Lösungsheft
Mathematik
zum
Lehrbuch
Klasse 12

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Lösungsheft

MATHEMATIK

Zum Lehrbuch MATHEMATIK, Klasse 12

(Titel-Nr. 00 12 54)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1981

A. Vektorrechnung und analytische Geometrie

Lerneinheit A 1

o 1 a) Bild A 5 - Spiegelung an g; Bild A 6 - Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$;
Bild A 7 - senkrechte Parallelprojektion auf g;
Bild A 8 - zentrische Streckung mit (Z; 2)
b) eindeutig: A 5, A 6, A 7, A 8; eineindeutig: A 5, A 6, A 8
c) kongruent: A 5, A 6; ähnlich: A 5, A 6, A 8
d) z.B.: Drehungen um einen Punkt, zusammengesetzte Bewegungen, zusammengesetzte Ähnlichkeitsabbildungen

o 3 6 verschiedene Verschiebungen, denn es gilt:
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HO}$ und $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA}$, wegen (1), (2), (3) (↑ ■ 1)

1. Eigenschaften (1), (2), (3)
2.

	A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	H'
a)	(2;2)	(4;2)	(5;1)	(6;-1)	(4;-3)	(3;-4)	(2;-2)	(1;-1)
b)	(-2;0)	(0;0)	(1;-1)	(2;-3)	(0;-5)	(-1;-6)	(-2;-4)	(-3;-3)
c)	(0;4)	(2;4)	(3;3)	(4;1)	(2;-1)	(1;-2)	(0;0)	(-1;1)
d)	(-2;5)	(0;5)	(1;4)	(2;2)	(0;0)	(-1;-1)	(-2;1)	(-3;2)

3. Bei 2 (3; 4; 5) verschiedenen Punkten genau 2 (höchstens 6; höchstens 12; höchstens 20)
Angewendet auf die Bilder 19 a) bis g):
a) 2; b) 6; c) 12 (einschl. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$); d) 16 (einschl. $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EA}$); e) 8 (einschl. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$); f) 18 (da $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DE}$); g) 20

Lerneinheit A 2

o 5 a) $\vec{a} = \{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{GN}, \overrightarrow{MS}, \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{HO}, \overrightarrow{FC}, \ldots\}$;
$\vec{b} = \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{HL}, \overrightarrow{JS}, \ldots\}$; $\vec{c} = \{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{JH}, \overrightarrow{KL}, \ldots\}$
b) [A;H], [G;N], [M;S], [B;J], [H;O], [F;C], [C;K], [E;M], [D;L], [N;T]

o 6 a) der Pfeil $\overrightarrow{CD}$ b) Vektor $\vec{c}$ mit dem Repräsentanten $\overrightarrow{CD}$
c) gleich lange Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{JN}$
d) gleiche Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{JN}$, unterschiedliche Pfeile $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{JN}$
e) Die Ungleichung gilt sowohl für die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{JM}$ als auch für deren Längen.
f) Unterschiedliche Verschiebungen

1. a) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{OL}$ b) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{MC}$
   c) $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{FA}| = |\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{GA}|$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC} = \ldots$ b) $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{KG} = \ldots$ oder $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{KF} = \ldots$
   c) $\overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{AB}$; ...

3. a) $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NB}$ b) $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{MP}$ c) $\overrightarrow{BA}$
   d) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$ u.a.

4. a) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PB}$ b) $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PN}$ c) $|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NP}| = |\overrightarrow{NM}|$ u.a.

5. a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AD} \upuparrows \overrightarrow{BF}$, $|\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{BF}|$ c) $\overrightarrow{AD} \not\upuparrows \overrightarrow{MC}$
   d) $\overrightarrow{AM} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CM}$, $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}|$ e) $\overrightarrow{DG} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FH}$, $|\overrightarrow{FH}| = 2|\overrightarrow{DG}|$

6. a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MF}$ b) $\overrightarrow{HM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CG}$, $|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CG}|$
   c) $\overrightarrow{DH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EG}$, $|\overrightarrow{EG}| = 2|\overrightarrow{DH}|$ d) $\overrightarrow{DB} \upuparrows \overrightarrow{GF}$, $|\overrightarrow{DB}| = 2|\overrightarrow{GF}|$ e) $\overrightarrow{AM} \not\upuparrows \overrightarrow{EB}$

7. a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, also jeweils 4 (Zu beachten: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DC}$ usf.)
   b) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HA}$, also jeweils 4

Lerneinheit A 3

o 8 a) Pfeile $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{HG}$
   b) Gerade durch P, parallel zu AB, zeichnen;
   darauf Strecke $\overline{AB}$ von P so abtragen (Endpunkt Q), daß
   $\overrightarrow{PQ} \upuparrows \overrightarrow{AB}$; Konstruktion für B analog

1. a) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$
   $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{GA}$
   b) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BH}$
   $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$
   c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$
   $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EC}$
   d) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BH}$
   $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{HB}$
   e) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FC}$
   f) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EB}$
   $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$

2. a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$
   $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$
   b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF}$
   und die dazu entgegengesetzten Vektoren

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$
   und die dazu entgegengesetzten Vektoren

6. a) $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BA} \upuparrows \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC} \upuparrows \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CB} \upuparrows \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CA} \upuparrows \overrightarrow{FD}$;
   außerdem ist jeder Vektor zu sich selbst gleich gerichtet
   b) $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$, ...
   c) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{EB}$, ...

Lerneinheit A 4

o 10 Die Pfeile $\overrightarrow{AA''}$, $\overrightarrow{BB''}$, $\overrightarrow{CC''}$ sind gleich gerichtet und gleich lang.
   Sie gehören also zum gleichen Vektor, d.h., es gilt:
   $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{CC''}$.

o 13 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{EG}$
   Die Pfeile $\overrightarrow{JL}$ und $\overrightarrow{EG}$ sind Repräsentanten von $\overrightarrow{AC}$ (gleich gerichtet und gleich lang).

1. a) (2;5) b) (1;0) c) (-5;1) d) (-1;6)
2. a) (-4;-5) b) (3;-1) c) (-2;1) d) (2;-1)
3. a) (-3;3) b) (4;0) c) (-4;-2) d) ~~(4;0)~~ (-1;-2)
4. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\vec{o}$ 5. a) $\overrightarrow{DF}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\vec{o}$
7. a) $\vec{c}$ b) $\vec{v}$

Lerneinheit A 5

o 15 a) $\vec{x} = -\vec{a}$ b) $\vec{x} = \vec{b}$ c) $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{BC}$

o 16
$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{a})) &= \vec{b} && \text{(eingesetzt)} \\ \vec{a} + ((-\vec{a}) + \vec{b}) &= \vec{b} && \text{(wegen } (3^+)) \\ (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} &= \vec{b} && \text{(wegen } (4^+)) \\ \vec{o} + \vec{b} &= \vec{b} && \text{(wegen } (2^+)) \\ \vec{b} &= \vec{b} && \text{(wegen } (1^+)) \end{aligned}$$
   Also ist $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$ Lösung der Gleichung (1).

o 17 Aus $\vec{a} + \vec{x}_1 = \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{x}_2 = \vec{b}$ folgt $\vec{a} + \vec{x}_1 = \vec{a} + \vec{x}_2$;
   $-\vec{a} + (\vec{a} + \vec{x}_1) = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{x}_2)$ und (analog zu o 16) $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

3. a) X(5;0) b) X(1;4), X(-3;-2), X(-5;0), X(-1;-4)
4. a) $\vec{a}$ b) $\vec{o}$
5. a) $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{y}$ c) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$
   d) $\vec{x}$ beliebig, wenn $\vec{a} = -\vec{b}$, sonst keine Lösung
6. a) $\vec{b}$ b) $\vec{a}$ c) $\vec{a} + \vec{b}$ d) $\vec{b} - \vec{a}$
   e) $-\vec{b}$ f) $-(\vec{a} + \vec{b})$ g) $\vec{a} - \vec{b}$

7. b) Voraussetzung: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   Behauptung: $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DB}$
   Beweis: Da die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ existieren, gibt es auch Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{DB}$ derart, daß

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. Dann gilt aber auch
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ nach Voraussetzung und
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{o}$, also
$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DB}$

Lerneinheit A 6

o 18 a) $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ b) $-(3\vec{a}) = (-3)\vec{a} = 3(-\vec{a})$; Assoziativität
c) $2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a}$; Distributivität

o 19 Für $(-1)\vec{a}$ ist (nach Def. 1) $|(-1)\vec{a}| = |-1||\vec{a}| = |\vec{a}|$ und $(-1)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Also hat $(-1)\vec{a}$ mit $\vec{a}$ den gleichen Betrag und ist zu $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet, d.h. es gilt:
$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

o 21 a) Behauptung: $r \cdot (s \cdot \vec{o}) = (r \cdot s) \cdot \vec{o}$
Linke Seite: $r \cdot (s \cdot \vec{o}) = r \cdot \vec{o} = \vec{o}$ (wegen $(4^\bullet)$)
Rechte Seite: $(r \cdot s) \cdot \vec{o} = \vec{o}$ (wegen $(4^\bullet)$), da $r \cdot s \in P$
Vergleich: $\vec{o} = \vec{o}$

b) Behauptung: $0 \cdot (s \cdot \vec{a}) = (0 \cdot s) \cdot \vec{a}$
Linke Seite: $0 \cdot (s \cdot \vec{a}) = \vec{o}$ (wegen $(3^\bullet)$)
Rechte Seite: $(0 \cdot s) \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$ (wegen $(3^\bullet)$)
Vergleich: $\vec{o} = \vec{o}$

c) Behauptung: $r \cdot (0 \cdot \vec{a}) = (r \cdot 0) \cdot \vec{a}$
Linke Seite: $r \cdot (0 \cdot \vec{a}) = r \cdot \vec{o} = \vec{o}$ (wegen $(3^\bullet)$)
Rechte Seite: $(r \cdot 0) \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$ (wegen $(3^\bullet)$)
Vergleich: $\vec{o} = \vec{o}$

o 23 a) $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{DE}$ b) $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{AB} : \overline{BD}$

o 26 a) $\vec{x} = \frac{1}{5}\vec{b}$ b) keine Lösung c) $\vec{x}$ beliebig d) $\vec{x} = \frac{1}{r}\vec{b}$

2. a) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ b) $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ 3. a) $3\vec{a}$ b) $-9\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

4. a) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ b) $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ c) $\vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

5. a) $9\vec{e}$ b) $\vec{e}$ c) $7\vec{e}$ d) $10\vec{e}$ e) $\vec{o}$ f) $-8\vec{e}$

6. a) -1 b) 2 c) $-\frac{1}{2}$ d) nicht lösbar

7. a) $-1 < x < 1$ b) $|x| > 1$ c) $|x| = 1$

8. a) Jeder Vektor $\vec{b}$ mit $\vec{b} \parallel \vec{a}$ und $\vec{b} \neq -\vec{a}$
b) Jeder Vektor $\vec{b}$ mit $\vec{b} = (r-1)\vec{a}$, $r \in P$ und $r > 0$
c) Jeder Vektor $\vec{b}$ mit $\vec{b} \parallel \vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{a}$, $\vec{b} \neq -\vec{a}$
d) Jeder Vektor $\vec{b}$ mit $\vec{b} \parallel \vec{a}$ und $|\vec{b}| > |\vec{a}|$

Lerneinheit A 7

1. M sei der Diagonalenhalbierungspunkt des Vierecks ABCD.
Aus $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$ folgt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}$
und analog $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2. $\overline{EF}$ sei die Mittellinie des Trapezes ABCD.
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$

$2\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ Da $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, ist auch $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$.

3. G und H seien die Mittelpunkte der Grundseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ des Trapezes ABCD, S sei der Schnittpunkt der verlängerten Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Zu zeigen ist $\overrightarrow{SH} \parallel \overrightarrow{SG}$.
$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CH} \Longrightarrow \overrightarrow{SH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC})$ H=F
$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BG} \Longrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB})$
$\overline{SA} : \overline{SD} = \overline{SB} : \overline{SC} = r$ G=E
$\overrightarrow{SG} = \frac{r}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC}) = \frac{r}{2}\overrightarrow{SH}$
Also gilt $\overrightarrow{SH} \parallel \overrightarrow{SG}$, d.h.: S, H, G liegen auf ein und derselben Geraden.

4. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ($\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{CG} = c$)
(1) $\overrightarrow{AK} = r\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c}$ ($r, s \in P$; $0 \leqq r \leqq 1$; $0 \leqq s \leqq 1$)
$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = (r-1)\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{IK} = t\,\overrightarrow{BK}$ ($0 < t < 1$; $t \in P$)
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + t\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + t\overrightarrow{BK}$
(2) $\overrightarrow{AK} = (rt - t + \frac{2}{3})\vec{a} + (st + \frac{2}{3})\vec{b} + (t + \frac{2}{3})\vec{c}$
Aus (1) und (2) folgt $r = \frac{1}{2}$, $s = 1$, $t = \frac{1}{3}$, d.h.: K liegt auf $\overline{HG}$, und I teilt $\overline{BK}$ im Verhältnis 2 : 1.

5. $\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{ME} = c$
(1) $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + k\vec{c}$ ($0 < k < 1$)
$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b})$
$\overrightarrow{FS} = t\vec{b} + \frac{1}{3}t(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b})$
$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\vec{b} + \frac{1}{3}t(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b})$

(2) $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}t\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}$

Vergleich von (1) und (2) ergibt: $t = \frac{3}{5}$, $k = \frac{1}{5}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$.

$\overline{SM} : \overline{SE} = \frac{1}{5}c : \frac{4}{5}c = 1 : 4$

$\overrightarrow{FS} = \frac{5}{10}b + \frac{1}{5}c$; $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{FS} = \frac{6}{10}\overrightarrow{FG} \Longrightarrow \overline{FS} : \overline{SG} = \frac{6}{10}\overline{FG} : \frac{4}{10}\overline{FG} = 3 : 2$

Lerneinheit A 8

o 28 b) $|\vec{F}| = 345$ N; $\alpha_F \approx 15^\circ$

o 29 a) $|\vec{F}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2\,|\vec{F_1}||\vec{F_2}| \cos\alpha$

b) $|\vec{F}| = |\vec{F_1}| - |\vec{F_2}|$ c) $|\vec{F}| = |\vec{F_1}| + |\vec{F_2}|$ d) $|\vec{F}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2$

o 30 Jede Kraft, die zu $\vec{F_2}$ entgegengesetzt gerichtet und dem Betrage nach mindestens 37,4 N ist

130,2°

o 31 a) $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$; $|\vec{v}|^2 = |\vec{v_1}|^2 + |\vec{v_2}|^2 - 2\,|\vec{v_1}||\vec{v_2}| \cos 45^\circ$

$|\vec{v}| = 918$ km h^{-1}; $t \approx 1$ h 5 min

b) $\sin\alpha : \sin 45^\circ = |\vec{v_2}| : |\vec{v_1}|$; $\alpha \approx 4{,}8^\circ$; Kurs N 5° O

1. $\sin 30^\circ = \frac{|\vec{G}|}{|\vec{Z}|}$; $|\vec{Z}| = 50$ N

2. $|\vec{F}_{BC}| = |\vec{G}| \sin 30^\circ \approx 30$ N; $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{G}| \sin 60^\circ \approx 52$ N

3. $|\vec{F_Z}| = \frac{|\vec{G}|}{\sin 35^\circ} \approx 8570$ N; $|\vec{F_D}| = \frac{|\vec{G}|}{\tan 35^\circ} \approx 10460$ N

4. F sei Kraft in Fahrtrichtung, S sei seitliche Kraft, Z sei Kraft in Zugrichtung.
$|\vec{F}| = |\vec{Z}| \cos 18^\circ \approx 0{,}951$ Z; $|\vec{S}| = |\vec{Z}| \sin 18^\circ \approx 0{,}309$ Z

5. a) $|\vec{v_1}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\overrightarrow{v_{Wind}}|^2 - 2\,|\vec{v}||\overrightarrow{v_{Wind}}| \cos 135^\circ$

$|\overrightarrow{v_{Wind}}|^2 + \sqrt{2}\,|\vec{v}||\overrightarrow{v_{Wind}}| + |\vec{v}|^2 - |\vec{v_1}|^2 = 0$

$|\overrightarrow{v_{Wind}}| = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\vec{v}| + \frac{1}{2}\sqrt{4\,|\vec{v_1}|^2 - 2\,|\vec{v}|^2}$ $(|\overrightarrow{v_{Wind}}| > 0)$

b) $|\vec{v_1}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\overrightarrow{v_{Wind}}|^2 - 2|\vec{v}||\overrightarrow{v_{Wind}}| \cos 157{,}5^\circ$

$|\overrightarrow{v_{Wind}}| = -0{,}92\,|\vec{v}| + \sqrt{|\vec{v_1}|^2 - 0{,}16|\vec{v}|^2}$

Lerneinheit A 9

o 32 b) $r > 0$ bzw. $r < 0$ c) $\vec{0a}$

o 33 a) $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

b) $\frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{HG}$, $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \overrightarrow{EG}$, $2\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB}$

o 34 $\overrightarrow{OG} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{OG}$ (0; -1); $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OH}$ $(-\frac{1}{2}; 0)$

$\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{GH}$ $(-\frac{1}{2}; 1)$; $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OE}$ (1; 1)

$\overrightarrow{HF} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{HF}$ (2; -1); $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{FE}$ $(-\frac{1}{2}; 2)$

o 35 $\overrightarrow{EF}$ (-1; 3), $\overrightarrow{ED}$ (4; 1), $\overrightarrow{EC}$ (3; 3), $\overrightarrow{BF}$ (-6; -2)
$\overrightarrow{AG}$ (-2; 2), $\overrightarrow{FD}$ (5; 2), $\overrightarrow{FH}$ (2; 0)

1. a) (-1; 3) b) (4; 1) c) (3; 3)

