Lösungsheft zum Lehrbuch

MATHEMATIK

ELFTE UND ZWÖLFTE KLASSE

(Erweiterte Oberschule)

Nur für Lehrer

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

Lösungsheft zum Lehrbuch

MATHEMATIK

ELFTE UND ZWÖLFTE KLASSE

(Erweiterte Oberschule, Bestell-Nr. 00 11 55-2 und 00 12 56-2)

Nur für Lehrer

Ausgabe 1963

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1965

An der Ausarbeitung der Lösungen waren K. Dievenkorn, J. Gronitz, H. Junge, W. Leser, Dr. G. Lorenz, Dr. F. Neigenfind, G. Pietsch, Prof. Dr. W. Renneberg und H. Simon beteiligt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer

Redaktionsschluß: 15. Januar 1965

ES 10 C · Bestellnummer 00 21 50–2 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/65 (DN)
6,30 MDN

Gesamtherstellung:
(52) Nationales Druckhaus VOB National, Berlin

V o r b e m e r k u n g

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Aufgaben der Lehrbücher "MATHEMATIK, Lehrbuch für die elfte Klasse (B-Zweig) der erweiterten Oberschule" (Ausgabe 1963) und "MATHEMATIK, Lehrbuch für die zwölfte Klasse (B-Zweig) der erweiterten Oberschule" (Ausgabe 1963).

Es sind nur Lösungen aufgenommen worden, die rechnerisch zu ermitteln sind. Auf die Angabe von Lösungen, die sich unmittelbar aus dem Text ergeben, wurde verzichtet.

Die Lösungen von Konstruktionsaufgaben sind im Lösungsheft nicht enthalten, da erfahrungsgemäß ihre Angabe dem Lehrer keine wesentliche Erleichterung bei der Durchführung seines Unterrichts bietet.

Bei Textaufgaben wurde aus Platzgründen im allgemeinen auf den Antwortsatz verzichtet. Diese Maßnahme erscheint auch deshalb berechtigt, weil solche Sätze in den meisten Fällen verschieden formuliert werden können. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Aufgabe nur dann als richtig gelöst gelten kann, wenn der Schüler einen entsprechenden Antwortsatz richtig formuliert hat.

Die rechnerischen Lösungen von Schüleraufträgen sind durch einen Kreis gekennzeichnet.

Bei der Lösung der Aufgaben arbeiteten die Rechner mit dem Tafelwerk: "Beyrodt/Küstner: Vierstellige Logarithmen - Zahlen, Werte, Formeln (Best.-Nr. 000934)".

Bei Anwendungsaufgaben ist die Genauigkeit der Ausgangswerte zu berücksichtigen.

Lösungen zum Lehrbuch

Mathematik 12

(001256)

1. Lehre von den Funktionen

1.1. Algebraische Funktionen

1. Aus $F(x,y) = 2x + 3y = 0$ folgen

$$y = f(x) = -\frac{2}{3}x \text{ und } x = g(y) = -\frac{3}{2}y.$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	$\frac{10}{3}$	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{10}{3}$	-4

y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	9	$\frac{15}{2}$	6	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{9}{2}$	-6	$-\frac{15}{2}$	-9

Definitionsbereich und Wertevorrat der zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ sind vertauscht.

2. Aus $F(x,y) = 2x + 3y + 6 = 0$ folgen
$y = f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ und $x = g(y) = -\frac{3}{2}y - 3.$
Vgl. ferner Abbildung 30a und 30b sowie 30c!

3. a)

x	-2	0	2
$f(x)$	3	2	1

y	1	2	3
$g(y)$	2	0	-2

Diese Wertetafeln lassen vermuten, daß $y = f(x)$ und $x = g(y)$ zueinander inverse Funktionen sind.

b) Vgl. Abbildung 31!

c) Aus $y = -\frac{x}{2} + 2$ folgt $x + 2y - 4 = 0$;
aus $x = -2y + 4$ folgt $x + 2y - 4 = 0$;
also sind $y = f(x)$ und $x = g(y)$ zueinander inverse Funktionen.

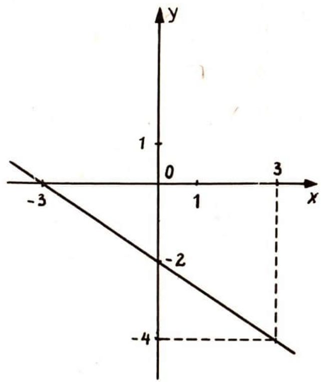

Abb. 30a

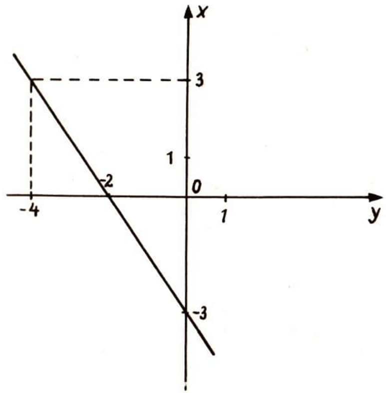

Abb. 30b

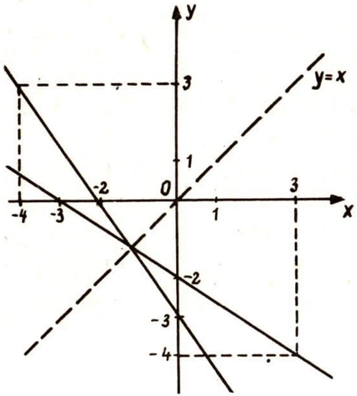

Abb. 30c

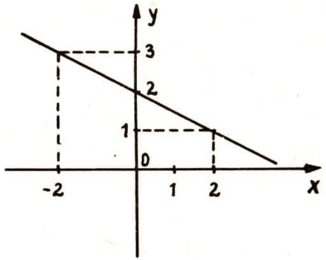

Abb. 31

4. $y = f_1(x)$ ist streng monoton steigend,
   $y = f_2(x)$ ist streng monoton fallend.

5. a) $y = f_1(x)$ ist streng monoton steigend;
   b) $y = f_2(x)$ ist streng monoton fallend;
   c) $y = f_3(x)$ ist streng monoton fallend;
   d) $y = f_4(x)$ ist streng monoton steigend.

6. Zu $y = x^2$ mit $0 \leqq x < \infty$ ist $x = \sqrt{y}$ mit $0 \leqq y < \infty$ invers;
   zu $y = x^2$ mit $-\infty < x \leqq 0$ ist $x = -\sqrt{y}$ mit $0 \leqq y < \infty$ invers;
   zu $y = 2x^2+3$ mit $0 \leqq x$ ist $x = \sqrt{\frac{y-3}{2}}$ mit $3 \leqq y$ invers;
   zu $y = 2x^2+3$ mit $x \leqq 0$ ist $x = -\sqrt{\frac{y-3}{2}}$ mit $3 \leqq y$ invers;
   zu $y = -2x^2+3$ mit $0 \leqq x$ ist $x = \sqrt{\frac{3-y}{2}}$ mit $y \leqq 3$ invers;
   zu $y = -2x^2+3$ mit $x \leqq 0$ ist $x = -\sqrt{\frac{3-y}{2}}$ mit $y \leqq 3$ invers.

   Die Bilder zueinander inverser Funktionen fallen zusammen bzw. sind bei Vertauschung von x und y achsialsymmetrisch zur Geraden $y = x$. Speziell sind die Bilder monoton steigender (fallender) zueinander inverser Funktionen gleichzeitig steigend (fallend). Definitionsbereich und Wertevorrat sind bei zueinander inversen Funktionen vertauscht.

7. Zu $y = f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ mit $-8 \leqq x \leqq -1$ ist $x = g(y) = y^3$ mit $-2 \leqq y \leqq -1$ invers. Beide Funktionen sind streng monoton steigend. Die Wertevorräte sind $-2 \leqq f(x) \leqq -1$ bzw. $-8 \leqq g(y) \leqq -1$; die Definitionsbereiche sind bereits angegeben.

Vgl. ferner Abbildung 32!

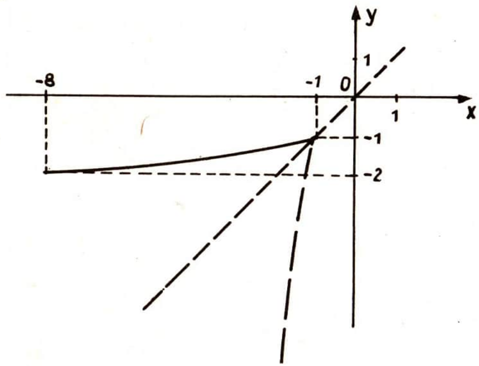

Abb. 32

8. Vgl. in Abbildung 32 die gestrichelte Kurve! Die Bilder sind achsialsymmetrisch zur Geraden $y = x$.

1. Aus $y = f(x) = -\frac{2}{3}x$ folgt $y' = f'(x) = -\frac{2}{3}$;
aus $x = g(y) = -\frac{3}{2}y$ folgt $x' = g'(y) = -\frac{3}{2}$.
Aus $y = f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ folgt $y' = f'(x) = -\frac{2}{3}$;
aus $x = g(y) = -\frac{3}{2}y - 3$ folgt $x' = g'(y) = -\frac{3}{2}$.

Aus $y = f(x) = -\frac{x}{2} + 2$ folgt $y' = f'(x) = -\frac{1}{2}$;
aus $x = g(y) = -2y + 4$ folgt $x' = g'(y) = -2$.

2. Es sind zueinander inverse Funktionen:
$y = f(x) = \frac{x^2}{3} + 2$ mit $2 \leqq x \leqq 4$ und $\frac{10}{3} \leqq f(x) \leqq \frac{22}{3}$;
$x = g(y) = \sqrt{3y - 6}$ mit $\frac{10}{3} \leqq y \leqq \frac{22}{3}$ und $2 \leqq g(y) \leqq 4$.
Ihre Ableitungen sind:
$y' = f'(x) = \frac{2}{3}x$ und $x' = g'(y) = \frac{3}{2\sqrt{3y-6}}$.

1. a) $y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; c) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
d) $y' = \frac{\sqrt[6]{2}}{6\sqrt[6]{x^5}}$; e) $y' = -\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$;
f) $y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$; g) $y' = \frac{5\sqrt{x}}{6\sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$;
h) $y' = \frac{1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$.

2. a) $y' = 3x^2$; b) $y' = -3x^{-4}$
c) $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; d) $y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

3. a) $y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$; b) $y' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$;
c) $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; d) $y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

4. a) $f(x) = 3x + 5$, $g(y) = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$;
$f'(x) = 3$, $g'(y) = \frac{1}{3}$.

b) $f(x) = -2x + 1, \quad g(y) = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2};$

$f'(x) = -2 \quad , \quad g'(y) = -\frac{1}{2}.$

c) $f(x) = -\frac{3}{5}x + 2, \quad g(y) = -\frac{5}{3}y + \frac{10}{3};$

$f'(x) = -\frac{3}{5} \quad , \quad g'(y) = -\frac{5}{3}.$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x - 8 \quad , \quad g(y) = 4y + 32;$

$f'(x) = \frac{1}{4} \quad , \quad g'(y) = 4.$

5\. a) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3} + 2} \quad , \quad g(y) = 3y^2 - 6;$

$f'(x) = \frac{1}{6\sqrt{\frac{x}{3} + 2}}, \quad g'(y) = 6y.$

b) $f(x) = \sqrt[3]{5x - 1}, \quad g(y) = \frac{1}{5}y^3 + \frac{1}{5};$

$f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x - 1)^2}}, \quad g'(y) = \frac{3}{5}y^2.$

c) $f(x) = \sqrt{2x - 3} \quad , \quad g(y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}, \quad g'(y) = y.$

d) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{4} + \frac{2}{3}}, \quad g(y) = 4y^5 - \frac{8}{3};$

$f'(x) = \frac{1}{20\sqrt[5]{(\frac{x}{4} + \frac{2}{3})^4}}, \quad g'(y) = 20y^4.$

1\. a) $y' = 6(3x + 5);$ b) $y' = 0{,}4(0{,}2x - 3{,}1);$

c) $y' = 3{,}4(1{,}7x + 2{,}3);$ d) $y' = 2a(ax + b);$

e) $y' = 2(2x^2 - 5x + 5)(4x - 5);$

f) $y' = 2(0{,}5x^2 + 3{,}1x - 4)(x + 3{,}1).$

S. 12 bis 23

2\. a) $y' = 12(4x - 3)^2, \quad y'' = 96(4x - 3);$

b) $y' = 15{,}6(5{,}2x - 8)^2, \quad y'' = 162{,}24(5{,}2x - 8);$

c) $y' = 3a(ax + b)^2, \quad y'' = 6a^2(ax + b);$

d) $y' = 3(7x^2 - 5x + 2)^2.(14x - 5),$

$y'' = 6(7x^2 - 5x + 2)(245x^2 - 175x + 39);$

e) $y' = 3(\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{9})^2.(\frac{10}{3}x - \frac{3}{5}),$

$y'' = (\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{9})(\frac{250}{3}x^2 - 30x + \frac{2236}{225});$

f) $y' = 3(ax^2 + bx + c)^2.(2ax + b),$

$y'' = 6(ax^2 + bx + c)(5a^2x^2 + 5abx + ac + b^2).$

3\. a) $y' = 4(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^3.(6x^2 - 10x + 7),$

$y'' = 4(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^2.\,[3(6x^2 - 10x + 7)^2 +$

$+ (12x - 10).(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)]$

b) $y' = 4(ax^3 + bx^2 + cx + d)^3.(3ax^2 + 2bx + c),$

$y'' = 4(ax^3 + bx^2 + cx + d)^2.\,[3(3ax^2 + 2bx + c)^2 +$

$+ (6ax + 2b).(ax^3 + bx^2 + cx + d)];$

c) $y' = 4a(ax + b)^3, \quad y'' = 12a^2(ax + b)^2;$

d) $y' = 5a(ax + b)^4, \quad y'' = 20a^2(ax + b)^3.$

4\. a) Die zweite Ableitung ist gleich $2!a^2$;

b) die dritte Ableitung ist gleich $3!a^3$;

c) die vierte Ableitung ist gleich $4!a^4$;

d) die n-te Ableitung ist gleich $n!a^n$.

