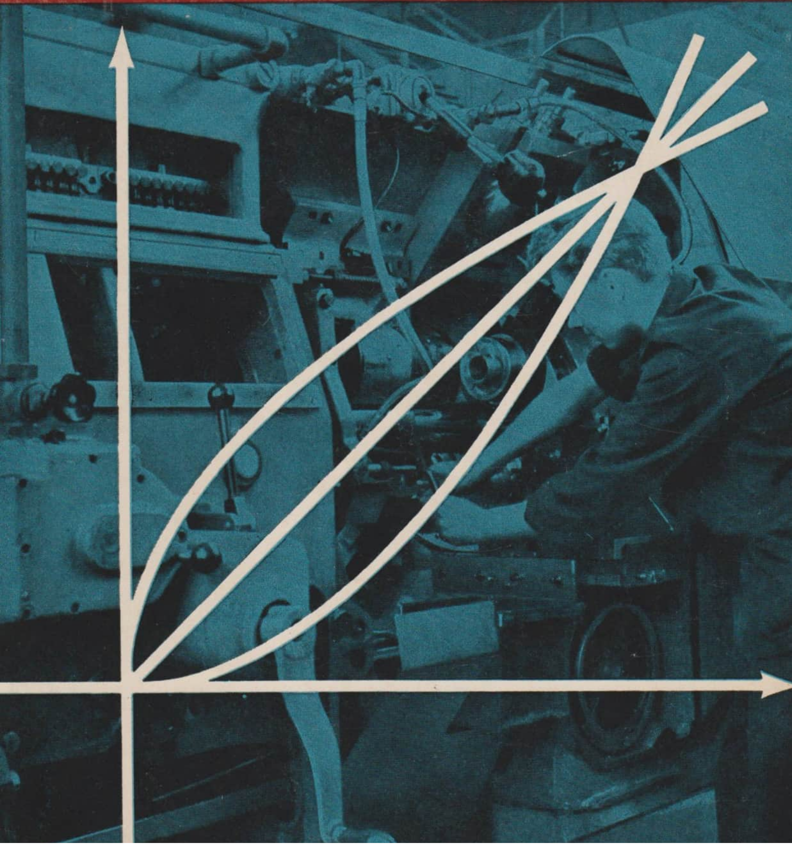
MATHEMATIK 9

ERWEITERTE OBERSCHULE



Mathematik

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule Klasse 9

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1963

Verfasser:

Herbert Vockenberg	Kapitel 1, 2 und 3,
Peter Pfeiffer	Kapitel 4,
Dr. Hans Wußing	Kapitel 5 und 7,
Hans Simon	Kapitel 6.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Lehrbuch für die erweiterte
allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin und Peter Pfeiffer

Zeichnungen: Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung: Werner Fahr
Redaktionsschluß: 15. August 1963
ES 11 G · Bestell-Nr. 00 09 58-3 · 5,30 DM · Lizenz 203 · 1000/63 (DN)
Satz: B. G. Teubner, Leipzig (III-18-154)
Druck: Philipp Reclam jun., Leipzig (III-18-170)

1. Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole

„Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich ... nicht von der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der Materie, des Naturgesetzes, die Abstraktion des Wertes usw., mit einem Wort alle wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, getreuer, vollständiger wider."

LENIN: *Aus dem philosophischen Nachlaß.*
Dietz Verlag, Berlin 1961, S. 89.

Diese Gedanken Lenins treffen auch auf eine der höchsten Abstraktionsstufen, auf die Formelsprache der Mathematik zu. Mit einer Formel, einer Gleichung werden die verschiedensten Erscheinungen der Wirklichkeit in ihren wesentlichen Merkmalen und Eigenschaften erfaßt. So kann man mit Hilfe der Gleichung

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

die Volumen aller pyramiden- oder kegelförmigen Körper berechnen, ganz gleichgültig, ob es das Volumen der um 2650 v. u. Z. erbauten Cheopspyramide oder der Inhalt eines kegelförmigen Drehteils ist.
Die hohe Abstraktion wird zum Teil dadurch erreicht, daß man für alle Volumen, Flächen und Höhen allgemeine Zahlensymbole benutzt.

1.1. Wiederholung

1. Grundrechenarten

Rechen-operationen der ersten Stufe	Addition	$12 + 2 = 14$ Summand + Summand = Summe	Durch Benutzung der negativen Zahlen kann die Subtraktion auf eine Addition zurückgeführt werden. $14 + (-2) = 12$
	Subtraktion (Umkehrung der Addition)	$14 - 2 = 12$ Minuend − Subtrahend = Differenz	
Rechen-operationen der zweiten Stufe	Multiplikation (verkürzte Rechenart für die Addition gleicher Summanden)	$12 \cdot 2 = 24$ Faktor · Faktor = Produkt	Durch Benutzung der gebrochenen Zahlen kann die Division auf eine Multiplikation zurückgeführt werden. $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$
	Division (Umkehrung der Multiplikation)	$24 : 2 = 12$ Dividend : Divisor Quotient	
Rechen-operationen der dritten Stufe	Potenzieren (verkürzte Rechenart für die Multiplikation gleicher Faktoren)[1]	$5^3 = 125$ $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenzwert}$	

2. Gesetze der Addition und Multiplikation

Kommutationsgesetz	$a + b = b + a$ $12 + 2 = 2 + 12$	$a \cdot b = b \cdot a$ $12 \cdot 2 = 2 \cdot 12$
Assoziationsgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $3 + (4 + 2) = (3 + 4) + 2$ $3 + 6 = 7 + 2$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $3 \cdot (4 \cdot 2) = (3 \cdot 4) \cdot 2$ $3 \cdot 8 = 12 \cdot 2$
Distributionsgesetz	$a(b + c) = ab + ac$ $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$ $3 \cdot 6 = 12 + 6$	

[1] Auch das Potenzieren kann umgekehrt werden; die entsprechenden Rechenoperationen lernen wir erst später kennen.

3. Vorzeichenregeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen

Multiplikation	$(+a)\cdot(+b) = +ab$ $(-a)\cdot(-b) = +ab$	$(+a)\cdot(-b) = -ab$ $(-a)\cdot(+b) = -ab$
Division	$(+a):(+b) = +\frac{a}{b}$ $(-a):(-b) = +\frac{a}{b}$	$(+a):(-b) = -\frac{a}{b}$ $(-a):(+b) = -\frac{a}{b}$

4. Rechnen mit Brüchen

Formänderung	Erweitern	Werden Zähler und Nenner eines Bruches mit dem gleichen Faktor multipliziert, so stellen der ursprüngliche und der erweiterte Bruch die gleiche Zahl dar.	$\frac{2}{9}$ erweitert mit 4 ergibt $\frac{2\cdot 4}{9\cdot 4} = \frac{8}{36}$	$\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$
	Kürzen	Werden Zähler und Nenner eines Bruches durch den gleichen Divisor dividiert, so stellen der ursprüngliche und der gekürzte Bruch die gleiche Zahl dar.	$\frac{8}{36}$ gekürzt mit 4 ergibt $\frac{8:4}{36:4} = \frac{2}{9}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
Addition	Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Summe der Zähler bildet und den gemeinsamen Nenner beibehält. Ungleichnamige Brüche müssen vorher durch Änderung ihrer Form gleichnamig gemacht werden.		$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$	
Subtraktion	Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Differenz der Zähler bildet und den gemeinsamen Nenner beibehält. Ungleichnamige Brüche müssen vorher durch Änderung ihrer Form gleichnamig gemacht werden.		$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7-2}{8} = \frac{5}{8}$ $\frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15} - \frac{1\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$	
Multiplikation	Gemeine Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert.		$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 7} = \frac{12}{35}$	
Division	Ein gemeiner Bruch wird durch einen gemeinen Bruch dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.		$\frac{5}{6}:\frac{1}{5} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{1} = \frac{5\cdot 5}{6\cdot 1} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$	

5. Grundrechenarten mit Null und Eins

Addition	$a+0=a$	$a+1=a+1$	$0+a=a$	$1+a=1+a$
Subtraktion	$a-0=a$	$a-1=a-1$	$0-a=-a$	$1-a=1-a$
Multiplikation	$a\cdot 0=0$	$a\cdot 1=a$	$0\cdot a=0$	$1\cdot a=a$
Division	$a:0$ nicht möglich	$a:1=a$	$0:a=0$	$1:a=\frac{1}{a}$

6. Addition und Subtraktion algebraischer Summen

Definition	Unter einer algebraischen Summe versteht man einen mathematischen Ausdruck von endlich vielen Gliedern, die durch Addition oder Subtraktion verbunden sind.	$2 \quad - 3ab \quad + 6ab^2 \quad - c$ 1. Glied 2. Glied 3. Glied 4. Glied
Addition	Algebraische Summen werden addiert, indem man alle gleichartigen Glieder der algebraischen Summe zueinander addiert.	$(3a+2b-3c)+(2a-2b+3c)$ $=3a+2b-3c+2a+(-2b)+3c$ $=3a+2b-3c+2a-2b+3c$ $=5a$
Subtraktion	Algebraische Summen werden voneinander subtrahiert, indem man jedes Glied des Subtrahenden vom Minuenden subtrahiert und gleichartige Glieder wie bei der Addition zusammenfaßt (ordnet).	$(3a+2b-3c)-(2a-2b+3c)$ $=3a+2b-3c-(+2a)-(-2b)-(+3c)$ $=3a+2b-3c-2a+2b-3c$ $=a+4b-6c$

1.2. Multiplikation mehrgliedriger algebraischer Summen

Aufgaben zur Wiederholung der Addition, Subtraktion und Multiplikation

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $a+(a+b)$ **b)** $a+(a-b)$ **c)** $a-(a+b)$ **d)** $a-(a-b)$

2. Prüfen Sie die Richtigkeit der Ergebnisse von Aufgabe 1 nach, indem Sie folgende Werte einsetzen!

a) $a=5, \quad b=3$ **b)** $a=-2, \quad b=6$ **c)** $a=7, \quad b=-4$

d) $a=-11, \quad b=-9$ **e)** $a=3, \quad b=3$ **f)** $a=\frac{1}{3}, \quad b=\frac{1}{2}$

g) $a=\frac{17}{12}, \quad b=-\frac{11}{13}$ **h)** $a=-3\frac{2}{5}, \quad b=-2\frac{1}{3}$

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $2a + 3b - 4c + (4a - 3b + 2c)$

b)
$$\begin{array}{l} \quad 2a + 3b - 4c \\ \underline{-(4a - 3b + 2c)} \end{array}$$

c) $(o - p + q) - (o - p + q)$

d) $(o - p + q) + (o + p - q)$

e)
$$\begin{array}{l} \quad 4x - 2y \\ -(6x + y) \\ \underline{+(3x + 3y)} \end{array}$$

f) $(m\,x - n\,y) - (n\,x - m\,y)$

g) $\left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{3}s + \frac{1}{4}t\right) - \left(\frac{r}{6} - \frac{s}{3} + \frac{t}{12}\right) - \left(-\frac{s}{4} + \frac{1}{3}r - \frac{t}{2}\right)$

h) $\left(-\frac{5}{3}l + \frac{m}{5} - \frac{n}{4}\right) - \left(-1{,}5\,l - 0{,}1\,m + \frac{3}{4}n\right)$

i)
$$\begin{array}{r} 3a^2 b - 2a\,b^2 + b^3 \\ \underline{-(a^3 - 2a^2 b + 2a\,b^2 + b^3)} \end{array}$$

4. Berechnen Sie folgende Ausdrücke für $A = 2x - 3y$; $B = 5x + 2y$; $C = 6x - 5y$; $D = -x + y$!

a) $A - B - C + D$ **b)** $-A - B + C + D$

5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $5x + 4y - [7x - 3y - (3x - 7y)]$

b) $(a - d) + [(a - b) - (a - d)] + b$

c) $\frac{13}{2}s - \left[3\frac{1}{3}t - (-7{,}5s + 3t)\right] - (6t - s)$

6. a) Warum haben die Aufgaben **3c** und **3d** verschiedene Ergebnisse?

b) Wie müßte demnach die Aufgabe **3d** abgeändert werden, damit ihr Ergebnis mit dem von **3c** übereinstimmt?

7. Zeigen Sie unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole:

a) die Summe zweier Zahlen vermehrt um ihre Differenz ist gleich dem Doppelten der ersten Zahl;

b) die Summe zweier Zahlen vermindert um ihre Differenz ist gleich dem Doppelten der zweiten Zahl!

8. Vereinfachen Sie folgende Summen!

a) $(a - b) + (a + b)$ **b)** $(a - b) - (a + b)$

c) Fassen Sie die Aufgaben **8a** und **8b** und deren Ergebnisse in Worte!

9. Lösen Sie folgende Aufgaben im Kopf und versuchen Sie, sich den Lösungsweg durch das Setzen von Klammern zu vereinfachen!
Beispiel: $144 - 157 + 37 + 86 = (144 + 86) - (157 - 37) = 230 - 120 = 110$

a) $233 + 58 - 368 + 17$ **b)** $500 - 213 + 23$

c) $\frac{10}{3} + \frac{5}{2} - \frac{4}{3} - \frac{9}{2}$ **d)** $-51a + 217a + 11a + 23a$

10. Stellen Sie die Anzahl der Glieder folgender algebraischer Summen fest!

a) $a + b + c$ **b)** $a + b - c$ **c)** $m + 2$ **d)** $z - \frac{3}{7}$

e) $4t^2 - 9$ **f)** $3r - 4s - 7$ **g)** $4a^2 + 12ab + 9b^2$

h) $a^3 + n_1 a^2 b + n_2 a b^2 + b^3$ **i)** $l_0 + l_0 \alpha \cdot \Delta t$[1]) **k)** $\frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2$

11. Gegeben sind die algebraischen Summen

$$S_1 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{y}{4} + 2z - 4 \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{3}x^2 + 2y - \frac{z}{3} + 3\frac{1}{2}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $S_1 + S_2$ **b)** $S_1 - S_2$ **c)** $S_2 + S_1$ **d)** $S_2 - S_1$

e) Vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander, und begründen Sie die auftretenden Gesetzmäßigkeiten!

12. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $75a - (12a - 8b) - (6b - 4a)$

b) $90m + (82m + 78n) - (16n + 104m)$

c) $\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{8}\right) - \left(\frac{x}{20} - \frac{y}{16} + 4\frac{1}{2}\right)$

d) $15b^2 - (12c^2 - 3b^2) + (80c^2 + 70d^2 - 4cd)$

e) $(25a + 69b) - (30b + 37a) - (53a - 9b)$

f) $(212{,}9x + 184{,}3y) + (16{,}7x - 15{,}7z) - (54{,}8x - 112{,}4y - 181{,}3z)$

g) $(0{,}16a + 1{,}05b + 3{,}14c) - (0{,}36a - 0{,}09b - 0{,}87c) - (1{,}81a - 0{,}12b - 0{,}45c)$

13. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $5 \cdot 7 + 7 \cdot 8 - (8 \cdot 7 + 4 \cdot 4) + (3 \cdot 7 - 8 \cdot 8 - 3 \cdot 4) - (2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4)$

b) $5 \cdot 6 + 7 \cdot 12 - (8 \cdot 6 + 4 \cdot 9) + (3 \cdot 6 - 8 \cdot 12 - 3 \cdot 9) - (2 \cdot 6 + 4 \cdot 12 - 12 \cdot 9)$

c) $5 \cdot 14 + 7 \cdot 24 - (8 \cdot 14 + 4 \cdot 13) + (3 \cdot 14 - 8 \cdot 24 - 3 \cdot 13) - (2 \cdot 14 + 4 \cdot 24 - 12 \cdot 13)$

d) $5a + 7b - (8a + 4c) + (3a - 8b - 3c) - (2a + 4b - 12c)$

e) Wie hätten Sie die Aufgaben **13a** bis **c** gelöst, wenn Ihnen das Ergebnis der Aufgabe **13d** bekannt gewesen wäre?

f) Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösungen von **13a** bis **c**, indem Sie die Lösung von **13d** verwenden!

14. a) Schreiben Sie folgende Rechenvorschrift für drei verschiedene Zahlen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole nieder! Das Doppelte der ersten Zahl wird um die Summe aller drei Zahlen vermindert. Dazu wird die Differenz addiert, die sich ergibt, wenn vom Fünffachen der dritten Zahl die Summe aus dem Vierfachen der zweiten und dem Sechsfachen der ersten Zahl subtrahiert wird.

b) Vereinfachen Sie den sich ergebenden Ausdruck!

c) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie für die erste Zahl 2, die zweite Zahl 4 und die dritte Zahl 9 einsetzen!

d) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die drei Zahlen gleich sind?

15. a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck!

$7a + (4b - 3c) - [3b - (ab + c)]$

b) Formulieren Sie diesen Ausdruck mit Worten!

c) Wie lautet der Ausdruck, wenn $b = 3a$ und $c = 2a$ ist?

[1] Mit Δt bezeichnet man eine Temperaturdifferenz. Das Symbol Δ steht immer für eine Differenz.

16. Gegeben sei ein Quader mit den Kanten a, b und c ($a > b > c$).

a) Ermitteln Sie die Gesamtlänge aller Kanten!

b) Die größte Kante a wird um die Kante c verkürzt. Wie groß ist nun die Gesamtlänge?

c) Die Kante b wird ebenfalls um c verkürzt. Wie groß ist die Differenz der ursprünglichen Gesamtlänge zur neuen Gesamtlänge der Kanten?

d) Durch Verdoppelung der Länge einer beliebigen Kante wird das Volumen des Quaders verdoppelt. Wie groß ist die Gesamtlänge der Quaderkanten, wenn a verdoppelt wird?

e) Ändert sich die Gesamtlänge der Kanten, wenn b verdoppelt wird?

f) Eine Volumenverdoppelung wird auch erreicht, wenn zwei verschiedene Kanten die doppelte Länge erhalten und die dritte verschiedene Kante halbiert wird.
Stellen Sie die Formeln für alle möglichen Gesamtkantenlängen des Quaders auf, die durch die obige Verdoppelungsvorschrift erhalten werden!

17. Wodurch unterscheiden sich jeweils die folgenden mathematischen Ausdrücke?

a) $n(3a + 4)$ und $n(3a - 4)$ **b)** $z(7m + n)$ und $z \cdot 7m + n$

c) $l_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$ und $l_0 \cdot 1 + \alpha \Delta t$ **d)** $(r^2 + r) \cdot r$ und $r(r^2 - r)$

e) $x(x + 2)$ und $x \cdot x + 2$ **f)** $3(s + 1)$ und $3s - 1$

Geben Sie an, um wieviel der eine Ausdruck größer als der jeweils andere ist!
Gilt das auch für den Fall, daß einzelne oder alle in einer Aufgabe vorkommenden allgemeinen Zahlensymbole für negative Zahlen stehen?

18. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke! (Beachten Sie evtl. vorhandene Rechenvorteile!)

a) $4 \cdot 17 \cdot 250$ **b)** $12{,}5 \cdot 31 \cdot 8$ **c)** $16 \cdot 13 \cdot 0{,}25$ **d)** $7 \cdot 16 \cdot \frac{5}{14}$

e) $15r \cdot 18$ **f)** $12p \cdot 3\frac{3}{4}$ **g)** $300 \cdot 0{,}002v$ **h)** $x \cdot xy$

i) $2a^2 \cdot a$ **k)** $18u \cdot 5uv \cdot 11v$ **l)** $16y \cdot 25x \cdot \frac{1}{8}z$ **m)** $18{,}03p \cdot 0{,}07m \cdot 333\frac{1}{3}q$

19. Prüfen Sie das Ergebnis der Aufgabe **18h** nach, indem Sie folgende Werte einsetzen!

a) $x = 2;\ y = 3$ **b)** $x = -4;\ y = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = 3\frac{3}{4};\ y = -\frac{2}{5}$ **d)** $x = 50;\ y = -10$

20. a) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $k_1 = 15\,\text{cm}$ und $k_2 = 0{,}20\,\text{m}$? Der Flächeninhalt soll in Quadratzentimetern, Quadratdezimetern und Quadratmetern angegeben werden.

b) Wie lautet die Formel für den Flächeninhalt A bei Verwendung der in **a** benutzten allgemeinen Zahlensymbole?

21. Die Cheopspyramide[1] in Giseh (Ägypten) hatte ursprünglich eine quadratische Grundfläche mit $a = 233$ m Seitenlänge und eine Höhe $h = 146$ m. Heute beträgt die Seitenlänge $a_1 = 227$ m und die Höhe $h_1 = 137$ m.

a) Berechnen Sie die Volumenabnahme, und stellen Sie unter Verwendung der benutzten allgemeinen Zahlensymbole eine Formel für die Volumenabnahme auf!

b) Bestimmen Sie die prozentuale Volumenabnahme!

22. Rechnen Sie folgende Aufgaben möglichst vorteilhaft „im Kopf"!

a) $6 \cdot 48$ **b)** $73 \cdot 4$ **c)** $89 \cdot 7$ **d)** $9 \cdot 81$ **e)** $9 \cdot 99$

f) $0{,}3 \cdot 72$ **g)** $5 \cdot 3{,}5$ **h)** $17 \cdot 0{,}8$ **i)** $8 \cdot 0{,}64$

Beispiel: $7 \cdot 56 = 7 \cdot (50 + 6) = 7 \cdot 50 + 7 \cdot 6 = 350 + 42 = 392$

[1] Diese größte Pyramide enthält die Grabkammer des ägyptischen Königs Cheops (2700 – 2675 v. u. Z.). Tausende von Sklaven errichteten das gewaltige Bauwerk im Laufe vieler Jahre. Viele von ihnen starben an den Folgen der zügellosen Ausbeutung durch die herrschende Klasse.
Heute hat die Pyramide die Form eines Pyramidenstumpfes. Der Einfachheit halber wird die tatsächliche Form nicht berücksichtigt.

23. Formen Sie die folgenden Produkte in algebraische Summen um!

a) $3[4-(2a+3)]$ **b)** $p_0 V_0[1+\gamma(t_2-t_1)]$

c) $3x^2[8y-4(6x-2y)]$ **d)** $13(5p-9k+11n-20r)$

e) $(7a^2b-11ab^2+3b^2-2)(-13abx)$ **f)** $5(c-2d)\,2ab$

g) $8r^2(-2s-3r)\,12{,}5s$ **h)** $c(0{,}4ac-0{,}6bc)\,5ab$

Vereinfachen Sie soweit wie möglich die folgenden mathematischen Ausdrücke!

24. a) $2(3a-4b)-4(5a-6b)-7(-2a+3b)$

b) $15x(-3y-2z)-30y(1{,}5x-4z)-10z(-3x+12y)$

25. a) $8{,}5x^2(3{,}6y-4{,}7z+7{,}1)$ **b)** $14\tfrac{1}{2}pq(7p-3\tfrac{1}{4}q+7\tfrac{4}{5}pq)$

c) $413(x+8y+12z)-712(x+5y-7z)+114(5x-2y+3z)$

d) $54(o+4p+6q+1)+116(3o-4q-4p+1)-64(o+p-4q-1)$

e) $4\tfrac{1}{2}(4b+3c+2a)-5\tfrac{1}{3}(7a+9c+5b)-12\tfrac{5}{6}(4c-3a-2b)$

f) $\dfrac{7}{8}x\left(\dfrac{1}{7}x+\dfrac{4}{14}y-\dfrac{8}{28}z\right)-\dfrac{4}{3}y\left(12x+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{9}{8}z\right)-\dfrac{6}{10}z\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}y\right)$

26. a) $42(3x-4y)-8[6x-3(2y-x)-2(6x-2y)]-3(x-5y)$

b) $4[2x-5(4x-2y)-3(x+y)]-8[x+5(3x-2y)]$

c) $\tfrac{1}{2}[4a-6(3a-2b+5c)+16(a-b+c)]-\tfrac{3}{8}[8a-\tfrac{1}{3}(16b-12c)]$

d) $0{,}5[4x-3(x-2y)]-0{,}25[8x-12(x-5y)]$

e) $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{4}{5}a-\dfrac{6}{7}\left(\dfrac{7a}{3}+\dfrac{14b}{5}\right)\right]-\dfrac{12}{25}\left[\dfrac{5a}{6}-\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{5}{3}a-\dfrac{15}{9}b\right)\right]$

27. Schreiben Sie mit Hilfe allgemeiner Zahlensymbole!

a) Das Produkt zweier Zahlen wird um die vierfache Differenz der beiden Zahlen vermindert.

b) Die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und dem Dreifachen einer anderen Zahl wird mit einer dritten Zahl multipliziert. Davon wird Dreiviertel des Produkts subtrahiert, das aus der Hälfte der dritten Zahl und der Summe der beiden anderen Zahlen gebildet wird.

c) Wie lauten die mathematischen Ausdrücke von Aufgabe **27a** und **b,** wenn die genannten Zahlen einander gleich sind?

d) Kontrollieren Sie das Ergebnis der Aufgabe **27a,** indem Sie für die erste Zahl 4 und für die zweite Zahl 3 einsetzen!

28. Fassen Sie die folgenden mathematischen Ausdrücke in Worte!

a) $2ab+4a(b-a)+a^2$ **b)** $xy-(x+y)z-(y+z)x$

29. Bei der Einführung der allgemeinen Zahlensymbole wurde festgelegt:

(I) Gleiche Zahlensymbole haben innerhalb einer Aufgabe gleiche Bedeutung;
(II) Unterschiedliche Symbole haben innerhalb einer Aufgabe im allgemeinen unterschiedliche Bedeutung.

a) Weshalb wurden in **(II)** die Worte „im allgemeinen“ benutzt?

b) Aus welchem Grund fehlen diese Worte in **(I)**?

30. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $\tfrac{5}{3}\cdot 2[3\cdot 3+\tfrac{1}{2}(4\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 5)]-\tfrac{1}{4}\cdot 5[4\cdot 2-(2\cdot 3+3\cdot 2-4\cdot 5)]$

b) $\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{1}{4}[3\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}(4\cdot\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{5}+3\cdot\tfrac{1}{6})]-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{6}[4\cdot\tfrac{1}{4}-(2\cdot\tfrac{1}{5}+3\cdot\tfrac{1}{4}-4\cdot\tfrac{1}{6})]$

c) $\tfrac{5}{3}\cdot 0{,}6[3\cdot 0{,}4+\tfrac{1}{2}(4\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}8)]-\tfrac{1}{4}\cdot 0{,}8[4\cdot 0{,}6-(2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}6-4\cdot 0{,}8)]$

d) $\tfrac{5}{3}\cdot x[3\cdot y+\tfrac{1}{2}(4x+2y+3z)]-\tfrac{1}{4}z[4x-(2y+3x-4z)]$

e) Vergleichen Sie die Aufgaben **a** bis **c** mit der Aufgabe **d**!

f) Kürzen Sie die Lösungswege für die Aufgaben **a** bis **c** mit Hilfe des Ergebnisses von **d** ab!

Multiplikation einer algebraischen Summe mit algebraischen Summen

Das Produkt $23 \cdot 37$ kann man auf folgende Weise berechnen: Zuerst wird der eine Faktor, etwa 23, in die algebraische Summe $20 + 3$ zerlegt und dann mit dem anderen Faktor – im Beispiel 37 – multipliziert. Bei der schriftlichen Multiplikation geht man entsprechend vor. Falls die Rechnung komplizierter ist, zerlegt man auch den anderen Faktor in eine algebraische Summe, etwa $30 + 7$, und findet das Produkt dann durch Multiplikation der beiden algebraischen Summen.

Übliche Kurzform		erläuternde Form
$23 \cdot 37$	$\longleftrightarrow$	$(20 + 3) \cdot (30 + 7)$
69	$\longleftrightarrow$	$(20 + 3) \cdot 30 = 600 + 90 = 690$
161	$\longleftrightarrow$	$(20 + 3) \cdot 7 = 140 + 21 = 161$
851	$\longleftrightarrow$	851

1. *Beschreiben Sie den Rechenvorgang beim Multiplizieren in der üblichen Kurzform!*
2. *Beschreiben Sie den Rechenvorgang beim Multiplizieren in der erläuternden Form!*

Um die allgemeingültige Rechenregel für das Multiplizieren einer zweigliedrigen algebraischen Summe mit einer zweigliedrigen algebraischen Summe zu erhalten, gehen wir aus von den algebraischen Summen:

$$S_1 = a + b \quad \text{und} \quad S_2 = c + d.$$

Ist das Produkt $S_1 \cdot S_2$ der beiden algebraischen Summen $S_1 = a + b$ und $S_2 = c + d$ gesucht, so müssen die algebraischen Summen, die als Ganzes einer Rechenoperation unterworfen werden sollen, in Klammern gesetzt werden.
Wir führen die zu lösende Aufgabe auf eine bereits gelöste zurück: die Multiplikation eines eingliedrigen Ausdruckes mit einer algebraischen Summe.

Für $S_1 \cdot S_2 = (a + b) \cdot (c + d)$ läßt sich schreiben:

(1) $(a + b) \cdot S_2 = a \cdot S_2 + b \cdot S_2.$

Setzt man nun in (1) statt S_2 wieder die algebraische Summe $c + d$ ein, so erhält man:

(2) $a \cdot S_2 + b \cdot S_2 = a(c + d) + b \cdot (c + d).$

Daraus folgt:

(3) $a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$

Aus (1) bis (3) folgt

(4) $\boldsymbol{S_1 \cdot S_2 = (a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.}$

Das Produkt aus zwei zweigliedrigen algebraischen Summen erhält man demnach durch Multiplikation jedes Gliedes der einen algebraischen Summe mit jedem Glied der anderen.

Mit Hilfe von (4) lassen sich die Ausdrücke:

$$(a + b) \cdot (c - d),$$
$$(a - b) \cdot (c + d),$$
$$(a - b) \cdot (c - d)$$

berechnen:

$$(5) \quad (a + b) \cdot (c - d) = (a + b) \cdot [c + (-d)] = a\,c + (-a\,d) + b\,c + (-b\,d) = a\,c - a\,d + b\,c - b\,d;$$

$$(6) \quad (a - b) \cdot (c + d) = [(a + (-b)] \cdot (c + d) = a\,c + a\,d + (-b\,c) + (-b\,d) = a\,c + a\,d - b\,c - b\,d;$$

$$(7) \quad (a - b) \cdot (c - d) = [a + (-b)] \cdot [c + (-d)] = a\,c + (-a\,d) + (-b\,c) + b\,d = a\,c - a\,d - b\,c + b\,d.$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, algebraische Summen mit mehr als zwei Summanden zu multiplizieren. Als erstes soll das Produkt der beiden algebraischen Summen

$$S_1 = a + b \quad \text{und} \quad S_2 = c + d + e$$

ermittelt werden.

Setzt man vorübergehend $d + e = s$, so gilt nach (4):

$$(8) \quad S_1 \cdot S_2 = (a + b) \cdot (c + s) = a\,c + a\,s + b\,c + b\,s.$$

Nun wird in (8) für s wieder $d + e$ eingesetzt. Nach der Regel für die Multiplikation einer zweigliedrigen algebraischen Summe mit einer Zahl gilt dann:

$$(9) \quad a\,c + a(d + e) + b\,c + b(d + e) = a\,c + a\,d + a\,e + b\,c + b\,d + b\,e.$$

Faßt man (8) und (9) zusammen, erhält man:

$$(10) \quad S_1 \cdot S_2 = (a + b) \cdot (c + d + e) = a\,c + a\,d + a\,e + b\,c + b\,d + b\,e.$$

Offensichtlich wird auch hier jedes Glied der ersten algebraischen Summe mit jedem Glied der zweiten multipliziert. Das gilt auch dann, wenn die zweite algebraische Summe mehr als drei Glieder hat.

● *Es sind zwei dreigliedrige Summen miteinander zu multiplizieren. Führen Sie diese Aufgabe auf eine bereits gelöste zurück!*

Treten Minuszeichen in den algebraischen Summen auf, so verfährt man so wie in (5) bis (7).

Zusammenfassend kommen wir zu folgender Rechenregel:

▶ **Eine algebraische Summe wird mit einer algebraischen Summe multipliziert, indem jedes Glied der einen algebraischen Summe mit jedem Glied der anderen multipliziert wird.**

▶ **Die Rechenzeichen zwischen den Gliedern der entstehenden algebraischen Summe werden nach den Vorzeichenregeln für die Multiplikation rationaler Zahlen ermittelt. Die entstehenden Produkte werden anschließend soweit wie möglich zusammengefaßt.**

● *Prüfen Sie die Rechenregel auf ihre Richtigkeit, indem Sie auf gleiche Weise* 376 *mit* 1,35 *multiplizieren! Für* 376 *schreiben Sie* (300 + 70 + 6) *und für* 1,35 (1 + 0,3 + 0,05).

Beispiel 1:

Gegeben $S_1 = -4{,}5x^2 y - 2{,}5x y^2$ und $S_2 = 2y z - 4x z$

Gesucht: $S_1 \cdot S_2$

Lösung:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= (-4{,}5x^2 y - 2{,}5x y^2)(2y z - 4x z) \\ &= -9x^2y^2z + 18x^3yz - 5xy^3z + 10x^2y^2z = 18x^3yz + x^2y^2z - 5xy^3z \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Gegeben: $S_1 = \frac{5}{2}r^2 + \frac{7}{2}s - \frac{3}{2}$ und $S_2 = \frac{5}{2}r^2 - \frac{7}{2}s + \frac{3}{2}$

Gesucht: $S_1 \cdot S_2$

Lösung:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= \left(\frac{5}{2}r^2 + \frac{7}{2}s - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}r^2 - \frac{7}{2}s + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{25}{4}r^4 - \frac{35}{4}r^2 s + \frac{15}{4}r^2 \\ &\qquad + \frac{35}{4}r^2 s \qquad\qquad - \frac{49}{4}s^2 + \frac{21}{4}s \\ &\qquad\qquad - \frac{15}{4}r^2 \qquad\qquad + \frac{21}{4}s - \frac{9}{4} \\ \hline S_1 \cdot S_2 &= \frac{25}{4}r^4 \qquad\qquad\qquad - \frac{49}{4}s^2 + \frac{21}{2}s - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Bei der Lösung derartiger Aufgaben wollen wir folgendes beachten:

1. Die algebraische Summe $(-4{,}5x^2 y - 2{,}5x y^2)$ hat die gleiche Struktur wie die algebraische Summe $(-a - b)$. Es gilt aber $(-a - b) = -(a + b)$.
   Das **Beispiel 2** entspricht seiner Struktur nach voll und ganz dem Produkt

   $(a + b - c) \cdot (a - b + c) = [a + (b - c)] \cdot [a - (b - c)]$.

   Das Produkt dieser beiden algebraischen Summen ist $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$. Die Beachtung derartiger Sachverhalte verhilft oft zu einer einfacheren Lösung.
2. Gleichartige Teilprodukte können zusammengefaßt werden.
   Im **Beispiel 1** wurden $-9x^2y^2z + 10x^2y^2z$ zu x^2y^2z zusammengefaßt; im **Beispiel 2** heben sich gleichartige Glieder mit entgegengesetzten Rechenzeichen sogar auf.
3. Durch eine übersichtliche und klare Schreibweise von Aufgabe und Lösung wird das Auffinden übereinstimmender Glieder sehr gefördert. Es empfiehlt sich, die Glieder nach folgendem Prinzip zu ordnen:
   a) In jedem Glied werden die vorkommenden allgemeinen Zahlensymbole in der Reihenfolge des Alphabets geschrieben.
   b) Die Glieder werden nach den vorkommenden Zahlensymbolen in der Reihenfolge des Alphabets geordnet.
   c) Alle Glieder mit dem gleichen allgemeinen Zahlensymbol werden nach fallenden Potenzen dieses Zahlensymbols geordnet.

   Dieses Ordnungsprinzip nennt man das Prinzip der lexikografischen Anordnung.

4. Manchmal ist es zweckmäßig, daß weitere Umformungsmöglichkeiten der Ergebnisse einer Multiplikation beachtet werden. So läßt sich im **Beispiel 1** noch ein Produkt aus einem eingliedrigen Ausdruck und einer algebraischen Summe gewinnen:

$$18x^3yz + x^2y^2z - 5xy^3z = xyz(18x^2 + xy - 5y^2).$$

Diese Umformung gehört aber nicht mehr zur Lösung der Aufgabe, das Produkt zweier algebraischer Summen zu berechnen. Die Aufgabenstellung verlangt als Ergebnis lediglich die algebraische Summe, die sich durch Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und lexikografisches Ordnen ergibt.

Auch die Aufgabe, drei und mehr algebraische Summen miteinander zu multiplizieren, läßt sich auf bereits gelöste Aufgaben zurückführen. Das soll hier am Fall der Produktbildung aus drei zweigliedrigen algebraischen Summen gezeigt werden. Für $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = (a+b) \cdot (c+d) \cdot (e+f)$ läßt sich vorübergehend schreiben:

(12) $(a+b) \cdot P = a \cdot P + b \cdot P$ mit $P = S_2 \cdot S_3 = (c+d) \cdot (e+f) = ce + cf + de + df.$

Setzt man den eben errechneten Wert für P in (12) ein, so erhält man:

(13) $aP + bP = a(ce + cf + de + df) + b(ce + cf + de + df).$

Daraus folgt:

(14) $$\mathbf{(a+b)\,(c+d)\,(e+f) = ace + acf + ade + adf}$$
$$\mathbf{+\, bce + bcf + bde + bdf.}$$

Die hier mehrfach zur Lösung bestimmter Aufgaben benutzte Rückführung eines noch ungelösten mathematischen Problems auf ein bereits gelöstes ist eine wichtige mathematische Arbeitsmethode. Man benutzt sie oft bei allgemeingültigen Herleitungen und Beweisen sowie bei der Lösung von konkreten mathematischen Aufgaben und Einzelproblemen.

Setzen von Klammern

Klammern deuten immer an, daß der in ihnen stehende Ausdruck als ein einheitliches Ganzes zu behandeln ist.
Beim Multiplizieren mit einem Faktor bedeutet das, daß jedes Glied der in Klammern eingeschlossenen algebraischen Summe mit dem Faktor zu multiplizieren ist.

$$\pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi r_1^2 - \pi r_2^2.$$

Diese Umformung bezeichnet man als **Ausmultiplizieren.** Liest man die Gleichung in umgekehrter Reihenfolge

$$\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2),$$

so nennt man diese Umformung **Ausklammern** oder das **Setzen von Klammern.**
Dieses Verfahren ist oft vorteilhaft, wenn mit bestimmten Zahlen gerechnet werden soll.

$$\pi \cdot 1{,}5^2 - \pi \cdot 0{,}5^2 = \pi(1{,}5^2 - 0{,}5^2) = \pi(2{,}25 - 0{,}25) = 2\pi \approx 6{,}28.$$

Aber auch beim Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole können vielfach komplizierte Ausdrücke durch das Setzen von Klammern einfacher und übersichtlicher werden.

Umformung einer algebraischen Summe in ein Produkt zweier algebraischer Summen

Wie jede Gleichung können auch die identischen Gleichungen (3) bis (7) in beiden Richtungen gelesen werden. So gilt für Gleichung (4) beispielsweise:

Umwandeln eines Produktes in eine algebraische Summe durch Ausmultiplizieren

(4) $$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Umwandeln einer algebraischen Summe in ein Produkt durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren.

Offensichtlich ist das eine die Umkehrung des anderen. Beide Umformungen sind für das Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole von großer Bedeutung.

In der algebraischen Summe

(15) $S_1 = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$

gibt es keinen Faktor, der allen Gliedern gemeinsam ist. Aber es kommt jeder Faktor in zwei von vier Gliedern vor, so daß zunächst folgendermaßen ausgeklammert werden kann:

(16) $a\,c + a\,d + b\,c + b\,d = a(c+d) + b(c+d)$.

Das gesuchte Produkt erhält man daraus durch Ausklammern des neu entstandenen gemeinsamen Faktors $(c+d)$:

(17) $a(c+d) + b(c+d) = (c+d)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(c+d)$.

Damit ist die algebraische Summe in ein Produkt umgeformt worden.
Der eben beschriebene Lösungsweg ist nicht der einzig mögliche.

1. *Lösen Sie die Aufgabe auf andere Art! Vergleichen Sie die Resultate!*
2. *Überprüfen Sie die Gleichung $a\,c + a\,d + b\,c + b\,d = (a+b)(c+d)$ durch Einsetzen bestimmter Zahlen für a, b, c und d!*

Während jedes Produkt von zwei oder mehr algebraischen Summen durch Ausmultiplizieren in eine algebraische Summe umgeformt werden kann, ist es umgekehrt nicht möglich, jede algebraische Summe in ein Produkt zweier algebraischer Summen umzuformen. Die Umformung der algebraischen Summe

(18) $S = a\,b + c\,d + e\,f + g\,h$

in ein Produkt ist nicht möglich, weil es keinen gemeinsamen Faktor gibt.
Aber auch gemeinsam auftretende Faktoren garantieren noch nicht die Möglichkeit der gewünschten Umformung. Das kann man am folgenden Beispiel erkennen:

(19) $S = a\,b + c\,d + a\,f + c\,h = a(b+f) + c(d+h)$.

In diesen beiden Produkten der rechts stehenden algebraischen Summe kommt kein gemeinsamer Faktor vor, so daß also auch die algebraische Summe (19) nicht in ein Produkt zweier algebraischer Summen verwandelt werden kann.
Häufig ist es schwierig, bei derartigen Aufgaben den Lösungsweg zu finden. Das gilt z. B. für die algebraische Summe

$$S = 18x^3 y z + x^2 y^2 z - 5x y^3 z.$$

Sie läßt sich aber tatsächlich in ein Produkt zweier algebraischer Summen umformen (vgl. **Beispiel 1** auf Seite 13).

Wir wollen den Lösungsweg an zwei einfacheren Beispielen erläutern.

Beispiel 3:

Die algebraische Summe $S_1 = 3a - 6am + 8bmn - 4bn$ soll in ein Produkt zweier algebraischer Summen umgeformt werden.

Lösung:

$$\begin{aligned} 3a - 6am + 8bmn - 4bn &= 3a(1-2m) - 4bn(1-2m) \\ &= (1-2m)\cdot(3a-4bn) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 3a - 6am + 8bmn - 4bn &= 2m(4bn-3a) - (4bn-3a) \\ &= (4bn-3a)(2m-1). \end{aligned}$$

Probe:

$$(1-2m)\cdot(3a-4bn) = 3a - 4bn - 6am + 8bmn,$$
$$(4bn-3a)\cdot(2m-1) = 8bmn - 4bn - 6am + 3a.$$

Beispiel 4:

Die algebraische Summe $S_2 = 45r^3s^2 - 39r^2s^3 - 75r^2s + 65rs^2 + 33rs - 55$ soll in ein Produkt zweier algebraischer Summen umgeformt werden.

Lösung:

$$45r^3s^2 - 39r^2s^3 - 75r^2s + 65rs^2 + 33rs - 55$$
$$= 3rs(15r^2s - 13rs^2 + 11) - 5(15r^2s - 13rs^2 + 11)$$
$$= (3rs-5)(15r^2s - 13rs^2 + 11)$$
$$45r^3s^2 - 39r^2s^3 - 75r^2s + 65rs^2 + 33rs - 55$$
$$= 15r^2s(3rs-5) - 13rs^2(3rs-5) + 11(3rs-5)$$
$$= (3rs-5)(15r^2s - 13rs^2 + 11).$$

1. *Fertigen Sie die Probe an! (Ausmultiplizieren beider algebraischer Summen liefert die gegebene algebraische Summe.)*
2. *Überlegen Sie, ob* **Beispiel 3** *wirklich zwei verschiedene Lösungen hat! Wie kommt der Unterschied zustande?*

Aufgaben

31. Durch welche algebraischen Summen werden

a) die jeweilige Gesamtlänge der Linienzüge in den Abbildungen 1.1.a bis 1.1.c,

b) die jeweilige Größe der Gesamtfläche in den Abbildungen 1.2.a bis 1.2.c,

c) die jeweilige Größe des Gesamtvolumens in den Abbildungen 1.3.a und 1.3.b ausgedrückt?

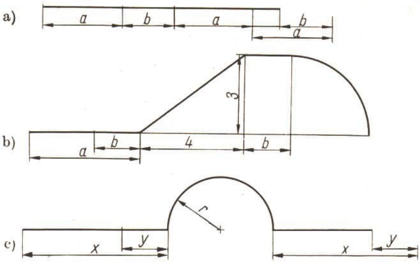
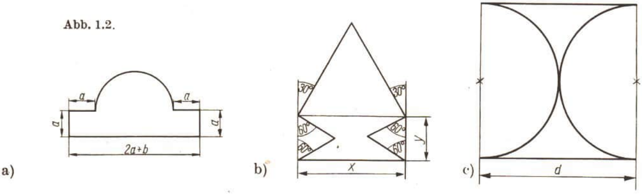


Abb. 1.1.

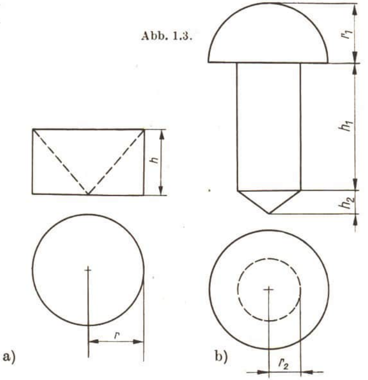
Abb. 1.2.



32. Die folgenden algebraischen Summen sind mit den danebenstehenden eingliedrigen Ausdrücken zu multiplizieren.

a) $x + x_1$	9
b) $3r^2 - 25$	-7
c) $a\,b^2 - a^2\,b$	m
d) $5 - 11a$	$-13p$
e) $x - 1$	$-x$
f) $3{,}51 - 6{,}7m$	$-l\,m$
g) $-0{,}5b\,c - 0{,}2c$	$-20a^2b$
h) $a + b - c$	3
i) $3r - 4s + 5t$	$-2x$
k) $-30n + 3v - 0{,}3w$	$-15uvw$
l) $1 + \alpha \cdot \Delta t$	l_0
m) $t_2 - t_1$	V_0
n) $r_1{}^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2{}^2$	$\frac{1}{3}\pi h$
o) $3r_1{}^2 + 3r_2{}^2 + h^2$	$\frac{1}{6}\pi h$

Abb. 1.3.



33. Gegeben sind die folgenden algebraischen Summen.

$S_1 = 2u + 1; \quad S_2 = m^2 n - 30m; \quad S_3 = -0{,}04z - \frac{1}{20}; \quad S_4 = 3a^2 - 2ab + a;$

$S_5 = -5a + 0{,}4b - 30; \quad S_6 = \frac{1}{2}g - \frac{2}{3}k - \frac{3}{4}i - \frac{4}{5}k + \frac{5}{6}$

Berechnen Sie folgende Produkte!

a) $S_1 \cdot S_2$ **b)** $S_1 \cdot S_3$ **c)** $S_2 \cdot S_3$ **d)** $S_1 \cdot S_4$ **e)** $S_1 \cdot S_5$ **f)** $S_2 \cdot S_5$

g) $S_2 \cdot S_6$ **h)** $S_3 \cdot S_5$ **i)** $S_3 \cdot S_6$ **k)** $S_4 \cdot S_5$

Machen Sie sich die Gleichheit der Summen und der Produkte klar, indem Sie für die allgemeinen Zahlensymbole bestimmte Zahlen einsetzen!

34. Bei welchen Ergebnissen der Aufgabe **33** läßt sich ein eingliedriger Ausdruck ausklammern? Wie lauten dann die Ergebnisse?

35. Formen Sie folgende algebraische Summen durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte um!

a) $12a - 3b$ **b)** $-26ab - 65bc$

c) $54x^2yz - 108xy^2z - 36xyz^2$ **d)** $-28rs - 77rt - 84ru - 91rv$

e) $45mn^2 - 15mn + 135m^2n^2 - 105m^2n$ **f)** $\frac{1}{12}\pi h d_1^2 + \frac{1}{12}\pi h d_1 d_2 + \frac{1}{12}\pi h d_2^2$

g) $\frac{1}{8}\pi h d_1^2 + \frac{1}{16}\pi h d_2^2 + \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{16}\pi h d_2^2$ **h)** $V_0 + V_0 \gamma \Delta t$

i) $p_0 V_0 + p_0 V_0 \gamma t_2 - p_0 V_0 \gamma t_1$ **k)** $aq^2 - a$

l) $aq^2 - q$ **m)** $aq^2 - q^2$

36. a) Wie lautet die Rechenregel für das in Aufgabe **35** benutzte Ausklammern gemeinsamer Faktoren?

b) Wie läßt sich das vorgenommene Ausklammern gemeinsamer Faktoren am einfachsten auf seine Richtigkeit kontrollieren?

37. Formen Sie die folgenden algebraischen Summen in Produkte um!

a) $ad + bd - ac - ae - bc - be$ **b)** $4m^2 - 14ml + 49nl - 14mn$

c) $3ux - \frac{9}{8}uy - 4vx + \frac{3}{2}vy$ **d)** $ax + bx - a - b$

e) $2ab - 10a + 3b - 15$ **f)** $8ax + 25by + 12az - 10bx - 20ay - 15bz$

g) $3(2x - 5) - 5u(4y - 3) + 2u(2x - 5) + (4y - 3) + 3u(2x - 5) - 4(4y - 3)$

h) $(a - b)(3x - 2y) - (b - a)(4x - 3y) - (-a + b)(-7x + 5y)$

38. Wie lassen sich die Gleichungen (4) bis (7) unter Verwendung des Doppelsymbols $\pm$ kürzer schreiben?

39. Wie können Sie die Gleichungen (4) bis (7) geometrisch veranschaulichen?

40. Wie läßt sich die Rechenregel für das Multiplizieren algebraischer Summen mit Hilfe von (10) begründen, wenn eine der algebraischen Summen mehr als drei Summanden hat?

41. a) Beweisen Sie unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole folgenden Satz:

Das Produkt zweier algebraischer Summen ist gleich dem Produkt derjenigen beiden algebraischen Summen, die aus den ersten durch Umkehrung aller Vor- bzw. Rechenzeichen in den Summen entstanden sind.

b) Begründen Sie, weshalb diese Gesetzmäßigkeit für das Produkt aus drei algebraischen Summen nicht gilt!

c) Welches Ergebnis ist für ein Produkt aus vier algebraischen Summen zu erwarten?

42. Jede im Dezimalsystem angegebene ganze Zahl läßt sich als algebraische Summe schreiben. Das Produkt zweier mehrstelliger Zahlen kann also als Produkt zweier algebraischer Summen aufgefaßt werden. Begründen Sie unter Beachtung dieser Auffassung das Verfahren der Multiplikation im Dezimalsystem für mehrstellige Zahlen!

43. Berechnen Sie folgende Produkte!

a) $(a+b)(a-b)$ **b)** $(x+y)(x+y)$

c) $(m-n)(m-n)$ **d)** $(a+b)(a+b)(a+b)$

44. Gegeben sind die Kanten a, b und c eines Quaders. Es ist das Volumen der Quader zu bestimmen, die durch folgende Veränderungen aus dem ursprünglichen Quader hervorgehen.

a) Die Kante a wird um die Summe der Kanten b und c vermindert.

b) Die Kante b wird um die doppelte Kante c verlängert und um die Seite a vermindert.

c) Die Kanten a und b bleiben unverändert — die dritte Kante entsteht aus einem Viertel der Kante a und drei Achteln der Kante b.

d) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen für die Kanten die Aufträge in den Aufgaben **a** bis **c** durchführbar sind!

45. **a)** $[a-(2b+c)]\cdot[b+(a-c)]$ **b)** $[2x-4(y+3z)]\cdot[7y-3(x-4z)]$

c) $[m^2-5n(n-2m)]\cdot[2n^2+3m(4n-3m)]$

d) $[0{,}8a-5{,}3(b+c-a)]\cdot[4{,}3b-1{,}3(6{,}1b-4a+2{,}5c)]$

e) $\frac{1}{6}[\frac{3}{4}x-(\frac{2}{3}y+\frac{1}{4}z)]\cdot[\frac{2}{3}y+\frac{1}{4}(\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}z)]\cdot(x+y-z)$

Die binomischen Formeln

Die Gleichungen (4) bis (7) liefern die Ergebnisse der Multiplikation zweier zweigliedriger algebraischer Summen für den Fall, daß alle vier vorkommenden Glieder voneinander verschieden sind. Nehmen wir an, daß von den vier Gliedern nur zwei voneinander verschieden sind, so erhält man folgende Gleichungen, wenn wir $c=a$ und $d=b$ setzen:

(20) $(a+b)\cdot(a+b)=a^2+a\,b+a\,b+b^2,$

(21) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-a\,b+a\,b-b^2,$

(22) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2+a\,b-a\,b-b^2,$

(23) $(a-b)\cdot(a-b)=a^2-a\,b-a\,b+b^2.$

Fassen wir die übereinstimmenden Glieder in den algebraischen Summen zusammen, so läßt sich für (20) auch schreiben:

(24) $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

für (23)

(25) $\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

Ein Vergleich von (21) und (22) zeigt, daß die Ergebnisse übereinstimmen, was wegen des Kommutationsgesetzes der Multiplikation auch zu erwarten war. Die Gleichungen (21) und (22) lassen sich zu

(26) $\quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

zusammenfassen.
Die Gleichungen (24), (25) und (26) heißen binomische[1] Formeln. Wegen ihrer großen Bedeutung für verschiedene Gebiete der Mathematik sind sie fest einzuprägen.

● *Formulieren Sie die binomischen Formeln mit Worten!*

Die binomischen Formeln für die Summe bzw. die Differenz zweier Zahlen dienen nicht nur dazu, Quadrate algebraischer Summen von der Struktur $a + b$ und $a - b$ in algebraische Summen umzuformen, sondern auch umgekehrt dreigliedrige algebraische Summen von der Form $a^2 \pm 2ab + b^2$ in Quadrate zweigliedriger algebraischer Summen von der Form $a \pm b$ zu überführen.

Quadrieren einer zweigliedrigen algebraischen Summe

$$\overrightarrow{\underleftarrow{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}}$$

Umformen einer dreigliedrigen algebraischen Summe in das Quadrat einer zweigliedrigen algebraischen Summe

Da nicht jede dreigliedrige algebraische Summe die Struktur $a^2 \pm 2ab + b^2$ besitzt, ist die letztgenannte Umformung nicht für jede dreigliedrige algebraische Summe möglich.
Entsprechendes gilt auch für die binomische Formel (26).
Sie dient nicht nur dazu, das Produkt aus Summe und Differenz zweier eingliedriger Ausdrücke in eine algebraische Summe zu verwandeln, sondern auch umgekehrt die Differenz der Quadrate zweier eingliedriger Ausdrücke in das Produkt aus Summe und Differenz dieser beiden eingliedrigen Ausdrücke umzuformen.

Umwandeln eines Produktes aus Summe und Differenz zweier Zahlen in die Differenz zweier Quadrate

$$\overrightarrow{\underleftarrow{(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2}}$$

Umwandeln einer Differenz zweier Quadrate in das Produkt aus Summe und Differenz zweier Zahlen

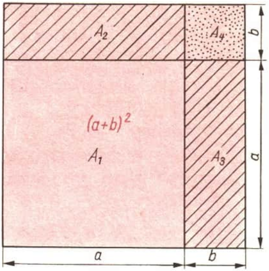
Die Umformung von links nach rechts stellt für alle Formeln Sonderfälle des Ausmultiplizierens algebraischer Summen, die von rechts nach links stellt Sonderfälle des Ausklammerns dar.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a(a \pm b) \pm b(a \pm b) = (a \pm b)\cdot(a \pm b);$$
$$a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a(a+b) - b(a+b) = (a+b)\cdot(a-b).$$

Die Abbildungen 1.4. bis 1.6. veranschaulichen die drei binomischen Formeln. In den beiden ersten Fällen sind die Gesamtflächen jeweils Quadrate, bei der dritten

[1] bis (lat.), zweimal – nomen (lat.), Name

binomischen Formel ist die Gesamtfläche ein Rechteck, das der Differenz zweier Quadrate flächengleich ist. Es ist üblich, die algebraischen Summen $a^2 \pm 2ab + b^2$ als **vollständige Quadrate** zu bezeichnen. Die algebraische Summe $a^2 - b^2$ ist dagegen kein vollständiges Quadrat. Die binomischen Formeln kann man benutzen, Ausdrücke der Form $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ oder $(a+b)\cdot(a-b)$, ohne das sonst übliche schrittweise Ausmultiplizieren zu berechnen.



$$(a+b)^2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Abb. 1.4.

Beispiel 5:

Welche algebraische Summe ist gleich dem Quadrat der algebraischen Summe $3x+1$?

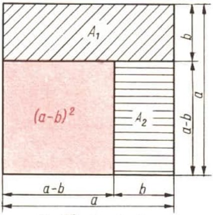
Lösung:

$3x+1$ ist von gleicher Struktur wie $a+b$. Hier ist $a = 3x$ und $b = 1$.

Wegen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gilt

$$(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2$$
$$= 9x^2 + 6x + 1.$$

Prüfen Sie das Ergebnis nach, indem Sie für x nacheinander einige bestimmte Zahlen, etwa 5, -3, $\frac{1}{4}$, $-4\frac{1}{3}$, sowohl links als auch in die algebraische Summe rechts einsetzen!



$$(a-b)^2 = A_6 - A_1 - A_2$$
$$= a^2 - ab - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Abb. 1.5.

Beispiel 6:

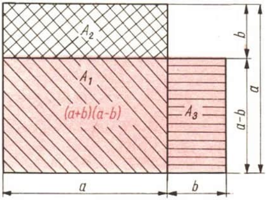
Welche algebraische Summe ist gleich dem Quadrat von $\frac{1}{2}r - 5st$?

Lösung:

Wegen $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gilt für $a = \frac{1}{2}r$ und $b = 5st$

$$\left(\frac{1}{2}r - 5st\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}r \cdot 5st + (5st)^2$$
$$= \frac{r^2}{4} - 5rst + 25s^2t^2.$$

Prüfen Sie das Ergebnis wieder durch Einsetzen bestimmter Zahlen nach!



$$(a+b)(a-b) = A_1 - A_2 + A_3$$
$$= a^2 - ab + b(a-b)$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

Abb. 1.6.

Beispiel 7:

Formen Sie die algebraische Summe

$$1 - 5z + \frac{25}{4}z^2$$

in ein vollständiges Quadrat um!

Lösung:

$1-5z+\frac{25}{4}z^2$ wird vermutlich die Struktur $a^2-2ab+b^2$ haben. Wenn diese Vermutung richtig ist, so muß 1 dem Summanden a^2 entsprechen, also $a=1$ sein. Ebenso muß dann $5z$ gleich dem Produkt $2ab=a(2b)$ sein. Wegen $a=1$ folgt: $\quad 1\cdot 2b=5z$

und daraus: $b=\frac{5}{2}z$.

Wenn nun das Quadrat des so bestimmten b gleich dem dritten Summanden der vorgelegten dreigliedrigen algebraischen Summe ist, so ist diese tatsächlich ein vollständiges Quadrat, andernfalls nicht.

Da $b^2=\left(\frac{5}{2}z\right)^2=\frac{25}{4}z^2$ ist, war unsere obige Vermutung richtig, und wir können schreiben:

$$1-5z+\frac{25}{4}z^2=\left(1-\frac{5}{2}z\right)^2.$$

Beispiel 8:

Formen Sie die algebraische Summe $d_1^2-d_2^2$ in ein Produkt um!

Wegen $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ gilt mit $a=d_1$ und $b=d_2$

$d_1^2-d_2^2=(d_1+d_2)\cdot(d_1-d_2)$.

Probe: $(d_1+d_2)\cdot(d_1-d_2)=d_1^2-d_2^2$.

Die Zwischenergebnisse wird man, vor allem bei einfachen Aufgaben, nach einiger Übung nicht mehr aufschreiben.

Von besonderer Bedeutung für ein schnelles und sicheres Rechnen sind die Rechenvorteile, die auf der Anwendung der binomischen Formeln beruhen.

1. Bei der Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen, von denen die eine die Summe aus einem vollen Zehner und einer einstelligen Zahl, die andere die Differenz aus dem gleichen vollen Zehner und der gleichen einstelligen Zahl ist, ergibt sich ein bedeutender Rechenvorteil.

Beispiel 9:

Für $37\cdot 43$ ergibt sich folgende einfache Lösung:

$37\cdot 43=(40-3)(40+3)=40^2-3^2=1600-9=1591$.

Sämtliche Lösungsschritte lassen sich ohne Schwierigkeiten im Kopf ausführen, das Ergebnis ist nach einiger Übung ebenso sicher und schneller zu gewinnen als durch schriftliche Multiplikation.

2. Auch das Ausrechnen von Quadraten von zweistelligen evtl. auch von dreistelligen Zahlen wird durch Anwendung der binomischen Formeln erleichtert.

Beispiel 10:

$82^2=(80+2)^2=6400+320+4=6724$

Beispiel 11:

$79^2=(80-1)^2=6400-160+1=6241$

Beispiel 12:

$103^2 = (100 + 3)^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$

Beispiel 13:

$35^2 = (30 + 5)^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

3. Für das Quadrat aller zweistelligen Zahlen, deren Einerstelle eine 5 ist, gibt es noch eine viel einfachere Lösung. Die in der Zehnerstelle stehende Zahl ist mit der nächstfolgenden ganzen Zahl zu multiplizieren, an das hingeschriebene Ergebnis ist 25 anzuhängen.

Beispiel 14:

35^2 erhält man danach auf folgende Weise:

$3 \cdot 4 = 12$; 25 hängt man an und kommt zu 1225.

$35^2 = 1225$.

4. Schließlich sei noch ein einfaches Verfahren für ein schnelles Ausrechnen der Quadrate für die ganzen Zahlen von 11 bis 19 angegeben.

Beispiel 15:

Ist das Quadrat von 17 zu berechnen, so geht man folgendermaßen vor:

$170 + 70 + 49 = 289$

$(10 + a)^2 = 10 \cdot (10 + a) + 10 \cdot a + a^2$.

Begründen Sie die angegebenen Regeln 3. und 4. allgemein!

Für das Lösen von später zu besprechenden Bestimmungsgleichungen ist das Bilden vollständiger Quadrate von großer Bedeutung. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, gegebene algebraische Summen so zu ergänzen, daß vollständige Quadrate entstehen. Damit das überhaupt möglich ist, müssen die gegebenen algebraischen Summen bestimmte Bedingungen erfüllen. Für eine eindeutige Lösung ist notwendig, daß zwei der drei Glieder gegeben sind.

1. Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Summe der beiden quadratischen Glieder gegeben ist, etwa $S = a^2 + b^2$. Durch Addieren bzw. Subtrahieren von $2ab$ würden hier die vollständigen Quadrate $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ entstehen. Es gibt also zwei wesentlich verschiedene Lösungen der Aufgabe. Zwei gegebene Glieder sind für eine eindeutige Lösung der Aufgabe demnach nicht immer hinreichend.

Beispiel 16:

$25 + 9l^2$ ist zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen.
Da offensichtlich $a = 5$ und $b = 3l$ ist, gilt:
$2ab = 2 \cdot 5 \cdot 3l = 30l$. Es folgen demnach:

$$25 + 9l^2 + 30l = (5 + 3l)^2$$

oder $$25 + 9l^2 - 30l = (5 - 3l)^2.$$

Eine eindeutige Lösung wird erst durch die Vorschrift, ob eine Summe oder eine Differenz gebildet werden soll, erzielt.

2. Von größerer Bedeutung ist der Fall, daß ein quadratisches Glied und das Glied $2ab$ gegeben sind und das zweite quadratische Glied ergänzt werden soll. Das ist nur unter der einschränkenden Voraussetzung möglich, daß im gegebenen Glied $2ab$ die Wurzel a aus dem gegebenen quadratischen Glied a^2 als Faktor enthalten ist.

Beispiel 17:

$36r^2 - 1{,}2rs$ soll in ein vollständiges Quadrat verwandelt werden. Wegen $a^2 = 36r^2$ ist $a = 6r$, und aus $2ab = 1{,}2rs$ folgt $b = \frac{1{,}2rs}{2a} = \frac{1{,}2rs}{12r} = 0{,}1s$.

Das zu ergänzende Glied b^2 ist hier gleich $(0{,}1s)^2 = 0{,}01s^2$.

Für das zu ergänzende quadratische Glied ist die Bezeichnung **quadratische Ergänzung** gebräuchlich. Das Aufsuchen der quadratischen Ergänzung muß besonders gründlich geübt werden, weil es später zum Lösen quadratischer Bestimmungsgleichungen benötigt wird.

Auch zweigliedrige algebraische Ausdrücke können mehrfach als Faktor auftreten. Für das Produkt $a \cdot a \cdot a$ haben wir früher die Schreibweise a^3 kennengelernt. Die gleiche Schreibweise in der Form von Potenzen wenden wir auf zweigliedrige algebraische Summen an:

(27) $(a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) = (a \pm b)^3$,
$(a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) = (a \pm b)^4$ usw.

1. Wiederholen Sie die Bezeichnungen für die Teile einer Potenz!
2. Worin besteht der Unterschied zwischen den folgenden Ausdrücken?

a) a^3 *und* $a \cdot 3$
b) $(a + b)^4$ *und* $(a + b) \cdot 4$
c) $(x - y)^a$ *und* $(x - y) \cdot a$
d) 2^2 *und* $2 \cdot 2$

Die Potenzschreibweise ist auch für Produkte aus gleichartigen algebraischen Summen kürzer und übersichtlicher.
Wir wollen nun die dritten, vierten, fünften und sechsten Potenzen von $(a \pm b)$ berechnen:

(28) $(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2 \cdot (a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

(29) $(a \pm b)^4 = (a \pm b)^3 \cdot (a \pm b) = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;

(30) $(a \pm b)^5 = (a \pm b)^4 \cdot (a \pm b) = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$;

(31) $(a \pm b)^6 = (a \pm b)^5 \cdot (a \pm b)$
$= a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$.

Nehmen wir zu den obigen Gleichungen (28) bis (31) noch

(32) $(a \pm b)^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$

hinzu, so lassen sich eine Reihe von allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten feststellen.

Untersuchen Sie die Gleichungen (28) bis (32) auf

a) *die Anzahl der Summanden in Abhängigkeit vom Exponenten,*

b) *die Rechenzeichen zwischen den Summanden,*

c) *die Zahlenfaktoren (Koeffizienten),*

und versuchen Sie, die Gesetzmäßigkeiten zu finden!

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten ist aus folgender Aufstellung erkennbar.

Exponent	
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Jeder Koeffizient ist gleich der Summe der beiden benachbarten Koeffizienten in der darüberstehenden Zeile. Fügt man über der oberen Zeile für den nächst kleineren Exponenten Null eine Eins ein, d. h., setzt man $(a \pm b)^0 = 1$, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck[1], das nach einem seiner Entdecker PASCALsches Dreieck[2] heißt.
Es ergibt sich die Frage, ob diese Gesetzmäßigkeit der ersten bis sechsten Potenzen von $a \pm b$ auch für die auf die sechste Potenz folgenden zutrifft, also allgemeingültig ist.
Die Frage können wir erst zu einem späteren Zeitpunkt exakt beantworten. Hier sei nur noch $(a \pm b)^7$ untersucht. Mit Hilfe der erkannten Gesetzmäßigkeiten können wir die beiden algebraischen Summen $(a \pm b)^7$ gewissermaßen „konstruieren“:

$$
\begin{aligned}
(33)\quad (a \pm b)^7 &= a^7 \pm (1+6)a^6b + (6+15)a^5b^2 \pm (15+20)a^4b^3 \\
&\quad + (20+15)a^3b^4 \pm (15+6)a^2b^5 + (6+1)ab^6 \pm b^7 \\
&= a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7.
\end{aligned}
$$

Prüfen Sie durch Ausmultiplizieren von $(a \pm b)^6 \cdot (a \pm b)$ nach, daß die in (33) erhaltene algebraische Summe das richtige Ergebnis von $(a \pm b)^7$ ist!

Mit Hilfe der höheren Potenzen von $(a \pm b)$ können einige Probleme aus der Praxis sehr einfach gelöst werden.

Beispiel 18:

Eine Jauchegrube soll unter einem Stalldungstapelplatz angelegt werden. Wegen der beengten räumlichen Verhältnisse auf dem Wirtschaftshof der LPG soll die Grube Würfelform mit 5,00 m Kantenlänge erhalten. Die Nachmessung der Verschalung der ausgehobenen Baugrube ergibt ein Kantenmaß von 5,10 m. Wie groß war das ursprünglich geplante, wie groß ist das tatsächliche Fassungsvermögen? Um wieviel Prozent wurde das geplante Fassungsvermögen überschritten?

[1] Die Festsetzung $(a \pm b)^0 = 1$ ist üblich. Wir begründen sie später bei den Gesetzen der Potenzrechnung.
[2] BLAISE PASCAL (1623 bis 1662), franz. Philosoph, Mathematiker und Physiker.

Lösung:

Gegebene Kantenlängen $a = 5{,}00$ m; $a_1 = 5{,}10$ m

Übermaß $b = 0{,}10$ m

$$V = a_1^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3$$
$$5{,}1^3 = (5 + 0{,}1)^3 = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 5 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3$$
$$= 125 + 7{,}5 + 0{,}15 + 0{,}001 = 132{,}651$$
$$V = 132{,}651 \text{ m}^3$$

Bezeichnet man die Differenz zwischen tatsächlichem und geplantem Fassungsvermögen mit ΔV, so gilt

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{7{,}651}{125} = 0{,}0612 \approx 6\,\%.$$

Das ursprüngliche Fassungsvermögen sollte 125 m³ betragen, das tatsächliche Fassungsvermögen beträgt etwa 132,7 m³; das Fassungsvermögen ist um rund 6 % überschritten worden.

Aufgaben

46. Die folgenden mathematischen Ausdrücke sollen soweit wie möglich zusammengefaßt, d. h. als Produkte oder Potenzen geschrieben werden.

a) $3 + 3 + 3 + 3$ **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **c)** $a + a + a$

d) $a \cdot a \cdot a$ **e)** $-\frac{3}{5} - \frac{3}{5} - \frac{3}{5} - \frac{3}{5}$ **f)** $\frac{3}{5} - \frac{3}{5} - \frac{3}{5} - \frac{3}{5}$

g) $(-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{3}{5})$ **h)** $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$

i) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$ **k)** $3^2 \cdot 3$

l) $(\frac{2}{5})^3 \cdot \frac{2}{5}$ **m)** $r^2 \cdot r$ **n)** $p \cdot p^2$

o) $p \cdot p^3$ **p)** $(a + b)(a + b)$ **q)** $(a - b)(a - b)$

r) $\left(3m - \frac{n}{2}\right) - \left(3m - \frac{n}{2}\right)\left(3m - \frac{n}{2}\right)$ **s)** $3 \cdot 9$

t) $(-3) \cdot 9$ **u)** $\frac{4}{25} \cdot \frac{8}{125}$ **v)** $(-x^2) \cdot x$

w) $(-x^2) \cdot (-x)$

47. Rechnen Sie die folgenden Potenzen soweit wie möglich aus! Achten Sie besonders auf das Vorzeichen der Ergebnisse!

a) 3^4 **b)** 4^3 **c)** $(-3)^2$ **d)** $(-3)^3$ **e)** $(-3)^4$ **f)** $(-3)^5$

g) $(-x)^3$ **h)** $(-x)^4$ **i)** $(-x)^5$ **k)** $(3x)^2$ **l)** $(\frac{1}{2}a)^2$ **m)** $(-\frac{5}{6}x)^3$

48. Die folgenden mathematischen Ausdrücke sind durch Quadrieren entstanden. Ermitteln Sie jeweils die Basis!

a) $\frac{81}{121}$ **b)** $\frac{1}{361}$ **c)** $\frac{64}{81}x^2$ **d)** $\frac{25}{n^2}$ **e)** $\frac{r^2}{625}$ **f)** $0{,}01p^2$

Durch welche Rechenoperationen finden Sie die gesuchte Basis?

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke!

49. a) $(a \pm b)^3$ **b)** $(a \pm b)^4$ **c)** $(a \pm b)^5$ **d)** $(a \pm b)^6$

50. a) $(x - y)^4$ **b)** $(x - y)^2 (x + y)^2$ **c)** $(a + b)^5 - (a + b)^3 a^2$

51. Rechnen Sie die folgenden Aufgaben möglichst vorteilhaft im Kopf!

a) 38^2 **b)** 71^2 **c)** $58 \cdot 62$ **d)** $104 \cdot 96$ **e)** 85^2 **f)** 18^2 **g)** 103^2 **h)** 87^2
i) 52^2 **k)** 16^2 **l)** $52 \cdot 48$ **m)** 55^2 **n)** $38 \cdot 62$ **o)** 76^2 **p)** 44^2 **q)** 99^2

52. Ermitteln Sie die Quadrate der folgenden Binome!

a) $\frac{1}{2} + n$ **b)** $-5a + 0{,}3$ **c)** $-\frac{3}{5}x + 2y$ **d)** $0{,}05r + \frac{s}{10}$
e) $1{,}2mn - 1{,}1nm$ **f)** $2 + 30$ **g)** $3J_1 - J_2$ **h)** $-25ab - 0{,}2c$

53. Berechnen Sie das Produkt aus Summe und Differenz der folgenden Paare eingliedriger Ausdrücke!

a) $3x;\ 2y$ **b)** $0{,}2z;\ \frac{1}{2}$ **c)** $14ab;\ 13a$
d) $0{,}17m;\ 0{,}08n$ **e)** $-15r;\ 21s$ **f)** $\frac{3}{2};\ -\frac{1}{8}$

54. Prüfen Sie einige Ergebnisse der Aufgaben **52** und **53** nach, indem Sie in die Potenz und die daraus errechnete algebraische Summe für die allgemeinen Zahlensymbole nacheinander die folgenden Zahlen einsetzen!

a) in **52 a**: $n = 3;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 2{,}5$

b) in **52 g**: $J_1 = 10;\ -3;\ -2{,}4$
$J_2 = 20;\ 5;\ 17$

c) in **52 h**: $a = 2;\ -5;\ 0{,}2$
$b = 5;\ -5;\ 0{,}4$
$c = 10;\ -5;\ 0{,}8$

d) in **53 a**: $x = 10;\ 15;\ 8;\ \frac{1}{10}$
$y = 15;\ 10;\ 4;\ \frac{1}{5}$

e) in **53 c**: $a = 5;\ 5;\ 1;\ 2$
$b = 2;\ 4;\ 2;\ 1$

55. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich!

a) $(3x - 4y)^2 + (4y + 3x)^2 - 2(3x - 4y)(3x - 4y)$
b) $(0{,}3a + \frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{5}a - 0{,}3)^2 + (\frac{6}{5}a - \frac{3}{2})^2 - (1{,}3a - 1{,}7)^2$
c) $(25 + 35b)^2 - (35 - 25b)^2 + (25 + 35b)(35b - 25)$
d) $(lm - 1)^2 - (30 + 2p)^2 - (1 + 3lm)^2 + (2p + 30)(2p - 30)$

56. Formen Sie die folgenden Potenzen in algebraische Summen um!

a) $(5c + 2d)^4$ **b)** $(3e - 4)^5$ **c)** $(0{,}2x - 0{,}3y)^3$
d) $(2 - 3)^6$ **e)** $(J - 0{,}02)^5$ **f)** $\left(2r - \frac{s}{2}\right)^4$

57. Formen Sie folgende Ausdrücke nach Möglichkeit in ein Produkt um!

a) $a^2 - 2ab + b^2$ **b)** $x^2 - y^2$
c) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ **d)** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
e) $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$ **f)** $x^2 - 12x + 36$
g) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ **h)** $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$

58. Versuchen Sie, die folgenden algebraischen Summen in Quadrate von Binomen umzuwandeln!

a) $9a^2 - 48ab + 64b^2$ **b)** $x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$ **c)** $\frac{r^2}{25} - \frac{rs}{25} + \frac{s^2}{100}$
d) $0{,}81m^2 - 0{,}54m + \frac{9}{100}$ **e)** $-p^2 + 2pq - q^2$ **f)** $169 + 26n - n^2$
g) $0{,}25s^2 - rs + r^2$ **h)** $r^2 + rs + 0{,}25s^2$ **i)** $144 - 24c + 4c^2$

Ist jede der vorstehenden Aufgaben lösbar?
Welche Änderungen müßten an den nicht lösbaren Aufgaben vorgenommen werden, damit sie ebenfalls ein vollständiges Quadrat ergeben?

59. Versuchen Sie die folgenden Differenzen von Quadraten so umzuformen, daß ein Produkt aus Summe und Differenz derselben Glieder entsteht!

a) $625 - a^2$ b) $-x^2 + 4{,}41$ c) $9y^2 - 144z^2$ d) $81y^2 - 144z^2$
e) $-m^2 - 16n^2$ f) $225a^2b^2 - a^2$ g) $a^2 + 225a^2b^2$ h) $2{,}89 - 10000x^2$

Ist jede der vorstehenden Aufgaben lösbar?

60. Ergänzen Sie durch Hinzufügen eines Gliedes folgende Ausdrücke zum vollständigen Quadrat!

Beispiel: $a^2 - a$ geht über in $a^2 - a + \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2})^2$

a) $x^2 + 2x$ b) $m^2 - m$ c) $a^2 + ab$ d) $a^2x^2 - 2ax$
e) $x^2 + 4x$ f) $6x^2 - 12x$

61. Fügen Sie zu folgenden algebraischen Summen ein Glied derart hinzu, daß Sie eine Summe erhalten, die ein vollständiges Quadrat enthält!

Beispiel: $x^2 - 2x + 3$ geht über in $x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3$

a) $x^2 + 2x + 5$ b) $x^2 + bx + c$ c) $a^2 + 2ab - b^2$ d) $5m^2 - 5mn + 5n^2$

62. Formen Sie die folgenden algebraischen Summen um, indem Sie ein Glied hinzufügen und der Gleichheit wegen anschließend wieder abziehen. Wählen Sie das Glied so, daß Sie eine Summe erhalten, die ein vollständiges Quadrat enthält!

a) $a^2 + 2ab - b^2$ b) $x^2 + 2xy + y$ c) $x^2 + px + q$ d) $4x^2 + 8x + 8$
e) $a^2b^2 - abc$ f) $9m^2 - 6m + 2$

63. Ermitteln Sie die quadratische Ergänzung für die folgenden zweigliedrigen algebraischen Summen!

a) $x^2 - 6x$ b) $x^2 - 5x$ c) $x^2 - x$ d) $x^2 - \frac{1}{2}x$ e) $x^2 + \frac{x}{10}$

f) $x^2 + 2x$ g) $x^2 + 15x$ h) $x^2 + 1000x$ i) $4a^2 + a$ k) $144a^2 - ab$

l) $a^2 + 144ab$ m) $\frac{r^2}{16} + r$ n) $0{,}0225p^2 - 3p$ o) $0{,}7^2r^2 - 4{,}2r$ p) $81x^2 + 9x$

64. Versuchen Sie, für die folgenden zweigliedrigen algebraischen Summen die quadratische Ergänzung zu ermitteln! Begründen Sie ferner, warum das bei einigen Aufgaben nicht möglich ist!

a) $x^2 - 5x$ b) $-x^2 + 2x$ c) $x^2 - 2x$ d) $25z^2 - 25x$ e) $49z^2 - 70xz^2$
f) $49z^2 + 70x^2z$ g) $0{,}36p^2 - p$

65. Wie müssen die folgenden algebraischen Summen geändert werden, damit sie sich in ein vollständiges Quadrat umformen lassen? Welche vollständigen Quadrate erhält man dann?

a) $169 + 25z^2$ b) $169 - 25z^2$ c) $x^2y^2 + z^2$ d) $r^2 + 16s^2$ e) $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{256}$
f) $0{,}81 + 0{,}04c^2$ g) $0{,}0225a^2 - b^2$

Wieviel Lösungen sind bei den vorstehenden Aufgaben jeweils möglich, wenn an den gegebenen algebraischen Summen nichts geändert wird?

66. Setzen Sie in den drei binomischen Formeln nacheinander $b = a$, $b = 2a$, $b = -2a$, $b = \frac{a}{2}$ und $b = -\frac{a}{2}$! Welche Ergebnisse erhalten Sie dann?

67. Schreiben Sie die folgenden vollständigen Quadrate als algebraische Summen!

a) $(a + b + c)^2$ b) $(2x - 3y + 4z)^2$ c) $(-2x + 3y - 4z)^2$

68. Vergleichen Sie die Ergebnisse von Aufgabe **67b** und **c**!

69. Begründen Sie, weshalb $(a + b + c)^2 = (-a - b - c)^2$ ist!

70. Zeigen Sie, daß man $(a - b)^n$ aus $(a + b)^n$, für $n = 2, 3, \ldots, 7$ gewinnen kann, indem man $(a - b)^n = [a + (-b)]^n$ setzt!

Schülerauftrag: *Bauen Sie sich ein Modell aus Karton, mit dessen Hilfe Sie $(a + b)^3$ veranschaulichen können!*

1.3. Division algebraischer Summen durch algebraische Summen

Aufgaben zur Wiederholung der Division

1. Erfragen Sie in dem sozialistischen Landwirtschaftsbetrieb, in dem Sie Ihren Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion durchführen, wie groß dort die Marktproduktion im Jahr 1958 bei den nachfolgenden Grundnahrungsmitteln war!

a) Getreideerzeugnisse (110,9 kg) **b)** Kartoffeln (171,7 kg) **c)** Fleisch (50,8 kg)
d) Vollmilch (94,7 l) **e)** Eier (181 Stück)

Die beigefügten Kennzahlen stellen den Pro-Kopf-Verbrauch in der Deutschen Demokratischen Republik für 1958 dar.
Berechnen Sie, wieviel Menschen mit dem Marktaufkommen der LPG bzw. des VEG in den einzelnen Grundnahrungsmitteln 1958 versorgt werden konnten! Besorgen Sie sich die entsprechenden Zahlen für das vergangene Jahr, und stellen Sie die gleichen Berechnungen an!

