schwungvolle Entwicklung, da die Hochseeschiffahrt nach neu entdeckten Ländern bedeutende astronomische und trigonometrische Kenntnisse erforderte. Die astronomischen Berechnungen waren jedoch außerordentlich mühsam, da fortgesetzt Multiplikationen und Divisionen mit vielziffrigen Zahlen (nämlich den Sinuswerten verschiedener Winkel) vorzunehmen waren.

Vor diesen Problemen stand auch der Schweizer JOST BÜRGI (1552–1632), ein Uhrmacher und Mechaniker, der sich in unermüdlicher selbständiger Arbeit bis zur Stellung eines Astronomen an der damals führenden Sternwarte in Kassel emporgearbeitet hatte. Bei der Suche nach Methoden zur Vereinfachung seiner beruflichen Rechenarbeit gelang es ihm, unter Ausnutzung der bereits bekannten theoretischen Grundlagen, eine erste Logarithmentafel aufzustellen. Hierzu interpolierte er nach einem geschickten Verfahren fortgesetzt eine arithmetische und eine entsprechende geometrische Folge. Dabei ergab sich genaugenommen eine Tafel der Antilogarithmen, da nicht wie in unseren heutigen Tafeln als Numeri die Reihe der ganzen Zahlen gewählt war, sondern die Logarithmen gleichmäßig wuchsen.

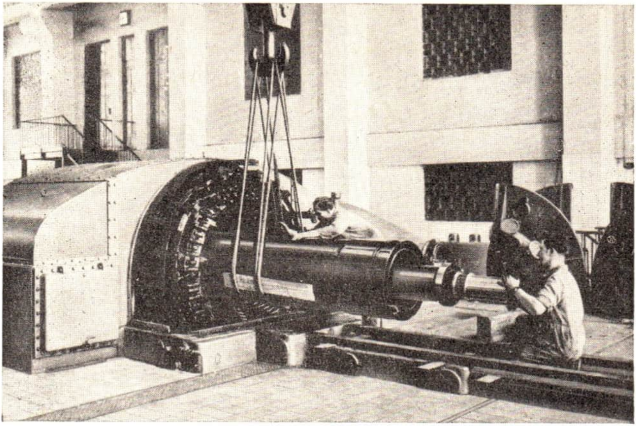
Abb. 2.19. JOHN NEPER

BÜRGI berechnete seine Tafel in außerordentlich angestrengter Arbeit in den Jahren von 1603 bis 1611. Da er sich als wissenschaftlicher Außenseiter fühlte und nur ungenügend die Gelehrtensprache der damaligen Zeit, das Latein, beherrschte, scheute er sich vor einer Veröffentlichung seines Werkes. Erst im Jahre 1620, nachdem BÜRGI seinen Wohnsitz nach Prag verlegt hatte und dort in freundschaftlichen Beziehungen zu dem anerkannten Astronomen JOHANNES KEPLER stand, erschienen die Tafeln unter dem Titel *Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen*, leider unter sehr unglücklichen Umständen. Im Jahre 1620 wurde Prag im Verlaufe der Kriegshandlungen des Dreißigjährigen Krieges eingenommen und gebrandschatzt. Dabei wurde auch fast die gesamte Auflage der *Progreß-Tabulen* zerstört.

Die Bedingungen für die Entwicklung der Wissenschaften wurden in Mitteleuropa und besonders in Deutschland durch den Dreißigjährigen Krieg ganz außerordentlich ungünstig. So konnten sich auch BÜRGIS Tafeln trotz der Empfehlung KEPLERS nicht durchsetzen.

Durch sein Zögern hatte sich BÜRGI um den Ruhm der ersten Veröffentlichung von Logarithmentafeln gebracht. Im Jahre 1614 waren in Schottland, in Edinburgh, schon Logarithmentafeln gedruckt worden, und zwar unter dem Titel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Beschreibung einer Tafel wunderbarer Rechnungszahlen). Hier tritt zum erstenmal das Wort Logarithmus auf, das soviel wie Rech-

nungszahl, Ordnungszahl bedeutet. Der Verfasser war der schottische Mathematiker JOHN NEPER (1550—1617). Er war im Grunde von derselben Fragestellung ausgegangen wie BÜRGI, hatte aber ein anderes Verfahren zur Berechnung der Logarithmen angewendet und war daher auch auf eine andere Basis des Logarithmensystems gekommen. Den Logarithmen BÜRGIs lag, wenn man sich modern ausdrückt, die Basis $1{,}0001^{10000} = 2{,}71846 \cdots \approx e$ zugrunde, denen NEPERs eine zu $\frac{1}{e}$ proportionale Basis. NEPERs Tafel enthielt die siebenstelligen Logarithmen der nach Minuten fortschreitenden Sinus und Kosinus und die zugehörigen Differenzen, d. h. den $\log \tan x$.
NEPERs Tafeln fanden, zunächst vor allem in England, aber später auch auf dem Festland, eine begeisterte Aufnahme unter den Fachgelehrten. Die Umwandlung der zunächst noch schwer zu überblickenden neuartigen Zahlen in ein Handwerkszeug der Praxis erfolgte durch HENRY BRIGGS (1561—1630). Er war Professor am Gresham-College in London, einer Spezialschule zur Ausbildung von Kaufleuten und „Seeoffizieren Seiner Majestät des Britischen Königs“, die auf ihre Art Englands Aufstieg zur führenden Kolonialmacht der Welt unterstützte. Nach einigen Diskussionen einigten sich BRIGGS und NEPER, der bald darauf starb, auf die vereinfachenden Annahmen $\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$, d. h. auf den Übergang zu dekadischen Logarithmen. Dann machte sich BRIGGS mit Feuereifer an die Berechnung der Tafeln, die von 1617 an in Teilen 14stellig erschienen. Von nun an war der Siegeszug der Logarithmen nicht mehr aufzuhalten.
In der Folgezeit wurden neue und bessere Methoden zur Tafelberechnung entwickelt. Sie beruhen auf der Verwendung unendlicher Reihen, einem Hilfsmittel der höheren Mathematik. Auch die theoretische Einsicht wurde vertieft. Aber erst dem Genie des großen schweizerischen Mathematikers LEONHARD EULER (1707—1783) verdankt man die Einsicht, daß das Logarithmieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens ist.



3. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

Dreht man eine Spule in einem Magnetfeld, so wird eine elektrische Spannung erzeugt. Diese Erkenntnis bildet die Grundlage für den Bau von Generatoren, die zur Umwandlung von kinetischer Energie in elektrische Energie dienen. Auf der obigen Abbildung aus dem VEB Sachsenwerk Niedersedlitz kann man die beiden Hauptteile eines Generators erkennen, den Stator und den Rotor. Der Rotor, ein mächtiger Elektromagnet, wird mit Hilfe eines Krans in den Stator eingeführt. Zur Stromerzeugung wird der Rotor von einer Turbine gedreht. Dabei wird in den Spulen, die der Stator auf einem Kranz von Eisenkernen trägt, eine Wechselspannung induziert. Die Spannung ändert ständig ihre Größe und wechselt ihre Polarität. Die Größe der induzierten Spannung ist eine Funktion des Winkels, den der Rotor bei seiner Umdrehung beschreibt. Derartige **Winkelfunktionen** werden wir im folgenden Kapitel kennenlernen.

3.1. Die Winkelfunktionen

Die Sinusfunktion

1. a) *Fertigen Sie ein Gelenkviereck an, bei dem alle Seiten die gleiche Länge haben (Rhombus)! Bewegen Sie das Viereck so, daß ein Innenwinkel alle Winkel von 0° bis 180° durchläuft! Wie verändert sich dabei der Flächeninhalt des Rhombus?*

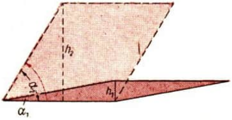


Abb. 3.1.

b) *Zeichnen Sie Rhomben mit den Seiten* $a = 5$ cm *und den Winkeln* $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 20°$; $\alpha_3 = 30°$; ...; $\alpha_{17} = 170°$ *(Abb. 3.1.)! Messen Sie die zugehörigen Höhen* h_1; h_2; h_3; ...; h_{17}, *und bestimmen Sie die Flächeninhalte* A_1; A_2; A_3; ...; A_{17}! *Welcher Flächeninhalt ergibt sich für* $\alpha_0 = 0°$ *und* $\alpha_{18} = 180°$?

c) *Stellen Sie den Flächeninhalt A des Rhombus als Funktion des Winkels* α *graphisch dar* [$A = f(\alpha)$]!

d) *Berechnen Sie die Flächeninhalte der Rhomben mit den Seiten* $a = 5$ cm *und den Winkeln* $\alpha = 30°$; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°; 150°, *indem Sie die jeweilige Höhe rechnerisch ermitteln! Vergleichen Sie mit den unter b) gefundenen Werten! Wie fügen sich die Werte für* $\alpha = 45°$ *und* $\alpha = 135°$ *ein?*

e) *Wie ändert sich die graphische Darstellung der Funktion* $A = f(\alpha)$, *wenn Sie* $a = 3$ cm (7 cm) *wählen?*

2. *Dreht sich eine Spule gleichförmig in einem homogenen Magnetfeld, so wird in ihr eine Wechselspannung U induziert. Diese ändert ständig ihre Größe und wechselt ihre Polarität in regelmäßigen Zeitabständen. Zeichnen Sie den Verlauf der Spannung U in Abhängigkeit vom Drehwinkel* α *während einer Umdrehung der Spule!*

Der Flächeninhalt A eines Rhombus hängt bei gegebener Seitenlänge vom Winkel α ab. Ebenso hängt die in einer Spule induzierte Spannung U vom Winkel α ab. Die Abhängigkeit ist in beiden Fällen von gleicher Art; sie läßt sich aber durch keine der bisher behandelten Funktionen ausdrücken. Im folgenden werden wir diese Funktion näher bestimmen.

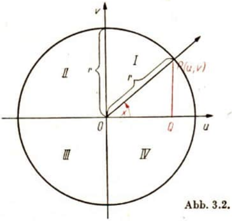


Abb. 3.2.

Es sei ein rechtwinkliges uv-Koordinatensystem mit gleicher Teilung auf den Achsen gegeben (Abb. 3.2.). Ein Winkel x entsteht dadurch, daß man einen Strahl um seinen Anfangspunkt $O\,(0;\,0)$ von der positiven u-Achse als Ausgangslage aus dreht. Als **positiven Drehsinn** legt man fest, daß die positive u-Achse durch Drehung um 90° in die positive v-Achse übergeführt wird.

Um O sei ein Kreis mit beliebigem Radius r gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide den Kreis im Punkt $P\,(u;\,v)$. Dreht sich der Strahl um O bis in die Ausgangslage zurück, so hat er die vier Quadranten des Kreises überstrichen, und der Punkt P ist auf der Peripherie des Kreises einmal herumgelaufen.

Von P sei das Lot auf die u-Achse gefällt und der Fußpunkt mit Q bezeichnet. Wie bewegt sich Q, wenn P, von der Ausgangslage auf dem positiven Teil der u-Achse beginnend, einen vollen Umlauf ausführt?

Im Verlauf der Drehung des Strahls ändert sich mit dem Winkel x die Länge des projizierenden Lotes $\overline{P_nQ_n}$ des zugehörigen Punktes $P_n\,(n = 1;\ 2;\ 3;\ldots)$. Im I. Quadranten vergrößert sich die Länge des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel $x\,(0° \leqq x \leqq 90°)$ von 0 bis r (Abb. 3.3.). Im II. Quadranten verkürzt sich die Länge

Abb. 3.3.

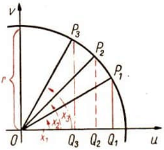
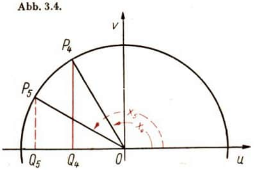


Abb. 3.4.



des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel x $(90° \leqq x \leqq 180°)$ von r bis 0 (Abb. 3.4.). Überschreitet der Winkel den Wert 180°, so nimmt die Maßzahl des Lotes negative Werte an, und zwar nimmt sie im III. Quadranten von 0 bis $-r$ ab und steigt im IV. Quadranten von $-r$ bis 0 an.

Die mit Vorzeichen versehene Maßzahl des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ hängt bei konstanter Länge des Radius $\overline{OP} = r\ (r > 0)$ eindeutig vom Winkel x ab.

Wir bilden nun das Verhältnis $\frac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$. Dieses Verhältnis (der Radius $\overline{OP}$ ist zunächst konstant) hängt ebenfalls eindeutig vom Winkel x ab und ändert sich in gleicher Weise wie das projizierende Lot $\overline{PQ}$ selbst. Bedenkt man, daß nach dem Strahlensatz für die Winkel x das Verhältnis $\frac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$ auch für veränderte Radien jeweils gleich ist, so erkennt man, daß

das Verhältnis $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ nur vom Winkel x, nicht aber vom Radius $\overline{OP}$ abhängt.

Da die Maßzahl des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ gleich der Ordinate v des Punktes P ist, kann das Verhältnis auch lauten:

Ordinate v : Maßzahl des Radius r.

Dieses Verhältnis nennt man den **Sinus (sin)**[1] des Winkels x.

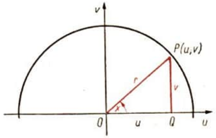


Abb. 3.5.

[1] sinus (lat.), Rundung, Wölbung

Definition 1: Das Verhältnis der Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Sinus des Winkels x (Abb. 3.5.).

(1) $\sin x = \frac{\overline{PQ}}{r}$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ oder $\sin x = \frac{v}{r}$

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist v mit Vorzeichen, von r jedoch nur die Maßzahl zu verwenden.
Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Maßzahl des Radius

vom Winkel ausdrückt, heißt nach Erklärung 1 **Sinusfunktion**. Als Funktionszeichen wird dabei das Symbol sin benutzt.
Bezeichnet man den Wert des veränderlichen Quotienten mit y, so erhält man die Funktion

$$y = \sin x .$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Abbildung 3.2., in der r konstant ist, die Funktionswerte der Sinusfunktion für die Winkel $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$! (Im III. und IV. Quadranten nimmt sin x *negative Funktionswerte an.)*

In der ersten der eingangs gestellten Aufgaben wird die Abhängigkeit des Flächeninhalts A des Rhombus vom Winkel α durch die Sinusfunktion ausgedrückt. Der Flächeninhalt ist proportional $\sin \alpha$:

$$A \sim \sin \alpha .$$

Mit wachsendem Winkel α nimmt der Flächeninhalt des Rhombus im Bereich $0° < \alpha < 180°$ zunächst zu, erreicht bei $\alpha = 90°$ einen Höchstwert (Quadrat) und nimmt dann wieder ab.
Im zweiten Beispiel besteht die gleiche Abhängigkeit zwischen induzierter Spannung U und Winkel α. Es gilt

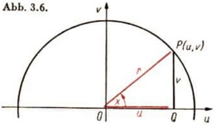
$$U \sim \sin \alpha .$$

Die induzierte Spannung steigt im Bereich $0° \leqq \alpha \leqq 360°$ zunächst von $U = 0$ an, erreicht einen Höchstwert und fällt wieder ab. Sie nimmt negative Werte an, durchläuft einen Tiefstwert und steigt wieder bis $U = 0$ an.

Die Kosinusfunktion

Bei der Drehung des Strahls OP um O in Abbildung 3.2. ändert sich mit dem Winkel x auch die Projektion $\overline{OQ}$ des Radius auf die u-Achse (Abb. 3.6.).

Abb. 3.6.



Das Verhältnis Projektion $\overline{OQ}$: Radius $\overline{OP}$, das auch lauten kann

Abszisse u : Maßzahl des Radius r,

hängt ebenfalls nur vom Winkel x ab. Dieses Verhältnis nennt man den **Kosinus** (**cos**) des Winkels x.

Definition 2: Das Verhältnis der Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Kosinus des Winkels x (Abb. 3.6.).

(2) $\cos x = \frac{\overline{OQ}}{r}$ $(0° \leq x \leq 360°)$ oder $\cos x = \frac{u}{r}$

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist wieder nur die Maßzahl von r zu verwenden.

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Maßzahl des Radius

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kosinusfunktion:**

$y = \cos x$

Ermitteln Sie die Funktionswerte der Kosinusfunktion für die Winkel $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$! Im II. und III. Quadranten hat u negative Werte. Daher nimmt $y = \cos x$ in diesen Quadranten negative Funktionswerte an.

Die Tangensfunktion

Eine weitere Winkelfunktion erhalten wir durch das Verhältnis

Ordinate v : Abszisse u,

das ebenfalls nur vom Winkel x abhängt (Abb. 3.7.). Für $x = 0°$ ist $v = 0$ und $u = r$ $(r \neq 0)$, also $\frac{v}{u} = 0$. Mit wachsendem x nimmt $\frac{v}{u}$ zu. Wenn der Winkel x sich dem Wert $90°$ nähert, wächst der Quotient $\frac{v}{u}$ über alle Grenzen. (Dieser Fall kann mit der Funktion $y = \frac{1}{x}$ verglichen werden, wenn sich x dem Wert 0 nähert.) Für $x = 90°$ existiert demnach kein Tangenswert. Das gleiche gilt für $x = 270°$.

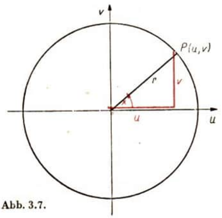


Abb. 3.7.

Im II. Quadranten ist der Quotient $\frac{v}{u}$ negativ. Das Verhältnis $\frac{v}{u}$ wächst mit zunehmendem Winkel und erreicht für $x = 180°$ den Wert 0. Der Quotient $\frac{v}{u}$ zeigt im III. Quadranten das gleiche Verhalten wie im I. Quadranten, und im IV. Quadranten verhält er sich wie im II. Quadranten.

Definition 3: Das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Tangens[1] des Winkels x.

(3) $\tan x = \frac{v}{u}$ $(0° \leq x \leq 360°;\ x \neq 90°;\ x \neq 270°)$

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Abszisse

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Tangensfunktion:**

$y = \tan x$

[1] tangere (lat.), berühren

Die Kotangensfunktion

Als vierte Funktion am Kreis betrachten wir das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v (Abb. 3.7.).

Definition 4: Das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Kotangens des Winkels x.

(4) $\cot x = \frac{u}{v}$ $(0° < x < 360°;\ x \neq 180°)$

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Ordinate

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kotangensfunktion**:

$$y = \cot x$$

Nähert sich der Winkel x im I. Quadranten von größeren Winkelwerten her dem Wert 0, so wächst der Quotient $\frac{u}{v}$ und damit die Funktion $y = \cot x$ über alle Grenzen. Für $x = 0°$ existiert die Funktion $y = \cot x$ nicht. Das gleiche gilt für $x = 180°$ und $x = 360°$.

Im II. und im IV. Quadranten haben die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion negative Funktionswerte.

Zwei weitere, nicht so bedeutende Winkelfunktionen sind der **Sekans** und der **Kosekans** eines Winkels.

Der Sekans (sec) des Winkels x (Abb. 3.2.) ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: Projektion $\overline{OQ}$.

Der Kosekans (cosec) des Winkels x ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: projizierendes Lot $\overline{PQ}$.

Für die Umrechnung gelten die Gleichungen:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems mehrere konzentrische Kreise, und legen Sie in den I. Quadranten einen Strahl, der in O beginnt!

a) Bestimmen Sie jeweils das Verhältnis „Ordinate des Schnittpunktes des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius“!

b) Vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander!

c) Wie ändert sich das Verhältnis im I. Quadranten, wenn sich der Winkel ändert?

d) Beurteilen Sie, warum die Sinusfunktion durch das Verhältnis von Ordinate zur Maßzahl des Radius und nicht durch die Ordinate allein definiert wird!

e) Welche besondere Rolle spielt der Kreis, der die Längeneinheit als Radius hat?

f) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. Quadranten durch!

2. Um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems sei ein Kreis mit dem Radius r gezogen. Von O geht ein Strahl aus, der den Kreis im Punkt $P(u; v)$ schneidet und mit dem positiven Teil der Abszissenachse den Winkel x bildet. Wie groß ist jeweils $\sin x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

a) $r = 8;\ v = 4$	**b)** $r = 3;\ v = 1$	**c)** $r = 13;\ v = -5$
d) $u = 3;\ v = 4$	**e)** $u = 2;\ v = -1{,}5$	**f)** $u = v = 2$
g) $u = -1;\ v = 3$	**h)** $r = c;\ v = a$	**i)** $u = b;\ v = a$

3. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Sinus die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** 0,1 **e)** $-0{,}3$ **f)** 0,4 **g)** $-0{,}8$ **h)** 0,9

Beachten Sie, daß sich jeweils zwei Winkel ergeben! Überlegen Sie, wie man die Aufgabe möglichst leicht lösen kann!

i) Warum ist 1,1 als Funktionswert des Sinus nicht möglich?

4. a) bis **c)** Beantworten Sie die Fragen der Aufgaben **1a**, **b** und **c** für das Verhältnis „Abszisse des Schnittpunktes P des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius"!
d) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. und III. Quadranten durch!

5. Wie groß sind für den in Aufgabe **2** geschilderten Sachverhalt die Werte von $\cos x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

a) $r = 3;\ u = 2,$ **b)** $r = 2;\ u = \sqrt{3}$

c) bis **i)** Siehe Aufgabe **2c** bis **i**!

6. Bestimmen Sie die Kosinuswerte der folgenden Winkel nach Definition 2 durch Messung am Kreis!

a) 22,5° **b)** 45° **c)** 67,5° **d)** 135° **e)** 202,5° **f)** 337,5°

7. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die die Kosinusfunktion die in Aufgabe **3a** bis **h** angegebenen Werte annimmt!

8. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius r!
Wie verändert sich **a)** die Ordinate v, **b)** die Abszisse u eines Punktes P, der die Kreislinie, vom Punkt $P_1\ (r;\ 0)$ beginnend, im mathematisch positiven Drehsinn durchläuft? Ziehen Sie daraus Folgerungen für den Verlauf der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion!
Für welche Winkel ist $\sin x = \cos x$? In welchen Fällen ist $\sin x = -\cos x$?

9. Vergleichen Sie miteinander:

a) sin 30° und cos 60°, **b)** sin 60° und cos 30°,
c) $\sin x$ und $\cos (90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$,
d) $\cos x$ und $\sin (90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$!

10. Um den Ursprung O eines uv-Koordinatensystems sei ein Kreis mit dem Radius r gezeichnet.

a) Auf dem Kreisbogen mögen zwei Punkte, P und P', im I. bzw. II. Quadranten symmetrisch zur v-Achse liegen. Drücken Sie die zu P und P' gehörenden Winkel durch x $(0° \leqq x \leqq 90°)$ aus!
Bestimmen Sie dann durch Messung am Kreis die Sinus- und Kosinuswerte beider Winkel, und vergleichen Sie die Werte miteinander!

b) Drücken Sie die zu P und P' gehörenden Winkel durch x $(0° \leqq x \leqq 90°)$ für den Fall aus, daß die Punkte im I. und IV. Quadranten symmetrisch zur u-Achse liegen! Vergleichen Sie die Sinus- und Kosinuswerte dieser Winkel miteinander!

11. Tragen Sie in einem uv-Koordinatensystem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel 55° an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2 auf, deren Abszissen $u_1 = 4$ bzw. $u_2 = 6$ sind! Messen Sie in beiden Fällen die Ordinaten v_1 und v_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{v_1}{u_1}$ und $\frac{v_2}{u_2}$!
Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung!

12. Mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre ist zu beweisen, daß im uv-System an konzentrischen Kreisen um O, die von einem Strahl (Anfangspunkt O) geschnitten werden, das Verhältnis $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}}$ der Schnittpunkte unabhängig von der Größe der Koordinaten ist.

13. Bestimmen Sie für die Winkel **a)** 30°, **b)** 60°, **c)** 120°, **d)** 150° am Kreis im uv-System das Verhältnis $v : u$ durch Messung! Kommt es auf den Radius des Kreises an?

14. Welche Werte hat tan x am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die folgenden Koordinaten hat?

a) $u = 4;\ v = 3$ **b)** $u = v = 1$ **c)** $u = -4;\ v = 2$
d) $u = 2;\ v = -1{,}5$ **e)** $u = -0{,}9;\ v = -0{,}6$ **f)** Abszisse b; Ordinate a.

15. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Tangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** 4 **d)** -1 **e)** $\sqrt{3}$ **f)** $-\frac{1}{3}$

16. Tragen Sie im uv-Koordinatensystem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel $35°$ an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2, deren Ordinaten $v_1 = 6$ bzw. $v_2 = 8$ sind!

Messen Sie in beiden Fällen die Abszissen u_1 bzw. u_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{u_1}{v_1}$ und $\frac{u_2}{v_2}$!

Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung!

17. Bestimmen Sie am Kreis nach Definition 4 durch Messung die folgenden Funktionswerte!

a) cot 15° **b)** cot 75° **c)** cot 105° **d)** cot 165° **e)** cot 195° **f)** cot 255°

18. Welche Werte hat cot x am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die in Aufgabe **14** aufgeführten Koordinaten hat?

19. Bestimmen Sie die Werte der Kotangensfunktion für die in Aufgabe **13** angeführten Winkel

a) durch Messung am Kreis im uv-System,

b) unter Verwendung des in Aufgabe **18** gefundenen Zusammenhanges zwischen der Tangens- und der Kotangensfunktion!

20. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Kotangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{4}{7}$ **b)** 2 **c)** $2{,}5$ **d)** $-0{,}8$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** -5

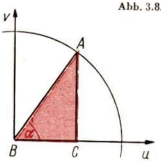
21. Stellen Sie, soweit möglich, die Werte der vier Winkelfunktionen für $x = 0°;\ 90°;\ 180°;\ 270°;\ 360°$ in einer Tabelle zusammen!

22. In einigen Lehrbüchern der Mathematik werden die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck erklärt.

a) Wenden Sie die Definitionen 1 bis 4 auf das rechtwinklige Dreieck ABC in Abbildung 3.8. an!

b) Erklären Sie die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck! Welcher Beschränkung unterliegen diese Erklärungen?

Abb. 3.8.



3.2. Der Zusammenhang der Winkelfunktionen

Die Darlegungen im Abschnitt 3.1. über die Winkelfunktionen können in folgenden Faustregeln zusammengefaßt werden:

1) $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Sinus}$, 2) $\frac{\text{Abszisse}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Kosinus}$,

3) $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \text{Tangens}$, 4) $\frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \text{Kotangens}$.

Für alle vier Verhältnisse wurde die Abhängigkeit vom Winkel x festgestellt.

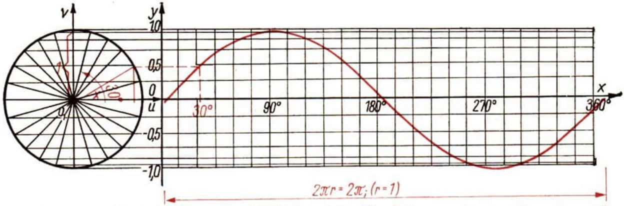
Die Verhältnisse	$v:r$	$u:r$	$v:u$	$u:v$
stellen die Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$

des Winkels x dar.
Aus der Zusammenstellung entnehmen wir, daß die Verhältnisse, die Tangens und Kotangens erklären, für denselben Winkel x zueinander reziprok sind. Die Tangens- und die Kotangensfunktion eines Winkels haben reziproke Werte. Für die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion eines Winkels gilt eine derartige einfache Beziehung nicht.

Die Bilder der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen können im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden. Hierzu verwendet man die Winkel x als Abszissen und die Funktionswerte y als Ordinaten der Kurvenpunkte. Die Abbildung 3.9. stellt das Bild der Funktion

Abb. 3.9.



$y = \sin x$ im Bereich $0° \leq x \leq 360°$ dar. Die Funktionswerte wurden einer Darstellung im uv-Koordinatensystem entnommen, in der dem Radius des Kreises der Wert 1 gegeben wurde. In diesem Einheitskreis (Abb. 3.9., linker Teil) geht die Gleichung (1) über in

(1a) $\sin x = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{PQ}$ gemeint sein soll.

Die Maßzahl der Länge des Lotes $\overline{PQ}$ im Einheitskreis ist also jeweils gleich dem Sinus des entsprechenden Winkels x.
Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse des xy-Systems als Einheit die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel 1° auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den Einheitskreis auf dem positiven Teil der x-Achse vom Ursprung O aus ab und erhält eine Strecke, die dem Vollwinkel 360° entspricht.
Um ein Bild der Funktion zu zeichnen, reicht es praktisch aus, wenn man den rechten Winkel im Einheitskreis in sechs gleiche Teile teilt und die zu einem Winkel von 15° gehörende Bogenlänge näherungsweise durch die Sehne ersetzt.

Wie ermittelt man in der Abbildung 3.9. für einen gegebenen Winkel den zugehörigen Kurvenpunkt?

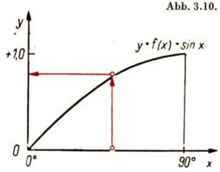
Aus der Abbildung 3.9. ist ersichtlich:

Die Werte der Sinusfunktion $y = \sin x$ liegen zwischen $y = -1$ und $y = +1$. Es gilt also der Wertevorrat: $-1 \leqq y \leqq +1$.

Im I. und IV. Quadranten ist die Sinusfunktion eine steigende, im II. und III. Quadranten eine fallende Funktion. Im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ ist jedem Winkel x ein Funktionswert $y = \sin x$ eindeutig zugeordnet. Diese Aussage kann man jedoch nicht umkehren.

Wieviel Winkelwerte gehören a) im allgemeinen zu einem gegebenen Funktionswert, b) zu $y = +1$, $y = -1$, $y = 0$?

Abb. 3.10.



Dagegen wird im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ jedem Winkel x ein Funktionswert y $(0 \leqq y \leqq +1)$ umkehrbar eindeutig (eineindeutig) zugeordnet. Man sagt auch: Die Funktion $y = \sin x$ bildet die Menge der Winkel x $(0° \leqq x \leqq 90°)$ auf die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und $+1$ $(0 \leqq y \leqq +1)$ eineindeutig ab (Abb. 3.10.). Die Abbildung 3.11. zeigt das Bild der Funktion $y = \cos x$, das in ähnlicher Weise wie das der Sinusfunktion gezeichnet wird. Als Ordinaten y hat man die entsprechenden Abszissen u im Einheitskreis des uv-Koordinatensystems zu verwenden.

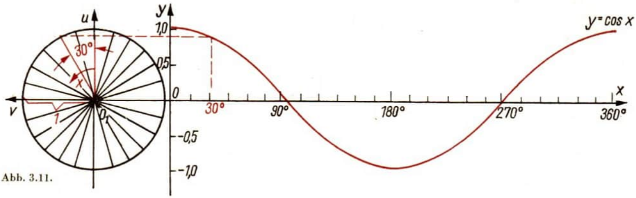
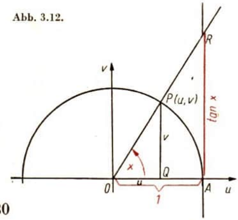


Abb. 3.11.

Zur Konstruktion des Bildes der Tangensfunktion in Abbildung 3.12. wurde an den Einheitskreis im Punkt A (1; 0) die Tangente (Haupttangente) gelegt. Der den Winkel x erzeugende Strahl schneidet die Tangente in R. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\overline{AR}:1 = v : u.$$

Abb. 3.12.



Da $v : u = \tan x$ ist, ergibt sich

$\overline{AR} = \tan x$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{AR}$ gemeint sein soll.

Der Abschnitt $\overline{AR}$ auf der Haupttangente im Punkte A des Einheitskreises stellt also den Tangens des Winkels x geometrisch dar.[1] Liegt der Winkel x im II. oder III. Quadranten, so schnei-

[1] Diese geometrische Deutung läßt die Bezeichnung Tangens für das Verhältnis $v:u$ der Koordinaten eines Kreispunktes verständlich werden.

det der bewegliche Schenkel des Winkels x die Tangente nicht. Der den Tangens des Winkels x darstellende Abschnitt der Haupttangente wird in diesem Fall von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 3.13.). Auf dieser geometrischen Darstellung der Funktionswerte beruht das Konstruktionsverfahren für das Bild der Funktion $y = \tan x$ (Abb. 3.14.).

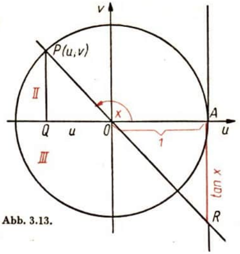


Abb. 3.13.

In ähnlicher Weise erhält man das Bild der Kotangensfunktion (Abb. 3.15.). Hierzu wird an den Einheitskreis im Punkt B (0; 1) die Tangente (Nebentangente) gelegt.

Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneidet diese Tangente in T. Die Dreiecke OTB und OQP sind ähnlich; somit gilt die Proportion:

$$\overline{BT} : 1 = u : v.$$

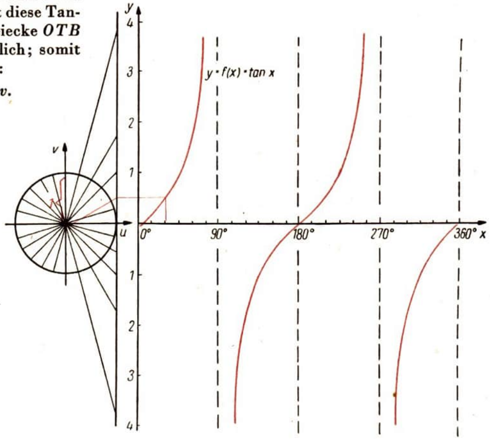


Abb. 3.14.

Da $u : v = \cot x$ ist, ergibt sich

$\overline{BT} = \cot x$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{BT}$ gemeint sein soll.

Der Abschnitt $\overline{BT}$ auf der Nebentangente im Punkte B des Einheitskreises stellt also den Kotangens des Winkels x geometrisch dar.

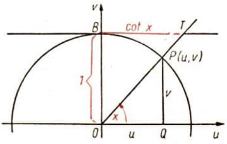


Abb. 3.15.

Im III. und IV. Quadranten wird der den Kotangens des Winkels x darstellende Tangenten-

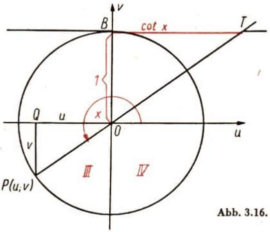
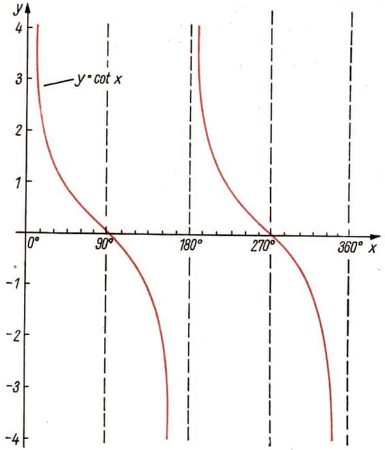


Abb. 3.16.

abschnitt von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 3.16.). Bei der Konstruktion des Bildes der Funktion $y = \cot x$ hat man als Ordinaten die Tangentenabschnitte $\overline{BT}$ zu verwenden (Abb. 3.17.). In den Abbildungen 3.14. und 3.17. zeigt der Verlauf der Kurven anschaulich, daß die Funktion $y = \tan x$ für $x = 90°$ und $x = 270°$, die Funktion $y = \cot x$ für $x = 0°$, $x = 180°$ und $x = 360°$ nicht definiert ist.

Beachten Sie, daß die Funktionswerte der Tangens- und Kotangensfunktion nicht die Strecken $\overline{AR}$ bzw. $\overline{BT}$ selbst, sondern deren Maßzahlen, also unbenannte Zahlen sind!

Abb. 3.17



Die Vorzeichen der Winkelfunktionen

Der Radius r ist stets positiv, aber die Maßzahlen der Projektion $\overline{OQ}$ und des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ bzw. die Koordinaten u und v nehmen je nach dem Quadranten das positive oder negative Vorzeichen an. Die Vorzeichen von u und v bestimmen damit das Vorzeichen der Winkelfunktionen für die Winkel dieses Quadranten.

Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

Leiten Sie die Vorzeichen aus den Definitionen der Winkelfunktionen her!

Beziehungen zwischen den Funktionen bei gleichem Winkel

Dividiert man die Gleichung (1) $\sin x = \frac{v}{r}$ durch die Gleichung (2) $\cos x = \frac{u}{r}$, so erhält man für den gleichen Winkel x die Grundformel

(5) $\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$

Entsprechend ergibt die Division der Gleichung (2) durch die Gleichung (1) für den gleichen Winkel x die Grundformel

(6) $\quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

Sprechen Sie diese Beziehungen in Worten aus!
Für welche Winkelwerte hat die Formel (5), *für welche die Formel* (6) *keine Gültigkeit?*

Durch Multiplikation der Gleichungen (5) und (6) findet man

(7) $\quad \tan x \cdot \cot x = 1.$

Lösen Sie Gleichung (7) *nach* tan *x bzw. nach* cot *x auf!*
Sprechen Sie die sich ergebenden Beziehungen in Worten aus!

Nach den Definitionen (1) und (2) ist $\sin x = \frac{v}{r}$ und $\cos x = \frac{u}{r}$. Werden die beiden Gleichungen quadriert und anschließend addiert, so ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2 + u^2}{r^2}.$$

Wie aus den Abbildungen 3.5., 3.6. und 3.7. hervorgeht, gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS $v^2 + u^2 = r^2$ für jeden Punkt $P(u; v)$ im I. bis IV. Quadranten.
Hieraus ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

An Stelle von $(\sin x)^2$ bzw. $(\cos x)^2$ schreibt man vereinfacht $\sin^2 x$ bzw. $\cos^2 x$.
So erhält man

(8) $\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Lösen Sie die Gleichung (8) *nach* sin *x bzw. nach* cos *x auf!*

Einige weitere Beziehungen gehen aus der Abbildung 3.18. hervor. In der Abbildung 3.18. a wurde im I. Quadranten der Winkel x, in der Abbildung 3.18. b der Winkel $(90° - x)$ eingezeichnet.

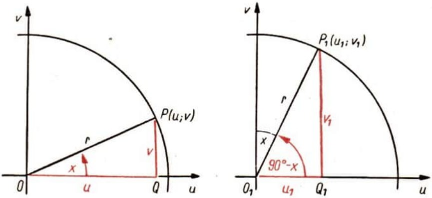


Abb. 3.18. a und 3.18. b

Auf Grund der Definitionen der Winkelfunktionen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin(90^\circ - x) = \frac{v_1}{r}, \qquad \tan(90^\circ - x) = \frac{v_1}{u_1},$$

$$\cos(90^\circ - x) = \frac{u_1}{r}, \qquad \cot(90^\circ - x) = \frac{u_1}{v_1}.$$

Da die Dreiecke OQP und OQ_1P_1 kongruent sind, kann man setzen:

$$u_1 = v \text{ und } v_1 = u.$$

Wendet man die Definitionen der Winkelfunktionen nochmals an, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die **Komplementbeziehungen**:

(9) $$\sin(90^\circ - x) = \cos x, \qquad \tan(90^\circ - x) = \cot x,$$
$$\cos(90^\circ - x) = \sin x, \qquad \cot(90^\circ - x) = \tan x.$$

Durch die Formeln in der zweiten Zeile werden die Namen *Kosinus* und *Kotangens* verständlich: complementi sinus (abgekürzt **co**sinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt **co**tangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels. Die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion nennt man die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion und umgekehrt.

Die Beziehungen (9) können zu folgender Aussage zusammengefaßt werden:

Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels (Komplementbeziehung).

Die Formeln (5) bis (8) werden verwendet, um aus gegebenen Werten einer Winkelfunktion entsprechende Werte anderer Winkelfunktionen zu berechnen. Mit Hilfe der Formeln (9) werden Werte der entsprechenden Kofunktion des Komplementwinkels ermittelt.

Beispiel 1:

Gegeben ist $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Es ist $\tan x_1$ zu bestimmen. Hierzu ist es erforderlich, daß zunächst $\tan x$ durch $\sin x$ ausgedrückt wird.

Nach (5) ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und nach (8) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Indem wir für $\cos x$ den Wurzelausdruck einsetzen, erhalten wir:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

Für $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich daraus:

$$\tan x_1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1.$$

Beispiel 2:

Bekannt seien die Werte der Sinusfunktion für die Winkel $x = 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$. Welche Werte hat die Kosinusfunktion für diese Winkel?

Es ist

$$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ;$$
$$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ;$$
$$\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ.$$

Aufgaben

1. a) Für die Sinus- und die Kosinusfunktion ist zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° eine dreistellige Tafel aufzustellen.
Anleitung: Zeichnen Sie den I. Quadranten eines Einheitskreises, und tragen Sie die Winkel 10°; 20°; 30°; ...; 80° ein! Wählen Sie als Radius 1 dm! Die Funktionswerte kann man so auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen und die dritte Dezimalstelle schätzen (Millimeterpapier!). Kosinus- und Sinusfunktion haben den gleichen Wertevorrat; die Funktionswerte sind aber anderen Winkeln zugeordnet. Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$?

b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Sinus- und der Kosinusfunktion auf!

2. a) Stellen Sie eine dreistellige Tafel der Tangens- und der Kotangensfunktion zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° auf!
Anleitung: Es ist $\tan x$ die Maßzahl des Haupttangentenabschnittes, $\cot x$ die Maßzahl des Nebentangentenabschnittes.
Welchen Zusammenhang beobachten Sie an den Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$?

b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Tangens- und der Kotangensfunktion auf!

3. a) Die Funktionswerte $\tan x$ und $\cot x$ sind zueinander reziprok.
Leiten Sie unter Benutzung dieser Tatsache aus dem Verlauf der Tangenskurve im I. bis IV. Quadranten den Verlauf der Kotangenskurve her!

b) Entwickeln Sie den Verlauf der Kotangenskurve im I. Quadranten auch mit Hilfe der Beziehung $\cot x = \tan(90° - x)$!

4. Es ist eine Tabelle aufzustellen, aus der hervorgeht, ob die Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten steigen oder fallen.

5. a) Stellen Sie die Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion zusammen! (Darunter sind die Stellen x zu verstehen, für die $\sin x = 0$ bzw. $\cos x = 0$ ist.)

b) Stellen Sie diejenigen Stellen zusammen, an denen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ die Werte $+1$ und -1 annehmen!

6. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.

a) Stellen Sie die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius ausdrückt!

b) Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zum Zentriwinkel 20°; 80°; 140°?
Anleitung: Benutzen Sie zur Bestimmung die Tafel aus Aufgabe 1!

7. a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$! Bedienen Sie sich der Konstruktion mit Hilfe des Einheitskreises!
Stellen Sie die Symmetrieverhältnisse der Sinuskurve fest!
Drehen Sie die Kurve um den Punkt $x = 180°$ um den Winkel 180°! Was beobachten Sie?
Wie könnte man diese Erkenntnisse für das Zeichnen der Kurve ausnutzen?

b) Stellen Sie sich eine Schablone für die Sinuskurve her!

c) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \cos x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$!
Stellen Sie die Symmetrieverhältnisse der Kosinuskurve fest!

8. Bestimmen Sie graphisch durch Interpolation an der Sinus- bzw. Kosinuskurve die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 5°$	**b)** $\sin 78°$	**c)** $\sin 175°$	**d)** $\sin 258°$
e) $\cos 25°$	**f)** $\cos 62°$	**g)** $\cos 118°$	**h)** $\cos 355°$

9. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$ die Winkel, deren Sinus die folgenden Werte haben!

a) 0,35 **b)** 0,70 **c)** $-0{,}30$ **d)** $-0{,}65$

10. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cos x$ die Winkel, deren Kosinus die folgenden Werte haben!

a) 0,40 **b)** 0,125 **c)** $-0{,}45$ **d)** $-0{,}140$

11. a) Stellen Sie die Abhängigkeit der Ordinate v vom Winkel x an Kreisen mit $r = 3$ cm; 4 cm; 5 cm in ein und demselben uv-Koordinatensystem graphisch dar! Geben Sie die Abhängigkeit analytisch an!

b) Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = 2 \sin x$; $y = 3 \sin x$; $y = \frac{1}{2} \sin x$; $y = 1{,}5 \cos x$!
Untersuchen Sie, wie sich durch den Koeffizienten das allgemeine Verhalten der Sinus- bzw. Kosinusfunktion verändert (Nullstellen; Stellen, an denen die Funktion einen Höchst- bzw. Tiefstwert annimmt; Steigen bzw. Fallen)!

c) Stellen Sie die Abhängigkeit der Länge der Sehne vom halben Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2}$ für den Kreis vom Durchmesser 7 cm graphisch dar (Aufg. **6**)! Entnehmen Sie die Längen der Sehnen für die in Aufgabe **6. b** angegebenen Zentriwinkel aus der graphischen Darstellung!

d) Stellen Sie die Abhängigkeit des Flächeninhaltes A eines Rhombus mit der Seite a von einem der Winkel, α, analytisch und graphisch dar!
Vergleichen Sie den Flächeninhalt eines beliebigen schiefwinkligen Rhombus mit dem Flächeninhalt des Quadrates mit der gleichen Seite!

12. a) Die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion sind im I. Quadranten in ein und dasselbe xy-Achsenkreuz zu zeichnen.
Spiegeln Sie die Kurven an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 45°$! Zeichnen Sie dazu entweder (1) nur das Bild einer der beiden Funktionen oder (2) beide Funktionen lediglich im Bereich von 0° bis 45°, und vervollständigen Sie die Zeichnungen durch Spiegelung!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet?

b) Zeichnen Sie die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion nun auch im II. bis IV. Quadranten! Nutzen Sie die Möglichkeit der Spiegelung an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 225°$!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet?

13. a) Zeichnen Sie die Bilder der Tangens- und der Kotangensfunktion im I. Quadranten in dasselbe xy-Achsenkreuz!
Untersuchen Sie, in bezug auf welche Symmetrieachse die beiden Kurven symmetrische Figuren sind!
Wie drückt sich dieser Zusammenhang analytisch aus? Welche Vereinfachung ergibt sich für die Anlage einer gemeinsamen Tafel der Tangens- und der Kotangensfunktion?

b) Zeichnen Sie die Bilder der Tangens- und der Kotangensfunktion auch im II. bis IV. Quadranten, und untersuchen Sie, in bezug auf welche Symmetrieachse die Kurven in diesem Bereich symmetrische Figuren sind!
Wie drückt sich dieser Zusammenhang analytisch aus?

14. Bestimmen Sie durch Interpolation an der Tangens- bzw. Kotangenskurve die folgenden Funktionswerte!

a) tan 73° **b)** tan 11° **c)** tan 107° **d)** tan 191°
e) cot 39° **f)** cot 66° **g)** cot 107° **h)** cot 294°

15. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \tan x$ die Winkel, deren Tangens die folgenden Werte hat!

a) 1,50 **b)** 0,50 **c)** $-0{,}83$ **d)** $-2{,}10$

16. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cot x$ die Winkel, deren Kotangens die folgenden Werte hat!

a) 2,10 **b)** 0,83 **c)** $-0{,}50$ **d)** $-1{,}50$

17. Leiten Sie aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen her!

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\tan x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	—

18. Beschreiben und vergleichen Sie den Verlauf der Kurven der Sinus- und der Tangensfunktion im Bereich von 0° bis 90°!
Welche Punkte haben die beiden Kurven gemeinsam?

19. Beweisen Sie die Formeln

a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, **b)** $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$!

20. Bestätigen Sie die Richtigkeit der Beziehungen

a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ und **b)** $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$!

21. Aus den Funktionen $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ können jeweils die drei anderen Winkelfunktionen bestimmt werden.
Leiten Sie die Beziehungen her, und vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle!

gesucht \ ausgedrückt durch	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	—	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	...	...
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	—	...	...
$\tan x$	...	...	—	...
$\cot x$	...	...	...	—

22. a) Am Einheitskreis ist $\overline{OP} = 1$ und $\overline{PQ} \triangleq \sin x$ (Abb. 3.19.). Drücken Sie die dritte Seite mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS durch 1 und $\sin x$ aus! Stellen Sie dann gemäß den Definitionen 1 bis 4 die vier Winkelfunktionen von x auf, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der ersten Spalte der Tabelle in Aufgabe **21**!

b) Verfahren Sie genauso mit dem Dreieck OQP aus Abbildung 3.20.!

c) Desgleichen mit dem Dreieck OAR aus Abbildung 3.21.!

Abb. 3.19.

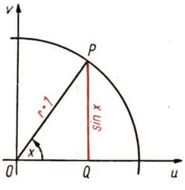


Abb. 3.20.

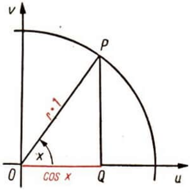
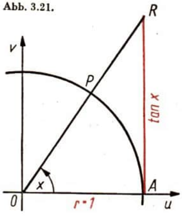


Abb. 3.21.



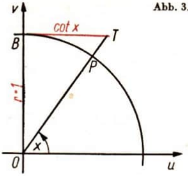


Abb. 3.22.

d) Desgleichen mit dem Dreieck OTB aus Abbildung 3.22.!

Anmerkung: Diese vier Figuren sind gute Gedächtnisstützen für die Umrechnungsbeziehungen der Tabelle in Aufgabe **21**.

23. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $\cos x \cdot \tan x$ **b)** $\sin x \cdot \cot x$ **c)** $\frac{\cos x}{\cot x}$

d) $\frac{\sin x}{\tan x}$ **e)** $\frac{\tan x}{\cot x}$

f) $\tan x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$

24. Gegeben sind die folgenden Funktionswerte.

a) $\sin 30° = 0{,}5$	**b)** $\tan 45° = 1$	**c)** $\cos 120° = -0{,}5$
d) $\tan 0° = 0$	**e)** $\cot 270° = 0$	**f)** $\sin 13° = 0{,}2250$
g) $\cos 40° = 0{,}7660$	**h)** $\tan 308° = -1{,}280$	**i)** $\cot 59° = 0{,}6009$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle in Aufgabe **21** die übrigen Funktionswerte der Winkel!

25. Berechnen Sie aus den gegebenen Funktionswerten jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen!

a) $\sin x = \frac{1}{3}$	**b)** $\cos x = \frac{3}{4}$	**c)** $\tan x = 3$
d) $\cot x = \sqrt{3}$	**e)** $\sin x = \frac{10}{11}$	**f)** $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
g) $\tan x = \frac{1}{4}$	**h)** $\cot x = 2 - \sqrt{3}$	**i)** $\sin x = -\frac{1}{2}$
k) $\cos x = \frac{1}{2}$	**l)** $\tan x = -1$	**m)** $\cot x = \sqrt{3} - 2$

Schülerauftrag

Fertigen Sie das in Abbildung 3.23. dargestellte Gerät zum Bestimmen der Werte der Winkelfunktionen an!

Es besteht aus einem durchscheinenden Deckblatt mit dem Vollkreis und dem Durchmesser sowie aus einem Grundblatt mit dem Quadrat und dem Quadranten. Auf den Quadratseiten kann man für den mit dem Durchmesser eingestellten Winkel unmittelbar die Funktionswerte $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ $(0° \leqq x \leqq 45°)$ und $\cot x$ $(45° \leqq x \leqq 90°)$ ablesen. Führen Sie den Beweis! Wie findet man die Tangenswerte für Winkel zwischen 45° und 90° und die Kotangenswerte für Winkel zwischen 0° und 45°?

Beurteilen Sie die Genauigkeit, mit der Sie die Funktionswerte an Ihrem Gerät ablesen können!

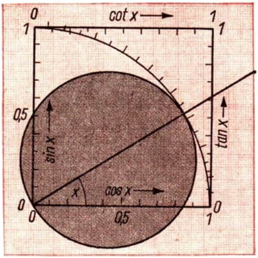


Abb. 3.23.

3.3. Die Tafeln der Winkelfunktionen

Die Werte der Winkelfunktionen sind überwiegend irrationale Zahlen. Sie sind in Tafeln zusammengefaßt, die

das Aufsuchen des Wertes $y = f(x)$ einer Winkelfunktion $f(x)$ zu einem gegebenen Winkel x

sowie das Aufsuchen des Winkels x zu einem gegebenen Funktionswert $f(x)$ ermöglichen.

Im folgenden wird stets auf das Tafelwerk von Beyrodt/Küstner *Vierstellige Logarithmen — Zahlen, Werte, Formeln* Bezug genommen.

Aufsuchen der Funktionswerte bzw. der Winkel

Erläutern Sie die Begriffe steigende Funktion *und* fallende Funktion, *indem Sie im I. Quadranten bei jeder der vier Winkelfunktionen angeben, wie sich der Funktionswert bei einer Änderung des Winkels ändert!*

Die Tafel 13 enthält unter Ausnutzung des Umstandes, daß die Kosinusfunktion die Kofunktion zur Sinusfunktion ist, die Funktionswerte für $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ($0° \leqq x \leqq 90°$). Entsprechend enthält die Tafel 14 die Funktionswerte für $y = \tan x$ und $y = \cot x$.

Die Winkel im Rahmen auf der linken Seite und oben bilden den Tafeleingang für die Funktion $y = \sin x$ ($y = \tan x$), die Winkel im Rahmen auf der rechten Seite und unten den für die Funktion $y = \cos x$ ($y = \cot x$). Dabei sind die Winkel für die Funktionen Kosinus bzw. Kotangens in entgegengesetzter Folge aufgeführt.

Die Funktionswerte sind jeweils zwei Winkeln zugeordnet. Einerseits stellen sie den Sinuswert (Tangenswert) eines Winkels dar, andererseits den Kosinuswert (Kotangenswert) des Komplementwinkels.