5\. a) $y' = 6(3x - 5)^3.(2x + 5)^2.(7x + 5);$

b) $y' = (4{,}2x - 3{,}9)^2.(63{,}84x - 36{,}24);$

S. 23

c) $y' = (ax+b)^{n-1}.(cx+d)^{m-1}.\left[ac(n+m)x+(adn+bcm)\right];$

d) $y' = (2ax+b)^{n-1}.(ax+2b)^{m-1}.\left[2a^2(n+m)x+ab(4n+m)\right].$

6. a) $y' = (2{,}3x-3{,}5)^2.(3{,}2x+5{,}3)^2.(4{,}7x-8{,}1)(276{,}736x^2-$
$-334{,}431x - 198{,}427)$

b) $y' = (ax+b)^2.(cx+d).(ex+f)^3\left[9acex^2+(5acf+7ade+\right.$
$\left.+6bce)x+(3adf+2bcf+4bde)\right]$

7. a) $y' = (2x^2+7x-5)^2.(3x^2+4x-6)^3.(5x^2-6x+8).(540x^5+$
$+1559x^4-1502x^3+182x^2+2612x-2008);$

b) $y' = (x^3+x+1).(x^2-1)^2.(x^3-x^2+x-1)^3.(24x^7-20x^6+$
$+18x^5+4x^4-26x^3+6x^2-4x-2);$

c) $y' = (ax^2+bx+c)^2.(cx^2+bx+a).(bx^2+cx+a).\left[3(2ax+\right.$
$+b)(cx^2+bx+c)(bx^2+cx+a)+2(2cx+b)(ax^2+bx+$
$\left.+c)(bx^2+cx+a)+4(2bx+c)(ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a)\right];$

d) $y' = (a_1x^2+b_1x+c_1)^{n-1}.(a_2x^2+b_2x+c_2)^{m-1}.(a_3x^2+b_3x+$
$+c_3)^{r-1}.\left[n(2a_1x+b_1).(a_2x^2+b_2x+c_2).(a_3x^2+b_3x+\right.$
$+c_3)+m(2a_2x+b_2).(a_1x^2+b_1x+c_1).(a_3x^2+b_3x+c_3)+$
$\left.+r(2a_3x+b_3).(a_1x^2+b_1x+c_1).(a_2x^2+b_2x+c_2)\right].$

8. a) $y' = -\,26.\,\dfrac{2x+3}{(3x-2)^3};$ b) $y' = 86.\,\dfrac{5x-7}{(4x+3)^3};$

c) $y' = -\,78.\,\dfrac{(7{,}1x-3{,}2)^2}{(4{,}3x-5{,}6)^4};$ d) $y' = n(ad-bc).\dfrac{(ax+b)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}.$

9. a) $y' = -\dfrac{2(2x^2+5x-7)(2x^4+10x^3+4x^2-58x+15)}{(x^3+5x^2-3)^3};$

b) $y' = -\dfrac{2(ax^2+bx+c)\left[adx^4+2bdx^3-(af-be-3cd)x^2-(2ag-2ce)x-bg+cf\right]}{(dx^3+ex^2+fx+g)^3}$

10. a) $y' = 2\,\dfrac{(2x-3)(3x+4)(x^2+36x-1)}{(x^2+1)^3};$

b) $y' = -\dfrac{3(3x+5)^2(4x-1)^2(462x^2+324x+422)}{(2x-3)^4(9x+7)^4}$

11. a) $y' = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)^3(x+2)^2} + \dfrac{3x(x-1)^2}{(x+2)^3(x+1)^2};$

b) $y' = 2\dfrac{(2x-1)^3(3x+5)(-120x^3-268x^2+246x+154)(x-5)^4(2x+5)^4}{(4x+3)^3(5x-1)^7(3x-4)^{12}}$

$+\,4\dfrac{(x-5)^3(2x+5)^3(-6x^2+14x+245)(2x-1)^4(3x+5)^2}{(3x-4)^{13}(4x+3)^2(5x-1)^6}$

12. a) $y = x^{\frac{2}{3}};\ y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}};\ y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}};\ y''' = \frac{8}{27}x^{-\frac{7}{3}}$

b) $y = x^{\frac{3}{5}};\ y' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}};\ y'' = -\frac{6}{25}x^{-\frac{7}{5}};$
$y''' = \frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$

c) $y = x^{\frac{3}{4}};\ y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}};\ y'' = -\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}};$
$y''' = \frac{15}{64}x^{-\frac{9}{4}}$

13. a) $y = x^{-\frac{3}{4}};\ y' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}};\ y'' = \frac{21}{16}x^{-\frac{11}{4}};$

b) $y = x^{-\frac{5}{7}};\ y' = -\frac{5}{7}x^{-\frac{12}{7}};\ y'' = \frac{60}{49}x^{-\frac{19}{7}};$

c) $y = x^{-\frac{4}{5}};\ y' = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}};\ y'' = \frac{36}{25}x^{-\frac{14}{5}}$

14. a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}};$ b) $y' = \dfrac{9}{2\sqrt{9x-4}};$

c) $y' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}};$ d) $y' = \dfrac{24x-19}{2\sqrt{(3x+2)(4x-9)}}$

e) $y' = \frac{2acx + ad + bc}{2\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}$; f) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

15. a) $y' = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}$;

b) $y' = -\frac{13}{2(3x-2)\sqrt{(3x-2)(2x+3)}}$;

c) $y' = \frac{11x}{(9x^2-25)\sqrt{(x^2-4)(9x^2-25)}}$;

d) $y' = \frac{-4x^3 + 9x^2 + 30x - 176}{2(x^2-16)(x+3)\sqrt{(2x-5)(x^2-16)(x+3)}}$;

e) $y' = \frac{-6x^5 - 27x^4 + 60x^3 - 21x^2 + 30x - 60}{2(x^2+4)(3x^2-5)\sqrt{(x^2+3x-5)(x^2+4)(3x^2-5)}}$;

f) $y' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

16. a) $y' = 2x - 3\sqrt{x} + 1$;

b) $y' = 4(x^3 - \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x})$;

c) $y' = 8x + 11x\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$;

d) $y' = \frac{x^4\sqrt[5]{x}(-\frac{4}{5}x^6 + 22x^3 + 130)}{(x^3 + 5)^4}$

e) $y' = \frac{(2 - \frac{13}{4}x^2\sqrt[4]{x})(x-2x^2\sqrt{x})^5 - 5(x-2x^2\sqrt{x})^4(1-5x\sqrt{x})}{(x-2x^2\sqrt{x})^{10}}$

f) $y' = -\frac{3\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}{(x - \sqrt{x})^4}$

17. a) $y' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $y'' = \frac{2x^2 + 1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

b) $y' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $y' = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; $y'' = \frac{2x^2 - 1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$

d) $y' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; $y'' = -\frac{3x}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$

e) $y' = -\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$; $y'' = \frac{2x^2 + 1}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}}$

f) $y' = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$; $y'' = \frac{3x}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}}$

g) $y' = \frac{b^2x}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$; $y'' = \frac{a^2b^2 + 2b^4x^2}{(a^2-b^2x^2)^2\sqrt{a^2-b^2x^2}}$

h) $y' = -\frac{ac^2}{(b^2x^2-c^2)\sqrt{b^2x^2-c^2}}$;

$y'' = \frac{3ab^2c^2x}{(b^2x^2-c^2)^2\sqrt{b^2x^2-c^2}}$

i) $y' = -\frac{3}{4(x-a)\sqrt[4]{(x-a)^3}}$; $y'' = \frac{21}{16(x-a)^2\sqrt[4]{(x-a)^3}}$

18. a) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$; $y'' = -\frac{2 + 3\sqrt{x}}{16(x+x\sqrt{x})\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

b) $y' = -\frac{1}{4(1+\sqrt{x})\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$;

$$y'' = \frac{(2 + 5\sqrt{x})}{16x\sqrt{x+x\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})^2}$$

c) $y' = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x^2-x\sqrt{x}}}$; $y'' = \dfrac{-2x^2 + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{8(x^3-x^2)\sqrt{x - 1}}$

d) $y' = \dfrac{1 - 2\sqrt{x}}{4(x-\sqrt{x})\sqrt{x(x-\sqrt{x})}}$

$$y'' = \frac{12x - 14\sqrt{x} + 5}{16x(x-\sqrt{x})^2\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$

e) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{a+\sqrt{a+x}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}$

$$y'' = -\frac{\sqrt{a+\sqrt{a+x}}.\sqrt{a+x}+2(a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}).\sqrt{a+x}+4(a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}})(a+\sqrt{a+x})}{64(a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}})\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}(a+\sqrt{a+x})\sqrt{a+\sqrt{a+x}}(a+x)\sqrt{a+x}}$$

19. a) $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$; $y' = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}$

b) $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$; $y' = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}$

c) $yy' - p = 0$; $y' = \dfrac{p}{y}$

d) $3x^2 - 2ayy' = 0$; $y' = \dfrac{3x^2}{2ay}$

e) $(x^2+y^2)(x+yy')-a^2(x-yy') = 0$; $y' = \dfrac{-x^2-y^2+a^2}{x^2+y^2+a^2} \cdot \dfrac{x}{y}$

f) $(x-a)x^2+y^2)+(x-a)^2(x+yy')-b^2x=0$;

$$y' = \frac{x[b^2-(a-x)^2] + (a-x)(x^2+y^2)}{(a-x)^2.y}$$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot y' = 0$; $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

20. Wegen $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$ gilt für kleine h:

$$\frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \approx f'(x_o),$$

woraus $f(x_o+h) \approx f(x_o) + h.f'(x_o)$ unmittelbar folgt.

a) $\sqrt{3600 + 100} \approx \sqrt{3600} + \dfrac{100}{2\sqrt{3600}} = 60 + \dfrac{100}{120} \approx 60{,}8$

b) $\sqrt{4900 + 120} \approx \sqrt{4900} + \dfrac{120}{2\sqrt{4900}} = 70 + \dfrac{120}{140} \approx 70{,}8$

c) $\sqrt{6400 - 75} \approx \sqrt{6400} - \dfrac{75}{2\sqrt{6400}} = 80 - \dfrac{75}{160} \approx 79{,}5$

d) $\sqrt{8100 + 332} \approx \sqrt{8100} + \dfrac{332}{2\sqrt{8100}} = 90 + \dfrac{332}{180} \approx 91{,}8$

e) $\sqrt{0{,}0441+0{,}0015} \approx \sqrt{0{,}0441} + \dfrac{0{,}0015}{2\sqrt{0{,}0441}} = 0{,}21 +$
$+ \dfrac{0{,}15}{42} \approx 0{,}214$

f) $\sqrt{0{,}0049+0{,}0001} \approx \sqrt{0{,}0049} + \dfrac{0{,}0001}{2\sqrt{0{,}0049}} = 0{,}07 +$
$+ \dfrac{0{,}01}{14} \approx 0{,}071$

g) $\sqrt{0{,}0004-0{,}0001} \approx \sqrt{0{,}0004} - \dfrac{0{,}0001}{2\sqrt{0{,}0004}} = 0{,}02 -$
$- \dfrac{0{,}01}{4} \approx 0{,}017$

h) $\sqrt{1{,}0000-0{,}0999} \approx \sqrt{1{,}0000} - \dfrac{0{,}0999}{2\sqrt{1{,}0000}} = 1{,}00 -$
$- \dfrac{0{,}0999}{2} \approx 0{,}95$

21. a) $\sqrt[3]{27+2} = \sqrt[3]{27(1+\frac{2}{27})} \approx 3(1+\frac{2}{3.27}) \approx 3+0,07 = 3,07$

b) $\sqrt[3]{64+6} = \sqrt[3]{64(1+\frac{6}{64})} \approx 4(1+\frac{3}{3.32}) \approx 4+0,12 = 4,12$

c) $\sqrt[4]{81+9} = \sqrt[4]{81(1+\frac{9}{81})} \approx 3(1+\frac{1}{4.9}) \approx 3+0,08 = 3,08$

d) $\sqrt[3]{0,216+0,034} = \sqrt[3]{0,216(1+\frac{34}{216})} \approx 0,6(1+\frac{34}{648})$