2. Berechnen Sie die folgenden Quotienten, und prüfen Sie die Richtigkeit des Ergebnisses jeweils durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor nach!

a) $3\frac{1}{3} : 10$ **b)** $3\frac{1}{2} : 0{,}7$ **c)** $(-20) : 5$ **d)** $20 : (-5)$ **e)** $\frac{-20}{-5}$

f) $(+a) : (+b)$ **g)** $(-a) : (+b)$ **h)** $(+a) : (-b)$ **i)** $(-a) : (-b)$

k) $(-24mn) : 4m$ **l)** $\frac{1{,}69a^2}{-13a}$ **m)** $\frac{0{,}52yz}{40z}$ **n)** $\frac{52r^2s}{0{,}8rs}$

3. Berechnen Sie folgende Ausdrücke, und beachten Sie Rechenvorteile!

a) $21c^2 \cdot (-17d) : (-7c)$ **b)** $(-37r^2s) \cdot 84rs^2 : (-42rs)$

c) $\frac{55a \cdot (-33b)}{-121ab}$ **d)** $\frac{(-12abc) \cdot (-15xy)}{20cy}$

4. a) In einer Divisionsaufgabe ist der Quotient gleich dem Dividenden. Wie lautet der Divisor?

b) In einer anderen Divisionsaufgabe ist der Divisor gleich dem Dividenden. Wie lautet der Quotient?

c) In einer dritten Divisionsaufgabe ist der Quotient gleich dem Divisor. Wie lautet der Dividend?

d) Begründen Sie die Lösungen der Aufgabe **4a** bis **c**!

e) Schreiben Sie die Aufgaben **4a** bis **c** mit Hilfe allgemeiner Zahlensymbole als Bestimmungsgleichungen! Lösen Sie diese Bestimmungsgleichungen!

Anleitung: Für Aufgabe **4a** erhält man $\frac{a}{x} = a \quad |:a$

$$1 = x$$

5. Stellen Sie aus den folgenden Tabellen[1] die durchschnittliche landwirtschaftliche Nutzfläche (LN) in der Landwirtschaft der DDR fest!

	Betriebsart	VEG	sonstige volkseigene Betriebe	LPG		Privat				Insgesamt
				Typ I und II	III	1 ha	1 bis 10 ha	10 bis 20 ha	über 20 ha	
1955	Anzahl der Betriebe	540	15 800	1 500	4 400	305 000	356 400	91 700	27 500	802 840
	LN insgesamt (ha)	283 500	283 200	113 500	1 030 300	470 800	2 052 000	1 338 200	850 500	6 422 000
	Durchschnittliche LN									

	Betriebsart	VEG	sonstige volkseigene Betriebe	LPG		Privat				Insgesamt
				Typ I und II	III	1 ha	1 bis 10 ha	10 bis 20 ha	über 20 ha	
1958	Anzahl der Betriebe	700	14 300	1 850	6 000	228 500	303 000	78 300	20 900	653 550
	LN insgesamt (ha)	373 500	166 400	108 600	1 693 200	485 700	1 646 400	1 128 200	635 400	6 237 400
	Durchschnittliche LN									

Versuchen Sie, die Zahlen für das Jahr 1961 zu erhalten (Statistisches Jahrbuch), und bestimmen Sie die durchschnittliche landwirtschaftliche Nutzfläche!

	Betriebsart	VEG	sonstige volkseigene Betriebe	LPG		Privat				Insgesamt
				Typ I und II	III					
1961	Anzahl der Betriebe									
	LN insgesamt (ha)									
	Durchschnittliche LN									

[1] Anmerkung: Die Zahlen sind gerundet; Rechenstabgenauigkeit genügt!

6. Berechnen Sie möglichst folgende Ausdrücke!

a) $a + 0$ **b)** $0 + a$ **c)** $a - 0$ **d)** $0 - a$

e) $a \cdot 0$ **f)** $0 \cdot a$ **g)** $a : 0$ **h)** $0 : a$

Geben Sie die Ergebnisse der Aufgaben **6a** bis **h** an! Begründen Sie, weshalb einige Aufgaben dasselbe Ergebnis haben! Sind alle Aufgaben lösbar?

7. Die Gleichung $6x + 25 = 10x + 15$ behandelt jemand folgendermaßen[1]:

Es ist $3(2x - 5) = 5(2x - 5)$,

folglich ist $3 = 5$.

Wo steckt der Fehler?

Anleitung: Lösen Sie zunächst die Gleichung!

8. Schreiben Sie die Ergebnisse der folgenden Divisionsaufgaben als Dezimalbrüche! Kennzeichnen Sie jeweils die Art des Dezimalbruches!

a) $420 : 120$ **b)** $420 : 250$ **c)** $420 : 450$ **d)** $420 : 147$

e) $400 : 200$ **f)** $120 : 200$ **g)** $99 : 200$ **h)** $63 : 77$

Vertauschen Sie in den Aufgaben **8a** bis **h** Dividend und Divisor! Bestimmen Sie für alle Quotienten die Art des entstehenden Dezimalbruches!

9. Wodurch unterscheiden sich jeweils die folgenden Ausdrücke?

a) $21 + 14 : 7$ und $(21 + 14) : 7$ **b)** $(-55) : 5 + 6$ und $(-55) : (5 + 6)$

c) $26 - 65 : 13$ und $(26 - 65) : 13$ **d)** $a + b : c$ und $(a + b) : c$

10. Berechnen Sie die folgenden Quotienten!

a) $x^3 : x$ **b)** $x^3 : x^2$ **c)** $x^3 : x^3$ **d)** $15m^2 n^3 : 3mn$

e) $156 l^3 m^3 n : 12 l^2 m$ **f)** $135 r s^2 t^2 : 27 r s^2 t^2$ **g)** $5a^2 b^4 : 2ab^3$ **h)** $75xy : 225xy$

i) $165 o^2 p^2 q^2 : 77 op$ **k)** $17 e^2 g : 12 eg$

Division einer algebraischen Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck

Soll eine zwei- oder mehrstellige Zahl durch eine einstellige Zahl dividiert werden, so zerlegt man die zwei- oder mehrstellige Zahl gemäß dem Aufbauprinzip des dekadischen Stellenwertsystems in eine algebraische Summe. Sodann wird jedes Glied der algebraischen Summe durch die Zahl dividiert, wobei die Zeichen zwischen den entstehenden Quotienten durch die Vorzeichenregel für die Division rationaler Zahlen festgelegt werden.

Beispiel 19:

$$627 : 3 = (600 + 30 - 3) : 3 = \frac{600}{3} + \frac{30}{3} - \frac{3}{3} = 200 + 10 - 1 = 209$$

Probe: $209 \cdot 3 = 627$

Unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole erhält man für die Division einer algebraischen Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck

[1] Entnommen aus LIETZMANN, W.: *Wo steckt der Fehler?* B. G. Teubner, Leipzig 1950.

(34) $\frac{a+b}{c} = (a+b):c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $\qquad (c \neq 0)$,

bzw.

(35) $\frac{u+v+w}{x} = (u+v+w):x = \frac{u}{x} + \frac{v}{x} + \frac{w}{x}$ $\qquad (x \neq 0)$.

Die Probe für (34) lautet: $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c = a + b$. Für (35) erhält man als Probe:

$$\left(\frac{u}{x} + \frac{v}{x} + \frac{w}{x}\right) \cdot x = \frac{u}{x} \cdot x + \frac{v}{x} \cdot x + \frac{w}{x} \cdot x = u + v + w.$$

Von großer Bedeutung für die Division algebraischer Summen ist die Verwendung von Klammern:

▶ **Wird der Doppelpunkt als Divisionszeichen verwendet, so ist die algebraische Summe in Klammern einzuschließen.**

Dadurch wird zum Ausdruck gebracht, daß die Rechenoperation Division auf die algebraische Summe als Ganzes angewendet wird. Versäumt man hier das Setzen der Klammer, so macht man einen schweren Fehler. Die Schreibweise $a + b:c$ bedeutet nicht, daß die algebraische Summe $a + b$ durch c dividiert werden soll, sondern sie bedeutet die algebraische Summe $a + \frac{b}{c}$.

▶ **Bei Verwendung des Bruchstrichs als Operationszeichen ist dagegen für die algebraische Summe keine Klammer erforderlich.**

Für die Division einer algebraischen Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck ergibt sich folgende Regel:

▶ **Eine algebraische Summe wird durch einen eingliedrigen Ausdruck dividiert, indem man jedes Glied der algebraischen Summe durch den eingliedrigen Ausdruck dividiert. Die Rechenzeichen in der als Quotienten erhaltenen algebraischen Summe werden nach der Vorzeichenregel für die Division rationaler Zahlen ermittelt.**

Aufgaben

11. Wie ändert sich bei der Division der Quotient, wenn
a) der Dividend wächst (abnimmt), der Divisor gleichbleibt,
b) der Dividend gleichbleibt, der Divisor wächst (abnimmt),
c) der Dividend wächst (abnimmt), der Divisor abnimmt (wächst)?

12. a) Denken Sie sich eine Zahl, dividieren Sie die Zahl durch eine (andere) Zahl, und multiplizieren Sie den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor! Welches Ergebnis erhalten Sie?
b) Führen Sie die beiden Rechenoperationen in umgekehrter Reihenfolge, aber mit denselben Zahlen wie in Aufgabe **12a** aus, und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse!

13. Erläutern Sie am Beispiel 39:3, wie eine zweistellige Zahl durch eine einstellige Zahl dividiert wird! Geben Sie die einzelnen Lösungsschritte an, und begründen Sie die Richtigkeit des Lösungsweges!

14. Stellen Sie den Lösungsweg der Aufgabe **13** in einer Gleichung dar!

15. Lösen Sie die gleichen Aufgaben wie in **13** und **14** auch für die Division einer dreistelligen Zahl durch eine einstellige Zahl!

16. Welche Regel läßt sich aus den Aufgaben **13** bis **15** für die Division einer algebraischen Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck erkennen?

17. Die folgenden algebraischen Summen sind durch die dahinterstehenden eingliedrigen Ausdrücke zu dividieren.

a) $24xy - 21y^2 - 3y \quad |:3y; \quad |:(-3y)$

b) $-a^2 + 20ab - 6a^2b^2 + 3ab^2 \quad |:4a^2; \quad |:(-20a); \quad |:(-6b^2)$

c) $-5m^2n^2 + 4m^2n - 3mn^2 - 2mn - m + n - 1$
$|:(-1); \quad |:(-n); \quad |:+mn; \quad |:(-2m^2n)$

18. Berechnen Sie die folgenden Quotienten!

a) $\dfrac{182r^2s^2 - 104rs}{13rs}$ **b)** $\dfrac{a^2b^2 + ab^2 - ab}{ab}$ **c)** $\dfrac{55x^2y^2 - 121x^2y^2 + 132xy}{11x^2y}$

19. Führen Sie die folgenden Divisionen aus!

a) $(ax^2 - a^2xy + ax^2 + axy) : ax$ **b)** $(ab^2c + a^2bc - abc^2 + 4abc) : abc$

c) $\dfrac{m^2n + 2mn + mn^2}{mn}$ **d)** $\dfrac{rst + 2rs^2 - 4st^2 + s}{s}$

e) $(10p^2q + 12pq - 4pq^2) \cdot \dfrac{1}{4pq}$ **f)** $(8xyz + 4x^2y + 2xz^2) \cdot \dfrac{1}{2x}$

20. a) $-\dfrac{4m^2n - 6mn + 8mn^2}{2mn}$ **b)** $\dfrac{1}{2} \cdot (6ab - 4a^2b - 8ab^2) \cdot \dfrac{1}{ab}$

c) $-(4x^2y - 6xy + 8xy^2) : 2xy$

d) Worin besteht der Unterschied in den Aufgaben **a** bis **c**?

21. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel folgender Zahlen!

a) 6,82; 6,54 **b)** 0,832; 1,001 **c)** $6a + 3b$; $2a + 5b$ **d)** 2,45; 2,56; 2,23

e) $2a + 4b$; $a - 2b$; $3a + b$ **f)** 88,7; 90,3; 79,6; 85,4; 89,3

Anleitung: Das arithmetische Mittel ist gleich der Summe der Zahlen, deren Mittelwert bestimmt werden soll, dividiert durch die Anzahl der Summanden.

Division einer algebraischen Summe durch eine algebraische Summe

Die Regel für die Division einer algebraischen Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck haben wir in Analogie zur Division einer mehrstelligen Zahl durch eine einstellige Zahl durch Verallgemeinerung gewonnen. Entsprechend benutzen wir jetzt die schriftliche Division einer mehrstelligen Zahl durch eine (andere) mehrstellige Zahl als Ausgangspunkt für die Gewinnung der Rechenregel für die Division einer algebraischen Summe durch eine algebraische Summe.
Wir wollen das an einem Beispiel untersuchen.

Beispiel 20:

Die schriftliche Division 672:32 läßt sich folgendermaßen erläutern:

Übliche Kurzform		Erläuternde Form
$672:32 = 21$	$\longleftrightarrow$	$(600 + 70 + 2):(30 + 2) = 20 + 1$
-64	$\longleftrightarrow$	$-(600 + 40)$
32	$\longleftrightarrow$	$30 + 2$
$-\ 32$	$\longleftrightarrow$	$-(30 + 2)$
0	$\longleftrightarrow$	0

Probe: $21 \cdot 32$

$$\begin{array}{r} 21 \cdot 32 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 672 \end{array}$$

Probe:

$(20 + 1) \cdot (30 + 2) = 21 \cdot 32 = 672$

Nun soll dieses Verfahren auf algebraische Summen, die allgemeine Zahlensymbole enthalten, angewendet und an einigen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 21:

$$\frac{3ab - 3a - 4b + 4}{3a - 4}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} (3ab - 3a - 4b + 4):(3a - 4) = b - 1 \\ -(3ab \qquad\quad - 4b) \\ \hline \qquad\quad -3a \qquad + 4 \\ \qquad -(-3a \qquad + 4) \\ \hline \qquad\qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

Probe: $(3a - 4) \cdot (b - 1) = 3ab - 3a - 4b + 4$

Beispiel 22:

$$\frac{1 - 4x - 0{,}25y + 11xy - \frac{5}{2}xy^2}{5xy + \frac{1}{2} - 2x}$$

Lösung:

Vor der Division ist ein Umordnen der Glieder erforderlich, da das erste Glied des Dividenden nicht durch das erste Glied des Divisors teilbar ist. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wir wollen uns grundsätzlich der lexikografischen Anordnung in Dividend und Divisor bedienen, wobei wir bestimmte Zahlen zusammengefaßt als letztes Glied der algebraischen Summe niederschreiben. Dann erhalten wir bei der vorliegenden Aufgabe:

$$\begin{array}{l} \left(-\frac{5}{2}xy^2 + 11xy - 4x - 0{,}25y + 1\right):\left(5xy - 2x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{y}{2} + 2 \\ -\left(-\frac{5}{2}xy^2 + \quad xy \qquad\quad - \frac{y}{4}\right) \\ \hline \qquad\qquad\quad 10xy - 4x \qquad\quad + 1 \\ \qquad\qquad -(10xy - 4x \qquad\quad + 1) \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Probe:

$$\left(5xy - 2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{y}{2} + 2\right) = -\frac{5}{2}xy^2 + 11xy - 4x + 0{,}25y + 1.$$

Beispiel 23:

$$\frac{81m^4 - 16n^4}{3m - 2n}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(81m^4 - 16n^4) : (3m - 2n) = 27m^3 + 18m^2n + 12mn^2 + 8n^3 \\
\underline{-(81m^4 - 54m^3n)} \\
\qquad\qquad 54m^3n - 16n^4 \\
\qquad\quad \underline{-(54m^3n - 36m^2n^2)} \\
\qquad\qquad\qquad 36m^2n^2 - 16n^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(36m^2n^2 - 24mn^3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 24mn^3 - 16n^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(24mn^3 - 16n^4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
&(3m - 2n) \cdot (27m^3 + 18m^2n + 12mn^2 + 8n^3) \\
&= 81m^4 + 54m^3n + 36m^2n^2 + 24mn^3 - 54m^3n - 36m^2n^2 - 24mn^3 - 16n^4 \\
&= 81m^4 - 16n^4
\end{aligned}$$

Erklären Sie, wie in der Lösung des Beispiels 23 die eingliedrigen Ausdrücke $54m^3n$, $36m^2n^2$ und $24mn^3$ entstehen!

Ebenso wie nicht jede Divisionsaufgabe mit ganzen Zahlen als Quotienten eine ganze Zahl hat, gibt es auch algebraische Summen, die nicht ohne Rest durch (andere) algebraische Summen teilbar sind.

Beispiel 24:

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 - 4}{x - 1}.$$

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + x^2 - 4) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3 - \dfrac{1}{x-1} \\
\underline{-(x^4 - x^3)} \\
\qquad + 2x^3 + x^2 - 4 \\
\qquad \underline{-(2x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\qquad + 3x^2 - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-(3x^2 - 3x)} \\
\qquad\qquad\qquad + 3x - 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(3x - 3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -1
\end{array}$$

Bei der Division bleibt als Rest -1, der ebenfalls durch den Divisor $x - 1$ zu dividieren ist.

Probe:

$$(x-1)\cdot\left(x^3+2x^2+3x+3-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=x^3(x-1)+2x^2(x-1)+3x(x-1)+3(x-1)-\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)$$
$$=x^4-x^3+2x^3-2x^2+3x^2-3x+3x-3-1$$
$$=x^4+x^3+x^2-4$$

Aufgaben

22. Erläutern Sie die Division einer mehrstelligen Zahl durch eine mehrstellige Zahl am Beispiel 483 : 21! Geben Sie die einzelnen Lösungsschritte an, und begründen Sie jeweils deren Richtigkeit!

23. Jemand schreibt für $\frac{a+b}{c+d}$ den Ausdruck $a+b:c+d$.

a) Ist das richtig? Begründen Sie Ihre Antwort dadurch, daß Sie für die allgemeinen Zahlensymbole Zahlen einsetzen und dann die beiden Ausdrücke ausrechnen!

b) Welche mathematischen Bezeichnungen kennen Sie für die Ausdrücke $\frac{a+b}{c+d}$ bzw. $a+b:c+d$?

c) In $a+b:c+d$ kommen Rechenoperationen verschiedener Stufen vor. Welche Rechenoperation ist als erste auszuführen?

d) Wie muß man den Quotienten $\frac{a+b}{c+d}$ schreiben, wenn man statt des Bruchstriches als Divisionszeichen den Doppelpunkt verwendet?

e) Wie muß man die algebraische Summe $a+b:c+d$ schreiben, wenn man statt des Doppelpunktes den Bruchstrich als Divisionszeichen verwendet?

24. Berechnen Sie die folgenden Quotienten!

a) $\frac{21a^3-34a^2b+25b^3}{7a+5b}$ **b)** $\frac{x^2+11x+24}{x+8}$ **c)** $\frac{5x^2-\frac{22}{15}x-4-x^2}{6x+5}$

d) $\frac{625p^4-50p^2+1}{25p^2-10p+1}$ **e)** $\frac{625p^4-50p^2+1}{5p+1}$ **f)** $\frac{9x^3+2y^3-7xy^2}{3x-2y}$

25. Nachfolgend stehen in jeder Zeile zwei algebraische Summen hintereinander. Die erste ist jeweils durch die zweite zu dividieren.

a) $c^3-8cd^2+8d^3;\quad c-2d$ **b)** $m^2-2{,}1mn-n^2;\quad 5m+2n$

c) $x^4-7x^3+7x^2+11x+20;\quad x-5$ **d)** $\frac{u^4}{16}-\frac{v^4}{256};\quad \frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{16}$

e) $27r^3s^3-15rs-2;\quad 2+3rs$ **f)** $\frac{81}{256}a^4-\frac{16}{625}b^4;\quad \frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b$

g) $-x^4-x^2-1;\quad x^2-x+1$ **h)** $10a^4-21a^3-16a^2+15a;\quad 5a^2+2a-3$

26. Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

a) $\frac{13x+15+2x^2}{x+5}$ **b)** $\frac{ca^2+a^2b-b^2a-cb^2}{(-b+a)}$

c) $-\frac{12pq^2-4pqx+3qx^2-px^2-6q^2x}{\frac{1}{2}x-q}$

27. Führen Sie folgende Divisionen durch!

a) $(x^2+2x+2):(x+1)$ **b)** $(ab+b^2+ac+bc-a):(a+b)$

c) $(x^2+2x+a):(x+1)$

1.4. Bruchrechnung unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole

Aufgaben zur Wiederholung der Bruchrechnung

1. a) Geben Sie für die Divisionsaufgabe $3:5$ verschiedene Formen des Ergebnisses an!

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse von Aufgabe **1a** mit den Ergebnissen von $6:10$; $21:35$; $60:100$; $180:300$!

c) Zeigen Sie, daß alle Ergebnisse der Aufgaben **1a** und **b** gleich sind!

d) Welche Umformung mit den Brüchen $\frac{6}{10}$; $\frac{21}{35}$; $\frac{60}{100}$; $\frac{180}{300}$ ist erforderlich, damit sie die Form $\frac{3}{5}$ erhalten?

e) Durch welche Formänderungen wird aus dem Bruch $\frac{6}{10}$ der Bruch $\frac{21}{35}$?

2. Geben Sie Brüche an, die

a) gleich 3; -7; 11; -13; 25;

b) gleich $-2\frac{1}{4}$; $-3\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{10}$; $18\frac{2}{11}$; $-5\frac{1}{1000}$;

c) gleich $0{,}2$; $-0{,}\overline{3}$; $-0{,}3$; $-0{,}75$; $0{,}88$ sind!

3. Verwandeln Sie die folgenden Brüche und gemischten Zahlen in Dezimalzahlen!

a) $\frac{2}{7}$ **b)** $-\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{5}{13}$ **d)** $\frac{-13}{5}$ **e)** $\frac{15}{-16}$ **f)** $\frac{99}{100}$

g) $2\frac{1}{7}$ **h)** $-5\frac{3}{4}$ **i)** $-12\frac{2}{17}$ **k)** $5\frac{11}{12}$ **l)** $-18\frac{2}{11}$

4. a) Geben Sie Beispiele für echte und für unechte Brüche!

b) Erklären Sie, was man unter echten bzw. unechten Brüchen versteht!

5. Erweitern Sie folgende Brüche in der Spalte m mit den Zahlen aus der Zeile n!

m \ n	4	6	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{3}$	a
$\frac{1}{2}$								
$\frac{7}{8}$								
$\frac{12}{7}$								
$2\frac{1}{5}$								
$-\frac{1}{3}$								
$\frac{b}{c}$								

6. a) Welche Teilbarkeitsregeln kennen Sie?

b) Welche Bedeutung haben die Teilbarkeitsregeln für das Kürzen?

7. Erweitern Sie den Bruch $\frac{5x}{7y}$ mit

a) 4; b) x; c) $-y$; d) $2x$; e) $-3x^2$; f) $2x^2y^2$!

8. Kürzen Sie die folgenden Brüche soweit wie möglich!

a) $\frac{10}{50}$ b) $\frac{42}{48}$ c) $\frac{280}{168}$ d) $\frac{1232}{924}$ e) $\frac{ab}{a}$ f) $\frac{2x}{x}$

9. Ermitteln Sie das kleinste gemeinschaftliche Vielfache folgender Zahlen!

a) 2, 12, 14, 32 b) 3, 9, 27, 11 c) 2, 3, 6, 8, 12.

10. Welche Beziehung besteht zwischen dem kleinsten Hauptnenner mehrerer gemeiner Brüche und dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen?

11. Machen Sie die folgenden Brüche gleichnamig!

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{13}{14}, \frac{2}{35}$ b) $\frac{3}{7}, \frac{4}{31}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{36}, \frac{5}{12}, \frac{15}{16}, \frac{33}{64}$

12. a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{8}+\frac{4}{12}-\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{8}{5}$ e) $\frac{1}{12}+\frac{15}{16}-\frac{7}{24}$ f) $1\frac{7}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

g) $2\frac{3}{4}-\frac{7}{9}+1\frac{1}{5}$ h) $\frac{6}{7}-1\frac{1}{14}+\frac{27}{28}$

13. a) $\frac{3}{8}\cdot 2$ b) $\frac{4}{5}\cdot 15$ c) $6\cdot\frac{3}{8}$ d) $4\frac{1}{2}\cdot 5$ e) $\frac{7}{8}\cdot 2$ f) $\frac{a}{b}\cdot c$

14. a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$ b) $\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$

d) $\frac{10}{11}\cdot\frac{4}{5}\cdot 1\frac{1}{2}$ e) $1\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$ f) $2\frac{3}{4}\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{5}$

15. a) $\frac{1}{2}:2$ b) $\frac{8}{9}:4$ c) $\frac{3}{4}:2$ d) $\frac{7}{8}:3$ e) $1\frac{4}{5}:9$ f) $3\frac{3}{4}:5$

16. a) $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{5}:\frac{14}{15}$ d) $1\frac{1}{2}:\frac{3}{2}$ e) $\frac{4}{5}:1\frac{1}{4}$

f) $1\frac{9}{10}:3\frac{4}{5}$ g) $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ h) $\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{8}:\frac{2}{7}$ i) $\frac{4}{5}:\frac{1}{5}\cdot 6\frac{1}{2}$

17. a) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{4}{10}:\frac{1}{5}+2\frac{1}{20}$ b) $3\frac{3}{4}:\frac{1}{8}-1\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{4}{7}-3:\frac{1}{14}$

c) $6\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5}-3\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{5}:\frac{1}{2}$

Die Erweiterung des Bruchbegriffes

Bei den früher besprochenen gemeinen Brüchen waren die Zähler und Nenner natürliche Zahlen. Wir erweitern den Begriff des gemeinen Bruches nun dahingehend, daß wir als Zähler und Nenner rationale Zahlen verwenden. Dabei kann jede rationale Zahl außer Null als Nenner auftreten.

Würde die Zahl Null als Nenner auftreten, so erhielte man z. B.

(36) $\frac{5}{0} = y.$

Durch Multiplikation mit Null könnte man die obige Gleichung umformen in

(37) $5 = y \cdot 0 = 0.$

Das ist ein Widerspruch.

Um diesen Widerspruch zu vermeiden, schließt man die Zahl Null als Nenner eines Bruches aus.

Da die Zahlen im Zähler und Nenner vorzeichenbehaftet sind, müssen wir auch die Begriffe echter und unechter Bruch neu erklären.

$\frac{a}{b}$ heißt echter Bruch, wenn $|a| < |b|$ ist oder, was gleichbedeutend ist, $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$ gilt.

$\frac{a}{b}$ heißt unechter Bruch, wenn $|a| \geqq |b|$ ist oder, was gleichbedeutend ist, $\left|\frac{a}{b}\right| \geqq 1$ gilt.

1. *Erläutern Sie, inwiefern diese neue Erklärung für einen echten bzw. unechten Bruch die ursprüngliche Erklärung einschließt!*
2. *Begründen Sie, weshalb in dieser Erklärung das Betragszeichen erforderlich ist!*

Die Vorzeichen von Zähler und Nenner lassen sich nach der Vorzeichenregel für die Division zu einem Vorzeichen vor dem Bruch zusammenfassen.
Die gemeinen Brüche finden innerhalb der Mathematik vielfache Anwendung. Das Rechnen mit ihnen muß sicher beherrscht werden. Das gilt insbesondere auch für den Fall, daß als Zähler und Nenner allgemeine Zahlensymbole verwendet werden. Auch in den Naturwissenschaften und in den technischen Wissenschaften wird viel mit gemeinen Brüchen, vor allem unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole, gerechnet, während in der industriellen und landwirtschaftlichen Produktion bei numerischen Rechnungen meist Dezimalbrüche verwendet werden.

Das Vergleichen gemeiner Brüche, Kürzen und Erweitern

Für zwei rationale Zahlen a und b gilt immer genau eine der drei Beziehungen $a > b \quad a = b$ oder $a < b$. Ist z. B. weder $a < b$ noch $a > b$, so gilt $a = b$, oder wenn nicht $a \leqq b$ gilt, so ist $a > b$ usw.

Bei ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen läßt sich an den beiden gegebenen Zahlen sofort erkennen, welche von den beiden größer bzw. kleiner als die andere ist. Für gemeine Brüche ist diese Entscheidung nicht immer ohne weitere Rechnung möglich.
Da der Vergleich von Brüchen häufig notwendig ist, soll nun ein Verfahren besprochen werden, das es in jedem Fall ermöglicht, eine eindeutige Aussage darüber zu machen, welche der obengenannten Beziehungen für zwei rationale Zahlen a und b zutrifft. Wir beschränken uns dabei auf positive gemeine Brüche und betrachten zunächst zwei Sonderfälle:

1. Haben zwei positive Brüche gleiche Zähler, so ist nach den Gesetzmäßigkeiten der Division der Bruch mit dem kleineren Nenner größer.

Beispiel 25:

$$\frac{17}{21} > \frac{17}{22} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{3}{5}}{13} > \frac{\frac{3}{5}}{14} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{\frac{3}{5}}{13}}{23} > \frac{\frac{\frac{3}{5}}{14}}{23}$$

2. Sind zwei positive Brüche gleichnamig, so ist nach den Gesetzmäßigkeiten der Division der Bruch mit dem größeren Zähler größer.

Beispiel 26:

$$\frac{15}{19} > \frac{13}{19} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{3}{5}}{19} > \frac{\frac{2}{5}}{19} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{\frac{3}{5}}{19}}{23} > \frac{\frac{\frac{2}{5}}{19}}{23}$$

Für zwei Brüche, die weder in ihren Zählern noch in ihren Nennern übereinstimmen, muß durch Umformen einer der erläuterten Sonderfälle erreicht werden.
Die beiden Brüche werden so umgeformt, daß sie gleichnamig sind. Eine solche Umformung ist in jedem Falle möglich. Für Brüche gilt die Festlegung:

Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ stellen genau dann die gleiche rationale Zahl z dar, wenn gilt:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Beispiel 27:

Die Brüche $\frac{5}{7}$ und $\frac{10}{14}$ stellen die gleiche rationale Zahl z dar, weil gilt:

$$5 \cdot 14 = 7 \cdot 10.$$

Beispiel 28:

Welcher der beiden Brüche ist größer: $\frac{5}{7}$ oder $\frac{7}{10}$?

Lösung: Die Brüche werden durch Erweitern gleichnamig gemacht.

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} = \cdots = \frac{45}{63} = \frac{50}{70} = \cdots \quad \text{und}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \cdots = \frac{42}{60} = \frac{49}{70} = \cdots$$

Aus $\frac{50}{70} > \frac{49}{70}$ folgt wegen $\frac{50}{70} = \frac{5}{7}$ und $\frac{49}{70} = \frac{7}{10}$ die Beziehung $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$.

1. *Formulieren Sie die Rechenregel für das Erweitern!*
2. *Wie heißt die Regel für das Kürzen?*

Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, wird das Kürzen als Umkehrung des Erweiterns bezeichnet. Unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole erhält man für die Erweiterung des Bruches $\frac{a}{b}$ mit n die Beziehung:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit } b \neq 0 \text{ und } n \neq 0.$$

Für den durch m gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ erhält man die Beziehung:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m} \quad \text{mit } b \neq 0 \text{ und } m \neq 0.$$

Die Zahl n heißt Erweiterungsfaktor, m wird Kürzungszahl genannt.
Durch Gleichnamigmachen kann man auch mehr als zwei Brüche miteinander vergleichen. Das geschieht in jedem Falle so, daß man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (**k. g. V.**) aller vorkommenden Nenner ermittelt. Das **k. g. V.** aller Nenner heißt der **kleinste Hauptnenner** einer Menge vorgegebener Brüche.

Ermittlung des kleinsten Hauptnenners mehrerer Brüche (Gleichnamigmachen von Brüchen)

Die systematische Ermittlung des kleinsten Hauptnenners **HN** soll an einem Zahlenbeispiel und an zwei Beispielen mit allgemeinen Zahlensymbolen erläutert werden.

Beispiel 29:

Die Brüche $\frac{10}{39}$; $\frac{47}{156}$; $\frac{17}{60}$; $\frac{19}{78}$; $\frac{18}{65}$; $\frac{73}{260}$; $\frac{49}{195}$ sind der Größe nach zu ordnen.
Das k. g. V. ist das Produkt aller in den sieben Nennern vorkommenden höchsten Primzahlpotenzen. Deshalb wird zunächst jeder Nenner in sein Primzahlprodukt zerlegt. Dann wird der jeweilige Erweiterungsfaktor für jeden Bruch ermittelt.

Nenner	Primzahlprodukt	Erweiterungsfaktor	zum Hauptnenner 780 gehörender Zähler	Reihenfolge der Brüche nach ihrer Größe
39	$3 \cdot 13$	$2^2 \cdot 5 = 20$	200	5
156	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	$5 = 5$	235	1
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$13 = 13$	221	2
78	$2 \cdot 3 \cdot 13$	$2 \cdot 5 = 10$	190	7
65	$5 \cdot 13$	$2^2 \cdot 3 = 12$	216	4
260	$2^2 \cdot 5 \cdot 13$	$3 = 3$	219	3
195	$3 \cdot 5 \cdot 13$	$2^2 = 4$	196	6

$\text{HN} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 780$

Ergebnis: $\frac{47}{156} > \frac{17}{60} > \frac{73}{260} > \frac{18}{65} > \frac{10}{39} > \frac{49}{195}$.

Beispiel 30:

Die Brüche $\frac{c}{a+b}$; $\frac{d}{a-b}$; $\frac{e}{a}$; $\frac{g}{a^2-ab}$; $\frac{h}{ab+b^2}$ sind gleichnamig zu machen.

Um den kleinsten Hauptnenner zu finden, werden, wenn es möglich ist, die Nenner in Faktoren zerlegt. Der jeweilige Erweiterungsfaktor für jeden Bruch wird durch Vergleich mit dem kleinsten Hauptnenner ermittelt. Alle Brüche werden dann auf den kleinsten Hauptnenner erweitert:

Nenner	Faktorenzerlegung	Erweiterungsfaktor	
$a+b$	$a+b$	$ab(a-b)$	$= a^2b - ab^2$
$a-b$	$a-b$	$ab(a+b)$	$= a^2b + ab^2$
a	a	$b(a+b)(a-b)$	$= a^2b - b^3$
a^2-ab	$a(a-b)$	$b(a+b)$	$= ab + b^2$
$ab+b^2$	$b(a+b)$	$a(a-b)$	$= a^2 - ab$

$$\mathrm{HN} = a \cdot b \cdot (a+b)(a-b) = ab(a^2-b^2) = a^3b - ab^3$$

Man erhält dann:

Erweitern

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c \cdot ab \cdot (a-b)}{(a+b) \cdot ab \cdot (a-b)} = \frac{c \cdot (a^2b - ab^2)}{a^3b - ab^3} = \frac{a^2bc - ab^2c}{a^3b - ab^3}$$

$$\frac{d}{a-b} = \frac{d \cdot ab(a+b)}{(a-b) \cdot ab(a+b)} = \frac{d(a^2b + ab^2)}{a^3b - ab^3} = \frac{a^2bd + ab^2d}{a^3b - ab^3}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{e \cdot b(a+b)(a-b)}{a \cdot b(a+b)(a-b)} = \frac{e \cdot (a^2b - b^3)}{a^3b - ab^3} = \frac{a^2be - b^3e}{a^3b - ab^3}$$

$$\frac{g}{a^2-ab} = \frac{g \cdot b \cdot (a+b)}{a(a-b) \cdot b(a+b)} = \frac{g(ab+b^2)}{a^3b - ab^3} = \frac{abg + b^2g}{a^3b - ab^3}$$

$$\frac{h}{ab+b^2} = \frac{h \cdot a \cdot (a-b)}{b(a+b) \cdot a \cdot (a-b)} = \frac{h(a^2-ab)}{a^3b - ab^3} = \frac{a^2h - abh}{a^3b - ab^3}.$$

Kürzen

Durch Kürzen lassen sich die eben erhaltenen Ergebnisse leicht nachprüfen. Dabei ist zu beachten, daß man bei Brüchen, deren Zähler oder Nenner algebraische Summen enthalten, nicht die in einzelnen Gliedern des Zählers und Nenners enthaltenen gemeinsamen Summanden kürzen kann. Die algebraischen Summen müssen als Ganzes gekürzt werden. Andererseits können bei Brüchen, deren Zähler und Nenner Produkte sind, einzelne Faktoren gegeneinander gekürzt werden. Daher ist es zweckmäßig, die algebraischen Summen im Zähler und Nenner eines Bruches durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte zu verwandeln. Dann lassen sich die Zähler und Nenner gemeinsamer Faktoren kürzen. Liest man die Gleichungen des **Beispiels 30** von rechts nach links, so kürzt man die auf der rechten Seite stehenden Brüche und erhält als Resultat die links stehenden Ausdrücke.

Beispiel 31:

Die Brüche $\frac{x-y}{x+y}$; $\frac{3}{y-z}$; $\frac{2-x}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{z-y}{x^2+xy}$; $\frac{x-z}{xy-xz}$ sind gleichnamig zu machen.

Lösung:

Nenner	Faktorenzerlegung	Erweiterungsfaktor
$x+y$	$x+y$	$x(y-z)$
$y-z$	$y-z$	$x(x+y)$
$x^2 y - x^2 z + x y^2 - x y z$	$x(xy - xz + y^2 - yz)$ $= x(y-z)(x+y)$	1
x	x	$(x+y)(y-z)$
$x^2 + x y$	$x(x+y)$	$y-z$
$x y - x z$	$x(y-z)$	$x+y$

$\mathrm{HN} = x(x+y)(y-z) = x^2 y - x^2 z + x y^2 - x y z$

Man erhält dann:

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)\,x(y-z)}{(x+y)\,x(y-z)} = \frac{x^2y - x^2z - xy^2 - xyz}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$$

$$\frac{3}{y-z} = \frac{3\cdot x(x+y)}{(y-z)\,x(x+y)} = \frac{3x^2 + 3xy}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$$

$$\frac{2-x}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz} = \frac{2-x}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1(x+y)(y-z)}{x(x+y)(y-z)} = \frac{xy - xz + y^2 - yz}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$$

$$\frac{z-y}{x^2+xy} = \frac{(z-y)(y-z)}{x(x+y)(y-z)} = \frac{-y^2 + 2yz - z^2}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}$$

$$\frac{x-z}{xy-xz} = \frac{(x-z)(x+y)}{x(y-z)(x+y)} = \frac{x^2 - xz + xy - yz}{x^2y - x^2z + xy^2 - xyz}.$$

Das Schema zur Ermittlung des kleinsten Hauptnenners und der Erweiterungsfaktoren entfällt bei einfachen Aufgaben. Bei den folgenden drei Beispielen

Beispiel 32:

$$\frac{7}{a+b};\ \frac{x}{a-b};\ \frac{x+y}{a-c},$$

Beispiel 33:

$$\frac{a}{x+y};\ \frac{b}{x};\ \frac{c}{x^2-y^2};\ \frac{d}{x-y},$$

Beispiel 34:

$$\frac{1}{14x};\ \frac{2}{35xy};\ \frac{3}{10x^2};\ \frac{4}{5y^2};\ \frac{5}{7y}$$

geht man bei der Erweiterung auf den kleinsten Hauptnenner etwa folgendermaßen vor:

Bei **Beispiel 32** ist sofort erkennbar, daß die Nenner keinen gemeinsamen Faktor enthalten, sie sind zueinander teilerfremd. Folglich ist der kleinste Hauptnenner das Produkt aller vorkommenden Nenner, hier $(a+b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)$. Der Erweiterungsfaktor für jeden der drei Brüche ist jeweils gleich dem Produkt der beiden anderen Nenner. Man erhält so

$$\frac{7}{a+b} = \frac{7(a-b)(a-c)}{(a+b)(a-b)(a-c)} = \frac{7a^2 - 7ab - 7ac + 7bc}{a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c}$$

$$\frac{x}{a-b} = \frac{x(a+b)(a-c)}{(a-b)(a+b)(a-c)} = \frac{a^2x + abx - acx - bcx}{a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c}$$

$$\frac{x+y}{a-c} = \frac{(x+y)(a^2-b^2)}{(a-c)(a^2-b^2)} = \frac{a^2x + a^2y - b^2x - b^2y}{a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c}$$

Im **Beispiel 33** erhält man wegen $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ als kleinsten Hauptnenner $x(x+y)(x-y) = x^3 - xy^2$. Der erste Bruch ist demnach mit $x(x-y)$, der zweite Bruch mit $(x+y)(x-y)$, der dritte Bruch mit x und der vierte Bruch mit $x(x+y)$ zu erweitern.

Welche erweiterten Brüche erhält man dann?

Im **Beispiel 34** erhält man wegen $14 = 2 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7$ und $10 = 2 \cdot 5$ den kleinsten Hauptnenner $70x^2y^2$. Die Erweiterungsfaktoren für die einzelnen Brüche lauten deshalb $5xy^2$, $2xy$, $7y^2$, $14x^2$, $10x^2y$.

Welche erweiterten Brüche erhält man dann?

Verwendung von Klammern in der Bruchrechnung, Kürzen algebraischer Summen

Bestehen Zähler bzw. Nenner eines Bruches aus je einer algebraischen Summe, so werden die algebraischen Summen bekanntlich nicht in Klammern eingeschlossen. Sobald aber mit diesen algebraischen Summen Rechenoperationen auszuführen sind (z. B. Multiplizieren beim Erweitern), müssen Klammern gesetzt werden, weil sich die jeweilige Rechenoperation auf die ganze algebraische Summe bezieht.
Das gilt z. B. auch für das Kürzen eines Bruches, der algebraische Summen enthält. Die ganze algebraische Summe im Zähler und im Nenner muß dabei durch den gleichen Ausdruck dividiert werden. Das heißt:

Stehen im Zähler oder Nenner bzw. im Zähler und Nenner eines Bruches algebraische Summen, so sind diese vor dem Kürzen durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte umzuformen. Wenn dann im Zähler und Nenner gemeinsame Faktoren auftreten, können diese gekürzt werden.

Beispiel 35:

$$\frac{45a^2b + 36ab^2 - 18ab}{3ab} = \frac{9ab\,(5a + 4b - 2)}{3ab} = 15a + 12b - 6$$

Beispiel 36:

$$\frac{17x^2y}{187x^3y^2 + 153x^2y^2 - 17x^2y - 68xy} = \frac{17x^2y}{17xy\,(11x^2y + 9xy - x - 4)}$$

$$= \frac{x}{11x^2y + 9xy - x - 4}$$

Beispiel 37:

$$\frac{9{,}0mp - 7{,}8mq + 6{,}0np - 5{,}2nq}{3m + 2n} = \frac{6m(1{,}5p - 1{,}3q) + 4n(1{,}5p - 1{,}3q)}{3m + 2n}$$

$$= \frac{(6m + 4n)(1{,}5p - 1{,}3q)}{3m + 2n} = \frac{2 \cdot (3m + 2n)(1{,}5p - 1{,}3q)}{3m + 2n}$$

$$= 3p - 2{,}6q$$

Beispiel 38:

$$\frac{16z^2 - 25}{4z - 5} = \frac{(4z + 5)(4z - 5)}{4z - 5} = 4z + 5$$

Beispiel 39:

$$\frac{36x^2 - 12xy + y^2}{15x - 2{,}5y} = \frac{4 \cdot (9x^2 - 3xy + 0{,}25y^2)}{5 \cdot (3x - 0{,}5y)} = \frac{4 \cdot (3x - 0{,}5y)^2}{5 \cdot (3x - 0{,}5y)} = \frac{12x - 2y}{5}$$

Aufgaben

18. Aus den folgenden Brüchen sind diejenigen herauszufinden, die einander gleich sind.

a) $\frac{8}{14}$ b) $\frac{-17}{35}$ c) $\frac{3a}{4}$ d) $\frac{11x^2}{5xy}$ e) $\frac{m}{-n}$ f) $\frac{121pq^2}{66q}$

g) $\frac{-m}{n}$ h) $\frac{51a^2}{68a}$ i) $\frac{-30}{-105}$ k) $\frac{34}{70}$ l) $-\frac{85}{175}$ m) $\frac{7}{a+b}$

n) $\frac{4x^2-9}{4x+6}$ o) $\frac{14a-14b}{2a^2-2b^2}$ p) $\frac{187}{-385}$ q) $\frac{15a^2b^2}{20ab^2}$ r) $\frac{2x-3}{2}$ s) $\frac{77xz}{35yz}$

Erläutern Sie, wie Sie bei der Lösung dieser Aufgaben vorgegangen sind, und begründen Sie den gewählten Lösungsweg!

19. Jeder der folgenden Brüche ist so zu erweitern, daß sich das nebenstehende Produkt als Nenner ergibt.

Welche erweiterten Brüche erhalten Sie?

a) $\frac{15ab}{14bc}$; $112cd$ b) $\frac{3m}{15n}$; $10m^2n^2$ c) $\frac{a+b}{17r}$; $85rst$

d) $\frac{13}{x+y}$; $x^2 - y^2$ e) $\frac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{q}{4}}$; $16p^2 - 4q$ f) $\frac{13+5x}{13-5x}$; $169 - 25x^2$

g) $\frac{15}{11a-1}$; $121a^2 - 22a + 1$ h) $\frac{a-b}{4u-2v}$; $4u^2 - 4uv + v^2$

i) $\frac{7}{3x+0{,}5}$; $(3x+0{,}5)^2$ k) $\frac{9}{12ab-12c}$; $(a^2b^2 - c^2)(ab+c)$

l) $\frac{3x+5y-1}{4a+4}$; $(12a^2 - 12)(a+1)$

20. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche durch Kürzen!

a) $\frac{242p^2q}{33pq}$ b) $\frac{x^3}{x^5}$ c) $\frac{x^5}{x^3}$ d) $\frac{7a-14b}{a-2b}$ e) $\frac{60a^2-30b^2}{12a-6b}$

f) $\frac{126x^2+1260x+3150}{63x+315}$ g) $\frac{81x^2-162x+81}{27x-27}$ h) $\frac{3cm-2cn+ck}{12acm-8acn+4ack}$

21. Ermitteln Sie jeweils den kleinsten Hauptnenner!

a) $\frac{x^2}{a^2}$; $\frac{y^2}{b^2}$; 1 b) $\frac{1}{15x}$; $\frac{1}{x^2y^2}$; $\frac{1}{12y}$; $\frac{1}{30xy}$

c) $\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$; $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$

d) $\frac{3}{15x-10y}$; $\frac{4}{6x+4y}$; $\frac{5}{9x^2-4y^2}$; $\frac{1}{3x^2-3x+2xy-2y}$

e) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{3}{5y-2z}$; $\frac{2a-3b}{5y+2z}$; $\frac{4}{2y-5z}$ f) $\frac{2}{2a}$; $\frac{3}{b^2}$; $\frac{4}{2a+b}$; $\frac{10a-5b}{4a^2-b^2}$

g) $\frac{a}{x-y}$; $\frac{b}{x+y}$; $\frac{c}{x-z}$; $\frac{d}{x+z}$ h) $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a+1}$; $\frac{1}{a+2}$; $\frac{1}{a+3}$

22. Schreiben Sie die folgenden Divisionsaufgaben als Brüche, und kürzen Sie sie!

a) $(-4mp-mq):(2np+0{,}5nq)$ b) $(20ab+28bc):(-24ad-42cd)$

c) $(-20x^2+5y^2):(16x+10y)$ d) $(81m^2n^2-18mn+1):(9mn-1)$

e) $(-r^2-2rs-s^2):(r+s)$ f) $(x-1):(2-2x)$

23. Folgende Brüche sind zu kürzen.

a) $\frac{a^2b}{ac}$ b) $\frac{x^3yz}{xz}$ c) $\frac{mn}{m^2n^3}$ d) $\frac{(a+b)^2}{a+b}$ e) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$

f) $\frac{4x^2-25}{2x+5}$ g) $\frac{25-4x^2}{10x+25}$ h) $\frac{(5p-3q)^3}{5p-3q}$ i) $\frac{(64a^2-b^2)^2}{(8a+b)^3}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Formulieren wir die uns bereits bekannte Rechenregel für die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole, so erhalten wir

(38) $\frac{z_1}{n} \pm \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 \pm z_2}{n}$ mit $n \neq 0$.

Diese Regel gilt auch für endlich viele Brüche:

(39) $\frac{z_1}{n} \pm \frac{z_2}{n} \pm \cdots \pm \frac{z_i}{n} = \frac{z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_i}{n}$ mit $n \neq 0$.

Beispiel 40:

$$\frac{17}{xy}-\frac{12}{xy}+\frac{5}{xy}-\frac{11}{xy}=\frac{17-12+5-11}{xy}=\frac{-1}{xy}=-\frac{1}{xy}$$

Beispiel 41:

$$\frac{4x-b}{x^2-y^2}+\frac{-2y+2b}{x^2-y^2}+\frac{6y}{x^2-y^2}-\frac{b-(x+y)}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{4x-b+(-2y+2b)+6y-[b-(x+y)]}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{4x-b-2y+2b+6y-b+x+y}{x^2-y^2}=\frac{5x+5y}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{5(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{5}{x-y}$$

Beachten Sie:

Steht im Zähler eines Bruches eine algebraische Summe, so ist beim Addieren bzw. Subtrahieren des Bruches die algebraische Summe als Ganzes zu addieren bzw. zu subtrahieren, d. h., die algebraische Summe ist zunächst in Klammern einzuschließen.

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Sollen ungleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert werden, so lösen wir diese Aufgabe durch Zurückführung auf die bereits gelöste Aufgabe, gleichnamige Brüche zu addieren bzw. zu subtrahieren.

Für die Brüche $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{m}$ mit $n \neq 0$; $m \neq 0$; $m \neq n$ gilt demnach

(40) $$\frac{a}{n}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\cdot m}{n\cdot m}\pm\frac{b\cdot n}{m\cdot n}=\frac{am\pm bn}{mn}$$

Diese Regel gilt sinngemäß auch für die Addition und Subtraktion von mehr als zwei Brüchen.

Auch bei allgemeinen Zahlensymbolen im Nenner der einzelnen Brüche ist der kleinste Hauptnenner nicht immer gleich dem Produkt der einzelnen Nenner. Für solche Fälle muß der kleinste Hauptnenner ermittelt werden.

Beispiel 42:

$$\frac{x+6y}{x^2-3xy}+\frac{9y-x}{-2xy+6y^2}-\frac{1}{2y}$$

Hauptnennerermittlung:

$$\begin{aligned} x^2-3xy &= x(x-3y)\\ -2xy+6y^2 &= -2y(x-3y)\\ 2y &= 2y\\ \hline \text{HN: } & -2xy(x-3y)\end{aligned}$$

$$\frac{x+6y}{x^2-3xy}+\frac{9y-x}{-2xy+6y^2}-\frac{1}{2y}$$

$$=\frac{(x+6y)(-2y)}{x(x-3y)(-2y)}+\frac{(9y-x)x}{-2y(x-3y)x}-\frac{1(-x)(x-3y)}{2y(-x)(x-3y)}$$

$$=\frac{-2xy-12y^2+9xy-x^2-(-x^2+3xy)}{-2xy(x-3y)}$$

$$=-\frac{4xy-12y^2}{2xy(x-3y)}=-\frac{4y(x-3y)}{2xy(x-3y)}=-\frac{2}{x}$$

Nur die Umformung der algebraischen Summen in Produkte durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren bzw. durch Anwendung der binomischen Formeln ermöglicht bei komplizierten Nennern die Ermittlung des k. g. V. der einzelnen Nenner. Zwar lassen sich solche Aufgaben auch mit anderen gemeinschaftlichen Vielfachen — etwa mit dem Produkt aller Nenner — lösen, jedoch werden die Zähler dadurch wesentlich komplizierter. Deshalb ist dieser unrationelle Lösungsweg zu vermeiden.

● *Im allgemeinen stehen allgemeine Zahlensymbole für alle rationalen Zahlen. In den* **Beispielen 40** *und* **42** *gelten jedoch Einschränkungen. Bestimmen Sie, welche Einschränkungen in diesen Beispielen gültig sind!*

Anleitung: Beachten Sie, daß die Division durch Null nicht möglich ist!

Aufgaben

24. Berechnen Sie folgende Summen!

a) $\frac{5}{13}+\frac{1}{13}-\frac{7}{13}+\frac{2}{13}$ b) $\frac{2a}{5}-\frac{3b}{5}+\frac{a}{5}+\frac{2b}{5}-\frac{3a}{5}$

c) $\frac{2}{ab}-\frac{3}{ab}+\frac{c}{ab}$ d) $\frac{5a}{x-y}+\frac{2b}{x-y}-\frac{b}{x-y}-\frac{4a}{x-y}$

25. a) Wie lautet die Rechenregel, die Sie zur Lösung der Aufgabe 24 benutzten?

b) Geben Sie diese Rechenregel, getrennt für Addition und Subtraktion, in Form von Gleichungen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole wieder!

26. a) Wie lautet die Rechenregel für das Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche?

b) Versuchen Sie die Rechenregel für die Addition bzw. Subtraktion zweier ungleichnamiger Brüche als Gleichung unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole zu schreiben!

27. Berechnen Sie folgende Summen!

a) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ b) $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}$ c) $u+\frac{v}{w}$ d) $u-\frac{v}{w}$

e) $\frac{x}{y}-z$ f) $\frac{x}{y}+13$ g) $\frac{r}{s}-3$ h) $5+\frac{r}{s}$

i) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$ k) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$ l) $\frac{3}{5x-2y}-\frac{4}{5x+2y}$

m) $\frac{a-b}{a}+\frac{a+b}{b}$ n) $\frac{x+y}{y}-\frac{x-y}{x}$ o) $\frac{3}{m+n}+\frac{2}{m+l}$

p) $\frac{4}{(c-3)^2} + \frac{2}{c-3}$ q) $\frac{2r+3}{16r^2-8r+1} - \frac{1}{4r-1}$ r) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

s) $\frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ t) $\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}$ u) $a^2 - \frac{1}{a^2}$

v) $\frac{1}{x^2} + x^2$ w) $\frac{1}{x^2} + y^2$ x) $\frac{2}{c} + \frac{c}{2}$

28. Berechnen Sie folgende Ausdrücke!

a) $\frac{9}{m+n} - \frac{5}{m} + \frac{4}{n}$

b) $\frac{2x}{4y+5} - \frac{5x-1}{10y} - \frac{y-1}{8}$

c) $\frac{4m-5n}{3m-n} + \frac{3m+n}{4m+5n} - \frac{1}{3}$

d) $\frac{2u}{u-v} - \frac{3v}{u+v} + \frac{5}{u}$

e) $\frac{5x}{x+2} + \frac{4x}{x+1} - \frac{3x}{x+4}$

f) $\frac{20c}{c-3} - \frac{19c}{c-4} + \frac{c}{c-5}$

g) $\frac{5}{4m} - \frac{7}{6n} - \frac{9}{8mn} + \frac{m^2-11mn}{12mn(m-n)}$

h) $\frac{-3}{5z-1} - \frac{2x-6}{10z-2} + \frac{x}{1-5z}$

i) $13 - \frac{17m}{3m+1} - \frac{5}{1{,}5m+0{,}5}$

k) $\frac{7s-1}{15r-30t} + \frac{4s-11}{5r-10t} - \frac{18s+1}{r-2t}$

l) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$

m) $\frac{7y}{x^2+xy} - \frac{5x}{xy+y^2} + \frac{3}{xy}$

n) $\frac{4m+n}{(m-n)^2} + \frac{21}{m+n} - \frac{2m-5n}{(m-n)^2} - \frac{22m^3+29n^3}{m^2-n^2}$

o) $\frac{2a^2+3}{a^3-a^2y} + \frac{3y^2-2}{ay^2+y^3} - \frac{5}{a^2-y^2}$

p) $\frac{5y-7z}{2y^3+2y^2z} - \frac{14y+9z}{3yz^2-3z^3} + \frac{2y^2-z^2}{4y^2z+4yz^2} - \frac{13z^2-11y^2}{6y^2z-6yz^2}$

29. Zeigen Sie, daß die folgenden Beziehungen gelten!

a) $\frac{a-bx}{b} + x = \frac{a}{b}$

b) $\frac{6s-2rs}{5s} - \frac{12+6r}{10} = -r$

c) $\frac{x}{y} - \frac{xy+y^2z}{y^2} = -z$

d) $\frac{4m^2-9}{4m^2-12m+9} = \frac{4m^2+12m+9}{4m^2-9}$

e) $\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot p + 1 = p$

f) $\frac{p^2+p}{p} - p = 1$

Multiplikation von Brüchen

Die Rechenregel für die Multiplikation von Brüchen läßt sich unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole folgendermaßen darstellen:

(41) $\frac{z_1}{n_1}\cdot\frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1\cdot z_2}{n_1\cdot n_2}$ mit $n_1 \neq 0$ und $n_2 \neq 0$.

Für mehr als zwei Brüche gilt:

$$(42)\quad \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} \cdot \ldots \cdot \frac{z_i}{n_i} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_i}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i} \quad (n_1, n_2, \ldots, n_i \neq 0).$$

Von besonderer Bedeutung für ein rationelles Multiplizieren von Brüchen ist das Kürzen. Ist in (41) etwa $z_1 = m \cdot z_3$ und $n_2 = m \cdot n_3$, so gilt:

$$(43)\quad \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{m z_3}{n_1} \cdot \frac{z_2}{m \cdot n_3} = \frac{z_3 \cdot z_2}{n_1 \cdot n_3}.$$

Ist es überhaupt möglich zu kürzen, so sollte das zweckmäßigerweise bereits vor dem Ausmultiplizieren von Zähler und Nenner geschehen, da man auf diese Weise unnütze Rechnungen vermeiden und die Anzahl der möglichen Fehlerquellen verringern kann.
Die Gleichungen (41), (42) und (43) gelten auch für den Fall, daß im Zähler und Nenner algebraische Summen stehen. Wie aus folgenden Beispielen ersichtlich, ist dabei auf das richtige Setzen von Klammern zu achten. Gemischte Zahlen werden zweckmäßigerweise dabei nicht als algebraische Summen behandelt, sondern in unechte Brüche verwandelt.

Beispiel 43:

$$\left(2\frac{7}{10} - 1\right) \cdot \left(\frac{12}{51} - 1\frac{1}{17}\right) = 1\frac{7}{10} \cdot \left(\frac{4}{17} - \frac{18}{17}\right) = \frac{17}{10} \cdot \left(-\frac{14}{17}\right) = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$$

Beispiel 44:

Die algebraische Summe $\frac{3m}{5x^2y} - \frac{2m}{3xy^2} + \frac{13m}{10xy}$ ist mit $-30x^2y^2$ zu multiplizieren.

1. Lösung:

$$\left(\frac{3m}{5x^2y} - \frac{2m}{3xy^2} + \frac{13m}{10xy}\right) \cdot (-30x^2y^2)$$
$$= -\frac{3m}{5x^2y} \cdot 30x^2y^2 + \frac{2m}{3xy^2} \cdot 30x^2y^2 - \frac{13m}{10xy} \cdot 30x^2y^2$$
$$= -3m \cdot 6y + 2m \cdot 10x - 13m \cdot 3xy = 20mx - 39mxy - 18my$$

2. Lösung:

$$\left(\frac{3m \cdot 6y}{5x^2y \cdot 6y} - \frac{2m \cdot 10x}{3xy^2 \cdot 10x} + \frac{13m \cdot 3xy}{10xy \cdot 3xy}\right) \cdot (-30x^2y^2)$$
$$= \frac{18my - 20mx + 39mxy}{30x^2y^2} \cdot (-30x^2y^2) = -(18my - 20mx + 39mxy)$$
$$= 20mx - 39mxy - 18my$$

Beispiel 45:

$$\frac{6y+3}{5} \cdot \frac{8y^2 - 8y + 2}{4y^2 - 1} \cdot \frac{2}{2y+1} \cdot \frac{(4y-2)(2y+1)}{4y^2 - 4y + 1} = \frac{24}{5}$$

Aufgaben

30. Berechnen Sie folgende Produkte!

a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15}$ **b)** $5 \cdot \frac{4}{25}$ **c)** $\frac{13}{78} \cdot 12$ **d)** $4\frac{2}{7} \cdot 1{,}4$ **e)** $\frac{a}{5} \cdot \frac{3}{4}$

f) $\frac{x}{7} \cdot \frac{y}{3}$ **g)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ **h)** $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ **i)** $x \cdot \frac{3}{5}$ **k)** $\frac{7}{2} \cdot a^2$

l) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ **m)** $x \cdot \frac{y}{z}$ **n)** $\frac{x}{y} \cdot z$ **o)** $\left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{156}{20}\right)$ **p)** $\frac{-3}{a} \cdot \frac{5}{-b}$

31. a) Welche Rechenregel haben Sie zur Lösung der Aufgabe **30a** angewendet?

b) Bei welchen anderen Aufgaben haben Sie dieselbe Rechenregel benutzt?

c) Welche Schlußfolgerung ziehen Sie aus den Ergebnissen der Aufgaben **30g** und **h**?

d) Nach welcher Regel haben Sie die Aufgaben **30b, c, i, k, m** und **n** gelöst? Bilden Sie selbst weitere Aufgaben dieser Art, und ermitteln Sie deren Lösung!

e) Welche Umformung muß man an den in Aufgabe **31d** genannten Aufgaben vornehmen, um sie nach derselben Regel wie Aufgabe **30a** lösen zu können? Bilden und lösen Sie weitere ähnliche Aufgaben!

f) Welche Vorzeichenregeln gelten für die Multiplikation von Brüchen?

32. Ermitteln Sie die Produkte folgender Dezimalbrüche einmal durch Ausmultiplizieren der Dezimalbrüche, zum anderen durch Umformen in gemeine Brüche und anschließendes Ausmultiplizieren!

a) $0{,}15 \cdot 0{,}032$ **b)** $(-0{,}22) \cdot 1{,}8$ **c)** $15{,}2 \cdot (-1{,}25)$

d) $1{,}25 \cdot 0{,}37$ **e)** $0{,}05 \cdot 0{,}0015$ **f)** $124{,}5 \cdot 125{,}4$

Vergleichen Sie jeweils das Produkt der Dezimalbrüche mit dem ungekürzten Produkt der entsprechenden gemeinen Brüche, und begründen Sie so die „Kommaregel" für die Multiplikation von Dezimalbrüchen!

33. a) $\frac{13}{31} \cdot \frac{124}{65}$ **b)** $\frac{3}{7} \cdot \frac{35}{21}$ **c)** $\frac{17}{36} \cdot \frac{81}{153}$ **d)** $4\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{33}$ **e)** $5\frac{2}{7} \cdot \frac{42}{74}$

f) $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$ **g)** $14\frac{2}{7} \cdot 8\frac{2}{5}$ **h)** $\frac{13}{17} \cdot 1\frac{4}{13}$ **i)** $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ **k)** $\left(\frac{18}{45}\right)^2$

l) $\left(5\frac{4}{8}\right)^2$ **m)** $\left(7\frac{1}{7}\right)^2$ **n)** $\left(1\frac{2}{13}\right)^2$

34. a) $\frac{1}{3} \cdot 2$ **b)** $5 \cdot \frac{4}{5}$ **c)** $20 \cdot \frac{5}{4}$ **d)** $\frac{7}{13} \cdot 26$ **e)** $31 \cdot \frac{5}{13}$

f) $6 \cdot 2\frac{1}{3}$ **g)** $4\frac{2}{35} \cdot 7$ **h)** $1\frac{1}{5} \cdot 10$ **i)** $11\frac{1}{2} \cdot 4$ **k)** $15 \cdot \frac{3}{45}$

35. a) $\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{1}$ **b)** $\frac{1}{x} \cdot xy$ **c)** $2\frac{3}{5} \cdot \frac{a}{b}$ **d)** $\frac{r^2s}{uv^2} \cdot \frac{u^2v}{rs^2}$ **e)** $\frac{4}{p} \cdot q$

f) $2 \cdot \frac{p}{q}$ **g)** $15m \cdot \frac{3n}{5n}$ **h)** $\frac{15m}{5n} \cdot 3n$ **i)** $r \cdot \frac{1}{r^2s}$ **k)** $\frac{1}{r} \cdot r^2s$

l) $s^2 \cdot \frac{1}{s^3}$ **m)** $\frac{a}{ab} \cdot a^2b^2$ **n)** $7pq \cdot \frac{3m}{21p^2q^2}$ **o)** $\frac{6a^2b^2c}{8abcx^2} \cdot \frac{20acx}{15a^2by}$

p) $\frac{9z^2}{6xy} \cdot \frac{4x}{18mz}$ **q)** $\frac{2xz}{3yz} \cdot \frac{4xy}{5x^2}$ **r)** $\frac{13m^3}{14n^2} \cdot \frac{21mn^2p}{39m^2n}$ **s)** $\frac{2rst}{5p^2q^2r^2} \cdot \frac{4p^3q^2r}{9pst}$

36. a) $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$ b) $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}\cdot\frac{c}{z}$ c) $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}$

d) $\frac{13xy}{12ab}\cdot\frac{15ac}{26xz}\cdot\frac{48bz}{30cy}$ e) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3rs}{5m^2n^2}\cdot\frac{15m^2n}{6r^2s}$

f) $\frac{1{,}56a^2}{2{,}86x}\cdot\frac{8{,}4xy}{1{,}44ab}\cdot\frac{3{,}2b^2y}{10{,}4a}$ g) $17mn\cdot\frac{0{,}1\cdot m^3}{5{,}1m^2n^2x}\cdot 30n$

37. a) $\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b}$ b) $\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a-b}$ c) $\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b}$

d) $\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)$ e) $\frac{1}{x+y}\cdot x+y$ f) $\frac{8m^2-2}{4m^2-4m+1}\cdot\frac{1}{2}$

g) $\frac{a-7}{a^2-49}\cdot(a+7)$ h) $\frac{3x-2}{10y+4}\cdot\frac{5y+2}{6x-4}$ i) $\frac{5a-2b}{6r-4s}\cdot\frac{5{,}4r-3{,}6s}{5{,}5a-2{,}2b}$

k) $\frac{9a^2-1}{16b^2-c^2}\cdot\frac{3{,}2b^2-0{,}2c^2}{0{,}9a^2-0{,}6a+0{,}1}$ l) $\frac{5x-12}{13ab-6z}\cdot\frac{26ab-12z}{20x-48}\cdot\frac{(3m-4n)^2}{3m+4n}$

38. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ b) $\left(1-\frac{x}{y}\right)^2$

c) $\left(\frac{x}{y}-1\right)^2$ d) $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)$

e) $\left(\frac{3a}{2b}+\frac{4b}{3c}-\frac{5c}{4a}\right)\cdot\left(\frac{1}{5abc}+5abc\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}x+\frac{20a}{17bz}x\right)\cdot\left(\frac{6y}{x}-\frac{30a}{y}+2\right)$

Division von Brüchen

Wie man Brüche dividiert, ist uns bekannt. Unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole kann man die Rechenregel darstellen durch

$$\frac{z_1}{n_1}:\frac{z_2}{n_2}=\frac{z_1}{n_1}\cdot\frac{n_2}{z_2}=\frac{z_1\cdot n_2}{n_1\cdot z_2}\quad\text{mit}\quad n_1, n_2, z_2 \neq 0. \tag{44}$$

Die Division zweier Brüche ist auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt worden. Die Gleichung (44) gilt auch für den Fall, daß n_1, n_2, z_1, z_2 algebraische Summen sind.

Die Brüche $\frac{z_2}{n_2}$ und $\frac{n_2}{z_2}$ heißen zueinander reziprok[1]. Der Bruch $\frac{z_2}{n_2}$ ist aber auch zu allen Brüchen reziprok, die durch Erweitern des Bruches $\frac{n_2}{z_2}$ entstanden sind. Das führt zu folgender Erklärung:

► **Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen zueinander reziprok, wenn ihr Produkt gleich 1 ist, also $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1$ gilt.**

[1] reciprocus (lat.), auf demselben Weg zurückkehrend.

Im Gegensatz zum Multiplizieren kann beim Dividieren zweier Brüche nur innerhalb des Dividenden bzw. innerhalb des Divisors vor Ausführung der Division gekürzt werden. Erst nach Umwandlung der Divisionsaufgabe in eine Multiplikationsaufgabe kann wie bei der Multiplikation von Brüchen gekürzt werden. Das Vorzeichen des Quotienten wird nach den Vorzeichenregeln für die Division rationaler Zahlen ermittelt.
Da jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 aufgefaßt werden kann, enthält (44) auch die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch und die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl als Sonderfälle. Für den ersten Fall gilt nach (44)

$$(45)\quad z : \frac{z_1}{n_1} = \frac{z}{1} : \frac{z_1}{n_1} = \frac{z}{1} \cdot \frac{n_1}{z_1} = \frac{z \cdot n_1}{z_1} \quad \text{mit} \quad n_1, z_1 \neq 0,$$

d. h., die Zahl wird mit dem zum Divisor reziproken Bruch multipliziert. Für den zweiten Fall gilt nach (44)

$$(46)\quad \frac{z_1}{n_1} : z = \frac{z_1}{n_1} : \frac{z}{1} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z_1}{n_1 \cdot z} \quad \text{mit} \quad n_1, z \neq 0,$$

d. h., der Nenner des Bruches wird mit der ganzen Zahl multipliziert.

Beispiel 46:

$$\frac{33ab}{14c} : 11abc = \frac{33ab}{14c \;\; 11abc} = \frac{3}{14c^2}$$

Beispiel 47:

$$(64x^2 - 1) : \frac{8x+1}{8x-1} = \frac{(64x^2 - 1)\,(8x-1)}{8x+1} = 64x^2 - 16x + 1$$

Beispiel 48:

$$\left(-\frac{8ab - 4c}{36p - 27q}\right) : \frac{2ab - c}{180p - 135q} = -\frac{4\,(2ab - c) \cdot 5\,(36p - 27q)}{(36p - 27q) \cdot (2ab - c)} = -20$$

Doppelbrüche und ihre Umformung in einfache Brüche

Da für die Division neben dem Doppelpunkt als Operationssymbol auch der Bruchstrich benutzt wird, lassen sich die Gleichungen (44), (45) und (46) noch in einer äußerlich anderen Form schreiben. Man erhält

$$(47)\quad \frac{\dfrac{z_1}{n_1}}{\dfrac{z_2}{n_2}} \qquad (48)\quad \frac{z}{\dfrac{z_1}{n_1}} \qquad (49)\quad \frac{\dfrac{z_1}{n_1}}{z}$$

Solche Ausdrücke heißen Doppelbrüche.
Der Bruchstrich, der an die Stelle des Doppelpunktes getreten ist, ist dabei deutlich länger als die anderen Bruchstriche zu zeichnen.

Das ist besonders bei Doppelbrüchen vom Typ (48) und (49) notwendig; denn

$$(50)\qquad \frac{a}{\dfrac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

ist im allgemeinen verschieden von

$$(51)\qquad \frac{\dfrac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Aus (50) und (51) ist gleichzeitig ersichtlich, wie Doppelbrüche in einfache Brüche umgeformt werden. Um Fehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, den längeren Bruchstrich, auch Hauptbruchstrich genannt, durch einen Doppelpunkt zu ersetzen. Danach wird nach der bekannten Rechenregel für die Division von Brüchen verfahren.

Beispiel 49:

$$\frac{-\dfrac{b^2}{a^2}x_1}{y_1} = \left(\frac{-b^2 \cdot x_1}{a^2}\right) : y_1 = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Beispiel 50:

$$\frac{\dfrac{5{,}2a^2b}{49x^2-1}}{\dfrac{6{,}5ab^2}{21x+3}} = \frac{5{,}2a^2b}{49x^2-1} : \frac{6{,}5ab^2}{21x+3} = \frac{5{,}2a^2b}{49x^2-1} \cdot \frac{3(7x+1)}{6{,}5ab^2} = \frac{12a}{35bx-5b}$$

Beispiel 51:

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}} = \frac{a^2-b^2}{ab} : \frac{a+b}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = a - b$$

Aufgaben

39. Bestimmen Sie zu den folgenden Brüchen jeweils den reziproken Bruch!

a) $\frac{7}{4}$ b) $1\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 22

f) 7 g) $\frac{a}{3}$ h) $\frac{4}{b}$ i) $\frac{x}{y}$ k) $\frac{2c}{b}$

l) $\frac{-3}{2z}$ m) $-\frac{5a}{6b}$ n) $\frac{-2m}{-13n}$ o) $\frac{1}{15m}$ p) $13a$

40. Stellen Sie fest, welche der nachfolgenden Paare von Brüchen zueinander reziprok sind! Begründen Sie den gewählten Lösungsweg!

a) $\frac{15}{69}; 2\frac{3}{5}$ b) $\frac{-6}{14}; \frac{15}{-35}$ c) $\frac{-5}{-7}; 1\frac{14}{35}$

d) $\frac{-1}{25}; \frac{625}{25}$ e) $\left(\frac{7}{9}\right)^2; \frac{324}{196}$ f) $\frac{3a}{4}; \frac{72a}{54a^2}$

41. Wie lautet die Rechenregel für die Division

a) eines Bruches durch eine ganze Zahl, **b)** einer ganzen Zahl durch einen Bruch,

c) eines Bruches durch einen Bruch?

42. Ermitteln Sie die folgenden Quotienten!

a) $\frac{3}{7}:6$ **b)** $66:\frac{11}{7}$ **c)** $\frac{17}{21}:\frac{85}{84}$ **d)** $\frac{15}{27}:1\frac{4}{5}$

e) $\frac{a}{3}:5$ **f)** $\frac{x}{9}:x$ **g)** $\frac{1}{a}:a$ **h)** $\frac{a^2}{b}:ab$

i) $xy:\frac{1}{3}$ **k)** $3w:\frac{6v}{w}$ **l)** $3vw:\frac{w}{6v}$ **m)** $r^2:\frac{r}{s}$

n) $\frac{a}{5}:\frac{a^2x}{20}$ **o)** $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ **p)** $\frac{1}{10a}:\frac{1}{5a^2}$ **q)** $\frac{85x^2y}{40ax}:\frac{68xy}{50a^2y}$

43. a) Schreiben Sie die Quotienten aus den Aufgaben **42a** bis **q** als Doppelbrüche!

b) Wie vereinfacht man die in **43a** entstehenden Doppelbrüche?

c) Warum bedarf der Bruchstrich, der in Aufgabe **42a** an die Stelle des Doppelpunktes tritt, einer besonderen Kennzeichnung?

Ermitteln Sie die Quotienten in den folgenden Aufgaben!

44. a) $\frac{ax}{b^2y^2}:\frac{a^2x^2}{by}$ **b)** $\frac{1}{3a}:\frac{1}{5a}$ **c)** $\frac{7}{5x}:\frac{35x}{b}$ **d)** $\frac{1{,}2p^2}{4{,}6q^2}:\frac{6p^2}{11{,}5q}$

e) $\frac{17rs}{18st}:\frac{187rt}{198t^2}$ **f)** $\frac{27x^3}{16y^2}:\frac{81x^2y}{8y^3}$ **g)** $\frac{8}{9abc}:\frac{9abc}{8}$ **h)** $\frac{-25pq}{45px}:\frac{80q^2}{12x}$

i) $\frac{-0{,}39}{0{,}25r}:\frac{2{,}6rs}{-7{,}5x^2}$ **k)** $\frac{-36m^2p}{1{,}3d}:\frac{-0{,}18m}{-52df}$

45. a) $\frac{6x}{21y}:7x$ **b)** $\frac{21y}{6x}:7y$ **c)** $\frac{-17a}{68b}:2$ **d)** $\left(-\frac{75}{2}\right):2$

e) $\frac{75}{2}:(-2)$ **f)** $\frac{15a^2b}{81ab^2}:25ab$ **g)** $\frac{-x^2}{x}:(-x)$ **h)** $\frac{26abc}{3{,}9axy}:(-10bc)$

46. a) $15x:\frac{4{,}5x}{2y}$ **b)** $(-27rs):\frac{8{,}1s}{1{,}8r}$ **c)** $5:\frac{1}{5}$ **d)** $(-3):\frac{6}{17}$

e) $(-65ab):\frac{1{,}3a^2}{-50b}$ **f)** $(-6{,}2xy):\frac{-31x^2y}{-100x}$ **g)** $(-145m):\frac{29mn}{5n}$

47. a) $4\frac{1}{3}:3\frac{1}{4}$ **b)** $\left(-5\frac{1}{7}\right):1\frac{3}{21}z$ **c)** $\left(-3\frac{3}{8}a\right):\left(-5\frac{1}{3}b\right)$

d) $5\frac{1}{5}:1{,}3a$ **e)** $11\frac{1}{5}a:(-7a)$ **f)** $\left(-6\frac{3}{11}xy\right):(-143x^2y^2)$

g) $143x^2y^2:6\frac{3}{11}xy$ **h)** $(-25rs):4\frac{1}{6}r$ **i)** $(-357mn):\left(-11\frac{9}{10}m^2\right)$

k) $4\frac{10}{11}:\frac{18}{44}$ **l)** $\left(-7\frac{2}{9}a\right):\frac{13a}{5b}$ **m)** $\left(-4\frac{2}{7}x^2y\right):\frac{14xy}{-3y}$

n) $\frac{64ab}{27bc}:\left(5\frac{1}{3}a\right)$ **o)** $\frac{-71xy}{-14{,}2x}:\left(-2\frac{1}{2}y\right)$ **p)** $\frac{19ab}{51b}:\left(-3\frac{6}{17}a\right)$

48. a) $\dfrac{\dfrac{21a^2b}{20xy^2}}{\dfrac{35ab^2}{75x^2y}}$ b) $\dfrac{\dfrac{4xy^2}{a-b}}{\dfrac{16x^2y}{a^2+b^2}}$ c) $\dfrac{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{4p-3q}{8p+9q}}{\dfrac{-12pq+9q^2}{16p^2+18pq}}$ e) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a^2-b^2}}{a^2-2ab+b^2}$ f) $\dfrac{\dfrac{am+an}{-am+an}}{m^2-n^2}$

1.5. Zur Übung und Wiederholung

1. In einem rechtwinkligen Dreieck hat eine Kathete die Länge l, die andere ist 2,4mal so lang. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks?

2. In Abbildung 1.7. ist ein Kreissektor dargestellt.

a) Welche Beziehung besteht zwischen der Bogenlänge b, dem Umfang des Vollkreises und dem Mittelpunktswinkel α des Kreissektors?

b) Welche Beziehung besteht zwischen dem Flächeninhalt des Kreissektors A_s, dem Flächeninhalt der Vollkreisfläche A_k und dem Mittelpunktswinkel α des Kreissektors?

c) Leiten Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus **a** und **b** die Flächeninhaltsformel für den Kreissektor $A_s = \dfrac{b \cdot r}{2}$ her!

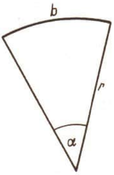


Abb. 1.7.

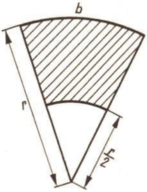


Abb. 1.8.

3. Wie groß ist der in Abbildung 1.8. schraffierte Teil des Kreissektors?

4. a) Ein Kreisring mit dem Außendurchmesser D und dem Innendurchmesser d hat die Flächenformel

$$A_{\text{Kreisring}} = \frac{\pi}{4}(D+d)(D-d).$$

Leiten Sie die Formel her!

b) Welches Ergebnis erhalten Sie in Aufgabe **a** für $D = 12$ cm und $d = 10$ cm?

5. Ein Quader hat die Höhe h, seine Breite ist doppelt, seine Länge dreimal so groß wie seine Höhe. Berechnen Sie

a) die Summe aller Quaderkanten;

b) den Oberflächeninhalt des Quaders;

c) das Volumen des Quaders!

6. Wie groß ist der Oberflächeninhalt eines Zylinders, wenn

a) seine Höhe h gleich dem Radius des Zylinders,

b) der Achsenschnitt des Zylinders ein Quadrat mit der Seitenlänge h ist?

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse miteinander!

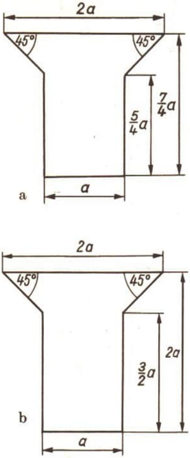


Abb. 1.9.

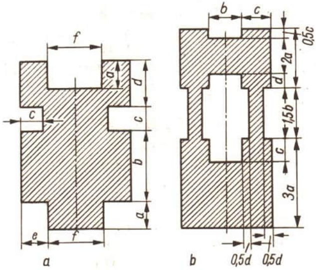


Abb. 1.10.

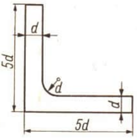


Abb. 1.11.

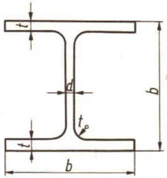


Abb. 1.12.

7. Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Durchmesser d einbeschrieben ist?

8. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der in Abbildung 1.9. und Abbildung 1.10. dargestellten Flächen!

9. In Abbildung 1.11. ist der Querschnitt eines L-Stahls (Winkelstahl), in Abbildung 1.12. der eines I-Stahls (Doppel-T-Stahl) dargestellt. Bestimmen Sie für beide Profile die Querschnittsfläche!

10. Die Abbildung 1.13. zeigt einen Halbrundniet.

a) Nach welcher Formel berechnet sich sein Gewicht, wenn der Kopf des Halbrundniets nach der Näherungsformel

$$V = \pi k^2 \left(\frac{D}{2} - \frac{k}{3}\right)$$

berechnet wird und $k = \dfrac{D}{3}$ sowie $l = 6d$ ist?

b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn $D = 2d$ ist?

11. Die Längenänderung Δl eines um Δt erwärmten Drahtes ist

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t,$$

wobei α der lineare Ausdehnungskoeffizient des Drahtmaterials und l_0 die ursprüngliche Länge des Drahtes bei Ausgangstemperatur ist. Wie groß ist seine Gesamtlänge l nach der Temperaturzunahme? Schreiben Sie das Ergebnis

a) als algebraische Summe; **b)** als Produkt!

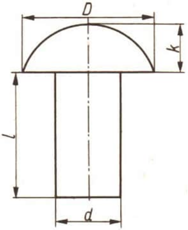


Abb. 1.13.

12. a) Wie ändert sich das Volumen eines Würfels von der Kantenlänge a bei Erwärmung um Δt?

b) Erklären Sie, warum man in Aufgabe **12a** mit der Formel

$$V = a^3(1 + 3\alpha \cdot \Delta t)$$

rechnen kann!

13. Für einen Verzweigungspunkt elektrischer Leiter gilt die Regel, daß die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der wegfließenden Ströme ist. Welche Beziehung können Sie aus den Abbildungen 1.14.a, b und c ablesen?

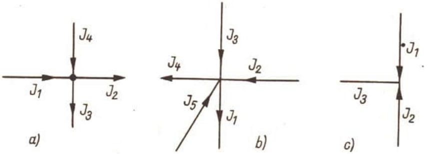


Abb. 1.14.

14. Von drei parallelgeschalteten Widerständen, an denen die Spannung U anliegt, ist jeder doppelt so groß wie der vorhergehende. Es sei R

a) der kleinste; b) der größte Widerstand.

