# Lösungsheft zum Lehrbuch

# MATHEMATIK

ELFTE UND ZWOLFTE KLASSE

(Erweiterte Oberschule)

*Nur für Lehrer*

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

# Lösungsheft zum Lehrbuch

# MATHEMATIK

ELFTE UND ZWÖLFTE KLASSE

(Erweiterte Oberschule, Bestell-Nr. 00 11 55-2 und 00 12 56-2)

*Nur für Lehrer*

Ausgabe 1963

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1965

An der Ausarbeitung der Lösungen waren K. Dievenkorn, J. Gronitz, H. Junge, W. Leser, Dr. G. Lorenz, Dr. F. Neigenfind, G. Pietsch, Prof. Dr. W. Renneberg und H. Simon beteiligt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer

Redaktionsschluß: 15. Januar 1965

ES 10 C · Bestellnummer 00 21 50–2 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/65 (DN)
6,30 MDN

Gesamtherstellung:
(52) Nationales Druckhaus VOB National, Berlin



## INHALTSVERZEICHNIS

## Vorbemerkung

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Aufgaben der Lehrbücher "MATHEMATIK, Lehrbuch für die elfte Klasse (B-Zweig) der erweiterten Oberschule" (Ausgabe 1963) und "MATHEMATIK, Lehrbuch für die zwölfte Klasse (B-Zweig) der erweiterten Oberschule" (Ausgabe 1963).

Es sind nur Lösungen aufgenommen worden, die rechnerisch zu ermitteln sind. Auf die Angabe von Lösungen, die sich unmittelbar aus dem Text ergeben, wurde verzichtet.

Die Lösungen von Konstruktionsaufgaben sind im Lösungsheft nicht enthalten, da erfahrungsgemäß ihre Angabe dem Lehrer keine wesentliche Erleichterung bei der Durchführung seines Unterrichts bietet.

Bei Textaufgaben wurde aus Platzgründen im allgemeinen auf den Antwortsatz verzichtet. Diese Maßnahme erscheint auch deshalb berechtigt, weil solche Sätze in den meisten Fällen verschieden formuliert werden können. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Aufgabe nur dann als richtig gelöst gelten kann, wenn der Schüler einen entsprechenden Antwortsatz richtig formuliert hat.

Die rechnerischen Lösungen von Schüleraufträgen sind durch einen Kreis gekennzeichnet.

Bei der Lösung der Aufgaben arbeiteten die Rechner mit dem Tafelwerk: "Beyrodt/Küstner: Vierstellige Logarithmen - Zahlen, Werte, Formeln (Best.-Nr. 000934)".

Bei Anwendungsaufgaben ist die Genauigkeit der Ausgangswerte zu berücksichtigen.

Lösungen zum Lehrbuch

Mathematik 11

(001155)

## 1. Schluß von n auf n + 1, binomischer Satz, elementare Folgen und Reihen

### 1.1. Über mathematische Beweisverfahren

1. a) An Hand von Beispielen
   b) Experimentell (evtl. hergeleitet mit Hilfe des Satzes von Cavalieri)
   c) Durch Anwendung des Winkelsummensatzes und des Satzes über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck
   d) Als Spezialfall von $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

2. 1a und 1b induktiv (1b evtl. deduktiv), 1c und 1d deduktiv

3. sämtlich induktiv

1. (a) und (c) richtig, (b) und (d) falsch
   (b) aus (a) induktiv, (c) und (d) aus (b) deduktiv erschlossen

2. a) Aussage ist falsch (Gegenbeispiele $n = 40$ und $n = 41$).
   b) Solche Primzahlen p gibt es nicht ($z_n$ ist für $n = p$ stets teilbar durch p).

3. Schlußweise unzulässig (Aussage nicht umkehrbar).

4. a) (1a) ist wahr, (1b) ist falsch; über (2a) und (2b) kann nichts ausgesagt werden.
   b) Aus (3) kann keine Folgerung gezogen werden; aus (4) folgt "Heinz Müller ist kein Bürger der DDR".

5. Kein schlüssiger Nachweis, da eine Infektion nicht immer zur Erkrankung führen muß.

6. Derartige Vierecke sind keine Rechtecke.

7. a) Beide Schlüsse sind nicht zwingend.

   b) Erstens mußten Versuchspersonen, von denen längere Zeit jede andere mögliche Infektionsquelle ferngehalten wurde, von Moskitos gestochen werden, die vorher bei Gelbfieberkranken Blut gesogen hatten; danach traten Krankheitsfälle auf.

   Zweitens mußten Versuchspersonen vor Moskitostichen geschützt, allen anderen Infektionsquellen aber ausgesetzt werden. Um nachzuweisen, daß das Ausbleiben von Erkrankungen dabei nicht etwa auf Immunität der Versuchspersonen zurückzuführen war (vgl. 5.), mußten danach Infektionen durch Moskitostiche erfolgen und zu Erkrankungen führen.

8. Beide Schlußweisen unzulässig; (I) falsch, (II) wahr.

9. Schlußweise unzulässig, Ergebnis (3) wahr.

10. Dieser Schluß ist nur zulässig, wenn außerdem gezeigt wird, daß jedes Dreieck durch ein kongruentes zu einem Parallelogramm ergänzt werden kann.

11. a) Veranschaulicht (eindeutige Konstruierbarkeit)

    b) Veranschaulicht an Beispielen

    c) Veranschaulicht oder durch Symmetriebetrachtungen bewiesen

    d) Veranschaulicht an Beispielen (evtl. bewiesen in der Trigonometrie)

    e) Experimentell gewonnen

    f) und g) Bewiesen

S. 8 bis 13



12. Beweise möglich: 11b) (mit Hilfe der Trigonometrie, schwierig), 11c), 11d) und Schülerauftrag 1a).

13. Allgemein ist $(10a + b)\,[10(a + 1) - b] = 10a \cdot 10\,(a + 1) + b(10 - b)$.

15. Auf $(a + b)\,c = ac + bc$ wird beiderseits das Kommutativgesetz angewandt:

$$c\,(a + b) = ca + cb.$$

Das ist das linksseitige Distributivgesetz mit anderen Symbolen

16. a) Die Schlußweise ist gerechtfertigt;

    b) Umkehrung.

17. Es gibt zwei Nachweise der Gültigkeit nur für rechtwinklige Dreiecke, indem man zeigt:

    1. Aus der Tatsache, daß die Höhenmitten auf einer Geraden liegen, folgt die Rechtwinkligkeit des Dreiecks. Oder:

    2. Für nicht-rechtwinklige Dreiecke liegen die Höhenmitten nicht auf einer Geraden.

18. a) Nur Veranschaulichung an einem endlichen Kurventeil.

    b) Kein indirekter Beweis, da Verneinung falsch gebildet; Verneinung von "Für alle n gilt $2^n > n$" lautet "Es gibt ein n mit $2^n \leqq n$". Diese Verneinung ist hier nicht zum Widerspruch geführt.

19. Beweisführung muß in umgekehrter Richtung erfolgen. Aus der Tatsache, daß aus einer Behauptung Richtiges folgt, darf nicht auf die Richtigkeit der Behauptung

S. 13 bis 14

geschlossen werden (oder Rückschluß).

20. Beim Beweis wird benutzt, daß die Winkelsumme in allen Dreiecken gleich groß ist, also ein dem Parallelenaxiom gleichwertiger Satz (vgl. Schülerauftrag 9., Lehrbuch S. 11)

13 b) Für 8 Scheiben sind mindestens 255 Umsetzungen nötig.

c) $U(n) = 2^n - 1$

22 $s_n = 2^{n+1} - 1$

23. a) $s_n = \frac{n}{n+1}$ b) $s_n = \frac{n}{2n+1}$ c) $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

d) $s_n = n(n+1)$ e) $s_n = n(2n-1)$

f) $s_n = \frac{n(9n+5)}{2}$ g) $s_n = \frac{5^n - 1}{4}$

24. a) $n \geqq 3$ b) $n \geqq 3$ c) $n \geqq 5$

25. $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$

24 $m \cdot 1 = m$; $m \cdot n' = m \cdot n + m$

28. 22.: a) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ b) $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ c) $\sum_{k=1}^{n} (6k-2)$

d) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

23.: a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

c) $\sum_{k=1}^{n} k$ d) $\sum_{k=1}^{n} 2k$ e) $\sum_{k=1}^{n} (4k-3)$

f) $\sum_{k=1}^{n} (9k-2) = \sum_{k=0}^{n-1} (9k+7)$





g) $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k$

29. a) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 = 420$

b) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 21} = \frac{5}{21}$

c) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)} = \frac{5}{a(a+5)}$

d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{25}{42}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32}$

f) $1 + 8 + 64 + 512 + 4096 = 37449$

Mit $k = 0$ könnte die Summation beginnen bei a) und e); Formeln bei b) und f) sind fehlerhaft; sie müssen lauten: $\frac{n}{4n+1}$ bzw. $\frac{8^{n+1} - 1}{7}$.

31. a) $\frac{6^{n+1} - 1}{5}$; b) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ c) $\frac{n}{3n+1}$

d) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ e) $(n-1)\,2^n$

32. a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2$

34. Die Beweise werden nicht durch vollständige Induktion geführt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \frac{9n+1}{18n+3} = \frac{9n+1}{2(9n+1)+1} = \frac{g}{2g+1} \\ \text{b) } \frac{22n+5}{33n+7} = \frac{2(11n+2)+1}{3(11n+2)+1} = \frac{2g+1}{3g+1} = 1 + \frac{g}{3g+1} \end{array}\right\} \text{ g natürlich}$$

In der 1. Auflage des Lehrbuchs liegt in der Aufgabe b) ein Druckfehler vor. Der Zähler des Bruches muß heißen: $22n + 5$.

35. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

## 1.2. Permutationen

1. 6 Möglichkeiten
2. Auf das gleiche Problem (Permutationen ohne Wiederholung) führen a), c), e), f).

2. 2. a) 24 Möglichkeiten c) 720 Möglichkeiten
   e) 1.2.3. .... .11 = 39 916 800 Möglichkeiten
   f) 1.2.3. .... . 8 = 40 320 Möglichkeiten

4. $22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 1{,}12 \cdot 10^{21}$

8. abecd; 354 261, 354 612, 354 621, 356 124

1. 2664 2. 96 3. a) 120 b) 24 c) 2 4. 21.5.2073
5. 120
6. a) 120 b) 2880 c) $(n - m + 1)!$ bzw. $m!\,(n - m + 1)!$
7. 35126478
8. 521346 und 526431
9. a) c a d b e f b) c a d b f e, c a d e b f, c a d e f b, c a d f b e, c a d f e b
10. 4637215 11. 38. Stelle 12. 52. und 75. Stelle
13. 4065. Stelle
14. a) $(n + 1)!$; 120 b) $n\,(n - 2)!$; 8 c) $n!$; 24
    d) $\frac{1}{(n-2)!}$; $\frac{1}{2}$ e) $n + 1$; 5 f) $n\,(n+1)$; 20
    g) $\frac{1}{n-2}$; $\frac{1}{2}$ h) $n\,(n+1)(n+2)(n+3)$; 840
    i) $n!$; 24 k) $\frac{n+1}{n!}$; $\frac{5}{24}$ l) $\frac{n+2}{(n+1)!}$; $\frac{1}{20}$





m) $\frac{n(n+1)-1}{(n+1)!}$; $\frac{19}{120}$ n) $\frac{1 - n\,(n-1)}{n!}$; $-\frac{11}{24}$

o) $\frac{(n+4)\,n! + (n+1)!}{(n+4)!} = \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$; $\frac{13}{1680}$

p) $\frac{1}{n!}$; $\frac{1}{24}$ q) $\frac{n^3}{(n+1)!}$; $\frac{8}{15}$

15. 12 Nullen

10. $\begin{pmatrix}123456\\342516\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}123456\\342561\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}123456\\342615\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}123456\\342651\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}123456\\345126\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}123456\\345162\end{pmatrix}$

11. a) Änderung um 1 b) Änderung um eine ungerade Zahl

13. 12 Inversionen 14. 28 Inversionen

15. $p_1 \circ p_2 \neq p_2 \circ p_1$; $(p_1 \circ p_2) \circ p_3 = p_1 \circ (p_2 \circ p_3)$
Das Kommutativgesetz gilt nicht; über die Gültigkeit des Assoziativgesetzes kann auf Grund dieses einen Beispiels nichts ausgesagt werden.

16.

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |
| $p_2$ | $p_2$ | $p_1$ | $p_4$ | $p_3$ | $p_6$ | $p_5$ |
| $p_3$ | $p_3$ | $p_5$ | $p_1$ | $p_6$ | $p_2$ | $p_4$ |
| $p_4$ | $p_4$ | $p_6$ | $p_2$ | $p_5$ | $p_1$ | $p_3$ |
| $p_5$ | $p_5$ | $p_3$ | $p_6$ | $p_1$ | $p_4$ | $p_2$ |
| $p_6$ | $p_6$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_1$ |

Wenn $p_i \circ p_k = p_1$ ist, ist auch $p_k \circ p_i = p_1$, so daß geschrieben werden kann $p_i = p_k^{-1}$ oder $p_k = p_i^{-1}$. Es ist $p_1^{-1} = p_1$, $p_2^{-1} = p_2$, $p_3^{-1} = p_3$, $p_4^{-1} = p_5$, $p_5^{-1} = p_4$, $p_6^{-1} = p_6$.

17 Unter Verwendung des Terminus "Gruppe" für Bereiche mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gilt: Die ganzen Zahlen bilden eine Gruppe bezüglich der Addition, desgl. die geraden ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen. Die von 0 verschiedenen rationalen Zahlen bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

| Bereich | Addition | Multiplikation |
|---|---|---|
| Nat. Zahlen (einschl. 0) | (1) und (3) | (1) und (3) |
| Ganze Zahlen | (1),(2),(3)(Gruppe) | (1) und (3) |
| Gerade ganze Zahlen | (1),(2),(3)(Gruppe) | (3) |
| Ungerade ganze Zahlen | Verknüpfung führt über Bereich hinaus | (1) und (3) |
| Rationale Zahlen | (1),(2),(3)(Gruppe) | (1) und (3) |
| Rationale Zahlen $\neq 0$ | (2),(3) | (1),(2),(3) (Gruppe) |

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, gerade; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, gerade

17. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, ungerade;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 9 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, gerade;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, gerade;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, ungerade

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 2 & 5 & 10 & 11 & 7 & 3 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, ungerade;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 11 & 10 & 5 & 6 & 3 & 9 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, gerade





18. $p_1$ bis $p_{24}$ seien die Permutationen in lexikographischer Reihenfolge:

$p_1^{-1} = p_1$; $p_2^{-1} = p_2$; $p_3^{-1} = p_3$; $p_4^{-1} = p_5$; $p_5^{-1} = p_4$;
$p_6^{-1} = p_6$
$p_7^{-1} = p_7$; $p_8^{-1} = p_8$; $p_9^{-1} = p_{13}$; $p_{10}^{-1} = p_{19}$;
$p_{11}^{-1} = p_{14}$; $p_{12}^{-1} = p_{20}$
$p_{13}^{-1} = p_9$; $p_{14}^{-1} = p_{11}$; $p_{15}^{-1} = p_{15}$; $p_{16}^{-1} = p_{21}$;
$p_{17}^{-1} = p_{17}$; $p_{18}^{-1} = p_{23}$
$p_{19}^{-1} = p_{10}$; $p_{20}^{-1} = p_{12}$; $p_{21}^{-1} = p_{16}$; $p_{22}^{-1} = p_{22}$;
$p_{23}^{-1} = p_{18}$; $p_{24}^{-1} = p_{24}$

19. Bei Indizierung nach der lexikographischen Reihenfolge sind gerade Permutationen $p_1$, $p_4$, $p_5$, $p_8$, $p_9$, $p_{12}$, $p_{13}$, $p_{16}$, $p_{17}$, $p_{20}$, $p_{21}$, $p_{24}$

| | $p_1$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ | $p_{20}$ | $p_{21}$ | $p_{24}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_1$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ | $p_{20}$ | $p_{21}$ | $p_{24}$ |
| $p_4$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_1$ | $p_{12}$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ | $p_{13}$ | $p_{24}$ | $p_{20}$ | $p_{21}$ |
| $p_5$ | $p_5$ | $p_1$ | $p_4$ | $p_9$ | $p_{12}$ | $p_8$ | $p_{17}$ | $p_{13}$ | $p_{16}$ | $p_{21}$ | $p_{24}$ | $p_{20}$ |
| $p_8$ | $p_8$ | $p_{13}$ | $p_{20}$ | $p_1$ | $p_{16}$ | $p_{21}$ | $p_4$ | $p_9$ | $p_{24}$ | $p_5$ | $p_{12}$ | $p_{17}$ |
| $p_9$ | $p_9$ | $p_{17}$ | $p_{21}$ | $p_5$ | $p_{13}$ | $p_{24}$ | $p_1$ | $p_{12}$ | $p_{20}$ | $p_4$ | $p_8$ | $p_{16}$ |
| $p_{12}$ | $p_{12}$ | $p_{16}$ | $p_{24}$ | $p_4$ | $p_{17}$ | $p_{20}$ | $p_5$ | $p_8$ | $p_{21}$ | $p_1$ | $p_9$ | $p_{13}$ |
| $p_{13}$ | $p_{13}$ | $p_{20}$ | $p_8$ | $p_{21}$ | $p_1$ | $p_{16}$ | $p_9$ | $p_{24}$ | $p_4$ | $p_{17}$ | $p_5$ | $p_{12}$ |
| $p_{16}$ | $p_{16}$ | $p_{24}$ | $p_{12}$ | $p_{20}$ | $p_4$ | $p_{17}$ | $p_8$ | $p_{21}$ | $p_5$ | $p_{13}$ | $p_1$ | $p_9$ |
| $p_{17}$ | $p_{17}$ | $p_{21}$ | $p_9$ | $p_{24}$ | $p_5$ | $p_{13}$ | $p_{12}$ | $p_{20}$ | $p_1$ | $p_{16}$ | $p_4$ | $p_8$ |
| $p_{20}$ | $p_{20}$ | $p_8$ | $p_{13}$ | $p_{16}$ | $p_{21}$ | $p_1$ | $p_{24}$ | $p_4$ | $p_9$ | $p_{12}$ | $p_{17}$ | $p_5$ |
| $p_{21}$ | $p_{21}$ | $p_9$ | $p_{17}$ | $p_{13}$ | $p_{24}$ | $p_5$ | $p_{20}$ | $p_1$ | $p_{12}$ | $p_8$ | $p_{16}$ | $p_4$ |
| $p_{24}$ | $p_{24}$ | $p_{12}$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ | $p_{20}$ | $p_4$ | $p_{21}$ | $p_5$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{13}$ | $p_1$ |

(1) bis (3) gelten. (Die geraden Permutationen bilden eine Gruppe.)

20. $(p_1 \circ p_2) \circ p_3 = p_1 \circ (p_2 \circ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$(p_2 \circ p_1) \circ p_3 = p_2 \circ (p_1 \circ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$(p_1 \circ p_3) \circ p_2 = p_1 \circ (p_3 \circ p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

$(p_3 \circ p_1) \circ p_2 = p_3 \circ (p_1 \circ p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$(p_2 \circ p_3) \circ p_1 = p_2 \circ (p_3 \circ p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$(p_3 \circ p_2) \circ p_1 = p_3 \circ (p_2 \circ p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

## 1.3. Der binomische Satz

1. $(a+b)^0 = 1$ mit $a \neq -b$; $(a-b)^0 = 1$ mit $a \neq b$

$(a+b)^1 = a+b$ ; $(a-b)^1 = a-b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ; $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;

$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

2. $2457^2 = (2450 + 7)^2 = 2450^2 + 14 \cdot 2450 + 7^2$

Erster und zweiter Summand liefern keinen Beitrag zur letzten Ziffer. Solche Gesetzmäßigkeit gilt immer, auch für 3., 4. und 5. Potenzen.

3. a) Falls ... 386 eine Kubikzahl wäre, käme als Basis nur eine auf 6 endende Zahl in Betracht:

$(10u + 6)^3 = 1000v + 386$ mit natürlichen u,v:

$1000u^3 + 1800u^2 + 1080u + 216 = 1000v + 386$

$100u^3 + 180u^2 + 108u = 100v + 17.$





Das ist für natürliche u,v unmöglich, da die linke Seite gerade, die rechte ungerade wäre.

b) $(10u + 4)^3 = 1000v + 834$

$100u^3 + 120u^2 + 48u = 100v + 77$; Unmöglichkeit folgt wie bei a).

c) $(10u+8)^3 = 1000v+772$; $100u^3+240u^2+192u = 100v+26$

Bei natürlichen u,v wäre die linke Seite durch 4 teilbar; die rechte ließe bei Teilung durch 4 den Rest 2.

d) $(10u + 8)^3 = 1000v + 1242$

$100u^3 + 240u^2 + 192u = 100v + 73$

Unmöglichkeit folgt wie bei a) und b).

4.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

5. c) induktiv gewonnen

1. a) 35 b) 120 c) 30 d) 1 e) 816 f) 66 g) 1
h) 105 i) 70300 k) 184756 l) 116280 m) 70300
n) 2002 o) 184756

2. a) $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$ b) $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ c) - d) $\binom{9}{2} = \binom{9}{7}$
e) $\binom{11}{2} = \binom{11}{9}$ f) $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ g) $\binom{8}{4}$ h) $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$

3. In Zähler und Nenner stehen gleich viel, jeweils aufeinanderfolgende Faktoren; alle Faktoren des Nenners sind zu kürzen, weil sie die kleinsten aufeinanderfolgenden Zahlen (beginnend mit 1) sind.

4. a) $\frac{n^3 - n}{6}$ b) $\frac{a^2 - 3a + 2}{2}$ c) u

d) $\frac{n^2 + n}{2}$ e) $\frac{z^3 - z}{6}$ f) $\frac{k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k}{24}$

5. a) 0 b) 0 c) 0 d) –4 e) 70 f) 28

Definition $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ist bei $n < p$ nicht mehr sinnvoll, ebensowenig die Beziehung $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

6. a) $\binom{6}{4} = 15$ b) $\binom{8}{3} = 56$ c) $\binom{16}{2} = 120$ d) 0

e) 800 f) $\binom{4}{2} = 6$ g) $\binom{11}{4} = 330$ h) $\binom{18}{2} = 153$

i) $\binom{20}{7} = 77520$ k) $\binom{12}{6} = 924$

l) – 56448210 m) $\binom{12}{8} = 495$

n) $\binom{17}{5} = 6188$ o) $\binom{21}{8} = 203490$

p) $\binom{11}{5} = 462$ q) $\binom{15}{5} = 3003$

r) $\binom{17}{7} = 19448$ s) $\binom{30}{8} = 5852925$

t) $\binom{20}{7} = 77520$ u) $\binom{24}{6} = 134596$

7. a) $x_1 = 4$; $x_2 = 5$ b) $x = 5$

c) $x = 7$ d) $x = 5$

e) $x_1 = 3$ f) kein natürliches x als Lösung

g) alle natürlichen x sind Lösungen h) $x_1 = 6$; $x_2 = 13$

i) $x_1 = 3$; $x_2 = 4$

S. 37



8. a) $\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} = 4$ b) $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} = 8$

c) $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 16$ d) $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 32$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

10. a) $\binom{9}{3} = 84$ b) $\binom{17}{4} = 2380$ c) $\binom{21}{7} = 116280$

d) $\binom{12}{6} = 924$

11. a) 5 b) 15 c) 35 d) 28 e) 210 f) 462

g) 220 h) 5005

12. b) $\sum_{\nu=0}^{2} \binom{3+\nu}{\nu} = \binom{6}{4} = 15$

13. b) $\sum_{\nu=0}^{m} \binom{2m+1}{2\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{2m+1}{2\nu+1}$

14. a) $r^7+7r^6s+21r^5s^2+35r^4s^3+35r^3s^4+21r^2s^5+7rs^6+s^7$

b) $4^9+9\cdot4^8m+36\cdot4^7m^2+84\cdot4^6m^3+126\cdot4^5m^4+126\cdot4^4m^5$
$+84\cdot4^3m^6+36\cdot4^2m^7+9\cdot4m^8+m^9$
$=262144+589824m+891864m^2+344064m^3+119024m^4$
$+29756m^5+5376m^6+576m^7+36m^8+m^9$

c) $\frac{16}{81} + \frac{32}{27}g + \frac{8}{3}g^2 + \frac{8}{3}g^3 + g^4$

d) $u^5 + 1{,}5u^4 + 0{,}9u^3 + 0{,}27u^2 + 0{,}0405u + 0{,}00243$

15. $(a - b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}b^p$

stellt im Grunde keine neue Formel dar und gilt auch für negative b.