$\approx 0,6 + 0,03 = 0,63$

e) $\sqrt[4]{0,0625-0,0025} = \sqrt[4]{0,0625(1-\frac{25}{625})} \approx 0,5(1-\frac{1}{4.25})$

$= 0,5 - 0,005 = 0,495$

22. a) $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1} + \frac{x}{2\sqrt{1}} = 1 + \frac{x}{2}$

b) $\sqrt{1-x} \approx \sqrt{1} - \frac{x}{2\sqrt{1}} = 1 - \frac{x}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{x}{2\sqrt{1^3}} = 1 - \frac{x}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{-x}{2\sqrt{1^3}} = 1 + \frac{x}{2}$

e) $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{3\sqrt[3]{1^2}} = 1 + \frac{x}{3}$

f) $(1+x)^n \approx 1^n + x.n.1^{n-1} = 1 + nx$

23. a) Abbildung 33a

$x_{Max} = \frac{4}{3}$; $y_{Max} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$ für $f(x)$;

$x_{Min} = \frac{4}{3}$; $y_{Min} = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$ für $g(x)$;

Nullstellen für $f(x)$ und für $g(x)$ bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

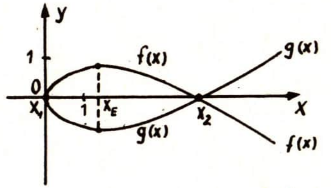

Abb. 33a

b) Abbildung 33b

$x_{Max} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $y_{Max} = \frac{25}{2}$ für $f(x)$; für $g(x)$ dort Min.;

$x_{Min} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$; $y_{Min} = -\frac{25}{2}$ für $f(x)$; für $g(x)$ dort Max.;

Nullstellen für $f(x)$ und $g(x)$ bei $x_1 = -5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5$

c) Abbildung 33c

$x_{Max} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$; $y_{Max} = \frac{8}{3}\sqrt[4]{12}$ für $f(x)$; für $g(x)$ dort Min.;

Nullstellen für $f(x)$ und $g(x)$ bei $x_1 = -4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$

d) Abbildung 33d

Keine Extrema

Nullstelle bei $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

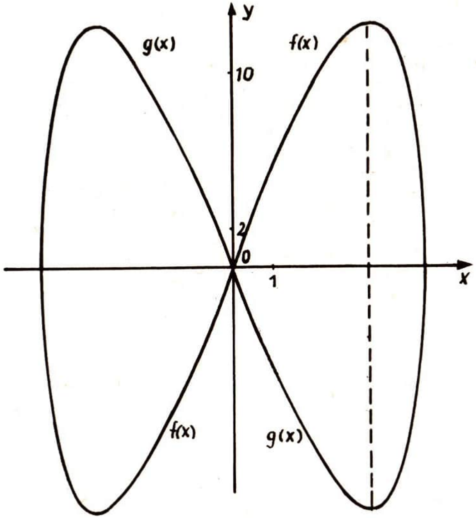

Abb. 33b

e) Abbildung 33e

Keine Extrema

Keine Nullstellen

24. Das gleichschenklige Dreieck:

Aus $u = g + \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2+(g-x)^2}$ und $A = \frac{g.h}{2}$ folgt u(x); aus $u'(x_E) = 0$ ergibt sich $x_E = \frac{g}{2}$ und

damit Gleichheit der beiden Dreiecksseiten a und b, wenn g = c gesetzt ist.

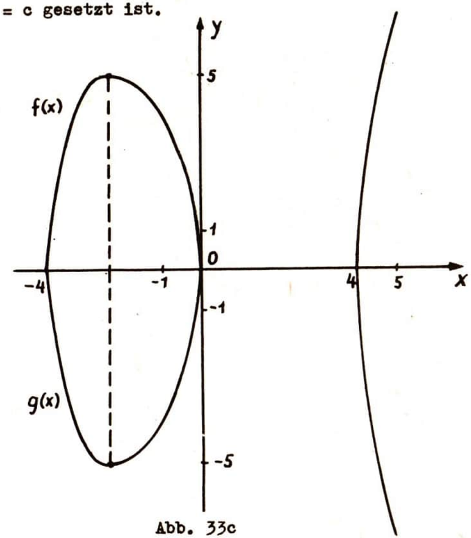

Abb. 33c

25. Das gleichschenklige Dreieck:

Ist 2s der Umfang, g die Grundlinie, x eine weitere Seite des Dreiecks, so ist $A(x) = \sqrt{s(s-g)(s-x)[s-(2s-g-x)]}$. Aus $A'(x_E) = 0$ folgt $x_E = \frac{2s-g}{2}$, also gleiche Schenkel.

26. Liegt die Rechteckseite a auf dem Kreisdurchmesser d = 2r und wird die andere Rechteckseite mit b bezeichnet, so gilt a : b = 2 : 1; aus $A(a) = a\sqrt{r^2-(\frac{a}{2})^2}$ folgt nämlich über $A'(a_E) = 0$ die Seite a_E mit $a_E = r\sqrt{2}$.

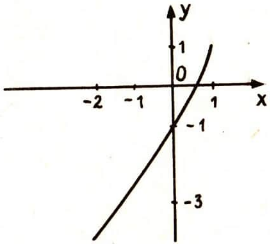

Abb. 33d

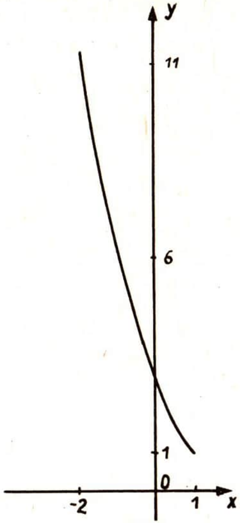

Abb. 33e

27. Das Quadrat:

Ist x eine Rechteckseite, $d = 2r$ der Kreisdurchmesser (zugleich Diagonale des Rechtecks), so ist $A(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$; aus $A'(x_E) = 0$ folgt $x_E = r\sqrt{2}$, der gleiche Wert ergibt sich für die andere Rechteckseite.

28. Die Ellipsenachsen sind $2a = 2c\sqrt{2}$ und $2b = 2d\sqrt{2}$:

Die Ecken des Rechtecks liegen auf der Ellipse, daher gilt: $\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1$ und somit $A(a) = \pi \frac{a^2 d}{\sqrt{a^2-c^2}}$;

aus $A'(a_E) = 0$ folgt $a_E = c\sqrt{2}$.

29. Die Hauptachse der Ellipse wird in $x_E = \frac{a}{2}$ von der Basis des einbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks geschnitten: Für die Dreiecksfläche gilt $A = y(x+a)$, aus der Ellipsengleichung ergibt sich y und damit $A(x) = \frac{b}{a}(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$; aus $A'(x_E) = 0$ folgt $x_E = \frac{a}{2}$.

30. a) Es muß gelten $r : h = 1 : \sqrt{2}$ bzw.

$r : h : s = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Aus $M = \pi rs$, $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ und $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ folgt $V(r) = \frac{r}{3}\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}$; aus $V'(r_E) = 0$ gewinnt man $r_E^2 = \frac{M}{3\pi}\sqrt{3}$ und $h_E^2 = \frac{2M}{3\pi}\sqrt{3}$, woraus sich das gesuchte Verhältnis $r : h = 1 : \sqrt{2}$ unmittelbar ergibt.

b) Es ergibt sich das gleiche Verhältnis wie in Teil a). Aus denselben Formeln wie in a) folgt $M(r) = \pi r\sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$; aus $M'(r_E) = 0$ gewinnt man $r_E = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$ und damit aus $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ für h_E sofort $h_E = r_E\sqrt{2}$.

31. Der Zentriwinkel beträgt rund 66°:

Wählt man den Ergänzungswinkel zu 360° als unabhängige Veränderliche x, so wird der Umfang des Grundkreises des Kegels $Rx = 2\pi r$; die Kegelhöhe ist

$h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ und damit gilt:

$V(x) = \frac{R^3x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. Aus $V'(x_E) = 0$ folgt $x_E = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, also ein Winkel von rund 294^0.

32. Der Punkt P liegt um $x_E = b - \frac{a}{3}\sqrt{3}$ von A entfernt: Setzt man $AP = x$, $PB = \sqrt{(b-x)^2 + a^2}$, so ergibt sich unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Geschwindigkeiten:
$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{(b-x)^2 + a^2}$; aus $f'(x_E) = 0$ folgt das Verhältnis $(b-x_E) : \sqrt{(b-x_E)^2 + a^2} = 1 : 2$, aus dem x_E und der Abzweigwinkel (60^0) bestimmt werden.

33. Bezeichnet A' den Fußpunkt des Lotes von A auf g und entsprechend B' den von B auf g, so ist die Abstandssumme $s = AP + PB$ ein Minimum, wenn die Dreiecke AA'P und BB'P ähnlich sind. Setzt man $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$ und $A'P = x$, so ist $s(x) = \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$, aus $s'(x_E) = 0$ gewinnt man die Proportion $x_E : \sqrt{a^2 + x_E^2} = (c-x_E) : \sqrt{b^2 + (c-x_E)^2}$, die gleichbedeutend ist mit $A'P : AP = PB' : BP$. Der Punkt P hat im gesuchten Fall den Abstand $x_E = \frac{ac}{a + b}$ vom Punkt A'.

34. Bezeichnet A' den Fußpunkt des Lotes von A auf g und entsprechend B' den von B auf g, bezeichnet α den Winkel zwischen AP und dem Lot auf g in P und entsprechend β den zwischen BP und diesem Lot, so gelangt man am schnellsten von A über P nach B, wenn $\sin\alpha : \sin\beta = u : v$ gilt.

S. 26 bis 27

Setzt man $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$ und $A'P = x$, so ist unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Geschwindigkeiten: $f(x) = \frac{1}{u}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v}\sqrt{b^2 + (c-x)^2}$; aus $f'(x_E) = 0$ gewinnt man
$\frac{1}{u} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v} \cdot \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$, was gleichbedeutend ist mit $\frac{1}{u} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{v} \cdot \sin\beta$.

35. Das Reflexionsgesetz wurde bereits in Aufgabe 33 mathematisch gewonnen.

36. Das Brechungsgesetz wurde bereits in Aufgabe 34 mathematisch gewonnen.

37. Vgl. dazu Aufgabe 32; der Abzweigpunkt P liegt am günstigsten im Abstand AP = 363 m vom Punkt A entfernt.

38. Die Seitenwände sind gegenüber der Kanalsohle um 120^0 geneigt: Bezeichnet 2x die Differenz zwischen der zur Kanalsohle parallelen Trapezseite und der Kanalsohle, so beträgt
$u(x) = 2\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{A}{h} - x$; aus $u'(x_E) = 0$ folgt $h : x_E = \sqrt{3}$, wobei h die Kanaltiefe bedeutet.

39. Die lichte obere Breite muß doppelt so groß sein wie die Breite eines jeden Brettes, also hier $25 + 2x_E = 50$: Aus $A(x) = (25+x)\sqrt{25^2 - x^2}$ folgt über $A'(x_E) = 0$ sofort $x_E = 12{,}5$ cm.

S. 27

1. a) $\frac{(x+1)^3}{3} + C$; b) $\frac{(2x+1)^3}{6} + C$; c) $\frac{(x+2)^3}{3} + C$;

   d) $\frac{(2x+2)^3}{6} + C$; e) $\frac{(3+ax)^3}{3a} + C$;

   f) $-\frac{(3-ax)^3}{3a} + C$

2. a) $\frac{(2x-5)^4}{8} + C$; b) $\frac{(6x-1)^5}{30} + C$;

   c) $-\frac{(9-7x)^5}{35} + C$; d) $-\frac{(8-5x)^4}{20} + C$;

   e) $\frac{(a+bx)^4}{4b} + C$; f) $\frac{(a+bx)^5}{5b} + C$

3. a) $-\frac{1}{2(2x+5)} + C$; b) $-\frac{1}{15(5x-3)^3} + C$;

   c) $\frac{1}{20(a-5x)^4} + C$

4. a) $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$; b) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$;

   c) $\frac{2}{3a}(ax+1)\sqrt{ax+1} + C$; d) $\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$;

   e) $\frac{3}{8}(2x+5)\sqrt[3]{2x+5} + C$; f) $\frac{3}{10}(2x+5)\sqrt[3]{(2x+5)^2} + C$;

   g) $-\frac{4}{21}(2-3x)\sqrt[4]{(2-3x)^3} + C$;

   h) $\frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot (ax+b) \cdot \sqrt[n]{ax+b} + C$;

   i) $-\frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot (b-ax) \cdot \sqrt[n]{(b-ax)^2} + C$

5. a) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3x-5} + C$; b) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{5-3x} + C$;

   c) $\frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$; d) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x+5)^2} + C$;

   e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{4x+5} + C$; f) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x-5)^3} + C$

S. 31 bis 32

6. a) $\frac{1}{3}$ FE; b) $\frac{1}{2}$ FE; c) $\frac{1}{6}$ FE

1. a) $y' = \frac{1}{(3+x)^2}$; b) $y' = \frac{1}{(5-x)^2}$; c) $y' = \sqrt{0,5+x}$;

   d) $y' = \sqrt{8-x}$; e) $y' = \frac{1}{\sqrt{-3+x}}$; f) $y' = \sqrt{6-5x}$

2. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{19}{150}\sqrt{10}$; d) $-\frac{14}{3}$ *;

   e) 2; f) $-\frac{2}{15} + 4\sqrt{6}$

3. $A_1 = \frac{x^3}{a}$; $A_2 = \frac{x^3}{3a}$; $(A_1 - A_2):A_1 = 2:1$

4. $v = \frac{ds}{dt}$; $s(t) = \int_0^t v\,d\tau = \frac{gt^2}{2}$; also für $t_1 = 1$ rund 4,9 m, für $t_2 = 3$ rund 44,1 m, für $t_3 = 8$ rund 313,6 m.