Wie groß sind in beiden Fällen die Gesamtwiderstände und die Zweigstromstärken?

15. Von vier hintereinandergeschalteten Widerständen sind zwei gleich, der dritte doppelt und der vierte dreimal so groß wie jeder der beiden ersten. Wie groß ist der Gesamtwiderstand, wenn der dritte den Widerstand R hat? Wie groß ist die Stromstärke, die durch den ersten und durch den dritten Widerstand fließt, wenn die Spannung U angelegt ist?

16. Offensichtlich gilt $2 + \frac{2}{1} = 2 \cdot \frac{2}{1}$; $3 + \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2}$; $4 + \frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{4}{3}$; ...

a) Wie können Sie die Gesetzmäßigkeit mit Hilfe allgemeiner Zahlensymbole ausdrücken?

b) Wie können Sie zeigen, daß die in Aufgabe **16a** gefundene Gesetzmäßigkeit allgemeingültig ist?

c) Gilt auch $n - \frac{n}{n+1} = n \cdot \frac{n}{n+1}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Gelten die Gesetzmäßigkeiten aus Aufgabe **16a** und **c** auch für negative ganze Zahlen und für rationale Zahlen? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie Beispiele an!

17. Zeigen Sie, daß

a) die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine gerade Zahl,

b) die Differenz aus einer natürlichen Zahl und der nächstkleineren eine ungerade Zahl,

c) das Quadrat einer ungeraden Zahl eine ungerade und das Quadrat aus einer geraden Zahl eine gerade Zahl,

d) die Summe aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

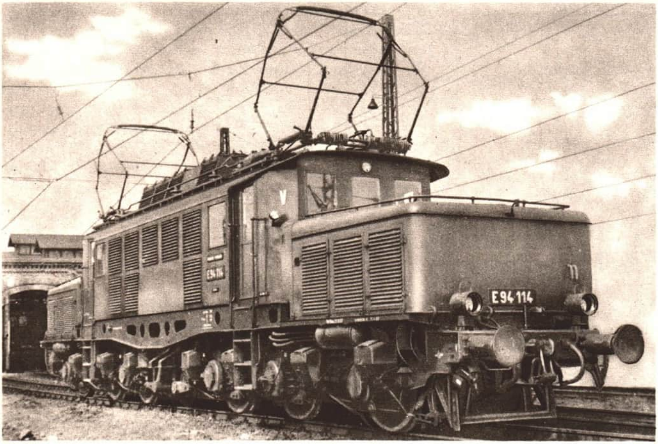
α) gerade ist, wenn die kleinste Zahl gerade;

β) ungerade ist, wenn die größte Zahl ungerade;

e) das Produkt zweier geraden Zahlen gerade;

f) das Produkt zweier ungeraden Zahlen ungerade,

g) das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl gerade ist!



2. Lineare Funktionen und Bestimmungsgleichungen

Die Leistung einer elektrischen Lokomotive errechnet man mit Hilfe der Gleichung

$$P = U \cdot I.$$

Die Spannung zwischen Fahrdraht und Schiene bleibt fast konstant. Deshalb nimmt die Leistung gleichmäßig mit der Stromstärke zu. Man sagt, die elektrische Leistung ist hier eine lineare Funktion der Stromstärke.

2.1. Wiederholung der linearen Funktion

Begriff der linearen Funktion

Am Beispiel des Ohmschen Gesetzes wollen wir neue Erkenntnisse über den Begriff der Funktion gewinnen.
In einem geschlossenen Gleichstromkreis soll der Zusammenhang zwischen der Stromstärke I und der veränderlichen Spannung U untersucht werden. Dazu benutzt man einen Versuchsaufbau, dessen Schaltskizze in Abbildung 2.1. dargestellt ist.

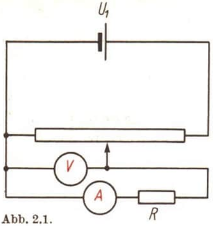


Abb. 2.1.

Mittels Potentiometerschaltung der Spannungsquelle U_1 kann man durch Verschieben des Abgriffes am veränderlichen Widerstand jede beliebige Spannung $U \leqq U_1$ für den angeschlossenen Gleichstromkreis mit dem festen Widerstand R erhalten. Für jede Stellung des Abgriffes liest man auf den Meßinstrumenten die jeweilige Spannung U und die zugeordnete Stromstärke I ab. Schreibt man die erhaltenen Meßergebnisse in einer Wertetabelle übersichtlich auf, so ergibt sich beispielsweise für $R = 10\ \Omega$.

U (in V)	0	5	10	15	20	30	40	60
I (in A)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	6

Offensichtlich gehört zu jeder Spannung eine genau bestimmte Stromstärke und umgekehrt zu jeder Stromstärke eine genau bestimmte Spannung. Die Maßzahlen von Spannung und Stromstärke bilden jeweils ein Wertepaar, geschrieben z. B. (15; 1,5) oder (40; 4). Außer den angegebenen Wertepaaren gibt es noch beliebig viele andere, da die Spannung zwischen 0 und U_1 noch beliebig unterteilt werden kann.

Alle möglichen Maßzahlen der Spannung (hier die Zahlen zwischen 0 und 60) und alle möglichen Maßzahlen der Stromstärke (hier die Zahlen zwischen 0 und 6) bilden, mathematisch gesehen, jeweils eine **Zahlenmenge.**

Es seien zwei Zahlenmengen gegeben, und es werde mittels einer Vorschrift jeder Zahl der einen Menge (Argument) genau eine Zahl der anderen Zahlenmenge (Funktionswert) zugeordnet. Die Gesamtheit der so entstehenden Zahlenpaare [Argument; zugehöriger Funktionswert] nennt man eine Funktion.

Im obigen Beispiel nennt man I eine Funktion von U, geschrieben

$$(1) \qquad I = f(U),$$

gelesen: „I gleich f von U“.

Diese Schreibweise für eine Funktion benutzt man immer dann, wenn man zeigen will, daß zwischen zwei Variablen[1], in dem vorliegenden Beispiel U und I, ein funktionaler Zusammenhang besteht.

In diesem Fall besagt die Gleichung (1), daß jeder möglichen Maßzahl der Spannung U genau eine Maßzahl der Stromstärke I zugeordnet ist.

Eine Betrachtung der Wertetabelle zeigt, daß eine Änderung der Spannung eine Änderung der Stromstärke hervorruft, d. h., Spannung und Stromstärke sind variabel. Beim oben beschriebenen Sachverhalt ist die (willkürliche) Änderung der Spannung U Ursache für die Änderung der Stromstärke I, d. h., die Stromstärke I ist von der Spannung abhängig. Es ist deshalb sinnvoll, zwischen I und U in dem Sinne zu unterscheiden, daß I als abhängige und U als unabhängige Variable bezeichnet werden. In der Wertetabelle wird die unabhängige Veränderliche (hier U)

[1] variare (lat.), verändern

immer zuerst geschrieben. Bei waagerechter Anordnung der Tabelle steht sie also oben, bei senkrechter Anordnung links.
Aus der Wertetabelle wird die spezielle Art der Zuordnung oder der Abhängigkeit der beiden Veränderlichen erkennbar.
Ein Vergleich der Maßzahlen der Spannung U mit den jeweils zugeordneten Maßzahlen der Stromstärke I ergibt, daß die Stromstärke bei jedem Wertepaar zahlenmäßig den 10. Teil der Spannung beträgt. Das kann als Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$I = \frac{U}{10} \text{ oder } I = \frac{1}{10} \cdot U \text{ oder } I = 0{,}1 \cdot U.$$

Es gilt also:

$$0 = \frac{1}{10} \cdot 0; \; 0{,}5 = \frac{1}{10} \cdot 5; \; 1 = \frac{1}{10} \cdot 10; \text{ usw.}$$

Bildet man das Verhältnis zweier beliebiger einander in der Tabelle zugeordneter Zahlenpaare, z. B. $0{,}5 : 5$ oder $1 : 10$, so erhält man stets den gleichen Verhältniswert, nämlich $\frac{1}{10}$. Dieser Sachverhalt ist uns seit der Behandlung der Lehre von den Proportionen bekannt. Dort wurde diese Zahl, die für alle Verhältnisse der zugeordneten Zahlenpaare charakteristisch ist, Proportionalitätsfaktor genannt.
Die Gleichung $I = \frac{U}{10}$ bzw. $I = \frac{1}{10} \cdot U$ bzw. $I = 0{,}1\, U$ heißt der analytische Ausdruck der Funktion, hier der Stromstärke-Spannungs-Funktion.
Der analytische Ausdruck einer Funktion gibt die Rechenvorschrift an, wie zu jeder Zahl der einen Zahlenmenge die zugeordnete Zahl der anderen Zahlenmenge zu ermitteln ist. Auf diese Weise kann man im allgemeinen beliebig viele Zahlenpaare erhalten.
Würde man bei der oben beschriebenen Versuchsanordnung einen anderen festen Widerstand als $R = 10\ \Omega$ verwenden, so würde sich der analytische Ausdruck der Stromstärke-Spannungs-Funktion entsprechend ändern.
Durch Variieren des festen Widerstandes kann man nachweisen, daß folgende Gleichungen gelten:

$$I = \frac{U}{R} \text{ oder } I = \frac{1}{R} \cdot U.$$

Für den analytischen Ausdruck dieser Funktion gibt es verschiedene Schreibweisen, die man durch Umformung erhält.

Sind die Gleichungen nach einer der beiden Veränderlichen aufgelöst, so heißt die Form **explizit,** sonst heißt sie **implizit.**

Die Art des Zusammenhangs oder der Zuordnung zweier Veränderlicher in einer Funktion läßt sich nicht nur durch den analytischen Ausdruck der betreffenden Funktion beschreiben, sondern beispielsweise oft auch durch eine grafische Darstellung sehr anschaulich wiedergeben.

Trägt man die Zahlenpaare aus der Wertetabelle in der bekannten Weise als Punkte in ein Koordinatensystem ein, auf dessen waagerechter Achse (Abszissenachse) die Spannungen und dessen senkrechter Achse (Ordinatenachse) die Stromstärken aufgetragen werden, so erhält man die Abbildung 2.2. Die Punkte liegen offensichtlich auf einer im Nullpunkt des Achsenkreuzes beginnenden Geraden. Diese gerade Linie ist die grafische Darstellung oder das Bild der Funktion mit dem analytischen Ausdruck $I = 0{,}1\,U$. Zwischen den in Abbildung 2.2. eingetragenen Punkten lassen sich beliebig viele Punkte als Bilder weiterer Zahlenpaare eintragen, die mit Hilfe von $I = 0{,}1\,U$ berechnet worden sind. Sie liegen alle auf derselben Geraden. Auch die Bilder der Funktionen mit den analytischen Ausdrücken $I = 0{,}05\,U$ und $I = 0{,}2\,U$ sind in dem benutzten Achsenkreuz Geraden, die im Nullpunkt beginnen (Abb. 2.3.).

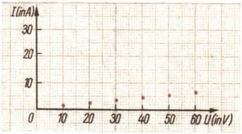


Abb. 2.2.

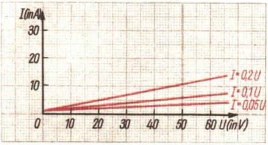


Abb. 2.3.

Offensichtlich ändert der Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{R}$ nur die Richtung der Geraden im Achsenkreuz. Die Funktion mit dem analytischen Ausdruck $I = \frac{1}{R} \cdot U$ oder kurz gesagt die Funktion $I = \frac{1}{R} \cdot U$ (R konstant) heißt eine lineare Funktion.

Die lineare Funktion $y = m\,x$ und ihre grafische Darstellung

Verallgemeinert man die Erkenntnisse aus dem vorangegangenen Beispiel und führt für den konstanten Proportionalitätsfaktor, den Koeffizienten, das allgemeine Zahlensymbol m, für die unabhängige Variable x und für die abhängige Variable y ein, so gelangt man zu folgendem analytischen Ausdruck:

(2) $\quad y = f(x) = m\,x.$

Durch (2) lassen sich alle Proportionalitäten (ohne Rücksicht auf den sachlichen Zusammenhang) erfassen. Deshalb wird (2) auch die Funktion der Proportionalität genannt.
Für x in $y = f(x) = m\,x$ sind alle rationalen und irrationalen Zahlen zugelassen.
Auch für die Koeffizienten m in $y = m\,x$ gibt es an und für sich keine Einschränkungen, m könnte also für eine beliebige rationale oder irrationale Zahl stehen, doch wollen wir zunächst $m = 0$ ausschließen. In einer bestimmten linearen Funktion vom Typ $y = m\,x$ jedoch, etwa in $y = 0{,}53x$ oder in $y = -2x$, hat m den im analytischen Ausdruck angegebenen festen Wert 0,53 bzw. -2, während x und folglich auch y jeden beliebigen rationalen oder irrationalen Wert annehmen können.

Die grafische Darstellung von $y = m\,x$ im rechtwinkligen kartesischen[1] Koordinatensystem ist, unabhängig vom Koeffizienten m, immer eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

Der Kürze halber bezeichnet man auch die Gerade, die das Bild der Funktion mit dem analytischen Ausdruck $y = m\,x$ ist, als Gerade $y = m\,x$.

[1] Benannt nach dem französischen Gelehrten René Descartes (Cartesius).

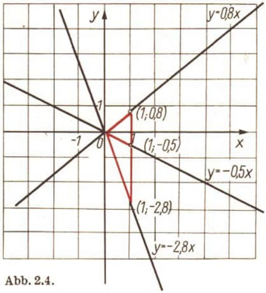


Abb. 2.4.

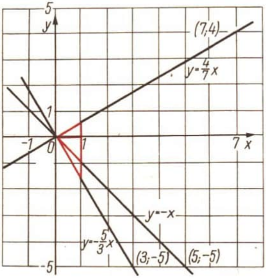


Abb. 2.5.

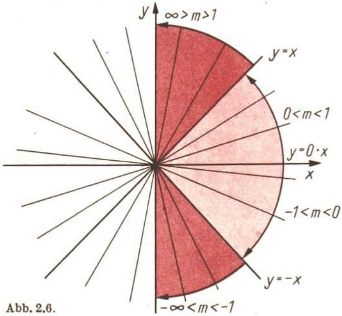


Abb. 2.6.

Weil eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist, brauchen nur zwei Zahlenpaare und die ihnen entsprechenden Punkte ermittelt zu werden, damit die Gerade gezeichnet werden kann.

Zweckmäßigerweise wählt man als einen der beiden Punkte den Koordinatenursprung, denn für alle m in $y = m\,x$ ist $y_0 = 0$.

Der andere Punkt wird am günstigsten folgendermaßen ermittelt:

Setzt man in den analytischen Ausdruck der Funktion

$$y = m\,x \qquad x_1 = 1\,,$$

so erhält man das Wertepaar $(1; m)$. Das Bild dieses Wertepaares ist demnach ein Punkt der gesuchten Geraden. Durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung ist die Gerade mit Hilfe eines Lineals zu ziehen. In Abbildung 2.4. ist dies für drei verschiedene lineare Funktionen vom Typ $y = m\,x$ durchgeführt.

Statt der Punkte $(0; 0)$ und $(1; m)$ können auch die Bilder irgendwelcher anderer Zahlenpaare verwendet werden. Man benutzt dann zweckmäßigerweise solche Werte von x, bei denen die Multiplikation mit m leicht ausführbar ist. Wählt man dabei $|x_2 - x_1| > 1$, so wächst die Entfernung zwischen den beiden die Gerade bestimmenden Punkten. Das erhöht die Zeichengenauigkeit. In Abbildung 2.5. ist dieses Verfahren für drei lineare Funktionen vom Typ $y = m\,x$ durchgeführt.

Der Einfluß des Anstieges oder Richtungsfaktors m auf die Lage der Geraden im Koordinatensystem ist uns bereits bekannt. Die Abbildungen 2.4. und 2.5. zeigen dies auch noch einmal für einige ausgewählte Werte von m.

In Abbildung 2.6. sind die vorstehenden Ergebnisse noch einmal übersichtlich dargestellt.

Der Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der Richtung der Geraden für zunehmende x-Werte heißt Steigungswinkel der Geraden. Dieser Winkel wird von der x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiver Drehsinn) als positiver Winkel, im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) als negativer Winkel (siehe Abb. 2.7.) bezeichnet.

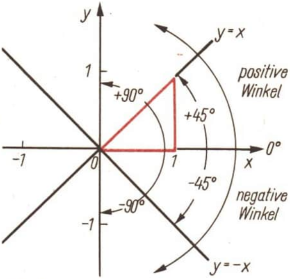


Abb. 2.7.

Für das Bild von $y = m\,x$ gilt:

$-\infty$[1] $< m < -1$:	Die Geraden bilden mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel, der kleiner als $-45°$ ist.
$m = -1$:	Die Gerade bildet mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von $-45°$.
$-1 < m < 0$:	Die Geraden bilden mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel, der kleiner als $0°$, aber größer als $-45°$ ist.
$m = 0$:	Die Gerade $y = 0$ fällt mit der x-Achse zusammen.
$0 < m < 1$:	Die Geraden bilden mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel, der zwischen $0°$ und $45°$ liegt.
$m = 1$:	Die Gerade bildet mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von $45°$.
$1 < m < \infty$:	Die Geraden bilden mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel, der größer als $45°$ ist.

Das von den drei Eckpunkten $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;m)$ gebildete rechtwinklige Dreieck führt die Bezeichnung Steigungsdreieck. In den Abbildungen 2.4., 2.5. und 2.7. sind die Steigungsdreiecke für einige Geraden eingezeichnet.

Beispiel 1:

Die lineare Funktion $-7y - 5x = 0$ (implizite Form) soll grafisch dargestellt werden. Das Steigungsdreieck ist einzuzeichnen, und der Steigungswinkel ist zu nennen.

Lösung:
$$-7y - 5x = 0$$
$$-7y = 5x$$
$$y = -\tfrac{5}{7}x$$

Die grafische Darstellung mit Hilfe der Punkte $(0;0)$ und $(1; -\frac{5}{7})$ sowie das Steigungsdreieck und der Steigungswinkel sind in der Abbildung 2.8. zu sehen.

Das Bild einer linearen Funktion $y = m\,x$, die Gerade $y = m\,x$, kann man an einer Geraden im Koordinatensystem spiegeln, also in eine neue Lage überführen. Man

[1] Wenn man ausdrücken will, daß etwas größer ist als jede noch so große Zahl, so symbolisiert man das durch das Zeichen ∞. Gelesen wird es „unendlich“.

spricht hier von einer **Transformation**[1] der Geraden. Andere Transformationen sind die „Bewegungen“ Schiebung oder Drehung.

Einige Gesetzmäßigkeiten der Spiegelung einer Geraden an einer Geraden im Koordinatensystem sollen untersucht werden. Wir beschränken uns dabei auf gewisse Sonderfälle.

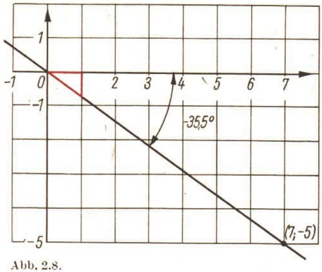


Abb. 2.8.

a) Spiegelung der Geraden $y = m\,x$ an der x-Achse

In Abbildung 2.9. wurde die Gerade $y = m\,x$ an der x-Achse gespiegelt. Um den analytischen Ausdruck der an der x-Achse gespiegelten Geraden $y = m\,x$ zu erhalten, betrachten wir die Spiegelung der Geradenpunkte $(0; 0)$ und $(1; m)$. Die zur x-Achse spiegelbildlichen Punkte haben die Koordinaten $(0; 0)$ und $(1; -m)$. Die gesuchte Gleichung der spiegelbildlichen Geraden lautet daher $y = -m\,x$.

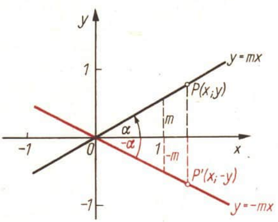


Abb. 2.9.

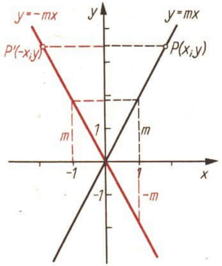


Abb. 2.10.

b) Spiegelung der Geraden $y = m\,x$ an der y-Achse

In Abbildung 2.10. wurde die Gerade $y = m\,x$ an der y-Achse gespiegelt. Man erkennt: Der Punkt $(0; 0)$ ist beiden Geraden gemeinsam. Der zu $(1; m)$ spiegelbildliche Punkt hat die Koordinaten $(-1; m)$.

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes ist dann auch $(1; -m)$ ein Punkt der zur Geraden $y = m\,x$ spiegelbildlichen Geraden. Diese hat also ebenso wie in a) die Gleichung $y = -m\,x$.

Strenggenommen ist die Spiegelung der Geraden $y = m\,x$ an der y-Achse verschieden von der Spiegelung an der x-Achse, weil die in einem Quadranten liegenden Punkte der Geraden $y = m\,x$ in verschiedene Quadranten gespiegelt werden.

[1] transformare (lat.), umgestalten, verwandeln

● *Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = 4x$, und spiegeln Sie die Gerade einmal an der x-Achse und dann an der y-Achse! Markieren Sie die Funktionswerte von $x = -1$; 1 und 2, und beschreiben Sie, in welche Quadranten die Punkte durch die jeweilige Spiegelung gelangen!*

c) Spiegelung der Geraden $y = m\,x$ an der Geraden $y = x$.
In Abbildung 2.11. wird die Gerade $y = mx$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Der Punkt $(0; 0)$ ist wieder gemeinsamer Punkt der beiden zueinander spiegelbildlichen Geraden. Welche Koordinaten hat aber der zu $P_1(1; m)$ spiegelbildliche Punkt P_1'?
Aus der Abbildung 2.11. liest man $P_1'(m; 1)$ ab, d. h., die x- und die y-Koordinaten sind im Vergleich zum gespiegelten Punkt $P_1(1; m)$ vertauscht worden. Diese Gesetzmäßigkeit gilt für jeden Punkt $P(x; y)$ und sein Spiegelbild $P'(\bar{x}; \bar{y})$.

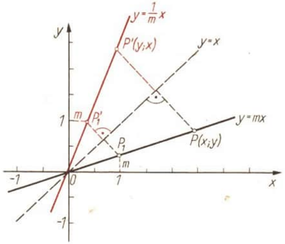


Abb. 2.11.

Die analytischen Ausdrücke der an der Geraden $y = x$ gespiegelten Geraden $y = m\,x$ erhält man folglich dadurch, daß man in $y = m\,x$ die Veränderlichen y und x vertauscht. Man erhält für diese Gerade zunächst die Gleichung $x = m\,y$. Dividiert man durch m und vertauscht die Seiten, erhält man die explizite Form:

(3) $$y = \frac{1}{m}x$$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden linearen Funktionen in ein xy-Koordinatensystem!

a) $y = 0{,}2x$ **b)** $\frac{1}{2}x = y$ **c)** $y - 0{,}8x = 0$
d) $y - x = 0$ **e)** $y = 1{,}2x$ **f)** $\frac{y}{2} - x = 0$
g) $5x = y$ **h)** $0 = 20x - y$ **i)** $y = -30x$
k) $y + 8x = 0$ **l)** $-2x = y$ **m)** $0 = y + x$
n) $y = -\frac{1}{2}x$ **o)** $y + \frac{1}{5}x = 0$ **p)** $-x = 10y$

2. Geben Sie für jede der Aufgaben **1a** bis **p**
a) den Anstieg (Richtungsfaktor);
b) die Koordinaten der Eckpunkte des Steigungsdreiecks;
c) die Größe des Steigungswinkels (Winkel schätzen und messen)
an!

3. a) Suchen Sie in der Physik und in der Technik nach weiteren Funktionen der (direkten) Proportionalität!
b) Geben Sie die analytischen Ausdrücke für diese Funktionen an!
c) Begründen Sie, weshalb die Bilder der Funktionen aus Aufgabe **3a** meist nur „Halbgeraden" sind!
d) Stellen Sie die Abhängigkeit eines Peripheriewinkels vom Zentriwinkel als Funktion dar!

4. In Abbildung 2.12. ist die Schaltskizze eines Gleichstromkreises mit veränderlichem Widerstand R gezeichnet.

a) Wie lautet der analytische Ausdruck für die damit feststellbare Funktion zwischen Stromstärke und Widerstand?

b) Ist dies eine lineare Funktion?
Begründen Sie Ihre Antwort an Hand einer Wertetabelle mit selbstgewählten Maßzahlen für Spannung und Widerstand und der daraus entwickelten grafischen Darstellung!

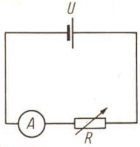


Abb. 2.12.

c) Nennen Sie andere Beispiele für die gleiche Art des Zusammenhanges zwischen zwei Veränderlichen und einer Konstanten! Erklären Sie die dafür gebräuchliche Bezeichnung „Produktgleichheit"!

5. a) Kann man bei der Funktion $y = m\,x$ mit $m = 0$ von zwei voneinander abhängigen Veränderlichen sprechen?

b) Warum darf man trotzdem von einer linearen Funktion sprechen?

6. Die in einem xy-Koordinatensystem dargestellten Geraden

a) $y = -2x$ **b)** $y - \frac{2}{3}x = 0$ **c)** $6y - x = 0$ **d)** $10y + 3x = 0$

sind jeweils an der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $y = x$ zu spiegeln.
Wie lauten die Gleichungen der 12 durch Spiegelung gewonnenen Geraden?
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch die Konstruktion der 12 durch Spiegelung gewonnenen Geraden im gleichen Koordinatensystem!

7. Wie heißt die durch Spiegelung gewonnene Gerade des Spiegelbildes der Geraden $y = m\,x$ an den Koordinatenachsen bzw. an der Geraden $y = x$? Begründen Sie Ihre Antwort!

8. Die Geradenschar $y = m\,x$, $1 < m < \infty$, wird

a) an der x-Achse, **b)** an der y-Achse, **c)** an der Geraden $y = x$

gespiegelt. Zwischen welchen Zahlen liegen die Richtungsfaktoren der gespiegelten Geraden?

9. Die Gerade $y = 3x$ ist nacheinander an der x-Achse, an der y-Achse und an der Geraden $y = x$ zu spiegeln. Welche Gleichung hat die entstehende Gerade? Vertauschen Sie die Reihenfolge der Spiegelungen!

Die lineare Funktion $y = m\,x + n$ und ihre grafische Darstellung

Man kann die Funktion $y = m\,x$ als Sonderfall einer anderen Funktion, nämlich der Funktion

(4) $\boldsymbol{y = f(x) = m\,x + n}$ (n beliebig)

betrachten. Der Sonderfall $y = m\,x$ tritt in $y = m\,x + n$ für $n = 0$ ein.
Vergleicht man entsprechende Wertepaare der Funktion $y = 3x + 2$ bzw. $y = mx + n$ mit $y = 3x$ bzw. $y = m\,x$, so erhält man

$y = 3x$

x	y
0	0
1	3
4	12
6	18

$y = 3x + 2$

x	y
0	$0 + 2 = 2$
1	$3 + 2 = 5$
4	$12 + 2 = 14$
6	$18 + 2 = 20$

$y = m\,x$

x	y
0	0
1	m
x_1	$m x_1$
x_2	$m x_2$

$y = m\,x + n$

x	y
0	$0 + n$
1	$m + n$
x_1	$m x_1 + n$
x_2	$m x_2 + n$

Wir erkennen:

Man erhält den y-Wert der Funktion $y = m\,x + n$ bzw. $y = mx - n = mx + (-n)$, indem man zu den y-Werten der Funktion $y = m\,x$ jeweils n bzw. $(-n)$ addiert. Im ersten Fall werden also alle y-Werte gegenüber den entsprechenden von $y = m\,x$ um n vergrößert, im zweiten Fall um n verkleinert.

Die grafische Darstellung der linearen Funktion $y = m\,x + n$ ist somit eine Gerade, die parallel zur Geraden $y = m\,x$ verläuft und die y-Achse in dem Punkt mit dem y-Wert n bzw. $-n$ schneidet.

In Abbildung 2.13. ist das Bild der Funktionen $y = \frac{3}{5}x + 3$ und $y = \frac{3}{5}x - 2$ aus der Geraden $y = \frac{3}{5}x$ durch Schiebung parallel zur y-Achse um $+3$ (nach „oben") bzw. um -2 (nach „unten") gewonnen worden.

Für das schnelle Zeichnen der Bilder von Funktionen der Art $y = m\,x + n$ ist im allgemeinen das Zweipunktverfahren rationeller. Als erster Punkt wird der durch n in $y = m\,x + n$ gegebene Schnittpunkt mit der y-Achse benutzt (Abb. 2.14.). Als

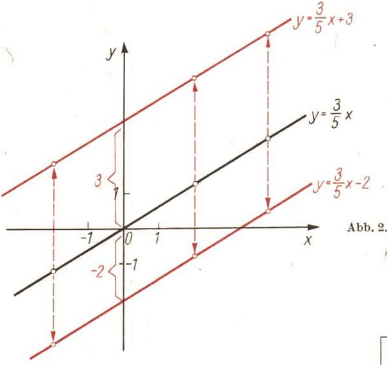


Abb. 2.13.

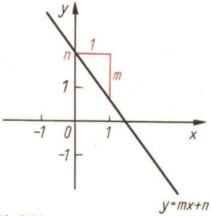
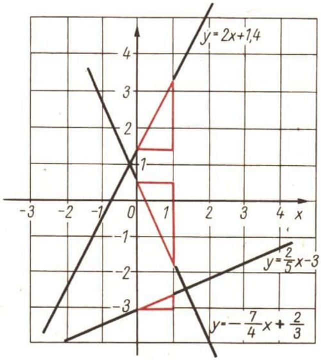


Abb. 2.14.

Abb. 2.15.



zweiten verwendet man meist den Punkt mit den Koordinaten $(1; m + n)$ bzw. $(1; m - n)$. Vom zunächst festgelegten Schnittpunkt mit der y-Achse, der die Koordinaten $(0; n)$ hat, geht man um eine Koordinateneinheit nach „rechts" zum Punkt $(1; n)$ und von diesem Punkt um m Einheiten nach „oben" bzw. „unten", je nachdem, ob m positiv oder negativ ist. So erhält man den Punkt $(1; n + m)$. Durch diesen Punkt und den Punkt $(0; n)$ ist die gesuchte Gerade zu zeichnen.

In Abbildung 2.15. wurde das für drei lineare Funktionen durchgeführt.

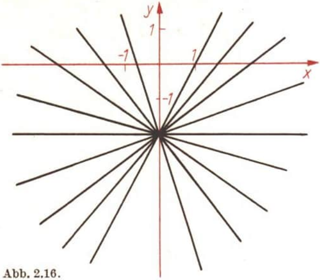


Abb. 2.16.

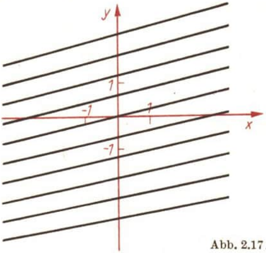


Abb. 2.17.

Die Abbildungen 2.16. und 2.17. sollen noch einmal den Einfluß von m und n auf die Lage der Geraden $y = m\,x + n$ im Koordinatensystem deutlich machen. Für gleiche n-Werte, aber unterschiedliche m-Werte ergibt sich ein Geradenbüschel mit $(0; n)$ als gemeinsamen Punkt. Für gleiche m-Werte, aber unterschiedliche n-Werte erhält man eine Schar zueinander paralleler Geraden.

Beispiel 2:

Die Gleichung $l_1 = l_0(1 + \alpha\,\Delta t)$ dient zur Berechnung der Längenausdehnung, die durch Temperaturänderungen verursacht wird.
Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$l_1 = f(\Delta t) = l_0 \cdot \alpha\,\Delta t + l_0,$$

eine lineare Funktion, denn α und l_0 sind Konstanten.
In Abbildung 2.18. wurde diese Funktion für drei verschiedene Materialien dargestellt. Als Länge l_0 wählen wir 1000 mm, die Bezugstemperatur t zu 0 °C. Die Ausdehnungskoeffizienten betragen für

Zink	$0{,}000\,036\,\frac{1}{\text{grd}}$,
Aluminium	$0{,}000\,023\,\frac{1}{\text{grd}}$,
Grauguß	$0{,}000\,009\,\frac{1}{\text{grd}}$.

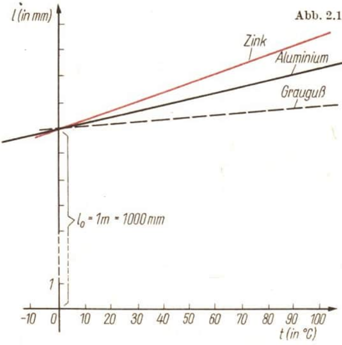


Abb. 2.18

Bei der Darstellung der Funktion wurden die unwichtigen Teile der Ordinatenachse nicht gezeichnet. Derartige Unterbrechungen der Achsen verwendet man immer dann, wenn es gilt, vom Koordinatenursprung weit entfernte Kurventeile zu zeichnen.

Aber auch ohne das Bild der Funktion zu zeichnen, können bestimmte Fragen, die in engem Zusammenhang mit dem Bild stehen, beantwortet werden. So beispielsweise die Frage, ob ein gegebener Punkt $P(a; b)$ auf der Geraden $y = m\,x + n$ liegt oder nicht. Liegt ein Punkt P auf einer Geraden $y = m\,x + n$, so müssen die Koordinaten des Punktes $(a; b)$ den analytischen Ausdruck $y = m\,x + n$ erfüllen. Es muß also

(5) $\quad b = m \cdot a + n$

gelten.
Wird der analytische Ausdruck $y = m\,x + n$ durch die Koordinaten des Punktes nicht erfüllt, gilt also:

(6) $\quad b \neq m \cdot a + n,$

so liegt der Punkt $P(a; b)$ nicht auf der Geraden $y = m\,x + n$.

Beispiel 3:

Sind $P_1(-6; 12)$ und $P_2(9; -17)$ Punkte der Geraden $y = -\frac{5}{3}x - 2$?

Lösung:

a) für P_1 gilt $y_1 = -\frac{5}{3} \cdot (-6) - 2$

$y_1 = 8 \neq 12$, folglich liegt P_1 nicht auf der Geraden;

b) für P_2 gilt $y_2 = -\frac{5}{3} \cdot 9 - 2$

$y_2 = -17 = -17$, folglich liegt P_2 auf der Geraden.

Auch die Frage, für welchen Wert x_s die Gerade $y = m\,x + n$ die x-Achse schneidet, ist ohne grafische Darstellung zu beantworten.
Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat den Ordinatenwert 0. Folglich muß für den gesuchten Abszissenwert x_s die Bedingung

(7) $\quad 0 = m\,x_s + n$

erfüllt sein. Man nennt diesen Schnittpunkt mit der x-Achse, für den $y = 0$ gesetzt wird, eine **Nullstelle**. Daraus folgt:

(8) $\quad x_s = -\dfrac{n}{m}$

Beispiel 4:

Wo schneidet die Gerade $y = \frac{5}{3}\,x - 2$ die x-Achse?

Lösung:

$$0 = \tfrac{5}{3}x_s - 2$$
$$-\tfrac{5}{3}\,x_s = -2$$
$$x_s = \tfrac{6}{5}$$
$$x_s = 1{,}2$$

Aufgaben

10. a) Bezeichnen Sie die Größe der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit x bzw. y (Abb. 2.19.)! Geben Sie eine mathematische Gleichung an, mit der y bei veränderlichem x berechnet werden kann!

b) Wie nennt man in der Mathematik einen solchen Zusammenhang wie in Aufgabe **10a** zwischen zwei Veränderlichen?

c) Wie wird die in Aufgabe **10a** erhaltene mathematische Gleichung bezeichnet?

d) Worin unterscheidet sich diese Gleichung von den Gleichungen $30° + 60° = 90°$ und $15° + x = 90°$?

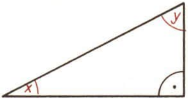


Abb. 2.19.

e) Stellen Sie eine Wertetabelle auf, in der Sie für $x = 10°$, $20°, \ldots, 90°$ die zugeordneten y-Werte nebeneinander eintragen!

f) Wie können Sie die Gleichung aus Aufgabe **10a** zur Ermittlung der y-Werte benutzen?

g) Tragen Sie die Wertepaare der in Aufgabe **10e** erhaltenen Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Punkte ein!

h) Verbinden Sie die in Aufgabe **10g** erhaltenen Punkte miteinander!

i) Begründen Sie, weshalb die Verbindung der Punkte sinnvoll ist!

k) Lesen Sie aus der grafischen Darstellung, die nach Aufgabe **10h** entstanden ist, weitere Wertepaare ab!

l) Wie können Sie die Richtigkeit Ihrer Ablesung kontrollieren?

11. a) Gegeben sind in einem Koordinatensystem die Punkte

$P_1(-5;\ 2)$, $P_2(-2;\ 0)$, $P_3(0;\ -4)$, $P_4(0;\ 3)$, $P_5(3;\ 0)$, $P_6(5;\ -3)$.

Welche Koordinaten haben die Punkte P_1' bis P_6' bzw. P_1'' bis P_6'', die aus P_1 bis P_6 durch Vergrößerung des jeweiligen y-Wertes um 3 bzw. durch Verkleinerung des jeweiligen y-Wertes um 2 hervorgehen?

b) Durch welche Bewegungen gelangt man vom Punkt P_1 zu den Punkten P_1' bzw. P_1''?

12. Stellen Sie die folgenden linearen Funktionen in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem dar!
Messen Sie für jede Gerade den Steigungswinkel!

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$ **c)** $y = -0{,}8x - 3\frac{1}{4}$ **d)** $y = -1{,}5x + 3{,}3$
e) $-y = 5x - 2$ **f)** $-y = \frac{1}{5}x + 3{,}2$ **g)** $-y = 0{,}2x - \frac{1}{4}$ **h)** $-5y = 8x + 12$
i) $\frac{3}{4}y = x - 1$ **k)** $-0{,}3y = 6x + 1{,}2$ **l)** $x - 0{,}5y = 0$ **m)** $11x + 12y = 13$

13. Wie lauten die analytischen Ausdrücke der Funktionen, deren Bilder Geraden mit dem Anstieg

a) $+3$, **b)** -5, **c)** $-1{,}7$, **d)** $+\frac{3}{5}$, **e)** $-2\frac{3}{4}$

sind und die die y-Achse in den Punkten mit den y-Koordinaten

2, -5, $-3{,}2$, $-3\frac{2}{5}$, $0{,}5$

schneiden? Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden mit der x-Achse!

14. Die Geraden

a) $y = -\frac{3}{2}x + 2$; **b)** $-7y = 3x + 14$; **c)** $11x + 10y = 0$

werden um $3;\ -2;\ -11;\ -7;\ \frac{1}{4};\ 0{,}8;\ -2{,}5$ parallel zur y-Achse verschoben. Welche analytischen Ausdrücke haben die verschobenen Geraden? Wo schneiden sie die beiden Koordinatenachsen?

15. Stellen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit der Abszissenachse u und der Ordinatenachse v die folgenden Funktionen dar!

a) $v = u - 2$ **b)** $3v - 4u = 0$ **c)** $8v + 3u - 4 = 0$

16. Stellen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit der Abszissenachse y und der Ordinatenachse z die folgenden Funktionen dar!

a) $z = -\frac{3}{4}y$ **b)** $7y - 11z + 27{,}5 = 0$ **c)** $\frac{3}{4}y - 0{,}8z - \frac{12}{10} = 0$

17. Gegeben sind die Geraden mit den analytischen Ausdrücken

a) $y = 3x - 11$ **b)** $-x - \frac{3}{5}y = 1{,}5$ **c)** $x : y = 4 : 7$

und die Punkte

$P_1(-8; -14)$ $P_2\left(2; \frac{7}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{44}{5}; 15{,}4\right)$,

$P_4(-1{,}5; 0)$, $P_5(0{,}7; -9)$, $P_6(-2; -3\frac{1}{2})$.

Welche der sechs Punkte liegen auf einer der gegebenen Geraden?

2.2. Lineare Bestimmungsgleichungen

Wiederholung linearer Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten

Lineare Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten und ihre Lösung sind uns bereits bekannt.
Zwei wichtige Grundgesetze sind bei der Lösung zu beachten.

a) Die Gleichungsseiten können vertauscht werden.
b) Eine Rechenoperation auf der einen Seite der Gleichung macht die Durchführung derselben Rechenoperation auf der anderen Seite der Gleichung notwendig.

Diese beiden Grundgesetze werden bei der Lösung der Gleichung so angewendet, daß — vor allem durch geeignete Rechenoperationen — die Unbekannte isoliert wird. Um das Bekannte zu wiederholen, sollen noch einige spezielle Fälle betrachtet werden.

a) In der Ausgangsgleichung sind Brüche vorhanden.

Beispiel 5:

$$\frac{5x}{a-b} - \frac{2a^2 + 18ab}{a^2 - b^2} = \frac{4x}{a+b} \quad (a \neq b;\ a \neq -b).$$

Die Brüche hindern beim Zusammenfassen. Durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner [im Beispiel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$] lassen sie sich beseitigen:

$$(a+b)(a-b)\left[\frac{5x}{a-b} - \frac{2a^2 + 18ab}{a^2 - b^2}\right] = \frac{4x}{a+b} \cdot (a+b)(a-b)$$

$$5x(a+b) - (2a^2 + 18ab) = 4x(a-b)$$

Ordnen. $5x(a+b) - 4x(a-b) = 2a^2 + 18ab$

Ausmultiplizieren: $5ax + 5bx - 4ax + 4bx = 2a^2 + 18ab$

Zusammenfassen und Ausklammern: $x(a+9b) = 2a(a+9b)$

Isolieren: $x = 2a$

Probe:

Linke Seite: $\frac{10a}{a-b} - \frac{2a^2+18ab}{a^2-b^2} = \frac{10a(a+b)-(2a^2+18ab)}{a^2-b^2} = \frac{8a^2-8ab}{a^2-b^2}$

Rechte Seite: $\frac{8a}{a+b} = \frac{8a(a-b)}{(a+b)\cdot(a-b)} = \frac{8a^2-8ab}{a^2-b^2}$

Vergleich: $\frac{8a^2-8ab}{a^2-b^2} = \frac{8a^2-8ab}{a^2-b^2}$

b) Die Unbekannte x kommt auch im Nenner der Brüche der Ausgangsgleichung vor.

Beispiel 6:

Die Formel für die Parallelschaltung zweier Widerstände $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ist nach R_2 aufzulösen.

Multiplikation mit dem Hauptnenner $R \cdot R_1 \cdot R_2$ ergibt:

$$R_1 R_2 = R R_2 + R R_1$$

Ordnen: $R_1 R_2 - R R_2 = R R_1$

Ausklammern: $R_2(R_1 - R) = R R_1$

Isolieren: $R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$

Probe:

Rechte Seite: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{R R_1}{R_1 - R}} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_1 - R}{R R_1} = \frac{R + R_1 - R}{R R_1} = \frac{1}{R}$

Dieses Resultat stimmt mit der linken Seite überein.

Aufgaben

1. Die Summe aus dem Fünffachen einer Zahl und 13 ist 88.

a) Wie heißt die Zahl?
b) Erläutern Sie, wie Sie die Zahl gefunden haben!
c) Läßt sich der obige Satz auch als Gleichung schreiben, wenn Sie die Zahl noch nicht ermittelt haben?
d) Wie lautet diese Gleichung, und wie wird eine solche Art von Gleichungen bezeichnet?
e) Lösen Sie diese Gleichung, und begründen Sie jeden einzelnen Lösungsschritt!
f) Wie können Sie das gefundene Ergebnis auf seine Richtigkeit kontrollieren?

2. Welche beiden Grundgesetze müssen beim Lösen von Bestimmungsgleichungen beachtet werden?

3. Lösen Sie folgende Bestimmungsgleichungen!
Machen Sie in jedem Fall die Probe! (x ist die Unbekannte.)

a) $a + x = b$ **b)** $m - x = n$ **c)** $px - q = 0$ **d)** $\frac{x}{r} + s = 0$

e) $mx + n = b$ **f)** $\frac{x}{a} - b = c$ **g)** $\frac{p}{q}x - \frac{a}{b} = z$ **h)** $i - \frac{r}{s}x = 0$

i) $ax - c = bx$ **k)** $mx - m = nx - m$ **l)** $rx + a - \frac{x}{s} + b = 0$

m) $x : p = q : r$ **n)** $\frac{a - x}{b + x} = \frac{c - d}{e - f}$ **o)** $\frac{x - 3}{5 + x} = \frac{2 - x}{-10 - x}$

4. In den folgenden Bestimmungsgleichungen soll das jeweils dahinterstehende Zahlensymbol die Unbekannte sein. Lösen Sie die Gleichungen, und machen Sie in jedem Fall die Probe!

a) $A = g \cdot \left(b + \frac{h}{2}\right)$; h **b)** $A = \frac{ah}{2} + \frac{ch}{2}$; h **c)** $A = \frac{h}{2}(a + c)$; a

d) $P_2 = \frac{d}{D} \cdot P_1$; P_1 **e)** $P_2 = P_1 \frac{D - d}{2D}$; D **f)** $P_2 = P_1 \frac{D - d}{2D}$; d

g) $P = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$; k **h)** $l_t = l_0(1 + \alpha \Delta t)$; α **i)** $Q = cm(t_2 - t_1)$; t_1

k) $v = \frac{s}{t} + c$; s **l)** $l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta t)$; Δt **m)** $Q = cm(t_2 - t_1)$; c

5. Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen, in denen x die Unbekannte bedeutet!

a) $\frac{x + 3}{x - 3} = 3$ **b)** $\frac{x + a}{x - a} = a$ **c)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{2x + 2}$

d) $\frac{3x}{2b(x - b)} - 2 = 1$ **e)** $\frac{n - x}{n} = \frac{m - x}{m}$ **f)** $\frac{a - b}{x + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{x^2 - b^2} = \frac{-2b}{x + b}$

g) $\frac{r}{x + 2} + \frac{s}{5} = \frac{2s}{2x + 4} + \frac{r}{5}$ **h)** $\frac{8}{x + 2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{15} - \frac{5}{12}$

i) $\frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x + 6}{x + 4}$ **k)** $\frac{7}{x - 1} - \frac{9}{2x - 2} = \frac{10x}{2x - 3}$

l) $\frac{6}{2x - 3} - \frac{5}{2x + 3} = \frac{61}{4x^2 - 9}$ **m)** $\frac{x - 9}{x - 12} + \frac{x - 4}{x - 7} = 2$

n) $2 - \frac{x + b}{x + 2b} = \frac{x + 3b}{x + 4b}$ **o)** $\frac{17 + 7x}{x + 6} + \frac{7{,}5 + 5x}{x + 5} = 12$

p) $\frac{c}{4x + b} - \frac{2a}{4x - b} = \frac{-c(4a + 3b)}{16x^2 - b^2}$ **q)** $\frac{x}{x - b} - \frac{x}{x + b} = \frac{4a^2 + 2b^2}{x^2 - b^2}$

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nacheinander nach jeder der vorkommenden Größen auf!

a) $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ **b)** $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ **c)** $P_2 = P_1 \frac{D - d}{2D}$

d) $P_2 = \frac{r}{w} P_1$ **e)** $c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}$

Welche physikalische Bedeutung haben diese Gleichungen? Suchen Sie sie in der Formelsammlung der Logarithmentafel auf!

7. Welche Lösungen haben die Gleichungen, wenn x die Unbekannte ist?

a) $x + a = -x + a$ **b)** $a + x = a - x$

c) $x - a = a - x$ **d)** $x + a = a + x$

e) $5(x - 11) - 11(x - 5) + 6x = 0$ **f)** $\dfrac{3}{x - 2} + 2 = \dfrac{4x - 2}{2x - 4}$

8. Vermindert man das Dreifache einer Zahl um 5 und dividiert durch die um 3 verminderte Zahl, so erhält man 4. Wie heißt die Zahl?

9. Die Summe aus dem Fünffachen einer Zahl und 3 ist dreimal so groß wie die Differenz aus dem Doppelten dieser Zahl und 1.

10. Die Differenz aus dem Neunfachen einer Zahl und 8 dividiert durch die Summe aus dem Sechsfachen dieser Zahl und 8 ist 1.

11. Vermindert man Zähler und Nenner eines Bruches, der gekürzt $\frac{1}{6}$ ergibt, um 1, so ändert sich der gekürzte Bruch auf $\frac{1}{7}$. Wie lautete der ursprüngliche Bruch?

12. Welche Zahl ist vom Zähler und Nenner des Bruches $\dfrac{14}{24}$ zu subtrahieren, damit der Bruch gleich $\frac{1}{2}$ wird?

13. Eine drei Mitglieder zählende Melkerbrigade hat für die im sozialistischen Wettbewerb erzielte Mehrproduktion eine Prämie von 185 MDN erhalten. Die Prämie soll nach dem Leistungsprinzip verteilt werden, indem die von den einzelnen Melkern im Wettbewerb erzielten Punktzahlen, nämlich 300 bzw. 450 bzw. 360 Punkte, zugrunde gelegt werden. Wieviel MDN erhalten die einzelnen Melker?

14. Ein Pflanzenschutzmittel wird als wäßrige Lösung mit 1,25 Volumenprozent Schutzmittelanteil eingesetzt. Wieviel Liter Wasser und wieviel Liter 25prozentiges Schutzmittelkonzentrat werden zur Herstellung von 800 l wäßriger Lösung benötigt?

15. Eine kleine Arbeitsgruppe einer Feldbaubrigade beginnt mit der Pflege eines 12 ha großen Kartoffelschlages und schafft täglich 0,4 ha. Von welchem Arbeitstage an muß die gesamte Brigade mit einer Tagesleistung von 1 ha auf diesem Schlag eingesetzt werden, wenn die Arbeit nach 15 Tagen beendet sein muß?

16. Für die Rodung eines 23,5 ha großen Kartoffelschlages mit einer Kartoffelvollerntemaschine sind 12 Arbeitsstunden geplant. Wie lange dauert die Rodung der Kartoffeln, wenn gleichzeitig noch eine zweite Vollerntemaschine, deren Leistung um 25% geringer ist als die der ersten, eingesetzt wird?

17. Die Summe zweier parallelgeschalteter Widerstände beträgt **a)** 20000 Ω; **b)** 4 kΩ. Der eine Widerstand ist 100 kΩ groß, wie groß ist der andere?

18. Von drei parallelgeschalteten Widerständen ist der zweite doppelt so groß wie der erste und der dritte doppelt so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände zu wählen, damit der Gesamtwiderstand

a) 24 kΩ; **b)** 50 kΩ; **c)** 200 kΩ; **d)** 12 Ω beträgt?

19. Es sind 910 dt Düngemittel aus Güterwagen der Reichsbahn zu entladen. Dazu stehen entweder 5 Lkw mit je 36,4 dt Ladefähigkeit oder 7 Traktorenzüge mit je 65 dt Ladefähigkeit zur Verfügung. Ein Lkw benötigt für Hin- und Rückfahrt, Be- und Entladung zusammen 50 Minuten, ein Traktorenzug 120 Minuten. Mit welchen Fahrzeugen läßt sich

a) am schnellsten entladen?

b) am billigsten entladen, wenn einmal gleicher Stundenlohn für Lkw- und Traktorfahrer, ein andermal gleicher Lohn für jeden Tonnenkilometer gezahlt wird?

Lineare Bestimmungsgleichungen mit zwei und mehr Unbekannten

Aufgaben zur Einführung

20. Was folgt aus

a) $A = B$ und $A = C$, **b)** $A \neq B$ und $A = C$,

c) $A = B$ und $A \neq C$, **d)** $A \neq B$ und $A \neq C$

jeweils für B verglichen mit C?

21. Was folgt aus

a) $a = y$ und $b = y$, **b)** $x = r$ und $x = s$,

c) $z = m\,x + n$ und $z = n\,x + m$?

22. Wie groß ist

a) $y = 3x - 4$, wenn $x = -2$; **b)** $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}$, wenn $x = \frac{2}{3}$;

c) $x = -2{,}7y + 0{,}2$, wenn $y = -\frac{1}{3}$?

23. Bilden Sie die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten der linken und der rechten Seiten in den folgenden untereinanderstehenden Gleichungen! Vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse!

a) I: $4 \cdot 6 = 24$
II: $7 \cdot 5 = 35$

b) I: $3 \cdot a - a = 2a$
II: $7 \cdot b - 4b = 3b$

c) I: $7r + 2s - 5r = 2(r + s)$
II: $4r + 3a - 7r = -3(r + s)$

d) I: $15 - 5 = 10$
II: $b - b = 0$

Welche allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten können Sie aus den Ergebnissen verwenden? Welche Ausnahme ergibt sich bei **d**?

Neben den linearen Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten gibt es auch solche mit zwei und mehr Unbekannten.

Beispiel 7:

$$5x + 2y - 13 = 0$$

Eine lineare Bestimmungsgleichung dieser Art hat beliebig viele Lösungen. Zu jedem beliebigen x findet man ein y; es gibt also beliebig viele Zahlenpaare, die die Gleichung erfüllen.
Aus einer linearen Bestimmungsgleichung mit zwei Unbekannten lassen sich die beiden Unbekannten oder auch nur eine von ihnen nicht ermitteln.
Aus diesem Grund benötigt man eine zweite Bedingung, eine zweite Gleichung, allgemein etwa neben

(9) $q_1\,x + r_1\,y + s_1 = 0$ noch

(10) $q_2\,x + r_2\,y + s_2 = 0.$

Beide Gleichungen faßt man zu einem System zusammen, indem man sie numeriert:

(11)
$$\begin{aligned} \text{I: } & q_1\,x + r_1\,y + s_1 = 0 \\ \text{II: } & \underline{q_2\,x + r_2\,y + s_2 = 0.} \end{aligned}$$

Dieses System hat im allgemeinen eine eindeutige Lösung, die berechnet werden kann. Das ist mit der **Eliminationsmethode**[1] möglich. Sie beruht darauf, daß ein System von **zwei** linearen **Gleichungen** mit **zwei Unbekannten** in **eine Gleichung** mit **einer Unbekannten** überführt wird.
Das wird im wesentlichen auf drei verschiedenen Wegen möglich, die im folgenden genauer erläutert und begründet werden.

Gleichsetzungsverfahren

Wir wollen nun ein erstes Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kennenlernen. Es beruht auf dem folgenden Satz:

Sind zwei Größen ein und derselben dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Beispiel 8:

I: $y = 5{,}5x + 220$
II: $y = 4x + 700$

In diesem Gleichungssystem kommen folgende drei „Größen" vor:

$5{,}5x + 220;\quad 4x + 700;\quad y$

Das Gleichungssystem sagt aus, daß $5{,}5x + 200$ und $4x + 700$ ein und derselben dritten Größe y gleich sind. Es gilt dann auch

I = II: $5{,}5x + 220 = 4x + 700$.

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$x = 320$.

Für y erhält man aus $y = 4x + 700$ und $x = 320$ die Lösung $y = 1980$. Die gleiche Lösung folgt aus $y = 5{,}5x + 220$ mit $x = 320$.

Das hier angewendete Verfahren der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten heißt **Gleichsetzungsverfahren**, da aus beiden Gleichungen des Systems jeweils diejenigen Teile gleichgesetzt werden, die ein und derselben dritten Größe – im Beispiel y – gleich sind. Auf diesem Wege wird:

a) die Anzahl der Gleichungen des Systems von 2 auf 1 reduziert,
b) die Anzahl der Unbekannten ebenfalls von 2 auf 1 reduziert.

Ein bloßes Reduzieren der Anzahl der Gleichungen ohne gleichzeitiges Reduzieren der Anzahl der Unbekannten würde, wie wir oben sahen, nicht auf eine eindeutig bestimmte Lösung des Systems führen. Offenbar ist hier wieder das Prinzip der Rückführung einer ungelösten Aufgabe auf eine bereits gelöste angewendet worden.
Die Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens setzt voraus, daß in den Gleichungen dieselbe Unbekannte isoliert wird, d. h., daß diese Unbekannte allein auf einer Seite der Gleichungen steht oder leicht isoliert werden kann.
Offensichtlich ist das Gleichsetzungsverfahren nicht auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten beschränkt.

[1] eliminare (lat.) wörtlich: aus dem Hause treiben, vertreiben, beseitigen

Für das lineare Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & y + z + a = x \\ \text{II:} & x = 2y + 3z + b \\ \text{III:} & x = 3y + 4z + c \end{array}$$

erhält man durch Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens

$$\begin{array}{ll} \text{II} = \text{I}: & \text{I*}: 2y + 3z + b = y + z + a \\ \text{III} = \text{II}: & \text{II*}: 3y + 4z + c = 2y + 3z + b, \end{array}$$

also ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Nochmalige Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens nach dem Ordnen führt dann zu einer Gleichung mit einer Unbekannten.

$$\begin{array}{llll} \text{I*}: & y = -2z - b + a & \text{II*}: & y = -z + b - c \\ & y = a - b - 2z & & y = b - c - z \end{array}$$

$$\text{I*} = \text{II*}: a - b - 2z = b - c - z$$

Die vollständige Lösung eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahrens hat folgendes Aussehen:

Beispiel 9:

$$\text{I:} \quad (y + 2)(x + 14) = -69(x + y) - (y + 3)(2 - x)$$

$$\text{II:} \quad \frac{y + \frac{1}{4}}{x} = -\frac{3}{4}$$

Ausmultiplizieren bzw. Produktgleichung:
$$\text{I:} \quad xy + 2x + 14y + 28 = -69x - 69y - 2y + xy - 6 + 3x$$
$$\text{II:} \quad 4\left(y + \tfrac{1}{4}\right) = -3x$$

Ordnen und Zusammenfassen:
$$\text{I:} \quad 2x + 69x - 3x = -69y - 2y - 14y - 28 - 6$$

Seitenvertauschen und Ausmultiplizieren:
$$\text{II:} \quad -3x = 4y + 1$$

Zusammenfassen:
$$\text{I:} \quad 68x = -85y - 34$$

Isolieren von x:
$$\text{II:} \quad -x = \tfrac{4}{3}y + \tfrac{1}{3}$$

Isolieren von x und Kürzen:
$$\text{I:} \quad -x = \tfrac{5}{4}y + \tfrac{1}{2}$$

Gleichsetzen:
$$\text{I} = \text{II}: \quad \tfrac{4}{3}y + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{4}y + \tfrac{1}{2}$$

Ordnen:
$$\tfrac{4}{3}y - \tfrac{5}{4}y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}$$

Zusammenfassen:
$$\frac{16 - 15}{12}\, y = \frac{3 - 2}{6}$$

Isolieren:
$$y = 2$$

Berechnung von x durch Einsetzen von $y = 2$ in II:
$$\frac{2 + \frac{1}{4}}{x} = -\frac{3}{4}$$
$$-x = \tfrac{4}{3} \cdot 2 + \tfrac{1}{3}$$

Zusammenfassen:
$$-x = 3$$

Isolieren:
$$x = -3$$

Dieser dargestellte Lösungsweg ist nicht der einzig mögliche.

Proben durch Einsetzen von $x = -3$ und $y = 2$ in beide Ausgangsgleichungen

I: linke Seite: $(2+2)\cdot(-3+14) = 4\cdot 11 = 44$

rechte Seite: $-69\cdot(-3+2) - (2+3)(2+3) = +69 - 25 = 44$

Vergleich: $44 = 44$

II: linke Seite: $\dfrac{2+\frac{1}{4}}{-3} = \dfrac{\frac{8}{4}+\frac{1}{4}}{-3} = -\dfrac{3}{4}$

rechte Seite: $-\frac{3}{4}$

Vergleich: $-\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

Die Probe bei einem System zweier linearer Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten muß an beiden Ausgangsgleichungen durchgeführt werden.
Bei Aufgaben, die einen Text enthalten, genügt auch das Einsetzen der Lösung in die aus dem Aufgabentext gewonnenen Ausgangsgleichungen nicht als Probe. Wenn nämlich aus dem im Text gegebenen Sachverhalt falsche Gleichungen aufgestellt worden sind, so bestätigt die Probe an den Ausgangsgleichungen bestenfalls, daß diese richtig gelöst worden sind. Deshalb muß die Probe am Text vorgenommen werden.

Einsetzungsverfahren

Das zweite Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist das **Einsetzungs- oder Substitutionsverfahren**[1]. Substitutionen haben wir schon früher benutzt, bei ihnen wird ein mathematischer Ausdruck durch einen anderen, ihm gleichen, ersetzt. In einem linearen Gleichungssystem zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man auch die eine Unbekannte durch Substitution vor dem Ausrechnen aus der Gleichung eliminieren.

Beispiel 10:

I: $y = -3x + 1$

II: $\dfrac{x-y}{y+x} = -\dfrac{9}{5}$

In dem Gleichungssystem kann man in der Gleichung II für alle y jeweils den Ausdruck $-3x+1$ einsetzen:

I in II: $\dfrac{x-(-3x+1)}{-3x+1+x} = -\dfrac{9}{5}.$

Man erhält dadurch eine Gleichung mit einer Unbekannten, die auf dem bekannten Wege gelöst wird. Ihr Ergebnis lautet

$x = -2.$

Durch Einsetzen von -2 für x in I erhält man

$y = -3\cdot(-2) + 1$

$y = 7.$

[1] substituere (lat.), an die Stelle setzen

Probe:

linke Seite:	I: 7	II: $\frac{-2-7}{7-2} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$
rechte Seite:	I: $-3(-2)+1 = 6+1 = 7$	II: $-\frac{9}{5}$
Vergleich:	I: $7 = 7$	II: $-\frac{9}{5} = -\frac{9}{5}$

Auch auf drei und mehr lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten läßt sich das Einsetzungsverfahren anwenden:

I: $x - y + 3z = r$ (x, y, z seien die Unbekannten)
II: $ax + y + z = s$
III: $bx - dy - z = t$

I: $x = r + y - 3z$
I in II: I*: $a(r + y - 3z) + y + z = s$
I in III: II*: $b(r + y - 3z) - dy - z = t$

Das sind zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten y und z. Damit wurde die neue Aufgabe auf ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, also einen Aufgabentyp, dessen Lösung wir bereits kennen, zurückgeführt.

Verfahren der gleichen Koeffizienten

Als drittes Lösungsverfahren soll das **Verfahren der gleichen Koeffizienten** an dem Gleichungssystem

(12) I: $ax + by = c$
II: $dx + ey = f$

besprochen werden. Sind die beiden Gleichungen in der obenstehenden Form gegeben, d. h., sind auf der linken Seite der Gleichung jeweils alle Glieder mit der Unbekannten x und der Unbekannten y und auf der rechten Seite der Gleichung alle Glieder, die keine Unbekannten enthalten, zusammengefaßt, so bezeichnet man diese Form des Gleichungssystems als **Normalform**. Die Koeffizienten vor den Unbekannten (hier a und d bzw. b und e) heißen dann die **Koeffizienten des Systems** und die Glieder ohne Unbekannte (hier c und f) **absolute Glieder des Systems.**
Das Verfahren der gleichen Koeffizienten beruht darauf, daß durch geeignete Umformung der Gleichungen vor einer Unbekannten in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten geschaffen werden. Das ist durch Multiplikation (bzw. Division) beider Gleichungen oder auch nur einer mit geeigneten Zahlen immer möglich.
Im Gleichungssystem (12) ist etwa I mit d, II mit a zu multiplizieren:

I: $d(ax + by) = d \cdot c$
II: $a(dx + ey) = a \cdot f$

I: $adx + bdy = cd$
II: $adx + aey = af$

Durch Subtraktion der Gleichung II von der Gleichung I erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}-\mathrm{II}:\quad 0 + b\,d\,y - a\,e\,y &= c\,d - a\,f \\ (b\,d - a\,e)\,y &= c\,d - a\,f \qquad [(b\,d - a\,e) \neq 0] \\ y &= \frac{cd - af}{bd - ae}. \end{aligned}$$

Auch hier ließe sich x durch Einsetzen von

$$\frac{cd - af}{bd - ae}$$

für y in eine der x enthaltenden Gleichungen ermitteln. Man kann aber auch das Verfahren der gleichen Koeffizienten für die Ermittlung von x anwenden. Dann sind die beiden Gleichungen mit solchen Zahlen zu multiplizieren, daß die Koeffizienten von y gleich werden.

1. *Eliminieren Sie nach dem gleichen Verfahren x!*
2. *Führen Sie die Probe durch!*

Haben die Koeffizienten einer Unbekannten verschiedene Vorzeichen, so genügt es, gleiche absolute Beträge bei den Koeffizienten zu schaffen. Die Unbekannte mit den Koeffizienten gleichen absoluten Betrages läßt sich dann durch Addition beider Gleichungen eliminieren.
Vor der Anwendung des Verfahrens der gleichen Koeffizienten sind die Gleichungen auf die Normalform zu bringen.

Beispiel 11:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad 5x + 4y + \tfrac{5}{2} = -2(2x + y) \\ \mathrm{II}:&\quad 4(3 - 5x - 3y) = 5(2x + y) + 21 + y \end{aligned}$$

Umformen zur Normalform:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad 9x + 6y = -\tfrac{5}{2} \\ \mathrm{II}:&\quad -30x - 18y = 9 \\ \mathrm{I}:&\quad 90x + 60y = -25 \\ \mathrm{II}:&\quad -90x - 54y = 27 \\ \hline \mathrm{I} + \mathrm{II}:&\quad 0 + 6y = 2 \\ &\quad y = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Ermittlung der anderen Unbekannten:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad 9x + 6y = -\tfrac{5}{2} \\ \mathrm{II}:&\quad -30x - 18y = 9 \\ \mathrm{I}:&\quad 9x + 6y = -\tfrac{5}{2} \\ \mathrm{II}:&\quad -10x - 6y = 3 \\ \hline \mathrm{I} + \mathrm{II}:&\quad -x = \tfrac{1}{2} \\ &\quad x = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Probe:

I: linke Seite: $-\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{2}=\frac{4}{3}$

rechte Seite: $-2(-1+\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$

Vergleich: $\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

II: linke Seite: $4(3+\frac{5}{2}-1)=4\cdot\frac{9}{2}=18$

rechte Seite: $5(-1+\frac{1}{3})+21+\frac{1}{3}=-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}+21=18$

Vergleich: $18=18$

Die grundsätzliche Lösungsmethode von Systemen von Bestimmungsgleichungen beruht auf der gleichzeitigen Reduzierung der Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten um eine Gleichung und eine Unbekannte (Eliminationsmethode). Sie wird so lange angewendet, bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, die dann auf bekanntem Wege gelöst wird.
Die Eliminationsmethode läßt sich auch dann anwenden, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, jedoch läßt sich dann die Gleichung im allgemeinen nicht eindeutig lösen.
Auf der Eliminationsmethode beruhen die drei rechnerischen Lösungsverfahren für Systeme von Bestimmungsgleichungen mit mehreren Unbekannten: das Gleichsetzungs- und das Einsetzungsverfahren sowie das Verfahren der gleichen Koeffizienten. Grundsätzlich ist jedes lösbare System nach jedem der drei Verfahren lösbar, jedoch ist für ein gegebenes System von Bestimmungsgleichungen meist ein Verfahren besonders zweckmäßig. Besondere Bedeutung besitzt das Einsetzungsverfahren, weil es häufiger als die beiden anderen bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme benutzt wird.

Aufgaben

Die folgenden Systeme von zwei linearen Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten sind zu lösen. (Dazu gehört in jedem Fall die vollständige und richtige Durchführung der Probe.)

24. a) $x+y=3$
$x-y=1$

b) $x+y=1$
$x-y=3$

c) $x-y=3$
$x+y=1$

d) $x+5y=2{,}3$
$x+y=1{,}5$

e) $3x+y=7$
$2x-y=4$

f) $8x-15y=-3$
$2x+3y=\frac{3}{2}$

g) $3x-2y=0$
$6y-9x-3=0$

h) $-5x+8y=0$
$-5x-8y=80$

i) $13x-12y-1=0$
$12x-13y-1=0$

k) $23x-41y=5$
$y=2x$

l) $x=y+\frac{7}{2}$
$14x=112y$

m) $3x=15-2y$
$9x-10y=21$

n) $x+3y=1$
$3y=-2x+11$

o) $18x-7y=2$
$x=y+\frac{1}{42}$

p) $x+2y=-1$
$3y=1-2x$

q) $3x-10=5y$
$6x-20=5y$

r) $22y-4=x$
$33y+3=2x$

s) $5\frac{3}{7}-x=y+\frac{4}{7}$
$38-7x=10(y-1)$

t) $y = 3x - 2$
$y = 2(y - x) - 7$

u) $17x = 3(y - 3) + 9$
$17x = 2y + 5x - 2$

v) $3x - 4y = -1$
$5(x + y) - 29 = 4y$

w) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$

x) $\frac{3}{x} + 2y = -\frac{7}{2}$
$\frac{15}{x} - \frac{5}{4}y = 5$

y) $2x + \frac{10}{y} = 1$
$\frac{x}{4} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2}$

25. a) $5(x - 3) - 24y = 5(x - \frac{3}{5})$
$5x + 7 \qquad = 0$

b) $11(x - y) + 12(y - x) = 1$
$(x - 2) : y \qquad = 1 : 4$

c) $15(x + 2) - 20y = 50$
$20(x - 3) - 40(y - x) = -20$

d) $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$
$3(x - 2) + 5(y - 1) = 19$

e) $10x(5y - 3) - 2y(25x + 11) + 74 = 0$
$6y(5 - 4x) + 8x(-10 + 3y) + 20 = 0$

f) $17y(6x - 2y) + 34y(y - 3x) = 5(x + 2)$
$13x(6x - 2y) + 26x(y - 3x) = y - 5$

g) $16(4y - 1) + 3(5x - 12y) - 259 = 0$
$-5 \cdot (9x + 7) + 14(5x - 3y) + 20 = 0$

h) $3(14x - 7y) - 30(x - y) - 3 = 0$
$6\left(4y - \frac{x}{2}\right) + 7(y + x) + 5 = 0$

i) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y + 1) = 1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}y = 4\frac{1}{2}$

k) $\frac{4}{3}(x + y) - \frac{2}{5}(y - 2) - 2(x + 2) = 0$
$\frac{3}{5}(2x - 10) - \frac{11}{18}(y - 7) = 0$

26. a) $\frac{5}{2x + y} = \frac{7}{3x + y}$
$\frac{8}{3x + 6} = \frac{6}{2(x + y)}$

b) $\frac{1}{x + y} = \frac{2}{3x + 1}$
$\frac{1}{2x + 1} = \frac{2}{7y}$

c) $(3 - x) : 7 = \frac{2y}{-21} : \frac{1}{15}$
$(x - 1) : y = \left(x + \frac{3}{2}\right) : \left(y + \frac{5}{4}\right)$

d) $\frac{x + y + 1}{x + y - 1} = \frac{3}{2}$
$\frac{x - y + 1}{x + y + 1} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{x + 2y + 3}{3x + 4y + 5} = \frac{1}{2}$
$\frac{x - 2y - 3}{3x + 4y + 5} = 0$

f) $\frac{3y - 7x}{70} = \frac{y - x - 2}{14} - \frac{2(y - 2)}{35}$
$\frac{5y - 9}{15} = \frac{2x + 1}{24} + \frac{x + 3y}{40}$

27. Fortlaufende Proportionen mit sechs Gliedern und zwei Unbekannten lassen sich als System von zwei viergliedrigen Proportionen schreiben und dann ebenfalls lösen. Beispielsweise erhält man aus $(x - 1) : (y - 2) : (x - y) = 4 : 2 : 1$ das System

I: $(x - 1) : (y - 2) = 4 : 2$
II: $(x - 1) : (x - y) = 4 : 1.$

Statt II hätte man auch II* $(y-2):(x-y)=2:1$ benutzen können. Lösen Sie die folgenden in Form fortlaufender Proportionen gegebenen Bestimmungsgleichungen!

a) $(x+3):(x+y):(5x+y)=2:1:3$ **b)** $(x+2):(y-1):(y+1)=1:4:3$
c) $(x+y):(x-y):(x+y-2)=4:1:3$ **d)** $x:y:(x-2)=3:2:1$

Es sollen stets x und y die Unbekannten bezeichnen.

28. **a)** $x+y=a$, $x-y=b$ **b)** $ax+by=c$, $x+y=5$ **c)** $ax+ay=m$, $x-y=n$

d) $a(x+y)+b(x-y)=2(a+b)(a-b)$, $ax+by=a^2+b^2$ **e)** $x(r-y)-y(s-x)=r^2-2s^2$, $r(x+y)+s(y-2x)=r^2+2s^2$

f) $3x-4(3y-b^2)=8b^2-3$, $-x+2(y+b^2)=1-2a^2$ **g)** $x(m+3)-y=0$, $m(y-x)-2m(x+m^2)=m^2(3+m)$

h) $\dfrac{x}{y}=7-p$, $3x-(7-p)y+2p^2=98$ **i)** $x(3-q)-qy=9-3q$, $x-y=2q$

k) $\dfrac{x}{a-2}+\dfrac{y}{b-2}=a+b$, $\dfrac{x}{a+2}-\dfrac{y}{b-2}=a-b$ **l)** $xy+q^2=(x-1)(y-1)+p^2$, $x+1-y=p^2+q^2$

29. Die Summe zweier Zahlen sei s, ihre Differenz d. Wie heißen die beiden Zahlen, wenn s und d folgende Werte annehmen?

a) $s=20;\quad d=10$ **b)** $s=10;\quad d=20$ **c)** $s=20;\quad d=-10$
d) $s=\frac{2}{3};\quad d=\frac{1}{3}$ **e)** $s=-\frac{2}{3};\quad d=\frac{1}{3}$ **f)** $s=2a;\quad d=2b$
g) $s=a-b;\quad d=b+a$ **h)** $s=a^2;\quad d=a$ **i)** $s=-a;\quad d=a$

30. **a)** Die Summe zweier gesuchter Zahlen ist 52. Die Differenz aus dem Dreifachen der einen und dem Fünffachen der anderen ist 100.
b) Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen ist 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten ist 10.
c) Der Nenner eines Bruches ist um 5 größer als sein Zähler. Vermehrt man Zähler und Nenner um 10, so erhält man $\frac{3}{4}$.
d) Eine zweistellige Zahl hat als Quersumme 10. Vertauscht man die beiden Grundziffern, so entsteht eine um 36 kleinere Zahl als die ursprüngliche.
e) Eine zweistellige Zahl hat als Quersumme 10. Vertauscht man die beiden Grundziffern, so wird die Zahl dadurch weder größer noch kleiner.

31. Vater und Tochter sind heute zusammen 56 Jahre alt. Vor vier Jahren war der Vater gerade fünfmal so alt wie seine Tochter. Wie alt sind die beiden heute?

32. Vater und Sohn sind heute zusammen 56 Jahre alt. Wenn der Sohn doppelt so alt ist wie heute, ist der Vater doppelt so alt wie sein Sohn. Wie alt sind dann beide zusammen?

33. Für eine Flasche mit Korken zahlt ein Altwarenhändler 22 Pfennig, für die Flasche 20 Pfennig mehr als für den Korken. Wieviel zahlt er für die Flasche, wieviel für den Korken?

34. Lösen Sie die folgenden Systeme linearer Gleichungen mit drei bzw. vier Unbekannten (x, y, z und w sind die Unbekannten)!

a) $x+y+z=6$, $x-y+z=2$, $x-y-z=0$ **b)** $7x=-8(y+z)$, $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $3x+6z=-3y$ **c)** $2x+5y-3z=35$, $x:y=2:3$, $2x-z=0$

d) $21x + 10y + 3z = 2$
$56x + 5y - 21z = 0$
$x + y + z = \frac{29}{105}$

e) $13x + 12y + 11z = 36$
$11x + 13y + 12z = 36$
$12x + 11y + 13z = 36$

f) $8x - y - z = 7$
$y + z = 1$
$x + y + z = 2$

g) $w + x + y + z = 28$
$w - x + y - z = 4$
$w + x - y - z = 8$
$w - x - y - z = -8$

h) $3w - 2x + 10y - 12z = -12$
$\frac{1}{5}w + x + 2y + 3z = 2$
$w - 3x + 20y - 15z - 1$
$2w + 3x + 4y - 9z = 4$

i) $w - x - y - z = 4$
$w + x + y = 2$
$2x - y = 0$
$3x + y + z = 0$

35. In den folgenden linearen Gleichungssystemen sind die unterstrichenen Symbole die Unbekannten. Lösen Sie diese Gleichungssysteme!

a) $3\underline{a} - 4\underline{b} = -1$
$5(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{b} + 1$

b) $2\underline{q} - 3\underline{p} = a + b$
$6\underline{p} - 2\underline{q} = -b$

c) $5x\underline{r} - 4\underline{s} = 2$
$7\underline{r} - \frac{1}{x}\underline{s} = \frac{12}{x}$

Lineare Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten und lineare Funktionen

Zwischen linearen Gleichungen mit einer Unbekannten und linearen Funktionen bestehen bestimmte Zusammenhänge. Bei der Ermittlung des Schnittpunktes einer Geraden (als Bild einer linearen Funktion) mit der x-Achse sind wir auf eine lineare Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten gestoßen. Die rechnerische Ermittlung der Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse erfolgte durch „Nullsetzen“ von y im analytischen Ausdruck der Funktion $y = mx + n$ und durch Berechnen von x aus der so entstandenen linearen Bestimmungsgleichung $mx + n = 0$. Es muß beachtet werden, daß x aus einer Veränderlichen in $y = mx + n$ zu einer unbekannten (bestimmten) Zahl in $0 = mx + n$ geworden ist.
Die obigen Erkenntnisse ermöglichen die grafische Lösung einer linearen Bestimmungsgleichung durch Ermittlung des Schnittpunktes der Geraden $y = mx + n$ mit der x-Achse. Wegen der Umständlichkeit verglichen mit der Lösung der Bestimmungsgleichung $0 = mx + n$ ist dieses Verfahren allerdings bedeutungslos.

Aufgaben

36. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Bilder folgender Funktionen mit der x-Achse!

a) $y = 2x + 4$
b) $y = \frac{1}{2}x - 3$
c) $y = mx + n$
d) $x + y = 4$
e) $2x - y = 1$
f) $\frac{1}{3}x + 2y - 2 = 0$

37. Erläutern Sie das „Zweipunktverfahren“ bei der grafischen Darstellung der linearen Funktion $y = mx + n$!

38. Wenden Sie das „Zweipunktverfahren“ auf die grafische Darstellung der folgenden linearen Funktionen an!

a) $y = -\frac{2}{3}x + 7$
b) $y = 7x - \frac{2}{3}$
c) $x = 5y - 10$
d) $x + y = 0$
e) $3x - 22y = 33$
f) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} - 7 = 0$
g) Wo liegen die Schnittpunkte der Funktionsbilder mit der x-Achse?

39. Durch welchen analytischen Ausdruck kann **a)** die x-Achse, **b)** die y-Achse dargestellt werden?

40. Ermitteln Sie die Schnittpunktkoordinaten für die folgenden „Geradenpaare“!

a) $y = -5x + 3$ $y = 2x - 4$	**b)** $y + 3x - 11 = 0$ $5y - x - 11 = 0$	**c)** $17x - 2 = 3y$ $3y - 5x - 1 = 0$
d) $y = 3x - 2$ $y = 3x - 5$	**e)** $y - 2x + 6 = 0$ $3y - 6x = 0$	**f)** $2y - 7x = 2{,}5$ $6y - 21x = 7{,}5$

41. Wie läßt sich bereits an den analytischen Ausdrücken der Aufgabe **40** (evtl. nach Umformung in die explizite Form für y) erkennen, daß die beiden Geraden von **d** bzw. **e** zueinander parallel sind und daß die beiden Geraden von **f** zusammenfallen?

42. Wieviel Schnittpunkte gibt es bei Aufgabe **40d** bzw. **e**, wieviel Schnittpunkte dagegen bei **f**?

43. Fassen Sie Aufgabe **40d**, **e** und **f** als Systeme von zwei linearen Bestimmungsgleichungen auf, und versuchen Sie, diese Systeme zu lösen!

Zeichnerisches Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

Jede der beiden linearen Bestimmungsgleichungen $a\,x + b\,y = c$ und $d\,x + e\,y = f$ kann, falls b und e von Null verschieden sind, nach y aufgelöst werden zu $y = m_1\,x + n_1$ und $y = m_2\,x + n_2$. Diese beiden Darstellungsweisen der Gleichungen des Systems können jeweils als analytischer Ausdruck einer linearen Funktion aufgefaßt werden. Als grafische Darstellung der den beiden Bestimmungsgleichungen entsprechenden linearen Funktionen erhält man in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem bekanntlich zwei Geraden (Abbildung 2.20.). Die Koordinaten aller Punkte der einen Geraden erfüllen die Bedingungen der einen Bestimmungsgleichung, die Koordinaten der Punkte der anderen Geraden die der zweiten. Die Lösung $x = p$, $y = q$ des Gleichungssystems erfüllt aber beide Bestimmungsgleichungen, d. h., das Bild dieses Wertepaares $(p; q)$ muß demnach gemeinsamer Punkt beider Geraden sein. Die Koordinaten aller Punkte, die auf beiden Geraden liegen, sind demnach Lösungen des linearen Gleichungssystems. Im allgemeinen kommt diese Eigenschaft nur dem Schnittpunkt $S(p; q)$ der beiden Geraden zu. Also sind die Koordinaten dieses Schnittpunktes die Lösung $x = p$, $y = q$ dieses Gleichungssystems.

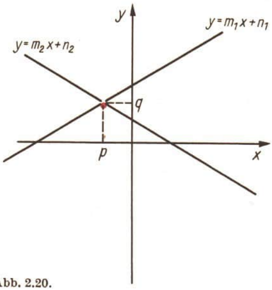


Abb. 2.20.

Beispiel 13:

Zeichnerische Lösung des Gleichungssystems

$$\text{I: } 5x + 4y = 8$$
$$\text{II: } 2x - y = 11$$

a) Explizite Form des analytischen Ausdrucks der entsprechenden linearen Funktionen

I: $y = -\frac{5}{4}x + 2$

II: $y = 2x - 11$

b) Grafische Darstellung der beiden Funktionen in einem Koordinatensystem (Abb. 2.21.).

c) Ablesen der Schnittpunktskoordinaten:

$x = 4 \qquad y = -3$

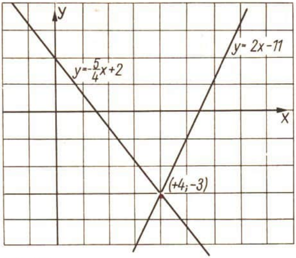


Abb. 2.21.

d) Probe:

I: linke Seite: $20 - 12 = 8$, stimmt mit rechter Seite überein.