Beispiele:

$\sin 21{,}0° = 0{,}3584$; $\cos(90° - 21{,}0°) = \cos 69{,}0° = 0{,}3584$
$\tan 63{,}2° = 1{,}980$; $\cot(90° - 63{,}2°) = \cot 26{,}8° = 1{,}980$

Da die tabellierten Funktionswerte fast alle gerundet sind, müßte eigentlich geschrieben werden: $\sin 21{,}0° \approx 0{,}3584$. Man verzichtet jedoch wie auch bei den Logarithmen auf diese Unterscheidung im Schriftbild.

Ist der Winkel gesucht, so liest man bei gegebenem Sinusfunktionswert (Tangensfunktionswert) die Gradzahl in dem Winkelrahmen ab, der die linke Spalte und die obere Zeile bildet. Bei gegebenem Kosinusfunktionswert (Kotangensfunktionswert) findet man die Gradzahl in dem Winkelrahmen, der die rechte Spalte und die untere Zeile bildet.

Beispiele:

$\sin x = 0{,}4664$	$\cos x = 0{,}2284$	$\tan x = 0{,}7400$	$\cot x = 10{,}99$
$x = 27{,}8°$	$x = 76{,}8°$	$x = 36{,}5°$	$x = 5{,}2°$

Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad gegeben, so hat man zu interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteiltem Grad die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel 1:

$y = \sin 13{,}27°$

Aus Tafel 13 entnimmt man die Funktionswerte für $\sin 13{,}20°$ und $\sin 13{,}30°$, zwischen denen der gesuchte Funktionswert liegt.

$$\frac{10°}{100}\left|\begin{array}{l}\frac{n°}{100}\left|\begin{array}{l}\sin 13{,}20° = 0{,}2284\\ \sin 13{,}27° = 0{,}22\,.\,.\end{array}\right| d\\ \quad\sin 13{,}30° = 0{,}2300\end{array}\right| D$$

Nach dem Einsetzen in die Interpolationsformel $d = \frac{D \cdot n}{10}$ ergibt sich:

$$d = \frac{16 \cdot 7}{10} = 11{,}2 \approx 11.$$

Man addiert 11 Zehntausendstel zu 0,2284 und erhält

$$y = \sin 13{,}27° = 0{,}2295.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} y &= \cos 52{,}14°\\ &\cos 52{,}10° = 0{,}6143\\ &\cos 52{,}14° = 0{,}61\,.\,.\\ &\cos 52{,}20° = 0{,}6129\end{aligned}$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um $D = 14$ Zehntausendstel.
Wächst der Winkel um $n = 4$ Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um d Zehntausendstel.
Die Eigendifferenz berechnet man zu $d = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5{,}6$, gerundet 6. Man subtrahiert 6 Zehntausendstel von 0,6143 und erhält

$$y = \cos 52{,}14° = 0{,}6137.$$

Beispiel 3:

$y = \tan 68{,}44°$

$$\begin{array}{rr} \tan 68{,}44° = & 2{,}625 \\ & +\,0{,}005 \\ \hline \tan 68{,}44° = & 2{,}531 \end{array} \qquad d = \frac{13 \cdot 4}{10} = 5{,}2 \approx 5$$

Ist der Winkel in sexagesimaler Teilung, also in Grad, Minuten und Sekunden gegeben, so hat man vor der Benutzung der Tafeln die Minuten (′) und Sekunden (″) in dezimale Teile eines Grades umzurechnen. Für die Umwandlung von m' bzw. s'' in Grad gelten folgende Formeln:

$$60' = 1° \qquad 60'' = \left(\frac{1}{60}\right)^°$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^° \qquad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^°$$

$$m' = \left(\frac{m}{60}\right)^° \qquad s'' = \left(\frac{s}{3600}\right)^°$$

Beispiel 4:

17° 13′ 25″ sind in Grad und Dezimalgrad zu verwandeln (auf zwei Dezimalstellen).

$13' = \left(\frac{13}{60}\right)^° \approx 0{,}217°$ $\qquad$ $25'' = \left(\frac{25}{3600}\right)^° \approx 0{,}007°$

Ergebnis: 17° 13′ 25″ $\approx$ 17,22°

Es gibt auch Tafeln der Winkelfunktionen, denen die sexagesimale Teilung des Winkels zugrunde gelegt ist.

Aufsuchen der Winkel x mit Interpolieren

Steht der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel, so hat man beim Aufsuchen des Winkels zu interpolieren.

Beispiel 5:

$\tan x = 0{,}3652$

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel 14 verzeichneten Werten 0,3640 und 0,3659, zu denen die Winkel 20,00° und 20,10° gehören:

$$\frac{10^\circ}{100}\left[\begin{array}{l} \frac{n^\circ}{100}\left[\begin{array}{l}\tan 20{,}00^\circ = 0{,}3640 \\ \tan 20{,}0\,.^\circ = 0{,}3652\end{array}\right]d \\ \qquad\tan 20{,}10^\circ = 0{,}3659\end{array}\right]D$$

Nach dem Einsetzen in die Formel $n = \frac{d \cdot 10}{D}$ ergibt sich:

$$n = \frac{12 \cdot 10}{19} = 6{,}3\,.\,. \approx 6.$$

Man addiert 6 Hundertstelgrad zu 20,00° und erhält $x = 20{,}06^\circ$.

Beispiel 6:

$\cos x = 0{,}8768$

$$\begin{array}{rr} x = & 28{,}70^\circ \\ & +\ \underline{0{,}04^\circ} \\ x = & 28{,}74^\circ \end{array} \qquad\qquad n = \frac{3 \cdot 10}{8} \approx 4$$

Soll der errechnete Winkel in sexagesimaler Teilung ausgedrückt werden, so hat man anschließend umzurechnen:

$$\begin{array}{ll} x = 28{,}74^\circ & (0{,}1^\circ = 6'\,;\ 0{,}01^\circ = 36'') \\ & \ 0{,}7^\circ = 7 \cdot 6' = 42' \\ & 0{,}04^\circ = 4 \cdot 36'' = 144'' = 2'\,24'' \\ x = 28^\circ\,44'\,24'' & \end{array}$$

Die Winkelfunktionsleitern auf dem Rechenstab

Werden die Punkte der Sinuskurve mit den Abszissen $x = 0°;\ 10°;\ 20°;\ldots;\ 90°$ senkrecht auf die y-Achse projiziert, so erhält man eine Darstellung der Funktion $y = \sin x$ in Form einer **Funktionsskale.** Auf der Funktionsskale in Abbildung 3.24. sind auf der Einheitslänge 0...1 die Punkte, die den Winkeln 0°; 10°;...; 90° entsprechen, rot markiert. Stark gerundete Werte der Sinusfunktion können somit auf dieser sogenannten **Doppelleiter** abgelesen werden.

Die rote Teilung der Funktionsskale in Abbildung 3.24. ist eine Sinusteilung der Einheitslänge 0 ... 1.

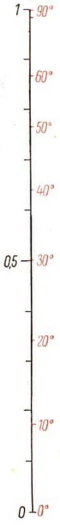


Abb. 3.24

Die **Sinusfunktionsleiter** auf der Rückseite des Rechenstabes unterscheidet sich von der eben beschriebenen dadurch, daß die Logarithmen der Sinusfunktion abgetragen sind. Auf dem Normalrechenstab sind auf einer Länge von 25 cm die Logarithmen der Zahlen 0,1 bis 1 aufgetragen. Dementsprechend sind bei der Sinusleiter die Logarithmen der Funktion $y = \sin x$ im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Winkelangaben versehen. Da $0{,}1000 = \sin 5{,}74°$ ist, beginnt die Sinusleiter auf dem Rechenstab mit 5,74° (Abb. 3.25.).
Die Sinusleiter ist auf die logarithmische Skale D des Rechenstabes abgestimmt.

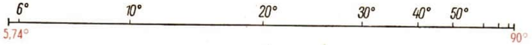


Abb. 3.25.

Somit kann man zu einem gegebenen Winkel x im Bereich $5{,}74° \leqq x \leqq 90°$ den Funktionswert $y = \sin x$ ablesen. Umgekehrt findet man zu einem gegebenen Funktionswert y im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ den zugehörigen Winkel.
Wegen der Komplementbeziehung $\cos x = \sin (90° - x)$ kann die Sinusfunktionsleiter auf dem Rechenstab auch dazu benutzt werden, zu gegebenen Winkeln x im Intervall $84{,}26° \geqq x \geqq 0°$ den Kosinuswert zu finden und umgekehrt.

Stellen Sie eine Sinusfunktionsleiter her, indem Sie auf einem Kartonstreifen auf einer Strecke von 250 mm *Länge die Logarithmen der Werte der Sinusfunktion für folgende Winkel auftragen:* 10°; 20°; 30°; 40°; 50°; 60°; 70°; 80°; 90°*!*
Überlegen Sie, mit welchem Faktor Sie die Mantissen der Logarithmen multiplizieren müssen!

Schreiben Sie die Winkelwerte an!

Vergleichen Sie Ihre Sinusleiter mit der auf dem Rechenstab!

Bei der **Tangensfunktionsleiter** auf dem Rechenstab sind die Logarithmen der Tangensfunktion $y = \tan x$, ebenfalls für den Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Argumenten versehen.
Da $0{,}1000 = \tan 5{,}71°$ und $1{,}000 = \tan 45°$ ist, reicht die Tangensleiter auf dem Rechenstab von 5,71° bis 45°. Man kann also auf dem Rechenstab die natürlichen Zahlenwerte der Tangensfunktion nur im Bereich $5{,}71° \leqq x \leqq 45°$ ablesen und umgekehrt.
Wegen der Komplementbeziehung $\cot x = \tan (90° - x)$ kann die Tangensleiter verwendet werden, zu gegebenen Winkeln x im Bereich $45° \leqq x \leqq 84{,}29°$ den Kotangenswert zu finden und umgekehrt. Außerdem findet man auf dem Rechenstab für Sinus und Tangens kleiner Winkel eine gemeinsame Leiter. Sie reicht von 0,75° bis 5,73° entsprechend den Funktionswerten 0,01 bzw. 0,1 für Sinus und Tangens. Es ist $\sin 0{,}57° = \tan 0{,}57° = 0{,}0100$. Da sich beim Funktionswert 0,1000 die zugehörigen Winkelwerte bei Sinus und Tangens in den Hundertstelgraden unterscheiden (5,74° bzw. 5,71°), ist für den Winkel der mittlere Wert 5,73° zu nehmen. Diese Leiter läßt sich außerdem für die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion im Bereich $89{,}43° \geqq x \geqq 84{,}27°$ verwenden.

Stellen Sie eine Tangensleiter her!

Kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen

Falls bei der Lösung einer Aufgabe die Genauigkeit des Rechenstabes ausreicht, aber kein Stab mit Winkelfunktionsleitern zur Verfügung steht, benutzen wir zum Aufsuchen der Funktionswerte die Tafeln der Winkelfunktionen und rechnen im übrigen mit dem Rechenstab. Diese Methode wird als **kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen** bezeichnet. Sie hat insbesondere auch Bedeutung bei Winkelfunktionswerten, die auf dem Rechenstab nicht unmittelbar abgelesen werden können.

Geben Sie diese Bereiche des Rechenstabes an!

Beispiel 7: $x = \frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot \sin 44{,}6°$

Wir finden in Tafel 13 $\sin 44{,}6° = 0{,}7022$.

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot 0{,}702$.

Es ergibt sich $x = 21{,}7$.

Beispiel 8: $\sin x = \frac{36{,}6 \cdot \sin 55{,}7°}{32{,}3}$

In Tafel 13 finden wir $\sin 55{,}7° = 0{,}8261$.

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir den Ausdruck $\frac{36{,}6 \cdot 0{,}826}{32{,}3}$ und finden $\sin x = 0{,}936$.

Nun suchen wir in Tafel 13 den Winkel auf. Es ergibt sich

$x = 69{,}4°$.

Beispiel 9: $x = \frac{2{,}73 \cdot \tan 73{,}4° \cdot \cos 3{,}5°}{6{,}84}$

Den Funktionswert $\tan 73{,}4°$ finden wir nicht auf dem Rechenstab. Wir könnten $\tan 16{,}6°$ ablesen und davon den reziproken Wert nehmen. Desgleichen könnten wir $\cos 3{,}5°$ als $\sin 86{,}5°$ ablesen, aber nur mit geringer Genauigkeit. Deshalb suchen wir $\tan 73{,}4°$ in Tafel 14, $\cos 3{,}5°$ in Tafel 13 auf und berechnen den Ausdruck

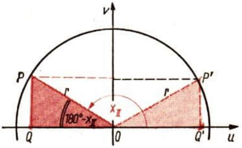
$$\frac{2{,}73 \cdot 3{,}35 \cdot 0{,}998}{6{,}84}.$$

Wir erhalten $x = 1{,}34$.

Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

Die Werte der Winkelfunktionen für Winkel des I. Quadranten werden aus den Tafeln 13 und 14 entnommen. Aber auch die Funktionswerte von Winkeln in den Quadranten II bis IV können mit Hilfe dieser beiden Tafeln bestimmt werden.

Abb. 3.26.



Es sei x_{II} ein Winkel im II. Quadranten (Abb. 3.26.). Auf Grund der Definitionen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin x_{II} = \frac{\overline{PQ}}{r}, \qquad \tan x_{II} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}},$$
$$\cos x_{II} = \frac{\overline{OQ}}{r}, \qquad \cot x_{II} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}.$$

Spiegelt man das Dreieck OQP in Abbildung 3.26. an der v-Achse, so erhält man das Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten. Der Winkel $POQ = (180° - x_{II})$ entspricht dann dem Winkel $P'OQ$. Weiter ist $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ und $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$! Setzt man in die obigen Gleichungen ein und berücksichtigt, daß

$$\frac{\overline{P'Q'}}{r} = \sin(180° - x_{II}), \qquad \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = \tan(180° - x_{II}),$$
$$\frac{\overline{OQ'}}{r} = \cos(180° - x_{II}), \qquad \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \cot(180° - x_{II})$$

ist, so ergibt sich:

$$\sin x_{II} = \sin(180° - x_{II}), \qquad \tan x_{II} = -\tan(180° - x_{II}),$$
$$\cos x_{II} = -\cos(180° - x_{II}), \qquad \cot x_{II} = -\cot(180° - x_{II}).$$

Diese Gleichungen setzen die Winkelfunktionen eines Winkels im II. Quadranten zu den entsprechenden Winkelfunktionen des im I. Quadranten gelegenen Supplementwinkels in Beziehung.

Die Quadrantenbeziehung für den III. Quadranten erhält man mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OPQ in Abbildung 3.27. am Koordinatenursprung des uv-Koordinatensystems. Das bedeutet, daß dieses Dreieck um O um den Winkel 180° gedreht wird. Man erhält wiederum ein Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten, und der Winkel $QOP = (x_{III} - 180°)$ entspricht dem Winkel $Q'OP'$.

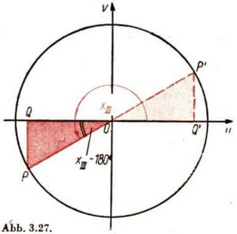


Abb. 3.27.

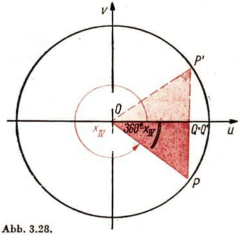


Abb. 3.28.

Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im III. Quadranten weiter!

Die Quadrantenbeziehung für den IV. Quadranten wird mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OQP mit dem Winkel $POQ = (360° - x_{IV})$ an der u-Achse gewonnen (Abb. 3.28.).

Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im IV. Quadranten selbst durch!

Zwischen den Winkelfunktionen, die zu Winkeln in höheren Quadranten gehören, und den Winkelfunktionen des entsprechenden Winkels im I. Quadranten gelten die folgenden Beziehungen:

II. Quadrant

(10) $\sin x_{II} = \sin(180° - x_{II})$ $\quad \tan x_{II} = -\tan(180° - x_{II})$
$\cos x_{II} = -\cos(180° - x_{II})$ $\quad \cot x_{II} = -\cot(180° - x_{II})$

III. Quadrant

(11) $\sin x_{III} = -\sin(x_{III} - 180°)$ $\quad \tan x_{III} = \tan(x_{III} - 180°)$
$\cos x_{III} = -\cos(x_{III} - 180°)$ $\quad \cot x_{III} = \cot(x_{III} - 180°)$

IV. Quadrant

(12) $\sin x_{IV} = -\sin(360° - x_{IV})$ $\quad \tan x_{IV} = -\tan(360° - x_{IV})$
$\cos x_{IV} = \cos(360° - x_{IV})$ $\quad \cot x_{IV} = -\cot(360° - x_{IV})$

Die Beziehungen (10) bis (12) führen die Winkelfunktionen im II. bis IV. Quadranten auf die entsprechenden Funktionen im I. Quadranten zurück.

Beispiele:

10) $\cos 152° = -\cos(180° - 152°) = -\cos 28°$
11) $\cot 215° = \cot(215° - 180°) = \cot 35°$
12) $\tan 312° = -\tan(360° - 312°) = -\tan 48°$

Allgemein:

Um den Wert einer Winkelfunktion zu einem Winkel x ($90° < x < 360°$) zu ermitteln, sucht man in den Tafeln 13 bzw. 14 den Wert der gleichen Funktion für den Winkel $180° - x$, $x - 180°$ bzw. $360° - x$ auf. Zur schnellen Vorzeichenbestimmung dient die Tabelle auf Seite 82.

Man erkennt, daß bei jeder der vier Funktionen jedes Vorzeichen genau zweimal vorkommt. Bei einem gegebenen Funktionswert eines Winkels x findet man infolgedessen für den Winkel (im Bereich von $0° \leqq x < 360°$) zwei Lösungen.

Beispiel 13:

$\sin x = 0{,}9664$

Der Funktionswert ist positiv, also liegen die Winkel x im I. und II. Quadranten.

$x_I = x \quad (0° \leqq x \leqq 90°)$
$x_{II} = 180° - x \quad (0° \leqq x \leqq 90°)$

Aus der Tafel entnimmt man $x = 75{,}1°$.

Demnach ist

$x_I = 75{,}1°$;
$x_{II} = 180° - 75{,}1° = 104{,}9°$.

Beispiel 14:

$\cos x = -0{,}7145$

Der Funktionswert ist negativ, also liegen die Winkel x im II. und III. Quadranten.

$x_{II} = 180° - x \, (0° \leqq x \leqq 90°)$
$x_{III} = 180° + x \, (0° \leqq x \leqq 90°)$

Aus der Tafel entnimmt man $x = 44{,}4°$.

Demnach ist

$$x_{\text{II}} = 180° - 44{,}4° = 135{,}6°;$$
$$x_{\text{III}} = 180° + 44{,}4° = 224{,}4°.$$

Aufgaben

Übungen im Tafelrechnen

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die folgenden Funktionswerte!

1. **a)** sin 12° **b)** sin 84° **c)** sin 3° **d)** sin 29°
e) sin 37° **f)** sin 135° **g)** sin 97° **h)** sin 200°
i) cos 2° **k)** cos 17° **l)** cos 32° **m)** cos 51°
n) cos 68° **o)** cos 150° **p)** cos 101° **q)** cos 213°

2. **a)** tan 21° **b)** tan 58° **c)** tan 5° **d)** tan 12°
e) tan 31° **f)** tan 120° **g)** tan 91° **h)** tan 261°
i) cot 8° **k)** cot 13° **l)** cot 64° **m)** cot 76°
n) cot 87° **o)** cot 110° **p)** cot 249° **q)** cot 96°

3. **a)** sin 5,6° **b)** sin 38,1° **c)** sin 27,3° **d)** sin 77,7°
e) sin 40,9° **f)** sin 113,5° **g)** sin 300,2° **h)** sin 97,3°
i) cos 53,5° **k)** cos 11,8° **l)** cos 44,6° **m)** cos 87,6°
n) cos 58,9° **o)** cos 129,6° **p)** cos 321,4° **q)** cos 131,5°

4. **a)** tan 0,5° **b)** tan 88,0° **c)** tan 56,1° **d)** tan 43,9°
e) tan 68,8° **f)** tan 145,7° **g)** tan 336,5° **h)** tan 172,5°
i) cot 32,3° **k)** cot 52,4° **l)** cot 72,9° **m)** cot 64,8°
n) cot 53,2° **o)** cot 164,8° **p)** cot 282,2° **q)** cot 99,9°

5. **a)** sin 58,11° **b)** sin 63,44° **c)** sin 87,15° **d)** sin 34,26°
e) sin 19,24° **f)** sin 147,87° **g)** sin 219,73° **h)** sin 331,12°
i) cos 22,94° **k)** cos 17,32° **l)** cos 37,22° **m)** cos 9,67°
n) cos 1,12° **o)** cos 177,13° **p)** cos 209,65° **q)** cos 348,48°

6. **a)** tan 1,92° **b)** tan 17,44° **c)** tan 28,55° **d)** tan 39,67°
e) tan 41,72° **f)** tan 216,36° **g)** tan 298,47° **h)** tan 154,41°
i) cot 14,74° **k)** cot 26,59° **l)** cot 34,53° **m)** cot 43,88°
n) cot 53,46° **o)** cot 224,33° **p)** cot 337,29° **q)** cot 135,23°

7. **a)** cos 74,37° **b)** tan 73,06° **c)** cot 216,36° **d)** cos 224,33°
e) sin 13,79° **f)** cot 64,42° **g)** sin 298,47° **h)** sin 337,29°
i) tan 87,44° **k)** sin 81,53° **l)** cot 211,49° **m)** sin 315,32°
n) cot 53,76° **o)** cos 25,61° **p)** cos 265,35° **q)** tan 298,46°

8. **a)** sin 0,2°, tan 0,2° **b)** sin 0,83°, tan 0,83° **c)** sin 1,77°, tan 1,77° **d)** sin 2,6°, tan 2,6°
e) sin 3,25°, tan 3,25° **f)** sin 4,71°, tan 4,71° **g)** sin 5,0°, tan 5,0° **h)** sin 9,1°, tan 9,1°

9. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion
a) auf vier Dezimalstellen, **b)** auf drei Dezimalstellen überein?
c) Begründen Sie diese Erkenntnisse am Kreis, und formulieren Sie sie!

10. Verwandeln Sie die sexagesimale Teilung der folgenden Winkel in die dezimale (auf zwei Dezimalstellen)!
a) 16° 18′ **b)** 38° 24′ **c)** 79° 39′ **d)** 24° 25′
e) 20° 30′ 30″ **f)** 54° 3′ 48″ **g)** 78° 52′ 33″ **h)** 0° 5′ 13″

11. Rechnen Sie die folgenden Winkelangaben in Grad, Minuten und Sekunden um!

a) 27,1° **b)** 14,9° **c)** 34,12° **d)** 50,08°
e) 68,47° **f)** 73,57° **g)** 7,93° **h)** 40,28°

12. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion auf!

a) 22,75° **b)** 68,24° **c)** 34,77° **d)** 79,67°
e) 5,02° **f)** 89,07° **g)** 354,63° **h)** 244,66°
i) 327,76° **k)** 173,25° **l)** 41° 24′ **m)** 4° 29′ 58″

13. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion auf!

a) 79,99° **b)** 4,16° **c)** 32,07° **d)** 25,33°
e) 84,31° **f)** 68,23° **g)** 155,37° **h)** 93,50°
i) 252,30° **k)** 300,23° **l)** 57° 44′ **m)** 44° 50′ 40″

14. Berechnen Sie im Bereich $89{,}00° \leqq x \leqq 89{,}10°$ die Werte der Tangensfunktion für Hundertstelgrad durch lineare Interpolation (Tafel 14)! – Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Werten der Tangensfunktion in der untenstehenden Tabelle! Diese sind einer genaueren Tafel entnommen. – Bilden Sie die Differenzen zwischen den interpolierten und den in der Tabelle stehenden Funktionswerten!

Beurteilen Sie für verschiedene Intervalle von x die Möglichkeit, bei der Tangensfunktion linear zu interpolieren!

x	89,00°	,01°	,02°	,03°	,04°	,05°	,06°	,07°	,08°	,09°	,10°
$\tan x$	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27	62,96	63,66

15. Suchen Sie die folgenden Funktionswerte auf!

a) tan 87,88° **b)** tan 89,05° **c)** cot 1,33° **d)** cot 2,87° **e)** cot 0,92°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die Winkel, denen die folgenden Funktionswerte zugeordnet sind!

16. **a)** $\sin x = 0{,}2756$ **b)** $\sin x = 0{,}6157$ **c)** $\sin x = 0{,}8829$ **d)** $\sin x = 0{,}4787$
e) $\sin x = 0{,}2990$ **f)** $\sin x = -0{,}5105$ **g)** $\cos x = 0{,}0454$ **h)** $\cos x = 0{,}9921$
i) $\cos x = 0{,}1547$ **k)** $\cos x = -0{,}6858$ **l)** $\cos x = 0{,}7325$ **m)** $\cos x = -0{,}9724$

17. **a)** $\tan x = 0{,}0699$ **b)** $\tan x = 0{,}2679$ **c)** $\tan x = 1{,}483$ **d)** $\tan x = -0{,}9725$
e) $\tan x = 0{,}1495$ **f)** $\tan x = -0{,}4536$ **g)** $\cot x = 1{,}865$ **h)** $\cot x = 0{,}3115$
i) $\cot x = 2{,}592$ **k)** $\cot x = -3{,}420$ **l)** $\cot x = -5{,}730$ **m)** $\cot x = 0{,}0052$

18. **a)** $\sin x = 0{,}6407$ **b)** $\sin x = 0{,}4711$ **c)** $\sin x = 0{,}8308$ **d)** $\sin x = -0{,}6300$
e) $\sin x = 0{,}6070$ **f)** $\sin x = 0{,}0081$ **g)** $\cos x = 0{,}1700$ **h)** $\cos x = 0{,}3473$
i) $\cos x = -0{,}9872$ **k)** $\cos x = 0{,}0037$ **l)** $\cos x = -0{,}0323$ **m)** $\cos x = 0{,}9999$

19. **a)** $\tan x = 0{,}3259$ **b)** $\tan x = 0{,}6425$ **c)** $\tan x = 1{,}022$ **d)** $\tan x = -8{,}190$
e) $\tan x = -0{,}7420$ **f)** $\tan x = 0{,}6000$ **g)** $\cot x = 0{,}2510$ **h)** $\cot x = 0{,}4758$
i) $\cot x = -1{,}321$ **k)** $\cot x = 1{,}085$ **l)** $\cot x = -0{,}9980$ **m)** $\cot x = 0{,}0020$

Rechnen Sie die gefundenen Winkel in sexagesimal geteilte Grade um!

20. Bestimmen Sie die Winkel x, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	– 0,5	0,3746	– 0,7314	0,1500	– 0,0728
$\cos x$	0	1	– 1	0,7071	– 0,9336	0,2358	– 0,7005
$\tan x$	0	1	2	– 3	– 0,4452	0,9387	– 0,0120
$\cot x$	0	1	– 3	–16,50	0,1700	– 1,319	– 2,439

Übungen mit dem Rechenstab

21. Stellen Sie am Rechenstab fest, in welchem Bereich die Sinusfunktionsleiter gilt! Die Unterteilung wechselt. Wie viele Teilbereiche mit verschiedener Unterteilung gibt es? Beschreiben Sie die Unterteilung! Was bedeutet in jedem dieser Bereiche ein Skalenteil?

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

22. **a)** $\sin 85°$ **b)** $\sin 72°$ **c)** $\sin 61{,}5°$ **d)** $\sin 24{,}3°$ **e)** $\sin 10{,}4°$ **f)** $\sin 7{,}42°$ **g)** $\sin 5{,}95°$ **h)** $\sin 213{,}38°$ **i)** $\sin 323{,}83°$ **k)** $\cos 22°$ **l)** $\cos 57{,}6°$ **m)** $\cos 73{,}27°$

23. **a)** $\tan 43°$ **b)** $\tan 37{,}2°$ **c)** $\tan 22{,}22°$ **d)** $\tan 17{,}29°$ **e)** $\tan 6{,}15°$ **f)** $\tan 186{,}35°$ **g)** $\tan 42{,}4°$ **h)** $\tan 283{,}55°$ **i)** $\tan 354{,}21°$ **k)** $\cot 48°$ **l)** $\cot 54{,}2°$ **m)** $\cot 79{,}66°$

24. **a)** $\sin 2°$ **b)** $\sin 5{,}5°$ **c)** $\sin 1{,}92°$ **d)** $\tan 0{,}75°$ **e)** $\tan 1{,}07°$ **f)** $\tan 2{,}96°$ **g)** $\cos 85°$ **h)** $\cos 87{,}3°$ **i)** $\cos 89{,}08°$ **k)** $\cot 86°$ **l)** $\cot 84{,}9°$ **m)** $\cot 88{,}63°$

25. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **5** bis **7** mit Hilfe des Rechenstabes! Vergleichen Sie in den verschiedenen Teilbereichen des Rechenstabes die Genauigkeit mit der der Tafel!

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die Winkel, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

26. **a)** $\sin x = 0{,}99$ **b)** $\sin x = 0{,}87$ **c)** $\sin x = 0{,}654$ **d)** $\sin x = 0{,}358$ **e)** $\sin x = -0{,}194$ **f)** $\sin x = 0{,}111$ **g)** $\sin x = 0{,}722$ **h)** $\sin x = -0{,}533$ **i)** $\sin x = 0{,}276$ **k)** $\cos x = 0{,}23$ **l)** $\cos x = 0{,}872$ **m)** $\cos x = 0{,}433$

27. **a)** $\tan x = 0{,}97$ **b)** $\tan x = 0{,}83$ **c)** $\tan x = 0{,}755$ **d)** $\tan x = 0{,}444$ **e)** $\tan x = 0{,}123$ **f)** $\tan x = -0{,}337$ **g)** $\tan x = -0{,}842$ **h)** $\tan x = 0{,}229$ **i)** $\tan x = 0{,}656$ **k)** $\cot x = 0{,}17$ **l)** $\cot x = 0{,}778$ **m)** $\cot x = 0{,}100$

28. **a)** $\sin x = 0{,}09$ **b)** $\sin x = 0{,}082$ **c)** $\sin x = 0{,}054$ **d)** $\tan x = 0{,}017$ **e)** $\tan x = 0{,}0323$ **f)** $\tan x = 0{,}0122$ **g)** $\cos x = 0{,}08$ **h)** $\cos x = 0{,}045$ **i)** $\cos x = 0{,}0226$ **k)** $\cot x = 0{,}07$ **l)** $\cos x = 0{,}061$ **m)** $\cot x = 0{,}0118$

29. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **18** und **19** mit Hilfe des Rechenstabes! Beurteilen Sie die Genauigkeit des Rechenstabes in den verschiedenen Teilbereichen!

Anwendungen

30. Beweisen Sie das folgende Formelsystem ($0° \leqq x \leqq 90°$)!

II. Quadrant

$$\sin(180° - x) = \sin x \qquad \tan(180° - x) = -\tan x$$
$$\cos(180° - x) = -\cos x \qquad \cot(180° - x) = -\cot x$$

III. Quadrant

$$\sin(180° + x) = -\sin x \qquad \tan(180° + x) = \tan x$$
$$\cos(180° + x) = -\cos x \qquad \cot(180° + x) = \cot x$$

IV. Quadrant

$$\sin(360° - x) = -\sin x \qquad \tan(360° - x) = -\tan x$$
$$\cos(360° - x) = \cos x \qquad \cot(360° - x) = -\cot x$$

31. **a)** Im II. bis IV. Quadranten können die Winkel x auch durch folgende Beziehungen ausgedrückt werden ($0° \leqq x' \leqq 90°$):

$90° + x'$; $270° - x'$; $270° + x'$.

Stellen Sie unter diesen Bedingungen Quadrantenbeziehungen für die vier Winkelfunktionen auf! Zeichnen Sie am Kreis entsprechende Figuren!

b) In welchen Fällen sind die von 90° bzw. 270° ausgehenden Quadrantenbeziehungen den von 180° und 360° ausgehenden Beziehungen (10) bis (12) bzw. denen in Aufgabe **30** vorzuziehen?

c) Führen Sie auf verschiedene Arten auf Funktionen im I. Quadranten zurück: sin 110,43°; cos 200°; tan 290,86°; cot 185°!

32. a) Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel α gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen $\widehat{b}$ und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Kreises mit dem Radius r als Funktionen des Zentriwinkels, und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar (Abb. 3.29.)!

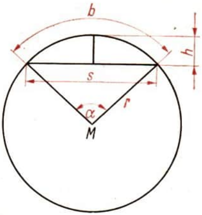


Abb. 3.29.

b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen $s(\alpha)$; $\widehat{b}(\alpha)$ und $h(\alpha)$ am Einheitskreis?

33. Den Flächeninhalt eines Kreissegments über der Sehne s, der von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen $\widehat{b}$ und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ m?

b) Berechnen Sie die Pfeilhöhe h des Segments aus Aufgabe **a**!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

d) Stellen Sie

1) den Sektor zum Bogen $\widehat{b}$ eines Einheitskreises,

2) den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,

3) das Kreissegment über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird,

als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und graphisch dar!

34. Berechnen Sie den Umfang der Breitenkreise, auf denen folgende Orte liegen:

a) Berlin ($\varphi = 52{,}4°$ N; $\lambda = 13{,}1°$ O),
b) Moskau ($\varphi = 55{,}8°$ N, $\lambda = 37{,}6°$ O),
c) Johannesburg (Republik Südafrika) ($\varphi = 26{,}2°$ S; $\lambda = 28{,}1°$ O),
d) La Plata (Argentinien) ($\varphi = 34{,}9°$ S; $\lambda = 57{,}9°$ W),
e) Peking ($\varphi = 39{,}9°$ N; $\lambda = 116{,}5°$ O),
f) Ihr Heimatort!

3.4. Das rechtwinklige Dreieck

Konische Zapfen (auch Kegelzapfen oder kurz „Kegel“ genannt) können auf der Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten, des sogenannten Längssupports, gedreht werden (Abb. 3.30. und 3.31.). In der Mathematik bezeichnet man einen solchen Körper als **Kegelstumpf** (Abb. 3.32.). Die Symbole l, D und d werden in der Technik zur Bezeichnung der Größen eines Kegelzapfens verwendet.

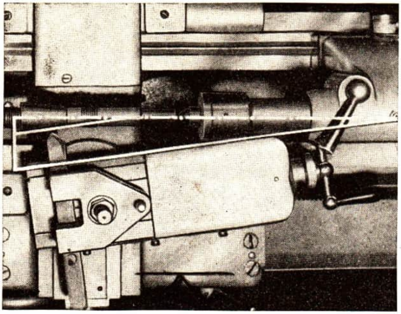


Abb. 3.30.

Der Einstellwinkel des Längssupports β hängt vom Kegelwinkel α ab; es ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (Abb. 3.31.).

In der Praxis wird die Gestalt des Kegels nicht durch den Winkel α angegeben, sondern durch die Verjüngung $\frac{1}{x}$ (Fachbezeichnung: Kegel $1:x$). Das bedeutet, daß der Durchmesser D sich auf einer Zapfenlänge von x mm um 1 mm vermindert (Abb. 3.33.). Hat der Kegel die Länge l, so verjüngt er sich von D auf d, das heißt

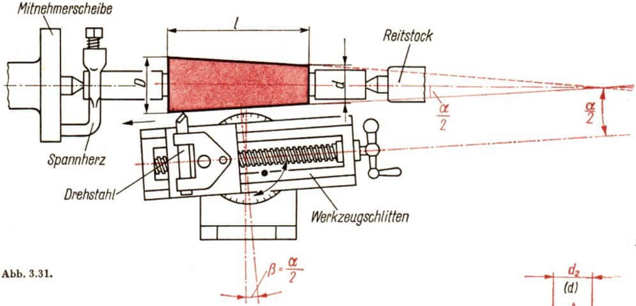


Abb. 3.31.

um $(D - d)$. Wendet man den Strahlensatz auf die Figur in Abbildung 3.34. an, so gilt:

$$1 : x = (D - d) : l.$$

Die Verjüngung $\frac{1}{x}$ beträgt also $\frac{D-d}{l}$.

Sowohl in Abbildung 3.33. als auch in Abbildung 3.34. sind „Kegel 1:4" dargestellt.

Für das Arbeiten auf der Drehmaschine ist es nötig, aus der Vorschrift $1:x$ den Einstellwinkel β des Supports, also letztlich den Kegelwinkel α, zu bestimmen.

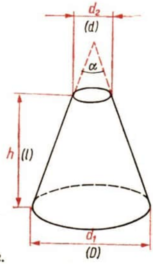


Abb. 3.32.

Abb. 3.33.

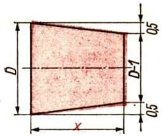
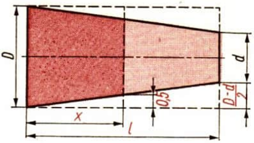


Abb. 3.34.



1) *Bestimmen Sie geometrisch den Kegelwinkel α, wenn die Verjüngung 1:4 beträgt!*
2) *Ein Turm wirft auf eine waagerechte Ebene einen Schatten von der Länge l, während die Sonne unter dem Winkel α gegen die Horizontallinie gesehen wird. Die Turmhöhe h ist aus der Schattenlänge l und dem Winkel α zu bestimmen.*

Die Bearbeitung technischer oder naturwissenschaftlicher Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen in einer Figur Zusammenhänge zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln an Dreiecken auftreten. Die rechnerische Lösung solcher Aufgaben ist mit Hilfe der ebenen Trigonometrie[1] möglich.

Die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Zur Wiederholung:

1. Welchen Namen haben die Seiten des rechtwinkligen ebenen Dreiecks?
2. Was versteht man unter ähnlichen Dreiecken?
3. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Dreiecke ähnlich sind!
4. Was wissen Sie über das Verhältnis gleichliegender Seiten in ähnlichen Dreiecken?
5. Was wissen Sie über gleichliegende Winkel in ähnlichen Dreiecken?

Die Winkelfunktionen wurden im Abschnitt 3.1. mit Hilfe eines Kreispunktes $P(u; v)$ im Kreis mit dem Radius r erklärt. Das entstehende Dreieck OQP ist rechtwinklig (Abb. 3.5.). In bezug auf den Winkel x werden $\overline{PQ}$ als Gegenkathete und $\overline{OQ}$ als Ankathete bezeichnet.
Am rechtwinkligen Dreieck OQP gelten auf Grund der Definitionen (1) bis (4), Abschnitt 3.1., die folgenden Beziehungen:

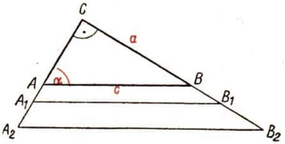
$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

In der Abbildung 3.35. werden drei rechtwinklige Dreiecke (ABC, A_1B_1C und A_2B_2C) dargestellt. Die Dreiecke sind ähnlich, deshalb gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_2C}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{a}{c}.$$

Abb. 3.35.



[1] Tri-gono-metrie (griech.) wörtlich: Drei-Winkel- oder Drei-Eck-Messung; frei: Dreiecksberechnung.

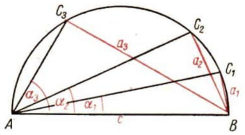


Abb. 3.36.

Dieses Verhältnis (Gegenkathete für den Winkel α: Hypotenuse) ist aber nach der Definition (1), Abschnitt 3.1., gleich dem Sinus des Winkels α. Das gilt für alle ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke der Abbildung 3.36. stimmen in der Hypotenuse c überein.

Wo liegen die Scheitel C_n der rechten Winkel aller Dreiecke, die c als Hypotenuse haben?

Der Winkel mit dem Scheitel A nimmt zu, wenn man vom Dreieck ABC_1 zum Dreieck ABC_2 und von diesem zum Dreieck ABC_3 übergeht. Es gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Mit dem Winkel α wächst die zugehörige Gegenkathete a_n. Da die Hypotenuse c konstant bleibt, wächst mit dem Winkel auch das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse; es ist

$$\frac{a_1}{c} < \frac{a_2}{c} < \frac{a_3}{c}.$$

Allgemein gilt:
Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so nimmt auch der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse zu. Im rechtwinkligen Dreieck ist also das Verhältnis der Gegenkathete eines Winkels zur Hypotenuse eine Funktion des Winkels. Umgekehrt hängt der Winkel von dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse ab. Diese Abhängigkeit wird durch die Sinusfunktion ausgedrückt:

(13) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Satz 1: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete dieses Winkels und der Hypotenuse.

Analoge Betrachtungen können für die Seitenverhältnisse $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ durchgeführt werden. Dabei ergeben sich

(14) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,

(15) $\tan\alpha = \frac{a}{b}$,

(16) $\cot\alpha = \frac{b}{a}$.

Satz 2: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kosinus eines Winkels der Quotient aus der Ankathete dieses Winkels und der Hypotenuse.

Satz 3: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete und der Ankathete dieses Winkels.

Satz 4: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kotangens eines Winkels der Quotient aus der Ankathete und der Gegenkathete dieses Winkels.

Untersuchen Sie auf Grund der Gleichungen 13 bis 16 die Grenzfälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$! Halten Sie c konstant, und weisen Sie nach, daß die Ergebnisse mit den Werten der Winkelfunktionen für diese Winkel übereinstimmen!

Auf Grund der Sätze 1 bis 4 gelten im rechtwinkligen Dreieck folgende Beziehungen:

$$a : c = \sin\alpha = \cos\beta, \qquad b : c = \cos\alpha = \sin\beta,$$
$$a : b = \tan\alpha = \cot\beta, \qquad b : a = \cot\alpha = \tan\beta. \qquad (\gamma = 90°)$$

Drücken Sie diese Beziehungen in Worten aus, und leiten Sie die Formeln (5) *und* (6), *Abschnitt 3.2., her!*

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab$. Wir drücken nach (13) und (14) die Katheten durch die Hypotenuse und Winkelfunktionen von α aus:

(17) $A = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Berechnung spezieller Funktionswerte

Zur Wiederholung:

1. Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, und berechnen Sie die Dreieckshöhe!
2. Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seite a, und ziehen Sie die Diagonale!
   a) Was für Figuren entstehen? **b)** Wie lang ist die Diagonale?

Für die Winkel 30°, 45° und 60° können die Werte der Winkelfunktionen durch die Anwendung von Sätzen aus der Planimetrie berechnet werden.

Für den Winkel 30° verwendet man hierbei ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 3.37.). Es ergibt sich:

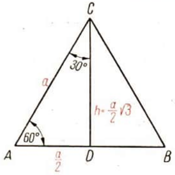
$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = h : a = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{a}{2} : h = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\cot 30° = h : \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}$

Abb. 3.37.



Bestimmen Sie die Werte der vier Winkelfunktionen für den Winkel 60°, indem Sie ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 3.37.) zugrunde legen!

Die Funktionswerte für den Winkel 45° können mit Hilfe eines Quadrates ermittelt werden (Abb. 3.38.). Es ergibt sich:

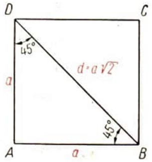
$\sin 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45° = a : a = 1$

$\cot 45° = a : a = 1$

Abb. 3.38.



Verwandeln Sie die Funktionswerte für die Winkel 30°, 45° und 60° in Dezimalzahlen! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Angaben in den Tafeln 13 und 14!

Wir wissen, daß tan x größer wird als jede angebbare Zahl, wenn x gegen 90° strebt, und ebenso cot x, wenn x gegen 0° strebt. Dafür verwendet man das Symbol:

$$\tan x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 90^\circ$$
$$\cot x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 0^\circ,$$

gelesen: „tan x (cot x) wird größer als jede angebbare Zahl, falls x gegen 90° (gegen 0°) strebt".

Die auf diese Weise berechneten Funktionswerte und die für 0° und 90° werden in der folgenden Übersicht zusammengefaßt.

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)
$\cot x$	(∞)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die gedächtnismäßige Beherrschung dieser Funktionswerte ist vorteilhaft. Dabei genügt es, wegen der Komplementbeziehungen (9), wenn man sich nur die Folgen der Sinus- und Tangenswerte einprägt. Für die Sinuswerte kann man dazu die folgende Gedächtnisstütze benutzen:

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Die Logarithmen der Winkelfunktionen

Zur Erleichterung trigonometrischer Berechnungen wendet man auch auf die Werte der Winkelfunktionen das Rechnen mit Logarithmen an. Um ein doppeltes Aufschlagen von Werten zu vermeiden (1. Aufschlagen des Funktionswertes, 2. Aufschlagen des Logarithmus des Funktionswertes), wurden die Logarithmen der Winkelfunktionswerte tabellarisch in den Tafeln 2 und 3 des Tafelwerks erfaßt.

Die Tafeln der Logarithmen der Winkelfunktionen sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der Werte der Winkelfunktionen. Dabei ist zu beachten, daß die Winkelfunktionswerte überwiegend kleiner als 1 sind und somit Logarithmen mit negativen Kennzahlen haben.

Beispiel 1:

$\sin 23{,}3^\circ = 0{,}3955$

$\lg \sin 23{,}3^\circ = \lg 0{,}3955 : 0{,}5972 - 1$

In den Tafeln 2 und 3 sind alle Logarithmen mit negativer Kennzahl auf die Kennzahl

-10 gebracht worden, die aus drucktechnischen Gründen fehlt. Es muß also jeweils -10 ergänzt werden. In Tafel 2 steht zum Beispiel für

lg sin 23,3° der Wert 9,5972; das bedeutet: $\lg \sin 23{,}3° = 9{,}5972 - 10$.

In der Rechenpraxis subtrahiert man beim Aufschlagen der Logarithmen von der Form 9, ...; 8, ...; 7, ...; usw. im Kopfe die Zahl 10 und erhält 0, ... − 1; 0, ... − 2; 0, ... − 3; usw. Umgekehrt ist zu einem gegebenen Logarithmus mit negativer Kennzahl vor Benutzung der Tafel die Zahl 10 zu addieren. Infolge der dezimalen Teilung des Grades ist die Interpolation dieselbe wie beim Rechnen mit Logarithmen. Aus der Tafel 4 entnimmt man die Logarithmen der Sinus- und Tangenswerte für Winkel von 0° bis 5° und die Logarithmen der Kosinus- und Kotangenswerte von 85° bis 90° mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad unmittelbar, durch Interpolation mit einer Genauigkeit von Tausendstelgrad.

Beispiele:

	Werte der Winkelfunktionen (Tafeln 13 und 14)	Logarithmen der Funktionswerte (Tafeln 2, 3 bzw. 4)
2) sin 21,87°	0,3725	$9{,}5711 - 10 = 0{,}5711 - 1$
3) cos 31,58°	0,8519	$9{,}9304 - 10 = 0{,}9304 - 1$
4) tan 69,43°	2,664	0,4257
5) cot 86,68°	0,0580	$8{,}7635 - 10 = 0{,}7635 - 2$

Beim Rechnen mit den Logarithmen der Werte der Winkelfunktionen von Winkeln über 90° müssen die negativen Vorzeichen außer Betracht gelassen werden. Denn Logarithmen von negativen Zahlen existieren im Bereich der reellen Zahlen nicht. Man muß also in diesen Fällen mit den absoluten Beträgen der Werte der Winkelfunktionen rechnen. Im übrigen gelten dann die gleichen Gesetze, die für das Rechnen mit den Logarithmen bei Winkeln im I. Quadranten erklärt wurden.

Beispiel 6: lg cos 152°

Der Funktionswert cos 152° ist negativ. Deshalb wird der Logarithmus des Betrages des Winkelfunktionswertes angegeben:

$$\lg |\cos 152°| = 0{,}9459 - 1$$

Beispiel 7: $\lg |\tan x| = 0{,}4389 \; (\tan x < 0)$

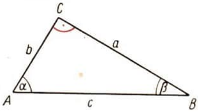
In diesem Falle soll der Wert der Winkelfunktion, zu dem der Logarithmus angegeben ist, negativ sein. Man bestimmt zunächst den im I. Quadranten liegenden Winkelwert und erhält $x = 70°$. Unter Berücksichtigung der Vorschrift $\tan x < 0$ findet man als Lösungen:

$$x_1 = 180° - x = 110°$$
$$x_2 = 360° - x = 290°.$$

Berechnung am rechtwinkligen Dreieck

Da im rechtwinkligen Dreieck immer der rechte Winkel gegeben ist, sind zur Bestimmung dieses Dreiecks nur noch zwei Stücke nötig. Dazu können die Hypotenuse, die beiden Katheten, einer der spitzen Winkel, der Flächeninhalt und andere Stücke in geeigneter Zusammensetzung dienen. Beschränken wir uns auf die Seiten und Winkel (primäre Stücke), so sind vier Fälle möglich (Abb. 3.39.).

Abb. 3.39.



Gegeben können sein:

1. die Hypotenuse und ein Winkel;
2. eine Kathete und ein Winkel;
3. eine Kathete und die Hypotenuse;
4. die beiden Katheten.

Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung 3.39. alle möglichen Fälle zusammen!

Die Berechnungen werden in zwei Schritten durchgeführt:

1. Die Aufgabe wird unter Verwendung der allgemeinen Symbole (a, b, c; α, β; A usw.) gelöst (Allgemeine Lösung).
   Dabei müssen oft Winkelfunktionen hinzugezogen werden.
2. Die gegebenen speziellen Zahlenwerte werden verwendet (Zahlenmäßige Lösung).

In den folgenden Beispielen erfahren die Symbole a, b, c und A während der Lösung einen Bedeutungswechsel. Während diese Symbole in der allgemeinen Lösung als Größen verwendet werden, sind sie in der zahlenmäßigen Lösung als Symbole für Zahlenwerte anzusehen.

Beispiel 8:

(1. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$.
Gesucht: **1)** a (in m); **2)** b (in m); **3)** β (in Grad); **4)** A (in m²).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha$

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$b = c \cdot \cos\alpha$

3) $\beta = 90° - \alpha$

4) $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $a = 51{,}90 \cdot \sin\ 52{,}55°$
$a = 41{,}21$

2) $b = 51{,}90 \cdot \cos\ 52{,}55°$
$b = 31{,}56$

3) $\beta = 90° - 52{,}55° = 37{,}45°$

N.	L.	
51,90 sin 52,55°	1,7152 0,8998 – 1	+
a	1,6150	
51,90 cos 52,55°	1,7152 0,7839 – 1	+
b	1,4991	

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 51{,}90^2 \cdot \sin 52{,}55° \cdot \cos 52{,}55°$
$A = 650{,}3$

N.	L_1	L_2	
$51{,}90^2$	$1{,}7152 \cdot 2$	3,4304	
sin 52,55°		0,8998 – 1	+
cos 52,55°		0,7839 – 1	+
0,5		0,6990 – 1	+
A		2,8131	

Die Stücke des Dreiecks sind:

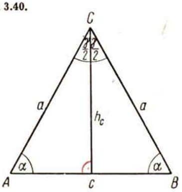
$a = 41{,}21$ m $\qquad \alpha = 52{,}55°$ $\qquad A = 650{,}3$ m^2
$b = 31{,}56$ m $\qquad \beta = 37{,}45°$
$c = 51{,}90$ m $\qquad \gamma = 90°$

Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

Das gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse, die zugleich die Höhe h_c auf der Grundseite ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt (Abb. 3.40.).

Da man das gleichschenklige Dreieck auf das rechtwinklige zurückführen kann, genügen zwei Stücke, um die fehlenden Stücke und den Flächeninhalt zu berechnen. Beschränken wir uns auf die primären Stücke (Basis, Schenkel und einen der Winkel), so können die gegebenen Stücke in folgender Zusammenstellung auftreten:

Abb. 3.40.



1. Die Basis und ein Winkel,
2. der Schenkel und ein Winkel,
3. die Basis und der Schenkel.

Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung 3.40. alle möglichen Fälle zusammen! Vergleichen Sie mit den möglichen Zusammenstellungen beim rechtwinkligen Dreieck!

Beispiel 9:

(2. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $a = 15{,}2$ cm; $\gamma = 76{,}8°$.
Gesucht: **1)** α (in Grad); **2)** c (in cm); **3)** A (in cm^2).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$ $\qquad$ **2)** $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : a = \frac{c}{2a}$

$$c = 2a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

3) $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h_c}{a}$$

$$h_c = a\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$A = a^2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Es kann auch die Gleichung (17) auf die rechtwinkligen Teildreiecke angewandt werden:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$A = a^2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2) $c = 2 \cdot 15{,}2 \cdot \sin 38{,}4°$

$c = 18{,}88$

N.	L.	
2	0,3010	
15,2	1,1818	+
sin 38,4°	0,7932 − 1	+
c	1,2760	

3) $A = 15{,}2^2 \cdot \sin 38{,}4° \cdot \cos 38{,}4°$

$A = 112{,}4$

N.	L_1	L_2	
$15{,}2^2$	1,1818	2,3636	
sin 38,4°		0,7932 − 1	+
cos 38,4°		0,8941 − 1	+
A		2,0509	

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = b = 15{,}2$ cm $\qquad \alpha = \beta = 51{,}6° \qquad A = 112{,}4$ cm²

$c = 18{,}88$ cm $\approx 18{,}9$ cm $\qquad \gamma = 76{,}8°$

Berechnungen am regelmäßigen n-Eck

Von einem Punkt O seien n Strahlen in einer Ebene so gezogen, daß je zwei Strahlen einen Winkel von $\varphi = \frac{360°}{n}$ miteinander bilden. Wird diese Figur, wie in Abbildung 3.41. angedeutet, um den Punkt O um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ gedreht, so kommt sie mit sich selbst zur Deckung (Radialsymmetrie).