S. 37 bis 40

16. a) $u_1^8-8u_1^7u_2+28u_1^6u_2^2-56u_1^5u_2^3+70u_1^4u_2^4-56u_1^3u_2^5$
$+28u_1^2u_2^6-8u_1u_2^6+u_2^8$

b) $h^5 - 2h^4 + 1{,}6h^3 - 0{,}64h^2 + 0{,}128h - 0{,}01024$

c) $\frac{46656}{15625} - \frac{46656}{3125}\alpha + \frac{3888}{125}\alpha^2 - \frac{864}{25}\alpha^3 + \frac{108}{5}\alpha^4 - \frac{36}{5}\alpha^5 + \alpha^6$

17. a) $\binom{28}{4} = 20475$; $\binom{28}{6} = 376740$; $\binom{28}{9} = 6906900$

Gleiche Koeffizienten haben das 25., 23. und 20. Glied

b) $\binom{28}{11} = 21\,474\,180$

18. a) $32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$

b) $\frac{1}{64}\left(u^{12}-3u^{10}v+\frac{15}{4}u^8v^2-\frac{5}{2}u^6v^3+\frac{15}{16}u^4v^4-\frac{3}{16}u^2v^5+\frac{1}{64}v^6\right)$

c) $0{,}0001x^4\,(1-12y+54y^2-108y^3+243y^4)$

d) $\frac{s^{14}}{2^7} = \frac{s^{14}}{128}$

e) $4 + 8a\sqrt{2} + 12a^2 + 4a^3\sqrt{2} + a^4$

f) $x^{10} - 5x^8\sqrt{3} + 30x^6 - 30x^4\sqrt{3} + 45x^2 - 9\sqrt{3}$

g) $6768 - 1144\sqrt{35}$

h) $4x^8+8x^6y^2\sqrt{10}+60x^4y^4+20x^2y^6\sqrt{10}+25y^8$

19. a) $\binom{15}{12}\left(\frac{c}{2}\right)^3\left(\frac{b^2}{4}\right)^{12} = \frac{455c^3b^{24}}{2^{27}}$

b) $\binom{21}{16}\frac{9a^5\sqrt{3}}{2^5}(a^2+b^2)^8 = \frac{183141a^5\sqrt{3}}{32}(a^{16}+8a^{14}b^2+$
$+28a^{12}b^4+56a^{10}b^6+70a^8b^8+56a^6b^{10}+28a^4b^{12}+8a^2b^{14}+$
$+b^{16})$

20. a) $n = 2m$: $2\left[x^n+\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{4}x^{n-4}+\ldots+\binom{n}{n-2}x^2+\binom{n}{n}\right]$

$n = 2m+1$: $2\left[x^n+\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{4}x^{n-4}+\ldots+\binom{n}{n-3}x^3+\binom{n}{n-1}x\right]$





$n = 4$: $2\,(x^4+6x^2+1)$ $n = 5$: $2\,(x^5+10x^3+5x)$

b) $2\left[1^n+\binom{n}{2}(2x)^2+\binom{n}{4}(2x)^4+\ldots\right]$

$n = 4$: $2(1+24x^2+16x^4)$ $n = 5$: $2(1+40x^2+80x^4)$

c) $2\left[\binom{n}{1}4a+\binom{n}{3}(4a)^3+\ldots\right]$

$n = 4$: $2(16a+256a^3)$ $n = 5$: $2(20a+640a^3+1024a^5)$

d) $2\left[\binom{n}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}u+\binom{n}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{2}{3}u\right)^3+\ldots\right]$

$n = 4$: $2(9u+\frac{16}{9}u^3)$ $n = 5$: $2(\frac{135}{8}u+\frac{20}{3}u^3+\frac{32}{243}u^5)$

e) $-2\left[\binom{n}{1}g^{n-1}\sqrt{h}+\binom{n}{3}g^{n-3}h\sqrt{h}+\ldots\right]$

$n = 4$: $-2(4g^3\sqrt{h}+4gh\sqrt{h})$ $n = 5$: $-2(5g^4\sqrt{h}+10g^2h\sqrt{h}+h^2\sqrt{h})$

f) $2\left[\sqrt{y^n}+\binom{n}{2}\sqrt{y^{n-2}}\,x+\ldots\right]$

$n = 4$: $2(y^2+6xy+x^2)$ $n = 5$: $2(y^2\sqrt{y}+10xy\sqrt{y}+5x^2\sqrt{y})$

g) $2\left[\binom{n}{1}(\sqrt{1-a^2})^{n-1}+\binom{n}{3}(\sqrt{1-a^2})^{n-3}+\ldots\right]$

$n = 4$: $8\sqrt{1-a^2}(2-a^2)$ $n = 5$: $2(16-20a^2+5a^4)$

h) $-2\left[\binom{n}{1}\sqrt{u^2+v^2}+\binom{n}{3}(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}+\ldots\right]$

$n = 4$: $-8\sqrt{u^2+v^2}(1+u^2+v^2)$ $n = 5$: $-2\sqrt{u^2+v^2}(5+10u^2+$
$+10v^2+u^4+2u^2v^2+v^4)$

i) $m^n-\binom{n}{1}m^{n-2}+\binom{n}{2}m^{n-4}\ \ldots+(-1)^n\binom{n}{n}m^{n-2n}$

$n = 4$: $m^4-4m^2+6-\frac{4}{m^2}+\frac{1}{m^4}$ $n = 5$: $m^5-5m^3+10m-\frac{10}{m}+$
$+\frac{5}{m^3}-\frac{1}{m^5}$

k) $\left(\frac{c}{d}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-2}+\binom{n}{2}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-4}+\ldots+\binom{n}{n}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-2n}$

$n = 4$: $\frac{c^4}{d^4} + 4\frac{c^2}{d^2}+6+4\frac{d^2}{c^2}+\frac{d^4}{c^4}$ $\quad n = 5$: $\frac{c^5}{d^5}+5\frac{c^3}{d^3}+10\frac{c}{d}+10\frac{d}{c} +$

$+ 5\frac{d^3}{c^3} + \frac{d^5}{c^5}$

l) $\sqrt{2^n}-\binom{n}{1}\sqrt{2^{n-2}}+\binom{n}{2}\sqrt{2^{n-4}}\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\sqrt{2^{n-2n}} = \frac{1}{2^n}\sqrt{2^n}$

$n = 4$: $\frac{1}{4}$ $\qquad n = 5$: $\frac{1}{8}\sqrt{2}$

m) $1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$

$n = 4$: $\frac{625}{256}$ $\qquad n = 5$: $\frac{7776}{3125}$

n) $a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n+\binom{n}{1}\left[a^{n-1}+\binom{n-1}{1}a^{n-2}b+\right.$

$\left.+\ldots+b^{n-1}\right]c$

$+\binom{n}{2}\left[a^{n-2}+\binom{n-2}{1}a^{n-3}b+\ldots+b^{n-2}\right]c^2+\ldots+\binom{n}{n-1}(a+b)c^{n-1}+c^n$

$n = 4$: $a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+ab^3+b^3c+ac^3+bc^3)$

$+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+12(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

$n = 5$: $a^5+b^5+c^5+5(a^4b+a^4c+ab^4+b^4c+ac^4+bc^4)$

$+10(a^3b^2+a^3c^2+a^2b^3+b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3)+20(a^3bc+ab^3c+abc^3)$

$+30(a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2)$

o) $(2a)^n+\binom{n}{1}(2a)^{n-1}3b+\ldots+\binom{n}{n-1}2a\cdot(3b)^{n-1}+(3b)^n$

$-\binom{n}{1}\left[(2a)^{n-1}+\binom{n-1}{1}(2a)^{n-2}3b+\ldots+(3b)^{n-1}\right]c +$

$+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(2a+3b)c^{n-1}+(-1)^n c^n$

$n = 4$: $16a^4+81b^4+c^4+4(24a^3b-8a^3c+54ab^3-27b^3c-2ac^3-$

$-3bc^3)+6(36a^2b^2+4a^2c^2+9b^2c^2)-72(2a^2bc+3ab^2c-abc^2)$

$n = 5$: $32a^5+243b^5-c^5+5(48a^4b-16a^4c+162ab^4-81b^4c+$

$+2ac^4+3bc^4) + 10(72a^3b^2+8a^3c^2+108a^2b^3+27b^3c^2-4a^2c^3-$

$-9b^2c^3) - 120(4a^3bc+9ab^3c+abc^3)-180(6a^2b^2c-2a^2bc^2-$

$-3ab^2c^2)$

S. 41



p) $3^n\left[b^n - \binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a^n\right]$

$n = 4$: $3^4(b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4ab^3 + a^4)$

$n = 5$: $3^5(b^5 - 5ab^4 + 10a^2b^3 - 10a^3b^2 + 5a^4b - a^5)$

21. a) 10 b) 5 c) 9 d) 11

22. $m_1 = \frac{1}{7}$; $m_2 = -\frac{1}{7}$ $\qquad$ 23. 126

24. a) 10 b) $\frac{14}{27}$ c) $\frac{15309}{16}$

**Diese Summanden geben nicht die Ordinaten der Schnittpunkte von Bildkurve und y-Achse an; die Funktionen sind für x = 0 gar nicht definiert**

25. **b) zulässig für dem Betrage nach kleine x ( $|x| \ll 1$)**

26. a) 7,594 b) 1,219 c) 0,834 d) 324,293
e) 119,304 f) 1,340 g) 0,815 h) 1,268
i) 0,762 k) 1,116

27. a) $3{,}01\cdot10^3$ b) 405 c) $9{,}09\cdot10^4$

28. $\alpha_{Al} = 2{,}3\cdot10^{-5}$ grd$^{-1}$ $\qquad \Delta V \approx 6{,}3\cdot10^{-7}V_o$
$\alpha_{Stahl} = 1{,}3\cdot10^{-5}$ grd$^{-1}$ $\qquad \Delta V \approx 2{,}0\cdot10^{-7}V_o$
$\alpha_{Cu} = 1{,}6\cdot10^{-5}$ grd$^{-1}$ $\qquad \Delta V \approx 3{,}1\cdot10^{-7}V_o$
$\alpha_{Zn} = 3{,}6\cdot10^{-5}$ grd$^{-1}$ $\qquad \Delta V \approx 1{,}6\cdot10^{-6}V_o$

29. 2,00; 2,25; 2,37; 2,44; 2,49; 2,59; 2,70

30. a) 81,00; 19,45; 13,03; 15,68
b) 3,052; 0,2453; 0,2372

S. 41

## 1.4. Elementare Folgen und Reihen

**1.** a) ...; 5; 6; 7; 8; 9  b) ...; 5; 9; 13; 17; 21

c) ...; 26; 37; 50; 65; 82

d) ...; $\frac{5}{6}$; $-\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$; $-\frac{8}{9}$; $\frac{9}{10}$

e) ...; $\frac{17}{23}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{14}{26}$; $\frac{13}{27}$

f) ...; 0,999; 1,0001; 0,9999; 1,00001; 0,99999.

g) ...; $-\frac{25}{216}$; $-\frac{36}{343}$; $-\frac{49}{512}$; $-\frac{64}{729}$; $-\frac{81}{1000}$

h) ...; $\frac{10}{3}$; $\frac{41}{13}$; 3; $\frac{43}{15}$; $\frac{11}{4}$

i) ...; $4\sqrt{2}$; 8; $8\sqrt{2}$; 16; $16\sqrt{2}$

k) ...; 34; -55; 89; - 144; 233

**2.**

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| l) | -17 | -23 | -29 | -35 | -41 | -47 | -53 | -59 | -65 | -71 |
| m) | $\frac{2}{1}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{12}{11}$ | $\frac{14}{13}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{18}{17}$ | $\frac{20}{19}$ |
| n) | 9 | 6 | 4 | $\frac{8}{3}$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{32}{27}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{256}{729}$ | $\frac{512}{2187}$ |
| o) | 5 | $\frac{9}{2}$ | 4 | $\frac{7}{2}$ | 3 | $\frac{5}{2}$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| p) | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{120}$ | $-\frac{1}{120}$ | $\frac{1}{7!}$ | $-\frac{1}{8!}$ | $\frac{1}{9!}$ | $-\frac{1}{10!}$ |
| q) | 80 | 40 | 20 | 10 | 5 | 2,5 | 1,25 | 0,625 | 0,3125 | 0,15625 |
| r) | 0 | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{8}{10}$ | $-\frac{15}{17}$ | $\frac{24}{26}$ | $-\frac{35}{37}$ | $\frac{48}{50}$ | $-\frac{63}{65}$ | $\frac{80}{82}$ | $-\frac{99}{101}$ |
| s) | 0 | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | 91 | 140 | 204 | 285 |
| t) | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{6}{27}$ | $\frac{24}{81}$ | $-\frac{120}{243}$ | $\frac{720}{729}$ | $-\frac{5040}{2187}$ | $\frac{8!}{3^8}$ | $-\frac{9!}{3^9}$ | $\frac{10!}{3^{10}}$ |
| u) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{8}{13}$ | $\frac{21}{34}$ | $\frac{55}{89}$ | $\frac{144}{233}$ | $\frac{377}{610}$ | $\frac{987}{1597}$ | $\frac{2584}{4181}$ | $\frac{6765}{10946}$ |

**4.** -8; 0; 8; 16; 24; 32

2; 4; 8; 16; 32; 64





**9.** (1) $a_k = -2(k-1)$  (2) $a_k = 4 + 3(k-1)$

(4) $a_k = \frac{1}{k}$  (5) $a_k = 2^{k-1}$

(8) $a_k = \frac{k-1}{k}$  (9) $a_k = (-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)^2}{k!}$

**10.** $\{a_k\}$ mit $a_k = (-1)^{k-1}\,\frac{k}{k+1}$ und $k = 1; 2; 3; 4$

$\{a_k\}$ mit $a_k = (-1)^{k}\,\frac{k}{k+1}$ und $k = 1; 2; 3; 4$

**11.** 1; -4; 9; -16; 25; - 36

**12.** a) $a_k = (-1)^{k-1}\,\frac{1}{k!}$

b) Für Schüler ist die Darstellung kaum auffindbar:

$\{a_k\}$ mit $a_k = (-1)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k+1-\nu}{\nu}$ und $k = 1,\ldots,11$,

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, bedeutet, also z.B. $[5] = 5$, $\left[\frac{7}{2}\right] = 3$.

**13.** (1) $a_1 = 0$; $a_k = a_{k-1} - 2$; $k > 1$.

(2) $a_1 = 4$; $a_k = a_{k-1} + 3$; $1 < k \leqq 10$.

(5) $a_1 = 1$; $a_k = 2 \cdot a_{k-1}$; $k > 1$.

(7) $a_1 = -3$; $a_k = -a_{k-1} + (-1)^k \cdot 3$; $k > 1$.

1. a) -1; 1; $\frac{5}{3}$; 2; $\frac{11}{5}$; monoton wachsend;

rekursiv: $a_1 = -1$; $a_k = a_{k-1} + \frac{4}{k(k-1)}$; $k > 1$.

b) -6; $-\frac{7}{2}$; $-\frac{8}{3}$; $-\frac{9}{4}$; $-\frac{10}{5}$; monoton wachsend;

rekursiv: $a_1 = -6$; $a_k = a_{k-1} + \frac{5}{k(k-1)}$; $k > 1$.

c) -2; $\frac{1}{4}$; 0; $-\frac{1}{16}$; $\frac{2}{25}$; alternierend für $k > 3$;

rekursiv: $a_1 = -2$; $a_k = -a_{k-1} + (-1)^k\,\frac{k^2-7k+3}{k^2(k-1)^2}$; $k > 1$.

d) $1;\ \frac{8}{2};\ \frac{27}{6};\ \frac{64}{24};\ \frac{125}{120}$; monoton fallend für $k > 2$;

rekursiv: $a_1 = 1;\ a_k = a_{k-1} - \frac{k^3-4k^2+3k-1}{(k-1)!};\ k > 1.$

2. a) $2;\ \frac{7}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{9}{3};\ \frac{10}{3}$; monoton wachsend

independent: $\left\{\frac{5+k}{3}\right\}$.

b) $\frac{3}{2};\ 2;\ \frac{8}{3};\ \frac{32}{9};\ \frac{128}{27}$; monoton wachsend

independent: $\left\{2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-2}\right\}$.

c) $0;\ -1;\ -1;\ -2;\ -3$; monoton fallend (im engeren Sinn für $k > 2$)

independente Darstellung für $k > 1$:

$$\left\{- \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1-\nu}{\nu}\right\}$$

(vgl. Schülerauftrag 12.b), Lehrbuch S. 46).

d) $1;\ -3;\ -11;\ -27;\ -59$; monoton fallend;

independent: $\left\{1 - \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu}\right\}$ für $k > 1$.

e) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ -7$; monoton fallend

independent: $\left\{-2k + 3\right\}$ für $k > 1$.

f) $0;\ -\frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ 0$; monoton (im weiteren Sinn) für $k > 2$;

independent: $\left\{0\right\}$ für $k > 2$.

g) $2;\ 9;\ -5;\ 5;\ 12$

independente Darstellung:

$$\left\{a_k\right\} \text{ mit } \left.\begin{aligned} a_k &= -1 + 3\nu \text{ für } k = 3\nu - 2 \\ a_k &= \phantom{-}6 + 3\nu \text{ für } k = 3\nu - 1 \\ a_k &= -8 + 3\nu \text{ für } k = 3\nu \end{aligned}\right\} \nu \text{ natürlich.}$$

S. 47



3. a) $\left\{\frac{(k-1)4}{2k-3}\right\}$ | $a_1 = 0;\ a_k = a_{k-1} - \frac{4}{(2k-3)(2k-5)};\ k > 1$

b) $\left\{\frac{k}{2^{k-1}}\right\}$ | $a_1 = 1;\ a_k = a_{k-1} - \frac{k-2}{2^{k-1}};\ k > 1$

c) $\left\{k(k+1)\right\}$ | $a_1 = 2;\ a_k = a_{k-1} + 2k;\ k > 1$

d) $\left\{\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right\}$ | $a_1 = \frac{3}{8};\ a_k = a_{k-1} + \frac{2k^2+4k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)};\ k > 1$

4. a), b) und d)

4. 5050

5. Das erste Verfahren ist nur bei gerader Anzahl von Gliedern anwendbar.

7. a) Arithmetische Folge zweiter Ordnung

b) Arithmetische Folge dritter Ordnung

5. a) $5;\ 6{,}5;\ 8;\ 9{,}5$ $\quad a_{10} = 15{,}5;\ a_{13} = 20;\ s_{10} = 87{,}5;$

$s_{13} = 143$

b) $-5;\ -7;\ -9;\ -11$ $\quad a_{10} = -19;\ a_{13} = -25;\ s_{10} = -100;$

$s_{13} = -169$

c) $7;\ 4{,}5;\ 2;\ -0{,}5$ $\quad a_{10} = -10{,}5;\ a_{13} = -18;\ s_{10} = 7{,}5;$

$s_{13} = -39$

d) $0;\ -7{,}5;\ -15;\ -22{,}5$ $\quad a_{10} = -52{,}5;\ a_{13} = -75;$

$s_{10} = -187{,}5;\ s_{13} = -390$

e) $11;\ 18;\ 25;\ 32$ $\quad a_{10} = 60;\ a_{13} = 81;\ s_{10} = 285;$

$s_{13} = 507$

f) $1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}5;\ 1{,}7$ $\quad a_{10} = 2{,}5;\ a_{13} = 3{,}1;\ s_{10} = 16;$

$s_{13} = 24{,}7$

6. a) $8{,}5;\ 7;\ 5{,}5;\ 4;\ 2{,}5;\ 1$ $\quad a_{15} = -12{,}5 \quad a_{27} = -30{,}5$

$s_{15} = -30 \quad s_{27} = -297$

S. 47 bis 50

b) -10,5; -1,5; 7,5; 16,5; 25,5; 34,5

$a_{15} = 115{,}5$ $\quad a_{27} = 223{,}5$

$s_{15} = 787{,}5$ $\quad s_{27} = 2875{,}5$

c) 25,01; 25,00; 24,99; 24,98; 24,97; 24,96

$a_{15} = 24{,}87$ $\quad a_{27} = 24{,}75$

$s_{15} = 374{,}1$ $\quad s_{27} = 671{,}76$

d) -72; -60; -48; -36; -24; -12

$a_{15} = 96$ $\quad a_{27} = 240$

$s_{15} = 180$ $\quad s_{27} = 2268$

e) 49; 37; 25; 13; 1; -11

$a_{15} = -119$ $\quad a_{27} = -263$

$s_{15} = -525$ $\quad s_{27} = -2889$

f) -44,8; -36,2; -27,6; -19; -10,4; -1,8

$a_{15} = 75{,}6$ $\quad a_{27} = 178{,}8$

$s_{15} = 231$ $\quad s_{27} = 1809$

7. 71079

8. a) $a_{50} = 10{,}6$ $\quad s_{50} = 285$ $\quad$ b) $n = 13$ $\quad s_{13} = 351$

c) $a_1 = 16$ $\quad s_{21} = 483$ $\quad$ d) $a_1 = 61$ $\quad n = 23$

e) $d = -0{,}5$ $\quad n = 37$ $\quad$ f) $n = 43$ $\quad a_{43} = 16$

g) $d = \frac{3}{7}$ $\quad a = 18$ $\quad$ h) $a_1 = -1$ $\quad d = 0{,}1$

9. a) nein

b) 10; nein, z.B. nicht bei $a_1$; $d$; $a_n$ (Aufgabe 8b).

10. 5,25; 6,5; 7,75; 9; 10,25; 11,5; 12,75; 14; 15,25; 16,5; 17,75; 19; 20,25; 21,5; 22,75

11. 226,1





12. 1; 4; 7; 10; 13; 16

13. b) 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55

14. a) und b) sind zu bejahen

15. a) 6; 30; 90; 210; 420; 756; 1260

24; 60; 120; 210; 336; 504

36; 60; 90; 126; 168

24; 30; 36; 42

6; 6; 6

1. Beispiel 5

2. Jedes Glied (außer Anfangs- und Endglied) ist geometrisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder

$a_k = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$

3. $a_{k+1} = a_k \cdot q$

4. Bei geometrischen Folgen sind Rechenoperationen um eine Stufe erhöht.

8. a) und f) monoton wachsend; b) und e) monoton fallend;

c), d), g), h) alternierend

16. a) $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$; $\frac{81}{16}$; $\frac{243}{32}$; $a_{12} = \frac{59049}{1024}$

b) 0,512; -0,4096; 0,32768; -0,262144;

$a_{12} = 0{,}8^{11} = 2^{33} \cdot 10^{-11}$

c) 9; $9\sqrt{3}$; 27; $27\sqrt{3}$

$a_{12} = 729$

d) $16ab^3$; $32ab^4$; $64ab^5$; $128ab^6$;

$a_{12} = 4096ab^{11}$

1000 wird überschritten in a) (k = 19) und c) (k = 13).

17. a) $-3; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; -\frac{3}{16}$

b) 2; -0,6; 0,18; -0,054; 0,0162

c) 0,7; 1,4; 2,8; 5,6; 11,2   $a_9 > 100$; $s_{10} > 500$

d) $\frac{112}{81}; \frac{56}{27}; \frac{28}{9}; \frac{14}{3}; 7$   $a_{12} > 100$; $s_{13} > 500$

e) -2; 2; -2; 2; -2

f) 2500; 1000; 400; 160; 64;

g) $-1024; 64; -4; \frac{1}{4}; -\frac{1}{64}$

h) $\frac{9,1^3}{2,6^2}; \frac{9,1^2}{2,6}; 9,1; 2,6; \frac{2,6^2}{9,1}$

monoton wachsend: a), c), d)   monoton fallend: f), h)

alternierend: b), e), g)

18. a) $a_4 = \frac{125}{32}$; $s_4 = \frac{369}{12}$   b) $q = \pm\sqrt{2}$   $s_5 = 3(7\pm3\sqrt{2})$

c) $a_1 = 3$ ; $s_7 = \frac{463}{243}$   d) $q = 2$   $a_6 = 192$

e) $a_1 = 15$ ; $a_4 = 1875$   f) $q = \sqrt{3}$   $n = 9$

g) $n = 8$ ; $a_8 = 4374$

19. a) nein   b) nein, z.B. nicht bei $a_1$, q, $a_n$

c) um hohe Exponenten (besonders, wenn sie zu bestimmen sind) zu vermeiden

20. a) 7   b) 9   c) 8

21. a) 7   b) 0   c) 11111   d) 1,1111   e) 1,42753

f) 1,136128   g) $\frac{a^6-b^6}{b^5(a-b)}$   h) $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

22. Für jede Basis gilt: Bilden die Numeri eine geometrische Folge, so bilden die zugehörigen Logarithmen eine arithmetische Folge.

S. 53 bis 54



1. Z.B. bei $f(x) = x^n$ mit $n < 0$ und ganz, $a^x$, $\log_a x$, tan x, cot x.

2. y = 0 bzw. y = 1 ist Asymptote.

3. S ist untere Schranke, wenn $S < a_n$ für alle n.

Alle derartigen K sind obere Schranken für $\{a_n\}$.

4. Nach oben beschränkt: 1., 4., 6., 8., 9.

Nach unten beschränkt: 2., 3., 4., 5., 6., 8., 9.

5. $d > 0$ ($d < 0$) nach unten (oben) beschränkt.

$q > 1$ ($q < -1$) nach unten (oben) beschränkt.

$d = 0$, $|q| = 1$ und $|q| < 1$ nach unten und oben beschränkt.

6. a) $a_{21} = \frac{1}{21}$ bzw. $a_{21} = -\frac{1}{21}$

b) $a_{101} = \frac{1}{101}$ bzw. $a_{101} = -\frac{1}{101}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $a_5 = \frac{1}{25}$; $a_{11} = \frac{1}{121}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; $a_{20} = \frac{20}{21}$; $a_{100} = \frac{100}{101}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{n+1}{n}) = 2$; $a_{21} = \frac{43}{21}$; $a_{101} = \frac{203}{101}$

8. Zwei "Häufungspunkte" (+1 und -1)

10. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ für 2., 3., 5.,   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ für (1),

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ für 4., 6., 9.   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ für (8)

11. a) 2; 6; 12; 20; 30; 42

b) 1; $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{11}{6} \approx 1{,}8333$; $\frac{25}{12} \approx 1{,}0833$; $\frac{137}{60} \approx 2{,}2833$;

$\frac{147}{60} \approx 2{,}45$

S. 54 bis 59

c) 1; 1,3333; 1,4762; 1,5531; 1,6007; 1,6330

12. a) nur für $a_1 = 0$ und $d = 0$

b) nur, wenn die Glieder alle Null sind

c) nein d) nein

23.

| | | g) | h) |
|---|---|---|---|
| a) | $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ | monoton wachsend, beiderseits beschränkt | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ |
| b) | $\{a_n\} = \left\{\frac{2(n-1)}{2n-1}\right\}$ | " " | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ |
| c) | $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n-1}\ \frac{n+3}{n}\right\}$ | alternierend, beiderseits beschränkt | – |
| d) | $\{a_n\} = \left\{\frac{3(n-1)}{n}\right\}$ | monoton wachsend, beiderseits beschränkt | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ |
| e) | $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$ | " " | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ |
| f) | $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$ | monoton fallend, beiderseits beschränkt | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ |

24. a) $3;\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{16};\ \frac{3}{25};\ \frac{1}{12};\ \frac{3}{49};\ \frac{3}{64};\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0;$

z.B. $\varepsilon = 0{,}04$

b) $3;\ 2;\ \frac{5}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{4}{3};\ \frac{9}{7};\ \frac{5}{4};\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1;$ z.B. $\varepsilon = 0{,}24$

c) $2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

d) $-\frac{5}{3};\ -\frac{5}{4};\ -\frac{17}{15};\ -\frac{13}{12};\ -\frac{37}{35};\ -\frac{25}{24};\ -\frac{65}{63};\ -\frac{41}{40};$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{1-n^2} = -1;$ z.B. $\varepsilon = 0{,}021$

e) $2;\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{11}{4};\ \frac{14}{5};\ \frac{17}{6};\ \frac{20}{7};\ \frac{23}{8};\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n} = 3;$

z.B. $\varepsilon = 0{,}12$





25. (Beispiele)

a) $\left\{\frac{5n+1}{n}\right\};\ \left\{\frac{5n-1}{n}\right\};\ \left\{\frac{5n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\frac{38n}{2n}\right\};\ \left\{\frac{38n}{2n+1}\right\};\ \left\{\frac{38n-1}{2n}\right\}$

c) $\left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\};\ \left\{\frac{n+1}{2n}\right\};\ \left\{\frac{1-n^3}{2-2n^3}\right\}$

d) $\left\{\frac{n+2}{2-n}\right\};\ \left\{1 - \frac{2n}{n+1}\right\};\ \left\{-1 + \frac{1}{n}\right\}$

e) $\left\{\frac{3n+7}{10n}\right\};\ \left\{\frac{1-0{,}3n^2}{2-n^2}\right\};\ \left\{\frac{3n^2-100}{10n^2}\right\}$

f) $\left\{\frac{7n-8}{2(1-n)}\right\};\ \left\{\frac{1-7n}{2n}\right\};\ \left\{\frac{7n^5+4}{3-2n^5}\right\}$

g) $\left\{\frac{n}{3n-5}\right\};\ \left\{\frac{1-2n}{70-6n}\right\};\ \left\{\frac{n^3-n}{3n^3+n^2-10}\right\}$

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2} = 0;$ e) $n = 201$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{n-1} = -2;$ e) $n = 102$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n-2} = 1;$ e) $n = 503$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n} - 2\right) = 1;$ e) $n = 201$

f) Folge b)

27. a) 0,5; 1; 1,375; 1,625; 1,781; 1,875; 1,930; 1,961; 1,979; 1,988

$\{a_n\}$ monoton fallend, beiderseits beschränkt;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{s_n\}$ monoton wachsend, " " ;

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2;$ $n = 14$

b) 1; 1,5; 1,$\overline{6}$; 1,708$\overline{3}$; 1,71$\overline{6}$; 1,7180$\overline{5}$; 1,7182540;
1,7182788; 1,7182815; 1,7182818

$\{a_n\}$ monoton fallend, beiderseits beschränkt,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{s_n\}$ monoton wachsend, " " ,

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1{,}71828 \ldots$

$n = 6$ [genauer Wert e − 1]

c) 1; 1,$\overline{3}$; 1,$\overline{4}$; 1,48148; 1,49383; 1,49794; 1,49931;
1,49977; 1,49992; 1,49997

$\{a_n\}$ monoton fallend, beiderseits beschränkt,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{s_n\}$ monoton wachsend,

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1{,}5$; $n = 7$

d) 1; 0,$\overline{6}$; 0,8$\overline{6}$; 0,7238; 0,8349; 0,7440; 0,8209;
0,7543; 0,8131; 0,7604

$\{a_n\}$ alternierend, beiderseits beschränkt,

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\{s_n\}$ beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ mit
$0{,}76 < s < 0{,}81$

e) 1; 0,$\overline{3}$; 0,9$\overline{3}$; 0,3619; 0,9175; 0,3720; 0,9105;
0,3771; 0,9065; 0,3802





$\{a_n\}$ alternierend, beiderseits beschränkt,

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \frac{1}{2}$

$\{s_n\}$ beiderseits beschränkt, nicht konvergent

28. a) 1; 3; 5,5; 8,$\overline{3}$; 11,417; 14,700; 18,150; 21,743;
25,461; 29,290

$\{a_n\}$ monoton wachsend; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\{s_n\}$ " " ; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

b) 5; 10; 12,5; 13,$\overline{3}$; 13,541$\overline{6}$; 13,58$\overline{3}$; 13,59027;
13,59126; 13,59138; 13,59139

$\{a_n\}$ monoton fallend, beiderseits beschränkt;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{s_n\}$ monoton wachsend, " " ;

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 13{,}591 \ldots$

(genauer Wert 5e) $n = 8$

c) 2; 2,5; 3,5; 4; 4,5; 4,75; 4,875; 4,90625; 4,91016;
4,91027

$\{a_n\}$ monoton fallend, beiderseits beschränkt;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\{s_n\}$ monoton wachsend, " " ;