II: linke Seite: $8 - (-3) = 11$, stimmt mit rechter Seite überein.

Die Probe hat hier, verglichen mit der Probe bei der rechnerischen Lösung, die zusätzliche Bedeutung der Kontrolle der Zeichen- und Ablesegenauigkeit.
Nicht in jedem Fall haben Geraden genau einen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt). Fallen die beiden Geraden zusammen, so haben sie beliebig viele Punkte gemeinsam; sind sie zueinander parallel (mit einem von Null verschiedenen Abstand), so haben sie keinen Punkt gemeinsam.
Daraus ergibt sich:

Ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten hat entweder genau eine Lösung (die beiden zugehörigen Geraden schneiden einander in einem Punkt) oder keine Lösung (die beiden zugehörigen Geraden sind mit einem von Null verschiedenen Abstand zueinander parallel) oder beliebig viele Lösungen (die beiden zugehörigen Geraden fallen zusammen).

Dem entsprechen folgende Paare von linearen Funktionen bzw. folgende Systeme von zwei linearen Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten:

a) für eine Lösung (Abb. 2.20.):

$$\left.\begin{aligned} \text{I: } y &= m_1 x + n_1 \\ \text{II: } y &= m_2 x + n_2 \end{aligned}\right\} \text{ mit } m_2 \neq m_1$$

b) für keine Lösung (Abb. 2.22.):

$$\left.\begin{aligned} \text{I: } y &= m_1 x + n_1 \\ \text{II: } y &= m_1 x + n_2 \end{aligned}\right\} \text{ mit } n_2 \neq n_1$$

c) für beliebig viele Lösungen (Abb. 2.22.):

$$\begin{aligned} \text{I: } y &= m_1 x + n_1 \\ \text{II: } y &= m_1 x + n_1 \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Systems (12) auf S. 80, wenn ein Koeffizient, mehrere oder alle Koeffizienten von x und y Null werden!

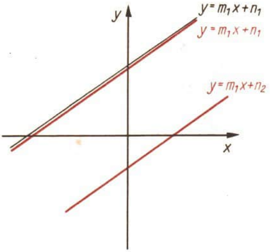


Abb. 2.22.

Die Lösbarkeitsbedingungen für ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

Im Fall **b** des vorangegangenen Abschnitts sind einerseits wegen $n_2 \neq n_1$ die rechten Seiten der beiden Gleichungen voneinander verschieden, andererseits sind die linken Seiten identisch. Weil zwei verschiedene Größen nicht ein und derselben dritten gleich sein können, besteht zwischen den beiden Gleichungen des Systems ein **Widerspruch.**

Beispiel 14:

$$\text{I: } y = -\tfrac{2}{3}x + 5$$
$$\text{II: } y = -\tfrac{2}{3}x - 2\,.$$

Lineare Gleichungssysteme zweier einander widersprechender Gleichungen haben keine Lösung.
Im Fall **c** sind zwei völlig übereinstimmende Gleichungen vorhanden, man bezeichnet sie als **voneinander abhängig**. Solche Gleichungen haben beliebig viele Lösungen.
Abhängigkeit oder Widersprüchlichkeit bei zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten sind nicht immer sofort erkennbar. Erst nachdem beide Gleichungen nach einer der Unbekannten aufgelöst sind, kann in jedem Fall entschieden werden, ob ein Widerspruch oder ob Abhängigkeit vorliegt.
Immer dann, wenn bei einem System von zwei linearen Gleichungen weder der Fall **b** noch der Fall **c** vorliegt, besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung. Wir können die Lösbarkeitsbedingung folgendermaßen formulieren:

Ein System von zwei linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten hat immer dann genau eine Lösung, wenn die beiden Gleichungen voneinander unabhängig und widerspruchsfrei sind.

Aufgaben

44. a) Lösen Sie die Aufgaben **24a, d, g, k, t, w** von S. 82 grafisch!
b) Begründen Sie an Hand der grafischen Darstellung, warum Aufgabe **24g** keine Lösung hat!
c) Wie können Sie die Schwierigkeiten bei der grafischen Lösung von Aufgabe **24w** überwinden!
d) Begründen Sie, weshalb die Gleichungen aus Aufgabe **24w** keine linearen Bestimmungsgleichungen sind, obwohl die Unbekannten nur in der 1. Potenz vorkommen!

45. a) Lösen Sie die Aufgaben **25a, b, f** und **i** von S. 83 grafisch!
b) Lösen Sie die Aufgaben **26a, d, e** und **g** von S. 83 grafisch!
c) Enthalten alle Aufgaben aus **a** und **b** nur lineare Bestimmungsgleichungen?

46. Untersuchen Sie die folgenden Systeme linearer Bestimmungsgleichungen auf Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit!

a) $x + y = 3$
$x - y = 5$

b) $2x = 3y - c$
$7c = 21y - 14x$

c) $11x - 6y = 21$
$-11x + 6y = 23$

d) $x - 81y = 81$
$x + 81y = -81$

e) $y = -\tfrac{2}{7}x + 3$
$14y + 4x - 42 = 0$

f) $(x - 3) : (y - 4) = 1 : 2$
$(x + 1) : (y + 4) = 1 : 2$

g) $3(x - y) + 6y = 6$
$3(x + y) = 5$

h) $3(x - y) = 6(y + 1)$
$3x(x + y) = 5$

i) $ax + by = c$
$max + mby = c \qquad a \neq 0;\ b \neq 0,\ m \neq 0$

Anleitung zu i: Unterscheiden Sie die Fälle $c \neq 0$ und $c = 0$!

Lösung einer Anwendungsaufgabe

Beispiel 15:

In einem chemischen Betrieb sollen aus einer 80%igen und einer 25%igen Schwefelsäure 3 t einer 50%igen Schwefelsäure hergestellt werden. Welche Ausgangsmengen sind dazu erforderlich?
Die Lösung erfolgt mit Hilfe eines Systems von linearen Gleichungen. Es ist also zunächst zu untersuchen: Was ist gleich?
Der erste Satz lautet in Form einer Gleichung:

a) Menge der 80%igen Säure plus Menge der 25%igen Säure gleich 3 t.
In dieser Gleichung sind die jeweiligen Säuremengen unbekannt:

Menge der 80%igen $H_2SO_4 = x$ t
Menge der 25%igen $H_2SO_4 = y$ t

Unter Benutzung dieser Symbole erhält man:

I: $x + y = 3$

Zur eindeutigen Lösung dieser Gleichung ist noch eine weitere Gleichung erforderlich. Man erhält sie mit Hilfe der Konzentrationsangaben der Säuren:

b) Gehalt der x t 80 % iger Säure an H_2SO_4 plus Gehalt der y t 25 % iger Säure an H_2SO_4 gleich Gehalt der 3 t 50 % iger Säure an H_2SO_4.
Den Gehalt an H_2SO_4 ermittelt man als das Produkt der Säuremenge mit der Konzentration:

II: $\frac{80}{100}x + \frac{25}{100}y = \frac{50}{100} \cdot 3$

Beide Gleichungen enthalten dieselben Unbekannten.

Weisen Sie die Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit des erhaltenen Gleichungssystems nach!

Lösung:

I: $x + y = 3$
II: $\frac{80}{100}x + \frac{25}{100}y = \frac{50}{100} \cdot 3$
I: $y = 3 - x$
II: $80x + 25y = 50 \cdot 3$

$$\text{I in II: } 80x + 25(3 - x) = 150$$
$$80x + 75 - 25x = 150$$
$$x = \frac{15}{11} \approx 1{,}36$$
$$x = \frac{15}{11} \text{ in I: } \frac{15}{11} + y = 3$$
$$y = \frac{18}{11} \approx 1{,}64$$

Menge der 80%igen $H_2SO_4 = \frac{15}{11}\,\text{t} \approx 1{,}36$ t

Menge der 25%igen $H_2SO_4 = \frac{18}{11}\,\text{t} \approx 1{,}64$ t

Probe 1: Summe aller Einzelmengen = Gesamtmenge

$$\frac{15}{11}\,\text{t} + \frac{18}{11}\,\text{t} = 3\,\text{t}$$
$$3\,\text{t} = 3\,\text{t}$$

Probe 2: Gehalt der Einzelmengen = Gesamtgehalt

$$80\,\%\text{ von } \frac{15}{11}\,\text{t} + 25\,\%\text{ von } \frac{18}{11}\,\text{t} = 50\,\%\text{ von } 3\,\text{t}$$
$$\frac{24}{22}\,\text{t} + \frac{9}{22}\,\text{t} = 1{,}5\,\text{t}$$
$$1{,}5\,\text{t} = 1{,}5\,\text{t}$$

Ergebnis: Es sind 1,36 t 80%ige mit 1,64 t 25%iger Schwefelsäure zu mischen.

Für die Lösung einer Anwendungsaufgabe, die auf zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten führt, gibt es eine Reihe von Grundsätzen, die jetzt an Hand des vorstehenden Beispiels erläutert werden sollen:

1. Der Aufgabentext ist zunächst unter dem Gesichtspunkt „Für welche Größen sind Gleichheitsbeziehungen gegeben?“ zu durchdenken. Das läuft darauf hinaus, die naturwissenschaftliche, ökonomische oder sonstige Gesetzmäßigkeit zu erkennen, die der Aufgabe zugrunde liegt.
2. Die gefundene Gesetzmäßigkeit (Gleichheitsbeziehung) ist in Form einer „Wortgleichung“ niederzuschreiben (vgl. a) und b) in der Lösung des **Beispiels 15**).
3. Die in der „Wortgleichung“ vorkommenden gleichartigen Größen müssen dieselben Maßeinheiten erhalten.
4. Die in der Wortgleichung vorkommenden unbekannten Größen werden mit x bzw. y bezeichnet. Dabei sind x und y (unbenannte) Zahlen, deshalb sind bei der Festlegung ihrer Bedeutung die jeweiligen Maßeinheiten bzw. Benennungen hinzuzufügen (im **Beispiel 15** x t und y t).
5. Aus den „Wortgleichungen“ werden die Bestimmungsgleichungen unter Weglassung der Benennung aus den einzelnen Größen gebildet und dann gelöst.
6. Die Probe ist am Aufgabentext durchzuführen.
7. Nur die in der Aufgabe gestellte Frage wird abschließend beantwortet.

Aufgaben

1. Während der Friedensfahrt löst sich 70 km vor dem Tagesetappenziel eine Verfolgergruppe aus dem Hauptfeld, um die mit 3,25 min Vorsprung fahrende Spitzengruppe einzuholen. In der nächsten halben Stunde werden von den Verfolgern genau 20 km zurückgelegt, wobei sie gegen die Spitzengruppe genau 1 min Zeit aufholen. Holen die Verfolger die Spitzengruppe vor dem Ziel noch ein, wenn beide Gruppen mit unveränderter Geschwindigkeit weiterfahren?

2. Ein D-Zug und ein Personenzug fahren sich aus zwei 180 km voneinander entfernten Orten entgegen. Fahren sie gleichzeitig ab, so begegnen sie sich nach 1 h 48 min. Sollen sie sich in der Mitte der Strecke treffen, so muß der Personenzug schon 30 km zurückgelegt haben, bevor der D-Zug abfährt. Welche Zeit braucht **a)** der D-Zug, **b)** der Personenzug für die ganze Strecke?

3. Zwei Freunde fahren aus zwei Städten A und B mit Fahrrädern zu einem Treffpunkt in der Mitte zwischen diesen beiden Städten. Der eine fährt die Strecke mit $18\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ Durchschnittsgeschwindigkeit und ist $7\frac{1}{2}$ min früher am Treffpunkt als der andere, obwohl dieser $\frac{1}{2}$ Stunde früher losgefahren ist als der Schnellere, dessen Geschwindigkeit um 50% höher war als die des Langsameren. Wie weit sind die Städte A und B voneinander entfernt?

4. In der gleichen Zeit umrunden zwei Freunde die 400 m lange Aschenbahn eines Sportplatzes zwei- bzw. dreimal. Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s.
Mit welcher Geschwindigkeit laufen die beiden Freunde?

5. Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 5:11 werden durch zwei andere Zahnräder ersetzt, die je 5 Zähne mehr haben. Das Übersetzungsverhältnis ist nun 1:2. Wie viele Zähne hat jedes Zahnrad?

6. Für ein kleines Reibradgetriebe steht die Breite $a = 40$ mm zur Verfügung. Das Übersetzungsverhältnis soll 1:5 betragen. Berechnen Sie den Durchmesser der größeren Scheibe (Abb. 2.23.)!

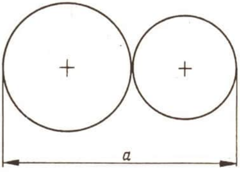


Abb. 2.23.

7. Zwei Kreiselpumpen pumpen das Wasser aus dem Schachtsumpf eines Bergwerkes in ein Klärbecken über Tage. Die eine Pumpe hat eine Förderleistung von $2\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{min}^{-1}$, die andere füllt das Klärbecken allein in 16 h 40 min. Wieviel Kubikmeter faßt das Becken, wenn beide Pumpen zusammen 6 h 15 min zu einer Füllung brauchen?

8. Ein Feuerlöschteich enthält $135\,\mathrm{m}^3$ Wasser. Bei einem Einsatz entnimmt eine Motorspritze $750\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. Gleichzeitig werden die beiden je $250\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ abgebenden Zuflußröhren des Teiches geöffnet. Wann ist der Teich leergepumpt, wenn 30 min nach der ersten Motorspritze noch eine zweite mit einer Leistung von $500\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ zusätzlich eingesetzt wird und die erste Pumpe zwischendurch einmal 10 min ausfällt?

9. An einem 15 ha großen Getreideschlag arbeiten ein Mähdrescher $5\frac{1}{2}$ h und gleichzeitig ein Mähbinder, der eine halbe Stunde früher als der Mähdrescher begonnen hat. Eine Nachmessung ergibt, daß der Mähbinder 12% der Fläche gemäht hat. Berechnen Sie die Stundenleistungen beider Maschinen!

10. Drei Bagger unterschiedlicher Förderleistung schaffen eine Ausschachtungsarbeit in 10 Tagen, während die beiden kleineren Bagger zusammen 20 Tage und die beiden größeren Bagger zusammen 12 Tage benötigen würden. Wie groß ist die Tagesleistung von jedem der drei Bagger?

11. Für ein Wannenbad werden 210 l Wasser von 32 °C gebraucht. Die Temperatur des kalten Wassers ist 10 °C, die des heißen Wassers 82 °C. Welche Heißwassermenge wird gebraucht?

12. Die Ströme durch zwei parallelgeschaltete Widerstände betragen zusammen 3 A; die Widerstände verhalten sich wie 2 : 3. Wie groß sind die Teilströme?

13. Ein ganz mit Quecksilber ($\varrho_{Hg} = 13{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) gefülltes und verschlossenes Gefäß aus Gußeisen ($\varrho_{Fe} = 7{,}2\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$), das beim Eintauchen ins Wasser 20 kg Wasser verdrängt, hat eine Masse von 250 kg. Wie groß ist die Masse des Quecksilbers, wie groß die des Gefäßes?

14. Aus der Antike wurde uns überliefert: ARCHIMEDES (287—212 v. u. Z.) prüfte einen goldenen Kranz des Königs HIERO VON SYRAKUS. Er fand sein Gewicht zu 9 kp und in Wasser eingetaucht zu 8,375 kp. Aus reinem Gold hätte er im Wasser 8,5 kp, aus reinem Silber hätte er im Wasser 8,125 kp gewogen. Wieviel Prozent Silber ist in dem Kranz, wenn man annimmt, daß er außer Silber nur Gold enthielt?

15. Wieviel Kilogramm Stahl mit 0,5% Kohlenstoffgehalt und wieviel Tonnen Grauguß mit 2,5% Kohlenstoffgehalt ergeben — zusammengeschmolzen — 12 Tonnen mit 1,45% Kohlenstoffgehalt?

16. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthält 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

17. Ein zylinderförmiger Kessel von 3 m Höhe und 190 cm Durchmesser ist zu einem Drittel mit einer 25%igen Ammoniaklösung gefüllt. Wieviel Liter einer 18%igen Ammoniaklösung muß man zugeben, um eine 21%ige Lösung zu erhalten?

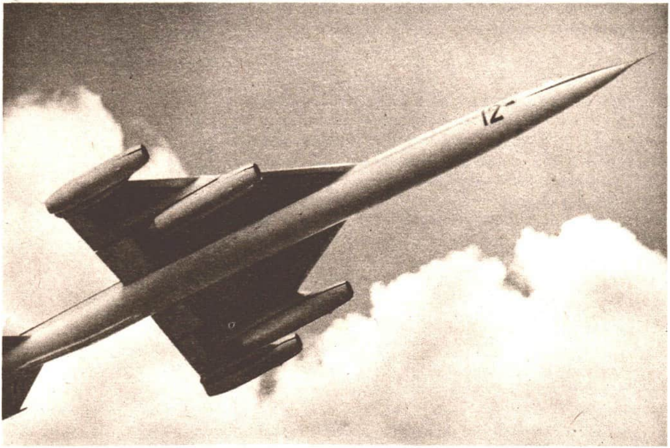
18. Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird mit einer Emulsion geschmiert und zugleich gekühlt. Die Emulsion wird durch Mischen von gefettetem Mineralöl ($\varrho = 0{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) und möglichst weichem Wasser hergestellt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte $\varrho = 0{,}98\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, für Schneidwerkzeuge niederer Festigkeit die Dichte $\varrho = 0{,}992\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, bei Schleifarbeiten die Dichte $\varrho = 0{,}996\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser kommen für die einzelnen Bearbeitungsarten auf 10 Liter Emulsion?

19. In einem volkseigenen Maschinenbaubetrieb wird eine größere Anzahl gleicher Drehteile benötigt. Der Betrieb kann sie entweder auf einer Revolverdrehmaschine oder einem Drehautomaten herstellen. Die geplante Herstellungszeit für ein Drehteil, Stückzeitnorm genannt, betrage auf der Revolverdrehmaschine 5,5 min, auf dem Drehautomaten 4 min. Das Einrichten (Einstellung der Maschine für die Fertigung dieses Teiles) dauert dagegen bei der Revolverdrehmaschine nur 220 min, während es bei dem Automaten 700 min dauert. Infolge der hohen Einrichtungszeit beim Automaten ist offensichtlich für kleine Stückzahlen die Fertigung auf der Revolverdrehmaschine rationeller als auf dem Drehautomaten. Bei hohen Stückzahlen ist es genau umgekehrt, wie auch die folgenden Beispiele zeigen:

Fertigungszeiten	auf Revolverdrehmaschine	auf Drehautomaten
a) für 100 Stück:	$100 \cdot 5{,}5\ \mathrm{min} + 220\ \mathrm{min} = 770\ \mathrm{min}$	$100 \cdot 4\ \mathrm{min} + 700\ \mathrm{min} = 1100\ \mathrm{min}$
b) für 500 Stück:	$500 \cdot 5{,}5\ \mathrm{min} + 220\ \mathrm{min} = 2970\ \mathrm{min}$	$500 \cdot 4\ \mathrm{min} + 700\ \mathrm{min} = 2700\ \mathrm{min}$

Welches ist im vorliegenden Fall die sogenannte Grenzstückzahl, d. h., bei welcher Stückzahl dauert die Fertigung nach beiden Verfahren gleich lang?
Lösen Sie diese Aufgabe

a) als Gleichung mit einer Unbekannten; **b)** als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten!



3. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Das sozialistische Lager ist mit den besten Waffen ausgerüstet. Dieser moderne sowjetische schwere Düsenbomber ist in der Lage, mit Überschallgeschwindigkeit zu fliegen.
Dazu ist ein hoher Schub, dazu ist viel Energie erforderlich. Diese mechanische Energie erhält man durch die Umformung der chemischen Energie der Treibstoffe in den Triebwerken. Man kann die Energie jedes bewegten Körpers mit Hilfe der Gleichung

$$W_{\text{kin}} = m \frac{v^2}{2}$$

errechnen.
Die erforderliche Energie wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Bleibt die Masse konstant, so ist die kinetische Energie eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit.

3.1. Quadratische Funktionen

Die elektrische Leistung P im Gleichstromkreis ist gleich dem Produkt aus Stromstärke und Spannung:

$$P = U \cdot I.$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes kann man diese Gleichung umformen:

$$P = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = \frac{1}{R} \cdot U^2.$$

Legt man einen „Verbraucher" elektrischer Leistung, z. B. einen Tauchsieder, an eine veränderliche Spannung U (Abb. 3.1.), so wird der Verbraucher trotz seines festen Widerstandes R (von der Erhöhung des Widerstandes bei metallischen Leitern und der Abnahme des Widerstandes bei Halbleitern infolge Erwärmung des Leiters sehen wir hier ab) der jeweiligen Spannung entsprechend eine unterschiedliche Leistung aufnehmen. Liest man zu jeder eingestellten Spannung die aufgenommene Leistung ab, so erhält man für $R = 50\ \Omega$ folgende Wertetabelle:

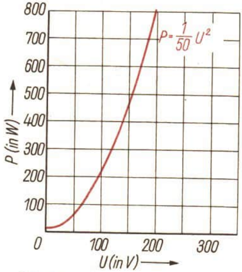


Abb. 3.1.

U (in V)	0	10	20	30	40	50	100	110	150	200	220
P (in W)	0	2	8	18	32	50	200	242	550	800	968

Da jeder Spannung eine genau bestimmte Leistung zugeordnet ist, stellt der Zusammenhang zwischen der elektrischen Leistung und der angelegten Spannung eine Funktion dar. Dabei ist U wieder die unabhängige Veränderliche, P die abhängige Veränderliche. Da die Variable U nicht mehr in der 1. Potenz, sondern in der 2. Potenz, im „Quadrat" vorkommt, handelt es sich um eine **Quadratische Funktion.** Die grafische Darstellung in einem Koordinatensystem mit gleichgeteilten Achsen ist, wie Abbildung 3.1. zeigt, auch keine Gerade.

Die quadratische Funktion $y = x^2$

Die einfachste quadratische Funktion ist durch die folgende Zuordnungsvorschrift gegeben: jeder Zahl x aus der Menge X wird genau eine Zahl y aus der Menge Y, und zwar das Quadrat der Zahl aus der Menge X, zugeordnet. Der analytische Ausdruck dieser quadratischen Funktion lautet

(1) $y = f(x) = x^2$.

Als Wertetabelle erhält man:

x	-100	-50	-10	-5	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+5$	$+10$	$+50$	$+100$
y	$+10000$	$+2500$	$+100$	$+25$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+25$	$+100$	$+2500$	$+10000$

Weil das Quadrat einer negativen Zahl positiv ist, wird den beiden dem Betrage nach gleichen x-Werten (mit entgegengesetztem Vorzeichen) der gleiche y-Wert zugeordnet. Mit Hilfe einer Wertetabelle läßt sich diese Zuordnung kürzer schreiben. Die dem Betrage nach gleichen x-Werte werden nur einmal geschrieben.

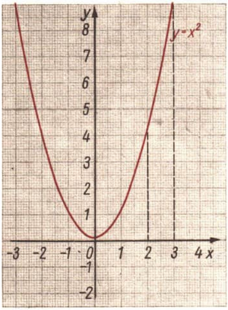


Abb. 3.2.

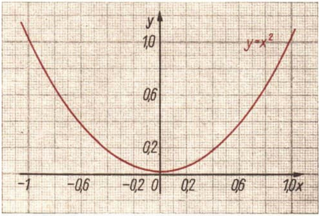


Abb. 3.3.

● *Stellen Sie eine Wertetabelle für $y = x^2$ mit folgenden Werten von x auf!*

$0;\ \pm 0{,}1;\ \pm 0{,}2;\ \pm 0{,}3;\ \pm 0{,}4;\ \pm 0{,}5;\ \pm 0{,}7;\ \pm 0{,}9;\ \pm 1;\ \pm 1{,}5;\ \pm 3;\ \pm 4$

Die erhaltenen Zahlenpaare ermöglichen einen recht genauen Entwurf des Bildes der Funktion $y = x^2$. In Abbildung 3.2. sind die Punkte als Bilder der einzelnen Zahlenpaare eingetragen und durch eine Kurve miteinander verbunden worden. Diese Kurve heißt **Normalparabel**. Die Richtigkeit und Genauigkeit der Normalparabel als Bild der Funktion $y = x^2$ läßt sich durch Ausrechnen und Eintragen weiterer Zahlenpaare wie $(0{,}8; 0{,}64)$; $(1{,}2; 1{,}44)$; $(1{,}7; 2{,}89)$ usw. überprüfen. Besonders sorgfältig muß das Bild im Bereich der x-Werte von -1 bis $+1$ (kurz: $-1 \leqq x \leqq +1$) gezeichnet werden. In Abbildung 3.3. wird dieses Stück der Normalparabel stark vergrößert wiedergegeben.

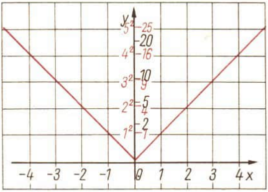


Abb. 3.4.

● *Vergleichen Sie das Bild der Funktion $y = x^2$ mit dem Bild der Funktion $y = x$!*

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist nur im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem eine Normalparabel. In Abbildung 3.4. ist ein anderes Koordinatensystem für die grafische Darstellung von $y = x^2$ benutzt worden.
Die x-Achse dieses Systems ist ebenso wie beim kartesischen Koordinatensystem eine Zahlengerade mit willkürlich gewählter, aber fester Einheit, auch lineare Leiter genannt. Die y-Achse ist dagegen eine sogenannte quadratische Leiter, d. h., den einzelnen Punkten dieser Leiter sind nicht die Zahlen der linearen Leiter, sondern deren Quadrate zugeordnet. In diesem speziellen Koordinatensystem ist die grafische Darstellung der Funktion $y = x^2$ je eine Halbgerade für die positiven und die negativen x-Werte.

Aber auch in dieser grafischen Darstellung ist der Koordinatenursprung ein Punkt der „Kurve", die ebenso wie die Normalparabel nur im I. und II. Quadranten verläuft. Diese Eigenschaften sind also unabhängig von der Art der gewählten grafischen Darstellung, sie kommen der Funktion $y = x^2$ selbst zu.
Charakteristisch ist vor allem die Tatsache, daß alle y-Werte größer oder gleich Null sind, welchen x-Wert wir auch immer betrachten.
Unseren weiteren Überlegungen soll nun wieder, wenn nicht ausdrücklich auf ein anderes Koordinatensystem hingewiesen wird, das rechtwinklige kartesische Koordinatensystem zugrunde liegen.

Aufgaben

1. a) Ermitteln Sie die „Quadrate", d. h. die zweiten Potenzen, folgender Zahlen!
$17;\ 120;\ 35;\ 350;\ 3{,}5;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{20};\ 0{,}01;\ 0{,}54;\ 0{,}24;\ -3;\ -19;\ -\frac{3}{7};\ -0{,}5;\ -\frac{1}{3};$
$-3{,}3;\ -200;\ -1000;\ -0{,}02$

b) Zu jeder der Zahlen in Aufgabe **1a** gibt es eine zweite, deren Quadrat dem Quadrat der obenstehenden Zahl gleich ist. Geben Sie diese Zahlen an!
c) Welches Vorzeichen hat das Quadrat einer positiven, einer negativen Zahl?
d) Äußern Sie sich kritisch zu der Meinung, daß das Quadrat einer Zahl immer größer sei als die Zahl selbst!

2. Welcher Zusammenhang besteht
a) zwischen dem Flächeninhalt und der Seitenlänge eines Quadrates,
b) zwischen dem Flächeninhalt und dem Durchmesser eines Kreises,
c) zwischen dem Flächeninhalt und dem Umfang eines Kreises,
d) zwischen der Leistungsaufnahme und der Betriebsspannung eines elektrischen Gerätes?

3. In der Kraftfahrzeugtechnik wird für den Bremsweg w (in m) folgende „Faustformel" (das ist eine näherungsweise richtige Formel) benutzt:
$w = (0{,}1 \cdot v)^2$.
Darin bedeutet v die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeuges in $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
a) Wie lang ist der Bremsweg w, wenn $v = 10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ 60;\ 70;\ 80;\ 90;\ 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ beträgt?
b) Zwischen dem Auftauchen eines Hindernisses und der Reaktion des Fahrers, d. h. der Betätigung der Bremsen, vergeht eine gewisse Zeit, „Schrecksekunde" genannt. Das bedeutet, daß das Fahrzeug während der „Schrecksekunde" mit unverminderter Geschwindigkeit weiterfährt. Die „Schrecksekunde" sei 0,25 s. Wie weit muß das Fahrzeug im Moment der Wahrnehmung des Hindernisses bei den in **a** angegebenen Geschwindigkeiten vom Hindernis mindestens entfernt sein, damit ein Zusammenstoß vermieden wird?

4. a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem möglichst genau (Millimeterpapier benutzen!) das Bild der Funktion $y = x^2$, und kleben Sie die Normalparabel auf einem 1 bis 2 mm starken Karton faltenlos auf!
b) Schneiden Sie das mit der Normalparabel beklebte Stück des Kartons aus, und prüfen Sie die entstandene Normalparabelschablone auf Richtigkeit und Genauigkeit, indem Sie in ein auf Millimeterpapier mit derselben Längeneinheit gezeichnetes kartesisches Koordinatensystem durch Umfahren der Schablone mehrere Normalparabeln zeichnen!

5. Spiegeln Sie das Bild der Funktion $y = x^2$ im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem
a) an der y-Achse,
b) an der x-Achse!

Welches Aussehen und welche Lage haben die Spiegelbilder verglichen mit dem Bild der Funktion $y = x^2$?
Wie lauten die analytischen Ausdrücke für die Spiegelbilder?

6. a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem eine beliebige Strecke!
b) Verschieben Sie diese Strecke einmal um 2 Einheiten in Richtung des positiven Teils der x-Achse, zum anderen um 3 Einheiten in Richtung des negativen Teils der x-Achse! Wie führen Sie diese Schiebung der Strecke zweckmäßigerweise durch?
c) Vergleichen Sie die „Originalstrecke" mit den beiden anderen durch Schiebung erhaltenen Strecken in bezug auf Länge und Richtung!
d) Verschieben Sie die „Originalstrecke" einmal um 3 Einheiten in Richtung des positiven Teils, zum anderen um 4 Einheiten in Richtung des negativen Teils der y-Achse! Vergleichen Sie wiederum die beiden erhaltenen Strecken mit der „Originalstrecke" in bezug auf Länge und Richtung!
e) Verschieben Sie die „Originalstrecke" sowohl um 4 Einheiten in Richtung des positiven Teils der x-Achse als auch um 5 Einheiten in Richtung des positiven Teils der y-Achse! Führen Sie auch noch andere Schiebungen der „Originalstrecke", darunter auch solche in Richtung der negativen Teile der beiden Achsen durch! Vergleichen Sie wiederum alle erhaltenen Strecken mit der „Originalstrecke" in bezug auf Länge und Richtung!

7. Führen Sie solche Schiebungen statt mit einer Strecke
a) mit einem Dreieck,
b) mit einem Kreis,
c) mit einem allgemeinen Viereck
durch!

Die quadratische Funktion $y = x^2 + e$

Quadratische Funktionen wie

$$y = x^2 + 3; \quad y = x^2 - 4; \quad y = x^2 - \tfrac{1}{5}$$

lassen sich allgemein schreiben:

(2) $\mathbf{y = x^2 + e.}$

● *Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $y = x^2 + 3$ und $y = x^2 - \frac{1}{5}$ auf!*

Ein Vergleich dieser Wertetafeln mit der Wertetafel der Funktion $y = x^2$ zeigt den Einfluß des absoluten Gliedes e. Man erkennt:

▶ **Alle y-Werte der Funktion $y = x^2 + e$ weichen um e von dem y-Wert der Funktion $y = x^2$ ab, der demselben x-Wert zugeordnet ist.**

Für die grafische Darstellung der Funktion $y = x^2 + e$ bedeutet das, daß man sie aus dem Bild der Funktion $y = x^2$ dadurch erhält, daß man jeden Punkt der Normalparabel um e parallel zur y-Achse verschiebt. In Abbildung 3.5. sind die Bilder der Funktionen $y = x^2 + 3$ und $y^2 = x^2 - 4$ durch Schiebung der

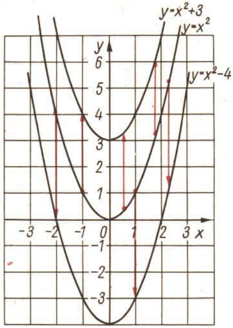


Abb. 3.5.

Normalparabel $y = x^2$ um $+3$ bzw. -4 erhalten worden. Für einige Punkte ist die Schiebung um e eingezeichnet worden. Das Bild der Funktion $y = x^2 + e$ ist also eine Normalparabel. Die y-Achse ist, wie beim Bild der Funktion $y=x^2$, Symmetrieachse. Der **Scheitel** der Normalparabel liegt im Punkt $S(0; e)$, also auf der y-Achse.
Die Funktion $y = x^2$ ist offensichtlich ein Sonderfall der Funktion $y = x^2 + e$ mit $e = 0$. Die Gesamtheit aller Bilder der Funktion $y = x^2 + e$ bildet eine Schar Normalparabeln mit der y-Achse als gemeinsamer Symmetrieachse, aber unterschiedlicher Lage des Scheitels, der jeweils im Punkt $(0; e)$ liegt.
Besondere Beachtung verdienen im Bild der Funktion $y = x^2 + e$ die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse, die **Nullstellen** genannt werden. Hier zeigt sich gegenüber der linearen Funktion $y = mx + n$ (mit $m \neq 0$) ein grundsätzlicher Unterschied. Während es dort für $m \neq 0$ stets genau einen Schnittpunkt gab, liegt beim Bild der Funktion $y = x^2 + e$ jeweils einer der folgenden drei Fälle vor:

1. **Es gibt keine Nullstelle (Scheitel oberhalb der x-Achse),**
2. **Es gibt eine Nullstelle (Scheitel im Koordinatenursprung),**
3. **Es gibt zwei Nullstellen (Scheitel unterhalb der x-Achse).**

Die Nullstellen der Normalparabel $y = x^2 + e$ lassen sich ebenso wie die Nullstelle einer linearen Funktion mit Hilfe einer Bestimmungsgleichung berechnen.

Spiegelungen von Normalparabeln

1. Spiegelung an der y-Achse bedeutet gegenseitigen Austausch der beiden Normalparabeläste. Die Normalparabel und ihr Spiegelbild decken sich. Wegen

$$y = (-x)^2 + e = (+x)^2 + e = x^2 + e$$

haben beide Kurven denselben analytischen Ausdruck $y = x^2 + e$.

2. Die Spiegelung des Bildes von $y = x^2 + e$ an der x-Achse zeigt Abbildung 3.6. Vergleicht man die zu gleichen x-Werten gehörigen y-Werte der Normalparabel und ihres durch Spiegelung an der x-Achse gewonnenen Spiegelbildes, so stellt man fest, daß sie dem Betrag nach gleich sind, sich aber im Vorzeichen unterscheiden. Deshalb hat das Spiegelbild der Kurve $y = x^2 + e$ an der y-Achse den analytischen Ausdruck $-y = x^2 + e$ bzw.

(3) $\quad y = -x^2 - e$.

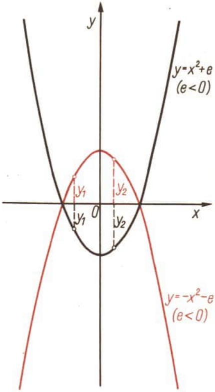


Abb. 3.6.

Die quadratische Funktion $y = (x + d)^2$

Quadratische Funktionen wie

$$y = (x + 2)^2; \quad y = (x - 3)^2; \quad y = (x - \tfrac{1}{7})^2$$

schreibt man in allgemeiner Form

(4) $y = (x + d)^2$

● *Stellen Sie die Wertetafeln der Funktionen* $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$ *und* $y = (x - \frac{1}{7})^2$ *auf!*

Der Vergleich dieser Wertetafeln mit derjenigen der Funktion $y = x^2$ ergibt, daß bei gleichen y-Werten die x-Werte der Funktion $y = (x + d)^2$ um d kleiner sind als die entsprechenden x-Werte der Funktion $y = x^2$.

x	... −3	−2	−1	0	+1	+ 2	+ 3 ...
$y=x^2$	... +9	+4	+1	0	+1	+ 4	+ 9 ...
$y=(x+2)^2$	... +1	0	+1	+4	+9	+16	+25 ...
$x+2$	... −1	0	+1	+2	+3	+ 4	+ 5 ...

Für die grafische Darstellung der Funktion $y = (x + d)^2$ bedeutet das, daß man sie aus dem Bild der Funktion $y = x^2$ dadurch erhält, daß man alle Punkte der Normalparabel um $-d$ parallel zur x-Achse verschiebt. Man sagt auch, daß die Normalparabel um $-d$ parallel zur x-Achse verschoben ist. An ihrer Form ändert diese Translation nichts. In Abbildung 3.7. wurden auf die oben beschriebene Weise die Bilder der Funktionen $y = (x + 2)^2$ und $y = (x - 3)^2$ aus dem Bild von $y = x^2$ gewonnen. Für einige Punkte ist die Verschiebung eingezeichnet worden.

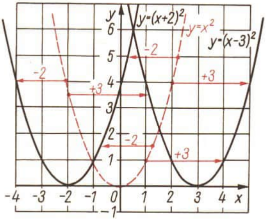


Abb. 3.7.

Das Bild der Funktion $y = (x + d)^2$ ist die Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-d; 0)$ und der Parallelen zur y-Achse im Abstand $-d$ als Symmetrieachse.
Deshalb kann die Kurve $y = (x + d)^2$ sehr einfach mit Hilfe der Normalparabelschablone gezeichnet werden. Der Scheitelpunkt der Schablone ist in den Punkt $S(-d; 0)$ zu legen, und die Symmetrieachse der Schablone muß sich mit der Parallelen zur y-Achse im Abstand d decken. Durch Umfahren der Schablone mit dem Bleistift entsteht das Bild der Funktion $y = (x + d)^2$, vorausgesetzt, daß man für die Achsen des Koordinatensystems dieselbe Längeneinheit benutzt hat wie für die Schablone.
Wegen $y = (x + d)^2 = x^2 + 2d\,x + d^2$ gelten die vorstehenden Betrachtungen für alle quadratischen Funktionen, deren analytischer Ausdruck ein vollständiges Quadrat ist. Ist beispielsweise die quadratische Funktion $y - x^2 + 5x - 6{,}25 = 0$ grafisch darzustellen, so geht man folgendermaßen vor:
Aus $y - x^2 + 5x - 6{,}25 = 0$ folgt $y = x^2 - 5x + 6{,}25 = (x - 2{,}5)^2$.
Das Bild der Funktion ist also die Normalparabel, deren Scheitel S die Koordinaten $(+2{,}5; 0)$ hat und deren Symmetrieachse im Abstand $+2{,}5$ parallel zur y-Achse

[1] translatio (lat.), Übertragung

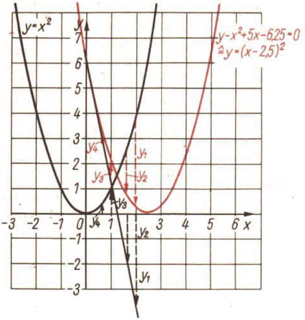


Abb. 3.8.

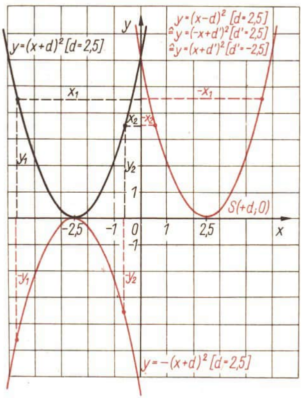


Abb. 3.9.

verläuft (Abb. 3.8.). Die grafische Darstellung der Funktion $y = x^2 - 5x + 6{,}25$ kann aber noch auf einem anderen Wege, nämlich durch **Superposition**[1] gewonnen werden. Der analytische Ausdruck der Funktion $y = x^2 - 5x + 6{,}25$ besteht gewissermaßen aus der quadratischen Funktion $y = x^2$ und der linearen Funktion $y = -5x + 6{,}25$. Beide Funktionen werden grafisch dargestellt (in Abbildung 3.8. schwarz eingezeichnet), und die beiden zu einem x-Wert gehörenden y-Werte x^2 bzw. $-5x + 6{,}25$ werden geometrisch addiert. Das so erhaltene Bild deckt sich mit dem durch Schiebung des Bildes von $y = x^2$ erhaltenen Bild der Funktion $y = x^2 - 5x + 6{,}25$.

Da der Scheitel S der Funktion $y = (x + d)^2$ auf der Achse liegt, hat das Bild der Funktion $y = (x + d)^2$ genau eine Nullstelle $S(-d; 0)$. Es besitzt auch genau einen Schnittpunkt P mit der y-Achse, nämlich $P(0; d^2)$, denn für $x_0 = 0$ gilt $y_0 = 0^2 + 2d\cdot 0 + d^2 = d^2$. Die Spiegelung der Funktion $y = (x + d)^2$ an der y-Achse (Abb. 3.9.) ergibt eine Normalparabel mit dem Scheitel $S'(+d; 0)$ und der Parallelen zur y-Achse im Abstand $+d$ als Symmetrieachse. Der analytische Ausdruck des Spiegelbildes der grafischen Darstellung von $y = (x + d)^2$ bei Spiegelung an der y-Achse heißt

$$y = (x - d)^2 = (-x + d)^2 = x^2 - 2d\,x + d^2.$$

Die Spiegelung der Funktion $y = (x + d)^2$ an der x-Achse (Abb. 3.9.) ergibt eine Normalparabel mit dem Scheitel $(-d; 0)$ und der Parallelen zur y-Achse im Abstand $-d$ als Symmetrieachse. Alle y-Werte sind negativ, aber von gleichem Betrag wie diejenigen der Funktion $y = (x + d)^2$ mit demselben x-Wert. Demnach hat das Spiegelbild den analytischen Ausdruck

$$y = -(x + d)^2 = -x^2 - 2d\,x - d^2.$$

[1] super (lat.), über, darauf; positio (lat.), Stellung, Lage

Die quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e = x^2 + p\,x + q$

Quadratische Funktionen wie

$$y = (x + 2)^2 + 3; \quad y = (x - 3)^2 - 4; \quad y = (x + 3)^2 - 2$$

haben die allgemeine Form

(5) $\boldsymbol{y = (x + d)^2 + e}$

Vergleicht man (5) mit $y = (x + d)^2$, so erkennt man, daß sich beide nur durch das absolute Glied e unterscheiden. Das wirkt sich in der grafischen Darstellung als Schiebung der Normalparabel mit $(-d; 0)$ als Scheitel um e parallel zur y-Achse aus. In Abbildung 3.10. sind die Bilder der Funktionen

$$y = (x + 2)^2 + 3 \quad \text{und} \quad y = (x - 3)^2 - 4$$

durch Schiebung der Bilder von $y = (x + 2)^2$ und $y = (x - 3)^2$ um $+3$ bzw. -4 parallel zur y-Achse gewonnen worden. Das Bild der Funktion $y = (x + d)^2 + e$ bzw. $y = x^2 + p\,x + q$ ist folglich die Normalparabel mit dem Scheitel $S(-d; +e)$ und der Parallelen zur y-Achse im Abstand $-d$ als Symmetrieachse.
Wegen $y = (x + d)^2 + e = x^2 + 2d\,x + d^2 + e = x^2 + p\,x + q$ mit $p = 2d$ und $q = d^2 + e$ gelten die vorstehenden Überlegungen für alle quadratischen Funktionen vom Typ $y = x^2 + p\,x + q$.
Soll beispielsweise die Funktion $y = x^2 - 3x - 2$ grafisch dargestellt werden, so sind zunächst aus $p = -3$ und $q = -2$ die Scheitelpunktskoordinaten $(-d; +e)$ zu berechnen.
Aus $p = 2d = -3$ erhält man für die x-Koordinate des Scheitelpunktes $-d = +\frac{3}{2}$ $\left(\text{allgemein: } -d = -\frac{p}{2}\right)$ und aus $q = d^2 + e = -2$ mit $d^2 = \frac{9}{4}$ die y-Koordinate des Scheitelpunktes zu $e = -2 - \frac{9}{4} = -\frac{17}{4} = -4{,}25$ $\left(\text{allgemein: } e = q - d^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$.
In Abbildung 3.11. ist die Funktion durch Umfahren der mit ihrem Scheitel in

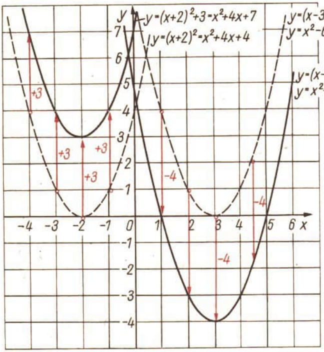
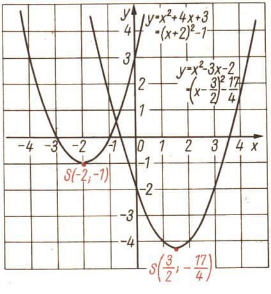


Abb. 3.10.

Abb. 3.11.



$(+\frac{3}{2}; -4{,}25)$ angelegten Normalparabelschablone (Symmetrieachse der Schablone parallel zur y-Achse!) erhalten worden. In derselben Abbildung wurde nach demselben Verfahren noch die Funktion $y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ grafisch dargestellt.
Die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q = (x + d)^2 + e$ enthält alle vorher betrachteten quadratischen Funktionen als Sonderfälle. Das bedeutet, die Bilder aller quadratischen Funktionen vom Typ $y = x^2 + px + q$ sind Normalparabeln, deren Symmetrieachse jeweils parallel zur y-Achse liegt. Für die Lage des Scheitels S im Koordinatensystem gilt

a) im allgemeinen Fall (e und d beliebig): $S(-d; e)$ oder $S\left(-\frac{p}{2}; q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$;

b) im speziellen Fall $e = 0$; $d \neq 0$: $S(-d; 0)$ oder $S\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$;

c) im speziellen Fall $e \neq 0$; $d = 0$: $S(0; e)$ oder $S(0; q)$;

d) im speziellen Fall $e = 0$; $d = 0$: $S(0; 0)$.

Auch für die Schnittpunkte des Bildes von $y = (x + d)^2 + e = x^2 + px + q$ mit den Koordinatenachsen können einige allgemein gültige Aussagen gemacht werden.
Da jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet ist, gibt es auch für $x_0 = 0$ genau einen y-Wert, d. h., jede Normalparabel als Bild der Funktion $y = x^2 + px + q$ hat genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist aus dem analytischen Ausdruck der Funktion leicht zu bestimmen. Er hat das absolute Glied q aus $y = x^2 + px + q$ als Ordinate, weil alle x enthaltenden Glieder wegen $x_0 = 0$ Null sind.
Je nach der Lage des Bildes der Funktion im Koordinatensystem hat das Bild zwei Nullstellen, eine oder keine Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse). Welcher Fall bei der Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ vorliegt, läßt sich an den y-Koordinaten des Scheitelpunktes als dem Punkt mit dem kleinsten y-Wert erkennen. Es gilt:

$$(6) \quad q - \frac{p^2}{4} \lesseqqgtr 0 \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ hat zwei Nullstellen} \\ f(x) \text{ hat eine Nullstelle} \\ f(x) \text{ hat keine Nullstelle.} \end{array} \right.$$

Die Nullstellen lassen sich auch aus dem analytischen Ausdruck durch Lösen einer Bestimmungsgleichung ermitteln. Diese entsteht dadurch, daß in dem analytischen Ausdruck y gleich Null gesetzt wird.
In Abbildung 3.12. ist das Bild der Funktion $y = x^2 + px + q = (x + d)^2 + e$ an der y-Achse gespiegelt worden. Da die Vorzeichen der x-Werte für das Spiegelbild umzukehren sind, ergibt sich für den analytischen Ausdruck

$$\begin{aligned} y &= (-x)^2 + p(-x) + q \\ &= (-x + d)^2 + e = x^2 - px + q \\ y &= (x - d)^2 + e. \end{aligned}$$

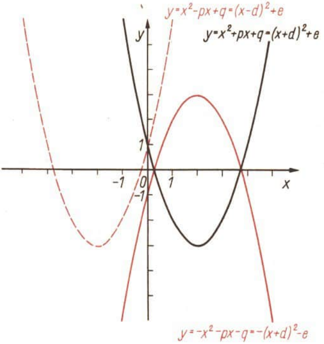


Abb. 3.12.

Wird dagegen an der x-Achse gespiegelt (Abb. 3.12.), so müssen die Vorzeichen der y-Werte umgekehrt werden, so daß dem Spiegelbild der Kurve

$$y = x^2 + p\,x + q = (x + d)^2 + e$$

der analytische Ausdruck

$$-y = x^2 + px + q = (x + d)^2 + e \quad \text{oder} \quad y = -x^2 - px - q = -(x + d)^2 - e$$

zukommt.

Beispiel 1:

Die quadratischen Funktionen

$y = f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x + 2$ und

$y = f(x) = -x^2 + 5x + 1$

sind mit Hilfe der Normalparabelschablone grafisch darzustellen.

Lösung:

Die zur x-Achse symmetrischen Parabeln haben wegen der Umkehrung der Vorzeichen der y-Werte die analytischen Ausdrücke

$$y = x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2\,\frac{9}{16}$$

und

$$y = x^2 - 5x - 1 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Daraus folgen die Scheitelpunktskoordinaten mit

$$S_1\left(-\frac{3}{4};\ -2\frac{9}{16}\right) \text{ bzw. } S_2\left(+\frac{5}{2};\ -7\,\frac{1}{4}\right).$$

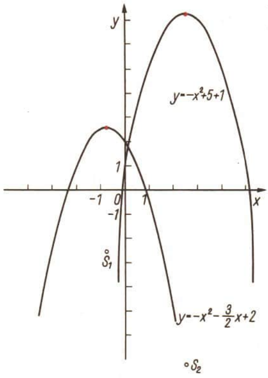


Abb. 3.13.

Die Umkehrung der Vorzeichen der y-Koordinaten der beiden Scheitelpunkte liefert die Scheitelpunktskoordinaten der in Richtung des negativen Teils der y-Achse geöffneten Normalparabeln (Abb. 3.13.).

Aufgaben

8. Verschieben Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2$ um $+2$; -3; -5; $-\frac{1}{2}$; $+\frac{3}{4}$

a) parallel zur x-Achse;

b) parallel zur y-Achse!

Vergleichen Sie die durch Schiebung erhaltenen Figuren in bezug auf Form, Größe und Lage mit der „Originalfigur"!

9. Verschieben Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2$ zunächst um -3 parallel zur x-Achse und dann um $+2$ parallel zur y-Achse! Nehmen Sie noch andere Schiebungen der Normalparabel längs beider Achsen vor!
Vergleichen Sie jeweils die erhaltene Figur mit der „Originalfigur"!

10. Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen.

a) $y = f(x) = x^2 - 7$	**b)** $y = f(x) = x^2 + \sqrt{5}$	**c)** $y = f(x) = x^2 + \frac{3}{4}$
d) $y = f(x) = x^2 - 2\frac{1}{5}$	**e)** $y = f(x) = x^2 - 1{,}8$	**f)** $y = f(x) = x^2 + \sqrt{2{,}7}$

g) $y = f(x) = x^2 - 1{,}5^2$	**h)** $y = f(x) = x^2 - (\frac{2}{3})^2$	**i)** $y = f(x) = x^2 + (\frac{1}{7})^2$
k) $y = f(x) = -x^2 + 2$	**l)** $y = f(x) = -x^2 - \sqrt{7}$	**m)** $y = f(x) = -x^2 - 1\frac{1}{5}$
n) $y = f(x) = -x^2 - 1{,}2^2$	**o)** $y = f(x) = -x^2 + (-1{,}2)^2$	**p)** $y = f(x) = -x^2 + 3{,}8$

Geben Sie für jede Funktion die Zahl der Nullstellen und ihre Lage, die Lage des Schnittpunktes mit der y-Achse sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes an!

11. Zeichnen Sie die Bilder aller Funktionen der Aufgabe **10** mit Hilfe der Normalparabelschablone in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem! Wie können Sie die Bilder auf Richtigkeit und Genauigkeit kontrollieren?

12. Welche Ordinaten müssen die Punkte $P_1(2{,}2;\ ?)$ bzw. $P_2(-3;\ ?)$ haben, damit sie auf dem Bild von Aufgabe **10a, c, h, m** und **p** liegen? Stellen Sie das aus der grafischen Darstellung und durch Rechnung fest!

13. Gegeben sind die Punkte $P_1(3;2)$, $P_2(-2;1{,}8)$, $P_3(1;0{,}64)$, $P_4(-1;-0{,}2)$, $P_5(\sqrt{2};0)$, $P_6(-\frac{1}{2};+1)$, $P_7(+\frac{1}{2};2{,}45)$. Stellen Sie an Hand der grafischen Darstellung der Funktionen aus Aufgabe **10** und durch Rechnung fest, ob P_1 bis P_7 Punkte der Bilder der Funktionen aus Aufgabe **10** sind!

14. Gegeben sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Ordinaten der Scheitelpunkte solcher Normalparabeln, deren Symmetrieachse mit der y-Achse zusammenfällt, mit $y_{s_1} = +5$; $y_{s_2} = -2{,}5$; $y_{s_3} = -\frac{1}{4}$; $y_{s_4} = +\frac{2}{7}$; $y_{s_5} = -3\frac{1}{2}$.

a) Wie lauten die analytischen Ausdrücke derjenigen Funktionen, deren Bilder die Normalparabeln mit den gegebenen Scheitelpunkten sind?

b) Warum sind die Scheitelpunkte durch ihre jeweilige Ordinate eindeutig gegeben?

15. Gegeben sind folgende quadratische Funktionen.

a) $y = f(x) = (x - 2)^2$	**b)** $y = f(x) = (x + 5)^2$
c) $y = f(x) = (x - \frac{7}{2})^2$	**d)** $y = f(x) = (x + \frac{3}{5})^2$
e) $y = f(x) = (x - 3\frac{1}{2})^2$	**f)** $y = f(x) = (x - 0{,}4)^2$
g) $y = f(x) = -(x + 1)^2$	**h)** $y = f(x) = -(x - 1)^2$
i) $y = f(x) = -(x - \frac{1}{3})^2$	**k)** $y = f(x) = x^2 - 4x + 4$
l) $y = f(x) = x^2 + 3x + 2{,}25$	**m)** $y = f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$
n) $y = f(x) = -x^2 - 0{,}2x - 0{,}01$	**o)** $y = f(x) = -x^2 + 5x - \dfrac{25}{4}$
p) $y = f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{16}$	**q)** $y = f(x) = x^2 - 0{,}2x + 0{,}01$
r) $y = f(x) = x^2 + 7x + 12{,}25$	**s)** $y = f(x) = -x^2 - 2{,}2x - 1{,}21$

Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen!

16. Ermitteln Sie aus dem analytischen Ausdruck für das Bild jeder Funktion der Aufgabe **15** die Koordinaten des Scheitelpunktes und die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse!

17. Begründen Sie, warum das Bild jeder Funktion der Aufgabe **15** genau eine Nullstelle hat!

18. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen aus Aufgabe **15a** bis **i** bzw. **15k** bis **s** mit Hilfe der Normalparabelschablone in je ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
Wie können Sie die Bilder auf Richtigkeit und Genauigkeit kontrollieren?

19. Welche Ordinaten müssen die Punkte $P_1(-1;\ ?)$ bzw. $P_2(1{,}5;\ ?)$ haben, damit sie auf dem Bild von Aufgabe **15b, f, i, m, o, s** liegen? Stellen Sie das aus der grafischen Darstellung und durch Rechnung fest!

20. Gegeben sind die Punkte $P_1(12;\ 25)$, $P_2(1;\ -4)$, $P_3\left(-1;\ \frac{4}{25}\right)$, $P_4(2;\ -4{,}45)$, $P_5\left(-1;\ \frac{25}{4}\right)$, $P_6(1{,}5;\ 1{,}21)$, $P_7(0{,}25;\ 0)$, $P_8\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $P_9(-3;\ -4)$, $P_{10}(-3;\ -16)$.
Stellen Sie mit Hilfe der grafischen Darstellung der Funktionen aus Aufgabe **15** und durch Rechnung fest, ob P_1 bis P_{10} Punkte der Bilder der Funktionen aus Aufgabe **15** sind!

21. Gegeben sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 bis S_6 von solchen Normalparabeln, deren Symmetrieachse zur y-Achse parallel liegt. $S_1(4;0)$, $S_2(-4;0)$, $S_3\left(-\frac{1}{5};0\right)$, $S_4(1{,}7;0)$, $S_5\left(2\frac{1}{3};0\right)$, $S_6\left(-\frac{11}{12};0\right)$

a) Wie lauten die analytischen Ausdrücke derjenigen Funktionen, deren Bilder die Normalparabeln mit den gegebenen Scheitelpunkten sind?

b) Warum müssen hier im Gegensatz zur Aufgabe **14b** beide Koordinaten des Scheitelpunktes gegeben werden?

22. Gegeben sind folgende quadratische Funktionen.

a) $y = f(x) = (x-1)^2 + 2$	**b)** $y = f(x) = (x+2)^2 - 3$
c) $y = f(x) = (x-5)^2 - \frac{2}{5}$	**d)** $y = f(x) = (x-\frac{3}{4})^2 + 1{,}8$
e) $y = f(x) = (x+1{,}2)^2 - 1{,}2$	**f)** $y = f(x) = -(x-2)^2 - 3$
g) $y = f(x) = -(x+3)^2 + 8$	**h)** $y = f(x) = -(x-\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{2}$
i) $y = f(x) = -(x-1{,}5)^2 - 4$	**k)** $y = f(x) = x^2 - 4x - 5$
l) $y = f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{5}$	**m)** $y = f(x) = x^2 + 7x - 2$
n) $y = f(x) = x^2 - 5x - \frac{3}{4}$	**o)** $y = f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
p) $y = f(x) = x^2 - \frac{5}{8}x$	**q)** $y = f(x) = x^2 - 0{,}5x + 1{,}2$
r) $y = f(x) = x^2 - 2{,}3x + 4{,}2$	**s)** $y = f(x) = -x^2 + 6x - 5$
t) $y = f(x) = -x^2 + 7x - \frac{4}{5}$	**u)** $y = f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - 1$
v) $y = f(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x$	

Ermitteln Sie aus dem analytischen Ausdruck jeder Funktion die Koordinaten des Scheitelpunktes des Bildes dieser Funktion sowie dessen Schnittpunkt mit der y-Achse und die Anzahl der Nullstellen!

23. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen aus Aufgabe **22a** bis **i** und **22k** bis **v** in je ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und kontrollieren Sie die Bilder auf Richtigkeit und Genauigkeit!

24. Welche Ordinaten müssen die Punkte $P_1(-5;\ y_1)$ bzw. $P_2(\frac{1}{2};\ y_2)$ haben, damit sie auf dem Bild der Funktionen von Aufgabe **22a, e, h, p, r, v** liegen? Stellen Sie das aus der grafischen Darstellung und durch Rechnung fest!

25. Gegeben sind die Punkte

$P_1(-2;9)$, $P_2\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{9}\right)$, $P_3(-1;2{,}7)$, $P_4\left(\frac{1}{2};1\right)$, $P_5\left(\frac{1}{4};-\frac{15}{16}\right)$,

$P_6\left(0{,}75;\ -4\frac{1}{2}\right)$, $P_7(-0{,}55;\ 2{,}49)$, $P_8\left(\frac{23}{5};-\frac{6}{25}\right)$, $P_9(0;3)$.

Stellen Sie an Hand der grafischen Darstellung der Funktionen aus Aufgabe **22** und durch Rechnung fest, ob P_1 bis P_9 Punkte der Bilder der Funktionen aus Aufgabe **22** sind!

26. Gegeben sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 bis S_8 von solchen Normalparabeln, deren Symmetrieachse zur y-Achse parallel ist: $S_1(-\frac{1}{2};\ -3)$, $S_2(3;\ -\frac{2}{5})$, $S_3(-4;\ -\frac{5}{2})$, $S_4(-\frac{2}{3};\ \frac{8}{3})$, $S_5(0{,}6;\ -0{,}6)$, $S_6(-1{,}2;\ 2{,}4)$, $S_7(-1{,}9;\ -3{,}61)$, $S_8(-5{,}5;\ \frac{7}{8})$.

Wie lauten die analytischen Ausdrücke derjenigen Funktionen, deren Bilder die Normalparabeln mit den gegebenen Scheitelpunkten sind?

27. Gegeben ist die Funktion $y = x^2$ und ihr Bild im rechtwinkligen Koordinatensystem. Auf die Normalparabel werden folgende Schiebungen angewendet (die erste Zahl bedeutet die Schiebung parallel zur x-Achse, die zweite die Schiebung parallel zur y-Achse).

a) $4;\ -3$ **b)** $-3;\ 4$ **c)** $\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}$ **d)** $-0{,}8;\ -3{,}1$
e) $0;\ -4$ **f)** $4;\ 0$ **g)** $a;\ b$ **h)** $0;\ b$
i) $a;\ 0$ **k)** $-r;\ -s$ **l)** $-r;\ 0$ **m)** $0;\ -s$

Wie lauten die analytischen Ausdrücke für die durch Schiebung erhaltenen Normalparabeln?

28. Die verschobenen Normalparabeln der Aufgabe **27** werden an der y-Achse und an der x-Achse gespiegelt. Welche analytischen Ausdrücke haben die Spiegelbilder?

29. Gegeben sind die Funktionen

a) $y = x^2 - 5x - 7$; **b)** $y = x^2 + 2x$; **c)** $y = x^2 - 5$; **d)** $y = x^2 - 2x + 1$.

Wie lauten die analytischen Ausdrücke auf ihre Spiegelbilder an der y-Achse und an der x-Achse?

30. Auf die Bilder der Funktionen der Aufgabe **29** werden folgende Schiebungen angewendet:

auf **a)** $0; +7,\quad +5; 0,\quad +\frac{5}{2}; 0;\quad -\frac{5}{2}; 0,\quad -\frac{5}{2}; +7,\quad -\frac{5}{2}; +\frac{53}{4},$
auf **b)** $0; +1,\quad +1; 0,\quad -1; +1,\quad +1; +1,$
auf **c)** $0; -5,\quad 0; +5,\quad +5; 0,\quad +5; +5$
auf **d)** $0; -1,\quad +1; 0,\quad -1; -1,\quad -1; 0$

Wie lauten die analytischen Ausdrücke für die verschobenen Normalparabeln?

31. Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem je eine Strecke, die parallel zur x-Achse, parallel zur y-Achse, weder zur x-Achse noch zur y-Achse parallel ist! Zeichnen Sie zu jeder der drei Strecken diejenigen Strecken, deren Punkte bei gleichen Abszissen wie die „Originalstrecke“
a) dreimal so große, **b)** 0,8mal so große
Ordinaten haben!
Vergleichen Sie Länge und Richtung der so erhaltenen Strecken mit den „Originalstrecken“!

32. Führen Sie gleichartige Untersuchungen wie in Aufgabe **31** für ein beliebiges Dreieck durch! Vergleichen Sie Form und Größe des entstandenen Dreiecks mit dem „Originaldreieck“!

Die quadratische Funktion $y = a\,x^2$

Quadratische Funktionen wie

$$y = f(x) = 3x^2;\quad y = f(x) = -5x^2;$$
$$y = f(x) = \tfrac{1}{4}x^2;\quad y = f(x) = -0{,}8x^2$$

lassen sich durch

(7) $\boldsymbol{y = a\,x^2}$ $\quad (a \neq 0)$

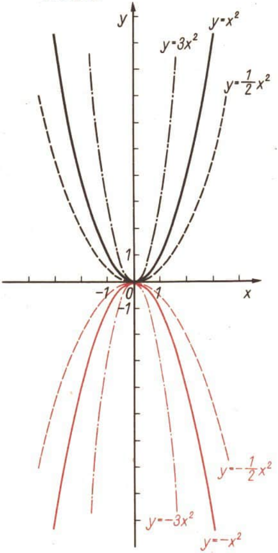
verallgemeinern. Der Koeffizient a soll dabei irgendeine Zahl ungleich 0 sein. Für $a = \pm 1$ erhält man die uns bereits bekannten quadratischen Funktionen $y = x^2$ bzw. $y = -x^2$. Für $a = 0$ erhält man $y = f(x) = 0x^2 = 0$. Auch $y = f(x) = 0$ ist eine

Funktion, da jedem x-Wert genau ein y-Wert, nämlich immer Null, zugeordnet ist. Wir wollen aber diese Funktion nicht als quadratische Funktion bezeichnen.
Ein Vergleich der Wertetabellen der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2$ mit den quadratischen Funktionen $y = f(x) = 3x^2$; $y = f(x) = -5x^2$; $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$; $y = f(x) = -0{,}8x^2$ und $y = f(x) = a\,x^2$ zeigt folgendes Ergebnis:

x	$y = x^2$	$y = 3x^2$	$y = -5x^2$	$y = \frac{1}{4}x^2$	$y = -0{,}8x^2$	$y = a\,x^2$
± 0	0	$3 \cdot 0 = 0$	$-5 \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$	$-0{,}8 \cdot 0 = 0$	$a \cdot 0 = 0$
± 1	1	$3 \cdot 1 = 3$	$-5 \cdot 1 = -5$	$\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$	$-0{,}8 \cdot 1 = -0{,}8$	$a \cdot 1 = a$
± 2	4	$3 \cdot 4 = 12$	$-5 \cdot 4 = -20$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$	$-0{,}8 \cdot 4 = -3{,}2$	$a \cdot 4 = 4a$
$\pm x_1$	x_1^2	$3 \cdot x_1^2$	$-5 \cdot x_1^2$	$\frac{1}{4} \cdot x_1^2$	$-0{,}8 \cdot x_1^2$	$a \cdot x_1^2$
$\pm x_2$	x_2^2	$3 \cdot x_2^2$	$-5 \cdot x_2^2$	$\frac{1}{4} \cdot x_2^2$	$-0{,}8 \cdot x_2^2$	$a \cdot x_2^2$

Bei der Funktion $y = f(x) = a\,x^2$ sind die zu gleichen Abszissen gehörenden Ordinaten a mal so groß wie bei der Funktion $y = x^2$. Die grafische Darstellung der quadratischen Funktion $y = f(x) = a\,x^2$ ist aus dem Bild von $y = f(x) = x^2$ leicht zu gewinnen. Man multipliziert die Ordinaten aller Punkte der Normalparabel mit a.

Abb. 3.14.



Für $1 < a < \infty$ erhält man das Bild der Funktion $y = f(x) = a\,x^2$ durch eine **Streckung** der Normalparabel in Richtung der y-Achse; für $0 < a < 1$ erhält man das Bild der Funktion $y = f(x) = a\,x^2$ durch eine **Stauchung** der Normalparabel in Richtung der y-Achse. Für $a < 0$ gilt entsprechendes bezogen auf das Bild der Funktion $y = -x^2$. Der Koeffizient a heißt deshalb auch Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor. Bei Streckung wird die Normalparabel „schlanker", bei Stauchung wird sie „breiter".
Das Bild der Funktion $y = f(x) = a\,x^2$ heißt quadratische Parabel (Abb. 3.14.).

Die quadratische Funktion $y = a\,x^2 + c$

Quadratische Funktionen wie

$$y = f(x) = 3x^2 - 2; \quad y = f(x) = -5x^2 + 3;$$
$$y = f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + 1; \quad y = f(x) = -0{,}8x^2 - 2$$

lassen sich durch

(8) $\quad \boldsymbol{y = f(x) = a\,x^2 + c} \qquad (a \neq 0)$

verallgemeinern. Der Koeffizient a soll hier wieder eine von Null verschiedene Zahl, das absolute Glied c eine beliebige rationale oder irrationale Zahl sein.
Ein Vergleich der Wertetabellen von $y = f(x) = a\,x^2$ und $y = f(x) = a\,x^2 + c$ zeigt, daß bei gleichen Abszissen die Ordinaten der Punkte von $y = a\,x^2 + c$

gegenüber den Ordinaten der Punkte von $y = a x^2$ um c abweichen. Die grafische Darstellung der Funktion $y = a x^2 + c$ entsteht durch Verschieben der quadratischen Parabel $y = ax^2$ auf der y-Achse um c. In Abbildung 3.15. sind auf diese Weise die Bilder der Funktionen $y = 3x^2 - 2$; $y = -5x^2 + 3$; $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ aus den Bildern der Funktionen $y = 3x^2$; $y = -5x^2$; $y = \frac{1}{4}x^2$ gewonnen worden.

Die Bilder aller Funktionen vom Typ $y + a x^2 + c$ sind folglich quadratische Parabeln, die die y-Achse als Symmetrieachse haben und deren Scheitel im Punkt $S(0; c)$ liegen.

Damit ist gleichzeitig der Schnittpunkt des Bildes von $y = a x^2 + c$ mit der y-Achse gegeben. Die Anzahl der Nullstellen der Bilder von $y = a x^2 + c$ wird durch a und c bestimmt:

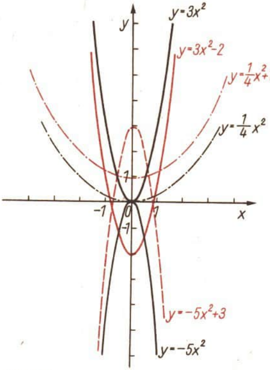


Abb. 3.15.

$$\text{für } a > 0\text{:}\quad c \begin{array}{l} < 0 \text{ zwei} \\ = 0 \text{ eine} \\ > 0 \text{ keine} \end{array} \Bigg\} \text{ Nullstelle(n),}$$

$$\text{für } a < 0\text{:}\quad c \begin{array}{l} < 0 \text{ keine} \\ = 0 \text{ eine} \\ > 0 \text{ zwei} \end{array} \Bigg\} \text{ Nullstelle(n).}$$

● *Begründen Sie die angeführten Gesetzmäßigkeiten über die Anzahl der Nullstellen!*

Die quadratische Funktion $y = A x^2 + B x + C$

Die Funktion

$$(9) \quad \boldsymbol{y = f(x) = A x^2 + B x + C} \qquad (A \neq 0)$$

heißt **allgemeine quadratische Funktion**. Alle bisher betrachteten quadratischen Funktionen sind Sonderfälle dieser allgemeinen quadratischen Funktion.

Für (9) kann man

$$(10) \quad y = f(x) = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = A(x^2 + px + q)$$

schreiben. Die Ordinaten der Punkte der Funktion $y = f(x) = A x^2 + B x + C$ betragen das A-fache der Ordinaten der Punkte der Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ für gleiche Abszissen in beiden Funktionen.

Das Bild der allgemeinen quadratischen Funktion entsteht durch Streckung bzw. Stauchung derjenigen Normalparabel auf das A-fache in Richtung der y-Achse, die das Bild der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$ ist. Da der Scheitelpunkt des Bildes von $y = f(x) = x^2 + px + q$ die Koordinaten $\left(-\frac{p}{2}; q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$ hat,

erhält man für $y = f(x) = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$ die Scheitelpunktskoordinaten dieser Normalparabel $S\left(-\frac{A}{2A}; \frac{C}{A} - \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right)$. In Abbildung 3.16. sind die Bilder der Funktionen $y = f(x) = 2x^2 - 5x - 2$ und $y = f(x) = -3x^2 + 2x + 3$ auf diese Weise gezeichnet worden.
Auch das Bild der allgemeinen quadratischen Funktion $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ hat genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse (bei $+C$) und je nach der Lage der quadratischen Parabel im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem zwei Nullstellen, eine oder keine Nullstelle.

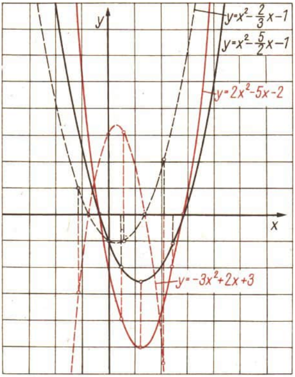


Abb. 3.16.

Aufgaben

33. Führen Sie gleichartige Untersuchungen wie in Aufgabe **31** am Bild der Funktion $y = x^2$ durch! Vergleichen Sie die entstehenden Kurven mit der Normalparabel! Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede können Sie feststellen?
Zu welchem Ergebnis gelangen Sie, wenn Sie die Ordinaten aller Punkte der Kurven
a) -3mal so groß, **b)** $-0{,}8$mal so groß
wie die Ordinaten der Punkte der Normalparabel wählen?

34. Stellen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem folgende Funktionen grafisch dar!
a) $y = x^2$ **b)** $y = 3x^2$ **c)** $y = \frac{1}{3}x^2$ **d)** $y = -x^2$ **e)** $y = -3x^2$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x^2$
Wie kann man die Bilder der letzten drei Funktionen aus den Bildern der ersten drei gewinnen?

35. Stellen Sie
a) $y = (x + 5)^2$, **b)** $y = (2x + 5)^2$, **c)** $y = 2(x + 5)^2$, **d)** $y = (\frac{1}{2}x + 5)^2$,
e) $y = \frac{1}{2}(x + 5)^2$
in einem Koordinatensystem dar! Spiegeln Sie die Bilder der vorstehenden Funktionen an der y-Achse, und ermitteln Sie die analytischen Ausdrücke der Spiegelbilder!
Spiegeln Sie sodann die Bilder der fünf gegebenen Funktionen und deren an der y-Achse erhaltenen Spiegelbilder an der x-Achse! Ermitteln Sie die analytischen Ausdrücke der neuen Bilder!

36. Stellen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem dar!
a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = 2x^2 + 3$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ **d)** $y = -2x^2 + 3$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
Spiegeln Sie die Bilder an der x-Achse und außerdem an der y-Achse! Ermitteln Sie die analytischen Ausdrücke der Spiegelbilder! Lesen Sie aus der grafischen Darstellung die Koordinaten der Nullstellen ab!

37. Stellen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem dar!

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = 2{,}5x^2 - 10$ **c)** $y = 0{,}2x^2 - 0{,}8$ **d)** $y = -3x^2 + 12$

e) $y = -0{,}6x^2 + 2{,}4$

Spiegeln Sie die Funktionen an der x-Achse, und ermitteln Sie deren analytische Ausdrücke! Welche Punkte haben alle zehn Kurven gemeinsam? Geben Sie weitere Funktionen an, deren Bilder durch die gemeinsamen Punkte der zehn Kurven verlaufen!

38. Stellen Sie

$y = +3x^2 - 7{,}5x + 1{,}2$; $y = -3x^2 + 7{,}5x - 1{,}2$; $y = 3x^2 + 7{,}5x + 1{,}2$;

$y = -3x^2 - 7{,}5x - 1{,}2$; $y = 3x^2 + 7{,}5x - 1{,}2$; $y = -3x^2 - 7{,}5x + 1{,}2$

in einem Koordinatensystem dar!

Untersuchen Sie, welche der sechs Bilder zueinander symmetrisch bezüglich der x-Achse bzw. der y-Achse liegen! Vergleichen Sie die analytischen Ausdrücke der zueinander symmetrischen Funktionsbilder!

39. Benutzen Sie die Normalparabelschablone zur grafischen Darstellung folgender Funktionen in je einem speziellen Koordinatensystem!

a) $y = 2x^2$; $y = -2x^2 + 1$; $y = 2(x+3)^2$; $y = -2(x-1)^2$

b) $y = -5x^2 + 7$; $y = 5x^2 - 4$; $y = 5(x-1)^2 + 4$; $y = -5(x+3)^2 + 10$

Anleitung: Beachten Sie, daß statt der Streckung der Normalparabel die y-Achse auch entsprechend gestaucht werden kann!

3.2. Quadratische Bestimmungsgleichungen

Quadratische Funktion und quadratische Bestimmungsgleichung

Die Ermittlung der Nullstellen der quadratischen Funktion

(11) $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ($A \neq 0$; A, B, C rational oder irrational)

ist uns bisher nur durch Zeichnen des Bildes und durch Ablesen der Abszissen der evtl. vorhandenen Nullstellen möglich.

Bei der linearen Funktion

(12) $y = f(x) = mx + n$

kennen wir dagegen auch ein Verfahren, die Nullstelle zu berechnen. Dazu wird bekanntlich, weil der y-Wert der Nullstelle gleich Null ist, in (12) $y = f(x)$ gleich Null gesetzt.

Dadurch entsteht die lineare Bestimmungsgleichung

(13) $0 = mx + n$,

in der x eine bestimmte, vorläufig noch unbekannte Zahl bedeutet. Durch Isolieren von x in der Gleichung (13) läßt sie sich bestimmen.

Entsprechend lassen sich die Nullstellen der quadratischen Funktion (11) auf rechnerischem Wege dadurch ermitteln, daß man in (11) $y = 0$ setzt.

Nach dem Vertauschen der Seiten entsteht die quadratische Bestimmungsgleichung.

(14) $Ax^2 + Bx + C = 0$ $\quad (A \neq 0;\ A, B, C$ rational oder irrational)

Wegen $A \neq 0$ kann Gleichung (14) durch A dividiert werden, und man erhält

(15) $x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{B}{A}$ und $q = \frac{C}{A}$,

worin x bestimmte, vorläufig noch unbekannte Zahlen bedeuten.
Die Gleichung (15) heißt die **Normalform der gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung.** Die Unbekannte x kommt sowohl „quadratisch" als auch „linear" vor. Das **quadratische Glied** ist x^2, $p\,x$ heißt **lineares Glied,** q heißt das **absolute Glied.** Der Koeffizient des linearen Gliedes der Normalform der gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung ist p. Dabei sind p und q rationale oder irrationale Zahlen.

Beispiel 2:

$x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$

Normalform: $x^2 + (-\frac{1}{2})x + (-2) = 0 \qquad p = -\frac{1}{2}; \qquad q = -2$

Für spezielle Werte von p und q ergeben sich aus der Normalform der gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung wichtige Sonderfälle:

1. Ist $p = 0$ und gleichzeitig $q \neq 0$, so geht die Normalform (15) über in

(16) $x^2 + q = 0$

Gleichung (16) heißt **rein-quadratische Gleichung,** weil das lineare x-Glied fehlt. Sie liefert die Nullstellen der speziellen quadratischen Funktion

(17) $y = f(x) = x^2 + q$.

2. Ist $q = 0$ und gleichzeitig $p \neq 0$, so geht die Normalform (15) über in

(18) $x^2 + px = 0$

d. h. in eine gemischt-quadratische Gleichung ohne absolutes Glied. Sie liefert die Nullstellen der speziellen quadratischen Funktion

(19) $y = f(x) = x^2 + px$.

3. Ist schließlich $p = 0$ und gleichzeitig $q = 0$, so geht die Normalform (15) über in

(20) $x^2 = 0$

Sie liefert die Nullstelle der speziellen quadratischen Funktion

(21) $y = f(x) = x^2$.

Begründen Sie, warum (20) *sowohl als ein Sonderfall von* (16) *als auch von* (18) *aufgefaßt werden kann!*

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Zahlen, deren Quadrat gleich

a) 25	**b)** 121	**c)** 1024	**d)** $\frac{4}{9}$	**e)** $\frac{64}{81}$
f) $\frac{225}{96}$	**g)** $\frac{147}{363}$	**h)** $\frac{100}{576}$	**i)** $\frac{200}{1250}$	**k)** $\frac{180}{125}$
l) 0,04	**m)** 0,0001	**n)** 4,84	**o)** 12,25	**p)** 0,4225
q) 0,0256	**r)** 0,289	**s)** 0,036		

ist!

2. Ermitteln Sie die Zahlen, deren Quadrat gleich

a) 32,4	**b)** 44,1	**c)** a^2	**d)** $9r^2$	**e)** $0{,}01p^2$
f) 5	**g)** 13	**h)** 2	**i)** a	**k)** m

ist!

3. Wieviel Lösungen erhalten Sie für jede Zahl aus den Aufgaben **1** und **2**? Worin stimmen sie überein, worin unterscheiden sie sich?

4. Welche Rechenart benutzten Sie bei der Lösung der Aufgaben **1** und **2**? Welche Beziehung besteht zwischen dieser Rechenart und dem Quadrieren?

5. Kennen Sie Zahlen, deren Quadrat eine negative Zahl ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

6. Bestimmen Sie die Seitenlänge des Quadrates, dessen Flächeninhalt

a) 441 m²	**b)** 0,81 cm²	**c)** 2,89 dm²	**d)** 0,0064 mm²	**e)** 1 km²
f) 10 km²	**g)** 3,24 ha	**h)** 32,4 ha	**i)** b FE (Flächeneinheiten)	

beträgt!

7. Rechnen Sie 1 km² in folgende Flächenmaße um!

a) ha	**b)** a	**c)** m²	**d)** dm²	**e)** cm²	**f)** mm²

8. a) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die Bilder aller quadratischen Funktionen vom Typ $y = f(x) = x^2 + q$ im rechtwinkligen Koordinatensystem?

b) Wie beeinflußt q die Lage des Bildes von $y = f(x) = x^2 + q$ im rechtwinkligen Koordinatensystem?

c) Welche Folgerungen ergeben sich aus **b** für die Anzahl der Nullstellen der Funktion $y = f(x) + x^2 + q$?

d) Welche besondere Symmetrieeigenschaft weisen die Nullstellen von $y = f(x) = x^2 + q$ (soweit vorhanden) auf?

9. a) Unter welchen Bedingungen ist ein Produkt aus zwei Faktoren gleich Null?

b) Welche Schlußfolgerungen können Sie aus der Bestimmungsgleichung $x(x + a) = 0$ (x ist die Unbekannte) ziehen?

10. Welche speziellen Eigenschaften haben alle quadratischen Funktionen vom Typ $y = f(x) = x^2 + p\,x$ in bezug auf ihre Nullstellen? Begründen Sie Ihre Antwort!

11. Ergänzen Sie folgende mathematischen Ausdrücke zu einem vollständigen Quadrat!

a) $x^2 + 4x$	**b)** $x^2 - 4x$	**c)** $x^2 - 3x$	**d)** $x^2 - \frac{1}{3}x$	**e)** $x^2 - \frac{5}{2}x$
f) $x^2 - \frac{2}{5}x$	**g)** $x^2 - 0{,}1x$	**h)** $x^2 - 100x$	**i)** $x^2 - 0{,}05x$	**k)** $3x - x^2$
l) $\frac{1}{4}x + x^2$	**m)** $(\frac{2}{3} - x) \cdot x$	**n)** $x^2 + p\,x$	**o)** $x^2 - 4s\,x$	**p)** $x^2 + m\,x$

Erläutern Sie das Bestimmen der quadratischen Ergänzung!