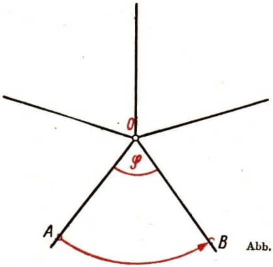


Abb. 3.41.

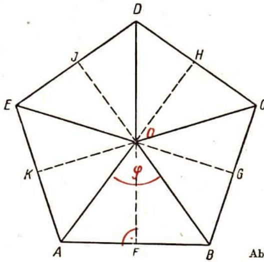


Abb. 3.42.

Wir nennen die Punkte der Strahlen, die durch Drehung zur Deckung gebracht werden, einander entsprechende Punkte. Verbinden wir die entsprechenden Punkte A, B, C, D, E der Reihe nach miteinander, so entsteht ein Vieleck, in dem alle Seiten und Winkel einander gleich sind, denn sie gelangen durch Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ zur Deckung (Abb. 3.42.).

Ein Vieleck, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind, heißt **regelmäßig.** Dreht man das regelmäßige Vieleck $ABCDE$ um den Punkt O, so gelangen nicht nur seine Seiten und Winkel zur Deckung, sondern es decken sich auch die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ..., $\overline{OE}$ und ebenso die von O auf die Seiten gefällten Lote $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, ..., $\overline{OK}$. Der Punkt O ist demnach von allen Eckpunkten und allen Seiten des regelmäßigen Vielecks jeweils gleich weit entfernt.

Allgemein gilt:

Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umbeschreiben (Umkreis) und ein Kreis einbeschreiben (Inkreis).

Abb. 3.43.

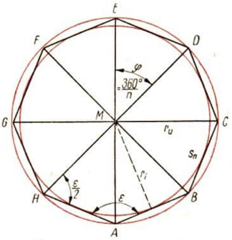
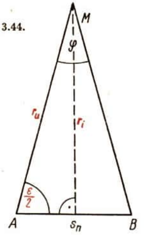


Abb. 3.44.



Die Abbildung 3.43. stellt ein regelmäßiges Achteck dar. Jedes der gleichschenkligen Dreiecke (z. B. $\triangle\ ABM$) kann als ein Bestimmungsdreieck angesehen werden. Die Berechnung des regelmäßigen Vielecks läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, ein Bestimmungsdreieck mit den Mitteln der Trigonometrie zu berechnen. Wir können dabei die Ergebnisse der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks anwenden.

Beispiel 10:

Gegeben ist die Seite $s_{12} = 6{,}41$ dm des regelmäßigen Zwölfecks. Wie groß ist der Winkel des Zwölfecks? Wie groß sind die Radien des Inkreises und des Umkreises sowie der Umfang und der Flächeninhalt?

Das Bestimmungsdreieck für diese Aufgabe zeigt die Abbildung 3.44.

Gegeben: $s_{12} = 6{,}41$ dm; $\varphi = \frac{360°}{12} = 30°$.

Gesucht: **1)** ε (in Grad); **2)** r_u (in dm); **3)** r_i (in dm); **4)** u_{12} (in dm); **5)** A_{12} (in dm²).

Allgemeine Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Größen):
(Zur Vereinfachung wird im folgenden $s_{12} = s$ gesetzt.)

1) $\frac{\varepsilon}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}$

$\varepsilon = 180° - \varphi$

2) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2} : r_u$

$r_u = \frac{s}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}$

3) $\cot\frac{\varphi}{2} = r_i : \frac{s}{2}$ **4)** $u_{12} = 12\,s$

$$r_i = \frac{s}{2} \cdot \cot\frac{\varphi}{2}$$

5) $A_{12} = 12\,\frac{s \cdot r_i}{2} = 6\,s\,r_i = 3\,s^2 \cot\frac{\varphi}{2}$

Zahlenmäßige Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Zahlenwerte):

1) $\varepsilon = 180° - 30° = 150°$

2) $r_u = \frac{6{,}41}{2 \cdot \sin 15°}$

$r_u = 12{,}39$

3) $r_i = \frac{6{,}41 \cdot \cot 15°}{2}$

$r_i = 11{,}96$

N.	L.	
6,41	0,8069	
2	0,3010	−
sin 15°	0,4130 − 1	−
r_u	1,0929	
6,41	0,8069	
cot 15°	0,5719	+
Zähler	1,3788	
2	0,3010	−
r_i	1,0778	

4) $u_{12} = 12 \cdot 6{,}41$

$u_{12} = 76{,}92$

5) $A_{12} = 3 \cdot 6{,}41^2 \cdot \cot 15°$

$A_{12} = 460$

N.	L_1	L_2	
$6{,}41^2$	0,8069 · 2	1,6138	
3		0,4771	+
cot 15°		0,5719	+
A_{12}		2,6628	

Die Stücke des Zwölfecks sind:

$s_{12} = 6{,}41$ dm	$\varepsilon = 150°$
$r_u = 12{,}39$ dm	$r_i = 11{,}96$ dm
$u_{12} = 76{,}92$ dm	$A_{12} = 460$ dm^2

Mit der Konstruktion und Berechnung regelmäßiger Vielecke hat sich im Altertum der griechische Mathematiker und Physiker ARCHIMEDES beschäftigt. Er lebte von 287 bis 212 in Syrakus. ARCHIMEDES berechnete die Vielecke allerdings planimetrisch, da ihm die Mittel der Trigonometrie noch nicht zur Verfügung standen. Er verwendete die Methode der einem Kreis ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke auch, um das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises zu bestimmen. Mit Hilfe des 96-Ecks fand er, daß dieses Verhältnis zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. Er gab $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ als Näherungswerte für die Zahl π an. Um seine Leistung richtig zu würdigen, müssen wir bedenken, daß er weder die Dezimalzahlen noch das Stellenwertsystem kannte. ARCHIMEDES suchte seine wissenschaftlichen Erkenntnisse auch für die Zwecke der Praxis nutzbar zu machen.
Gegen Ende des 18. Jahrhunderts stellte einer der berühmtesten deutschen Mathematiker, CARL FRIEDRICH GAUSS, eine allgemeine Theorie der regelmäßigen Viel-

ecke auf. In diesem Zusammenhang entdeckte der damals Neunzehnjährige, daß das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Die Theorie der regelmäßigen Vielecke ist in dem bedeutenden Werk von GAUSS *Disquisitiones arithmeticae* (Arithmetische Untersuchungen) dargestellt, das 1801 in Leipzig erschien.

Anwendungsaufgaben

Bei der Lösung von Anwendungsaufgaben mit Hilfe der Trigonometrie sucht man zunächst nach einem für die Berechnung geeigneten rechtwinkligen Dreieck.

Beispiel 11: Welchen Anstiegswinkel hat eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm beträgt?

Lösung: Aus Abbildung 3.45. ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\,\text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\,\text{mm}}.$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man $\tan\alpha = 0{,}0559$.
Aus Tafel 14 ergibt sich $\alpha = 3{,}2°$.

Ergebnis: Die Schraube hat einen Anstiegswinkel von 3,2°.

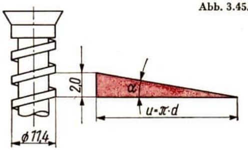


Abb. 3.45.

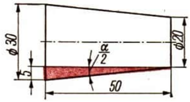


Abb. 3.46.

Beispiel 12: Der in Abbildung 3.46. dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel und Kegelwinkel? (Vergleichen Sie auch mit den Ausführungen auf Seite 100!)

Lösung: Allgemein gilt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2} : l = \frac{1}{2}\cdot\frac{D-d}{l}$,

das heißt, der Tangens des halben Kegelwinkels ist gleich der halben Verjüngung.

Im vorliegenden Fall ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10} = 0{,}1000$.

Aus Tafel 14 ergibt sich $\frac{\alpha}{2} \approx 5{,}71°$ und damit $\alpha \approx 11{,}42°$.

Ergebnis: Der Supporteinstellwinkel beträgt etwa 5,71°; der Kegelwinkel etwa 11,42°.

Beispiel 13:

Bei der Deutschen Reichsbahn werden Steigungen durch Schilder der in Abbildung 3.47. a dargestellten Form gekennzeichnet. Die Aufschrift besagt, daß auf 40 m waagerechte Entfernung 1 m senkrechte Erhebung kommt; die gleiche Steigung hält auf den nächsten 830 m Streckenlänge an (Abb. 3.47.b; nicht maßstäblich). Wie groß ist der Höhenunterschied H zwischen Anfang A und Ende C_1 dieses Streckenabschnittes?

Lösung *(mit Hilfe der trigonometrischen Methode):*

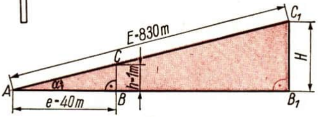
$$\tan\alpha = \frac{1}{40}; \ \sin\alpha = \frac{H}{830\,\text{m}}$$

$$H = 830 \cdot \sin\alpha \ \text{m}.$$

Es ist nicht notwendig, Winkel α zu bestimmen; wir können vielmehr $\sin\alpha$ durch $\tan\alpha$ ausdrücken. (Vergleichen Sie hierzu Seite 87, Aufgabe 21!)

Abb. 3.47.a

Abb. 3.47.b



$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{40}}{\sqrt{1+\frac{1}{1600}}} = \frac{1}{\sqrt{1601}}.$$

Dann ergibt sich

$$H = \frac{830}{\sqrt{1601}}\ \text{m}.$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man

$$H \approx 20{,}75 \ \text{m}.$$

Ergebnis: Der Höhenunterschied beträgt rund 20,8 m.

Lösen Sie die Aufgabe auch, ohne daß Sie die trigonometrische Methode anwenden, und vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgaben

Übungen im Tafelrechnen

1. **a)** lg sin 19,5° **b)** lg sin 31,67° **c)** lg sin 93,5° **d)** lg sin 17° 42′
e) lg cos 73,92° **f)** lg cos 37,57° **g)** lg |cos 224,7°| **h)** lg cos 45° 22′ 45″

2. Suchen Sie die Logarithmen der Winkelfunktionen für die in den Aufgaben **3** und **5** des Abschnitts 1.3. (S. 28) angegebenen Winkel auf!

3. **a)** lg tan 21,28° **b)** lg tan 50,68° **c)** lg tan 187,55° **d)** lg tan 47° 33′
e) lg cot 38,95° **f)** lg cot 45,08° **g)** lg |cot 101,54°| **h)** lg cot 2° 5′ 12″

4. Suchen Sie die Logarithmen der Winkelfunktionen für die in den Aufgaben **4** und **6** des Abschnitts 3.3. (S. 96) angegebenen Winkel auf!

5. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Logarithmen der Sinus- und der Tangensfunktion auf!
a) 0,09° **b)** 0,902° **c)** 2,418° **d)** 4,935° **e)** 3,076° **f)** 1,234°

6. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Logarithmen der Kosinus- und der Kotangensfunktion auf!
a) 85,238° **b)** 88,931° **c)** 87,045° **d)** 89,304° **e)** 86,753° **f)** 89,165°

7. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!
a) $y = \lg \sin x$ **b)** $y = \lg \cos x$ **c)** $y = \lg \tan x$ **d)** $y = \lg \cot x$
Anleitung: Benutzen Sie die Tafelwerte für $x = 15°; 30°; 45°; 60°; 75°$! Verwenden Sie für

a und **b** bzw. für **c** und **d** ein gemeinsames Koordinatensystem! Beschreiben Sie den Verlauf jeder Funktion!

Untersuchen Sie insbesondere die folgenden Fragen:

1) Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von $x = 0°$ und $x = 90°$?
2) Für welche Winkel ändern sich die einzelnen Funktionen besonders stark, für welche besonders wenig?
3) Haben die Kurven zu **a** und **b** bzw. die zu **c** und **d** Symmetrieeigenschaften?

8. Welche Beziehungen bestehen zwischen

a) $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$;
b) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \tan x$;
c) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \cot x$?

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Beziehungen für einige selbstgewählte Beispiele $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$ aus $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$!

Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$?

Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen die Winkel aus dem ersten Quadranten!

9. a) $\lg \sin x = 0{,}6093 - 1$ **b)** $\lg \sin \alpha = 0{,}3775 - 1$ **c)** $\lg \sin \gamma = 0{,}5717 - 1$
d) $\lg \sin \beta = 0{,}0135 - 1$ **e)** $\lg \sin \gamma = 0{,}9438 - 1$ **f)** $\lg \sin \gamma = 0{,}1437 - 1$

10. a) $\lg \cos \gamma = 0{,}5341 - 1$ **b)** $\lg \cos x = 0{,}7230 - 1$ **c)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9892 - 1$
d) $\lg \cos \beta = 0{,}2700 - 1$ **e)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9900 - 1$ **f)** $\lg \cos \beta = 0{,}2356 - 1$

11. a) $\lg \tan x = 0{,}1387$ **b)** $\lg \tan \beta = 0{,}8003$ **c)** $\lg \tan \gamma = 0{,}6486 - 1$
d) $\lg \tan \alpha = 1{,}0944$ **e)** $\lg \tan \beta = 0{,}8345 - 1$ **f)** $\lg \tan x = 0{,}1479 - 1$

12. a) $\lg \cot \alpha = 0{,}9848 - 1$ **b)** $\lg \cot \gamma = 0{,}6129 - 1$ **c)** $\lg \cot x = 0{,}2509$
d) $\lg \cot \gamma = 0{,}3688$ **e)** $\lg \cot \beta = 0{,}1888$ **f)** $\lg \cot \alpha = 0{,}9800$

13. Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel x!

a) $\lg \sin x = 0{,}8810 - 1$ $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750 - 2$ $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9996 - 1$ $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}3075 - 1$ $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}2764 - 1$ $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}9000 - 2$ $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}7718$ $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}2700$ $(\cot x < 0)$

14. Bestimmen Sie die Winkel aus dem ersten Quadranten!

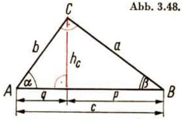
a) $\lg \sin x = 0{,}4783 - 1$ **b)** $\lg \cos \alpha = 0{,}6000 - 1$ **c)** $\lg \tan \beta = 0{,}8036 - 1$
d) $\lg \cot \gamma = 1{,}6250$ **e)** $\lg \tan \alpha = 1{,}0200$ **f)** $\lg \cot \gamma = 0{,}1064 - 1$
g) $\lg \sin x = 0{,}8583 - 1$ **h)** $\lg \cos \gamma = 0{,}4840 - 1$ **i)** $\lg \cos \gamma = 0{,}8221 - 1$
k) $\lg \tan \beta = 0{,}2833 - 3$ **l)** $\lg \cot \alpha = 0{,}3090 - 2$ **m)** $\lg \sin x = 0{,}7460 - 2$
n) $\lg \cot \beta = 0{,}8293 - 2$ **o)** $\lg \sin x = 0{,}4920 - 3$ **p)** $\lg \cos \gamma = 0{,}4459 - 2$

Aus der Geometrie

15. Berechnen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ABC $(\gamma = 90°)$, von denen folgende Stücke gegeben sind!

a) $a = 12{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm **b)** $a = 54{,}85$ m; $b = 74{,}54$ m
c) $a = 420$ m; $c = 645$ m **d)** $a = 14{,}54$ cm; $c = 29{,}08$ cm
e) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$
f) $c = 10{,}50$ cm; $\beta = 40{,}30°$
g) $a = 63$ mm; $\alpha = 40{,}30°$
h) $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$

Abb. 3.48.



16. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 3.48.) sind die folgenden Stücke gegeben:

a) $c = 18{,}50$ m; $p = 4{,}20$ m
b) $c = 18{,}50$ m; $h = 4{,}30$ m

c) $h = q = 3{,}5$ cm — d) $h = 22{,}42$ m; $b = 25{,}30$ m
e) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}50°$ — f) $c = 4{,}20$ m; $q = 2{,}53$ m
g) $a = 60{,}5$ cm; $h = 15{,}2$ cm — h) $p = 18{,}18$ m; $q = 3{,}88$ m

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die rechtwinkligen Dreiecke!

17. In einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 3.49.) sind die folgenden Stücke gegeben:

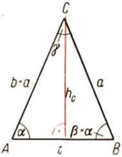


Abb. 3.49.

a) $c = 125$ m; $h_c = 85$ m
b) $a = 3{,}70$ m; $c = 2{,}50$ m
c) $a = 5{,}70$ m; $c = 3{,}50$ m
d) $c = 19{,}64$ cm; $\gamma = 55{,}40°$
e) $c = 75{,}92$ dm; $\alpha = 52{,}62°$
f) $h_c = 4{,}786$ m; $\gamma = 32{,}10°$

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die gleichschenkligen Dreiecke!

18. Berechnen Sie im Rechteck mit den Seiten $a = 5{,}5$ m und $b = 4{,}2$ m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, und den von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!

19. Von einem Rechteck ist die Diagonale $e = 6{,}5$ m und der von beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel $\varepsilon = 55°$ gegeben. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

20. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen des Rhombus und den Flächeninhalt!

21. In einem regelmäßigen n-Eck ist **a)** der Umkreisradius r_u, **b)** der Inkreisradius r_i gegeben. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks
im Falle **a)** $a_n = n\,r_u^2 \sin\frac{180°}{n} \cdot \cos\frac{180°}{n}$, im Falle **b)** $A_n = n\,r_i^2 \tan\frac{180°}{n}$ ist!

22. **a)** Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Wie groß sind seine Seiten s_n, sein Umfang u_n und sein Flächeninhalt a_n für $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$?

b) Die Seite eines regelmäßigen n-Ecks sei $s_n = 27$ cm.
Bestimmen Sie die Radien des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$!

c) Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben. Wie groß sind seine Seite S_n, sein Umfang U_n und sein Flächeninhalt A_n für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$?

d) Stellen Sie in einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit der Indexachse n als Abszissenachse die Größen s_n und S_n, u_n und U_n, a_n und A_n aus Aufgabe **a** und **c** in Abhängigkeit von n graphisch dar!

23. Berechnen Sie Seite, In- und Umkreisradius sowie Flächeninhalt für folgende regelmäßigen n-Ecke!

a) $n = 7$; $s = 13{,}2$ cm — b) $n = 10$; $r_u = 23{,}5$ cm
c) $n = 5$; $r_i = 17{,}4$ dm — d) $n = 8$; $A = 23{,}47\ \mathrm{m}^2$

24. Ein Punkt P liege a cm vor der Aufrißtafel, b cm vor der Kreuzrißtafel und c cm über der Grundrißtafel; der Schnittpunkt der Rißachsen sei O.

a) Welche Winkel bildet die Verbindungsstrecke $\overline{PO}$ mit den Projektionen $P'O$, $P''O$ sowie $P'''O$?

b) Bestimmen Sie die Winkel für $a = 3$, $b = 2$ und $c = 2{,}5$ sowohl mit Hilfe des darstellend-geometrischen als auch mit Hilfe des trigonometrischen Verfahrens!

25. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $F_G = 400$ kp (Abb. 3.50.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?

c) Berechnen Sie trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

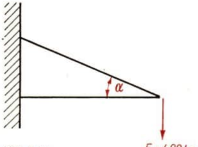


Abb. 3.50.

26. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hängt eine Last $F_G = 400$ kp (Abb. 3.51.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

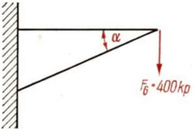


Abb. 3.51.

27. Ein Ausleger soll 2000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5000 kp Tragfähigkeit abzufangen (Abb. 3.52.). Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll?

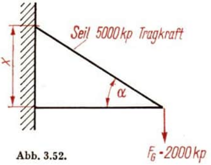


Abb. 3.52.

28. Eine Kiste, die 220 kg wiegt, wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Abb. 3.53.).
Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind?

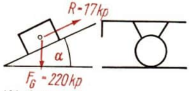


Abb. 3.53.

29. Eine Kiste, die 96 kg wiegt, soll auf einer unter 25° gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden.

a) Bestimmen Sie trigonometrisch und geometrisch die Abhängigkeit des Hangabtriebs H und des Normaldrucks N vom Neigungswinkel α der Rampe!

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel $\mu = 0{,}18$.

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel ϱ der Rampe, bei welchem der Hangabtrieb H gleich der Reibung R wird (Reibungswinkel ϱ)!

d) Zeigen Sie, daß der Tangens des Reibungswinkels ϱ gleich der Reibungszahl μ ist!

30. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Abb. 3.54.). Bestimmen Sie

a) die Seite s_5 des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!

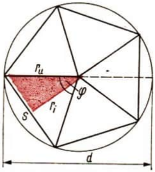


Abb. 3.54.

Lichtbrechung

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel α aus Luft in ein optisch dichteres Medium ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Brechungswinkels β gleich der Brechungszahl n des optischen Mediums gegenüber Luft ist.

$$\text{Brechungsgesetz: } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl $n' = \frac{1}{n}$.

31. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15°; 30°; 45°; 60°; 75°; 90°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Brechungswinkel β!

b) Stellen Sie die einander zugeordneten Werte von Einfalls- und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

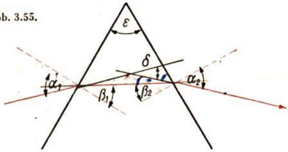
32. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von $d = 10$ cm Dicke bei einem Einfallswinkel $\alpha = 60°$ erfährt $\left(n = \frac{3}{2}\right)$?

b) Bestimmen Sie den Gang des Lichtstrahls geometrisch!

c) Stellen Sie die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels α graphisch dar!

Abb. 3.55.



33. Auf ein Glasprisma $\left(\text{Brechungszahl } n = \frac{3}{2}\right)$, dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Abb. 3.55.).

a) Bestimmen Sie geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls!

34. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Medium, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Medium 90° wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

a) Wasser in Luft $\left(n' = \frac{3}{4}\right)$,

b) Glas in Luft $\left(n' = \frac{2}{3}\right)$?

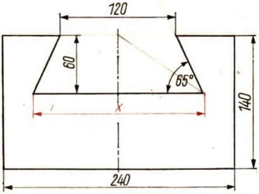


Abb. 3.56.

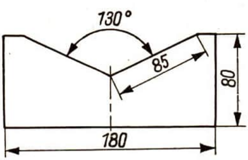


Abb. 3.57.

35. Berechnen Sie für die in Abbildung 3.56. dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x!

36. Berechnen Sie für das in Abbildung 3.57. dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße!

3.5. Das schiefwinklige Dreieck

Der Sinussatz und die Flächenformel

Die trigonometrische Methode findet auch bei Berechnungen in schiefwinkligen Dreiecken Anwendung. Ein schiefwinkliges Dreieck läßt sich durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Diese sind jedoch im allgemeinen nicht kongruent. Die Höhe h_c des Dreiecks ABC läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken (Abb. 3.58.):

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \qquad h_c = a\sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad h_c = b\sin\alpha$$

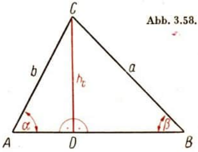


Abb. 3.58.

Setzt man die Ausdrücke für h_c einander gleich, so wird h_c eliminiert, und es ergibt sich

$$a \sin\beta = b \sin\alpha$$

oder, als Proportion geschrieben,

(18) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

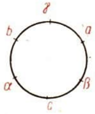


Abb. 3.59.

Entsprechend findet man, wenn man das Dreieck durch die Höhe h_a bzw. h_b zerlegt,

(19) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

und

(20) $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$.

Die Gleichungen (19) und (20) kann man auch aus (18) durch zyklische Vertauschung erhalten. Man ordnet die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie beim Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen (Abb. 3.59.). Für jeden lateinischen und griechischen Buchstaben der Formel (18) hat man den lateinischen bzw. griechischen Buchstaben zu setzen, der auf ihn folgt, wenn man den Kreis im positiven Drehsinn durchläuft.

Auch in dem stumpfwinkligen Dreieck in Abbildung 3.60. erhält man durch Eliminieren der Höhe h_c die Gleichung (18).

$$h_c = a \sin\beta; \quad h_c = b \sin(180° - \alpha)$$

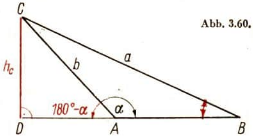


Abb. 3.60.

Wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ geht die zweite Gleichung über in $h_c = b \sin\alpha$.

Die Gleichungen (18), (19) und (20) werden als **Sinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

(21) $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, hat man bei der Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Sinussatz die Doppeldeutigkeit des Winkels zu berücksichtigen. Zu einem Sinuswert gehören stets ein Winkel im I. und ein Winkel im II. Quadranten. Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen.

Durch den Sinussatz werden Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck vereinfacht, da nicht erst die entsprechende Höhe berechnet werden muß.

Was ergibt sich aus den Gleichungen (18) bis (20) im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?

Der Sinussatz kann auch in der Form

(22) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

geschrieben werden.

Der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels hängt mit dem Umkreisradius r zusammen.

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist in Abbildung 3.61.:

$$\sphericalangle BMC = 2\alpha; \quad \sphericalangle BMD = \alpha \ (0° < \alpha < 90°).$$

Im Dreieck MBD gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{2} : r \text{ und nach Umformung } \frac{a}{\sin\alpha} = 2r.$$

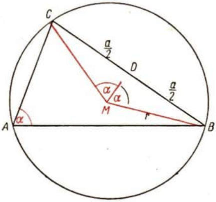


Abb. 3.61.

In Verbindung mit (22) ergibt sich:

(23) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$.

Im Dreieck ist der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Umkreisdurchmesser.

1) Zeichnen Sie eine Figur für den Fall, daß α ein stumpfer Winkel ist!
2) Welcher Sonderfall ergibt sich aus (23), wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist?

Aus der Formel $A = \frac{1}{2} c h_c$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man mit Hilfe von $h_c = b \cdot \sin\alpha$ durch Substitution

(24) $A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich

(25) $A = \frac{1}{2} ca \sin\beta$ und (26) $A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

1) Was ergibt sich aus den Gleichungen (24) bis (26) im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?
2) Leiten Sie aus Gleichung (24) die Gleichung (17) her!

Eine weitere Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Weisen Sie die Richtigkeit dieser Formel nach!
Stellen Sie die Beziehungen für A auf, in denen die Seite a bzw. b verwendet wird!

Beispiel 1:

Gegeben: $a = 20$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 117°$.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** β; **3)** γ; **4)** r (in cm); **5)** A (in cm²).

Konstruieren Sie zunächst das Dreieck mit dem Umkreis (Maßstab 1 : 2), und ermitteln Sie durch Messung näherungsweise die Werte für c, β, γ und r!

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Größen):

1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

3) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

4) $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$$

5) $A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin\beta = \frac{8 \cdot \sin 117°}{20}$

$\sin\beta = \frac{8 \cdot \sin 63°}{20}$

$\beta_1 = 20{,}88°$

$\beta_2 = 180° - 20{,}88° = 159{,}12°$

N.	L.	
8 sin 63°	0,9031 0,9499 – 1	+
Zähler 20	0,8530 1,3010	–
sin β	0,5520 – 1	

Da ein Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel haben kann, entfällt β_2.

2) $\gamma = 180° - 137{,}88° = 42{,}12°$

3) $c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 117°}$

$c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 63°}$

$c = 15{,}06$

N.	L.	
20 sin 42,12°	1,3010 0,8266 – 1	+
Zähler sin 63°	1,1276 0,9499 – 1	–
c	1,1777	

4) $r = \frac{20}{2 \cdot \sin 117°}$

$r = \frac{10}{\sin 63°}$

$r = 11{,}22$

N.	L.	
10 sin 63°	1,0000 0,9499 – 1	–
r	1,0501	
80 sin 42,12°	1,9031 0,8266 – 1	+
A	1,7297	

5) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 80 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 53{,}66$

Ergebnisse:

$a = 20$ cm $\qquad \alpha = 117°$ $\qquad r = 11{,}22$ cm $\approx 11{,}2$ cm

$b = 8$ cm $\qquad \beta = 20{,}88°$ $\qquad A = 53{,}66$ cm²

$c = 15{,}06$ cm $\approx 15{,}1$ cm $\qquad \gamma = 42{,}12°$

Vergleichen Sie die rechnerischen Ergebnisse mit den Meßwerten aus der Konstruktion!

Beispiel 2:

Gegeben: $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $r = 8{,}2$ cm.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** α; **3)** β; **4)** γ; **5)** A (in cm²).
Konstruieren Sie das Dreieck, und sagen Sie die Ergebnisse näherungsweise voraus! Wie viele Lösungen gibt es?

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Größen):

1) $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$, $\quad \sin\alpha = \frac{a}{2r}$

2) $\frac{b}{\sin\beta} = 2r$, $\quad \sin\beta = \frac{b}{2r}$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

4) $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, $\quad c = 2r\sin\gamma$

5) $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin\alpha = \frac{7{,}6}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}8}{8{,}2}$

$\alpha_1 = 27{,}61°$

$\alpha_2 = 180° - 27{,}61° = 152{,}39°$

2) $\sin\beta = \frac{6{,}4}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}2}{8{,}2}$

$\beta_1 = 22{,}97°$

$\beta_2 = 180° - 22{,}97° = 157{,}03°$

N.	L.	
3,8 8,2	0,5798 0,9138	–
$\sin\alpha$	0,6660 – 1	
3,2 8,2	0,5051 0,9138	–
$\sin\beta$	0,5913 – 1	

Rechnerisch ergeben sich je zwei Werte für α und β. Deshalb muß untersucht werden, welche Winkel möglich sind. Das Dreieck könnte folgende Winkel enthalten:

(1) α_1 und β_1 (2) α_1 und β_2 (3) α_2 und β_1 (4) α_2 und β_2.

Man erkennt sofort, daß (4) nicht möglich ist, da das Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel enthalten kann. Aber auch (2) entfällt, weil $\alpha + \beta < 180°$ sein muß. Dagegen widersprechen (1) und (3) der Winkelsummenbedingung nicht und müssen für die weiteren Berechnungen berücksichtigt werden.

$\alpha_1 = 27{,}61°$ $\qquad\qquad \alpha_2 = 152{,}39°$
$\beta_1 = 22{,}97°$ $\qquad\qquad \beta_1 = 22{,}97°$

3) $\gamma_1 = 180° - 50{,}58°$ $\qquad\qquad \gamma_2 = 180° - 175{,}36°$
$\gamma_1 = 129{,}42°$ $\qquad\qquad \gamma_2 = 4{,}64°$

4) $c_1 = 2 \cdot 8{,}2 \cdot \sin 129{,}42°$
$c_1 = 16{,}4 \cdot \sin 50{,}58°$
$c_1 = 12{,}67$

$c_2 = 16{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$
$c_2 = 1{,}326$

5) $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 129{,}42°$
$A_1 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 50{,}58°$
$A_1 = 18{,}79$

$A_2 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$
$A_2 = 1{,}967$

N.	L.	
16,4 sin 50,58°	1,2148 0,8879 – 1	+
c_1	1,1027	
16,4 sin 4,64°	1,2148 0,9079 – 2	+
c_2	0,1227	
3,8 6,4 sin 50,58°	0,5798 0,8062 0,8879 – 1	+ +
A_1	1,2739	
3,8 6,4 sin 4,64°	0,5798 0,8062 0,9079 – 2	+ +
A_2	0,2939	

Ergebnisse:

(I) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 12{,}7$ cm; $\alpha = 27{,}6°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 129{,}4°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 18{,}79$ cm²

(II) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 1{,}3$ cm; $\alpha = 152{,}4°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 4{,}6°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 1{,}97$ cm²

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Ihrer Konstruktion des Dreiecks!

Der Kosinussatz

Sind in einem schiefwinkligen Dreieck die drei Seiten bzw. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so kann der Sinussatz nicht zur Berechnung der fehlenden Stücke herangezogen werden. In diesem Fall führt die Anwendung einer

weiteren trigonometrischen Beziehung zum Ziel, die im folgenden allgemein hergeleitet wird.
Das Dreieck ABC in Abbildung 3.62. wird durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt.
Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt

$$h_c^2 = b^2 - q^2 \text{ und } h_c^2 = a^2 - p^2.$$

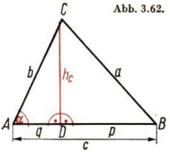


Abb. 3.62.

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2.$$

Wegen $p = c - q$, wird

$$a^2 = b^2 + (c-q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q.$$

Der Hypotenusenabschnitt q läßt sich durch eine Seite und eine Winkelfunktion ausdrücken. Im Dreieck ADC ist $\cos\alpha = \frac{q}{b}$, woraus folgt

$$q = b \cos\alpha.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$ ein, so erhält man

(27) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha\,.$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die beiden weiteren Gleichungen

(28) $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos\beta$ und (29) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$

Die drei Gleichungen (27), (28) und (29) werden als **Kosinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

● *Weisen Sie die Richtigkeit der Gleichungen (28) und (29) durch entsprechende Zerlegung des Dreiecks ABC mit Hilfe der Höhen h_a bzw. h_b nach!*

Ist Winkel α stumpf, so wird $p = c + q$ (Abb. 3.63.). Weiterhin ist

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{q}{b},$$

also
$$q = b\cos(180° - \alpha).$$

Wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ wird

$$q = -b\cos\alpha.$$

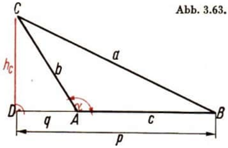


Abb. 3.63.

Man findet:

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + (c+q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c(-b\cos\alpha)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha.$$

Man erhält also ebenfalls Gleichung (27).
Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedene Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.
Durch die Anwendung des Kosinus- und des Sinussatzes wird es überflüssig, in jedem Einzelfall das Dreieck in zwei rechtwinklige zu zerlegen. Mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht zeigt die Verwendung der beiden Sätze:

	Gegebene Stücke	Lösung
(1)	*ssw*	Sinussatz
(2)	*sww*	Sinussatz
(3)	*sws*	Kosinussatz und Sinussatz
(4)	*sss*	Kosinussatz und Sinussatz.

Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wie viele Lösungen vorhanden sind **(Determination)**. Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.
Werden die unbekannten Stücke des schiefwinkligen Dreiecks logarithmisch berechnet, so hat der Kosinussatz gegenüber dem Sinussatz den Nachteil, daß die logarithmische Rechnung unterbrochen werden muß.

Beispiel 3:

Gegeben: $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.
Gesucht: **1)** α; **2)** β; **3)** γ; **4)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung (a, b, c und A bedeuten Größen):

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ **2)** $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ **4)** $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\cos\alpha = \frac{169 + 225 - 576}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{182}{390} = -\frac{7}{15} = -0{,}4667$

$\alpha = 180° - 62{,}18°$

$\alpha = 117{,}82°$

2) $\sin\beta = \frac{13 \cdot \sin 117{,}82°}{24}$

$\sin\beta = \frac{13 \cdot \sin 62{,}18°}{24}$

$\beta_1 = 28{,}62°$

$\beta_2 = 180° - 28{,}62° = 151{,}38°$

N.	L.	
13	1,1139	
sin 62,18°	0,9466 – 1	+
Zähler	1,0605	
24	1,3802	–
sin β	0,6803 – 1	

Der Winkel β_2 entfällt als Lösung, da bereits Winkel α stumpf ist.

3) $\gamma = 180° - 146{,}44° = 33{,}56°$

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 13 \cdot \sin 33{,}56°$

$A = 86{,}24$

N.	L.	
0,5	0,6990 – 1	
24	1,3802	+
13	1,1139	+
sin 33,56°	0,7426 – 1	+
A	1,9357	

Ergebnisse:

$a = 24$ cm	$\alpha = 117{,}8°$	$A = 86{,}24$ cm²
$b = 13$ cm	$\beta = 28{,}6°$	
$c = 15$ cm	$\gamma = 33{,}6°$	

Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und kontrollieren Sie die Ergebnisse, gegebenenfalls maßstäblich verkleinert, durch Konstruktion!

a) $a = 4$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 55°$
b) $a = 5{,}6$ cm, $\beta = 83{,}8°$, $\gamma = 26{,}5°$
c) $c = 1{,}46$ m, $\alpha = 20{,}2°$, $\beta = 74{,}3°$
d) $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 44{,}2°$, $\gamma = 54{,}5°$
e) $c = 121{,}56$ m, $\beta = 13{,}47°$, $\gamma = 101{,}25°$
f) $b = 2{,}389$ km, $\alpha = 39°\,17'$, $\beta = 68°\,28'$
g) $a = 44{,}8$ cm, $\alpha = 59°\,10'$, $\beta = 41°\,18'$
h) $c = 64{,}9$ m, $\alpha = 42°\,43'$, $\gamma = 102°\,19'$

2. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt! Achten Sie dabei darauf, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\gamma = 53{,}6°$
b) $a = 35{,}75$ m, $c = 26{,}48$ m, $\alpha = 93{,}57°$
c) $a = 7{,}0$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\beta = 43{,}7°$
d) $a = 32{,}3$ cm, $c = 36{,}6$ cm, $\alpha = 55{,}7°$
e) $a = 12{,}15$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 109{,}24°$
f) $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20°\,35'$
g) $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67°\,23'$
h) $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117°\,4'$

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

a) $a = 8{,}7$ cm, $b = 7{,}1$ cm, $\gamma = 44{,}6°$
b) $a = 52{,}85$ cm, $c = 75{,}23$ cm, $\beta = 56{,}91°$
c) $a = 34{,}76$ m, $\beta = 59°\,10'$, $\gamma = 79°\,33'$
d) $b = 4{,}475$ km, $\beta = 59{,}27°$, $\gamma = 41{,}31°$

4. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks, von dem $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm gegeben sind!

5. a) Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Gleichung

$$A = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

gegeben ist!

b) Berechnen Sie aus den Winkeln $\alpha = 56{,}79°$ und $\beta = 62{,}89°$ sowie dem Umkreisradius $r = 12$ cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

6. Warum können die Seiten $a = 8$ cm, $b = 5$ cm und der Flächeninhalt $A = 22$ cm² nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?

a) Begründen Sie geometrisch, daß dies nicht möglich ist!
Anleitung: Untersuchen Sie die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Winkel γ, wenn dieser von 0° bis 180° zunimmt!

b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat?

7. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Flächeninhalte der Dreiecke!

a) $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$
b) $a = 123{,}5$ m, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$
c) $b = 17{,}18$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$
d) $a = 245{,}9$ m, $b = 392{,}5$ m, $\gamma = 47°\,43'$

8. Berechnen Sie die Winkel sowie die Flächeninhalte der Dreiecke, deren Seiten gegeben sind!

a) $a = 5{,}38$ m, $b = 1{,}97$ m, $c = 4{,}75$ m
b) $a = 2{,}458$ km, $b = 3{,}019$ km, $c = 1{,}389$ km
c) $a = 27{,}18$ m, $b = 33{,}88$ m, $c = 35{,}03$ m
d) $a = 8{,}754$ km, $b = 6{,}672$ km, $c = 8{,}386$ km

9. Beweisen Sie mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt!

10. Drei Kreise mit den Radien

a) $r_1 = 6{,}5$ cm; $r_2 = 5{,}2$ cm; $r_2 = 3{,}8$ cm

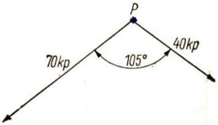
b) $r_1 = 9{,}5$ cm; $r_2 = 7{,}6$ cm; $r_3 = 5{,}1$ cm
c) $r_1 = 24{,}2$ cm; $r_2 = 15{,}6$ cm; $r_3 = 21{,}8$ cm

berühren einander gegenseitig von außen. Welchen Winkel schließen je zwei Zentralen miteinander ein? (Die Zentrale zweier Kreise ist die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte.)

11. Ein gleichseitiges Dreieck wird in Kavalierperspektive abgebildet.
a) Bestimmen Sie im Bilddreieck die Winkel **1)** darstellend-geometrisch, **2)** trigonometrisch!
b) Führen Sie die gleiche Aufgabe an einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel 75° durch!

Aus der Physik und der Technik

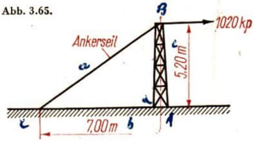
Abb. 3.64.



12. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Abb. 3.64.).
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden!

13. Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Abb. 3.65.). Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch
a) die Spannkraft im Ankerseil,
b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes: $F = 800$ kp)!

Abb. 3.65.



14. Ein Drehkran trägt am Auslegerkopf B eine Last $F = 3000$ kp. Welche Spannkräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf (Abb. 3.66.)? Sind es Zug- oder Druckkräfte?

15. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe **14** für
a) $F = 6000$ kp; $\overline{AB} = 6000$ mm; $\overline{BC} = 5000$ mm; $\overline{AC} = 2000$ mm;
b) $F = 4000$ kp; $\overline{AB} = 3000$ mm; $\overline{BC} = 2000$ mm; $\overline{AC} = 1500$ mm!

16. Drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkte P an und halten sich das Gleichgewicht.
a) $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 60$ kp, $F_3 = 80$ kp
b) $F_1 = 720$ kp, $F_2 = 315$ kp, $F_3 = 555$ kp
Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

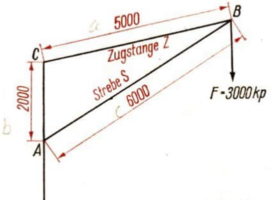


Abb. 3.66.

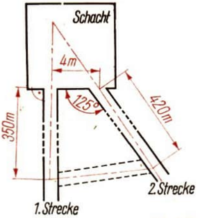


Abb. 3.67.

17. In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage: Abb. 3.67.). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter einem Winkel von 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

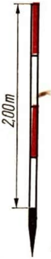
b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

3.6. Anwendungen aus dem Vermessungswesen

Bei Messungen im Gelände unterscheidet man Längen- oder Streckenmessungen, Winkelmessungen und Höhenmessungen.

Streckenmessungen



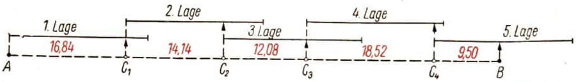


Abb. 3.69. a

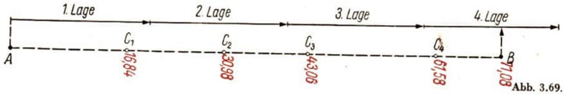
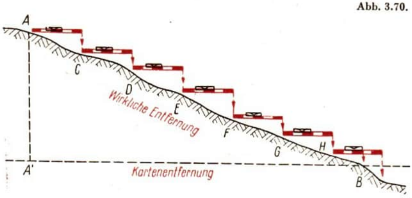


Abb. 3.69. b

Abb. 3.68.

Abb. 3.70.



Punkte werden im Gelände meist durch lotrecht aufgestellte Fluchtstäbe (Abb. 3.68.) bezeichnet. Zur Festlegung von Strecken werden zwei oder auch mehrere Fluchtstäbe verwendet. Strecken werden im ebenen Gelände mit Stahlmeßbändern entweder abgesetzt (Abb. 3.69.a) oder fortgesetzt (Abb. 3.69.b) gemessen. Häufig verwendet man auch 5,00 m lange Meßlatten, mit denen fortgesetzt gemessen wird. Ist das Gelände geneigt, so wird die horizontale Entfernung zweier Punkte A und B durch Staffelmessung bestimmt (Abb. 3.70.). Man hält in A eine Meßlatte mittels Wasserwaage horizontal und lotet ihren Endpunkt mit dem Senklot auf die Abhangfläche nach C hinunter. Hier legt man die zweite Meßlatte horizontal an usw. Im Gebirge oder in nicht begehbarem Gelände können Entfernungen optisch gemessen werden.

Winkelmessungen

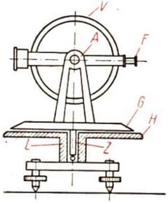


Abb. 3.71.

Das wichtigste Instrument für Winkelmessungen im Gebirge ist der **Theodolit** (Abb. 3.71.; schematische Darstellung). Ein in drei Punkten gelagertes und durch Stellschrauben horizontal einstellbares Untergestell trägt den Horizontalkreis H mit Kreisteilung (neue Teilung 400^g, alte Teilung 360°). Im Lager L des Fußes dreht sich mit dem Zapfen Z die Grundplatte G des Obergestells. Auf dieser ist um die (horizontal liegende) Kippachse A drehbar das Zielfernrohr F befestigt. Die Größe des Winkels, um den das Zielfernrohr beim Anpeilen eines Geländepunktes aus der Anfangslage in horizontaler Richtung gedreht werden muß, wird mit Hilfe der auf der Grundplatte G angebrachten Marke am Horizontalkreis H abgelesen; die Drehung des Fernrohres in der Vertikalrichtung wird an dem senkrecht zur Kippachse A stehenden Höhen- oder Vertikalkreis V gemessen. Weitere Geräte zur Winkelmessung sind zum Beispiel der **Feldwinkelmesser** und das **Winkelprisma.**

Für die Winkelgrößen sind für den Vollkreis 400 Grad neuer Teilung festgesetzt. Der rechte Winkel wird also in 100 Teile (Neugrad oder Gon) statt in 90 Teile (Altgrad) geteilt.

Zur Umrechnung dienen die folgenden Beziehungen:

Neugrad in Altgrad	Altgrad in Neugrad
$100^g = 90^\circ$	$90^\circ = 100^g$
$1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$	$1^\circ = \left(\frac{10}{9}\right)^g$
$n^g = \frac{9}{10} \cdot n^\circ$	$a^\circ = \frac{10}{9} \cdot a^g$

Beispiele:

1) $34{,}26^g = 0{,}9 \cdot 34{,}26^\circ \approx 30{,}83^\circ$

2) $86{,}58^\circ = \frac{10}{9} \cdot 86{,}58^g = 96{,}20^g$

Neben der Unterteilung des Neugrades in Dezimalgrade ist auch die Zählung in Minuten und Sekunden in Gebrauch. Die Einheit 1^g hat 100 Minuten (100^c), und 1 Minute hat 100 Sekunden (100^{cc}).

Das Vorwärtseinschneiden

Ein Punkt kann in der Ebene entweder durch seine Abstände von zwei festen Punkten festgelegt werden (Dreieckverfahren) oder durch Parallelen zu den Achsen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (orthogonales Aufnahmeverfahren; Koordinatensystem).

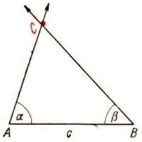


Abb. 3.72.

Beim D r e i e c k v e r f a h r e n geht man von einer Standlinie oder Basis $\overline{AB} = c$ aus (Abb. 3.72.). Ein Punkt C (Neupunkt) wird folgendermaßen angeschlossen. Man mißt die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = \beta$. Durch die drei Stücke c, α und β ist das Dreieck ABC bestimmt, die Abstände $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ können nach der trigonometrischen Methode berechnet werden. Das Verfahren ist in der Feldmessung als **Vorwärtseinschneiden** bekannt.

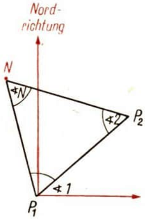


Abb. 3.73.

Beispiel 3:

Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist zu 30,37 m bestimmt worden. Sie bildet mit der Nordrichtung den Winkel 48,8° (Abb. 3.73.). Die Winkel, die durch die Strecke $\overline{P_1P_2}$ und durch die beiden Visierlinien zum Neupunkt ($\overline{P_1N}$ bzw. $\overline{P_2N}$) gebildet werden, betragen:

$$\sphericalangle 1 = 62{,}72^\circ \text{ und } \sphericalangle 2 = 58{,}07^\circ.$$

Zu berechnen sind die Entfernungen $\overline{P_1N}$ und $\overline{P_2N}$.

Lösung: Innerhalb der Berechnung werden für die Strecken nur die Maßzahlen der Strecken eingesetzt:

1) $\sphericalangle N = 180^\circ - (62{,}72^\circ + 58{,}07^\circ)$

$\sphericalangle N = 180^\circ - 120{,}79^\circ = 59{,}21^\circ$

$\overline{P_1N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle 2) : \sin(\sphericalangle N)$

$$\overline{P_1N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle 2)}{\sin(\sphericalangle N)}$$

$$\overline{P_1N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 58{,}07^\circ}{\sin 59{,}21^\circ}$$

$\overline{P_1N} = 30{,}01$

2) $\overline{P_2N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle 1) : \sin(\sphericalangle N)$

$$\overline{P_2N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle 1)}{\sin(\sphericalangle N)}$$

$$\overline{P_2N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 62{,}72^\circ}{\sin 59{,}21^\circ}$$

$\overline{P_2N} = 31{,}43$

N.	L.	
30,37 sin 58,07°	1,4825 0,9288 – 1	+
Zähler sin 59,21°	1,4113 0,9340 – 1	–
$\overline{P_1N}$	1,4773	
30,37 sin 62,72°	1,4825 0,9488 – 1	+
Zähler sin 59,21°	1,4313 0,9340 – 1	–
$\overline{P_2N}$	1,4973	

Ergebnis: Die Entfernungen des Neupunktes von den Endpunkten P_1 und P_2 der Strecke $\overline{P_1P_2}$ betragen 30,01 m bzw. 31,43 m.

Flächenberechnungen

Um den Flächeninhalt eines aufgenommenen (geradlinig begrenzten) Grundstückes zu bestimmen, zerlegt man die maßstäblich gezeichnete Figur in Vielecke, zum Beispiel Dreiecke und Trapeze, und berechnet die Flächeninhalte der Vielecke.
Die Messung einer Fläche bedingt ebenso wie die von Geraden die Festlegung einzelner Punkte. Bei kleinen Flächen können die Punkte von einer geraden Linie aus rechtwinklig aufgenommen werden. Die Fußpunkte der von den Punkten auf die Standlinie zu fällenden Lote werden mit einem Winkelprisma bestimmt.

Beispiel 4:

Ein Grundstück von der Form eines Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ist vermessen worden. Die Begrenzungen sind auf die Gerade durch die Ecken P_1 und P_5 projiziert. Die Abbildung 3.74. zeigt den Aufnahmeplan mit eingeschriebenen Meterzahlen. Der Flächeninhalt ist zu berechnen.

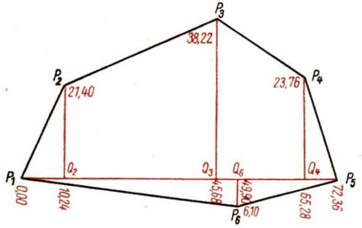


Abb. 3.74.

Lösung: Die Projektionen der Punkte P_2, P_3, P_4 und P_6 bezeichnen wir entsprechend mit Q_2, Q_3, Q_4 bzw. Q_6.

Wir berechnen die Flächeninhalte der Teilfiguren.

1. Dreieck $P_1Q_2P_2$ ist rechtwinklig.
   $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}24 \cdot 21{,}40\ \text{m}^2 = 5{,}12 \cdot 21{,}40\ \text{m}^2 \approx 109{,}57\ \text{m}^2$
2. Dreieck $P_4Q_4P_5$ ist ebenfalls rechtwinklig.
   $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 23{,}76 \cdot (72{,}36 - 65{,}28)\ \text{m}^2 = 11{,}88 \cdot 7{,}08\ \text{m}^2 \approx 84{,}11\ \text{m}^2$
3. Dreieck $P_1P_6P_5$
   $A_3 = \frac{1}{2} \cdot 72{,}36 \cdot 6{,}10\ \text{m}^2 = 36{,}18 \cdot 6{,}10\ \text{m}^2 \approx 220{,}70\ \text{m}^2$
4. Trapez $P_2Q_2Q_3P_3$
   $A_4 = \frac{21{,}40 + 38{,}22}{2} \cdot (45{,}68 - 10{,}24)\ \text{m}^2$
   $A_4 = \frac{59{,}62}{2} \cdot 35{,}44\ \text{m}^2 = 29{,}81 \cdot 35{,}44\ \text{m}^2 \approx 1056{,}47\ \text{m}^2$
5. Trapez $P_3Q_3Q_4P_4$
   $\text{A}_5 = \frac{38{,}22 + 23{,}76}{2} \cdot (65{,}28 - 45{,}68)\ \text{m}^2$
   $A_5 = \frac{61{,}98}{2} \cdot 19{,}60\ \text{m}^2 = 30{,}99 \cdot 19{,}60\ \text{m}^2 \approx 607{,}40\ \text{m}^2$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$
$$A = 109{,}57\ \text{m}^2 + 84{,}11\ \text{m}^2 + 220{,}70\ \text{m}^2 + 1056{,}47\ \text{m}^2 + 607{,}40\ \text{m}^2$$
$$A = 2078{,}25\ \text{m}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt beträgt angenähert $2078{,}25\ \text{m}^2$.

Höhenmessungen

Zur Bestimmung von Höhenunterschieden kann die Winkelmessung ebenfalls benutzt werden, wenn die Entfernung nach den aufzunehmenden Punkten bekannt ist oder sich bestimmen läßt. Werden die Höhe des Instrumentes mit i, die Entfernung mit e und der Winkel gegen die Horizontale mit α bezeichnet, so ist (Abb. 3.75.)

$$h = i + e \cdot \tan \alpha.$$

Liegt der Winkel α über der Horizontalen, so nennt man ihn **Erhebungswinkel (Höhenwinkel)**, liegt er unterhalb, so heißt er **Senkungswinkel (Tiefenwinkel)**

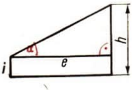


Abb. 3.76.

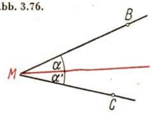
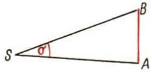


Abb. 3.77.