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 4{,}910 \ldots$

$n = 9$

d) 1; 3; 3,5; 11,5; 11,53; 2035,53; 2035,53;
$2^{43} \approx 8{,}5 \cdot 10^{12}$; $8{,}5 \cdot 10^{12}$; $2^{171}$

$\{a_n\}$ nach unten beschränkt; $\{s_n\}$ monoton wachsend;

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

29. a) $s_n = \frac{n}{2n+1}$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$

b) $s_n = n(n+1)$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

c) $s_n = \frac{n}{4n+1}$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$

30. Es ist unzulässig, mit beliebigen unendlichen Reihen wie mit endlichen Summen zu arbeiten.

15. $\frac{1023}{1024}$ 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\cdot(\frac{1}{3})^n = \frac{3}{2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{4})^n = \infty$

20. a) $s_8 = \frac{255}{16} = 15{,}9375$ $(s = 16)$

b) $s_3 = 3{,}12$ $(s = \frac{10}{3} = 3{,}\overline{3})$

21. a) $r = a\cdot q$; $u = a\cdot q$; $v = a\cdot q^2$; $w = a\cdot q^3$

b) a) $Z \approx 3{,}42$ bei $n = 5$, bzw. $3{,}81$ bei $n = 6$

b) $Z \approx 10{,}8$ bei $n = 5$, bzw. $16{,}1$ bei $n = 6$

23. $0{,}\overline{3} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$ ; $2{,}\overline{56} = 2 + \frac{\frac{56}{100}}{\frac{99}{100}} = 2\,\frac{56}{99}$

31. a) $3$ b) $1{,}6$ c) $\frac{6}{7}$ d) $4\,\frac{7}{9}$ e) $-10$

f) $-2\,\frac{4}{13}$ g) $3{,}5$ h) $16$ i) $-2$ k) $-\frac{17}{30}$

l) $2+\sqrt{2}$ m) $\frac{2}{3}$ n) $\frac{1}{3}$ o) $\frac{59}{110}$ p) $-\frac{1}{27}$

q) $-\frac{1}{4}$

r) Für $q = \frac{126}{56}$ ist zwar $s = \frac{a}{1-q}$, jedoch gibt es keine geometrische Reihe mit diesen a und q und der Summe s.





s) $\frac{1}{27} = 0{,}\overline{037}$ ; $\frac{7}{16} = 0{,}4375$; $\frac{8}{27} = 0{,}\overline{296}$

32. a) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$

e) $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

g) $-0{,}4 < x < 0{,}4$ h) $-14 < x < 14$

33. (Beispiele)

a) $a = 1$; $q = \frac{1}{2}$ b) $a = 4{,}5$; $q = 0{,}1$

$a = 3$; $q = -\frac{1}{2}$ $a = 0{,}5$; $q = 0{,}9$

c) $a = -6$; $q = -\frac{1}{5}$ d) $a = 16$ ; $q = \frac{1}{17}$

$a = -3\frac{1}{3}$; $q = \frac{1}{3}$ $a = 18$ ; $q = -\frac{1}{17}$

e) $a = \frac{7}{16}$ ; $q = \frac{1}{8}$

$a = 0{,}9$; $q = -0{,}8$

34. a) $0{,}444444$; $0{,}\overline{4} = \frac{4}{9}$ b) $0{,}010101010101$; $0{,}\overline{01} = \frac{1}{99}$

c) $0{,}272727272727$; $0{,}\overline{27} = \frac{3}{11}$

d) $0{,}070707070707$; $0{,}\overline{07} = \frac{7}{99}$

e) $0{,}515515515515515515$; $0{,}\overline{515} = \frac{515}{999}$

f) $0{,}091091091091091091$; $0{,}\overline{091} = \frac{91}{999}$

35. a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{2}{11}$; c) $\frac{4}{99}$; d) $\frac{2}{45}$; e) $\frac{139}{999}$;

f) $\frac{1193}{3333}$; g) $\frac{1}{7}$; h) $\frac{6}{7}$; i) $\frac{124}{33}$; k) $\frac{409}{990}$

l) $\frac{529}{75}$; m) $\frac{6061}{333}$; n) $\frac{15689}{330}$

1. a) 156 b) 396

2. $G_1$: 8d $G_2$: 9d $G_3$: nie

3. a) $\approx 79^\circ$ b) ca. 3000 m c) ca. 1200 m

4. a) 32 767 As b) $\frac{100000}{2^{19}}\,p = \frac{100000}{524288}\,p \approx 0{,}19\,p$

5. etwa 326 Lagen, Durchmesser etwa 28 cm

6. $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ sind geometrische Folgen mit
$a_1 = 1189$ mm, $b_1 = 841$ mm und $q = \sqrt{2}$

7. Strecken bilden geometrische Folge; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}$

8. 55 mm; 330 mm

9. b) $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$
c) $\overline{S_1B} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{S_{k+1}S_k} = a$. Bei stetiger Teilung der jeweils kleineren Abschnitte strebt deren Summe gegen $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \overline{AS_1}$.

10. a) 1600 DM b) ca. 1920 DM

12. a)

| Zeit (in s) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Weg (in m) | 5 | 20 | 45 | 80 | 125 | 180 | 245 | 320 | 405 | 500 |
| Geschwind. (in $ms^{-1}$) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Geschwindigkeiten bilden arithmetische Folge (1. Ordnung), Wege eine arithmetische Folge 2. Ordnung

b)

| | Zeit (in s) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nach oben: | Weg (in m) | 20 | 50 | 90 | 140 | 200 | 270 | 350 | 440 | 540 | 650 |
| | Geschw. (in $ms^{-1}$) | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 |
| nach unten: | Weg (in m) | -10 | -10 | 0 | 20 | 50 | 90 | 140 | 200 | 270 | 350 |
| | Geschw. (in $ms^{-1}$) | -5 | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 |

Charakter der Folgen bleibt erhalten





13. a) 1,018 $m^3$; 1,036 $m^3$; ... ; 1,183 $m^3$ b) ca. $29^\circ$

14. a) $p_1 = 938$ mb; $p_2 = 879$ mb; $p_3 = 824$ mb; $p_4 = 773$ mb;
$p_5 = 724$ mb; $p_6 = 679$ mb; $p_7 = 637$ mb; $p_8 = 597$ mb;
$p_9 = 560$ mb; $p_{10} = 525$ mb
b) ca. 40 mb
c) nach 320 Umdrehungen, d.h. nach 6,4 min

15. $s = 205$ m; $v_1 = 0{,}410\ ms^{-1}$; $v_2 = 0{,}257\ ms^{-1}$; Wiedergabequalität wird nach innen zu schlechter.

16. a) nach 6 Aufschwemmungen b) $1{,}6 \cdot 10^6$ Bakterien

17. $4{,}29 \cdot 10^7$ DM

18. Erfolgt die Teilung ohne Murads Kamel, so ergibt sich $39\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) = 39 \cdot \frac{39}{40}$; es bleibt also ein "Kamelrestbestand" von $39 \cdot \frac{1}{40}$. Wird dieser abermals den Testamentsbestimmungen entsprechend geteilt, so bleibt ein Rest von $\frac{39}{1600}$, der wiederum geteilt werden muß usw. Der Anteil jedes Sohnes ergibt sich dann als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe, z.B. für den ältesten Sohn $\frac{39}{2}\left(1 + \frac{1}{40} + \left(\frac{1}{40}\right)^2 + \ldots\right) = 20$. Die Anteile sind die gleichen wie bei der Teilung mit "Hilfskamel".

19. $U = \frac{7\pi\sqrt{3}}{9} \cdot a \approx \frac{22\sqrt{3}}{9} \cdot a$ $A = \frac{37\pi}{324} \cdot a^2$
Summe der Umfänge strebt gegen $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6} \cdot a$
" " Flächen " " $\frac{11\pi}{96} \cdot a^2$

20. $u_1 = 3a$; $u_2 = 4a$; $u_3 = \frac{16}{3}a$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$
$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$; $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a^2$; $A_3 = \frac{10\sqrt{3}}{27} \cdot a^2$;
$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot a^2$

## 2. Differentialrechnung

### 2.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen und von Funktionen

1. a) 0 ; b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 1 ; f) 1 ;
   g) 3 ; h) 3 .

2. Nullfolge a : $\frac{3}{1}$; $\frac{3}{2}$; ... ; $\frac{3}{98}$; $\frac{3}{99}$

   Nullfolge b: $\frac{10^5}{2}$ ; $\frac{10^5}{4}$ ; ... ; $\frac{10^5}{3\,333\,330}$ ; $\frac{10^5}{3\,333\,332}$

   Nullfolge c : $\frac{4}{4}$ ; $\frac{4}{5}$ ; ... ; $\frac{4}{132}$ ; $\frac{4}{133}$

   Nullfolge d : $\frac{-5}{2}$ ; $\frac{-5}{5}$ ; $\frac{-5}{8}$ ; ... ; $\frac{-5}{161}$ ; $\frac{-5}{164}$,
   hier sind alle Glieder kleiner als 0,03.

3. Folge e : $\frac{2}{1}$ ; $\frac{3}{2}$ ; ... ; $\frac{20}{19}$ ; $\frac{21}{20}$

   Folge f : $\frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{3}$ ; ... ; $\frac{18}{19}$ ; $\frac{19}{20}$

   Folge g : $\frac{-2}{1}$ ; $\frac{1}{2}$; ... ; $\frac{292}{99}$; $\frac{295}{100}$

   Folge h : $\frac{7}{7}$ ; $\frac{16}{10}$; ... ; $\frac{817}{277}$; $\frac{826}{280}$ .

4. a) 0 ; b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 0 ; f) 0 ;
   g) 0 ; h) 0 ; i) $\frac{5}{4}$ ; k) $\frac{5}{4}$ ; l) $\frac{5}{6}$ ; m) $\infty$;
   n) 0 .

5.

| | Das zehnte Glied lautet: | Die Bedingung ist erfüllt: |
|---|---|---|
| a) | $\frac{3}{100}$ | nein |
| b) | $\frac{3}{200}$ | nein |
| c) | $\frac{5}{101}$ | nein |
| d) | $\frac{7}{304}$ | nein |
| e) | $\frac{40}{100}$ | nein |
| f) | $\frac{32}{100}$ | nein |
| g) | $\frac{42}{300}$ | nein |
| h) | $\frac{61}{199}$ | nein |

S. 79



| | Das zehnte Glied lautet: | Die Bedingung ist erfüllt: |
|---|---|---|
| i) | $\frac{501}{400}$ | nein |
| k) | $\frac{529}{400}$ | nein |
| l) | $\frac{474}{613}$ | nein |
| m) | $\frac{99}{11}$ | nein |
| n) | $\frac{11}{99}$ | nein |

6. a) $\infty$ ; b) $\infty$ ; c) $\infty$ ; d) 1 ; e) 0 .

7. 0.

8. $-\frac{1}{2}$ .

9. a) 0 ; b) $\frac{4}{3}$ ; c) $\frac{1}{3}$

10. a) $\alpha$) $\infty$ ; $\beta$) 0 ; $\gamma$) $\infty$
    b) $\alpha$) $\infty$ ; $\beta$) $\pm\infty$
    c) $\alpha$) $\infty$ ; $\beta$) $\infty$

11. Ist $\lim\limits_{x \to x_g} f_1(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x \to x_g} f_2(x) = g_2$, so gilt:

    1. $\lim\limits_{x \to x_g} \left[f_1(x) + f_2(x)\right] = g_1 + g_2$ ;
    2. $\lim\limits_{x \to x_g} \left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = g_1 \cdot g_2$ ;
    3. $\lim\limits_{x \to x_g} \left[f_1(x) : f_2(x)\right] = g_1 : g_2$, wobei $g_2 \neq 0$ sein muß.

12. a) 32 ; b) $-10$ ; c) $2\sqrt{a}$

13. $a_1$) $g(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$ ; $g(2) = -2$

    $a_2$) $g(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ ; $g(4) = 2$

S. 79 bis 80

$b_1)$ $g(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$ ; $g(-3) = 1$

$b_2)$ $g(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x + 4}$ ; $g(-4) = -1$

$c_1)$ $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 5}$ ; $g(-5) = -8$

$c_2)$ $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ ; $g(3) = 8$

$d_1)$ $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ ; $g(2) = -1$

$d_2)$ $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ ; $g(3) = 1$ .

14. a) 0 ; b) 0 ; c) $-1$ .

15. In den Wertetabellen sind hier nur ganzzahlige Werte der unabhängigen Veränderlichen aufgenommen; die durch Definition behobenen Stellen sind darin unterstrichen:

a)

| x | 0 | 1 | $\underline{\underline{2}}$ | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-2$ | $-\frac{5}{4}$ | $\underline{\underline{-\frac{4}{5}}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{7}$ |

b)

| x | 3 | 4 | $\underline{\underline{5}}$ | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{5}$ | $\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{5}{4}$ |

c)

| x | 4 | 5 | $\underline{\underline{6}}$ | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{2}$ | $\underline{\underline{\frac{5}{9}}}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{7}{11}$ |

## 2.2. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

1. a) bis e) stets $f'(x_0) = 3$

2. a) bis c) stets $f'(x_0) = 5$





3. a) $f'(x_0) = 4$; b) $f'(x_0) = -3$; c) $f'(x_0) = 7$ ;
   d) $f'(x_0) = -1$; e) $f'(x_0) = \frac{1}{2}$; f) $f'(x_0) = -\frac{3}{4}$;
   g) $f'(x_0) = m$ ; h) $f'(x_0) = m$

4. a) $f'(x_{01}) = -1$; $f'(x_{02}) = 3$; $f'(x_{03}) = 5$
   b) $f'(x_{01}) = -6$; $f'(x_{02}) = -4$; $f'(x_{03}) = 0$
   c) $f'(x_{01}) = -7$; $f'(x_{02}) = 9$; $f'(x_{03}) = 19$
   d) $f'(x_{01}) = -3$; $f'(x_{02}) = -2{,}8$; $f'(x_{03}) = -2{,}6$
   e) $f'(x_{01}) = -10$; $f'(x_{02}) = -4$; $f'(x_{03}) = 2$
   f) $f'(x_{01}) = 7$; $f'(x_{02}) = -1$; $f'(x_{03}) = -5$

5. a) $f'(x_0) = 4x_0 + 5$; b) $f'(x_0) = 4x_0 + 5$;
   c) $f'(x_0) = 4x_0 + b$; d) $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

6. a) $f'(2) = 12$; $f'(x_0) = 3x_0^2$
   b) $f'(2) = 24$; $f'(x_0) = 6x_0^2$
   c) $f'(2) = 12$; $f'(x_0) = 3x_0^2$
   d) $f'(2) = 14$; $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2$
   e) $f'(2) = 10$; $f'(x_0) = 3x_0^2 - 2$
   f) $f'(2) = 24$; $f'(x_0) = 6x_0^2$
   g) $f'(2) = 26$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 2$
   h) $f'(2) = 44$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0$
   i) $f'(2) = 46$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0 + 2$
   k) $f'(2) = 46$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0 + 2$
   l) $f'(2) = 4$; $f'(x_0) = 6x_0^2 - 10x_0$
   m) $f'(2) = 46$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0 + 2$
   n) $f'(2) = 44 + c$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0 + c$
   o) $f'(2) = 24 + 4b + c$; $f'(x_0) = 6x_0^2 + 2bx_0 + c$
   p) $f'(2) = 12a + 4b + c$; $f'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$

q) $f'(2) = 12a_3 + 4a_2 + a_1$; $f'(x_o) = 3a_3x_o^2 + 2a_2x_o + a_1$

$$f'(x_o) = \sum_{i=o}^{2} (i+1)a_{i+1}x_o^i$$

7. a) $f'(x_o) = 27$

b) $f'(x_o) = 2a_2x_o + a_1$

c) $f'(x_o) = -1$

d) $f'(x_o) = 0$ .

## 2.3. Geometrische und physikalische Deutung des Differenzenquotienten und der Ableitung

1. a) Vgl. Abb. 1a ; $f'(x_o) = 3$; $\varphi = 71{,}56^\circ$

b) Vgl. Abb. 1b ; $f'(x_o) = -2$; $\varphi = 116{,}57^\circ$

c) Vgl. Abb. 1c ; $f'(x_o) = \frac{2}{3}$; $\varphi = 33{,}69^\circ$

d) Vgl. Abb. 1d ; $f'(x_o) = -\frac{4}{3}$; $\varphi = 126{,}88^\circ$

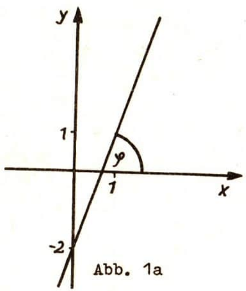



Abb. 1a

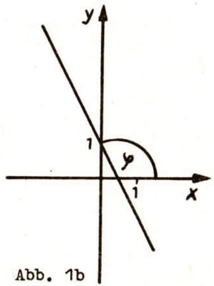



Abb. 1b





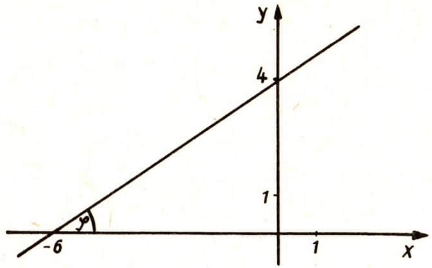



Abb. 1c

2. a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x + 3$;

b) $y = x + 3$;

c) $y = \sqrt{3}\,x + 3$;

d) $y = -\sqrt{3}\,x + 3$;

e) $-0{,}4663\,x + 3$;

f) $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,x + 3$;

g) $y = 2{,}747\,x + 3$;

h) $y = 0{,}9004\,x + 3$;

i) $y = -2{,}475\,x + 3$;

k) $y = -0{,}3057\,x + 3$ .

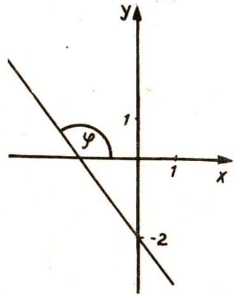



Abb. 1d

3. a) Vgl. Abb. 2a;

aus $f'(x_o) = 2x_o$ erhält man:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_o$ : | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| $f'(x_o)$ : | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

b) Vgl. Abb. 2b; es entsteht die gleiche Tabelle wie in a).

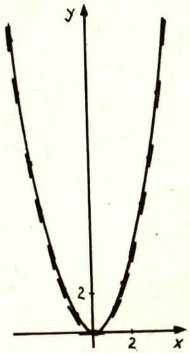


Abb. 2a

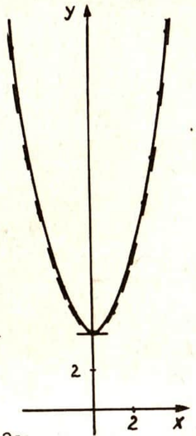


Abb. 2b

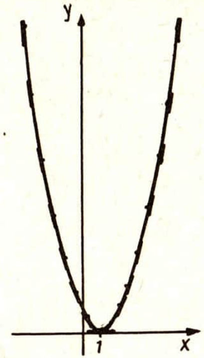


Abb. 2c

c) Vgl. Abb. 2c;

aus $f'(x_o) = 2x_o - 2$ erhält man:

| $x_o$ | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x_o)$ | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

d) Vgl. Abb. 2d;

aus $f'(x_o) = 2x_o - 2$ erhält man die gleiche Tabelle wie in c).

e) Vgl. Abb. 2e;

aus $f'(x_o) = 2x_o + 3$ erhält man:

| $x_o$ | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x_o)$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

4. a) Zu 3a: m = 5; zu 3b : m = 5; zu 3c : m = 3;
   zu 3d : m = 3; zu 3e : m = 8 .

S. 88



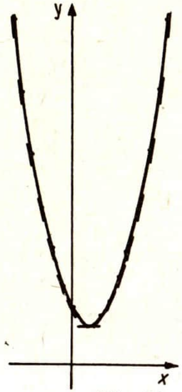


Abb. 2d

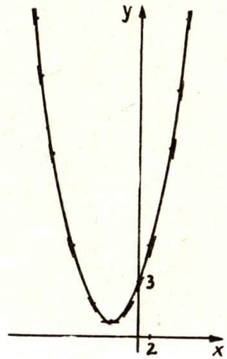


Abb. 2e

b) Zu 3a : m = -5; zu 3b : m = -5; zu 3c : m = -7;
   zu 3d : m = -7; zu 3e : m = -2 .

c) Zu 3a : m = 5,5; zu 3b : m = 5,5; zu 3c : m = 3,5;
   zu 3d : m = 3,5; zu 3e : m = 8,5 .

d) Zu 3a : m = -5,5; zu 3b : m = -5,5; zu 3c : m = -7,5;
   zu 3d : m = -7,5; zu 3e : m = -2,5.

e) Zu 3a : m = 5,8 ; zu 3b : m = 5,8; zu 3c : m = 3,8;
   zu 3d : m = 3,8 ; zu 3e : m = 8,8 .

f) Zu 3a : m = -5,8; zu 3b : m = -5,8; zu 3c:m = -7,8;
   zu 3d : m = -7,8; zu 3e : m = -2,8 .

5. Tangentenanstieg in $P_o$ (1;1) : m = 7 .
   Sekantenanstiege: a) m = 0; b) m = 3; c) m = 5,28;
   d) m = 7,92; e) m = 18 .

S. 88 bis 89

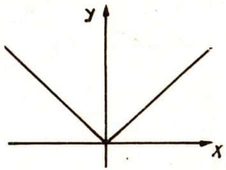
6. Für alle $x < 0$ beträgt der Anstieg $-1$, für alle $x > 0$ hingegen 1, für $x = 0$ liegt also linksseitig ein anderer Anstieg als rechtsseitig vor; die Kurve besitzt bei $x = 0$ eine Spitze. Vgl. Abb. 3.

7. Vgl. Abb. 4; die Geraden $y = -x + 2$ und $y = -x - 2$ sind Tangenten an das Bild der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ in den Punkten $P_0\ (1;1)$ bzw. $P_1\ (-1;-1)$.

8. Die gesuchte Tangente ist die Tangente im Scheitelpunkt der Parabel; aus $f'(x_0) = 2x_0$ folgt, daß für $x_0 = 0$ die Tangente parallel zur Abszissenachse verläuft; vgl. Abb. 5.

9. Vgl. Abb. 6: Die parallel zur Abszissenachse verlaufende Tangente schneidet die Kurve im Punkt $P_0(2;1)$.

Abb. 3



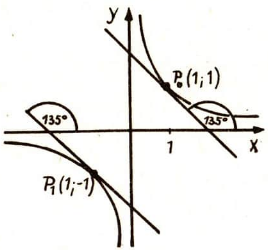




Abb. 4

S. 89



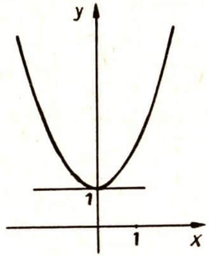



Abb. 5

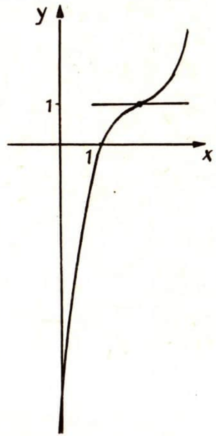



Abb. 6

## 2.4. Rechnen mit Differentialquotienten

1. a) $y' = 12x^2-12x+2$; $y'' = 24x-12$; $y''' = 24$.
   b) $y' = 4x^3+3x^2+2x+1$; $y'' = 12x^2+6x+2$; $y''' = 24x+6$.
   c) $y' = 3x^2+2x-1$; $y'' = 6x+2$; $y''' = 6$.
   d) $y' = 3(x-a)^2$; $y'' = 6(x-a)$; $y''' = 6$.

2. a) $y' = 2x$; $y'' = 2$.
   b) $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; $y''' = 6$.
   c) $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$; $y''' = 24x$; $y'''' = 24$.
   d) $y' = 12x - 11$; $y'' = 12$.
   e) $y' = 12x + 1$; $y'' = 12$.

3. a) $y' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$; b) $y' = -\frac{a}{x^2}\ (x \neq 0)$;

S. 95

c) $y' = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$ $(x \neq 2)$; d) $y' = -\dfrac{2}{x^3}$ $(x \neq 0)$;

e) $y' = -\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$ ; f) $y' = -\dfrac{x^2+3}{(x^2-3)^2}$ $(x^2 \neq 3)$ .

4. a) $y' = 6x^2 - 6x - 2$; $y'' = 12x - 6$;

b) $y' = 2x - 8$; $y'' = 2$;

c) $y' = 21x^2 - 80x + 73$; $y'' = 42x - 80$;

d) $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x-3)^2}$; $y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3} + \dfrac{2}{(x-3)^3}$

## 2.5. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = x^n$ für ganzzahlige Exponenten

1. a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c$

c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d) $y = ax^n$

2. Gemeinsame Wertepaare: (0,0) und (1,1)

Alle Kurven gehen durch die Punkte O (0;0) und $P_1(1;1)$

Der Scharparameter ist der Exponent n.

3. $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$

$a^0 = 1$ ist gültig für alle reellen a außer a = 0.

4. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ ist eine Definition, die nicht beweisbar ist.

Sie ist gültig für alle reellen a außer a = 0.

5. Hyperbel, bestehend aus 2 getrennten Ästen.

6. Gemeinsames Wertepaar: (1,1)

Alle Kurven gehen durch den Punkt $P_1(1;1)$.

S. 95 bis 96



Der Scharparameter n durchläuft die Folge der negativen, ganzen Zahlen.

7. $n > 0$: einästige Kurven

$n < 0$: aus 2 Ästen bestehende Kurven

$n = 0$: Der zweiten Schar, wenn bei x = 0 die Lücke offen bleibt. Falls diese Lücke durch die Festsetzung $0^0 = 1$ geschlossen wird, gehört die Kurve zur ersten Schar.

1. Je größer n, desto größer der Anstieg im Punkte $P_1(1;1)$,

desto flacher, d.h. näher an der x-Achse, der Verlauf im Intervall $0 < x < 1$;

desto steiler, d.h. näher an der y-Achse, der Verlauf im Intervall $x > 1$

3. $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

4. $$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^0 - x^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

1. $$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$y' = \underbrace{1 \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n-1) \text{ Faktoren}} + x \cdot 1 \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x + \ldots + \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{(n-1) \text{ Faktoren}} \cdot 1}_{n \text{ Summanden}}$$

$$y' = x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

S. 96 bis 99

2. $y = x^{2k}$ ergibt $y' = 2k \cdot x^{2k-1}$

$y = x^{2k-1}$ ergibt $y' = (2k-1) \cdot x^{2k-1-1} = (2k-1)x^{2k-2}$

mit $k = 1, 2, 3, \ldots$

3. $y = x^{2k}$; $y' = 2k \cdot x^{2k-1}$; $2k \cdot x_0^{\;2k-1} = -2k(-x_0)^{2k-1}$;

y-Achse ist Symmetrieachse des Bildes.

$y = x^{2k-1}$; $y' = (2k-1)x^{2k-2}$; $(2k-1)x_0^{\;2k-2}$

$= (2k-1)(-x_0)^{2k-2}$;

Koordinatenursprung ist Symmetriezentrum des Bildes.

4. Das Bild von $y = x^1$ ist zentralsymmetrisch zum Ursprung, das Bild von $y = x^0 = 1$ ist axialsymmetrisch zur y-Achse gelegen.