Die Lösung der gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$

Zur Lösung der rein-quadratischen Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$ formen wir die Gleichung nach

(22) $\boldsymbol{x^2 = -q}$ $(q \leqq 0)$

um. Gleichung (22) ist die mathematische Formulierung der Frage, welche unbekannten Zahlen mit sich selbst multipliziert gleich $-q$ sind. Wie wir in den Aufgaben 1 und 2 (S. 112) erkannt haben, gibt es zwei Zahlen x_1 und $x_2 = -x_1$, deren Quadrat gleich $-q$ ist. Es sind:

(23a) $x_1 = +\sqrt{-q}$ $\quad (q \leqq 0)$

und

(23b) $x_2 = -x_1 = -\sqrt{-q};$ $\quad (q \leqq 0)$

kürzer

(23c) $\boldsymbol{x_{1;2} = \pm\sqrt{-q}}$ $(q \leqq 0)$.

Dabei ist $\sqrt{-q}$ diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich $-q$ ist. Mit Hilfe der Probe prüfen wir die Richtigkeit der gewonnenen beiden Ergebnisse durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung und anschließendem Vergleich nach.

Probe für x_1:

linke Seite: $(+\sqrt{-q})^2 + q = -q + q = 0$

rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

Probe für x_2:

linke Seite: $(-\sqrt{-q})^2 + q = (\sqrt{-q})^2 + q = -q + q = 0$

rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

Die rein-quadratische Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$ hat
für $q < 0$ zwei Lösungen, die dem Betrag nach gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben,
für $q = 0$ eine Lösung, nämlich 0 und
für $q > 0$ keine Lösung im Bereich der rationalen oder irrationalen Zahlen.

Begründen Sie, weshalb q die Anzahl der Lösungen bestimmt!

Beispiel 3:

$$x^2 - 49 = 0$$

Isolieren von x^2:

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ x_{1;2} &= \pm\sqrt{49} \\ x_1 &= +7 \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Probe für x_1:

linke Seite: $(+7)^2 - 49 = 49 - 49 = 0$

rechte Seite: 0 Vergleich: $0 = 0$

Probe für x_2:

linke Seite: $(-7)^2 - 49 = 49 - 49 = 0$

rechte Seite: 0 Vergleich: $0 = 0$

Die Lösungen lassen sich auch zu einer Probe vereinigen:

linke Seite: $(\pm 7)^2 - 49 = 49 - 49 = 0$

rechte Seite: 0 Vergleich: $0 = 0$

Beispiel 4:

Aus einem Rundholz mit $d = 20$ cm Mindestdurchmesser soll ein Balken mit möglichst großem quadratischem Querschnitt hergestellt werden. Die Kantenlänge des Balkenquerschnittes ist zu bestimmen.

Lösung: Bezeichnet man die gesuchte Kantenlänge mit x (in cm), so gilt nach dem pythagoreischen Lehrsatz (Abb. 3.17.):

$$x^2 + x^2 = d^2$$
$$2x^2 = d^2$$
$$x^2 = \frac{d^2}{2}$$
$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{d^2}{2}}$$

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{400}{2}}$$
$$x_{1;2} = \pm\sqrt{200}$$
$$x_1 = +14{,}14$$
$$x_2 = -14{,}14.$$

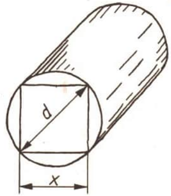


Abb. 3.17.

Die Lösung x_2 ist für den betrachteten praktischen Sachverhalt unbrauchbar. Die Probe für x_1 wird am Aufgabentext vorgenommen. Für den größten quadratischen Querschnitt gilt

einerseits $x_1^2 + x_1^2 = (\sqrt{200})^2 + (\sqrt{200})^2 = 200 + 200 = 400$

und andererseits $d^2 = 20^2 = 400$

Vergleich $400 = 400$

Die Querschnittskante des Balkens ist etwa 14 cm lang.

Häufig erst ist nach Umformungen erkennbar, daß es sich um eine rein-quadratische Gleichung handelt.

Formen Sie die Gleichung $x - \frac{3}{5} = \frac{6{,}5}{2x + 1{,}2}$ *in eine rein-quadratische Gleichung um!*

Der Zahlencharakter der Lösungen der rein-quadratischen Gleichung $x^2 + q = 0$

Die Entscheidung, ob für $x^2 + q = 0$ mit $q < 0$ die beiden Lösungen jeweils rational oder irrational sind, wird durch den Zahlencharakter von $\sqrt{-q}$ bestimmt. Wir wollen jetzt beweisen, daß die rein-quadratische Gleichung $x^2 - 2 = 0$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Wenn die beiden Lösungen von $x^2 - 2 = 0$ rationale Zahlen wären, so könnte man sie durch die vollständig gekürzten Brüche $\frac{p}{q}$ bzw. $-\frac{p}{q}$ (p und q ganzzahlig) darstellen; denn jede rationale Zahl kann als gemeiner Bruch geschrieben und so weit gekürzt werden, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Aus der Annahme $x_{1;2} = \pm \frac{p}{q}$ folgt:

(24) $\left(\pm \frac{p}{q}\right)^2 - 2 = 0.$

Daraus folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

und

(25) $p^2 = 2q^2.$

Wegen des ganzzahligen q ist p^2 demnach eine gerade Zahl. Dann ist aber auch p gerade, also etwa

(26) $p = 2p'$ (p' ganzzahlig).

(26) in (25) eingesetzt, ergibt

$$(2p')^2 = 2q^2$$

(27) $2p'^2 = q^2.$

Wegen des ganzzahligen p' ist also q^2 und folglich auch q geradzahlig, also etwa $q = 2q'$.
Aus der Annahme, daß die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ durch die teilerfremden Brüche $\frac{p}{q}$ bzw. $-\frac{p}{q}$ dargestellt werden können, folgt, daß die Brüche nicht teilerfremd sind, was im Widerspruch zu der Annahme steht. Deshalb ist die Annahme, die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ seien rationale Zahlen, falsch. Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ sind nicht rational; sie heißen irrationale Zahlen.
Die vorstehend benutzte Beweismethode heißt **indirekter Beweis.** Sie wird in der Mathematik sehr häufig benutzt. Ihr Ausgangspunkt ist eine Annahme, aus der mittels logischer Schlüsse Folgerungen gezogen werden. Sobald auch nur eine Folgerung der Annahme widerspricht, muß diese Annahme falsch sein, vorausgesetzt, daß sämtliche Folgerungen auf richtigen logischen Schlüssen beruhen.

Grafische Lösungsverfahren für die rein-quadratische Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$

Neben der rechnerischen Lösung der rein-quadratischen Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$ gibt es auch mehrere grafische Lösungsverfahren, von denen nachstehend zwei betrachtet werden sollen.
1. Bekanntlich liefern die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + q = 0$ die Nullstellen der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + q$. Folglich sind die Nullstellen des Bildes der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + q$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + q = 0$. Da das Bild der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + q$ eine Normalparabel (Symmetrieachse und y-Achse fallen zusammen) mit den Scheitelpunktskoordinaten $S(0; +q)$ ist, lassen sich mit Hilfe der Normalparabelschablone die Schnittpunkte des Bildes von $y = f(x) = x^2 + q$ mit der x-Achse sehr schnell gewinnen. In Abbildung 3.18. ist diese grafische Lösungs-

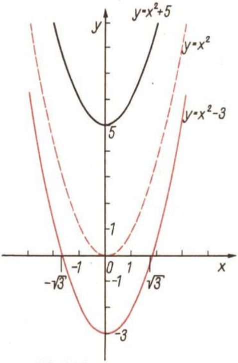


Abb. 3.18.

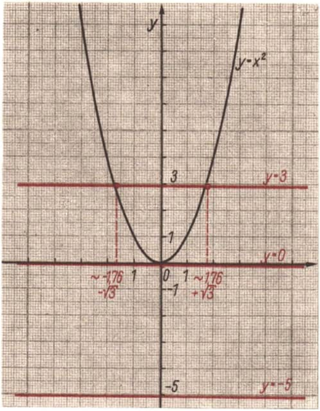


Abb. 3.19.

methode für die quadratischen Bestimmungsgleichungen $x^2 - 3 = 0$, $x^2 = 0$ und $x^2 + 5 = 0$ durchgeführt.

2. Beim zweiten Verfahren wird eine in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem sehr genau gezeichnete Normalparabel benutzt. Die quadratische Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$ wird in der Form $x^2 = -q$ geschrieben und jede Seite dieser Gleichung als eine Funktion aufgefaßt und grafisch dargestellt (Normalparabel und Parallele zur x-Achse im Abstand $-q$). Die x-Werte der Schnittpunkte der Parallelen zur x-Achse im Abstand $-q$ und der Normalparabel sind dann die gesuchten Lösungen der rein-quadratischen Bestimmungsgleichung $x^2 + q = 0$. Bei Verwendung von Millimeterpapier lassen sich die gesuchten Lösungen sofort ablesen (Abb. 3.19.).

Aufgaben

12. Lösen Sie rechnerisch folgende rein-quadratische Bestimmungsgleichungen, und machen Sie in jedem Fall die Probe!

a) $x^2 - 576 = 0$ **b)** $x^2 - 12{,}96 = 0$ **c)** $x^2 - 36\,100 = 0$ **d)** $x^2 - \frac{225}{16} = 0$

e) $x^2 = 0{,}01$ **f)** $x^2 = 3136$ **g)** $x^2 = 0{,}016$ **h)** $x^2 = \frac{324}{196}$

i) $x^2 + 17 = 0$ **k)** $x^2 + 0{,}3 = 0$ **l)** $x^2 + \frac{2}{3} = 0$ **m)** $3x^2 - 12 = 0$

n) $a\,x^2 = 2{,}89a$ **o)** $32x^2 - 800 = 0$ **p)** $17\left(x^2 - \frac{289}{324}\right) = 0$ **q)** $\frac{x^2}{5} - 125 = 0$

r) $\frac{x^2}{m} - 16m = 0$ **s)** $\frac{r}{s}x^2 - \frac{s}{r} = 0$ **t)** $\frac{r}{s}x^2 + \frac{s}{r} = 0$ **u)** $\frac{r}{s}x^2 - \frac{r}{s} = 0$

v) $\frac{8}{9}x^2 - \frac{288}{676} = 0$ **w)** $\frac{3}{11}x\left(x - \frac{12}{75x}\right) = 0$ **x)** $ax^2 + b = 0$ **y)** $m^2x^2 - n^2 = 0$

13. a) Lösen Sie einige der Aufgaben aus **12** auch grafisch!

b) Welche Nachteile der grafischen Lösungsverfahren können Sie dabei feststellen?

14. a) Welche Aufgaben aus **12** haben rationale, welche irrationale, welche keine rationalen oder irrationalen Lösungen?

b) Warum läßt sich das für einige Aufgaben nicht ohne weiteres feststellen?

c) Geben Sie für diese Aufgaben die Bedingungen an, unter denen die Lösungen rational bzw. irrational bzw. nicht rational oder irrational sind!

15. a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^2 - 3 = 0$ keine rationalen Lösungen besitzt!

b) Geben Sie für $\sqrt{3}$ auf eine, zwei und drei Dezimalen genau je zwei rationale Näherungswerte an, von denen der eine kleiner und der andere größer als $\sqrt{3}$ ist!

16. Begründen Sie, warum Beispiel **4** die Lösung im Antwortsatz nur auf volle Zentimeter genau angegeben worden ist!

17. Lösen Sie die folgenden Bestimmungsgleichungen, und machen Sie in jedem Fall die Probe!

a) $(x-4)(x+4) = 0$ **b)** $(x-7)^2 + 14x = 0$

c) $x + 3 + \dfrac{5}{x-3} = 0$ **d)** $(x+a)(x-b) + (x+b)(x-a) + 2ab = 0$

e) $x + \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{x - \frac{3}{5}} = 0$ **f)** $x : (x-5) = (x+5) : (-3x)$

g) $\dfrac{x+25}{x+9} = \dfrac{13+x}{47-x}$ **h)** $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} = 0$

i) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{2(a^2+1)}{1-a^2}$

18. Ermitteln Sie aus den folgenden Gleichungen die unterstrichene Unbekannte!

a) $5^2 + \underline{b}^2 = 13^2$ **b)** $a^2 + b^2 - \underline{c}^2 = 0$ **c)** $\underline{y_1}^2 - 2p\,x_1 = 0$

d) $\dfrac{4^2}{25} + \dfrac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{\underline{b}^2} = 1$ **e)** $\dfrac{100}{\underline{a}^2} - \dfrac{36}{64} = 1$ **f)** $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$

Die Lösung der gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung $x^2 + px = 0$

Die Lösungen der gemischt-quadratischen Gleichung mit dem absoluten Glied Null

(28) $\boldsymbol{x^2 + px = 0}$ (p rational oder irrational)

findet man nach Umformung der Gleichung zu

(29) $x(x+p) = 0$

durch eine einfache Überlegung: Von dem in (29) auf der linken Seite stehenden Produkt $x(x+p)$ wird in (29) ausgesagt, daß es gleich Null ist. Das ist bekanntlich nur dann der Fall, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.
Demnach folgt aus (29)

a) 1. Faktor gleich Null angenommen:

$x_1 = 0$

b) 2. Faktor gleich Null angenommen:

$$x_2 + p = 0$$
$$x_2 = -p.$$

Proben:

a) für $x_1 = 0$:

linke Seite:	$0^2 + p \cdot 0 = 0$
rechte Seite:	0
Vergleich:	$0 = 0$

b) für $x_2 = -p$:

linke Seite:	$(-p)^2 + p \cdot (-p) = p^2 - p^2 = 0$
rechte Seite:	0
Vergleich:	$0 = 0$

Da p eine rationale oder irrationale Zahl ist, hat die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$ zwei rationale (wenn p rational) oder eine rationale und eine irrationale Lösung (wenn p irrational). Die entsprechende quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + px$ hat auch immer zwei Nullstellen, von denen eine im Koordinatenursprung liegt.

Beispiel 5:

	$x^2 - \frac{9}{5}x = 0$
Ausklammern:	$x(x - \frac{9}{5}) = 0$
1. Faktor Null gesetzt:	$x_1 = 0$
2. Faktor Null gesetzt:	$x_2 - \frac{9}{5} = 0$
	$x_2 = \frac{9}{5}$

Probe:

	$x_1 = 0$	$x_2 = \frac{9}{5}$
linke Seite	$0^2 - \frac{9}{5} \cdot 0 = 0 - 0 = 0$	$(\frac{9}{5})^2 - \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{5} = (\frac{9}{5})^2 - (\frac{9}{5})^2 = 0$
rechte Seite	0	0
Vergleich	$0 = 0$	$0 = 0$

Aufgaben

19. Lösen Sie die folgenden quadratischen Bestimmungsgleichungen, und führen Sie stets die Probe durch!

a) $x^2 - 5x = 0$ **b)** $x^2 + 5x = 0$ **c)** $x^2 - 2x = 0$ **d)** $x^2 + \frac{1}{4}x = 0$

e) $11x^2 - 33x = 0$ **f)** $a(x^2 - bx) = 0$ **g)** $\frac{m}{n}x^2 + \frac{n}{m}x = 0$ **h)** $3{,}5x^2 + \frac{3}{5}x = 0$

i) $(\frac{3}{5}x - x^2) \cdot 15 = -6x$ **k)** $4x - x = \frac{6x}{x+3}$ **l)** $\frac{x + \frac{3}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{5}{x - \frac{5}{8}}$

m) $\frac{x+a}{x-b} = \frac{-a}{x+b}$

20. Jemand dividiert die Gleichung $x^2 + px = 0$ durch x und erhält die Lösung $x = -p$. Welchen Fehler hat er gemacht?

21. Wie lassen sich gemischt-quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 + px = 0$ grafisch lösen?

Die Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Bei der Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ benutzen wir die quadratische Ergänzung (vgl. S. 24). Das Verfahren soll zunächst am Beispiel der gemischt-quadratischen Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

erläutert werden. Beidseitige Subtraktion von 6 ergibt:

$$x^2 + 5x = -6.$$

Das auf der linken Seite stehende unvollständige Quadrat wird durch Addition von $(\frac{5}{2})^2$ zu einem vollständigen Quadrat ergänzt. Da in einer Gleichung nur gleiche Rechenoperationen auf beiden Seiten vorgenommen werden dürfen, ist dann auch auf der rechten Seite die quadratische Ergänzung $(\frac{5}{2})^2$ zu addieren. Man erhält:

$$x^2 + 5x + (\tfrac{5}{2})^2 = (\tfrac{5}{2})^2 - 6.$$

In der Potenzschreibweise bzw. durch Zusammenfassung auf der rechten Seite ergibt das

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25 - 24}{4}.$$

Setzen wir für die Basis $x + \frac{5}{2}$ vorübergehend z, so erhält man die rein-quadratische Gleichung

$$z^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Deren beide Lösungen sind:

$$z_{1;2} = \pm\tfrac{1}{2}.$$

Für $z_{1;2} = x_{1;2} + \frac{5}{2}$ erhält man dann

$$x_{1;2} + \tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{1}{2}$$

und weiter

$$x_1 = -\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}$$
$$x_2 = -\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -3.$$

Probe:

	$x_1 = -2$	$x_2 = -3$
linke Seite	$(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$	$(-3)^2 + 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$
rechte Seite	0	0
Vergleich	$0 = 0$	$0 = 0$

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lassen sich auch alle gemischt-quadratischen Gleichungen lösen, die nicht in der Normalform gegeben sind. Sie sind dann zweckmäßigerweise zunächst so umzuformen, daß auf der einen Seite der Gleichung ein unvollständiges Quadrat entsteht, während auf der anderen Seite nur ein Glied ohne die Unbekannte vorhanden ist.

Beispiel 6:

Die Summe zweier Zahlen ist 20, ihr Produkt 91. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:

Es gilt: Erste Zahl (x) + zweite Zahl (y) = 20

Erste Zahl (x) $\cdot$ zweite Zahl (y) = 91

$$\begin{aligned}
\text{I: } \quad x + y &= 20 \\
\text{II: } \quad \underline{x \cdot y} &\underline{= 91} \\
\text{I: } \quad y &= 20 - x \\
\text{I in II: II*: } \quad x(20 - x) &= 91 \\
20x - x^2 &= 91 \\
x^2 - 20x &= -91 \\
x^2 - 20x + (-10)^2 &= (-10)^2 - 91 \\
(x - 10)^2 &= 9 \\
x_{1;2} - 10 &= \pm 3 \\
x_1 &= 13 \\
x_2 &= 7 \\
y_1 &= 7 \\
y_2 &= 13
\end{aligned}$$

Probe:

	$x_1 = 13;\ y_1 = 7$	$x_2 = 7;\ y_2 = 13$
I: linke Seite	$13 + 7 = 20$	Wegen der Kommutativität der Addition und Multiplikation gleiches Ergebnis wie für $x_1;\ y_1$
rechte Seite	20	
Vergleich	$20 = 20$	
II: linke Seite	$13 \cdot 7 = 91$	
rechte Seite	91	
Vergleich	$91 = 91$	

Ergebnis: Die eine Zahl ist 13, die andere 7.

Die allgemeine Lösungsformel für die Normalform der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$

Das Verfahren der quadratischen Ergänzung ist auch auf die Normalform der allgemeinen gemischt-quadratischen Gleichung

(30) $\quad x^2 = p\,x + q = 0$

anwendbar. Man erhält nach Subtraktion von q

(31) $x^2 + px = -q.$

Durch Addition der quadratischen Ergänzung ergibt sich:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Wegen der Doppeldeutigkeit der Basis erhält man:

(32) $x_{1;2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\qquad \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$

was in

(33) $\boldsymbol{x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$ $\qquad \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$

umgeformt werden kann.
Formel (33) heißt die allgemeine Lösungsformel für die Normalform der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
Alle gemischt-quadratischen Gleichungen lassen sich in die Normalform umformen und dann durch Einsetzen der speziellen Werte für p und q in die Formel (33) lösen.

Beispiel 7:

$$3 - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x^2-1}$$

Umformen zur Normalform:

$$3(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 3$$
$$3x^2 - 3 - 2x - 2 - 3 = 0$$
$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

Normalform:

$$x^2 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{8}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3}; \quad -\frac{p}{2} = \frac{1}{3}; \quad q = -\frac{8}{3}$$

Einsetzen:

$$x_{1;2} = \tfrac{1}{3} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{3})^2 - (-\tfrac{8}{3})}$$
$$x_{1;2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{24}{9}}$$
$$x_{1;2} = \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{5}{3}$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -\tfrac{4}{3}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Die Anzahl und der Zahlencharakter der Lösungen der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Von welcher Zahlenart die Lösungen einer gemischt-quadratischen Gleichung sind, hängt offenbar vom Radikanden in (33) ab. Der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ wird deswegen als **Diskriminante**[1] D der gemischt-quadratischen Gleichung bezeichnet. Da nur nicht-negative Quadratwurzeln rationale oder irrationale Zahlen ergeben, sind folgende Fälle bei den Lösungen der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zu unterscheiden:

a) $\boldsymbol{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0}$: Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $D > 0$ hat zwei rationale oder irrationale Lösungen. Die entsprechende quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ hat **zwei** Nullstellen.
(Diskriminante positiv)

b) $\boldsymbol{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0}$: Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ hat eine Doppellösung, nämlich $x_{1;2} = -\frac{p}{2}$. Die entsprechende quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ hat **eine** Nullstelle, nämlich bei $-\frac{p}{2}$.
(Diskriminante gleich Null)

c) $\boldsymbol{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0}$: Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $D < 0$ hat keine Lösungen im Bereich der rationalen und irrationalen Zahlen. Die entsprechende quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ hat **keine** Nullstelle.
(Diskriminante negativ)

Der Wurzelsatz des VIETA; die Zerlegung in Linearfaktoren

Zwischen den Koeffizienten p und q der Normalform der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und ihren rationalen bzw. irrationalen Lösungen ($D \geqq 0$) bestehen sehr einfache Beziehungen. Da $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ um $\sqrt{D}$ größer und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ um $\sqrt{D}$ kleiner als $-\frac{p}{2}$ ist, gilt:

(34) $\quad \boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}$

oder

(35) $\quad \boldsymbol{p = -(x_1 + x_2)}$.

Das Produkt der beiden Lösungen x_1 und x_2 ist dagegen im Fall $D \geqq 0$ gleich dem absoluten Glied q, wie folgende Umformung zeigt:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q$$

(36) $\quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}$.

Diese Gesetzmäßigkeiten sind ein Spezialfall des **VIETAschen Wurzelsatzes**[2].

[1] discriminare (lat.), unterscheiden
[2] FRANÇOIS VIETA (1540–1603), bedeutender französischer Mathematiker.

Sie lassen sich zur Gewinnung einer anderen wichtigen Gesetzmäßigkeit für gemischt-quadratische Gleichungen von der Normalform $x^2 + p\,x + q = 0$ mit $D \geqq 0$ benutzen. Setzt man nämlich (35) und (36) in $x^2 + p\,x + q = 0$ ein, so erhält man

(37) $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0\,.$

Das läßt sich umformen zu

$$x^2 - x_1\,x - x_2\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

(37) $x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

oder

(38) $$\boldsymbol{x^2 + px + q = (x - x_1)\,(x - x_2)\,.}$$

Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ mit $D \geqq 0$ und den (rationalen oder irrationalen) Lösungen x_1 und x_2 läßt sich in das Produkt aus den zwei Linearfaktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ zerlegen.

Das letzte Ergebnis kann insbesondere benutzt werden, um zu den beiden bekannten Lösungen einer quadratischen Gleichung die Normalform zu bestimmen.

Beispiel 8:

$x_1 = \sqrt{8}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$ seien als Lösung einer quadratischen Gleichung gegeben. Wie heißt die Normalform zu diesen Lösungen?

Lösung: Nach (38) gilt

$$\begin{aligned} x^2 + p\,x + q = (x - \sqrt{8})\,(x + \sqrt{2}) &= x^2 - x\sqrt{8} + x\sqrt{2} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \\ &= x^2 - (2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2})\,x - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= x^2 - x\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

Die Normalform lautet $x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 = 0\,.$

Führen Sie die Probe durch!

Auch der VIETAsche Wurzelsatz hätte zur Probe benutzt werden können:

Nach (35) ist $p = -(x_1 + x_2) = -(\sqrt{8} - \sqrt{2}) = -(2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

und

nach (36) ist $q = x_1 \cdot x_2 = \sqrt{8} \cdot (-\sqrt{2}) = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -4\,.$

Der VIETAsche Wurzelsatz bietet damit eine einfache Möglichkeit zur Durchführung der Probe für eine gelöste quadratische Bestimmungsgleichung.

Die grafische Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$

Ähnlich dem Verfahren für die rein-quadratischen Gleichungen kann man die gemischt-quadratische Gleichung auf zwei verschiedene Weisen grafisch lösen.

Man kann z. B. das Bild der Funktion $y = x^2 + p\,x + q$ zeichnen. Die Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung.

Bei dem anderen Verfahren formt man die Gleichung um in: $x^2 = -p\,x - q$. Die Lösungen erhält man aus den Abszissen der Schnittpunkte der Bilder der beiden

Funktionen $y = x^2$ und $y = -px - q$. Auch hier kann man eine sorgfältig auf Millimeterpapier gezeichnete Normalparabel $y = x^2$ und ein Lineal verwenden. Das Lineal legt man so, daß seine Vorderkante durch die Punkte $P_1(0; -q)$ und $P_2\left(-\frac{q}{p}; 0\right)$ geht.

Begründen Sie die oben angegebene Vorschrift zur Handhabung des Lineals!

Biquadratische Gleichungen

Auch die **biquadratischen** Bestimmungsgleichungen vom Typ

(39) $\quad \boldsymbol{Ax^4 + Cx^2 + E = 0} \quad (A \neq 0;\ A, C, E$ rational oder irrational)

lassen sich mit Hilfe der Lösungsformel (33) für die Normalform einer gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung lösen.
Wegen $A \neq 0$ kann (36) zunächst durch A dividiert werden:

(40) $\quad x^4 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{E}{A} = 0.$

Setzt man nun $x^2 = z$, so erhält man

(41) $\quad z^2 + pz + q = 0 \quad$ mit $\quad p = \frac{C}{A} \quad$ und $\quad q = \frac{E}{A}.$

Darauf läßt sich die Lösungsformel (33) für die Normalform einer gemischt-quadratischen Bestimmungsgleichung anwenden, und man erhält

(42) $\quad \boldsymbol{z_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \qquad \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right],$

also für z zwei rationale oder irrationale Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0$ ist. Daraus ergeben sich dann wegen $x = \pm\sqrt{z}$ für x die vier Lösungen:

(43)
$$x_1 = +\sqrt{z_1} \qquad x_3 = +\sqrt{z_2}$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} \qquad x_4 = -\sqrt{z_2}.$$

Beispiel 9:

$$5x^4 - 65x^2 + 180 = 0$$
$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Substitution $x^2 = z$:
$$z^2 - 13z + 36 = 0$$
$$p = -13; \quad -\frac{p}{2} = +\frac{13}{2};\ q = 36$$

Einsetzen:
$$z_{1;2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36}$$
$$z_{1;2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$z_1 = +9$$
$$z_2 = +4$$

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{9}$$
$$x_{3;4} = \pm\sqrt{4}$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Aufgaben

22. Die folgenden quadratischen Bestimmungsgleichungen sind
1. mit Hilfe der quadratischen Ergänzung,
2. mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu lösen.
Machen Sie in jedem Fall die Probe!

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$ **b)** $x^2 + 3x - 18 = 0$ **c)** $x^2 + 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $x(5 - x) = -24$ **e)** $x = \dfrac{1}{2x+1}$ **f)** $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$

g) $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 2 = 0$ **h)** $x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9} = 0$ **i)** $x^2 - \dfrac{15}{16}x - \dfrac{25}{64} = 0$

k) $x^2 - \dfrac{15}{16}x + \dfrac{9}{64} = 0$ **l)** $x^2 - \dfrac{24}{5}x - 1 = 0$ **m)** $x^2 + x - 156 = 0$

n) $x^2 + 23x + 120 = 0$ **o)** $x^2 - 12x + 30\dfrac{5}{9} = 0$ **p)** $x^2 - \dfrac{45}{14}x - 1 = 0$

q) $x\left(x + \dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{2}{15}(x+1)$ **r)** $\dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{x-5}{\frac{x}{2}}$ **s)** $\dfrac{2x+7}{2-x} = \dfrac{3x}{6x-5}$

t) $x^2 - 4x + 1 = 0$ **u)** $x^2 - \dfrac{2}{5}x - \dfrac{71}{100} = 0$ **v)** $x^2 + \dfrac{14}{3}x + \dfrac{49}{9} = \dfrac{11}{25}$

w) $x^2 + x + 1 = 0$ **x)** $\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3x+5}{x+5}$ **y)** $4x(x-2) = 5(x-3)$

23. Welche der Aufgaben aus **22** haben **a)** rationale, **b)** irrationale, **c)** keine rationalen oder irrationalen Lösungen?
Wie können Sie die Frage beantworten, ohne die Lösungen der Aufgaben in **22** ermittelt zu haben?

24. Lösen Sie die folgenden quadratischen Bestimmungsgleichungen! Machen Sie in jedem Fall die Probe!

a) $x^2 - 2x - 24 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 24 = 0$ **c)** $a^2 + 3a + 2 = 0$
d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **e)** $m^2 + m - 6 = 0$ **f)** $x^2 - 3x = 4$
g) $x^2 + 3x = 10$ **h)** $s^2 = s + 42$ **i)** $13 = r^2 - 12r$

25. Wie finden Sie am schnellsten die Lösungen x_1 und x_2 folgender quadratischer Gleichungen?

a) $(x-3)(x+\frac{1}{5}) = 0$ **b)** $(x+\frac{1}{7})(x-\frac{3}{7}) = 0$ **c)** $(x-5)(x-b) = 0$
d) $(x-\sqrt{3})(x+\frac{1}{2}) = 0$ **e)** $(x-2)(x+3) = 6$ **f)** $(x-r)(x+s) = 0$
g) $(x-ab)(x+c) = 0$ **h)** $(x-\sqrt{7})(x+2\sqrt{5}) = 0$ **i)** $(x+1)(x-1) = 3$

26. Wie lautet jeweils die Normalform der quadratischen Bestimmungsgleichung mit den folgenden Lösungen?

a) $x_1 = -5;\ x_2 = 3$ **b)** $x_1 = 5;\ x_2 = -3$ **c)** $x_1 = -\frac{3}{7};\ x_2 = -\frac{4}{7}$

d) $a_1 = \frac{1}{2};\quad a_2 = -\frac{1}{4}$ e) $m_1 = -3\frac{1}{3};\quad m_2 = +\frac{3}{10}$ f) $r_1 = 21;\quad r_2 = -1$

g) $x_1 = a;\quad x_2 = b$ h) $x_1 = a;\quad x_2 = -a$ i) $x_1 = m_1;\quad x_2 = m_2$

k) $x_1 = r^2;\quad x_2 = s$ l) $a_1 = x;\quad a_2 = y$ m) $b_1 = 5;\quad b_2 = z$

27. Zeigen Sie, daß die quadratischen Bestimmungsgleichungen vom Typ **a)** $x^2 + p\,x = 0$, **b)** $x^2 + q = 0$ ebenfalls mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel (30) lösbar sind!

Hinweis: Formen Sie (33) für Aufgabe **a** und **b** so weit wie möglich um, und vergleichen Sie mit den früher gewonnenen Ergebnissen!

28. Wie lautet der VIETAsche Wurzelsatz für

a) $x^2 + p\,x = 0$, b) $x^2 + q = 0$?

29. Lösen Sie die folgenden quadratischen Bestimmungsgleichungen!

a) $3x^2 - 11x - 4 = 0$ b) $8x^2 + 6 = 16x$ c) $121x^2 - 462x - 256 = 0$

d) $10a^2 + 10a + 12 = 0$ e) $49b^2 = 42b - 9$ f) $3x^2 - 49 = 14x$

g) $(x + 2)\,x + (1 - x)(2x + 1) = -\frac{3}{4}$

h) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) + \left(x + \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{19}{36}$

i) $(3z - 10)(8 - z) - (z + 6)(z - 5) = 18$ k) $(3r - 1)(2r + 15) = (9r - 3)(r + 2)$

l) $2m(m + 1) = (3m - 4)(m + 4)$ m) $(b - 7)(2b - 6) + (5 - b)(b - 2) + 8 = 0$

n) $(x + 1)(x - 2) + (x + 4)(x + 1) + (x - 3)(x + 3) = 0$

o) $(5c - 1)\left(c + \dfrac{7}{5}\right) - \left(2c - \dfrac{1}{5}\right)\left(2c + \dfrac{4}{5}\right) + \left(c + \dfrac{19}{10}\right)\left(\dfrac{2}{5} - 4c\right) = 0$

p) $2x(x - 3) - (x - 3)^2 = 0$ q) $(d + 1)(d - 5) + 2(2d + 1) = 0$

r) $\dfrac{2x - 14}{x + 5} = \dfrac{x - 7}{x - 3}$ s) $\dfrac{6n - 2}{n + 1} - \dfrac{4n + 2}{2n + 2} = \dfrac{6n - 2}{3n}$ t) $\dfrac{8}{x - 3} - \dfrac{10}{x + 3} = 1$

u) $\dfrac{5}{a + 1} + \dfrac{5}{a + 2} = \dfrac{14}{a + 3}$ v) $\dfrac{7}{3r - 2} - 5 = \dfrac{2}{r + \frac{2}{3}}$ w) $5 : (x - 3) = (8 + x) : (-x)$

x) $\dfrac{y + \frac{1}{2}}{2y} + \dfrac{-1}{12y^2} = \dfrac{2}{3}$ y) $\left(\dfrac{1}{x} + 3\right)^2 = 36$

30. Ermitteln Sie die Lösungen x_1 und x_2 der folgenden quadratischen Bestimmungsgleichungen!

a) $x^2 + a\,x + b = 0$ b) $x^2 - 2a\,x + a^2 = 0$ c) $x^2 + 2a = 0$

d) $x^2 - (a + b)x + a\,b = 0$ e) $x^2 + (b_1 - b_2)\,x - b_1 b_2 = 0$ f) $x^2 + (r + 3)\,x + 3r = 0$

g) $\dfrac{x - m}{x + m} + \dfrac{x}{2x - m} = 1$ h) $\dfrac{x - r}{x + r} + \dfrac{x + 2r}{3x + r}$ i) $\dfrac{x - b}{x + b} + \dfrac{x + b}{x - b} = 3\dfrac{1}{3}$

k) $(x - 5c)(x + 5c) - (x + 3c)(x - 3c) + (2x + 3c)^2 = 0$

l) $\dfrac{x - 5p}{x + 3p} + \dfrac{3x + 2p}{2x + p} = 1$ m) $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x + a} = \dfrac{5}{12a}$

31. **a)** Welche Beziehungen bestehen zwischen den Lösungen der gemischt-quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ und den Nullstellen der entsprechenden quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + p\,x + q$?

b) Welches grafische Lösungsverfahren für die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ läßt sich aus **a** gewinnen?

c) Welches rechnerische Verfahren ergibt sich aus **a** für die Bestimmung der Nullstellen der quadratischen Funktion

$y = f(x) = x^2 + p\,x + q$?

d) Warum läßt sich das Verfahren aus **c** auch auf die Bestimmung der Nullstellen der allgemeinen quadratischen Funktion $y = f(x) = A\,x^2 + B\,x + C \; (A \neq 0)$ anwenden?

32. Lösen Sie mittels des Ergebnisses von Aufgabe **31b** die folgenden Bestimmungsgleichungen grafisch!

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 - 3x + 4 = 0$
d) $x^2 - 4x - 5 = 0$ e) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ f) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$
g) $12x^2 + x - 1 = 0$ h) $9x^2 - 1 = 0$ i) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3 = 0$
k) $x = \dfrac{1}{2x+1}$ l) $m^2 - 5m + 6 = 0$ m) $10a^2 + 10a + 12 = 0$

Machen Sie mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes die Probe! Vergleichen Sie die Anzahl der bei jeder Aufgabe erhaltenen Nullstellen mit der Diskriminante der gegebenen Bestimmungsgleichung! Welche Gesetzmäßigkeiten finden Sie bestätigt?

33. Ermitteln Sie rechnerisch die Nullstellen folgender quadratischer Funktionen!

a) $y = f(x) = x^2 + 7x + 12$ b) $y = f(x) = \dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{27}{64}x + 1$
c) $y = f(x) = a^2x^2 + 3a\,x + 2$ d) $y = f(x) = 20x^2 - r\,x - r^2$
e) $y = f(x) = x^2 - 7$ f) $y = f(x) = -x^3 - 1\frac{1}{5}$
g) $y = f(x) = x^2 - 1{,}8$ h) $y = f(x) = (x - 3\frac{1}{2})^2$
i) $y = f(x) = (x - 0{,}4)^2$ k) $y = f(x) = -x^2 + 5x - \dfrac{23}{4}$
l) $y = f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{5}$ m) $y = f(x) = x^2 - 0{,}5x + 1{,}2$
n) $y = f(x) = -x^2 + 7x - \frac{4}{5}$ o) $y = f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

Lösen Sie mit Hilfe des in Aufgabe **13** gewonnenen Verfahrens die Aufgaben **32a** bis **m**!

34. Lösen Sie die folgenden biquadratischen Bestimmungsgleichungen!

a) $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$ b) $x^4 - 3x^2 = \frac{7}{4}$ c) $x^4 - 9(2x^2 - 9) = 1$
d) $x^4 - \frac{5}{3}x^2 = \frac{2}{3}$ e) $(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 + 2(x+1)(x-1) = 3$
f) $\dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 15} + \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 20} = \dfrac{5}{6}$ g) $(x^2 - 3) = \dfrac{2}{(x^2 - 2)}$
h) $(x-2)(x+3) - \dfrac{9x^2 + 6x - 3}{(x+2)(x-3)} = 6$ i) $5x^4 + 1125 = 170x^2$
k) $\dfrac{x^2(x^2 - 1)}{4x + 4} = 4x - 4$

3.3. Zur Wiederholung und Übung — Anwendungsaufgaben

Aus der Arithmetik

1. Die Summe aus dem Quadrat einer negativen Zahl und 79 ist gleich 200. Wie heißt die Zahl?

2. Wenn man das Quadrat gewisser Zahlen um 12 vermindert, so erhält man das Vierfache dieser Zahlen. Wieviel solcher Zahlen gibt es, und welche Zahlen sind das?

3. Das Produkt zweier Zahlen, von denen die eine um ebensoviel größer wie die andere kleiner als 33 ist, beträgt 1064. Welche Zahlen sind das?

4. Die Zahl 53 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt 612 ist. Bestimmen Sie die beiden Summanden!

5. Das Siebenfache einer Zahl ist um das Zehnfache dieser Zahl kleiner als ihr Quadrat. Wie viele und welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

6. Das 10 000fache einer Zahl ist gleich dem Quadrat dieser Zahl. Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

7. Das 400fache einer Zahl ist gleich **a)** dem 25. Teil, **b)** dem 25fachen ihres Quadrates. Gibt es eine Zahl, die die Eigenschaften **a** und **b** gleichzeitig erfüllt?

8. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine um 7 (11) größer ist als die andere, beträgt 505 (61). Welches sind die Zahlen?

9. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produktes
   a) $11 \cdot 13$, **b)** $18 \cdot 73$, **c)** $47 \cdot 53$ verändern,
   1) damit das Produkt gleich
   a) 399 **b)** 4000 **c)** 1740 ist,
   2) damit das Produkt um
   a) 23 abnimmt **b)** 186 zunimmt **c)** 291 abnimmt?

10. Dividiert man 4,5 durch eine Zahl, so erhält man genausoviel wie beim Subtrahieren dieser Zahl von 4,5.

11. Vermindert man den Zähler eines Bruches um 6 und vermindert den Nenner, der um 4 größer ist als der Zähler, ebenfalls um 6, so ist der neue Bruch nur noch halb so groß wie der ursprüngliche.

12. Die Summe aus Zähler und Nenner eines Bruches ist 30. Vergrößert man den Zähler um 9 und verkleinert man den Nenner um dieselbe Zahl, so ist der neue Bruch viermal so groß wie der ursprüngliche.

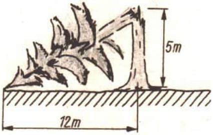


Abb. 3.20.

Aus der Geometrie

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen sich wie 3:4 verhalten. Wie lang sind sie zu zeichnen, wenn die Hypotenuse 5,5 cm lang ist?

2. Ein schwerer Sturm hat einen Baum etwa 5 m oberhalb des Erdbodens abgeknickt (Abb.3.20.). Seine Krone berührt etwa 12 m vom Fuß des Stammes entfernt den in der Umgebung des Baumes waagerechten Waldboden. Wie hoch war der Baum insgesamt?

3. Zwei Funkstreifenwagen der Volkspolizei trennen sich bei der Verfolgung eines flüchtenden Kraftfahrers an einer rechtwinkligen Straßengabelung. Sie sind über Sprechfunk (35 km Reichweite) miteinander verbunden und fahren mit einer Geschwindigkeit von $100\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ bzw. $80\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ auf den ungefähr geradlinig verlaufenden Straßen. Nach 15 Minuten Verfolgungsfahrt sieht der schnellere Wagen den flüchtigen Fahrer vor sich. Kann er zu diesem Zeitpunkt den anderen Wagen über Sprechfunk noch erreichen?
   Wäre eine Funksprechverbindung noch möglich gewesen, wenn der langsamere Wagen den flüchtigen Fahrer nach 15 Minuten eingeholt hätte?

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete um 2,5 cm länger als die andere. Wie groß ist die Hypotenuse, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks 22 cm² beträgt?

5. Um welche Strecke muß man die Seite a eines Quadrates verlängern, um ein Quadrat mit **a)** doppeltem, **b)** dreifachem, **c)** vierfachem Flächeninhalt zu erhalten?

6. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite s?

7. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen eine Seite um 2,5 cm kürzer ist als die andere und dessen Diagonale 12,5 cm lang ist?

8. Von den Diagonalen eines Rhombus mit der Seitenlänge $s = 5{,}2$ cm ist die eine um 5,6 cm länger als die andere. Wie lang sind sie?

9. Der Inhalt eines Rechtecks beträgt 7 Flächeneinheiten. Wie groß sind die beiden Seiten, wenn die eine um $\frac{2}{3}$ Längeneinheiten kleiner ist als die andere?

10. Der Umfang und der Flächeninhalt eines Quadrates sind maßzahlgleich. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt dieses Quadrates?

11. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 37 m, sein Flächeninhalt 85 m². Wie lang sind die Seiten?

12. Die Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 1 m. Verkleinert man jede Seite um 3 m, so beträgt der Flächeninhalt des so entstandenen Rechtecks nur noch $\frac{1}{10}$ des ursprünglichen. Wie groß sind die Rechteckseiten des ursprünglichen und des neuen Rechtecks?

13. Ein Rechteck, dessen eine Seite um 3 cm größer ist als die andere, hat einen Flächeninhalt von 40 cm². Wie lang sind die Seiten eines zum ersten ähnlichen Rechtecks, wenn dessen Flächeninhalt 14,4 cm² beträgt?

14. In einem Dreieck mit 54 cm² Flächeninhalt ist die Grundlinie um 3 cm größer als die Höhe. Ein dazu ähnliches Dreieck hat einen Flächeninhalt von 96 cm². Wie groß sind dessen Grundlinie und Höhe?

15. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 8 mm bzw. 1 cm lang. Wie groß sind die beiden Katheten in einem dazu ähnlichen Dreieck mit doppeltem Flächeninhalt?

16. Bestimmen Sie den Radius desjenigen Kreises, dessen 10 cm lange Sehnen vom Kreismittelpunkt einen Abstand von 1,2 dm haben!

17. Die parallelen Seiten des ein- und umbeschriebenen Quadrates eines Kreises haben 3 cm Abstand voneinander. Wie groß ist der Durchmesser dieses Kreises?

18. Vergrößert man den Durchmesser eines Kreises um 10, so verneunfacht man die Fläche. Wie groß ist der Radius des ursprünglichen Kreises?

19. Die Fläche eines Kreisringes beträgt $\frac{3}{4}$ der Kreisfläche, die zu seinem äußeren Radius von 7 cm Länge gehört. Wie groß ist der innere Radius des Kreisringes?

20. An einen Kreis mit 4,8 cm Radius ist von einem Punkt außerhalb des Kreises eine Tangente konstruiert, deren Abschnittslänge 6,4 cm beträgt. Wie weit ist dieser Punkt vom nächsten Peripheriepunkt des Kreises entfernt?

21. Zwei Seiten eines Dreiecks unterscheiden sich um 3 cm. In einem ähnlichen Dreieck haben die entsprechenden Seiten folgende Maße: Die kleinere Seite ist gleich der größeren des ersten Dreiecks, während die größere 16 cm lang ist. Wie lang sind die Seiten des ersten Dreiecks?

22. Von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 40 cm und 12 cm wird durch eine Parallele zur kürzeren Kathete ein rechtwinkliges Trapez abgeschnitten, dessen Fläche $\frac{4}{5}$ der verbleibenden Dreiecksfläche beträgt. Welchen Abstand hat die Parallele von der kürzeren Kathete?

Aus Physik und Technik

1. Zwei Widerstände sollen hintereinandergeschaltet einen Gesamtwiderstand von 50 Ω (8 kΩ) und parallelgeschaltet einen Gesamtwiderstand von 12 Ω (1,875 kΩ) ergeben. Wie groß sind die Einzelwiderstände jeweils zu wählen?

2. Ein geschlossener Gleichstromkreis wird mit 21 V (48 V) betrieben. Vergrößert man den Widerstand um 1,4 Ω (auf das Doppelte), so sinkt die Stromstärke um 0,5 A (3 A). Wie groß sind jeweils ursprünglicher Widerstand und ursprüngliche Stromstärke?

3. Ein elektrisches Gerät hat einen Widerstand von 22 Ω. Wie groß ist der Spannungsabfall, wenn seine Leistungsaufnahme 550 W beträgt? Um wieviel ist der Spannungsabfall zu vermindern, damit seine Leistungsaufnahme 352 W beträgt?

4. Sinkt die Betriebsspannung eines elektrischen Gerätes um 22 V, so geht die Leistungsaufnahme des Gerätes auf 81 % der Nennleistung zurück. Wie hoch ist die Nennspannung?

5. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Pfeil senkrecht nach oben geschossen werden, wenn er eine Höhe von 61,25 m erreichen soll? Wie lange fliegt der Pfeil bis zum höchsten Punkt, wie lange insgesamt? **Hinweis:** Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben; $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

6. Der Brunnen auf der ehemaligen Festung Königstein ist 152 m tief. Welche Zeit vergeht vom Loslassen eines frei fallenden Steines am **Brunnenrand**? **a)** bis zu seinem Aufschlag, **b)** bis zum Hörbarwerden seines Aufschlages am **Brunnenrand**? ($g \approx 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v_{\mathrm{Schall}} = 330\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$). **Hinweis:** Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben.

7. Ein frei fallender Körper fällt während der ersten Sekunde um $\frac{g}{2}$ m. Um wieviel Sekunden muß man die Fallzeit verlängern, damit insgesamt $4g$, $\frac{9}{2}g$, $8g$ Meter zurückgelegt werden?

8. In einer Montagehalle bewegt sich der Laufkran mit einer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{kr}} = 0{,}75\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Seine Laufkatze bewegt sich rechtwinklig dazu mit einer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{k}} = 0{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Last?

9. Welche Fallgeschwindigkeit v muß ein Hammer mit dem Gewicht $P = 40\,\mathrm{kp}$ besitzen, damit seine kinetische Energie $W_{\mathrm{kin}} = 200$ kpm beträgt?

   Anleitung: $W_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} v^2$; $m = \frac{P}{g}$ entsprechend dem NEWTONschen Grundgesetz $F = m \cdot a$.

10. Um einen oben offenen Wasserbehälter mit quadratischer Grundfläche und einem Fassungsvermögen von 450 l herzustellen, werden aus einem quadratischen Stahlblech an den vier Ecken Quadrate von 20 cm Kantenlänge ausgeschnitten. Die überstehenden Rechtecke werden rechtwinklig zur Grundfläche umgebogen und die aneinanderstoßenden Rechteckkanten verschweißt. Wie groß muß die Kante des quadratischen Blechs gewählt werden?

11. Das Gewölbe einer Brücke besitzt einen Radius $r = 15$ m und eine Spannweite $s = 12$ m (Abb. 3.21.). Wie groß ist die Stichhöhe x?

12. Die Förderanlage eines Schachtes hat 1350 m Tiefe. Das Anfahren des Förderkorbes soll mit gleichmäßiger Beschleunigung a von $0{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ stattfinden, die gleichförmige Fahrt mit einer Geschwindigkeit von $18\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, das Auslaufen mit einer Verzögerung von $0{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Bestimmen Sie
    a) die Zeitdauer der beschleunigten Fahrt,
    b) die Zeitdauer der verzögerten Fahrt,
    c) die während jedes Bewegungsabschnittes zurückgelegten Förderhöhen in Metern und
    d) in Prozenten der Gesamthöhe,
    e) die Gesamtdauer eines Hubes,
    f) das Weg-Zeit- und das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm!

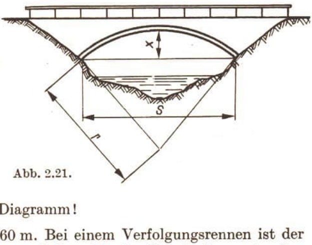


Abb. 2.21.

13. Eine ovale Radrennbahn hat eine Länge von 360 m. Bei einem Verfolgungsrennen ist der Verfolger um $2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ schneller als der Verfolgte, so daß er für eine Runde 2 s weniger benötigt. Nach wieviel Runden holt der Verfolger den Verfolgten ein, wenn sie mit 180 m Abstand gestartet worden sind?

4. Rechnen mit Potenzen; Potenzfunktionen

Ein Granatwerfer dient dazu, im indirekten Beschuß Stellungen des Gegners, die nicht eingesehen werden können, zu zerstören.
Das Geschoß bewegt sich auf einer ballistischen Kurve, die man mit Hilfe spezieller Potenzfunktionen mathematisch erfassen kann.

4.1. Potenzen und Potenzfunktionen (Exponent ganzzahlig und positiv)

Wiederholung

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren heißt eine Potenz; die Basis der Potenz ist gleich den Faktoren des Produkts, der Exponent ist gleich der Zahl, die angibt, wie oft die Basis als Faktor im Produkt auftritt.

Für das Produkt $b = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ schreiben wir $b = a^5$. Der Ausdruck a^5 ist eine Potenz[1]. Die Zahl b wird als **Potenzwert** bezeichnet. Die Zahl a ist die **Basis**[2] oder die Grundzahl. Die Zahl 5 ist der **Exponent**[3] oder die Hochzahl.

[1] potentia (lat.), Macht, Fähigkeit
[2] βάσις (grch.), worauf man tritt, Grund, Boden
[3] exponere (lat.), heraussetzen

Die Basis kann eine bestimmte Zahl, ein allgemeines Zahlensymbol oder auch eine algebraische Summe sein. Der Exponent kann unserer Erklärung nach nur eine natürliche Zahl sein, die größer oder gleich 2 ist.

Aufgaben

1. Schreiben Sie folgende Produkte als Potenzen!

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **b)** $2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

d) $(-2) \cdot (-2)$ **e)** $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ **f)** $(a\,b) \cdot (a\,b) \cdot (a\,b)$

g) $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$ **h)** $(m+n) \cdot (m+n) \cdot (m+n)$

i) $(a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c)$

k) $(x^2\,y + x\,y^2) \cdot (x^2\,y + x\,y^2) \cdot (x^2\,y + x\,y^2) \cdot (x^2\,y + x\,y^2)$

2. Schreiben Sie folgende Potenzen als Produkte!

a) 6^4 **b)** $3{,}75^4$ **c)** $(\frac{7}{8})^5$ **d)** $(-4)^3$ **e)** x^7

f) $(p \cdot q)^3$ **g)** $(x-y)^6 \cdot (x+y)^2$ **h)** $(a+b+c)^4 \cdot (a-b+c)^2 \cdot (a+b-c)^3$

3. Wodurch unterscheiden sich die folgenden Ausdrücke?

a) $x \cdot 5$ und x^5 **b)** $(a+b) \cdot 4$ und $(a+b)^4$ **c)** 6^2 und $2 \cdot 3^2$

d) 6^2 und $(2 \cdot 3)^2$ **e)** 5^2 und 2^5 **f)** 4^2 und 2^4

4. Ordnen Sie folgende algebraische Summen lexikografisch!

a) $2x\,y - x^4\,y + y^3\,x^2 - 2x^2\,y^2 + y \cdot 3x^4$

b) $a\,m + a^2\,m - m\,a - m^2\,a^2 + a^2\,m - a^3\,m^2 + m^2\,a$

c) $20p^3\,q^3 + 15p^4\,q^2 + 15q^4\,p^2 + 6p^5\,q + 6q^5\,p + p^6 + q^6$

5. Schreiben Sie 100, 10000, 1000000, 100000000

a) als Produkte mit dem Faktor 10; **b)** als Potenzen mit der Basis 10!

Rechnen mit Potenzen

Jede Potenz einer positiven Zahl ist eine positive Zahl. Ist die Basis negativ, so bestimmt der Exponent das Vorzeichen. Geradzahlige Exponenten bedingen ein positives, ungeradzahlige ein negatives Vorzeichen des Produktes, das gleich der Potenz mit einer negativen Basis ist.

● *Begründen Sie, weshalb Potenzen mit negativer Basis und geradzahligem Exponenten ein positives Vorzeichen haben!*

Für die Basis a der Potenz a^n sind alle Zahlen zugelassen. Als Exponent n sollen vorerst nur natürliche Zahlen stehen, die größer oder gleich 2 sind. Da beim Rechnen im allgemeinen die natürlichen Zahlen und die positiven ganzen Zahlen nicht voneinander unterschieden werden, gilt beim Rechnen mit Potenzen: $\boldsymbol{a}^{+n} = \boldsymbol{a}^{n}$ $(n = 2, 3 \ldots)$. Mit Potenzen, die lediglich bestimmte Zahlen enthalten, können alle Rechenarten ausgeführt werden, indem man zunächst die Potenzwerte ermittelt.

Beispiel 1:

$3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$

Beispiel 2:

$4^3 - 2^4 = 64 - 16 = 48$

Beispiel 3:

$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

Beispiel 4:

$$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

Potenzen, die allgemeine Zahlensymbole enthalten, können im allgemeinen nicht addiert und nicht subtrahiert werden.

Beispiel 5:

$a^2 + a^3$ (Es ist keine Vereinfachung möglich)

Weil durch Addition bzw. Subtraktion nur Gleichartiges zusammengefaßt werden kann, ergibt sich als Sonderfall:

▶ **Potenzen können durch Addition oder Subtraktion zusammengefaßt werden, wenn sie sowohl in den Basen als auch in den Exponenten übereinstimmen.**

Beispiel 6:

$x^5 + x^5 + 6x^5 - 3x^5 = 5x^5$

Potenzen, die allgemeine Zahlensymbole enthalten, können im allgemeinen auch nicht multipliziert oder dividiert werden.

Beispiel 7:

$a^4 \cdot b^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^5$

Beispiel 8:

$$\frac{m^6}{n^4} = \frac{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}{n \cdot n \cdot n \cdot n} = \frac{m^6}{n^4}$$

Eine Vereinfachung des Produkts bzw. des Quotienten ist nur für folgende Sonderfälle möglich.

Sonderfall I: Die Exponenten der Potenzen sind gleich.

Multiplikation

Beispiel 9:

$p^4 \cdot q^4 = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q = (p \cdot q)^4$

Allgemein gilt:

(1a) $\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$ $\quad (m \geqq 2$, ganzzahlig).

Beweis:

$$a^m \cdot b^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{m \text{ Faktoren } b} = \overbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}^{m \text{ Faktoren } ab} = (ab)^m$$

Es gilt auch die Umkehrung:

$$(a\,b)^m = a^m \cdot b^m.$$

▶ **Potenzen mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.**

Division

Beispiel 10:

$$\frac{r^5}{s^5} = \frac{r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r}{s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s} = \left(\frac{r}{s}\right)^5$$

Allgemein gilt:

(1 b) $\quad \mathbf{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m} \qquad (b \neq 0;\ m \geqq 2,\ \text{ganzzahlig}).$

Beweis:

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ Faktoren } b}} = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}^{m \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Es gilt auch die Umkehrung:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

▶ **Potenzen mit gleichen Exponenten werden durcheinander dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.**

Sonderfall II: Die Basen der Potenzen sind gleich.

Multiplikation

Beispiel 11:

$$x^3 \cdot x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^7 = x^{3+4}$$

Beispiel 12:

$$a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{3+2}$$

Allgemein gilt:

(2) $\quad \mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \qquad (m, n \geqq 2,\ \text{ganzzahlig}).$

Beweis:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{(m+n) \text{ Faktoren } a} = a^{m+n}$$

Es gilt auch die Umkehrung:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

▶ **Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.**

Beispiel 13:

$$\frac{m^4}{m^2} = \frac{m \cdot m \cdot m \cdot m}{m \cdot m} = m^2 = m^{4-2}$$

Allgemein gilt:

(3) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0;\ n \geqq 2,\ m \geqq n + 2, \text{ ganzzahlig}).$$

Beweis:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Es lassen sich n Faktoren a kürzen; es bleiben $m - n$ Faktoren a im Zähler stehen.

Potenzen mit gleicher Basis, bei denen der Exponent des Dividenden größer ist als der des Divisors, werden durcheinander dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Formulieren Sie den Satz so, daß Sie die Ausdrücke „Exponent des Divisors" und „Exponent des Dividenden" benutzen!

Drücken Sie die Wertbeschränkung für (3) *in Worten aus, und erklären Sie diese Beschränkung!*

Der Fall, daß der Exponent des Divisors größer als der des Dividenden ist, wird im Abschnitt 4.2. untersucht.
Tritt innerhalb eines Produkts eine Potenz mehrfach als Faktor auf, so kann man auch darauf die verkürzende Potenzschreibweise anwenden. Man spricht in diesem Fall vom Potenzieren von Potenzen.

Beispiel 14:

$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = (a^3)^4.$

Wendet man (2) an, so folgt:

$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$

Allgemein gilt:

(4) $$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (m, n \geqq 2, \text{ ganzzahlig}).$$

Beweis:

$$(a^m)^n = \overbrace{(a^m)\cdot(a^m)\cdot(a^m)\cdot\ldots\cdot(a^m)}^{n \text{ Faktoren } (a^m)} = \overbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}^{n \text{ Faktoren } a^m} = \overbrace{a^{m+m+m+\cdots+m}}^{n \text{ Summanden } m} = a^{m\cdot n}$$

Es gilt auch die Umkehrung:

$$a^{m\cdot n} = (a^m)^n.$$

Potenzen werden potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Wegen des Kommutationsgesetzes der Multiplikation kann man auch schreiben:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} = a^{n\cdot m} = (a^n)^m.$$

Es ist auch möglich, daß der Exponent selbst eine Potenz ist. So bedeutet z. B. a^{b^c}, daß die Basis a (b^c)-mal als Faktor gesetzt wird.

Machen Sie sich an einem Zahlenbeispiel den Unterschied zwischen a^{b^c} und $(a^b)^c$ klar!

Die in (1) bis (3) formulierten Rechenregeln gelten auch, wenn in der Aufgabe mehr als zwei Potenzen auftreten. Die Regel (4) ist auch gültig, wenn eine Potenz mehrfach potenziert wird.
Beim Rechnen mit Potenzen ist zu beachten, daß das Potenzieren vor dem Multiplizieren durchzuführen ist, weil es eine übergeordnete Rechenart ist.

Aufgaben

6. Wodurch unterscheiden sich folgende Ausdrücke?

a) $(-6)^2$ und -6^2 **b)** $-a^2$ und a^2 **c)** $(-b)^2$ und b^2
d) x^3 und $(-x^3)$ **e)** $-y^3$ und $(-y)^3$ **f)** r^4 und $(-r)^4$
g) s^4 und $(-s^2)^2$ **h)** $3x^2$ und $-3(-x)^2$

7. Weisen Sie mit Hilfe der Umkehrung der Regel (4) nach, daß alle Potenzen mit geradzahligen Exponenten und negativer Basis positiv sind!

8. Bestimmen Sie folgende Summen!

a) $3^2 + 4^3 + 2^4 + 5^2$ **b)** $(-2)^2 + 6^2 - 4^3 + 2^5$
c) $a^3 + 4a^3 - 2a^2 + 3a^3 + 4a^2$ **d)** $7{,}2x^2 - 1{,}8y^2 + 2{,}6x^2 - 3{,}1y^2 + 4{,}3y^2 - 0{,}6x^2$

9. Welchen Wert haben Potenzen mit der Basis 1 und ganzzahligen Exponenten, die größer oder gleich 2 sind?

10. Nennen Sie die Quadratzahlen von 1 bis 25!

11. Berechnen Sie den Wert folgender Potenzen!

a) $(1{,}7)^2$ **b)** $(-13)^2$ **c)** $(-12)^3$ **d)** $-(6)^4$ **e)** $-(-5)^3$
f) $-(b)^3$ **g)** $(-x)^{2n}$ **h)** $(-y)^{2n-1}$ **i)** $-(-k)^{2n+1}$

12. a) $(-1)^3 + 2^4$ **b)** $6^4 - (-4)^3$ **c)** $(-5)^4 + (-4)^5$

13. a) $(-3)^4 - (-4)^3$ **b)** $(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 1$

14. a) $2\cdot 3^2 - 3\cdot 2^2$ **b)** $2(-4)^4 - 5(-3)^2$ **c)** $5\cdot 8^3 - 4(-8)^3 - 2(-6)^2$

15. a) $(x+2)^2$ b) $(-y+x)^2$ c) $(-a-b)^2$

16. a) $(x+y+z)^2$ b) $(x-y-z)^2$ c) $(x+y-z)^2$

17. a) $(2{,}7a-3{,}3b+2{,}5c)^2$ b) $(5{,}1x-3{,}6y+2{,}0)^2$

18. a) $(-a-z)^3$ b) $(0{,}2m-1{,}3n)^3$ c) $(1{,}3b-0{,}4)^3$

19. Schreiben Sie die Ergebnisse der folgenden Aufgaben ohne schriftliche Rechnung auf!

a) $(s+t)^2$ b) $(a-1)^2$ c) $(2y+1)^2$
d) $(1-k)^2$ e) $(1-x)^3$ f) $(2x-3)^3$

20. $1{,}2a^3-4{,}9a^3+1{,}5a^3+2{,}6a^3$

21. $\frac{1}{6}m^5-\frac{2}{5}m^5+\frac{2}{9}m^5-\frac{7}{12}m^5+\frac{13}{24}m^5-\frac{17}{36}m^5+\frac{2}{3}m^5$

22. $3{,}5r^k-2\frac{1}{4}r^k+1{,}5r^k+3\frac{3}{4}r^k-0{,}75r^k$

23. $q\,x^p-r\,x^p-s\,x^p-t\,x^p$

24. $k\,d^s+4l\,d^s-2k\,d^s-5l\,d^s+6k\,d^s+4l\,d^s$

25. $\frac{4}{5}m^2+\frac{2}{7}n^2-\frac{3}{14}m^2-\frac{4}{15}n^2+m^2-\frac{1}{7}n^2$

26. $(a+b)^2-(a-b)^2$ **27.** $(x-y)^2-(y-x)^2$ **28.** $(2a+3b)^2-(3a+2b)^2$

29. $(a+1)^3-(a-1)^3$ **30.** $(x+y+z)^3-(x-y-z)^3$

31. Erarbeiten Sie eine Regel, mit deren Hilfe Produkte potenziert werden können!

32. a) Formulieren Sie eine Regel, nach der man Brüche potenzieren kann!
b) Schreiben Sie die gewonnene Regel unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole nieder!

33. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $x^2\cdot y^2\cdot z^2$ b) $a^3\cdot b^3\,(c+d)^3$ c) $m^4\cdot n^4\,(m-n)^4$ d) $k^5\,(l-k)^5$

34. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $\dfrac{b^4}{a^4}$ b) $m^2\cdot\dfrac{k^2}{l^2}$ c) $\dfrac{x^3}{y^3}\cdot z^3$ d) $\dfrac{(a+b)^4}{(x-y)^4}$

e) $\dfrac{(a-b)^5}{(a+b)^5}(a-1)^5$ f) $\dfrac{x^2\,(m-n)^2}{a^2\,(z+2)^2}\,(a-x)^2$

35. Klammern Sie die größtmögliche Potenz aus!

a) $m^3\,n^2+m^4\,n^3+m^2\,n^4+m^3\,n^3$
b) $5x^3\,y^2\,z^4+x^4\,y^3\,z^3+2x^2\,y^2\,z^3-x^2\,y^3\,z^5$
c) $m\,u^5\,v^2\,w+n\,u^3\,v^3\,w^2+2u^2\,v\,w^4+u\,v$

36. a) $x^2\cdot x^3$ b) $a^2\cdot a^4$ c) $m^3\cdot m^5$ d) $y^6\cdot y^4$

37. a) $1{,}3b^3\cdot 4{,}2b^2$ b) $-1\frac{1}{2}x^3\cdot\frac{2}{5}x^4$

c) $\left(-7\frac{3}{4}z^2\right)\cdot\left(-\frac{30}{31}z^4\right)$ d) $(-50{,}15\,m^4)\cdot\left(-3\frac{1}{5}m\right)^3$

38. a) $(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})^4$ b) $(\frac{1}{3})^3\cdot(-\frac{1}{3})^4$ c) $(-\frac{1}{5})^2\cdot(-\frac{1}{5})^3\cdot(-\frac{1}{5})^4$

39. a) $(-x)^4\cdot x^3$ b) $(-x)^3\cdot x^4$ c) $(-x^3)\cdot x^4$ d) $(-x^3)\cdot(-x^4)$

40. a) $(-x)^3 \cdot (-x^4)$ b) $(-x^3) \cdot (-x)^4$ c) $-(-x)^3 \cdot x^4$

41. a) $-(-x)^4 \cdot x^3$ b) $-(-x^3) \cdot x^4$ c) $-(-x^4) \cdot x^3$

42. a) $0{,}323x^4 y^2 \cdot 1{,}23x^2 y^2$ b) $7{,}24a^3 b^2 \cdot 82{,}3a^2 b^2$
c) $624m^3 n \cdot 0{,}175m^2$ d) $2{,}28p^4 q^2 \cdot 6{,}7q^2 \cdot 0{,}33p^2 q^5$

43. a) $\frac{1}{2}a^2 b^4 c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3 b^4 c^2$ b) $0{,}2x^4 y^2 z^3 \cdot 7{,}5x^3 y^2 z^4$ c) $2\frac{1}{2}r^3 \cdot 3\frac{1}{3}r^2 s^4 \cdot \frac{1}{4}s^5$

44. a) $2{,}1x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3{,}7x^3$ b) $4{,}3a^2 \cdot 0{,}6a^3 \cdot \frac{1}{2}a^2$ c) $\frac{1}{2}p^2 \cdot 3p^4 \cdot \frac{4}{3}p^5$

45. a) $3a^2 x^3 \cdot 7x^4 y^4 \cdot 4a^3 x^2 y$ b) $2{,}1m^2 \cdot \frac{1}{7}m^3 n^3 \cdot 10m^2 n^4$
c) $2{,}12x^2 y^4 z^3 \cdot 5{,}62x^3 y^5 z^2 \cdot 3{,}43x^4 y^2 z^8$

46. a) $(x-1)^3 \cdot (x-1)^2$ b) $(x+y+z)^3 \cdot (x+y+z)^2$

47. a) $a^2(a+b)^3 \cdot a^3(a+b)^2$ b) $r^2(r-s+t)^3 \cdot r^3 t^2(r-s+t)^4 \cdot t^2$

48. a) $[-(a+b)]^2 \cdot (a+b)^3$ b) $[-(a+b)]^3 \cdot (a+b)^2$

49. a) $a^{2m} \cdot a^n$ b) $\frac{1}{2}c^{2n} \cdot 1{,}3c^{2n}$ c) $\frac{1}{4}b^k \cdot \frac{8}{9}b^k \cdot \frac{3}{7}b^{2k}$

50. a) $x^{2m-2} \cdot x^2$ b) $q^{2m-3} \cdot q^3$ c) $c^{2m-n} \cdot c^{2n-m}$

51. a) $1{,}5\,k^{m+2} \cdot 2{,}3\,l^{n-2} \cdot 6{,}28\,k^2 l^2$ b) $\dfrac{1}{6}p^2 \cdot \dfrac{3}{7}q^3 \cdot \dfrac{49}{50}(p \cdot q)^{m-2}$
c) $\frac{1}{3}(x+1)^{2m-4} \cdot 0{,}3(x+1)^5$

52. $x^{p-4} \cdot y^{q+1} z^{r-2} \cdot x^{p+2} \cdot y^{q-3} z^2$

53. a) $\left(0{,}3a^4 b^3 + 5\dfrac{1}{2}a^2 b\right) \cdot 4\dfrac{1}{11}a b^2$ b) $(2{,}9x^4 y^3 - 1{,}5x^3 y^2 + 3{,}0x^3 y) \cdot \left(-2\dfrac{1}{3}x^3 y^3\right)$

54. a) $(2a^3 + 3a^5)(a^4 + 2a^6)$ b) $(\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{7}a^5)(\frac{5}{3}a^2 + \frac{3}{4}a^4)$

55. $(3a^4 x^2 + 2a^3 x^3)(4a^2 x^4 - 6a^2 x^5)$

56. $(a^{m-1} b^{n+1} - a^{m+1} b^{n-1})(a b^n - a^3 b^{n-2})$

57. $(0{,}36x^2 + 3{,}15)(6{,}1x^4 - 1{,}25x^2 + 8{,}32)$

58. a) $2^6 : 2^4$ b) $(-3)^5 : 3^2$ c) $(-5^8) : (-5)^3$

59. a) $a^4 : a^2$ b) $r^9 : r^6$ c) $s^{18} : s^{14}$

60. a) $1{,}2x^4 : 3{,}6x^2$ b) $-2{,}65y^9 : 5{,}3y^7$ c) $(-1{,}8a^5 b^4) : (-3{,}2a^3 b^2)$

61. a) $(-x)^5 : x^2$ b) $(-x^5) : x^2$ c) $(-x)^6 : x^3$

62. a) $-(-x)^5 : x^2$ b) $-(-x)^5 : x^2$ c) $-(-x)^6 : x^3$

63. a) $x^5 : (-x)^2$ b) $x^5 : (-x^2)$ c) $x^5 : -(-x)^2$

64. a) $x^m : x^2 \; (m \geqq 4)$ b) $x^{n-1} : x^3 \; (n \geqq 5)$

65. a) $-7q^m : 5q^n$ b) $m\,x^a : (-n\,x^b)$ c) $18a^{2n-1} : 15a^n$

66. $x^{2p-3q} : x^{q-p-1}$

67. a) $169m^8 n^7 o^6 : 13m^5 n^2 o^4$ b) $4\frac{1}{3}p^{11} q^9 r^5 : 3\frac{1}{4}p^7 q^7 r^2$

68. a) $37{,}5(a-b)^4 c^5 : 1{,}23(a-b)^2 c^3$ b) $8\frac{1}{6}(x-y)^6 (x-z)^4 : 12\frac{1}{4}(x-y)^4 (x-z)^2$

69. a) $(0{,}32a^4 b^5 - 16a^4 b^4) : (-8a^2 b^2)$ b) $(4{,}8a^5 b^6 + 80a^4 b^4 - 1{,}28a^6 b^7) : 1{,}6a^2 b^2$

70. a) $(m^2)^4$ b) $(\frac{1}{3}c^3)^3$ c) $(-5^2)^2$ d) $[(-3)^2]^2$

71. a) $[(\frac{1}{3})^2]^2$ b) $[-(-\frac{1}{2})^3]^2$ c) $(0{,}3^2)^2$ d) $(0{,}75^2)^3$

72. a) $(\frac{1}{4}a^2)^3$ b) $(0{,}3m^3 n^2)^3$ c) $(-9p^2 q^4 r^2)^2$ d) $(\frac{1}{3}x^m)^4$

73. Welche Zahl ist größer?

22^2; 2^{22}; $(2^2)^2$; 2^{2^2}

74. a) $(-2a^{n-1})^2$ b) $(4m^p n^q)^3$ c) $(x^{n-1} \cdot y^{n-2})^3$

75. a) $\left(\frac{5x^3}{6y^2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{4a^2b^3}{3a^5}\right)^2$ c) $\left(-\frac{2x^4y^2}{6z^6}\right)^3$

76. Schreiben Sie die größte Zahl mit nur drei Dreien!

Potenzfunktionen mit ganzzahligen, positiven Exponenten

Betrachten wir die Kurven der Potenzfunktionen mit ganzzahligen, positiven Exponenten von der Form:

(5) $\quad \boldsymbol{y = x^n} \quad (n \geqq 2$, ganzzahlig$)$.

Von diesen Funktionen ist uns bereits der Verlauf der Kurve der Funktion

$$y = x^2$$

bekannt.

● *Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ und $y = x^5$ für $-5 \leqq x \leqq 5$ zusammen, und zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die Bilder dieser Funktionen!*

Die Abbildung 4.1. stellt die Bilder der Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ und $y = x^5$ in einem Koordinatensystem dar. In ein ausreichend großes Koordinatensystem hätte man auch die Bilder der Funktionen mit noch größeren Exponenten zeichnen können. In unserem Falle wäre das Bild jedoch zu unübersichtlich geworden. Aber auch die geringere Anzahl der Kurven aus der Kurvenschar (5) läßt es zu, wichtige Aussagen über alle Kurven dieser Schar zu machen.

1. Die Bilder aller Potenzfunktionen mit geradzahligen, positiven Exponenten liegen im II. und I. Quadranten achsensymmetrisch zur Ordinatenachse. Funktionen, deren Bilder achsensymmetrisch zur Ordinatenachse liegen, nennt man **gerade** Funktionen.

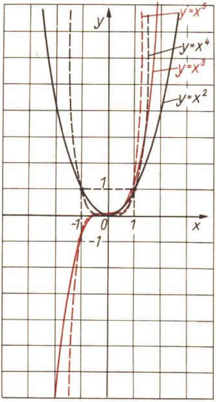


Abb. 4.1.

Potenzfunktionen der Form

(6) $\quad y = x^{2k} \quad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

heißen gerade Potenzfunktionen.

Die Bilder der Potenzfunktionen mit ungeradzahligen, positiven Exponenten verlaufen im III. und I. Quadranten. Ihre Äste liegen zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Funktionen dieser Art heißen **ungerade.**

Alle Potenzfunktionen der Form

(7) $\quad y = x^{2k+1} \quad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

nennt man ungerade Potenzfunktionen.

Die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Funktionen macht ohne Kenntnis ihrer Bilder oft Schwierigkeiten, denn nur bei den Potenzfunktionen stimmen (Un)Geradzahligkeit der Exponenten und die Bezeichnung (un)gerade Funktion so offensichtlich überein. Durch die Anwendung folgender Definitionen ist die Unterscheidung ohne Zeichnung der Bilder der Funktionen im allgemeinen leicht möglich.

Eine Funktion ist eine gerade Funktion, wenn für alle x gilt:

(8) $\quad f(x) = f(-x).$

Eine Funktion ist eine ungerade Funktion, wenn für alle x gilt:

(9) $\quad f(x) = -f(-x).$

Beispiel 15:

Ist $y = x^3$ eine gerade oder ungerade Funktion?
Die Bedingung für eine gerade Funktion wird nicht erfüllt; denn:
$x^3 \neq (-x)^3 = -x^3.$
Die Bedingung für eine ungerade Funktion wird erfüllt; denn:
$x^3 = -(-x)^3 = -(-x^3) = x^3.$

2. Die Bilder aller geraden Potenzfunktionen $y = x^{2k}$ verlaufen durch die Punkte

   (−1; 1), (0; 0) und **(1; 1).**

   Die Bilder aller ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2k+1}$ verlaufen durch die Punkte

   (−1; −1), (0; 0) und **(1; 1).**

3. Die Bilder der geraden Potenzfunktionen (6) besitzen im Punkt (0; 0) den geringsten Ordinatenwert. Er fällt mit dem Scheitel der Parabeln zweiten, vierten, sechsten, . . . Grades zusammen.
   Im Koordinatenursprung ändern ungerade Potenzfunktionen (7) ihren Krümmungssinn.

4. Mit wachsendem Exponenten schmiegen sich die Kurven, die den Funktionen $y = x^n$ entsprechen, im Bereich $-1 < x < 1$ immer mehr der x-Achse an, außerhalb der Sperrgeraden $x = -1$ und $x = 1$ verlaufen sie immer steiler.
   Die Bilder aller Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten heißen **Parabeln**[1]. Für $n > 2$ spricht man von Parabeln höherer Ordnung.

[1] παραβάλλειν (grch.), anlegen

77. Stellen Sie für die Funktionen

$y = x^n \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6)$

Wertetafeln auf, und zeichnen Sie die Bilder in ein Koordinatensystem! Wählen Sie die Einheit so groß ($e = 5$ cm), daß Sie den Verlauf der Kurven im Bereich $-1 \leqq x \leqq 1$ genau verfolgen können!

78. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) mit unterschiedlichem Achsenmaßstab!

a) Wählen Sie die Einheit auf der Ordinatenachse kleiner als die Einheit auf der Abszissenachse, z. B. in einem Verhältnis von 1:2, 1:3 oder 1:4!

b) Wählen Sie die Einheit auf der Ordinatenachse größer als die Einheit auf der Abszissenachse, z. B. in einem Verhältnis von 2:1, 3:1 oder 4:1!

c) Entscheiden Sie, ob eine Dehnung oder Stauchung der Ordinatenachse gegenüber der Abszissenachse für die Darstellung der Funktion $y = x^n$ ($n \geqq 2$, ganzzahlig) günstiger ist, um den Verlauf der verschiedenen Funktionen zu unterscheiden!

79. a) Zeichnen Sie die Kurven $y = -x^n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$)!

b) Benutzen Sie, um die Kurven $y = -x^n$ zu zeichnen, die Kurven $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$)!

Anleitung zu b: Spiegeln Sie die Bilder der Funktionen $y = x^n$ an der Abszissenachse!

80. a) Spiegeln Sie die Kurven $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) an der Ordinatenachse!

b) Wie heißen die Funktionsgleichungen der Kurven, die durch Spiegeln an der Ordinatenachse entstehen?

c) Definieren Sie gerade Funktionen mittels des Ergebnisses von **a** und **b**!

81. Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $y = m\,x^2$ und $y = -m\,x^2$ auf, und zeichnen Sie ihre Bilder für folgende Werte m!

a) $m = 1$ **b)** $m = 2$ **c)** $m = 4$ **d)** $m = \frac{1}{2}$ **e)** $m = \frac{1}{4}$ **f)** $m = 0{,}1$

82. Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $y = m\,x^3$ und $y = -m\,x^3$ auf, und zeichnen Sie ihre Bilder für folgende Werte m!

a) $m = 1$ **b)** $m = 2$ **c)** $m = 4$ **d)** $m = \frac{1}{2}$ **e)** $m = \frac{1}{4}$ **f)** $m = 0{,}1$

83. Vergleichen Sie die Bilder der Aufgaben **81** und **82** miteinander, und stellen Sie den Einfluß des Koeffizienten fest!

84. Weisen Sie mit Hilfe der Kriterien (8) und (9) nach, daß $y = 2x^4$ eine gerade Funktion ist!

85. Zeigen Sie, daß $y = -\frac{1}{2}x^3$ eine ungerade Funktion ist!

Bemerkungen zum Funktionsbegriff

Das Volumen einer Kugel errechnet man mit Hilfe der Gleichung

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\, r^3.$$

Für jeden bestimmten Radius r ergibt sich dann ein bestimmtes Volumen V. Anders kann man diesen Sachverhalt auf folgende Weise ausdrücken:

Jedem r aus der Menge aller möglichen Radien wird durch die Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$ ein V aus der Menge aller möglichen Volumen zugeordnet.

Für eine derartige Zuordnung kennen wir den Begriff der Funktion.
Folglich stellt die Gleichung zur Berechnung des Kugelvolumens mit variablem r und V eine Funktionsgleichung dar. Diesen funktionalen Zusammenhang der beiden Variablen symbolisieren wir in Analogie zu $y = f(x)$ mit $V = \varphi(r)$.
Die Zuordnungsvorschrift kann mittels eines analytischen Ausdruckes, sehr oft aber auch nur durch Worte gegeben werden.

Geben Sie die Zuordnungsvorschrift $A_O = 4\pi r^2$ mit Worten wieder!

Anleitung: Benutzen Sie dazu die Begriffe „Menge aller möglichen Radien" und „Menge aller möglichen Oberflächen"!

Mittels der Funktion

$$V = \varphi(r) = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

wird jedem Radius r nur ein bestimmtes Kugelvolumen zugeordnet.
Funktionen dieses Typs heißen eindeutige Funktionen.
Allgemein gilt für eine Funktion $y = f(x)$:

Wird durch eine Vorschrift jedem Wert der Variablen x ein und nur ein Wert der Variablen y zugeordnet, so heißt die durch die Vorschrift beschriebene Funktion $y = f(x)$ eindeutig.

Untersuchen wir nun, wieviele Radien r jeweils einem Volumen V zugeordnet werden, so erkennen wir, daß auch hier eine eindeutige Zuordnung vorliegt. Funktionen dieser Art heißen umkehrbar eindeutig oder eineindeutig.
Allgemein gilt für eine Funktion $y = f(x)$:

Wird durch eine Vorschrift einem Wert der Variablen x ein und nur ein Wert der Variablen y zugeordnet, und wird darüber hinaus auch einem Wert y ein und nur ein Wert x zugeordnet, so heißt die durch die Zuordnungsvorschrift bestimmte Funktion $y = f(x)$ eineindeutig oder umkehrbar eindeutig.

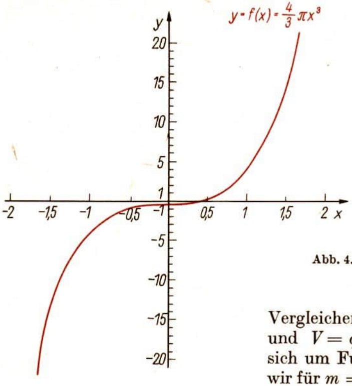
Untersuchen Sie, ob die Potenzfunktionen $y = x^2$ und $y = x^3$ eindeutig oder eineindeutig sind!