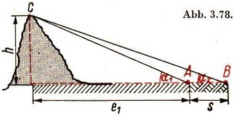


(Abb. 3.76.; α bzw. α'). Der Winkel, unter dem eine Strecke $\overline{AB}$ gesehen wird, heißt **Sehwinkel** σ. Es ist der Winkel, den die Visierlinien nach den Endpunkten A und B miteinander bilden (Abb. 3.77.).

Beispiel 5:

Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie $\overline{AB} = s = 113$ m abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist (Abb. 3.78.). An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $\alpha_1 = 24{,}29°$ und $\alpha_2 = 19{,}80°$ gemessen. Wie hoch erhebt sich der Berg über der Ebene?

Abb. 3.78.



Lösung: Es ist $\tan\alpha_1 = \frac{h}{e_1}$ und $\tan\alpha_2 = \frac{h}{e_1 + s}$.
Die zweite Gleichung wird nach h aufgelöst, die erste nach e_1.

$$h = e_1 \cdot \tan\alpha_2 + s \cdot \tan\alpha_2$$

$$e_1 = \frac{h}{\tan\alpha_1}$$

Setzt man den Ausdruck für e_1 in den für h ein und formt um, so erhält man h.

$$h = \frac{h \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha} + s \cdot \tan\alpha_2$$

$$h\left(1 - \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}\right) = s \tan\alpha_2$$

$$h = \frac{s \cdot \tan\alpha_2}{\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}}$$

$$h = \frac{s \cdot \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}$$

Die Zahlenwerte werden eingesetzt.

$$h = \frac{113 \cdot \tan 24{,}29° \cdot \tan 19{,}80°}{\tan 24{,}29° - \tan 19{,}80°}$$

$$\begin{array}{rl} \tan 24{,}29° & = 0{,}4513 \\ -\tan 19{,}80° & = 0{,}3600 \\ \hline \text{Nenner} & = 0{,}0913 \end{array}$$

$h = 201{,}1$

N.	L.	
113	2,0531	
tan 24,29°	0,6545 − 1	+
tan 19,80°	0,5563 − 1	+
Zähler	1,2639	
Nenner	0,9605 − 2	−
h	2,3034	

Ergebnis: Der Berg erhebt sich rund 201 m über der Ebene.

Bemerkungen zur Triangulation

Die Unterlagen für die Herstellung zuverlässiger Karten liefert die Landesvermessung, die nach den Gesetzen der Geodäsie vorgenommen wird. Die Methoden der Vermessung, Berechnung und Abbildung, die zur Lösung der verschiedenen geodätischen Aufgaben angewendet werden, rechnet man je nach den Anforderungen an die theoretischen Grundlagen zur „niederen" oder zur „höheren" Geodäsie. Sind die zu vermessenden Gebiete so klein, daß sie als eben behandelt werden können und daß für Berechnungen die Methoden der ebenen Trigonometrie hinreichend genaue Ergebnisse liefern, so gehört die Bearbeitung zur niederen Geodäsie. Aufgabe der höheren Geodäsie dagegen ist es, weite Gebiete unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu vermessen. Hierzu müssen die auf der Erdoberfläche festgelegten Hauptpunkte der Landesvermessung auf eine Kugel- oder Ellipsoidoberfläche, die als Ersatz für die Erdoberfläche gedacht ist, eingeordnet sowie die einzelnen Gebiete dieser Flächen auf ebenen Karten dargestellt werden.
Bei der **Triangulation** wird das Land mit Dreiecksnetzen verschiedener Ordnung überzogen. Die Dreiecke der I. Ordnung haben 30 bis 100 km Seitenlänge, die der II. Ordnung durchschnittlich 8 km und die der III. Ordnung durchschnittlich 3 km. Von einer sehr genau gemessenen Basis ausgehend, werden die Punkte der Dreiecksnetze durch Winkelmessungen und Rechnung bestimmt. Über den trigonometrischen Marksteinen werden oft Holzgerüste errichtet, die die Sicht auf größere Entfernungen hin ermöglichen (trigonometrische Signale).

● *Stellen Sie trigonometrische Punkte in Ihrem Ort bzw. in seiner Umgebung fest!*

Höhenpunkte werden ebenfalls festgelegt. Die Vermarkung solcher Punkte geschieht zum Beispiel durch Einlassen von eisernen Bolzen in standsichere massive Gebäude.

● *Stellen Sie Höhenbolzen in der Umgebung Ihrer Schule fest!*

Für die Landesvermessung in Deutschland war das Vorbild die Vermessung, die der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss durchgeführt hat.

Carl Friedrich Gauss (1777—1855)

Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss wurde 1777 in Braunschweig geboren. Er stammte aus einfachen Verhältnissen; sein Vater hatte vielerlei Beschäftigungen, zum Beispiel als Gärtner, als Weißbinder, als Kassierer einer Sterbekasse. Wie Gauss selbst äußerte, schrieb und rechnete der Vater gut. Seine Mutter hatte jahrelang als Magd gearbeitet. Schon als Kind hatte Gauss Freude am Rechnen. In der Volksschule in Braunschweig entdeckte der Lehrer Büttner die mathematischen Fähigkeiten des Jungen. In der damaligen Gesellschaftsordnung war den Kindern der Werktätigen der Weg zur Hochschule im allgemeinen verschlossen. So war es ein besonderer Glücksfall, daß Gauss in Braunschweig das Gymnasium und in Göttingen die Universität besuchen konnte. Gauss beschäftigte sich schon als Fünfzehnjähriger mit Problemen der höheren Mathematik. Im Jahre 1799 promovierte er zum Doktor der Philosophie mit einer grundlegenden Arbeit auf dem Gebiet der Algebra. Seit 1807 war er Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen.

Carl Friedrich Gauss
(1777—1855) Abb. 3.79.

Das wissenschaftliche Schaffen von C. F. Gauss ist außerordentlich vielseitig. Auf allen Gebieten der Mathematik, der Arithmetik, Algebra, Analysis und der Geometrie, kam er zu neuen und für die weitere Entwicklung der Mathematik fruchtbaren Erkenntnissen. Außerdem wandte er sich auch anderen Wissenschaften zu, der Astronomie, der Physik und der angewandten Mathematik. Er war der Meinung, daß die Anwendungen für die mathematische Forschung große Bedeutung haben. Seine Vielseitigkeit ist auch dadurch gekennzeichnet, daß er sich als Student außer der höheren Mathematik der Philosophie und der Literatur widmete. In seinem Leben und Wirken hat Gauss die Theorie mit der Praxis eng verbunden. Als er schon in höherem Alter war, führte er die Landesvermessung im Land Hannover durch. Die Triangulation diente zunächst praktischen Zwecken. Gauss benutzte sie aber zugleich zu wissenschaftlichen Erkenntnissen; durch äußerst genaue Vermessung des Dreiecks Brocken–Inselsberg–Hoher Hagen (bei Göttingen) prüfte er, ob der Satz von der Winkelsumme für solche großen Dreiecke noch gilt. Fast ein volles Jahrzehnt fuhr er Sommer für Sommer ins Gelände, um die erforderlichen Messungen entweder selbst durchzuführen oder zu überwachen. Mit ungeheurem Fleiß wertete er die Meßergebnisse aus. Dabei berechnete er etwa eine Million Zahlen und führte Eliminationen aus, bei denen 55 Gleichungen ebenso viele unbekannte Größen enthielten.

Carl Friedrich Gauss war einer der bedeutendsten Mathematiker.

Aufgaben

1. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte A und B auf ihr um 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichnen Sie einen maßstäblichen Geländeschnitt durch die Straßenmitte, und lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch (Abb. 3.80.)!

2. Welche Breitenausdehnung hat ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung d unter dem Sehwinkel 1° erscheint?
   a) $d = 1$ m b) $d = 10$ m
   c) $d = 100$ m d) $d = 1$ km e) $d = 10$ km

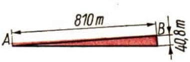


Abb. 3.80.

3. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von 52,7° in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten.
   a) Wie groß ist die Höhe des Leitungsmastes über der Erde?
   b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch!

4. Um die Höhe einer Wolkendecke zu bestimmen, wird diese von dem Scheinwerfer einer meteorologischen Station lotrecht angestrahlt, so daß die Spitze des Lichtkegels an der Wolkendecke einen scharf begrenzten Lichtfleck erzeugt. Der Lichtfleck wird durch das Fernrohr eines in 300 m horizontaler Entfernung vom Scheinwerfer aufgestellten Theodoliten

angepeilt und am Höhenkreis des Theodoliten ein Höhenwinkel $\alpha = 70{,}4°$ abgelesen. Wie hoch ist die Wolkendecke?
Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

5. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm? Lösen Sie die Aufgabe
a) trigonometrisch, **b)** geometrisch!

6. Beim Abstecken eines rechtwinklig-dreieckigen Grundrisses ergeben sich die Seitenlängen für die Hypotenuse zu 53,50 m und eine Kathete zu 25 m. Wie groß sind die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, der Flächeninhalt und die dritte Seite?

7. Berechnen Sie die Horizontalentfernungen e_1 und e_2 eines Turmes von den Standorten St. 1 und St. 2 und die Höhe h der Turmspitze über NN (Abb. 3.81.)!

a) Gemessen sind die Grundlinie $b = 247{,}290$ m, die Horizontalwinkel $\varphi_1 = 110{,}99°$ und $\varphi_2 = 34{,}90°$ (Vorwärtseinschneiden).

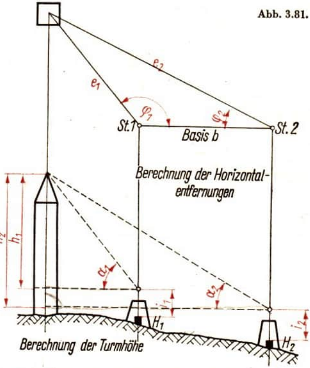


Abb. 3.81.

b) Gegeben sind die Höhen der Standorte $H_1 = 145{,}02$ m über NN; $H_2 = 139{,}04$ m über NN sowie die Höhen der Meßinstrumente $i_1 = 1{,}30$ m; $i_2 = 1{,}20$ m. Gemessen sind die Höhenwinkel $\alpha_1 = 19{,}12°$ und $\alpha_2 = 12{,}80°$.

c) Beachten Sie die Rechenkontrolle für h!

8. Von einem Viereck kennt man die Seite $\overline{AB}$ und die Winkel, die $\overline{AB}$ mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ und mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ bildet. Es soll aus diesen Angaben die Länge der Seite $\overline{CD}$ berechnet werden.

a) $\overline{AB} = 85$ m, $\sphericalangle ABC = 57{,}12°$, $\sphericalangle ABD = 34{,}24°$,
$\sphericalangle BAC = 44{,}37°$ und $\sphericalangle BAD = 122{,}19°$

b) $\overline{AB} = 72$ m, $\sphericalangle ABC = 39°\,43'$, $\sphericalangle ABD = 25°\,21'$,
$\sphericalangle BAC = 62°\,5'$ und $\sphericalangle BAD = 118°\,24'$

c) $\overline{AB} = 514$ m, $\sphericalangle ABC = 90°\,27'$, $\sphericalangle ABD = 62°\,27'$,
$\sphericalangle BAC = 39°\,52'$ und $\sphericalangle BAD = 73°\,54'$

9. Über einen Fluß soll eine Brücke mit zwei gleichen Bogen gebaut werden. Um die Lage des mittleren Pfeilers zu bestimmen, hat man auf dem linken Ufer eine Standlinie $\overline{CD}$ von $a = 190$ m Länge abgesteckt und die Winkel gemessen, die die Visierlinien nach den Endpfeilern A und B mit $\overline{CD}$ bilden. Welche Entfernung muß der mittlere Pfeiler von jedem der beiden anderen erhalten, wenn er 2,4 m breit werden soll?
$\sphericalangle ACD = \alpha = 152{,}53°$, $\sphericalangle BCD = \beta = 121{,}26°$,
$\sphericalangle ADC = \gamma = 4{,}16°$ und $\sphericalangle BDC = \delta = 32{,}43°$

10. Von den Endpunkten A und B einer bekannten Basis a werden die Punkte C und D anvisiert und dabei die Winkel CAD, DAB, CBA und DBC gemessen.
Es soll hieraus die Länge von $\overline{CD}$ berechnet werden.

a) $a = 25$ m, $\sphericalangle CAD = 58{,}58°$, $\sphericalangle DAB = 146{,}14°$,
$\sphericalangle CBA = 60{,}50°$ und $\sphericalangle DBC = 41{,}60°$

b) $a = 60$ m, $\sphericalangle\, CAD = 52°\, 8'$, $\sphericalangle\, DAB = 126°\, 2'$,
$\sphericalangle\, CBA = 66°\, 52'$ und $\sphericalangle\, DBC = 34°\, 52'$

c) $a = 150$ m, $\sphericalangle\, CAD = 30°\, 24'$, $\sphericalangle\, DAB = 95°\, 1'$,
$\sphericalangle\, CBA = 51°\, 34'$ und $\sphericalangle\, DBC = 28°\, 53'$

11. An zwei Punkten A und B von $a = 56$ m Abstand auf dem linken Elbufer bei Torgau wurden die Winkel der Visierlinien nach zwei auf den Ufern einander gegenüberliegenden Punkten C und D mit der Geraden AB gemessen. Es ergab sich:

$\sphericalangle\, CAB = 120°$, $\sphericalangle\, DAB = 97{,}46°$, $CBA = 4{,}30°$ und $\sphericalangle\, DBA = 18{,}23°$.

Welche Größe ergab sich hieraus für die Breite der Elbe an der Beobachtungsstelle?

12. Zwei Straßen stoßen geradlinig unter einem Winkel von 120° aufeinander. Zur Verbesserung der Straßenführung sollen beide durch einen Kreisbogen vom Radius

a) $r = 300$ m, **b)** $r = 500$ m

verbunden werden. Um wieviel Meter wird durch den Bogen der Straßenzug verkürzt?

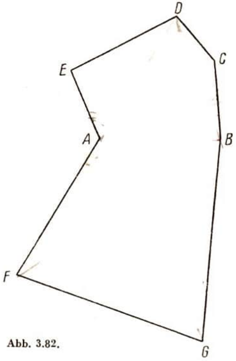


Abb. 3.82.

13. Von einer Klasse wird ein LPG-Feld vermessen (Abb. 3.82.). Ergebnisse:

Basis $\overline{AB} = 125$ m

$\sphericalangle\, BAC = \alpha_1 = 35{,}1°$	$\sphericalangle\, ABC = \beta_1 = 87{,}8°$
$\sphericalangle\, BAD = \alpha_2 = 58{,}1°$	$\sphericalangle\, ABD = \beta_2 = 71{,}9°$
$\sphericalangle\, BAE = \alpha_3 = 112{,}0°$	$\sphericalangle\, ABE = \beta_3 = 26{,}1°$
$\sphericalangle\, BAF = \alpha_4 = 121{,}0°$	$\sphericalangle\, ABF = \beta_4 = 33{,}6°$
$\sphericalangle\, BAG = \alpha_5 = 64{,}0°$	$\sphericalangle\, ABG = \beta_5 = 84{,}2°$.

Der Flächeninhalt des Feldes ist zu berechnen.

14. Eine neue Eisenbahnlinie wird gebaut. Sie verläuft in einer Ebene senkrecht zu einer bereits bestehenden Bahnlinie, über die sie mittels einer Brücke von 8,50 m Höhe geführt werden soll. Wie lang muß die Rampe mindestens sein, wenn der Anstiegswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

15. Im Gelände ist eine Basis $\overline{AB} = 225$ m vermessen worden. Ein dritter Punkt im Gelände ist C, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden

$\sphericalangle\, CAB = \alpha = 75°\, 20'$ und $\sphericalangle\, CBA = \beta = 42°\, 40'$

ermittelt.

Wie lang sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Abb. 3.83.)?

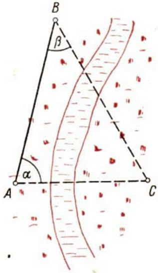


Abb. 3.83.

16. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der in Abbildung 3.84. skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen?

Bemerkung: $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind nicht begehbar.

$\overline{AB} = 470$ m; $\overline{BC} = 675$ m; $\alpha = 115°$; $\beta_1 = 26°$; $\beta_2 = 72{,}5°$.

17. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen CA und CB werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt. Der Winkel ACB beträgt 38,7°.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung $\overline{AB}$?

b) In welchen Richtungen von A und B aus ist die Schneise zu schlagen?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

18. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein? Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

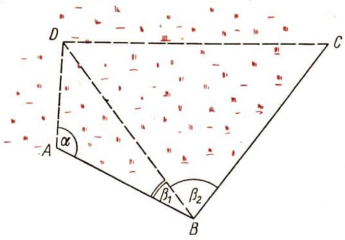


Abb. 3.84.

Schüleraufträge

1. Berechnen Sie **a)** die Höhe Ihrer Schule, **b)** die Höhe Ihres Wohnhauses, **c)** die Höhe eines Fabrikschornsteines, indem Sie von Ihrem Standort bis zum Fuß des Objektes eine waagerechte Standlinie vermessen und die Erhebungswinkel mit einem Winkelmeßgerät bestimmen!
2. Berechnen Sie aus selbstgewonnenen Meßwerten die Größe einiger Ackerflächen, auf denen Sie am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion arbeiten!
3. Stellen Sie in der näheren Umgebung an einer steilen Straße fest, unter welchem Winkel sie gegen die Horizontale ansteigt! Berechnen Sie den Höhenunterschied, den Sie auf 100 m Weglänge überwindet!

3.7. Die Periodizität der Winkelfunktionen

Das Bogenmaß eines Winkels

Bisher haben wir den Winkel in Grad (°) gemessen. Dabei ist die Winkeleinheit Grad der 360ste Teil eines Vollwinkels.
Es gibt noch andere Möglichkeiten, Winkel zu messen. Wir behandeln im folgenden das **Bogenmaß** des Winkels. Seine Einführung beruht auf dem Gedanken, daß man Winkel durch die Länge des zugehörigen Bogens auf einem Kreis bestimmen kann, in welchem der gegebene Winkel Zentriwinkel ist.
Aus Abbildung 3.85. erkennt man die Gültigkeit folgender Proportion:[1]

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Kreisumfang} & : & \text{Kreisbogen} & = & \text{Vollwinkel} & : & \text{Zentriwinkel} \\ 2\pi r & : & b & = & 360^\circ & : & \alpha^\circ. \end{array}$$

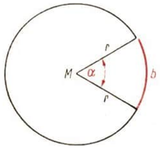


Abb. 3.85.

Daraus folgt:

$$b = \frac{\pi r}{180^\circ} \alpha^\circ.$$

[1] In den Formeln steht das Symbol α für den Zahlenwert im Gradmaß.

Die Länge eines Kreisbogens b ist dem Zentriwinkel α und der Länge des Radius r proportional.

Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?

Bildet man aus der Proportion die neue Beziehung $\frac{b}{r} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$, so ist das Verhältnis aus Kreisbogen und Radius nur noch dem Zentriwinkel proportional. Man kann daher dieses Verhältnis als Maß für den Winkel α einführen. Da diesem Maß der Bogen zugrunde liegt, bezeichnet man es als **Bogenmaß.**

Definition:
Unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht man das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zur Länge des Radius.

Das Symbol für das Bogenmaß ist: arc $\alpha°$ oder $\widehat{\alpha}$ (gelesen: „Arkus von alpha Grad"[1] oder „Bogen alpha").
Es gilt:

$$(30) \quad \widehat{\alpha} = \operatorname{arc} \alpha° = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}.$$

Das Bogenmaß des Winkels ist also als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl. Die Gleichung (30) stellt eine lineare Funktion $[\widehat{\alpha} = f(\alpha°)]$ dar.
Wird zur Bestimmung des Bogenmaßes speziell der Einheitskreis genommen, so ergibt sich eine einfache Deutung:

$$\widehat{\alpha} = \frac{b \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = b.$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist also gleich der Maßzahl des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis.

Übergang vom Gradmaß zum Bogenmaß und umgekehrt

Durch Einsetzen in die Gleichung (30) kann für die im Gradmaß gegebenen Winkel das zugehörige Bogenmaß berechnet werden.

Beispiel 1:

Es soll das Bogenmaß für den Winkel 45° berechnet werden.

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot 45°}{180°} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

Berechnen Sie das Bogenmaß für die Winkel 90°, 180°, 360°*!*

Zum Gradmaß 1° gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc} 1° = \frac{\pi \cdot 1°}{180°} \approx 0{,}0175 \approx \frac{7}{400}.$$

[1] arcus (lat.), Bogen

Zum Gradmaß α° gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc}\alpha^\circ = \widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \approx 0{,}0175 \cdot \alpha \approx \frac{7}{400} \cdot \alpha.$$

Das Bogenmaß kann also angenähert berechnet werden, indem man den Zahlenwert des Winkels im Gradmaß mit 0,0175 multipliziert.
Die Tafel 16 der vierstelligen Logarithmentafel enthält die Bogenmaße der Winkel 0° bis 360°.
Die Bogenmaße von Winkeln mit nicht tabellierten Gradzahlen, zum Beispiel von Bruchteilen von Graden, bestimmt man durch additive oder subtraktive Zusammensetzung aus tabellierten Werten oder Bruchteilen davon. Auch der Interpolation kann man sich bedienen.

Beispiele

für die Umrechnung von Grad- in Bogenmaß:

2)
$$\begin{array}{rcl} \alpha^\circ & = & 132^\circ \\ 130^\circ & \triangleq & 2{,}2689 \\ 2^\circ & \triangleq & 0{,}0349 \\ \hline \widehat{\alpha} & = & 2{,}3038 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rcl} \alpha^\circ & = & 198{,}92^\circ \\ 180^\circ & \triangleq & 3{,}1416 \\ 18^\circ & \triangleq & 0{,}3142 \\ 0{,}92^\circ & \triangleq & 0{,}0161 \\ \hline \widehat{\alpha} & = & 3{,}4719 \end{array}$$

Wird die Beziehung (30) nach α° aufgelöst, so ergibt sich

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \widehat{\alpha}.$$

Daraus erhält man:

Zur Zahl π als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \pi = 180^\circ$.

Zur Zahl 1 als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}3^\circ$.

Der Winkel mit dem Bogenmaß 1 wird als gesetzliche Winkeleinheit verwendet und heißt **Radiant** (Kurzzeichen: rad). Er hat mit 57,3° fast die Größe der Winkel im gleichseitigen Dreieck. Die Winkeleinheit Radiant ist also wesentlich größer als die Winkeleinheit Grad.

Überzeugen Sie sich, daß ein Radiant der 2πte Teil des Vollwinkels ist!
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Zentriwinkel 1 rad!

Beispiele

für die Umrechnung von Bogen- in Gradmaß:

4) $\widehat{\alpha} = 4{,}9742$
$$\begin{array}{rcr} 4{,}7124 & \triangleq & 270^\circ \\ \hline 0{,}2618 & & \\ 0{,}2618 & \triangleq & 15^\circ \\ \hline \alpha^\circ & = & 285^\circ \end{array}$$

5) $\widehat{\alpha} = 2{,}7193$
$$\begin{array}{rcr} 2{,}7053 & \triangleq & 155^\circ \\ \hline 0{,}0140 & & \\ 0{,}0140 & \triangleq & 0{,}8^\circ \\ \hline \alpha^\circ & = & 155{,}8^\circ \end{array}$$

Zur Umrechnung des Gradmaßes eines Winkels ins Bogenmaß und umgekehrt können also die folgenden Formeln verwendet werden:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\widehat{\alpha}.$$

In der Elementargeometrie mißt man Winkel meistens im Gradmaß. In der Trigonometrie benutzt man Winkelgrade bei praktischen Messungen und Rechnungen, bei allgemeineren Betrachtungen über Winkelfunktionen bevorzugt man das Bogenmaß. In der höheren Mathematik bedient man sich ausschließlich des Bogenmaßes.

Die Winkelfunktionen negativer Winkel

Legt man auf dem Radius $\overline{OP} = r$ des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt O als Richtung die von O nach P fest, so entsteht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, die man als **Ortsvektor** $\mathfrak{r}$ bezeichnet (Abb. 3.86.). Die Richtung des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ ist durch den Richtungswinkel x bestimmt, seine Länge durch die Strecke $\overline{OP}$. Wenn sich der Ortsvektor um seinen Anfangspunkt O dreht, so kann diese Drehung – je nach der Drehrichtung – im positiven oder im negativen Drehsinn erfolgen. Eine Drehung im positiven Sinne erfolgt gegen die Bewegung des Uhrzeigers (im Gegenzeigersinn), eine Drehung im negativen Sinne mit der Uhrzeigerbewegung (im Uhrzeigersinn). Dreht sich der Ortsvektor im positiven Sinne, so bezeichnet man die entstehenden Winkel als positiv

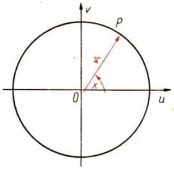


Abb. 3.86.

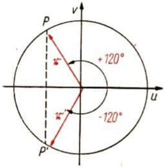


Abb. 3.87.

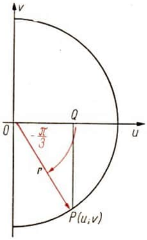


Abb. 3.88.

$\left(\text{z. B. } +120° = +\frac{2\pi}{3}\right)$. Im anderen Falle bezeichnet man die Winkel als negativ $\left(\text{z. B. } -120° = -\frac{2\pi}{3}\text{; Abb. 3.87.}\right)$. Man legt fest, daß die Definitionen 1 bis 4 der Winkelfunktionen auch für Winkel im Bereich $0 > x \geqq -2\pi$ gelten sollen. Die Abbildung 3.88. veranschaulicht das für den Winkel $-\frac{\pi}{3}$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{v}{r} = -\frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Die Winkelfunktionen negativer Winkel lassen sich auf die entsprechenden Funktionen positiver Winkel zurückführen. Es ist zum Beispiel

$$\sin(-x) = \sin(2\pi - x).$$

Andererseits ist

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x.$$

Daraus folgt

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Es ist:

$$(31) \quad \sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cot(-x) = -\cot x.$$

Beweisen Sie die Beziehungen (31) für negative Winkel in den verschiedenen Quadranten!
Gelten die Gleichungen (5) bis (8) von Seite 15, die die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen bei gleichem Winkel zum Ausdruck bringen, sowie die Gleichungen (10) bis (12) von Seite 27, die die Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln verschiedener Quadranten darlegen, auch für negative Winkel?

Funktionen $f(x)$, die ihren Wert nicht ändern, wenn die unabhängige Veränderliche das Vorzeichen wechselt, heißen **gerade Funktionen**, Funktionen, die dabei das Vorzeichen wechseln, dagegen **ungerade Funktionen**.

Definition:

Gerade Funktionen	Ungerade Funktionen
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$.

Die Kosinusfunktion, $y = \cos x$, ist eine gerade Funktion, die Sinusfunktion, $y = \sin x$, dagegen eine ungerade Funktion.

Deuten Sie diese Funktionseigenschaften geometrisch! Welche Symmetrieverhältnisse hat die Kosinusfunktion $y = \cos x$ zur y-Achse, welche die Sinuskurve $y = \sin x$ zum Nullpunkt O (0; 0)? Zu welcher Funktionsgruppe gehören die Tangens- und die Kotangensfunktion?

Nennen Sie gerade und ungerade Potenzfunktionen!

Beispiele:

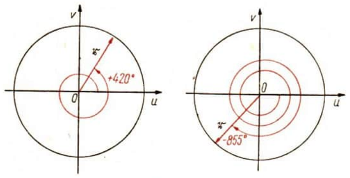
6) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\sin 60° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

7) $\cos(-110°) = \cos 110° = \cos(180° - 70°) = -\cos 70° = -0{,}3420$

8) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\frac{2\pi}{3} = -\tan 120° = -\tan(180° - 60°)$
$= -(-\tan 60°) = +\sqrt{3}$

9) $\cot(-214{,}92°) = -\cot 214{,}92° = -\cot(180° + 34{,}92°)$
$= -\cot 34{,}92° = -1{,}432$

Die Winkelfunktionen für Winkel mit Beträgen über 2π



a Abb. 3.89. b

Dreht sich der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ im positiven oder im negativen Sinne, so werden nach einem vollen Umlauf Winkel erzeugt, deren absoluter Betrag größer als 2π ist, nach zwei Umläufen Winkel, deren absoluter Betrag größer als 4π ist, usw. (Abb. 3.89.a und 3.89.b). Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, heißen zueinander **äquivalent**.

Beispiel 10:

$$\ldots -\frac{17\pi}{3};\ -\frac{11\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{13\pi}{3};\ \ldots$$

Bezeichnet man den zwischen 0 und 2π liegenden Winkel $\bar{x}$ als den **Hauptwert**, so läßt sich jeder beliebige Winkel durch die Gleichung

$$x = \bar{x} + k \cdot 2\pi$$

darstellen, wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Beispiel 11:

Wenn $x = -855°$ ist, so ist

$$\bar{x} = -855° - (-3) \cdot 360° = -855° + 3 \cdot 360° = 225°.$$

Man legt nun fest, daß die Erklärungen der Winkelfunktionen auch für Winkel x mit Beträgen über 2π gelten.

Dreht sich der Ortsvektor von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Endpunkt P nach ein, zwei, drei usw. vollen Umläufen dieselben Koordinaten wie in der Ausgangslage. Daher haben die Winkelfunktionen in den **Intervallen**[1] $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$ usw. dieselben Werte wie im Intervall $0 \ldots 2\pi$. Entsprechendes gilt für negative Winkel.

Veranschaulichen Sie einige Zahlenbeispiele durch geeignete Abbildungen!

Die Winkelfunktionen eines beliebigen Winkels x lassen sich auf dieselbe Funktion des Hauptwertes $\bar{x}$ des Winkels zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned}
(32)\quad \sin x &= \sin(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \sin \bar{x}\\
\cos x &= \cos(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cos \bar{x}\\
\tan x &= \tan(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \tan \bar{x}\\
\cot x &= \cot(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cot \bar{x},
\end{aligned}$$

wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Zeigen Sie, daß die Formeln (5) bis (8) auf Seite 83 für beliebige Winkel gelten!

Bei gegebener Funktion $f(x)$, f bedeute sin, cos, tan oder cot, und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x zunächst die Werte zwischen 0 und 2π

[1] intervallum (lat.), Zwischenraum, Teilbereich

und durch Addition bzw. Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von 2π die äquivalenten Werte. Zu der gegebenen Funktion $f(x)$ erhält man also im allgemeinen die beiden Winkel

$$\overline{x_1} + k \cdot 2\pi \text{ und } \overline{x_2} + k \cdot 2\pi, \ (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Beispiele:

12) $\sin 3520° = \sin(3520° - 9 \cdot 360°) = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$

13) $\tan x = 2{,}565;\ \overline{x_1} = 68{,}7°,\ \overline{x_2} = 248{,}7°$

Allgemeine Lösung: $x_1 = 68{,}7 + k \cdot 360°$ und $x_2 = 248{,}7° + k \cdot 360°$, $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$,

oder $x = 68{,}7° + k' \cdot 180°,\ (k' = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

Die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion

Da sich bei der Sinusfunktion die Funktionswerte nach jeweils 2π (in den Bereichen $2\pi \leqq x < 4\pi$; $4\pi \leqq x < 6\pi$; ... und in den Intervallen $-2\pi \leqq x < 0$; $-4\pi \leqq x < -2\pi$; ...) wiederholen, muß sich das Kurvenstück, das die graphische Darstellung von $y = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ ergab, in regelmäßiger Wiederkehr nach beiden Seiten fortsetzen. Für die Sinusfunktion ergibt sich so die Abbildung 3.90. Das Bild der Funktion $y = \sin x$ nennt man kurz **Sinuskurve**. Man erkennt, daß sich das zwischen 0 und 2π gelegene Kurvenstück immer wiederholt. Ebenso könnte man das allerdings auch von dem zwischen 0 und 6π gelegenen Kurvenstück sagen. Eine derartige Funktion nennt man eine periodische Funktion.

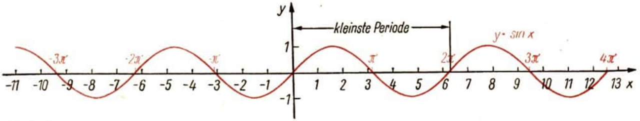


Abb. 3.90.

Die Abschnitte auf der x-Achse, innerhalb derer ein sich wiederholendes Kurvenstück liegt, nennt man Perioden der betreffenden Funktion. Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise $0 \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$; ... und $0 \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -4\pi$; $-4\pi \ldots -6\pi$; ...

Allgemein lassen sich die Perioden der Sinusfunktion zusammenfassen als

$$k \cdot 2\pi = 2k\pi,\ (k = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Am wichtigsten ist die kleinste Periode; sie beträgt 2π. Mit ihrer Hilfe läßt sich der analytische Ausdruck der Sinusfunktion wie folgt umgestalten:

Statt $y = \sin x$ mit $-\infty < x < +\infty$ kann man auch schreiben:

(33) $y = \sin(x + 2k\pi)$ mit $0 \leqq x < 2\pi$; k ganzzahlig.

Das ist deshalb möglich, weil nach unseren Überlegungen gilt:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ für } 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

Wichtig ist, daß die Darstellung (33) nicht nur für einen bestimmten Winkel x, sondern für alle x in dem angegebenen Bereich gilt.

Wodurch unterscheidet sich (33) von der Beziehung (32)?

Das Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ enthält alle für die Sinuswerte möglichen Werte, das heißt ihren Wertevorrat $(-1 \leqq y \leqq 1)$.
Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode 2π. Es ist

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ mit } 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

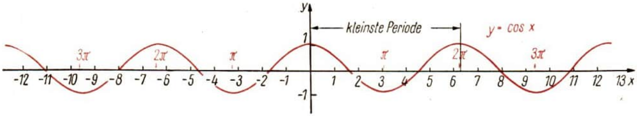


Abb. 3.91.

In Abbildung 3.91. ist die Funktion

(34) $\quad y = \cos(x + 2k\pi)$ mit $0 \leqq x < 2\pi;\ k$ ganzzahlig,

graphisch dargestellt.
Wir stellen fest, daß die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für jedes beliebige x erklärt sind.

Die Periodizität der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Tangens- und die Kotangensfunktion verhalten sich ähnlich wie die Sinus- und die Kosinusfunktion. Wir können die Tangensfunktion im ganzen x-Bereich $-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig) graphisch darstellen (Abb. 3.92.). Wir erkennen, daß auch die Tangensfunktion eine periodische Funktion

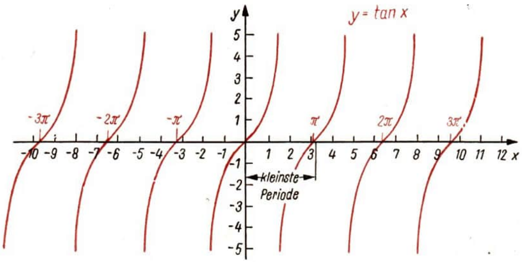


Abb. 3.92.

ist. Perioden von $y = \tan x$ sind beispielsweise $0 \ldots \pi$; $\pi \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 3\pi$; ... und $0 \ldots -\pi$; $-\pi \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -3\pi$; ...

Im Gegensatz zur Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich bei der Funktion $y = \tan x$ die Funktionswerte y bereits nach einem Zuwachs des Argumentes[1] x um π. Die Tangensfunktion hat also die (kleinste) Periodenlänge π. Es ist, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$),

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \text{ für } 0 \leqq x < \pi.$$

Die Tangensfunktion kann durch den analytischen Ausdruck

(35) $y = \tan(x + k\pi)$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig

wiedergegeben werden.

Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \; (n \text{ ganzzahlig}).$$

Die Kotangensfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode π. Es gilt

$$\cot(x + k\pi) = \cot x \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \pi; \; k \text{ ganzzahlig}.$$

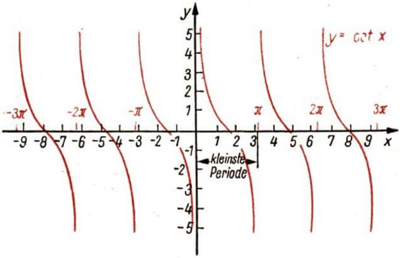
Für die in Abbildung 3.93. dargestellte Kotangensfunktion lautet der analytische Ausdruck

(36) $y = \cot(x + k\pi)$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig.

Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = n\pi \; (n \text{ ganzzahlig}).$$

Abb. 3.93.



Aus den graphischen Darstellungen der Winkelfunktionen kann man den Wertevorrat jeder dieser Funktionen deutlich erkennen. Zu jeder reellen Zahl x (als Winkel x im Bogenmaß) gehört eine bestimmte reelle Zahl y aus dem Intervall $-1 \leqq y \leqq +1$ als Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zu jeder reellen Zahl x mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ bzw. $n\pi$ gehört eine bestimmte reelle Zahl y als Funktionswert der Tangens- bzw. Kotangensfunktion.

[1] Als Argument wird hier die unabhängige Veränderliche der Winkelfunktion bezeichnet.

In der folgenden Übersicht sind Definitionsbereich und Wertevorrat der vier Winkelfunktionen nochmals zusammengestellt.

Winkelfunktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Werte aller Winkelfunktionen der folgenden Winkel!

a) $-30°$ **b)** $-18°$ **c)** $-135°$ **d)** $-83{,}4°$ **e)** $-90{,}45°$
f) $-174{,}77°$ **g)** $-214{,}92°$ **h)** $-282° 12' 38''$ **i)** $-393{,}27°$ **k)** $-450{,}13°$

2. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge zu den Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für die in Aufgabe **1a** bis **k** angeführten Winkel auf!

3. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$ die zwischen 0° und $-360°$ liegenden negativen Winkel!

	a)	b)	c)		d)	e)	f)
$\sin x$ $\cos x$	$-0{,}4848$ $0{,}9655$	$-0{,}9024$ $0{,}3704$	$0{,}0820$ $-0{,}8671$	$\tan x$ $\cot x$	$-0{,}3759$ $-191{,}0$	$-0{,}9935$ $-1{,}333$	$2{,}877$ $0{,}0107$

4. Bestimmen Sie zu den folgenden Logarithmen der vier Winkelfunktionen sowohl die positiven als auch die negativen Winkel!

a) $\lg \sin x = 0{,}5717 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}1718 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9970 - 2$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}4237 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}3393$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 1{,}0763$, $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}6506 - 1$, $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 0{,}8411 - 2$, $(\cot x < 0)$

5. Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Beziehungen auch für negative Winkel gelten!

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ **b)** $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ **c)** $\tan x \cot x = 1$
d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **e)** $\sin x = \cos(90° - x)$ **f)** $\tan x = \cot(90° - x)$
g) $\cos x = \sin(90° - x)$ **h)** $\cot x = \tan(90° - x)$

6. Geben Sie zu den nachstehenden Winkeln die auf sie folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an!

a) 50° **b)** 175° **c)** 335° **d)** 117,5° **e)** $-221{,}68°$
f) $-33°$ **g)** 212,7° **h)** $-148{,}5°$ **i)** 241° 15′ **k)** 7° 10′ 10″

7. Wie groß ist der Hauptwert der folgenden Winkel?

a) 1200° **b)** 5180° **c)** $-320°$ **d)** $-1755°$ **e)** $-615° 23'$
f) 2123° **g)** $-4713°$ **h)** 498° 10′ **i)** $-913{,}2°$ **k)** 2916,48°

8. Bestimmen Sie jeweils die Funktionswerte!

a) $\sin 383°$ **b)** $\sin 773{,}2°$ **c)** $\sin(-640{,}56°)$ **d)** $\sin(-3620{,}78°)$
e) $\cos 421°$ **f)** $\cos 1527{,}3°$ **g)** $\cos(-704{,}64°)$ **h)** $\cos(-1083{,}92°)$
i) $\tan 8000°$ **k)** $\tan(-444{,}7°)$ **l)** $\cot 992{,}25°$ **m)** $\cot(-524{,}44°)$

9. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge der Funktionen aus den Aufgaben **8 a** bis **m** auf!

10. Geben Sie sämtliche Lösungen (im Gradmaß) folgender Gleichungen an!

a) $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8440$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$ **d)** $\cos x = -0{,}1382$
e) $\tan x = -1{,}083$ **f)** $\tan x = 0{,}9045$ **g)** $\cot x = 0{,}0524$ **h)** $\cot x = -0{,}4109$

11. Welche Winkel ergeben sich als allgemeine Lösung aus den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg \sin x = 0{,}4328 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}6743 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}1873 - 1$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}8591 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}4711 - 1$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\cot x| = 0{,}7220 - 2$, $(\cot x < 0)$

12. Stellen Sie die Funktionen

a) $y = \sin x$, **b)** $y = \cos x$, **c)** $y = \tan x$, **d)** $y = \cot x$
im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dar, indem Sie die Winkel auf der x-Achse im Bogenmaß auftragen und dabei auf beiden Achsen gleiche Maßeinheiten benutzen!

13. Rechnen Sie die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel ins Bogenmaß um!

a) $1°$ **b)** $0{,}1°$ **c)** $0{,}01°$ **d)** $1'$ **e)** $1''$ **f)** $45°$
g) $120°$ **h)** $75°$ **i)** $300°$ **k)** $-180°$ **l)** $900°$ **m)** $32°$
n) $67{,}5°$ **o)** $102{,}7°$ **p)** $256{,}58°$ **q)** $318{,}04°$ **r)** $-177{,}42°$ **s)** $1125{,}17°$

14. Rechnen Sie die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel ins Gradmaß um!

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{10}$ **d)** $\frac{\pi}{15}$ **e)** $\frac{\pi}{30}$ **f)** $\frac{\pi}{180}$
g) $\frac{3}{2}\pi$ **h)** $\frac{3}{4}\pi$ **i)** $\frac{7}{8}\pi$ **k)** $\frac{\pi}{12}$ **l)** $2{,}5\pi$ **m)** 37π
n) $1{,}13\pi$ **o)** $0{,}1$ **p)** $0{,}01$ **q)** 2 **r)** $1{,}5$ **s)** $3{,}04$
t) $-\pi$ **u)** $-\frac{2}{3}\pi$ **v)** -3 **w)** $-0{,}703$ **x)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **y)** 12

15. Berechnen Sie die Bogenlängen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm für die folgenden Zentriwinkel!

a) $36{,}3°$ **b)** $117{,}45°$ **c)** $255{,}58°$

16. Wie groß ist jeweils der Bogen zum Zentriwinkel $1°$ auf Kreisen mit den folgenden Radien?

a) $r = 1$ cm **b)** $r = 2$ cm **c)** $r = 4$ cm

17. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Zahlenwerte von $\operatorname{arc} \alpha$

a) mit denen von $\sin \alpha$, **b)** mit denen von $\tan \alpha$
bis auf drei Dezimalstellen überein?

18. Mit Hilfe der Tafel 4 lassen sich die Sinus- und die Tangenswerte von Winkeln zwischen $0{,}00°$ und $5{,}00°$ bestimmen. Man formt unter Verwendung der für kleine Winkel gültigen Beziehung $\sin \alpha \approx \operatorname{arc} \alpha$ um. Zu beachten ist weiter, daß $\operatorname{arc} \alpha$ dem Winkel α (im Gradmaß!) proportional ist. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 0{,}0001°$ **b)** $\sin 0{,}0018°$ **c)** $\sin 0{,}000094°$ **d)** $\sin 1''$
e) $\tan 0{,}0001°$ **f)** $\tan 0{,}000313°$ **g)** $\tan 0{,}0000847°$ **h)** $\tan 0{,}5''$

19. Bestimmen Sie die Winkel x (im Gradmaß) zu den nachstehenden Funktionswerten!

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **c)** $\sin x = 8{,}24 \cdot 10^{-7}$
d) $\tan x = 0{,}0000104$ **e)** $\tan x = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\tan x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$

20. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin\frac{\pi}{3}$ **b)** $\sin\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ **d)** $\sin 1$ **e)** $\sin 0{,}43$
f) $\sin(-1{,}87)$ **g)** $\sin 2{,}163$ **h)** $\cos\frac{4}{3}\pi$ **i)** $\cos\frac{\pi}{4}$ **k)** $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$
l) $\cos 1{,}31\pi$ **m)** $\cos 0{,}5$ **n)** $\cos(-1)$ **o)** $\cos 2{,}897$ **p)** $\cos(-2{,}17)$

21. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\tan\pi$ **b)** $\tan\frac{2}{7}\pi$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{20}\right)$ **d)** $\tan 0{,}7$ **e)** $\tan(-1{,}2)$
f) $\tan 5{,}943$ **g)** $\tan 1{,}052$ **h)** $\cot(-\pi)$ **i)** $\cot\frac{2}{5}\pi$ **k)** $\cot 1{,}8\pi$
l) $\cot 0{,}05$ **m)** $\cot\sqrt{2}$ **n)** $\cot 3$ **o)** $\cot(-1{,}32)$ **p)** $\cot(-0{,}48\pi)$

22. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge der folgenden Funktionswerte auf!

a) $\sin\frac{5}{9}\pi$ **b)** $\sin 0{,}1\pi$ **c)** $\sin 6{,}1$ **d)** $\cos 1\frac{3}{4}\pi$ **e)** $\cos(-2{,}4)$
f) $\cos 3{,}515$ **g)** $\tan\frac{13}{20}\pi$ **h)** $\tan\frac{\pi}{100}$ **i)** $\cot 5{,}5$ **k)** $\cot(-0{,}72)$

23. Geben Sie die Winkel x zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß an!

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\sin x = 0{,}6428$ **c)** $\sin x = 0{,}9736$ **d)** $\sin x = -0{,}1951$
e) $\sin x = 3{,}23\cdot 10^{-6}$ **f)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **g)** $\cos x = 0{,}4067$ **h)** $\cos x = -0{,}8805$
i) $\cos x = 0{,}2190$ **k)** $\tan x = 1$ **l)** $\tan x = 0{,}7265$ **m)** $\tan x = -3{,}630$
n) $\tan x = -0{,}5924$ **o)** $\tan x = 5{,}18\cdot 10^{-5}$ **p)** $\cot x = 0$ **q)** $\cot x = -\sqrt{3}$

24. Welche Winkel x im Bogenmaß ergeben sich aus den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg\sin x = 0{,}8495-1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg\sin x = 0{,}7990-3$, $(\sin x > 0)$
c) $\lg\sin x = 0{,}5686-6$, $(\sin x > 0)$ **d)** $\lg\cos x = 0{,}9730-1$, $(\cos x > 0)$
e) $\lg|\cos x| = 0{,}8026-1$, $(\cos x < 0)$ **f)** $\lg\cos x = 0{,}9278-1$, $(\cos x > 0)$
g) $\lg\tan x = 0{,}0762$, $(\tan x > 0)$ **h)** $\lg\tan x = 0{,}8699-2$, $(\tan x > 0)$
i) $\lg|\cot x| = 0{,}0456$, $(\cot x > 0)$ **k)** $\lg\cot x = 0{,}7741-1$, $(\cot x > 0)$

25. a) Berechnen Sie den Weg, den ein um die Strecke $r = 5$ cm vom Scheitelpunkt entfernter Punkt P zurücklegt, wenn der Winkel 90°; 270°; 360°; 45°; 57,3° beträgt!

b) Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel sowie die dazugehörigen Wege des Punktes P als Kreisbögen und als Strecken!

26. Geben Sie die in Aufgabe **25** bestimmten Wege unter der Voraussetzung an, daß $r = 1$ cm ist!

27. Stellen Sie die Funktion $y = \operatorname{arc} x$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ in einem geeigneten Maßstab graphisch dar!

28. a) Untersuchen Sie an Hand von Beispielen, welche der Winkelfunktionen gerade und welche ungerade sind!

b) Welche anderen geraden bzw. ungeraden Funktionen kennen Sie?

29. Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse bei den Bildern der Winkelfunktionen in den folgenden Bereichen!

a) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ **b)** $0 \leqq x \leqq \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$

30. Unter Benutzung der Formeln (5) und (6) ist zu zeigen, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die kleinste Periode π haben.

31. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 5\pi$ **b)** $\sin 7\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin(-15{,}4\pi)$ **d)** $\sin 10{,}5$ **e)** $\cos(-3\pi)$
f) $\cos 2\frac{1}{2}\pi$ **g)** $\cos 100\pi$ **h)** $\cos 6{,}53$ **i)** $\tan\frac{3}{2}\pi$ **k)** $\tan 1{,}7\pi$
l) $\tan\left(-2\frac{1}{12}\pi\right)$ **m)** $\tan 3{,}487$ **n)** $\cot\left(-\frac{10}{9}\pi\right)$ **o)** $\cot 14\pi$ **p)** $\cot 14$

32. Suchen Sie die Logarithmen zu den Beträgen der Funktionen in den Aufgaben **31 a** bis **p**!

33. Geben Sie die allgemeinen Lösungen für die folgenden Funktionswerte im Bogenmaß an!

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\sin x = 0{,}5052$ **d)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\cos x = 0{,}9340$ **g)** $\tan x = 2+\sqrt{3}$ **h)** $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

i) $\tan x = 5{,}823$ **k)** $\cot x = -\sqrt{3}$ **l)** $\cot x = \sqrt{3}-2$ **m)** $\cot x = 0{,}1341$

34. Geben Sie die allgemeinen Lösungen zu den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen im Bogenmaß an!

a) $\lg \sin x = 0{,}7859-3$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750-1$, $(\sin x < 0)$

c) $\lg \cos x = 0{,}8436-2$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}8436-1$, $(\cos x < 0)$

e) $\lg \tan x = 0{,}4189-1$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}7732$, $(\tan x < 0)$

g) $\lg \cot x = 0{,}5066-1$, $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}1178$, $(\cot x < 0)$

35. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = \sin x \\ 2)\ y = 2\sin x \\ 3)\ y = \sin 2x \end{array}\right\} (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

a) Vergleichen Sie die Ordinaten der Punkte der zu 1 und 2 gehörenden Kurven bei jeweils gleichen Argumenten!

b) Welche Periode hat die Funktion 3?

c) Was ergibt ein Vergleich der Bilder der Funktionen

$y = \sin x$, $y = n \sin x$ und $y = \sin nx$?

36. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar!

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = \sin x \\ 2)\ y = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ 3)\ y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

Vergleichen Sie die Lage der drei Funktionsbilder im Koordinatensystem!

37. Stellen Sie die Funktion $\sin x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz graphisch dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!
Man nennt diese Darstellung eine Verstreckung der Sinuskurve. Sie ist beim Interpolieren vorteilhafter verwendbar als die übliche Darstellung der Sinusfunktion in einem xy-Achsenkreuz, bei dem beide Achsen gleichmäßig geteilt sind.

38. Stellen Sie die Funktion $\cos x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!

3.8. Die Funktionen $y = a \sin x$; $y = \sin bx$; $y = \sin(x+c)$; $y = a\sin(bx+c)$

Die Funktion $y = a \sin x$

Im Abschnitt 3.1. sollte in der Übung auf Seite 72 der Flächeninhalt des Rhombus als Funktion des Winkels α dargestellt werden. Ist die Seitenlänge $a = 1$ cm, so ergibt sich im Intervall $0° < \alpha < 180°$ die Sinuskurve. Wenn $a = 2$ cm gewählt wird, so

verdoppeln sich in der graphischen Darstellung die Funktionswerte; für $a = 3$ cm verdreifachen sie sich usw.
Im Kreis mit dem Radius r gilt die Gleichung

(37) $$\sin x = \frac{v}{r} \text{ (Abb. 3.5.).}$$

Liegt ein Kreis mit dem Radius a vor, so gilt $r = a$, und es ergibt sich:

$$\sin x = \frac{v}{a} \quad \text{oder} \quad v = a \sin x.$$

Trägt man im xy-Koordinatensystem zu den Abszissen x die projizierenden Lote im Kreis mit dem Radius a innerhalb eines uv-Systems auf, so erhält man das Bild der Funktion

$$y = a \sin x.$$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = a \sin x$ für $a = 3$!

Um den Zusammenhang zwischen den Funktionen

$$y = a \sin x \text{ und } y = \sin x$$

zu ermitteln, sei in der ersten Funktion vorübergehend die unabhängige Variable X und die abhängige Variable Y:

$$Y = f_1(X) = a \cdot \sin X \; (a > 1).$$

Für die graphische Darstellung dieser Funktion ist jeder Wert der Sinusfunktion $y = \sin x$ mit dem konstanten Faktor a zu multiplizieren. Geometrisch bedeutet dies, daß die Ordinate jedes Punktes der Kurve der Ausgangsfunktion $y = \sin x$ auf das a-fache oder im Verhältnis $a:1 = \frac{a}{1}$ vergrößert wird. In Abbildung 3.94. ist dieses für $a = 2$ ausgeführt (das xy- und das XY-System fallen zusammen).

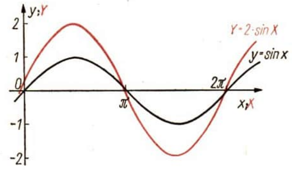


Abb. 3.94.

Ist a positiv, aber kleiner als 1, also $0 < a < 1$, so sind die Funktionswerte $Y = a \sin X$ kleiner als die der Funktion $y = \sin x$ bei gleichem Argument. Man erhält die Kurve der Funktion $Y = a \sin X$ aus der Sinuskurve in diesem Falle durch Stauchung. Dehnung und Stauchung werden unter dem Begriff der **Streckung** zusammengefaßt. Für $a = 1$ sind die Funktionen $Y = a \sin X$ und $y = \sin x$ und ihre Bilder identisch.

Untersuchen Sie, wie die Sinuskurve verändert wird, wenn a negativ ist! (Zum Beispiel $a = -1$.)