5. a) $y'' = 72x^7$; $y''_1 = 9216$; $y''_2 = -9216$; $y''_3 = \frac{9}{2048}$;

$y''_4 = -0{,}0157464$; $y''_5 = 576\sqrt{2}$

$y^{(5)} = 15120x^4$; $y_1^{(5)} = 241920$; $y_2^{(5)} = 241920$;

$y_3^{(5)} = \frac{945}{16}$; $y_4^{(5)} = 122{,}472$; $y_5^{(5)} = 60480$

$y^{(9)} = 362880 = y_1^{(9)} = y_2^{(9)} = y_3^{(9)} = y_4^{(9)} = y_5^{(9)}$

b) $y'' = 132x^{10}$; $y''_1 = 135168$; $y''_2 = 135168$; $y''_3 = \frac{33}{262144}$;

$y''_4 = 0{,}0007794468$; $y''_5 = 4224$

$y^{(5)} = 95040x^7$; $y_1^{(5)} = 12165120$; $y_2^{(5)} = -12165120$;

$y_3^{(5)} = \frac{1485}{256}$; $y_4^{(5)} = -20{,}785248$; $y_5^{(5)} = 760320\sqrt{2}$

$y^{(9)} = 79833600x^3$; $y_1^{(9)} = 638668800$;

$y_2^{(9)} = -638668800$; $y_3^{(9)} = 1247400$;

$y_4^{(9)} = -2155507{,}2$; $y_5^{(9)} = 159667200\sqrt{2}$

S. 99



6.

| P | Anstieg | x-Achse Winkel | x-Achse Schnittpunkt | y-Achse Winkel | y-Achse Schnittpunkt |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$ | 1 | $45^\circ$ | $(\frac{1}{4};0)$ | $135^\circ$ | $(0;-\frac{1}{4})$ |
| $(-\frac{1}{2};\frac{1}{4})$ | -1 | $135^\circ$ | $(-\frac{1}{4};0)$ | $45^\circ$ | $(0;-\frac{1}{4})$ |
| b) $(2;8)$ | 12 | $85{,}2^\circ$ | $(\frac{4}{3};0)$ | $175{,}2^\circ$ | $(0;-16)$ |
| $(-3;-27)$ | -27 | $92{,}2^\circ$ | $(-4;0)$ | $2{,}2^\circ$ | $(0;-108)$ |
| c) $(0{,}1;0{,}0001)$ | 0,004 | $0{,}2^\circ$ | $(0{,}975;0)$ | $90{,}2^\circ$ | $(0;-0{,}0003)$ |
| $(0{,}2;0{,}0016)$ | 0,032 | $1{,}8^\circ$ | $(0{,}15;0)$ | $91{,}8^\circ$ | $(0;-0{,}0048)$ |
| d) $(\frac{1}{2};\frac{1}{32})$ | $\frac{5}{16}$ | $17{,}4^\circ$ | $(\frac{2}{5};0)$ | $107{,}4^\circ$ | $(0;-\frac{1}{8})$ |
| $(-3;-243)$ | 405 | $89{,}9^\circ$ | $(-\frac{12}{5};0)$ | $179{,}9^\circ$ | $(0;972)$ |
| e) $(1;1)$ | 8 | $82{,}9^\circ$ | $(\frac{7}{8};0)$ | $172{,}9^\circ$ | $(0;-7)$ |
| $(-1;1)$ | -8 | $97{,}1^\circ$ | $(-\frac{7}{8};0)$ | $7{,}1^\circ$ | $(0;-7)$ |
| f) $(\sqrt{2};16\sqrt{2})$ | 144 | $89{,}6^\circ$ | $(\frac{8}{9}\sqrt{2};0)$ | $179{,}6^\circ$ | $(0;-128\sqrt{2})$ |
| $(-\sqrt{3};-81\sqrt{3})$ | 729 | $89{,}9^\circ$ | $(-\frac{8}{9}\sqrt{3};0)$ | $179{,}9^\circ$ | $(0;648\sqrt{3})$ |

7. a) $P_1\ (\frac{1}{2};\frac{1}{4})$; $P_2\ (-1;+1)$

b) $P_1\ (\pm\frac{2}{3};\pm\frac{8}{27})$; $P_2\ (\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{8})$

c) $P_1\ (-\frac{1}{2};\frac{1}{16})$; $P_2\ (1;1)$

d) $P_1\ (\pm 2;\pm 32)$; $P_2\ (\pm\sqrt{\frac{2}{5}};\pm\frac{4}{25}\sqrt{\frac{2}{5}})$

8. a) $P_\alpha\ (-\frac{1}{2};+\frac{1}{4})$; $P_\beta\ (\frac{1}{2}\sqrt{3};\frac{3}{4})$

b) $P_\alpha\ (\pm\frac{1}{3}\sqrt[4]{3};\pm\frac{1}{27}\sqrt[4]{27})$; $P_\beta\ (\pm\frac{1}{3}\sqrt{3};\pm\frac{1}{9}\sqrt{3})$

c) $P_\alpha\ (0;0)$; $P_\beta\ (-\frac{1}{6}\sqrt[5]{6^4};\frac{1}{36}\sqrt[5]{6^4})$

d) $P_\alpha\ (\pm 0{,}93;\pm 0{,}69)$; $P_\beta\ (\pm 0{,}86;\pm 0{,}47)$

S. 100

9. a) $B_1(+\frac{1}{2};+\frac{1}{4})$; $B_2(-\frac{1}{2};+\frac{1}{4})$; $S\,(0;-\frac{1}{4})$

b) $B_1(+\frac{1}{2}\sqrt{3};+\frac{3}{4})$; $B_2(-\frac{1}{2}\sqrt{3};+\frac{3}{4})$; $S\,(0;-\frac{3}{4})$

c) $B_1(+\frac{1}{6}\sqrt{3};+\frac{1}{12})$; $B_2(-\frac{1}{6}\sqrt{3};+\frac{1}{12})$; $S\,(0;-\frac{1}{12})$

d) $B_1(+2{,}84;+8{,}07)$; $B_2(-2{,}84;+8{,}07)$; $S\,(0;-8{,}07)$

e) $B_1(+0{,}18;+0{,}03)$; $B_2(-0{,}18;+0{,}03)$; $S\,(0;-0{,}03)$

5. $y' = \dfrac{0\cdot x^m - 1\cdot m\cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\cdot x^{-m-1}$

$(y' = n\cdot x^{n-1}$ mit $n = -m)$

6. Damit $y^{(n)}$ identisch Null würde, mußte gelten: $(m + n - 1)! = 0$. Das ist lt. Definition nicht möglich.

1. $$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^m} - \frac{1}{x^m}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^m - (x+h)^m}{h\cdot x^m\cdot(x+h)^m}$$

$$= \lim_{h\to 0} - \frac{(x+h)^m - x^m}{hx^m(x+h)^m}$$

$$= \lim_{h\to 0} - \frac{1}{x^m\cdot(x+h)^m} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

$$= - \frac{1}{x^{2m}} \cdot mx^{m-1} = - mx^{-m-1}$$

2. $y'\big|_{x=1} = n$

3. Je größer $|n|$, desto größer der Anstieg der Kurve im Punkt $P_1(1;1)$,
desto flacher, d.h. desto näher an der x-Achse, der Verlauf im Intervall $x > 1$,
desto steiler, d.h. desto weiter von der y-Achse entfernt, der Verlauf im Intervall $0 < x < 1$.

S. 100 bis 102



4. Genau wie bei positiven ganzzahligen Exponenten.

5. $y = x^{-(2k)}$; $y' = -2k\cdot x^{-2k-1}$; $-2k\cdot x_o^{-2k-1} = +2k(-x_o)^{-2k-1}$;

y-Achse ist Symmetrieachse des Bildes.

$y = x^{-(2k-1)}$; $y' = -(2k-1)\cdot x^{-2k-2}$;
$-(2k-1)x_o^{-2k-2} = -(2k-1)(-x_o)^{-2k-2}$;

Koordinatenursprung ist Symmetriezentrum des Bildes.

6. a) $y''' = -120x^{-7}$; $y_1''' = -15360$; $y_2''' = +15360$;

$y_3''' = -\frac{40}{729}$; $y_4''' = +\frac{1171875}{16}$

$y^{(6)} = 60480\cdot x^{-10}$; $y_1^{(6)} = 61931520$; $y_2^{(6)} = 61931520$;

$y_3^{(6)} = \frac{2240}{2187}$; $y_4^{(6)} = \frac{9228515625}{16}$

$y^{(10)} = 1037836800x^{-14}$; $y_1^{(10)} \approx 1{,}7\cdot 10^{13}$;

$y_2^{(10)} \approx 1{,}7\cdot 10^{13}$; $y_3^{(10)} \approx \frac{12812800}{59049}$; $y_4^{(10)} \approx 3{,}9\cdot 10^{14}$

b) $y''' = -990x^{-12}$; $y_1''' = -4055040$; $y_2''' = -4055040$;

$y_3''' = -\frac{110}{59049}$; $y_4''' \approx -5{,}9\cdot 10^{7}$

$y^{(6)} = 2162160x^{-15}$; $y_1^{(6)} \approx 5{,}1\cdot 10^{10}$;

$y_2^{(6)} \approx -5{,}1\cdot 10^{10}$; $y_3^{(6)} = \frac{80080}{531441}$; $y_4^{(6)} \approx 3{,}0\cdot 10^{12}$

$y^{(10)} = 158789030400x^{-19}$; $y_1^{(10)} \approx 8{,}3\cdot 10^{16}$;

$y_2^{(10)} \approx -8{,}3\cdot 10^{16}$; $y_3^{(10)} = \frac{217817600}{1594323}$;

$y_4^{(10)} \approx 5{,}8\cdot 10^{18}$

S. 102

7.

| P | Anstieg | x-Achse Winkel | x-Achse Schnittpunkt | y-Achse Winkel | y-Achse Schnittpunkt |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $(2;\frac{1}{2})$ | $-\frac{1}{4}$ | $166^\circ$ | $(4;0)$ | $76^\circ$ | $(0;1)$ |
| $(-2;-\frac{1}{2})$ | $-\frac{1}{4}$ | $166^\circ$ | $(-4;0)$ | $76^\circ$ | $(0;-1)$ |
| b) $(2;\frac{1}{4})$ | $-\frac{1}{4}$ | $166^\circ$ | $(3;0)$ | $76^\circ$ | $(0;\frac{3}{4})$ |
| $(-2;+\frac{1}{4})$ | $+\frac{1}{4}$ | $14^\circ$ | $(-3;0)$ | $104^\circ$ | $(0;\frac{3}{4})$ |
| c) $(\sqrt{2};\frac{1}{4}\sqrt{2})$ | $-\frac{3}{4}$ | $143,2^\circ$ | $(\frac{4}{3}\sqrt{2};0)$ | $53,2^\circ$ | $(0;\sqrt{2})$ |
| $(-\sqrt{3};-\frac{1}{9}\sqrt{3})$ | $-\frac{1}{3}$ | $161,6^\circ$ | $(-\frac{4}{3}\sqrt{3};0)$ | $71,6^\circ$ | $(0;-\frac{4}{9}\sqrt{3})$ |
| d) $(-0,8;\frac{625}{256})$ | $+\frac{3125}{256}$ | $85,3^\circ$ | $(-1;0)$ | $175,3^\circ$ | $(0;\frac{3125}{256})$ |
| $(-0,75;\frac{256}{81})$ | $+\frac{4096}{243}$ | $86,6^\circ$ | $(-\frac{15}{16};0)$ | $176,3^\circ$ | $(0;\frac{1280}{81})$ |
| e) $(\frac{1}{2};32)$ | $-320$ | $90,2^\circ$ | $(\frac{3}{5};0)$ | $0,2^\circ$ | $(0;192)$ |
| $(0,2;3125)$ | $-78125$ | $90,0^\circ$ | $(\frac{6}{25};0)$ | $0^\circ$ | $(0;18750)$ |
| f) $(2;\frac{1}{16})$ | $-\frac{1}{8}$ | $172,9^\circ$ | $(\frac{5}{2};0)$ | $82,9^\circ$ | $(0;\frac{5}{16})$ |
| $(-3;\frac{1}{81})$ | $+\frac{4}{243}$ | $0,95^\circ$ | $(-\frac{15}{4};0)$ | $90,95^\circ$ | $(0;\frac{5}{81})$ |

8. a) $A_1(1;1)$ $B_1(-1;-1)$
$A_2(2;\frac{1}{2})$ $B_2(-2;-\frac{1}{2})$

b) $A_1(-\frac{1}{2};4)$ $A_2(\frac{1}{3};9)$

c) $A_1(1;1)$ $B_1(-1;-1)$
$A_2(2;\frac{1}{8})$ $B_2(-2;-\frac{1}{8})$

d) $A_1(-2;\frac{1}{16})$ $A_2(-\sqrt[5]{4};\frac{1}{4}\sqrt[5]{4})$

9. a) $A_\alpha\ (1;1)$ $B_\alpha\ (-1;-1)$
$A_\beta\ (\frac{1}{3}\sqrt[4]{27};\sqrt[4]{3})$ $B_\beta\ (-\frac{1}{3}\sqrt[4]{27};-\sqrt[4]{3})$

S. 102



b) $A_\alpha\ (-\sqrt[6]{\frac{4}{3}};\frac{1}{2}\sqrt[3]{6})$ $A_\beta\ (\sqrt[6]{12};\frac{1}{6}\sqrt[3]{18})$

c) $A_\alpha\ (\sqrt[8]{3};\frac{1}{3}\sqrt[8]{243})$ $B_\beta\ (-\sqrt[8]{3};-\frac{1}{3}\sqrt[8]{243})$
$A_\beta\ (\sqrt[4]{3};\frac{1}{3}\sqrt[4]{27})$ $B_\beta\ (-\sqrt[4]{3};-\frac{1}{3}\sqrt[4]{27})$

d) $A_\alpha\ (-1,014;0,946)$ $A_\beta\ (-1,615;0,147)$

10. a) $P_1(3,38;0,296)$ $P_2(0,296;3,38)$
$P_3(-3,38;-0,296)$ $P_4(-0,296;-3,38)$
$S_1(0,535;0,535)$ $S_3(-0,535;-0,535)$
$S_2(-0,648;\ 0,648)$ $S_4(0,648;-0,648)$

b) $P_1(1,93;0,518)$ $P_2(0,518;1,93)$
$P_3(-1,93;-0,518)$ $P_4(-0,518;-1,93)$
$S_1(0,818;0,818)$ $S_3(-0,818;-0,818)$
$S_2(-1,32;\ 1,32)$ $S_4(1,32;-1,32)$

c) $P_1(1,46;0,683)$ $P_2(0,683;1,46)$
$P_3(-1,46;-0,683)$ $P_4(-0,683;-1,46)$
$S_1(0,934;0,934)$ $S_3(-0,934;-0,934)$
$S_2(-2,56;+2,56)$ $S_4(+2,56;-2,56)$

d) $P_1(1,20;0,837)$ $P_2(0,837;1,20)$
$P_3(-1,20;-0,837)$ $P_4(-0,837;-1,20)$
$S_1(0,98;0,98)$ $S_3(-0,98;-0,98)$
$S_2(-5,58;+5,58)$ $S_4(+5,58;-5,58)$

## 2.6. Ganze rationale Funktionen

1. **Scheitel** $S\left(-\frac{B}{2A}\ ;\ \frac{4AC-B^2}{4A}\right)$

2. **Je größer der Betrag von A, desto steiler verläuft die**

S. 102 bis 103

Parabel. Öffnung in $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiver}}{\text{negativer}}$ Richtung der y-Achse, falls $A \gtrless 0$.

3. Die Argumente $x_o$ der Funktion $y = f(x)$, für die der Funktionswert $y_o$ Null ist. Die Nullstellen sind gleich den Abszissen der Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse. Bestimmung aus der Bestimmungsgleichung $f(x_o) = 0$.

4. Veränderliche (Argument) - Unbekannte.

1. $y = 1!\binom{n}{1}a_nx^{n-1} + 1!\binom{n-1}{1}a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 1!\binom{1}{1}a_1$

$y'' = 2!\binom{n}{2}a_nx^{n-2} + 2!\binom{n-1}{2}a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2!\binom{2}{2}a_2$

$y''' = 3!\binom{n}{3}a_nx^{n-3} + 3!\binom{n-1}{3}a_{n-1}x^{n-4} + \dots + 3!\binom{3}{3}a_3$

2. $y^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_nx^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdot$

$\cdot\dots\cdot(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \dots$

$= \dfrac{k!\,n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}a_nx^{n-k} +$

$+ \dfrac{k!(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}a_{n-1}x^{n-k-1} + \dots$

$= k!\binom{n}{k}a_nx^{n-k} + k!\binom{n-1}{k}a_{n-1}x^{n-1-k} + \dots$

3. a) $x_1 = 2 + \sqrt{7}$; $x_2 = 2 - \sqrt{7}$

b) $x_1 = 3$ ; $x_2 = 3$

c) $x_1 = +1 + \sqrt{-4}$ $\qquad x_2 = +1 - \sqrt{-4}$

1. a) $y' = 9x^2 - 4x + 1$

$y'' = 18x - 4$

$y''' = 18$





b) $y' = akx^{k-1} - b(k+1)x^k + a(k+2)x^{k+1}$

$y'' = ak(k-1)x^{k-2} - b(k+1)\cdot k\cdot x^{k-1} + a(k+2)(k+1)x^k$

$y''' = ak(k-1)(k-2)x^{k-3} - b(k+1)k(k-1)x^{k-2} +$

$+ a(k+2)(k+1)k\cdot x^{k-1}$

c) $y' = 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}$

$y'' = 2\sqrt{2}$

$y''' = 0$

d) $y' = 3x^2 - 12x + 11$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

e) $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

$y'' = \frac{1}{2}$

$y''' = 0$

f) $y' = 4x^3 + 2x$

$y'' = 12x^2 + 2$

$y''' = 24x$

2. a) $y' = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 7$

$y'' = \frac{3}{2}x^2 - 12x$

$y''' = 3x - 12$

$y^{(4)} = 3$

b) $y'' = 0{,}2$

c) $y'' = -10 + \frac{10}{3}x^3 + 28x^5$

$y^{(4)} = 20x + 560x^3$

$y^{(6)} = 3360x$

d) $y' = \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{12}x - \frac{29}{6}$

$y''' = \frac{1}{4}$

e) $y''' = 0{,}24x$

3. a) $y_1'' = -\frac{1}{3}$; $y_2'' = -3\frac{1}{3}$; $y_3'' = -\frac{8}{375}$; $y_4'' = -\frac{29}{6000}$;

$y_5'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 3)$

$y_1''' = -\frac{1}{2}$; $y_2''' = 4$; $y_3''' = \frac{11}{50}$; $y_4''' = -\frac{19}{200}$;

$y_5''' = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$

$y_1^{(5)} = y_2^{(5)} = y_3^{(5)} = y_4^{(5)} = y_5^{(5)} = 1$

$y^{(10)} \equiv 0$

b) $y_1'' = 0$; $y_2'' = 457{,}2$; $y_3'' = -1{,}999835392$;

$y_4'' = -2{,}000199982$; $y_5'' = 143{,}8 - 0{,}6\sqrt{3}$

$y_1''' = 15$; $y_2''' = -1840{,}8$; $y_3''' = -0{,}02381568$;

$y_4''' = -0{,}00600144$; $y_5''' = 388{,}8\sqrt{3} + 1{,}8$

$y_1^{(5)} = 606$; $y_2^{(5)} = -19352{,}4$; $y_3^{(5)} = 1{,}006464$;

$y_4^{(5)} = 1{,}206048$; $y_5^{(5)} = 5443{,}2\sqrt{3} + 1{,}2$

$y_1^{(10)} = y_2^{(10)} = y_3^{(10)} = y_4^{(10)} = y_5^{(10)} = 72576.$

4. a) $m_1 = 0{,}3$  $\alpha_1 \approx 16{,}7^\circ$  $\beta_1 \approx 106{,}7^\circ$

$P_1(\frac{1}{2};\frac{17}{40})$  $S_x(-\frac{11}{12};0)$  $S_y(0;\frac{11}{40})$

$m_2 = 0{,}1$  $\alpha_2 \approx 5{,}7^\circ$  $\beta_2 \approx 95{,}7^\circ$

$P_2(-\frac{1}{2};\frac{9}{40})$  $S_x(-2\frac{3}{4};0)$  $S_y(0;\frac{11}{40})$

b) $m_1 = -\frac{1}{4}$  $\alpha_1 \approx 166^\circ$  $\beta_1 \approx 76^\circ$

$P_1(\frac{1}{2};4\frac{1}{8})$  $S_x(17;0)$  $S_y(0;4\frac{1}{4})$

$m_2 = -\frac{1}{4}$  $\alpha_2 \approx 166^\circ$  $\beta_2 \approx 76^\circ$

$P_2(-\frac{1}{2};3\frac{7}{8})$  $S_x(15;0)$  $S_y(0;3\frac{3}{4})$





c) $m_1 = 0{,}9920$  $\alpha_1 \approx 44{,}8^\circ$  $\beta_1 \approx 134{,}8^\circ$

$P_1(2;0{,}384)$  $S_x(1{,}613;0)$  $S_y(0;-1{,}6)$

$m_2 = 5{,}502$  $\alpha_2 \approx 79{,}7^\circ$  $\beta_2 \approx 169{,}7^\circ$

$P_1(3;3{,}159)$  $S_x(2{,}426;0)$  $S_y(0;-13{,}347)$

d) $m_1 = 12$  $\alpha_1 \approx 85{,}2^\circ$  $\beta_1 \approx 175{,}2^\circ$

$P_1(2;2)$  $S_x(1\frac{5}{6};0)$  $S_y(0;-22)$

$m_2 = 6$  $\alpha_2 \approx 80{,}6^\circ$  $\beta_2 \approx 170{,}6^\circ$

$P_2(-1;2)$  $S_x(-1\frac{1}{3};0)$  $S_y(0;8)$

5. a) $A_1(1;3)$  $A_2(-1;4)$

b) $A_1(3;-6)$  $B_1(-1;1\frac{2}{3})$

$A_2(1;-2\frac{2}{3})$

c) $A(0;0)$  $B(2;8)$  $C(-2;0)$

d) $A(1;-4)$  $B(-1;4)$  $C(\sqrt{2};-6\sqrt{2})$  $D(-\sqrt{2};6\sqrt{2})$

6. a) $P_\alpha\ (0;4)$  $P_\beta\ (\frac{2}{3}\sqrt{3};2\frac{2}{3})$

b) $P_\alpha\ (0;1)$  $P_{\beta\,1}(\frac{1}{2};\frac{2}{3})$  $P_{\beta\,2}(-\frac{1}{2};\frac{4}{3})$

c) $P_{\alpha\,1}(0;-2)$  $P_{\alpha\,2}(\sqrt{2};(-3+\sqrt{2}))$

$P_{\alpha\,3}(-\sqrt{2};(-3-\sqrt{2}))$

d) $P_{\beta\,1}(2;-\frac{29}{15})$  $P_{\beta\,2}(-2;\frac{29}{15})$

$P_{\beta\,3}(\frac{1}{2};-\frac{41}{240})$  $P_{\beta\,4}(-\frac{1}{2};\frac{41}{240})$

7. a) $x_1 = \frac{1}{4}$

b) $y' : x_1 = \frac{3}{2}$;  $x_2 = -\frac{12}{5}$

$y'' : x_1 = -\frac{9}{20}$

c) $y''\ : x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{5}$

$y'''\ : x_1 = -\frac{7}{20}$

d) $y'\ : x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = \sqrt{3};\ x_4 = -\sqrt{3}$

$y''\ : x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{14};\ x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{14}$

$y'''\ : x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{42};\ x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{42}$

$y^{(4)}: x_1 = 0$

8. a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$

b) $y = x^2 + 5$

c) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + 3$

d) $y = 2x^3 - 6x^2 - 5x - 3$

e) $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 4$

f) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3$

## 2.7. Gebrochene rationale Funktionen

1. Echter Bruch: $a < b$

Unechter Bruch: $a > b$

Für $a = b$ ergibt sich eine ganze Zahl.

Die Verwandlung in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch erfolgt durch Division des Zählers durch den Nenner.

2.
$$
\begin{array}{l}
(12a^3 - 11a^2b - 71ab^2 + 40b^3) : (3a - 8b) = 4a^2 + 7ab - 5b^2 \\
\underline{-(12a^3 - 32a^2b)} \\
\qquad 21a^2b - 71ab^2 + 40b^3 \\
\qquad \underline{-(21a^2b - 56ab^2)} \\
\qquad\qquad - 15ab^2 + 40b^3 \\
\qquad\qquad \underline{-(- 15ab^2 + 40b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$





$$
\begin{array}{l}
(9p^3 - 7pq^2 + 2q^3) : (3p - 2q) = 3p^2 + 2pq - q^2 \\
\underline{-(9p^3 \qquad - 6p^2q)} \\
\qquad 6p^2q - 7pq^2 + 2q^3 \\
\qquad \underline{-(6p^2q - 4pq^2)} \\
\qquad\qquad - 3pq^2 + 2q^3 \\
\qquad\qquad \underline{-( - 3pq^2 + 2q^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es werden nach und nach gewisse Teile des Dividenden in die Rechnung einbezogen.

3. $0 : a = 0\ (a \neq 0)$

Ein Bruch ist Null, wenn der Zähler Null ist, der Nenner aber von Null verschieden ist.

4. $a : 0 = x \longrightarrow 0 \cdot x = a$

Das ist aber für keine endliche reelle Zahl x erfüllbar, da $0 \cdot x \equiv 0$ für alle endlichen reellen x.

3. $y = f(x) = \frac{(x + 2)(2x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{2x - 3}{x - 2}$

Nullstelle von f(x): $2x_o - 3 = 0$

$x_o = \frac{3}{2}$

Nenner : $\frac{3}{2} - 2 \neq 0$

4. $y = \frac{5x^3 - x^2}{3x^2 + 2}$ $\quad \left.\begin{array}{l} m = 3 \\ n = 2 \end{array}\right\}$ $m - n = 1$

$y' = \frac{15x^4 + 30x^2 - 4x}{9x^4 + 12x^2 + 4}$ $\quad \left.\begin{array}{l} m = 4 \\ n = 4 \end{array}\right\}$ $m - n = 0$

---

$y = \frac{5x^3 - x^2}{3x^3 + 2}$ $\quad \left.\begin{array}{l} m = 3 \\ n = 2 \end{array}\right\}$ $n - m = 0$

$y' = \frac{3x^4 + 30x^2 - 4x}{9x^6 + 12x^3 + 4}$ $\quad \left.\begin{array}{l} m = 4 \\ n = 6 \end{array}\right\}$ $n - m = 2$

5. $\underbrace{y = \frac{x^2 + 2}{x - 2};\ y' = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2};}$

unecht gebrochene Funktionen.

$\underbrace{y'' = \frac{12 - 4x}{(x - 2)^3};\ y''' = \frac{8x - 28}{(x - 2)^4};}$

echt gebrochene Funktionen.