Beispiel 16:

Ist die Funktion $y = x^4$ eindeutig oder eineindeutig?
Durch die Zuordnungsvorschrift wird jedem Wert von x ein y-Wert zugeordnet, der gleich dem Produkt $x \cdot x \cdot x \cdot x$ ist. Weil dieses Produkt für jede bestimmte Zahl x_1 eine und nur eine Zahl y_1 ist, ist die Funktion $y = x^4$ eindeutig. Zum Beispiel ergibt sich für $x_1 = 2$ nur $y_1 = 16$.

Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = x^4$ auf, indem Sie für x alle ganzen Zahlen zwischen -5 und 5 einsetzen!

Betrachten wir in der Wertetafel die Werte für x, so stellen wir fest, daß keine Zahl mehrfach auftritt. Dagegen finden wir die Werte für y doppelt. Für $x = -2$ ist $y = 16$, aber auch für $x = 2$ ermittelt man gleichfalls $y = 16$.
Die Bedingung **... auch einem Wert y ein und nur ein Wert x zugeordnet ...** ist nicht erfüllt. Folglich ist die Funktion $y = x^4$ zwar eindeutig, jedoch nicht eineindeutig.



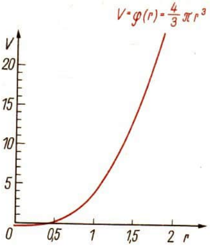


Abb. 4.2.

Abb. 4.3.

Vergleichen wir die Funktionen $y = f(x) = m\,x^3$ und $V = \varphi(r) = \frac{4}{3}\pi\,r^3$, so erkennen wir, daß es sich um Funktionen gleichen Typs handelt. Setzen wir für $m = \frac{4}{3}\pi$, so unterscheiden sich $y = f(x)$ und $V = \varphi(r)$ scheinbar nur durch die verwendeten allgemeinen Zahlensymbole.

Doch trotz der äußeren Übereinstimmung besteht zwischen ihnen ein wesentlicher Unterschied.

Er wird erkennbar, wenn man untersucht, für welche Werte der unabhängigen Variablen x bzw. r die Funktion sinnvoll ist.

Das Bild der Funktion $y = m\,x^3$ mit $m = \frac{4}{3}\pi$ ist eine Parabel. Zu jeder beliebigen Abszisse gibt es eine Ordinate (Abb. 4.2.).

Die Funktion $V = \frac{4}{3}\pi\,r^3$ ist dagegen nur für positive Radien r sinnvoll, denn es gibt keine Kugeln mit negativem Radius; als kleinster Wert für r kann Null auftreten — die Kugel entartet dann zu einem Punkt. Aus diesem Grund ist die Funktion $V = \varphi(r)$ nur für $r \geqq 0$ definiert (Abb. 4.3.).

Die beiden scheinbar gleichen Funktionen $y = f(x)$ und $V = \varphi(r)$ unterscheiden sich durch den Bereich, in dem sie erklärt sind. Dieser Bereich heißt **Definitionsbereich** der Funktion.

Allgemein gilt für $y = f(x)$:

▶ **Die Menge der Werte der unabhängigen Veränderlichen x, für die die Funktion $y = f(x)$ definiert ist, heißt Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$.**

An unserem Beispiel erkennen wir, daß es nicht ausreicht, nur den analytischen Ausdruck einer Funktion zu kennen. Zur eindeutigen Kennzeichnung einer Funktion gehört die Angabe des Definitionsbereichs.

Zur Darstellung des Definitionsbereichs benutzt man die Symbole „$<$, $=$, $>$“. Mit ihrer Hilfe gibt man die Menge aller der Punkte auf der Abszissenachse an, für die die Funktion definiert ist. Derartige Bereiche heißen **Intervalle.** Will man sagen, daß eine Funktion $y = f(x)$ im Intervall zwischen -1 und 1 definiert ist, so schreibt man das auf folgende Weise:

$$-1 < x < 1.$$

Gehören -1 und 1 zum Definitionsbereich, so heißt das Intervall, in dem die Funktion erklärt ist,

$$-1 \leqq x \leqq 1 .$$

Beispiel 17:

Die Funktion $\Delta l = f(l) = \alpha \cdot \Delta t \cdot l$ ist im Intervall $0 \leqq l < \infty$ definiert.

Zur vollständigen Beschreibung einer Funktion gehört aber noch die Angabe, welche Werte die abhängige Variable annehmen kann. Diesen Bereich nennt man **Wertevorrat.**

Allgemein gilt für die Funktion $y = f(x)$:

Die Gesamtheit der Werte, die die abhängige Veränderliche y annehmen kann, heißt Wertevorrat der Funktion $y = f(x)$.

Auch zur Angabe des Wertevorrats benutzt man die Intervallschreibweise.

Beispiel 18:

Die Funktion $y = -x^2$ ist im Intervall $-\infty < x < \infty$ definiert und besitzt den Wertevorrat $-\infty < y \leqq 0$, denn für jedes beliebige x $(x \neq 0)$ ist y negativ.

Jetzt sind wir auch in der Lage, unsere Beispiele $y = f(x) = m\,x^3$ mit $m = \frac{4}{3}\pi$ und $V = \varphi(r) = \frac{4}{3}\pi\,r^3$ vollständig zu beschreiben:

$$y = f(x) = \tfrac{4}{3}\pi\,x^3 \quad \text{mit} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{und} \quad -\infty < y < \infty,$$

aber

$$V = \varphi(r) = \tfrac{4}{3}\pi\,r^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leqq r < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq V < \infty.$$

Wir erkennen:

Um eine Funktion vollständig zu beschreiben, muß man neben der eindeutigen Zuordnungsvorschrift (z. B. dem analytischen Ausdruck) den Definitionsbereich angeben.

Aufgaben

86. Schreiben Sie folgende Intervalle als Ungleichungen!

a) Für alle x zwischen -10 und $+10$ ...
b) Für alle y zwischen einschließlich 0 und beliebig großen positiven Werten ...
c) Für x zwischen 0 und 1 einschließlich der Intervallgrenzen ...
d) Für z zwischen -1 und 1 einschließlich der oberen Intervallgrenze ...
e) Für alle x im Intervall zwischen -1 und $+1$ ausschließlich des Nullpunktes ...
f) Für alle y im Bereich positiver Zahlen ausschließlich des Nullpunktes und der Zahlen $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ ...

87. Beschreiben Sie folgende Intervalle mit Worten!

a) $0 \leqq a < 1$ **b)** $-20 \leqq z \leqq -1$ **c)** $-1 < k < 0$ **d)** $-1 < x \leqq 0$
e) $0 \leqq y < \infty$ **f)** $-\infty < n < \infty$ **g)** $-\infty < x < -1$ **h)** $-1 < x < 1$
i) $1 < x < \infty$ **k)** $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{(k+1)\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

l) Schreiben Sie die Aufgaben **e** und **g** in anderer Form!

88. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve $y = -x^3$ in den folgenden Intervallen!

a) $-2 < x < 0$ **b)** $0 < x < 2$ **c)** $-1 \leqq x \leqq 1$

89. Welchen Verlauf hat die Kurve $y = -x^2$ in den folgenden Intervallen?

a) $-\infty < x \leqq -1$ **b)** $1 \leqq x < \infty$ **c)** $-1 < x < 1$

90. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve $y = (-x)^5$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$!

91. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve $y = \frac{1}{3}x^2$ im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$!

92. Beschreiben Sie den Verlauf folgender Kurven im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$!

a) $y = x^4$ **b)** $y = -x^4$ **c)** $y = (-x)^4$

93. Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat für folgende Funktionen an!

a) $y = x$ **b)** $y = x^2$ **c)** $y = x^5$
d) $y = |x|$ **e)** $y = x^2 - 2x - 1$ **f)** $y = x^3 \quad (x \geqq 0)$

94. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat für folgende Funktionen! Geben Sie eventuelle Nullstellen an!

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = \frac{1}{2}x - 5$ **c)** $y = x^2 - 2x + 1$
d) $y = (x - 2)^2 + 3$ **e)** $y = 3x^2 - 6x - 3$ **f)** $y = |x^2 - 9|$

95. Die folgenden Gleichungen sind Funktionen der jeweils unterstrichenen Variablen. Ermitteln Sie den Definitionsbereich und den Wertevorrat! Was bringen diese Formeln zum Ausdruck?

a) $\underline{V} = a \cdot b \cdot \underline{c}$ **b)** $\underline{A} = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h$

c) $\underline{a} = \sqrt{\underline{A}}$ **d)** $\underline{W} = \frac{m}{2} \cdot \underline{v}^2$

e) $\underline{s} = \frac{b}{2} t^2$ **f)** $\underline{P} = \underline{J}^2 \cdot R$

Potenzen mit den Exponenten 1 und 0

Die Erklärung einer Potenz als ein Produkt gleichartiger Faktoren ist die Ursache dafür, daß als kleinster Exponent 2 möglich ist. Als wir das Gesetz herleiteten, nach dem Potenzen durch Potenzen dividiert werden, waren wir wegen der Definition einer Potenz gezwungen, die Exponenten des Divisors und Dividenden einzuschränken:

$$m \geqq n + 2; \quad n \geqq 2.$$

Um derartige Einschränkungen zu umgehen bzw. zu vermindern, wird der Begriff der Potenz erweitert; zum Beispiel führt man Potenzen mit den Exponenten 1 und 0 ein. Die Erklärung dieser Potenzen als ein Produkt muß unterbleiben, denn Produkte mit einem oder keinem Faktor sind sinnlos.
Die Potenzen a^1 und a^0 müssen deshalb anders definiert werden.
Die Erklärung muß so erfolgen, daß die bewiesenen Potenzgesetze auch für den erweiterten Potenzbegriff gelten, denn die Zulassung der Potenzen a^0 und a^1 bedeutet eine Erweiterung des ursprünglichen Potenzbegriffs.

Dieses Prinzip der Mathematik, nach dem jede Festsetzung zweckmäßigerweise so erfolgt, daß die als richtig erkannten Rechengesetze auch bei Benutzung der neu erklärten Ausdrücke gültig bleiben, heißt **Permanenzprinzip**[1].
Um zu einer dem Prinzip der Permanenz folgenden Festsetzung der Potenzen a^1 und a^0 zu gelangen, wollen wir die Potenzen a^2 bis a^6 nach fallenden Potenzen ordnen:

$$a^6; \quad a^5; \quad a^4; \quad a^3; \quad a^2.$$

Betrachten wir diese Folge, so fällt uns auf, daß jede Potenz aus der vorangehenden dadurch entsteht, daß man diese durch a dividiert (es muß dabei $a \neq 0$ gelten), also:

$$a^6; \quad \frac{a^6}{a} = a^5; \quad \frac{a^5}{a} = a^4; \quad \frac{a^4}{a} = a^3; \quad \frac{a^3}{a} = a^2.$$

Man könnte diese Folge etwa auf folgende Weise fortsetzen:

$$\ldots; \quad \frac{a^3}{a} = a^2; \quad \frac{a^2}{a} = a; \quad \frac{a}{a} = 1.$$

Nach dieser Folge zu urteilen, erscheint es sinnvoll, für

$$\frac{a^2}{a} = a = a^1 \quad \text{und für} \quad \frac{a}{a} = 1 = a^0$$

zu setzen.
Deshalb definiert man:

(10) $\quad \mathbf{a^1 = a}$ und (11) $\quad \mathbf{a^0 = 1}$.[2]

Das ist eine Festsetzung. Ob sie dem Permanenzprinzip folgt, muß überprüft werden.
Für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis gilt:

(2) $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \geqq 2,$ ganzzahlig$)$.

Bei Erweiterung von (2) auf $n \geqq 1$ folgt für $n = 1$:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}.$$

Laut Definition ist $a^1 = a$. Man erhält folgende Identität:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1} \equiv a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Bei Erweiterung von (2) auf $n \geqq 0$ folgt für $n = 0$:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m.$$

Laut Definition ist $a^0 = 1$. Man erhält folgende Identität:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \equiv a^m \cdot 1 = a^m.$$

Damit wurde die Gültigkeit der Gleichung (2) für die Festsetzungen $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ bestätigt.

Das heißt, es gilt:

(2) $\quad \mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad (m, n \geqq 0,$ ganzzahlig$)$.

[1] permanere (lat.), erhalten bleiben
[2] Die Definition $a^0 = 1$ gilt nicht für $a = 0$. Der Ausdruck 0^0 ist nicht erklärt.

Für die Division von Potenzen mit gleicher Basis gilt:

(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0;\ m \geqq n + 2,\ m \geqq 2,$ ganzzahlig).

Bei Erweiterung von (3) auf $n \geqq 1$ folgt für $n = 1$:

$$\frac{a^m}{a^1} = a^{m-1} \qquad (a \neq 0).$$

Laut Definition ist $a^1 = a$. Man erhält folgende Identität:

$$\frac{a^m}{a^1} = a^{m-1} \equiv \frac{a^m}{a} = a^{m-1}.$$

Bei Erweiterung von (3) auf $n \geqq 0$ folgt für $n = 0$:

$$\frac{a^m}{a^0} = a^{m-0} = a^m.$$

Laut Definition ist $a^0 = 1$. Man erhält folgende Identität:

$$\frac{a^m}{a^0} = a^{m-0} = a^m \equiv \frac{a^m}{1} = a^m.$$

Damit wurde die Gültigkeit von Gleichung (3) für die Festsetzung $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ bestätigt.
Es gilt:

(3) $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $(a \neq 0;\ m \geqq n,\ n \geqq 0,$ ganzzahlig).

Für das Potenzieren von Potenzen gilt:

(4) $(a^m)^n = a^{mn}$ $(m, n \geqq 2,$ ganzzahlig).

Bei Erweiterung von (4) auf $n \geqq 1$ folgt für $n = 1$:

$$(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^m.$$

Laut Definition ist $a^1 = a$. Man erhält folgende Identität:

$$(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^m \equiv (a^m) = a^m.$$

Bei Erweiterung von (4) auf $n \geqq 0$ folgt für $n = 0$:

$$(a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0 \qquad (a \neq 0).$$

Laut Definition ist $a^0 = 1$. Man erhält folgende Identität:

$$(a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0 \equiv (a^m)^0 = 1.$$

Damit wurde die Gültigkeit der Gleichung (4) für die Festsetzungen $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ bestätigt.
Es gilt:

(4) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ $(m, n \geqq 0,$ ganzzahlig).

● *Bestätigen Sie die Gültigkeit der Gleichungen* (1a) *und* (1b) *für die Festsetzungen* $a^1 = a$ *und* $a^0 = 1$!

Unsere Vermutung, daß die Definitionen $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ dem Permanenzprinzip entsprechen, ist damit bestätigt.

Man hätte a^1 und a^0 eventuell auch anders „definieren" können. Daß beispielsweise die „Definitionen" $a^1 = 1$ und $a^0 = 0$ nicht den Forderungen des Permanenzprinzips folgen, wollen wir hier nachweisen:
Für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis gilt:

(2) $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \geqq 2, \text{ ganzzahlig}).$

Bei Erweiterung von (2) auf $n \geqq 1$ folgt für $n = 1$:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}.$$

Laut „Definition" wäre $a^1 = 1$. Man erhält folgende Ungleichung:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1} \neq a^m \cdot 1 = a^m.$$

Bei Erweiterung von (2) auf $n \geqq 0$ folgt für $n = 0$:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m.$$

Laut „Definition" wäre $a^0 = 0$. Man erhält folgende Ungleichung:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \neq a^m \cdot 0 = 0.$$

Damit wurde die Ungültigkeit der Gleichung (2) für die „Festsetzungen" $a^1 = 1$ und $a^0 = 0$ bestätigt.
Es wurde gezeigt, daß die „Definitionen" $a^1 = 1$ und $a^0 = 0$ dem Permanenzprinzip widersprechen.

Aufgaben

96. a) $x^4 : x^3$ b) $a^{m+1} : a^m$ c) $a^3 : a^3$

97. a) $s^3 : s^2$ b) $q^{12} : q^{12}$ c) $a^3 b^4 : b^3$

98. a) $3x^{m+2} : 2x^{m+1}$ b) $0{,}5a^7 : \frac{1}{2}a^6$ c) $0{,}21x^3 y^6 : 7x^2 y^2$

99. Welche Werte haben folgende Potenzen?

a) 36^1 b) $(-12)^1$ c) 1^1 d) 0^1 e) 1000^0 f) $(-3)^0$

100. a) $a^4 : a^4$ b) $a^2 b^3 : a b^3$

101. a) $6m^4 n^2 : \frac{1}{2}m^3 n^2$ b) $0{,}5x^3 y^2 : 1\frac{3}{4}x^2 y^2$

102. a) $(-b)^0$ b) $2^2 \cdot 5^0$ c) $\dfrac{(-3)^4}{(-3)^0}$ d) $(-5)^3 \cdot (-4)^0$

e) $\dfrac{27a^5}{20b^3} : \dfrac{9a^4}{12b^4}$ f) $\dfrac{9a^6 b^5}{10c^4 d^3} : \dfrac{12a^4 b^7}{5c^2 d^5}$ g) $\left(\dfrac{8m^3 n^2}{5rs^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{25r^2 s^3}{12mn}\right)^2$ h) $\dfrac{(a^2 - b^2)^3}{(a-b)^3}$

4.2. Potenzen und Potenzfunktionen (Exponent ganzzahlig)

Erweiterung des Potenzbegriffes auf Potenzen mit negativen Exponenten

Bei der Division von Potenzen mit gleicher Basis mußte bisher immer die Bedingung erfüllt sein, daß der Exponent des Dividenden größer oder gleich dem Exponenten des Divisors ist. Durch eine erneute Erweiterung des Potenzbegriffes soll diese Einschränkung in der Ausführung der Divison von Potenzen beseitigt werden.
Gilt in der Gleichung

(3) $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0;\ m \geqq n,\ n \geqq 0, \text{ ganzzahlig})$

nicht mehr die Bedingung $m \geqq n$, sondern wird $m < n$, so treten bei formaler Anwendung des Gesetzes $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ negative Exponenten auf. Derartige Potenzen sind bisher nicht erklärt worden.

Es ist zu untersuchen, ob es möglich ist, den Potenzbegriff erneut nach dem Permanenzprinzip zu erweitern. Betrachten wir wieder die Folge

$$a^6; \quad a^5; \quad a^4; \quad a^3; \quad a^2; \quad a^1; \quad a^0.$$

Wir können sie auch wieder in der Form schreiben:

$$a^6; \ \frac{a^6}{a} = a^5; \ \frac{a^5}{a} = a^4; \ \frac{a^4}{a} = a^3; \ \frac{a^3}{a} = a^2; \ \frac{a^2}{a} = a^1; \ \frac{a^1}{a} = a^0; \qquad (a \neq 0)$$

Führen wir die Folge weiter, so erhalten wir:

$$\ldots; \ \frac{a^2}{a} = a^1; \ \frac{a^1}{a} = a^0 = 1; \ \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}; \ \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}; \ \frac{1}{a^2 \cdot a} = \frac{1}{a^3}; \ \ldots$$

Es erscheint sinnvoll, für a^6; a^5; a^4; a^3; a^2; a^1; a^0; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$ usw. die folgende Schreibweise einzuführen:

$$a^6; \ a^5; \ a^4; \ a^3; \ a^2; \ a^1; \ a^0; \ a^{-1}; \ a^{-2}; \ a^{-3}; \ldots$$

Man definiert allgemein:

(12) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $\qquad (a \neq 0, \ n \geqq 0$, ganzzahlig).

Die Bedingung $n \geqq 0$ kann entfallen, wenn auch die Umkehrung

(13) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ $\qquad (a \neq 0, \ n$ ganzzahlig)

gilt. Die Festsetzung (13) ist wegen (12) sinnvoll, da dann $a^n = \frac{1}{\frac{1}{a^n}}$ als Doppelbruch geschrieben und in $\frac{1}{a^{-n}}$ umgeformt werden kann.

Es muß nun nachgewiesen werden, daß diese erneute Erweiterung des Potenzbegriffes unter Beachtung des Permanenzprinzips erfolgte.
Für das Multiplizieren von Potenzen mit gleichen Exponenten gilt:

(1 a) $a^m \cdot b^m = (a\,b)^m$ $\quad (m \geqq 0$, ganzzahlig).

Mit $m = -k$, $k > 0$, folgt:

$$a^{-k} \cdot b^{-k} = (a\,b)^{-k}.$$

Laut Definition ist $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$. Man erhält folgende Identität:

$$a^{-k} \cdot b^{-k} = (ab)^{-k} \equiv \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k \cdot b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k}.$$

Damit wurde die Gültigkeit der Gleichung (1 a) für die Festsetzung $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ bestätigt.
Es gilt:

(1 a) $\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a\,b)^m}$ $\qquad$ (m ganzzahlig).

Für das Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis gilt:

(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad (a \neq 0; \ m \geqq n, \ n \geqq 0$ ganzzahlig).

Mit $m = -k$, $k > 0$, folgt:

$$\frac{a^{-k}}{a^n} = a^{-k-n} = a^{-(k+n)} = \frac{1}{a^{k+n}}.$$

Laut Definition ist $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$. Man erhält folgende Identität:

$$\frac{a^{-k}}{a^n} = a^{-k-n} = a^{-(k+n)} = \frac{1}{a^{k+n}} \equiv \frac{\frac{1}{a^k}}{a^n} = \frac{1}{a^k \cdot a^n} = \frac{1}{a^{k+n}}.$$

Mit $n = -l$, $l > 0$, folgt:

$$\frac{a^m}{a^{-l}} = a^{m-(-l)} = a^{m+l}.$$

Laut Definition ist $a^{-l} = \frac{1}{a^l}$. Man erhält folgende Identität:

$$\frac{a^m}{a^{-l}} = a^{m-(-l)} = a^{m+l} \equiv \frac{a^m}{\frac{1}{a^l}} = a^m \cdot a^l = a^{m+l}.$$

Damit wurde die Gültigkeit der Gleichung (3) für die Festsetzung $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ bestätigt.

Es gilt:

(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad$ (m, n ganzzahlig)

Beispiel 19:

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Gleichungen (1b), (2) *und* (4) *für die Festsetzung* $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$!

Wir erkennen, die Festsetzung $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ erfüllt die Forderungen des Permanenzprinzips.

Aufgaben

1. Wandeln Sie folgende Potenzen mit positivem Exponenten um!

a) 4^{-3} **b)** 5^{-6} **c)** 1^{-3} **d)** 2^{-2}
e) m^{-3} **f)** x^{-4} **g)** a^{-x} **h)** x^{-y}
i) $(-b)^{-2}$ **k)** $(-a)^{-3}$ **l)** $(-x)^{-4}$ **m)** $(-m)^{-9}$

2. Wandeln Sie folgende Produkte in Potenzen mit positivem Exponenten um!

a) $6 \cdot 3^{-2}$ **b)** $5^{-3} \cdot 125$ **c)** $5^{-2} \cdot 15$ **d)** $108 \cdot 3^{-4}$
e) $r^{-3} \cdot s^3$ **f)** $q^3 \cdot r^{-4}$ **g)** $x^{-4} \cdot x^0$ **h)** $m^3 \cdot m^{-3}$

3. a) $\frac{3}{4}z^{-3} \cdot \frac{1}{8}z^5$ **b)** $1\frac{2}{3}z^0 \cdot 2\frac{1}{5}z^{-2}$ **c)** $0{,}6c^{-5} \cdot \frac{5}{8}c^2$ **d)** $\frac{7}{8}x^2 \cdot 0{,}4x^{-2}$
e) $k^{-x} \cdot k^x$ **f)** $0{,}18p^{-n} \cdot 1{,}4p^m$ **g)** $b^{4l} \cdot b^{-2l}$ **h)** $6{,}3a^{2n} \cdot 0{,}08a^{-5n}$

4. a) $1\frac{8}{9}a^{-2} \cdot \frac{27}{34}a^{-2}$ b) $17{,}5\,m^{-3} \cdot \frac{1}{25}m^{-1}$ c) $4b^3c^{-5} \cdot 3b^{-4}c^5$ d) $0{,}5x^{-4}y^3z^{-2} \cdot \frac{1}{2}x^{-3}y^2z^{-3}$

e) $a^{k+1}\,b^{k-1}\,c^{-k} \cdot a^{-k}\,b^{-k}\,c^{k-1}$ f) $0{,}836\,a^{k+2}\,b^{-k-1}\,c^{-2k} \cdot 5{,}32\,a^{-2k-1}\,b^{2k+2}\,c^k$

Dividieren Sie!

5. a) $3^4 : 3^9$ b) $(-5)^3 : (-5)^6$ c) $(-4^{10}) : (-4^{12})$ d) $x^2 : x^8$

e) $\frac{1}{2}p^{12} : \frac{2}{3}p^{14}$ f) $0{,}14q^{12} : 3{,}5q^{20}$

6. a) $8a^3\,b^5 : 6a^5\,b^7$ b) $\frac{2}{3}b^2\,c^5 : \frac{5}{6}a^2\,b^6$ c) $0{,}35b^2\,c^5 : 7\,a^3\,b^6$ d) $4\frac{1}{3}p^{11}\,q^9\,r^5 : 3\frac{1}{4}p^7\,q^7\,r^7$

7. a) $0{,}5a^7 : \frac{1}{2}a^6$ b) $0{,}21\,x^3\,y^6 : 7\,x^2\,y^7$ c) $0{,}5x\,y^2 : 1\frac{3}{4}x^2\,y^2$ d) $3\frac{1}{6}p^3\,q^2\,r : 19p^2\,q^2\,r^2$

e) $0{,}32\,a^{m-1}\,b^n : 6{,}4a^m\,b^m\,c$ f) $5\frac{3}{5}q^{2n-1}\,r^{3n} : 0{,}7\,q^{2n+1}\,r^{3n}$

8. a) $8(x-y)^6\,(x-z)^4 : 1{,}2(x-y)^4\,(x-z)^6$ b) $20{,}6(a-b)^4\,c^5 : 1\frac{1}{5}(a-b)^2\,c^6$

c) $\dfrac{30a^8\,b^6\,c^3}{56x^5\,y^2\,z^9} : \dfrac{50a^5\,b^9\,y^2}{21\,c^2\,x^5\,z^{10}}$ d) $\left(\dfrac{m^2-n^2}{r^2-s^2}\right)^k : \left(\dfrac{m-n}{r+s}\right)^k$

Wandeln Sie folgende Quotienten in Potenzen mit positiven Exponenten um!

9. a) $\dfrac{1}{2^{-3}}$ b) $\dfrac{1}{6^{-2}}$ c) $\dfrac{1}{(-3)^{-4}}$ d) $\dfrac{1}{(-10)^{-3}}$

e) $\dfrac{1}{x^{-3}}$ f) $\dfrac{1}{x^{-k}}$ g) $\dfrac{1}{(-x)^{-3}}$ h) $\dfrac{1}{(-x)^{-4}}$

10. a) $\dfrac{6{,}4}{4^{-2}}$ b) $\dfrac{3{,}6}{3^{-3}}$ c) $\dfrac{3^3}{3^{-3}}$ d) $\dfrac{3^{-1}}{3^4}$

e) $\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{4}{9}y^{-2}}$ f) $\dfrac{0{,}6x^3}{1{,}8x^{-5}}$ g) $\dfrac{4\frac{1}{3}a^k}{\frac{25}{26}b^{-k}}$ h) $\dfrac{0{,}5x^0}{\frac{3}{4}x^{-6}}$

11. Vereinfachen Sie folgende Potenzen!

a) $\dfrac{m^{-3}}{m^{-6}}$ b) $\dfrac{m^{-2}}{m^{-5}}$ c) $\dfrac{0{,}6\,m^{-x}}{4{,}8\,m^{-3x}}$ d) $\dfrac{0{,}3\,m^{-3k}}{\frac{1}{3}m^{-4k}}$

e) $\dfrac{x^{-a-2}}{x^{-a-1}}$ f) $\dfrac{5\frac{1}{3}x^{-2a-4}}{0{,}4x^{-2a+4}}$ g) $\dfrac{x^{a+1}\,y^{-a-1}\,z^{-a}}{x^{-a+1}\,y^a\,z}$ h) $\dfrac{x^{-2n+3}\,y^{-n+1}\,z^{-m-1}}{x^{-n+2}\,y^{-2n+1}\,z^{-m+n}}$

12. Vereinfachen Sie folgende Produkte!

a) $\dfrac{m^{-5}\,o^{-2}}{n^{-2}\,p^{-3}} \cdot \dfrac{m^4\,n^{-3}\,p^{-2}}{o^{-3}}$ b) $\dfrac{u^{-6}\,w^2\,x^{-5}}{v^{-2}} \cdot \dfrac{w^{-5}\,x^6}{u^{-5}\,v^{-1}}$

13. Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

a) $\dfrac{a^{-6}\,c^{-5}}{b^2\,d^{-4}} : \dfrac{a^{-8}\,b^{-2}}{c^{-7}\,d^5}$ b) $\dfrac{x^4\,y^{-7}}{x^{-2}\,z} : \dfrac{x^6\,y^{-1}}{y^7\,z^{-1}}$ c) $\dfrac{a^{r-2}\,b^{-2s+3}}{a^{-r-1}\,c^{-2s+1}} : \dfrac{c^{s-1}}{a^{-2r+1}\,b^{s-3}\,c^{-s}}$

14. Vereinfachen Sie folgende Potenzen!

a) $(3^2)^{-2}$ b) $(0{,}5^4)^{-1}$ c) $(\frac{1}{6}x^3)^{-1}$ d) $(x^4)^{-2}$ e) $(6^{-1})^3$ f) $(2a^{-3})^2$

g) $(\frac{1}{3}a^{-5})^2$ h) $(a^{-1})^7$ i) $(\frac{2}{3}x^{-2})^{-4}$ k) $(x^{-3})^{-2}$ l) $(-x^{-7})^{-4}$ m) $-(-x^{-2})^{-1}$

15. a) $(x^{-2}\,y^{-3})^3$ b) $(x^{-4}\,y^3\,z^{-2})^{-3}$ c) $(r^{-4}\,s^3\,t)^{-3}$

16. a) $\left(\dfrac{x^6}{y^{-1}}\right)^{-1}$ b) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-3}$ c) $\left(\dfrac{a^{-4}}{b^{-3}}\right)^{-1}$ d) $\left(\dfrac{a^2b^{-2}}{c^3}\right)^{-2}$ e) $\left(\dfrac{a^{-1}b^2}{c^{-1}d^{-2}}\right)^3$ f) $\left(\dfrac{a^{-4}b}{cd^{-2}}\right)^{-1}$

17. Vereinfachen Sie folgende Produkte und Quotienten!

a) $\left(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^{4}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^{4}b^{-2}}{c^{-2}d^{-3}}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{q^{-2}s^{3}}{r^{-4}t^{-1}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{r^{-2}t^{-4}}{q^{-6}s^{10}}\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{m^{-1}o^{4}}{n^{2}p^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{n^{-4}o^{3}}{mp^{-6}}\right)^{-3}$ d) $\frac{(a-b)^{-2}}{(a^2-b^2)^{-1}}$ e) $\frac{(a^2-b^2)^{-2}}{(a+b)^{-2}}$

Schreibweise von Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen

● *Schreiben Sie* 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 *und* 1 000 000 *als Potenzen mit der Basis* 10!

Wenden wir die Gleichung (13) auf Brüche der Form $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$ bzw. 0,1; 0,01; 0,001 usw. an, so kann man sie als Potenzen mit der Basis 10 und negativen Exponenten auffassen.

Die Schreibweise kleiner und großer Zahlen in der Form von Potenzen mit der Basis 10 wird in den Naturwissenschaften und der Technik viel verwendet. Sie ist kurz, übersichtlich und bringt Rechenvorteile.

Für

$$\ldots;\ 0{,}0001;\ 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots$$

erhält man

$$\ldots;\ 10^{-4};\ 10^{-3};\ 10^{-2};\ 10^{-1};\ 10^{0};\ 10^{1};\ 10^{2};\ 10^{3};\ \ldots$$

Der Vorteil wird besonders bei sehr großen oder sehr kleinen Zahlen sichtbar.

Beispiel 20:

$10\,000\,000\,000 = 10^{10}$ (Zehn Milliarden)

Beispiel 21:

$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$ (ein Billionstel)

Viel häufiger gibt es jedoch Zahlen, die nicht allein durch Zehnerpotenzen dargestellt werden können. Sie können aber in sehr vielen Fällen als Produkt aus einer kleinen Zahl und einer Zehnerpotenz geschrieben werden.

Beispiel 22:

$270\,000 = 27 \cdot 10^{4} = 2{,}7 \cdot 10^{5}$

Die Bedeutung dieser kurzen Schreibweise für die Naturwissenschaften und die Technik erkennen wir an folgenden Beispielen.

Beispiel 23:

Die Erde hat eine Masse von 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg.
Die Schreibweise $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg schafft größere Übersichtlichkeit und ist rationeller.

Beispiel 24:

Ein Wasserstoffatom hat einen Durchmesser von 0,000 000 005 3 cm.
Besser schreibt man:
Ein Wasserstoffatom hat einen Durchmesser von $5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm.

Man bevorzugt in dieser Schreibweise Produkte aus Zahlen zwischen 1 und 10 und Potenzen von 10. Dabei ist die Zehnerpotenz größenmäßig bestimmend.
Bei vielen technischen und physikalischen Maßeinheiten wird die enthaltene Zehnerpotenz durch Vorsätze angegeben.
Die Bedeutung der Vorsätze entnehmen wir folgender Tabelle.

Vorsatz	Kurzzeichen	Größe	Beispiel
Tera	T	10^{12}	—
Giga	G	10^{9}	Gigahertz (GHz)[1]
Mega	M	10^{6}	Meg(a)ohm (MΩ)
Kilo	k	10^{3}	Kilopond (kp)
Hekto	h	10^{2}	Hektoliter (hl)
Deka	da	10^{1}	Dekagramm (dag)
Dezi	d	10^{-1}	Dezitonne (dt)[2]
Zenti	c	10^{-2}	Zentimeter (cm)
Milli	m	10^{-3}	Millisekunde (ms)
Mikro	μ	10^{-6}	Mikrovolt (μV)[3]
Nano	n	10^{-9}	Nanometer (nm)[4]
Pico	p	10^{-12}	Picofarad (pF)[5]

Häufig ergeben sich die Maßeinheiten durch Potenzieren der Grundeinheiten. So wird zum Beispiel die Fläche in Quadratmetern (m^2), das Volumen in Kubikmetern (m^3), die Beschleunigung in $\frac{m}{s^2}$ angegeben.
Um Brüche zu vermeiden, wendet man auch auf Maßeinheiten die Gleichung (12) an:

$$1\,\frac{m}{s^2} = 1\,m \cdot s^{-2}.$$

Um sehr grob die Größe einer Zahl zu fixieren, genügt es häufig, die nächstliegende Zehnerpotenz anzugeben:

(14) $5 \cdot 10^{k-1} \leqq Z < 5 \cdot 10^{k}.$

Hierin ist k der Exponent der bestimmenden Zehnerpotenz. Man sagt in diesem Fall, die Zahl Z liegt in der Größenordnung von 10^k oder in der k-ten Zehnerpotenz.

Beispiel 25:

$5{,}2 \cdot 10^{-3}$ liegt in der Größenordnung von 10^{-2}, denn es gilt

$5 \cdot 10^{-3} < 5{,}2 \cdot 10^{-3} < 5 \cdot 10^{-2}.$

Beispiel 26:

$25 \cdot 10^4$ liegt in der Größenordnung von 10^5, denn es gilt

$25 \cdot 10^4 = 2{,}5 \cdot 10^5$ und $5 \cdot 10^4 < 2{,}5 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5.$

Begründen Sie, weshalb $56 \cdot 10^3$ *in der Größenordnung von* 10^5 *liegt!*

[1] Größenordnung der Frequenz von Radarsignalen
[2] früher Doppelzentner
[3] Größenordnung der Spannung an der Antenne eines Rundfunkempfängers
[4] früher Millimikron (mμ)
[5] Kleinste Einheit der elektrischen Kapazität

18. Schreiben Sie folgende Zahlen als Potenzen mit der Basis 10!

a) 10 000; 10 000 000; 1 000 000 000; 10 000 000 000

b) 0,001; 0,000 01; 0,000 000 000 01; 0,000 000 000 1

c) Wie heißen die Zahlen aus **a** und **b**?

19. Schreiben Sie folgende Zahlen als Produkte aus Zahlen zwischen 1 und 10 und Potenzen von 10!

a) 250 **b)** 322 000 **c)** 438 000 **d)** 12 000 000
e) 403 000 000 **f)** 0,12 **g)** 0,023 **h)** 0,00 012 3
i) 0,000 100 2 **k)** 0,000 005 6 **l)** Nennen Sie die Namen der Zahlen aus **a** bis **k**

20. Schreiben Sie folgende Zahlen als Produkte aus Zahlen zwischen 1 und 10 und Potenzen von 10!

a) Eine Trillion **b)** 12 Milliarden **c)** 112 Billionen
d) 16 Millionstel **e)** 0,5 Trillionstel **f)** 0,01 Millionstel

21. Benutzen Sie die Potenzschreibweise für folgende Zahlen!

a) In 22,4 l Sauerstoff unter Normalbedingungen befinden sich 602 400 000 000 000 000 000 000 Moleküle (LOSCHMIDTsche Zahl).

b) Ein Molekül Wasser (H_2O) hat eine Masse von 0,000 000 000 000 000 000 000 029 88 g.

c) Das Licht hat im Vakuum eine Geschwindigkeit von 29 977 500 000 cm $\cdot$ s^{-1}.

d) Ein Elektron hat eine Ruhemasse von 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 7 g.

22. Geben Sie die nächstliegende Zehnerpotenz folgender Zahlen an!

a) $6 \cdot 10^3$ **b)** $3 \cdot 10^4$ **c)** $7 \cdot 10^{-6}$ **d)** $2 \cdot 10^{-4}$ **e)** $5 \cdot 10^5$
f) $4 \cdot 10^{-3}$ **g)** $12 \cdot 10^2$ **h)** $53 \cdot 10^4$ **i)** $48 \cdot 10^2$ **k)** $62 \cdot 10^5$
l) $17 \cdot 10^{-4}$ **m)** $76 \cdot 10^{-5}$ **n)** $0,3 \cdot 10^4$ **o)** $0,5 \cdot 10^5$ **p)** $0,2 \cdot 10^{-4}$ **p)** $0,72 \cdot 10^{-6}$

23. Geben Sie die folgenden Maßeinheiten als Zehnerpotenzen der Grundeinheiten an!

a) Nanofarad **b)** Mikrofarad **c)** Kilometer **d)** Hektometer **e)** Dezimeter
f) Zentimeter **g)** Millimeter **h)** Mikrometer **i)** Nanometer **k)** Gigawatt
l) Megawatt **m)** Kilowatt **n)** Megapond **o)** Kilopond **p)** Millipond
q) Megavolt **r)** Kilovolt **s)** Millivolt **t)** Mikrovolt

24. Drücken Sie folgende Größenordnungen mit Hilfe von Vorsilben aus!

a) 10^6 t **b)** 10^3 t **c)** 10^{-1} t **d)** 10^3 A **e)** 10^{-3} A
f) 10^{-6} A **g)** 10^2 l **h)** 10^{-2} l **i)** 10^{-3} l

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Die von uns bisher betrachteten Funktionsbilder der Funktion

$$y = x^n \quad (n \geqq 2,\ \text{ganzzahlig})$$

sind Sonderfälle der Potenzfunktionen, die aus dem erweiterten Potenzbegriff hervorgehen:

$$(15) \quad y = x^n \qquad (n\ \text{ganzzahlig}).$$

Die Bilder für $n \geqq 2$ haben wir bereits untersucht.

● *Wie verläuft das Bild der Funktion $y = x^1$ im gesamten Definitionsbereich dieser Funktion? Welchen Verlauf hat das Bild der Funktion für $-\infty < x < 0$ und $0 \leqq x < \infty$? Welche besonderen Eigenschaften hat diese Kurve?*

Das Bild der Funktion $y = x^0$, d. h. $y = 1$ $(x \neq 0)$, ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1. Damit das Bild nicht zerfällt, setzen wir fest, daß für $x_0 = 0$ auch $y = f(x_0) = 1$ sein soll. Das muß durch eine Festsetzung erfolgen, denn 0^0 ist nicht definiert.

● *Stellen Sie Wertetabellen für die Funktionen $y = x^{-1}$; $y = x^{-2}$; $y = x^{-3}$; $y = x^{-4}$ und $y = x^{-5}$ auf, und zeichnen Sie die Kurven im Intervall $-4 \leqq x < 0$ und $0 < x \leqq 4$!*

Einige Kurven der Schar $y = x^n$ mit ganzzahligen, negativen Exponenten sehen wir in Abbildung 4.4. Diese Kurven heißen **Hyperbeln**[1].

Aus diesen ausgewählten Kurven können Schlußfolgerungen auf den Verlauf der Kurvenschar $y = x^n$ $(n < 0$, ganzzahlig) gezogen werden.

1. Die Hyperbeln bestehen aus zwei Teilen, den Hyperbelästen.
2. Die Unterscheidung in gerade und ungerade Funktionen gilt auch hier. Die Bilder gerader bzw. ungerader Funktionen liegen axialsymmetrisch zur Ordinatenachse bzw. zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Gerade Funktionen werden durch die Gleichung

(16a) $y = x^{2k}$ $(k = -1; -2; -3; \ldots)$

und ungerade Funktionen durch

(16b) $y = x^{2k+1}$ $(k = -1; -2; -3; \ldots)$

beschrieben.

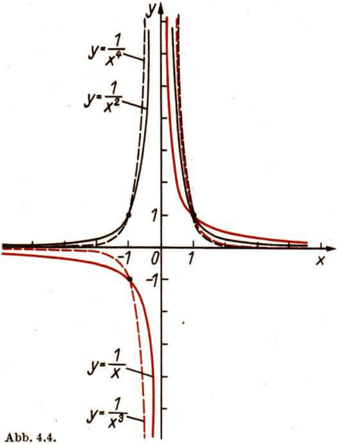


Abb. 4.4.

3. Die Bilder aller geraden Funktionen dieses Typs gehen durch die Punkte $(-1; 1)$ und $(1; 1)$, die aller ungeraden durch die Punkte $(-1; -1)$ und $(1; 1)$.
4. Keine Hyperbel vom Typ $y = x^n$ $(n < 0$, ganzzahlig) geht durch den Koordinatenursprung. Hyperbeln dieser Art besitzen für $x = 0$ keinen erklärten Funktionswert.

● *Begründen Sie, weshalb eine Kurve des Typs $y = x^n$ $(n < 0$, ganzzahlig) für $x = 0$ keinen Funktionswert hat!*

5. Für wachsende $x > 0$ und fallende $x < 0$ nähert sich das Bild der Kurven immer mehr der x-Achse. Nähert sich eine Kurve [in unserem Fall $y = \frac{1}{x^n}$ $(n > 0$, ganzzahlig)]

[1] ὑπερβολή (grch.), das Darüberhinauswerfen

einer Geraden [hier $y = 0$] immer mehr, ohne daß sie zusammenfallen, so sagt man, die Kurven nähern sich einander **asymptotisch**[1]. Die Kurvenschar nähert sich für wachsende x im Intervall $-1 < x < 0$ und für fallende x im Intervall $0 < x < 1$ gleichfalls asymptotisch der y-Achse.

6. Mit fallenden Potenzexponenten (wachsender Betrag) verläuft die Kurve in den Intervallen $-1 \leqq x < 0$ und $0 < x \leqq 1$ steiler.

7. Definitionsbereich der Funktion $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig):
$-\infty < x < 0; \quad 0 < x < \infty.$

8. Wertevorrat der
geraden Funktion: $\quad 0 < y < \infty;$
ungeraden Funktion: $\quad -\infty < y < 0; \quad 0 < y < \infty.$

Das Bild der Funktion $y = x^0$ ist die sogenannte Grenzgerade zwischen der Schar der Parabeln und der Schar der Hyperbeln.
Unter den Hyperbeln hat die Funktion $y = \frac{1}{x}$ eine besondere Bedeutung.

Das physikalische Gesetz $p \cdot V = c$ (Gesetz von Boyle) ergibt nach p aufgelöst:

Beispiel 27:

$$p = \frac{c}{V}.$$

Der konstante Zähler ändert am prinzipiellen Verlauf der Kurve nichts (Abb. 4.5.). Die Kurve entspricht dem Bild des positiven Astes der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$.

Für

$$p \sim \frac{1}{V}$$

sagt man, p sei zu V umgekehrt proportional. Deshalb hat $y = \frac{m}{x}$ auch den Namen „Funktion der reziproken Proportionalität“.

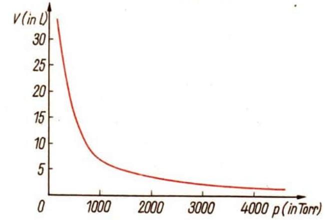


Abb. 4.5.

1. *Wiederholen Sie die Eigenschaften der Funktionen der direkten Proportionalität!*
2. *Geben Sie Beispiele für direkte Proportionalität aus der Physik an!*

Die Abbildung 4.6. zeigt in einem Koordinatensystem die Funktionen $y_1 = mx$ (direkte Proportionalität) und $y_2 = \frac{m}{x}$ (reziproke Proportionalität). Man erkennt, daß bei direkter Proportionalität der Anstieg überall gleich ist. Bei umgekehrter

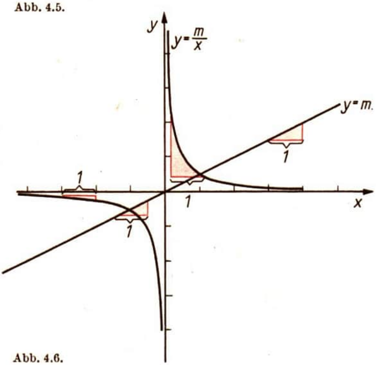


Abb. 4.6.

[1] ἀ-σύμπτωτος (grch.), nicht zusammenfallend

Proportionalität hängt es vom Abszissenwert ab, ob die Ordinate schnell oder langsam für wachsende x abnimmt.

Beispiel 28:

Für die elektrische Leistung gilt die Gleichung $P = \frac{U^2}{R}$.

Für eine konstante Spannung U gilt dann: $P \sim \frac{1}{R}$.

Auch hier liegt umgekehrte Proportionalität vor. Wird ein kleiner Widerstand R geringfügig verkleinert, so hat das ein starkes Ansteigen der Leistung zur Folge. Wird dagegen ein großer Widerstand R stärker geändert, so bleibt die Leistung fast konstant. Gibt man nicht acht, so kann ein geringes Verschieben des Abgriffes eines regelbaren Widerstandes durch starke Leistungsaufnahme zur Zerstörung der Wicklung führen.

Die Kurvenschar $y = x^n$ (n ganzzahlig)

Damit wir erkennen, welchen Einfluß die Größe des Exponenten hat, zeichnen wir die Kurven

$$y = x^n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4)$$

in ein Koordinatensystem. Um nicht an jede Kurve die entsprechende Funktion schreiben zu müssen, führen wir eine neue Bezeichnungsform ein. Alle dargestellten Funktionen unterscheiden sich nur durch ihre verschiedenen Exponenten. Es genügt also, wenn wir angeben, daß es sich um die Kurvenschar $x = x^n$ handelt und an jede Kurve den zugehörigen Exponenten schreiben.

In diesem Fall heißt der angegebene Exponent **Parameter**[1].

Mit Hilfe der Angabe der Parameter der einzelnen Kurven der Schar ist man in der Lage, viele Kurven des gleichen Typs in ein Koordinatensystem zu zeichnen (Abb. 4.7.).

Die Einführung des Parameters gibt die Möglichkeit, eine Funktion zwischen drei Größen, in unserem Fall x, y und n, in der Ebene darzustellen, indem man für den Parameter, in unserer Abbildung n, feste Werte einsetzt. In der Technik werden solche Darstellungen sehr oft verwendet.

Beschreiben Sie den Einfluß des Exponenten auf den Verlauf der Kurve $y = x^n$! Gehen Sie dabei vom Unterschied zwischen geraden und ungeraden Funktionen aus!

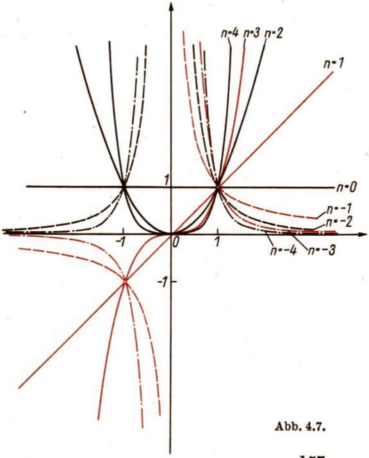


Abb. 4.7.

[1] παρά-μετρέω (grch.), etwas nach einer Sache messen

Aufgaben

25. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen $y = x^n$!

a) $n = \pm 1$ **b)** $n = \pm 2$ **c)** $n = \pm 3$

26. Spiegeln Sie die Bilder folgender Funktionen an der x-Achse!

a) $y = x^{-1}$ **b)** $y = x^{-2}$ **c)** $y = x^{-3}$

d) Wie heißen die analytischen Ausdrücke der Spiegelbilder?

27. Spiegeln Sie die Bilder folgender Funktionen an der y-Achse!

a) $y = x^{-1}$ **b)** $y = x^{-2}$ **c)** $y = x^{-3}$ **d)** $y = x^{-4}$

e) Wie heißen die analytischen Ausdrücke der Spiegelbilder?

28. Spiegeln Sie das Bild der Funktion $y = \frac{1}{x}$ an der Ordinatenachse und anschließend an der Abszissenachse! Wie heißen die analytischen Ausdrücke der Spiegelbilder?

29. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = a\,x^{-1}$ mit

a) $a = 1$; **b)** $a = -1$; **c)** $a = 2$;
d) $a = 4$; **e)** $a = \frac{1}{2}$; **f)** $a = \frac{1}{10}$!

Welchen Einfluß hat der Koeffizient?

30. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = a\,x^{-2}$ mit

a) $a = 1$; **b)** $a = -1$; **c)** $a = 2$;
d) $a = 4$; **e)** $a = \frac{1}{2}$; **f)** $a = \frac{1}{10}$!

31. Der Widerstand zweier parallelgeschalteter Widerstände R_1 und R_2 ist bei festem $R_1 = 1\,\Omega$ eine Funktion von R_2. Stellen Sie den funktionalen Zusammenhang $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ für diesen Fall grafisch dar!

a) Welcher Funktionstyp liegt hier vor?

b) Vergleichen Sie das Bild mit dem von $y = \frac{1}{x}$!

c) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertevorrat der Funktion an!

32. Zeichnen Sie die Kurvenschar $y = a\,x^{-2}$, indem Sie a als Parameter auffassen und nacheinander folgende Werte annehmen lassen!

a) $a = -5$ **b)** $a = -3$ **c)** $a = -2$ **d)** $a = -1$
e) $a = -\frac{1}{2}$ **f)** $a = -\frac{1}{10}$ **g)** $a = 0$ **h)** $a = \frac{1}{10}$
i) $a = \frac{1}{2}$ **k)** $a = 1$ **l)** $a = 2$ **m)** $a = 3$ **n)** $a = 5$

33. Zeichnen Sie die Kurvenschar $y = \frac{1}{x} + a$, indem Sie a als Parameter auffassen und nacheinander die folgenden Werte annehmen lassen!

a) $a = -6$ **b)** $a = -4$ **c)** $a = -2$
d) $a = 0$ **e)** $a = 2$ **f)** $a = 4$ **g)** $a = 6$

34. Zeichnen Sie die Kurvenschar $y = \left(\frac{2}{x}\right)^n$, indem Sie n als Parameter auffassen und nacheinander die folgenden Werte annehmen lassen!

a) $n = -3$ **b)** $n = -2$ **c)** $n = -1$
d) $n = 0$ **e)** $n = 1$ **f)** $n = 2$ **g)** $n = 3$

4.3. Potenzen und Potenzfunktionen (Exponent rational)

● *Ermitteln Sie den größtmöglichen quadratischen Querschnitt eines Balkens, der aus einem Rundholz mit dem kleinsten Durchmesser von* 25 cm *geschnitten werden kann!*

Bei der Lösung dieser Aufgabe muß man auch die Frage beantworten, wie groß die Seite einer gegebenen Quadratfläche ist. Die Beantwortung dieser Frage führt auf die rein-quadratische Bestimmungsgleichung:

$$x^2 = A.$$

Darin bedeuten A die Fläche und x die unbekannte Quadratseite. Die Gleichung lösen wir, indem wir die Quadratwurzel ziehen:

$$\sqrt{A} = \sqrt{x^2} = x.$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses kontrolliert man dadurch, daß man beide Seiten ins Quadrat erhebt. Man gelangt zur ursprünglichen Gleichung zurück.

$$(\sqrt{A})^2 = x^2$$
$$A = x^2$$

Aus dem Vorstehenden kann man erkennen, daß man das Quadrieren einer Zahl durch das Ziehen der Quadratwurzel aufhebt.

● *1. Wie heißt die Rechenoperation, durch die eine Addition aufgehoben wird?*
2. Wie heißt die Rechenoperation, durch die eine Division aufgehoben wird?
3. Wie heißt die Rechenoperation, durch die das Ziehen der Quadratwurzel aufgehoben wird?

Verallgemeinern wir das Problem. In der folgenden Gleichung ist die unbekannte Basis einer Potenz zu bestimmen.

(17) $b = x^n \quad (n > 0$, ganzzahlig; $b \geqq 0)$.

Analog zum Einführungsbeispiel versuchen wir das Problem zu lösen.
Die Basis einer n-ten Potenz ermittelt man, indem man aus der Potenz die n-te Wurzel zieht.

(18) $\sqrt[n]{b} = x \qquad (n > 0$, ganzzahlig; $b \geqq 0)$.

Das Ziehen einer n-ten Wurzel aus einer Zahl ist eine Rechenoperation, durch die eine andere Zahl ermittelt wird, die in die n-te Potenz erhoben die ursprüngliche Zahl ergibt.

(19) $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = (x)^n = b \qquad (n > 0$, ganzzahlig; $b \geqq 0)$.

Das Wurzelziehen ist also eine (die erste) Umkehrung des Potenzierens, man nennt es auch **Radizieren**[1].

Eine andere (die zweite) Umkehrungsmöglichkeit besteht darin, daß ein unbekannter Exponent bei bekannter Basis und bekanntem Potenzwert ermittelt wird.

In der Gleichung

(20) $a = \sqrt[n]{b}$ $\qquad (n > 0,\ \text{ganzzahlig};\ b \geqq 0)$

ist a der **Wurzelwert,** n der **Wurzelexponent** und b der **Radikand.**
Ist der Wurzelexponent eine gerade Zahl, so nennt man die Wurzel gerade. Durch einen ungeradzahligen Wurzelexponenten wird die Wurzel ungerade.
Untersuchen wir, welche Eigenschaften der Radikand besitzen kann.

1. Der Radikand ist 0: $\sqrt[n]{0} = 0$ ($n > 0$, ganzzahlig).
   Jede Wurzel aus 0 ist 0, denn 0 mit jedem beliebigen von Null verschiedenen Exponenten potenziert, ergibt immer 0.

Beispiel 29:

$\sqrt[3]{0} = 0$, denn $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^3 = 0$

2. Der Radikand ist positiv:
   Für positive Radikanden ist jede Wurzel definiert. Der Wurzelwert ist in den meisten Fällen eine Irrationalzahl. Irrationalzahlen können im Gegensatz zu ganzen Zahlen, endlichen und periodischen Dezimalzahlen nicht durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden. Irrationalzahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche.

Beispiel 30:

$\sqrt[4]{625} = 5$, denn $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

Beispiel 31:

$\sqrt[3]{2}$ ist eine irrationale Zahl, die zwischen 1,25 und 1,26 liegt.

3. Der Radikand ist negativ:
   Wurzeln mit negativen Radikanden sind für uns nicht erklärt.

Um keine Ausnahmen und Besonderheiten berücksichtigen zu müssen, werden in der mathematischen Wissenschaft im Bereich der uns bisher bekannten rationalen und irrationalen Zahlen negative Radikanden grundsätzlich nicht zugelassen. Deshalb mußten wir, um korrekt zu sein, in (17), (18), (19) und (20) jeweils die Zusatzbedingung $b \geqq 0$ anbringen.

Unter der n-ten Wurzel ($n \geqq 1$, natürlich) aus einer nicht negativen Zahl b, in Zeichen $\sqrt[n]{b}$, versteht man diejenige Zahl, für die gilt: $a \geqq 0$ und $a^n = b$.

[1] radix (lat.), die Wurzel

Vorzeichen von Wurzeln

Es ist uns bekannt, daß geradzahlige Potenzen sowohl von positiven Zahlen als auch von negativen Zahlen positiv sind.

(21) (I) $(+a)\cdot(+a) = (+a)^2 = a^2 = b$

(II) $(-a)\cdot(-a) = (-a)^2 = a^2 = b$

Entsprechend erhalten wir

(21a) (I) $\underbrace{(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)\cdot\ldots\cdot(+a)}_{2k\text{-mal}} = (+a)^{2k} = a^{2k} = b \quad (b \geqq 0)$

(II) $\underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{2k\text{-mal}} = (-a)^{2k} = a^{2k} = b \quad (b \geqq 0)$

$(k = 1, 2, 3, \ldots).$

Wenn nun b ($b > 0$) gegeben ist, so ergibt sich folgendes Problem:
Sollen wir für $\sqrt{b}$ entweder $+a$ *oder* $-a$ *oder* sowohl $+a$ als auch $-a$ als Ergebnis akzeptieren?
Da für das Ergebnis Eindeutigkeit gefordert wird, erfolgt eine Festsetzung.
Zu ihr gelangt man auf folgendem Wege.

Für (21) kann man, falls $a = \sqrt{b}$ mit $a > 0$ gilt, folgende Gleichungen schreiben:

(22) (I) $(+a)\cdot(+a) = \left(+\sqrt{b}\right)\cdot\left(+\sqrt{b}\right) = b$

(II) $(-a)\cdot(-a) = \left(-\sqrt{b}\right)\cdot\left(-\sqrt{b}\right) = b.$

Die Festsetzung besteht darin, daß man gleichsetzt:

(23) $+a = +\sqrt{b}$, falls $a^2 = b$ mit $a > 0$ und $b > 0$;

(24) $-a = -\sqrt{b}$, falls $a^2 = b$ mit $a > 0$ und $b > 0$.

Allgemein gilt für Wurzeln:

$$\left.\begin{array}{ll}(25) & \boldsymbol{a = \sqrt[n]{b}} \\ (26) & \boldsymbol{+a = +\sqrt[n]{b}} \\ (27) & \boldsymbol{-a = -\sqrt[n]{b}}\end{array}\right\} \quad (n > 0,\ \text{ganzzahlig};\ a > 0,\ b > 0).$$

Beispiel 32:

$\sqrt[3]{64} = 4$

Beispiel 33:

$+\sqrt[4]{16} = +2$

Beispiel 34:

$-\sqrt[5]{243} = -3$

Vereinbarungsgemäß ist also eine Wurzel immer ein Betrag, also stets größer oder gleich Null. Wenn zusätzlich ein Vorzeichen angegeben wird, so bleibt bei einem Pluszeichen der Wurzelwert positiv, nur wenn vor der Wurzel ein negatives Vorzeichen steht, wird der Wurzelwert negativ.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Bisher haben wir die Potenzschreibweise für beliebige, ganzzahlige Exponenten eingeführt.
Ändert man die Gleichung

(19) $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = (x)^n = b \quad (b \geqq 0;\ n \text{ eine natürliche Zahl})$

in

(28) $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b^1 \qquad (b \geqq 0;\ n \text{ eine natürliche Zahl})$

um, so drängt sich die Frage auf, wie der Exponent 1 entstanden sein kann. (Die Bedingung $b \geqq 0$; n eine natürliche Zahl soll im folgenden stets gelten.)
Will man die Frage unter Beachtung des Permanenzprinzips beantworten, so könnte man b^1 durch Potenzieren auf folgendem Wege bilden:

(29) $b^1 = b^{\frac{1}{n}\cdot n} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n.$

Wir müssen dabei jedoch beachten, daß wir an dieser Stelle den noch nicht erklärten Ausdruck $b^{\frac{1}{n}}$ benutzen.
Setzt man die Gleichungen (28) und (29) einander gleich, so erhält man

(30) $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n.$

Zieht man auf beiden Seiten die n-te Wurzel, so erklärt man $b^{\frac{1}{n}}$ durch die folgende Festsetzung:

(31) $\boldsymbol{\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}} \quad (n > 0,\ \text{ganzzahlig};\ b \geqq 0).$

Beispiel 35:

$$\sqrt[3]{27} = 3 = \sqrt[3]{3^3} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\cdot\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

Durch diese Festsetzung wird der Potenzbegriff auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten erweitert.
Für diese Potenzen gilt die Einschränkung, daß die Basis stets positiv sein muß.
Setzen wir $a^m = b$ in (31) ein, so folgt:

(32) $\sqrt[n]{(a^m)} = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$

Den Ausdruck $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ können wir noch nicht bestimmen; wohl aber zeigt uns (32), daß er das bedeuten muß, was in der Wurzelschreibweise durch $\sqrt[n]{a^m}$ wiedergegeben wird. Würden wir formal (4) $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n ganze Zahlen) anwenden, so erhielten wir für $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ den Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$, also eine Potenz mit beliebigem rationalem Exponenten. Wir setzen daher fest:

(33) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ($a \geqq 0$, n eine natürliche, m eine ganze Zahl).

Die Gleichung (33) stellt also eine neue Festsetzung dar, die unmittelbar an die Festsetzung (31) anschließt.

● *Formulieren Sie den Inhalt der Festsetzung* (33) *in Worten! Zeigen Sie, daß* (31) *in* (33) *als Spezialfall enthalten ist!*

Herleitung der Wurzelgesetze

Daß die Festsetzungen (31) und (33) nach dem Permanenzprinzip erfolgten, kann man nicht auf so einfache Weise bestätigen wie in den vorangegangenen Fällen.
Dadurch, daß man unter Benutzung der Definition der Wurzel das Rechnen mit Wurzeln auf das mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten zurückführt, ist es möglich, die Rechengesetze für Wurzeln herzuleiten. Stimmen die Wurzelgesetze dann, wenn sie mit Hilfe von Potenzen mit beliebigen rationalen Exponenten niedergeschrieben werden, formal mit den bereits bewiesenen Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen mit ganzen Exponenten überein, so wird bestätigt, daß die Festsetzungen dem Prinzip der Permanenz entsprechen. Dann sind nämlich die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten in den Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen mit beliebigen rationalen Exponenten als Spezialfall enthalten.
Erst dann sind die bewiesenen Potenzgesetze für alle Potenzen mit beliebigem rationalem Exponenten gültig.
Die Aufgabe, mit Wurzeln zu rechnen, führen wir auf die bereits gelöste Aufgabe, das Rechnen mit Potenzen, zurück.
Durch Potenzieren der Wurzel mit dem Wurzelexponenten erhält man Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Auf diese wendet man die Potenzgesetze an. Durch anschließendes Radizieren mit dem ursprünglichen Wurzelexponenten erhält man das entsprechende Wurzelgesetz.

1. Addition und Subtraktion von Wurzeln

(34) $\sqrt[n]{a^m} \pm \sqrt[s]{b^r}$ oder $a^{\frac{m}{n}} \pm b^{\frac{r}{s}}$.

Es ist nicht möglich, diese Summe durch Potenzieren so umzuformen, daß ihre Glieder nur noch Potenzen mit ganzzahligen Exponenten enthalten. Die vorliegende Aufgabe kann also nicht auf eine bereits gelöste zurückgeführt werden.

► **Wurzeln lassen sich im allgemeinen weder durch Addition noch durch Subtraktion zusammenfassen.**

Beispiel 36:

$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{b^3}$. Es ist keine Vereinfachung möglich.

Nur für den Sonderfall, daß die Wurzeln gleichartig sind, können sie durch Addition bzw. Subtraktion zusammengefaßt werden:

$$(35) \quad k \cdot \sqrt[n]{a^m} \pm l \sqrt[n]{a^m} = (k \pm l) \sqrt[n]{a^m}.$$

Beispiel 37:

$$5 \sqrt[3]{x^2} + 4 \sqrt[3]{x^2} = (5 + 4) \sqrt[3]{x^2} = 9 \sqrt[3]{x^2}$$

Weil die Gesetze der Multiplikation und Division von Wurzeln recht kompliziert sind, wollen wir zunächst Wurzeln potenzieren und radizieren.

2. Potenzieren und Radizieren von Wurzeln

Potenzieren:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k$$

Man potenziert mit dem Wurzelexponenten:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{k \cdot n} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k = (a^m)^k = a^{mk}.$$

Radiziert man mit n, so folgt:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}}.$$

$$(36) \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}} \quad \text{oder} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k = a^{\frac{mk}{n}}$$

Radizieren:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}$$

Man potenziert mit dem Produkt der Wurzelexponenten $n \cdot k$:

$$\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^{n \cdot k} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m.$$

Radiziert man mit $n \cdot k$, so folgt:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n \cdot k]{a^m}.$$

$$(37) \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[k \cdot n]{a^m} \quad \text{oder} \quad \sqrt[k]{a^{\frac{m}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{m}{nk}}$$

Wurzeln können ohne Einschränkung potenziert (radiziert) werden, indem man den Radikanden potenziert (aus dem Radikanden die Wurzel mit dem Produkt der Wurzelexponenten zieht).

Beispiel 38:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = \sqrt[3]{x^{2\cdot 5}} = \sqrt[3]{x^{10}}$$

Beispiel 39:

$$\sqrt[4]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[4\cdot 2]{x^3} = \sqrt[8]{x^3}$$

Vereinigt man die Gleichungen (36) und (37), so erhält man:

$$(38)\quad \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^l = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^l} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ml}}} = \sqrt[k\cdot n]{a^{ml}} \quad \text{oder} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{l}{k}} = a^{\frac{ml}{nk}}.$$

Beispiel 40:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2 = \sqrt[3\cdot 5]{x^{4\cdot 2}} = \sqrt[15]{x^8}$$

Für $k = l = q$ wird aus Gleichung (38):

$$\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^q = \sqrt[n\cdot q]{a^{mq}}.$$

Andererseits ist aber

$$\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^q = \sqrt[n]{a^m}.$$

Durch Gleichsetzen folgt daraus:

$$(39)\quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot q]{a^{mq}} \quad \text{oder} \quad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}}.$$

In Analogie zur Bruchrechnung nennt man diese Rechenoperation „das Erweitern einer Wurzel“.

Weisen Sie nach, daß es auch möglich ist, den Wurzelexponenten und den Radikandenexponenten durch eine von Null verschiedene Zahl zu dividieren, ohne daß sich der Wurzelwert ändert!

3. Multiplikation und Division von Wurzeln

Multiplizieren:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{b^r}$$

Beide Wurzeln werden mit Hilfe von Gleichung (39) auf einen gemeinsamen Wurzelexponenten gebracht:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{b^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{b^{nr}}.$$

Man potenziert mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten $n\,s$:

$$\left(\sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{b^{nr}}\right)^{ns} = \left(\sqrt[ns]{a^{ms}}\right)^{ns} \cdot \left(\sqrt[ns]{b^{nr}}\right)^{ns} = a^{ms} \cdot b^{nr}.$$

Dann radiziert man mit $n\,s$:

$$\sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{b^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot b^{nr}}.$$

Daraus folgt:

$$(40) \quad \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{b^r} = \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot b^{nr}} \quad \text{oder} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = (a^{ms} \cdot b^{nr})^{\frac{1}{ns}}.$$

Dividieren:

Die Division kann mittels Definition (12) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ auf eine Multiplikation zurückgeführt werden.

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{b^r}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{-r}{s}}.$$

Einsetzen der Gleichung (40) liefert

$$(41) \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{-r}{s}} = (a^{ms} \cdot b^{-nr})^{\frac{1}{ns}} = \left(\frac{a^{ms}}{b^{nr}}\right)^{\frac{1}{ns}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{b^r}} = \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot b^{-nr}} = \sqrt[ns]{\frac{a^{ms}}{b^{nr}}}$$

▶ **Wurzeln können miteinander (durcheinander) multipliziert (dividiert) werden, indem man sie auf den gleichen Wurzelexponenten bringt und das Produkt (den Quotienten) mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.**

■ **Beispiel 41:**

$$\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[4]{n^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{m^4} \cdot \sqrt[3 \cdot 4]{n^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{m^4} \cdot \sqrt[12]{n^9} = \sqrt[12]{m^4\, n^9}$$

■ **Beispiel 42:**

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{y^4}} = \frac{\sqrt[5 \cdot 4]{x^{3 \cdot 5}}}{\sqrt[4 \cdot 5]{y^{4 \cdot 4}}} = \frac{\sqrt[20]{x^{15}}}{\sqrt[20]{y^{16}}} = \sqrt[20]{\frac{x^{15}}{y^{16}}}$$

In einigen Sonderfällen ist die Multiplikation und Division von Wurzeln besonders einfach.

● *Leiten Sie aus den Gleichungen* (40) *und* (41) *Formeln für folgende Sonderfälle her!*

a) *Die Wurzeln haben gemeinsame Wurzelexponenten.*
b) *Die Wurzeln haben Radikanden mit gleicher Basis.*
c) *Die Wurzeln haben gemeinsame Radikanden.*

Der Vergleich der Rechengesetze für Wurzeln, vor allem in der Form für Bruchpotenzen, mit den Potenzgesetzen bestätigt uns, daß die Festsetzungen

(31) $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ $\quad (n > 0,$ ganzzahlig; $b \geqq 0)$

und

(33) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\quad (n > 0,$ ganzzahlig; $a^m \geqq 0)$

dem Prinzip der Permanenz folgen.

Zusammenfassung:

Der Begriff der Potenz wurde durch folgende Definitionen mehrfach erweitert:

1. $a^1 = a$
2. $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$
4. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a \geqq 0)$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geqq 0).$

Als Exponenten der erklärten Potenzen sind damit alle rationalen Zahlen möglich. Die für die ursprünglichen Potenzen bewiesenen Rechenregeln gelten wegen des von uns beachteten Permanenzprinzips auch für Potenzen mit rationalen Exponenten. Fassen wir diese Regeln zu den Potenzgesetzen zusammen. Sie enthalten als allgemeinste Gesetze die Rechenregeln für alle Potenzen und Wurzeln, wenn für a, b sowie n, m nur solche Zahlen gewählt werden, die den in den vorangegangenen Abschnitten im einzelnen erläuterten Bedingungen genügen.

1. Addition und Subtraktion

(42) $\boldsymbol{a^m \pm b^n}$ Vereinfachung nicht möglich.

▶ **Potenzen können im allgemeinen weder durch Addition noch durch Sutraktion zusammengefaßt werden. Nur bei Potenzen mit gemeinsamer Basis und gemeinsamen Exponenten ist ein Zusammenfassen möglich.**

2. Multiplikation

(43) $\boldsymbol{a^m \cdot b^n}$ Vereinfachung nicht möglich.

▶ **Potenzen können im allgemeinen nicht durch Multiplikation zusammengefaßt werden.**

Eine Ausnahme bilden zwei Sonderfälle.

(44) $\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a\,b)^m}$

▶ **Potenzen mit gleichen Exponenten multipliziert man, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.**

(45) $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

▶ **Potenzen mit gleicher Basis multipliziert man, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.**

3. Division

(46) $a^m : b^n = \dfrac{a^m}{b^n}$ $\quad (b \neq 0)$ Vereinfachung nicht möglich.

Potenzen kann man im allgemeinen nicht durch Division zusammenfassen.

Eine Ausnahme bilden zwei Sonderfälle.

(47) $a^m : b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$

Potenzen können durch Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert werden, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

(48) $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

Potenzen kann man durch Potenzen mit gleicher Basis dividieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Exponentendifferenz, die durch Subtraktion des Dividendenexponenten vom Divisorexponenten entsteht, potenziert.

4. Potenzieren

(49) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$

Potenzen werden potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

5. Radizieren

(50) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad (n \neq 0)$

Potenzen werden radiziert, indem man die Basis mit dem Quotienten, der durch Division des Exponenten durch den Wurzelexponenten entsteht, potenziert.

Diese Gesetze sind auch in ihrer Umkehrung für alle Potenzen mit rationalem Exponenten gültig.
Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß bestimmte Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn Rechenoperationen mit Potenzen, deren Wert nicht in Zahlen angegeben werden kann, durchgeführt werden sollen.

1. Rechenoperationen erster Stufe (Addition und Subtraktion):
   Die Potenzen müssen in der Basis **und** dem Exponenten übereinstimmen.
2. Rechenoperationen zweiter Stufe (Multiplikation und Division):
   Die Potenzen müssen in der Basis **oder** dem Exponenten übereinstimmen.
3. Rechenoperationen dritter Stufe (Potenzieren und Radizieren):
   Die Durchführbarkeit dieser Rechenoperationen ist an keine Bedingung geknüpft.

Für die Rechenoperationen zweiter und dritter Stufe mit Potenzen mit gleicher Basis gilt die folgende Regel:

Beim Rechnen mit Potenzen mit gleicher Basis wird mit den Exponenten die nächstniedere Rechenart ausgeführt.

Aufgaben

1. Die folgenden Wurzelwerte sind zu bestimmen.

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{64}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt[3]{125}$

g) $\sqrt[4]{81}$ h) $\sqrt{0{,}16}$ i) $\sqrt{0{,}04}$

2. Die folgenden Wurzelwerte sind zu bestimmen.

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ b) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{32}{81}}$ e) $\sqrt[5]{\frac{64}{243}}$ f) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$

3. Ermitteln Sie folgende Wurzelwerte!

a) $\sqrt{9604}$ b) $-\sqrt{5929}$ c) $\sqrt[3]{3375}$ d) $\sqrt[3]{54{,}872}$ e) $\sqrt[3]{0{,}125}$ f) $\sqrt[6]{0{,}000064}$

4. Schreiben Sie folgende Wurzeln als Potenzen mit gebrochenem Exponenten!

a) $\sqrt[3]{6^2}$ b) $\sqrt[5]{2^3}$ c) $\sqrt[6]{0{,}1}$ d) $\sqrt[8]{x^8}$ e) $\sqrt[9]{m^9}$ f) $\sqrt[5]{z^4}$

g) $\sqrt[s]{a^t}$ h) $\sqrt[m]{p^m}$

5. Schreiben Sie folgende Potenzen als Wurzeln!

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $4^{\frac{2}{3}}$ c) $(\frac{1}{3})^{\frac{4}{5}}$ d) $(0{,}6)^{\frac{5}{8}}$ e) $x^{\frac{2}{7}}$ f) $y^{\frac{3}{4}}$

g) $x^{\frac{p}{q}}$ h) $x^{\frac{q}{p}}$ i) $l^{\frac{x+y}{z}}$

6. Erweitern Sie den Wurzelexponenten folgender Wurzeln auf den dahinterstehenden Wert!

a) $\sqrt{5^3} \mid 6$ b) $\sqrt[3]{2^4} \mid 9$ c) $\sqrt[7]{5^2} \mid 14$ d) $\sqrt[3]{b^4} \mid 18$

e) $\sqrt{c^3} \mid 6$ f) $\sqrt[k]{m^p} \mid mk$ g) $\sqrt[qr]{n^{pq}} \mid pqr$ h) $\sqrt[rst^2]{p^{qr}} \mid r^2st^3$

7. Erweitern Sie die Wurzelexponenten folgender Wurzelpaare dahingehend, daß sie gleiche Wurzelexponenten besitzen!

a) $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt[5]{3^4}$ b) $\sqrt{5}$ und $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[4]{a}$ d) $\sqrt[5]{a^4}$ und $\sqrt[7]{a^6}$

e) $\sqrt[16]{a^5}$ und $\sqrt[24]{a^3}$ f) $\sqrt[15]{a^2}$ und $\sqrt[10]{a^7}$ g) $\sqrt[2x]{m^s}$ und $\sqrt{n^t}$ h) $\sqrt[pq]{m^l}$ und $\sqrt[qr]{n^k}$

8. Bringen Sie folgende Wurzeln auf den kleinsten Wurzelexponenten!

a) $\sqrt[6]{4^3}$ b) $\sqrt[9]{3^6}$ c) $\sqrt[38]{2^{19}}$ d) $\sqrt[8]{k^6}$ e) $\sqrt[16]{m^{12}}$

f) $\sqrt[27]{n^{36}}$ g) $\sqrt[pq^2]{s^{pq}}$ h) $\sqrt[5m]{t^{3m}}$ i) $\sqrt[n^2p]{u^{nq}}$

9. Machen Sie folgende Wurzelpaare gleichnamig, nachdem Sie die Wurzelexponenten möglichst vereinfacht haben!

a) $\sqrt[6]{3^3}$ und $\sqrt[10]{4^{15}}$ b) $\sqrt[9]{5^6}$ und $\sqrt[8]{4^6}$ c) $\sqrt[15]{6^6}$ und $\sqrt[12]{8^9}$

d) $\sqrt[4]{(\frac{1}{2})^6}$ und $\sqrt[9]{(\frac{4}{5})^6}$ e) $\sqrt[25]{0{,}1^{10}}$ und $\sqrt[6]{3{,}2^9}$ f) $\sqrt[8]{8^{12}}$ und $\sqrt[18]{0{,}5^{12}}$

g) $\sqrt[8]{a^{12}}$ und $\sqrt[6]{b^4}$ h) $\sqrt[14]{k^{21}}$ und $\sqrt[12]{k^{16}}$ i) $\sqrt[9]{x^{18}}$ und $\sqrt[12]{y^{39}}$

k) $\sqrt[mn]{x^m}$ und $\sqrt[op]{y^{pq}}$ l) $\sqrt[xy]{y^{yz}}$ und $\sqrt[yz]{y^{xy}}$ m) $\sqrt[mno]{a^{mq}}$ und $\sqrt[opq]{a^q}$

10. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $(\sqrt{5})^2$ b) $\sqrt{5^2}$ c) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$ d) $(\sqrt{3})^4$ e) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3$ f) $\sqrt[4]{(-5)^8}$

g) $\sqrt{x^4}$ h) $\sqrt{x^8}$

11. Vereinfachen Sie folgende Wurzeln mit Hilfe von

$$\sqrt[n]{a^m b^r} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^r}\,!$$

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[4]{162}$ c) $\sqrt[3]{x^7}$ d) $\sqrt[x]{a^{x+1}}$ e) $\sqrt[n-1]{x^{2n}}$ f) $\sqrt[3]{81x^3}$

g) $\sqrt[3]{375a^3b^2}$ h) $\sqrt[4]{81a^4x^6}$ i) $\sqrt{4x^2y^2(3x-5y)}$ k) $\sqrt[3]{a^4b^3-a^3b^4}$ l) $\sqrt[3]{81x^3y^5+54x^4y^4}$

12. Vereinfachen Sie folgende Wurzeln mit Hilfe von

$$\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^r}}\,!$$

a) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{27}{216}}$ c) $\sqrt{\frac{12}{25}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{a^5c^4}{b^3d^6}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{m^3n^6}{p^9q^2}}$ f) $\sqrt{\frac{a^2x}{b^2y}}$

g) $\sqrt{\frac{108m^3n^7}{245p^9q^5}}$ h) $\sqrt{\frac{a^3+a^2b}{ab^2-b^3}}$ i) $\sqrt{\frac{a^3b^2-a^2b^3}{(a+b)^2}}$

13. a) $4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ b) $5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{4}$ c) $2\sqrt{m}+\sqrt{m}$

d) $8\sqrt{x}+5\sqrt{y}-7\sqrt{x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{y}-3\sqrt{x}$

e) $2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+4\sqrt{b}-3\sqrt{b}+4\sqrt{a^2}+\sqrt{a}$

f) $7\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{9}-8\sqrt[3]{9}+15\sqrt[3]{9}$ g) $9\sqrt[4]{7}-3\sqrt[4]{7}+5\sqrt[4]{7}$

h) $9\sqrt{x}-13\sqrt{y}-15\sqrt{x}-5\sqrt{y}+8\sqrt{x}+22\sqrt{y}$ i) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}$

k) $4x\sqrt{b}-5y\sqrt{b}+6z\sqrt{b}$ l) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-4\sqrt{5}$

m) $7\sqrt{54}-9\sqrt{726}+10\sqrt{864}-7\sqrt{600}+9\sqrt{294}$ n) $\sqrt[3]{256}-\sqrt[3]{500}+\sqrt[3]{1372}-\sqrt[3]{108}$

o) $a\sqrt{ab^2c^3}+b\sqrt{a^3bc^2}+c\sqrt{a^2b^3c}$

p) $\sqrt{27a^5b^5}-a^2b^2\sqrt{48ab}+ab\sqrt{12a^3b^3}$

14. a) $xy\sqrt[m]{x^{m+1}y^m}+\sqrt[m]{x^{2m+1}y^{2m}}$ b) $\sqrt[m]{a^{m+2}b^{m+3}}-\sqrt[m]{a^{m+3}b^{m+2}}$

c) $\sqrt{x(x+y)^2}-\sqrt{x(x-y)^2}-\frac{1}{x}\sqrt{x^3y^2}$

15. a) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{7}$ c) $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}$

e) $\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{120}$ f) $\sqrt[3]{63}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{196}$

16. a) $\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}$ b) $4\sqrt{x}\cdot 3\sqrt{y}$ c) $2\sqrt{xy}\cdot 3\sqrt{x}$ d) $\sqrt[3]{a^4x^2}\cdot x\sqrt[3]{a^2x^4}$

e) $a\sqrt[3]{b^5}\cdot\sqrt[3]{a^4b}$ f) $5\sqrt{x^4y^6}\cdot 27\sqrt{x^7y^3}$ g) $a\sqrt[3]{20a^2x^7}\cdot\sqrt[3]{6a^3x^2}$ h) $\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{10ac^5}\cdot b^2\sqrt{2c}$

17. a) $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x+y}$ b) $\sqrt{ax^2+bx^2}\cdot\sqrt{ay^2-by^2}$

18. a) $\sqrt{\frac{15}{24}}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}}$ b) $6\sqrt[3]{\frac{500}{264}}\cdot 4\sqrt[3]{\frac{11}{36}}$ c) $\sqrt{\frac{a^3}{b}}\cdot\sqrt{a\,b^3}$

d) $\sqrt{\frac{a^3}{3b^3}}\cdot\sqrt{\frac{12b}{a}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{x^2\,y^4}{4z^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4\,y^5}{2z^4}}$

19. a) $(5\sqrt{3}-4\sqrt{27}+2\sqrt{81})\cdot\sqrt{3}$ b) $(6\sqrt{5}-2\sqrt{3}+8\sqrt{18}-8\sqrt{8})\cdot 4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{a\,b\,c}\cdot(x\sqrt{a}-y\sqrt{b}+z\sqrt{c})$ d) $(8b\sqrt{a^3b}-10\sqrt{a^5b^2}-6\sqrt{a^3b^3})\cdot 2\sqrt{a\,b}$

20. a) $(16-5\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}-3)$ b) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

c) $(6\sqrt{3}-3\sqrt{6})\cdot(3\sqrt{3}+6\sqrt{6})$ d) $\left(2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{3}\right)$

e) $(4+\sqrt{7})\,(4-\sqrt{7})$ f) $(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})\,(7\sqrt{2}-5\sqrt{3})$

g) $(a\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(a\sqrt{b}+\sqrt{c})$ h) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

i) $(m^2\sqrt{n}+n^2\sqrt{m})\,(m^2\sqrt{n}-n^2\sqrt{m})$ k) $(x\sqrt{y+z}+x\sqrt{y-z})\,(x\sqrt{y+z}-x\sqrt{y-z})$

21. a) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})^2$ b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ c) $(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n})^2$

d) $(5-2\sqrt{2})^3$ e) $(2\sqrt{40}+5\sqrt{6})^3$

22. a) $\sqrt{40}:\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{189x^7\,y^4\,z^2}:\sqrt[3]{7x\,y^3\,z^2}$ c) $\sqrt{6x^2y^2}:(-\sqrt{xy^2})$

d) $5\sqrt[3]{56p^7q^4r^9}:3\sqrt[3]{p^4\,q\,r^2}$ e) $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{x-y}$ f) $\sqrt{14\frac{2}{5}}:\sqrt{4\frac{12}{15}}$

23. a) $\sqrt{x\,y}:\sqrt{\frac{x}{y}}$ b) $\sqrt{\frac{3a^3}{2b}}:\sqrt{\frac{a^2}{4b^3}}$ c) $\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$

d) $\sqrt[3]{m^2}\cdot\sqrt[9]{m^4}$ e) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ f) $\sqrt{q}\cdot\sqrt[5]{q^4}$

24. a) $\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[9]{a^5}$ b) $\sqrt[12]{s^{11}}\cdot\sqrt[18]{s^3}$ c) $\sqrt{q^3\,r^2}\cdot\sqrt{q\,r}$

d) $\sqrt[6]{x^2\,y^3}\cdot\sqrt[8]{x^6\,y^4}$ e) $\sqrt[4]{a^2\,b^3\,c}\cdot\sqrt[6]{a^3\,b^5\,c^2}$

25. a) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[9]{x^5}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{y}}$ c) $\frac{\sqrt[9]{r^5}}{\sqrt[12]{r^5}}$ d) $\frac{\sqrt[15]{y^5}}{\sqrt[25]{y^4}}$ e) $\frac{\sqrt[6]{a^2\,x^3}}{\sqrt[9]{a^5\,x^3}}$ f) $\frac{\sqrt[6]{x^4\,y^2\,z^3}}{\sqrt[8]{x^5\,y^3\,z^4}}$ g) $\frac{\sqrt[6]{x^2\,y}}{\sqrt[10]{x^8\,y^6}}$

26. a) $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^4}{y^3}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$

d) $\sqrt[8]{\frac{x^3\,y^5}{z}}\cdot\sqrt[5]{\frac{x^2\,z^2}{y^3}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{5}{24}}:\sqrt[8]{\frac{25}{48}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^2}}:\sqrt[8]{\frac{x^5}{y^4}}$

27. a) $\sqrt{\frac{a\,x}{b}}:\sqrt[3]{\frac{a^2\,b}{x}}$ b) $\sqrt[8]{\frac{a^6\,d^4}{b^5\,c^3}}:\sqrt[12]{\frac{a^9\,d^6}{b^8\,c^6}}$

28. a) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[6]{64}\right)^4$ c) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

d) $\left(\sqrt[9]{z^4}\right)^6$ e) $\left(\sqrt[5]{a^7b^6}\right)^{10}$ f) $\left(\sqrt[6]{3a^5\,b^3\,c^2}\right)^8$

29. a) $\left(\sqrt[3]{x+y}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[6]{a^2+2a\,b+b^2}\right)^3$

30. a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$ d) $\sqrt{\sqrt[n]{a}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

g) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^6}}$ h) $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{m^2 n^6}}$ k) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9 b^6 c^3}}$

31. a) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{q\sqrt[3]{q}}$ c) $\sqrt[3]{2z^2\sqrt[5]{2z}}$ d) $\sqrt[5]{3x^3\sqrt[3]{9x}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{125}}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

32. a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{z^6}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{q^{24}}}}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{k^2\sqrt[3]{k^2}}}$ d) $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt{r}}}$

Reelle Zahlen

Wir haben bereits festgestellt, daß beim Radizieren mit dem Wurzelexponenten n sich in den meisten Fällen das Ergebnis nicht als endlicher oder periodischer Dezimalbruch schreiben läßt. Die entsprechende Wurzel ist dann eine irrationale Zahl. Wenn jedoch der Radikand die n-te Potenz einer rationalen Zahl ist, ist die n-te Wurzel ebenfalls rational.