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_1(x) = a \sin x \; (a > 0)$$

geht aus der Sinuskurve durch Streckung senkrecht zur x-Achse hervor.
Für $a > 1$ ist die Streckung eine Dehnung, für $0 < a < 1$ eine Stauchung.

Bei $a = 1$ ist die Kurve mit der Sinuskurve identisch.
Für $a < 0$ erhält man die Kurve der Funktion $y = a \sin x$ durch Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse und entsprechende Streckung senkrecht zur x-Achse.

Durch welche Maßnahmen kann man eine Kurve der Funktion $y = a \sin x$ in eine Sinuskurve überführen?

Die Funktion $y = \sin bx$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin bx$ für $b = 2$, indem Sie zunächst die Winkel mit b multiplizieren und dann die jeweiligen Funktionswerte ermitteln! Vergleichen Sie diese Kurve mit der Sinuskurve!

Die Abbildung 3.95. zeigt die Kurven der Funktionen $y = f(x) = \sin x$ im xy-Koordinatensystem und $Y = f_2(X) = \sin bX$ mit $b = \frac{2}{3}$ im XY-Koordinatensystem.

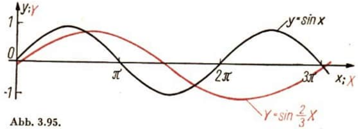


Abb. 3.95.

Beim Vergleich der Ordinaten von jeweils zwei sich entsprechenden Punkten der beiden Kurven kann man feststellen:

Einem Ordinatenwert $y_1 = f(x_1)$ eines Punktes der Kurve der Funktion $y = \sin x$ ist ein gleicher Ordinatenwert $Y_1 = f_2(X_1)$ des Punktes der Kurve der Funktion $Y = f_2(X) = \sin bX$ an der Stelle

$$X_1 = \frac{1}{b} x_1$$

zugeordnet.

$$\begin{aligned}
y_1 &= f(2\pi) = 0 &\quad \text{und} \quad Y_1 &= f_2(3\pi) = 0 \\
y_2 &= f(\pi) = 0 &\quad \text{und} \quad Y_2 &= f_2\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0 \\
y_3 &= f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -1 &\quad \text{und} \quad Y_3 &= f_2\left(\tfrac{9}{4}\pi\right) = -1 \\
y_4 &= f\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = +1 &\quad \text{und} \quad Y_4 &= f_2\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = +1
\end{aligned}$$

Die Kurve der Funktion $Y = \sin bX$ ist aus der Kurve der Funktion $y = \sin x$ durch **Streckung senkrecht zur y-Achse** entstanden. Bei dieser Veränderung der Abstände der Kurvenpunkte von der y-Achse wird die Periode 2π der Ausgangsfunktion $y = \sin x$ für die Funktion $Y = \sin bX$ auf $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ vergrößert.
Für die Kurve in Abbildung 3.95. ergibt sich so eine Streckung von 2π auf $\frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$. Für $0 < b < 1$ entsteht eine Dehnung, für $b > 1$ eine Stauchung der Kurve, für $b = 1$ wieder die Identität.

Wie wird die Sinuskurve verändert, wenn b negativ ist, zum Beispiel für $b = -1$?

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_2(x) = \sin bx \ (b > 0),$$

geht aus der Sinuskurve durch Streckung senkrecht zur y-Achse hervor. Dabei wird die Periode 2π verändert, sie wird auf $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ gestreckt. Für $0 < b < 1$ ist die Streckung eine Dehnung, für $b > 1$ eine Stauchung. Bei $b = 1$ ist die Kurve mit der Sinuskurve identisch.
Ist $b < 0$, so erhält man die Kurve der Funktion $y = \sin bx$ durch Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse und entsprechende Streckung senkrecht zur y-Achse.

Beschreiben Sie die Maßnahmen, durch die Sie umgekehrt die Kurve der Funktion $y = \sin bx$ in die Sinuskurve überführen!

Die Funktion $y = \sin(x + c)$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin(x + c)$ für $c = \pi$, indem Sie zunächst π zu den Winkeln addieren und dann die jeweiligen Funktionswerte ermitteln!
Vergleichen Sie diese Kurve mit der Sinuskurve!

In Abbildung 3.96.a ist die Funktion $y = \sin x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz, in Abbildung 3.96.b dagegen die Funktion $Y = f_3(X) = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$ in einem rechtwinkligen XY-Achsenkreuz graphisch dargestellt.

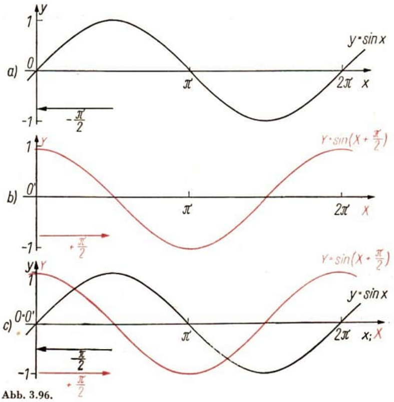


Abb. 3.96.

Die Kurve der Funktion $y = \sin x$ läßt sich durch Parallelverschiebung in der x-Richtung um $-\frac{\pi}{2}$ in die der Funktion $Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$ überführen. Umgekehrt geht die Funktionskurve

$$Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

durch Parallelverschiebung in der X-Richtung um $+\frac{\pi}{2}$ in die der Funktion $y = \sin x$ über (Abb. 3.96.c).
Nach der Quadrantenrelation $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ist die Kurve der Funktion

$$Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

mit der Kurve der Funktion $y = \cos x$ identisch.

Allgemein wird bei der Funktion $Y = \sin(X + c)$ die Sinuskurve parallel zur x-Achse um $-c$ verschoben.

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_3(x) = \sin(x + c)$$

geht aus der Sinuskurve durch Verschiebung um den Betrag von c parallel zur x-Achse hervor. Ist $c > 0$, so erfolgt die Verschiebung in der negativen Richtung der x-Achse, für $c < 0$ wird in der positiven x-Richtung verschoben. Für $c = 0$ sind beide Kurven identisch.

Die Funktion $y = a \sin(b\,x + c)$

Führt man an der Sinusfunktion alle drei Änderungen, die durch die Funktion f_1, f_2 und f_3 erklärt wurden, nacheinander durch, so erhält man die Funktion

$$y = a \sin(bx + c), \; (a > 0,\; b > 0,\; c > 0).$$

1) Die Sinuskurve werde senkrecht zur x-Achse gestreckt im Verhältnis $a:1$. Die so entstehende Kurve hat noch die Periode 2π.
2) Die Kurve werde dann senkrecht zur y-Achse gestreckt, so daß die Periode $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ betrage.
3) Die Kurve werde schließlich parallel zur x-Achse um $-\frac{c}{b}$ verschoben.

Die Abbildung 3.97. zeigt den Verlauf der Kurve einer Funktion $y = a \sin(bx + c)$ für $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$.

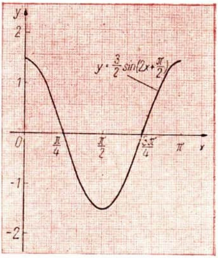


Abb. 3.97.

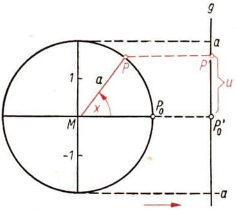
Untersuchen Sie, ob das Resultat von der Reihenfolge der durch die Funktionen f_1, f_2 und f_3 vorgeschriebenen Veränderungen der Sinuskurve abhängt!

Anwendung in der Physik:
Die Gleichung

$$u = a \sin(bx + c), \; (a > 0,\; b > 0,\; c > 0)$$

stellt eine **harmonische Welle** dar. Darin bedeuten u die **Elongation,** a die **Schwingungsweite (Amplitude),** $\lambda = \frac{1}{b} \cdot 2\pi$ die **Wellenlänge** und $\frac{c}{b}$ die **Phasenverschiebung.**

Abb. 3.98.

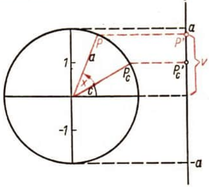


Beispiele:

1) Ein Punkt P möge sich gleichförmig auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius a im positiven Drehsinn bewegen (Abb. 3.98.). Zur Zeit $t = 0$ habe der Punkt P die Lage P_o. Der Winkel P_oMP werde im Bogenmaß

gemessen und mit x bezeichnet. Zur Zeit $t = 0$ ist auch $x = 0$. Der sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf dem Kreis bewegende Punkt P werde durch Parallelprojektion in Richtung MP_o auf die zu MP_o senkrechte Gerade g abgebildet. Die Projektion P' des Punktes P führt auf der Geraden g eine Schwingung um die Nullage P_o' zwischen den Endpunkten $+a$ und $-a$ aus.
Man kann die Elongation u sowohl als Funktion der Zeit t wie auch als Funktion des Winkels x darstellen (Abb. 3.99.).

Abb. 3.100.



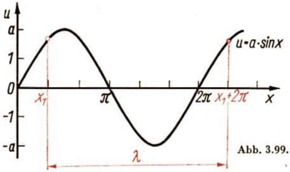


Abb. 3.99.

2) Der schwingende Punkt P' befinde sich zur Zeit $t = 0$ nicht in der Nullage P_o', sondern er habe die Lage P_c', die durch den Winkel c bestimmt ist (Abb. 3.100.). Die Schwingung, die wieder die Amplitude a haben möge, ist jetzt gegeben durch die Gleichung
$v = a \sin (x + c)$.

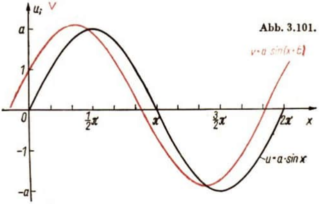


Abb. 3.101.

Dabei wird c als **Anfangsphase** bezeichnet. Zwischen den beiden durch die Gleichungen $u = a \sin x$ und $v = a \sin (x + c)$ dargestellten harmonischen Schwingungen bzw. Wellen besteht die Phasendifferenz oder Phasenverschiebung c (Abb. 3.101.).
Für die Phasenverschiebung $c = \frac{\pi}{2}$ stimmt die Funktionskurve $a \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ mit der Kurve der Funktion $a \cos x$ überein. Harmonische Schwingungen und Wellen lassen sich daher auch durch die Kosinusfunktion darstellen.

Die folgende Zusammenfassung gibt einen Überblick über die im Abschnitt 3.8. erläuterten Funktionen.

Die Kurve der Funktion	entsteht aus der Kurve der Funktion $y = \sin x$ durch:
$y = a \sin x$	Streckung senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $a : 1$
$y = \sin bx$	Streckung senkrecht zur y-Achse im Verhältnis $\frac{1}{b} : 1 = 1 : b$

$y = \sin(x + c)$	Verschiebung parallel zur x-Achse um $-c$
$y = a \sin(bx + c)$	Streckung senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $a : 1$, Streckung senkrecht zur y-Achse im Verhältnis $1 : b$ und Parallelverschiebung zur x-Achse um $-\frac{c}{b}$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = 2 \sin x$ **b)** $y = \frac{2}{3} \sin x$ **c)** $y = \frac{3}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = -2 \cos x$ **e)** $y = \frac{1}{2} \cos x$ **f)** $y = -\frac{3}{4} \cos(x - \pi)$

Welche Kurven gehen durch Dehnung, welche durch Stauchung aus den Sinus- und Kosinuskurven hervor, welche außerdem durch Verschiebung parallel zur x-Achse und Spiegelung an dieser?

2. Strecken Sie die Kurven der Funktionen $y = f(x)$ im Verhältnis $m:n$ senkrecht zur x-Achse! Stellen Sie die gestreckten Kurven $y = f_1(x)$ graphisch dar!

a) $y = \cos x$; $m:n = 2:1$ **b)** $y = \cos x$; $m:n = 5:2$

c) $y = \sin\left(\frac{5}{4}\pi + x\right)$; $m:n = 2:3$ **d)** $y = \cos(x - \pi)$; $m:n = 3:4$

Wie heißen die analytischen Ausdrücke der Funktionen der gestreckten Kurven?
Durch welche Maßnahmen werden die gestreckten Kurven wieder in die Ausgangskurven zurückgeführt?

3. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin x$, $y = 3 \sin x$ **b)** $y = \sin(x + 1)$, $y = \frac{1}{2} \sin(x + 1)$ **c)** $y = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{3}{2} \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $y = \cos x$, $y = -\frac{1}{2} \cos x$

Stellen Sie die Kurven der unter einem Buchstaben angeführten Funktionen jeweils in ein und demselben Koordinatensystem dar, und geben Sie an, wodurch die beiden Kurven ineinander übergeführt werden können!

4. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = \cos \frac{1}{2} x$ **b)** $y = \sin \frac{3}{2} x$ **c)** $y = \cos 2x$

d) $y = \sin \sqrt{3}\, x$ **e)** $y = 2 \sin 2x$

Welche Maßnahmen führen die Sinuskurve in die Kurven der Funktionen **b** und **d** und die Kosinuskurve in die Kurven der Funktionen **a** und **c** über?
Geben Sie an, wie die in den Aufgaben **a** bis **d** angeführten Funktionen in die Funktion $y = \sin x$ bzw. $y = \cos x$ übergeführt werden können!

5. Strecken Sie die Kurven der folgenden Funktionen senkrecht zur y-Achse! Das Streckungsverhältnis der Bildkurve zur Originalkurve betrage $m:n$.

a) $y = \cos x$; $m:n = 2:1$ **b)** $y = \cos x$; $m:n = 1:2$

c) $y = \sin x$; $m:n = 5:3$ **d)** $y = \sin x$; $m:n = 4:5$

e) $y = \cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$; $m:n = 1:3$

Welche Streckungen sind Dehnungen, welche Stauchungen?
Geben Sie die (kleinsten) Perioden der erzeugten Funktionen an! Zeichnen Sie die Original- und die Bildkurven!

6. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin x$ **b)** $y = \cos x$ **c)** $y = \sin\left(x - \frac{7}{6}\pi\right)$

$y = \sin \frac{1}{3} x$ $y = \cos \frac{3}{4} x$ $y = \sin\left(\frac{11}{8} x - \frac{7}{6}\pi\right)$

d) $y = \cos\left(x + \frac{7}{4}\pi\right)$

$y = \cos\left(\sqrt{2}\, x + \frac{7}{4}\pi\right)$

Stellen Sie die Kurven der unter einem Buchstaben angeführten Funktionen jeweils in ein und demselben Koordinatensystem dar, und geben Sie an, durch welche Maßnahmen die beiden Kurven ineinander übergeführt werden können!

7. Zeigen Sie, daß $\sin(-x) = -\sin x$ ist, indem Sie die Sinuskurve in die Kurve der auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung stehenden Funktion überführen!

8. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

c) $y = \cos(x + \pi)$ **d)** $y = \cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$

Welche Verschiebungen führen die Sinuskurve $y = \sin x$ in die Kurven der Funktionen **a** bzw. **b** über, welche die Kosinuskurve $y = \cos x$ in die der Funktionen **c** bzw. **d**?
Stellen Sie die Kurven der Funktionen **a** und **b** mit Hilfe der Kosinusfunktion, die der Funktionen **c** und **d** mit Hilfe der Sinusfunktion analytisch dar!

9. Durch welche Verschiebung geht die Kurve der Funktion $y = \cos x$ in die der Funktion $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ über? Stellen Sie beide Kurven in ein und demselben Koordinatensystem dar! Durch welche Verschiebung wird die zweite Kurve in die erste übergeführt?

10. Welche Verschiebung führt eine Kosinuskurve in eine Sinuskurve über?

11. Verschieben Sie die Sinuskurve $y = \sin x$ um $-\frac{5}{6}\pi$ parallel zur x-Achse!
Zeichnen Sie beide Kurven in ein und demselben Koordinatensystem! Wie heißt der analytische Ausdruck der Funktion der verschobenen Kurve?

12. Zeichnen Sie die Kurven der Funktionen $y = \cos x$ und $y = \cos\left(x + \frac{5}{3}\pi\right)$ in ein und demselben Koordinatensystem!
Welche Maßnahmen führen die beiden Kurven ineinander über?

13. Verschieben Sie die Kurven der folgenden Funktionen um d parallel zur y-Achse!
Zeichnen Sie die Kurven jeweils in ein und demselben Koordinatensystem!
Geben Sie die analytischen Ausdrücke der Funktionen der Verschiebungskurven an!

a) $y = \cos x;\ d = 1$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);\ d = \sqrt{2}$

c) $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right);\ d = -\frac{3}{2}$

14. Vergleichen Sie die Funktionen $y = \cos \frac{2}{3}(x - \pi)$ und $y = \cos\left(\frac{2}{3} x - \pi\right)$ miteinander!

15. Zeichnen Sie die Kurven der Funktion $y = a \sin(bx + c)$ für die nachstehenden Werte!

	a)	b)	c)	d)
a	2	-1	$\frac{1}{2}$	-3
b	2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
c	-2π	π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$

16. a) Die Kurve der Funktion $y = \sin x$ wird um $\frac{6}{5}\pi$ parallel zur x-Achse verschoben. Die entstehende Kurve wird weiter im Verhältnis 4:3 senkrecht zur x-Achse gestreckt. Schließlich wird die so erhaltene Kurve senkrecht zur y-Achse gestreckt, wobei das Streckungsverhältnis 3:5 beträgt.
Zeichnen Sie alle Kurven in ein und demselben Koordinatensystem (mit verschiedenen Farben), und geben Sie die analytischen Ausdrücke ihrer Funktionen an!

b) Lösen Sie die Aufgabe **a** für die Kosinuskurve $y = \cos x$!

17. Geben Sie die Amplitude und die Wellenlänge der folgenden harmonischen Schwingungen an!

a) $u = \sin 2\pi t$ b) $u = \sin 6\pi t$ c) $u = \sin 3\pi t$ d) $u = 3 \sin 4\pi t$

18. Stellen Sie die folgenden harmonischen Schwingungen graphisch dar, und geben Sie die Phasenverschiebung gegen die Schwingung $\sin n\pi t$ an!

a) $u = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ b) $u = \sin 2\pi\left(t - \frac{1}{12}\right)$ c) $u = \frac{2}{3}\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

19. Zeichnen Sie die durch die Funktionen

a) $u = 2 \sin x$, b) $u = \sin 2x$, c) $u = 2 \sin \frac{x}{2}$,

d) $u = \frac{1}{3}\sin x$, e) $u = \frac{1}{3}\sin 3x$

dargestellten harmonischen Wellen! Wie groß sind Amplitude und Wellenlänge?

20. Welche Wellenlänge λ hat die Welle, die durch die Funktion

a) $u = \sin x$, b) $u = \sin(x + b)$, c) $u = a \sin x$, d) $u = \sin cx$

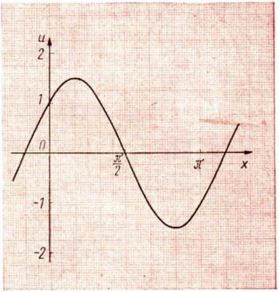
gegeben ist?

21. Zeichnen Sie die durch die folgenden Funktionen gegebenen harmonischen Wellen, und geben Sie Amplitude, Wellenlänge und Phasenverschiebung gegenüber der harmonischen Welle an, die durch $y = \cos nx$ dargestellt ist!

a) $u = \frac{1}{2}\cos x$ b) $u = \cos\frac{5}{2}x$ c) $u = \frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}x$ d) $u = 2\cos\left(3x - \frac{7}{12}\pi\right)$

22. Geben Sie für die in den Abbildungen 3.102. a und b dargestellten harmonischen Wellen die analytischen Ausdrücke an!
Anleitung: Benutzen Sie bei der Abbildung 3.102. a die Sinusfunktion! Verwenden Sie für die Darstellung in der Abbildung 3.102. b sowohl die Sinusfunktion als auch die Kosinusfunktion!

Abb. 3.102. b



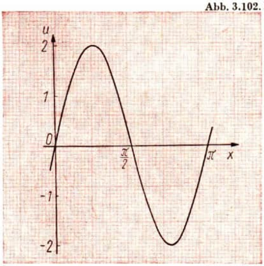


Abb. 3.102. a

23. Geben Sie die analytischen Ausdrücke der harmonischen Wellen mit der Amplitude a, der Wellenlänge λ und der Phasenverschiebung d gegen die harmonische Welle $\sin nx$ an!

a) $a = 2$	**b)** $a = 1$	**c)** $a = \frac{3}{2}$	**d)** $a = \frac{1}{2}$
$\lambda = 2\pi$	$\lambda = 3\pi$	$\lambda = \pi$	$\lambda = -\pi$
$d = 0$	$d = -\frac{\pi}{2}$	$d = 0$	$d = \frac{\pi}{6}$
e) $a = 4$	**f)** $a = 3{,}5$	**g)** $a = 0{,}7$	**h)** $a = 2{,}5$
$\lambda = 2{,}5\pi$	$\lambda = \frac{3}{4}\pi$	$\lambda = \frac{2}{3}\pi$	$\lambda = \frac{4}{5}\pi$
$d = -\frac{1}{3}\pi$	$d = \pi$	$d = \frac{2}{3}\pi$	$d = \frac{\pi}{3}$

3.9. Superposition von Sinuskurven

Zwei oder mehr Winkelfunktionen können durch Überlagerung (Superposition) eine resultierende Winkelfunktion bilden.

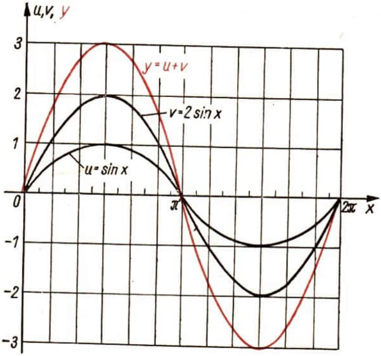
Beispiel 1:

Im rechtwinkligen Koordinatensystem in Abbildung 3.103. wurden die Bilder der Funktionen mit den analytischen Ausdrücken

(38) $u = \sin x$ und (39) $v = 2 \sin x$

graphisch dargestellt. Beide Sinuskurven stimmen in ihrer Periode 2π überein, ihre Amplituden sind jedoch verschieden: $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$.

Abb. 3.103.



Durch Superposition wird eine Funktion

(40) $y = u + v$

gebildet.

Das Bild dieser Funktion kann geometrisch gewonnen werden, indem man jeweils die beiden Strecken von der x-Achse bis zu den Bildpunkten beider Ausgangsfunktionen addiert. Für die Abszissenwerte $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ werden also die Amplituden addiert:

$$a_3 = a_1 + a_2; \; a_3 = 3.$$

Der analytische Ausdruck der resultierenden Funktion kann ermittelt werden, indem man (38) und (39) in (40) einsetzt:

$$y = u + v$$
$$y = \sin x + 2 \sin x = 3 \sin x.$$

Die resultierende Kurve ist wiederum periodisch und harmonisch. Sie hat die gleiche Periode wie die Kurven (38) und (39), nämlich 2π.

Welche Amplitude hat die resultierende Kurve, wenn sich zwei Sinuskurven $u = v = \sin x$ überlagern? Wie lautet der analytische Ausdruck der resultierenden Kurve?

Im folgenden Beispiel haben die Ausgangskurven eine Phasendifferenz.

Beispiel 2:

Es ist die resultierende Kurve zu zeichnen, die sich aus der Superposition von

$$u = \sin x \quad \text{und} \quad v = \sin(x - \pi)$$

ergibt.

Die beiden Sinuskurven haben die gleiche Periode 2π und die gleiche Amplitude 1. Sie haben eine Phasendifferenz von $-\pi$; die Kurve der Funktion v ist gegen die Kurve der Funktion u um $+\pi$ verschoben.
Die resultierende Kurve ist eine Gerade, die mit der x-Achse zusammenfällt (Abb. 3.104.).

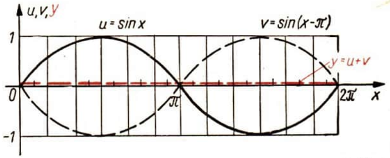


Abb. 3.104.

Beispiel 3:

Die Abbildung 3.105. stellt die Bilder der Funktionen

(41) $u = \sin x$ und (42) $v = \sin(x + 2\pi)$

sowie die Überlagerungskurve

(43) $y = u + v$

dar.

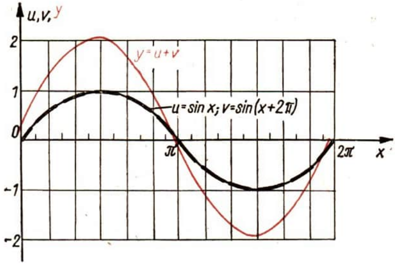


Abb. 3.105.

Die Funktionen u und v haben die gleiche Periode 2π und die gleiche Amplitude 1. Sie haben eine Phasendifferenz von 2π; die Kurve der Funktion v ist gegen die Kurve der Funktion u um -2π verschoben.
Die Überlagerungskurve ist wiederum periodisch und harmonisch. Sie hat die gleiche Periode wie die Kurven u und v, nämlich 2π. Ihre Amplitude beträgt 2. Sie hat die Phasendifferenz 0 gegen u und $+2\pi$ gegen v. Man erhält den analytischen Ausdruck, indem man (41) und (42) in (43) einsetzt und die Beziehung $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ für $k = 1$ anwendet:

$$y = \sin x + \sin(x + 2\pi) = 2 \sin x.$$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $u = \frac{1}{2} \sin x$ und $v = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sowie die Kurve, die sich durch Überlagerung ergibt!
   Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Amplitude der Überlagerungskurve und die Phasenverschiebung gegenüber dem Bild der Funktion u!
2. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $u = \sin x$ und $v = \sin \frac{x}{2}$ sowie die Kurve, die sich durch Überlagerung ergibt!
   Welche Eigenschaften hat die Überlagerungskurve?
3. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen
   a) $u = \sin x$ und $v = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$,
   b) $u = \sin x$ und $v = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$,
   c) $u = \sin x$ und $v = \sin(\sqrt{2}\, x - \pi)$!
   Welche Eigenschaften haben die Überlagerungskurven?
4. Welche Amplitude und welche Phasenverschiebung gegen u hat die resultierende harmonische Schwingung $y = u + v$, wenn die Phasendifferenz der harmonischen Schwingungen $u = a \sin \pi t$ und $v = a \sin(\pi t + b)$ Null beträgt? Was ergibt sich, wenn die Phasendifferenz gleich π ist?
5. Stellen Sie die folgenden harmonischen Schwingungen u und v graphisch dar, und konstruieren Sie die Überlagerungskurve $y = u + v$! Entnehmen Sie aus der graphischen Darstellung der resultierenden harmonischen Schwingung die Amplitude a und die Phasenverschiebung d gegen u!
   a) $u = \sin 2\pi t;\quad v = 3 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
   b) $u = 2{,}8 \sin 4\pi t;\quad v = 3{,}3 \sin\left(4\pi t - \frac{3}{4}\pi\right)$
6. Zeichnen Sie die resultierende Welle der folgenden harmonischen Wellen, und entnehmen Sie Amplitude und Phasenverschiebung gegen u aus der graphischen Darstellung!
   a) $u = \sin x$, $v = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
   b) $u = \frac{4}{5} \sin x$, $v = \sin\left(x - \frac{3}{8}\pi\right)$
   c) $u = 2 \sin x$, $v = \frac{4}{5} \sin\left(x + \frac{7}{4}\pi\right)$
   d) $u = \frac{3}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $v = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
   e) $u = \sin\left(2x - \frac{7}{6}\pi\right)$, $v = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
   f) $u = \frac{5}{4} \sin x$, $v = \sin\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$
   g) $u = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $v = \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

7. Stellen Sie die harmonischen Wellen mit der Wellenlänge 2π, der Amplitude a und der Phasenverschiebung b mit Hilfe der Sinusfunktion dar!
Bestimmen Sie Amplitude und Phasenverschiebung der resultierenden harmonischen Wellen durch Zeichnung!

a) $a_1 = 2;\ b_1 = 0$
$a_2 = 1;\ b_2 = \frac{\pi}{4}$

b) $a_1 = 1;\ b_1 = 0$
$a_2 = \frac{1}{2};\ b_2 = -\frac{\pi}{3}$

c) $a_1 = 2;\ b_1 = \frac{\pi}{2}$
$a_2 = 3;\ b_2 = \frac{\pi}{6}$

d) $a_1 = 2{,}5;\ b_1 = 1{,}2\,\pi$
$a_2 = 0{,}75;\ b_2 = 0$

3.10. Goniometrische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, die die Unbekannte x im Argument von Winkelfunktionen enthalten, z. B.

$$\sin^2 x - 0{,}25 = 0,$$

heißen **goniometrische Gleichungen**[1]!

Goniometrische Gleichungen werden graphisch oder rechnerisch gelöst.

Graphische Lösung einfacher goniometrischer Gleichungen

Beispiel 1: $\sin x + \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - 1{,}5 = 0$

Zur graphischen Lösung dieser Bestimmungsgleichung wird das Bild der Funktion

$$y = \sin x + \sin\left(x + \tfrac{1}{3}\pi\right) - 1{,}5$$

in ein xy-Koordinatensystem gezeichnet. Hierbei wendet man die Superposition von Sinuskurven an. Die Nullstellen der Funktion, d. h. die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse, ergeben die Lösungen.
Zur Konstruktion der Kurve überlagert man einander die Bilder der beiden Funktionen

$$u = \sin x \quad \text{und} \quad v = \sin\left(x + \tfrac{1}{3}\pi\right)$$

und verschiebt die resultierende Funktion

$$\bar{y} = u + v$$

parallel zur y-Achse um $-1{,}5$.
Die Lösungen kann man dann an den Schnittstellen mit der x-Achse (d. h. mit der Geraden $y = 0$) unmittelbar ablesen.
Zeichnerisch einfacher ist es, wenn man nicht die resultierende Kurve um $-1{,}5$, sondern das Achsenkreuz um $+1{,}5$ verschiebt. Hierzu wird eine Parallele zur x-Achse, die Gerade $y = +1{,}5$, eingezeichnet (Abb. 3.106.).

[1] Goniometrie: Lehre von den Eigenschaften und Zusammenhängen der Winkelfunktionen.
γωνία (griech.), Winkel; μετρον (griech.), Maß.

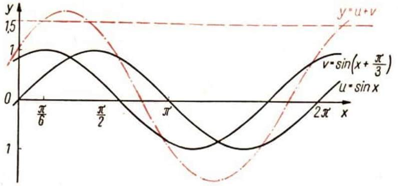


Abb. 3.106.

Führen Sie

a) die Parallelverschiebung der Kurve $\bar{y} = f_1(\bar{x})$ bei feststehendem Achsenkreuz,

b) die Parallelverschiebung des Achsenkreuzes bei feststehender Kurve durch!
Warum sind beide Verfahren gleichwertig?

Aus der Abbildung 3.106. gehen als Lösungen im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ hervor:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Proben:	$x_1 = \frac{\pi}{6}$	$x_2 = \frac{\pi}{2}$
Linke Seite	$\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} - 1{,}5$ $= 0{,}5 + 1 - 1{,}5 = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5}{6}\pi - 1{,}5$ $= 1 + 0{,}5 - 1{,}5 = 0$
Rechte Seite	0	0
Vergleich	$0 = 0$	$0 = 0$

Rechnerische Lösung goniometrischer Gleichungen

Bei der rechnerischen Lösung einfacher goniometrischer Gleichungen führen wir diese auf Bestimmungsgleichungen ersten und zweiten Grades zurück. Dabei ist es oft notwendig, eine gegebene Gleichung mit Hilfe goniometrischer Formeln umzuformen. Die wichtigsten goniometrischen Formeln wurden bereits eingeführt: Es sind die Gleichungen

(5), (6), (7), (8) — Beziehungen zwischen den verschiedenen Funktionen bei gleichem Winkel,

(10), (11), (12) — Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten,

(9) — Komplementbeziehungen,

(31) — Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen positiver und negativer Winkel,

(32) — Formeln, welche die Periodizität angeben.

Stellen Sie alle bereits behandelten goniometrischen Formeln zusammen!

Beispiel 2:

$\sin^2 x - 0{,}25 = 0$

Wir setzen $\sin x = z$ und erhalten die rein-quadratische Gleichung $z^2 = \frac{1}{4}$ mit den Lösungen

$z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Daraus ergeben sich die Lösungen der gegebenen goniometrischen Gleichung im Bereich $0° \leqq x° < 360°$ zu

$\sin x_{1,2} = \frac{1}{2}$	$x_1 = 30°$	$x_2 = 150°$
$\sin x_{3,4} = -\frac{1}{2}$	$x_3 = 210°$	$x_4 = 330°$.

Proben: Es ist $\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$; $\quad \sin^2 30° = \sin^2 150° = \frac{1}{4}$;

$\sin 210° = \sin 330° = -\frac{1}{2}$; $\quad \sin^2 210° = \sin^2 330° = \frac{1}{4}$.

Beispiel 3:

$\cot^2 x - 6{,}671 \cot x + 5{,}671 = 0$

Wir setzen $\cot x = z$ und erhalten die quadratische Gleichung

$z^2 - 6{,}671\, z + 5{,}671 = 0$

mit den Lösungen

$z_1 = 5{,}671$ und $z_2 = 1$.

Daraus ergeben sich als Lösungen der Ausgangsgleichung im Bereich $0° \leqq x° < 360°$

$\cot x_{1,2} = 5{,}671$	$x_1 = 10°$	$x_2 = 190°$
$\cot x_{3,4} = 1$	$x_3 = 45°$	$x_4 = 225°$

Proben: $\cot 10° = \cot 190° = 5{,}671$

$5{,}671^2 - 6{,}671 \cdot 5{,}671 + 5{,}671 = 0$

$5{,}671 - 6{,}671 + 1 = 0$

$\cot 45° = \cot 225° = 1$

$1 - 6{,}671 + 5{,}671 = 0$

Beispiel 4:

$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2$

Mit Hilfe der Formel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ersetzen wir die Sinusfunktion durch die Kosinusfunktion und erhalten dadurch eine Gleichung, in der nur die Kosinusfunktion vorkommt:

$2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2.$

Wir setzen $\cos x = z$ und finden

$2 z^2 = z \sqrt{2}.$

Diese Bestimmungsgleichung zweiten Grades hat die Lösungen

$z_1 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Demnach ist

$$\cos x_{1,2} = 0 \qquad x_1 = 90^\circ \qquad x_2 = 270^\circ$$
$$\cos x_{3,4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad x_3 = 45^\circ \qquad x_4 = 315^\circ$$

Proben: $2 \sin^2 90^\circ + \sqrt{2} \cos 90^\circ = 2 + 0 = 2$ $\qquad 2 \sin^2 270^\circ + \sqrt{2} \cos 270^\circ = 2 + 0 = 2$

$2 \sin^2 45^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ = 1 + 1 = 2$ $\qquad 2 \sin^2 315^\circ + \sqrt{2} \cos 315^\circ = 1 + 1 = 2$

Beispiel 5:

$$3 \sin x = 4 \cos x$$

Wir dividieren die Gleichung durch $\cos x$, wobei $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ mit k natürlich gilt, und erhalten

$$3 \frac{\sin x}{\cos x} = 4.$$

Unter Benutzung der Beziehung $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ finden wir

$$\tan x = \tfrac{4}{3} = 1{,}333.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = 53{,}12^\circ \qquad x_2 = 233{,}12^\circ.$$

Proben: $3 \sin 53{,}12^\circ = 4 \cos 53{,}12^\circ$ $\qquad 3 \sin 233{,}12^\circ = 4 \cos 233{,}12^\circ$

$3 \cdot 0{,}80 = 4 \cdot 0{,}60$ $\qquad -3 \cdot 0{,}80 = -4 \cdot 0{,}60$

$2{,}40 = 2{,}40$ $\qquad -2{,}40 = -2{,}40$

Beispiel 6:

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

Wir setzen $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ und erhalten

$$b\sqrt{1 - \sin^2 x} = -a \sin x - c.$$

Durch Quadrieren und Umordnen erhalten wir

$$(a^2 + b^2) \sin^2 x + 2\,ac \sin x + (c^2 - b^2) = 0.$$

Wir setzen $\sin x = z$. Die quadratische Gleichung

$$(a^2 + b^2) z^2 + 2\,acz + (c^2 - b^2) = 0$$

hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Daraus finden wir

$$\sin x_1 = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - ac}{a^2 + b^2} \qquad \sin x_2 = \frac{-b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + ac}{a^2 + b^2}.$$

Außerdem berechnen wir $\cos x_1$ und $\cos x_2$ und finden

$$\cos x_1 = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + bc}{a^2 + b^2} \qquad \cos x_2 = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - bc}{a^2 + b^2}.$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ Zahlen zwischen -1 und $+1$ sein müssen, ist die Gleichung nicht für alle Werte a, b und c lösbar. Bei einer Diskussion der Gleichung kommt es darauf an, festzustellen, für welche Werte a, b und c sie überhaupt lösbar ist und wie viele Lösungen sie hat. Aus den angeführten Lösungsmethoden ergeben sich Beziehungen zwischen den Konstanten als Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung.

Beispiel 7:

$6 \cos x + 4 \sin x = 3$

Wir setzen $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

und erhalten

$$6 \sqrt{1 - \sin^2 x} = 3 - 4 \sin x.$$

Nach Quadrieren und Umordnen ergibt sich

$$52 \sin^2 x - 24 \sin x - 27 = 0$$

Wir setzen $\sin x = z$. Die quadratische Gleichung

$$52 z^2 - 24 z - 27 = 0$$

hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{387}}{26}.$$

Es ist $\sin x_1 = 0{,}9873$, $\sin x_2 = -0{,}5258$,
$\cos x_1 = -0{,}1582$, $\cos x_2 = 0{,}8505$.

Daraus ergeben sich als Lösungen der Ausgangsgleichung

$$x_1 = 99{,}1^\circ, \qquad x_2 = 328{,}28^\circ.$$

Proben:

$$\begin{aligned} & 6 \cos 99{,}1^\circ + 4 \sin 99{,}1^\circ \\ &= -6 \cdot 0{,}1582 + 4 \cdot 0{,}9873 \\ &= -0{,}9492 + 3{,}9492 = 3 \\ & 6 \cos 328{,}28^\circ + 4 \sin 328{,}28^\circ \\ &= 6 \cdot 0{,}8505 - 4 \cdot 0{,}5258 \\ &= 5{,}103 - 2{,}103 = 3 \end{aligned}$$

Beispiel 8:

$\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{2} = 0$

Wir setzen $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ und $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Die Gleichung

$$\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

wird quadriert:

$$\sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{4}.$$

Setzen wir $\sin^2 x = z^2 = w$, so ist zunächst die Gleichung

$$4w^2 - 4w + 1 = 0$$

zu lösen. Sie hat die zweifache Wurzel $w = \frac{1}{2}$.

Also ist

$$z_1 = \sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } z_2 = \sin x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 = \frac{\pi}{4}\left(x_1' = \frac{3\pi}{4}\right); \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}\left(x_2' = \frac{7\pi}{4}\right).$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung stellt man fest, daß diese durch die eingeklammerten Werte nicht erfüllt wird.

Proben: $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{5\pi}{4} \sin \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}$

Aufgaben

In den folgenden Aufgaben sind alle Lösungen zu berücksichtigen, die zwischen 0° und 360° (0 und 2π) liegen, und nur diese.

1. Lösen Sie zeichnerisch die folgenden Gleichungen!

a) $\cos x - 2\sin x = 0$ **b)** $6\cos x + 4\sin x = 3$
c) $4\sin x - \cos x = 6$ **d)** $\cos x + \sin x = 2$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch!

a) $3\sin x - 4\cos x = 0$ **b)** $\sin x = -2\cos x$

3. Welche Winkel genügen den folgenden Gleichungen?

a) $\sin^2 x = 0{,}81$ **b)** $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ **c)** $\tan^2 x = 3$ **d)** $\cot^2 x = 1{,}5$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos^2 x = \frac{2}{3}$ **c)** $\tan^2 x = 2$ **d)** $\cot^2 x = 2{,}5$

5. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $\sin^2 x - 1{,}1428\sin x + 0{,}3214 = 0$ **b)** $\cos^2 x - 1{,}4848\cos x + 0{,}4924 = 0$
c) $\tan^2 x - 1{,}2679\tan x + 0{,}2679 = 0$

6. In den folgenden Gleichungen sind alle Funktionen durch eine einzige auszudrücken; dann ist die Gleichung nach dieser Funktion aufzulösen und der Winkel zu bestimmen.

a) $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$ **b)** $3\cos^2 x + \sin^2 x = 2{,}5$
c) $4\cos^2 x - 2\sin x = 2$ **d)** $p\sin^2 x + q\cos^2 x = 0$
e) $p\sin^2 x + q\cos^2 x = r$ **f)** $p\sin^2 x + q\cos x = 0$
g) $p\cos^2 x + q\sin x = r$ **h)** $\tan^2 x + 4\sin^2 x = 3$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin x + 2\cos x = 0$ **b)** $5\sin x = 3\tan x$ **c)** $4\sin x + 3\tan x = 0$

8. Lösen Sie die Gleichung $a\sin x + b\cos x + c = 0$ dadurch, daß Sie eine Winkelfunktion beseitigen und damit die Aufgabe auf eine quadratische Gleichung zurückführen!

9. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $4\sin x + 7\cos x = 6{,}296$ **b)** $5\sin x - 2\cos x = 0{,}488$
c) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\cos x = 0{,}625$ **d)** $\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{3}\sin x = 0{,}258$
e) $(1+\sqrt{3})\cos x + (1-\sqrt{3})\sin x = 2$

10. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin x + 1{,}75\cos x - 1{,}574 = 0$ **b)** $5\sin x + 4\cos x = 6{,}25$
c) $\sin x - 0{,}75\cos x - 0{,}49 = 0$ **d)** $3\sin x = 1 + 4\cos x$

11. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin\frac{3}{2}x = -0{,}5678$ **b)** $6\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$
c) $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$

3.11. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Aufgaben aus der Technik

1. Die Neigung von Nasenkeilen, die zur Befestigung von Rädern auf Wellen dienen, beträgt 1:100 (Abb. 3.107.).

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel!

b) Warum ist es in diesem Falle belanglos, ob man die Neigung als das Verhältnis von d zur waagerechten Entfernung e oder zur schrägen Strecke s definiert?

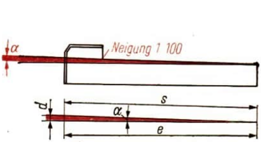


Abb. 3.107.

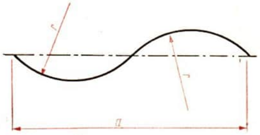


Abb. 3.108.

2. Bestimmen Sie die gestreckte Länge eines laufenden Meters Wellblech nach Abbildung 3.108.!

a) $r = 3{,}2$ cm; $a = 10{,}0$ cm **b)** $r = 7{,}2$ cm; $a = 20{,}0$ cm

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über die Gewindearten und deren Kennzeichnung!

3. Wie groß ist in dem in Abbildung 3.109. dargestellten Gewindeprofil eines metrischen Gewindes der Flankenwinkel α, wenn $t = 0{,}8660\ h$ ist?

4. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft R gleich oder größer als der Hangabtrieb H ist (Abb. 3.110.).

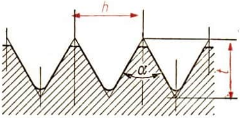


Abb. 3.109.

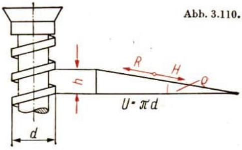


Abb. 3.110.

Wie hoch darf die Ganghöhe h einer Stahlschraube von $d = 52$ mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Ölfettung) ist $\varrho = 8{,}50°$.

5. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Abb. 3.111.). Ihre großen Durchmesser sind $D_1 = 150$ mm (900 mm) und $D_2 = 120$ mm (480 mm). Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist $s = 30$ mm (150 mm).

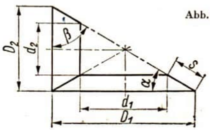


Abb. 3.111.

a) Welche Neigungswinkel α und β bilden die Mantellinien der beiden Kegelstümpfe mit ihren Grundflächen?
b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Kegelräder?
c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?
d) Stellen Sie die Kegelräder in einer maßstäblichen Zeichnung dar, und lösen Sie die Aufgabe geometrisch!

6. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a wird an seinen Ecken mit dem Radius $r = \frac{a}{6}$ abgerundet (Abb. 3.112.). Wie groß ist der Inhalt der Abfallfläche
a) ausgedrückt mit Hilfe von a, b) in Prozenten?

Abb. 3.112.

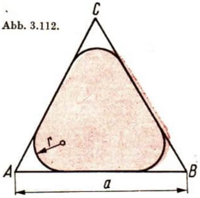
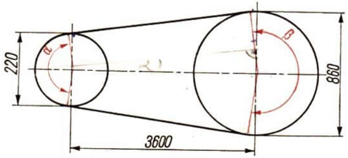


Abb. 3.113.



7. Berechnen Sie für den in Abbildung 3.113. dargestellten offenen Riementrieb
a) die Umschlingungswinkel α und β,
b) die erforderliche Riemenlänge l (102% des errechneten Ergebnisses)!

8. Berechnen Sie für den in Abbildung 3.114. dargestellten gekreuzten Riementrieb
a) die Umschlingungswinkel α und β,
b) die erforderliche Riemenlänge l (102% des errechneten Ergebnisses)!

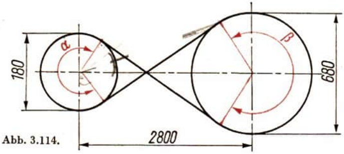


Abb. 3.114.

9. Ein zylindrischer liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser $D = 1500$ mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit konzentrisch eingebautem glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt. Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.
a) Zeichnen Sie einen Querschnitt des Kessels, und tragen Sie die Wasserstandslinie ein!
b) Drücken Sie für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe h in diesem Querschnitt zugeordnet ist! Stellen Sie die Funktionen auch graphisch dar!
c) Drücken Sie die Verdampfungsfläche des Kessels in Quadratmetern als Funktion des Zentriwinkels aus, und stellen Sie die Funktion graphisch dar!
d) Berechnen Sie für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche in Quadratmetern und den Wasserinhalt des Dampfkessels in Kubikmetern!
e) Berechnen Sie für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen in Quadratmetern und die Wasserinhalte in Kubikmetern, und stellen Sie diese Funktionen der Wasserstandshöhe graphisch dar!

10. Der Stößelantrieb der Kurzhobelmaschine (Shapingmaschine) erfolgt mittels Kurbelschwinge (Abb. 3.115. a und b). Dadurch wird ein schnellerer Rücklauf erreicht. Außerdem kann durch Verstellen des Kurbelradius r der Hub H des Stößels verändert werden.

a) Berechnen Sie aus Abbildung 3.115. die Hublänge und die Winkel α und β für $r = 90$; 120; 180 mm!

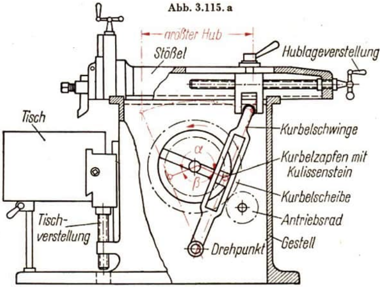


Abb. 3.115. a

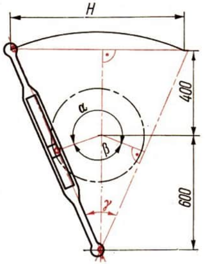


Abb. 3.115. b

b) Wieviel Zeit wird jeweils für einen Vorlauf und für einen Rücklauf benötigt, wenn die Kurbel 45 Umdrehungen je Minute macht?

11. Stellen Sie den Flächeninhalt A des in Abbildung 3.116. dargestellten Querschnittes durch ein Zementrohr als Funktion von r dar: $A = \varphi(r)$!

12. Ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt A_1 und dem Durchmesser d_1 wird durch ein kegelförmiges Stück mit einem zweiten Rohr vom Querschnitt $A_2 = 3\ A_1$ (Abb. 3.117.) verbunden. Berechnen Sie die Mantellinien s des Verbindungsstückes!

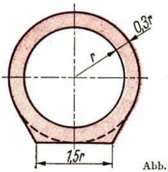


Abb. 3.116.

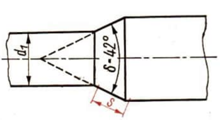


Abb. 3.117.

13. Die Schubstange eines Kurbelgetriebes ist 750 mm lang, der Kurbelradius ist $r = 200$ mm (Abb. 3.118.).

a) Wie groß ist die Ablenkung β der Schubstange, wenn die Kurbel sich um den Winkel α dreht?

b) Berechnen Sie die zu den Winkeln $\alpha = 0°$; 15°; 30°; ...; 360° gehörigen Winkel β, und stellen Sie β als Funktion von α graphisch dar!

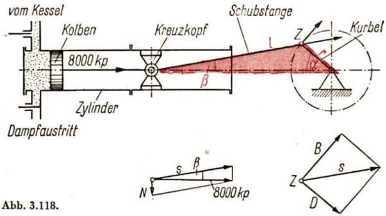


Abb. 3.118.

c) Für welche Drehwinkel α erreicht die Ablenkung β der Schubstange ihre größten Werte?

d) Welche Verschiebung des Kreuzkopfes entspricht den Kurbelstellungen
$\alpha = 0°;\ 15°;\ 30°;\ \ldots;\ 360°$?

e) Stellen Sie die Verschiebung des Kreuzkopfes als Funktion des Winkels α der Kurbeldrehung analytisch und graphisch dar!

f) Zerlegen Sie die von der Kolbenstange auf den Kreuzkopf übertragene Kraft $F = 8000$ kp in ihre Komponenten S und N! Dabei wirkt S in Richtung der Schubstange, N senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes bei den einzelnen Kurbelstellungen.

g) Zerlegen Sie die auf den Kurbelzapfen Z wirkende Schubstangenkraft S in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten B und D! Dabei stellt D den Druck auf die Kurbelwelle dar, B ist die tangential zur Kreisbahn des Kurbelzapfens wirkende Bewegungskraft.

h) Berechnen Sie die Größe der Komponentenkräfte S und B für die Kurbelstellungen
$\alpha = 0°;\ 15°;\ 30°;\ \ldots;\ 360°$!

i) Stellen Sie die Größe der treibenden Kraft B als Funktion des Winkels α graphisch dar!

Schülerauftrag

Stellen Sie fest, welche Abmessungen die im chemischen Laboratorium verwendeten Gummistopfen haben!

14. In Laboratorien werden Gummistopfen verwendet, die nach der Vorschrift „Kegel 1:5" gefertigt wurden.

a) Zeichnen Sie den Achsenschnitt, wenn der Durchmesser der kleineren Grundfläche $d = 19$ mm und die Höhe $h = 25$ mm betragen!

b) Berechnen Sie den Kegelwinkel!
Wie groß ist jeweils der obere Durchmesser D, wenn für den unteren Durchmesser d und für die Höhe h die folgenden Maße ermittelt wurden?

c) $d = 16$ mm; $h = 25$ mm   d) $d = 25$ mm; $h = 30$ mm

15. Eine oben und unten offene Übergabeschurre ist herzustellen. Die technische Zeichnung zeigt Abbildung 3.119.

Abb. 3.119.

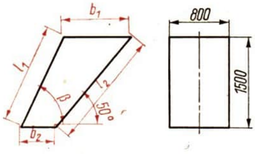
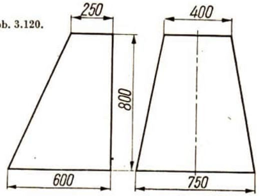


Abb. 3.120.



Der Rutschwinkel γ soll 50°, die (obere) Aufnahmefläche 0,4 m² und die (untere) Abgabefläche 0,25 m² betragen.
Berechnen Sie die fehlenden Maße für b_1, b_2, l_1, l_2 und β!

16. Eine Rauchabzugshaube ist anzufertigen (Abb. 3.120.). Berechnen Sie die Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche!

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über das Kegeldrehen!

17. Auf der Drehmaschine soll ein kegliger Zapfen gedreht werden.

a) Wie groß muß der Einstellwinkel am Werkzeugschlitten sein, wenn $D = 80$ mm (30 mm; 100 mm), $d = 60$ mm (20 mm; 60 mm) und $l = 100$ mm (120 mm; 90 mm) werden sollen?

b) Wie groß muß man den kleinen Durchmesser d eines $l = 45$ mm langen kegligen Zapfens wählen, wenn $D = 25$ mm und die Neigung des Zapfens $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$ betragen sollen?

18. Bestimmen Sie den Supporteinstellwinkel α (in Grad und Minuten) für den in Abbildung 3.121. dargestellten Kegel!

19. Der in Abbildung 3.122. dargestellte Kegel soll bearbeitet werden. Berechnen Sie **a)** den Supporteinstellwinkel, **b)** den kleinen Durchmesser d!

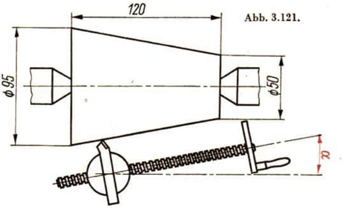


Abb. 3.121.

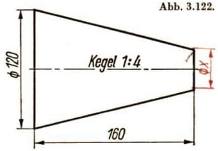


Abb. 3.122.

20. Kegel können auf Drehmaschinen auch durch seitliches Verstellen des Reitstocks um ein Stück s hergestellt werden (Abb. 3.123.).

a) Wie groß wird der Kegel $\frac{1}{x}$, wenn die Reitstockspitze der Drehmaschine um s verschoben wird?

b) Drücken Sie die Verschiebung s der Reitstockspitze als Funktion des Kegelwinkels α aus!

c) Wie läßt sich die Verjüngung $\frac{1}{x}$ des Kegelzapfens als Funktion des Kegelwinkels α darstellen?