2. a) (-6; -2) b) (-2; 2) c) (5; -2) d) (2; 0)

3. (1; 1), $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, $(1; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, (-1; 1)

4. (0; 2), (1; 0), (0; -1), $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, (2; 0)

5. a) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{j}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

b) $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i}$, $\vec{d} = -2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

6. a) (-5; 10) b) (1; -2) c) (-9; -6) d) (-3; -18) e) (-3; 3)
f) (-3; 0)

Lerneinheit A 10

o 38 a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ c) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ d) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

o 39 a) $y = 0$ b) $x = 10$ c) $x = z = 0$

o 40 (-4; 6; 0), (4; 6; -3), (-4; 6; 3), (4; -6; 3)

1. a) $\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BA}\}$, $\{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{BA}\}$;
analog für $\{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}\}$ und $\{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}\}$

b) $\{\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OC}\}$, $\{\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{CO}\}$, $\{\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{OC}\}$, $\{\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{CO}\}$;
analog für $\{\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{EC}\}$ und $\{\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{CE}\}$

c) $\{\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DC}\}$, $\{\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{CD}\}$, $\{\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{DC}\}$, $\{\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{CD}\}$;
analog für $\{\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{EC}\}$ und $\{\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CD}\}$

d) $\{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF}\}$, $\{\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{FA}\}$, $\{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AF}\}$, $\{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{FA}\}$;
analog für $\{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OF}\}$ und $\{\overrightarrow{FO}; \overrightarrow{FA}\}$

2. nicht komplanar: a), c), d); komplanar: b), e), f)

3. a) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} \neq \vec{o}$; $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$, da sonst $O \in AB$ und $O \in ABC$;
für $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ist $C \notin OAB$, da sonst $O \in ABC$. Also sind
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ nicht komplanar und bilden eine Basis.
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$,
? $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

4. (1;0;0), (0;1;0), (0;0;1), (1; -1;1), $(\frac{1}{1};0;\frac{1}{2})$

6. a) O(0;0;0), A(4;0;0), B(4;6;0), C(0;6;0)
D(0;0;3), E(4;0;3), F(4;6;3), G(0;6;3)
b) (2;3;3) c) (4;3;1,5) d) (2;3;1,5)

Lerneinheit A 11

o 41 a) $\overline{OB} = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{52} \approx 7,21$; $\overline{OF} = \sqrt{61} \approx 7,81$
b) $\overline{AC} = \sqrt{52} \approx 7,21$; $\overline{AD} = 5$; $\overline{EC} = \sqrt{61} \approx 7,81$

1. a) $\overline{OA} = \sqrt{10} \approx 3,16$ b) $\overline{OB} = \sqrt{29} \approx 5,39$ 2. a) $\overline{OC} = 5$
b) $OD = \sqrt{29} \approx 5,39$

3.

	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)	25	33	$\sqrt{1714} \approx 41,4$
b)	$\sqrt{52} \approx 7,21$	$\sqrt{80} \approx 8,94$	2
c)	$\sqrt{18} \approx 4,24$	$\sqrt{34} \approx 5,83$	$\sqrt{34} \approx 5,83$
d)	$\sqrt{29} \approx 5,39$	5	$\sqrt{40} \approx 6,32$

4.

	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)	14	15	13
b)	$\sqrt{1000} \approx 31,6$	$\sqrt{1000} \approx 31,6$	$\sqrt{925} \approx 30,4$
c)	4	$\sqrt{18} \approx 4,24$	$\sqrt{42} \approx 6,48$
d)	$\sqrt{13} \approx 3,61$	$\sqrt{34} \approx 5,83$	7

5. $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{34}$ 6. $M_{BC}(-1;1;-2)$; $\overline{AM_{BC}} = 7$

7. a) $\overrightarrow{a_o}(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13})$ b) $\overrightarrow{a_o}(\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; -\frac{12}{13})$ c) $\overrightarrow{a_o}(-\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; -\frac{12}{13})$
d) $\overrightarrow{a_{o1}}(\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; -\frac{12}{13})$; $\overrightarrow{a_{o2}}(-\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13})$ e) $\overrightarrow{a_o}(-\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; -\frac{12}{13})$
f) $\overrightarrow{a_{o1}}(-\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13})$; $\overrightarrow{a_{o2}}(\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; -\frac{12}{13})$

8.* a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; B (2; -3)
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; D (3; 2)
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = -2\vec{j}$; C (0; -2)
b) $\overline{AC} = \sqrt{34} \approx 5,83$; $\overline{BD} = \sqrt{26} \approx 5,10$

9.* a) A(4; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 3; 5), D(4; 0; 5);
$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{50} \approx 7,07$
b) A(1; 0; 2), B(-1; 3; 0), C(-3; 3; 2), D(-1; 0; 4);
$\overline{AC} = \overline{BD} = 5$

c) A(-1; 4; 4), B(-6; 10; 4), C(-4; 7; 0), D(1; 1; 0);
$\overline{AC} = \sqrt{34} \approx 5,83$; $\overline{BD} = \sqrt{146} \approx 12,08$
d) A(1; 4; 1), B(1; 4; 6), C(5; 7; 6), D(5; 7; 1);
$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{50} \approx 7,07$

Lerneinheit A 12

o 44 b = 55 cm, $\alpha = 41,1^\circ$, $\beta = 48,9^\circ$

o 45 a) P liegt auf dem Kreis um O mit dem Radius 25 zwischen der x-Achse und der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.
b) P liegt im 4. Quadranten auf dem von O ausgehenden Strahl, der mit der x-Achse einen Winkel von -60° bildet.
c) P liegt auf dem Kreis um O mit dem Radius 17, und zwar oberhalb der Winkelhalbierenden des 2. bzw. 4. Quadranten.
d) P liegt auf der Winkelhalbierenden des 2. Quadranten.
e) P liegt auf dem Kreis um O mit dem Radius 16.

1. a) 5; $36,9^\circ$ b) ± 3; $36,9^\circ$ bzw. $-36,9^\circ$ c) ± 3; $-53,1^\circ$ bzw. $-126,9^\circ$
d) -3; 5 e) 4; 5 f) -4,8515; -2,9300

2. a) (-7;7) b) $(-3; \pm 3\sqrt{3})$ c) $(-\frac{25}{2}; -\frac{25}{2})$ d) $(9; -3\sqrt{3})$
e) $(\pm 3,873; -7)$ f) $(-3\sqrt{3}; 3)$

3.

	a)		b)		
Leningrad	30°	30°	2762	1595	5523
Sydney	152°	123°	- 4723	2511	- 3774
Rio de Janeiro	$- 43^\circ$	113°	4294	- 4004	- 2492
Accra	0°	$\cancel{100^\circ}$ 90°	6281	0	- 1108
Havanna	$- 83^\circ$	67°	716	- 5827	2492
New York	$- 74^\circ$	49°	1327	- 4627	4184

4. Horizontale Komponente $|(\overrightarrow{v_o})_x|$ nicht kleiner als $|\vec{v}|$;
vertikale Komponente $|(\overrightarrow{v_o})_y|$ mindestens $\sqrt{2gh}$;
minimale Anfangsgeschwindigkeit $|\overrightarrow{v_o}| \approx 743 \text{ m s}^{-1}$

Lerneinheit A 13

3. a), b) 3° und 4° gelten nicht. c) 3° gilt nicht.

Lerneinheit A 14

o 49 Die Koordinaten zweier Punkte von g

o 50 a) $\vec{a}(2; 1)$, $m = \frac{a_y}{a_x} = \frac{1}{2}$

b) Für $1 \leq t \leq 3$ die Punkte der Strecke $\overline{P_0A}$,

für $-1 \leq t \leq 1$ die Punkte der Strecke $\overline{SP_1}$ mit S als Schnittpunkt von g mit y-Achse

o 51 $\vec{x} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} + u\vec{k}$

Für $u = 0$ ergibt sich F, für $u = -3$ ergibt sich B, d.h.: die angegebene Gleichung ist ebenfalls eine Gleichung für BF mit $P_0 = F$ und $\vec{a} = \vec{k}$.

1. a) AE; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $x = 4$, $y = 0$, $z = t$ b) CB; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x = -t$, $y = 6$, $z = 0$

c) OC; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x = 0$, $y = 6+t$, $z = 0$ d) DG; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x = 0$, $y = t$, $z = 3$

2. a) OD; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 3t$ b) OD; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 3-t$

c) OA; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x = 4+t$, $y = 0$, $z = 0$ d) CF; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x = 4t$, $y = 6$, $z = 3t$

5. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lerneinheit A 15

o 53 a) $\overline{BF}$ b) Strahl BO c) $\overline{BA}$

d) O, F und alle Punkte der Geraden OF, die von O um ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{61}$ entfernt sind

1. a) Punkt F b) $\overline{DM}$ mit M als Mittelpunkt des Rechtecks DEFG

c) Strecke $\overline{DF}$ und ihre Verlängerung über D hinaus um die Länge $\overline{DF}$

d) Der in F beginnende Strahl der Geraden FD, der D nicht enthält

2. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

b) M (2; 3; 1,5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$ u.a.

oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $r \geq -1$

oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, $s \leq 1$ u.a.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ u.a.

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$ u.a.

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -15 \end{pmatrix}$ a) ja, $t = \frac{1}{3}$ b) nein c) nein d) nein

4. $P_1 = (5; -3; 5)$, P_2 $(-9; 11; -2)$; $\overline{P_1P_2} = 21$ Einheiten

Lerneinheit A 16

o 54 c) und d)

o 56 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Ein weiterer Punkt P_1 kann beliebig gewählt werden. Als weiterer Richtungsvektor $\vec{a_1}$ kommt jeder Vektor in Frage, für den $\vec{a_1} \parallel \vec{a}$ gilt. Parametergleichungen für g können mit Hilfe von P_0, $\vec{a}$ bzw. P_0, $\vec{a_1}$ bzw. P_1, $\vec{a}$ bzw. P_1, $\vec{a_1}$ bzw. P_0, $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. P_0, $\overrightarrow{P_1P_0}$ usf. aufgestellt werden. Bei weitester Interpretation der Aufgabenstellung könnten weitere Parametergleichungen mit P_0, $r\vec{a}$ $(r \neq 0)$ gefunden werden.

1. a) $x - 2y = -13$, $m = \frac{1}{2}$ b) $y = 6x - 14$, $m = 6$

c) $y = -2$, $m = 0$

2. a) $x = -\frac{11}{2}$ b) $y = -x + 8$, $m = -1$

c) $y = -\frac{8}{3}x - \frac{44}{3}$, $m = -\frac{8}{3}$

3. a) $y = -3x - 1,5$ b) $y = 2,5x - 3,5$ c) $y = x$

4. a) $y = \frac{4}{3}x$ b) $y = -\frac{3}{2}x$ 5. a) $y = 2x$ b) $y = -x$

6. $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; $P_3, P_4 \in AB$; $P_1, P_2, P_5 \notin AB$

7. a) $m = -1$; $\vec{a_1} = \vec{i} - \vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ u.a.

$\vec{a_2} = -\vec{i} + \vec{j}$

b) $m = 1$; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $m = -\frac{8}{3}$; $\vec{a} = 3\vec{i} - 8\vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $m = -\frac{1}{2}$; $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $m = -1$; $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $m = -\frac{2}{5}$; $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \vec{j}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $m = 0$; $\vec{a} = \vec{i}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lerneinheit A 17

o 57 b) $S\left(\frac{7}{15}; -\frac{9}{15}\right)$ g schneidet h genau dann, wenn genau eine Lösung existiert.

o 58 a) g schneidet h in $S(3; -2)$. b) $g \parallel h$ und $g \neq h$ c) $g = h$

o 60 a) $y = x + 3$ b) $y = -4x + 18$ c) $x = 2$ d) $y = -1$

o 61 a) $g \parallel h$ und $g \neq h$ genau dann, wenn $\vec{x_1} - \vec{x_0} \nparallel \vec{a}$ und $\vec{b} \parallel \vec{a}$.

b) $g = h$ genau dann, wenn $\vec{x_1} - \vec{x_0} \parallel \vec{a}$ und $\vec{b} \parallel \vec{a}$.

o 62 $g \parallel h$, denn $-3\vec{i} + 4\vec{j} \parallel 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

$g \neq h$, denn $\vec{x_1} - \vec{x_0} = 4\vec{j} - 6\vec{i} \nparallel -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

1. a) $S(3; 4)$ b) parallel, aber nicht identisch

2. a) $S\left(\frac{1}{3}; \frac{16}{9}\right)$ b) $S(0; 0)$ c) $S\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$ d) $S(-3 + \sqrt{5}; -3 + \sqrt{5})$

3. a) $S(6; -6)$ b) Die Geraden fallen zusammen.

4. a) $S\left(\frac{23}{14}; -\frac{23}{2}\right)$ b) $S\left(\frac{2}{7}; -\frac{4}{7}\right)$

5. $S_x(a; 0)$, $S_y(0; b)$; a ist Abszisse des Schnittpunktes von g mit der x-Achse; $|a|$ ist Länge von $\overline{OS_x}$, des von g auf der x-Achse abgeschnittenen Abschnitts; Vorzeichen von a gibt an, ob der Achsenabschnitt auf der positiven bzw. negativen Seite der x-Achse liegt. Entsprechendes gilt hinsichtlich b.

6. a) $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$; $a = 6$, $b = 3$ b) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1$; $a = -2$, $b = 6$

c) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1$; $a = 5$, $b = -4$ d) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-1} = 1$; $a = -4$, $b = -1$

7. $AD \parallel BC$ und $AD \neq BC$, d.h., Viereck ADCB ist ein Trapez.

8. a) $g_{AD}: y = \frac{24}{7}x - \frac{24}{7}$; $g_{DC}: y = \frac{5}{12}x + \frac{279}{12}$; $D(9; 27)$

b) $M\left(\frac{23}{2}; \frac{35}{2}\right)$; Mittelpunkt von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$; Schnittpunkte von AC und BD; $\vec{x_M} = \vec{x_A} + \frac{1}{2}(\vec{x_C} - \vec{x_A})$

9. $x = -\frac{7}{k}$ erfüllt beide Gleichungen für $k = \frac{7}{12}$; $S(-12; 0)$.

10. a) Für $k^2 \neq 16$ und l beliebig; $S\left(-\frac{8 + kl}{k^2 - 16}; \frac{21 + k}{k^2 - 16}\right)$

b) Für $k_1 = 4$ und $l_1 \neq -2$ oder $k_2 = -4$ und $l_2 \neq 2$

c) Für $k_1 = 4$ und $l_1 = -2$ oder $k_2 = -4$ und $l_2 = 2$

Lerneinheit A 18

o 63 a) AB, AC, AD, AE, AF, AG, OB, OC, OD, OE, OF, OG

b) BC, DE, EG c) alle unter a) und b) genannten Geraden

d) BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, CG, DF, DG, EF, EG

o 64 a) Alle Punkte der Ebene ABGD

b) Alle Punkte, die sowohl der Ebene ABGD als auch der Ebene OAFG angehören, also alle Punkte der Geraden AG

c) Alle Punkte, die sowohl der Ebene ABGD als auch der Ebene ACGE angehören, also alle Punkte der Geraden AG

o 65 a) Alle Punkte der Ebene parallel zur xy-Ebene durch $(0;0;z_0)$

b) Alle Punkte der Ebene parallel zur xz-Ebene durch $(0;y_0;0)$

c) Alle Punkte der Ebene, die die xy-Ebene längs der Geraden $y = x$, $z = 0$ schneidet und auf der xy-Ebene senkrecht steht

d) Alle Punkte der Ebene, die die xy-Ebene längs der Geraden $y = -2x + 4$, $z = 0$ schneidet und auf der xy-Ebene senkrecht steht

e) Alle Punkte der Ebene, die die yz-Ebene längs der Geraden $y = -z + 1$, $x = 0$ schneidet und auf der yz-Ebene senkrecht steht

f) Alle Punkte der Ebene durch die Punkte (1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)

1. Den Schnittpunkt S(4;6;16) zweier Geraden ermitteln, z.B. von OD und AE, und zeigen, daß S den übrigen Geraden (BF und CG) angehört

2. $T(4;6;\frac{48}{5})$

3./4. $M_1(4;6;0)$, $M_2(4;6;12)$, $S(4;6;16)$

$\overrightarrow{M_1S} = 16\vec{k}$, $\overrightarrow{M_2T} = -\frac{12}{5}\vec{k}$, d.h. die z-Achse ist parallel zu M_1S und M_2T.

5. Da die Höhe M_1S der Pyramide OABCS parallel zur z-Achse ist und O, A, B, C in der xy-Ebene liegen, ist OABCS eine gerade Pyramide und K ein gerader Pyramidenstumpf.

6. a) Schnittpunkt in $Q(\frac{20}{3}; 6;16)$ b) Schnittpunkt in R (4;10;16)

7. a) Bahn des Zieles: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

Bahn der Rakete: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Da $\vec{a} \nparallel \vec{x_2} - \vec{x_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_0}$ nach $\vec{a}$ und $\vec{x_2} - \vec{x_1}$ zerlegbar ist, schneiden die beiden Flugbahnen einander genau in S(12;-3;5).

8. a) Die Gleichungen beschreiben die Geraden BX und EF mit Schnittpunkt in X(5;6;12), dem Mittelpunkt der Kante $\overline{EF}$.

b) Die Gleichungen beschreiben die Geraden OZ (Z Mittelpunkt von $\overline{DG}$) und RC (R Mittelpunkt von $\overline{OA}$), die zueinander windschief sind.

9. a) Die Gleichungen beschreiben die Geraden BX und YG (Y Mittelpunkt von $\overline{BC}$) mit Schnittpunkt in (4;4;16).

b) Die Gleichungen beschreiben die zueinander windschiefen Geraden BC und AZ.