5. a) 1158 FE; b) $k \cdot \sum_{n=1}^{4} \frac{a_{n-1}k^{n-1}}{n}$

   c) Aus $\frac{x_1}{6}\left[(a_0)+(a_3x_1^3+a_2x_1^2+a_1x_1+a_0)+4(a_3\frac{x_1^3}{8}+a_2\frac{x_1^2}{4} + a_1\frac{x_1}{2} + a_0)\right]$ folgt unmittelbar die Behauptung $k \cdot \sum_{n=1}^{4} \frac{a_{n-1}x_1^{n-1}}{n}$.

6. a) $\frac{125}{6}\pi$; b) $96\sqrt{3}\pi$; c) $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$;

   d) $\pi(a^2 + a + \frac{1}{3})$

In der ersten Auflage des Lehrbuchs befindet sich ein Druckfehler. Statt $\int_4^7 \sqrt{x-8}\,dx$ muß es richtig heißen: $\int_4^7 \sqrt{8-x}\,dx$.

S. 32 bis 33

1.2. Winkelfunktionen und zyklometrische Funktionen

1. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\qquad \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

2. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}$; $\qquad \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+10}}$; $\qquad \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+10}}$

3. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+10}}+\sqrt{6-\frac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+10}}\right) \approx 0{,}63$;

$\frac{1}{8}\left(\sqrt{6(\sqrt{5}+5)}-\sqrt{5}+1\right) \approx 0{,}67$;

$\frac{1}{8}\left(\sqrt{(6-2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}-\sqrt{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+5)}\right) \approx 0{,}05$

1. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

2. a) grafisch: $x \approx 0{,}7$

b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

c) $x_1 = 0 + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

d) $x_1 = 0 + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

3. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\alpha_1 \approx 48^\circ + k.360^\circ$; $\quad \alpha_2 \approx 116^\circ + k.360^\circ$

d) $\beta = 30^\circ + k.360^\circ$

S. 36 bis 41

e) $\beta_1 \approx 50^\circ + k.360^\circ$; $\quad \beta_2 \approx 350^\circ + k.360^\circ$

f) $\beta_1 \approx 40^\circ + k.360^\circ$; $\quad \beta_2 \approx 103^\circ + k.360^\circ$

4. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\quad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\quad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

c) $\alpha_1 = 30^\circ + k.360^\circ$; $\quad \alpha_2 = 270^\circ + k.360^\circ$

d) $\beta = 45^\circ + k.360^\circ$

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

f) $x_1 = 34^\circ$; $\quad x_2 = 11^\circ$

$y_1 = 11^\circ$; $\quad y_2 = 34^\circ$

g) $\alpha_1 = 13^\circ + k.360^\circ$; $\quad \alpha_2 = 107^\circ + k.360^\circ$

$\beta_1 = 73^\circ + k.360^\circ$; $\quad \beta_2 = 167^\circ + k.360^\circ$

1. Die Bilder der Arcussinus-, Arcustangens- und Arcuscotangensfunktionen liegen zentralsymmetrisch zum Ursprung des Bezugssystems; das Bild der Arcuscosinusfunktion liegt achsialsymmetrisch zur x-Achse des Bezugssystems.

S. 41 bis 43

2.

	sin x cos x	tan x	cot x
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$(k+\frac{1}{2})\pi < x < [(k+1)+\frac{1}{2}]\pi$	$k\pi < x < (k+1)\pi$
Wertevorrat	$-1 \leqq y \leqq +1$	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
	arcsin x arccos x	arctan x	arccot x
Definitionsbereich	$-1 \leqq x \leqq +1$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertevorrat	$-\infty < y < +\infty$	$(k+\frac{1}{2})\pi < y < [(k+1)+\frac{1}{2}]\pi$	$k\pi < y < (k+1)\pi$

Die Definitionsbereiche der Winkelfunktionen entsprechen den Wertevorräten der zugehörigen Arcusfunktionen und umgekehrt.

1. a) 1 ; b) 1 ; c) ∞ ; d) 0 ; e) 0 ; f) 1 ; g) 0 ; h) 0

2. a) $\frac{1}{2}$; b) 2 ; c) 1 ; d) $\frac{5}{3}$; e) 12 ; f) ab; g) $\frac{3}{4}$; h) $\frac{5}{2}$; i) $\frac{2}{3}$

3. a) $-\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) π ; e) 0 ; f) 2 cos 2 ; g) $\frac{1}{2}$; h) 0 ; i) 1

4. Die Funktion $y = \frac{\tan x}{x}$ (im angegebenen Definitionsbereich) ist eine gerade Funktion.

5. a) Wegen $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ für betragsmäßig kleine x folgt erstens $\sin x \approx 1 . x = x$ für diese x; da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und somit $\cos x . \tan x = \sin x$ und zugleich $\cos x \approx 1$ für betragsmäßig kleine x gilt, folgt aus $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ für diese x zweitens auch $x \approx \tan x$.

   b) Wegen $\frac{1 - \cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2}$ für betragsmäßig kleine x folgt für diese x unmittelbar die Näherungsformel $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

6. a) Aus $\triangle OPQ < \widehat{OPR} < \triangle OP'R$ folgt am Einheitskreis sofort $\frac{1}{2} \cos x \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$, also: $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$; für die Fortführung des Beweises vgl. Lb. Seite 46.

   b) Aus $\triangle OPR < \widehat{OPR} < \triangle OP'R$ folgt am Einheitskreis sofort $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$, also $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$; für die Fortführung des Beweises vgl. Lb. Seite 45.

7. Bei Beachtung der Definitionsbereiche und der Nullstellen auftretender Nennerfunktionen folgt aus $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ mit Hilfe der Quotientenregel:

$$y' = \frac{\cos x(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x . \cos x}{(1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cos^2 x} \ ;$$

soll die Ableitung von $y = \cot x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$ gewonnen werden, so ist analog zu verfahren.

8. Aus $y = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$y' = -(-1)\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x.$$

9. a)

$y = \sin x$	$y^{(V)} = y'$	$y^{(IX)} = y'$
$y' = \cos x$	$y^{(VI)} = y''$	$y^{(X)} = y''$
$y'' = -y = -\sin x$	$y^{(VII)} = y'''$	
$y''' = -y' = -\cos x$	$y^{(VIII)} = y'''' = y$	
$y'''' = -y'' = -(-y) = y = \sin x$		

b) Für $y = \cos x$ gilt Analoges, so daß allgemein geschrieben werden kann:

Für $y = \sin x$ und für $y = \cos x$ gelten:

$y^{(4k-4)} = y$ mit $y' = \cos x$ bei $y = \sin x$

$y^{(4k-3)} = y'$ und

$y^{(4k-2)} = -y$ mit $y' = -\sin x$ bei $y = \cos x$

$y^{(4k-3)} = -y'$

$(k = 1;2;\ldots)$

10. a) $y' = 2\cos x$; b) $y' = 2\cos 2x$;

c) $y' = \cos(x+2)$; d) $y' = -\cos(2-x)$;

e) $y' = ab\cos(bx+c)$

11. a) $y' = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$;

b) $y' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$;

c) $y' = -2\cos x\cdot\sin x = -\sin 2x$;

d) $y' = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$;

e) $y' = 2x\cdot\cos x^2$; f) $y' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$;

g) $y' = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; h) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}$

12. a) $y' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$;

b) $y' = 4\sin x\cdot\cos x = 2\sin 2x$;

c) $y' = 4\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}$;

d) $y' = \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 4\sin 2x\cdot\cos 2x$;

e) $y' = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$; f) $y' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$;

g) $y' = 2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$;

h) $y' = \frac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$; i) $y' = \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2}$;

k) $y' = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$;

l) $y' = \frac{x\cdot\sin x + \cos x - 1}{x^2}$;

m) $y' = \frac{\sin x\cdot\cos x - x}{\sin^2 x}$

13. a) $y' = 4\sin x + 2x\cdot\cos x$;

b) $y' = \frac{2\sin x - 2x\cdot\cos x - \sin x\cdot\tan^2 x}{\sin^3 x}$;

c) $y' = 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 5\cos^3 x - 10\sin^2 x\cos x$

$= 3\cos 2x + 5\cos x\cdot\cos 2x - \frac{5}{2}\sin x\cdot\sin 2x$;

d) $y' = -2\tan x(1 + \tan^2 x)$;

e) $y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$;

f) $y' = \frac{a \cos ax.\cos bx + b \sin ax.\sin bx}{\cos^2 bx}$;

g) $y' = -\tan^{-2}x(1 + \tan^2 x) = -(1 + \cot^2 x)$;

h) $y' = a \cot^{-2}ax(1 + \cot^2 ax) = a(1 + \tan^2 ax)$

14. a) $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 - \cos^2 x}}$;

b) $y' = -\sqrt{1 + \cot^2 x}\,(2 \sin 2x + \cos 2x.\cot x)$;

c) $y' = -\frac{\sqrt{\tan x - 1}}{\cos^2 x(\tan x-1)^2\sqrt{\tan x+1}}$;

d) $y' = \sqrt{1 + \tan^2 x}\,(1 + x.\tan x)$

15. a) $y'' + y = 0$;   b) $y'' + y = 0$;

c) $y'' + y = (1-a^2)\sin ax$;

d) $y'' + y = a(1-b^2)\sin bx$;

e) $y'' + y = 0$;   f) $y'' + y = 0$;

g) $y'' + y = (1-a^2)\cos ax$;

h) $y'' + y = a(1-b^2)\cos bx$;

i) $y'' + y = 0$;

k) $y'' + y = (1-b^2)\left[a.\sin(bx+c)+d.\cos(bx+e)\right]$

Der Koeffizient k in $y'' + ky$ muß sein:

a) $k = 1$;   b) $k = 1$;   c) $k = a^2$;

d) $k = b^2$;   e) $k = 1$;   f) $k = 1$;

g) $k = a^2$;   h) $k = b^2$;

i) $k = 1$;   j) $k = b^2$ machen jeweils $y'' + ky$ zu Null.

16. a) $2 \sin x.\cos x = 2 \sin x.\cos x$;

b) $2 \sin x.\cos x - 2 \sin 2x = -2 \cos x \,.\, \sin x$,

woraus folgt: $2 \sin x.\cos x = \sin 2x$;

c) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$;

d) $-\sin x = -2 \sin \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2}$;

e) $-\sin x = -2 \sin \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2}$;

f) $\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos x}}$;

g) $\cos(x + \beta) = \cos x.\cos \beta - \sin x.\sin \beta$

17. a) etwa 110° ;   b) etwa 127° ;

c) 45° ;   d) 45°

18. a) $x_{Max} = \frac{\pi}{2} + 2k.\pi$; $y_{Max} = 1$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$

$x_{Min} = \frac{3}{2}\pi + 2k.\pi$; $y_{Min} = -1$

$x_W = k.\pi$; $y_W = 0$

b) $x_{Max} = \frac{\pi}{2} + 2k.\pi$; $y_{Max} = 2$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$

$x_{Min} = \frac{3}{2}\pi + 2k.\pi$; $y_{Min} = -2$

$x_W = k.\pi$; $y_W = 0$

c) $x_{Max} = \frac{\pi}{4} + k.\pi$; $y_{Max} = 1$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$

$x_{Min} = \frac{3}{4}\pi + k.\pi$; $y_{Min} = -1$

$x_W = k.\frac{\pi}{2}$; $y_W = 0$

d) $x_{Max} = \frac{\pi}{4} + k.\pi$; $y_{Max} = 2$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$

$x_{Min} = \frac{3}{4}\pi + k.\pi$; $y_{Min} = -2$

$x_W = k.\frac{\pi}{2}$; $y_W = 0$

e) $x_{Max} = \frac{\pi}{2} + k.\pi$; $y_{Max} = 1$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$
$x_{Min} = k.\pi$; $y_{Min} = 0$
$x_W = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$; $y_W = \frac{1}{2}$

f) $x_{Min} = \frac{\pi}{2} + k.\pi$; $y_{Min} = 0$ $(k = 0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$

19. Aus der Untersuchung des Querschnittes, der durch die Funktion $F(x) = \frac{a^2}{2} \cdot \sin x$ gegeben ist, wenn a die Brettbreite und x den Winkel zwischen den Brettern bedeutet, folgt als günstigster Winkel der rechte Winkel.