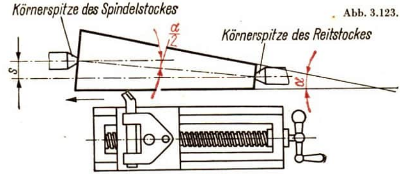


Abb. 3.123.

d) Es soll ein Kegel mit den Maßen $D = 65$ mm, $l = 245$ mm und $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$ gedreht werden. Wie groß werden d und α? Um welches Stück s muß der Reitstock seitlich verstellt werden?

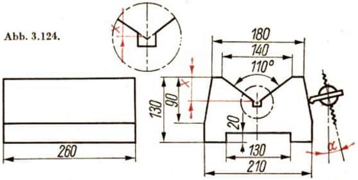
21. Beim Drehen eines Kegels sind die folgenden Werte gegeben! $D = 70$ mm; $d = 40$ mm; $l = 80$ mm

a) Wie groß ist der Kegelwinkel?

b) Um welchen Winkel ist der Oberschlitten zu verstellen?

22. Das in Abbildung 3.124. dargestellte Führungsprisma ist zu bearbeiten. Berechnen Sie

Abb. 3.124.



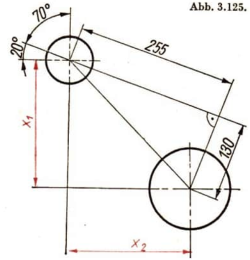


Abb. 3.125.

a) den Einstellwinkel α für den drehbaren Support zur Bearbeitung der seitlichen Schrägen,

b) die mit x bezeichnete Tiefe der Prismenführung!

23. Berechnen Sie aus Abbildung 3.125. die für das Anreißen zweier Bohrungen eines Werkstückes notwendigen Maße x_1 und x_2!

24. Von einer Welle mit dem Durchmesser $d = 100$ mm (Abb. 3.126.) wird das rot gerasterte Stück abgefräst, so daß **a)** $s_1 = 75$ mm, **b)** $s_2 = 60$ mm beträgt.
Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

c) Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, wenn der Durchmesser der Welle $d = 160$ mm und die Bogenhöhe des abgefrästen Stückes $h = 20$ mm betragen?

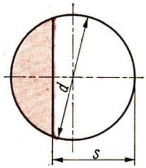


Abb. 3.126.

25. Welchen Durchmesser muß ein Rundstahl haben, damit aus ihm ein Sechskant mit 80 cm² Querschnitt gefräst werden kann?

26. Bei einer Waagerecht-Bohr- und -Fräsmaschine erfolgt der Antrieb vom Motor aus über Keilriemen auf das Hauptgetriebe (Abb. 3.127.). Der Durchmesser der treibenden Scheibe sei d_m, der Durchmesser der getriebenen Scheibe D_m und der Achsenabstand des Keilriementriebes A.

a) Stellen Sie die Formel für den Umschlingungswinkel auf!

b) Berechnen Sie den Umschlingungswinkel β für die Durchmesser eines Scheibenpaares 140 mm bzw. 224 mm und den Achsenabstand 500 mm!

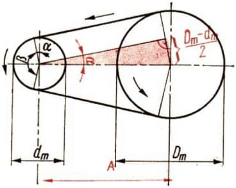


Abb. 3.127.

27. Die Ablesegenauigkeit der Strichmaßstäbe wird durch die Parallaxe beeinflußt.

a) Stellen Sie die Formel für den Ablesefehler Δl bei schiefer Ablesung auf, wenn e die Dicke des Maßstabes und α der Einblickwinkel ist!

b) Ein Stahlmaßstab hat eine Dicke von 0,6 mm, und der Beobachter blickt unter einem Winkel von 40° auf den Maßstab. Welcher Ablesefehler entsteht?

Schülerauftrag

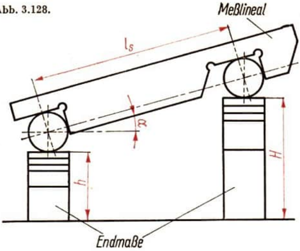
Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung, wie der Werkzeugmacher Winkel bestimmt! Wie werden zum Beispiel Kegelwinkel gemessen?

28. Winkel können mit Hilfe von Endmaßen, Meßdornen und einem Meßlineal bestimmt werden (Abb. 3.128.). Das entsprechend dem Winkelwert zu neigende Lineal ist so ausgeführt, daß es den Abstand der beiden Meßdorne festlegt.

Gegeben sind:

Länge der größeren Endmaßgruppe H,
Länge der kleineren Endmaßgruppe h,
Länge des Meßlineals l_s.

Abb. 3.128.



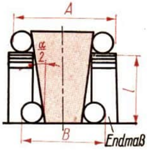


Abb. 3.129.

a) Stellen Sie die Formel für die Bestimmung des Winkels zwischen Meßlineal und Unterlage der Endmaßgruppen auf!

b) Mit einem Meßlineal von der Länge $l_s = 200$ mm soll ein Winkel $\alpha = 32°\ 12'$ eingestellt werden. Wie groß muß die Länge der größeren Endmaßgruppen werden, wenn der kleinere Block 30 mm sein soll? Warum heißt das Meßlineal auch Sinuslineal?

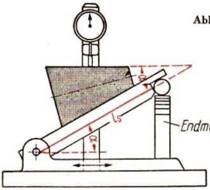


Abb. 3.130.

29. Kegel können nicht mit einem Meßgerät direkt gemessen werden. Zur Lösung dieser Aufgabe sind Hilfsgeräte bzw. eine Zusammenstellung von Meßmitteln notwendig.
Ein Außenkegel wird mit zwei Prüfscheiben und Endmaßsätzen sowie einer Feinmeßschraube gemessen (Abb. 3.129.). Die Länge des Endmaßblockes sei l, der obere Abstand A, der untere Abstand B.

a) Stellen Sie für die Winkelbestimmung die Formel auf!

b) Mit einem Endmaßblock von 2,120 mm wurde mit Meßscheiben ein oberer Abstand von 86 mm und ein unterer Abstand von 75 mm gemessen. Bestimmen Sie den sich hieraus ergebenden Kegelwinkel!

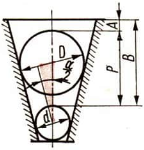


Abb. 3.131.

30. Kegel können mit Hilfe des Sinuslineals gemessen werden. Das Lineal wird so eingestellt, daß der aufgelegte Kegel mit seiner oberen Mantellinie eine Parallele zur Führungsfläche, die den Feinzeiger aufnimmt, bildet (Abb. 3.130.). Das Lineal ist hier auf der einen Seite fest gelagert.
Bestimmen Sie die Länge für die große Endmaßkombination, wenn das kleine Endmaß 40 mm sein soll und die Meßbasis des Sinuslineals $l_s = 160$ mm ist, für einen metrischen Kegel mit einem Winkel von $2°\ 52'$!

31. Ein Innenkegel wird mit Hilfe von zwei Kugeln gemessen (Abb. 3.131.). Der Durchmesser der großen Kugel sei D, der Durchmesser der kleinen Kugel d. Bei diesem Verfahren wird der Meßwert P gemessen (Prüfmaß).

a) Stellen Sie die Formel für die Bestimmung des Kegelwinkels α auf!

b) Bestimmen Sie für den metrischen Kegel Nr. 80 ($D = 76$ mm, $d = 72$ mm) den zu erwartenden Meßwert P!

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über die Begriffe „Flankendurchmesser“ und „Flankenwinkel“ an Gewinden! Wie mißt der Werkzeugmacher den Flankendurchmesser eines Gewindes?

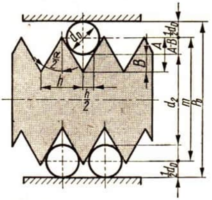


Abb. 3.132.

32. Der Flankendurchmesser eines Gewindes wird mit Hilfe von drei Meßdrähten bestimmt (Dreidrahtmethode, Abb. 3.132.). Dem einen Meßdraht auf der einen Gewindeseite sind auf der gegenüberliegenden Seite zwei weitere Meßdrähte zugeordnet. Mit einer Feinmeßschraube wird das Prüfmaß P_o ermittelt. Aus diesem Maß ergibt sich der Flankendurchmesser d_2. Bei Beginn der Messung ist zunächst der günstigste Meßdrahtdurchmesser d_D zu bestimmen, bei dem der Draht die Gewindeflankendurchmesser berührt.

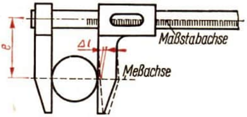
a) Die Steigung sei h, der Flankenwinkel α. Leiten Sie die Formel her, nach der der günstigste Meßdrahtdurchmesser bestimmt werden kann!

b) Leiten Sie die Formel für das Prüfmaß P_o her!
Anleitung: Das Prüfmaß ist eine Funktion des Flankendurchmessers d_2, des Flankenwinkels α, der Steigung h und des günstigsten Meßdrahtdurchmessers.

c) Eine Spindel mit dem Gewinde M 10 soll geprüft werden. Zu berechnen sind der günstigste Meßdrahtdurchmesser und das Prüfmaß P_o.
Kenngrößen des Gewindes M 10:
Flankendurchmesser: $d_2 = 9{,}026$ mm; Steigung: $h = 1{,}5$ mm; Flankenwinkel: $\alpha = 60°$.

33. Die Meßgenauigkeit der Meßschieber ist von der Geradheit und Spielfreiheit von Maßstab und Schieber abhängig. Durch den Kippwinkel α entsteht der Kippfehler Δl (Abb. 3.133.).

Abb. 3.133.



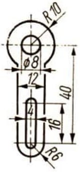


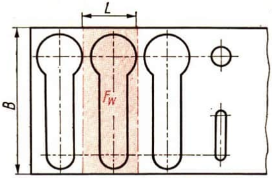
Abb. 3.134.

a) Leiten Sie die Formel für den Kippfehler her!

b) Der Meßschenkel eines Meßschiebers hat eine Länge $e = 60$ mm, der Kippwinkel beträgt $\alpha = 3'$. Welcher Meßfehler ist am Ende der Meßschenkel zu erwarten?

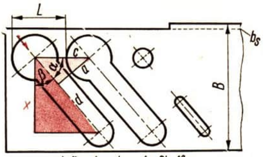
34. Das in Abbildung 3.134. dargestellte Schnitteil ist aus 1,2 mm dickem Stahlblech auszuschneiden.
Stellen Sie durch Vergleiche des Abfalls bei gerader und bei schräger Stellung des Schnitteiles im Werkstoffstreifen fest, welche Anordnung wirtschaftlicher ist!
Zur Berechnung des Werkstoffbedarfs dienen folgende Begriffe und Formeln (Abb. 3.135. und 3.136.):
Breite des Schnitteiles: b_T (in mm), Länge des Schnitteiles: l_T (in mm),

Abb. 3.135.



gerade Anordnung im Streifen

Abb. 3.136.



schräge Anordnung im Streifen

Randbreite: b_R (in mm), Streifenbreite: B (in mm), Breite der Zwischenstege: b_{St} (in mm), Vorschublänge: L (in mm),
Werkstoffbedarf je Schnitteil: F_W (in mm²),
Fläche des Schnitteiles F_T (in mm²),
Abfall je Schnitteil F_A (in mm²), Abfallanteil A_v (in %).

$$F_W = B \cdot L; \quad F_A = F_W - F_T; \quad A_V = \frac{100 \cdot F_A}{F_W}.$$

Anleitung: **a)** Gerade Anordnung im Werkstoffstreifen (Abb. 3.135.). Die Randbreite ist $b_R = 1{,}2$ mm, die Breite der Zwischenstege $b_{St} = 1{,}2$ mm. Die Streifenbreite ist $B = b_T + 2\,b_R$. Die Vorschublänge ist $L = l_T + b_{St}$.
Die Fläche des Schnitteiles wurde zu $F_T = 592$ mm² ermittelt.
b) Schräge Anordnung im Werkstoffstreifen (Abb. 3.136.).
Für die Breite der Rand- und Zwischenstege ist ebenfalls 1,2 mm einzusetzen. Die Vorschublänge L ist die gleiche wie bei gerader Anordnung. Die Streifenbreite B setzt sich aus der Hilfslinie x, den Radien der Kreisfläche r_K und des Halbkreises r_H sowie aus den beiden Randstegen zusammen. Zur Streifenbreite ist wegen eines anderen Schneidverfahrens hier noch $b_s = 1{,}2$ mm hinzuzufügen.

Schülerauftrag

Erkunden Sie in der beruflichen Grundausbildung, wie ein Werkstück zur Bearbeitung auf Maschinen aufgespannt wird und welche Kräfte dabei auftreten!

35. Während der Bearbeitung eines Werkstückes wirken verschiedene Kräfte, zum Beispiel Schnittkräfte, Biegekräfte, Druckkräfte und andere. Der Spannmechanismus der Vorrichtung muß diese Kräfte aufnehmen. Als Spannelemente werden zum Beispiel Spannkeile oder Spannschrauben verwendet.

a) Der Keil wirkt nach dem physikalischen Prinzip der schiefen Ebene (Abb. 3.137.). Die Keilhöhe sei h, die Keillänge l. Stellen Sie die Formel zur Bestimmung des Steigungswinkels α des Keiles auf!
Durch den Keil wird die Spannkraft F_s aufgebracht (Abb. 3.138.). Die am Keil aufzubringende Anzugskraft sei F.
Stellen Sie die Formel für die Anzugskraft F auf! Wird die Reibung beim Anziehen des Keiles mit berücksichtigt, so muß man zum Neigungswinkel α den doppelten Reibungswinkel $2\,\varrho$ addieren, da die Reibung an beiden Seiten des Keiles wirkt. Der Reibungswinkel wird aus der Beziehung $\mu = \tan \varrho$ berechnet, worin μ die Reibungszahl ist. Stellen Sie die Formel für die Anzugskraft F bei Berücksichtigung der Reibung auf!

Abb. 3.137.

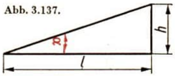
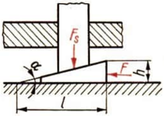


Abb. 3.138.



Durch die Reibung wird ein Teil der Kraft nicht genutzt. Der Wirkungsgrad ist der Quotient aus der Anzugskraft ohne Reibung und der Anzugskraft mit Reibung.

Stellen Sie die Formel für den Wirkungsgrad auf!

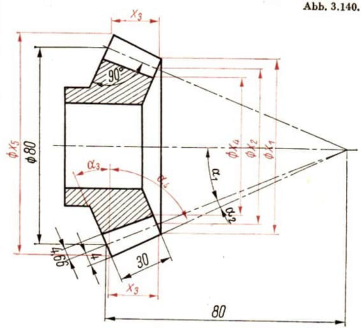


Abb. 3.140.

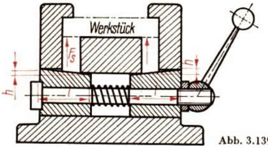


Abb. 3.139.

b) In einer Vorrichtung wird ein Werkstück durch zwei Spannkeile festgespannt (Abb. 3.139.). Die Spannkraft jedes Keiles beträgt $F_s = 1100$ kp. Die Keilhöhe ist $h = 2$ mm und die Keillänge $l = 30$ mm. Die Reibungszahl ist $\mu = 0{,}1$. Die Kraft zum Anziehen des Keiles und der Wirkungsgrad sind zu berechnen.

36. Bei sich senkrecht kreuzenden Wellen wird die Drehbewegung meist mittels Kegelrädern übertragen.
Zum Fräsen der Zähne müssen die Radkörper (Abb. 3.140.) vorgedreht werden.
Berechnen Sie die Maße $x_1 \ldots x_5$ sowie die Winkel $\alpha_1 \ldots \alpha_4$!

Aus der Nautik

37. Ein Schiff läuft folgenden Kurs:
a) N 45° O **b)** N 45° W **c)** S 60° O **d)** S 60° W **e)** N 30° O **f)** N 30° W
Welchen Kurs hält das Schiff? Veranschaulichen Sie den Kurs geometrisch!

38. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $\alpha = 86{,}40°$ und $\beta = 78{,}50°$.

a) In welcher Entfernung von A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

39. Von einem Schiff aus peilt man gleichzeitig den Leuchtturm L in Richtung S 55° O und den Kirchturm K in Richtung S 28° W an. Die Entfernung $\overline{KL}$ beträgt nach der Seekarte 33,2 km und hat die Richtung N 85° O.

a) In welcher Entfernung von K und L befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung (in sm)?

b) Welchen Kurs muß das Schiff einhalten, wenn es im Abstand von 4 sm am Leuchtturm vorbeifahren soll?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

40. Ein Schiff steuert einen Kurs N 45° W bei einer Geschwindigkeit von 9 sm · h^{-1} (9 Knoten). Vom Schiffsort A aus peilt man einen Leuchtturm unter N 23,4° O. Nach 90 min peilt man vom Schiffsort B aus denselben Leuchtturm in Richtung N 85,3° O.

a) Wie weit ist das Schiff am Ort B vom Leuchtturm entfernt?

b) Welchen Abstand hat der Leuchtturm vom Schiffskurs?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

41. Ein nach Ort A auf geradem Kurs mit 8,5 kn fahrendes Schiff peilt das Leuchtfeuer bei Ort B unter $32° \, 50'$ und das Leuchtfeuer bei Ort C unter $184°$ an. (Winkelangaben von N über O.) Aus der Seekarte wird die Entfernung Schiff–Ort B mit 1,85 sm festgestellt.

In welcher Richtung verläuft die Fahrrinne, wenn 12 min später Ort B unter $337°$ und Ort C unter $268°$ gesehen werden?

42. Ein Feuerschiff liegt von einem 48 m hohen Leuchtturm in N $28°$ O 12 sm entfernt. Welchen Kurs muß ein Schiff, auf dem der Turm östlich unter dem Höhenwinkel $1° \, 2{,}5'$ und die Verbindungslinie des Turmes mit dem Feuerschiff unter dem Horizontalwinkel $71° \, 25{,}6'$ gesehen wird, einhalten, um im kürzesten Abstand von 2,5 sm nordwestlich an dem Feuerschiff vorbeizufahren?

43. Auf einem Schiff wurde die Bake auf dem 60 m hohen Streckelberg bei Koserow (Usedom) zuerst in S $12° \, 15'$ O unter dem Höhenwinkel $\alpha_1 = 44{,}6'$ und dann in S $68° \, 20'$ W unter dem Höhenwinkel $\alpha_2 = 12'$ gesehen.

a) Unter welchem Kurs war das Schiff gefahren?

b) Wieviel Seemeilen betrug die zwischen den beiden Peilungen zurückgelegte Strecke? (Die Augenhöhe und die Krümmung der Erde bleiben unberücksichtigt.)

44. Ein Schiff legt 54 sm beim Kurs S $35° \, 40'$ W zurück, während ein Strom in der Zeit 7 sm nach S $20° \, 15'$ O versetzt. Welches ist der wahre Kurs des Schiffes, und wie groß ist die Entfernung über Grund (der wahre Weg des Schiffes)?

45. Der Kurs eines Flugzeuges in der eigentlichen Flugrichtung wird als Steuerkurs $\varkappa_s$, die Geschwindigkeit in dieser Richtung als Eigengeschwindigkeit c bezeichnet.
Der Wind wirkt unter einer bestimmten Windrichtung und mit einer bestimmten Windstärke – der Windgeschwindigkeit w – beschleunigend oder verzögernd auf das Flugzeug ein und treibt das Flugzeug aus der beabsichtigten Flugrichtung heraus. Dadurch fliegt das Flugzeug in einer anderen Richtung, dem Kurs über Grund oder dem Kartenkurs $\varkappa_k$. Die Geschwindigkeit in dieser Richtung heißt Geschwindigkeit über Grund v.
Das Geschwindigkeitsdreieck ABC heißt Winddreieck, der Winkel CAB Abtrift, in umgekehrter Richtung Vorhaltewinkel (Abb. 3.141.).

Ein Lufttaxi der *Interflug* fliegt mit einer Geschwindigkeit $c = 240 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

a) von Karl-Marx-Stadt nach Berlin-Schönefeld (175 km),

b) von Berlin-Schönefeld nach Barth (225 km),

c) von Erfurt nach Karl-Marx-Stadt (135 km) und

d) von Berlin-Schönefeld nach Dresden (165 km).

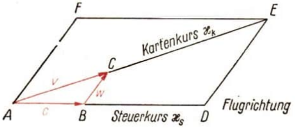


Abb. 3.141.

Es herrscht Südwind mit Windstärke 7 ($w \approx 47 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

Berechnen Sie in jedem Falle den Kartenkurs $\varkappa_k$, die Geschwindigkeit über Grund v und die Abtrift! Entnehmen Sie den Kartenkurs dem Atlas!

46. Eine Maschine vom Typ IL 14 der *Interflug* ($c = 320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) fliegt von Barth nach Berlin-Schönefeld. Es herrscht Westwind, Stärke 8 ($w \approx 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).
Berechnen Sie $\varkappa_k$, v und die Abtrift!

47. Eine Maschine vom Typ IL 14 der *Interflug* ($c = 320$ km $\cdot$ h^{-1}) fliegt von Dresden nach Erfurt (190 km). Der Kartenkurs $\varkappa_k$ beträgt 267° (Winkelangabe: N über O). Es herrscht NW-Wind mit einer Windgeschwindigkeit $w = 50$ km $\cdot$ h^{-1}.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit über Grund v, den Vorhaltewinkel und die Flugzeit!

Aus der Astronomie

48. Die Entfernung Sonne–Erde beträgt im Mittel $149 \cdot 10^6$ km; die Entfernung Erde–Mond $384 \cdot 10^3$ km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund 32′, der des Mondes rund 31′. Berechnen Sie den wahren Durchmesser von Sonne und Mond!

49. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Sehwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechnen Sie die Horizontalparallaxe des Mondes unter Benutzung der in Aufgabe **48** gegebenen Entfernung (Erdradius: 6370 km)!

Schüleraufträge

1) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes den scheinbaren Durchmesser des Mondes!
Berechnen Sie daraus den wahren Monddurchmesser, wenn die Entfernung Erde–Mond 384000 km beträgt!
2) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes die Breite des beleuchteten Teiles des Mondes (in Gradmaß angeben)!
3) Messen Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes die gegenseitigen Abstände der Deichselsterne des Großen Wagens (im Gradmaß angeben)!

Aus verschiedenen Gebieten

50. In einem schiefwinkligen Dreieck wird der Winkel α nach dem Kosinussatz berechnet:
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$
Angenommen, a sei die größte Seite des zu berechnenden Dreiecks. In welchen Fällen ist α ein spitzer, ein stumpfer oder ein rechter Winkel?

51. Wie groß sind die Winkel, die die Diagonale mit den Seiten a_i bzw. b_i in der A-Reihe der Papierformate bildet?
Der Proportionalitätsfaktor ist $a_i : b_i = \sqrt{2}$.

52. **a)** Berechnen Sie den Radius des Breitenkreises, auf welchem Ihr Schulort liegt!
b) Welche (lineare) Bahngeschwindigkeit hat der Schulort infolge der Erdumdrehung?
c) Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Schulort und einem auf demselben Breitenkreis liegenden Ort, dessen Meridian sich von dem des Schulorts um 1° unterscheidet?
d) Lösen Sie die Aufgabe **a** auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!
Die Erde ist näherungsweise als Kugel anzusehen; $R = 6370$ km.

53. Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h.
a) Leiten Sie Beziehungen her zur Bestimmung der Winkel
(1) zwischen Seitenkante und Grundfläche,
(2) zwischen Seitenkante und Grundkante,
(3) zwischen Seitenfläche und Grundfläche,
(4) zwischen zwei Seitenflächen, die in einer Seitenkante aneinanderstoßen!
b) Diskutieren Sie, ausgehend vom Fall $h = a$, an Hand der von Ihnen aufgestellten Beziehungen, wie sich die vier Winkel ändern, wenn die Höhe h größer (kleiner) wird! Welche Winkel ergeben sich aus den Beziehungen in den Grenzfällen, in denen die Pyramide in ein Prisma bzw. ein Quadrat übergeht?

c) Bestimmen Sie die vier Winkel für $a = 4$ cm, $h = 5{,}6$ cm
(1) darstellend-geometrisch, (2) trigonometrisch!

54. Eine gerade regelmäßige dreiseitige Pyramide ($a = 10$ cm; $h = 15$ cm) steht auf der Grundrißebene. Sie wird von einer Ebene geschnitten, die auf der Aufrißebene senkrecht steht und mit der Grundrißebene den Winkel ε bildet. Der Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide hat von der Achse den Abstand 10 cm, von der Grundrißspur der Ebene den Abstand 8 cm. Eine Grundkante der Pyramide verläuft parallel zur Grundrißspur der Ebene und ist dieser zugewandt. Bestimmen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der Schnittfiguren darstellend-geometrisch und trigonometrisch für **a)** $\varepsilon = 30°$, **b)** $\varepsilon = 45°$!

55. In der standardisierten dimetrischen Projektion ergibt sich aus der Bedingung $q_1 = q_2 = 2q_3$ als Verkürzungsverhältnis $q_1 = q_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ und $q_3 = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Für die Achsenwinkel schreibt das Normblatt vor: $\alpha = \beta = 132°$; $\gamma = 97°$.
Leiten Sie mit Hilfe der Trigonometrie die Werte für $q_1 = q_2$ und q_3 her, und errechnen Sie die genauen Werte für $\alpha = \beta$ und für γ!

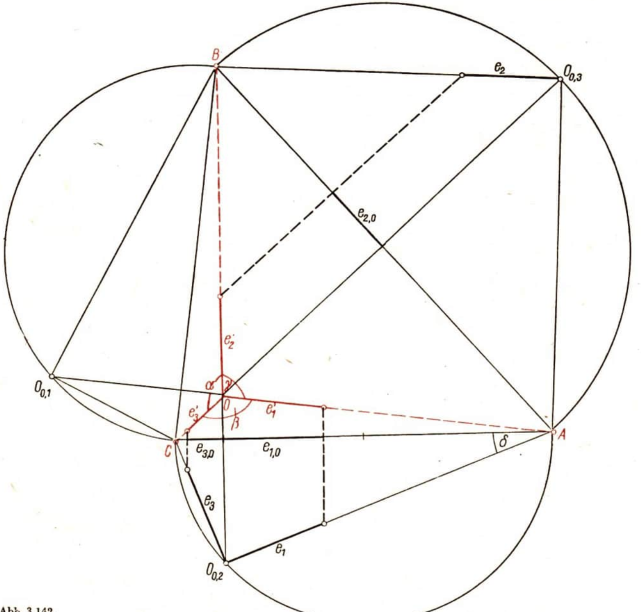


Abb. 3.142.

Anleitung: Das Spurdreieck ist gleichschenklig. Mit den umgelegten Seitenflächen der Dreibeinpyramide ergibt sich Abbildung 3.142. Bezeichnen Sie $\sphericalangle CAO_{0,2}$ mit δ, und drücken Sie auch $\sphericalangle ACO_{0,2}$ durch δ aus! Drücken Sie alle im Spurdreieck vorkommenden Winkel durch γ aus! Stellen Sie mit Hilfe von Winkelfunktionen für q_1, q_2 und q_3 Beziehungen auf!

(Beispiel: $q_1 = \frac{e_1'}{e_1} = \frac{e_1'}{e_{1,0}} : \frac{e_1}{e_{1,0}} = \frac{\cos\delta}{\sin\gamma}$)

Zusammen mit $q_1 = q_2$ und $q_2 = 2q_3$ ergeben sich fünf Gleichungen mit den fünf Unbekannten γ, δ, q_1, q_2, q_3.

Zur Lösung benötigen Sie einige goniometrische Formeln, die Sie aus dem Tafelwerk entnehmen können.

Schüleraufträge

1) Messen Sie in der beruflichen Grundausbildung Durchmesser und Mittelpunktsabstand von eventuell vorhandenen Riemenscheiben, und berechnen Sie die entsprechenden Riemenlängen!

2) Berechnen Sie die Arbeitszeit an der Bohrmaschine, wenn die Nebenzeit 36 % der Bohrzeit beträgt!

3) Messen Sie an einem Werkstück den Bohrdurchmesser und die Bohrtiefe! Entnehmen Sie die Schnittgeschwindigkeit und den Vorschub der Maschinenkarte, und berechnen Sie die Bohrzeit für einen Arbeitsgang!

4) Lesen Sie an einem Motor ab, wieviel PS er leistet!
Rechnen Sie die Leistung des Motors in kW um, und berechnen Sie bei Vollast die Kosten je Schicht!

5) Ein zylindrisches Gegengewicht soll aus konstruktiven Gründen in seiner Höhe um die Hälfte verkleinert werden.
Berechnen Sie den neuen Durchmesser, wenn das Volumen desselben konstant bleiben soll!

6) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion nehmen Sie in der RTS-Werkstatt mit Ihrem Betreuer am Traktor einen Motorenwechsel vor. Bei der Generalüberholung des Motors wurde das Maß der Zylinderdurchmesser um 1 mm erweitert.
a) Berechnen Sie die Vergrößerung des Hubraumes!
b) Stellen Sie die prozentuale Leistungssteigerung und den Kraftstoffverbrauch fest!

7) Berechnen Sie den Kolbenhub eines Ackerschleppers! Messen Sie die Drehzahl des Motors je Minute mit einem Tourenzähler, und entnehmen Sie den Wert für die mittlere Kolbengeschwindigkeit dem Typenkatalog!
Überprüfen Sie, ob das Ergebnis Ihrer Rechnung mit den Angaben der technischen Daten übereinstimmt!

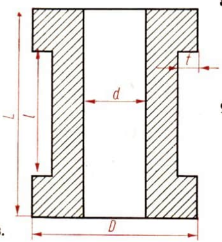


Abb. 3.143.

8) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion haben Sie die Drehzahl von einem Traktormotor zu berechnen. Den Kurbelradius und die mittlere Kolbengeschwindigkeit entnehmen Sie den technischen Daten des Typenkatalogs. Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit den angegebenen Werten!

9) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion tauschen Sie mit Ihrem Betreuer ein Rotgußgleitlager aus. Das neue Lager besteht aus Kunstharz (Abb. 3.143.).
a) Um wieviel Gramm verringert sich durch den Austausch des Rotgußgleitlagers gegen ein Lager aus Kunstharz die Masse?
b) Berechnen Sie die prozentuale Masseeinsparung!

3.12. Zur Geschichte der Trigonometrie

Im Laufe einer langen Zeit ist die Trigonometrie in mühevoller Gedankenarbeit aus der gesellschaftlichen Praxis heraus entwickelt worden.
Vor 4000 Jahren stand die Geometrie im alten Ägypten auf einer schon recht beachtlichen Höhe. Sie war aus der Notwendigkeit heraus entstanden, die durch jährliche Nilüberschwemmungen unkenntlich gewordenen Feldergrenzen jedesmal neu zu vermessen. Die Knotenleine mit Abschnitten von drei, vier und fünf Einheiten war ein wichtiges Hilfsmittel für die Vermessungsarbeiten. Besonders eindrucksvolle Zeugen

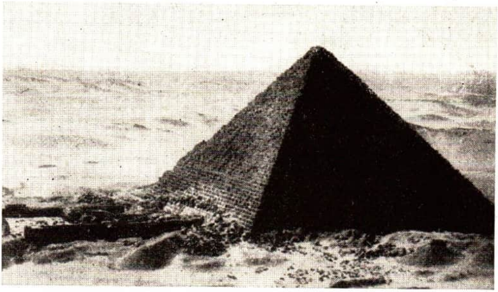


Abb. 3.144. Pyramide und Totentempel des Mykerimos (um 2600 v. u. Z.)

für den hohen Stand der Ingenieurkunst jener Zeit sind die Pyramiden, die Grabstätten der ägyptischen Könige, deren Bau Hunderttausenden von Sklaven und mit Gewalt zur Arbeit getriebenen Bauern das Leben kostete. Sämtliche Pyramiden weisen übereinstimmende Merkmale auf, woraus auf ein planvolles Arbeiten und hervorragendes meßtechnisches Können geschlossen werden kann. So sind die Seitenflächen der Pyramiden im allgemeinen mit einem Winkel von 52° zur Grundfläche geneigt. Außerdem sind die Pyramiden recht genau nach den Himmelsrichtungen orientiert, und die Kantenlängen ihrer quadratischen Grundflächen weichen nur um einige 10 Zentimeter voneinander ab, obwohl z. B. die größte Pyramide, die um 2680 v. u. Z. gebaute sogenannte Cheopspyramide, eine Seitenlänge von 227,5 m bei einer Höhe von 146,6 m besaß.
Unter den erhaltenen Schriftstücken des alten Ägyptens befinden sich auch einige mathematischen Inhalts. In einem in Moskau aufbewahrten mathematischen Papyrus wird z. B. die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Deckflächen völlig richtig vorgenommen; dieser mathematische Körper trat als Teil

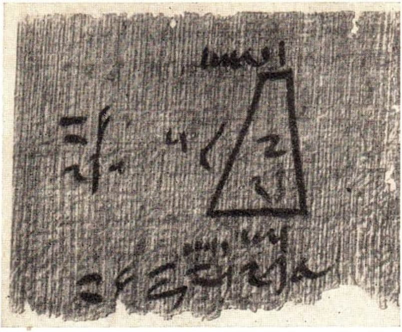


Abb. 3.145. Originaltext der Pyramidenstumpfaufgabe des Moskauer Papyrus

der Verkleidung der Pyramiden auf. Aus den mathematischen Papyri geht auch hervor, daß feste Fachausdrücke für den Begriff Winkel und für das Verhältnis von Seitenlängen an Pyramiden existierten, d. h. die ersten Vorstufen trigonometrischer Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

Auch bei den Chinesen, einem der ältesten Kulturvölker, reichen die geometrischen Kenntnisse, darunter auch trigonometrische, weit zurück. Schon um 1100 v. u. Z. wurden rechte Winkel mit Hilfe des Zahlentripels 3; 4; 5 abgesteckt, Höhen durch Messen der Schattenlänge bestimmt sowie Tiefen- und Entfernungsbestimmungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke vorgenommen. Leider sind unsere Kenntnisse über die frühe chinesische Mathematik recht gering, da ein chinesischer Kaiser im Jahre 213 v. u. Z. alle schriftlichen Aufzeichnungen verbrennen ließ.

Nur ganz wenige Dokumente sind dieser Zerstörung entgangen.

Die babylonische Mathematik stand im Vergleich zu der ägyptischen Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Dies betrifft insbesondere die Algebra, aber auch die Geometrie und Trigonometrie. Tontäfelchen mit Keilschrifttexten überliefern uns mathematische Probleme aus einer etwa 5000 Jahre zurückliegenden Zeit. Bewässerungskanäle mußten gebaut werden, denn in Mesopotamien, dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, war Ackerbau nur bei künstlicher Bewässerung möglich. So wurden für die erforderlichen Dämme die Neigung der Böschung und die Breite der Dammkrone berechnet. Daher spielte in den Rechnungen ein

Abb. 3.146. Babylonische Keilschrifttafel mit Dreiecksberechnungen

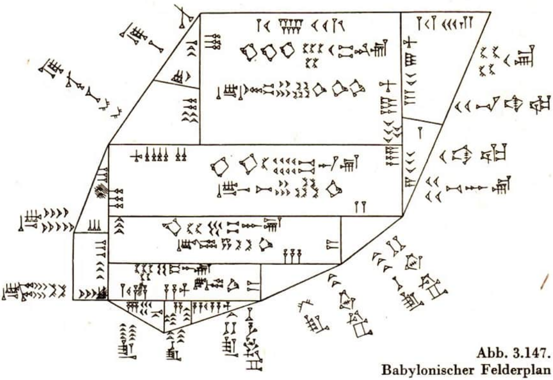


Abb. 3.147.
Babylonischer Felderplan

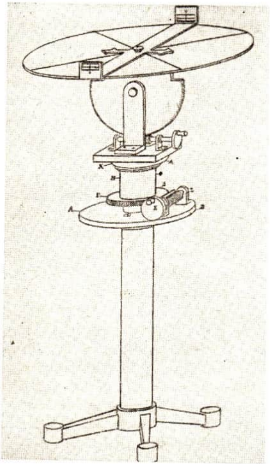
solches Verhältnis von Seitenlängen eine große Rolle, das auf den Kotangens hinausläuft und das als „Böschungswert“ bezeichnet wurde. Derartige Probleme aus der Praxis führten auch zu tiefen theoretischen Einsichten. Die Proportionalität der entsprechenden Seiten in ähnlichen Dreiecken wurde erkannt und der Satz des PYTHAGORAS aufgestellt. Eine enge Verknüpfung der babylonischen Mathematik bestand mit der Astronomie. Von riesigen, zu Tempelanlagen gehörenden Türmen beobachtete man den Himmel und glaubte, aus dem Lauf der Planeten z. B. Anzeichen kommender Dürren oder den Ausgang eines geplanten Kriegszuges ablesen zu können. Auch der berühmte Turmbau von Babel war eine solche „Sternwarte“. Zwar wurde die babylonische Astronomie immer stärker mit Aberglauben durchsetzt, d. h., sie wurde vielfach zur Astrologie; aber auch echte astronomische Kenntnisse wurden gewonnen. Über viele Jahrhunderte hinweg fortgesetzte Beobachtungen zeigten die Periodizität der Himmelserscheinungen sowie die regelmäßige Wiederkehr von Sonnen- und Mondfinsternissen und des Zusammentreffens von Planeten in bestimmten Tierkreiszeichen usw. Es sind sogar Zahlentabellen erhalten geblieben, die bei der Berechnung periodischer astronomischer Vorgänge verwendet wurden. Wenn man diese Zahlenwerte — was die damaligen Astronomen natürlich noch nicht taten — in ein Koordinatensystem überträgt, so erhält man ganz deutlich das Bild einer Sinuskurve.

Ungefähr 1000 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung boten nicht mehr die Binnenländer wie Ägypten und Mesopotamien die günstigsten Entwicklungsbedingungen für Wirtschaft, Handel und Wissenschaft, sondern in Verbindung mit der Entwicklung des Schiffsbaues die Küstenländer. Daher wurden die in Griechenland, auf den ägäischen Inseln und in Kleinasien ansässigen griechischen Stämme um die Mitte des 1. Jahrtausends v. u. Z. für den Raum des östlichen Mittelmeeres politisch, ökonomisch und auch auf dem Gebiete der Wissenschaft bestimmend.

Die griechische Mathematik verdankt ihren engen Beziehungen zu Mesopotamien und Ägypten sehr viel. Ergebnisse wissenschaftlicher Arbeit wurden übernommen und Anregungen für neue Erkenntnisse empfangen. THALES VON MILET (624?–548? v. u. Z.) soll die Höhe der Pyramiden dadurch bestimmt haben, daß er ihre Schattenlänge in dem Augenblick maß, als sein eigener Schatten genauso groß war wie er selbst. In Milet bestimmte er, ebenfalls mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, die Entfernung der Schiffe vom Hafen. Von Babylonien wurden auch die Sonnenuhr, die Zeiteinteilung und der Gnomon übernommen. Der Gnomon, das älteste astronomische Instrument, diente zur Bestimmung der Südrichtung. Ein senkrecht stehender Stab wirft auf eine waagerechte Ebene seinen Schatten und ermöglicht so die Messung der jeweiligen Schattenlänge, die sich bis Mittag verkürzt und dann wieder länger wird. Die Winkelhalbierende jedes Winkels, der von paarweise gleich langen Schatten gebildet wird, erstreckt sich in der Nord-Süd-Richtung. Darüber hinaus ermöglicht der Gnomon die Messung der Sonnenhöhe aus der Länge des Stabes und seines Schattens, was auf den Tangens des Höhenwinkels führt.

Die griechische Mathematik erreichte später eine erstaunliche Höhe. Aber sie geriet mehr und mehr unter den Einfluß der idealistischen Philosophie, insbesondere der Schule PLATONS. Dadurch riß die Verbindung der Mathematik zur Praxis ab. Ja, man hielt es nicht einmal mehr für nötig, die Methoden der praktischen Mathematik, wozu Trigonometrie und Feldmeßkunst gehören, schriftlich niederzulegen. In der Sklavenhaltergesellschaft galt jede praktische Tätigkeit, sogar die des bildenden Künstlers, trotz der Vorliebe der griechischen Sklavenhalter für Skulpturen, als minderwertig.

Abb. 3.148. Diopter
nach der Beschreibung von HERON



Andererseits kann man aus erhalten gebliebenen Bauwerken der griechischen und römischen Antike ersehen, daß die damaligen Ingenieure ein bedeutendes Wissen, auch auf dem Gebiet der praktischen Geometrie, besessen haben. So wurde z. B. um 530 v. u. Z. zur Wasserversorgung der Stadt Samos unter dem Baumeister EUPALINOS ein 1 km langer geneigter Tunnel durch einen Berg gebohrt. Der Stollen wurde von den beiden Eingängen aus vorgetrieben, und die beiden Seiten verfehlten einander nur um 3 Meter: eine Glanzleistung. Später hat HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.) auch die feldmesserischen

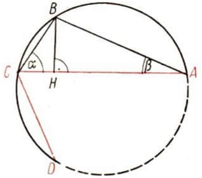


Abb. 3.149.

Geräte beschrieben, insbesondere den sog. Diopter (Sehrohr). Es handelt sich sozusagen um einen Theodoliten, natürlich noch ohne Fernrohr. Mit Zahnrädern und Schrauben war er in zwei zueinander senkrechten Ebenen verstellbar. Um Höhenunterschiede zu messen, wurde das Gelände genau wie heute mit Meßlatten abgesteckt. Außerordentlich wichtig für den späteren Aufbau einer systematischen Trigonometrie waren Beiträge von ARCHIMEDES (287 ?–212 v. u. Z.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums. Er gab einen Satz an, der später als *Prämisse des Archimedes* bezeichnet wurde (Abb. 3.149.):

Es sei B der Mittelpunkt eines Kreisbogens $\widehat{AD}$. Fällt man von B auf einen beliebig in den Kreis gelegten Sehnenzug ACD das Lot auf $\overline{AC}$, so halbiert der Fußpunkt H den Sehnenzug; d. h., es ist $\overline{AH} = \overline{HC} + \overline{CD}$.

Dieses Ergebnis entspricht dem Additionstheorem:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta .$$

Als in den letzten Jahrhunderten vor unserer Zeitrechnung Großreiche und später das römische Weltreich entstanden, stiegen die Anforderungen an die Landvermesser. Diese Vermessungen erforderten verbesserte astronomische Kenntnisse. Die astronomische Forschung erhielt so neue Impulse. In Verbindung damit machte auch die Trigonometrie, das wichtigste mathematische Hilfsmittel der Astronomie, Fortschritte.

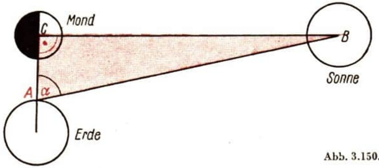


Abb. 3.150.

ARISTARCHOS (um 270 v. u. Z.) versuchte auf trigonometrischem Wege, das Verhältnis der Entfernungen Erde—Mond und Erde—Sonne zu bestimmen, indem er den Winkel α zwischen Mond, Erde und Sonne bei Halbmond maß, wenn also bei C ein rechter Winkel auftritt (Abb. 3.150.). Da er aber α wegen der mangelhaften Instrumente nicht genau bestimmen konnte, erhielt er für dieses Verhältnis nur 1 : 19 und nicht den richtigen Wert 1 : 370. HIPPARCHOS (180 ?–125 ? v. u. Z.) berechnete eine Sehnentafel, d. h. eine Tafel der Sehnenlängen bei wachsendem Bogen, und MENELAOS (um 100 u. Z.) entwickelte wichtige Sätze für trigonometrische Berechnungen auf der Kugelfläche. Schließlich faßte PTOLEMAIOS VON ALEXANDRIA (85 ?–165 ? u. Z.) alle früheren Ansätze und Methoden der Astronomie in einer Darstellung des geozentrischen Weltbildes zusammen, einem Buch mit dem Titel *Die Große Zusammenstellung*. Die Araber verstümmelten später den griechischen Titel zu *Almagest*. Seinen astronomischen Beschreibungen schickte PTOLEMAIOS eine ausführliche Darlegung der Trigonometrie in der Ebene und auf der Kugelfläche voraus; erst dann lehrte er, wie man trigonometrische Kenntnisse in der Astronomie verwendet. Da PTOLEMAIOS weder den Sinussatz noch den Kosinussatz kannte, zerlegte er beliebige Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke. Es handelte sich um eine Sehnentrigonometrie. Man rechnete mit der Länge der zu einem Winkel gehörenden Sehne. Also ist $\overline{AC}$ gleich ch $(2\,\alpha)$[1], wenn ch $(2\,\alpha)$ die zum Bogen $2\,\alpha$ gehörende Sehne bedeutet. Der Zusammenhang zwischen der umständlicheren Sehnentrigonometrie

[1] ch ist eine Abkürzung des Wortes chorda (lat.) Sehne.

und der heutigen Trigonometrie wird durch $\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,(2\,\alpha)$ geliefert, wenn der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt ist.
Die Umwandlung der Trigonometrie unter Verwendung der Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans am rechtwinkligen Dreieck wurde von den arabischen Gelehrten im 9. Jahrhundert vollzogen. Der *Almagest* war schon 833 ins Arabische übersetzt worden. Während in Europa durch den kulturfeindlichen Einfluß der christlichen Kirche auch die Wissenschaften daniederlagen, blühte die arabische Kultur auf. Noch heute spiegeln die *Märchen aus 1001 Nacht* jene glanzvolle Zeit wider.
Auch die Mathematik, insbesondere Algebra und Trigonometrie, erfuhren eine bedeutende Förderung. Tâbit ibn Qurra (826–901) fand den Sinussatz am rechtwinkligen Kugeldreieck. Unter dem Einfluß des großen Astronomen al-Battâni (850?–929) entschied man sich endgültig für die Sinus-Trigonometrie. Abû Naṣr (um 1000) fand den Sinussatz der ebenen Trigonometrie. Das ganze nun geschlossene Lehrgebäude der Trigonometrie wurde schließlich von at-Tûsí (1201–1274) erstmals zusammengefaßt. Auch umfangreiche astronomische und trigonometrische Tafeln wurden berechnet; z. B. tabulierte Ulûġ Beg (1393–1449) die trigonometrischen Funktionen mit einer Genauigkeit von 17 Dezimalen. Die indische Trigonometrie und Astronomie standen auf einem ähnlich hohen Niveau.
Diese großartigen trigonometrischen Kenntnisse gelangten aber nur zu einem ganz geringen Teil nach Europa, so daß man dort noch einmal von vorn anfangen mußte.
Erst im 15. Jahrhundert konnte die europäische Mathematik wenigstens in Teilen die antike Mathematik erreichen und übertreffen. Die neuen Ergebnisse wurden erzielt, weil das gesellschaftliche Leben Probleme aufwarf, deren Lösung auch den Einsatz neuer mathematischer Methoden erforderte. Dies betraf auch die Trigonometrie. Im Schoße der Feudalgesellschaft wuchs eine neue Klasse, die Bourgeoisie, heran. Sie war an der Förderung des Handels interessiert, sie betrieb in ihrem eigenen politischen und ökonomischen Interesse die Kolonisierung, die Erschließung neuer, in Übersee gelegener Märkte. Man fand den Seeweg nach Indien, und man entdeckte einen neuen Erdteil. Der Handel nach Übersee warf ungeheure Profite ab. Die Navigation auf hoher See erfordert aber ein bedeutendes Maß astronomischer und trigonometrischer Kenntnisse.

Abb. 3.151. Verwendung des von dem jüdischen Gelehrten Levi ben Gurson (1288–1344) erfundenen sog. Jakobstabes zur Winkelmessung. – Aus dem Titelblatt einer Abhandlung (1533) von P. Apian

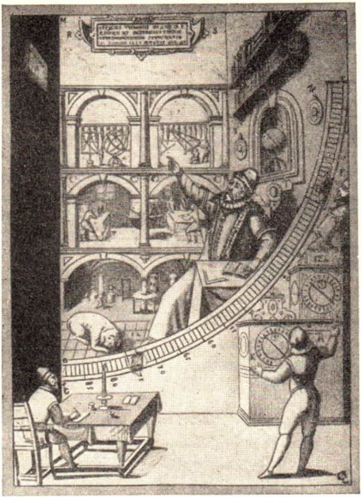
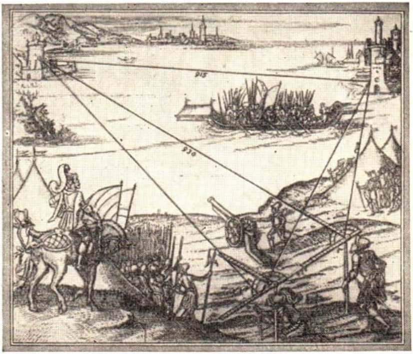


Abb. 3.152.

Mauerquadrant (gemauerter Viertelkreis mit Winkelteilung). Die Sternhöhe kann gemessen werden, indem der Beobachter durch einen Spalt (links oben) den Stern anvisiert. – Die Darstellung zeigt den dänischen Astronomen Tycho Brahe bei Messungen auf seiner Sternwarte in Uraniborg

Auch die Astronomie stellte an die Trigonometrie hohe Anforderungen. Indem man mit verbesserten astronomischen Instrumenten, dem Jakobstab und dem Mauerquadranten, genaue Messungen am Himmel anstellte, bemerkte man, daß das ptolemäische geozentrische Weltbild nicht richtig sein konnte. Den entscheidenden Schritt, der eine wissenschaftliche Großtat ersten Ranges darstellt, vollzog der polnische Gelehrte Nikolaus Kopernikus (1473–1543). In seinem Todesjahr erschien sein wissenschaftliches Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelesticum* (d. i. *Über die Umdrehungen der Himmelskörper*), in dem das heliozentrische Weltbild begründet wurde. Freilich erst in einem erbitterten opferreichen Kampf gegen die Kirche – G. Bruno wurde verbrannt, G. Galilei wurde bis zu seinem Tode

Abb. 3.153.



Militärisches Vermessungswesen – Abbildung aus L. Zublers *Kurzem Bericht von den neuen geometrischen Instrumenten*, 1602

Abb. 3.154.
Regiomontan (1436–1476)

von der Inquisition gefangengehalten — konnte der Wahrheit zum Siege verholfen werden.

Auch die Ausrüstung der Heere mit Kanonen machte die Entwicklung des Vermessungswesens und damit der Trigonometrie dringend notwendig. Ein Kanonenschuß war um die damalige Zeit so außerordentlich teuer, daß die Geschütze sorgfältig gerichtet werden mußten. Dazu bedurfte es genauer Entfernungsbestimmungen im Gelände. Von hier aus wurde das Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten entwickelt.

Auf Grund dieser und noch anderer praktischer Anforderungen entwickelte sich die Trigonometrie im 15., 16. und 17. Jahrhundert rasch. Schon Johannes von Gmunden (1380?–1442), Magister an der Universität Wien, und sein Nachfolger Georg von Peurbach (1423–1461) beschäftigten sich mit der Neuberechnung erweiterter trigonometrischer Tafeln. Dieses umfangreiche Werk vollbrachte schließlich Regiomontan (1436–1476). Von ihm stammen Sinustafeln, die von Minute zu Minute fortschreiten, sowie eine gradweise fortschreitende Tangententafel.

Regiomontan war ohne Zweifel der führende europäische Mathematiker seiner Zeit. In seinem allerdings erst im Jahre 1533 gedruckten Werk *De triangulis omnimodis libri quinque* (Fünf Bücher über alle Dreiecke) faßte Regiomontan alle vorhandenen trigonometrischen Verfahren, Sätze und Hilfstabellen zur Trigonometrie zusammen. Dort wird der Sinussatz ausführlich verwendet und zum erstenmal der Kosinussatz ausgesprochen. Durch Regiomontan war nun auch in Europa die Trigonometrie zu einer einheitlichen Wissen-

Abb. 3.155.

Tuschzeichnung aus dem 17. Jahrh. in einer japanischen Darstellung trigonometrischer Verfahren. Ein Beispiel für die als Ergebnis praktischer Anforderungen entwickelte Trigonometrie anderer Länder schaft geworden. Dem mathematischen Inhalt nach hatte sie schon damals das heutige Niveau erreicht.

In der Folgezeit wurden die Tafeln noch wesentlich verbessert, so durch den Wittenberger Mathematiker RHAETICUS (1514–1576), den Franzosen VIETA (1540–1603) und den großen Astronomen JOHANNES KEPLER (1571–1630). Seit KEPLER wurden auch die Methoden des logarithmischen Rechnens in der Trigonometrie verwendet.

Die heute verwendeten Bezeichnungen in der Trigonometrie sind freilich erst in späterer Zeit eingeführt worden. Im wesentlichen haben sich die von dem genialen schweizerischen Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) verwendeten Bezeichnungen durchgesetzt: π als Maßzahl des Einheitshalbkreises, e für 2,718..., a, b, c für die Dreiecksseiten, die Symbole sin, cos, tan für die trigonometrischen Funktionen.