1. a) $y' = \frac{6 - 5x}{7x^3};\ y'' = \frac{10x - 18}{7x^4};\ y''' = \frac{-30x + 72}{7x^5}$

b) $y' = \frac{-12x^5 + 9x^4 - 4x^2 - 28x + 7}{(3x^4 - 2x - 7)^2}$

$y'' = \frac{108x^8 - 108x^7 + 144x^5 + 972x^4 - 420x^3 + 224}{(3x^4 - 2x - 7)^3}$

$y''' = \frac{-1296x^{11} + 1620x^{10} - 4104x^8 - 28012x^7 + 16632x^6 - 576x^5}{(3x^4 - 2x - 7)^4} +$

$+ \frac{-6984x^4 - 35280x^3 + 8820x^2 + 1344}{(3x^4 - 2x - 7)^4}$

c) $y' = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$

$y'' = \frac{2}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3}$

$y''' = -\frac{6}{(1+x)^4} - \frac{6}{(1-x)^4}$

d) $y = \frac{3x - 4}{x^2 - 4}$

$y' = \frac{-3x^2 + 8x - 12}{(x^2 - 4)^2}$

$y'' = \frac{6x^3 - 24x^2 + 72x - 32}{(x^2 - 4)^3}$

$y''' = \frac{-18x^4 + 96x^3 - 432x^2 + 384x - 288}{(x^2 - 4)^4}$





e) $y = \frac{1}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

$y' = \frac{-\sqrt{3}}{(x\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$

$y'' = \frac{+6}{(x\sqrt{3} + \sqrt{2})^3}$

$y''' = \frac{-18\sqrt{3}}{(x\sqrt{3} + \sqrt{2})^4}$

f) $y' = \frac{-10x}{(1 + x^2)^2}$

$y'' = \frac{30x^2 - 10}{(1 + x^2)^3}$

$y''' = \frac{120x - 120x^3}{(1 + x^2)^4}$

2. a) $y = \frac{x^2 + 1}{2x};\quad y' = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x};\quad y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$

b) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1};\quad y' = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

$y = x - 1 + \frac{2}{x^2 + x + 1};\quad y' = 1 - \frac{4x + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

c) $y = 4x + \frac{1}{x^2 + 1};\quad y' = 4 - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$y = \frac{4x^3 + 4x + 1}{x^2 + 1};\quad y' = \frac{4x^4 + 8x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

d) $y = \frac{3}{9 - x^2} + \frac{x}{x - 1};\quad y' = \frac{6x}{(9 - x^2)^2} - \frac{1}{(x - 1)^2}$

$y = \frac{3}{9 - x^2} + 1 + \frac{1}{x - 1};\quad y' = \frac{6x}{(9 - x^2)^2} - \frac{1}{(x - 1)^2}$

$y = \frac{-x^3 + 12x - 3}{(9-x^2)(x-1)};\quad y' = \frac{-x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x - 81}{[(9 - x^2)(x - 1)]^2}$

e) $y = \frac{x - 5}{x - 1};\quad y' = \frac{4}{(x - 1)^2}$

$y = 1 - \frac{4}{x - 1};\quad y' = \frac{4}{(x - 1)^2}$

f) $y = \frac{3x - 4x^2}{2 - 3x^2};\quad y' = \frac{9x^2 - 16x + 6}{(2 - 3x^2)^2}$

$$y = \frac{4}{3} + \frac{3x - \frac{8}{3}}{2 - 3x^2}; \qquad y' = \frac{9x^2 + 6 - 16x}{(2 - 3x^2)^2}$$

3. a) $y'' = \dfrac{18}{(3x - 6)^3}$

b) $y' = \dfrac{6x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 6x + 10}{(2x^3 - 5)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 - 12x}{(x^2 + 2)^3}$

d) $y'' = \dfrac{-162}{x^4}$

e) $y' = \dfrac{-4}{(x - 5)^2}$

f) $y^{(4)} = \dfrac{24}{(x + 1)^5}$

4. a) $y_1' = 0; \quad y_2' = \frac{8}{9}; \quad y_3' = -3; \quad y_4' = \frac{117}{121}$

$y_1'' = -2; \quad y_2'' = -\frac{2}{27}; \quad y_3'' = 16; \quad y_4'' = -\frac{16}{1331}$

b) $y_1' = 24; \quad y_2' = -24; \quad y_3' = \frac{96}{361}; \quad y_4' = -\frac{288}{121}$

$y_1'' = 204; \quad y_2'' = 204; \quad y_3'' = \frac{4416}{6859}; \quad y_4'' = \frac{9024}{1331}$

c) $y_1' = -2; \quad y_2' = \frac{-2}{25}; \quad y_3' = \dfrac{-1}{3 - 2\sqrt{2}}; \quad y_4' = -\frac{18}{49}$

$y_1'' = -4; \quad y_2'' = \frac{-4}{125}; \quad y_3'' = \dfrac{-2}{10 - 7\sqrt{2}}; \quad y_4'' = -\frac{108}{343}$

5. a)

| | | |
|---|---|---|
| $m_1 = -3$ | $\alpha_1 \approx 108,4^\circ$ | $\beta_1 \approx 18,4^\circ$ |
| $P_1(-1;4)$ | $S_x(\frac{1}{3};0)$ | $S_y(0;1)$ |
| $m_2 = -3$ | $\alpha_2 \approx 108,4^\circ$ | $\beta_2 \approx 18,4^\circ$ |
| $P_2(-5;-16)$ | $S_x(-10\frac{1}{3};0)$ | $S_y(0;-31)$ |
| $m_3 = \frac{38}{64}$ | $\alpha_3 \approx 30,7^\circ$ | $\beta_3 \approx 120,7^\circ$ |

S. 113 bis 114



| | | |
|---|---|---|
| $P_3(-11;-16)$ | $S_x(-37\frac{18}{19};0)$ | $S_y(0;22\frac{17}{32})$ |

b)

| | | |
|---|---|---|
| $m_1 = \frac{18}{25}$ | $\alpha_1 \approx 35,8^\circ$ | $\beta_1 \approx 125,8^\circ$ |
| $P_1(3;-\frac{3}{5})$ | $S_x(3\frac{5}{6};0)$ | $S_y(0;-2\frac{19}{25})$ |
| $m_2 = -\frac{2}{3}$ | $\alpha_2 \approx 146,3^\circ$ | $\beta_2 \approx 56,3^\circ$ |
| $P_2(-1;1)$ | $S_x(\frac{1}{2};0)$ | $S_y(0;\frac{1}{3})$ |

c)

| | | |
|---|---|---|
| $m_1 = 1\frac{17}{25}$ | $\alpha_1 \approx 59,2^\circ$ | $\beta_1 \approx 149,2^\circ$ |
| $P_1(3;-2\frac{2}{5})$ | $S_x(4\frac{3}{7};0)$ | $S_y(0;-7\frac{11}{25})$ |
| $m_2 = -\frac{10}{63}$ | $\alpha_1 \approx 171^\circ$ | $\beta_1 \approx 81^\circ$ |
| $P_2(-5;-\frac{4}{3})$ | $S_x(-13\frac{2}{5};0)$ | $y(0;-2\frac{8}{63})$ |

6. a) $A_1(-1;-1)$ $\qquad B_1(3;5)$

$A_2(1+\sqrt{2};2\sqrt{2} + 2)$ $\qquad B_2(1-\sqrt{2}; -2\sqrt{2} + 2)$

b) $A_1(1;-2)$ $\qquad B_1(-3;-2)$

$A_2(0;-5)$ $\qquad B_2(-2;1)$

c) $A_1(1;3\frac{1}{2})$ $\qquad B_1(5;8\frac{1}{2})$

$A_2(2;4)$ $\qquad B_2(4;8)$

7. a) $P_{\alpha_1}(2+2\sqrt{2};9-2\sqrt{2})$ $\qquad P_{\alpha_2}(2-2\sqrt{2};9+2\sqrt{2})$

b) $P_{\beta_1}(\sqrt{3};0)$ $\qquad P_{\beta_2}(-\sqrt{3};0)$

c) $P_{\alpha_1}(1-\frac{1}{2}\sqrt{3};1-\sqrt{3})$ $\qquad P_{\alpha_2}(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3};1+\sqrt{3})$

$P_{\beta_1}(\frac{1}{2}\sqrt{3};0)$ $\qquad P_{\beta_2}(-\frac{3}{2}\sqrt{3};2)$

8. a) $y\ : x_1 = 4; \ x_2 = -4$

$y'\ : x_1 = 2; \ x_2 = 8$

b) $y\ : x_1 = \sqrt{2}; \ x_2 = -\sqrt{2}$

$y'\ : x_1 = 0$

$y''\ : x_1 = 1; \ x_2 = -1$

S. 114

c) $y\ : x_1 = 2\sqrt{6};\ x_2 = -2\sqrt{6}$

$y'\ : x_1 = 4;\quad x_2 = 6$

$y''$ : keine Nullstellen

$y'''$: keine Nullstellen

## 2.8. Untersuchung der ganzen rationalen Funktion

1. Nullstellen sind die Argumente $x_o$ einer Funktion $y = f(x)$, deren zugehöriger Funktionswert $y_o$ gleich Null ist. Nullstellen sind Zahlenwerte, also arithmetische Elemente. Sie werden aus der Bestimmungsgleichung $f(x_o) = 0$ bestimmt.

2. z.B. $y = ax^{2k} + bx^k + c$ mit $k > 1$, natürlich

$y = ax^3 + bx^2 + cx$

$y = ax^k + bx^1$ mit $k > 1$, natürlich

1. Das Bild der Funktion $y = \sum_{k=o}^{n} a_k x^k$ ($n > 0$, ganzzahlig) schneidet die y-Achse auf jeden Fall genau einmal, die x-Achse im Höchstfalle n mal, auf jeden Fall aber einmal, wenn n ungerade ist.

2. Es fehlt das absolute Glied.

3.

| | | |
|---|---|---|
| a) | $S_x(-3;\ 0)$ | $S_y(0;\ -2)$ |
| b) | $S_x(2;\ 0)$ | $S_y$ fehlt |
| c) | $S_x$ fehlt | $S_y(0;\ -2)$ |
| d) | $S_{x_1}(\frac{3}{4};\ 0)$, $S_{x_2}(-2;\ 0)$ | $S_y(0;\ -6)$ |





| | | |
|---|---|---|
| e) | $S_{x_1}(-2;\ 0)$, $S_{x_2}(\frac{1}{2};\ 0)$, $S_{x_3}(-\frac{1}{2};\ 0)$ | $S_y(0;\ -\frac{1}{2})$ |
| f) | $S_{x_1}(2;\ 0)$, $S_{x_2}(-2;\ 0)$, $S_{x_3}(3;\ 0)$, $S_{x_4}(-3;\ 0)$ | $S_y(0;\ 36)$ |

4.

| | | |
|---|---|---|
| a) | $f(0) = 0$ | Nullstellen: $x_1 = 0;\quad x_2 = 2$ |
| b) | $f(0) = 0$ | Nullstellen: $x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = 3$ |
| c) | $f(0) = 0$ | Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = -\sqrt{3}$ |
| d) | $f(0) = 0$ | Nullstellen: $x_1 = x_2 = x_3 = 0;$ $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5};$ $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ |
| e) | $f(0) = -\frac{3}{2}$ | Nullstelle: $x_1 = 3$ |
| f) | $f(0) = 6$ | Nullstellen: $x_1 = \sqrt[3]{2};\ x_2 = \sqrt[3]{3}$ |

3. Schnittpunkt mit der y-Achse: $y_1 = -4$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $x_2 = x_3 = 2$

Extrempunkte: $y' = 4 - 2x$

$$4 - 2x_4 = 0$$

$$x_4 = 2 = x_2 = x_3$$

$y'' = -2 < 0$: Maximumpunkt.

Das Bild geht im Schnittpunkt mit der x-Achse nicht auf die andere Seite der x-Achse über.

Wendepunkte sind nicht vorhanden wegen $y'' = -2 \neq 0$

| $x$ | 1 | -0,5 | 0 | 0 | 0,75 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1=-2{,}17$ | 1 | -2,67 | -5,79 | -12,56 | 28,0 | $\approx y_1$ |

1. $y' = 2x + p$

   $2x_o + p = 0$

   $x_o = -\frac{p}{2}$ $\qquad y_o = -(\frac{p^2}{4} - q)$

2. $y' = 2Ax + B$

   $2Ax_o + B = 0$

   $x_o = -\frac{B}{2A}$ $\qquad y_o = -(\frac{B^2 - 4AC}{4A})$

   $y'' = 2A$: Maximum, falls $A < 0$; geöffnet nach der negativen Seite der y-Achse.

   Minimum, falls $A > 0$; geöffnet nach der positiven Seite der y-Achse.

3.

| Grad der Funktion | Anzahl der Extrempunkte mindestens | Anzahl der Extrempunkte höchstens | Anzahl der Wendepunkte mindestens | Anzahl der Wendepunkte höchstens |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | ev. keinen | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | ev. keinen | 2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2k | 1 | 2k-1 | ev. keinen | 2k-2 |
| 2k+1 | ev. keinen | 2k | 1 | 2k-1 |

4. a) Extrempunkte: $E_1\ (\frac{1}{3}\sqrt{3};\ -\frac{2}{9}\sqrt{3} - 2)$ Min.

   $E_2\ (-\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{2}{9}\sqrt{3} - 2)$ Max.

   Wendepunkt: $W\ (0;\ -2)$





b) Extrempunkte: $E_1\ (0;\ 16)$ Max.

$E_2\ (2;\ 0)$ Min.

$E_3\ (-2;\ 0)$ Min.

Wendepunkte: $W_1\ (\frac{2}{3}\sqrt{3};\ 7\frac{1}{9})$

$W_2\ (-\frac{2}{3}\sqrt{3};\ 7\frac{1}{9})$

c) Extrempunkte: $E_1\ (-1;\ 20)$ Min.

$E_2\ (5;\ 110)$ Max.

Wendepunkt: $W\ (2;\ 56)$

d) Extrempunkt: $E\ (-1;\ -5)$ Min.

Wendepunkte fehlen

5. a) Extrempunkt: $E\ (-\frac{1}{3};\ \frac{7}{36})$ Min.

b) Extrempunkte: $E_1\ (\frac{1}{3}\sqrt{39};\ -\frac{26}{9}\sqrt{39}+27)$ Min.

$E_2\ (-\frac{1}{3}\sqrt{39};\ +\frac{26}{9}\sqrt{39}+27)$ Max.

Wendepunkt: $W\ (0;27)$

c) Extrempunkte: $E_1\ (4;\ 14)$ Max.

$E_2\ (2;\ 10)$ Min.

Wendepunkt: $W\ (3;\ 12)$

d) Extrempunkte: $E_1\ (0;\ -10)$ Max.

$E_2\ (2\sqrt{2};\ -138)$ Min.

$E_3\ (-2\sqrt{2};\ -138)$ Min.

Wendepunkte: $W_1\ (\frac{1}{3}\sqrt{24};\ -81\frac{1}{9})$

$W_2\ (-\frac{1}{3}\sqrt{24};\ -81\frac{1}{9})$

$Y_1\ (0;\ 4)$

$X_1\ (1;\ 0)\quad X_2\ (-1;\ 0)\quad X_3\ (2;\ 0)\quad X_4\ (-2;\ 0)$

$E_1\ (0;\ 4)$ Max. $\quad E_2\ (\frac{1}{2}\sqrt{10};\ -\frac{9}{4})$ Min.

$E_3\ (-\frac{1}{2}\sqrt{10};\ -\frac{9}{4})$ Min.

$W_1\ (\frac{1}{6}\sqrt{30};\ \frac{19}{36})\quad W_2\ (-\frac{1}{6}\sqrt{3};\ \frac{19}{36})$

Kurvenverlauf vom 2. in den 1. Quadranten

1. Eine ganze rationale Funktion ungeraden Grades n = 2k+1 (k = 1, 2, 3, ...) hat im Höchstfalle 2k Extrempunkte und 2k-1 (auf jeden Fall aber 1) Wendepunkte. Das Bild verläuft also vom 1. oder 2. Quadranten zum 3. oder 4. Quadranten oder umgekehrt.
   Eine ganze rationale Funktion geraden Grades n = 2k (k = 1, 2, 3, ...) hat im Höchstfall 2k-1 (auf jeden Fall aber 1) Extrempunkte und 2k-2 Wendepunkte. Das Bild verläuft also vom 1. in den 2. oder vom 3. in den 4. Quadranten oder umgekehrt.

2. a) $Y\ (0;\ 0)$

   $X_1\ (0;\ 0)\quad X_2\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33};\ 0)\quad X_3\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33};\ 0)$

   $E_1\ (2;\ -12)$ Min. $\quad E_2\ (-\frac{4}{3};\ \frac{176}{27})$ Max.

   $W\ (\frac{1}{3};\ -\frac{74}{27})$

   b) $Y\ (0;\ 144)$

   $X_1\ (3;\ 0)\quad X_2\ (-3;\ 0)\quad X_3\ (4;\ 0)\quad X_4\ (-4;\ 0)$

   $E_1(0;\ 144)$ Max.

   $E_2\ (\frac{5}{2}\sqrt{2};\ -12\frac{1}{4})$ Min.

   $E_3\ (-\frac{5}{2}\sqrt{2};\ -12\frac{1}{4})$ Min.

   $W_1\ (\frac{5}{6}\sqrt{6};\ 57\frac{7}{36})\quad W_2\ (-\frac{5}{6}\sqrt{6};\ 57\frac{7}{36})$





c) $Y(0;\ 0)$

$X_1\ (0;\ 0)\quad X_2\ (2;\ 0)\quad X_3\ (-2;\ 0)$

$E_1\ (\frac{2}{5}\sqrt{15};\ -\frac{96}{25}\sqrt{\frac{12}{5}})$ Min.

$E_2\ (-\frac{2}{5}\sqrt{15};\ \frac{96}{25}\sqrt{\frac{12}{5}})$ Max.

$W_1\ (0;\ 0)$ Terrassenpunkt

$W_2\ (\frac{1}{5}\sqrt{30};\ -\frac{42}{125}\sqrt{30})$

$W_3\ (-\frac{1}{5}\sqrt{30};\ +\frac{42}{125}\sqrt{30})$

d) $Y\ (0;\ 0)$

$X_1\ (0;\ 0)\quad X_2\ (1;\ 0)\quad X_3\ (2;\ 0)$

$E_1\ (1+\frac{1}{3}\sqrt{3};\ -\frac{2}{9}\sqrt{3})$ Min.

$E_2\ (1-\frac{1}{3}\sqrt{3};\ +\frac{2}{9}\sqrt{3})$ Max.

$W\ (1;\ 0)$

e) $Y\ (0;\ 3)$

$X_1\ (\frac{1}{2};\ 0)\quad X_2\ (-3;\ 0)$

$E\ (-\frac{5}{4};\ +\frac{49}{8})$ Max.

f) $Y\ (0;\ -8)$

$X_1\ (-1;\ 0)\quad X_2\ (2;\ 0)$

$E\ (-\frac{1}{4};\ -\frac{2187}{256})$ Min.

$W_1\ (2;\ 0)$ Terrassenpunkt

$W_2\ (\frac{1}{2};\ -\frac{81}{16})$

1. $r = \frac{u}{4};\ \alpha = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 114{,}6^\circ$

2. a) Seite der ausgestanzten Quadrate:
   $x = \frac{1}{6}\ (a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$

   b) Seite der ausgestanzten Quadrate:
   $x = \frac{1}{6}\ (a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$

c) Seite der ausgestanzten Quadrate:

$$x = \frac{3a + 2b}{18} - \frac{1}{18}\sqrt{9a^2 - 6ab + 4b^2}$$

$V_a : V_b = 2:1$

3. $x_a = \frac{1}{6}a$ $\qquad x_b = \frac{1}{6}a$ $\qquad x_c = \frac{a}{18}(5 - \sqrt{7})$

4. a) Seiten des Geheges: a = 25 m; b = 25 m

b) " " " : a = 25 m; b = 50 m

c) " " " : a = 50 m; b = 50 m

$V_a : V_b : V_c = 1 : 2 : 4$

5. Zylinderradius: $r = \frac{d}{3}$

Zylinderhöhe: $h_z = \frac{h}{3}$

6. $A = \frac{1}{2}a\,(s - a)$; $\quad \frac{dA}{da} = \frac{s}{2} - a$; $\quad a = \frac{s}{2}$; $\quad b = \frac{s}{2}$

7. Grundkreisradius des einbeschriebenen Kegels: $r = \frac{d}{3}$

Höhe des einbeschriebenen Kegels: $h_K = \frac{h}{3}$

8. $r = \frac{2}{3}e$

9. Seiten der Bleche: $a = \frac{g}{2}$; $b = \frac{h}{2}$

10. Radius des Zylinders: $r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$

Höhe des Zylinders: $h = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}$

11. Höhe des mittleren Dreiecks: $h_m = \frac{1}{2}h$

Seiten des mittleren Dreiecks: $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \frac{1}{4}\overline{AC}^2 - \overline{AD}\cdot\overline{AC}\cos\alpha}$$

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \frac{1}{4}\overline{CB}^2 - \overline{DB}\cdot\overline{CB}\cos\beta}$$





Winkel des mittleren Dreiecks:

$$\sin \sphericalangle DFE = \frac{\overline{BC}}{2\overline{DF}}\sin\beta$$

$$\sin \sphericalangle DEF = \frac{\overline{AC}}{2\overline{DE}}\sin\alpha$$

$$\sphericalangle EDF = 180^\circ - \sphericalangle DFE - \sphericalangle DEF$$

12. Breite des Kanals: $b = \frac{2u}{4+\pi}$

Höhe des Kanals: $h = \frac{2u}{4+\pi}$

13. Höhe des Kegels: h = 2 m;

maximales Volumen $V = 85\frac{1}{3}\pi\ m^3$

Radius des Behälters: $r = 4\sqrt{2}$ m

14. a) a = 4 cm; b = 8 cm; c = 6 cm

b) a = 10 cm; b = 10 cm; c = 10 cm (Würfel)

15. a) Breite des Drahtrechtecks: $b = \frac{l}{4}$

Höhe des Drahtrechtecks: $h = \frac{l}{4}$ (Quadrat)

b) Breite des Drahtrechtecks: $b = \frac{l}{3}$

Höhe des Drahtrechtecks: $h = \frac{l}{6}$

$M_a : M_b = 9 : 8$

$O_a : O_b = 3 : 4$

$V_a : V_b = 27 : 32$

16. a) $h = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$; $\quad d = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$

b) $h = \frac{4}{3}R$; $\quad d = \frac{4}{3}R\sqrt{2}$

17. a) $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$; Produkt wird dann ein Maximum

b) $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$; Quadratsumme wird dann ein Minimum

c) $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$; Kubiksumme wird dann ein Minimum

18. Verlängerung bzw. Verkürzung $x = \frac{a - b}{2}$

19. Grundkante der Säule: $a_1 = \frac{2}{3}\, a$

Höhe der Säule: $h_1 = \frac{1}{3}\, h$

20. Neue Scheibe: 55 cm x 44 cm

Verlust: 16 %

## 2.9. Untersuchung der gebrochenen rationalen Funktion

1. Durch Division der Zählerfunktion durch die Nennerfunktion

2. Durch Kürzen mit den gemeinsamen Linearfaktoren

$$y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - x^2 - 6x} = \frac{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}{x(x-3)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+3)}{x}$$

3. Zu den gebrochen rationalen Funktionen

4. unstetig

1. $y = \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$

$Y\,(0;\,0) \equiv X\,(0;\,0)$

$E_1\,(1;\,\frac{1}{2})$ Max. $E_2\,(-1;\,-\frac{1}{2})$ Min.

$W_1\,(0;\,0)$ $W_2\,(\sqrt{3};\,\frac{1}{4}\sqrt{3})$ $W_3\,(-\sqrt{3};\,-\frac{1}{4}\sqrt{3})$

1. a) Im allgemeinen 1 Schnittpunkt; doch kann auch kein solcher Schnittpunkt vorliegen, wenn die y-Achse Polachse ist.

b) Das hängt von der Zählerfunktion ab und davon ob die Nullstellen der Zählerfunktion ev. zugleich





Nullstellen der Nennerfunktion sind. Im Höchstfall sind soviel Nullstellen möglich, wie der Grad der Zählerfunktion angibt. Es sind aber ev. auch gar keine Nullstellen vorhanden.

2. Das hängt von der Nennerfunktion ab und davon, ob deren Nullstellen ev. zugleich Nullstellen der Zählerfunktion sind. Im Höchstfall sind soviel Pole möglich, wie der Grad der Nennerfunktion angibt. Es gibt aber auch gebrochen rationale Funktionen ohne Pole.

a) Asymptote: $y = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = -0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2) = +0$

b) Asymptote: $y = x + 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 5)) = +0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 5)) = -0$

c) Asymptotenkurve: $y = \frac{1}{5}x^2 - 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (\frac{1}{5}x^2 - 2)) = +0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (\frac{1}{5}x^2 - 2)) = -0$

1. a) Wenn Zähler- und Nennerfunktion vom gleichen Grad sind ($m = n$).

b) Wenn der Grad der Zählerfunktion um 1 größer ist als der der Nennerfunktion ($m = n + 1$).

c) Wenn der Grad der Zählerfunktion um 2 größer ist als der der Nennerfunktion ($m = n + 2$).

d) Wenn der Grad der Zählerfunktion um mehr als 2 größer ist als der der Nennerfunktion ($m = n + k$; $k > 2$).

2. a) Y (0; -11)

X (nicht vorhanden)

$x_p = 2$

$E_1$ (-4; -3) Max.

$E_2$ (8; 21) Min.

W (nicht vorhanden)

Asymptote: $y = x + 7$

b) Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_p$ (nicht vorhanden)

$E_1$ $(2; \frac{1}{4})$ Max.

$E_2$ $(-2; -\frac{1}{4})$ Min.

$W_1$ (0; 0)

$W_2$ $(2\sqrt{3}; \frac{1}{8}\sqrt{3})$

$W_3$ $(-2\sqrt{3}; -\frac{1}{8}\sqrt{3})$

Asymptote: $y = 0$

c) Y $(0; \frac{3}{4})$

X (nicht vorhanden)

$x_{p_1} = 2$; $x_{p_2} = -2$

E $(0; \frac{3}{4})$ Min.

W (nicht vorhanden)

Asymptote: $y = 0$





d) Y (0; -4)

$X_1$ (2; 0)

$X_2$ (-2; 0)

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

E (0; -4) Max.

W (nicht vorhanden)

Asymptote: $y = -1$

e) Y $(0; \frac{2}{3})$

X (nicht vorhanden)

$x_p$ (nicht vorhanden)

E $(0; \frac{2}{3})$ Min.

$W_1$ $(1; \frac{3}{4})$

$W_2$ $(-1; \frac{3}{4})$

Asymptote: $y = 1$

f) Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

E (nicht vorhanden)

$W_1$ (0; 0)

Asymptote: $y = 0$

3. Die Funktion ist unecht gebrochen rational: $y = \frac{fx}{x - f}$.

4. $a_1$) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

$Y_1$ (0; 1)

X (fehlen)

$b_1$) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

$Y_1$ (0; -1)

X (fehlen)

P (fehlen)

$E_1$ (0; 1) Max

$W_1$ $(\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{3}{4})$

$W_2$ $(-\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{3}{4})$

Asymptote: x-Achse

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

$E_1$ (0; -1) Max.

W (fehlen)

Asymptote: x-Achse

$a_2)$ $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$E_1$ $(1;\ \frac{1}{2})$ Max.

$E_2$ $(-1;\ -\frac{1}{2})$ Min.

$W_1$ (0; 0)

$W_2$ $(\sqrt{3};\ \frac{1}{4}\sqrt{3})$

$W_3$ $(-\sqrt{3};\ -\frac{1}{4}\sqrt{3})$

Asymptote: x-Achse

$b_2)$ $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_{p_1} = 1;\ x_{p_2} = -1$

E (nicht vorhanden)

W (0; 0)

Asymptote: x-Achse

$a_3)$ $y = \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

E (0; 0) Min.

$W_1$ $(\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{1}{4})$

$W_2$ $(-\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{1}{4})$

Asymptote: y = 1

$b_3)$ $y = \frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

E (0; 0) Min.

W (nicht vorhanden)

Asymptote: y = 1





$a_4)$ $y = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

E (fehlen)

$W_1$ (0; 0) Terrassenpunkt

$W_2$ $(\sqrt{3};\ \frac{3}{4}\sqrt{3})$

$W_3$ $(-\sqrt{3};\ -\frac{3}{4}\sqrt{3})$

Asymptote: y = x

$b_4)$ $y = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

$E_1$ $(\sqrt{3};\ \frac{3}{2}\sqrt{3})$ Min.

$E_2$ $(-\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ Max.

$W_1$ (0; 0) Terrassenpunkt

Asymptote: y = x

$a_5)$ $y = \frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - \frac{x^2}{x^2-1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$b_5)$ $y = \frac{x^4}{x^2-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^2+1}$

Y (0; 0)

X (0; 0)

$x_{p_1} = 1$

$x_{p_2} = -1$

Extrempunkte und Wendepunkte können mit den besprochenen Mitteln nicht bestimmt werden.

Asymptotenkurve: $y = x^2$ Asymptotenkurve: $y = x^2$

Es ist möglich, die Bilder der Funktionen für $n \geqq 2$ geometrisch additiv bzw. subtraktiv aus der Asymptote (bzw. Asymptotenkurve) und der entsprechenden Funktion für $n' = n - 2$ zusammenzusetzen. Durch dieses rekursive Verfahren kann auch jedes Bild für $n \geqq 4$ erhalten werden.

5. Das lokale Maximum würde bei einer Kanalbreite $b_m = 2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ m und einer Kanalhöhe $h_m = 2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ m $\approx 1{,}06$ m liegen.

Da nur 90 cm Höhe zur Verfügung stehen, muß eine Kanalbreite von $b \approx 1{,}33$ m gewählt werden, für die die Kosten nicht den geringstmöglichen Betrag ausmachen.

6. a) $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ (quadratischer Achsenschnitt)

| V | 1 l | $\frac{1}{2}$ l | $\frac{1}{4}$ l |
|---|---|---|---|
| d = h | 10,8cm | 8,6cm | 6,8cm |

b) $d = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

| V | 1 l | $\frac{1}{2}$ l | $\frac{1}{4}$ l |
|---|---|---|---|
| d | 13,6cm | 10,8cm | 8,6cm |
| h | 6,8cm | 5,4cm | 4,3cm |

7. Breite der Lore: $d = 4\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ dm

Länge der Lore: $l = \frac{20}{\sqrt[3]{25\pi}}$ dm

8. $l = 5$ cm; $b = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ cm $\approx 2{,}9$ cm; $h = \sqrt{3}$ cm $\approx 1{,}7$ cm

9. a) Breite: $b = 2\sqrt{10}$ dm $\approx 6{,}3$ dm

Tiefe: $t = 2\sqrt{10}$ dm $\approx 6{,}3$ dm

b) Breite: $b = 4\sqrt{5}$ dm $\approx 9$ dm

Tiefe: $t = 2\sqrt{5}$ dm $\approx 4{,}5$ dm

Bei 2 Zwischenböden ergibt sich bei

a) $b = \frac{4}{3}\sqrt{15}$ dm $\approx 5{,}2$ dm;

$t = \frac{4}{3}\sqrt{15}$ dm $\approx 5{,}2$ dm;





b) $b = \frac{4}{3}\sqrt{30}$ dm $\approx 7{,}3$ dm;

$t = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ dm $\approx 3{,}7$ dm.