20. Wird der Neigungswinkel zwischen dem Bodenbrett und einem Seitenbrett mit $90^\circ + x$ bezeichnet, so ergibt sich für den Querschnitt $F(x) = a^2\cos x + \frac{a^2}{2}\sin 2x$, woraus $x_{Max} = 30^\circ$ durch Nullsetzen der ersten Ableitung gewonnen wird. Der Winkel muß also 120° betragen.

21. Wird der halbe Winkel zwischen den beiden unteren Brettern mit x bezeichnet, so ergibt sich für den Querschnitt $F(x) = 2a^2\sin x + \frac{1}{2}a^2\sin 2x$, wobei a die Breite eines Brettes bedeutet. Durch Nullsetzen der ersten Ableitung folgt daraus für den gesuchten Winkel $\alpha = 2x \approx 137^\circ$.

22. Wird der Winkel, den die Diagonale d mit der Rechteckseite a bildet, mit x bezeichnet, so ergibt sich der Umfang mit $u(x) = 2d(\cos x + \sin x)$. Aus $u'(x) = 2d(-\sin x + \cos x)$ folgt, daß $u'(x)$ genau dann

Null ist, wenn $\sin x = \cos x$ gilt. Da das bekanntlich für $x = \frac{\pi}{4}$ zutrifft, ist das gesuchte Rechteck das Quadrat.

23. Das rechtwinklige, wie aus dem Ansatz $F(x) = \frac{ab}{2}.\sin x$ und der Ableitung $F'(x) = \frac{ab}{2}.\cos x$ unmittelbar hervorgeht.

24. Aus $y' = \tan\alpha - \frac{2gx}{2c^2\cos^2\alpha}$ folgen für die größte Steighöhe:
$x_{Max} = \frac{c^2}{g}.\sin\alpha\,.\cos\alpha = \frac{c^2}{2g}.\sin 2\alpha$;
$y_{Max} = \frac{c^2}{2g}.\sin^2\alpha$.
Aus x_{Max} folgt unmittelbar, daß der günstigste Wurfwinkel $\alpha = 45^\circ$ ist.

25. Unter Verwendung von Additionstheoremen läßt sich die angegebene Formel umformen in
$w(\alpha) = \frac{c^2}{2g}\left(\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + \frac{8gh}{c^2}}\right)$, aus deren Ableitung man für $w'(\alpha_M) = 0$ erhält:
$k.\sin 2\alpha_M - 4.\sin 2\alpha_M.\cos 2\alpha_M =$
$= 4.\cos 2\alpha_M\sqrt{\sin^2 2\alpha_M + k.\cos^2\alpha_M}$ mit $k = \frac{8gh}{c^2}$.
Hieraus folgt $\alpha_{Max} = \arccos\sqrt{\frac{k+4}{k+8}}$, wobei k die angegebene Bedeutung hat.

26. a) $v = \frac{ds}{dt} = a.\cos\omega t$; $b = \frac{d^2s}{dt^2} = -a\,\omega\sin\omega t$;
b) $v \pm a$ tritt ein bei $t = \frac{k.\pi}{\omega}$;
$b_{Extr} = \pm a\,\omega$ tritt ein bei $t = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega}$;

27. Maximale Beleuchtungsstärke herrscht bei $h = \frac{1}{4}\sqrt{2}.d$ als Höhe der Leuchte über dem Tischmittelpunkt, wie aus der Ableitung

$$f'(h_M) = m.\frac{\frac{d^2}{4} - 2h_M^2}{(\frac{d^2}{4} + h_M^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

mit $\cos \alpha_M = \frac{h_M}{e}$ unmittelbar folgt.

28. Aus der Gleichgewichtsbedingung $F.\cos\alpha = p(G - F.\sin\alpha)$ folgt, daß $y = \cos\alpha + p.\sin\alpha$ ein Maximum haben muß, wenn F minimal sein soll. Man erhält $F_{Min} = pG.\cos\alpha_{Min}$ bei $\alpha_{Min} = \arctan p$.

29. a) $-\frac{1}{2}.\cos 2x + C$;

b) $\frac{1}{3}.\sin(3x + 5) + C$;

c) $-2.\cos\frac{x}{2} + C$;

d) $\frac{1}{4}.\sin^4 x + C$;

e) $-\frac{1}{5}.\cos^5 x + C$;

f) $-\cot(x - 3) + C$;

g) $\frac{5}{2}.\tan(2x + 1) + C$

30. a) $I = 1$; $A = 1$; b) $I = 2$; $A = 2$;

c) $I = 0$; $A = 4$; d) $I = -2$; $A = 2$;

e) $I = 0$; $A = 2$; f) $I = -2$; $A = 2$;

g) $I = 2$; $A = 2$; h) $I = 0$; $A = 4$

1. Aus $y = \arccos x$ folgt $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

aus $y = \operatorname{arccot} x$ folgt $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

2. a) $y' = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$ $\quad y'' = \frac{125x}{(\sqrt{1 - 25x^2})^3}$;

b) $y' = \frac{1}{3}.\frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}}$ $\quad y'' = \frac{-6x}{x^4 + 18x^2 + 81}$;

c) $y' = \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-2x}}$ $\quad y'' = \frac{3x^2 - 5x + 2}{(\sqrt{-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1})^3}$;

d) $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ $\quad y'' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$;

e) $y' = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\quad (1 < x < \sqrt{2})$

$y'' = \frac{x^4 - 2}{(\sqrt{2 - x^2}.\sqrt{x^2 - 1})^3}$;

f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$

$y'' = \frac{4\arctan x + 1}{4(\sqrt{\arctan x})^2(1+x^2)^2}$

3. a) $\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$; b) $\frac{\sqrt{5}}{15} \arctan\frac{3x}{\sqrt{5}} + C$;

c) $\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan(\sqrt{5}.x) + C$; d) $\arcsin\frac{x}{2} + C$;

e) $\frac{1}{3} \arcsin\frac{3x}{2} + C$; f) $\frac{\sqrt{5}}{5} \arcsin(\sqrt{5}.x) + C$

1. $-x.\cos x + \sin x + C$

2. a) $\frac{1}{2}(x + \sin x.\cos x) + C$

   b) $\frac{\sin^2 x}{2} + C$

   c) $x + \sin x.\cos x + C$

3. $x^2.\sin x + 2x.\cos x - 2.\sin x + C$

4. $x.\arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$

5. a) $-x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2.\cos x + C$

   b) $\frac{x^2}{2}.\arcsin x - \frac{1}{4}.\arcsin x + \frac{1}{4}x.\sqrt{1 - x^2} + C$

   c) $-\cos x + \frac{1}{3}.\cos^3 x + C$

   d) $(-x^3+x^2+5x-2).\cos x + (3x^2-2x-5).\sin x + C$

1. $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$

2. π

3. Grafisch erhält man die Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 0{,}9$.
   Daraus folgt $A \approx 0{,}15$ FE.

4. Vorüberlegungen wie in Beispiel 22, so daß gilt:
   $\frac{1}{4}.A = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$.
   Substitution: $x = \cos t \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}$; $\frac{dx}{dt} = -\sin t$
   Eingesetzt in $\int\sqrt{1 - x^2}\,dx$:
   $\int\sqrt{1 - \cos^2 t}\,(-\sin t)dt = -\int \sin^2 t\,dt$.
   Wegen $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C$ erhält man:
   $\int\sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}(t - \sin t.\cos t) + C$.

Aus $\cos t = x$ folgt: $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$
und $t = \arccos x$.
Daraus folgt: $\int\sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}(\arccos x - x.\sqrt{1-x^2}) + C$.
Für den Flächeninhalt ergibt sich:

$$\frac{1}{4}.A = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}(\arccos x - x.\sqrt{1 - x^2})\Big|_0^1$$

$$\frac{1}{4}.A = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \pi$$

5. $V = \frac{\pi}{2}(\pi + 1)$

1.3. Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. a) Potenzfunktionen $y = x^n$, erklärt für alle reellen n.

   b) Exponentialfunktionen $y = a^x$, erklärt für alle $a > 0$.

lg $a_1 = 0$ hätte $a_1 = 1$ zur Voraussetzung und damit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 = 1.$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}1^{n-3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$+ \dots + \binom{n}{n}1^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3}$$

$$+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\overline{n-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n \cdot n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$$

S. 66 bis 70

$$\frac{1}{0!} = 1,00000000$$
$$\frac{1}{1!} = 1,00000000$$
$$\frac{1}{2!} = 0,50000000$$
$$\frac{1}{3!} = 0,16666666 \dots$$
$$\frac{1}{4!} = 0,04166666 \dots$$
$$\frac{1}{5!} = 0,00833333 \dots$$
$$\frac{1}{6!} = 0,00138888 \dots$$
$$\frac{1}{7!} = 0,00019841 \dots$$
$$\frac{1}{8!} = 0,00002480 \dots$$
$$\frac{1}{9!} = 0,00000275 \dots$$
$$\sum_{\nu=0}^{9} \frac{1}{\nu!} = 2,71828149 \dots$$

$y = 2e^x$; $y' = 2e^x$; also $2e^x = 2e^x$ usw.
Alle Funktionen $y = ae^x$ (a konstant) genügen der Differentialgleichung $y = y'$

1. b) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{e}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$

2. Für jede Basis
   $b \gtrless 1$ ist für Numeri N im Bereich $\begin{matrix} b^k \leqq N < b^{k+1} \\ b^k \geqq N > b^{k+1} \end{matrix}$
   die Kennzahl der Logarithmen k.

S. 71 bis 76

3.

a)	b)	c)	d)
0	1,0986	1,6094	3,6109
2,3026	3,4012	0,3068-1	6,7558
4,6052	5,7038	0,0042-3	2,4849
6,9078	8,0064	0,7016-6	5,8805

e)	f)	g)	h)
8,7842	8,0020	0,3779-3	2,4849
2,8507	8,2951	2,0609	10,0842
0,9042	2,5479	0,7903-2	0,9873-1
0,3613-1	1,5243	0,2632-8	0,2513-1

4. a) 7,5531 b) 5,1708 c) 1,9952
   d) 0,9182-1 e) 5,4803 f) 7,6415

5.

a)	b)	c)
656	6,05	3648
27	114,1	1488
410	332	22030
1000	31,7	14800

d)	e)	f)
0,85	0,0997	20,1
0,0379	0,4635	0,0498
0,002233	0,0105	8,7
0,3679	0,0225	0,1151

6. a) 0,5335 b) 0,000003497 c) 0,8826
   d) 1,906 e) 2,963 f) 1,508

S. 76 bis 77

7. a) $\frac{1}{\lg 3} = 2,096$ b) $\frac{1}{\lg 7,5} = 1,142$ c) $\frac{1}{\ln 5} = 0,6217$

d) $\frac{1}{\ln 12,6} = 0,3946$ e) $\frac{\ln 7}{\ln 4} = 1,404$ f) 5,128

g) 0,5405 h) 1,078

8. a) $x = 4$ b) $x = 7$ c) $x = -7$ d) $x = \frac{1}{5} \log_3 7$

$x \approx 0,3542$

e) $x = 5 \lg_7 3$
$x \approx 2,823$

f) $x = \log_{1000} 7,934$
$x \approx 0,3$

g) $x = \log_{1,3} 2,856$
$x \approx 4$

h) $x = \log_{0,00013} 7693$
$x \approx -1$

i) $x = \log_{100} 30$
$x \approx 0,7386$

k) $x = \log_{\frac{2}{3}} 8$
$x \approx -5,128$

l) $x = \log_{\frac{49}{27}} \frac{35}{27}$
$x \approx 0,4335$

9. $\ln \left(\frac{p}{p_o}\right) + \frac{\varrho_o g}{p_o} h = 0$

$h = \frac{p_o}{\varrho_o g}(\ln p_o - \ln p) = \frac{{}^{10}M_e p_o}{\varrho_o g} (\lg p_o - \lg p)$

Beim Einsetzen der Größen zur Berechnung des Zahlenwertes 18400 ist auf die Maßeinheiten zu achten:

$p_o = 760$ Torr $= 0,760 \cdot 13,6 \cdot 9,81$ kg $m^{-1}s^{-2}$

$\varrho_o = 0,001293$ kg m^{-3}; $g = 9,81$ ms^{-2}

S. 77

In Zahlenwerten ergibt sich dann (h in Metern):

$$h = \frac{2,3026 \cdot 0,76 \cdot 13,6 \cdot 9,81}{0,001293 \cdot 9,81} (\lg 760 - \lg p)$$

$$h = 18400\ (2,8808 - \lg p)$$

$$y = (\tfrac{1}{2})^x$$
$$y' = \ln \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{2})^x$$
$$\ln \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{2})^x = c \cdot (\tfrac{1}{2})^x$$
$$c = \tfrac{1}{2}$$

$$y = 2^x$$
$$y' = \ln 2 \cdot 2^x$$
$$\ln 2 \cdot 2^x = c \cdot 2^x$$
$$c = \ln 2$$

$$y = 4^x$$
$$y' = \ln 4 \cdot 4^x$$
$$\ln 4 \cdot 4^x = c \cdot 4^x$$
$$c = \ln 4$$

$$y = (\tfrac{5}{4})^x$$
$$y' = \ln (\tfrac{5}{4}) \cdot (\tfrac{5}{4})^x$$
$$\ln \tfrac{5}{4} \cdot (\tfrac{5}{4})^x = c \cdot (\tfrac{5}{4})^x$$
$$c = \ln \tfrac{5}{4}$$

$$y = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \cdot \ln x}$$

Unter Beachtung der Ketten- und Produktregel folgt:

$$y' = e^{\sqrt{x} \ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} (\ln x + 2) = \frac{1}{2} x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} (\ln x + 2).$$