Lerneinheit A 19

o 66 a) $\vec{x} = t\vec{i}$; $y = 0$ b) $\vec{x} = s\vec{j}$; $x = 0$

o 67 a) g schneidet x-Achse in A(5;0) und y-Achse in B(0;6).

b) g schneidet x-Achse in A(4;0) und y-Achse in B(0;4).

c) g schneidet x-Achse in A(-7;0) und ist parallel zur y-Achse.

d) g identisch mit y-Achse, schneidet also x-Achse in A(0;0).

o 68 a) g_{BK} : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; z-Achse: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = 2$; $s = 6$; S(0;0;6)

b) Da BK und OD in ein und derselben Ebene liegen (wegen OB ∥ DF) und nicht zueinander parallel sind, schneiden sie einander in einem Punkt S der z-Achse. Nach dem 2. Teil des Strahlensatzes:

$|z| : (|z| - 3) = \sqrt{52} : \sqrt{13}$; $|z| = 6$

Wegen $z > 0$ ist S(0;0;6).

1. a) HN durchstößt xy-Ebene im Punkt $(7; \frac{9}{2}; 0)$.

b) HN durchstößt yz-Ebene im Punkt (0; 1; 3,5)

HN: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

2. KH ist parallel zur xy-Ebene und durchstößt die xz-Ebene und die yz-Ebene im Punkt D(0;0;3).

KH: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. a) Liegt in yz-Ebene, durchstößt xy-Ebene im Punkt $(0; \frac{3}{5}; 0)$ und xz-Ebene im Punkt $(0; 0; -\frac{3}{7})$

b) Parallel zur xy-Ebene, durchstößt yz-Ebene im Punkt (0;2; -1) und xz-Ebene im Punkt (2;0; -1)

4. a) Schneidet x-Achse im Punkt (4;0;0), durchstößt yz-Ebene im Punkt (0; -12; 28)

b) Durchstößt die Koordinatenebenen in den Punkten $D_{xy}(3;2;0)$, $D_{xz}(1;0;2)$, $D_{yz}(0; -1; 3)$

5. a) Parallel zur x-Achse, xz-Ebene und xy-Ebene, durchstößt yz-Ebene im Punkt $(0; \frac{9}{2}; 12)$
b) Parallel zur yz-Ebene, durchstößt xz-Ebene im Punkt (5;0;12)
c) Durchstößt xz-Ebene im Punkt (8;0;12) und yz-Ebene im Punkt (0;12;12)
d) Durchstößt xz-Ebene und yz-Ebene im Punkt (0;0;32)

Lerneinheit A 20

o 69 a) $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a^2}{8}$ b) $\frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} \cos 30^\circ = \frac{3}{8}a^2$

c) $\frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cos 120^\circ = -\frac{3}{8}a^2$ d) $\frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cos 120^\circ = -\frac{3}{8}a^2$

o 70 a) $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot 4 = 8$; $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OA} = 8$; $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OE} = 8$;
$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OF} = 8$; $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = 9$; $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = 9$; $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF} = 9$;
$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG} = 9$

b) Alle Vektoren $\vec{x}$, für die $|\vec{x}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{x}) = \frac{r}{|\vec{a}|}$, deren Orthogonalprojektion auf $\vec{a}$ gleich $\overrightarrow{AB}$ ist

1. a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 16$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$ c) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$
d) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 16$
e) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OL''} = 12$ mit L'(3;4,5;0), L"(3;0;0)

2. a) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ b) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = 9$ c) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = 9$
d) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = 9$ e) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = 9$

3. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cos 15^\circ \approx 11{,}59$
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cos 135^\circ = -12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx -8{,}49$

4. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2{,}5 \cdot 2 \cos 90^\circ = 0$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3{,}2 \cdot 2{,}3 \cos 105^\circ \approx -1{,}9$

5. a) 1 b) 1 c) 1 d) 0 e) 0 f) 0

6. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$; $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

7. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-6}{\sqrt{3} \cdot 2} < -1$; keine Lösung

Lerneinheit A 21

o 71 a) $\cos(-x) = \cos x$ b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

o 72 a) $(\vec{i} \cdot \vec{i}) \cdot \vec{j} = \vec{j}$; $\vec{i} \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) = \vec{o}$
b) $((\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} = \vec{i}$; $(\vec{i} + \vec{j})(\vec{i} \cdot \vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$

o 73 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$ (nach (3))
$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ (nach (13))
$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ (nach (13))
$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ (nach (8))
$= \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ (nach (3) und Add.reell.Z.)

1. a) 2 b) 0 c) 3

2. a) $-\frac{3}{2}$ b) -1 c) -6

3. a) 32 b) -2

4. Vektor: a), c), d), e) für $a \neq 0$
Zahl: b), h)
Sinnlos: f), g)

5. Vektor: e)
Zahl: b), d), f), h)
Sinnlos: a), c), g)

6. Falsch: a), c), d)
Richtig: b)

7. Falsch: b)
Richtig: a), c), d)

Lerneinheit A 22

1. Vorauss.: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ $|\vec{a} - \vec{b}|$
Beh.: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Beweis: Aus $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ folgt durch Quadrieren
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ und $4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, also
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, also die Orthogonalität der Seiten.

2. Vorauss.: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,
$\overrightarrow{AC} = \vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$
Beh.: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
Beweis: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a}$
$= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$

3. Bei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (Rechteck) ist stets
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$.

4. Vorauss.: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Beh.: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Beweis: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$$\vec{b}^{\,2} - \vec{a}^{\,2} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$
$$|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2$$
$$|b| = |a|$$

5. Vorauss.: BC und AC sind Höhen, d.h. es gilt

V_1: $\vec{a} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$

V_2: $\vec{b} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$

Beh.: Auch OC sei Höhe, wenn O Schnittpunkt von BC und AC ist, d.h., es ist zu zeigen
$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$.

Beweis (1):

$\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

$\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

Vergleich: $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$
$$\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

Beweis (2):

$\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}\vec{b} = 0$ (nach V_1). Daraus folgt
$\vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ und
$(\vec{c} - \vec{a})\vec{b} - \vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0.$
Da $(\vec{c} - \vec{a})\vec{b} = 0$ (nach V_2), folgt unmittelbar $\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$.
Beide Beweise gelten sowohl für das spitzwinklige als auch für das stumpfwinklige Dreieck.

Lerneinheit A 23

o 77 $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}) = \overline{OB} : \overline{OF}$, da Dreieck OBF rechtwinklig

1. $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{61}$, $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BD} = -43$

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{43}{61} \approx -0{,}705$, $\sphericalangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD}) = 134{,}8^\circ$

2. a) $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7{,}5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{208} \approx 14{,}4$, $|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{225{,}25} \approx 15$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF} = 130$, $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}) = \frac{130}{216} \approx 0{,}602$, $\sphericalangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}) = 53{,}0^\circ$

b) $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7{,}5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7{,}5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OF}| \approx 15$, $|\overrightarrow{BD}| \approx 15$

$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BD} = 62{,}75$, $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD}) = \frac{62{,}75}{225} = 0{,}279$, $\sphericalangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD}) = 73{,}8^\circ$

3. a) -21 b) -8 c) -11 d) 1

4. a) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-50}{10 \cdot 13} \approx -0{,}3846$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 112{,}6^\circ$

b) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}} = 1$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$

c) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{36}{3 \cdot \sqrt{180}}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 26{,}4^\circ$

d) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-18}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}} = -1$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{117}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

6. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}| = 9$

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 0{,}9259$, $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 22{,}2^\circ$

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \approx -0{,}5659$, $\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \approx 124{,}5^\circ$

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \approx 0{,}8353$, $\sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \approx 33{,}3^\circ$

$$A_D = \frac{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \sin 33{,}3^\circ}{2} \approx 10{,}2$$

Lerneinheit A 24

o 78 a) identisch; zueinander parallel, aber nicht identisch; einander in genau einem Punkt schneidend; windschief

b) Schneidet eine dritte Gerade die beiden parallelen Geraden unter einem rechten Winkel, so bezeichnet man den Abstand der beiden Schnittpunkte als Abstand der parallelen Geraden.

c) $\beta = \delta = 180^\circ - \alpha, \quad \gamma = \alpha$

o 79 $\tan \measuredangle(g,h)$ ergibt sich aus $\dfrac{\left|\sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})}\right|}{\left|\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right|}$

$$\tan \measuredangle(g,h) = \left| \frac{\sqrt{1 - \dfrac{(m\overline{m} + 1)^2}{(m^2 + 1)(\overline{m}^2 + 1)}}}{\dfrac{m\overline{m} + 1}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{\overline{m}^2 + 1}}} \right| = \left| \frac{\overline{m} - m}{1 + m\overline{m}} \right|$$

1. $|\cos \measuredangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD})| = \frac{43}{61} \approx 0{,}7049$; Schnittwinkel $\measuredangle(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BD}) \approx 45{,}2^\circ$;
Schnittpunkt S (2; 3; 1,5)

2.

	a)	b)	c)
Schnittpunkt Schnittwinkel	(2; 3; 0) 67,4°	(4; 6; 0) 90°	wind- schief
3. Schnittpunkt Schnittwinkel	(4; 0; 3) 90°	g = h	$g \parallel h$, $g \neq h$

4. a) 48,5° b) 69,4° c) 41,2°; $\measuredangle(M_1H, HS) + \frac{1}{2} \measuredangle(HS, SK) = 90^\circ$

5. a) 48,5° b) 76° c) 28°; $\measuredangle(M_1I, IS) + \frac{1}{2} \measuredangle(IS, SL) = 90^\circ$

6. 20,6°; 30,5°; 128,9°

7. a) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ b) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

8. a) $y = \frac{4}{7}x + 3, \quad y = -\frac{7}{4}x; \quad S(-\frac{84}{65}; \frac{147}{65})$

$d = \frac{21}{65}\sqrt{65} \approx 2{,}6$

b) $y = 2x - 4, \quad y = -\frac{1}{2}x; \quad S(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5})$

$d = \frac{4}{5}\sqrt{5} \approx 1{,}79$

c) $y = -\frac{3}{2}x + 3, \quad y = \frac{2}{3}x; \quad S(-\frac{18}{13}; -\frac{12}{13})$

$d = \frac{6}{13}\sqrt{13} \approx 1{,}66$

d) $y = mx + n, \quad y = -\frac{1}{m}x; \quad S(-\frac{mn}{1+m^2}; \frac{n}{1+m^2})$

$$d = \sqrt{\frac{n^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}} = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

rneinheit A 25

80 a) $\sin x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \cos x$

b) $\cos x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad -\sin x$

81 a) $\cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \cos(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha)\sin\beta$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

b) $\cos[(90^\circ - \alpha) + \beta] = \cos(90^\circ - \alpha)\cos\beta - \sin(90^\circ - \alpha)\sin\beta$
$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

c) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$ usf.

. a) $\sin(\alpha + 30^\circ) = 1{,}2 \sin\alpha$

$\sin\alpha\cos 30^\circ + \cos\alpha\sin 30^\circ = 1{,}2\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = 1{,}2\sin\alpha \quad |: \sin\alpha$

$\frac{1}{2}\cot\alpha = 1{,}2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cot\alpha = 2{,}4 - \sqrt{3} \approx 0{,}6680$

$\alpha \approx 56{,}2^\circ$

b) $\cos(\alpha + 60^\circ) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$\cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

2. a) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{7}{25}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{336}{625}$$

b) $\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{527}{625}$

c) $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{336}{527}$

3. a) $2\sin^2\alpha$ b) $\frac{1}{\cos\alpha}$ c) $\sin 2\alpha$

4. a) Es gilt $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$

b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$$

5. a) $\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$

b) $\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = -\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. a) $\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$ b) $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$

7. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - (1 - \sin^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \sin^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta$$

8. $x \approx 111{,}5^\circ + k\cdot 360^\circ$ oder $x \approx 248{,}5^\circ + k\cdot 360^\circ$

9. $x = k\cdot 180^\circ$ oder $x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ$

Lerneinheit A 26

1. $F_E = 3\cdot 0{,}14\text{ N} = 0{,}42\text{ N}$; $W_{pot} = \frac{1}{2}F_E\cdot s$; $W_{kin} = \frac{m}{2}v^2$

$$|v| = \sqrt{\frac{F_E\cdot s}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}42\text{ N}\cdot 0{,}03\text{ m}^2}{0{,}004\text{ kg}}} = \sqrt{\frac{0{,}0126}{0{,}004}\text{m}^2\text{s}^{-2}} = \sqrt{3{,}15\text{ m}^2\text{s}^{-2}}$$

$$|v| \approx 1{,}8\text{ ms}^{-1}$$

2. $W = \vec{F_1}\cdot\vec{s} + \vec{F_2}\cdot\vec{s} = 50\text{ kN}\cdot 100\text{ m}\cos 20^\circ + 50\text{ kN}\cdot 100\text{ m}\cos 15^\circ$

$$\approx 9530\text{ kNm}$$

3. a) $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 2\text{ N}\cdot 3\text{ m}\cos 0^\circ = 6\text{ Nm}$

b) $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 3\text{ N}\cdot 2\text{ m}\cos 30^\circ \approx 5{,}2\text{ Nm}$

4. a) $W = 13{,}46\text{ Nm}$ b) $W = 2525\text{ Nm}$

5. a) $|\vec{F}| = \sqrt{350\text{ N}^2} \approx 18{,}71\text{ N}$

b) $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \begin{pmatrix}5\text{ N}\\10\text{ N}\\15\text{ N}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\text{ m}\\-1\text{ m}\\-9\text{ m}\end{pmatrix} = 10\text{ Nm} - 10\text{ Nm} - 135\text{ Nm}$

Die Arbeit beträgt 135 Nm.

6. $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1\ m \\ 6\ m \\ 4\ m \end{pmatrix}$; $\vec{x}_0 = -\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\vec{F} = -\frac{6}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{18}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\vec{F}\cdot\vec{s} = -\frac{6}{\sqrt{14}}\ Nm + \frac{108}{\sqrt{14}}\ Nm + \frac{48}{\sqrt{14}}\ Nm = \frac{150}{\sqrt{14}}\ Nm \approx 40\ Nm$

Lerneinheit A 27

o 85 $A_1(1;\ 2\sqrt{6})$, $A_2(1;\ -2\sqrt{6})$; $B_1(2;\sqrt{21})$, $B_2(2;\ -\sqrt{21})$
$C_1(2\sqrt{6};\ 1)$, $C_2(-2\sqrt{6};\ 1)$; $D_1(\sqrt{21};\ 2)$, $D_2(-\sqrt{21};\ 2)$

o 86 Es sei $\vec{x} = r\cos\alpha\,\vec{i} + r\sin\alpha\,\vec{j}$

$|\vec{x}| = \sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} = r$

$\vec{x}\cdot\vec{x} = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2$

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2$

o 87 a) Gerade durch $P(0;\ 4)$ mit dem Anstieg $m = -1$

b) Ebene durch die unter a) genannten Geraden der xy-Ebene, die auf ihr senkrecht stehen

o 88 a) Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0;\ 0)$ und dem Radius $r = 2$

b) Menge aller derjenigen Punkte $P(x;\ y;\ 0)$, die auf dem unter a) genannten Kreis der xy-Ebene liegen bzw. auf Geraden, die durch einen Punkt dieses Kreises gehen und auf der xy-Ebene senkrecht stehen, also in einer Kreiszylinderfläche liegen

1. a) $(x-2)^2 + y^2 = 6{,}25$ b) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

2. a) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$ b) $(x+1)^2 + (y+3{,}5)^2 = 12{,}25$

3. a) $M(0;\ -1)$; $r = 3$ b) $M(-4;\ 0)$; $r = 2\sqrt{5}$
c) $M(3;\ 2)$; $r = 3$ d) $M(4;\ 0)$; $r = 4$

4. a) $M(2;\ -1)$; $r = 2\sqrt{3}$ b) $M(-4;\ -1)$; $r = 4$
c) $M(-\frac{1}{3};\ \frac{3}{2})$; $r = \frac{11}{6}$ d) $M(\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3})$; $r = \frac{5}{6}$

5. A und D liegen auf $k(M;r)$, B und E außerhalb, C und F innerhalb des Kreises.

6. a) Halbkreis um $M(0;\ 0)$ mit $r = 3$; I. und II. Quadrant
b) Halbkreis um $M(0;\ 0)$ mit $r = 2$; II. und III. Quadrant
c) Halbkreis um $M(0;\ 15)$ mit $r = 8$ und $y \geqq 15$; oberer Halbkreis
d) Halbkreis um $M(-2;\ 0)$ mit $r = 3$ und $x \leqq -2$; linker Halbkreis
e) Halbkreis um $M(-2;\ -3)$ mit $r = 5$ und $y \leqq -3$; unterer Halbkreis
f) Halbkreis um $M(-5;\ -3)$ mit $r = 7$ und $x \geqq -5$; rechter Halbkreis

7. a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$
b) $k_1 : (x+2)^2 + y^2 = 50$; $k_2 : (x-4)^2 + (y+2)^2 = 50$
c) $(x+1)^2 + y^2 = 40$
d) $M(-\frac{A}{2};\ -\frac{B}{2})$; $r_2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$

Aus (1) $2A+B+C = -5$, (2) $3A+4B+C = -25$, (3) $2A = B+2$ folgt: $A = -2$, $B = -6$, $C = 5$, $M(1;\ 3)$, $r^2 = 5$ und $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

8. b) $M(-4;\ 2)$; $r = 10$

9. a) Halbkreis um $M(0;\ 0)$ mit $r = 5$; I. und II. Quadrant; oberer Halbkreis mit Endpunkten
b) Halbkreis um $M(0;\ 0)$ mit $r = 5$; II. und III. Quadrant; linker Halbkreis ohne Endpunkte
c) Teil der Kreisfläche des Kreises um $M(0;\ 0)$ mit $r = 5$ und $y > 3$; I. und II. Quadrant oberhalb der Geraden $y = 3$
d) Halbkreis um $M(0;\ 0)$ mit $r = 5$ und $y < 0$; III. und IV. Quadrant

e) Viertelkreis um M(0; 0) mit $r = 5$ und $x \leqq 0$, $y > 0$; II. Quadrant

f) Menge aller Punkte außerhalb des Kreises um M(0; 0) mit $r = 5$, für die $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ gilt; I. Quadrant