Beispiel 43:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{3}{5}, \text{ denn } \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{81}{625}.$$

Die irrationalen Zahlen kann man zwar durch rationale Zahlen beliebig annähern, doch ihr genauer Wert kann weder durch einen gemeinen Bruch noch durch einen endlichen oder periodischen Dezimalbruch dargestellt werden.
Eine irrationale Zahl kann im Gegensatz zu endlichen oder periodischen Dezimalbrüchen nicht als ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen dargestellt werden.
Betrachten wir das Problem an der Zahlengeraden. Die Abbildung 4.8. stellt einen Ausschnitt aus ihr dar. Es wurde das Intervall zwischen 1 und 2 herausgezeichnet.

Abb. 4.8.

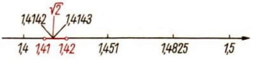


Abb. 4.9.

Zwischen den beiden ganzen Zahlen 1 und 2 liegen alle Zahlen, die größer als 1, aber kleiner als 2 sind. Wir schreiben dafür $1 < z < 2$ oder auch $(1; 2)$. Einige der im Intervall $(1; 2)$ liegenden Zahlen z wurden eingezeichnet. Greift man zwei beliebig dicht beieinanderliegende Brüche heraus — in Abbildung 4.9. wurde das Intervall von $1{,}4 < z < 1{,}5$ vergrößert herausgezeichnet —, so findet man noch beliebig viele rationale Zahlen, die in diesem Intervall liegen.

1. *Nennen Sie wenigstens* 10 *Zahlen, die zwischen den schon recht nahe beieinanderliegenden Punkten* 1,4142 *und* 1,4143 *liegen!*
2. *Nehmen Sie davon zwei Zahlen, die bei größenmäßiger Anordnung dieser* 10 *Zahlen aufeinander folgen, und geben Sie weitere fünf Zahlen an, die in diesem neuen inneren Intervall liegen!*

Die rationalen Zahlen liegen wie in unserem Beispiel beliebig nahe beieinander. In der Sprache des Mathematikers heißt das, die rationalen Zahlen **liegen dicht.** Das bedeutet, daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen beliebig viele andere rationale Zahlen liegen. Und doch befinden sich zwischen je zwei rationalen Zahlen, so nahe sie auch beieinanderliegen, noch irrationale Zahlen. Wenn man eine Irrationalzahl auch nicht genau angeben kann, so gibt es doch rationale Zahlen, zwischen denen sie liegt und mit deren Hilfe sie angenähert werden. Den angenäherten Wert einer irrationalen Zahl ermittelt man mit Hilfe einer **Intervallschachtelung.**

Am Beispiel der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ wollen wir zeigen, wie man eine irrationale Zahl mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen annähert.

Die Richtigkeit der Schachtelung kontrolliert man, indem man die Intervallgrenzen und die irrationale Zahl in die jeweilige Potenz erhebt, denn es gilt die Beziehung, daß die n-te Potenz einer positiven Zahl Z_1 kleiner als die n-te Potenz einer anderen positiven Zahl Z_2 ist, wenn Z_1 kleiner als Z_2 ist. In unserem Beispiel erheben wir zur Kontrolle die Intervallgrenzen und die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ in die zweite Potenz.

Beispiel 44:

1	$<\sqrt{2}<2$,	denn	1^2	$<2<2^2$	bzw.	1	$<2<4$
1,4	$<\sqrt{2}<1{,}5$,	denn	$1{,}4^2$	$<2<1{,}5^2$	bzw.	1,96	$<2<2{,}25$
1,41	$<\sqrt{2}<1{,}42$,	denn	$1{,}41^2$	$<2<1{,}42^2$	bzw.	1,9881	$<2<2{,}0164$
1,414	$<\sqrt{2}<1{,}415$,	denn	$1{,}414^2$	$<2<1{,}415^2$	bzw.	1,999396	$<2<2{,}002225$
1,4142	$<\sqrt{2}<1{,}4143$,	denn	$1{,}4142^2$	$<2<1{,}4143^2$	bzw.	1,99996164	$<2<2{,}00024449$
1,41421	$<\sqrt{2}<1{,}41422$,	denn	$1{,}41421^2$	$<2<1{,}41422^2$	bzw.	1,9999899241	$<2<2{,}0000182084$

Die Einschachtelung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ brechen wir hier ab.

Unsere Untersuchung ergab, daß $\sqrt{2}$ etwa **1,41421.** ist. Die Grundziffer, die an die Stelle des roten Punktes tritt, ist uns unbekannt. Im ungünstigsten Fall kann sie eine 9, im günstigsten eine 0 sein. Nehmen wir den größtmöglichen Fehler an, die sechste Stelle nach dem Komma wäre 9, so würde der Fehler zwischen unserer Näherung und dem wirklichen Wert von $\sqrt{2}$ 0,000 009, aufgerundet kleiner als $0{,}000\,01 = \frac{1}{100\,000}$ sein. Mit Hilfe der Methode des Einschachtelns haben wir $\sqrt{2}$ bis auf $\frac{1}{100\,000} = 10^{-5}$ genau bestimmt.

Dieser Fehler ist sehr klein. Man hätte ihn aber durch eine weitere Einschachtelung auf 10^{-6}, also ein Millionstel, senken können usw.

Wir erkennen, daß irrationale Zahlen[1] mittels dieser Methode bis zu jeder erforderlichen Genauigkeit durch einen Dezimalbruch angenähert werden können. Es sei nur mitgeteilt — der Beweis kann mit den uns bekannten mathematischen Hilfsmitteln hier nicht geführt werden —, daß die Dezimalbrüche, mit deren Hilfe irrationale Zahlen mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden, nie abbrechen oder periodisch werden.

[1] **Hinweis:** Irrationale Zahlen — z. B. π — können nicht stets durch Wurzeln dargestellt werden.

Allen irrationalen Zahlen kann eindeutig ein Punkt aus der Menge der Punkte, die die Zahlengerade bilden, zugeordnet werden. Die Beträge der irrationalen Zahlen kann man durch Strecken auf der Zahlengeraden darstellen.

Beispiel 45:

Es ist der Punkt auf der Zahlengeraden zu bestimmen, der $\sqrt{5}$ zugeordnet ist. Man konstruiert die Strecke, die $\sqrt{5}$ entspricht, als Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten 1 und 2 (Abb. 4.10.).

Die Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten a und b berechnet man mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes:

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Demnach hat die Diagonale des obengenannten Rechtecks die Länge

$d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Man dreht die Strecke $\sqrt{5}$ in die positive Richtung der Zahlengeraden und erhält den Punkt, der $\sqrt{5}$ zugeordnet ist.

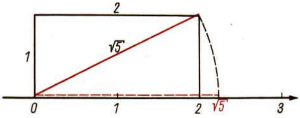


Abb. 4.10.

Weil die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen zusammen der Menge aller Punkte der Zahlengeraden zugeordnet werden, vereinigt man beide Teilmengen zur Menge der **reellen Zahlen.** Der Ausdruck reell ist deshalb charakteristisch, weil jeder dieser Zahlen ein und nur ein wirklicher Punkt der Zahlengeraden entspricht. Umgekehrt gilt auch die eindeutige Zuordnung jedes Punktes der Zahlengeraden zu einer reellen Zahl. Die Zuordnung Punkt $\longleftrightarrow$ Zahl ist eineindeutig.
Obwohl die rationalen Zahlen und die ihnen zugeordneten Punkte beliebig dicht liegen, so hatten wir doch festgestellt, daß zwischen zwei beliebig dicht beieinanderliegenden rationalen Zahlen noch irrationale Zahlen liegen. Betrachtet man die den reellen Zahlen zugeordnete Folge von Punkten auf der Zahlengeraden, so füllen diese Punkte die Zahlengerade **lückenlos** oder überdecken sie **kontinuierlich.**

Rationalmachen des Nenners von Brüchen

Berechnen Sie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *und* $\frac{\sqrt{2}}{2}$*!*

Die Berechnung von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wird komplizierter, je genauer wir den Wert von $\sqrt{2}$ annehmen. Die Berechnung von $\frac{\sqrt{2}}{2}$ wird durch erhöhte Genauigkeit von $\sqrt{2}$ nicht schwieriger.
Man erkennt, daß eine Wurzel im Nenner eines Bruches zu komplizierten und ungenaueren Rechnungen führt. Aus diesem Grunde ist man bestrebt, den Nenner eines Bruches rational zu machen.

1. Der Nenner ist eine Wurzel.

$$(51) \quad \frac{P}{\sqrt[n]{b}},$$

hierin ist P eine beliebige algebraische Summe und b eine rationale, von Null verschiedene Zahl.

Man erweitert den Quotienten mit $\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}$, denn dadurch entsteht im Nenner die n-te Potenz einer n-ten Wurzel. Das ist jedoch eine rationale Zahl, wenn der Radikand rational ist.

(52) $$\frac{P\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}{\sqrt[n]{b}\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}=\frac{P\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n}}=\frac{P}{b}\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}.$$

Damit ist die Irrationalität im Nenner beseitigt worden.

Beispiel 46:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}=\frac{5\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$$

Beispiel 47:

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{\sqrt{a-b}}=\frac{(a^2-2ab+b^2)\left(\sqrt{a-b}\right)^{2-1}}{\sqrt{a-b}\cdot\left(\sqrt{a-b}\right)^{2-1}}=\frac{(a^2-2ab+b^2)\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a-b}}$$
$$=\frac{(a^2-2ab+b^2)\sqrt{a-b}}{\left(\sqrt{a-b}\right)^2}=\frac{(a-b)^2\sqrt{a-b}}{a-b}=(a-b)\sqrt{a-b}$$

2. Der Nenner ist eine Summe, in der eine zweite Wurzel enthalten ist.

(53) $$\frac{P}{Q+\sqrt{b}},$$

hierin ist P eine beliebige, Q eine wurzelfreie algebraische Summe und b rational. Man benutzt die binomische Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, um den Nenner in einen rationalen Ausdruck umzuformen.

Zu diesem Zweck erweitert man (53) mit dem Ausdruck $Q-\sqrt{b}$.

(54) $$\frac{P}{Q+\sqrt{b}}=\frac{P\left(Q-\sqrt{b}\right)}{\left(Q+\sqrt{b}\right)\left(Q-\sqrt{b}\right)}=\frac{P\left(Q-\sqrt{b}\right)}{Q^2-b}$$

Damit ist der Nenner rational.

Beispiel 48:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

Beispiel 49:

$$\frac{a}{b\sqrt{a}-a}=\frac{a\left(b\sqrt{a}+a\right)}{\left(b\sqrt{a}-a\right)\left(b\sqrt{a}+a\right)}=\frac{a\left(b\sqrt{a}+a\right)}{b^2a-a^2}=\frac{a\left(b\sqrt{a}+a\right)}{a\left(b^2-a\right)}=\frac{b\sqrt{a}+a}{b^2-a}$$

3. Der Nenner ist eine Summe aus zwei Quadratwurzeln.

(55) $$\frac{P}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

P ist darin eine beliebige algebraische Summe, a und b sind rational.

Man verfährt analog zu (53). Der Quotient wird mit $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ erweitert.

$$(56) \quad \frac{P}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{P(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{P(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Beispiel 50:

$$\frac{\sqrt{21}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{21}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{21}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{7-6}$$
$$= (\sqrt{21}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

Beispiel 51:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}$$

Einfache Wurzelgleichungen

Die Unbekannte in einer Bestimmungsgleichung ist uns bisher nur in der ersten oder zweiten Potenz begegnet. Die entsprechenden Bestimmungsgleichungen hießen linear oder quadratisch. Aufgaben dieses Typs haben wir lösen gelernt. Aber die Unbekannte kann auch unter einem Wurzelzeichen stehen.

Beispiel 52:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+2} = 0$$
$$\sqrt{x+6} = \sqrt{2x+2}$$
$$(\sqrt{x+6})^2 = (\sqrt{2x+2})^2$$
$$x+6 = 2x+2$$
$$x = 4$$

Probe:

Linke Seite: $\sqrt{4+6} = \sqrt{2\cdot 4+2} = \sqrt{10} - \sqrt{10} = 0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

In fast allen Aufgaben können die Lösungen der Wurzelgleichungen jedoch nicht auf so bequeme Art ermittelt werden. Im folgenden Beispiel vereinfacht man die Gleichung zunächst durch Zusammenfassen. Dann isoliert man das Glied mit der Wurzel und hebt durch Potenzieren beider Seiten der Gleichung die Wurzel auf.

Beispiel 53:

$$x - \sqrt{x} + 3 = 2\sqrt{x} + 1$$
$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$x + 2 = 3\sqrt{x}$$
$$(x + 2)^2 = (3\sqrt{x})^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = 9x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung erhält man $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

Probe:

Linke Seite:	für x_1:	$1 - \sqrt{1} + 3 = 3$
	für x_2:	$4 - \sqrt{4} + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$
Rechte Seite:	für x_1:	$2\sqrt{1} + 1 = 2 + 1 = 3$
	für x_2:	$4\sqrt{4} + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
Vergleich:	für x_1:	$3 = 3$
	für x_2:	$5 = 5$

In vielen Fällen jedoch fallen trotz des Potenzierens nicht alle Wurzeln fort. Dann muß man nach erneutem Ordnen und Vereinfachen die noch vorhandenen Wurzeln isolieren und die Gleichung erneut potenzieren.

Beispiel 54:

$$\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{2x+1} - 1$$

Zusammenfassen: $$\sqrt{x-3} + 2 = \sqrt{2x+1}$$

Potenzieren: $$(\sqrt{x-3} + 2)^2 = (\sqrt{2x+1})^2$$

$$x - 3 + 4\sqrt{x-3} + 4 = 2x + 1$$

Zusammenfassen: $$4\sqrt{x-3} = x$$

Potenzieren: $$(4\sqrt{x-3})^2 = x^2$$

$$16(x-3) = x^2$$
$$x^2 - 16x + 48 = 0$$
$$x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 - 48}$$
$$x_1 = 12; \quad x_2 = 4$$

Probe:

	$x_1 = 12$	$x_2 = 4$
Linke Seite:	$\sqrt{12-3} + 2 = 3 + 2 = 5$	$\sqrt{4-3} + 2 = 1 + 2 = 3$
Rechte Seite:	$\sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$
Vergleich:	$5 = 5$	$3 = 3$

Bei der Lösung von Wurzelgleichungen ergeben sich manchmal Werte, die, in die Gleichung eingesetzt, Widersprüche ergeben. Deshalb kommt der Probe eine besondere Bedeutung zu. Nur durch sie kann entschieden werden, welche der errechneten Lösungen der Gleichung entsprechen.

Beispiel 54:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-8} = 4$$

$$\sqrt{x+1} = 4 - \sqrt{4x-8}$$

Potenzieren:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (4 - \sqrt{4x-8})^2$$

$$x + 1 = 16 - 8\sqrt{4x-8} + 4x - 8$$

Zusammenfassen:

$$8\sqrt{4x-8} = 3x + 7$$

Potenzieren:

$$(8\sqrt{4x-8})^2 = (3x+7)^2$$

$$64(4x-8) = 9x^2 + 42x + 49$$

$$256x - 512 = 9x^2 + 42x + 49$$

$$x^2 - \frac{214}{9}x + \frac{561}{9} = 0$$

Als Lösungen dieser quadratischen Gleichung erhält man $x_1 = \frac{187}{9}$ und $x_2 = 3$. Setzt man beide Werte in die Wurzelgleichung ein, so ist für $x_2 = 3$ die Gleichung erfüllt, während die Lösung $x_1 = \frac{187}{9}$ nicht bestätigt wird.

Die Probe hat hier nicht nur den Zweck, die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, sondern sie dient der Ermittlung der wirklichen Lösung.

Probe:

	$x_1 = \frac{187}{9}$	$x_2 = 3$
Linke Seite:	$\sqrt{\frac{187}{9}+1} + \sqrt{\frac{4 \cdot 187}{9} - 8}$ $= \sqrt{\frac{196}{9}} + \sqrt{\frac{676}{9}} = \frac{14}{3} + \frac{26}{3} = \frac{40}{3}$	$\sqrt{3+1} + \sqrt{4 \cdot 3 - 8}$ $= \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2\sqrt{4} = 4$
Rechte Seite:	4	4
Vergleich:	$\frac{40}{3} > 4$	$4 = 4$

Das Ergebnis $x_1 = \frac{187}{9}$ ist zwar eine richtige Lösung der quadratischen Gleichung, eine Lösung der Wurzelgleichung ist sie aber nicht.

Aufgaben

33. Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ auf drei Stellen genau mit Hilfe der Intervallschachtelung!

34. Ermitteln Sie $\sqrt{5}$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-3} durch Intervallschachtelung!

35. Bestimmen Sie $\sqrt[3]{2}$ auf vier Stellen mit Hilfe der Intervallschachtelung!

36. Konstruieren Sie analog zum **Beispiel 45 a)** $\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{10}$!

37. Konstruieren Sie $\sqrt{3}$!

Anleitung: Benutzen Sie den Höhensatz: $h = \sqrt{p \cdot q}$!

38. Konstruieren Sie $\sqrt{7}$!

Anleitung: Benutzen Sie den Höhensatz: $h = \sqrt{p \cdot q}$!

In folgenden Quotienten soll der Nenner rational gemacht werden.

39. a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **b)** $\sqrt{\frac{5}{7}}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{10}}$ **d)** $\sqrt{\frac{7}{8}}$

40. a) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt{3\frac{1}{3}}$ **c)** $\sqrt{1\frac{2}{7}}$ **d)** $\sqrt{1\frac{4}{12}}$

41. a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{7}}$ **c)** $\frac{5}{\sqrt{8}}$ **d)** $\frac{6}{5\sqrt{3}}$

42. a) $\sqrt{\frac{1}{a}}$ **b)** $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **d)** $\frac{4\sqrt{7}}{5\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ **f)** $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$ **g)** $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$ **h)** $\frac{6\sqrt[3]{3}}{9\sqrt[3]{12}}$

43. a) $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ **b)** $\frac{8}{\sqrt[6]{12}}$ **c)** $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ **d)** $\frac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt[5]{8}}$

e) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ **f)** $\frac{m}{n\sqrt{m}}$ **g)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ **h)** $\frac{s\sqrt{t}}{t\sqrt{s}}$

44. a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{x}}{y\sqrt{y}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ **d)** $\frac{x^2\sqrt[5]{y^2}}{y\sqrt[5]{x}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ **f)** $\frac{x^{n+1}\sqrt[n]{y}}{y^n\sqrt[n]{x}}$ **g)** $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ **h)** $\frac{2}{3+\sqrt{6}}$

45. a) $\frac{25}{3\sqrt{6}-2}$ **b)** $\frac{6\sqrt{7}}{8+3\sqrt{7}}$ **c)** $\frac{a}{\sqrt{a}-a}$ **d)** $\frac{\sqrt{x}}{ax+b\sqrt{x}}$

e) $\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}+6}$ **f)** $\frac{\sqrt{10}+12}{8+\sqrt{10}}$ **g)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **h)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$

46. a) $\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{15}}{3\sqrt{10}+3\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

47. a) $\dfrac{\sqrt{x}}{xy+z\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ d) $\dfrac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}{b\sqrt{x}+x\sqrt{y}}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

48. a) $\sqrt{x}=5$ b) $\sqrt{x}=a+b$ c) $\sqrt{3x}=3$ d) $\sqrt{5x}=1\frac{2}{3}$

e) $3\sqrt{x}=3$ f) $5\sqrt{4x}=8$ g) $\sqrt{ax}=\dfrac{a}{2}$ h) $a\sqrt{\dfrac{x}{b}}=a$

i) $\sqrt[3]{x}=2$ k) $\sqrt[3]{2x}=4$

49. a) $\sqrt[3]{3x}=3$ b) $2:\sqrt[3]{5x}=8$ c) $a\sqrt[3]{b^2x}=b$ d) $\sqrt{x}+3=6$

e) $55-7\sqrt{3x}=13$ f) $7\sqrt{3x}+14=56$ g) $3\sqrt{x}-3=\sqrt{x}+5$

h) $27-8\sqrt{x}=16-13\sqrt{x}$ i) $3\sqrt{x}-11=-(5\sqrt{x}+9)$ k) $24-12\sqrt{x}=13-9\sqrt{x}$

50. a) $a=\sqrt{x}-b$ b) $4\sqrt{x+1}=20$ c) $\frac{3}{5}\sqrt{10x+4}=4\frac{1}{5}$

d) $\sqrt{2x+7}=\sqrt{5x}-8$ e) $6\sqrt{9x-14}=7\sqrt{5x+1}$ f) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$

g) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$ h) $\sqrt{x-44}=\sqrt{x}-2$ i) $3\sqrt{ax+b}=\sqrt{ax}-b$

k) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{8x-4}=10$

51. a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}=1$ b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-11}=\sqrt{5x+4}$

c) $\sqrt{13x-4}-\sqrt{3x-20}=\sqrt{7x+8}$ d) $x-4=\sqrt{2x+7}$

e) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x-5}=4$ f) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5$

g) $\sqrt{x-9}+\sqrt{7(x-1)}=\sqrt{5x+11}$ h) $x-\sqrt{x}=12$

l) $6x-2\sqrt{x}=5-x$ k) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}=\sqrt{x}+3$

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

52. a) $7\sqrt{x+6}=12+3\sqrt{y+5}$
$2\sqrt{x+6}=21-5\sqrt{y+5}$

b) $4\sqrt{x+9}+3\sqrt{y+4}-25=0$
$7\sqrt{y+4}-6\sqrt{x+9}+3=0$

Formen Sie die folgenden Gleichungen so um, daß die Wurzeln fortfallen, dann lösen Sie das System!

53. a) $\sqrt{3x+1}=\sqrt{2y-2}$
$2x-y=1$

b) $\sqrt{x+y+1}+\sqrt{y+x-2}=3$
$3x+5y-13=0$

c) $\sqrt{3x+5y+13}-\sqrt{3x+5y}=1$
$2x-3y=5$

Die Funktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$

Die Funktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ sind Wurzelfunktionen, denn ihre analytischen Ausdrücke heißen auch $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$. Da das Wurzelzeichen grundsätzlich nur für positive Radikanden erklärt ist, ist der Definitionsbereich $0 \leqq x < \infty$. Wir können die Kurven mit Hilfe von Wertetafeln ermitteln.

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4	5
$y = \sqrt{x}$	0	0,5	0,71	1	1,41	1,73	2	2,24

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4
$y = \sqrt[3]{x}$	0	0,53	0,79	1	1,26	1,44	1,59

Man erhält die Abbildung 4.11. Beide Kurven wurden in ein Koordinatensystem gezeichnet. Beim Aufstellen der Wertetafel für $y = \sqrt{x}$ haben wir beachtet, daß definitionsgemäß die Wurzel stets positiv ist.

Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $y = -\sqrt{x}$ und $y = -\sqrt[3]{x}$ auf, und zeichnen Sie die Kurven! Benutzen Sie dazu die Tafel der zweiten und dritten Wurzeln!

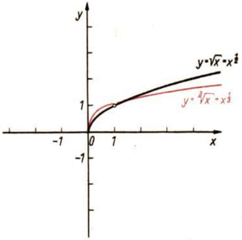


Abb. 4.11.

Die Kurven $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$ beginnen im Koordinatenursprung. Ihr zunächst steiler Anstieg wird mit zunehmenden Werten von x immer flacher. Für große x-Werte zeigen sie einen fast linearen Verlauf. Dennoch ist der Wertevorrat für $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$ durch das gesamte Intervall $0 \leqq y < \infty$ gegeben.
Beide Kurven durchlaufen wie die Bilder aller anderen Potenzfunktionen des Typs $y = x^n$ den Punkt $(1; 1)$.

Die Kurven $y = x^{\frac{1}{k}}$ für $k > 3$ verlaufen ähnlich dem Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$. Im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ schmiegt sich die Kurve mit wachsendem k stärker an die Ordinatenachse an, im Intervall $1 < x < \infty$ wird der fast lineare Anstieg flacher.

Aufgaben

54. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$ im Intervall $-\infty < x < 0$, und vergleichen Sie es mit dem Bild der Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$! Geben Sie den Wertevorrat an!

55. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = (-x)^{\frac{1}{3}}$ im Intervall $-\infty < x < 0$, und vergleichen Sie es mit dem Bild der Funktion $y = x^{\frac{1}{3}}$! Geben sie den Wertevorrat an!

56. Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetafel die Kurve $y = \sqrt{x-1}$, und bestimmen Sie deren Definitionsbereich und Wertevorrat!

57. Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetafel das Bild der Funktion $y = \sqrt{x+3}$, und bestimmen Sie deren Definitionsbereich und Wertevorrat!

58. Verschieben Sie die Parabel $y = \sqrt{x}$ um $+3$ parallel zur y-Achse! Wie heißt die entstehende Funktion?

59. Zeichnen Sie die Parabel $y = \sqrt[3]{x-1}$ mit Hilfe einer Wertetafel. Anschließend verschieben Sie sie um -2 parallel zur y-Achse! Wie heißt die entstehende Funktion?

60. Spiegeln Sie die Parabel $y = \sqrt{x+1}$ an der x-Achse! Wie heißt der analytische Ausdruck der Funktion, deren Bild Sie auf diese Weise erhalten?

61. Spiegeln Sie die Parabel $y = \sqrt{x+1}$ an der y-Achse! Wie heißt der analytische Ausdruck der Funktion, deren Bild Sie auf diese Weise erhalten?

62. Spiegeln Sie die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ an der Geraden $y = x$! Wie heißt die entstehende Funktion?

63. Spiegeln Sie die Funktion $y = x^2$ im Intervall $0 \leqq x < \infty$ (rechter Parabelast) an der Kurve $y = x$! Wie heißt die entstehende Kurve? Zeichnen Sie mit einer zweiten Farbe das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ ein!

Formulieren Sie einen Satz, der das Ergebnis der Spiegelung beschreibt!

4.4. Inverse Funktionen

Die explizite und die implizite Darstellung des analytischen Ausdrucks einer Funktion haben wir bereits kennengelernt. Dabei bedeutet „explizit", daß eine Gleichung vorliegt, die nach einer Veränderlichen aufgelöst wurde. In einem „impliziten" Ausdruck stehen die Variablen und Konstanten auf einer Seite der Gleichung.

Beispiel 55:

Explizite Form: $y = f(x) = x^2$;
implizite Form: $F(x, y) = y - x^2 = 0$.

Man ist bestrebt, den impliziten Ausdruck so übersichtlich wie möglich zu formen.

Beispiel 56:

Explizite Form: $y = \sqrt[3]{x^2}$;
implizite Form: $y - \sqrt[3]{x^2} = 0$ oder übersichtlicher: $y^3 - x^2 = 0$.

Die explizite Darstellung benutzt man meist, um das Bild der Funktion zeichnen zu können. Dabei wird eine Variable unabhängig verändert.

Die Änderung der abhängigen Veränderlichen, nach der die Gleichung aufgelöst wurde, wird über der Änderung der unabhängigen Variablen aufgetragen.
Die physikalische Gleichung

$$v = g \cdot t$$

stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen der Fallgeschwindigkeit v und der Fallzeit t bei konstanter Beschleunigung $g \approx 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dar.
In impliziter Form lautet die Gleichung

$$v - g \cdot t = 0.$$

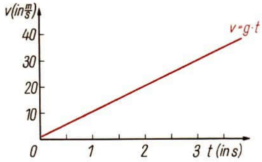


Abb. 4.12. a.

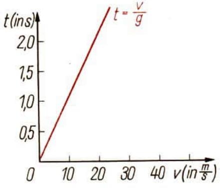


Abb. 4.12. b.

Es ist gleichgültig, welche Variable man als unabhängig wählt. In den Abbildungen 4.12. a und b sind beide Möglichkeiten dargestellt.
Die lineare Gleichung

$$y = m x + n \qquad (m \neq 0)$$

heißt in impliziter Form

$$m x - y + n = 0.$$

Auch hier können wir die unabhängige Variable frei wählen. Wir erhalten die Gleichungen

$$y = m x + n \text{ und } x = \frac{1}{m}(y - n) = \frac{y}{m} - \frac{n}{m},$$

deren Bilder in der Abbildung 4.13. a und b gezeichnet wurden, wobei aber in Abbildung 4.13. b die x-Achse vertikal, die y-Achse horizontal verläuft.
Es ist üblich, die waagerechte Achse als x-Achse und die senkrechte als y-Achse zu bezeichnen.

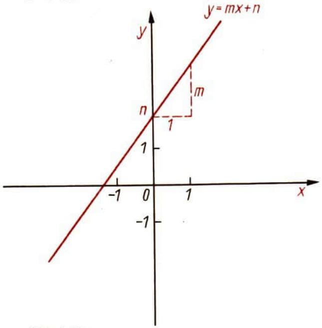


Abb. 4.13. a.

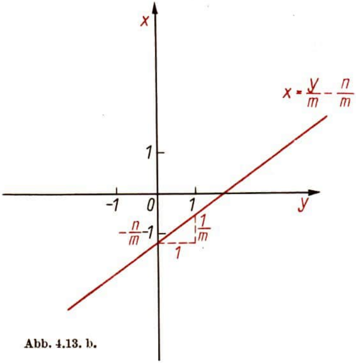


Abb. 4.13. b.

Um aber trotzdem die entsprechenden Bilder zu erhalten, wechselt man in einem analytischen Ausdruck x gegen y aus. Man erhält die Gleichungen

$$y = mx + n \text{ und } y = \frac{1}{m}(x - n) = \frac{x}{m} - \frac{n}{m}.$$

Die Bilder beider Funktionen sind in Abbildung 4.14. in ein Koordinatensystem gezeichnet worden.

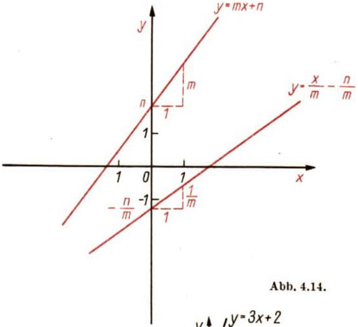


Abb. 4.14.

Die Funktion $y = g(x)$, die aus der Funktion $y = f(x)$ durch Auflösen nach x und anschließendes Vertauschen von x und y hervorgeht, heißt die Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu $y = f(x)$.

Beispiel 78:

$$y = f(x) = 3x + 2$$

$$3x = y - 2$$

$$x = g(y) = \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}$$

Vertauschen von x und y (Inversion[1]).

$$y = g(x) = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3} \quad \text{(Abb. 4.15.)}$$

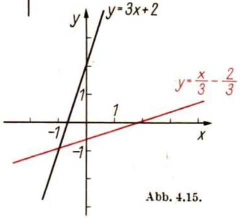


Abb. 4.15.

Die Bilder zueinander inverser linearer Funktionen unterscheiden sich nach der Vertauschung von x und y im allgemeinen voneinander. Ausnahmen sind die Funktionen $y = x$ und $y = -x$. Die Kurven der inversen Funktionen fallen in diesen Fällen mit denen der Originalfunktionen zusammen.

Die Umkehrfunktion jeder linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion, denn aus $ax + by + c = 0$ $(a, b \neq 0)$ folgen $y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ und $x = g(y) = \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ bzw. (durch Vertauschen von x und y) $y = g(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ als explizite Darstellungen der beiden zueinander inversen Funktionen. Schreibt man schließlich $g(x)$ in impliziter Form, also $bx + ay + c = 0$, so erkennt man deutlich, daß es sich um die ursprüngliche lineare Funktion handelt, nur daß x und y vertauscht sind.

Zeichnen Sie die Kurve $y = 3x$ und das Bild der dazu inversen Funktion! Suchen Sie in beiden Bildern einander entsprechende Punkte auf, z. B. (0; 0) *und* (0; 0), (3; 9) *und* (9; 3)! *Verbinden Sie sie und halbieren Sie die Verbindungsstrecke! Dann verbinden Sie alle Halbierungspunkte! Wie heißt der analytische Ausdruck der entstehenden Kurve?*

[1] inversio (lat.), Umwendung

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und zu ihnen inverse Funktionen

Die implizite Darstellung der Funktion $y = f(x) = x^2$ heißt $F(x; y) = x^2 - y = 0$. Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man die Funktion $x = g(y) = \sqrt{y}$. Um aber eine Funktion vollständig zu beschreiben, muß ihr Definitionsbereich mit angegeben werden:

$$y = f(x) = x^2 \quad \text{mit} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty,$$

und

$$y = g(y) = \sqrt{y} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq y < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq x < \infty.$$

Der Definitionsbereich der zu $y = f(x)$ inversen Funktion $x = g(y)$ ist wesentlich enger.

Vertauscht man in $x = g(y) = \sqrt{y}$ die Variablen, so erhält man die Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$ mit dem Definitionsbereich $0 \leqq x < \infty$ und dem Wertevorrat $0 \leqq y < \infty$.

Damit wir die Funktionen in einem gemeinsamen Definitionsbereich betrachten können, zerlegen wir die Funktion $y = f(x) = x^2$ mit $-\infty < x < \infty$ in die beiden Teilfunktionen $y = f_1(x) = x^2$ mit $0 \leqq x < \infty$ und $y = f_2(x) = x^2$ mit $-\infty < x < 0$.

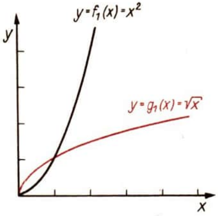


Abb. 4.16.

Stellen Sie für $y = f_1(x)$ und für $y = g_1(x)$ jeweils eine Wertetabelle auf! Vergleichen Sie die Zahlenpaare beider Funktionen miteinander! Erläutern Sie die Abbildung 4.16.!

Die inverse Funktion zu $y = \varphi(x) = x^3$ ist die Funktion $x = \psi(y) = \sqrt[3]{y}$ bzw. nach dem Vertauschen von x und y; $y = \psi(x) = \sqrt[3]{x}$. Um die Funktionen in einem gemeinsamen Definitionsbereich zu untersuchen, muß $y = \varphi(x)$ in die beiden Teilfunktionen $y = \varphi_1(x) = x^3$ mit $0 \leqq x < \infty$ und $y = \varphi_2(x) = x^3$ mit $-\infty < x < 0$ zerlegt werden, denn $y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$ ist nur im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definiert.

Die beiden Funktionen

$$y = \varphi_1(x) = x^3 \quad \text{und} \quad y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$$

besitzen gleiche Definitionsbereiche mit jeweils $0 \leqq x < \infty$ (Abb. 4.17.).

Ganz entsprechend gilt für beliebige natürliche n:

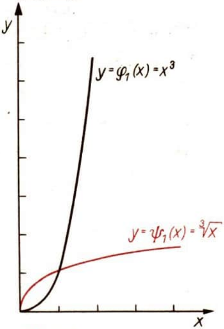


Abb. 4.17.

Die beiden Funktionen

$$\boldsymbol{y = u_1(x) = x^n \quad \text{und} \quad y = v_1(x) = \sqrt[n]{x}}$$

sind zueinander invers und haben den gemeinsamen Definitionsbereich $0 \leqq x < \infty$.

Definitionsbereich und Wertevorrat zueinander inverser Funktionen

Aus den Abbildungen 4.16. und 4.17. geht hervor, daß beim Umkehren einer Funktion deren Definitionsbereich und Wertevorrat gegeneinander ausgetauscht werden.

Beispiel 57:

Wie verhalten sich der Definitionsbereich und der Wertevorrat der Funktion $y = f_1(x) = x^2$ mit $0 \leqq x < \infty$ beim Umkehren?

Funktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = x^2$	$0 \leqq x < \infty$	$0 \leqq y < \infty$
$x = \sqrt{y}$	$0 \leqq y < \infty$	$0 \leqq x < \infty$
	Vertauschen von x und y	
$y = \sqrt{x}$	$0 \leqq x < \infty$	$0 \leqq y < \infty$

Dieser Austausch von Definitionsbereich und Wertevorrat ist für jede Umkehrung typisch.

Spiegelung an der Geraden $y = x$

In der Abbildung 4.18. werden die Funktionen $y = f_1(x) = x^2$ mit $0 \leqq x < \infty$ und $y = \varphi_1(x) = x^3$ mit $0 \leqq x < \infty$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Durch Vergleich der Spiegelbilder mit den Bildern der Funktion $y = g_1(x) = \sqrt{x}$ und $y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$ erkennt man, daß die Bilder der Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = \varphi_1(x)$ durch Spiegeln an der Geraden $y = x$ in die Bilder ihrer Umkehrfunktionen übergehen.

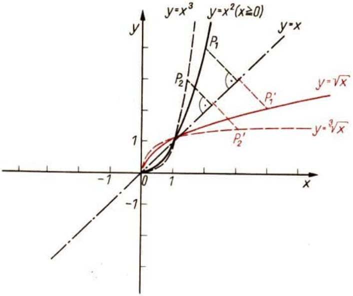


Abb. 4.18.

Durch Spiegeln des Punktes $(x_1; y_1)$ an der Geraden $y = x$ geht er in den Punkt $(y_1; x_1)$ über. Das heißt, die Koordinaten des Punktes werden durch diese Spiegelung miteinander vertauscht. Diese Regel gilt für jeden beliebigen Punkt. Folglich werden durch Spiegeln einer Kurve an der Geraden $y = x$ die Koordinaten aller ihrer Punkte auf die gleiche Art verändert. Alle x-Werte werden zu y-Werten und umgekehrt. Dieses Vertauschen der Variablen ist jedoch ein Merkmal des Umkehrens.

Durch das Spiegeln des Bildes einer eineindeutigen Funktion $y = f(x)$ an der Geraden $y = x$ erhält man das Bild der inversen Funktion $y = g(x)$.

Beispiel 58:

Das Bild der Funktion $y = \sqrt{x} + 1$ ist mit Hilfe der Funktion $y = x^2$ zu zeichnen.
Durch Spiegeln der Funktion $y = f_1(x) = x^2$ mit $0 \leqq x < \infty$ an der Geraden $y = x$ erhält man das Bild der Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$ (Abb. 4.19). Durch Verschieben um $+1$ parallel zur y-Achse erhält man das Bild der Funktion $y = \sqrt{x} + 1$.

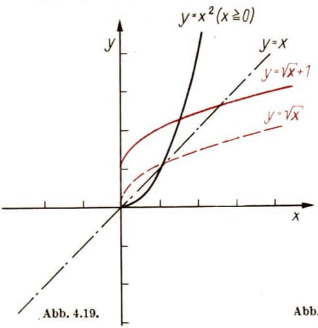


Abb. 4.19.

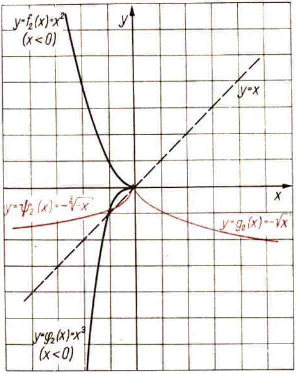


Abb. 4.20.

Wenn die Funktion $y = u(x) = x^n$ in ihrem gesamten Definitionsbereich betrachtet werden soll, so muß auch die zweite Teilfunktion $y = u_2(x) = x^n$ mit $-\infty < x < 0$ betrachtet werden.
Wir untersuchen diese Teilfunktionen für die speziellen Fälle $y = f_2(x) = x^2$ und $y = \varphi_2(x) = x^3$ mit $-\infty < x < 0$. In der Abbildung 4.20. wurden die Bilder beider Funktionen in ein Koordinatensystem gezeichnet. Durch Spiegeln an der Geraden $y = x$ erhält man die Bilder der Funktionen

$$y = g_2(x) \quad \text{mit} \quad 0 < x < \infty \qquad \text{und} \quad -\infty < y < 0$$

und

$$y = \psi_2(x) \quad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0.$$

Offensichtlich liegt das Bild der Funktion $y = g_2(x)$ bezüglich der x-Achse symmetrisch zu $y = g_1(x) = \sqrt{x}$. Dann müssen alle Funktionswerte beider Funktionen dem Betrage nach gleich sein, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Aus der Zeichnung erkennt man, daß dann $g_2(x) = -g_1(x)$ und weiter $y = g_2(x) = -\sqrt{x}$ gelten müssen. Diese Vermutung wird durch folgende Rechnung erhärtet:
Aus $y = -\sqrt{x}$ folgt $y^2 = (-\sqrt{x})^2 = x$, also $y^2 - x = 0$. Vertauscht man x und y, so erhält man $x^2 - y = 0$ und daraus $y = x^2$.

Man kann sagen:

$$y = f_1(x) = x^2 \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \qquad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty$$

ist invers zu

$$y = g_1(x) = \sqrt{x} \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \qquad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty;$$

$$y = f_2(x) = x^2 \qquad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad 0 < y < \infty$$

ist invers zu

$$y = g_2(x) = -\sqrt{x} \qquad \text{mit} \quad 0 < x < \infty \qquad \text{und} \quad -\infty < y < 0.$$

Jede der hier genannten vier Funktionen ist eineindeutig. Die nur eindeutige Funktion $y = x^2$ ist in zwei eineindeutige Teilfunktionen zerlegt worden.
Der Definitionsbereich der einen Funktion ist zugleich der Wertevorrat der inversen Funktion und umgekehrt.
Diese Eigenschaften gelten allgemein für alle zueinander inversen Funktionen.
Durch welchen analytischen Ausdruck wird aber die Funktion $y = \psi_2(x)$ dargestellt?
Vergleichen wir die Kurve mit dem Bild der Funktion $y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$. Offensichtlich liegen beide zentralsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.
Für $x_0 = -8$ hat die Kurve $y = \psi_2(x)$ eine Ordinate mit dem gleichen Betrag wie die Kurve $y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$ für $x_0 = 8$. Nur im Vorzeichen unterscheiden sich beide. Das gleiche gilt für jeden anderen Wert von x. Immer hat $y = \psi_2(x)$ die gleiche Ordinate mit negativem Vorzeichen wie $y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x}$, wenn der Betrag der Abszissen gleich ist.
Wenn man für $y = \psi_2(x)$ auch das Wurzelsymbol verwenden will, obwohl $-\infty < x < 0$ gilt, muß man den Betrag der Abszisse unter das Wurzelzeichen schreiben: $|x| = -x$, für $x < 0$. Es gilt also

$$\sqrt[3]{x} \; (x \geqq 0) \quad \text{ist gleich} \quad \sqrt[3]{-x} \; (x < 0).$$

Mit Hilfe dieser Überlegungen kann man für $y = \psi_2(x)$ den folgenden analytischen Ausdruck ermitteln:

$$y = \psi_2(x) = -\sqrt[3]{-x} \quad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0.$$

Beispiel 59:

Es soll $\psi_2(x_0)$ mit $x_0 = -8$ ermittelt werden.
Die Zahl $x_0 = -8$ gehört dem Definitionsbereich von $\psi_2(x)$ an, also muß ein eindeutig bestimmter Funktionswert ermittelt werden können.

$$y_0 = \psi_2(x_0) = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Hieraus folgert man:

$$y = \varphi_1(x) = x^3 \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \qquad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty$$

ist invers zu

$$y = \psi_1(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \qquad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty;$$

$$y = \varphi_2(x) = x^3 \qquad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0$$

ist invers zu

$$y = \psi_2(x) = -\sqrt[3]{-x} \quad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0.$$

Jede der hier genannten vier Funktionen ist eindeutig umkehrbar, also eineindeutig.

Allgemein gilt für beliebiges geradzahliges natürliches n:

$$y = u_1(x) = x^n \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty$$

ist invers zu

$$y = v_1(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty;$$

$$y = u_2(x) = x^n \qquad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad 0 < y < \infty$$

ist invers zu

$$y = v_2(x) = -\sqrt[n]{x} \qquad \text{mit} \quad 0 < x < \infty \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0.$$

Allgemein gilt für beliebiges ungeradzahliges natürliches n:

$$y = u_1(x) = x^n \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty$$

ist invers zu

$$y = v_1(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq y < \infty;$$

$$y = u_2(x) = x^n \qquad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0$$

ist invers zu

$$y = v_2(x) = -\sqrt[n]{-x} \quad \text{mit} \quad -\infty < x < 0 \quad \text{und} \quad -\infty < y < 0$$

Um den Einfluß des Exponenten auf den Verlauf der Bilder der Potenzfunktionen zu zeigen, wurden in Abbildung 4.21. einige der Kurven eingezeichnet. Der Verlauf der anderen wurde angedeutet. Der I. Quadrant wurde zur Darstellung gewählt, weil ihn die Bilder aller Funktionen mit positivem Koeffizienten durchlaufen.

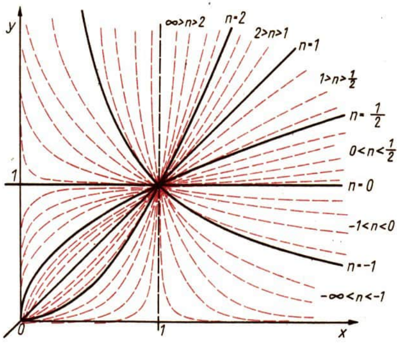


Abb. 4.21.

Aufgaben

Folgende Funktionen sind in impliziter, möglichst übersichtlicher Form zu schreiben!

1. $y = \frac{1}{3}(2x - 3)$ **2.** $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ **3.** $y + 3 = 2x - 1$ **4.** $x = 3y - 2$

5. $y = x^2 + \frac{1}{2}$ **6.** $y = 2x^3$ **7.** $x^2 = 1 - y^2$ **8.** $xy = 1$

9. $y = \sqrt[3]{x}$ **10.** $y = \sqrt{x - 2}$ **11.** $y = 25 - x^2$ **12.** $x - y = 2$

Folgende implizite Funktionen sind nach der unterstrichenen Variablen aufzulösen.

13. $m\underline{x} + ny = 0$ **14.** $4x + 2\underline{y} + 5 = 0$ **15.** $3x - 5\underline{y}^2 = 0$ **16.** $\underline{y}^2 - 4x = 0$

17. $x^2 - \underline{y}^2 = 0$ **18.** $\underline{x} - y = 0$ **19.** $x + \underline{y} = 0$ **20.** $\underline{x}^2 - y^3 = 0$

21. $\underline{x}^2 + p\underline{x} + q = 0$ **22.** $(x + \underline{y})^2 - 5 = 0$ **23.** $x^5 - \underline{y}^3 = 0$ **24.** $\underline{x}^3 + (y + 1)^2 = 0$

Stellen Sie folgende implizite Funktionen in je einem Koordinatensystem dar, indem Sie die waagerechte Achse der unabhängig Variablen zuordnen. Dabei ist jede Variable einmal als abhängig und einmal als unabhängig zu betrachten. Benutzen Sie Wertetabellen, um die Kurven zu zeichnen!

25. $2x + y = 0$ **26.** $2y - 3x + 4 = 0$ **27.** $0{,}5y - 0{,}6x + 2 = 0$

28. $y - x^2 = 0$ **29.** $y^2 + x = 0$ **30.** $y^3 - x + 3 = 0$

31. $y^3 + x^2 = 0$ **32.** $x^4 - y^2 = 0$ **33.** $y - 2x^2 = 0$

Folgende Funktionen sind umzukehren. Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat der Originalfunktion und der inversen Funktion an! Zeichnen Sie die Bilder beider Funktionen!

34. $y = -x$ **35.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ **36.** $y = |x|$ **37.** $y = -x^2$

38. $y = \frac{1}{2}x^2$ **39.** $y = 2x^2$ **40.** $y = -x^3$ **41.** $y = \frac{1}{4}x^3$

42. $y = 4x^3$ **43.** $y = x^2 - 1$ **44.** $y = x^3 + 2$ **45.** $y = (x + 2)^2$

46. $y = \sqrt{x}$ **47.** $y = \sqrt[3]{x}$ **48.** $y = \sqrt[3]{x^2}$ **49.** $y = \sqrt{x - 1}$

50. $y = \sqrt{x + 2}$ **51.** $y = \sqrt{x^3}$

Zeichnen Sie die Bilder der inversen Funktionen durch Spiegeln folgender Kurven an der Geraden $y = x$! Wie heißt der analytische Ausdruck der inversen Funktion! Geben Sie Definitionsbereiche und Wertevorräte an!

52. $y = 3x$ **53.** $y = -x + 6$ **54.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ **55.** $y = \frac{1}{2}x^2$

56. $y = x^2 - 2$ **57.** $y = x^3 - 4$ **58.** $y = \sqrt{2x}$ **59.** $y = \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$

60. $y = \sqrt{x + 1}$

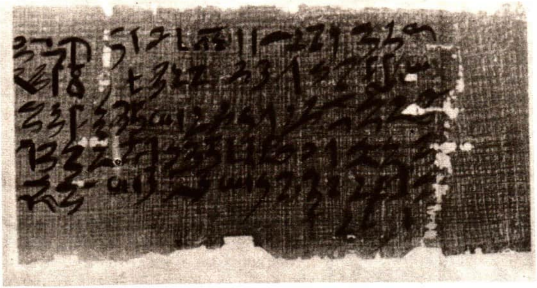


Abb. 5.1. Originaltext der angeführten Hau-Aufgabe

5. Zur Geschichte der Algebra

Wer heute das Wort Mathematik hört, denkt ganz unwillkürlich an Formeln. In der Tat scheint es selbstverständlich zu sein, daß ein Mathematikbuch auf den ersten Blick an den darin enthaltenen Formeln zu erkennen ist. Aber es ist eigentlich noch gar nicht so lange her, nämlich erst reichlich 300 Jahre, daß spezielle Symbole in großem Umfang in der Mathematik verwendet werden, um die Rechentätigkeit zu erleichtern und ihr eine größere Übersichtlichkeit zu verleihen.

Vor der Herausarbeitung einer mathematischen Formelsprache mußten die Menschen die entsprechenden Rechenoperationen mit Hilfe von Wörtern der Umgangssprache ausdrücken. Einige Beispiele aus der Frühzeit der Mathematik zeigen recht deutlich, daß eigentlich ebenso gerechnet wurde wie heute und nur die Symbole fehlten.

In der ägyptischen Mathematik hatten die sogenannten Hau-Rechnungen große Bedeutung. Hau heißt soviel wie Haufen oder Menge und vertrat die Stelle unserer Unbekannten, die wir meist mit x bezeichnen. Die folgende Hau-Aufgabe, die auf eine lineare Bestimmungsgleichung führt, stammt aus einem mathematischen Papyrus aus der Zeit um 1700 v. u. Z.

Eigentlicher Text in deutscher Übersetzung	moderne Schreibweise
Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?	$1\frac{1}{2}x + 4 = 10$
Berechne Du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6.	$10 - 4 = 6$

Eigentlicher Text in deutscher Sprache	moderne Schreibweise
Rechne Du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$. Berech-	$1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$
ne Du $\frac{2}{3}$ von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4	$6 \cdot \frac{2}{3} = 4$
nennt sich. Du hast richtig gefunden.	$x = 4$

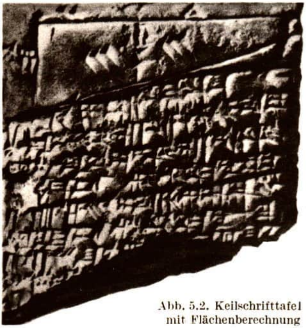


Abb. 5.2. Keilschrifttafel mit Flächenberechnung

Die babylonische Mathematik, insbesondere die Algebra, hatte schon einen hohen Entwicklungsstand erreicht. In Mesopotamien war die Landwirtschaft auf künstliche Bewässerung angewiesen. Daher findet man häufig Berechnungen des Flächeninhalts von Feldern. Das folgende Beispiel zur babylonischen Algebra stammt aus dem 3. Jahrtausend v. u. Z. und führt auf eine quadratische Bestimmungsgleichung.

„Länge · Breite.
Länge und Breite habe ich multipliziert und so habe ich die Fläche errichtet. Wiederum: was immer die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe von Länge und meiner Breite multipliziert und dann habe ich meine Fläche hinzugefügt und es macht 1,13,20. Wiederum: Länge und Breite habe ich addiert. Es macht 1,40.“

Die Zahlenangaben sind im Sexagesimalsystem gemacht. Also bedeutet

$$1{,}13{,}20 = 1 + \frac{13}{60} + \frac{20}{60^2} = 1\,\frac{2}{9} \quad \text{und} \quad 1{,}40 = 1 + \frac{40}{60} = 1\,\frac{2}{3}.$$

Die gesuchte Länge bezeichne man mit x, die gesuchte Breite mit y. Dann erhält man durch Übertragung der Aufgabe in die moderne Schreibweise die Gleichungen $(x - y)(x + y) + x\,y = 1\frac{2}{9}$ und $x + y = 1\frac{2}{3}$. Setzt man den sich aus der zweiten Gleichung ergebenden Ausdruck $y = 1\frac{2}{3} - x$ in die erste Gleichung ein, so erhält man nach Umformen die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 9 = 0$.
Die ersten Ansätze einer algebraischen Zeichenschrift finden sich schon in der babylonischen Mathematik und dann erst wieder in der spätgriechischen Mathematik, besonders bei Diophantos von Alexandria. Er hat ein umfangreiches Buch mit dem Titel „Arithmetica“ geschrieben, das zum größten Teil erhalten geblieben ist. Es enthält feste Bezeichnungen für die Potenzen $x, x^2, \ldots, x^6$ der Variablen x, ein festes Zeichen für die Subtraktion sowie die Abkürzung ι[1], die er immer als Gleichheitszeichen verwendete. Man weiß nicht genau, wann Diophantos gelebt hat, wahrscheinlich um 250 u. Z., aber über seine persönlichen Lebensumstände wissen wir durch das folgende arithmetische Gedicht recht genau Bescheid:

[1] ι ist der erste Buchstabe des griechischen Wortes ἰσοι, d. i. gleich.

„Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel."

Wie alt ist demnach DIOPHANTOS geworden?
Die arabischen Gelehrten übersetzten um 900 auch die „Arithmetica" in ihre Sprache. Zugleich lernten sie Teile der hochentwickelten indischen und der schon sehr alten chinesischen Mathematik kennen, weil mit diesen Ländern ein ausgedehnter Handel betrieben wurde.
Die folgende Aufgabe stammt aus einer chinesischen Arithmetik des dritten Jahrtausends v. u. Z.

„Man nimmt an, man hätte in einem Käfig eine Anzahl Kaninchen und Fasanen beisammen, im ganzen 35 Köpfe und 94 Füße. Wieviel sind von jeder Art vorhanden?"

Besonders bedeutende chinesische Mathematiker waren LIU HUI (um 263 u. Z.) und LI YEH (1178–1265), die Bücher verfaßten, in denen das Auflösen von Gleichungen gelehrt wurde.
Ein großer Teil der alten indischen Textaufgaben ist besonders anmutig. So heißt es in der Aufgabensammlung „Krönung des Systems" des indischen Mathematikers BHÂSKARA (1114–1185?[1]):

„Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadombablüte, $\frac{1}{3}$ auf einer Silindhablüte nieder. Der 3fache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir die Anzahl der Bienen."

Andere bedeutende indische Mathematiker, die große Fortschritte bei der Auflösung von Gleichungen machten, waren ÂRYABHATA (geb. 476) und BRAHMAGUPTA (geb. 598). Sie haben als erste mit negativen Zahlen gerechnet.
Die arabischen Mathematiker knüpften an die indische und die griechische Mathematik an und entwickelten sie weiter. Ihr besonderes Interesse galt der Algebra, da die Araber einen großangelegten Handel mit der ganzen ihnen bekannten Welt unterhielten. Auch das Wort Algebra stammt aus dem Arabischen. Der Astronom und Mathematiker AL-HWÂRAZMÎ (gest. um 840) hatte ein Rechenbuch mit dem Titel „Hisâb aljabr w'almuqâbalah", d. i. „Buch über die Ergänzung und das Hinüberschaffen", geschrieben. Aus „aljabr" (Ergänzung) wurde bei den europäischen Gelehrten später Algebra. Da dieses Buch sehr viele neue Rechenverfahren zum Auflösen von Gleichungen enthielt, wurde der Verfasser zum Symbol des geschickten Rechnens überhaupt. Auf diese Weise ist das in der Mathematik so häufige Wort Algorithmus, d.h. Rechenverfahren, entstanden. In diesem Buch vermittelt AL-HWÂRAZMÎ alles das, was *„für die Menschen bei der Nachfolge und beim Vermächtnis, beim Teilen des Vermögens und bei Gerichtsprozessen sowie in allen ihren Wechselbeziehungen, beim Ver-*

[1] Die Jahreszahl mit einem Fragezeichen ist nicht sicher bekannt.

messen des Bodens und beim Anlegen von Kanälen, in der Geometrie und bei verschiedenen anderen Fragen ständig notwendig ist".

Weitere Fortschritte auf dem Gebiet der Gleichungslehre erzielten u. a. die arabischen Gelehrten Abû Kâmil (850? – 930?), Al-Karaǧî (gest. 1029) und Al-Ḫoǧendi (gest. um 1000), die sich sogar Gleichungen dritten Grades zuwandten.

Während arabische Kultur und Wissenschaft in hoher Blüte standen, wurde durch den Einfluß des herrschenden Religionsdogmas, des Katholizismus, in Europa die Entwicklung der Wissenschaften erschwert. Erst im 15. und 16. Jahrhundert begannen sich in Europa die Wissenschaften zu entwickeln. Über Spanien und Sizilien wurden die Europäer mit den Ergebnissen der arabischen Mathematik bekannt. Deshalb heißen die eigentlich aus Indien stammenden Ziffern heute noch arabische Ziffern, denn sie kamen durch Vermittlung der Araber nach Europa.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurde der Warenaustausch immer mehr durch die Geldwirtschaft ersetzt. Handel und Industrie entwickelten sich. Die sprunghafte Verstärkung des Geldumlaufs machte die Umrechnung der unterschiedlichen Währungseinheiten ineinander nötig, Zins- und Zinseszins mußten berechnet und die Buchhaltung mußte übersichtlich gestaltet werden. Überall in Europa gab es Rechenmeister, die für alle möglichen Auftraggeber derartige Rechnungen durchführten und die dann auch Lehrbücher schrieben, aus denen man die schwierige Kunst des Rechnens erlernen konnte. Von den deutschen Rechenmeistern ist Adam Ries (1492 – 1559) am berühmtesten geworden. In einem seiner Rechenbücher stellt er z. B. die nebenstehende Aufgabe. Dabei bedeutet fl die Währungseinheit 1 Gulden, und ein ort bedeutet ein Viertel.

Adam Risen.

Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl? Machs nach den vorigen/ mach eines jeglichen kosten zu örtern/ deßgleichen die 100. fl. vnd setz als dann also:

	16	15	
	6	5	
100			400
	2	1	
	1		

Multi.

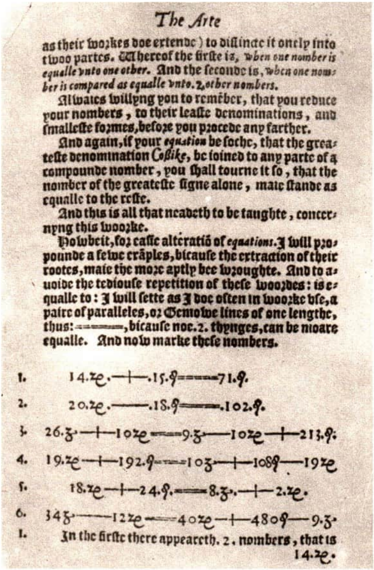
Abb. 5.3. Eine Seite aus einem Rechenbuch von A. Ries. Sie enthält eine Viehkauf-Aufgabe.

Immer mehr nahm der Handel und damit die Rechentätigkeit zu. Um sich die Schreib- und Rechenarbeit zu erleichtern, gingen die Rechenmeister dazu über, Abkürzungen für häufig wiederkehrende mathematische Ausdrücke zu verwenden. Anfangs wählte jeder Abkürzungen nach eigenem Geschmack. Zum Beispiel kürzte der Italiener Luca Pacioli (1445 – 1514) das Wort *piu*, welches plus bedeutet, durch *p* ab und benutzte *m* für *meno* als Zeichen der Subtraktion. Diese Schreibweise hat sich nicht durchgesetzt. Die heute verwendeten + und − treten zum erstenmal gedruckt 1489 in einem Buch des deutschen Rechenmeisters Johann Widmann (geb. um 1460) auf, das den Titel „Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft" trägt.

Besonders Italien und Deutschland, die damaligen Hauptzentren des Handels, waren um diese Zeit in der Rechenkunst führend. In Italien bereicherten NICCOLO TARTAGLIA (1500?—1557), ein aus sehr armen Verhältnissen stammenden Rechenmeister, der als Professor in Venedig wirkende GERONIMO CARDANO (1501—1576), sein Schüler LUDOVICI FERRARI (1522—1565) und der Ingenieur RAFAEL BOMBELLI die Algebra um wertvolle neue Erkenntnisse. Sie fanden u.a. Methoden, wie man auch Gleichungen dritten und vierten Grades auflöst. Damit konnte zum ersten Male in Europa die Antike auf dem Gebiete der Mathematik übertroffen werden. Im begreiflichen Stolz auf ihre Fortschritte nannten die Gelehrten ihre neue Algebra „*ars magna*“, d. h. die große Kunst. Für die Unbekannte, die aus den Bestimmungsgleichungen zu errechnen war, schrieb man das lateinische Wort *res* oder das italienische Wort *cosa*, das soviel wie Sache oder Ding bedeutet. Daher nannte man diese Gruppe von Mathematikern Cossisten, und ihre Lehrbücher hießen cossische Schriften oder kurz Coß. Die bedeutendsten deutschen Cossisten waren CHRISTOPH RUDOLFF (1500?—1545?), MICHAEL STIFEL (1487?—1567) und JOHANN FAULHABER (1580—1635). Einige der von ihnen verwendeten algebraischen Bezeichnungsweisen haben sich durchsetzen können. Hatte schon ADAM RIES handschriftlich den Wurzelhaken bei Quadratwurzeln verwendet, so trat 1525 bei RUDOLFF zum erstenmal der Wurzelhaken $\surd$ im Druck auf. STIFEL verwendete vereinzelt runde Klammern zur Kennzeichnung zusammengehörender Ausdrücke.

Das heute gebräuchliche Gleichheitszeichen = stammt von dem Engländer ROBERT RECORDE (1510?—1558,) der von Beruf Arzt war. In seinem 1557 erschienenen „Wetzstein des Witzes“, einem Lehrbuch der Algebra, schlug er dieses Symbol als Zeichen der Gleichheit vor, „*weil keine zwei Dinge ähnlicher sein können als ein Paar paralleler Linien*“. Diese Begründung steht unmittelbar über den Formeln der nebenstehenden Reproduktion. Aber es dauerte noch mehr als 100 Jahre, ehe sich dieses Gleichheitszeichen durchsetzte.

Der Niederländer SIMON STEVIN (1548—1620), ein Ingenieur, der an hervorragender Stelle den Befreiungskampf der Niederlande gegen die Spanier unterstützte, führte den Wurzelhaken mit nebengesetztem Exponenten ein,



The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other.* And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remember, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϑ=======71.ϑ.
2. 20.ze.———.18.ϑ=======.102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ze=====9.ʒ.——10ze—+—213.ϑ.
4. 19.ze—+—192.ϑ=====10ʒ—+—108ϑ——19ze
5. 18.ze—+—24.ϑ.=======8.ʒ.—+—2.ze.
6. 34ʒ———12ze=====40ze—+—480ϑ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Abb. 5.4. Die Seite aus dem „Wetzstein des Witzes“ (1557) von R. RECORDE, auf der zum erstenmal das heutige Gleichheitszeichen „=“ auftritt.

also bedeutete z. B. $\sqrt{\text{③}}$ die dritte Wurzel. Die heutige Schreibweise, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Wurzelhakens einzufügen, also $\sqrt[3]{\ }$ für die dritte Wurzel zu schreiben, wurde von dem holländischen Mathematiker ALBERT GIRARD (1595–1632) vorgeschlagen. Der französische Philosoph und Mathematiker RENÉ DESCARTES (1596–1650), der lange Zeit aus Furcht vor der katholischen Kirche im protestantischen Holland lebte, führte schließlich 1637 den Querstrich am Wurzelzeichen ein, um den Radikanden genau kennzeichnen zu können.

Mit großer Energie trat STEVIN auch für die Verwendung der Dezimalbrüche ein und schlug dafür eine besondere Schreibweise vor:

Abb. 5.5. FRANÇOIS VIETA (1540–1603)

So bedeutete 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ = 8,937. Das Dezimalkomma stammt von dem schottischen Mathematiker JOHN NEPER (1550–1617).

Der bedeutendste Algebraiker jener Periode war der Franzose FRANÇOIS VIETA (1540–1603), der als Jurist in hohen Staatsämtern tätig war. Einige Zeit stand er beim französischen König in Ungnade und beschäftigte sich währenddessen mit der Mathematik. Er ließ sich von dem Gedanken leiten, daß eine durchgängige Verwendung von Buchstaben die Übersichtlichkeit der mathematischen Rechnungen wesentlich erhöhen könnte und verwendete die Vokale a, e, i, . . . für die unbekannten und die Konsonanten b, d, g, . . . für die bekannten Größen. Zugleich machte er von eckigen, geschweiften und runden Klammern Gebrauch. Über diese Methode schrieb er ein Buch mit dem Titel „Erste Bemerkungen zu einer wunderbaren Rechenkunst“, das dem Leitsatz folgt, jedes (algebraische) Problem sei lösbar. Damit wollte er den anderen Mathematikern den Nutzen seiner Methode klarmachen.

Abb. 5.6. RENÉ DESCARTES (1596–1650)

Wegen der zu großen Zahl von Abkürzungen und Symbolen fand aber VIETA mit diesem und seinen anderen Büchern nicht die Zustimmung seiner Zeitgenossen. Daher haben sich seine Bezeichnungen auch nicht in der Mathematik eingebürgert. Wir benutzen vielmehr, wie es RENÉ DESCARTES 1637 zum erstenmal getan hat, zur Bezeichnung der bekannten Größen die ersten Buchstaben des Alphabets, zur Bezeichnung unbekannter Größen die letzten Buchstaben x, y, z. Von DESCARTES stammt auch die heutige Potenzschreibweise a^3, b^4 usw., d. h. die Vereinbarung, die Exponenten halbhoch rechts neben die Basis zu schreiben. Auch das rechtwinklige Koordinatensystem ist nach DESCARTES genannt, obwohl er selbst nur eine Achse benutzt hat.

In späterer Zeit haben der große deutsche Philosoph und Mathematiker GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) und der geniale Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) weitere mathematische Bezeichnungen vorgeschlagen, vor allem solche der höheren Mathematik. In die Elementarmathematik hat LEIBNIZ den Multiplikationspunkt sowie die Schreibweise $a:b = c:d$ für Proportionen und EULER das allgemeine Funktionssymbol $f(x)$ eingeführt.

Aufgaben

1. Aus dem Papyrus Rhind (um 1700 v. u. Z.):

Haufen, sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein Ganzes, es beträgt (zusammen) 33.

2. Aus BHÂSKARAS, „Krönung des Systems“:

a) Aus einer Menge reiner Lotosblumen wurde Siva der dritte, Vishnu der fünfte, der Sonne der sechste Teil als Opfer dargebracht; den vierten Teil erhielt Bhavani, und die übrigen sechs Blumen wurden dem ehrwürdigen Lehrer gegeben.

b) Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor, vom Winde gepeitscht verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser; wie tief war der Teich?

3. Aus LEONARDO PISANOS Liber Abaci (um 1200):

$\frac{19}{20}$ einer Zahl erweisen sich als die Quadratwurzel eben dieser Zahl. Wie heißt die Zahl?

4. Aus ADAM RIESes Rechenbuch von 1524:

a) Item 3 geſellen haben gewunnen ein anzahl geldes, der erſte nimet $\frac{1}{7}$, der ander $\frac{1}{4}$ und der dritte nimet das vberig das iſt 17 fl. Nun frage, wieuil des geldes iſt das ſie gewunnen habn.

b) Item Eynn ſohn fraget ſeinen Vater wie alt er ſey. Antwurdt im der Vatter ſprechende, Wan du wereſt noch ſo alt, halb ſo alt und 1 Jahr elter, ſo wereſtu 134 Jahre alt.

c) Item drey kauffenn ein pfertt vmb 12 fl. keyner vermugens allein Zubezahlen. A ſpricht zu B und C, leyhe mir itzlicher $\frac{1}{2}$ ſeynes geldes, ſo wil ich das pferdt bezalen. Spricht B zum C vnd A gebt mir $\frac{1}{3}$ ſo wil ich das pferdt vergnugen. Nachdem ſpricht C zum B vnd A gabt mir beyde $\frac{1}{4}$, ſo wil ich das pferdt kauffenn. Nun frage ich wiuil itzlicher in ſunderkeit gehabt hab.

5. Aus der Coß von CHRISTOFF RUDOLFF (1525):

a) Ein Weidmann hetzet einen Fuchs, hat der Fuchs 60 ſprüng bevor, und als oftt der Fuchs thut 9 ſprüng, ſo oft thut der Hund 6 ſprüng. Aber doch thun 3 Hundſprüng ſo vil als 7 Fuchsſprüng. Iſt die Frag wie vil der Hund muß Sprüng thun, bis er den Fuchs erhaſche?

b) Es ſynd zween Becher vnd ein vberlid (Deckel). Legt man des vberlid auff den erſten Becher, ſo wigt er mit dem vberlid 3 mal ſo ſchwer als der ander. Legt mans aber auff den andern ſo wigt der ander mit dem vberlid 4 mal ſo vil als der erſt. Iſt die frag wie ſchwer yeder Becher ſey.

6. Darstellende Geometrie

Treffen die Sonnenstrahlen auf einen undurchsichtigen Gegenstand, so sehen wir auf jeder hinter ihm liegenden Fläche seinen Schatten.
In der darstellenden Geometrie benutzt man oft ein dem Schattenwurf nachgebildetes Verfahren, die Parallelprojektion.

6.1. Senkrechte Parallelprojektion

Arten der Projektionen

Die geometrischen Gebilde und die realen Objekte unserer Umwelt werden nach der Anzahl ihrer Ausdehnungen eingeteilt in Gebilde nullter, erster, zweiter und dritter Dimension.
Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist es, Gebilde dritter Dimension durch ebene Zeichnungen, d. h. durch Gebilde zweiter Dimension, darzustellen. Dazu werden gewisse Festsetzungen getroffen, nach denen jedem Teil (Punkt, Strecke, ...) des darzustellenden Gebildes bestimmte Teilgebilde der Zeichnung eindeutig zugeordnet werden. Je nach Art dieser Zuordnung unterscheidet man verschiedene Projektionsverfahren:

1. **Zentralprojektion**
2. **Parallelprojektion**
   a) **schiefwinklige (schräge) Parallelprojektion**
   b) **rechtwinklige (orthogonale) Parallelprojektion.**

Wie der Name bereits sagt, entsteht eine Zentralprojektion dadurch, daß die die Abbildung vermittelnden Projektionsstrahlen von einem Zentrum ausgehen.

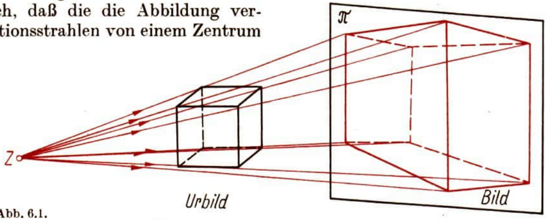


Abb. 6.1.

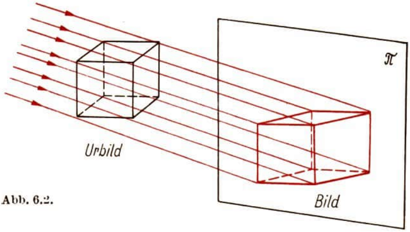


Abb. 6.2.

Die Parallelprojektion kann als Sonderfall der Zentralprojektion angesehen werden. Bei ihr liegt das Zentrum unbegrenzt weit von der Abbildungsebene entfernt. Dabei verlaufen die Projektionsstrahlen parallel.
Treffen diese Projektionsstrahlen senkrecht auf die Abbildungsebene, so spricht man von orthogonaler, treffen sie unter einem spitzen Winkel auf die Abbildungsebene, so spricht man von schräger Parallelprojektion.
Liegen bei orthogonaler Projektion die Kanten und ebenen Flächen eines abzubildenden Körpers beliebig zur Projektionstafel, so sagt man, der Körper befindet sich in **allgemeiner Lage** zur Bildtafel; liegen dagegen möglichst viele Kanten und ebene Flächen des Körpers parallel oder senkrecht zur Projektionstafel, so spricht man von einer **einfachen Lage** des Körpers bezüglich der Bildtafel.
An das Bild eines Gegenstandes stellt man drei Anforderungen:

a) **Anschaulichkeit,** d. h., es soll weitgehend dem Bild entsprechen, das wir mit unserem Auge wahrnehmen;
b) **Maßgerechtheit,** d. h., es soll als Unterlage für das Nachbilden des Originals, also zur Entnahme der Maße aus der Zeichnung geeignet sein (Werkzeichnung);
c) **geringe Konstruktionsschwierigkeit.**

Alle drei Forderungen zugleich lassen sich bei keinem Projektionsverfahren erfüllen. Insbesondere schließen sich Maßgerechtheit und Anschaulichkeit im gewissen Sinne aus. Auch sind diese Eigenschaften — besonders bei der Orthogonalprojektion — sehr von der Lage des Gegenstandes zu den Rißtafeln abhängig. Infolgedessen kommen die einzelnen Projektionsverfahren in ganz verschiedenen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis zur Anwendung.

Übersicht:

Projektionsverfahren	Zentralprojektion	Parallelprojektion		
		schräg	orthogonal	
Lage des Urbildes zu den Rißtafeln	beliebig	einfach	allgemein	einfach
Anschaulichkeit	sehr gut	gut	gut	sehr schlecht
Maßgerechtheit	sehr schlecht	schlecht	schlecht	sehr gut
Konstruktionsschwierigkeit	groß	mittelmäßig	gering	sehr gering
Anwendungsbereich	Architektur, Malerei	Buchillustrationen, Geometrie	Schaubilder	Werkzeichnungen
	(a)	(b)	(c)	(d)

Beispiel 1:

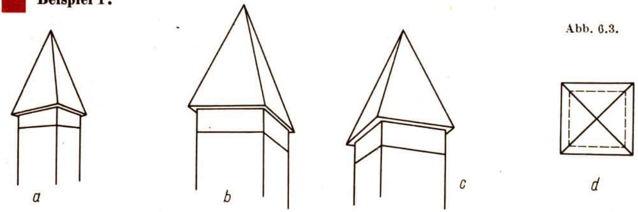


Abb. 6.3.

Aufgaben

1. Es gibt nur ein einziges Gebilde nullter Dimension. Wie heißt es?

2. Es gibt viele verschiedene Gebilde erster, zweiter und dritter Dimension. Nennen Sie Beispiele (geometrische Gebilde und reale Objekte)!

3. Erklären Sie die folgenden Begriffe! Vergleichen Sie sie dabei, wenn möglich, mit Begriffen aus der Optik!
a) Projektionsstrahlen; Projektionszentrum
b) Gegenstand (Urbild; Original); Riß (Bild)
c) Projektionstafel (Bild-, Rißtafel oder -ebene)
d) Grundriß; Aufriß; Seitenriß; Kreuzriß; Rißachse
e) einfache Lage; allgemeine Lage (des Gegenstandes zur Rißtafel)

4. Unterscheiden Sie folgende Projektionsverfahren durch die Richtung der Projektionsstrahlen!
a) Zentralprojektion und Parallelprojektion
b) Rechtwinklige (orthogonale) und schiefwinklige (schräge) Parallelprojektion

5. Sehen Sie sich in der Praxis nach Beispielen für die verschiedenen Projektionsverfahren um!

6. Welches Projektionsverfahren liegt **a)** bei der Projektion von Diapositiven mit dem Projektionsapparat, **b)** bei dem Schattenwurf im Sonnenlicht vor?

7. Bei der optischen Projektion bzw. beim Schattenwurf ist immer die Anordnung Lichtquelle — Gegenstand — Projektionswand erforderlich. Bei geometrischen Projektionsverfahren werden auch die Anordnungen Gegenstand — Projektionszentrum — Bildtafel und Projektionszentrum — Bildtafel — Gegenstand zugelassen. Wie wirkt sich das auf das Größenverhältnis von Urbild und Abbild bei den verschiedenen Projektionsverfahren aus, wenn als Gegenstand eine zur Projektionstafel parallele Figur angenommen wird?

8. Bei der Zentralprojektion entsteht von Urbildern, die in der sogenannten Verschwindungsebene liegen, im Endlichen kein Bild auf der Projektionstafel. Beschreiben Sie die Lage der Verschwindungsebene, und begründen Sie Ihre Aussage!
Warum gibt es bei der Parallelprojektion keine Verschwindungsebene?

Senkrechte Parallelprojektion begrenzter geometrischer Gebilde auf eine Tafel

Orthogonalriß eines Punktes; Eindeutigkeit

Durch jeden Punkt des Raumes geht genau ein Strahl des Projektionsstrahlenbündels. Dieser durchstößt die Rißtafel π_1 in genau einem Punkt.

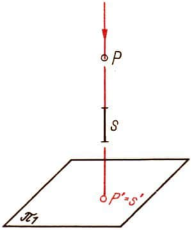


Abb. 6.4.