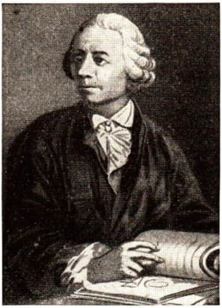
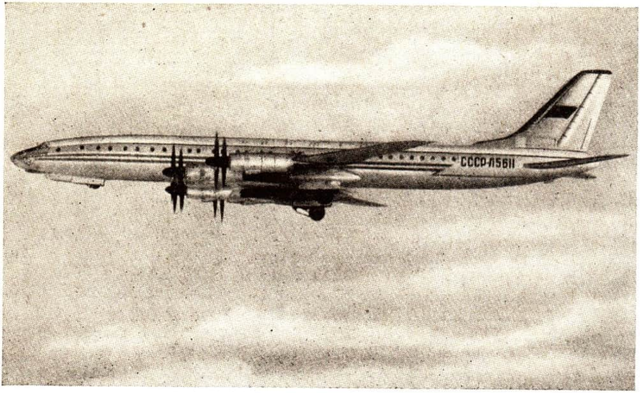


Abb. 3.156.
LEONHARD EULER (1707–1783)

Von den großen Mathematikern und Geodäten des 18. und 19. Jahrhunderts wurde die Trigonometrie als Hilfsmittel der Erdvermessung weiter ausgebaut. So konnte z. B. der Franzose P. L. M. DE MAUPERTUIS (1698–1759) durch Messung eines Längenkreises die Abplattung der Erde an den Polen nachweisen. Neu entdeckte Länder wurden in allen Einzelheiten kartographisch aufgenommen. Der größte deutsche Mathematiker, C. F. GAUSS (1777–1855), entwickelte schließlich noch die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, mit der es möglich ist, sich in den Schlußberechnungen weitgehend von den unweigerlich auftretenden Beobachtungsfehlern frei zu machen.

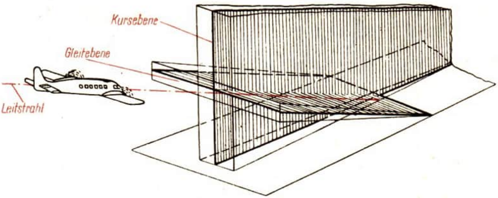


4. Darstellende Geometrie

Zur Gewährleistung eines reibungslosen Flugverkehrs sind umfangreiche Flugsicherungsmaßnahmen erforderlich. Hierzu gehören auch Einrichtungen, die den Flugzeugführer beim Landen unterstützen. Beim Instrumenten-Landesystem strahlt ein Landekurssender über zwei paarweise angeordnete Sender verschiedene Frequenzen ab und erzeugt so eine Mittelebene, die sich durch gleiche Anteile beider Frequenzen auszeichnet. Diese Ebene steht senkrecht auf der Erdoberfläche. Senkrecht zu dieser Ebene wird durch den Gleitwegsender auf die gleiche Weise eine zweite Ebene erzeugt. Die Schnittgerade beider Ebenen, der Leitstrahl, weist dem Flugzeugführer den richtigen Landeweg. Abweichungen vom Leitstrahl werden auf einem Instrument angezeigt und vom Flugkapitän korrigiert. In der darstellenden Geometrie wollen wir uns jetzt mit der Darstellung von Ebenen beschäftigen.

4.1. Zur Wiederholung

1. Welche Aufgabe hat die darstellende Geometrie? Welche Forderungen stellt man an die Bilder? In welchem Maße sind diese Forderungen erfüllbar?
2. Die drei Hauptverfahren der darstellenden Geometrie sind: (1) senkrechte Parallelprojektion, (2) schräge Parallelprojektion, (3) Zentralprojektion.



a) Beschreiben Sie diese Verfahren unter besonderer Angabe der Unterschiede!
b) Welche Vorteile und Nachteile haben die einzelnen Verfahren?
c) Ordnen Sie die Verfahren systematisch, und beschreiben Sie die Zusammenhänge! Anleitung: Welches ist das allgemeinste Verfahren? Welches kann als Sonderfall (Grenzfall) davon angesehen werden? Inwiefern ist dann das dritte Verfahren wieder ein Sonderfall (Grenzfall) des zweiten?

3. Bei welchem Verfahren verwendet man einen Höhenmaßstab, Koten oder einen zweiten Riß? Welchem Zweck dient diese Ergänzung des Bildes?
Anleitung: Verwenden Sie zur Beantwortung die Begriffe *eindeutig* und *eineindeutig* (umkehrbar eindeutig)!

4. Welches Projektionsverfahren liegt dem Grundriß, dem Zweitafelbild und dem Dreitafelbild zugrunde? Erläutern Sie dabei die Begriffe Aufriß, Seitenriß, Kreuzriß und ihre Symbolisierung in der Zeichnung!

5. Durch wieviel Risse ist im allgemeinen ein Urbild eindeutig nach Gestalt und Größe festgelegt? Welcher konstruktive Zusammenhang besteht zwischen den drei Rissen im Dreitafelbild? Zeigen Sie das an einem Dreieck, und erläutern Sie den Begriff Ordnungslinie!

6. Was versteht man unter Frontlage, was unter Tiefenlage zur Rißtafel der folgenden Gebilde:
a) Strecke, **b)** Gerade, **c)** Winkel, **d)** ebene Figur?
Anleitung: Erläutern Sie die beiden Lagen unter Verwendung eines Modells: Tisch als Grundrißtafel; Wand als Aufrißtafel; Bleistift (zu a), Zirkel (zu c), Heft (zu d) als Urbild!

7. Erläutern Sie die Begriffe **a)** Verkürzung einer Strecke a, **b)** Verzerrung eines Winkels α! In welchen Grenzen ist beides möglich?

8. Ergänzen Sie folgende Tabelle, und beachten Sie dabei auch jeweils einen Vergleich des Bildes mit dem Urbild nach Gestalt und Größe!

Original (Urbild)	Bilder bei senkrechter Parallelprojektion		
Punkt			
	Frontlage	Tiefenlage	beliebige Lage
Strecke			
Gerade			
Winkel			
Ebene Figur			

Formulieren Sie die Aussagen der Tabelle auch in Form von Lehrsätzen!

9. Woran erkennen Sie, ob zwei durch ihre Grund- und Aufrisse gegebene Geraden parallel verlaufen, einander schneiden oder sich kreuzen?
Anleitung: Unterscheiden Sie zur Erläuterung des Schneidens und Kreuzens die Fachbezeichnungen „Grundriß bzw. Aufriß des Schnittpunktes“ und „Deckstelle im Grundriß bzw. Aufriß“! Nehmen Sie ein Modell zu Hilfe! (Vgl. Aufgabe **6**; 2 Bleistifte!)

10. Der Grundrißspurpunkt S_1 und der Aufrißspurpunkt S_2 legen eindeutig eine Gerade im Grundriß-Aufriß-Bild fest.

a) Zeichnen Sie das Zweitafelbild einer Geraden mit ihren Spurpunkten!

b) Begründen Sie folgende Tatsachen: $S_1 = S_1'$, $S_2 = S_2''$; S_1'' und S_2' liegen auf der Rißachse!

Anleitung: Nehmen Sie auch hierzu ein Modell zu Hilfe! (Vgl. Aufgabe **6**!)

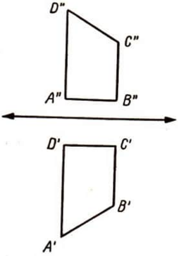


Abb. 4.1.

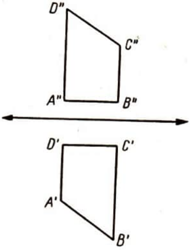


Abb. 4.2.

11. a) Sind die durch Grundriß-Aufriß-Bilder dargestellten Figuren (Abb. 4.1. und 4.2.) ebene oder räumliche Vierecke?

b) Konstruieren Sie die Spurpunkte der durch A und C bzw. durch B und D verlaufenden Geraden!

12. a) Wie lauten die Vorschriften über die Achsenkreuzwinkel sowie die Verkürzungen bei der isometrischen und bei der genormten dimetrischen Projektion?

b) Welche vorgeschriebenen Werte sind genau, welche sind gerundet?

13. a) Zeichnen Sie den in der Abbildung 4.3. im Dreitafelbild dargestellten dreifach quadratisch durchbohrten Würfel im isometrischen und im genormten dimetrischen Verfahren mit den in der Abbildung 4.3. in Millimetern angegebenen Maßen!

b) Wie schwer ist der Körper? (Material: Aluminium; $\varrho = 2{,}7\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$)

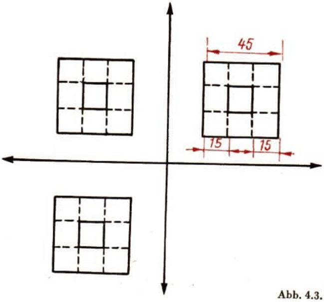


Abb. 4.3.

14. Ein 30 cm langes Stück Sechskantstahl ⬡ 50 ist auf beiden Seiten spitz angeschliffen, so daß die 12 Schliffdreiecke je unter 30° gegen die Achse geneigt sind. Wie schwer ist dieser Spitzstahl? Zeichnen Sie das Werkstück in einem geeigneten Maßstab

a) als Grundriß-Aufriß-Kreuzriß-Bild,
b) in isometrischer Darstellung,
c) in genormter dimetrischer Darstellung!

Anleitung: ⬡ 50 bedeutet Sechskantstahl von 50 mm Durchmesser, gemessen von Kante zu Gegenkante. (Material: Flußstahl; $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{dm}^{-3}$.)

15. Ergänzen Sie folgende Tabelle, und geben Sie für die einzelnen Gebilde Definitionen an!

Dimension	Fachbezeichnungen der geometrischen Gebilde	
	begrenzte Gebilde	unbegrenzte Gebilde
0		
1		
2		
3		

4.2. Senkrechte Parallelprojektion der unbegrenzten Ebene

Der Orthogonalriß auf einer Tafel

Die Orthogonalprojektion eines Punktes ergibt stets einen eindeutig bestimmten Punkt als Riß. Da man sich alle geometrischen Gebilde erster, zweiter und dritter Dimension aus einer Vielzahl von Punkten aufgebaut denken kann, läßt sich der Riß des ganzen Gebildes entsprechend aus den Rissen aller jener einzelnen Punkte zusammensetzen. So ergeben sich als Orthogonalrisse aller begrenzten Gebilde (Strecke, Figur, Körper) ebenfalls begrenzte Gebilde (Punkt, Strecke, Figur). Der Orthogonalriß der (unbegrenzten) Geraden ist im allgemeinen wieder eine Gerade. Für den Orthogonalriß der (unbegrenzten) Ebene gelten die beiden folgenden Sätze:

Satz 1: Der Orthogonalriß einer Ebene, die nicht senkrecht zur Rißtafel (in Tiefenlage) steht, ist die gesamte Rißtafel selbst.

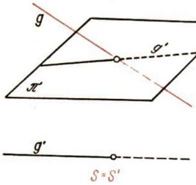
Satz 2: Der Orthogonalriß einer Ebene in Tiefenlage ist eine Gerade.

Die Spurgerade

Jede Ebene, die nicht parallel zur Rißtafel (d. h. in Frontlage) liegt, schneidet die Rißtafel in einer Geraden: **Spurgerade** oder **Spur** *s*.

Diese Spur s verwendet man als Bild der Ebene E bei der senkrechten Parallelprojektion. Das entspricht der Kennzeichnung einer Geraden g durch ihren Spurpunkt S. Während aber dort außer $S = S'$ noch der Orthogonalriß g' der Geraden selbst mit gezeichnet wird (Abb. 4.4.), ist das bei der Ebene nicht möglich.

Abb. 4.4.



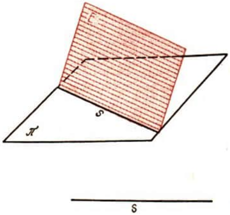
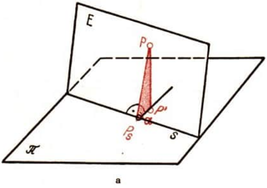


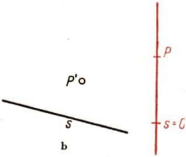
Abb. 4.5.

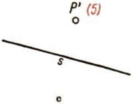
Satz 3: Eine Ebene wird in senkrechter Parallelprojektion nur durch ihre Spur s dargestellt (Abb. 4.5.).

Die Spurgerade s fällt mit ihrem Riß s' zusammen. Es ist üblich, die Ebenenspur nur mit s zu bezeichnen, im Gegensatz zum Spurpunkt S einer Geraden, den man mit $S = S'$ oder mit S' beschriftet.

Abb. 4.6.







Zu einer Spur s in der Rißtafel gehören unbeschränkt viele Ebenen als Urbilder. Sie bilden ein Ebenenbüschel mit der Spurgeraden s als Büschelträger. Eine der Büschelebenen E kann dadurch eindeutig festgelegt werden, daß ein nicht auf s gelegener Punkt P der betreffenden Ebene (Abb. 4.6. a) durch den Grundriß P' und durch einen Höhenmaßstab (Abb. 4.6. b) oder eine Kote (Abb. 4.6. c) dargestellt wird. Die Rißtafel π wird dazu künftig stets waagerecht angenommen (Grundrißtafel).

Neigungswinkel, Fallinien, Höhenlinien

Wird in E von P auf s das Lot gefällt (Fußpunkt P_s), so bildet $PP'P_s$ ein rechtwinkliges Dreieck (Abb. 4.6. a). In ihm wird der Winkel PP_sP' als **Neigungswinkel** α

der Ebene E gegen die Rißtafel π definiert. Die Hypotenuse $\overline{PP_s}$ ist eine **Fallinie** der Ebene E, das Dreieck PP_sP' ein **Stützdreieck** von E.

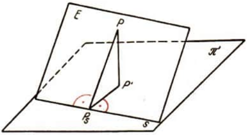
Halten Sie ein Zeichendreieck in verschiedenen Lagen über der Tischplatte als Rißtafel!
Veranschaulichen Sie durch ein aufgeklapptes Heft jeweils die projizierenden Ebenen der beiden Schenkel des rechten Winkels, und beobachten Sie die Größe seiner Risse!
Halten Sie das Dreieck u. a. auch so, daß einer der Schenkel des rechten Winkels parallel zu (oder in) der Rißebene liegt!

Bei dieser Übung werden die folgenden Sätze klar.

Satz 4: Der Orthogonalriß eines rechten Winkels, von dem wenigstens ein Schenkel parallel zur Rißebene (oder in der Rißebene) liegt, ist wieder ein Rechter.

Daraus folgt:

Satz 5: Der Orthogonalriß jeder Fallinie einer Ebene verläuft senkrecht zur Spur der Ebene (Abb. 4.7.).



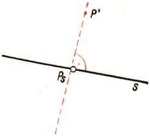


Abb. 4.7.

Es kann also aus der Spur s einer Ebene und dem Grundriß P' eines beliebigen, jedoch nicht auf s liegenden Ebenenpunktes (in Verbindung mit Höhenmaßstab oder Kote) die wahre Größe des Neigungswinkels α durch Umlegen des Stützdreiecks in die Rißtafel konstruiert werden. Die Konstruktion zeigt die Abbildung 4.8.

Satz 6: Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die gleichen Abstand von der Rißtafel haben, ist eine Parallele zur Spur s.

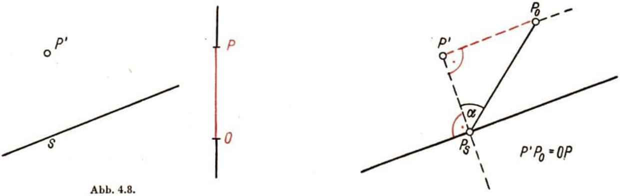


Abb. 4.8.

Diese Spurparallele heißt **Höhenlinie** h. Ihre Höhenlage wird häufig durch eine Kote angegeben.

Satz 6a: Der Orthogonalriß h' einer Höhenlinie verläuft ebenfalls parallel zu s.

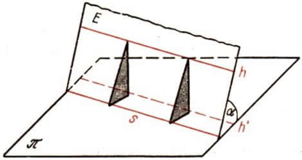
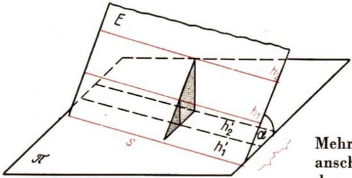


Abb. 4.9.

Den Zusammenhang zwischen dem Abstand einer Höhenlinie h von der Rißtafel π (Höhe der Höhenlinie über π), dem Abstand der Höhenlinie h von s (in der Ebene E gemessen) und dem Abstand ihres Risses h' von s (in der Rißtafel π gemessen) zeigt das Stützdreieck (Abb. 4.9.). Aus dem (umgelegten) Stützdreieck kann zu zwei gegebenen jeweils die dritte dieser Größen konstruktiv ermittelt werden.



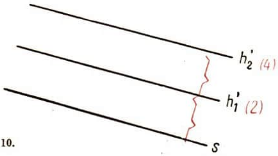
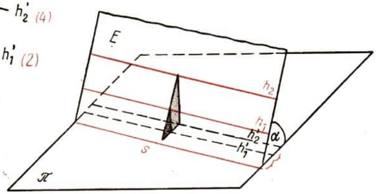


Abb. 4.10.

Mehrere abstandsgleiche Höhenlinien veranschaulichen bei gleicher Kotenfolge durch den Abstand ihrer Risse die Neigung der Ebene:
Je dichter die Risse liegen, desto steiler verläuft die Ebene (Abb. 4.10. und 4.11.).



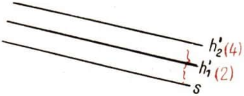


Abb. 4.11.

Die Darstellung des Anstieges durch Höhenlinien ist von den Höhenschichtlinien der Landkarten bekannt, nur handelt es sich dabei um gekrümmte Flächen und dementsprechend um krumme Höhenlinien (Abb. 4.12.).

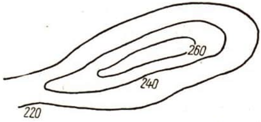


Abb. 4.12.

Aufgaben

1. Beweisen Sie **Satz 5**!

2. Beweisen Sie **Satz 6**!
   Anleitung: Die für die Punkte dieses geometrischen Ortes einzuzeichnenden Stützdreiecke der Ebene sind kongruent. Warum? Was folgt daraus?

3. Zeichnen Sie die Spur sowie die Risse der Fall- und Höhenlinien einer Ebene, die **a)** senkrecht, **b)** parallel zur Rißtafel verläuft! Wählen Sie einmal die Darstellung mit Hilfe eines Höhenmaßstabs, einmal die Darstellung mit Hilfe von Koten! Formulieren Sie die Ergebnisse dieser Sonderfälle in Sätzen!

4. Der Riß eines Ebenenpunktes liege genau so weit von der Ebenenspur entfernt, wie seine Kote angibt. Was folgern Sie daraus?

5. Auf einer unter 30° geneigten Ebene liegt eine Schar äquidistanter[1] Höhenlinien mit je 2 cm Abstand. Konstruieren Sie den Grundriß **a)** mit einem Höhenmaßstab, **b)** mit Koten!
   Anleitung: Konstruieren Sie zunächst das in die Rißebene umgelegte Stützdreieck!

6. Von einer Ebene sind gegeben
   die Spur s und der Riß h' einer Höhenlinie h.
   a) Abstand h' von s : 2, Kote : 5
   b) Abstand h' von s : 5; Kote : 2
   Wie groß ist der Neigungswinkel?
   Wie weit ist h von s entfernt?

7. Aufgabe **6** läßt sich auch trigonometrisch lösen. Stellen Sie die dazu erforderlichen Beziehungen im Stützdreieck auch allgemein auf!

8. Konstruieren Sie den Grundriß **a)** eines Tetraeders, **b)** eines Oktaeders, und veranschaulichen Sie die Neigungen der Seitenflächen durch Höhenlinien jeweils einmal unter Verwendung eines Höhenmaßstabs und einmal mit Hilfe von Koten!

Die Ebene im Zweitafelbild

Satz 7: Drei Ebenen, von denen keine zu einer der anderen parallel liegt, schneiden einander in drei nicht parallelen Geraden. Die Schnittgeraden verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt, der demnach allen drei Ebenen angehört.

Beweis: Ebene I möge Ebene III in der Geraden g_1 schneiden, Ebene II möge Ebene III in g_2 schneiden. Da g_1 und g_2 beide in III liegen und, da I und II nicht parallel zueinander verlaufen, selbst auch nicht parallel zueinander sein

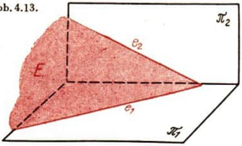
[1] aequus (lat.), gleich; distantia (lat.), Abstand äquidistant: im gleichen Abstand verlaufend

können, schneiden sie einander in einem Punkt S der Ebene III. Außerdem liegt aber g_1 in I und g_2 in II, der Schnittpunkt S also auch in I und II, w. z. b. w.

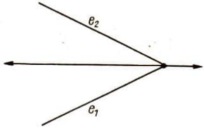
Im Zweitafelraum schneidet eine beliebig gelegene Ebene E die Grundrißtafel π_1 in der Grundrißspur e_1, die Aufrißtafel π_2 in der Aufrißspur e_2 (Abb. 4.13. a). Da π_1, π_2 und E in diesem Falle drei nicht parallele Ebenen sind, gilt für sie **Satz 7.** Daraus folgt:

Satz 8: Im Zweitafelbild wird eine Ebene in allgemeiner Lage durch ihre Grundrißspur e_1 und ihre Aufrißspur e_2 dargestellt, die einander auf der Rißachse schneiden.

Abb. 4.13.



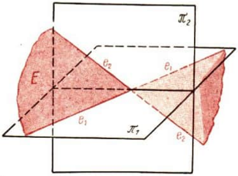
a



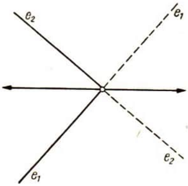
b

Sofern man sich auf den ersten Rißquadranten beschränkt, d. h. π_1 und π_2 durch die Rißachse begrenzt, sind e_1 und e_2 vom gemeinsamen Schnittpunkt auf der Rißachse ausgehende Strahlen, d. h., e_1 verläuft nur unterhalb, e_2 nur oberhalb der Rißachse (Abb. 4.13. b). Werden π_1 und π_2 unbegrenzt erweitert, so daß auch die übrigen drei Rißquadranten entstehen, so werden e_1 und e_2 zu Geraden, von denen jede beiderseits der Rißachse verläuft (Abb. 4.14.). Dieser allgemeinere Fall soll nicht näher untersucht werden, doch kann er sich gelegentlich bei Konstruktionen ergeben.

Abb. 4.14.



a



b

Aus dem Winkel zwischen e_1 und e_2 oder zwischen e_1 bzw. e_2 und der Rißachse kann im allgemeinen kein Schluß auf die Neigungswinkel der Ebene E gegen die Rißtafeln (α_1 gegen π_1; α_2 gegen π_2) gezogen werden, da α_1 und α_2 nur in den zu E gehörenden Stützdreiecken vorkommen. Nur bei senkrechtem Verlauf von E zu π_1 oder π_2 zeigt die Spur e_1 bzw. e_2 den Neigungswinkel zur anderen Rißtafel in wahrer Größe (Abb. 4.15.).

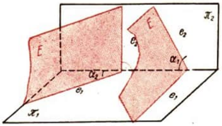


Abb. 4.15. a

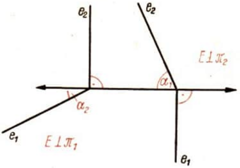


Abb. 4.15. b

Satz 9: Steht eine Ebene senkrecht zur Grundrißtafel π_1 (Aufrißtafel π_2), so verläuft die Aufrißspur e_2 (Grundrißspur e_1) senkrecht zur Rißachse, und der Winkel zwischen der Grundrißspur e_1 (Aufrißspur e_2) und der Rißachse ist der Neigungswinkel α_2 (α_1) der Ebene gegen π_2 (π_1).

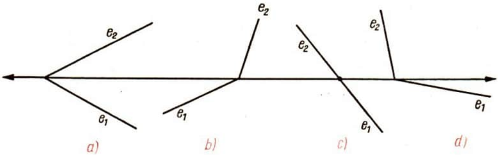
Aufgaben

1. Eine senkrecht auf der Aufrißtafel stehende Ebene wird um ihre Grundrißspur gedreht.

a) Wie ändert sich das Zweitafelbild, wenn Sie die Ebene kontinuierlich von der einen Grenzlage bis zur anderen drehen? (Umwenden einer Buchseite.)

b) Welcher Sonderfall ergibt sich für $\alpha_1 = 90°$? Wie sieht für diesen Sonderfall das Zweitafelbild aus?

Abb. 4.16.



2. Beschreiben Sie die Lage der Ebenen, die durch die Grundriß-Aufriß-Bilder in Abbildung 4.16. dargestellt sind! Halten Sie auch jeweils ein Heft in dieser Lage in das Modell eines Zweitafelraumes (Tisch — Wand oder hochgeklappter Buchdeckel)!

3. Zeichnen Sie das Zweitafelbild einer Ebene, die parallel **a)** zu π_1, **b)** zu π_2, **c)** zur Rißachse, aber nicht parallel zu π_1 oder π_2 verläuft!

4. Wie liegt die Ebene im Raum, deren Grundriß- und Aufrißspur zusammenfallen?
Wie liegt die Doppelspur im Zweitafelbild?

Inzidenz von Gerade und Ebene; die Hauptlinien einer Ebene; Inzidenz von Punkt und Ebene

Eine Gerade und eine Ebene inzidieren[1], wenn die Gerade vollständig in der Ebene liegt.

[1] incidere (lat.), zusammenfallen

Satz 10: Die Spurpunkte einer mit einer Ebene inzidierenden Geraden liegen auf den entsprechenden Spurgeraden der Ebene: $S_1 = S_1'$ auf e_1; $S_2 = S_2''$ auf e_2 (Abb. 4.17.).

Besonders wichtige Inzidenzgeraden jeder Ebene sind die **Höhenlinien** und die **Frontlinien**; gemeinsamer Name: **Hauptlinien** oder **Spurparallelen.** Sie haben jeweils nur einen Spurpunkt.

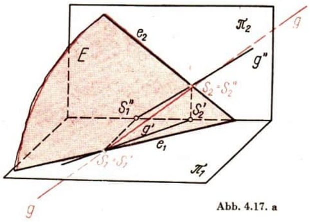


Abb. 4.17. a

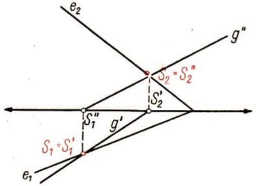


Abb. 4.17. b

	Hauptlinien oder Spurparallelen	
	Höhenlinien h (Abb. 4.18.)	Frontlinien f (Abb. 4.19.)
Lage der Hauptlinien	parallel zu π_1	parallel zu π_2
Lage der Aufrisse	parallel zur Rißachse	parallel zu e_2
Lage der Grundrisse	parallel zu e_1	parallel zur Rißachse
vorhandener Spurpunkt	S_2	S_1

Satz 11: Ein Punkt liegt genau dann in einer Ebene, wenn sich durch ihn wenigstens eine mit der Ebene inzidierende Gerade, z. B. eine Hauptlinie der Ebene, legen läßt.

Abb. 4.18.

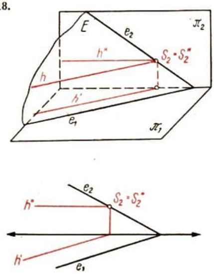


Abb. 4.19.

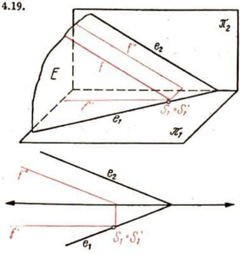


Abb. 4.20. a

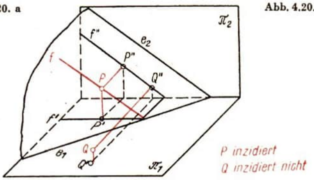
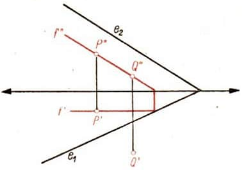


Abb. 4.20. b

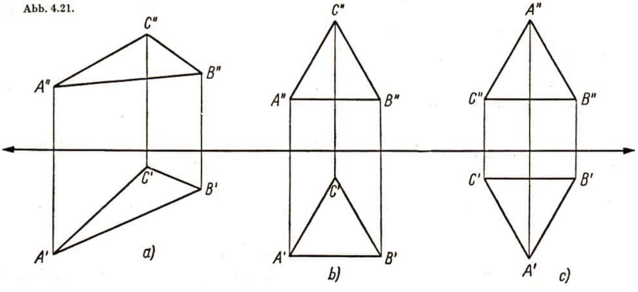


Im Grundriß-Aufriß-Bild zeigt sich das daran, daß Grundriß und Aufriß des Punktes auf den entsprechenden Rissen einer Höhen- oder einer Frontlinie liegen. In der Abbildung 4.20. ist die Entscheidung mit Hilfe einer Frontlinie gefällt worden: *P* inzidiert mit *E*, *Q* nicht.

Aufgaben

1. Begründen Sie die Bezeichnung „Spurparallele"! Warum fehlt jeweils ein Spurpunkt?
2. Erläutern Sie den Satz: Jede Frontlinie befindet sich in Frontlage zur Aufrißtafel, jede Höhenlinie verläuft in Frontlage zur Grundrißtafel.
   Anleitung: Definieren Sie zunächst den Begriff „Frontlage" einer Strecke (einer ebenen Figur), und stellen Sie ihn in Gegensatz zu den Begriffen „Tiefenlage" und „allgemeine Lage"!
3. Wie sehen die Risse der Hauptlinien aus, wenn die Ebene
   a) senkrecht zu π_1, **b)** senkrecht zu π_2, **c)** senkrecht zu π_1 und π_2 verläuft?
   Zeichnen Sie jeweils entsprechende Zweitafelbilder!
4. Wie sehen die Risse der Hauptlinien aus, wenn die Ebene
   a) parallel zu π_1, **b)** parallel zu π_2,
   c) parallel zur Rißachse (aber nicht parallel zu π_1 oder π_2) verläuft?
5. Gegeben sind die Spuren einer Ebene und der Grundriß eines Punktes dieser Ebene. Konstruieren Sie den Aufriß mit Hilfe einer Höhenlinie!
6. Gegeben sind die Grundrißspur einer Ebene und ein Punkt dieser Ebene durch Grundriß und Aufriß. Konstruieren Sie die Aufrißspur der Ebene auf zweierlei Weise!

Abb. 4.21.



7. Der Aufriß P'' eines Ebenenpunktes liegt auf der Aufrißspur der Ebene. Wo liegt P'?

8. Gegeben ist eine Ebene durch Grundrisse und Aufrisse von
a) zwei parallelen, **b)** zwei einander schneidenden
mit ihr inzidierenden Geraden. Konstruieren Sie die Ebenenspuren!
Anleitung: Die Spurpunkte der Geraden bestimmen die Spurgeraden der Ebene.

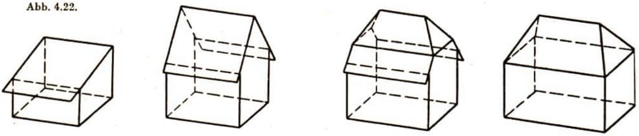
9. Konstruieren Sie die Ebenen, in denen die in den Abbildungen 4.21. a bis c durch Grundriß und Aufriß gegebenen Dreiecke liegen! Diskutieren Sie die Lage der Ebenen!
Anleitung: Die Aufgabe **9** entspricht der Aufgabe **8b**, wobei sich noch eine Zeichenkontrolle ergibt.

10. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren. Konstruieren Sie die Neigungswinkel α_1 und α_2 gegen die Rißtafeln!
Anleitung: Nehmen Sie einen Punkt in der Ebene an, und arbeiten Sie weiter mit den zu ihm gehörenden beiden Stützdreiecken! Das auf π_1 stehende (Fallinie auf e_1) wird in π_1 umgelegt und enthält α_1, das auf π_2 stehende (Fallinie auf e_2) wird in π_2 umgelegt und enthält α_2.

11. Eine Ebene ist gegen jede der beiden Rißtafeln unter 45° geneigt. Konstruieren Sie die Spurgeraden!
Anleitung: Die Aufgabe ist eine spezielle Umkehrung der Aufgabe **10.**

12. Eine regelmäßige dreiseitige Pyramide hat eine Grundkante von 4 cm und eine Höhe von 10 cm. Konstruieren Sie
a) das Grundriß-Aufriß-Bild bei einfacher Lage,
b) die Spuren der Seitenflächenebenen,
c) die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche!
Lösen Sie anschließend Aufgabe **c** auch trigonometrisch!

Abb. 4.22.



a b c d

13. Die in den Abbildungen 4.22. a bis d dargestellten Schaubilder zeigen einige einfache Dachformen.
a) Wie heißen die Dachformen?
b) Verschaffen Sie sich reale Maße von einigen Dächern, und konstruieren Sie in geeigneten Maßstäben die Grundriß-Aufriß-Bilder in einfacher Lage!
c) Ergänzen Sie diese Zweitafelbilder durch Konstruktion der Spurgeraden und der Neigungswinkel aller Dachflächen!

Schnittgerade zweier Ebenen

Satz 12: Die Schnittpunkte entsprechender Spuren zweier Ebenen sind die Spurpunkte der Schnittgeraden dieser Ebenen.

Beweis: Die Schnittgerade zweier Ebenen ist der geometrische Ort aller Punkte, die beiden Ebenen zugleich angehören. Da die Spurgeraden Geraden dieser

Ebenen sind, ihre Punkte also den Ebenen angehören, muß der Schnittpunkt der beiden Aufrißspuren ebenso wie der der beiden Grundrißspuren jeweils ein Punkt sein, der beiden Ebenen zugleich angehört. Zwei Punkte bestimmen aber eine Gerade, hier die Schnittgerade, eindeutig.

Aus **Satz 12** folgt die Konstruktion der Schnittgeraden s in Grundriß und Aufriß aus den Schnittpunkten S_1 von u_1 und v_1 im Grundriß und S_2 von u_2 und v_2 im Aufriß (Abb. 4.23.):

$$s = \overline{S_1S_2}; \quad s' = \overline{S_1'S_2'}; \quad s'' = \overline{S_1''S_2''}.$$

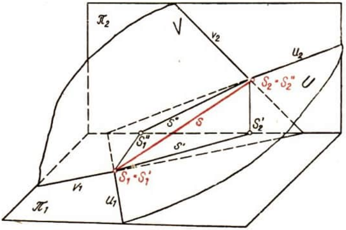


Abb. 4.23. a

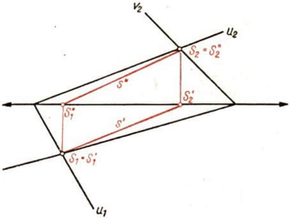


Abb. 4.23. b

Abb. 4.24.

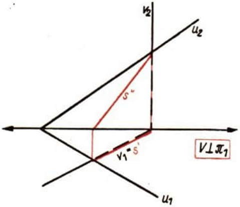
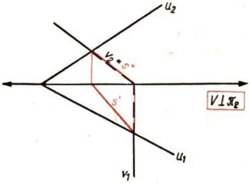


Abb. 4.25.

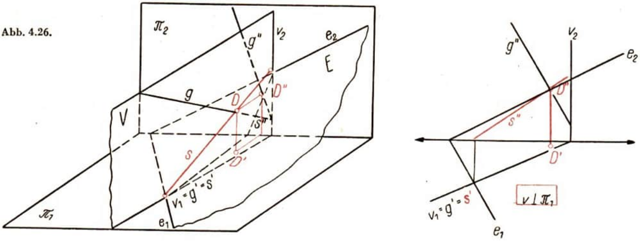


Satz 13: Verläuft im besonderen Fall die eine Ebene, z. B. V, senkrecht zur Rißtafel
π_1, so fällt s' mit v_1 zusammen (Abb. 4.24.);
π_2, so fällt s'' mit v_2 zusammen (Abb. 4.25.).

Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

Eine Gerade g, die nicht mit einer Ebene E inzidiert und auch nicht parallel zu ihr liegt, muß die Ebene in einem Punkt D durchstoßen. Dieser Punkt wird ermittelt, indem man durch g eine **Hilfsebene** V legt, die senkrecht auf π_1 (oder π_2) steht, und zunächst die Schnittgerade s von E und V konstruiert. Dann muß D offensichtlich ein Punkt von s sein (Abb. 4.26.).

Abb. 4.26.



Erläuterung der Konstruktion: Zum Zeichnen der Hilfsebene V dient **Satz 9**, zur Konstruktion von s dienen **Satz 12** und **Satz 13**. Bei der hier verwendeten Lage von $V \perp \pi_1$ entsteht von D zunächst der Aufriß D''. Durch die Ordnungslinie ergibt sich dann D'.

Das hier gezeigte **Hilfsebenenverfahren** ist eines der wichtigsten Konstruktionsverfahren in der darstellenden Geometrie, besonders für das Grundriß-Aufriß-Verfahren.

Senkrechte auf einer Ebene

Definition: Unter einer Senkrechten auf einer Ebene E (einem Lot auf eine Ebene) versteht man eine Gerade g, die mit jeder durch ihren Durchstoßpunkt D verlaufenden Geraden dieser Ebene einen rechten Winkel bildet. Zur Gewährleistung des senkrechten Verlaufs von g zu E genügt der Nachweis, daß g auf zwei verschiedenen Geraden des durch D in E bestimmten Geradenbüschels senkrecht steht.

Satz 14: Grundriß und Aufriß einer Geraden g, die senkrecht auf einer Ebene E steht, verlaufen senkrecht zu den entsprechenden Spuren dieser Ebene:
$g' \perp e_1$; $g'' \perp e_2$.

Beweis für den Grundriß: Die Gerade g bildet auch mit der durch D verlaufenden Höhenlinie h einen rechten Winkel. Nach **Satz 4** gilt dann $g' \perp h'$ und infolge **Satz 6a** auch $g' \perp s$, w. z. b. w.

Dadurch ist die Richtung der Risse einer Senkrechten zu einer Ebene in einem ihrer Punkte bzw. eines Lotes auf eine Ebene von einem außerhalb gelegenen Punkt durch die Spuren der Ebene festgelegt.

Aufgaben

1. Beweisen Sie den Satz: Parallelen Ebenen sind im Zweitafelbild parallele Grundrißspuren und parallele Aufrißspuren zugeordnet!
2. Eine beliebige Ebene wird mit einer zweiten zum Schnitt gebracht, die **a)** parallel zu π_1, **b)** parallel zu π_2 verläuft. Zeichnen Sie für beide Fälle das Zweitafelbild, und konstruieren Sie jeweils Grund- und Aufriß der Schnittgeraden! Fassen Sie das Ergebnis auch in Worte!

3. Gegeben sind eine Ebene und eine inzidierende Gerade g, die nicht Hauptlinie ist. Es sollen im Grundriß-Aufriß-Bild die Spuren einer zweiten Ebene konstruiert werden, die die erste in g schneidet und außerdem **a)** beliebig, **b)** parallel zur Rißachse verläuft.
Anleitung: Wo müssen die Spurpunkte von g liegen?

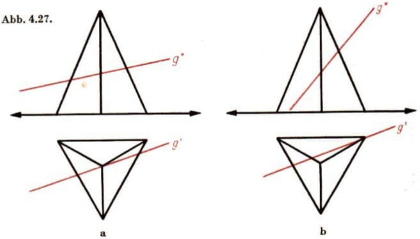
4. Gegeben sind Grundriß und Aufriß einer beliebigen Geraden g. Es sollen die Spuren einer Ebene konstruiert werden, die senkrecht auf g steht und die außerdem durch einen gegebenen Punkt P verläuft, der **a)** auf der Rißachse, **b)** auf g, **c)** beliebig im Raum liegt. Bei **a)** und **c)** sind auch die Durchstoßpunkte von g durch die Ebene zu konstruieren.

5. **Satz 14** läßt sich auch wie folgt aussprechen: Steht eine Gerade g senkrecht auf einer Ebene E, so verläuft g' senkrecht zum Grundriß jeder beliebigen Höhenlinie, g'' senkrecht zum Aufriß jeder beliebigen Frontlinie dieser Ebene.
Beweisen Sie diesen Satz!

6. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch seinen Grundriß und seinen Aufriß. In A soll die Senkrechte auf der Dreiecksebene errichtet und im Grundriß-Aufriß-Bild konstruiert werden.
Anleitung: Statt die Spurgeraden der Dreiecksebene zu konstruieren und dann nach **Satz 14** die Risse der Senkrechten zu zeichnen, können Sie nach dem Satz in Aufgabe **5** auch die beiden Hauptlinien durch A zu Hilfe nehmen. Der Aufriß h'' der Höhenlinie h verläuft durch A'' parallel zur Rißachse und schneidet die Gegenseite $B''C''$ bzw. deren Verlängerung in einem Punkt X''. Der zugehörige Grundriß X' (Ordnungslinie von X'' nach $B'C'$) legt $A'X' = h'$ fest. Senkrecht dazu verläuft durch A' der Grundriß der gesuchten Senkrechten. Entsprechend läßt sich mit Hilfe der Frontlinie der Aufriß der Senkrechten durch A'' konstruieren.

7. Gegeben sind eine Ebene E durch ihre Spuren und eine beliebige Gerade g.
   a) Die Risse des Durchstoßpunktes von g durch E sind einmal mittels einer Hilfsebene senkrecht zu π_1 und zweitens mittels einer Hilfsebene senkrecht zu π_2 zu konstruieren (Zeichenkontrolle).
   b) Im Durchstoßpunkt ist die Senkrechte auf E zu konstruieren.

Abb. 4.27.



8. Konstruieren Sie die Durchstoßpunkte einer Geraden g durch eine dreiseitige Pyramide! Wählen Sie ähnliche Lagen, wie sie in den Abbildungen 4.27. a und b angenommen wurden!

4.3. Die wahre Größe und Gestalt von ebenen Figuren

Ebene Figuren (Strecken, Winkel, Vielecke ...) ergeben bei senkrechter Parallelprojektion genau dann einen Riß in wahrer Größe und Gestalt, wenn sie parallel zu oder in der Rißtafel liegen. Ist das bei einer ebenen Figur nicht der Fall, muß sie durch Drehen oder Umlegen (Umklappen) in eine solche Lage gebracht werden, wenn die wahre Größe und Gestalt festgestellt werden soll. Das geschieht in der

Weise, daß die Ebene, mit der die Figur inzidiert, um eine ihrer Spurparallelen gedreht oder um ihre Spur umgelegt wird.

Satz 15: Wird eine Ebene um ihre Spur oder um eine ihrer Spurparallelen gedreht, so wandern alle Ebenenpunkte, die nicht auf der Drehachse liegen, auf Kreisen, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse liegen. Die Orthogonalrisse dieser Kreise sind senkrecht zum Riß der Drehachse verlaufende Strecken.

Strecke, Dreieck, Winkel in Eintafelprojektion

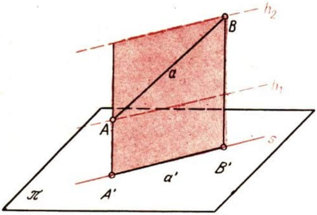


Abb. 4.28. a

Um die wahre Größe einer Strecke a zu bestimmen, die durch ihren Orthogonalriß und einen Höhenmaßstab oder die Koten ihrer Endpunkte gegeben ist, legt man durch sie eine Hilfsebene senkrecht zur Rißtafel π. Dann legt man diese Hilfsebene entweder um ihre Spur s um (Abb. 4.28. a) oder dreht sie um die durch A verlaufende Höhenlinie h_1 (Abb. 4.28. b) bzw. um die durch B verlaufende Höhenlinie h_2 (Abb. 4.28. c), bis sie parallel zu π liegt. Die Radien der Drehkreise der Streckenendpunkte A und B ergeben sich aus dem Höhenmaßstab bzw. aus den Koten.

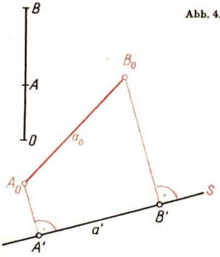


Abb. 4.28. b

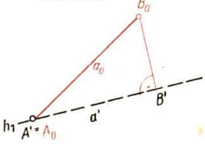
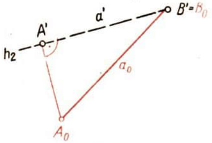


Abb. 4.28. c



Um die wahre Größe und Gestalt eines Dreiecks zu konstruieren, wird die Ebene des Dreiecks um ihre Spur umgelegt.
Falls diese nicht gegeben ist, muß sie zunächst mit Hilfe der Spurpunkte von zwei Dreieckseiten konstruiert werden. Diese Spurpunkte ergeben sich aus der Umlegung der Projektionsebenen dieser Dreieckseiten. Die Radien der Drehkreise für die Eckpunkte findet man als Hypotenusen der zugehörigen Stützdreiecke (Abb. 4.29.).
Die wahre Größe eines Winkels wird konstruiert, indem der Winkel durch die Spurpunkte seiner Schenkel zu einem Dreieck ergänzt wird, mit dem man dann wie oben verfährt (Abb. 4.30.).

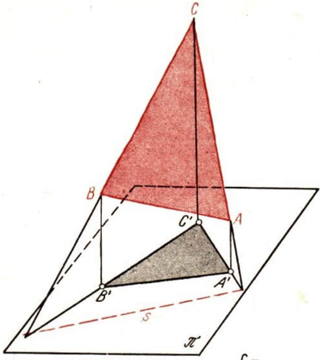


Abb. 4.29. a

Abb. 4.29. b

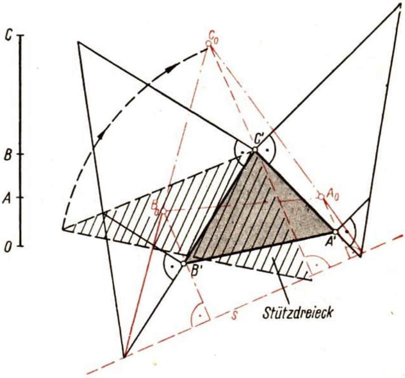


Abb. 4.30. a

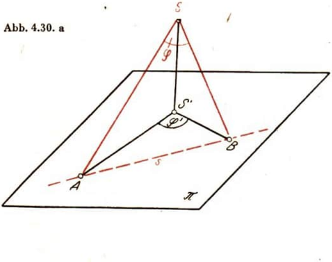
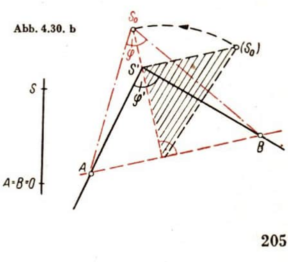


Abb. 4.30. b



Strecke, Dreieck, Winkel im Zweitafelbild

Um die wahre Größe und Gestalt im Grundriß-Aufriß-Bild zu ermitteln, kann der beim Eintafelverfahren erarbeitete Weg (Drehung in Parallellage zur Rißtafel bzw. Umlegung in die Rißtafel) sowohl in bezug auf die Grundrißtafel als auch in bezug auf die Aufrißtafel durchgeführt werden:

Wahre Größe und Gestalt sollen erscheinen in der	Ebene wird	
	umgelegt um ihre	gedreht um eine ihrer
Grundrißtafel π_1	**Grundrißspur e_1**	**Höhenlinien h**
Aufrißtafel π_2	**Aufrißspur e_2**	**Frontlinien f**

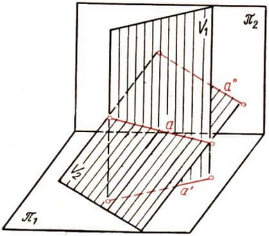


Abb. 4.31.

In der Praxis wird nur einer der Wege zur Konstruktion benutzt. Der andere kann als nützliche Zeichenkontrolle dienen, da natürlich in der Grundrißtafel und in der Aufrißtafel von ein und demselben Gebilde stets dieselbe wahre Größe und Gestalt entstehen muß.
Zur Konstruktion der wahren Größe einer Strecke *a* kann die Hilfsebene *V* (vgl. Eintafelprojektion) entweder senkrecht zur Grundrißtafel (V_1) oder senkrecht zur Aufrißtafel (V_2) gelegt werden (Abb. 4.31.). Jede von ihnen kann (vgl. Tabelle) in Parallellage zu π_1 oder zu π_2 gedreht bzw. in π_1 oder in π_2 umgelegt werden. Für V_1 ergeben sich als Drehachsen z. B. die durch

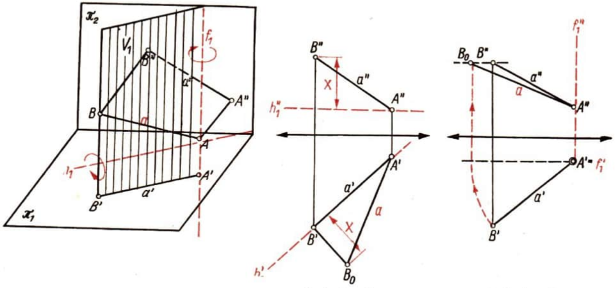


Abb. 4.32.

Drehachse: h_1
a erscheint in π_1

a

Drehachse: f_1
a erscheint in π_2

b

A verlaufende Höhenlinie h_1 für die Drehung in Parallellage zu π_1 und die Frontlinie f_1 durch A für die Drehung in Parallellage zu π_2. Danach ergeben sich die beiden Konstruktionen aus Abbildung 4.32. a und b.
Die entsprechenden Konstruktionen für V_2 werden in den Abbildungen 4.33. a und b dargestellt.

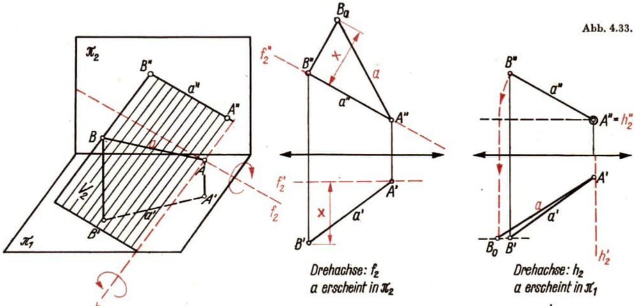


Abb. 4.33.

a b

Die Abbildung 4.34. zeigt die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt eines Dreiecks im Grundriß-Aufriß-Bild durch Drehung der Dreiecksebene um die Frontlinie f durch A in Parallellage zu π_2. Die Drehkreisradien für B und C ergeben sich aus den Stützdreiecken der Ebene in diesen Punkten.
Die wahre Größe des in Abbildung 4.35. durch Grundriß und Aufriß dargestellten Winkels φ wird durch Umlegen der Winkelebene um ihre Grundrißspur e_1 in die Grundrißtafel π_1 gefunden. Es ergibt sich e_1 aus den Grundrißspurpunkten der Winkelschenkel, der Drehkreisradius für den Scheitel S aus dem zugehörigen Stützdreieck der Winkelebene.

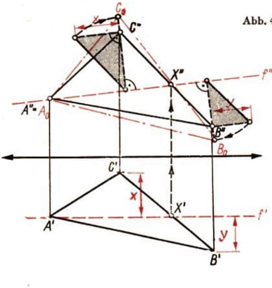


Abb. 4.34.

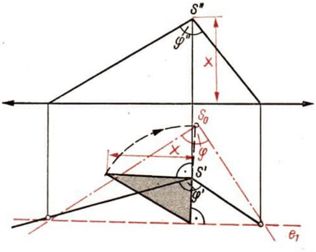


Abb. 4.35.

Neigungswinkel zweier Ebenen

Definition: Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht man den Winkel, der sich als Schnittfigur in einer dritten Ebene ergibt, die senkrecht zur Schnittgeraden der beiden ersten Ebenen verläuft.

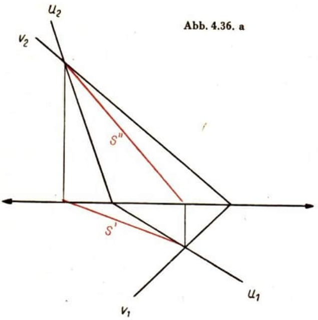


Abb. 4.36. a

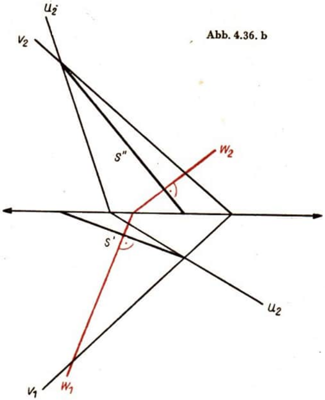


Abb. 4.36. b

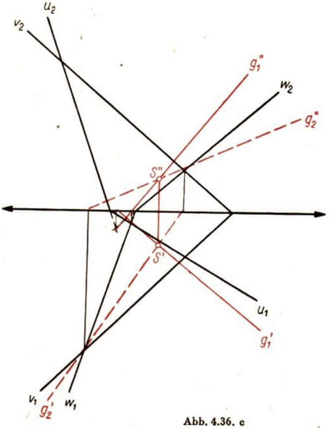


Abb. 4.36. c

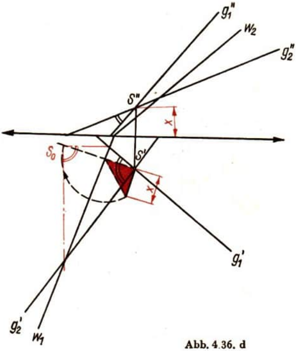


Abb. 4.36. d

Zur Konstruktion der wahren Größe des Neigungswinkels zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen U (u_1; u_2) und V (v_1; v_2) sind deshalb folgende Konstruktionsschritte erforderlich:

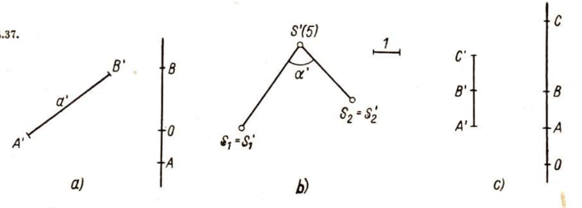
1. Konstruktion der Schnittgeraden s (vgl. **Satz 12**);
2. Konstruktion der Spurgeraden w_1, w_2 einer dritten Ebene W, die senkrecht zu s verläuft (vgl. **Satz 14**);
3. Konstruktion der Schnittgeraden g_1 und g_2 von W mit U bzw. V (vgl. **Satz 12**);
4. Konstruktion der wahren Größe des von g_1 und g_2 gebildeten Neigungswinkels von U und V durch Umlegen der Ebene W um w_1 in π_1.