10. a) Kugel mit M(0; 0; 0) und $r = 5$

b) Kugelkörper mit M(0; 0; 0) und $r = 5$

c) Menge aller Punkte des Raumes außerhalb der Kugel mit M(0; 0; 0) und $r = 5$

d) Menge der Punkte der Kugel mit M(0; 0; 0) und $r = 5$, die in bzw. oberhalb der xy-Ebene liegen

e) Menge der Punkte der Kugel mit M(0; 0; 0) und $r = 5$, die in bzw. links von der xz-Ebene liegen

11. a) Kreis in der xz-Ebene mit M(0; 0; 0) und $r = 5$

b) Kreis, parallel zur xy-Ebene, der durch Schnitt der Kugel, $M_{Ku}(0; 0; 0)$ und $r_{Ku} = 5$, mit der Ebene $z = 3$ entsteht; $M_{Kr}(0; 0; 3)$, $r_{Kr} = 4$

c) Halbkreis in der Ebene $z = 3$ um M(0; 0; 3) mit $r = 4$ und $x \geqq 0$

d) Kreis um M(0; 0; 0) mit $r = 5$ in der Ebene durch die z-Achse und die Gerade $y = x$ der xy-Ebene

Lerneinheit A 28

o 91 a) Tangente senkrecht zum Berührungsradius

b) Sekante senkrecht zum Radius

o 92 (13) sind quadratische Gleichungen; zusätzlich zu untersuchen, welcher der 4 Werte für x mit den entsprechenden y-Werten auch die Geradengleichung erfüllt

o 93 Es läßt sich zeigen, daß die Gerade (19) weder k_1 noch k_2 schneidet.

o 94 $\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2$ | $\vec{x} \cdot \vec{x_o} = r^2$

$x^2 + y^2 = r^2$ | $xx_o + yy_o = r^2$

1. a) $S_1(13; 9)$, $S_2(-9; 13)$ b) Berührungspunkt S(3; 5)

2. a) $S_1(-8,8; 6,2)$, $S_2(3,7; -4,3)$ b) Berührungspunkt S(6; 4)

b) keine gemeinsamen Punkte d) keine gemeinsamen Punkte

3. M(4; -4), $r = 4$

4. a) $y_M = -2$, $x_M^2 = r^2$, M(-5; -2), $r = 5$

$(x+5)^2 + (y+2)^2 = 25$

b) $x_M = y_M = r$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ bzw. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

5. $M_1(-4; -1)$, $M_2(2, 7)$

6. $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 9$

7. a) $5x + 12y = 169$ bzw. $12x - 5y = 169$

b) S(17; 7) c) 90°

8. a) $y = \frac{4}{3}x + n$; $8x - 6y = 25$, $-8x + 6y = 25$

Diskriminante 0

b) $y = -\frac{3}{4}x + n$; $6x + 8y = 25$, $-6x - 8y = 25$

Diskriminante 0

Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten A 1 bis A 28

1. a) 6; $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ und die dazu entgegengesetzten

   b) 6; $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ und die dazu entgegengesetzten

2. a) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$ (dafür wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ auch $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{HG}$ oder $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{HG}$); analog für $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{HF}$ und die dazu entgegengesetzten

   b) $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{BD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FH}$; außerdem analog zu 2. a)

   c) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ und analog für jeden Vektor nach Bild A 142

4. $\vec{b} - \vec{a}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a}$

5. Die Aussage ist falsch. Liegen A,B,C,D in ein und derselben Ebene, so ist der Fall möglich, daß $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ist.

6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, also $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|$

9. a) Unter der Annahme, daß die Windrichtung senkrecht zur Strömungsrichtung ist, gilt

   $$F = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2}} = \sqrt{32500\ N^2} \approx 180\ N.$$

   b) die unter a) errechnete Kraft

10. a) $\vec{a} = -10\vec{i} + 6\vec{j}$ b) $x = -10$, $y = 6$ bzw. $-10\vec{i}$ und $6\vec{j}$

   c) $Q(-8;\ 11)$, $R(11;\ -3)$

11. a) $(5;\ 2)$ b) $(-4;\ -1)$ c) $(-3;\ 3)$ d) $(a_x + x_A;\ a_y + y_A)$

12. a) $(-\frac{1}{2};\ \frac{9}{2})$ b) $(0;\ 1;\ 1)$ c) $(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2})$

   d) $(\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2})$ e) $(-2;\ 0;\ 3)$ f) $(\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2};\ \frac{z_A + z_B}{2})$

13. a) $y = -x - 17$ b) $y = 0{,}5x + 1{,}5$ c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$

15. a) $m = 2$, $\vec{a} = r(\vec{i} + 2\vec{j})$ mit $r \in P$, $r \neq 0$

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in P$

   b) $m = 0$, $\vec{a} = r\vec{i}$ mit $r \in P$, $r \neq 0$

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in P$

   c) m nicht definiert, $\vec{a} = r\vec{j}$ mit $r \in P$, $r \neq 0$

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in P$

   d) $m = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\vec{a} = r(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})$ mit $r \in P$, $r \neq 0$

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in P$

16. $y = \frac{-a - 2b + 3}{2a - b + 1}x - \frac{6a + 9}{2a - b + 1}$

   Für $x = 0$ ist $y = -\frac{6a + 9}{2a - b + 1} = -3$.

   Für $m = 0$ ist $-a - 2b + 3 = 0$. Also $a = 7$, $b = -2$

17. Schnittpunkt des Dreiecks mit der Geraden
   AC in $S_1(3{,}4;\ 1{,}2)$, außerhalb der Seite $\overline{AC}$;
   AB in $S_2(2{,}8;\ 1{,}1)$, auf der Seite $\overline{AB}$;
   BC in $S_3(0{,}42;\ 0{,}77)$, auf der Seite $\overline{BC}$

18. $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 7)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

19. Voraus.: $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$; $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$

   Beh.: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$

   Beweis: $e^2 + f^2 = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{a})$
   $= a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + a^2$
   $= 2(a^2 + b^2)$

20. Voraus.: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{h} \cdot \vec{c} = 0$; $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{p}$

Beh.: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$

Beweis: $\vec{a} = \vec{h} - \vec{p}$; $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{h} - \vec{p})\cdot(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{h}\cdot\vec{c} - \vec{p}\cdot\vec{b} + \vec{p}\cdot\vec{c}$$
$$= \vec{b}(\vec{h} - \vec{p}) + \vec{p}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{p}\cdot\vec{c} = \vec{p}\cdot\vec{c}$$
$$a^2 = p \cdot c$$

Der Beweis von $b^2 = c \cdot q$ erfolgt entsprechend.

21. In Bild A 145 sei $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{h}$.

Vorauss.: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{h} \cdot \vec{p} = 0$; $\vec{h} \cdot \vec{q} = 0$

Beh.: $h^2 = p \cdot q$

Beweis: $\overrightarrow{BC} = \vec{a} = \vec{h} + \vec{p}$; $\overrightarrow{CA} = \vec{b} = \vec{q} - \vec{h}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{h} + \vec{p})\cdot(\vec{q} - \vec{h}) = \vec{h}\cdot\vec{q} - h^2 + \vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{h}\cdot\vec{p}$$
$$h^2 = \vec{p} \cdot \vec{q} = p \cdot q$$

22. $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{x}) = \alpha$; $\sphericalangle(\vec{j}, \vec{x}) = \beta$; $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{x}) = \gamma$

a) $\alpha = 53{,}1^\circ$; $\beta = 36{,}9^\circ$; $\gamma = 90^\circ$

b) $\alpha = 68{,}2^\circ$; $\beta = 56{,}1^\circ$; $\gamma = 42{,}0^\circ$

c) $\alpha = 45{,}0^\circ$; $\beta = 55{,}6^\circ$; $\gamma = 64{,}9^\circ$

23. a) $y = x + 1$ b) $y = 3x - 3$ c) $y = -3x + 9$ d) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

24. a)
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \quad \left(\text{Erweitern mit } \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$$
$$= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

b)
$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha \pm \beta)} = \frac{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha \pm \tan\beta} \quad \left(\text{Erweitern mit } \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}\right)$$
$$= \frac{\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} \mp 1}{\frac{1}{\tan\beta} \pm \frac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

25. Kreisgleichung: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

Ermitteln der Berührungspunkte: (1) $(x_o-3)^2+(y_o+1)^2 = 5$

(2) $(4-3)(x_o-3)+(-4+1)(y_o+1)=5$

Berührungspunkte: $P_{o1}(5; -2)$, $P_o2(2; -3)$

Länge der Berührungssehne: $l = \sqrt{10}$

26. a) $S_1(4; 3)$, $S_2(-3; 4)$

Tangentenanstiege: $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$; Schnittwinkel: 90°

b) $S_1(5; 3)$, $S_2(4; 4)$

Tangentenanstiege in S_1: $m_1 = -\frac{3}{2}$, $m_2 = 0$; Schnittwinkel: $56{,}3^\circ$ $(123{,}7^\circ)$

Übungen und Anwendungen

1. a) Vorauss.: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$; $\vec{CB} = \vec{AD}$

Beh.: $|\vec{CA} + \vec{CB}| = |\vec{CA} - \vec{CB}|$

Beweis: $\vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CA} + \vec{CB} = \vec{CD}$

$\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA}$

$|\vec{CD}| = |\vec{BA}|$, da Viereck ADBC ein Rechteck; folglich

$|\vec{CA} + \vec{CB}| = |\vec{CA} - \vec{CB}|$

b) ja

2. Zu zeigen ist $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{o}$.

Vorauss.: $\vec{AB} = \vec{DC}$

Beweis: $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OD}$

$= \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{o}$

3. Die Behauptung gilt für beliebige Punkte A,B,C,D, also auch für ein Tetraeder ABCD.

Beweis: O sei ein beliebiger Punkt des Raumes. Dann gilt

$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{OD} + \vec{OC} - \vec{OA} - \vec{OB}$,

$\vec{BD} + \vec{AC} = \vec{OD} - \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OD} + \vec{OC} - \vec{OA} - \vec{OB}$,

also $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{AC}$

4. a) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bzw. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

b_1) $\vec{b} = r\vec{a}$, $-2 < r < -\frac{1}{2}$; aber auch $\vec{a} = \vec{AC}$, $\vec{b} = \vec{CB}$,

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) > 120°$

b_2) $\vec{b} = r\vec{a}$, $r < 0$; aber auch $\vec{a} = \vec{AC}$, $\vec{b} = \vec{CB}$,

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) > 60°$

5. a) 1 b) 4,5 c) keine Lösung d) 0 e) -2 f) 1 oder -1

6. a) -1 b) -2 c) 0 d) 1 oder -1 e) $\frac{1}{2}$ f) 0

7. ja, denn $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

8. ja, aenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$

9. a) 15 b) 16 c) 6 d) 9 e) $\frac{9}{2}$ f) 4

10. $A = A_1 + A_2 - A_3$ mit

$A_1 = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)$; $A_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_2 - x_3)$; $A_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$

Umformungen ergeben die Formel (*).

11. a) A = 0; die Punkte liegen auf ein und derselben Geraden

b) $A = \frac{53}{2}$

12. a) $m = \sqrt{52}$, $A = 32$ b) $m = \frac{15}{2}$, $A = 15$ c) $m = \sqrt{45}$, $A = 30$

13. $\vec{AB} = 24\vec{i} - 10\vec{j}$; $\vec{BC_1} = \frac{1}{2}(10\vec{i} + 20\vec{j})$; $\vec{BC_2} = \frac{1}{2}(-10\vec{i} - 24\vec{j})$

$C_1(14; 5)$, $D_1(-10; 15)$; $C_2(4; -19)$, $D_2(-20; -9)$

14. $C_1(6; -14)$, $C_2(-6; 10)$

15. $C_1(1 + 3\sqrt{3}; -1 - 4\sqrt{3})$, $C_2(1 - 3\sqrt{3}; 1 + 4\sqrt{3})$

16. $M(-3; 1; 3)$, $D(-2; -2; 4)$, $S(x;y;z)$, $\vec{MA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{MB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von S ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems

(1) $\vec{MA} \cdot \vec{MS} = 5x + 2y - 2z + 19 = 0$

(2) $\vec{MB} \cdot \vec{MS} = -x + 3y - z - 3 = 0$

(3) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 354$

$S_1(1; 8; 20)$, $S_2(-7; -6; -14)$

17. $C(-2; 4; 1)$, $D(0; 0; 6)$, $E_1(7; -4; 0)$, $E_2(1; 8; 12)$,

$F_1(5; 0; -5)$, $F_2(-1; 12; 7)$, $G_1(1; -2; -5)$, $G_2(-5; 10; 7)$,

$H_1(-3; -6; 0)$, $H_2(-3; 6; 12)$

18. Gegeben: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; E,D Mittelpunkte von $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BC}$;

$\vec{m_1} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{m_2} = \overrightarrow{BE}$; $\vec{m_1} \cdot \vec{m_2} = 0$

Gesucht: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aus $\vec{m_1} \cdot \vec{m_2} = (\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b})(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}) = 0$ folgt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{4}{5}a^2$ und

$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0{,}8$; $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 37^\circ$

19. a) $\frac{12}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{21}{5}$ b) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

20. a) 3 b) rund 12,5 c) rund 5,7 d) $\frac{9}{5}$

21. a) $y = \frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ b) $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$ c) $\vec{x} = t(\vec{j} - \vec{i})$

d) $\vec{x} = (2 - 3r)\vec{i} + (3{,}5 + 4r)\vec{j}$

22. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

23. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$, $t \in P$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in P$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t \in P$ d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $t \in P$

24. A(7; −4), B(−3; − 8)

25. $7x + 23y = 289$; $\overline{AB} = 24$

26. a) A(8; 4), B(1; −3); $\overline{AB} = 7\sqrt{2} \approx 10$

b) $y = -x + 5$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7$

27. $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 1 - 1 = 0$; $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$

28. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{21}{65} \\ \frac{77}{65} \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 21 \\ 77 \end{pmatrix}$ oder $3y - 11x + 19 = 0$

29. a) M(1; 1), r = 1 b) M(0; $\frac{8}{3}$), $r = \frac{8}{3}$

30. a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ b) $x^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{64}{9}$

31. a) M(−4; −7), r = 5, $(x+4)^2 + (y+7)^2 = 25$; $S_1(0;-4)$, $S_2(0;-10)$

b) M(10;8), r = 5, $(x-10)^2+(y-8)^2=25$; keine Schnittpunkte

34. a) Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$: $y = 2x - 9{,}5$

b) Für den Fall, daß O(0; 0) ist, gilt:

$(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ (Kreis um $(-\frac{a}{2}; 0)$ mit $r = \frac{a}{2}$).

35. $(x-a)^2 + y^2 = 4a^2$; Menge aller Punkte des Kreises mit

M(a; 0) und r = 2a

36. a) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3\text{ km} \\ 12\text{ km} \\ 4\text{ km} \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 13$ km

b) $\cos \sphericalangle P_1P_3P_2 = \frac{\overrightarrow{P_3P_1} \cdot \overrightarrow{P_3P_2}}{|\overrightarrow{P_3P_1}| \cdot |\overrightarrow{P_3P_2}|} = \frac{73}{13 \cdot \sqrt{146}} \approx 0{,}464$; $\sphericalangle P_1P_3P_2 \approx 62^\circ$

37. 178 $m \cdot s^{-1}$; 6,2°

38. Bildpunkte: $P_1'(40; 0)$, $P_2'(\frac{120}{11}; \frac{160}{11})$; $\overline{P_1P_2} \approx 4{,}8$; $\overline{P_1'P_2'} \approx 32{,}5$

39. a) F(58,2; 345) bzw. F(58,2; −345)

40. a) $\frac{\sin x}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{500}$; Abweichung von NO nach N um 1,58°

b) $v^2 = v_R^2 + v_W^2 - 2v_R \cdot v_W \cdot \cos \sphericalangle(-\vec{v_R}, \vec{v_W})$; $v = 514$ $km \cdot h^{-1}$

41. a) $v_G^2 = v_o^2 + v^2 - 2v_o v \cos 20^\circ$; $v_G \approx 528$ $m \cdot s^{-1}$

b) $\sin \varphi = \frac{v_o \cdot \sin 20^\circ}{v_G} \approx 0{,}518$; $\varphi \approx 149^\circ$

42. $\overrightarrow{F_{S1}} + \overrightarrow{F_{S2}} + \overrightarrow{F_M} = -\overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{F_{S1}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_{S2}} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_M} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 15$, $\lambda_3 = -35$; $\overrightarrow{F_{S1}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_{S2}} = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$;

$|\overrightarrow{F_{S_1}}| = 5\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{F_{S2}}| = 15\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{F_M}| = 35$

43. a) $v_1 = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 1{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{1\ \mathrm{km}}{1{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = \frac{2}{3}\mathrm{h} = 40\ \mathrm{min}$

b) $v_2 = \sqrt{2^2 + 2{,}5^2}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 3{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 0{,}4\ \mathrm{h} = 24\ \mathrm{min}$

$s_u = 0{,}4\ \mathrm{h} \cdot 2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 0{,}8\ \mathrm{km}$

$t_3 = \frac{0{,}8\ \mathrm{km}}{4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = 0{,}2\ \mathrm{h} = 12\ \mathrm{min}$; $t_4 = t_2 + t_3 = 36\ \mathrm{min} < 40\ \mathrm{min}$

Schwimmen: 40 min; Schwimmen und Laufen: 36 min

44. $\frac{\sin x}{15\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = \frac{\sin 15^\circ}{9\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}$; $\sin x \approx 0{,}4313$; $x \approx 25{,}5^\circ$

Die wahre Windrichtung beträgt $25{,}5^\circ + 15^\circ = 40{,}5^\circ$.

45. Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v_o t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$ folgt

(1) $x = v_o t \cos\alpha$; (2) $y = v_o t \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2$.

Aus (1) erhält man $t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$, in (2) eingesetzt

$y = x \tan \ - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}$. Für $y = 0$ folgt $x = 0$ oder

$$x = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die maximale Flugweite erhält man für $\alpha = 45^\circ$.

Für $v_o = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ wird $x \approx 5$ m.

46. a) $x^2 + (y - 10)^2 + z^2 = 3600$

b) $\overrightarrow{AB} = 40\vec{i} + 60\vec{j} - 40\vec{k}$; $|\overrightarrow{AB}| = 82{,}5$ km; $t = 0{,}069$ h $= 248$ s

47. 14,2 Einheiten

48. $a = d \sin\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)$

49. Punkt der x-Achse sei $A(x; 0)$.

$\overrightarrow{AP_1} = (-2 - x)\vec{i} + 4\vec{j}$; $\overrightarrow{AP_2} = (8-x)\vec{i} + 6\vec{j}$

Bei Reflexion: $\sphericalangle(\overrightarrow{AP_1}, \vec{j}) = \sphericalangle(\overrightarrow{AP_2}, \vec{j})$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AP_1}, \vec{j}) = \frac{4}{\sqrt{(-2-x)^2+16} \cdot 1}$; $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AP_2}, \vec{j}) = \frac{6}{\sqrt{(8-x)^2+36}}$;

$-2 < x < 8$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten erhält man $x = 2$; $A(2; 0)$.

50. Punkt der Bande sei $A(10; y_o)$.

$\overrightarrow{AP_1} = -12\vec{i} + (4-y_o)\vec{j}$; $\overrightarrow{AP_2} = -2\vec{i} + (6-y_o)\vec{j}$; $4 < y_o < 6$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AP_1}, -\vec{i}) = \frac{12}{\sqrt{144 + (4-y_o)^2}}$; $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AP_2}, -\vec{i}) = \frac{2}{\sqrt{4 + (6-y_o)^2}}$

$y_o = \frac{40}{7}$; $A(10; \frac{40}{7})$

51. g_{II}: $y+300 = \tan 63{,}4^\circ(x+400)$; $\tan 63{,}4^\circ \approx 2$; $y \approx 2x + 500$

g_I: $y-800 = \tan 123{,}7^\circ(x+300)$; $y \approx -1{,}5x + 350$

$S(-43; 414)$

52. a) $r = 5$; $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ b) $x_o = 6$; $P_o(6; 0)$

c) $y = \frac{4}{3}x - 8$; $y = -\frac{3}{4}x + 43$; aus $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ folgt $t_1 \perp t_2$

53. a) $\vec{x} = (-2 - 2t)\vec{i} + (8+2t)\vec{j} + (2+8t)\vec{k}$ c) 60°

d) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = -2\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$; $A = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin 60^\circ = 36\sqrt{3} \approx 62{,}35$

54. a) $\vec{x} = (2-2t)\vec{i} + 2\vec{j} + (3-2t)\vec{k}$; $P_o(-1; 2; 0)$

b) $\vec{x} = (4+3r)\vec{i} + (6+r)\vec{j} + (9+2r)\vec{k}$

c) $c = 4$; $S(-8; 2; -7)$

B. Weitere Klassen nichtrationaler Funktionen; ihre Differentiation und Integration

Lerneinheit B 1

o 1 $y = 2x_o x - x_o^2$

o 2 a) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ c) $f'(x) = 12x^3 - 4x + \frac{1}{2}$

d) $f'(x) = 9x^8 + 35x^6 - 2x$ e) $f'(x) = \frac{x^4 + 15x^2 + 14x}{(x^2 + 5)^2}$

f) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$

o 3 a) $\Phi'(x) = x^2$ b) $\Phi'(x) = \frac{1}{x}$

1. a) $f'(x) = 2(\frac{1}{4}x^5 - 3x)(\frac{5}{4}x^4 - 3)$ b) $f'(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{56}{x^5}$

c) $f'(x) = \frac{(2x+4)(x^3-2x) - (x^2+4x-4)(3x^2-2)}{(x^3 - 2x)^2} = \frac{-x^4-8x^3+10x^2-8}{(x^3-2x)^2}$

d) $f'(x) = 3c(cx+d)^2$ e) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$

f) $f'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ g) $g'(t) = \frac{-a}{\sqrt{1 - 2t}}$

2. a) $f'(x) = 15{,}6\,(5{,}2x-8)^2$ b) $f'(x) = 8x - 10x^{-3}$

c) $f'(x) = \frac{x^4-3x^2+6x+6}{(x^2+1)^2}$ d) $f'(x) = 2a(ax + b)$

e) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ f) $f'(x) = \frac{(x^3+2x)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$

g) $h'(s) = p + 8s(1 + s^2)^3$

3. a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ b) $F(x) = 6x^3 + x^2 - 3x + c$

c) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ d) $F(x) = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-3)^3} + c$

4. a) $F(x) = \frac{1}{16}x^4 + c$ b) $F(x) = -\frac{9}{2}x^6 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{17}{2}x^2 + c$

c) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$ d) $F(x) = \sqrt{x+7} + c$

5. a) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - x^2 + 5x + 2$

b) z.B. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ (nicht eindeutig)

6. a) $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

b) F und G unterscheiden sich um eine additive Konstante.

c) $F(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 1 = G(x) + 1$

7. a) $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ b) $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

c) $y = 2x$

8. $f'(x) = \frac{a}{\sqrt{2x-a}} = \sqrt{a}$; $x = a$; $f'(a) = \sqrt{a}$

Lerneinheit B 2

o 4 a) $S_1(0;\ 0)$, $S_2(2;\ 0)$, $S_3(-5;\ 0)$

b) Nullstellen von f': $x_1 = -1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$; $x_2 = -1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$

$f'(x) < 0$ für $x_2 < x < x_1$; dort f monoton fallend

$f'(x) > 0$ für $x < x_1$ bzw. $x > x_2$; dort f monoton wachsend

c) $f'(x_o) = 0$ für $x_o = -1 \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$ (notw. Kriterium)

$f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) \neq 0$ (hinr. Kriterium)

d) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 10$; $f''(x) = 6x + 6$

$f'(x) = 0$ für $x_{o1} = -1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$, $x_{o2} = -1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$

$f''(x_{o1}) = -6 + 6\sqrt{\frac{13}{3}} + 6 > 0$; x_{o1} Minimumstelle

$f''(x_{o2}) = -6 - 6\sqrt{\frac{13}{3}} + 6 < 0$; x_{o2} Maximumstelle

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x^2 - 10x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 10x) = -\infty$

f) $Wb(f) = P$

o 5 $f(-2) = -3{,}5$; $f(-1{,}5) = -24$; $f(-10) = -0{,}23$

o 6 b) $V = f(r,h) = \frac{\pi}{3}r^2h$ c) $V = f(h) = \frac{\pi}{3}(s^2-h^2)h$; $0 < h < s$

d) $V' = f'(h) = \frac{\pi}{3}s^2 - \pi h^2$; $V'' = f''(h) = -2\pi h$

$h_{Max} = \frac{\sqrt{3}}{3}s$; $V_{Max} = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}\,s^3$

e) f ist in den Endpunkten des Intervalls nicht definiert. Da f für alle h mit $0 < h < s$ stetig ist und im Intervall genau einen lokalen Extremwert hat, muß das lokale Maximum zugleich globales Maximum sein.

f) $r_{Max} = \frac{\sqrt{6}}{3}s$; $h_{Max} = \frac{\sqrt{3}}{3}s$

1. a) $x_{o1} = \sqrt{2}$, $x_{o2} = -\sqrt{2}$; $P_{Max}(0;-2)$, $P_{Min}(\sqrt{\frac{1}{2}};\ -\frac{9}{4})$, $P_{Min}(-\sqrt{\frac{1}{2}};\ -\frac{9}{4})$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$; $Db(f) = P$, $Wb(f)$: $y \geq -\frac{9}{4}$

b) $x_o = -1$; $x_p = 1$; keine lokalen Extrema

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$; $Db(f)$: $x \in P$, $x \neq 1$; $Wb(f)$: $y \in P$, $y \neq 1$

c) $x_{o1} = 0$, $x_{o2} = -2$; $P_{Min}(-\frac{4}{3};\ -\frac{4}{9}\sqrt{6}) \approx (-1{,}3;\ 1{,}1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $Db(f)$: $x \geq -2$, $Wb(f)$: $y \geq -\frac{4}{9}\sqrt{6}$

d) $x_{o1} = 5$, $x_{o2} = -5$; $P_{Max}(0; \frac{15}{4})$

$Db(f)$: $-5 \leqq x \leqq 5$, $Wb(f)$: $0 \leqq y \leqq \frac{15}{4}$

2. a) $x_{o1} = 0$, $x_{o2} = 3$; $P_{Max}(0; 0)$, $P_{Min}(2; -4)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $Db(f) = Wb(f) = P$

b) $x_o = 0$, $x_p = 4$; $P_{Min}(-4; -\frac{1}{16})$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $Db(f)$: $x \in P$, $x \neq 4$; $Wb(f)$: $y \geqq -\frac{1}{16}$

c) $Db(f)$: $0 \leqq x \leqq 3$; keine Nullstellen

$P_{Max}(\frac{3}{2}; \sqrt{6})$; $f(0) = \sqrt{3}$, $f(3) = \sqrt{3}$

3. a) Nullstellen für $q \leqq 0$: $x_{o1} = \sqrt{-q}$, $x_{o2} = -\sqrt{-q}$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

c) Wenn $q > 1$, so $P_{Max}(0; q)$; wenn $q < 1$, so $P_{Min}(0; q)$

4. $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm $\approx 6{,}8$ cm; $h = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm $\approx 13{,}7$ cm

5. $P(1; 1)$

Lerneinheit B 3

o 9 Stetigkeit im angegebenen Intervall

o 10 $\Phi(x) = \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$; $\Phi(1) = -\frac{7}{3}$, $\Phi(2) = 0$, $\Phi(3) = \frac{19}{3}$

1. a) 20 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\sqrt{2} - 1$

e) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1)$ f) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

2. a) -9 b) $\frac{14}{3}$ c) $4{,}12$ d) $4(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

e) 31 f) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

3. $q = 8$

4. $q = 0$ oder $q = 4$

5. $A = \int_1^4 (x-2)^2 dx = 3$

6. $A = \int_1^2 (x^3+5x^2+4x)dx = \frac{257}{12} \approx 21{,}4$

7. Nullstellen: $x_{o1} = -4$, $x_{o2} = -1$, $x_{o3} = 0$

$$A = \left| \int_{-4}^{-1} (x^3+5x^2+4x)dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} (x^3+5x^2+4x)dx \right| = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}$$

8. $A = \int_{-2}^{4} (g(x)-f(x))dx = \int_{-2}^{4} (-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 6)dx = 27$

9. b) $P_1(2; 1)$, $P_2(6; 9)$ c) $A = \frac{8}{3}$

Lerneinheit B 4

o 12 a) $\frac{1}{4}x^4 + c$ b) $-\frac{1}{x} + c$ c) $\frac{4}{5}x \sqrt[4]{x} + c$ d) $\frac{3}{5}x \sqrt[3]{x^2} + c$

o 13 Es sei $(x^r)' = rx^{r-1} = x^{-1}$, $r \in R$.

Koeffizientenvergleich liefert $r = 1$.

Exponentenvergleich liefert $r-1 = -1$, also $r = 0$; Widerspruch

Lerneinheit B 5

o 17

x	1	2	4	10	0,5	0,1	0,01
$\Phi'(x)$	1	0,5	0,25	0,1	2	10	100

o 18 Andeutung des Beweises des Induktionsschrittes mit Hilfe von Regel (5):

Voraussetzung: $\Phi(x^k) = k\ \Phi(x)$

Behauptung: $\Phi(x^{k+1}) = (k+1)\ \Phi(x)$

$$\begin{aligned}\Phi(x^{k+1}) = \Phi(x^k \cdot x) &= \Phi(x^k) + \Phi(x) \text{ n. (5)}\\ &= k\,\Phi(x) + \Phi(x) \text{ n. V.}\\ &= (k+1)\ \Phi(x)\end{aligned}$$

1. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

   a) $x_1 \cdot x_2 - 1 \neq x_1 - 1 + x_2 - 1$

   b) $\sqrt{x_1 \cdot x_2} - 1 \neq \sqrt{x_1} - 1 + \sqrt{x_2} - 1$

   c) $(x_1 \cdot x_2)^3 - 1 = x_1^3 \cdot x_2^3 - 1 \neq x_1^3 - 1 + x_2^3 - 1$

2. Beweis von (6): $\Phi(x_1) = \Phi(\frac{x_1}{x_2} \cdot x_2) = \Phi(\frac{x_1}{x_2}) + \Phi(x_2)$

$$\Longrightarrow \Phi(\frac{x_1}{x_2}) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

   Beweis von (7): $\Phi(\frac{1}{x}) = \Phi(1) - \Phi(x)$ n. (6)

   $= -\Phi(x)$ n. (1)

3. $A_1 = \Phi(a)$; $A_2 = \Phi(ab) - \Phi(b) = \Phi(a) + \Phi(b) - \Phi(b) = \Phi(a)$

4. $\int\limits_1^a \frac{dx}{x} = \int\limits_{\frac{1}{a}}^1 \frac{dx}{x}$

5. a) 1,6094 b) 3,9120 c) 6,2146

   d) 8,5172 e) − 0,3567 f) − 2,9958

6. a) 6,0753 b) 3,7727 c) 1,4701

   d) − 0,8325 e) − 2,3026 f) − 1,2040

7. a) 193 b) 807 c) 0,4 d) rund 1,4

8. a) 204 b) 673 c) 0,6 d) 3,2

Lerneinheit B 6

o 19 Stetigkeit und Monotonie der Funktion $y = \ln x$ (Zwischenwertsatz)

o 20 $x_1 < e < x_2$ mit $x_1 = 1{,}01^{100}$ und $x_2 = 1{,}01^{101}$

Aus $\lg x_1 = 0{,}432$ folgt $x_1 = 2{,}70$.

Aus $\lg x_2 = 0{,}43632$ folgt $x_2 = 2{,}73$.

1. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) −1 d) $-\frac{1}{2}$

   e) n f) $\frac{1}{n}$ g) −n h) $-\frac{1}{n}$

2. $\ln e^n = n \ln e = n$; $\ln e^{n+1} = (n+1) \ln e = n + 1$

Lerneinheit B 7

o 21 Anwendung der Kettenregel

o 22 a) e b) e^2 c) e^3 d) e^{-1} e) e^{-2} f) e^{-3}

o 23 $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $P(e^3;\ 9)$; $y-9 = \frac{6}{e^3}(x-e^3)$, $y = \frac{6}{e^3} + 3$

o 24 $\left[\frac{3}{2} \ln (2x-1)\right]_3^{5,5} = \frac{3}{2} (\ln 10 - \ln 5) = \frac{3}{2} \ln 2$

1. a) $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ b) $f'(x) = \frac{1}{x}$ c) $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$

   d) $f'(x) = \frac{2x + \ln x - 2}{x^2}$ e) $f'(x) = \frac{2}{1 - x^2}$

2. a) $f'(x) = \frac{21}{3x - 5}$ b) $f'(x) = \frac{1}{x}$ c) $f'(x) = \frac{ab}{bx + c}$

   d) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e) $f'(x) = \frac{x\,(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

3. a) Induktionsanfang: (n = 1)

$f'(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f'(x) = (-1)^0 \cdot \frac{0!}{x} = \frac{1}{x}$

Der Induktionsanfang ist richtig.

b) Induktionsschritt:

Vorauss.: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$

Beh.: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}$

Beweis:
$$f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left[(-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}\right]'$$
$$= \left[(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!\,x^{-k}\right]'$$
$$= \left[(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!\,(-k)x^{-k-1}\right]$$
$$= (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Der Induktionsschritt ist richtig.
Aus richtigem Induktionsanfang und richtigem Induktionsschritt folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Richtigkeit der Formel für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$.

4.* $f'(x) = \frac{-(x+1)}{x(1+x+\ln x)^2}$; $x \cdot f'(x) = \frac{-(x+1)}{(1+x+\ln x)^2}$

$$f(x) \cdot \left[f(x)\cdot\ln x - 1\right] = \frac{1}{1+x+\ln x} \cdot \left[\frac{\ln x}{1+x+\ln x} - \frac{1+x+\ln x}{1+x+\ln x}\right]$$
$$= \frac{\ln x - 1 - x - \ln x}{(1+x+\ln x)^2} = \frac{-(x+1)}{(1+x+\ln x)^2}, \text{ also}$$
$$x \cdot f'(x) = f(x) \cdot \left[f(x) \cdot \ln x - 1\right]$$

5. a) $y = x - 1$ b) $y = x$

6. Berührungspunkt P(e; 1); Tangentengleichung $y = \frac{1}{e} \cdot x$

7. Schnittpunkt S $\left(\frac{2e}{e^2-1}; \frac{2}{e^2-1}\right)$; Schnittwinkel $\varphi \approx 49{,}6^\circ$

8. a) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c$ b) $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln 2 + c$

c) $F(x) = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + c$

9. a) $F(x) = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c$ b) $F(x) = \frac{5}{7}\ln(7x+3) + 2x^2 + c$

c) $F(x) = \ln 2 \cdot \ln|x| + c$

10. a) $\frac{1}{2}(e^2+1) \approx 4{,}195$ b) $2e \approx 5{,}437$ c) $\ln 2 \approx 0{,}693$

11. a) $\frac{2\cdot\ln 2}{\ln 10} \approx 0{,}602$ b) $\frac{1}{3}\ln 4 \approx 0{,}462$ c) $\ln 2 + \frac{7}{6} \approx 1{,}860$

12. a) Nullstelle $x_0=1$; $E_1(1;0)$ lok.Min.Pkt., $E_2\left(\frac{1}{e^2};\frac{4}{e^2}\right)$ lok.Max.Pkt.

b) Keine Nullstelle; E(e; e) lok.Min.Pkt.