10. Bei der Aufgabe ist zu beachten, daß die Anzahl n der in einer Gruppe parallel geschalteten Elemente keine kontinuierlich veränderliche Größe ist, wie es Voraussetzung für die beim Differenzieren zugrunde liegenden Grenzwertprozesse ist. Vorübergehend muß deshalb diese Forderung an n gestellt werden, so daß sich als Ansatz ergibt:

Anzahl der Elementengruppen: $\frac{24}{n}$

$$U = \frac{24}{n} \cdot 2 \text{ V}$$

$$R_i = \frac{0{,}25}{n} \cdot \frac{24}{n}\,\Omega$$

$$I = \frac{\frac{24}{n} \cdot 2}{\frac{0{,}25}{n} \cdot \frac{24}{n} + 1{,}5} \text{ A}$$

Daraus folgt: $n = 2$. Es sind also 12 Gruppen zu je 2 Elementen hintereinander zu schalten.

11. $b = g = 2f$

12. $U = 2(a+b)$

$a \cdot b = A$

$U = 2\left(a + \frac{A}{a}\right)$

$\frac{dU}{da} = 2\left(1 - \frac{A}{a^2}\right)$

$1 - \frac{A}{a_o^2} = 0$

$\left.\begin{array}{l} a_o = \sqrt{A} \\ b_o = \sqrt{A} \end{array}\right\}$ Quadrat

13. Durchmesser des Kegels $D = \frac{3}{2}\,d$

Höhe des Kegels $H = 3\,h$

14. $r = \sqrt[3]{\frac{4V}{9\pi}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

15. Die Summanden müssen gleich, also jeder gleich der halben gegebenen Zahl sein; die Summe der Quotienten ist dann stets gleich 2.

16. Das gesuchte Extremum würde sich für den Durchmesser $d = \sqrt{\frac{20}{\pi}}$ und die Gefäßhöhe $h = 0$ ergeben. Da aber offenbar $h \geqq \frac{d}{2}$ sein muß, ergibt sich als Lösung:
$h = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0}{\pi}}$

17. $t = 4\ ^{\circ}C$

18. $q = 0{,}68\ mm^2$

19. Höhe des Kegels: $h = R\sqrt{3}$ (R: Kugelradius)
Durchmesser des Kegels: $d = R\sqrt{6}$

20. Durchmesser des Zylinders: $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\ }}$
Höhe des Zylinders: $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\ }}$

## 3. Einführung in die Integralrechnung

### 3.1. Das unbestimmte Integral

1. $c \cdot x + C$

2. $x + C$ Das Integral eines konstanten Integranden $c = 1$ ist die Summe aus der Integrationsveränderlichen und der Integrationskonstanten.

3. a) $2x + C$ b) $-3x + C$ c) $-\frac{x^2}{2} + C$
d) $2x^2 + C$ e) $-\frac{3x^2}{2} + C$ f) $x + x^2 + C$
g) $\frac{x^2}{2} - 4x + C$ h) $x^2 - 3x + C$ i) $-2x^2 + x + C$
k) $\frac{2x^3}{3} + C$ l) $-x^4 + C$ m) $x^8 + C$

S. 144 bis 148



n) $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ o) $\frac{x^{m+2}}{m+2} + C$ p) $\frac{x^n}{n} + C$

4. a) $\frac{x^{13}}{13} + C$ b) $\frac{x^3}{4} + C$ c) $\frac{x^2}{20} + C$
d) $3x + C$ e) $\pi x + C$ f) $\frac{x^n}{n} + C$
g) $\frac{a}{4b}x^4 + C$ h) $\sqrt{a}\,x + C$ i) $\frac{1}{2\pi^2}x + C$
k) $\frac{g}{2}t^2 + C$ l) $\frac{x^4}{4} - x + C$ m) $\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 + bx + C$
n) $x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} +$ o) $x + x^2 + x^3 + x^4 + C$
p) $\sqrt{a}\,x - \frac{x^2}{2} + \sqrt{b}\,x + C$
q) $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$ r) $\frac{9x^5}{5} + 3x^4 - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + x + C$
s) $\frac{x^4}{4} - x + C$ t) $\frac{x^5}{5} - x + C$

5. a) $-\frac{1}{2x^2} + C$ b) $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$
c) $-\frac{a}{4x^4} + C$ d) $-\frac{3}{5x^4} + C$
e) $-\frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C$ f) $-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + C$
g) $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} + C$ h) $-\frac{a}{x} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$
i) $-\frac{1}{x} + c$ k) $-\frac{1}{2x^2} + C$
l) $-\frac{1}{3x^3} + C$ m) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$
n) $\frac{x^4}{4} - x + \frac{1}{2x^2} + C$ o) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$
p) $\frac{x^7}{7} - x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{5x^5} + C$ q) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + C$
r) $x + \frac{1}{x} + C$ s) $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{x} + C$
t) $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + C$ u) $-\frac{ab}{x} - \frac{ac}{2x^2} - \frac{ad}{3x^3} + C$

S. 148 bis 149

6. a) $bx^2 + C$ b) $2x + C$

7. a) $y' = 2x + 1$; $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$

b) $y' = 2x - \frac{2}{x^3}$; $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 10x + C$

c) $y' = 3x^2 + 2(a - c)x + b - ac$;

$\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + (a - c)\frac{x^3}{3} + (b - ac)\frac{x^2}{2} - bcx + C$

d) $y' = -\frac{3}{x^7} - \frac{16}{3x^5} + \frac{3}{x^3}$;

$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{10x^5} - \frac{4}{9x^3} + \frac{3}{2x} + C$

e) $y' = 8(2x + 3)^3$;

$\int f(x)\,dx = \frac{16x^5}{5} + 24x^4 + 72x^3 + 108x^2 + 81x + C$

f) $y' = 4x^3 + 10x$; $\int f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - 50x + C$

8. a) $y = \frac{x^4}{4} - 5x + C$ b) $y = x^5 + \frac{1}{x^2} + C$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$

d) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + C$

e) $y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} + \frac{13x^3}{108} - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{16} + C$

f) $y = \frac{3x^4}{2} - \frac{7x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C$

9. a) $s = c \cdot t + s_o$ b) $s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + s_o$

c) $s = c \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 + s_o$ d) $s = c \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + s_o (\frac{g}{2} \cdot t^2 + s_o)$





10. a) $v = c \cdot t + v_o$; $s = \frac{c}{2} \cdot t^2 + s_o$

b) $v = -c \cdot t + v_o$; $s = -\frac{c}{2} \cdot t^2 + s_o$

c) $v = \frac{f}{2} \cdot t^2 + v_o$; $s = \frac{f}{6} \cdot t^3 + s_o$

## 3.2. Das bestimmte Integral

1. a) 7 b) 1 c) $\frac{21}{4}$ d) $\frac{8}{3}$ e) $\frac{26}{3}$ f) $\frac{21}{2}$
g) 56 h) $\frac{39}{2}$ i) 13 k) 12 l) $\frac{280}{3}$ m) 195
n) $\frac{50}{3}$ o) $\frac{1215}{8}$ p) $\frac{1}{40}$

2. a) 24 b) $\frac{28}{3}$ c) $\frac{17}{12}$ d) 60 e) $\frac{452}{3}$ f) $\frac{1}{4}$
g) $\frac{32}{3}$

1. a) $-2$ b) 18 c) $\frac{35}{3}$ d) $-\frac{35}{3}$ e) $-\frac{21}{2}$ f) $\frac{35}{48}$
g) $-\frac{8}{9}$ h) $\frac{20}{3}$

2. a) 6 b) 20 c) $-20$ d) $-\frac{27}{4}$ e) $\frac{4}{5}$ f) 30
g) $\frac{20}{3}$ h) $\frac{130}{3}$ i) 8 k) $-10$ l) 6 m) $-\frac{44}{3}$

3. a) 250 Nm
b) 75 kpm
c) 0,1 Nm; 0,2 Nm; 0,3 Nm

## 3.3. Flächenberechnung durch Integration

1. Flächeninhalt, Volumen
2. von Polygonen
3. Grenzübergang ist erforderlich
4. Die Koordinaten $(x_o;\ y_o)$ müssen die Gleichungen beider Kurven erfüllen, also $(x_o;\ y_o)$ einsetzen an Stelle der laufenden Koordinaten $(x;y)$ und das entstehende Gleichungssystem nach $x_o$, $y_o$ auflösen.
5. Vorzeichenumkehr
6. $\int_a^b y\,dx = \int_a^c y\,dx + \int_c^b y\,dx$. Gilt für beliebige Lage von c.

1.

| n | Proportion |
|---|---|
| 1 | $1 : 3 : 5 : 7 : \ldots$ |
| 2 | $1 : 7 : 19 : 37 : \ldots$ |
| 3 | $1 : 15 : 65 : 175 : \ldots$ |
| k | $1 : (2^{k+1}-1) : (3^{k+1} : 2^{k+1}) : (4^{k+1} : 3^{k+1}) : \ldots$ |

2.

| n | Proportion |
|---|---|
| -2 | $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{1}{20} : \ldots$ |
| -3 | $\frac{3}{4} : \frac{5}{36} : \frac{7}{144} : \frac{9}{400} : \ldots$ |
| -4 | $\frac{7}{8} : \frac{19}{216} : \frac{37}{1728} : \frac{61}{8000} : \ldots$ |
| -k | $\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} : \frac{3^{k-1}-2^{k-1}}{(2\cdot3)^{k-1}} : \frac{4^{k-1}-3^{k-1}}{(3\cdot4)^{k-1}} : \frac{5^{k-1}-4^{k-1}}{(4\cdot5)^{k-1}} : \ldots$ |

S. 164 bis 167



3. a) $34\frac{2}{3}$ b) $42\frac{7}{12}$ c) $36$ d) $12 + \frac{16}{3}\sqrt{2}$

e) $20\frac{1}{4}$ f) $3\frac{1}{2}$ g) $26\frac{1}{2}$ h) $5$

i) $3\frac{3}{16}$ k) $\frac{4}{9}$ l) $\sqrt{3} - 1$ m) $54$

4.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

5. a) $\int_a^c f(x)dx : \int_c^b f(x)dx$

b) $\int_a^{\frac{an+bm}{m+n}} f(x)dx : \int_{\frac{an+bm}{m+n}}^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}} f(x)dx : \int_{\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}}^b f(x)dx$

c) $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx : \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$

6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | a) | 1 : 9 | c) | 11 : 29 |
| 2) | b) | 10 : 121 | c) | 373 : 1723 |
| 3) | b) | 27 : 13 | c) | 2 : 3 |
| 4) | a) | 9 : 16 | c) | 1 : 3 |
| 5) | b) | 5 : 27 | c) | 1 : 1 |
| 6) | b) | 112:513 | c) | 5 : 11 |
| 7) | a) | 1 : 2 | c) | 1 : 1 |
| 8) | b) | 14 : 85 | c) | 1 : 1 |

S. 168

7. a) $c = 6$; $c_1 = 7$

b) $c = 2\sqrt{5}$; $c_1 = 5\sqrt{2}$

c) $c = 2\sqrt[3]{2}$; $c_1 = 0$

d) $c = \sqrt[4]{209}$; $c_1 = \sqrt[4]{313}$

e) $c = -\sqrt{9 - 3\sqrt{2}}$; $c_1 = -\sqrt{9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}}$

f) $c = \sqrt{9 - \frac{1}{5}\sqrt{1015}}$; $c_1 = \sqrt{9 - \frac{1}{2}\sqrt{178}}$

g) $c = 1 + \frac{10}{3}\sqrt{6}$; $c_1 = 1 + 5\sqrt{2}$

h) $c = 3$; $c_1 = 9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}$

8. a) $y = f(x) + c$

b) $|(b-a) \cdot c|$

c) 1) 21  2) 24  3) 12  4) 54  5) 24

6) $(x_2 - x_1)h$

9. a) $1{,}858\ m^3$  b) $1{,}02\ m^3 \mathrel{\hat{=}} 54{,}8\ \%$  c) $5{,}55\ m^3$

10. $\frac{32}{125}\sqrt{10}\ m^3$

11. a) $8\frac{8}{15}\ m^2$  b) rund $1\,567\ m^3$

12. a) $\int_0^a b\,dx$  b) $\int_0^a \frac{b}{a} x\,dx$

c) $\int_0^z \frac{h}{z} x\,dx + \int_z^g \left(-\frac{h}{g-z} x + \frac{hg}{g-z}\right) dx$

d) $\int_0^h \left(\frac{a-z-c}{h} x + z - c\right) dx - \int_0^h \left(-\frac{z}{h} x + z\right) dx$

S. 168



e) $g\,(h - 0) = g \cdot h$

1. a) $\frac{4}{15}$  b) 48  c) $\frac{1}{6}$  d) $\frac{8}{3}$

e) $\frac{8}{3}$  f) 16  g) $\frac{1}{3a^2}$  h) $\frac{1}{a}$

2. a) $10\frac{2}{3}$  b) 18  c) $\frac{2}{3}p^2$  d) $4\frac{1}{2}$

e) $2\frac{2}{3}$  f) 8  g) $4\frac{4}{5}$

h) n gerade: $\frac{m}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sqrt[n-1]{m^2}$

n ungerade: $m\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sqrt[n-1]{m^2}$

3. $21\frac{1}{3}$

4. $\frac{4}{3}$

5. a)

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | k |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{3}$ | ... | $\frac{k-1}{2(k+1)}$ |

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$

6. a) $\frac{1}{n(n+1)}$

b)

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | k |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | ... | $\frac{1}{k(k+1)}$ |

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$

1. a) $\pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h$  b) $\pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

S. 168 bis 179

c) $\pi \int_0^h \left(\frac{r_2-r_1}{h}\cdot x + r_1\right)^2 dx = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

2. $2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3$

3. a) $\pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$ b) $\pi \int_0^h (2rx - x^2)\, dx$

c) Die zweite

4. a) $\int_z^{z+h} (r^2 - x^2)\, dx$ b) $\int_0^h (r^2 - x^2 - 2xz - z^2)\, dx$

c) Die zweite

5. a) $V_y = \frac{\pi}{2} h^2$ $V_x = \frac{\pi}{5} h^5$

b) $V_y : V_x = 5 : 2h^3$

c) $V_y : V_x = 5 : 2x_1$

6. a)

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_x$ | $\frac{\pi h^3}{3}$ | $\frac{\pi h^5}{5}$ | $\frac{\pi h^7}{7}$ | $\frac{\pi h^9}{9}$ | $\frac{\pi h^{11}}{11}$ | ... | $\frac{\pi h^{2k+1}}{2k+1}$ |

b)

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_x$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{7}$ | $\frac{\pi}{9}$ | $\frac{\pi}{11}$ | ... | $\frac{\pi}{2k+1}$ |

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+1} = 0$

7. a) $z = \sqrt{\frac{m}{m+n}} \cdot h$ b) $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot h$

8. a) 1 : 5





9. a) $10\frac{2}{3}\pi$ b) $41\frac{2}{3}\pi$ c) $\frac{\pi}{2} r^3 \sqrt{3}$

d) $V_x = 3\frac{1}{15}\pi$ $V_y = 2\frac{2}{3}\pi$

e) $12\frac{4}{21}\pi$ f) $128\pi$

10. a) $305{,}5\,\pi$ g b) $t = \sqrt{61{,}1}$ cm $\approx 7{,}8$ cm

11. rund $280\,\pi$ g

## 4. Analytische Geometrie

### 4.1. Punkt und Strecke

2. A'(−4;5), B'(−1;1) und C'(−6;−4).

3. A(0;0), B(4;0), C(6;2$\sqrt{3}$), D(4;4$\sqrt{3}$), E(0;4$\sqrt{3}$) und F(−2;2$\sqrt{3}$)

1. a) 5; b) 5; c) 10; d) 10; e) 13;
f) $\sqrt{41} \approx 6{,}4$; g) $\sqrt{58} \approx 7{,}62$; h) $\sqrt{27{,}25} \approx 5{,}22$;
i) $\sqrt{\frac{2329}{144}} \approx 4{,}02$; k) 4; l) 5; m) $\sqrt{a^2 + b^2}$;
n) $a\sqrt{2}$; o) $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$; p) $3a\sqrt{2}$

2. a) 5; b) 5; c) 6; d) 10; e) $\sqrt{14{,}2^2 + 35{,}9^2} \approx 38{,}6$
f) $\sqrt{\frac{33265}{576}} \approx 7{,}6$;
g) $\sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4ab} = (a-b)\sqrt{2}$
h) $2\sqrt{m^2 + n^2}$; i) $2b\sqrt{2}$.

3. a) $\varphi \approx 53{,}13^\circ$ b) $\varphi \approx 53{,}13^\circ$;
c) $\varphi = 180^\circ$ d) $\varphi \approx 53{,}13^\circ$;

e) $\varphi \approx 111{,}58^\circ$ f) $\varphi \approx 76{,}04^\circ$

g) $\varphi = 135^\circ$ h) $\tan \varphi = -\frac{n}{m}$

i) $\varphi = 135^\circ$

5.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | 25 | $4\sqrt{2}$ | 14 | $10\sqrt{10} \approx 31{,}6$ | 2b | $(2a+2b)\sqrt{2}$ |
| $\overline{BC}$ | $\sqrt{1714} \approx 41{,}4$ | 12 | 13 | $5\sqrt{37} \approx 30{,}4$ | a | $2a + 2b$ |
| $\overline{AC}$ | 33 | $4\sqrt{5}$ | 15 | $\sqrt{1025} \approx 32$ | $\sqrt{a^2+4b^2}$ | $2a + 2b$ |

6. a) Gleichschenkliges Dreieck;

b) allgemeines Dreieck;

c) gleichschenkliges Dreieck;

d) gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck;

e) rechtwinkliges Dreieck;

f) allgemeines Dreieck.

7. $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{6}$

8. $\overline{AB}^2 = 2^2 + 3^2 = 13;$

$\overline{AC}^2 = (1 + \frac{3}{2}\sqrt{3})^2 + (-\frac{3}{2} + \sqrt{3})^2 = 13;$

$\overline{BC}^2 = (-1 + \frac{3}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{3}{2} + \sqrt{3})^2 = 13;$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}.$

9. $\overline{AB}^2 = (-\frac{1}{2} + \sqrt{3})^2 + (-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 5;$

$\overline{AC}^2 = (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$ und

$\overline{BC}^2 = (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$





$\triangle$ ABC ist rechtwinklig, da $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 1 + 4 = 5 = \overline{AB}^2$ gilt. Der rechte Winkel liegt bei C.

10. a) Parallelogramm;

b) gleichschenkliges Trapez;

c) Quadrat;

d) Quadrat.

11. $\overline{AB} = \sqrt{50}$; $\overline{CD} = \sqrt{50}$; $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{50}$

Die Strecken sind Diagonalen eines Rechtecks.

1.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | (4;4) | (3;13,5) | (2;4) | (-2,5;-1) | (1;-2) | $(a;\frac{b}{2})$ | $(\frac{a+c}{2};\frac{b+d}{2})$ |

2. Mittelpunktskoordinaten: $(\frac{x}{2};\frac{y}{2})$ bzw. (3,5;4,5).

3. Koordinaten der Endpunkte: A'(-6;4), B'(6;6), C'(8;-12) und P'(2x;2y); A"(3;-2), B"(-3;-3), C"(-4;6) und P"(-x;-y).

Richtungswinkel: $146{,}3^\circ$; $45^\circ$; $303{,}7^\circ$.

4. A'(5;1)

5. a) $x_T = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} = \frac{0 + 32}{5} = \frac{32}{5};$

$y_T = -\frac{12}{5}$, also (6,4;-2,4);

b) (12;-4,5).

6. $T_1(5;3)$ und $T_2(13;7)$.

7. A'(4;3), B'(1,5;3,5) und C'(3,5;1,5).

$\overline{AB} = \sqrt{26}$, $\overline{BC} = \sqrt{32}$ und $\overline{AC} = \sqrt{10}$.

$\overline{A'B'} = \sqrt{6,5}$, $\overline{B'C'} = \sqrt{8}$ und $\overline{A'C'} = \sqrt{2,5}$.

$\overline{AB} = 2\overline{A'B'}$, $\overline{BC} = 2\overline{B'C'}$ und $\overline{AC} = 2\overline{A'C'}$.

$P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ und $P_3(x_3;y_3)$ seien die Eckpunkte des Dreiecks, $P'_2\left(\frac{x_2+x_3}{2}; \frac{y_2+y_3}{2}\right)$,

$P'_1\left(\frac{x_1+x_3}{2}; \frac{y_1+y_3}{2}\right)$ und $P'_3\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

die Eckpunkte des zweiten Dreiecks.

Es gilt dann: $\overline{P_1P_2}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$ und

$\overline{P'_1P'_2}^2 = \left(\frac{x_2+x_3-x_1-x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2+y_3-y_1-y_3}{2}\right)^2$,

d.h. $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P'_1P'_2}$. Analoge Überlegungen gelten für die entsprechenden anderen Seiten.

Elementargeometrisch erfolgt der Nachweis mit Hilfe der Strahlensätze.

8. $S_a(4,5;4,5)$, $S_b(1,5;4)$ und $S_c(4;1,5)$ sind die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks.

$s_a = \overline{S_aA} = \sqrt{3,5^2 + 3,5^2} = 3,5\sqrt{2}$;

$s_b = \overline{S_bB} = \sqrt{5,5^2 + 2^2} = \sqrt{34,25} \approx 5,85$;

$s_c = \overline{S_cC} = \sqrt{2^2 + 5,5^2} = \sqrt{34,25} \approx 5,85$.

9. a) $(3;\ 2\frac{2}{3})$

b) $(3;\ 2\frac{1}{2})$





1.

| | $\overline{P_1P_2}$ | $\overline{P_2P_3}$ | $\overline{P_1P_3}$ | A (Flächeneinheiten = FE) |
|---|---|---|---|---|
| a) | 5 | $\sqrt{13} \approx 3,61$ | $\sqrt{26} \approx 5,1$ | $\left\lvert\frac{1}{2}(-2) + \frac{5}{2}\cdot 5 + 1\cdot(-3)\right\rvert = 8,5$ |
| b) | 8 | 6 | 10 | $\lvert 2\cdot(6) - 2\cdot(-6) - 2\cdot(0)\rvert = 24$ |
| c) | 10 | $\sqrt{58} \approx 7,62$ | $\sqrt{194} \approx 13,9$ | $\left\lvert\frac{6}{2}\cdot 5 - \frac{13}{2}\cdot 8\right\rvert = 37$ |
| d) | $\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ | $\left[(x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ | $\sqrt{x_3^2+y_3^2}$ | $\left\lvert(x_2y_3 - x_3y_2)\cdot\frac{1}{2}\right\rvert$ |

2. $A = \left\lvert\frac{4+6}{2}\cdot 1 + \frac{6+3}{2}\cdot 3 + \frac{3+7}{2}\cdot 2\right\rvert = \lvert 5+13,5+10\rvert = 28,5$ (in FE)

3. $P_1$, $P_2$ und $P_3$ liegen auf einer Geraden, wenn $x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) = 0$ gilt.

## 4.3. Zwei Geraden

2. a) $3x + y + 1,5 = 0$ b) $5x - 2y - 7 = 0$

c) $y - x = 0$ d) $x + y + 17 = 0$

e) $x - 2y + 3 = 0$ f) $-3x - 4y + 17 = 0$

3.

| | Schnittpunkt mit der y-Achse | Schnittpunkt mit der x-Achse | m | Steigungswinkel $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| a) | $+3$ | $-\frac{3}{2}$ | 2 | $63,4^\circ$ |
| b) | $-\frac{1}{3}$ | $+\frac{1}{3}$ | 1 | $45^\circ$ |
| c) | $+5$ | $+15$ | $-\frac{1}{3}$ | $161,6^\circ$ |
| d) | b | $-\frac{b}{a}$ | a | $\tan\varphi = a$ |

4. a) $3x - y + 1 = 0$
   b) $3x - y + 3 = 0$
   c) $3x - y - 3 = 0$
   d) $3x - y - 4 = 0$
   e) $3x - y + 5 = 0$

5. a) $2x - y - 2 = 0$
   b) $x - y + 1 = 0$
   c) $x - 2y + 5 = 0$
   d) $x + 2y - 11 = 0$

6.

| | Schnittpunkt mit der x-Achse | y-Achse | m |
|---|---|---|---|
| a) | 2 | 3,2 | $-1,6$ |
| b) | 2 | $2\frac{2}{9}$ | $-1\frac{1}{9}$ |
| c) | 4,3 | 3,7 | $-\frac{37}{43}$ |
| d) | $\frac{75}{114}$ | 7,5 | $-11,4$ |
| e) | $\sqrt{5}$ | $-3\sqrt{2}$ | $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ |

7. a) $y = \frac{4}{3}x$ b) $y = -\frac{3}{2}x$ c) $y = 2x$
   d) $y = \frac{3}{2}x$ e) $y = -\frac{2}{7}x$ f) $y = -x$
   g) $y = x$ h) $y = -\frac{b}{a}x$





8.

| | Gleichung | Abschnitte auf den Achsen a | b | Achsenabschnittsgleichung |
|---|---|---|---|---|
| a) | $y - x - 1 = 0$ | $-1$ | 1 | $\frac{x}{-1} + y = 1$ |
| b) | $3y = 4x$ | 0 | 0 | |
| c) | $y + x - 5 = 0$ | 5 | 5 | $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ |
| d) | $6y + x + 1 = 0$ | $-1$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{-1}{6}} = 1$ |
| e) | $y - 3x - 1 = 0$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{x}{\frac{-1}{3}} + y = 1$ |
| f) | $y = x$ | 0 | 0 | |
| g) | $y + x - a = 0$ | a | a | $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ |

9. a) $y = 5x - 4$; $y = -4x + 5$; $y = \frac{1}{2}x + 5$
   b) $25,35^\circ$; $52,13^\circ$; $102,52^\circ$

10. $bx + ay = ab$; $bx - ay = -ab$; $-bx - ay = ab$;
    $-bx + ay = -ab$
    Größe der Seiten des Rhombus: $\sqrt{a^2 + b^2}$

11. a) $3x + 2y = 6$ b) $2x - 3y = 6$
    c) $6x - 5y = 30$ d) $x + y = a$
    e) $-x + y = a$

12. Achsenabschnitte:
    a) 3 und 4; b) 2 und $-3$; c) 1 und 2;
    d) 3 und $-1$; e) $\frac{1}{3}$ und 2; f) 1 und 1;
    g) 1 und $-1$; h) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$.