Die einzelnen Schritte der Konstruktion werden in den Abbildungen 4.36. a bis d dargestellt. Zeichnen Sie zum vollen Verständnis alles in einem einzigen Bild!

Aufgaben

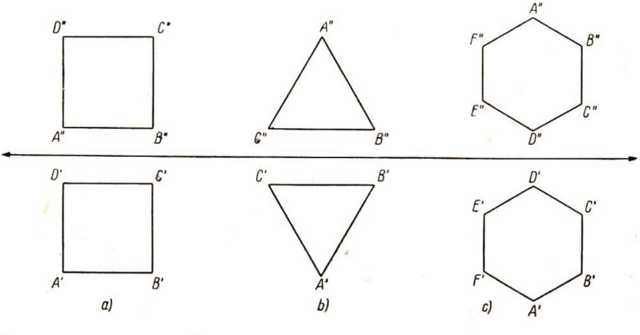
1. Konstruieren Sie die wahre Größe der in den Abbildungen 4.37. a bis c in Eintafelprojektion dargestellten Gebilde!

Abb. 4.37.



2. Wie können Sie die wahre Größe einer Strecke ermitteln, die senkrecht zur Rißtafel steht, wenn außer dem Grundriß **a)** ein Höhenmaßstab, **b)** 2 Koten, **c)** der Aufriß gegeben ist? Zeichnen Sie die Darstellungen der Strecke!

Abb. 4.38.

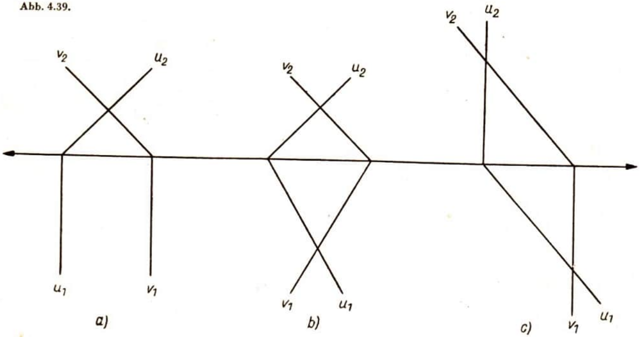


3. Eine Strecke von 8 cm Länge ist unter 60° gegen die Grundrißtafel geneigt. Zeichnen Sie den Grundriß und **a)** einen Höhenmaßstab, **b)** Koten, **c)** den Aufriß!

4. Ein gleichseitiges Dreieck von 6 cm Seitenlänge liegt mit einer Seite in der Grundrißtafel π_1. Seine Ebene ist unter 45° gegen π_1 geneigt. Zeichnen Sie den Grundriß und **a)** einen Höhenmaßstab, **b)** die Koten, **c)** den Aufriß!

5. Konstruieren Sie die in den Abbildungen 4.38. a bis c durch ihre Grundriß-Aufriß-Bilder gegebenen ebenen Figuren in ihrer wahren Größe und Gestalt!

Abb. 4.39.



6. Ein Winkel von 90° liegt unter 45° gegen die Rißtafeln geneigt mit seinem Scheitel in der Aufrißtafel, so daß seine Schenkel gleiche Neigungen gegen diese Tafel haben. Zeichnen Sie das Grundriß-Aufriß-Bild!

7. Bestimmen Sie für die in den Abbildungen 4.39. a bis c durch ihre Grundriß- und Aufrißspuren gegebenen Ebenen jeweils den Neigungswinkel!

4.4. Ebene Schnitte durch ebenflächig begrenzte Körper im Zweitafelbild

Konstruktion der Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt

Zur Darstellung im Grundriß-Aufriß-Bild bringt man die Körper meist in einfache Lage zu den Rißtafeln, d. h. so, daß möglichst viele Kanten und Flächen senkrecht oder parallel zu den Rißtafeln verlaufen. Entsprechend wird die Konstruktion der Figuren, die sich beim Schnitt des Körpers durch eine Ebene ergeben („ebene Schnitte"), dann besonders einfach, wenn die Schnittebene senkrecht zu einer Rißtafel, z. B. zur Aufrißtafel, verläuft. Dazu muß aber oft der Körper aus seiner einfachen Lage zu den Rißtafeln herausgedreht werden. Um genaue Aussagen über die

Schnittfigur machen zu können, wird die Schnittebene grundsätzlich mitsamt der Schnittfigur um ihre Grundrißspur in die Grundrißebene umgelegt.

Beispiel:

Ein Würfel soll von einer Ebene geschnitten werden, die unter 45° zur Grundfläche geneigt durch die Mittelpunkte zweier benachbarter Grundkanten verläuft.

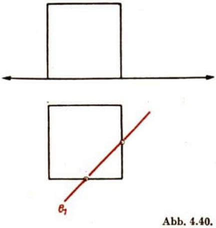


Abb. 4.40.

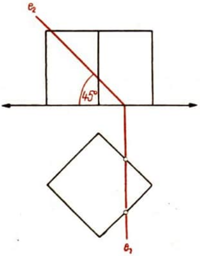


Abb. 4.41.

Lösung: Bei einfacher Lage des Würfels würde sich die Schnittebene in allgemeiner Lage befinden. Außerdem wäre es schwierig, die gewünschte Neigung bei der Lage ihrer Spuren zu berücksichtigen (Abb. 4.40.).
Deshalb dreht man den Würfel um 45° um seine lotrechte Symmetrieachse in Übereckstellung (Abb. 4.41.). Dann verläuft die Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel, und ihre Neigung wird unmittelbar an der Aufrißspur sichtbar. Die Aufrisse der Eckpunkte der Schnittfigur *UVWXYZ* inzidieren mit der Aufrißspur der Schnittebene, und die Ordnungslinien ergeben die zugehörigen Grundrisse (Abb. 4.42.).

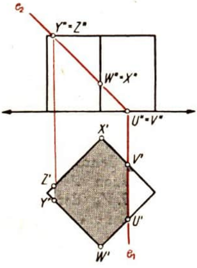


Abb. 4.42.

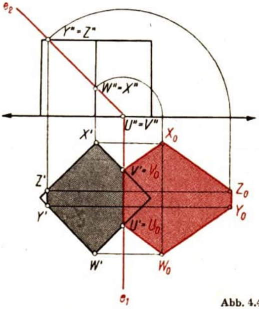


Abb. 4.43.

Beim Umlegen der Schnittebene um ihre Grundrißspur wandern alle Ebenenpunkte, also auch die Eckpunkte der Schnittfigur, auf konzentrischen Kreisen, deren Ebenen parallel zur Aufrißtafel liegen. Dadurch werden diese Kreise im Aufriß in wahrer Größe und Gestalt sichtbar und sind leicht zu konstruieren. Die Ordnungslinien vom Grundriß her, senkrecht zur Drehachse e_1, legen die umgelegten Punkte endgültig fest, ähnlich wie es bei der Konstruktion des Kreuzrisses aus Grundriß und Aufriß geschieht (Abb. 4.43.).

Affinität

Aufgabe:

Es soll die ebene Schnittfigur eines dreiseitigen Prismas in wahrer Größe und Gestalt konstruiert werden, ohne daß sämtliche Eckpunkte der Schnittfigur einzeln umgelegt werden.

Abb. 4.44. a

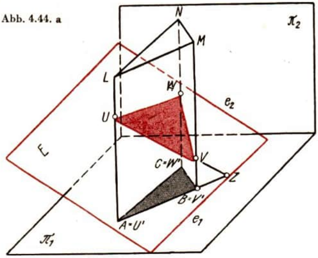
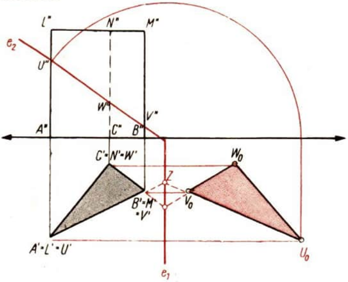


Abb. 4.44. b



Die Konstruktion zur Lösung der Aufgabe ist aus den Abbildungen 4.44. a und b ersichtlich.

Die Schnittfigur UVW kann man sich auf zweierlei Weise entstanden denken (Abb. 4.44. a):

1) als Dreieck, indem die Eckpunkte U, V und W als Durchstoßpunkte der Prismenkanten $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ bzw. $\overline{CN}$ durch die Schnittebene E aufgefaßt werden;

2) als Dreiseit, indem die Seiten $\overline{UV}$, $\overline{VW}$ und $\overline{WU}$ als Teile der Schnittgeraden der Prismenflächen $ABML$, $BCNM$ bzw. $CALN$ mit der Schnittebene E angesehen werden.

Die zweite Auffassung führt zu folgender Überlegung. Wird z. B. die Schnittgerade der durch $ABML$ bestimmten Fläche mit E betrachtet, so führt sie auf e_1 zu einem Punkt Z, durch den auch die Verlängerung der Grundrißseite $\overline{U'V'}$ sowie die Verlängerung der Schnittfigurseite $\overline{UV}$, damit aber auch die Verlängerung der Seite $\overline{U_0V_0}$ der umgelegten Schnittfigur (Abb. 4.44. b) verlaufen müssen. Auch für die anderen Seiten $\overline{V'W'}$ und $\overline{V_0W_0}$ bzw. $\overline{W'U'}$ und $\overline{W_0U_0}$ kann man derartige Punkte auf e_1 ermitteln.

Satz 16: Entsprechende Seiten des Grundrisses der Schnittfigur und der umgelegten Schnittfigur schneiden einander auf der Grundrißspur e_1 der Schnittebene E.

Damit ist es möglich, die umgelegte Schnittfigur aus deren Grundriß zu konstruieren, sobald nur ein Punkt, z. B. U_0, in der bisherigen Weise durch Umlegen ermittelt wurde (Abb. 4.44. b). Durch diese Beziehung ist eine geometrische Verwandtschaft zwischen Grundriß und Umlegung der Schnittfigur festgelegt.

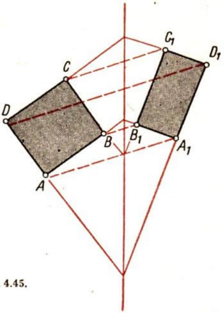


Abb. 4.45.

Definition:

Zwei ebene Figuren heißen **perspektiv-affin** verwandt (Abb. 4.45.), wenn

a) entsprechende Seiten (oder ihre Verlängerungen) einander auf ein und derselben Geraden (der **Affinitätsachse**) schneiden,

b) die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte parallel zueinander verlaufen (**Affinitätsstrahlen**).

Da für Grundriß und Umlegung der Schnittfigur auch die Bedingung b) durch die Ordnungslinien senkrecht zu e_1 erfüllt ist, gilt der folgende Satz:

Satz 16a: Grundriß und Umlegung einer ebenen Schnittfigur sind perspektiv-affin verwandt. Die Affinitätsachse ist die Grundrißspur der Schnittebene E, die Affinitätsstrahlen sind die senkrecht zu e_1 verlaufenden Ordnungslinien.

Diese Eigenschaft erleichtert besonders bei vielflächigen Körpern die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Schnittfigur, oder sie kann zur Zeichenkontrolle dienen, wenn die Eckpunkte vorerst einzeln umgelegt wurden.

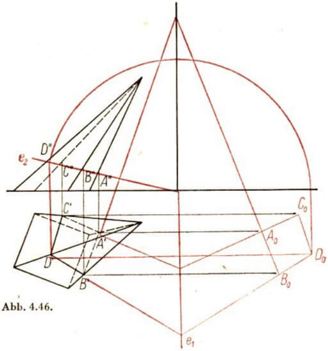


Abb. 4.46.

Beispiel:

Ebener Schnitt durch eine schiefe quadratische Pyramide (Abb. 4.46.).

Aufgaben

1. Legen Sie durch einen Würfel einen solchen ebenen Schnitt, daß **a)** ein Dreieck, **b)** ein Viereck als Schnittfigur entsteht! Kann auch ein n-Eck mit $n > 4$ entstehen? Konstruieren Sie jeweils die Schnittfiguren in wahrer Größe und Gestalt!
2. Zeichnen Sie das Grundriß-Aufriß-Bild **a)** eines Tetraeders, **b)** eines Oktaeders (Kantenlänge je 5 cm), und legen Sie solche ebenen Schnitte durch die Körper, daß eine Ecke mit der Schnittebene inzidiert! Konstruieren Sie jeweils die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!

3. Der Schnitt durch einen Quader mit einer unter 60° geneigten Ebene ist ein Quadrat. Konstruieren Sie den Grundriß des Quaders!
Anleitung: Das Grundriß-Aufriß-Bild ergibt sich durch Zurückdrehen der Schnittfigur aus der Umlegung.

4. Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide wird so geschnitten, daß die Grundrißspur der Schnittebene mit einer Pyramidengrundkante einen Winkel von 20° bildet, außerhalb der Grundfläche verläuft und die Ebene durch den Mittelpunkt der Höhe geht.

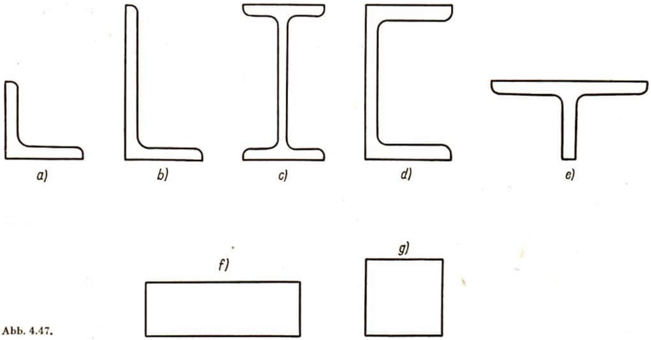


Abb. 4.47.

5. Durch die in den Abbildungen 4.47. a bis g im Querschnitt dargestellten Profilstähle werden unter 45° zur Längsausdehnung Schnitte geführt. Wie sehen die Schnittflächen aus?
Anleitung: Beachten Sie, daß es unbegrenzt viele Schnittmöglichkeiten gibt! Wählen Sie einfache Lagen der Schnittebene für Ihre Konstruktion! Von den Rundungen werde abgesehen.

6. Zeichnen Sie die Grundriß-Aufriß-Bilder der in den Abbildungen 4.48. a bis e in axonometrischer Darstellung wiedergegebenen und bemaßten Werkstücke!

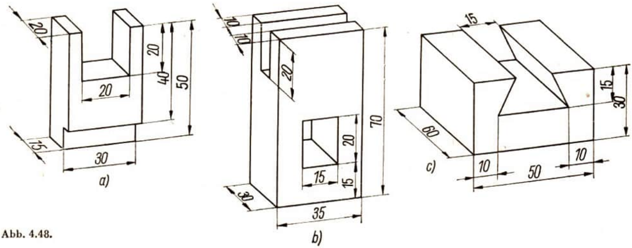


Abb. 4.48.

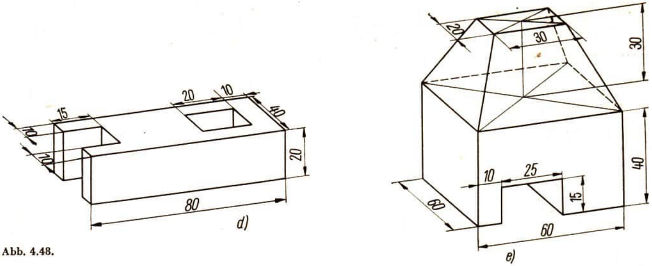


Abb. 4.48.

4.5. Schräge Parallelprojektion

Die schräge Parallelprojektion dient in erster Linie zur Herstellung anschaulicher Bilder. Das ist zwar auch mit Hilfe der senkrechten Parallelprojektion möglich, doch müssen dann die Gegenstände meist in allgemeine Lage zur Projektionsebene gebracht werden, so daß die Konstruktion relativ schwierig wird und besondere Konstruktionsverfahren (senkrechte Axonometrie, z. B. isometrische und standardisierte dimetrische Darstellung) erforderlich werden. Bei schräger Parallelprojektion erhält man hingegen auch bei einfacher Lage des Urbildes zur Rißtafel anschauliche Bilder, wodurch sich die Konstruktion sehr vereinfacht. Die entstehenden Bilder heißen **Schrägbilder oder Schrägrisse.**

Die Grundgesetze der schrägen Parallelprojektion

Satz 17: Das Bild jedes Punktes P ist wieder ein Punkt $\bar{P}$ (Abb. 4.49.). ($\bar{P}$ lies „P überstrichen“ oder „P quer“.)

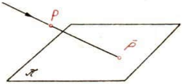


Abb. 4.49.

Satz 18: Das Bild $\bar{a}$ einer Strecke a ist ein Punkt, wenn die Strecke in Projektionsstrahlenrichtung liegt (Abb. 4.50. a), andernfalls ebenfalls eine Strecke (Abb. 4.50. b).

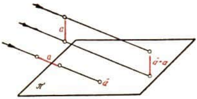


Abb. 4.50. a

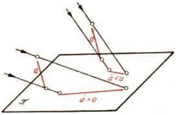


Abb. 4.50. b

Satz 18a: Es gilt: $\bar{a} = a$ bei Frontlage von a zur Rißtafel (Abb. 4.50. a),
$\bar{a} \gtrless a$ bei beliebiger Lage von a (Abb. 4.50. b).

$\bar{a} : a = q$ heißt das **Verkürzungsverhältnis** der betreffenden Strecke.

Man spricht auch dann von einer „Verkürzung", wenn $\bar{a} > a$, d. h. $q > 1$, also eigentlich eine „Verlängerung" vorliegt.

Satz 19: Das Bild $\bar{\alpha}$ eines Winkels α ist eine Gerade oder ein Strahl, wenn die Winkelebene in Projektionsstrahlenrichtung liegt, andernfalls wieder ein Winkel (Abb. 4.51., Abb. 4.52.).

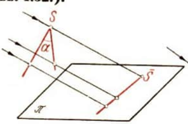


Abb. 4.51. a

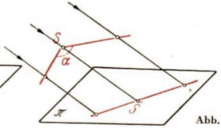
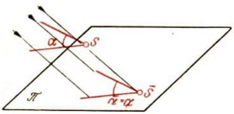


Abb. 4.51. b

Satz 19a: Es gilt: $\bar{\alpha} = \alpha$ bei Frontlage von α (Abb. 4.52. a),
$\bar{\alpha} \gtrless \alpha$ bei beliebiger Lage von α mit $0° < \bar{\alpha} < 180°$ (Abb 4.52. b).

Falls $\bar{\alpha} \neq \alpha$, spricht man von einer **„Verzerrung"** des Urbilds.

Abb. 4.52. a



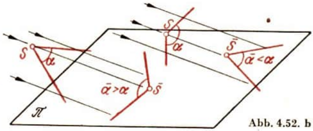


Abb. 4.52. b

Satz 20: Das Bild einer ebenen Figur ist eine Strecke, wenn die Ebene der Figur in Projektionsstrahlenrichtung liegt, andernfalls wieder eine ebene Figur (Abb. 4.53. und 4.54.).

Satz 20a: Das Bild ist dem Urbild kongruent bei Frontlage des Urbilds, andernfalls hat es eine andere Größe und Gestalt als das Urbild (Verkürzung und Verzerrung) (Abb. 4.54.).

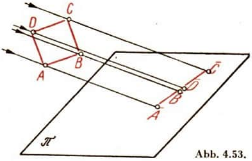


Abb. 4.53.

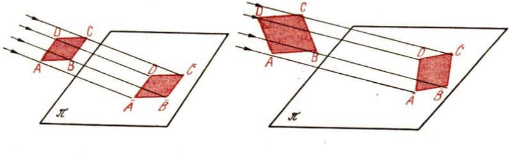


Abb. 4.54.

Satz 21: Das Bild einer Geraden ist ein Punkt, wenn diese Gerade ein Projektionsstrahl ist, andernfalls wieder eine Gerade. Der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Rißtafel heißt Spurpunkt (Abb. 4.55.).

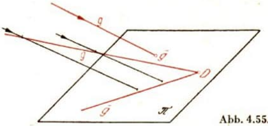


Abb. 4.55.

Satz 22: Das Bild einer Ebene ist eine Gerade, wenn die Ebene in Projektionsstrahlenrichtung liegt, andernfalls die gesamte Rißtafel π. Die Schnittgerade der Ebene mit der Rißtafel heißt Spurgerade; sie dient bei allgemeiner Lage der Ebene zur Darstellung der Ebene im Schrägbild (Abb. 4.56.).

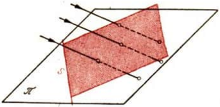


Abb. 4.56.

Satz 23: Ergeben zwei parallele Geraden wieder zwei getrennte Geraden als Bilder, so verlaufen diese ebenfalls parallel zueinander (Abb. 4.57.).
(Erhaltung der Parallelität, eine grundlegende Eigenschaft jeder Parallelprojektion.)

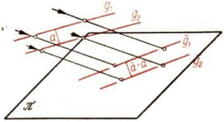


Abb. 4.57.

Satz 23a: Der Abstand der parallelen Geraden erscheint im Bild in wahrer Größe oder verkürzt (vergrößert oder verkleinert), je nachdem, ob die durch die Urbilder festgelegte Ebene sich in Frontlage zur Rißtafel befindet (Abb. 4.57.) oder nicht (Abb. 4.58.).

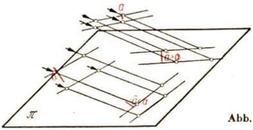


Abb. 4.58.

Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich die Richtigkeit der **Sätze 17** bis **23a** an einem Modell! Verwenden Sie dazu eine Papptafel mit schräg einfallendem Sonnenlicht als Rißtafel; einen Stecknadelkopf o. ä. als Punkt; einen Bleistift, ein Drahtstück o. ä. als Strecke; einen Zirkel als Winkel; aus Pappe geschnittene Figuren (Dreieck, Viereck, ...); einen längeren Stab als Gerade; ein Heft als Ebene; Linealkasten als parallele Geraden!

2. Warum muß für die Gültigkeit von **Satz 23** ausdrücklich gefordert werden, daß wieder zwei getrennte Geraden als Bilder entstehen? Welche anderen Fälle sind auch noch möglich? Formulieren Sie für diese Fälle einen weiteren Satz!

3. Beweisen Sie die **Sätze**

   a) 18a, b) 19a, c) 20a, d) 23, e) 23a!

   Anleitungen: zu a) Was für Figuren bilden die Projektionsstrahlen durch die Streckenendpunkte, das Urbild und das Bild bei verschiedenen Lagen des Urbildes und verschiedenen Einfallsrichtungen der Projektionsstrahlen zur Rißtafel?

zu b) Die Projektionsstrahlen durch die Punkte der Winkelschenkel bilden zwei einander schneidende Ebenen;
zu c) Die Projektionsstrahlen durch die Punkte der Umrandung der Figur umgrenzen einen prismatischen Raum;
zu d) und e) Wie verlaufen die Ebenen, die die Projektionsstrahlen durch die Punkte der beiden Geraden bilden?

4. Satz: Ein Punkt der Rißtafel kann das Bild eines Punktes, einer Strecke oder einer Geraden sein.
   a) Formulieren Sie entsprechende Sätze für die übrigen Gebilde der Rißtafel (Strecke, Winkel, Figur, Gerade)!
   b) Machen Sie eine Aussage über die Eineindeutigkeit der Zuordnung von Urbildern und Bildern bei schräger Parallelprojektion!
5. Die senkrechte Parallelprojektion ist ein Sonderfall der schrägen. Folglich müßten die **Sätze 17** bis **23a** auch für die senkrechte Parallelprojektion gelten.
   a) Überprüfen Sie das! Achten Sie dabei besonders auf die **Sätze 18a** und **23a**!
   b) Begründen Sie etwaige Abweichungen!
   c) Bei der Orthogonalprojektion werden die **Sätze 18, 19, 20, 21, 22** meist unter Verwendung des Fachausdrucks *Tiefenlage* an Stelle von *Projektionsstrahlenrichtung* ausgesprochen. Begründen Sie das! Könnte man auch umgekehrt bei den Aussagen über die schräge Parallelprojektion den Ausdruck *Projektionsstrahlenrichtung* durch *Tiefenlage* ersetzen?

Die Bestimmungsgrößen q und α bei schräger Parallelprojektion

Stecken Sie senkrecht auf einen vertikal vor Ihnen stehenden Buchdeckel als Projektionstafel eine Stecknadel als Tiefenstrecke, und verfolgen Sie bei verschiedenem Lichtstrahleneinfall (Draht, Bleistift) Lage und Größe des entstehenden Projektionsgebildes! Nehmen Sie zur besseren Orientierung im Fußpunkt der Tiefenstrecke eine waagerechte Hilfsgerade (Achse) an (Abb. 4.59.)!

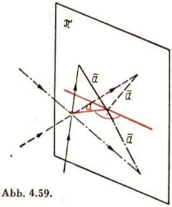


Abb. 4.59.

Bei schräger Parallelprojektion nimmt man (im Gegensatz zur senkrechten Eintafelprojektion) die Rißtafel π lotrecht vor dem Betrachter und den Projektionsstrahleneinfall schräg von vorn an. Zur eindeutigen Festlegung der Projektionsstrahleneinfallsrichtung sind zwei Angaben nötig:

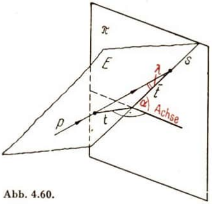


Abb. 4.60.

a) der Neigungswinkel λ der Projektionsstrahlen gegen die Rißtafel π, gemessen in der Ebene E, die durch den Projektionsstrahl p senkrecht zu π verläuft;
b) der Winkel α der Spur s von E in π gegen eine in π willkürlich angenommene waagerechte Achse, gemessen im positiven Drehsinn (Abb. 4.60.).

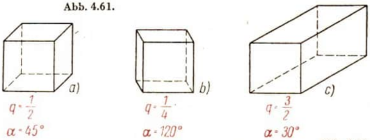
Statt λ wird gewöhnlich $\cot \lambda = \frac{\bar{t}}{t} = q$ angegeben, wobei t eine beliebige Tiefenstrecke und $\bar{t}$ ihr durch die Projektionsstrahlen erzeugter Schrägriß ist. Diese Größe q

heißt das **Verkürzungsverhältnis** und α der **Verzerrungswinkel** der betreffenden, dem Schrägriß zugrunde liegenden schrägen Parallelprojektion. Diese beiden Bestimmungsgrößen müssen jedem Schrägbild beigefügt sein, da andererseits eine eindeutige Aussage über den dargestellten Gegenstand nicht gemacht werden kann.

Beispiel:

Die Körper (a), (b), (c) in der Abbildung 4.61. stellen Würfel dar. Die Abbildung 4.62. stellt dar

Abb. 4.61.



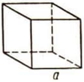
für $q = \frac{2}{3}$; $\alpha = 150°$ einen Würfel,

für $q = 2$; $\alpha = 150°$ einen Quader mit den Grundkanten a und $\frac{a}{3}$,

für $q = \frac{1}{12}$; $\alpha = 150°$ einen liegenden Balken mit quadratischem Querschnitt; Länge $l = 8\,a$,

für $q = 1$; $\alpha = 30°$ ein gerades Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche; Seiten a und $\frac{4}{3}\,a$; $\beta = 150°$ an der linken unteren Ecke.

Abb. 4.62.



Satz 24: Zu jeder beliebigen Kombination von q und α ($0 < q < \infty$; $0° \leqq \alpha < 360°$) gibt es genau eine Projektionsstrahlenrichtung einer schrägen Parallelprojektion.

Von den unbegrenzt vielen Möglichkeiten der schrägen Parallelprojektion werden in der Praxis zwei bevorzugt:

Fachbezeichnung	q	α	Wichtigste Anwendungen
Kavalierperspektive	$\frac{1}{2}$	45°	Mathematik; Buchillustration
Schrägbild mit kongruentem Grundriß	1	90°	Innenarchitektur

Ebene Figuren in Kavalierperspektive; Affinität

Satz 25: Mit Hilfe von q und α kann zu jeder Tiefenstrecke t unmittelbar das Bild $\bar{t}$ nach Größe ($\bar{t} = q \cdot t$) und Richtung ($\sphericalangle\,[\bar{t};\ \text{Achse}] = \alpha$) gezeichnet werden.

Nach **Satz 18a** werden Frontstrecken in wahrer Größe und Richtung abgebildet ($\bar{f} = f$) (Abb. 4.63.).

Alle anderen Strecken erfahren im Schrägbild Verkürzungen und Verzerrungen, die nicht unmittelbar aus q und α erschlossen werden können.

Deshalb werden die im Schrägriß darzustellenden Figuren grundsätzlich in Tiefenlage zur Rißtafel, d. h. waagerecht gelegt, und zwar so, daß möglichst viele Strecken der

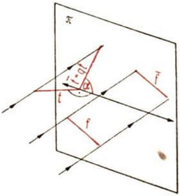


Abb. 4.63.

Figuren als Front- oder Tiefenstrecken verlaufen („einfache Lage“). Die Achse legt man möglichst durch eine Seite oder eine markante Transversale der Figur. Die darzustellende Figur wird, in die Rißtafel umgelegt, als Vorlage mitgezeichnet.

Abb. 4.64.

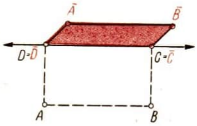
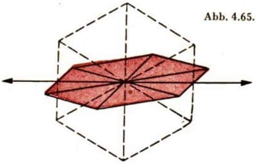


Abb. 4.65.



In den Abbildungen 4.64. und 4.65. wurden als Beispiele für $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) ein Rechteck bzw. ein Sechseck dargestellt.

Sind einzelne Punkte der Figur nicht durch Front- oder Tiefenstrecken miteinander verbunden, müssen sie durch **Hilfslote** an die Achse angeschlossen werden. Dieses Verfahren wurde zur Darstellung des Dreiecks in Abbildung 4.66. und des regelmäßigen Fünfecks in Abbildung 4.67. für $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) verwendet.

Abb. 4.66.

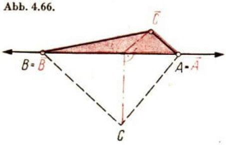
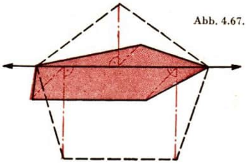


Abb. 4.67.



Satz 26: Entsprechende Punkte der Vorlage und des Schrägbildes können durch untereinander parallele Geraden verbunden werden. Entsprechende Strecken bzw. ihre Verlängerungen schneiden einander auf der Achse.

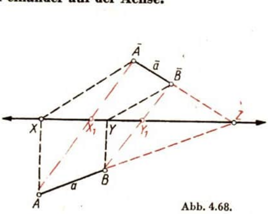


Abb. 4.68.

Beweis (Abb. 4.68.):

1. Behauptung: $\bar{A}\,A \parallel \bar{B}\,B$

1. $\bar{A}\,X : A\,X = q = \bar{B}\,Y : B\,Y$

   $\sphericalangle\, \bar{A}\,X\,A = 90° + \alpha = \sphericalangle\, \bar{B}\,Y\,B$

   $\triangle\, \bar{A}\,X\,A \sim \triangle\, \bar{B}\,Y\,B$

   $\sphericalangle\, X\,\bar{A}\,X_1 = \sphericalangle\, Y\,\bar{B}\,Y_1$

   ---

2. $\sphericalangle\, X\,\bar{A}\,X_1 = \sphericalangle\, Y\,\bar{B}\,Y_1$

   $\sphericalangle\, \bar{A}\,X\,X_1 = \alpha = \sphericalangle\, \bar{B}\,Y\,Y_1$

   $\triangle\, \bar{A}\,X\,X_1 \sim \triangle\, \bar{B}\,Y\,Y_1$

   $\sphericalangle\, X\,X_1\,\bar{A} = \sphericalangle\, Y\,Y_1\,\bar{B}$

   $\bar{A}\,X_1 \parallel \bar{B}\,Y_1$ oder $\bar{A}A \parallel \bar{B}B$, w. z. b. w.

2. Behauptung: Die Verlängerungen von $\bar{A}\,\bar{B}$, $X\,Y$ und $A\,B$ schneiden einander in einem Punkt Z.

Aus	$\triangle\, \bar{A}\,X\,A \sim \triangle\, \bar{B}\,Y\,B$
und	$\bar{A}\,A \parallel \bar{B}\,B$
folgt, daß	$\triangle\, \bar{A}\,X\,A$ und $\triangle\, \bar{B}\,Y\,B$ in Ähnlichkeitslage
und	$\bar{A}\,\bar{B}$, $X\,Y$, $A\,B$ auf Ähnlichkeitsstrahlen liegen, die einander im Ähnlichkeitspunkt Z schneiden, w. z. b. w.

Daraus ergibt sich:

Satz 26a: Vorlage und Schrägbild sind affin verwandt; die Achse der Projektion ist die Affinitätsachse.

Infolgedessen läßt sich die Schrägbildkonstruktion aus der Vorlage vereinfachen, indem nur für einen Punkt der Vorlage mit q und α der Schrägriß konstruiert wird und dann die übrigen Teile des Schrägbildes mit Hilfe der Affinität ermittelt werden. Dann ist es auch nicht nötig, die Figur in einfache Lage zur Rißtafel zu bringen. Nur die Tiefenlage muß beibehalten werden.

Als Beispiel für $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) wurde in Abbildung 4.69. ein Viereck in allgemeiner Lage dargestellt.

Aufgaben

1. Wie groß ist der Einfallswinkel λ der Projektionsstrahlen
   a) für das Verkürzungsverhältnis $q = \frac{1}{3}$;
   b) für $q = \frac{2}{3}$;
   c) für $q = 1$ (z. B. beim Schrägbild mit kongruentem Grundriß vorkommend);
   d) bei der Kavalierperspektive?
2. Der senkrechten Parallelprojektion als Sonderfall der schrägen kann ebenfalls ein Verkürzungsverhältnis zugeordnet werden.

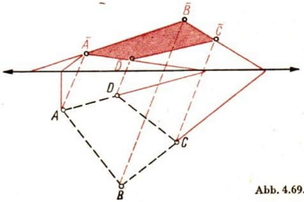


Abb. 4.69.

a) Wie groß ist der Projektionsstrahleneinfallswinkel λ?
b) Wie groß ist infolgedessen das Verkürzungsverhältnis q? Deuten Sie das Ergebnis anschaulich!
c) Was ist infolgedessen über den Verzerrungswinkel α zu sagen?

3. Konstruieren Sie jeweils den Schrägriß eines Quadrates, wenn die folgenden Verkürzungsverhältnisse und Verzerrungswinkel gegeben sind!

a) $q = \frac{1}{3}$; $\alpha = 30°$ **b)** $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 30°$ **c)** $q = \frac{2}{3}$; $\alpha = 30°$
d) $q = \frac{1}{3}$; $\alpha = 60°$ **e)** $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60°$ **f)** $q = \frac{2}{3}$; $\alpha = 60°$
g) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive)
h) $q = 1$; $\alpha = 90°$ (Schrägbild mit kongruentem Grundriß)
i) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 135°$ **k)** $q = \frac{1}{3}$; $\alpha = 150°$!

4. Gegeben ist ein Rhombus mit dem spitzen Winkel 45° als Schrägriß. Welches Urbild entspricht ihm für die folgenden Verkürzungsverhältnisse und Verzerrungswinkel?

a) $\alpha = 45°$; $q = 1$ **b)** $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ (Kavalierperspektive)
c) $\alpha = 45°$; $q = 2$ **d)** $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{3}$ **e)** $\alpha = 60°$; $q = \frac{2}{3}$
f) $\alpha = 135°$; $q = 1$ **g)** $\alpha = 120°$; $q = \frac{2}{3}$

Anleitung: Die wahre Gestalt des Urbilds muß hierbei mit Hilfsloten ermittelt werden, die im Schrägbild unter dem Winkel α zur Achse verlaufen. Letztere müssen zunächst eingezeichnet werden.

5. Konstruieren Sie punktweise den Schrägriß in Kavalierperspektive für die folgenden Figuren!

a) Rechtwinkliges Dreieck; Seitenverhältnis 3:4:5; Rißachse in Richtung der Hypotenuse.
b) desgl.; Rißachse in Richtung der größeren Kathete.
c) desgl.; Rißachse in Richtung der kleineren Kathete.
d) Parallelogramm; Seitenverhältnis 1:2; spitzer Winkel 45° an der linken unteren Ecke; Rißachse parallel zur größeren Seite.
e) desgl.; Rißachse parallel zur kleineren Seite.
f) wie **d**, aber spitzer Winkel 45° an der rechten unteren Ecke.
g) wie **e**, aber spitzer Winkel 45° an der rechten unteren Ecke.
h) Regelmäßiges Sechseck; Rißachse parallel zu einer großen Diagonale.
i) desgl.; Rißachse parallel zu einer kleinen Diagonale.
k) desgl.; Rißachse beliebig (Allgemeine Lage der Figur).
l) Gleichseitiges Dreieck in einfacher Lage.
m) Regelmäßiges Fünfeck in einfacher Lage.
n) Regelmäßiges Achteck in einfacher Lage.
o) Regelmäßiges Zwölfeck in einfacher Lage.

6. Konstruieren Sie die Schrägrisse in Kavalierperspektive zu
a) Aufgabe **5k**; **b)** Aufgabe **5m**; **c)** Aufgabe **5n**; **d)** Aufgabe **5o**
nochmals unter Benutzung der Affinitätsstrahlen!

Räumliche Gebilde in Kavalierperspektive

Räumliche Gebilde (mathematische Körper, Werkstücke u. ä.) werden zur Darstellung in Kavalierperspektive in einfacher Lage so vor die Rißtafel gestellt, daß eine wichtige Fläche (Seitenfläche oder Schnittfläche) als „Grundfläche“ in Tiefenlage zur Rißtafel kommt. Von dieser wird zunächst der Schrägriß konstruiert. Von dort aus werden Senkrechte zu den übrigen Eckpunkten geführt. Da diese parallel zur Rißtafel verlaufen, erscheinen sie im Schrägbild in wahrer Größe.

Beispiel:

Quadratische Säule mit aufgesetzter Pyramide. (Höhe der Säule und Seitenkanten der Pyramide gleich doppelter Grundkante.)

Die Höhe h_p der Pyramide, die zur Konstruktion der Pyramidenspitze benötigt wird, wird aus einem Diagonalschnitt durch die Pyramide gefunden (Abb. 4.70.).

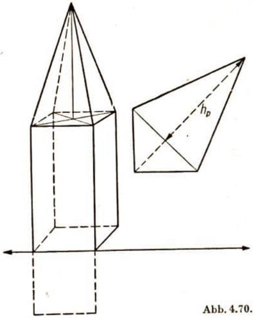


Abb. 4.70.

Räumliche Gebilde als Schrägbilder mit kongruentem Grundriß

Auch diese Schrägrisse werden aus dem (zum Urbild kongruenten) Schrägbild der Grundfläche entwickelt, von der aus Senkrechte zu den übrigen Eckpunkten führen. Da das Schrägbild zugleich das Original der Grundfläche wiedergibt, kann das Zeichnen einer besonderen Vorlage der Grundfläche entfallen. Die Körper müssen aber bei diesem Verfahren stets in allgemeine Lage zur Rißtafel gebracht werden, da bei einfacher Lage oft unanschauliche Bilder entstehen.

Beispiel (Abb. 4.71.):

Quader;
Kantenverhältnis 2:4:5

Aufgaben

1. Die Abbildungen 4.72. a und b zeigen denselben Körper in Kavalierperspektive (Abb. 4.72. a) und als Schrägbild mit kongruentem Grundriß (Abb. 4.72. b).

Einfache Lage Allgemeine Lage
zur Rißtafel

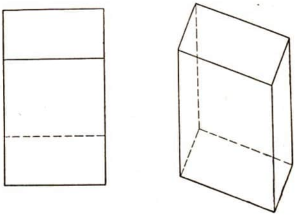
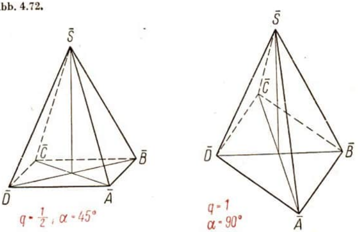


Abb. 4.71.

unanschauliches Bild anschauliches Bild

Abb. 4.72.



a) Welche Strecken der Schrägbilder zeigen unmittelbar natürliche Größe? Von welchen kann man durch Umrechnung mit dem Verkürzungsverhältnis q die natürliche Größe bestimmen? Für welche ist das durch Messung und Rechnung überhaupt nicht möglich?

b) Leiten Sie daraus eine Aussage über die Vorteile des Schrägbildes mit kongruentem Grundriß her!

2. Stellen Sie einen Schrägriß in Kavalierperspektive und ein Schrägbild mit kongruentem Grundriß einander gegenüber für

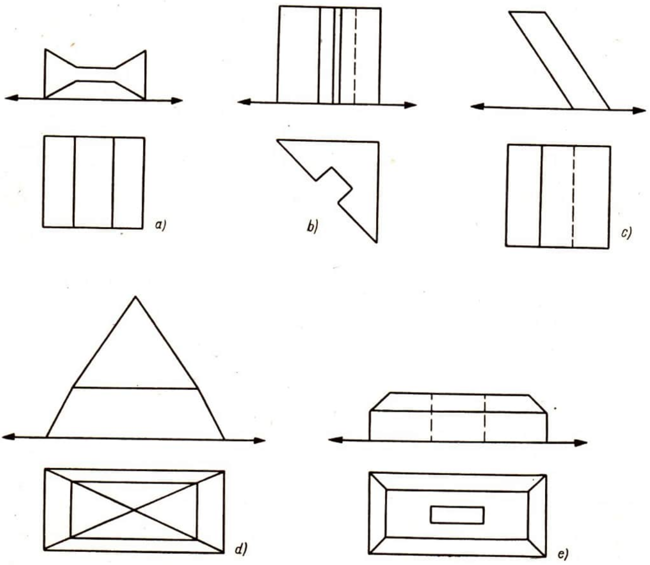
a) einen Würfel,
b) ein Tetraeder,
c) ein Oktaeder!

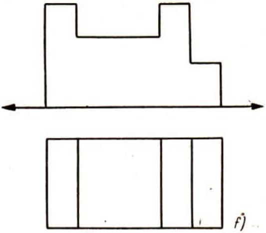
3. a) Folgern Sie aus den Bildern der Aufgabe 2, bei welchen Körperformen die Darstellung als Schrägbild mit kongruentem Grundriß ungünstig, bei welchen sie aber relativ günstig ist!

b) Begründen Sie daraus die Bevorzugung dieser Darstellung in der Architektur, speziell in der Innenarchitektur!

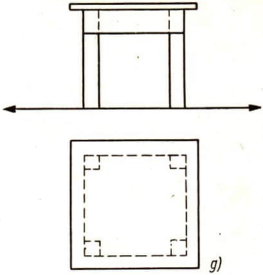
4. Entwerfen Sie Schrägbilder in Kavalierperspektive von den in den Abbildungen 4.73. a bis i in Grundriß und Aufriß dargestellten Gegenständen!

Abb. 4.73. a—i

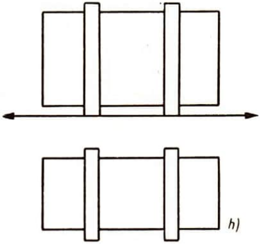




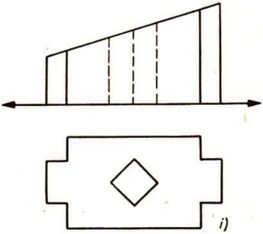
f)



g)



h)



i)

4.6. Zur Übung und Wiederholung

1. In der *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien, Ebenen und ganzen Körpern, durch Albrecht Dürer zusammengezogen und zu Nutz aller Kunstliebhabenden mit zugehörigen Figuren in Druck gebracht im Jahr MDXXV* finden sich im dritten Büchlein die in Abbildung 4.74. dargestellten Figuren.

a) Welches bislang unbekannte Projektionsverfahren scheint Dürer bei der Darstellung vorgeschwebt zu haben?

b) Beurteilen Sie aber die „Grundrisse“ bezüglich ihrer Vollständigkeit!

c) Beschreiben Sie die dargestellten Körper!

Anmerkung: ALBRECHT DÜRER (1471–1528) beschäftigt sich in seiner *Unterweisung* hauptsächlich mit zentralperspektiven Darstellungen. Die senkrechte Ein- und Mehrtafelprojektion wurde durch GASPARD MONGE (1746–1818) systematisch dargestellt und als *géometrie descriptive* von ihm an der *École polytechnique* in Paris gelehrt. AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868; Leipzig) und JAKOB STEINER (1796–1863; Berlin) schufen den

Gedanken der Verwandtschaft geometrischer Figuren, wozu auch die Begriffe Kongruenz, Ähnlichkeit und Affinität gehören.

2. Das in Abbildung 4.75. im Grundriß-Aufriß-Bild dargestellte Gebäude soll gezeichnet werden:

a) in standardisierter Dimetrie,

b) in Kavalierperspektive,

c) in Isometrie,

d) als Schrägbild mit kongruentem Grundriß.

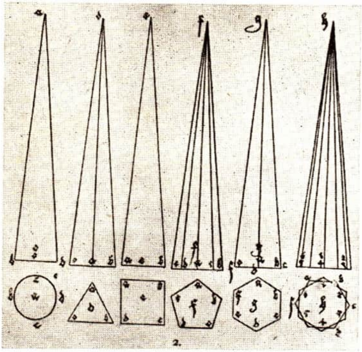
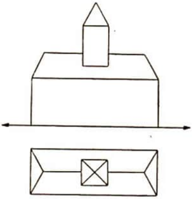


Abb. 4.74.

Abb. 4.75.



Vergleichen Sie insbesondere die Bilder von **a)** und **b)** und die von **c)** und **d)**! Beurteilen Sie die Anschaulichkeit und die Schwierigkeit der verschiedenen Konstruktionsverfahren!

3. Zeichnen Sie den Schrägriß in Kavalierperspektive einer geraden und einer schiefen vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche **a)** ein Quadrat, **b)** ein Rechteck, **c)** ein Rhombus, **d)** ein Rhomboid, **e)** ein Trapez, **f)** ein beliebiges Viereck ist!

4. Zeichnen Sie von den in Aufgabe **3** genannten Körpern die Schrägbilder mit kongruentem Grundriß!

5. Zeichnen Sie von den in Aufgabe **3** genannten Körpern die Grundriß-Aufriß-Bilder, und konstruieren Sie je einen ebenen Schnitt im Grundriß, im Aufriß und in wahrer Gestalt. Die Schnittebene möge dabei senkrecht zur Aufrißtafel verlaufen und gegen die Grundrißtafel unter dem Winkel α (selbst festlegen!) geneigt sein. Die Grundrißspur kann innerhalb oder auch in einem gewissen Abstand außerhalb des Grundrisses (ebenfalls selbst festlegen!) verlaufen.

6. Desgl. für eine Schnittebene, die senkrecht zur Grundrißtafel steht und gegen die Aufrißtafel unter einem Winkel β verläuft. (Den Winkel β und Lage der Aufrißspur zum Aufriß selbst festlegen!)

   Anleitung: Weshalb legt man in diesem Fall die Schnittebene mit der Schnittfigur zur Konstruktion von deren wahrer Größe und Gestalt zweckmäßigerweise in die Aufrißtafel um?

7. Desgl. für eine Schnittebene

   a) parallel zu π_1 in einem Abstand a,

   b) parallel zu π_2 in einem Abstand b.

   (a und b selbst festlegen!)

   Anleitung: Weshalb muß in diesen Fällen die Spur der Schnittebene durch den entsprechenden Riß des Körpers verlaufen und darf nicht außerhalb liegen? Weshalb ist in diesen Fällen eine besondere Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur durch Umlegen der Schnittebene unnötig?

8. Zeichnen Sie den Schrägriß in Kavalierperspektive und das Schrägbild mit kongruentem Grundriß für ein Gebäude

a) mit Satteldach,
b) mit Walmdach,
c) mit Krüppelwalmdach,
d) mit Pultdach!

Verwenden Sie dabei Maße, die der Wirklichkeit entsprechen, und fertigen Sie die Zeichnungen in einem geeigneten Maßstab an!

9. Vermessen Sie verschiedene Gegenstände, die ebenflächig begrenzt sind, z. B. Kästen, Tische, Hocker, Stühle, Werkstücke u. ä., und fertigen Sie maßstäbliche Schrägrisse in Kavalierperspektive und Schrägbilder mit kongruentem Grundriß an!

10. Normalerweise hat eine Ebene eine Grundrißspur e_1 und eine Aufrißspur e_2, die einander auf der Rißachse schneiden.

a) Bei welcher Lage der Ebene schneiden die Spuren die Rißachse nicht im Endlichen?
b) Ist es möglich, daß eine der Spuren die Rißachse im Endlichen schneidet, die andere aber nicht?
c) Bei welcher Lage hat die Ebene nur eine Spur? Wie verläuft diese dann?
d) Ist es möglich, daß eine Ebene gar keine Spur ergibt?

11. Konstruieren Sie die Kreuzrisse e_1''' und e_2''' bei allgemeiner Lage der Ebene und für die in Aufgabe **10** untersuchten besonderen Lagen!

12. Die Konstruktion der Risse der Schnittgeraden s zweier Ebenen erfolgt mit Hilfe des Schnittpunktes S_1 der Grundrißspuren $(u_1; v_1)$ und des Schnittpunktes S_2 der Aufrißspuren $(u_2; v_2)$ der beiden Ebenen.

a) Wiederholen Sie diese Konstruktion an einem selbstgewählten Beispiel bei beliebiger Lage der Ebenenspuren!
b) Wie verlaufen s', s'' und s, wenn S_1 und S_2 auf einer Ordnungslinie liegen?
c) Wie verlaufen s', s'' und s, wenn u_1 oder u_2 bzw. u_1 und u_2 senkrecht auf der Rißachse stehen?
d) Zeichnen Sie die Zweitafelbilder für solche Fälle, in denen nur einer oder keiner der Punkte S_1 und S_2 im Endlichen existiert! Wie liegen dann die beiden Ebenen? Kann man in diesen Fällen Schnittgeraden angeben?

13. a) Welches besondere Hilfsverfahren wendet man bei der Konstruktion des Durchstoßpunktes D einer Geraden g durch eine Ebene E im Zweitafelbild an?
b) Konstruieren Sie D' und D'' für eine selbstgewählte Lage von E und g!
c) Es existiert kein Durchstoßpunkt, wenn g in E liegt. Begründen Sie das an Hand eines Zweitafelbildes, in dem E und g inzidieren!
d) Es existiert im Endlichen kein Durchstoßpunkt, falls g parallel zu E verläuft. Zeichnen Sie auch für diesen Fall ein Zweitafelbild, und begründen Sie die Behauptung!

14. Zeichnen Sie

a) einen Würfel, **b)** ein Tetraeder, **c)** ein Oktaeder

im Zweitafelbild, und konstruieren Sie auf allen Seitenflächen jeweils im Schwerpunkt die Senkrechte!
Handelt es sich bei diesen Senkrechten um Geraden, die einander schneiden, sich kreuzen oder die parallel zueinander verlaufen?

15. Konstruieren Sie die Neigungswinkel der Seitenflächen

a) des Tetraeders, **b)** des Oktaeders!

INHALTSVERZEICHNIS

Abbildungsnachweis

Abb. 1.0. Zentralbild · Abb. 2.0. Volk und Wissen · Abb. 2.19. Deutsche Fotothek Dresden · Abb. 3.0. Werkfoto VEB Sachsenwerk Niedersedlitz · Abb. 3.30. Volk und Wissen · Abb. 3.79. Museum für Deutsche Geschichte · Abb. 3.144. Reproduktion aus O. Neugebauer: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, 1. Band: Vorgriechische Mathematik, Berlin 1934 · Abb. 3.146. Reproduktion aus O. Neugebauer: Mathematische Keilschrifttexte, zweiter Teil, Glossar, Nachträge, Tafeln; Berlin 1935 · Abb. 3.147. Reproduktion aus A. Eisenlohr: Ein altbabylonischer Felderplan, Leipzig 1896 · Abb. 3.148. Reproduktion aus G. Schöne: Heron von Alexandria: Vermessungslehre und Dioptra, Vol. III. · Abb. 3.151. Reproduktion des Titelblattes einer Abhandlung von Peter Apian (1533) · Abb. 3.152. Reproduktion aus C. King: The history of the telescope · Abb. 3.153. Reproduktion aus D. E. Smith: History of mathematics, Vol. 1, 1923 · Abb. 3.154. Reproduktion aus Prestage: Die portugiesischen Entdecker, Bern-Leipzig-Wien 1936 · Abb. 3.155. Reproduktion aus Smith and Mikami: A history of Japanese mathematics · Abb. 3.156. Reproduktion aus A.Wolf: A history of science, 18.Jh., London, sec. edition

0010 59-7