13. a) Nullstelle $x_0 = 1$; $E\left(\frac{1}{\sqrt{e}};-\frac{1}{2e}\right)$ lok.Min.Pkt.

b) Nullstelle $x_0 = 1$; $E\left(e; \frac{1}{e}\right)$ lok.Max.Pkt.

14. a) $x_E = 4$; $d = 2 - \ln 4 \approx 0{,}614$

b) $x_E = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}366$; $d = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}82$

15. a) $\ln e = 1$ b) $2 \ln 4 \approx 2{,}773$

16. a) $\ln e = 1$ b) $\frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 7) \approx 0{,}126$

Lerneinheit B 8

o 27 Stetigkeit, Monotonie; $\bar{f}$ differenzierbar, wenn $f'(x) \neq 0$ im betrachteten Intervall

1. a) 1,3771 b) 1,0202 c) 0,1353
   d) 0,3679 e) 0,5 f) 0,3465

2. a) 4,7115 b) 1,0833 c) 0,0183
   d) 0,6065 e) 0,3333 f) 0,2310

3. a) 0,46 b) $-0{,}86$ c) 5,30 d) 1,39 e) 6,91

4. a) 1,80 b) $-1{,}45$ c) 2,71 d) 2,08 e) x 10

Lerneinheit B 9

o 31 $A = \int_{-1}^{1} (e^x+x^2)dx = \left[e^x + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = e + \frac{1}{3} - \frac{1}{e} + \frac{1}{3} = e - e^{-1} + \frac{2}{3}$

1. a) $f'(x) = 2e^{2x}$ b) $f'(x) = e^{3x}$ c) $f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

   d) $f'(u) = -3e^{-3u+5}$ e) $f'(z) = e^z(7z^6+z^7)$ f) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

2. a) $f'(x) = 4e^{2x}$ b) $f'(x) = 2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}$ c) $f'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$

   d) $f'(v) = -e^{5-\frac{1}{2}v}$ e) $f'(z) = e^{z}\sqrt{z}\,(1+\frac{1}{2z})$ f) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

3. $y' = f'(x) = e^{-x}-xe^{-x}$; $x\cdot y' = xe^{-x}-x^2e^{-x} = y-xy = (1-x)y$

4. a) $y = x + 1$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = x$

5. a) $y = -x + 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ c) $y = 0$

6. a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + c$ b) $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

   c) $F(t) = e^{5t+7} + c$ d) $F(x) = e^x + ex + e\ln x + c$

7. a) $F(x) = -e^{-x+5} + c$ b) $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax} + c$

   c) $F(t) = -\frac{1}{9}e^{2-3t} + c$ d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}\ln x + c$

8. a) $e - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$ b) $-\frac{1}{a}(e^{-1} - 1) \approx \frac{1}{a} \cdot 0{,}632$

9. a) $e - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$ b) $a(e-1) \approx 1{,}71a$

10. $A = e^3-e \approx 17{,}37$ 11. $A = e - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$

12. a) $S(1;\ 0)$ c) $A = e - \frac{4}{3} \approx 1{,}38$

13. a) Nullstelle $x_o = 0$; $E(-1;\ -\frac{1}{e})$ lok.Min., $-\frac{1}{e} \approx -0{,}37$

    b) Nullstelle $x_o = 0$; $E_1(0;\ 0)$ lok.Min., $E_2(-2;\frac{4}{e^2})$ lok.Max.,

    $\frac{4}{e^e} \approx 0{,}54$

14. a) Nullstelle $x_o = 0$; $E(1;\ \frac{1}{e})$ lok. Max., $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$

    b) Nullstelle $x_o = 0$; $E_1(0;\ 0)$ lok.Min., $E_2(2;\ \frac{4}{e^2})$ lok. Max.,

    $\frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$

Lerneinheit B 10

o 32 $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a\cdot e^{x\ln a} = a^x\cdot\ln a$

o 33 $f(x) = 2^x$; $P(1;\ 2)$; $f'(x) = 2^x\ln 2$

$y - 2 = 2\ln 2(x-1)$, $y = (\ln 4)x - \ln 4 + 2$

o 34 a) $2^x = 8$; $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = 2$ d) $x = -1$

o 35 $f'(x) = a^x\ln a$, $a^x > 0$ für alle x, $\ln a > 0$ für $a > 1$, $\ln a < 0$ für $0 < a < 1$. Daraus folgt $a^x \ln a > 0$ für $a > 1$ und $a^x \ln a < 0$ für $0 < a < 1$. Daraus ergibt sich unmittelbar die angegebene Monotonie.

o 36 $\log_a(x_1\cdot x_2) = \frac{\ln(x_1\cdot x_2)}{\ln a} = \frac{\ln x_1}{\ln a} + \frac{\ln x_2}{\ln a} = \log_a x_1 + \log_a x_2$

1. a) $f'(x) = 5\ln 2 \cdot 2^{5x}$ b) $f'(x) = \pi^x \ln \pi$

   c) $f'(x) = x^2 \cdot 3^x(3+x\ln 3)$ d) $f'(x) = 2\ln a \cdot a^{2x}$

2. a) $f'(x) = -2^{-x}\ln 2$ b) $f'(x) = -2(\ln 5)^2 \cdot 5^{-2x}$

c) $f'(x) = \frac{3^x(x \ln 3 - 3)}{x^4}$ d) $f'(x) = \frac{1}{2} \ln a \cdot a^{\frac{1}{2}x}$

3. a) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$ b) $f'(x) = \frac{2}{x \ln 10}$

c) $f'(x) = -\frac{1}{x \ln 10}$ d) $f'(x) = \frac{1}{(x+c) \ln 2}$

4. a) $f'(x) = \frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$ b) $f'(x) = \lg x + \frac{1}{\ln 10}$

c) $f'(x) = \frac{n}{x \ln 10}$ d) $f'(x) = \log_2 x \cdot \frac{2}{x \ln 2}$

5. a) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + c$ b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x + c$

c) $F(x) = \log_2 x + c$

6. a) $F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + c$ b) $F(x) = \frac{5^{2x}}{2 \ln 5} + c$

c) $F(x) = \frac{1}{25 \ln 10} \cdot 10^{-5x} + c$

7. a) $\frac{3}{2 \ln 2} \approx 2,16$ b) $\frac{1}{\ln a}(a-1)$ c) $3 \cdot \lg 10 = 3$

8. a) $\frac{2}{\ln 3} \approx 1,82$ b) $\frac{a-1}{\ln a}$ c) 0

9. a) $y = x \ln 2 + 1$ b) $y = -x \ln 2 + 1$ c) $y = \frac{1}{\ln 2}(x-1)$

10. a) $y = x \ln 10+1$ b) $y=3\ln 3(x-1)+3$ c) $y= \frac{1}{3\ln 3}(x-3) + 1$

$\approx 3,3x - 0,3$ $\approx 0,3x + 0,09$

11. a) $x = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43$ b) $x = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$

12. $A = f(x) = x \cdot 2^{-x}$; 1. Seite: $x_E = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$,

2. Seite: $2^{-x_E} = 2^{-\frac{1}{\ln 2}} = \frac{1}{2} \approx 0,37$; $A_{Max} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{e} \approx 0,53$

Lerneinheit B 11

o 39 $T = \frac{\ln 2}{1,382 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}} \approx \frac{0,6931 \cdot 10^{11} s}{1,382} \approx 5 \cdot 10^{10} s \approx 1590 a$

1. a) $p(h) = p_o \cdot e^{-\frac{1}{c}h} = 1013\ mbar \cdot e^{-\frac{1 \cdot 2000 m}{8000\ m}} \approx 789\ mbar$

b) $\frac{1}{2}p_o = p_o \cdot e^{-\frac{1}{c}h}$; $h = c \ln 2 \approx 5545\ m$

c) $933\ mbar = 1013\ mbar \cdot e^{-\frac{h}{8000\ m}}$; $h = -8000 m \cdot \ln \frac{933}{1013} \approx 658\ m$

d) rund 988 mbar

2. a) $1,2\ N_o = N_o e^k$; $k = \ln 1,2\ h^{-1} \approx 0,18\ h^{-1}$

$3\ N_o = N_o e^{kt}$; $t \approx \frac{\ln 3}{0,18\ h^{-1}} \approx 6,1\ h$

b) $N(t) = N_o \cdot e^{-0,18\ h^{-1} \cdot 24 h} = N_o \cdot e^{4,32} \approx 75,2\ N_o$

Lerneinheit B 12

o 41 1,0472; 2,0945; 5,4454; 2,0002

1. a) 0,3665 b) 1,2566 c) $\frac{3}{2}\pi$ d) 13,9627 e) -2,1993

2. a) 0,8029 b) -4,8869 c) $\frac{5}{2}\pi$ d) 0,1745 e) 1,7453

3. a) 57° b) 115° c) -143° d) 90°

4. a) 5,7° b) 573° c) 150° d) -184°

5. a) 0,644 b) -0,96 c) 0,54 d) 0,547 e) 3,78
f) -0,94 g) -0,306 h) 2,75 i) -0,892 k) -0,707

6. a) -084 b) -0,84 c) 1,158 d) -3,44 e) 0,932
f) -0,5 g) -0,866 h) -0,194 i) -0,84 k) 0,99

7. a) $x = 0{,}9267 + 2k\pi$; $x = 2{,}2148 + 2\,k\pi$

b) $x = 1{,}7017 + k\pi$

8. a) $x = 1{,}4399 + 2\,k\pi$; $x = 4{,}8433 + 2\,k\pi$

b) $x = 0{,}3805 + k\pi$

9. a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\sqrt{3}$

10. a) nein b) nein c) ja d) ja

Lerneinheit B 13

o 47 a) , b) $x_1 = x_2$ bzw. $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ c) $x_1 = 0$ und $x_2 = x$

1. a) $\cos(43^\circ + 17^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ b) $\sin(56^\circ + 34^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

2. a) $\sin(104^\circ - 14^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ b) $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

3. $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1 - (-x_2))$, dann (*)

4. $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1 - (x_2))$, dann (**)

5. a) $\cos\alpha \cos 60^\circ - \sin\alpha \sin 60^\circ + \cos\alpha \cos 60^\circ + \sin\alpha \sin 60^\circ$

$= 2\cos\alpha \cos 60^\circ = \cos\alpha$

b) $$\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

6. a) $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$;

$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ $(x \neq k\pi)$

7. a) $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y - \cos^2 y$; $\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$

b) $$\frac{2\sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} - \sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x \cos x}{\cos x - \sin^2 x \cos x} = \frac{2\sin^2 x \cos x}{\cos x \cos^2 x} = 2\tan^2 x$$

8.* Wenn $0 < x < \frac{\pi}{2}$, so $0 < \sin x < 1$ und $0 < \cos x < 1$.

Aus $\cos x < 1$ folgt $2\sin x \cos x < 2\sin x$; $\sin 2x < 2\sin x$.

Lerneinheit B 14

1. a) π b) 6π 2. a) 2π b) $\frac{2}{3}\pi$

3. $a = 1$, $b = 1$, $c = -\frac{2}{3}\pi$; $f(x) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$

$a = 1$, $b = 2$, $c = 0$; $f(x) = 2\sin 2x$

Lerneinheit B 15

o 52 Ergibt sich aus $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; x_1 und x_2 sind Lösungen

Bestätigung:

$x_1 = \frac{\pi}{6}$; $\cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $\cos^2 \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

o 53 α_1: $\sin(30^\circ + k\cdot 360^\circ) = \cos(60^\circ + k\cdot 720^\circ)$; $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

α_2: $\sin(150^\circ + k\cdot 360^\circ) = \cos(300^\circ + k\cdot 720^\circ)$; $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

α_3: $\sin(270^\circ + k\cdot 360^\circ) = \cos(540^\circ + k\cdot 720^\circ)$; $\sin 270^\circ = \cos 540^\circ$; $-1 = -1$

1. a) $x_1 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ b) $x_1 = 75^\circ + k \cdot 2\pi$; $x_2 = 165^\circ + k \cdot 2\pi$

c) $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

2. a) $x_1 = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ b) $x_1 = \frac{\pi}{9} + k \cdot 2\pi$; $x_2 = \frac{16\pi}{9} + k \cdot 2\pi$

c) $x_1 = 53{,}1^\circ + k\pi$

3. a) $x_1 = 135^\circ$, $x_2 = 315^\circ$

b) $x_1 = 0^\circ$, $x_2 = 120^\circ$, $x_3 = 180^\circ$, $x_4 = 240^\circ$, $x_5 = 360^\circ$

c) $x_1 = 54{,}7^\circ$, $x_2 = 125{,}3^\circ$, $x_3 = 234{,}7^\circ$, $x_4 = 305{,}3^\circ$

d) $x_1 = 0^\circ$, $x_2 = 180^\circ$, $x_3 = 360^\circ$

e) $x_1 = 90^\circ$, $x_2 = 270^\circ$

4. a) $x_1 = 45^\circ$, $x_2 = 135^\circ$, $x_3 = 225^\circ$, $x_4 = 315^\circ$

b) $x_1 = 0^\circ$, $x_2 = 90^\circ$, $x_3 = 180^\circ$, $x_4 = 360^\circ$

c) $x_1 = 60^\circ$, $x_2 = 120^\circ$, $x_3 = 240^\circ$, $x_4 = 360^\circ$

d) $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 90^\circ$, $x_3 = 150^\circ$,

$x_4 = 210^\circ$, $x_5 = 270^\circ$, $x_6 = 330^\circ$

e) $x_1 = 0^\circ$, $x_2 = 180^\circ$, $x_3 = 360^\circ$

5. a) $x_1 = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$, $x_2 = k \cdot 180^\circ$

b) $x_1 = 15^\circ + k \cdot 180^\circ$, $x_2 = 75^\circ + k \cdot 180^\circ$

c) $x_1 = 29{,}1^\circ + k \cdot 90^\circ$, $x_2 = 74{,}1^\circ + k \cdot 90^\circ$

6. a) Keine Lösung

b) $x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

c) $x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x_3 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$

Lerneinheit B 16

o 55 Spalte rechts (von oben nach unten):
0,0175; 0,9998; -0,0002; -0,0115; 0,0175; 0,0175; 1

o 57 $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

o 58 a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$

b) $F(x) = e^x + c$

c) $F(x) = \sqrt{x} + c$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x + c$

1. a) $f'(x) = 2 \cos x$ b) $f'(x) = \cos(x+2)$ c) $f'(x) = ab \cdot \cos(bx+c)$

d) $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ e) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

f) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

g) $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$

2. a) $f'(x) = 2 \cos 2x$ b) $f'(x) = -\cos(2-x)$

c) $f'(x) = -2 \sin x \cos x$ d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$

e) $f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$

f) $f'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$

g) $f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$

3. $(\sin x)' = \cos x = 1; \quad x = k \cdot 2\pi$

4. $(\sin x)' = \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

5. a) $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \quad P_o\left(\frac{\pi^2}{4}; 1\right), \quad f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0; \quad y = 1$

b) $f'(x) = 2\cos x, \quad P_o\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1; \quad y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

6. a) $f'(x) = -2\sin x \cos x, \quad P_o(0; 1), \ f'(0) = 0; \quad y = 1$

b) $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}, \quad P_o(1; 0), \quad f'(1) = 1; \quad y = x - 1$

7. a) $y' = \cos x, \ y'' = -\sin x; \ -\sin x + k \cdot \sin x = 0; \quad k = 1$

b) $y' = a \cdot \cos ax, \ y'' = -a^2 \cdot \sin ax;$

$-a^2 \cdot \sin ax + k \cdot \sin ax = 0; \quad k = a^2$

c) $y' = -\sin x, \ y'' = -\cos x; \ -\cos x + k \cdot \cos x = 0; \quad k = 1$

d) $y' = -a \cdot \sin ax, \ y'' = -a^2 \cdot \cos ax;$

$-a^2 \cdot \cos ax + k \cdot \cos ax = 0; \quad k = a^2$

8. a) $y' = a \cdot \cos x, \ y'' = -a \cdot \sin x;$

$-a \cdot \sin x + ka \cdot \sin x = 0; \quad k = 1$

b) $y' = ab \cdot \cos bx, \ y'' = -ab^2 \cdot \sin bx;$

$-ab^2 \cdot \sin bx + ka \cdot \sin bx = 0; \quad k = b^2$

c) $y' = -a \cdot \sin x, \quad y'' = -a \cdot \cos x;$

$-a \cdot \cos x + ka \cdot \cos x = 0; \quad k = 1$

d) $y' = -ab \cdot \sin bx, \quad y'' = -ab^2 \cdot \cos bx;$

$-ab^2 \cdot \cos bx + ka \cdot \cos bx = 0; \ k = b^2$

9. a) $f'(x) = -2\tan x$ b) $f'(x) = 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 2$

c) $f'(x) = e^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)$ d) $f'(x) = e^x \sin \pi = 0$

10. a) $f'(x) = \frac{a \cdot \cos ax}{\sin ax \cdot \ln a} = \frac{a}{\ln a} \cdot \cot ax \quad (a > 0; \ a \neq 1)$

b) $f'(x) = a^x \ln a \cdot \sin x + a^x \cdot \cos x$

$= a^x(\ln a \cdot \sin x + \cos x)(a > 0; \ a \neq 1)$

11. a) $f'(x) = -\sin x, \quad P\left(\frac{\pi}{2}; 0\right),$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y = -x + \frac{\pi}{2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad P(0; 0),$

$f'(0) = 1; \quad y = x$

12. a) $f'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$

$P\left(\frac{\pi}{8}; 1\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0; \quad y = 1$

b) $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x},$

$P\left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2; \quad y = -2x + \frac{\pi}{2} + 1$

13. a) $F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + c$

b) $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

c) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + c$

14. a) $F(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + c$

b) $F(x) = -2\cos\frac{1}{2}x + c$

c) $F(x) = 2\sin x + 9\cos\frac{1}{3}x + c$

15. a) 1 b) 2

16. a) 0 b) 1

Lerneinheit B 17

o 59 $f(t) = 2e^{-t}\cos t$; $f'(t) = -2e^{-t}(\cos t + \sin t)$;

$f''(t) = 4e^{-t} \sin t$

$f'(t_1) = f'(\frac{3}{4}\pi + k2\pi) = -2e^{\frac{3}{4}\pi + k2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] = 0$

$f''(t_1) = f''(\frac{3}{4}\pi + k2\pi) = 4e^{-\frac{3}{4}\pi + k2\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$

f hat an den Stellen $t_1 = \frac{3}{4}\pi + k2\pi$ ein lokales Minimum.