13. $m = -\frac{b}{a}$

14. a) vgl. Lösungen der 2. Aufgabe

b) vgl. Lösungen der 7. Aufgabe (Umformen)

15. a) $\dfrac{x}{-\frac{C}{A}} + \dfrac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ b) $\dfrac{x}{-\frac{n}{m}} + \dfrac{y}{n} = 1$

16. a) (3;4) b) (-2;4) c) (2;3)

d) $(-\frac{11}{2}; -\frac{5}{2})$ e) $(\frac{6}{5};\frac{6}{5})$ f) Geraden laufen parallel

g) (1;1) h) Geraden laufen parallel

i) $\left(\frac{a(b-n)}{am+b}; \frac{b(am+n)}{am+b}\right)$

17. A $(\frac{12}{11}; -\frac{8}{11})$, B $(\frac{6}{5}; -\frac{2}{5})$, C $(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$

$y_{S_1} = -\frac{17}{31}x + \frac{2}{31}$

$y_{S_2} = -\frac{49}{2}x + 29$

$y_{S_3} = \frac{22}{29}x - \frac{616}{319}$

S $(\approx 1,2; \approx -0,6)$

18. a) A(4;10), B(2;2) und C(12;4)

b) A(2;1), B(-4;-1) und C(3;-2)

19. a) $2x - 3y - 1 = 0$

b) $5x - 6y - 8 = 0$

c) $4x + 3y + 2 = 0$

d) $2x - y - 3 = 0$

e) $Ax + By + a(B - A) = 0$

20. $x + 2y - 8 = 0$

21. $x + 2y - 5 = 0$

S $(-\frac{3}{5};\frac{14}{5})$

22. $y = \frac{a}{b}x$

S. 201 bis 202



23.

| | Gerade $\perp$ g | Schnittpunkt | Abstand |
|---|---|---|---|
| a) | $y = x$ | $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| b) | $y = 2x$ | $(\frac{8}{5}; \frac{16}{5})$ | $\frac{4}{5}\sqrt{20} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$ |
| c) | $y = x$ | $(1; 1)$ | $\sqrt{2}$ |
| d) | $y = \frac{3}{4}x$ | $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$ | 1 |

24. $\frac{14}{5}\sqrt{5}$

25. A(-1;-3), B(2;-1) und C(3;3)

a) $AB \equiv 2x - 3y - 7 = 0$

$BC \equiv 4x - y - 9 = 0$

$AC \equiv 3x - 2y - 3 = 0$

b) $\overline{AB} = \sqrt{13} \approx 3,606$

$\overline{BC} = \sqrt{17} \approx 4,12$

$\overline{AC} = \sqrt{52} \approx 7,21$

c)

| | Mittelpunkt | m | Gleichung der Mittelsenkrechten |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | $(\frac{1}{2}; -2)$ | $-\frac{3}{2}$ | $6x + 4y + 5 = 0$ |
| $\overline{BC}$ | $(\frac{5}{2}; 1)$ | $-\frac{1}{4}$ | $2x + 8y - 13 = 0$ |
| $\overline{AC}$ | $(1; 0)$ | $-\frac{2}{3}$ | $2x + 3y - 2 = 0$ |

d) $h_a \equiv x + 4y + 13 = 0$

$h_b \equiv 3y + 2x - 1 = 0$

$h_c \equiv 3x + 2y - 15 = 0$

e) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten: M (-2,3;2,2);

Radius des Umkreises: 5,36.

f) A(9;0), B(-5;0) und C(0;12):

S. 202

a) $AB \equiv y = 0$

$AC \equiv 12x + 9y - 108 = 0$

$BC \equiv 12x - 5y + 60 = 0$

b) $\overline{AB} = 14$

$\overline{AC} = 15$

$\overline{BC} = 13$

c)

| | Mittelpunkt | m | Gleichung der Mittelsenkrechten |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | (2;0) | $\infty$ | $x = 2$ |
| $\overline{AC}$ | (4,5;6) | $\frac{3}{4}$ | $6x - 8y + 21 = 0$ |
| $\overline{BC}$ | (-2,5;6) | $-\frac{5}{12}$ | $10x + 24y - 119 = 0$ |

d) $h_b \equiv 3x - 4y + 15 = 0$

$h_a \equiv 5x + 12y - 45 = 0$

$h_c \equiv x = 0$

e) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten: M $(2;4\frac{1}{8})$;

Radius des Umkreises: $\frac{1}{8}\sqrt{4225} = 8{,}125$.

27. S (3;-1);

$3x + 2y - 7 = 0$

28. a) $m_1 = m_2 = \frac{3}{5}$; Geraden laufen parallel

b) Geraden schneiden sich im Punkt S $(\frac{1}{7};-\frac{3}{14})$

c) Geraden schneiden sich im Punkt S $(\frac{7}{13};\frac{17}{13})$

S. 202



## 4.4. Anwendungsaufgaben

1. Die positive x-Achse stimmt mit der Nordrichtung, die positive y-Achse mit der Ostrichtung überein. In der Geodäsie sind x- und y-Achse vertauscht.

2.

| | Richtung | Winkel mit Nord-Süd-Richtung | Abstand vom Nullpunkt (runde Zahlen) |
|---|---|---|---|
| a) | Nord-Ost | N 56,8° O | 3,93 km |
| b) | Nord-Ost | N 76,9° O | 2,36 km |
| c) | Nord-Ost | N 27,6° O | 5,08 km |

3. $P_1$ liegt nördlicher, $P_2$ östlicher.

$\overline{P_1P_2} \approx 3{,}02$ km

Winkel: $\approx 116{,}5°$

4. $P_2$ ($x_2 = 2344$ m; $y_2 = 2949$ m)

5. a) $A \approx 2133{,}50$ m$^2$

b) $U \approx 196{,}7$ m

6. a) $l \approx 389{,}6$ m

b) $A \approx 2142{,}8$ m$^2$

7. $e \approx 8{,}61$ km

Richtung: N 12,8° O (runder Wert)

8. $e \approx 19{,}1$ km

Richtung: N 4,8° O (runder Wert)

9. $e \approx 3{,}1$ km

Richtung: N 29° O (runder Wert)

10. Zielrichtung: N 20,19° O (runder Wert)

$e \approx 13{,}63$ km

S. 202

11. x = 14,27 km   y = 4,37 km

## 5. Vektorrechnung

### 5.1. Vektoren

1. a) $2\sqrt{2}$; 45° b) $2\sqrt{5}$; 153,44°

2. a) $P_1'$ (5,5; 6,598)
   b) $P_2'$ (-7,214; -0,83)
   c) $P_3'$ (6,1782; -7,979)

3.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{a}\rvert$ | 5 | 4,923 | 5 | $\sqrt{10}$ |
| $\varphi$ | 53,12° | 114° | 306,88° | 198,43° |

4.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| x | 2,5712 | 4,33 | - 6,0 | - 2,475 |
| y | 3,064 | 2,5 | 1,6 | - 2,475 |

5. b) P(-1,54;4,23) c) P'(-4,4;-0,8), P"(1,5;-4,2)

6.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{a}\rvert$ | 4 | 7 | $\frac{3}{2}$ | $2\sqrt{3}$ |
| $\varphi$ | 0° | 180° | 180° | 0° |

7. x = - 1,5; y = 0,0

8.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $\lvert-\mathfrak{a}\rvert$ | 3 | $\sqrt{3}$ | 4,3 |
| $\varphi$ | 180° | 0° | 55° |

S. 202 bis 209



### 5.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

1.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{s}\rvert$ | 1 | 1 | $\sqrt{2}$ |
| $\varphi$ | 0° | 270° | 135° |

2.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{s}\rvert$ | 6,8 | 3,5 | 3 |
| $\varphi$ | 12,8° | 192,5° | 0° |

3. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$

4.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{c}\rvert$ | 5 | 9,1 | 3 |
| $\varphi$ | 233,1° | 319,7° | 210° |

5. Die Summe ist der Nullvektor.
   $\sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = \alpha + \gamma$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \beta + \alpha$,
   $\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \gamma + \beta$

6. Abbildung 7

7. Nullvektor

8. Abbildung 8

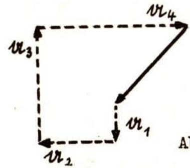



Abb. 7

9. $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_7$; $P_1P_2 + P_2P_6 + P_6P_7$;
   $P_1P_4 + P_4P_3 + P_3P_7$; $P_1P_4 + P_4P_8 + P_8P_7$;
   $P_1P_5 + P_5P_6 + P_6P_7$; $P_1P_5 + P_5P_8 + P_8P_7$

10.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{d}\rvert$ | 2 | $2\sqrt{3}$ | 7,155 | 9,1 |
| $\varphi$ | 0° | 330° | 114,9° | 180° |

S. 214 bis 215

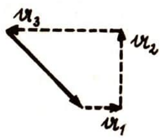



Abb. 8

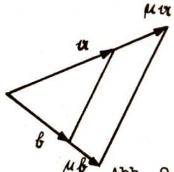



Abb. 9

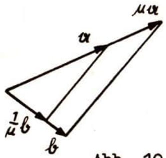



Abb. 10

11. $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$

12. $v = 7{,}5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $v_s = 1{,}2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

13. $v_s = 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

14. 1 785 kp; 33,4°, 19,6°

15. $b = 6{,}6\ \mathrm{cm\ s^{-2}}$;

16. 71 kp

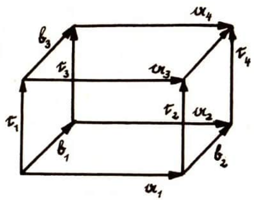



Abb. 11

## 5.3. Multiplikation mit skalaren Faktoren

2.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{b}\rvert$ | 15 | 6 | $\frac{8}{3}$ | 1 |
| $\varphi$ | 60° | 120° | 45° | 240° |

3. a) Abbildung 9 b) Abbildung 10

4. Z. B. $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_6 - \mathfrak{a}_2$ oder $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_6 - \mathfrak{a}_4 = \mathfrak{o}$

5. Abbildung 11. Z. B. $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{o}$,
$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_4 - \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{o}$,
$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_4 - \mathfrak{b}_4 - \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{c}_3 - \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$.





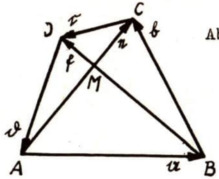



Abb. 12

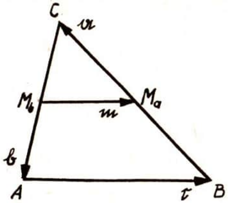



Abb. 13

6. a) Abbildung 12

Voraussetzung: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\mathfrak{n}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\mathfrak{f}$

Behauptung: $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{d} = -\mathfrak{b}$

Beweis:

(1)
$$\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{f} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{c} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{f} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{c} = -\mathfrak{a}$$

(2)
$$\mathfrak{b} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{d} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{d} = -\mathfrak{b}$$

b) Abbildung 13

Voraussetzung: $\overrightarrow{BM_a} = \overrightarrow{M_aC} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{CM_b} = \overrightarrow{M_bA} = \frac{1}{2}\mathfrak{b}$

Behauptung: $\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}$

Beweis:
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{m} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = -\mathfrak{c}$$
$$2\mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$
$$2\mathfrak{m} - \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{m} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{c}$$

c) Abbildung 14

Voraussetzung: $\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{M_aB} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{M_bC} = \frac{1}{2}\mathfrak{b}$,
$\overrightarrow{CM_c} = \overrightarrow{M_cD} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\overrightarrow{DM_d} = \overrightarrow{M_dA} = \frac{1}{2}\mathfrak{d}$

Behauptung: $\mathfrak{n} = -\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f} = -\mathfrak{f}$

Beweis:

$$(1)\quad \frac{1}{2}\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{n} = \mathfrak{o}$$
$$\frac{1}{2}\mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{d} - \mathfrak{g} = \mathfrak{o}$$
$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) - \mathfrak{n} - \mathfrak{g} = \mathfrak{o}$$
$$-\mathfrak{n} - \mathfrak{g} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{n} = -\mathfrak{g}$$

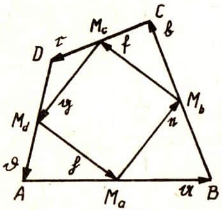



Abb. 14

$$(2)\quad \frac{1}{2}\mathfrak{d} + \frac{1}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$\frac{1}{2}\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) - \mathfrak{f} - \mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$-\mathfrak{f} - \mathfrak{f} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{f} = -\mathfrak{f}$$

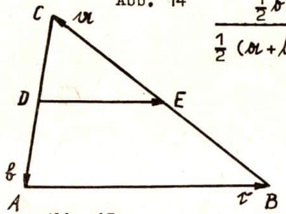



Abb. 15

7. Satz: Die Parallele zu einer Dreiecksseite, die halb so groß wie diese ist, halbiert die beiden anderen Dreiecksseiten (Abb. 15).

Voraussetzung: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}$

Behauptung: $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}$





Beweis: $\overrightarrow{CD} = m\,\mathfrak{b}$, $\overrightarrow{EC} = n\,\mathfrak{a}$

$$m\,\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c} + n\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{b} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{c}$$
$$(n - m)\mathfrak{a} + \left(\frac{1}{2} - m\right)\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ nicht parallel sind, ist $n - m = 0$ und $\frac{1}{2} - m = 0$. Daraus folgt $m = n = \frac{1}{2}$.

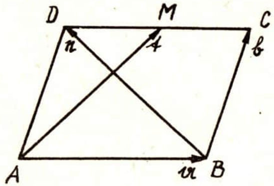



Abb. 16

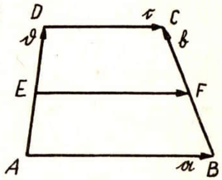



Abb. 17

8. a) Anwendung des Strahlensatzes (Strahlenpunkt: der Schnittpunkt)

b) Abbildung 16

Voraussetzung: $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}$

Behauptung: $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\mathfrak{n}$

Beweis: $\overrightarrow{BS} = \lambda\mathfrak{n}$, $\overrightarrow{AS} = \mu\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{n} - \mu\mathfrak{t} = \mathfrak{o}$$
$$(1-\mu)\mathfrak{t} - \frac{1}{2}\mathfrak{a} - (1-\lambda)\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$$
$$2(1-\mu)\mathfrak{t} - 2(1-\lambda)\mathfrak{n} = \mu\mathfrak{t} - \lambda\mathfrak{n}$$
$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

9. Abbildung 17

Voraussetzung: $\mathfrak{c} \parallel \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\mathfrak{d}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\mathfrak{b}$

Behauptung: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$

Beweis:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - \mathfrak{d} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} - \overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\,\overrightarrow{EF} = \mathfrak{o}$$
$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$$

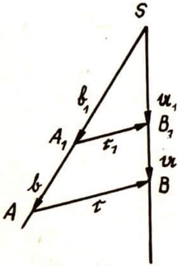



Abb. 18

10. Abbildung 18

a) Voraussetzung: $\mathfrak{c}_1 = t\,\mathfrak{c}$

Behauptung: (1) $\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}$

(2) $\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$

Beweis:

$$\mathfrak{b}_1 = \lambda\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a} = \mu\,\mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$(1)\ \lambda\mathfrak{b} + t\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \mu\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$\lambda\mathfrak{b} - \mu\mathfrak{a} = t\mathfrak{b} - t\mathfrak{a}$$
$$\lambda = \mu = t$$
$$\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}$$

S. 221



$$(2)\ \lambda\mathfrak{b} + t\mathfrak{c} - \mu(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}$$
$$\lambda\mathfrak{b} - \mu\mathfrak{c} = \mu\mathfrak{b} - t\mathfrak{c}$$
$$\lambda = \mu = t$$
$$\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$$

b) Voraussetzung: $\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}$

Behauptung: $\mathfrak{c}_1 \parallel \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1 = \lambda\mathfrak{c}$

Beweis:

$$\mathfrak{b}_1 = \lambda\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a}_1 = \lambda\mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$\lambda\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_1 - \lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$\lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{o}$$
$$-\lambda\mathfrak{c} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{c}$$

11. $\mathfrak{r} = k_1\mathfrak{a} + k_2\mathfrak{b}$ $\quad k_1 = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

$k_2 = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

## 5.4. Komponenten von Vektoren

1. a)

| a) | $\mathfrak{s}_1$ | $\mathfrak{s}_2$ | $\mathfrak{s}_3$ | $\mathfrak{s}_4$ | $\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{w}_3$ | $\mathfrak{w}_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{s}_1$ | $\mathfrak{s}_1$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{s}_1$ | $\mathfrak{o}$ | $-\frac{1}{2}\mathfrak{s}_1$ | $\frac{1}{2}\mathfrak{s}_1$ | $\frac{1}{2}\mathfrak{s}_1$ | $-\frac{1}{2}\mathfrak{s}_1$ |
| $\mathfrak{s}_2$ | $\mathfrak{o}$ | $\mathfrak{s}_2$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{s}_2$ | $-\frac{1}{2}\mathfrak{s}_2$ | $-\frac{1}{2}\mathfrak{s}_2$ | $\frac{1}{2}\mathfrak{s}_2$ | $\frac{1}{2}\mathfrak{s}_2$ |

| b) | $\mathfrak{s}_1$ | $\mathfrak{s}_2$ | $\mathfrak{s}_3$ | $\mathfrak{s}_4$ | $\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{w}_3$ | $\mathfrak{w}_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{w}_1$ | $-\mathfrak{w}_1$ | $-\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{o}$ |
| $\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{w}_2$ | $-\mathfrak{w}_2$ | $-\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{o}$ | $\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{w}_2$ |

S. 221 bis 229

2.

| | $\mathfrak{u}_1$ | $\mathfrak{u}_2$ | $\mathfrak{u}_3$ | $\mathfrak{u}_4$ | $\mathfrak{u}_5$ | $\mathfrak{u}_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{n}_1$ | $2\mathfrak{n}_1$ | $\mathfrak{n}_1$ | $-\mathfrak{n}_1$ | $-2\mathfrak{n}_1$ | $-\mathfrak{n}_1$ | $\mathfrak{n}_1$ |
| $\mathfrak{n}_2$ | $\mathfrak{o}$ | $\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $-\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ |

| | $\mathfrak{b}_1$ | $\mathfrak{b}_2$ | $\mathfrak{b}_3$ | $\mathfrak{b}_4$ | $\mathfrak{b}_5$ | $\mathfrak{b}_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{n}_1$ | $-\mathfrak{n}_1$ | $-2\mathfrak{n}_1$ | $-\mathfrak{n}_1$ | $\mathfrak{n}_1$ | $2\mathfrak{n}_1$ | $\mathfrak{n}_1$ |
| $\mathfrak{n}_2$ | $\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $\mathfrak{o}$ | $-\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $-\mathfrak{n}_2\sqrt{3}$ | $\mathfrak{o}$ | $\mathfrak{n}_2\sqrt{5}$ |

4. a) $\mathfrak{a} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{i} + \frac{5}{2}\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} + 2\sqrt{3}\,\mathfrak{j}$

c) $\mathfrak{c} = -3\sqrt{2}\,\mathfrak{i} + 3\sqrt{2}\,\mathfrak{j}$

d) $\mathfrak{d} = -3{,}3\mathfrak{i} + 1{,}2\mathfrak{j}$

5.

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{p}_x$ | $3\mathfrak{i}$ | $-2\mathfrak{i}$ | $2{,}8\mathfrak{i}$ | $-1{,}5\mathfrak{i}$ |
| $\mathfrak{p}_y$ | $2\mathfrak{j}$ | $6\mathfrak{j}$ | $-4{,}1\mathfrak{j}$ | $-3{,}5\mathfrak{j}$ |

6. a) $\mathfrak{a}\,(\sqrt{13};56{,}3^\circ)$ b) $\mathfrak{b}\,(\sqrt{5};333{,}4^\circ)$ c) $\mathfrak{c}\,(\sqrt{13};213{,}7^\circ)$

7. a) $\mathfrak{p} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$ b) $\mathfrak{p} = -2\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$

c) $\mathfrak{p} = 4{,}5\mathfrak{i} - 3{,}2\mathfrak{j} + 0{,}8\mathfrak{k}$

8. Die Endpunkte der Vektoren liegen auf dem Umfang des Quadrates mit den Ecken (5;0), (0;5), (-5;0), (0;-5). Es ist $|a| + |b| = 5$.





9. b)

| | $\mathfrak{b}_1$ | $\mathfrak{b}_2$ | $\mathfrak{b}_3$ | $\mathfrak{b}_4$ | $\mathfrak{b}_5$ | $\mathfrak{b}_6$ | $\mathfrak{b}_7$ | $\mathfrak{b}_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{b}_x$ | $-2\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{o}$ | $-2\mathfrak{i}$ | $-\mathfrak{i}$ | $-\mathfrak{i}$ | $-2\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{o}$ | $-2\mathfrak{i}$ |
| $\mathfrak{b}_y$ | $\mathfrak{j}$ | $2\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{o}$ | $2\mathfrak{j}$ | $-2\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{o}$ | $-2\mathfrak{j}$ | $-\mathfrak{j}$ |

| | $\mathfrak{b}_9$ | $\mathfrak{b}_{10}$ | $\mathfrak{b}_{11}$ | $\mathfrak{b}_{12}$ | $\mathfrak{b}_{13}$ | $\mathfrak{b}_{14}$ | $\mathfrak{b}_{15}$ | $\mathfrak{b}_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{b}_x$ | $2\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{o}$ | $2\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{i}$ | $2\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{o}$ | $2\mathfrak{i}$ |
| $\mathfrak{b}_y$ | $-\mathfrak{j}$ | $-2\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{o}$ | $-2\mathfrak{j}$ | $2\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{o}$ | $2\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{j}$ |

c) Die erzeugenden Vektoren sind mit $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$ zu vervielfachen.

10. a) $\mathfrak{w}_1 = 4\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{w}_2 = -4\mathfrak{i} + 0{,}5\mathfrak{j}$

c) $\mathfrak{w}_3 = -3{,}8\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j}$ d) $\mathfrak{w}_4 = 7\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

11.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathfrak{w}\rvert$ | 3 | $\sqrt{3}$ | 3,5 |
| $\varphi$ | $180^\circ$ | $0^\circ$ | $90^\circ$ |

| | $\mathfrak{w}_1$ | $-\mathfrak{w}_1$ | $\mathfrak{w}_2$ | $-\mathfrak{w}_2$ | $\mathfrak{w}_3$ | $-\mathfrak{w}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{i}$ | 3 | $-3$ | $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | 0 | 0 |
| $\mathfrak{j}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-3{,}5$ | 3,5 |

12. a) $5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}$ b) $-1{,}7\mathfrak{i} - 5{,}2\mathfrak{j}$ c) $0{,}4\mathfrak{i} + 1{,}2\mathfrak{j}$

13. a) $-\mathfrak{j}$ b) $2{,}9\mathfrak{i} + 4{,}9\mathfrak{j}$

14. a) $P_1'(1{,}3;4{,}5)$, $\mathfrak{p}_1' = 1{,}3\mathfrak{i} + 4{,}5\mathfrak{i}$

b) $P_2'(-3{,}7;-2{,}1)$, $\mathfrak{p}_2' = -3{,}7\mathfrak{i} - 2{,}1\mathfrak{j}$

15. a) Abbildung 19. $\mathfrak{b}_1 = 5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$

b) Abbildung 20. $\mathfrak{b}_2 = 1{,}5\mathfrak{i} + 2{,}6\mathfrak{j} + 0{,}7\mathfrak{k}$

c) Abbildung 21. $\mathfrak{b}_3 = -1{,}2\mathfrak{i} - 1{,}4\mathfrak{j} - 2{,}6\mathfrak{k}$

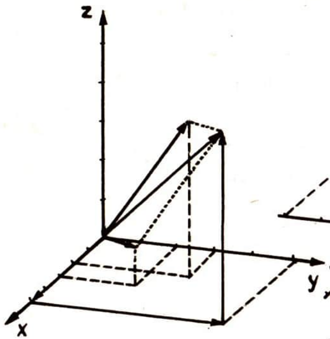



Abb. 19

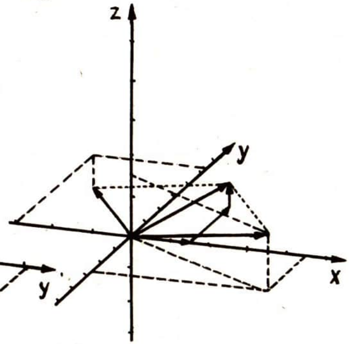



Abb. 20

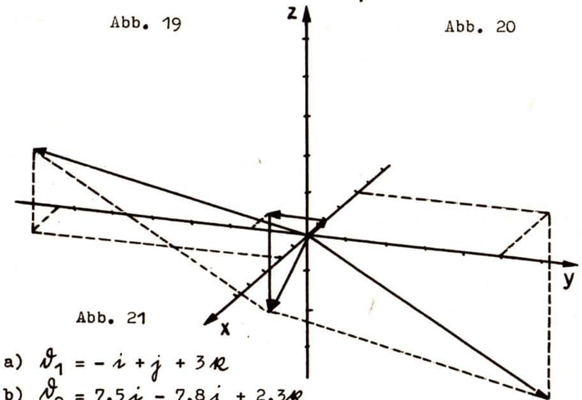



Abb. 21

16. a) $\mathfrak{d}_1 = -\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{d}_2 = 7{,}5\mathfrak{i} - 7{,}8\mathfrak{j} + 2{,}3\mathfrak{k}$

c) $\mathfrak{d}_3 = -5{,}2\mathfrak{i} + 11{,}4\mathfrak{j} - 7{,}0\mathfrak{k}$

17. $\mathfrak{w} = 4{,}4\,\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^0(1;301{,}0^\circ)$ oder $\mathfrak{w}^0 = 0{,}51\mathfrak{i} - 0{,}86\mathfrak{j}$

18. $\mathfrak{a} = 5\,\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{a}^0(1;53{,}1^\circ)$ oder $\mathfrak{a}^0 = \frac{3}{5}\mathfrak{i} + \frac{4}{5}\mathfrak{j}$





19. a) $|\mathfrak{p}_1| = \sqrt{14}$; $\alpha_1 = 57{,}7^\circ$, $\alpha_2 = 36{,}7^\circ$, $\alpha_3 = 74{,}5^\circ$; $P_1(2;3;1)$

b) $|\mathfrak{p}_2| = \sqrt{29}$; $\alpha_1 = 56{,}1^\circ$, $\alpha_2 = 138{,}0^\circ$, $\alpha_3 = 111{,}8^\circ$; $P_2(3;-4;-2)$

c) $|\mathfrak{p}_3| = 5\sqrt{2}$; $\alpha_1 = 124{,}5^\circ$, $\alpha_2 = 115{,}1^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$; $P_3(-4;-3;5)$

20. $-4\mathfrak{i} + 20\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$

21. a) $\mathfrak{p}_1 = (13;21;-22)$ b) $\mathfrak{p}_2 = (5;11;1)$

c) $\mathfrak{p}_3 = (\frac{11}{12};\frac{19}{12};\frac{1}{2})$

22. $A = 9$; $\cos\alpha_1 = \frac{7}{9}$, $\cos\alpha_2 = \frac{4}{9}$, $\cos\alpha_3 = \frac{4}{9}$

23. Beträge der Komponenten: 3,7; 2,6.

24. a) Komponenten: $-4\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$, $-15\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 9\mathfrak{k}$.
Es ist $\mathfrak{p}_1 + 3\mathfrak{b} - 2\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

b) Daß sich keine Zahlen u, v, w verschieden von Null finden lassen, so daß $u\,\mathfrak{p}_2 + v\,\mathfrak{a} + w\,\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist, bedeutet, daß die Vektoren $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nicht in einer Ebene liegen.

25. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ mögen die Anfangs- bzw. Endpunkte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verbinden. Es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{q} - \mathfrak{b} + \mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{t} - \frac{1}{2}\mathfrak{q} - \mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$. Daraus folgt $\mathfrak{t} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.
Das Ergebnis ist von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ unabhängig.

26. 94,6 kp; 209,7 kp

27. Je 5 kp.

28. Gleichgewichtsbedingung: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{R} = \mathfrak{o}$.

$\overrightarrow{P_4P_1} = (-4;-2;-8)$, $\overrightarrow{P_4P_2} = (10;-2;-8)$,

$\overrightarrow{P_4P_3} = (-4;4;-8)$, $\overrightarrow{P_4P_5} = (4;10;-8)$

$|\overrightarrow{P_4P_1}| = 2\sqrt{21}$; $|\overrightarrow{P_4P_2}| = 2\sqrt{42}$; $|\overrightarrow{P_4P_3}| = 4\sqrt{6}$;

$|\overrightarrow{P_4P_5}| = 6\sqrt{5}$

Richtungskosinus:

$\mathfrak{A}$: $-\frac{2}{\sqrt{21}}, \ -\frac{1}{\sqrt{21}}, \ -\frac{4}{\sqrt{21}}$

$\mathfrak{B}$: $\frac{5}{\sqrt{42}}, \ -\frac{1}{\sqrt{42}}, \ -\frac{4}{\sqrt{42}}$

$\mathfrak{C}$: $-\frac{1}{\sqrt{6}}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}, \ -\frac{2}{\sqrt{6}}$

$\mathfrak{R}$: $\frac{2}{3\sqrt{5}}; \ \frac{5}{3\sqrt{5}}, \ -\frac{4}{3\sqrt{5}}$

$A = \frac{11\sqrt{21}}{21\sqrt{5}}\,K$; $B = -\frac{4\sqrt{42}}{21\sqrt{5}}\,K$; $C = -\frac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{5}}\,K$

$\mathfrak{A}$ ist Zugkraft, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind Druckkräfte.