1. a) $\ln y = \sin x \ln x$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x$$
$$y' = x^{\sin x} (\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x)$$

b) $\ln y = x \ln x$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$
$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

c) $\ln y = x \ln e - \ln x = x - \ln x$

$$\frac{1}{y} y' = 1 - \frac{1}{x}$$
$$y' = \frac{e^x}{x} (1 - \frac{1}{x})$$

2. a) $y' = \frac{\ln a}{x} a^{2\sqrt{x}}$ b) $y' = e^x(x + 2)$

c) $y' = \frac{e^x (x+1)+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$ d) $y' = \frac{n}{x}$

e) $y' = \frac{e^x}{a+e^x}$ f) $y' = \frac{2}{1-x^2}$

g) $y' = \frac{\ln a}{x^2} a^{-\frac{1}{x}}$ h) $y' = 2(x-1)e^{x^2-2x-1}$

i) $y' = \frac{5x - 2}{(5x^2-2x+7)\ln 10}$ k) $y' = \frac{a^{\tan x} \cdot \ln a}{\cos^2 x}$

l) $y' = \frac{10(\lg x)^9}{x \ln 10}$ m) $y' = \frac{e^{2x}}{x}[x \ln x(2\cos x - \sin x) + \cos x]$

3. a) $y' = \frac{n}{x}$; $y'' = -\frac{n}{x^2}$; $y''' = \frac{2n}{x^3}$

b) $y' = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$; $y'' = \frac{n}{x^2}(\ln x)^{n-2}(n-1-\ln x)$;

$$y''' = \frac{n(n-1)}{x^2}(\ln x)^{n-3}(n-2-\ln x) - \frac{n}{x^3}(\ln x)^{n-2}(n-1-\ln x)$$

c) $y' = \cot x$; $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $y''' = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

d) $y' = \frac{1}{x}e^{\ln x}$; $y'' = 0$; $y''' = 0$

$$-0{,}48\cdot e^{-\frac{1{,}25+2m\pi}{3}}\cdot 15\cos(1{,}25+2m\pi) < 0,$$

da $\cos(1{,}25 + 2m\pi) > 0$

$$-0{,}48\cdot e^{-\frac{1{,}25+(2m+1)\pi}{3}}\cdot 15\cos(1{,}25+[2m+1]\pi) > 0,$$

da $\cos(1{,}25+[2m+1]\pi)=\cos([1{,}25+\pi]+2m\pi) < 0$

1. Maximum (m = 0): $y_1 \approx 3{,}75$
1. Minimum (m = 0): $y_2 \approx -1{,}31$
2. Maximum (m = 1): $y_3 \approx 0{,}45$
2. Minimum (m = 1): $y_4 \approx -0{,}17$

$$\dddot{y} = 0{,}48e^{-0{,}2t}\,[0{,}2(3\cos 0{,}6t+4\sin 0{,}6t) + +0{,}6(4\cos 0{,}6t-3\sin 0{,}6t)]$$

Für alle Abszissen der Wendepunkte gilt

$$3\cos 0{,}6\, t_W + 4\sin 0{,}6\, t_W = 0$$

$$\cos 0{,}6\, t_W = -\frac{4}{3}\sin 0{,}6\, t_W$$

In $\dddot{y}$ ist für alle t wieder $e^{-0{,}2t} \neq 0$, der erste Klammersummand ist dagegen gleich Null. Der zweite Summand nimmt die Form

$$0{,}6(-\frac{16}{3}\sin 0{,}6\, t_W - 3\sin 0{,}6\, t_W) = -0{,}2\cdot 25\sin 0{,}6\, t_W$$

an.

Mit $t_W = \frac{2{,}5+k}{0{,}6}$ folgt aber $\sin(2{,}5 + k\quad) \neq 0$.

Die Ordinaten der Wendepunkte werden

für k = 0; $y_0 \approx 1{,}58$;

für k = 1: $y_1 \approx -0{,}54$;

für k = 2: $y_2 \approx 0{,}19$.

S. 85 bis 86

Der Berührungspunkt sei B ($t_B;y_B$). Dann gilt:

$$6e^{-0{,}2t_B}\sin 0{,}6\, t_B = 6e^{-0{,}2t_B}$$

$$6e^{-0{,}2t_B}(\sin 0{,}6\, t_B - 1) = 0$$

Wegen $e^{-0{,}2t_B} \neq 0$ für alle t folgt

$$\sin 0{,}6\, t_B = 1$$

$$0{,}6\, t_B = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots)$$

$$t_B = \frac{\pi}{1{,}2}(1+4k) \qquad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots).$$

Diese Werte stimmen nicht mit t_E überein.

1. Y (0;1)
2. X (nicht vorhanden)
3. E (0;1), Max.
4. $W_1\,(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{1}{e}\sqrt{e})$, $W_2\,(-\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{1}{e}\sqrt{e})$

$$v = \dot{s} = \frac{g}{f} - \frac{g}{f^2}e^{-ft}\cdot f = \frac{g}{f} - \frac{g}{f}e^{-ft}$$

$$b = \ddot{s} = \frac{g}{f}e^{-ft}\cdot f = g\cdot e^{-ft}$$

Durch Einsetzen folgt tatsächlich

$v = \frac{g}{f} - \frac{b}{f}$ oder $b = g - f\cdot v$.

Aus $\ddot{s} = 0$ folgt $g\cdot e^{-ft} = 0$.

Das ist nur erfüllt durch $\lim_{t\to\infty} e^{-ft} = 0$.

Die maximale Geschwindigkeit wäre dann

$$v_m = \frac{g}{f} - \frac{g}{f}e^{-ft} = \frac{g}{f}.$$

Sie bleibt aber während des Sprunges stets unter diesem Wert, nähert sich ihm aber schon nach kurzer Zeit bis auf eine geringe Differenz.

S. 86

1. $y = ae^{-bt} \sin ct$

$\dot{y} = ae^{-bt}(c \cos ct - b \sin ct)$

$\ddot{y} = ae^{-bt}([b^2-c^2] \sin ct - 2b\, c \cos ct)$

$ae^{-bt} \cdot \{[(b^2-c^2)\sin ct - 2b\, c \cos ct] +$

$+ C_1 (c \cos ct - b \sin ct) + C_2 \sin ct\} = 0$

(1) $-2bc \cos ct + C_1\, c \cos ct = 0$

$C_1 = 2b$

(2) $b^2 \sin ct - c^2 \sin ct - 2b^2 \sin ct + C_2 \sin ct = 0$

$C_2 = b^2 + c^2$

2. a) Y (0;0)

X $(\frac{k}{3}\pi;0)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2 \ldots$

E $(0{,}49+\frac{k}{3}\pi;\ldots)$ $k = 0;\ \pm 2;\ \pm 4 \ldots$ Max.

$k = \pm 1;\ \pm 3;\ \ldots$ Min.

W $(0{,}98+\frac{k}{3}\pi;\ldots)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2 \ldots$

b) Y (0;0)

X $(2k\pi;\ldots)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

E $(0{,}49+2k\pi;\ldots)$ $k = 0;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \ldots$ Max.

$k = \pm 1;\ \pm 3;\ \ldots$ Min.

W $(0{,}98+2k\pi;\ldots)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

3. a) X, Y, E lassen sich nicht mit den üblichen Methoden bestimmen. (Wertetafel aufstellen!) Nur W $(-1;\frac{1}{2e^2})$.

$\lim_{x \to +0} y = +\infty$; $\lim_{x \to -0} y = 0$

Asymptote: $y = \frac{1}{2}$

S. 87

b) Y (nicht vorhanden)

X (1;0)

E $(e;\frac{1}{e})$, Max.

W $(e\sqrt{e};\frac{3\sqrt{e}}{2e^2})$

c) Y (nicht vorhanden)

X (nicht vorhanden)

E (1;e), Min.

W (nicht vorhanden)

(Zum Zeichnen Wertetafel verwenden!)

d) Y (0;1)

X $(\frac{\pi}{2}+k\pi;0)$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$

E $(\frac{\pi}{4}+k\pi;\ldots)$ $(k = 0;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \ldots)$, Max.

$(k = \pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ldots)$, Min.

W $(0+k\pi;\ldots)$

4. a) 2600 DM b) 2688 DM c) 2820 DM d) 2696 DM

5. $c = 0{,}019$

6. a) 65 536 erfahren es um 12^h; 131 071 wissen es insgesamt. $n\cdot 15$ min nach 8^h erfahren es 2^n Personen, d.h. es wissen dann insgesamt $1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ Personen. Wegen

$2^n = e^{n \ln 2}$ ist $c = \ln 2$.

b) 28 697 814 erfahren es um 12^h; 43 046 721 wissen es insgesamt.

S. 87

n·15 min nach 8^h erfahren es $2\cdot 3^{n-1}$ Personen, d.h. es wissen es dann insgesamt $(2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}+1)$ Personen. Wegen $3^{n-1} = e^{(n-1)\ln 3}$ ist $c = \ln 3$.

7. $2^{100} \approx 10^{31}$ Reaktionen

8. $\lambda \cdot T = \ln 2 \approx 0,7$

a) $\lambda = 0,03\ a^{-1}$;	$m = 0,97\ m_o$
b) $\lambda = 1,6\cdot 10^{-10} a^{-1}$;	m praktisch noch gleich m_o
c) $\lambda = 0,0004 a^{-1}$;	$m = 0,67\ m_o$
d) $\lambda = 0,02 a^{-1}$;	$m = 0,5\ m_o$
e) $\lambda = 0,13\ a^{-1}$;	$m = 0,27\ m_o$
f) $\lambda = 0,09\ d^{-1}$;	m praktisch nicht mehr meßbar

9. a) $v = \dot z = \frac{k}{a-t}$

c) $T = a\,(1-e^{-\frac{a}{2k}})$

10. a) $v = \dot T = -k\,(T_o - T_1)\cdot e^{-kt}$

11. b) $I_o = I_o\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t_o})$ hat $e^{-\frac{R}{L}t_o} = 0$ zur Folge. Das ist für kein endliches t erfüllt. Die Maximalstromstärke wird theoretisch nie erreicht. Dasselbe trifft beim Ausschalten zu $(0 = I_o \cdot e^{-\frac{R}{L}t_o})$.

S. 87 bis 88

c) $I = I_o\,(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}}) = I_o\,(1-e^{-1}) \approx 0,63\ I_o$

$I = I_o\, e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}} = I_o \cdot e^{-1} \approx 0,37\ I_o$

12. a) $\beta = \dot\omega = -f\,\omega_o\, e^{-ft}$ ist nicht konstant, also ist die Bewegung ungleichmäßig verzögert.

b) $t_o = \frac{\ln 10}{f} \approx \frac{2,3}{f}$

1. $\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{+x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} = \frac{e^{+x}+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

2. $(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2}) = \frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}) = 1$

3. $\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \sinh y$

$= \frac{e^x-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^y-e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$= \frac{1}{4}(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}+e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-x-y})$

$= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)$

4. $y = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$	$y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$
$y' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$	$y' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$

2. a) $\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $\coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

b) $\tanh x \cdot \coth x = 1$

S. 88 bis 91

d) $\frac{d \tanh x}{dx} = \frac{\cosh x . \cosh x - \sinh x . \sinh x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} =$

$= 1 - (\tanh x)^2$

$\frac{d \coth x}{dx} = \frac{\sinh x . \sinh x - \cosh x . \cosh x}{(\sinh x)^2} = \frac{-1}{(\sinh x)^2} =$

$= 1 - (\coth x)^2$

3. a) $\cosh x + \sinh x = e^x$

b) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

c) $(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

d) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

4. $\alpha = 45^\circ$

5. a) $\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x; \qquad \sin x + (- \sin x) = 0$

$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = - \cos x; \qquad \cos x + (- \cos x) = 0$

b) $\frac{d^2 \sinh x}{dx^2} = \sinh x; \qquad \sinh x - \sinh x = 0$

$\frac{d^2 \cosh x}{dx^2} = \cosh x; \qquad \cosh x - \cosh x = 0$

c) $\frac{d^4 \sin x}{dx^4} = \sin x; \qquad \sin x - \sin x = 0$

$\frac{d^4 \cos x}{dx^4} = \cos x; \qquad \cos x - \cos x = 0$

$\frac{d^4 \sinh x}{dx^4} = \sinh x; \qquad \sinh x - \sinh x = 0$

$\frac{d^4 \cosh x}{dx^4} = \cosh x; \qquad \cosh x - \cosh x = 0$

S. 91

1. a) $\ln 3 + 4$ *
   b) $\frac{e^2(e^2-1) + 3^{e+1} - 2^{e+1}}{e + 1}$
   c) $e^x + e(x + \ln x) + C$
   d) $\frac{1 - e^{-1}}{a}$
   e) $\frac{3}{2}$
   f) $e^x(x-1) + C$
   g) $-\frac{1}{2} \ln 7$
   h) $\ln (x^2 - 5x + 6) + C$
   i) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(\pi + x^2) + C$
   k) $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$
   l) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