▶ **Satz 1: Der Orthogonalriß eines Punktes ist wieder ein Punkt. Jedem Punkt des Raumes ist eindeutig ein Bildpunkt zugeordnet.**

Der Satz ist nicht umkehrbar. Denn alle Punkte des Projektionsstrahls, der den Bildpunkt erzeugt, können Urbilder dieses Risses sein, ebenso beliebige Teile des Projektionsstrahls (Strecken) oder der gesamte Projektionsstrahl selbst (Abb. 6.4.).

▶ **Satz 2: Zu jedem Punkt der Rißtafel können beliebig viele Punkte oder Strecken sowie eine Gerade als Urbilder gehören. Einem Bildpunkt ist also kein eindeutiges Urbild zugeordnet.**

Da alle geometrischen Gebilde als Mengen von Punkten aufgefaßt werden können, gilt allgemein:

▶ **Satz 3: Die Zuordnung von Urbild und Riß bei der senkrechten Parallelprojektion ist eindeutig vom Urbild zum Riß, aber nicht umkehrbar eindeutig (nicht eineindeutig).**

Aufgaben

9. Halten Sie eine Papptafel als Rißebene so ins Sonnenlicht, daß die Sonnenstrahlen senkrecht auftreffen, und geeignete punkt- und streckenähnliche Gegenstände (Bleistiftspitze, Stecknadelkopf, Streichholz, Drahtstück usw.) als Gegenstände vor die Tafel! Überzeugen Sie sich durch Bewegen der Gegenstände von der Richtigkeit der **Sätze 1** bis **3**!

10. Zeichnen Sie den Orthogonalriß **a)** eines Punktes P, **b)** einer Strecke s, die in Projektionsstrahlrichtung liegt! Benutzen Sie zur Bezeichnung die übliche Symbolik: P' bzw. s'!

11. Unter welcher Bedingung wird der Orthogonalriß als Grundriß bezeichnet?

● *Halten Sie ein Stäbchen oder Drahtstück im Sonnenlicht so vor die Projektionstafel, daß es nicht in Richtung der Projektionsstrahlen liegt, und ändern Sie durch Drehen seine Neigung zur Tafel! Beobachten Sie die Größe des Bildes, und vergleichen Sie diese mit der Größe des Gegenstandes!*

▶ **Satz 4: Der Orthogonalriß einer Strecke, die nicht parallel zu den Projektionsstrahlen liegt, ist wieder eine Strecke. Je nach dem Neigungswinkel γ des Urbilds oder seiner geradlinigen Verlängerung zur Rißtafel π_1 ist das Bild l' gleich l (Abbildung in wahrer Größe) oder kleiner als l (Abbildung unter Verkürzung)** (siehe Abb. 6.5.).

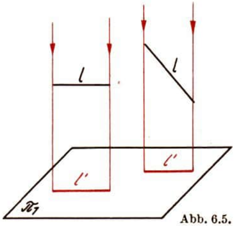


Abb. 6.5.

Übersicht (unter Einbeziehung von **Satz 2** als Grenzfall)

Neigungswinkel γ von l oder der geradlinigen Verlängerung gegen π_1	Besondere Bezeichnung der Lage	Vergleich von l und l'	Verkürzungsverhältnis $q = l':l$	Besonderheit der Abbildung
$\gamma = 0°$	Parallel zu π_1 Frontlage (Frontstrecke)	$l' = l$	$q = 1$	Bild in wahrer Größe
$0° < \gamma < 90°$		$l' < l$	$0 < q < 1$	Bild ist verkleinert
$\gamma = 90°$	Parallel zu Projektionsstrahlen, senkrecht zu π_1 Tiefenlage (Tiefenstrecke)	$l' = 0$	$q = 0$	Sonderfall: Bild ist ein Punkt (vgl. **Satz 2**)

▶ **Satz 5: Jede Frontstrecke wird in wahrer Größe abgebildet, jede Tiefenstrecke wird zum Punkt verkürzt.**

Aufgaben

12. Beweisen Sie, daß jede Frontstrecke in wahrer Größe abgebildet wird!
Anleitung: Welche Figur bilden Original, Riß und die Projektionsstrahlen der beiden Streckenendpunkte in diesem Fall?

13. Beweisen Sie den Satz: Bei der Orthogonalprojektion ist q niemals größer als 1.
Anleitung: Welche Figur bilden im allgemeinen Fall Original, Riß und die Projektionsstrahlen der beiden Streckenendpunkte? Wie verläuft die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Parallelen?

14. Unter welchen Bedingungen kann bei der schrägen Parallelprojektion $q = l' : l$ auch größer als 1 werden? Wie groß ist dann das Bild im Vergleich zum Urbild?

15. Auch zu einer Strecke als Riß gehört bei der Parallelprojektion kein eindeutiges Urbild. Nennen Sie verschiedene Urbilder, die als Riß die gleiche Strecke ergeben können! (Denken Sie dabei auch an zweidimensionale Gebilde!).

Höhenmaßstab; Koten; zweiter Riß

Da aus dem Grundriß kein eindeutiger Schluß auf die Höhenausdehnung eines abgebildeten Gegenstandes gezogen werden kann, kann einem Grundriß kein eindeutig bestimmtes Urbild zugeordnet werden. Wenn also aus dem Grundriß eindeutig Gestalt und wahre Größe des Urbilds gewonnen werden sollen, müssen gesonderte Angaben über die Höhenlage der Punkte des Originals gemacht werden. Die Ausdehnung in der dritten Dimension kann eindeutig festgelegt werden

a) durch einen **Höhenmaßstab** (Abb. 6.6.a),
b) durch **Höhenzahlen (Koten)** (Abb. 6.6.b).
c) durch einen **zweiten Orthogonalriß,** dessen Rißtafel π_2 senkrecht zu π_1 angenommen wird (Grundriß-Aufriß) (Abb. 6.6.c).

Beispiel 2:

Strecke $\overline{AB} = s$

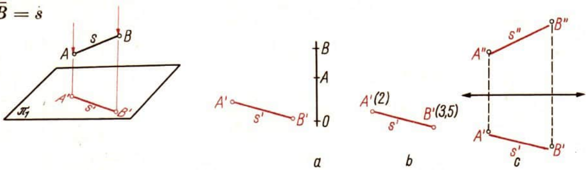


Abb. 6.6.

Satz 6: Der Grundriß legt in Verbindung mit einem Höhenmaßstab, mit Koten oder mit dem Aufriß das Urbild eindeutig fest.

Satz 7: Grundriß und Aufriß desselben Punktes liegen auf einer Ordnungslinie.

Aufgaben

16. Erklären Sie den Begriff „Ordnungslinie“, und begründen Sie **Satz 7**!

Zeichnen Sie für die Aufgaben **17** bis **23**

a) Grundriß und Höhenmaßstab;
b) Grundriß und Koten;
c) Grundriß und Aufriß!

17. Für einen beliebigen Punkt P

18. Für einen Punkt Q in der Grundrißtafel

19. Für eine Frontstrecke $\overline{AB} = s_1$

20. Für eine Tiefenstrecke $\overline{CD} = s_2$

21. Für eine Strecke $\overline{EF} = s_3$ in der Grundrißtafel

22. Für eine Strecke $\overline{GH} = s_4$ in der Aufrißtafel

23. Für eine Strecke $\overline{KL} = s_5$ in allgemeiner Lage

24. Welche Lage hat eine Tiefenstrecke zu π_1 bezogen auf π_2?

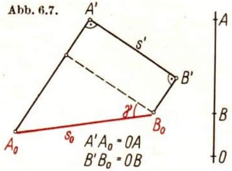
25. Welche Lage können eine Frontstrecke zu π_1 und eine Strecke in π_1 bezogen auf π_2 annehmen? Zeichnen Sie die Grund-Aufriß-Bilder für besondere Lagen zu π_2!

Konstruktion der wahren Größe und des Neigungswinkels γ einer Strecke in bezug auf π_1

Aus dem Grundriß und dem Höhenmaßstab (bzw. den Koten oder dem Aufriß) einer Strecke $AB = s$ können durch Umklappen in die Grundrißtafel die wahre Größe $A_0B_0 = s_0$ und der Neigungswinkel γ gegen π_1 konstruktiv ermittelt werden (Abb. 6.7.).

Aufgaben

Abb. 6.7.



26. Beschreiben und begründen Sie die Konstruktionen in Abbildung 6.7.!

27. Statt in die Grundrißtafel π_1 kann das Umklappen auch in eine zu π_1 parallele Hilfstafel π_0 vorgenommen werden, die zweckmäßig durch einen der Streckenendpunkte A oder B gelegt wird. Führen Sie diese Konstruktionen aus! Worin besteht der Unterschied gegenüber der Abbildung 6.7.? Inwiefern sind sie rationeller?

    Anmerkung: In sinnvoller Übertragung der entsprechenden Begriffe aus der materiellen Produktion wird man ein mathematisches (rechnerisches oder konstruktives) Verfahren dann besonders rationell nennen, wenn es bei möglichst geringem Aufwand an geistiger oder manueller Arbeit ein möglichst genaues Ergebnis sicher zu ermitteln ermöglicht.

28. Bei welchen speziellen Lagen der Strecken sind besondere Konstruktionen zur Ermittlung der wahren Größe unnötig?

29. Konstruieren Sie Grundriß und Höhenmaßstab bzw. Aufriß einer 5 cm langen Strecke bei einem Neigungswinkel gegen π_1 von **a)** 15°; **b)** 30°; **c)** 45°; **d)** 60°; **e)** 75°!

30. Bei welchem Neigungswinkel γ gegen die Grundrißtafel gilt $q = l' : l = 1 : 2$?

31. Entwerfen Sie für die in Aufgabe **29** genannten Fälle auch das Grundrißbild mit Koten! In welchen Fällen können diese genau, in welchen Fällen nur angenähert angegeben werden?
    Anleitung: Schaffen Sie sich Dreiecke besonderer Gestalt, arbeiten Sie dann in rechtwinkligen Dreiecken mit dem pythagoreischen Lehrsatz!
    Anmerkung: Inwieweit Näherungswerte an Stelle der genauen Werte genügen und mit welcher Genauigkeit sie dann anzugeben sind, hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung und den Forderungen der Praxis ab. Vergleichen Sie das mit Ihren praktischen Erfahrungen aus Ihrer Tätigkeit in der Produktion!

32. Gibt es eine Streckenlage, für die Grundriß und Aufriß zugleich die wahre Größe der Strecke aufweisen?

Orthogonalriß eines Winkels; Verzerrung

Biegen Sie ein Stück Draht zu einem Winkel, und halten Sie ihn im Sonnenlicht vor eine Papptafel! Beobachten Sie die Schattenbilder, wenn Sie die Lage des Winkels zur Tafel und seine Größe ändern! Benutzen Sie zur Beschreibung den Begriff „Ebene des Winkels“! Achten Sie auf die Winkelgröße des Bildes und vergleichen Sie diese mit der Größe des Urbildes! (Bedenken Sie, daß die Winkelschenkel eigentlich vom Scheitelpunkt ausgehende Strahlen sind!)

Satz 8: Der Orthogonalriß eines Winkels φ ist je nach der Lage seiner Ebene zur Rißtafel π_1 ein Strahl, eine Gerade oder selbst ein Winkel $\varphi' \gtreqless \varphi$ mit $0° < \varphi' < 180°$. Für $\varphi' \neq \varphi$ sagt man, das Bild des Winkels sei verzerrt (Abb. 6.8.).

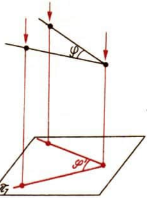


Abb. 6.8.

Übersicht:

Lage der Winkelebene bezogen auf π_1	Vergleich von φ' und φ	Besonderheit der Abbildung
Parallel zu π_1 Frontlage	$\varphi' = \varphi$	Bild in wahrer Größe
Beliebig	$\varphi' \lesseqgtr \varphi$	Verkleinertes oder vergrößertes Bild
Senkrecht zu π_1 Tiefenlage	$\varphi' = 0$ oder $\varphi' = 180°$	Sonderfall: Bild ist ein Strahl oder eine Gerade

Satz 9: Ein beliebiger Winkel wird bei Orthogonalprojektion in Frontlage in wahrer Größe, in Tiefenlage als Gerade oder Strahl abgebildet. Die Verzerrung bei beliebiger Lage der Winkelebene kann zu einem verkleinerten oder zu einem vergrößerten Bild des Winkels führen.

Satz 10: Ein rechter Winkel wird bei Orthogonalprojektion nicht nur in Frontlage in wahrer Größe abgebildet, sondern immer dann, wenn wenigstens einer seiner Schenkel parallel zur Bildtafel verläuft (Abb. 6.9).

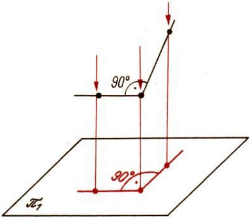


Abb. 6.9.

Aufgaben

33. Begründen Sie **Satz 10**!

34. Ein Winkel von 45° befindet sich in Frontlage. Welche Bewegung muß mit ihm ausgeführt werden, wenn die Größe seines Bildes **a)** kontinuierlich bis 0° abnehmen, **b)** kontinuierlich bis 180° zunehmen soll?

35. Der Grundriß φ' eines Winkels φ ist ein Rechter. Nach **Satz 10** kann dann φ ebenfalls ein Rechter sein. Ist es auch möglich, daß φ ein Winkel von **a)** 10°, **b)** 170° ist?
Anleitung: Fertigen Sie sich Modelle an, und ziehen Sie die Anschauung zu Rate!

Erhaltung der Parallelität

Halten Sie ein Lineal im Sonnenschein vor eine Papptafel, und beobachten Sie den Verlauf der Kanten im Schattenbild bei verschiedener Lage!

Satz 11: Parallele Geraden, die nicht senkrecht zur Rißtafel verlaufen, ergeben bei Orthogonalprojektion zusammenfallende oder wiederum parallele Geraden als Orthogonalrisse (Erhaltung der Parallelität). Der Abstand d' der Risse im Vergleich zum Abstand d der Urbilder hängt von der Lage der durch die Originale bestimmten Ebene zu π_1 ab. Stets ist d' gleich d oder kleiner als d, jedoch niemals größer.

Übersicht (Urbilder nicht senkrecht zu π_1):

Lage der Urbildebene bezogen auf π_1	Vergleich von d' und d	Besonderheit der Abbildung
Parallel zu π_1 Frontlage	$d' = d$	Abstand in wahrer Größe
Beliebig	$d' < d$	Abstand verkleinert
Senkrecht zu π_1 Tiefenlage	$d' = 0$	Sonderfall: Bild ist eine einzige Gerade (Doppelgerade)

Beweis der Erhaltung der Parallelität (Abb. 6.10.):
Die Projektionsstrahlen durch g_1 und g_2 bilden zwei parallele Ebenen. Deren Abstand a ist überall gleich. Das trifft auch für die Punkte zu, die auf den Schnittgeraden g_1' und g_2' mit π_1 liegen. Folglich sind g_1' und g_2' parallel.

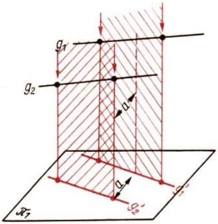


Abb. 6.10.

Aufgaben

36. Stets verläuft d senkrecht zu g_1 und g_2. Verläuft auch d' senkrecht zu g_1' und g_2'?

Anleitung: Beachten Sie **Satz 10**!

37. Welche Figur entsteht bei Orthogonalprojektion eines Trapezes?[1]

38. Der Riß eines ebenen Vierecks sei **a)** ein Quadrat; **b)** ein Rechteck; **c)** ein Rhombus; **d)** ein Rhomboid; **e)** ein unregelmäßiges Viereck.[1]
Welche Gestalt kann jeweils das Urbild haben, welche nicht?

Orthogonalrisse von ebenen Figuren und ebenflächig begrenzten Körpern

Bei der Orthogonalprojektion ebener Figuren und räumlicher Gebilde können Strecken (Seiten, Kanten) beliebig verkürzt und Winkel beliebig verzerrt werden. Doch bleibt etwaige Parallelität von Strecken (Seiten, Kanten) auch im Orthogonalriß erhalten.

Satz 12: Drei Raumpunkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen stets eine Ebene und in ihr ein Dreieck.

[1] **Anmerkung:** In den Aufgaben 37 und 38 sei vorausgesetzt, daß keine Seite des Urbilds senkrecht zur Rißtafel verläuft.

Aufgaben

39. Beschreiben Sie die Gestalt und die Lage zur Grundrißtafel der in Abbildung 6.11. durch Grundriß und Höhenmaßstab bzw. Koten bzw. Aufriß gegebenen Dreiecke!

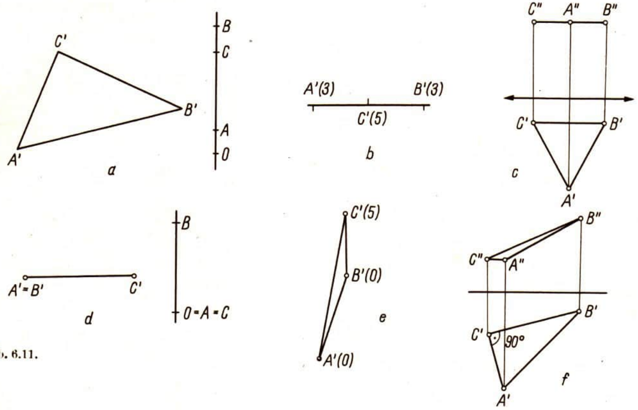


Abb. 6.11.

40. Zeichnen Sie zu den einzelnen in Abbildung 6.11. dargestellten Dreiecken jeweils die beiden anderen Darstellungsmöglichkeiten (Austausch von Höhenmaßstab, Koten und Aufriß bei gleichem Grundriß)!

41. Ermitteln Sie konstruktiv die wahre Größe und Gestalt der in Abbildung 6.11. dargestellten Dreiecke!

Anleitung: Sofern eine Dreieckseite Frontstrecke bezogen auf π_1 oder π_2 ist, kann das Dreieck um diese Seite in die Frontlage umgeklappt werden, wenn man die wahre Größe der zu dieser Seite gehörenden Höhe bestimmt. Andernfalls muß die wahre Größe der drei Seiten einzeln bestimmt und daraus das Dreieck konstruiert werden.

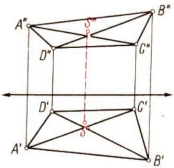
Satz 13: Vier und mehr Raumpunkte, von denen nicht drei auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen nur dann ein ebenes Vieleck, wenn sich sämtliche Verbindungsgeraden schneiden. Sobald sich einige kreuzen, bestimmen die Punkte einen Körper.

Beispiel 3:

Ebenes Viereck und dreiseitige Pyramide (räumliches Viereck).
Zur Untersuchung wird das Grundriß-Aufriß-Verfahren benutzt (Abb. 6.12.).

Erläuterung:

Die Ordnungslinie in Abbildung 6.12.a zeigt an, daß es sich bei S um den Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ eines ebenen Vierecks handelt.



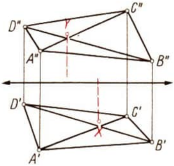


Abb. 6.12.

Die entsprechenden Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Abbildung 6.12.b hingegen kreuzen einander, denn der Schnittpunkt X der Grundrisse $\overline{A'C'}$ und $\overline{B'D'}$ sowie der Schnittpunkt Y der Aufrisse $\overline{A''C''}$ und $\overline{B''D''}$ sind nicht Aufriß und Grundriß ein und desselben Raumpunktes, da sie durch keine Ordnungslinie verbunden sind. Der Punkt X kommt dadurch zustande, daß ein Punkt von $\overline{AC}$ durch denselben Projektionsstrahl in den Grundriß projiziert wie ein Punkt von $\overline{BD}$ (sie liegen im Raum genau übereinander). Der Punkt Y entsteht entsprechend aus zwei (anderen) Punkten von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, die im Raum genau hintereinander liegen. Solche Punkte wie Y und X heißen **Deckstellen** (der beiden Geraden). Zwei derartige Geraden, die einander weder schneiden noch zueinander parallel sind, kreuzen einander oder heißen zueinander windschief. Das in Abbildung 6.12.b im Grund- und Aufriß dargestellte Gebilde ist also kein ebenes Viereck, sondern eine dreiseitige Pyramide. $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ bilden mit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ ihre Kanten.

Satz 14: Zwei Geraden schneiden einander, wenn der Schnittpunkt ihrer Grundrisse mit dem Schnittpunkt ihrer Aufrisse durch eine Ordnungslinie verbunden werden kann. Ist das nicht möglich, so kreuzen die Geraden einander (sie sind windschief zueinander).

Aufgaben

42. Der Grundriß eines ebenen Vierecks ist ein Quadrat. Drei Punkte haben die Koten 1, 2, 3. Ermitteln Sie die Kote des vierten Eckpunktes!
Anleitung: Nehmen Sie den Aufriß zu Hilfe, und legen Sie dort zunächst die drei durch ihre Koten gegebenen Punkte sowie den Diagonalenschnittpunkt fest! Bringen Sie dazu den Grundriß in einfache Lage zur Rißachse!

43. Lösen Sie die Aufgabe **42** nochmals, indem Sie jetzt den Grundriß in allgemeine Lage zur Rißachse bringen! Vergleichen Sie die Ergebnisse und die Gestalt der Aufrisse von Aufgabe **42** und **43**!

44. Konstruieren Sie den Grundriß und den Aufriß eines ebenen Fünfecks!

45. Bei gewissen Sonderlagen zweier Geraden versagt das im **Satz 14** ausgesprochene Kriterium für die Unterscheidung von Schneiden und Kreuzen, da dann auch die Deckstellen eine gemeinsame Ordnungslinie besitzen und Schnittpunktrisse vortäuschen. Zeichnen Sie den Grundriß und den Aufriß für solche Fälle!

46. Konstruieren Sie den Grundriß und den Aufriß eines beliebigen ebenen Vierecks in allgemeiner Lage (vgl. Aufgabe **42**), und ergänzen Sie die Zeichnung durch einen fünften Raumpunkt zu einer vierseitigen Pyramide!

47. Ebene Vielecke lassen sich einfacher zeichnen, wenn sie in einer Parallelebene zur Grundrißtafel oder in dieser selbst angenommen werden. Das nützt man vor allem für die Grundflächen ebenflächig begrenzter Körper aus. Konstruieren Sie unter dieser Voraussetzung den Grundriß
a) einer beliebigen vierseitigen Pyramide (Grundfläche 2 cm über π_1; Höhe 5 cm) mit Höhenmaßstab;
b) einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide (Grundfläche in π_1, Grundkanten und Höhe 3 cm) mit Koten;
c) eines regelmäßigen achtseitigen Prismas mit aufgesetzter Pyramide (Grundfläche in π_1) mit Aufriß!

Senkrechte Parallelprojektion begrenzter geometrischer Gebilde auf zwei und drei Tafeln

Die vier Rißquadranten

Die Grundrißtafel π_1 und die Aufrißtafel π_2 als zwei aufeinander senkrecht stehende unbegrenzte Ebenen teilen den Raum in vier Quadranten, die längs der Rißachse zusammenstoßen (Abb. 6.13.). Bei waagerecht vor dem Betrachter angenommener Rißachse werden sie wie folgt beziffert:

Quadrant	Bezifferung
vorn oben	I
hinten oben	II
hinten unten	III
vorn unten	IV

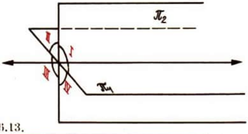


Abb. 6.13.

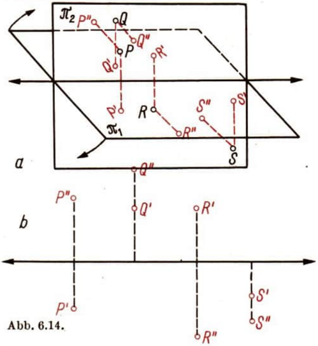


Abb. 6.14.

Beim Umklappen der einen Rißtafel um die Rißachse in die Zeichenebene der anderen fallen jeweils eine Hälfte von π_1 mit einer Hälfte von π_2 zusammen. Folglich können Grundrisse auch oberhalb und Aufrisse auch unterhalb der Rißachse liegen, wenn sich die Gegenstände nicht im I. Quadranten befinden. Die Zuordnung durch Ordnungslinien bleibt auch in derartigen Fällen bestehen (Abb. 6.14.).

Übersicht

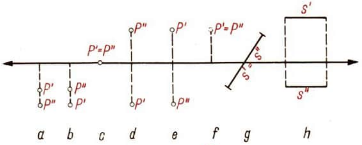
Das Urbild liegt im Quadranten Nr.	In bezug auf die Rißachse liegt der Grundriß	Aufriß
I	unterhalb	oberhalb
II	oberhalb	oberhalb
III	oberhalb	unterhalb
IV	unterhalb	unterhalb

Aufgaben

48. Zeichnen Sie den Grundriß und den Aufriß folgender Gebilde!

a) Strecke $\overline{AB}$ im III. Quadranten
b) Strecke $\overline{AB}$, A im II., B im IV. Quadranten
c) Dreieck ABC im II. Quadranten
d) Quadrat $ABCD$ in π_2 unter der Rißachse
e) Rechteck $ABCD$, $\overline{AB}$ in π_1 hinter der Rißachse, $\overline{CD}$ in π_2 über der Rißachse
f) Dreieck ABC, A im I., B im II., C im III. Quadranten

49. Beschreiben Sie Gestalt und Lage der in den folgenden Grundrissen und Aufrissen dargestellten geometrischen Gebilde!



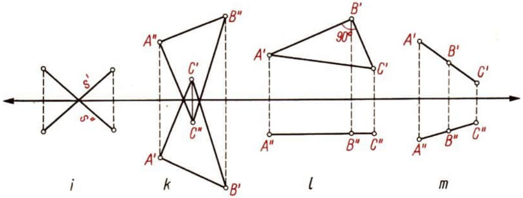


Abb. 6.15.

50. Es gibt eine Ebene, von deren Punkten die Grundrisse und Aufrisse jeweils zusammenfallen („sich decken"). Wie verläuft diese Deckebene in den Rißtafelquadranten?

51. Wo liegen alle Punkte im Raum, deren Grundrisse und Aufrisse jeweils auf verschiedenen Seiten der Rißachse in gleicher Entfernung von dieser liegen?

Seiten- und Kreuzriß

Falls Grundriß und Aufriß noch keine hinreichend klare Vorstellung vom dargestellten Gegenstand ermöglichen oder die Maßentnahme für gewisse Teile Schwierigkeiten bereitet, wird noch ein weiterer Riß, der **Seitenriß,** auf eine dritte Rißtafel π_3 beigefügt. Die Lage der **Seitenrißtafel** richtet sich nach dem beabsichtigten Zweck, ein möglichst deutliches drittes Bild zu erhalten.
Steht die Seitenrißtafel π_3 senkrecht auf π_1 und π_2 (in der Art einer Zimmerecke), so spricht man vom **Kreuzriß.** Beim Umklappen der Kreuzrißtafel π_3 kann diese links oder rechts oben neben den Aufriß oder auch links oder rechts unten neben den Grundriß gelegt werden. Die Konstruktion des Kreuzrisses P''' jedes Punktes P aus Grundriß P' und Aufriß P'' ist mit Hilfe zweier Ordnungslinien eindeutig möglich. Im folgenden soll der Kreuzriß stets rechts oben neben dem Aufriß liegen (Abb. 6.16.).

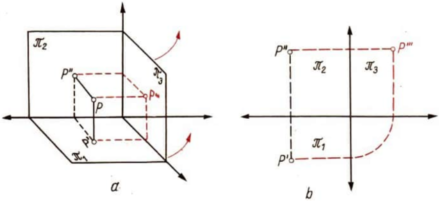


Abb. 6.16.

Satz 15: Von den drei Rissen (Grundriß, Aufriß, Kreuzriß) bestimmen zwei eindeutig die Lage eines Punktes P im Raum, der dritte Riß läßt sich aus den beiden anderen eindeutig gewinnen.

Aufgaben

52. Vorgegeben ist ein Dreieck ABC durch Aufriß und Kreuzriß. Konstruieren Sie dazu den Grundriß!

Anleitung: Auch A'' und A''', B'' und B''', C'' und C''' müssen je auf eine Ordnungslinie, senkrecht zur Achse $\pi_{2;3}$ liegen.

53. Vorgegeben ist eine Strecke AB durch Grundriß und Kreuzriß. Konstruieren Sie dazu den Aufriß!

Anleitung: Beachten Sie, daß die Ordnungslinien von A' nach A''' und von B' nach B''' je einen Viertelkreisbogen enthalten müssen! Dieser kann auch durch die unter 45° zu den Rißachsen verlaufende Sehne ersetzt werden.

54. Konstruieren Sie Grund-, Auf- und Kreuzriß eines ebenen Vierecks, das sich in allgemeiner Lage zu allen drei Rißtafeln befindet!

Anleitung: Beachten Sie den Diagonalenschnittpunkt!

55. Konstruieren Sie Grund-, Auf- und Kreuzriß zweier sich kreuzender Strecken!

Anleitung: Benutzen Sie zur Konstruktion des Kreuzrisses die Streckenendpunkte, und legen Sie die Strecken so, daß auch im Kreuzriß eine Deckstelle entsteht!

56. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß zweier zueinander paralleler Strecken und daraus mit Hilfe der Endpunkte den Kreuzriß! Ist auch hierbei das Gesetz von der Erhaltung der Parallelität erfüllt?

57. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß zweier Strecken, die in parallelen, zu π_1 senkrechten Ebenen liegen, die aber selbst zueinander nicht parallel sind, und dazu mit Hilfe der Endpunkte den Kreuzriß! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe **56**!

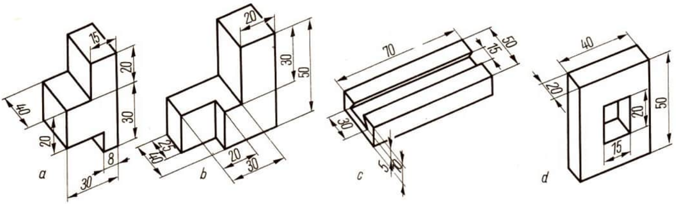


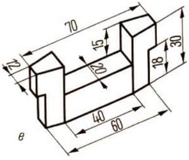
Abb. 6.17.

58. Die folgenden Skizzen zeigen bemaßte Schaubilder einfacher Werkstücke (Abb. 6.17.).

a) Zeichnen Sie jeweils Grund-, Auf- und einen anschaulichen Kreuzriß bei möglichst einfacher Lage zu den Rißtafeln! Wählen Sie selbst einen geeigneten Maßstab!

b) Berechnen Sie die Masse der dargestellten Werkstücke ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg\,dm^{-3}}$)!

c) Beschreiben Sie die Herstellung der dargestellten Werkstücke vom Rohling bis zum fertigen Stück!



59. Konstruieren Sie die drei Risse eines Stückes

a) I-Stahl; **b)** [-Stahl; **c)** T-Stahl!

Anleitung: Verschaffen Sie sich die genormten Maße, und zeichnen Sie die Körper in einem geeigneten Maßstab in einfacher Lage!

60. Sehen Sie sich nach Werkzeichnungen um, die neben dem Grundriß auch Kreuzrisse (Seitenansichten) enthalten!

61. Zeichnen Sie Grundriß, Aufriß und Kreuzriß einer Strecke AB, die folgende besondere Lage zu den Tafeln hat!

a) parallel zu π_1; Neigungswinkel gegen π_2: 30° **b)** parallel zu π_2 und π_3
c) senkrecht zu π_2 **d)** A in π_2; B in π_3; Neigungswinkel: 45°
e) A in π_1 und π_2, parallel zu π_3; Neigungswinkel gegen π_1: 60°

62. Wie liegen folgende Streckenpaare zueinander und zu den Tafeln? Beschreiben Sie die Lage, und ergänzen Sie jeweils den fehlenden Riß (Abb. 6.18.)!

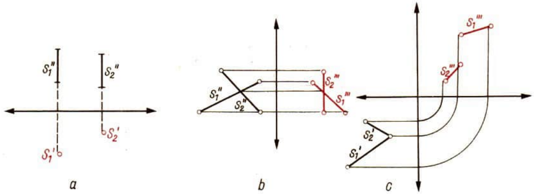


Abb. 6.18.

Senkrechte Parallelprojektion der Geraden

Orthogonalprojektion auf eine Tafel; Spurpunkt; Neigungswinkel

Sofern die Gerade nicht senkrecht zur Rißtafel verläuft, ergibt sich bei der Orthogonalprojektion wiederum eine Gerade. Um die Neigung der Geraden gegen die Rißtafel zu bestimmen, müssen zwei Geradenpunkte, also letztlich eine in der Geraden gelegene Strecke, durch ihren Grundriß und eine Höhenangabe (Höhenmaßstab, Koten, Aufriß) gegeben sein. Dann wird wie bei der Bestimmung des Neigungswinkels einer Strecke verfahren: Umklappen eines Trapezes oder eines Dreiecks. Das Dreieck heißt **Anstiegsdreieck.**

Als einer dieser fest gegebenen Punkte wird gewöhnlich derjenige verwendet, in dem die Gerade durch die Rißtafel π_1 durchstößt (**Spurpunkt** S_1) (Abb. 6.19.).

Satz 16: Jede Gerade, die nicht parallel zur Rißtafel verläuft, besitzt einen Spurpunkt, in dem die Gerade die Tafel durchstößt.

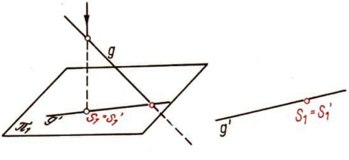


Abb. 6.19.

Aufgaben

63. Der Spurpunkt S_1 fällt zusammen mit seinem Orthogonalriß S_1'. Infolgedessen schneidet sich dort das Urbild g der Geraden mit dem Riß g'. Begründen Sie diesen Satz!

64. Welche Kote hat der Spurpunktriß S_1'? Wo steht S_1 am Höhenmaßstab? Wo liegt S_1'' im Grundriß-Aufriß-Bild?

65. Der Grundriß g' einer Geraden ist durch $S_1 = S_1'$ und den Grundriß A' eines weiteren Geradenpunktes A eindeutig festgelegt. Die Kote von A sei 5 cm. Die Entfernung $\overline{S_1'A'}$ betrage 8 cm. Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Geraden g gegen π_1!

66. Eine Gerade g ist unter 45° gegen π_1 geneigt. Entwerfen Sie ein Grundrißbild mit Höhenmaßstab unter Verwendung eines weiteren Geradenpunktes A!

Anleitung: Welche Beziehung besteht in diesem Falle zwischen den Strecken $\overline{S_1A'}$ im Grundriß und $\overline{OA}$ am Höhenmaßstab?

67. Von einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide (Tetraeder) ist der Grundriß zu entwerfen **a)** mit Höhenmaßstab; **b)** mit Koten; **c)** mit Aufriß. Das Tetraeder soll auf der Grundrißtafel stehen, so daß die Eckpunkte der Grundfläche zugleich Spurpunkte der Seitenkanten sind.
Anleitung: Da die Höhe des Tetraeders vom Schnittpunkt der Symmetrieachsen der Grundfläche zur Spitze führt, ist sie aus dem Anstiegsdreieck der Seitenkanten konstruktiv zu bestimmen (Seitenkantenlänge gleich Grundkantenlänge!). Die Kote der Spitze ist aus demselben Dreieck rechnerisch genau zu bestimmen.

68. Zeichnen Sie von einem Würfel, der 2 cm über der Grundrißtafel in einfacher Lage schwebt, das Grundrißbild mit Höhenmaßstab! Zeichnen Sie die vier Raumdiagonalen des Würfels ein! Konstruieren Sie die Spurpunkte der verlängerten Kanten und Raumdiagonalen, und bestimmen Sie ihre Neigungswinkel gegen π_1!

69. Das Oktaeder ist eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche und 8 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen. Zeichnen Sie den Grundriß eines Oktaeders, das mit einer Ecke auf π_1 steht, und geben Sie die Koten für alle 6 Eckpunkte an! Zeichnen Sie ferner die Spurpunkte der Verlängerungen der Seitenkanten ein!

70. Tetraeder, Würfel (Hexaeder) und Oktaeder gehören zu den fünf regulären Polyedern, die alle einen Mittelpunkt, eine umbeschriebene Kugel durch die Eckpunkte und eine einbeschriebene Kugel, die alle Seitenflächen von innen berührt, besitzen. Entwerfen Sie nochmals die Grundrisse, und zeichnen Sie die Grundrisse vom Mittelpunkt und von diesen beiden Kugeln ein!

Anleitung: Aus geeigneten Anstiegsdreiecken lassen sich die Radien der Kugeln bestimmen. Bedenken Sie, daß der Grundriß einer Kugel durch einen größten Kugelkreis in wahrer Größe wiedergegeben wird!

Die Gerade im Zweitafelbild

Eine Gerade in allgemeiner Lage durchstößt nicht nur die Grundrißtafel, sondern auch Aufriß- und Kreuzrißtafel. Es ergeben sich auch dort Spurpunkte: S_1 in π_1, S_2 in π_2, S_3 in π_3. Zwei von ihnen legen die Gerade eindeutig fest. Dazu sollen im folgenden S_1 und S_2 verwendet werden.

Satz 17: Es fallen S_1 mit S_1' und S_2 mit S_2'' zusammen. S_1'' und S_2' liegen auf der Rißachse.

Daraus folgt die Konstruktion der Spurpunkte einer Geraden g, die durch ihre Risse g' und g'' gegeben ist. Die Schnittpunkte von g' und g'' mit der Rißachse sind S_2' bzw. S_1''; von hier aus führen die Ordnungslinien zu $S_2'' = S_2$ bzw. zu $S_1' = S_1$ (Abb. 6.20.).

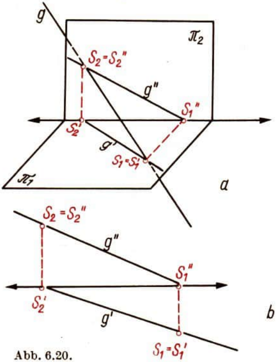


Abb. 6.20.

Aufgaben

71. Gegeben sind die Risse g' und g'' einer Geraden g. Konstruieren Sie die Spurpunkte S_1 und S_2 und die Neigungswinkel von g gegen π_1 und π_2!
Anleitung: Mit Hilfe von S_1 und S_2 läßt sich sowohl ein Anstiegsdreieck gegen π_1 als auch eins gegen π_2 konstruieren und umlegen.
Achten Sie auf die Genauigkeit, mit der Sie die Lage der Spurpunktrisse bestimmen können! Bei welcher Lage von g' und g'' ist eine sehr große Genauigkeit zu erwarten, bei welcher läßt sich aber dieser oder jener Punkt nur ungenau bestimmen? Begründen Sie auch Ihre Antworten!

72. Bei anderer Lage von g kann die Strecke $\overline{S_1S_2}$ evtl. auch im II., III. oder IV. Quadranten liegen. Das erkennt man aus der Lage der stets nach dem Grundverfahren zu konstruierenden Spurpunktrisse. Konstruieren Sie S_1 und S_2 in den Abbildungen 6.21.a bis d, und bestimmen Sie, in welchen Quadranten jeweils $\overline{S_1S_2}$ liegen!

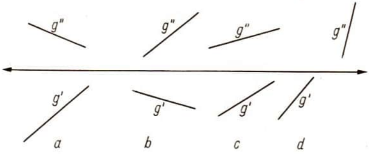


Abb. 6.21.

73. Eine Gerade g, die parallel zu einer Rißtafel verläuft, hat in dieser Tafel keinen Spurpunkt. Wie zeigt sich das im Grundriß-Aufriß-Bild und bei der Konstruktion? Wie verläuft eine Gerade, die weder S_1 noch S_2 aufweist?

74. In den Abbildungen 6.22. a bis d sind A und B jeweils die Spurpunkte einer Geraden g. Zeichnen Sie g' und g'' ein, und beschreiben Sie die Lage von g!

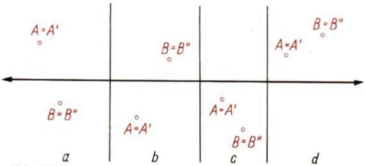


Abb. 6.22.

75. Die Risse g' und g'' einer Geraden schneiden einander auf der Rißachse. Bestimmen Sie S_1 und S_2 und ihre Risse! Erklären Sie die sich ergebende Besonderheit!

76. a) Gegeben ist eine Gerade g_1 durch g_1' und g_1'' und auf ihr ein Punkt P. Zeichnen Sie die Risse einer Geraden g_2 ein, die g_1 in P schneidet! Bestimmen Sie die Spurpunkte von g_1 und g_2! Verbinden Sie die beiden Grundrißspurpunkte und die beiden Aufrißspurpunkte und verlängern Sie die Verbindungen bis zur Rißachse! Was stellen Sie fest?

b) Verfahren Sie nochmals wie bei Aufgabe **76a,** doch soll diesmal g_2 die Gerade g_1 kreuzen! Was stellen Sie fest!

6.2. Genormte senkrechte Axonometrie

Einfache und allgemeine Lage des Gegenstandes

Schrägrisse und Orthogonalrisse lassen sich besonders einfach konstruieren, wenn der Gegenstand in einfacher Lage zur Rißtafel steht. Dann befinden sich möglichst viele seiner Teile (Seiten, Kanten, Flächen) in Front- oder Tiefenlage zur Rißtafel und die Konstruktion erstreckt sich zunächst auf die so gelegenen Teile. Allerdings leidet dadurch die Anschaulichkeit des Bildes.

Um die mit größerer Anschaulichkeit verbundene allgemeine Lage des Gegenstandes bei der Projektion zu erreichen, gibt es zwei Wege:

a) Der Riß des zunächst in einfacher Lage dargestellten Gegenstandes wird auf konstruktivem Weg in einen Riß des in allgemeiner Lage befindlichen Gegenstandes verwandelt: Methode der **Drehung des Risses.**

b) Der Gegenstand wird sofort in allgemeiner Lage dargestellt, doch wird der Konstruktionsweg dadurch erleichtert, daß man zunächst den Riß eines rechtwinkligen räumlichen Achsenkreuzes (rechtwinkliges Dreibein) in der gewünschten allgemeinen Lage konstruiert und dann den Riß des Gegenstandes in den Riß des Dreibeins einzeichnet: Verfahren der **Axonometrie.**

Drehung des Risses

Diese Methode wird hauptsächlich beim Grundriß-Aufriß-Verfahren benutzt. Der in einfacher Lage dargestellte Gegenstand wird abwechselnd um senkrecht zur Grundrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel verlaufende Achsen gedreht, bis eine hinreichend allgemeine Lage und demgemäß ein genügend anschauliches Bild erreicht ist.

Beispiel 4:

Würfel

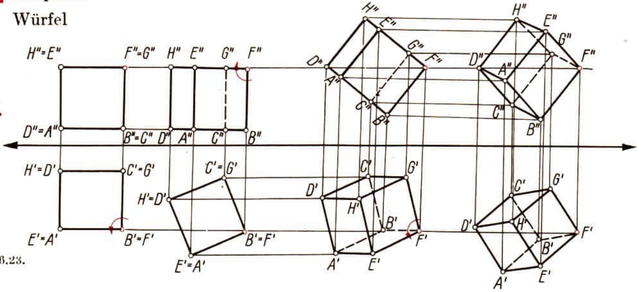


Abb. 6.23.

Dreibein und axonometrisches Achsenkreuz

Fertigen Sie aus Draht ein rechtwinkliges Dreibein an, markieren Sie (durch Korkscheiben o. ä.) auf den drei Achsen gleiche Einheitsstrecken, und halten Sie das Gebilde im Sonnenlicht vor eine Papptafel! Ändern Sie die Dreibeinlage und die Richtung der einfallenden Lichtstrahlen, und beobachten Sie die entstehenden Schattenbilder, besonders die Verkürzungen der Einheitsstrecken!

Je nachdem, ob zur Projektion des Dreibeins und des mit ihm gleichzeitig abgebildeten räumlichen Gebildes schräge oder orthogonale Parallelprojektion verwendet wird, unterscheidet man **schiefwinklige** und **rechtwinklige Axonometrie.** Je nach dem Einfall der Projektionsstrahlen und der Lage des Dreibeins zur Rißtafel erfahren die rechten Winkel des Dreibeins verschiedene Verzerrungen und die auf den drei Beinen angenommenen gleichen Einheitsstrecken e verschiedene Verkürzungen. Es ergeben sich auf diese Weise mannigfache **axonometrische Achsenkreuze** (Abb. 6.24.).

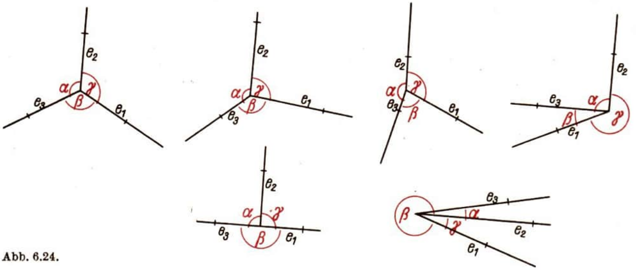


Abb. 6.24.

Es läßt sich beweisen, daß zu jedem beliebig angenommenen ebenen dreistrahligen Achsenkreuz mit willkürlich gewählten Achsenwinkeln α, β, γ ($\alpha + \beta + \gamma = 360°$) und ebenso willkürlich angenommenen Verkürzungsverhältnissen für die Einheitsstrecke e auf den drei Achsen $q_1 = e_1 : e$; $q_2 = e_2 : e$; $q_3 = e_3 : e$ eine Lage des Dreibeins zur Rißtafel und eine Richtung der Projektionsstrahlen gefunden werden kann, die das orthogonale räumliche Dreibein mit drei gleichen Einheitsstrecken in dieses Achsenkreuz projiziert (Satz von Pohlke). Die völlig freie Wahl der sechs Elemente α, β, γ, q_1, q_2, q_3 erfährt eine Einschränkung, wenn die schräge Parallelprojektion ausgeschlossen wird. Das soll im folgenden immer geschehen.

Satz 18: Bei rechtwinkliger Parallelprojektion lassen sich zu drei beliebigen Verkürzungsverhältnissen q_1, q_2, q_3, die lediglich die Bedingung $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 2$ erfüllen müssen, stets eindeutig drei Achsenwinkel α, β, γ bestimmen, die das axonometrische Achsenkreuz festlegen.

Auf einen Beweis dieses Satzes muß hier verzichtet werden.
Man unterscheidet bei jeder, also auch bei der rechtwinkligen Axonometrie nach den Verkürzungsverhältnissen q_1, q_2, q_3 drei verschiedene Verfahren:

Die trimetrischen Verfahren	Die Verkürzungsverhältnisse sind paarweise verschieden: $q_1 \neq q_2$; $q_2 \neq q_3$; $q_3 \neq q_1$.
Die dimetrischen Verfahren	Zwei der drei Verkürzungsverhältnisse sind gleich: $q_1 = q_2$, $q_3 \neq q_1$ ($q_3 \neq q_2$).
Das isometrische Verfahren	Alle drei Verkürzungsverhältnisse sind gleich: $q_1 = q_2 = q_3$.

Achsenkreuz der rechtwinkligen Axonometrie und Spurdreieck

Halten Sie Ihr aus Draht angefertigtes Dreibein im rechtwinklig einfallenden Sonnenlicht in verschiedener Lage vor die Papptafel, und markieren Sie jeweils die Durchstoßpunkte der verlängert gedachten Beine und deren Schatten!

Satz 19: Das Spurdreieck, das von den Spurpunkten der Beine des projizierten Dreibeins in der Rißebene gebildet wird, ist stets spitzwinklig (Abb. 6.25.)

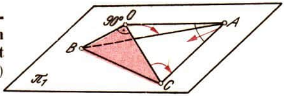


Abb. 6.25.

Begründung:

Wird das Dreibein z. B. um die Seite $\overline{BC}$ des Spurdreiecks gedreht, so wird $\sphericalangle BAC$ um so größer, je weiter der Dreibeinscheitel O zur Rißtafel geneigt wird. Er kann aber wegen $\sphericalangle BOC = 90°$ niemals stumpf werden.

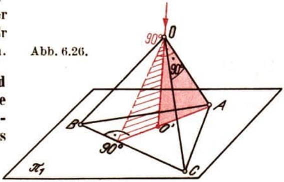


Abb. 6.26.

Satz 20: Bei rechtwinkliger Axonometrie sind die Achsen des Achsenkreuzes die Höhen im Spurdreieck. Der Höhenschnittpunkt ist der Scheitel des Achsenkreuzes (Abb. 6.26.).

Begründung:

Die projizierende Ebene durch das Bein $\overline{OA}$ steht senkrecht auf der Rißtafel, in der das Spurdreieck ABC liegt, aber auch senkrecht auf der durch OBC festgelegten Ebene, denn $OABC$ ist ein rechtwinkliges Dreibein. Folglich steht die Schnittgerade der Ebene OBC mit der Rißtafel (die Seite $\overline{BC}$ des Spurdreiecks) senkrecht auf der Schnittgeraden der projizierenden Ebene mit der Rißtafel, d. h. auf dem Riß $\overline{O'A}$ des Beins $\overline{OA}$.

Satz 20a: Bei rechtwinkliger Axonometrie liegt der Scheitel des Achsenkreuzes stets im Innern des Spurdreiecks: jeder Achsenwinkel ist stets kleiner als 180°.

Aufgaben

1. Beweisen Sie **Satz 20a**!
   Anleitung: Benutzen Sie die **Sätze 19** und **20**!
2. Das Spurdreieck bildet zusammen mit dem projizierten Dreibein eine dreiseitige Pyramide. Was für Dreiecke sind die Seitenflächen dieser Dreibeinpyramide?
3. Zeichnen Sie ein beliebiges Spurdreieck mit dem axonometrischen Achsenkreuz! Legen Sie die drei Seitenflächen der Dreibeinpyramide um die Seiten des Spurdreiecks in dessen Ebene um!

Standardisierte Verfahren der rechtwinkligen Axonometrie

Die folgenden beiden standardisierten Verfahren sind von besonderer Bedeutung:

a) die isometrische Projektion (mit $q_1 = q_2 = q_3$),
b) eine dimetrische Projektion (mit $q_1 = q_2 = 2q_3$).

Das isometrische Verfahren

Halten Sie Ihr aus Draht angefertigtes Dreibein so im Sonnenlicht vor eine Papptafel, daß die Schattenbilder der drei Einheitsstrecken auf die gleiche Länge verkürzt werden! Überzeugen Sie sich durch Bewegen des Dreibeins, daß das nur in einer ganz bestimmten Lage eintritt! Beschreiben Sie diese besondere Lage!
Wie sieht dann das Spurdreieck aus?

Satz 21: Bei isometrischer Projektion ist das Spurdreieck gleichseitig. Der Scheitel des Achsenkreuzes ist Mittelpunkt des Spurdreiecks. Die Achsenwinkel sind gleich: $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ (Abb. 6.27.).

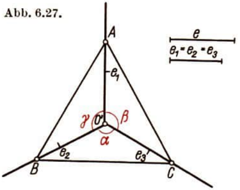


Abb. 6.27.

Aus $q_1 = q_2 = q_3$ und $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 2$ folgt:

$$3q^2 = 2 \quad \text{und} \quad q = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0{,}817$$

(für alle Achsen).

Satz 22: Bei isometrischer Projektion werden die Urbilder in Richtung jeder der drei Achsen auf $q = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0{,}817 \approx \frac{4}{5}$ der wahren Größe verkürzt.

Satz 22a: Bei der Maßentnahme aus dem isometrischen Bild sind die in Richtung der Achsen abgemessenen Streckenlängen mit $\frac{1}{q} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \approx 1{,}225 \approx \frac{5}{4}$ zu multiplizieren, um die wahren Größen des Urbildes zu erhalten.

Da isometrische Bilder im allgemeinen nicht zur Maßentnahme, sondern nur zur Veranschaulichung benutzt werden, wird in der Praxis meist auf diese Umrechnung Urbild ⟷ Bild verzichtet. Die isometrischen Bilder werden also mit den Maßen der nicht verkürzten Strecken des Urbildes gezeichnet, obwohl das mathematisch fehlerhaft ist. Isometrische Darstellungen sind in erster Linie für Darstellungen zu verwenden, bei denen in drei Ansichten Wesentliches klar gezeigt werden soll.

Beispiel 5:

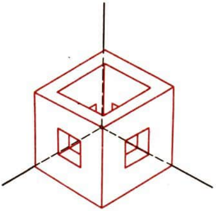


Abb. 6.28.

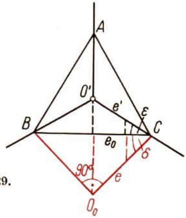


Abb. 6.29.

Aufgaben

4. Welche Gestalt haben bei der isometrischen Projektion die Seitenflächen der Dreibeinpyramide?

5. Konstruieren Sie das Spurdreieck mit dem Achsenkreuz und den drei umgelegten Seitenflächen der Dreibeinpyramide für den Fall der isometrischen Projektion!

6. Abbildung 6.29. zeigt das Spurdreieck mit einer umgelegten Seitenfläche und einer Einheitsstrecke e sowie ihrer Projektion e'. Leiten Sie $q = e' : e = \sqrt{\frac{2}{3}}$ geometrisch her!

   Anleitung: Benutzen Sie die Hilfsstrecke e_0, die Sie einmal mit Hilfe des Winkels δ durch e, einmal mit Hilfe des Winkels ε durch e' ausdrücken! Wie groß werden δ und ε beim isometrischen Spurdreieck?

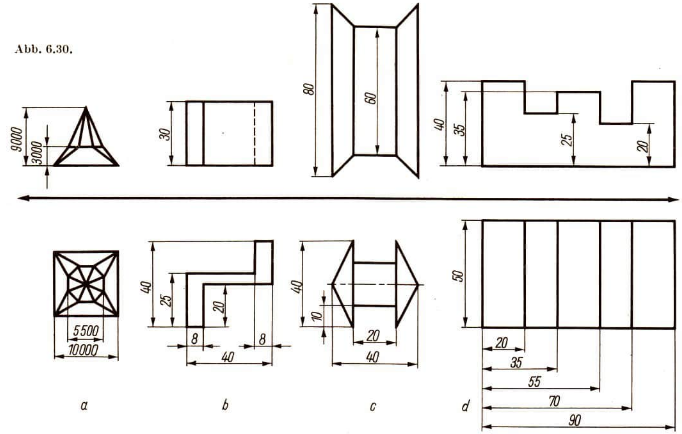
7. Zeichnen Sie die isometrischen Bilder von folgenden geometrischen Gebilden!
a Quadrat[1]
b) Rhombus[1]
c) gleichseitiges Dreieck[1]
(Seiten je 6 cm: Rhombuswinkel 45°)
d) Würfel
e) Tetraeder
f) Oktaeder
(Kanten je 5 cm)
g) regelmäßiges sechsseitiges Prisma stehend (Grundkante 4 cm; Höhe 8 cm)
h) wie **g**, aber liegend
i) Würfel mit sechs aufgesetzten quadratischen Pyramiden von solcher Höhe, daß die Pyramidenseitenflächen paarweise in einer Ebene liegen (Würfelkante 5 cm).

Anmerkung: Der entstehende Körper ist der aus lauter Rhomben gebildete Zwölfflächner, ein halbregelmäßiger Körper; Fachbezeichnung: Rhombendodekaeder.

Anleitung: Zeichnen Sie die isometrischen Bilder unter Berücksichtigung der erforderlichen Verkürzung! Beachten Sie, daß diese Verkürzungen nur in Richtung der drei Achsen gelten! Sie müssen notfalls mit Hilfsstrecken in Richtung dieser Achsen arbeiten. (Zum Beispiel bei Aufgabe **7c.**) Zeichnen Sie zum Vergleich Aufgabe **7d** auch ohne Berücksichtigung der Verkürzung!

8. Zeichnen Sie zu den folgenden durch Grundriß und Aufriß dargestellten Gegenständen (Abb. 6.30.) das isometrische Bild unter Verwendung der beigegebenen Maße unter Berücksichtigung der erforderlichen Verkürzung und unter Verwendung eines geeigneten Maßstabs! (Soweit nicht anders vermerkt, sind die Maße in Millimetern angegeben.)

Abb. 6.30.



9. Stellen Sie die folgenden in isometrischer Projektion wiedergegebenen Gegenstände (Abb. 6.31.) im Grundriß-Aufriß-Kreuzriß-Bild dar!

[1] Die ebenen Figuren liegen in einer Ebene, die durch zwei Achsen bestimmt wird.

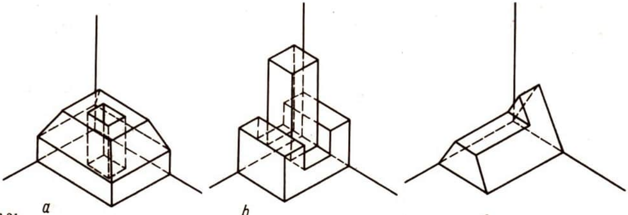


Abb. 6.31.

Anleitung: Bedenken Sie, daß Sie Maße nur von in Richtung der Achsen gelegenen Strecken entnehmen können und daß diese im Original um das reziproke Verkürzungsverhältnis vergrößert sind!

10. Schauen Sie sich nach isometrischen Projektionsbildern in der Praxis um, z. B. am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion im Betrieb!

Das genormte dimetrische Verfahren

Halten Sie Ihr aus Draht gefertigtes Dreibein so in das Sonnenlicht vor die Papptafel, daß die Schattenbilder zweier Einheitsstrecken auf die gleiche Länge, die der dritten aber in einem beliebigen anderen Verhältnis verkürzt werden! Überzeugen Sie sich durch Bewegen, daß dazu zwei der drei Beine stets unter gleicher Neigung zur Tafel liegen müssen, während das dritte auf der Symmetrieebene zu den beiden ersten liegend eine beliebige Neigung hat! Wie sieht das Spurdreieck aus? Wie ist die Neigung des dritten Beins etwa, wenn seine Einheitsstrecke doppelt so stark verkürzt wird wie die der beiden anderen?

Satz 23: Bei jeder dimetrischen Projektion ist das Spurdreieck gleichschenklig. Von den Achsenwinkeln sind stets zwei einander gleich (Abb. 6.32.).

Während es nur ein einziges isometrisches Verfahren der rechtwinkligen Axonometrie gibt, sind beliebig viele dimetrische möglich je nach der Festsetzung der Verkürzungsverhältnisse $q_1 = q_2$ und q_3.
Als standardisierte Dimetrie ist diejenige axonometrische Abbildung festgelegt, für die gilt: $q_1 = q_2 = 2q_3$.
In Verbindung mit der Bedingung $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 2$ folgt daraus:

$$4q_3^2 + 4q_3^2 + q_3^2 = 2$$
$$9q_3^2 = 2$$
$$q_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471$$
$$q_1 = q_2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}943$$

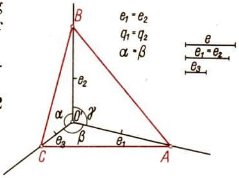


Abb. 6.32.

Satz 24: Bei der standardisierten dimetrischen Projektion werden die Urbilder in Richtung zweier Achsen auf $q = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}943 \approx \frac{19}{20}$, in Richtung der dritten Achse auf $q = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471 \approx \frac{9}{20}$ der wahren Größe verkürzt.

Satz 24a: Bei der Maßentnahme aus dem dimetrischen Bild sind die in Richtung zweier Achsen abgemessenen Streckenlängen mit $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1{,}06$, die in Richtung der dritten Achse abgemessenen mit $\frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12$ zu multiplizieren, um die wahre Größe zu erhalten.

Die Abweichungen der Verkürzungen von der wahren Größe bzw. von der Verkürzung 1 : 2 sind so gering, daß in der Praxis auf ihre Berücksichtigung verzichtet wird. Man verwendet also bei der Übertragung Urbild ⟷ Bild in Richtung zweier Achsen die wahren Größen, in Richtung der dritten die auf die Hälfte verkürzten. Die entstehenden Bilder sind dadurch um ein geringes zu groß, doch ist im Rahmen der üblichen Zeichengenauigkeit eine unmittelbare Maßentnahme sinnvoll und leicht möglich.

Satz 25: Aus den vorgeschriebenen Verkürzungsverhältnissen lassen sich mit Hilfe der Trigonometrie die Achsenwinkel errechnen zu $\alpha = \beta \approx 132°$; $\gamma \approx 97°$.

Durch Normung ist folgende einfache und praktische Konstruktionsanweisung festgelegt (Abb. 6.33.):
Die beiden Achsen für das Verkürzungsverhältnis 1 : 1 werden nach oben und nach rechts unten gelegt, die für die Verkürzung 1 : 2 nach links unten.
Standardisierte dimetrische Bilder werden hauptsächlich für Darstellungen verwendet, bei denen in der Hauptansicht Wesentliches gezeigt werden soll.

Beispiel 6:

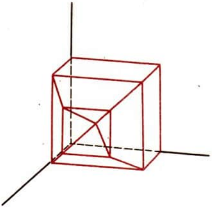


Abb. 6.34.

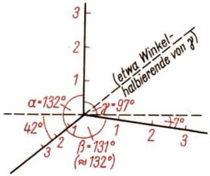


Abb. 6.33.

Aufgaben

11. Konstruieren Sie das Spurdreieck mit dem Achsenkreuz und den drei umgelegten Seitenflächen der Dreibeinpyramide für den Fall der standardisierten dimetrischen Projektion!

12. Zeichnen Sie für die bei der Isometrie in Aufgabe **7a** bis **7i** gegebenen Gebilde die Bilder in standardisierter Dimetrie!
Anleitung: Arbeiten Sie dabei mit den angenäherten Verkürzungswerten 1 : 1 und 1 : 2!

13. Verfahren Sie genauso mit den in Aufgabe **8** im Grundriß-Aufriß-Bild dargestellten Gegenständen!

14. Stellen Sie die folgenden in standardisierter dimetrischer Projektion wiedergegebenen Gegenstände (Abb. 6.35.) im Grundriß-Aufriß-Bild dar!

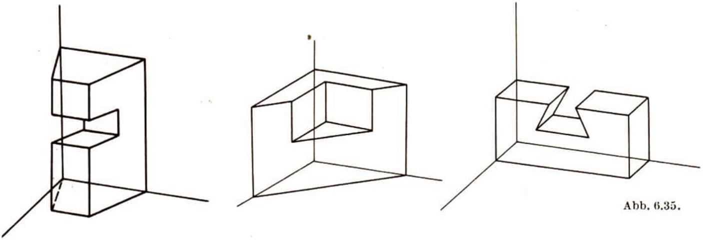


Abb. 6.35.

Anleitung: Die dimetrischen Bilder sind mit den gerundeten Verkürzungszahlen 1 : 1 und 1 : 2 gezeichnet.

15. Achten Sie auf Darstellungen in standardisierter dimetrischer Projektion auf Werkzeichnungen, in Büchern usw.! Sammeln Sie Beispiele! Nutzen Sie dazu vor allem den Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion!

16. Zeichnen Sie für die in Aufgabe **9** in isometrischer Darstellung gegebenen Gegenstände die Bilder in standardisierter Dimetrie!

6.3. Zur Wiederholung und Übung

1. Zeichnen Sie das Grundrißbild zweier **a)** paralleler; **b)** einander schneidender; **c)** einander kreuzender Geraden mit Höhenmaßstab!

2. Desgleichen mit Koten!

3. Desgleichen mit Aufriß und Kreuzriß!

4. Zeichnen Sie das Grundriß-Aufriß-Bild eines geraden und eines schiefen vierseitigen Prismas, dessen Grundfläche **a)** ein Quadrat; **b)** ein Rechteck; **c)** ein Rhombus; **d)** ein Rhomboid; **e)** ein Trapez; **f)** ein beliebiges Viereck ist!
Untersuchen Sie jeweils auf konstruktivem Wege, ob sich die vier Raumdiagonalen in einem Punkt schneiden!

5. Zeichnen Sie für ein Haus mit Satteldach
a) den Grundriß mit Höhenmaßstab;
b) den Grundriß mit Koten;
c) den Grund-, Auf- und Kreuzriß;
d) das isometrische Bild;
e) das standardisierte dimetrische Bild!
Verwenden Sie dabei Maße, die der Wirklichkeit entsprechen, und fertigen Sie die Zeichnungen in einem geeigneten Maßstab an!

6. Desgleichen für ein Haus mit Walmdach.

7. Desgleichen für ein Haus mit Krüppelwalmdach.

8. Desgleichen für einen Schuppen mit Pultdach.

9. Vermessen Sie Gegenstände der Umwelt, die ebenflächig begrenzt sind, z. B. Kisten, Tische, Stühle, Werkstücke u. ä., und entwerfen Sie maßgerechte Zeichnungen nach den in Aufgabe **5a** bis **e** genannten Verfahren!

10. Bei beliebiger Lage hat eine Gerade sowohl in der Grundrißtafel als auch in der Aufrißtafel einen Spurpunkt. Bei welchen Sonderlagen existiert nur einer oder keiner dieser Spurpunkte? Zeichnen Sie solche Grundriß-Aufriß-Bilder, und beschreiben Sie die Lage der Geraden!

11. Zeichnen Sie zu den in Aufgabe **10** genannten Fällen auch
a) den Kreuzriß mit S_1''' und S_2''';
b) den Kreuzrißspurpunkt S_3 mit S_3', S_3'' und S_3'''!

12. Konstruieren Sie das isometrische Bild und das standardisierte dimetrische Bild für
a) einen Würfel;
b) ein Tetraeder;
c) ein Oktaeder!

Verwenden Sie dabei jedesmal gleich große Kanten, und vergleichen Sie für jeden Körper das isometrische mit dem dimetrischen Bild!
Welchem Bild würden Sie jeweils nach Anschaulichkeit und Maßgerechtheit den Vorzug geben?

13. Verbindet man in einem Würfel mit der Kante a die Kantenmitten miteinander, so entsteht ein neuer Körper. Stellen Sie diesen Körper in einem Ihnen geeignet erscheinenden Verfahren (Grundriß-Aufriß, Isometrie oder Dimetrie) zeichnerisch dar, so daß Sie von dem neuen Körper Gestalt und Größe gut erkennen können! Berechnen Sie daraufhin seine Kantenlänge, seine Oberfläche und sein Volumen!

14. Verfahren Sie genauso
a) mit einem Tetraeder;
b) mit einem Oktaeder!

15. Neue Körper entstehen auch, wenn man die Mittelpunkte aller Seitenflächen von Körpern verbindet. Untersuchen Sie diese (wie bei Aufgabe **13** angegeben) **a)** für einen Würfel; **b)** für ein Tetraeder; **c)** für ein Oktaeder!

16. In Abbildung 6.36. ist **a)** ein Konsol und **b)** eine Spannschiene im Grundriß, Aufriß und Kreuzriß dargestellt. Zeichnen Sie jedes Werkstück in isometrischer und in standardisierter dimetrischer Projektion, und wählen Sie dabei jeweils eine solche Lage, daß die wesentlichen Teile klar zu erkennen sind!

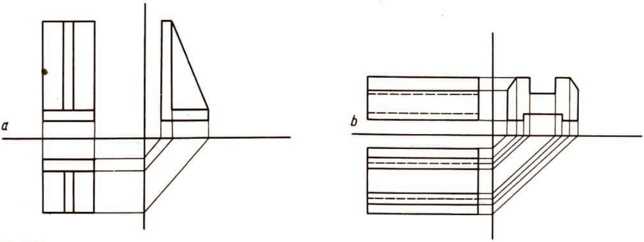
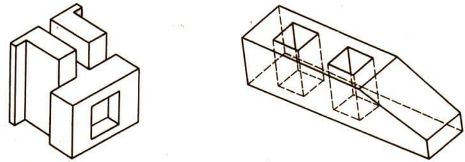


Abb. 6.36.

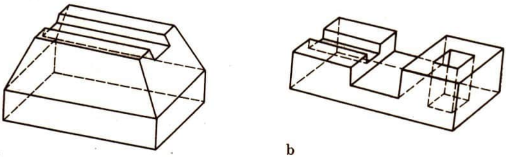
17. **Abbildung 6.37. zeigt a)** eine prismatische Führung und **b)** eine Spannbacke in isometrischer **Darstellung. Zeichnen Sie Grundriß, Aufriß** und **Kreuzriß** sowie die Gegenstände in standardisierter dimetrischer Projektion!



a b

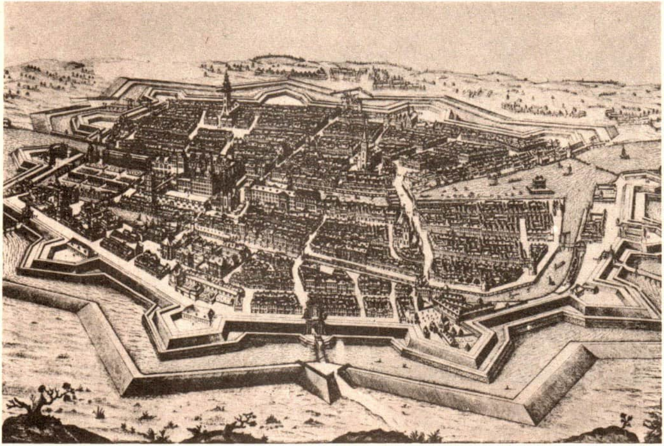
Abb. 6.37.

18. **Abbildung 6.38.** stellt **a)** einen Sockel und **b)** eine Bodenplatte in standardisierter dimetrischer **Projektion dar. Zeichnen** Sie Grundriß, Aufriß und Kreuzriß sowie die Werkstücke in isometrischer Projektion!



a b

Abb. 6.38.



7. Zur Geschichte der darstellenden Geometrie

Dieses Bild ist ein Ausschnitt aus einem Kupferstich, der Berlin um das Jahr 1688 darstellt. Um die Stadt wirkungsvoll gegen ihre Feinde verteidigen zu können, entstanden die Befestigungsanlagen. Mit ihrer Errichtung wurden die sogenannten Genieoffiziere betraut, die die Pläne entwarfen und zeichneten. Aus den Verfahren zur Darstellung der verschiedenen Schnitte und Ansichten entwickelte sich die darstellende Geometrie.
So war die Forderung der Praxis, die Sicherheit der Städte, Ausgangspunkt für die Entwicklung einer Wissenschaft, der darstellenden Geometrie.

Die darstellende Geometrie ist aus praktischen Lebensbedürfnissen der Menschen entstanden. Überall dort, wo es in der Geschichte der Menschheit notwendig war, räumliche Gebilde durch eine Zeichnung in der Ebene zu bestimmen, entwickelten sich Elemente der darstellenden Geometrie.
Schon vor mehr als 3000 Jahren standen die Baumeister der großen ägyptischen Bauten vor der Aufgabe, den Ausführenden ihre Pläne zu verdeutlichen. Worte allein reichten nicht mehr aus. Den Pyramidenbauten und anderen großen Bauwerken mußten Zeichnungen mit Maßangaben zugrunde gelegt werden. Einige solcher Baupläne sind erhalten geblieben, so vom Grabe des Königs Ramses IV. (etwa 1200 v. u. Z.) und von den unterirdischen Grabstätten Tell-al-Amarna, die etwa 1700–1500

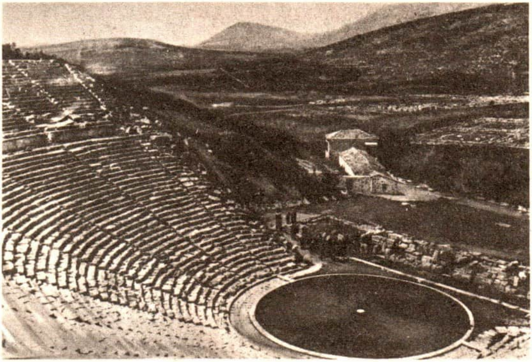
Abb. 7.1. Römische Wasserleitung, über eine Brücke geführt. Gebaut um die Zeit von VITRUVIUS bei Segovia in Spanien.

v. u. Z. gebaut wurden. Diese Bauanweisungen zeigen außer dem Grundriß noch die Ansichten von Einzelheiten, wie Eingänge, Säulengestaltung, Inneneinrichtung usw. Später kam sogar noch die Methode hinzu, die Aufrisse über einem quadratischen Liniennetz zu entwerfen. Damit war man in der Lage, die zum Bau nötigen Steine vorher genau zu behauen, so daß man das Gebäude aus den fertigen Steinen nur noch zusammenzufügen brauchte.

Diese hohe Kunst des Planens und Entwerfens der Bauwerke mit den damit verbundenen ersten Methoden der darstellenden Geometrie ist von den anderen Mittelmeervölkern, u. a. von den Griechen und Römern, übernommen und weiterentwickelt worden. Einer der bedeutendsten römischen Baumeister, VITRUVIUS, der zu Beginn unserer Zeitrechnung lebte, schrieb ein umfangreiches Werk, „De architectura“, über die Grundlagen und praktischen Methoden der Baukunst, in dem auch zeichnerische Verfahren zum Entwerfen von Gebäuden erwähnt werden. VITRUVIUS berichtet als etwas Selbstverständliches, daß die Entwürfe mit Hilfe von „Ichnographie“ und „Orthographie“ angefertigt werden, also aus Abbildungen des geplanten Gebäudes auf die Grundfläche (Grundriß) und dem aufgerichteten Bild der Außenfläche (Aufriß) bestehen. Dieses Buch von VITRUVIUS wurde in Europa im 15. und 16. Jahrhundert als theoretischer Leitfaden der Baukunst verwendet.

Dagegen haben die Künstler der Antike noch nicht zu den Verfahren der darstellenden Geometrie vorstoßen können. Sie konnten z. B. noch nicht perspektivisch zeichnen. Auf Gemälden half man sich dadurch, daß man das in Wirklichkeit Dahinterliegende darüber setzte. Nur bei dem großen materialistischen Denker der Antike, dem Philosophen und Mathematiker DEMOKRITOS VON ABDERA (etwa 460–370 v. u. Z.) finden sich Anfänge der perspektivischen Darstellung. Bekanntlich besaßen die Griechen der Antike eine große Vorliebe für Theateraufführungen. DEMOKRITOS suchte die Gesetze zu bestimmen, nach denen die Bühnendekorationen eingerichtet werden

Abb. 7.2. Antikes Amphitheater. Erbaut 2. Hälfte des 4. Jahrhunderts v. u. Z.



müssen, damit sie wirklichkeitsgetreu von den Zuschauern empfunden werden. Dieser Versuch einer Lehre von der Perspektive hieß bei den Griechen Scenographie und war ein Bestandteil der Optik.

Erst im 15. Jahrhundert lernte man in Europa, zuerst in Italien, die Kunst, perspektivisch zu zeichnen. Die Abkehr vom mittelalterlichen und kirchlichen Denken zeigt sich auch in dem Wunsche, so zu malen, wie das Abzubildende sich dem Auge darbietet. So fanden die großen Maler der damaligen Zeit — Johann van Eyck, della Francesca, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer — die grundlegenden Begriffe Fluchtpunkt und Fluchtgerade. Sie schrieben auch hervorragende Lehrbücher über die Perspektive, so Albrecht Dürer 1525 ein Werk mit dem Titel „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit".

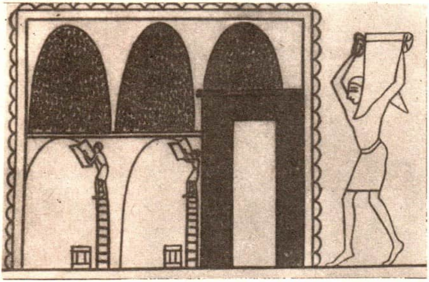


Abb. 7.3. Nicht perspektivische Zeichnung: Vorratsbehälter werden gefüllt. Sie stehen innerhalb einer Tempelmauer, die dunklen hinter den hellen. Ägypten, Neues Reich.

Dürer hatte auch an die Methoden der Steinmetzen angeknüpft, die in einer in Jahrhunderten gesammelten Erfahrung gelernt hatten, wie man den Stein zurechthauen muß, um beim Aneinanderfügen auch komplizierte Gewölbe bilden zu können. Dieses Verfahren hieß Steinschnitt und wurde in sogenannten Bauhütten von Generation zu Generation weitergegeben.

Die darstellende Geometrie wurde im 16. und 17. Jahrhundert durch die höheren

Anforderungen an den Festungsbau weiterentwickelt. Da die Kanonen eine immer größere Durchschlagskraft erreichten, mußten die Befestigungen zum Teil auch unter die Erde verlegt und Kasematten angelegt werden. Beim Entwurf der Festungen mußten ferner die Geländeverhältnisse berücksichtigt werden. Zugleich kam es darauf an, eine Festung zu „defilieren". Darunter verstand man die Aufgabe, eine Befestigung so einzurichten, daß keiner ihrer wichtigen Teile von der Artillerie des Belagerers bestrichen werden konnte, d. h., daß die Verteidiger durch eine über die Brüstung streichende Kugel nicht gefährdet wurden. Aus diesem Grunde erhielten die Festungen einen immer verwickelteren Grundriß. Immer neu angebrachte Vorsprünge, Ecken und Bastionen sollten die Wirkungsmöglichkeiten der feindlichen Artillerie einengen. Es ist daher kein Wunder, wenn die Fortschritte der darstellenden Geometrie gerade von Festungsbaumeistern und Genieoffizieren (entspricht heute den Pionieren) erzielt worden sind, so von den Franzosen VAUBAN (1633–1707) und FRÉZIER (1682–1773).

Abb. 7.4. Perspektivische Wiedergabe des Innern einer Halle. Gemälde von MELAZZO DA FORLI. Ende des 15. Jahrhunderts.

Abb. 7.5. Belagerung einer Stadt, Mitte des 16. Jahrhunderts. Die Befestigungen besitzen bereits Bastionen.

Auch der eigentliche Begründer der wissenschaftlichen darstellenden Geometrie, der Franzose GASPARD MONGE (1746–1818), wurde durch den Festungsbau zur Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie geführt. Als Sohn eines armen Straßenhändlers waren ihm im feudalen Frankreich alle höheren Bildungsstätten verschlossen. Schließlich fand er Aufnahme in einer der Militäringenieurschule von Mézières angeschlossenen Hilfsanstalt, die der Ausbildung von Werkmeistern für den Festungsbau diente. Sie trug den Spottnamen „Gipsschule", weil ihre Zöglinge Bauelemente und Steinschnitte in Gips nachzubilden hatten. Dort gelangen MONGE bedeutende Verbesserungen beim Projektieren von Festungswerken, indem er die aus der Erfahrung bekannten Methoden der darstellenden Geometrie systematisierte und theoretisch durchdrang. Mit neuen Methoden löste er eine der Schule vom Generalstab gestellte Aufgabe, womit die sonst üblichen umständlichen Rechnungen umgangen werden konnten. In Mézières arbeitete er auch den ersten exakten und geschlossenen Lehrgang der darstellenden Geometrie aus, der jedoch aus Gründen der militärischen Geheimhaltung nicht gedruckt werden durfte. Er erschien erst in der Revolutionszeit 1798/99 unter dem Titel „Géométrie descriptive" (Beschreibende Geometrie).

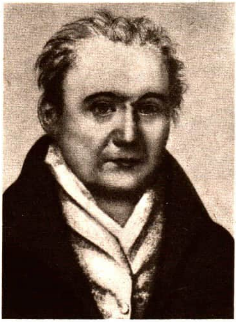


Abb. 7.6. GASPARD MONGE (1746–1818)

GASPARD MONGE schloß sich begeistert der großen Französischen Revolution an und half mit, den Feudalismus zu stürzen, die Republik zu errichten und den Krieg gegen die Interventen zu gewinnen, indem er die Pulver- und Gewehrherstellung zur Bewaffnung der französischen Revolutionsarmeen organisierte.

MONGE war noch auf anderen Gebieten der Mathematik einer der besten europäischen Mathematiker. Er hatte zugleich den großen praktischen Wert erkannt, den die Mathematik für die Praxis besitzt. Auf Beschluß der Jakobinerregierung gründete MONGE in Paris die *Ecole Polytechnique* (Polytechnische Schule) zur Ausbildung von Zivil- und Militäringenieuren. Unter seiner Leitung wurde sie in ganz kurzer Zeit die in Europa führende Stätte für Mathematik und Naturwissenschaften. Sie war die erste technische Hochschule. Nach ihrem Vorbild sind dann später mit der zunehmenden Industrialisierung in ganz Europa und in Amerika weitere polytechnische Schulen gegründet worden, eine z. B. 1828 in Dresden, aus der unsere jetzige stolze Technische Universität Dresden hervorgegangen ist.

Im Lehrplan der *Ecole Polytechnique* und nach ihrem Vorbild in den Lehrplänen der anderen europäischen technischen Hochschulen nahm die darstellende Geometrie eine zentrale Stelle ein. MONGE bezeichnete sie als „Sprache des Ingenieurs" und erkannte mit sicherem Blick ihre Bedeutung für die Konstruktion aller möglichen Maschinenelemente. Seit dieser Zeit bilden darstellende Geometrie und technisches Zeichnen wichtige Grundelemente der Ausbildung für Ingenieure.

Abbildungsnachweis

Abb. 1.0. Bildarchiv Volk und Wissen
Abb. 2.0. Zentrale Bildstelle der Deutschen Reichsbahn
Abb. 3.0. Zentral-Bild
Abb. 4.0. Militär-Bilddienst
Abb. 5.1. Reproduktion aus W. W. Struve: Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Berlin 1930.
Abb. 5.2. Reproduktion aus O. Neugebauer: Mathematische Keilschrifttexte. Dritter Teil. Ergänzungsheft. Berlin 1937.
Abb. 5.3. Reproduktion aus einem Rechenbuch von Adam Ries.
Abb. 5.4. Reproduktion aus Cajori: A History of Mathematical Notations, Band I. London 1928.
Abb. 5.5. Reproduktion aus Struik: A Concise History of Mathematics. New York 1948.
Bbb. 5.6. Reproduktion aus Wolf: A History of Science ... in the XVI$^{\text{th}}$ and XVII$^{\text{th}}$ Centuries. London 1950.
Abb. 6.0. Bildarchiv Volk und Wissen
Abb. 7.1. Reproduktion aus Propyläen-Weltgeschichte, Band II. Berlin 1931.
Abb. 7.2. Dr. Wußing
Abb. 7.3. Reproduktion aus A. Erman und H. Ranke: Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum. Tübingen 1923.
Abb. 7.4. Reproduktion aus Woermann: Geschichte der Kunst, Band II. Leipzig und Wien 1905.
Abb. 7.6. Reproduktion aus Wolf: A History of Science ... in the XVIII$^{\text{th}}$ Century. London 1952.

INHALTSVERZEICHNIS

00 09 58-3
5,30 DM