$f'(t_2) = f'(\frac{7}{4}\pi + k2\pi) = -2e^{-\frac{7}{4}\pi + k2\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] = 0$

$f''(t_2) = f''(\frac{7}{4}\pi + k2\pi) = 4e^{-\frac{7}{4}\pi + k2\pi} \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2}) < 0$

f hat an den Stellen $t_2 = \frac{7}{4}\pi + k2\pi$ ein lokales Maximum.

1. a) Nullstellen: $x_o = k\pi$

$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$, $f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$

$E_{Max}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1)$, $E_{Min}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; -1)$

b) Nullstellen: $x_{o1} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_{o2} = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

$f'(\varphi) = -\sin 2\varphi$, $f''(\varphi) = -2\cos 2\varphi$

$E_{Max}(k\pi; \frac{1}{2})$, $E_{Min}(\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{1}{2})$

c) Nullstellen: $x_o = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f''(x) = -\sin 2x$

$E_{Max}(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{1}{2})$, $E_{Min}(\frac{3}{4}\pi + k\pi; 0)$

2. a) Nullstellen: $x_o = k\pi$

$f'(x) = \sin 2x$, $f''(x) = 2\cos 2x$

$E_{Max}(\frac{\pi}{2} + k\pi; 1)$, $E_{Min}(k\pi; 0)$

b) Nullstellen: $t_o = k2\pi$

$g'(t) = \cos\frac{t}{2}$, $g''(t) = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$

$E_{Max}(\pi + 4k\pi; 2)$, $E_{Min}(3\pi + 4k\pi; -2)$

c) Nullstellen: $x_{o1} = k\pi$, $x_{o2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f'(x) = \cos 2x$, $f''(x) = -2\sin 2x$

$E_{Max}(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{1}{2})$, $E_{Min}(\frac{3}{4}\pi + k\pi; -\frac{1}{2})$

3. Nullstellen: $x_{o1} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $x_{o2} = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$f'(x) = -\sin 2x + \cos x$, $f''(x) = -2\cos 2x - \sin x$

$E_{Max}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; 1)$ und $E_{Max}(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; 1)$

$E_{Min}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{4})$ und $E_{Min}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; -\frac{5}{4})$

4. Nullstellen: $t_o = k\pi$

$f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$, $f''(t) = -\frac{2\cos t}{e^t}$

$E_{Max}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $E_{Min}(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi; -e^{-\frac{5}{4}\pi - 2k\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})$

5. Wegen $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ für alle x ist f überall monoton wachsend.

Lerneinheit B 18

1. $A = f(\gamma) = ab \cdot \sin\gamma$; $0 < \gamma < 180^\circ$

   $A' = f'(\gamma) = ab \cdot \cos\gamma$; $A'' = f''(\gamma) = -ab \cdot \sin\gamma$

   $f'(\gamma) = 0$; $\cos\gamma = 0$; $\gamma = 90^\circ$; $f''(\frac{\pi}{2}) = -ab < 0$

   f ist stetig und hat im Intervall $(0^\circ;\ 180^\circ)$ genau ein lokales Extremum (Maximum $f(\frac{\pi}{2})$); deshalb lokales Maximum zugleich globales Maximum; Flächeninhalt für $\gamma = 90^\circ$ maximal.

2. b) $s = h(x) = f(x) - g(x) = \sin 2x + 2\sin x$

   $h'(x) = 2\cos 2x + 2\cos x$; $h''(x) = -4\sin 2x - 2\sin x$

   $x_E = \frac{\pi}{3}$; $s_E = 2{,}5\sqrt{3} \approx 4{,}3$

3. $B = k \cdot \frac{1}{r^2}\cos\varphi$; $\sin\varphi = \frac{0{,}5}{r}$; $B = f(\varphi) = 4k\sin^2\varphi\cos\varphi$

   $B' = 4k(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$; $B'' = 4k(-3\sin 2\varphi)$

   $\tan\varphi_E = \sqrt{2}$; $\varphi_E = 54{,}7^\circ$; $h = \frac{1}{4}\sqrt{2}\ \mathrm{m}$

4. Die vorwärts bewegende Kraft $F_1 - F_R$ muß möglichst groß werden, damit der die Reibung überwindende Teil der Kraft am kleinsten wird.

   $F_V = F_1 - F_2$; $F_R = \mu(Q - F_2)$; $F_1 = F\cos\alpha$; $F_2 = F\sin\alpha$

   $F_V = f(\alpha) = F\cos\alpha - \mu(Q - F\sin\alpha)$; $Q,\ F = \mathrm{const}$

   $F_V' = f'(\alpha) = -F\sin\alpha + \mu F\cos\alpha$; $F_V'' = -F\cos\alpha - \mu F\sin\alpha$

   $F_V' = f'(\alpha) = 0$; $\tan\alpha_E = \mu = 0{,}07$; $\alpha_E \approx 4^\circ$

5. $x = v_0 t\cos\alpha$; $y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t\sin\alpha = 0$; $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$ $(t \neq 0)$

   $$x = f(\alpha) = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

   $$x' = \frac{2v_0^2\cos 2\alpha}{g};\quad x'' = -\frac{4v_0^2\sin 2\alpha}{g};\quad \cos 2\alpha = 0;\ \alpha = 45^\circ$$

Lerneinheit B 19

1. a) 4 b) 2 c) rund 1,71 d) 1
2. a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) 6 c) rund 0,245 d) 4
3. a) rund 4 b) π
4. a) rund 1,4 b) rund 6,93
5. $\frac{\pi}{2}$
6. π

Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten B 6 bis B 19

1. a) 1,9459 b) 4,2485 c) 6,5511 d) 8,8537

   e) 6,7298 f) 4,4272 g) 2,1246 h) −0,178

3. a) 83 b) 744 c) 2,8 d) 26 e) 804 f) 1,6

4.* a) $\ln b = \ln a + 1 = \ln a + \ln e = \ln a \cdot e$; $b = a \cdot e$

   b) b ist eindeutig bestimmt.

   c) In jedem Intervall $\langle a;\ ae\rangle$ $(a \geqq 1)$ bzw. $\langle ae;\ a\rangle$ $(0 < a < 1)$ nehmen die Funktionswerte von $f(x) = \ln x$ um 1 zu.

5. a) $f'(x) = \frac{1}{2x}$ b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ c) $f'(x) = 3x^2\ln x$

   d) $f'(x) = \frac{2}{x}$ e) $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ f) $f'(x) = \dfrac{4x}{1-x^4}$

6. a) $y = \frac{1}{x_0} \cdot x + \ln x_0 - 1$ b) $S_y(0;\ \ln x_0 - 1)$

   c) Gerade durch die Punkte $(x_0;\ \ln x_0)$ und $(0;\ \ln x_0 - 1)$

7. a) $F(x) = 8\ln(\frac{1}{2}x + 5)$ b) $F(x) = \frac{a}{b}\ln(bx + c)$

8. a) $\left[\dfrac{\ln x}{2\ln 10}\right]_{10}^{100} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{3}\left[\ln(2+3x)\right]_0^1 = \frac{5}{3}\ln\frac{5}{2}$

   c), d), e) siehe Seite 66

9. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$; $A = \frac{63}{16} - \ln 8 \approx 1{,}858$

10. a) 20,086 b) $e^{0,75} = \sqrt{e^{1,50}} \approx 2,12$ c) 54,598

d) $e^{2,70} = (e^{1,35})^2 \approx 14,90$ e) 0,0743 f) 0,0408

g) 0,0067 h) 0,9231 i) $\frac{1}{n}$ k) $-0,3466$

l) $-0,2310$ m) $-\frac{1}{n}$

11. a) 2,49 b) 4,60 c) $-0,24$ d) $-1,22$

13. a) $f'(x) = xe^x$ b) $f'(x) = 2xe^{x^2}$ c) $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

d) $f'(x) = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$

14. Z.B. $f(x) = e^x$, $f(x) = 2e^x$, $f(x) = \frac{1}{2}e^x$

15. Nullstelle von f: $x = 1$; Tangentengleichung: $y = e(x-1)$

Schnittpunkt $S_y(0;\ -e)$

16. a) $x \approx 3$ b) $x \approx -\frac{1}{3}$

8. c) $\frac{1}{2}(e^7 - e^3) \approx 538$ d) $1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,864$

e) $e^3 - e^2 + 9 - \frac{8}{3} \approx 19,03$

17. a) $e^2 + e^{-2} - 2 \approx 5,52$ b) $\frac{1}{2}(e^2 - e) - \ln 2 \approx 1,64$

18*. b) $A_R = 4 - 2\int_0^{\ln 2}(2 - e^x)dx = 6 - 2\ln 4 \approx 3,227$

19. $y' = f'(x) = e^x(x^2 + 2x - a)$. Wenn $f'(x) = 0$, so

$x = -1 \pm \sqrt{1 + a}$. Für $a < -1$ haben die Funktionen keine lokalen Extrema.

20. a) Nullstellen: $x_{01} = \sqrt{3}$, $x_{02} = -\sqrt{3}$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$; $f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 1)$

$E_{Max}(-3;\ \frac{6}{e^3})$, $\frac{6}{e^3} \approx 0,3$; $E_{Min}(1;\ -2e)$, $-2e \approx -5,4$

b) Nullstellen $x_{01} = \sqrt{5}$, $x_{02} = -\sqrt{5}$

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2+4x-5)$; $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}(x^2+8x+3)$

$E_{Max}(-5;\ \frac{20}{\sqrt{e^5}})$, $\frac{20}{\sqrt{e^5}} \approx 1,6$; $E_{Min}(1;\ -4\sqrt{e})$, $-4\sqrt{e} \approx -6,6$

c) Nullstelle: $x_0 = 2$; $f'(x) = \frac{3-x}{e^x}$, $f''(x) = \frac{x-4}{e^x}$

$E_{Max}(3;\ \frac{1}{e^3})$, $\frac{1}{e^3} \approx 0,05$

d) Nullstelle: $x_3 = 3$; $f'(x) = -\frac{x+2}{e^x}$, $f''(x) = \frac{x+1}{e^x}$

$E_{Max}(-2;\ e^2)$, $e^2 \approx 7,4$

21. a) $f'(x) = -2\ln 4 \cdot 4^{-2x}$ b) $f'(x) = \frac{1}{2}\ln 10 \cdot 10^{\frac{1}{2}x}$

c) $f'(x) = 2^{2x+3}$ d) $f'(x) = \ln a$

e) $f'(x) = \frac{e^x(1 - \ln a)}{a^x}$ f) $f'(x) = 4\ln a \cdot a^{2x}(a^{2x} - 1)$

22. a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = \log_3 7$ c) $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ d) $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

e) $f'(x) = 3(\log_3 3x)^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3}$ f) $f'(x) = a^x(\ln a \cdot \log_a x + \frac{1}{x \ln a})$

23. a) $F(x) = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot 2^{3x}$ b) $F(x) = \frac{5}{2 \ln 10} \cdot 10^{2x}$

c) $F(x) = \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^{x}$ d) $F(x) = a \log_a x$

24. a) $\frac{8}{\ln 3} + 4 \approx 11{,}3$ b) $\frac{1}{3 \ln 2}(2^6 - 2^3) \approx 26{,}9$

c) $\frac{1}{2 \ln 2} \approx 0{,}72$ d) $\frac{9}{\ln 10} \approx 3{,}90$

25. a) $y = 8 \ln 2(x-3) + 8$ b) $y = -x \ln 10 + 1$

c) $y = \frac{1}{\ln 10}(x - 1)$ d) $y = \frac{1}{10 \ln 10}(x - 10) + 1$

26. $f'(x) = 2^x \ln 2 = 10$; $x \approx 3{,}85$

27. a) $f'(x) = a^x \ln a = k \cdot f(x)$; $k = \ln a$

b) $f''(x) = a^x (\ln a)^2 = k^2 \cdot f(x)$; $k = \ln a$

28. a) $x = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 10}} \approx 0{,}47$ b) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3 \ln 2}} \approx 0{,}78$

29. a) $y = \frac{3}{2}x + 1$ c) $A = 5 - \frac{3}{\ln 2} \approx 0{,}67$

30. a) $\sin \alpha$ b) $\tan \alpha \cdot \tan \beta$

31. a) $p = 2\pi$ b) $p = 2\pi$ c) $p = \pi$ d) $p = 2\pi$

32. a) $\cos x(1-\cos x) = 0$; $x_1 = 0°$, $x_2 = 90°$, $x_3 = 270°$, $x_4 = 360°$

b) $\sin 2x = 0$; $x_1 = 0°$, $x_2 = 90°$, $x_3 = 180°$, $x_4 = 270°$, $x_5 = 360°$

c) $\cos 2x = 0$; $x_1 = 45°$; $x_2 = 135°$, $x_3 = 225°$, $x_4 = 315°$

d) $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x_1 = 60°$, $x_2 = 120°$, $x_3 = 240°$, $x_4 = 300°$

e) $\tan \alpha = \sqrt{3}$; $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 240°$

f) $\sin x = 0$ oder $\cos x = 0$;

$x_1 = 0°$, $x_2 = 90°$, $x_3 = 180°$, $x_4 = 270°$, $x_5 = 360°$

33. a) keine Lösung

b) $x_1 = k \cdot 180°$, $x_2 = 53{,}1° + k \cdot 360°$, $x_3 = 306{,}9° + k \cdot 360°$

c) $\varphi_1 = 90° + k \cdot 180°$, $\varphi_2 = 45° + k \cdot 360°$, $\varphi_3 = 315° + k \cdot 360°$

34. a) $x_1 = 48{,}6° + k \cdot 360°$, $x_2 = 131{,}4° + k \cdot 360°$,

$x_3 = 30° + k \cdot 360°$, $x_4 = 150° + k \cdot 360°$

b) $x = 45° + k \cdot 180°$ c) $x \approx 17{,}6° + k \cdot 180°$

35. a) $f'(x) = -2 \sin x$ b) $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{2})$

c) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x} - \frac{2x}{\sin^2 x^2}$ d) $f'(x) = 2 \cos 2x$

e) $f'(x) = \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2}$ f) $f'(x) = 4 \sin x + 2x \cos x$

g) $f'(x) = -\frac{\sqrt{\tan x - 1}}{\cos^2 x(\tan x - 1)^2 \sqrt{\tan x + 1}}$

36. a) $f'(x) = -\sin 2x$ b) $f'(x) = 2 \tan x(\tan^2 x + 1)$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}\sin x + 2 \sin 4x$ d) $f'(x) = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$

e) $f'(x) = 4 \cos 2x \cos x - 2 \sin 2x \sin x$

f) $f'(x) = \frac{2}{\sin 2x - 1}$

38. a) $F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + 4 \sin \frac{1}{4}x + c_i$ $(i = 1, 2, 3)$

b) $F(x) = \frac{a}{b} \sin(bx + c) + c_i$

39. a) $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{3}) + c_i$ b) $F(x) = -\frac{a}{b} \cos(bx+c) + c_i$

40. a) $\left[\sin x\right]_0^{\pi} = 0$ b) $\left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

41. a) $\left[-\cos x\right]_0^1 = 0{,}46$ b) $\left[-\cos x\right]_0^{2,5} = 1{,}80$

42. $A = f(r,s) = \pi r s$; $A = f(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$; $h = \frac{3V}{\pi r^2}$;

$A = f(r) = \sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}}$; $r_E = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}\,V}{2\pi}}$; $h_E = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$;

$h_E = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot r_E$. Da die erste Ableitung für r_E das Vorzeichen wechselt, hat der Trichter für r_E die größtmögliche Filtrierfläche.

43. Neigungswinkel zwischen Bodenbrett und Seitenbrett: $90^\circ + x$

Querschnittsfläche: $a^2\cos x + \frac{a^2}{2}\sin 2x$; $x_{Max} = 30^\circ$; $\alpha = 120^\circ$

44. Es seien: $\overline{AP} = s_1$, $\overline{BP} = s_2$; Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g: A' bzw. B'; $\overline{AA'} = h_1$, $\overline{BB} = h_2$, $\overline{A'B'} = b$, $\overline{A'P} = x$,

$\sphericalangle APA' = \alpha$, $\sphericalangle BPB' = \beta$.