2. a) $\frac{1}{2} (3 \ln 2 - 1) = 0,5396$
   b) $\frac{(e-1)^2}{e} = 1,082$
   c) $\frac{26}{\ln 3} = 23,66$
   d) $\frac{e^3\sqrt{e} - \sqrt[3]{e^2}}{e} = 11,4655$
   e) $10,67$
   f) $\approx 6,41$

3. a) $\frac{e^2\pi}{4} (e^4-1)$
   b) $\pi e (5e^2-1)$
   c) $\frac{\pi (e^{16} - e^{12} - 8e^8 + e^4 - 1)}{8e^8}$
   d) $\frac{24,75\pi}{2 \ln 10}$

4. $21,5^\circ$

6. a) 3,3006; 0,8744-1; 0,2029; 0,4489-3
   b) 4,2485; 1,9459; 0,3407-3; 0,0922-7
   c) $x = 1,252$; $x = 473,4$; $x = 0,086$; $x = 0,1893$
   d) $x = 6,386$; $x = 0,1353$; $x = 20,09$; $x = 0,4724$

* **In der ersten Auflage des Lehrbuchs muß statt der 0 als untere Grenze 1 stehen. Sonst ist die Aufgabe unlösbar.**

S. 96 bis 97

7.

a)	3,9482	1,2825	3,2817	7,8053
b)	3,322	0,558	1,465	2,199
c)	2,547	-1	4,174	2,95
d)	$x = 32$	$x = 3^{-8}$	$x = 5^{68,5}$	$x = \frac{1}{4^{1,7755}}$

8. a) $x = \log_{243} 9,656$ b) $x = \log_{1000} 7,943$

$x \approx 0,4$ $x \approx 0,3$

c) $x = 5 \log_5 1,76$ d) $x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8}$

$x \approx 1,757$ $x = 3$

9. a) $2^{73} \approx 10^{22}$ b) In rund $13\frac{1}{2}$ h

10. a) $y' = 2e^{2x} \sin x\,(\sin x + \cos x)$

b) $y' = \frac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$

c) $y' = \ln a \cdot a^{\tan x}(1 + \tan^2 x)$

d) $y' = -\frac{2}{x}$

e) $\frac{\lg e}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$

f) $y' = \cot x$

g) $y' = \sin 2x\; e^{\sin^2 x}$

h) $y' = -\frac{\lg e}{a + x}$

i) $y' = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

k) $y' = \left(\frac{a}{x}\right)^x\left(\ln \frac{a}{x} - 1\right)$

l) $y' = x^{\frac{1}{x} - 2} \cdot (1 - \ln x)$

m) $y' = \frac{(a + bx)^{\frac{1}{x} - 1}}{x^2}\left[bx - (a + bx) \ln (a + bx)\right]$

12. a) Y (0;0)

X (0;0)

E_1 (0;0), Min.; E_2 $(2; \frac{4}{e^2})$, Max.

W_1 $(2+\sqrt{2}; \frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}})$; W_2 $(2-\sqrt{2}; \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}})$

b) Y (0;0)

X (0;0)

E $(\ln 0,5; -\frac{1}{4})$, Min.

W $(\ln 0,25; -\frac{3}{16})$

c) Y (nicht vorhanden)

X (nicht vorhanden)

E (e;e), Min.

W $(e^2; \frac{e^2}{2})$

d) Y (0;0), X (0;0) } Grenzwertermittlung!

E $(\sqrt{e}; \sqrt[4]{4})$, Max.

W_1 $(e^{\frac{1}{8}(\sqrt{17}+1)}; e^{\frac{1}{64}(6\sqrt{17}-10)})$

W_2 $(e^{\frac{1}{8}(1-\sqrt{17})}; e^{\frac{1}{64}(-6\sqrt{17}-10)})$

e) Y (0;0)

X (0;0)

E $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \ldots\right)$ $\begin{cases} k = 0;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \ldots;\ \text{Max.} \\ k = \pm 1;\ \pm 3;\ \ldots;\ \text{Min.} \end{cases}$

W $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \ldots\right)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

f) Y (0;0)

X $(2k\pi; 0)$ $k = 0,\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$

E $(2{,}06 + 2k\pi; \ldots)$ $k = 0;\ \pm 2,\ \pm 4;\ \ldots,$ Max. $k = \pm 1;\ \pm 3;\ \ldots,$ Min.

W $(4{,}13 + 2k\pi; \ldots)$ $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

13\. a) $\frac{e^{mx}}{m} + C$ b) $\frac{\ln|r + sx|}{s} + C$

c) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ d) $\ln \frac{e + a}{1 + a}$

e) $-\frac{1}{b} \ln|a + b \cos x| + C$

f) $\frac{1}{nb} \ln|a + bx^n| + C$

14\. a) Y (0;1) $A = \frac{3(e^{10} - e^7) + (1 - e^3)}{2e^5}$

X $(-\frac{1}{2} \ln 3;\ 0)$ $V_x = \frac{\pi}{8e^{10}}(9e^{20} - 9e^{14} - 36e^{10} + e^6 - 1)$

E (nicht vorhanden)

N $(-\frac{1}{2} \ln 3;\ 0)$ V_y entfällt, da Integral mit bekannten Mitteln nicht lösbar.

S. 97

b) Y (0;-1) $A = \frac{e^{10} - e^7 + 3e^3 + 3}{4e^5}$

X (nicht vorhanden) $V_x = \frac{\pi}{32e^{10}}(e^{20} - e^{14} + 36e^{10} + 9e^6 - 9)$

E $(\frac{1}{2} \ln 3;\ \frac{1}{2}\sqrt{3})$ Max.

W (nicht vorhanden V_y entfällt (s.o.)

c) Y $(0;\frac{1}{2})$ $A = \frac{e^{10} - e^7 - 3e^3 + 3}{4e^5}$

X $(\frac{1}{2} \ln 3;\ 0)$ $V_x = \frac{\pi}{32e^{10}}(e^{20} - e^{14} - 36e^{10} + 9e^6 - 9)$

E (nicht vorhanden)

W $(\frac{1}{2} \ln 3;\ 0)$ V_y entfällt (s.o.)

2. Kegelschnitte

2.1. Darstellende Geometrie

6\. a) $a \approx 1{,}2\ r$ b) $a \approx 1{,}1\ r$

$b \approx 0{,}3\ r$ $b \approx 0{,}4\ r$

$\measuredangle \overline{Q}MZ/a \approx 17^\circ$ $\measuredangle \overline{Q}MZ/a \approx 13^\circ$

$\measuredangle \overline{Q}MZ/b \approx 107^\circ$ $\measuredangle \overline{Q}MZ/b \approx 103^\circ$

c) $a = r$

$(b = 0)$ (als Grenzfall zu betrachten.)

$\measuredangle \overline{Q}MZ/a = 0^\circ$

$(\measuredangle \overline{Q}MZ/b = 90^\circ)$

7\. e) 205 g

9\. a) $V \approx 22\ dm^3$ $m \approx 48$ kg

d) $V \approx 942\ cm^3$ $m \approx 7{,}4$ kg $O \approx 1\,142\ cm^2$

e) $V \approx 106\ cm^3$ $m \approx 286$ g $O \approx 300\ cm^2$

f) $V \approx 70{,}7\ cm^3$ $m \approx 555$ g $O \approx 141\ cm^2$

S. 97 bis 108

2. b) äußere Ellipse: $2a = 60\sqrt{2}$ mm; $2b = 60$ mm

   innere Ellipse: $2a = 30\sqrt{2}$ mm; $2b = 30$ mm

   c) $675\sqrt{2}\,\pi$ mm^2

   d) Ja; $a : b = \sqrt{2} : 1$ für jede Ellipse.

7. a) 120° b) 90° c) 60°

1. $\varepsilon = \dfrac{\cos\varphi}{\cos 0^\circ} = \cos\varphi < 1$ für $0^\circ < \varphi \leqq 90^\circ$,

   also nur Ellipsen.

2. $PL = P''L''$; $PF = PU = P''U''$

   $P''U'' : P''L'' = PF : PL = \cos\varphi = \varepsilon$

5. $\varphi = 0^\circ$, also $\varepsilon = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta} = \dfrac{1}{\cos\beta}$

   Gleichseitige Hyperbel: $\beta = 45^\circ$, als $\varepsilon = \sqrt{2}$.

7. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

2.2. Analytische Geometrie der Kegelschnitte

1. a) Ellipse b) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

   c) $a = 3$; $b = \sqrt{5}$; $e = 2$; $F_1\ (1;0)$, $F_2\ (5;0)$

   d) $\varepsilon = \frac{2}{3}$ e) $e = 2$

2. a) Hyperbel b) $\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

   c) $a = 4$; $b = 3$; $F_1\ (-9;0)$, $F_2\ (+1;0)$

   d) $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $e = 5$

S. 113 bis 132

1. a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

   c) $\dfrac{x^2}{20{,}25} + \dfrac{y^2}{42{,}25} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

   e) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ f) $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

   g) $\dfrac{x^2}{725} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ h) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Koordinaten

	der Scheitel		der Brennpunkte
a)	$(\pm 10;0)$	$(0;\pm 6)$	$(\pm 8;0)$
b)	$(\pm 15;0)$	$(0;\pm 12)$	$(\pm 9;0)$
c)	$(\pm 4{,}5;0)$	$(0;\pm 6{,}5)$	$(0;\pm 4{,}69)$
d)	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm 5)$	$(0;\pm 4)$
e)	$(\pm 10;0)$	$(0;\pm 8)$	$(\pm 6;0)$
f)	$(\pm 20;0)$	$(0;\pm 12)$	$(\pm 16;0)$
g)	$(\pm 5\sqrt{29};0)$	$(0;\pm 10)$	$(\pm 25;0)$
h)	$(\pm 5;0)$	$(0;\pm 4)$	$(\pm 3;0)$

2. a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

   d) $\dfrac{x^2}{5{,}29} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ e) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ f) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{49} = 1$

S. 134

	Koordinaten der Scheitel		der Brennpunkte
a)	$(\pm 5;0)$	$(0;\pm 3)$	$(\pm\sqrt{34};0)$
b)	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm 3)$	$(\pm 3\sqrt{2};0)$
c)	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm 2)$	$(\pm\sqrt{13};0)$
d)	$(\pm 2,3;0)$	$(0;\pm 2)$	$(\pm\sqrt{9,29};0)$
e)	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm 4)$	$(\pm 5;0)$
f)	$(\pm 5;0)$	$(0;\pm 7)$	$(\pm 8;0)$

3. a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = 3,5x$ c) $y^2 = -8x$
   d) $x^2 = 4y$ e) $x^2 = -12y$ f) $x^2 = 3,5y$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
4. a) Scheitel				(0;0)		
Brennpunkt	(1;0)	(0,88;0)	(-2;0)	(0;1)	(0;-3)	(0;0,88)
b) Gleichung der Leit-linie	$x=-1$	$x=-0,88$	$x = 2$	$y=-1$	$y = 3$	$y=-0,88$

c) Lage:

a)	Achse ist x-Achse; Parabel offen nach	rechts
b)	x-Achse;	rechts
c)	x-Achse;	links
d)	y-Achse;	oben
e)	y-Achse;	unten
f)	y-Achse;	oben

5. a) $(0;\pm\sqrt{28})$ b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

6. a) $(\pm 6\sqrt{5};0)$

7. a) $\frac{x^2}{156,2} + \frac{y^2}{64} = 1$ b) $(\pm 9,6;0)$

8. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

9. a) $b = 2\sqrt{7}$ b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$

10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$

11. $y^2 = 2px$ $(p < 0)$: Achse ist x-Achse; offen nach links;
    $x^2 = 2py$ $(p < 0)$: Achse ist y-Achse; offen nach unten.