29. $34{,}2^\circ$; $52{,}2^\circ$

30. $\mathfrak{R} = -200\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{D} = -400\,\mathfrak{i}$, $\mathfrak{Z} = 400\,\mathfrak{i} - 200\,\mathfrak{j}$

Tragarm: 400 kp Druck, Zugstange: $200\sqrt{5}$ kp Zug

## 5.5. Anwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes

1. a) 25 b) 13 c) 5 d) 10 e) $\sqrt{29}$

2. a) $\mathfrak{r}_m = 5{,}5\,\mathfrak{i} + 4{,}5\,\mathfrak{j}$ M (5,5;4,5)





b) $\mathfrak{r}_m = \frac{7}{2}\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ M $(\frac{7}{2};\frac{1}{2};1)$

c) $\mathfrak{r}_m = -2{,}5\,\mathfrak{i} - \mathfrak{j}$ M (-2,5;-1)

d) $\mathfrak{r}_m = 7\,\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} + \frac{11}{6}\mathfrak{k}$ M $(7;6;\frac{11}{2})$

3. a) $\mathfrak{r}_3 = \frac{26}{5}\mathfrak{i} + \frac{26}{5}\mathfrak{j}$, T $(\frac{26}{5};\frac{26}{5})$

b) $\mathfrak{r}_3 = 6\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}$, T (6;5)

4. a) $\mathfrak{r}_3 = \frac{18}{5}\mathfrak{i} + \frac{11}{5}\mathfrak{j} + \frac{19}{5}\mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{r}_3 = 5\mathfrak{i} + \frac{18}{5}\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$

5. a) 50 b) $47\frac{1}{2}$

c) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $2s = a + b + c$

$a = \sqrt{26}$, $b = \sqrt{29}$, $c = \sqrt{3}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{78}$

6. a) $\mathfrak{r}_s = \frac{14}{3}\mathfrak{i} + \frac{5}{3}\mathfrak{j}$ S $(\frac{14}{3};\frac{5}{3})$

b) $\mathfrak{r}_s = \frac{11}{3}\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$ S $(\frac{11}{3};2)$

7. a) $\mathfrak{r}_s = \frac{10}{3}\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{r}_s = \frac{7}{3}\mathfrak{i} + \frac{8}{3}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

8. a) $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1'$;

b) $x_1 = x_0 + x_1'$, $y_1 = y_0 + y_1'$

9. $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1'$; $x_1 = x_0 + x_1'$, $y_1 = y_0 + y_1'$,

$z_1 = z_0 + z_1'$

10. $\mathfrak{r} = (x_1 + ta_x)\mathfrak{i} + (y_1 + ta_y)\mathfrak{j} + (z_1 + ta_z)\mathfrak{k}$

11. a) $y = -x$ b) $y = x$ c) $y = -1{,}5\,x - 21$

12. $\mathfrak{r} = -2\,(t + 1)\,\mathfrak{i} + t\,\mathfrak{j}$

13. $\mathfrak{r} = (6\,t + 5\,)\,\mathfrak{i} + (4\,t + 3)\mathfrak{j}$

14. AB: $\mathfrak{r} = (t_1 + 2)\mathfrak{i} + (3 - 8\,t_1)\mathfrak{j}$

BC: $\mathfrak{r} = (5\,t_2 + 3)\mathfrak{i} + (12\,t_2 - 5)\,\mathfrak{j}$

CA: $\mathfrak{r} = (8 - 6\,t_3)\mathfrak{i} + (7 - 4\,t_3)\mathfrak{j}$

15. $\mathfrak{r}_{12} = 9\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}$, $\mathfrak{r}_{23} = \frac{40}{13}\mathfrak{i} + \frac{128}{13}\mathfrak{j}$,

$\mathfrak{r}_{31} = -\frac{60}{19}\mathfrak{i} + \frac{116}{19}\mathfrak{j}$

$P_{12}\,(9;-2)$, $P_{23}\,(\frac{40}{13};\frac{128}{13})$, $P_{31}\,(-\frac{60}{19};\frac{116}{19})$

16.

| t | - 3 | - 2 | - 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | - 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| y | - 7 | - 5 | - 3 | - 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| z | - 5 | - 2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |

17. a) $\mathfrak{r} = (3\,t + 4)\,\mathfrak{i} + (3 - t)\mathfrak{j}$

$x = 3\,t + 4$, $y = 3 - t$

b) x-Achse: $t = 3$, y-Achse: $t = -\frac{4}{3}$

c) $x + 3\,y = 13$

18. a) $\mathfrak{r} = (3 - t)\mathfrak{i} + (t + 2)\mathfrak{j} - (t + 1)\mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{r}_x = (3 - t)\,\mathfrak{i}$, $\mathfrak{r}_y = (t + 2)\mathfrak{j}$,

$\mathfrak{r}_z = -\,(t + 1)\,\mathfrak{k}$

c) $x = 3 - t$, $y = t + 2$, $z = -\,(t + 1)$

d) P' (4;1), P" (5;-4), P"' (5;1)

S. 240 bis 241



e) xy-Ebene: $\mathfrak{r} = (4 - t_1)\,\mathfrak{i} + (t_1 + 1)\,\mathfrak{j}$

yz-Ebene: $\mathfrak{r} = (5 + t_2)\mathfrak{j} - (t_2 + 4)\mathfrak{k}$

zx-Ebene: $\mathfrak{r} = (5 - t_3)\mathfrak{i} + (1 - t_3)\mathfrak{k}$

f) Abbildung 22

g) $x + y = 5$, $y + z = 1$, $x - z = 4$

Die Gleichungen stellen die Projektionen der Geraden auf die Koordinatenebenen dar. Man braucht zwei von diesen Gleichungen, um die Gerade im Raum darzustellen.

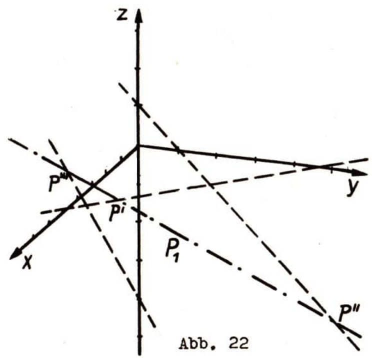



Abb. 22

19. a) $\mathfrak{r} = (2 - r + 3\,s)\,\mathfrak{i} + (3 + 2r - s)\mathfrak{j} + (7{+}3r{+}2s)\mathfrak{k}$

b) $x = 2 - r + 3s$, $y = 3 + 2r - s$, $z = 7 + 3r + 2s$

c) $s_1$: $x = -\frac{17}{2} - \frac{11}{2}\,t_1$ $\quad 7x + 11y - 12 = 0$

$y = \frac{13}{2} + \frac{7}{2}\,t_1$

$s_2$: $y = 7 + 5\,t_2$ $\quad 11y - 5z - 12 = 0$

$z = 13 + 11\,t_2$

S. 241

$s_3$: $x = 11 + 5\,t_3$ $\qquad 7x - 5z - 12 = 0$

$\quad z = 13 + 7\,t_3$

d) $\mathfrak{a}_1 = (11;-7;0)$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_1 = (-11;7;0)$

$\mathfrak{a}_2 = (0;5;11)$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_2 = (0;-5;-11)$

$\mathfrak{a}_3 = (5;0;7)$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_3 = (-5;0;-7)$

e) Abbildung 23

20. a) $\mathfrak{x} = (1 - r)\,\mathfrak{i} + (r + s)\,\mathfrak{j} - s\,\mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{x} = (3\,r + 5\,s)\,\mathfrak{i} - (r + 4\,s)\,\mathfrak{j} + (2\,r + 3\,s)\,\mathfrak{k}$

c) $\mathfrak{x} = (4 - 6r - 2s)\,\mathfrak{i} + (5 - 8r - 10s)\,\mathfrak{j} + (6 - 7r + 7s)\,\mathfrak{k}$

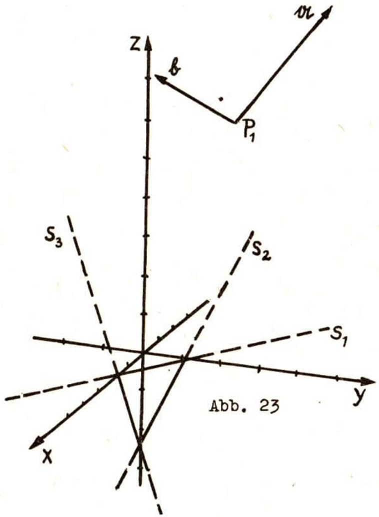



Abb. 23





## 5.6. Skalarprodukt

1. a) $6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) 6 c) 0 d) - 1,28

2. b) $\lambda = \frac{a}{b}\cos\gamma$ , $\mu = \frac{b}{a}\cos\gamma$ ; $\lambda : \mu = a^2 : b^2$

3. a) Der Wert ist proportional a. Proportionalitätsfaktor ist $b \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.

b) Die Zuordnung ist eine Funktion von $\varphi_1$, die aus der Kosinusfunktion durch Verschiebung um $\varphi_2$ parallel zur $\varphi$-Achse in der positiven Richtung und Streckung senkrecht zur $\varphi$-Achse auf das a.b-fache hervorgeht.

Zahlenfälle:

a) $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = \frac{3}{2}\,a$

b) 1. $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = 5 \cdot \cos\varphi_1$ Abbildung 24

2. $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = 3 \cdot \cos(\varphi_1 - 45^\circ)$ Abbildung 25

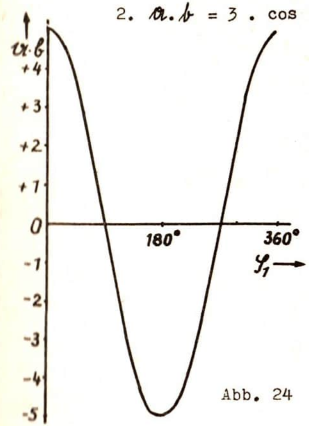



Abb. 24

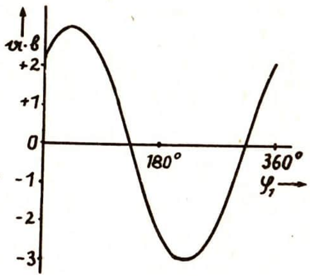



Abb. 25

4. $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{v} = v \cdot \cos \gamma = v_x$, $\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{v} = v \cdot \sin \gamma = v_y$

5. Ist $\gamma$ der Winkel zwischen beiden Vektoren, so lautet die Bedingung: $90^\circ < \gamma \leqq 180^\circ$.

6. $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \gamma \mathfrak{c}$ ist ein Vektor, $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = \alpha \mathfrak{a}$ ein anderer Vektor, in keinem Falle ein Skalar.

7. a) 18 b) 10 c) - 21 d) - 19,62

8. $4\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$

9. Das Quadrat aus dem Betrag des Summenvektors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist gleich der Summe der Quadrate aus den Beträgen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und dem doppelten Rechteck aus den Beträgen der Projektion von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ und des Vektors $\mathfrak{a}$.

10. a) $26{,}57^\circ$ b) $0^\circ$ c) $180^\circ$ d) $60^\circ$

Abbildungen 26 bis 29

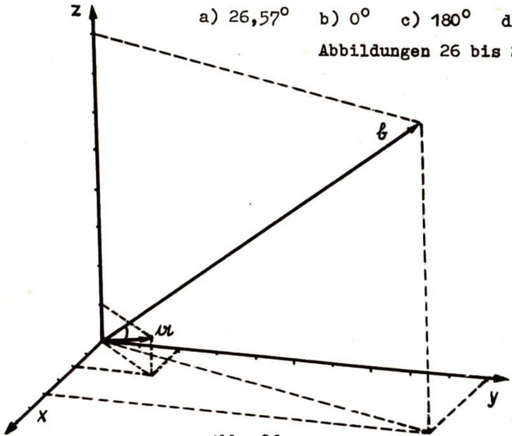



Abb. 26





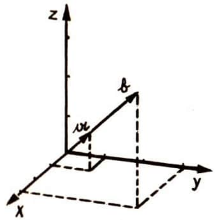



Abb. 27

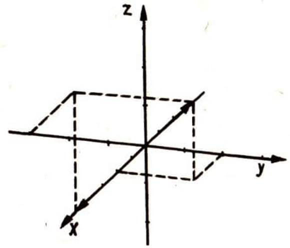



Abb. 28

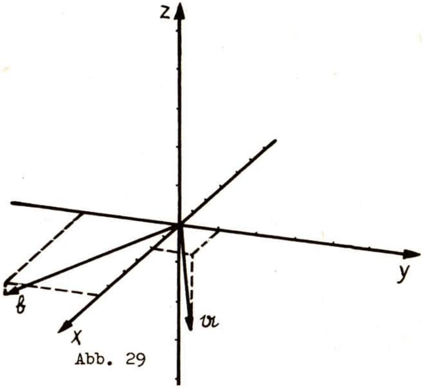



Abb. 29

11. a) $\cos \alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\cos \beta_1 = \frac{4}{5}$, $\cos \gamma_1 = 0$

b) $\cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos \beta_2 = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos \gamma_2 = \frac{4}{\sqrt{29}}$

c) $\cos \alpha_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos \beta_3 = \frac{2}{5}\sqrt{2}$, $\cos \gamma_3 = \frac{3}{10}\sqrt{2}$

12. Die Projektionen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{w}$ sind

$$\mathfrak{a}_v = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{w}}\mathfrak{w} = \frac{4}{3}(2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}),$$

$$\mathfrak{b}_v = \frac{2}{3}(2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}), \quad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_v = 2(2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k})$$

13. Aus $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 0$ folgt die Behauptung.

14. $\mathfrak{a}$, $-\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien die Vektoren vom Kreismittelpunkt nach den Endpunkten des Durchmessers und dem Scheitel. Aus $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 0$ folgt die Behauptung.

15. (1) Satz des Pythagoras

Voraussetzung: $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = 0$

Behauptung: $a^2 + b^2 = c^2$

Beweis:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = -\mathfrak{c}$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 = \mathfrak{c}^2$$
$$\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2$$
$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2$$
$$a^a + b^2 = c^2$$

(2) Kathetensatz

Aus $-\mathfrak{b} = \mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2$ folgt $-2\,\mathfrak{a}^2 = 2\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}$.

Da $-\mathfrak{p}$ der Projektionsvektor von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{c}$ ist, gilt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} = -\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{c}$. Also wird $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{c}$, $a^2 = p\,c$.





(3) Höhensatz

Voraussetzungen: $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{a} = 0$

Behauptung: $h^2 = p\,q$

Beweis: Aus $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ folgt mit $\mathfrak{a} = -\mathfrak{h} - \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} - \mathfrak{q}$

$$\mathfrak{h}^2 + 2\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{p} + \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{h}^2 - 2\,\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{p} + \mathfrak{q}^2 =$$
$$= \mathfrak{p}^2 + 2\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2$$
$$\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}, \quad h^2 = p\,q$$

16. a) Es ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}$. Mithin wird

$$\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2 = 2\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{b}^2 = 2(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2),$$
$$f^2 + g^2 = 2(a^2 = b^2)$$

b) $\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2 = 4\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, $f^2 - g^2 = 4\,a\,b$

17. Sind $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{i}+\mathfrak{j}-\mathfrak{k}$ die Vektoren zweier Raumdiagonalen, so wird $\cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_1) = 54{,}74^\circ$, $\sphericalangle(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}_1) = 54{,}74^\circ$, $\sphericalangle(\mathfrak{k}, \mathfrak{g}_1) = 54{,}74^\circ$. Die Winkel zwischen den Kanten und den Raumdiagonalen sind $54{,}74^\circ$. Ferner ist $\cos(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = \frac{1+1-1}{3} = \frac{1}{3}$, $\sphericalangle(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = 70{,}53^\circ$. Die Raumdiagonalen bilden miteinander Winkel von $70{,}53^\circ$.

18. Die Ortsvektoren der Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ seien $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$.

Die Kantenvektoren sind

$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}_2 = 5\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$, $\mathfrak{r}_3 = 2\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}$,

$\mathfrak{r}_4 = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 = -3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$,

$\mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_4 = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 6\mathfrak{k}$.

a) Werden die Kanten mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ bezeichnet, so ist

$a_1 = a_2 = \sqrt{29}$, $a_3 = 3\sqrt{6}$, $a_4 = 3\sqrt{2}$, $a_5 = a_6 = \sqrt{41}$

b) $\cos(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) = \frac{10 + 10}{29} = \frac{20}{29}$,

$\sphericalangle(a_1, a_a) = 46{,}40^\circ$; $\sphericalangle(a_2, a_3) = \sphericalangle(a_3, a_1) = 57{,}95^\circ$;

$\sphericalangle(a_1, a_4) = \sphericalangle(a_4, a_2) = 66{,}80^\circ$;

$\sphericalangle(a_4, a_6) = \sphericalangle(a_5, a_4) = 70{,}65^\circ$;

$\sphericalangle(a_6, a_1) = \sphericalangle(a_2, a_5) = 76{,}58^\circ$;

$\sphericalangle(a_6, a_5) = 38{,}70^\circ$; $\sphericalangle(a_5, a_3) = \sphericalangle(a_3, a_6) = 45{,}47^\circ$.

c) $M_{12}\ (\frac{5}{2};1;0)$, $M_{13}\ (1;\frac{5}{2};0)$, $M_{14}\ (\frac{3}{2};\frac{3}{2};3)$

$M_{23}\ (\frac{7}{2};\frac{7}{2};0)$, $M_{34}\ (\frac{5}{2};4;3)$, $M_{42}\ (4;\frac{5}{2};3)$

d) $S\ (\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

e) $\overrightarrow{M_{12}M_{34}} = \mathfrak{v}_1$, $\overrightarrow{M_{13}M_{24}} = \mathfrak{v}_2$, $\overrightarrow{M_{14}M_{23}} = \mathfrak{v}_3$ seien die Vektoren der Verbindungsstrecken. Es ist

$\mathfrak{v}_1 = 3\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{v}_2 = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{k}$,

$\mathfrak{v}_3 = 2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$.

Die Längen sind $v_1 = v_2 = 3\sqrt{2}$, $v_3 = \sqrt{17}$.

Ferner ist $\cos(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = \frac{9}{9 \cdot 2} = \frac{1}{2}$,

$\sphericalangle(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = 60^\circ$; $\sphericalangle(\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = \sphericalangle(\mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_1) = 99{,}88^\circ$.





19. $\mathfrak{r}$ sei der Ortsvektor, $\mathfrak{r}_m$ der Ortsvektor des Mittelpunktes. Da $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ der Vektor der Strecke ist, lautet die Bedingung $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_m) = 0$ oder

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (2\mathfrak{r} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})) = 0.$$

20. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Seitenvektoren mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o}$. Es ist

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})^2 =$$

$$= 4\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{2} + \mathfrak{b} + \frac{\mathfrak{c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{d}}{2} + \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2} - \mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 4\left[\frac{\mathfrak{a}^2}{4} + \frac{\mathfrak{c}^2}{4} + \frac{\mathfrak{d}^2}{4} + \frac{\mathfrak{b}^2}{4} + \frac{(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2}{4} + \frac{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})^2}{4} + R\right]$$

$$R = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}}{2}$$

$$+ \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) - \frac{(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})}{2} =$$

$$= \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} + \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{d}) + \frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}}{2}$$

$$+ \mathfrak{a} \cdot [\mathfrak{a} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})] - \frac{(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})}{2} =$$

$$= -\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d} + \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}}{2} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} - \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{2}$$

$$- \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} - \frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}{2} =$$

$$= -\frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}}{2} - \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{2} - \frac{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}{2} =$$

$$= -\frac{\mathfrak{b}}{2} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = 0$$

21. a) 6 kp m b) $3\sqrt{3}$ kp m c) 13,461 kp m

d) 2525 p cm

22. W = - 135 kp m

23. Ortsvektoren der Punkte A und C in bezug auf B:

$\mathfrak{a} = 2350\,\mathfrak{i} + 630\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{c} = 2250\,\mathfrak{j} + 530\,\mathfrak{k}$;

$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \frac{630 \cdot 530}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{c}|}$; $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = 86{,}6^\circ$.

24. a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ( $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ) Vektor der Länge $\frac{21}{2}\sqrt{2}$, senkrecht auf Zeichenebene, weist nach oben (unten).

b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ( $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ) Vektor der Länge 14,7, senkrecht auf Zeichenebene, weist nach oben (unten).

c) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{k}$

d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -26\,\mathbf{k}, \; \mathbf{b} \times \mathbf{a} = 26\,\mathbf{k}$

## 5.7. Anwendung des Skalarprodukts in der analytischen Geometrie

1. $-\frac{17}{4}\sqrt{2}$

4. a) Allgemeine Gleichung: $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = 0$

$4x + 3y - 30 = 0$

Hessesche Normalform: $(\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = 0$

$\frac{4x + 3y - 30}{5} = 0$

b) $\mathbf{l} = \frac{24}{5}\mathbf{i} + \frac{18}{5}\mathbf{j}$

c) $l = 6$

d) $F\,(\frac{24}{5}; \frac{18}{5})$

5. a) $(\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = 0,$

$\frac{3x + 2y - 23}{\sqrt{13}} = 0$

b) $(-\frac{7}{\sqrt{113}}\mathbf{i} + \frac{8}{\sqrt{113}}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} + 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j}) = 0,$

$\frac{7x - 8y + 107}{\sqrt{113}} = 0$

S. 255 bis 259



6. a) $(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 5\mathbf{i}) = 0, \quad \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}} = 0$

b) $(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 2\sqrt{2}\,\mathbf{i}) = 0,$

$\frac{x - y - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$

c) $(\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r} - 3\mathbf{i}) = 0,$

$\frac{2x + 3y - 6}{\sqrt{13}} = 0$

7. $x \cos 123{,}14^\circ + y \sin 123{,}14^\circ - 2 = 0,$

$x \cos 20{,}46^\circ - y \sin 20{,}46^\circ - 2 = 0$

8. a) $x \cos 130{,}22^\circ + y \sin 130{,}22^\circ - 1 = 0,$

$x \cos 17{,}58^\circ - y \sin 17{,}58^\circ - 1 = 0$

b) $x \cos 17{,}58^\circ + y \sin 17{,}58^\circ - 1 = 0$

$x \cos 229{,}78^\circ + y \sin 229{,}78^\circ - 1 = 0$

9. a) $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ nicht gleichgerichtet, d.h. $t_1\mathbf{m}_1 + t_2\mathbf{m}_2 \neq \mathbf{o}$ für beliebige $t_1$, $t_2$ ($\neq 0$).

b) $t_1\mathbf{m}_1 + t_2\mathbf{m}_2 = \mathbf{n}$

c) $t_1\mathbf{m}_1 + t_2\mathbf{m}_2 = \mathbf{o}, \; (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{m} = 0.$

10. a) $s_1: \sqrt{3}\,x + y - a\sqrt{3} = 0$

$s_2: 2y - a\sqrt{3} = 0$

$s_3: \sqrt{3}\,x - y + a\sqrt{3} = 0$

$s_4: \sqrt{3}\,x + y + a\sqrt{3} = 0$

$s_5: 2y + a\sqrt{3} = 0$

$s_6: \sqrt{3}\,x - y - a\sqrt{3} = 0$

S. 259

b) $s_1$: $0{,}8090\,x + 0{,}5878\,y - \varrho = 0$

$s_2$: $0{,}3090\,x - 0{,}9511\,y + \varrho = 0$

$s_3$: $x + \varrho = 0$

$s_4$: $0{,}3090\,x + 0{,}9511\,y + \varrho = 0$

$s_5$: $0{,}8090\,x - 0{,}5878\,y - \varrho = 0$

c) $s_1$: $0{,}9239\,x + 0{,}3827\,y - 0{,}9239\,r = 0$

$s_2$: $0{,}3827\,x + 0{,}9239\,y - 0{,}9239\,r = 0$

$s_3$: $0{,}3827\,x - 0{,}9239\,y + 0{,}9239\,r = 0$

$s_4$: $0{,}9239\,x - 0{,}3827\,y + 0{,}9239\,r = 0$

$s_5$: $0{,}9239\,x + 0{,}3827\,y + 0{,}9239\,r = 0$

$s_6$: $0{,}3827\,x + 0{,}9239\,y + 0{,}9239\,r = 0$

$s_7$: $0{,}3827\,x - 0{,}9239\,y - 0{,}9239\,r = 0$

$s_8$: $0{,}9239\,x - 0{,}3827\,y - 0{,}9239\,r = 0$

11. $x \cos\varphi + y \sin\varphi - (1 + q) = 0$

$x \cos\varphi + y \sin\varphi - (1 - q) = 0$

12. a) $d = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1$ b) $d = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$

13. $d = 1$

14. a) $h_a = \frac{7}{2}\sqrt{2}$, $h_b = \frac{28}{\sqrt{65}}$, $h_c = \frac{28}{5}$

b) $h_a = \frac{36}{\sqrt{26}}$, $h_b = \frac{36}{\sqrt{74}}$, $h_c = \frac{18}{5}\sqrt{5}$

15. $P_1\,(10;4)$, $P_2\,(\frac{2570}{361}; -\frac{636}{361})$

S. 259



1. $-\frac{19}{3}$

3. a) $(3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \sqrt{3}\,\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}) = 0$

$3x + 2y + \sqrt{3}\,z - (7 + 3\sqrt{3}) = 0$

$(\frac{3}{4}\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}) = 0$

$\frac{3x + 2y + \sqrt{3}\,z - (7 + 3\sqrt{3})}{4} = 0$

b) $\mathfrak{l} = \frac{3}{16}(7+3\sqrt{3})\,\mathfrak{i} + \frac{1}{8}(7+3\sqrt{3})\,\mathfrak{j} + \frac{1}{16}(9+7\sqrt{3})\,\mathfrak{k}$

c) $\frac{1}{4}(7 + 3\sqrt{3})$

d) $F\left(\frac{3}{16}(7 + 3\sqrt{3}); \frac{1}{8}(7 + 3\sqrt{3}); \frac{1}{16}(9 + 7\sqrt{3})\right)$

4. $x + 2y + z - 13 = 0$

5. a) $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ nicht gleichgerichtet, d. h. $u\,\mathfrak{a}_1 + v\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$ nur für $u = v = 0$.

b) $\mathfrak{a}_2 = t\,\mathfrak{a}_1$

c) $\mathfrak{a}_2 = t\,\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1 \cdot (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = 0$

6. $d = -\frac{5}{2}\sqrt{14}$

7. Richtung: $-\frac{1}{3}\mathfrak{i} + \frac{2}{3}\mathfrak{j} + \frac{2}{3}\mathfrak{k}$

Länge: 4

Fußpunkt: $F\,(-\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$

8. $S\,(\frac{17}{5}; \frac{26}{5}; \frac{33}{5})$

9. $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = t\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$

10. a) $\mathfrak{r}_s = \frac{10}{3}\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{r}_s = \frac{7}{3}\mathfrak{i} + \frac{8}{3}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

S. 263 bis 264

11. $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,t\,(\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - \mathfrak{k})$

12. $\omega = 90^\circ$

13. $\cos\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha_3 = \frac{1}{3}$

14. Der Punkt $x = 2$, $y = 1$ hat von allen drei Geraden den Abstand $\frac{8}{5}$. Er ist Mittelpunkt eines Ankreises für das aus den drei Geraden gebildete Dreieck.

15. $2\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}$

16. $\bar{\mathfrak{n}} = (5;\ 0;\ -7)$

17. $\bar{\mathfrak{n}} = (14;\ -8;\ 2)$

2. a) $\mathfrak{r}^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 25$

   b) $(\mathfrak{r} - 5\mathfrak{i})^2 = 49$, $(x - 5)^2 + y^2 = 49$

   c) $(\mathfrak{r} - 12\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j})^2 = 169$, $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$

3. a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$; $M\ (2;\ -3)$, $r = 0$

   b) Der Gleichung entspricht keine geometrische Figur.

   c) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$; $M\ (3;\ 4)$, $r = 2$

4. a) $\mathfrak{r}^2 = 36$, $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

   b) $(\mathfrak{r} - 3\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k})^2 = 64$, $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 64$

   c) $(\mathfrak{r} - 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}) = 81$,

   $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 5)^2 = 81$

5. a) $M\ (-\frac{3}{2};\ 0;\ -\frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{14}$

   b) $M\ (-1;\ 1;\ \frac{1}{2})$, $r = \frac{3}{2}$

   c) $M\ (\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   d) $M\ (-1;\ \frac{3}{2};\ 1)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

S. 264 bis 266

№ 0491

002150-2