Dann gilt: $s = s_1+s_2 = \sqrt{x^2+h_1^2} + \sqrt{(b-x)^2+h_2^2}$. Daraus ergibt sich: $\cos\alpha = \cos\beta$ bzw. $\alpha = \beta$.

o 67 $f'(x) = 9\cdot 2(2x-6)^2 \geqq 0$; f ist monoton wachsend für alle $x \in P$

o 68 b) $F(x) = -\cos x + c_i$ $(i = 1,2,3)$, $F(x) = e^x + c_i$,

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + c_i$, $F(x) = -(x+1)^{-1}+c_i$, $F(x) = \ln|x| + c_i$

o 70 a) $\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_0^1 = -\frac{5}{3}$ b) $\left[e^x\right]_0^2 = e^2 - 1$

c) $\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right]_0^{\pi} = 0$

1. a) $a_1 = \frac{1}{12}$, $a_2 = \frac{1}{20}$, $a_3 = \frac{1}{30}$; $s_1 = \frac{1}{12}$, $s_2 = \frac{2}{15}$, $s_3 = \frac{3}{18}$; $x = 3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+3)} = \frac{1}{3}$ d) $n > 97$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$, $f''(x)$ $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$, $f'''(x) = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}x}$

c) $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = \frac{1}{4}$, $f'''(x) = \frac{1}{8}$, $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}$

d) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ für alle $n \in N$

e) $s_n = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - (\frac{1}{2})^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$

3. a) 3, 10, 21, 36, 55 c) $n = 20$ d) (a_n) wächst unbeschränkt.

4. a) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

b) (a_n) monoton fallend c) $s_1 = \frac{1}{6}$, $s_2 = \frac{1}{4}$, $s_3 = \frac{3}{10}$

5. a) $Db(f)$: $-\infty < x < +\infty$; $x_{01} = 0$, $x_{02} = \frac{5}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$; $x_{Max} = \frac{15}{16}$, $f(x_{Max}) = (\frac{15}{16})^3 \cdot \frac{5}{4} \approx 1{,}03$

b) Db(f): $-\infty < x + \infty$; $x_{01} = 0$, $x_{02} = 5$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x_{Max} = 0$, $f(0) = 0$, $x_{Min} = \frac{10}{3}$, $f(\frac{10}{3}) = -\frac{500}{27}$

c) Db(f): $-\infty < x < +\infty$; $x_{01} = -2$, $x_{02} = 4$; $S_y(0; 32)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x_{Max} = 0$, $f(0) = 32$, $x_{Min} = 4$, $f(4) = 0$

d) Db(f): $-\infty < x < +\infty$; keine Nullstellen; $S_y(0; 6)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$; $x_{Max} = 0$, $f(0) = 6$

$x_{Min,1} = 1$, $f(1) = 4$, $x_{Min,2} = -1$, $f(-1) = 4$

e) Db(f): $x \neq 0$; keine Nullstellen; Polstelle $x_P = 0$

$\lim\limits_{x \to x_P} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$x_{Min,1} = -1$, $f(-1) = 2$, $x_{Min,2} = 1$, $f(1) = 2$

f) Db(f): $x \neq -2$; $x_o = 0$; $x_P = -2$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $x_{Max} = 2$, $f(2) = \frac{5}{8}$

6. a) Db(f): $-\infty < x < +\infty$; $x_{01} = 0$, $x_{02} = 9$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$x_{Max} = 6$; $f(6) = 9$, $x_{Min} = 0$, $f(0) = 0$

c) $f'(x) = 3ax^2+2bx$, $f''(x) = 6ax+2b$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2b}{3a}$

d) Wenn $b > 0$, so bei x_1 Min., bei x_2 Max.

Wenn $b < 0$, so bei x_1 Max., bei x_2 Min.

e) $f'(-4) = 3a \cdot 16 - 8b = 0$; $a = \frac{b}{6}$. Wegen f(0) Max.

$f''(0) = 2b < 0$, also $b < 0$ und damit auch $a < 0$:

Möglich

a	-1	-2	-3
b	-6	-12	-18

7. a) $r = 0{,}5$ m b) $h = 1$ m c) $d = 3$ m

8. a) $P_1(6;9)$, $P_2(2;1)$ c) $A = \int_2^6 (2x - 3 - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{8}{3}$

9. Koordinatenursprung im Mittelpunkt von $\overline{AB}$; x-Achse durch A und B; $A(-6; 0)$; $y = ax^2+b$ ($a, b \in P$; $a, b \neq 0$);

$y' = 2ax$; $m_A = \frac{1}{3}\sqrt{3} = f'(x_A)$;

$f'(-6) = -12a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $a = -\frac{1}{36}\sqrt{3}$; $y = -\frac{1}{36}\sqrt{3}\,x^2+b$, $b = \sqrt{3}$;

$\overline{OC} = h = \sqrt{3}$ m $\approx 1{,}73$ m

10. a) $y = x^2 + 1$ b) $A = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{3}$ 11. b) $A = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$

12. a) $P_1(-1; 2)$, $P_2(3; 10)$ c) $A = \frac{32}{3}$ d) $P(1; 2)$

13. a) $P_1(-2; 1)$, $P_2(4; 4)$ b) $P_{Max}(\frac{3}{2}; \frac{57}{8})$ c) $A = 27$

14. b) $A = 6$ c) $P_o(2; 2)$ d) $y = -x + 4$

15. b) $A_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$

c) $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{2}{3}$, $s_3 = \frac{3}{4}$

d) $s_n = \frac{n}{n+1}$, Beweis durch vollst. Ind. e) $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$

16. a) Monoton wachsend für alle $x \neq 1$; keine lokalen Extrema

b) $y = x + 1$; $y = x-3$ d) $A = \int_{-4}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = \ln 5$

17. a) $x \leqq 8$ b) $x_o = 6$ c) $S_y(0; 2)$; $f'(0) = -\frac{1}{4}$ e) $A = \frac{20}{3}$

18. b) $A = \int_4^{13} 2\sqrt{x-4}\,dx = 36$ c) $y = \frac{1}{2}x$ d) $x = 2c^2$

19. a) $x \geqq \frac{1}{2}$ b) $x_o = 1$ c) Min.(1; 0) e) $f(25) = 18$

20. a) $x_{01} = 0$, $x_{02} = 4$ b) $P_{Max}(1; 1)$ c) $f'(5) = \frac{1}{5}\sqrt{5} - 1$

e) $A = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \frac{8}{3}$

21. a) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(4,8;\ 4,8)$ b) $M_1(2,4;\ 2,4)$

c) $P_3(2,7;\ 3,6)$, $P_4(0,3;\ 1,2)$; $M_2(1,5;\ 2,4)$

e) $a^2 - 4ab > 0$; $b < \frac{a}{4}$

22. a) $x_0 = \frac{1}{2}$ d) $y_0 = -1$

b)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	2	4
$f(x)$	-1,61	-0,92	-0,51	-0,22	0,34	0,69	1,39	2,08

e) $y = \ln ax$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $P_0(\frac{1}{a};\ 0)$, $f'(\frac{1}{a}) = a$

$y = ax - 1$, $S_y(0;\ -1)$; $y_0 = -1$

Die Gerade durch $S_y(0;\ -1)$ und $S_x(\frac{1}{a};\ 0)$ ist die Tangente.

23. b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

c) $A = \int_0^{x_1} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = 2e^{-\frac{1}{2}x} + 2$

$2(1 - f(x_1)) = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}x_1} = A$

24. a) $f'(x) = e^x(x^2+2x-a)$, $f''(x) = e^x(x^2+4x+2-a)$

b) $x_1 = -1 - \sqrt{1+a}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1+a}$

25. a) $f'(x) = 2e^{2x} - 4$, $f''(x) = 4e^{2x}$; $e^{2x} = 2$, $x = \frac{1}{2}\ln 2$

$f''(\frac{1}{2}\ln 2) = 4e^{\ln 2} = 8 > 0$

Min.$(\frac{1}{2}\ln 2;\ 2-2\ln 2)$ bzw. Min.$(0,347;\ 0,614)$

c) $f'(x) = a\cdot e^{ax} - a^2$, $f''(x) = a^2 \cdot e^{ax}$

$f'(x) = 0$, $e^{ax} = a$; $x_0 = \frac{1}{a}\ln a$

$f''(\frac{1}{a}\ln a) = a^2 \cdot a = a^3 > 0$ für $a > 0$

d) $f(x_0) = f(\frac{1}{a}\ln a) = e^{\ln a} - a\ln a = a(1 - \ln a)$

e) $\ln a = 1$; $a = e$

26. a) $e^c = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \approx 3,1946$; $c \approx 1,16$

b) $A = f(c) = 2ce^c - 4e^c + e^2 + 1$; $c_E = 1$, Min.

c) $A_1 = 1$, $A_2 = e^2 - 2e$

d) Glob. Min.: $f(1) = (e-1)^2$; glob. Max.: $f(2) = e^2 + 1$

27. a) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $P_0(a;\ \ln a)$, $f'(a) = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$

b) $P_0(a;\ \ln a)$, $m = -a$; $y = -ax + a^2 + \ln a$

c) $P_x(a + \frac{1}{a}\ln a;\ 0)$

d) $A(a) = \frac{1}{2a}(\ln a)^2$; $a_E = e^2$

28. a) $P(4;\ 8)$; $a = \frac{1}{4}$

c) $A = \int_0^4 (\frac{1}{4}x^2 + 4 - \frac{1}{2}2^x)\,dx = \frac{64}{3} - \frac{15}{\ln 4} \approx 10,51$

29. b) $I = f(\frac{L}{R}) = \frac{U_0}{R}(1 - \frac{1}{e}) \approx 0,63 \cdot \frac{1}{2}A = 0,315$ A

c) $t = \frac{L}{R}\ln\frac{U_0}{U_0 - R_i}$; $t \approx 0,04$s

30. a) $f'(t) = -k(T_0 - T_1)e^{-kt}$; $f(t) = T_1 - \frac{1}{k}\cdot f'(t)$

b) $T = 20^\circ C + 50^\circ C \cdot e^{-1,26} \approx 34,2^\circ C$

c) $k = \frac{\ln 87 - \ln 64}{6}\,h^{-1} \approx 0,05h^{-1}$; $T_{24} \approx 32^\circ C$

31. a) $x_{01} = \frac{\pi}{3}$, $x_{02} = -\frac{\pi}{3}$ b) $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$

c) $f'(x) = -2\sin 2x$, $f''(x) = -4\cos 2x$; Max. $(0;\ \frac{3}{2})$

e) $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{2} + \cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1,913$

32. a) π c) $y = -2x + \pi$ d) $\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

33. a) $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$; $S_1(0; 0)$, $S_2(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2})$, $S_3(\pi; 0)$

c) $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx = \frac{1}{4}$

34. a) Max.$(\frac{\pi}{4}; 2)$, Min.$(\frac{3}{4}\pi; 0)$ b) π

d) $A = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \approx 2{,}856$

e) $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{b}) = 1$, $f'(x) = b \cos bx$ $(b > 0)$

$f'(0) = b$, $f'(\frac{\pi}{b}) = -b$; für $b=1$ Tangenten senkrecht aufeinander

35. a) $x_o = \pi$ c) $A = \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2}dx = 2$

d) $1 = \int_0^{d} \cos \frac{x}{2}dx = 2 \sin \frac{d}{2}$, $\sin \frac{d}{2} = \frac{1}{2}$; $d = \frac{\pi}{3}$

36. a) $u = f(r,b) = 2r + b$; $A = \frac{b \cdot r}{2} = 100$, $b = \frac{200}{r}$

$u = f(r) = 2r + \frac{200}{r}$; $r_{Min} = 10$ cm, $b_{Min} = 20$ cm

b) $\alpha \approx 114{,}5^\circ$

37. $A_z = f(r,h) = 2\pi r(r+h)$; $h: (16-r) = 80:16$, $h = 80-5r$

$A_z = f(r) = 8\pi(20r-r^2)$; $r_{Max} = 10$ cm, $h_{Max} = 30$ cm

38. a) $h = 2 \sin \varphi$, $s = 2 \cos \varphi$ b) $A = 2 \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$

c) $A' = 2 \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi$, $A'' = -4 \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi$

$4 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 2 = 0$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi_{Max} = 60^\circ$

39. a) $A_o = f(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi rh$; $V_z = \pi r^2 h = a$, $h = \frac{a}{\pi r^2}$

$A_o = f(r) = 4\pi r^2 + \frac{2a}{r}$

b) $r = \sqrt[3]{\frac{a}{4\pi}}$ c) $h = \frac{a}{\pi r^2} = 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{4\pi}}$; $r : h = 1 : 4$

40. Stromstärke $I = \frac{U}{R_i + R}$; Spannungsabfall $R = \frac{UR}{R_i + R}$

Leistung an R ist $P_R = I^2 \cdot R = f(R) = U^2 \cdot \frac{R}{(R_i + R)^2}$

Maximum für $R = R_i$, da $f''(R_i) < 0$; $P_{R_{Max}} = f(R_i) = \frac{U^2}{4 R_i}$

41. $s' = f'(\alpha) = \frac{2}{g}v_o^2 (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \tan\beta)$

$s'' = f''(\alpha) = \frac{4}{g}v_o^2 (-\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \tan\beta)$

$f'(\alpha) = 0$: $\tan 2\alpha = -\frac{1}{\tan\beta}$, $2\alpha = 90^\circ + \beta$, $\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$

$45^\circ + \frac{\beta}{2} = \alpha_{Max}$ wegen $f''(45^\circ + \frac{\beta}{2}) < 0$

42. $\alpha = 120^\circ$

43. $V = f(a; h_p) = a^2 h_p$; Nebenbedingung: $\frac{(h-h_p) \cdot 2}{a} = \frac{h}{r}$,

$h_p = h - \frac{ha}{2r}$

a) $V = f(a) = 6a^2 - \frac{3}{2}a^3$; $a_E = \frac{8}{3}$ cm, $h_E = 2$ cm

b) $V_E = \frac{128}{9}$ cm^3, $A_o = \frac{320}{9}$ cm^2

44. a) $V = f(a,h) = a^2 h$; Nebenbedingung: $\frac{12-h}{a} = \frac{3}{2}$, $h = 12 - \frac{3}{2}h$

$V = f(a) = 12a^2 - \frac{3}{2}a^3$; $a_E = \frac{16}{3}$ cm, $h_E = 4$ cm

45. $A = f(x,y) = x \cdot y$; Nebenbedingung: $\frac{150-x}{y-80} = \frac{3}{2}$, $y = 180 - \frac{2}{3}x$

$A = f(x) = x\,(180 - \frac{2}{3}x)$; $x_E = 135$ cm, $y_E = 90$ cm

46. $V = f(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; Nebenbedingung: $\frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$,

$r^2 = \frac{R^2 \cdot h}{h-2R}$; $V = f(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{h^2}{h-2R}$

$h_E = 4R$, $r_E = \sqrt{2}R$, $V_E = \frac{8}{3}\pi R^3$

47. $u = f(a,b) = 2a + b$; Nebenbedingungen (γ sei Winkel zwischen den gleichen Schenkeln): $b = 2a \sin \frac{\gamma}{2}$, $a = 2r \cos \frac{\gamma}{2}$

$u = f(\gamma) = 4r \cos \frac{\gamma}{2} + 4r \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$; $\gamma = 60^\circ$

Wegen $f''(60^\circ) < 0$ Umfang maximal, wenn Dreieck gleichseitig

$a = b = 2r \cos 30^\circ = r\sqrt{3}$, $u = 3r\sqrt{3}$

48. $V = f(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; Nebenbedingungen (zwei Teildreiecke des Achsenschnittes ähnlich): $s:2R = h:s$, $s^2 = 2Rh$; $s^2 = h^2 + r^2$,

$r^2 = 2Rh - h^2$; $V = f(h) = \frac{1}{3}\pi h\,(2Rh - h^2)$

$r_{Max} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,R$, $h_{Max} = \frac{4}{3}R$, $V_{Max} = \frac{32}{81}\pi R^3$

49. a) $x_E = \dfrac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{2g}$, $y_E = \dfrac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g}$ b) $x = \dfrac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}$

c) $\alpha_{Max} = 45^\circ$, $x = 25$ km d) $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 75^\circ$

50. $P\left(\sqrt[3]{\frac{25}{12}}\ ;\ -\dfrac{5\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{5}}\right)$

51. $s_2{}^2 = s_1{}^2 + 4{,}5^2 - 2s_1 \cdot 4{,}5 \cos\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{s_1{}^2 + 4{,}5^2 - s_2{}^2}{2s_1 \cdot 4{,}5}$

$\cos\alpha = f(t) = \dfrac{900t^2 - 576t^2 + 20{,}25}{270t} = 1{,}2\,t + \dfrac{0{,}075}{t}$

$t_E = 0{,}25$ h, $\cos\alpha_{Min} = 0{,}6000$, $\alpha_{Max} = 53{,}1^\circ$

53.* Die größte zulässige Länge hat die kleinste Leiter, die sowohl die Turmebene als auch den Türpfosten und die der Tür gegenüberliegende innere Wand berührt; für 2 + z als Höhe an der Wand gilt:

$(2 + z) : l = z : l_1$ mit $l_1 = \sqrt{z^2 + 2{,}5^2}$. Daraus ergibt sich

$l = f(z) = \dfrac{(2 + z)\sqrt{z^2 + 2{,}5^2}}{z}$

$z = \sqrt[3]{12{,}5} \approx 2{,}32$; $\tan\alpha\ \sqrt[3]{0{,}8} \approx 0{,}928$, $\alpha \approx 42{,}9^\circ$; $l \approx 6{,}35$ m

54. $8! = 40\,320$ (Permutation von 8 Elementen)

55. $C_2^6 = \binom{6}{2} = 15$

56. $V_3^{10} = 10^3 = 1000$; $V_3^9 = 9^3 = 729$; $1000 - 729 = 271$

57. b^r 58. $\binom{n}{2} = 120$, $n = 16$; 6 Herren und 10 Damen

59. $\binom{7}{2} + 7 = 28$ 60. $5! = 120$ 61. $\binom{17}{2} < 150 < \binom{18}{2}$

62. a) $A = \int_{-\pi}^{0}(\cos\frac{1}{2}x - x + 1)\,dx = \left[2\sin\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\pi}^{0} = 2 + \frac{\pi^2}{2} + \pi$

b) $A = \int_{0}^{\pi}(\sqrt{x} - \sin x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \cos x\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi^3} - 2$

Kurzwort: 002192 Loesungsh. Mathe 12
DDR 2,00 M