12. a) $y^2 = 26x$ b) $x = -6,5$

13. $y^2 = -28x$

	Gleichung	Koordinaten der Scheitel		Brennpunkte
a)	$\frac{x^2}{21} + \frac{5y^2}{84} = 1$	$(\pm\sqrt{21};0)$	$(0;\pm\sqrt{\frac{84}{5}})$	$(\pm\frac{\sqrt{105}}{5};0)$
b)	$\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$	$(\pm 5;0)$	$(0;\pm 1)$	$(\pm 2\sqrt{6};0)$
c)	$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{625} = 1$	$(\pm 30;0)$	$(0;\pm 25)$	$(\pm 5\sqrt{11};0)$
d)	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$	$(\pm 5;0)$	$(0;\pm 6)$	$(0;\pm\sqrt{11})$

15. a) $\frac{7x^2}{148} - \frac{3y^2}{148} = 1$ $\quad(\pm\sqrt{\frac{148}{7}};0)$ $\quad(\pm\sqrt{\frac{1480}{21}};0)$

b) $\frac{311x^2}{7676} - \frac{176y^2}{1919}$ $\quad(\pm\sqrt{\frac{7676}{311}};0)$ $\quad(\pm\sqrt{35\,\frac{32025}{54736}};0)$

c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$ $\quad(\pm 5;0)$ $\quad(\pm 5\sqrt{2};0)$

d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$ $\quad(\pm 3;0)$ $\quad(\pm\sqrt{11};0)$

16. a) $(y - 4)^2 = 4\,(x - 2)$ b) $(y + 5)^2 = 7\,(x - 3)$

c) $(x - 5)^2 = 4{,}4(y - 3)$ d) $(x + 3)^2 = 6\,(y + 8)$

	a)	b)	c)	d)
Koordinaten des Brennpunktes	(3;4)	(4,75;-5)	(5;4,1)	(-3;-6,5)
Gleichung der Leitlinie	x = 1	x = 1,25	y = 1,9	y = - 9,5

17.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
p	-1	4	-14	$\frac{3}{2}$	32	-2
Gleichung der Leitlinie	$x = \frac{1}{2}$	x=-2	x=7	$x=-\frac{3}{4}$	x=-16	x=1

18. a) $(y - 8)^2 = 4\,(x - 3)$ $\quad$ F (4;8)

b) $(y - 3)^2 = 8\,(x + 3)$ $\quad$ F (-1;3)

c) $(x + 5)^2 = 6\,(y + 2)$ $\quad$ F (-5;-0,5)

19. $(y - 3)^2 = 8\,(x - 4)$ $\quad$ F (6;3)

S. 135 bis 136

20. a) $(y + 5)^2 = 9\,(x + 7)$ $\quad$ F (-5,75;-5) $\quad$ x = - 9,25

b) $(y - 2)^2 = 10\,(x - 7)$ $\quad$ F (9,5;2) $\quad$ x = 4,5

21. a) $(y - 8{,}5)^2 = -9\,(x - 9{,}25)$

b) $(y - 7)^2 = \frac{17}{3}\,(x + \frac{175}{17})$

22.

		Koordinaten der		
	Halbachsen	Scheitel		Brennpunkte
a)	$2;\sqrt{5}$	$(\pm 2;0)$	$(0;\pm\sqrt{5})$	$(0;\pm 1)$
b)	$3;\ \frac{1}{2}$	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm\frac{1}{2})$	$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{37};0)$
c)	$\frac{1}{2}\sqrt{2};\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2};0)$	$(0;\pm\frac{1}{3}\sqrt{3})$	$(\pm\frac{1}{6}\sqrt{30};0)$
d)	8; 4	$(\pm 8;0)$	$(0;\pm 4)$	$(\pm 4\sqrt{3};0)$
e)	4; 5	$(\pm 4;0)$	$(0;\pm 5)$	$(0;\pm 3)$
f)	15; 8	$(\pm 15;0)$	$(0;\pm 8)$	$(\pm\sqrt{161};0)$
g)	$2;\sqrt{5}$	$(\pm 2;0)$	$(0;\pm\sqrt{5})$	$(\pm 3;0)$
h)	$2;\ \frac{2}{5}\sqrt{10}$	$(\pm 2;0)$	$(0;\pm\frac{2}{5}\sqrt{10})$	$(\pm\frac{1}{5}\sqrt{140};0)$
i)	$\frac{1}{2}\sqrt{10};\ \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{10};0)$	$(0;\pm\frac{1}{2}\sqrt{5})$	$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{5};0)$
k)	$\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{3}{2}$	$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2};0)$	$(0;\pm\frac{3}{2})$	$(0;\pm\frac{1}{2}\sqrt{7})$
l)	$\sqrt{\frac{c}{a}};\sqrt{\frac{c}{b}}$	$(\pm\sqrt{\frac{c}{a}};0)$	$(0;\pm\sqrt{\frac{c}{b}})$	$(\pm\sqrt{\frac{bc-ac}{ab}};0)$
m)	$3;\ \frac{3}{2}\sqrt{2}$	$(\pm 3;0)$	$(0;\pm\frac{3}{2}\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{13{,}5};0)$

23. a) P_1 innerhalb; P_2, P_3 und P_4 außerhalb

b) P_1 innerhalb des rechten Astes;

P_2 zwischen beiden Ästen;

P_3 zwischen beiden Ästen;

P_4 innerhalb des linken Astes;

c) P_1, P_2 und P_3 innerhalb; P_4 außerhalb

S. 136 bis 137

24. $\overline{F_1P_1} = a + \frac{ex}{a}$; $\overline{F_2P_1} = a - \frac{ex}{a}$

25. a) $y = \frac{y_1}{x_1-e}x - \frac{ey_1}{x_1-e}$ und $y = \frac{y_1}{x_1+e}x + \frac{ey_1}{x_1+e}$ (Ellipse und Hyperbel) bzw. $y = \frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}(x-x_1) + y_1$ (Parabel)

b) $\overline{F_1P_1} = \sqrt{(x_1+e)^2 + y_1^2}$ und $\overline{F_2P_1} = \sqrt{(x_1-e)^2 + y_1^2}$ (Ellipse und Hyperbel) bzw. $\overline{FP_1} = \sqrt{y_1^2+(x_1-\frac{p}{2})^2}$ (Parabel)

26. Beim Kreis gilt $a = b$. Man erhält $x^2 + y^2 = a^2$, das ist aber die Gleichung des Kreises.

27. $x^2 + y^2 = a^2$ und $x^2 + y^2 = b^2$

28. $x^2 + y^2 = a^2$

29. a) Die konjugierte Hyperbel entsteht durch Spiegelung an der Geraden $y = x$.

b) $\frac{2x^2}{8} - \frac{5y^2}{8} + 1 = 0$

30. a) $M\ (1;0)$ $F_{1,2}\ (1;\pm\sqrt{6})$ $S_{1,2}\ (1\pm\sqrt{3};0)$ $S_{3,4}\ (1;\pm 3)$

b) $M\ (0;-1)$ $F_{1,2}\ (\pm\frac{1}{6}\sqrt{5};-1)$ $S_{1,2}\ (\pm\frac{1}{2};-1)$ $S_{3,4}(0;-1\pm\frac{1}{3})$

c) $M\ (\frac{9}{5};0)$ $F_{1,2}\ (\frac{9}{5}\pm\frac{8}{5}\sqrt{\frac{31}{6}};0)$ $S_{1,2}\ (\frac{9}{5}\pm\frac{8}{5};0)$

d) $M\ (-3;1,25)$ $F_{1,2}\ (3(-1\pm\frac{1}{4}\sqrt{14});1,25)$

$S_{1,2}\ (-3\pm3\sqrt{2};1,25)$ $S_{3,4}\ (-3;\frac{1}{4}(5\pm9\sqrt{2})$

e) $M\ (6;-2)$ $F_{1,2}\ (6\pm\sqrt{89};-2)$ $S_{1,2}\ (6\pm8;-2)$

f) $M\ (-1;2)$ $F_{1,2}\ (-1\pm3;2)$ $S_{1,2}\ (-1\pm5;2)$ $S_{3,4}(-1;2\pm4)$

S. 137

31. $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

1. $x_s = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}$; $y_s = \frac{\pm mab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}$

2. $y_{1,2} = \frac{-12 \pm 18\sqrt{2}}{7}$; $x_{1,2} = \frac{16 \pm 18\sqrt{2}}{7}$

3. $y_{1,2} = \frac{ab\ (b^3 \pm a\sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2})}{a^4 + b^4}$;

$x_{1,2} = \frac{ab\ (a^3 \mp b\sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2})}{a^4 + b^4}$

4. $x_{1,2} = -1 \pm \frac{5}{2}\sqrt{3}$; $y_{1,2} = 2 \pm \frac{8}{5}\sqrt{6}$

5. $P_1\ (1;0)$; $P_2\ (3;3)$

8. $x_{1,2} = -3,2 \pm 5,5$; $y_{1,2} = 7,2 \pm 5,5$

9. $(a;0)$

10. y-Achse: kein Schnittpunkt; x-Achse: 7; -3

11. $P_1\ (\frac{2}{3}; -4)$; $P_2\ (-6; -24)$

13. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{2p}{m^2}$, $y_2 = \frac{2p}{m}$; $l = \frac{2p}{m^2}\sqrt{1 + m^2}$

14. $P_1\ (\frac{8}{3}; -4)$; $P_2\ (-6; -24)$

15. $P_1\ (0; 18)$; $P_2\ (1;0)$; $P_3\ (-9;0)$

16. $P_1\ (-7; -20)$; $P_2\ (-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2})$

S. 137 bis 142

18. a) $y_{1,2} = \dfrac{12 \pm 18\sqrt{2}}{7}$; $x_{1,2} = \dfrac{16 \mp 18\sqrt{2}}{7}$

b) $P\left(\frac{25}{6};\ 10\right)$

c) $P\left(\frac{25}{4};\ \frac{9}{2}\right)$

d) $P_1\ (20;\ 8)$; $P_2\ \left(13;\ \frac{5}{2}\right)$

e) $P_1\ (2;\ -6)$; $P_2\ \left(\frac{1}{2};\ 3\right)$

f) $P\ (2;\ 5)$

g) kein Schnittpunkt

h) $P\ (4;\ 3)$

i) kein Schnittpunkt

19. a) $4x + 15y - 25 = 0$ b) $3x + 8y - 50 = 0$

c) $6y + 9x + 18 = 0$ d) $\frac{3}{2}x - 3y + \frac{9}{2} = 0$

e) $3x - 2y - 6 = 0$ f) $6x - 4\sqrt{5}y - 16 = 0$

20. $x = \pm 8$; $y = \pm 7$

21. $x_1 = \pm 9$; $y_1 = \pm 7$

$y = \pm \frac{7}{9}x + 7\sqrt{2}$; $y = \pm \frac{7}{9}x - 7\sqrt{2}$

22. $x - 2y - 5 = 0$; $2y - x - 5 = 0$

23. $5x + 2y - 24 = 0$; $5x + 2y + 24 = 0$

24. $y = \pm \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$; $y = \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$; $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

25. $x_o = 0$; $y_o = 0$

26. $y = x \pm \frac{p}{2}$

27. $x - 2y + 16 = 0$

28. $P_1\ (8;3)$; $P_2\ (6;4)$

a) $2x + 3y - 25 = 0$; $3x + 8y - 50 = 0$

b) $P_3\ \left(\frac{50}{7};\frac{25}{7}\right)$

c) $A = \frac{1}{7}$ FE

29. $x_s = \pm e$; $y_s = \pm \frac{b^2}{a}$

a) $t \equiv \pm \frac{ex}{a^2} \pm \frac{b^2}{a^2}y = 1$; $t \equiv \pm \frac{ex}{a^2} \mp \frac{b^2}{a^2}y = 1$

b) $S: x = 0,\ y = \pm \frac{a^2}{b}$; $y = 0,\ x = \frac{a^2}{e}$; $l = a$

c) $A = \frac{2a^4}{eb}$

30. a) $P_1\ \left(-3;\frac{24}{5}\right)$; $P_2\ (5;0)$; $P_3\ (0;6)$

$P_1P_2 \equiv g_3 \equiv 5y + 3x - 15 = 0$;

$P_1P_3 \equiv g_2 \equiv 5y - 2x - 30 = 0$;

$P_2P_3 \equiv g_1 \equiv 5y + 6x - 30 = 0$

$t_1 \equiv 9x - 10y + 75 = 0$; $t_2 \equiv x = 5$; $t_3 \equiv y = 6$

$S_1\ \left(-\frac{5}{7};6\frac{6}{7}\right)$; $S_2\ (5;8)$; $S_3\ (-5;6)$

$$\left.\begin{aligned} S_1S_2 &\equiv s_1 \equiv 5y - x - 35 = 0 \\ S_1S_3 &\equiv s_2 \equiv 5y - x - 35 = 0 \\ S_2S_3 &\equiv s_3 \equiv 5y - x - 35 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{w.z.b.w.}$$

31. $P_1\ (-10;12)$; $t \equiv 15x + 8y + 54 = 0$

32. $x = \pm e$; $y = \pm \frac{b^2}{a}$

a) $t \equiv \frac{ex}{a^2} \pm \frac{y}{a} = 1$; $\quad t \equiv -\frac{ex}{a^2} \pm \frac{y}{a} = 1$

b) $l = \frac{a}{e}\sqrt{e^2 + a^2}$

c) $A = 2\,\frac{a^3}{e}$

33. a) $\pm\, b\sqrt{2}x + ay - ab = 0$

b) $y = x + \frac{3}{2}$

c) $y = \frac{3\,(-5 \pm 4\sqrt{3})\,(x - 3)}{23} + 5$

d) $x = 5$; $\quad y = \frac{11}{16}\,x + \frac{73}{16}$

e) $y = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}y_o - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{(y_o - 4)(y_o + 8)}\right)x + \frac{1}{3}\left(2y_o - 2 + \sqrt{(y_o - 4)(y_o + 8)}\right)$;

$y = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}y_o - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(y_o - 4)(y_o + 8)}\right)x + \frac{1}{3}\left(2y_o - 2\right) - \sqrt{(y_o - 4)(y_o + 8)}\,)$

f) $x = -1$; $\quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{26}{5}$

g) $y = \frac{1}{6}\,(5 - \sqrt{7})\,x + \frac{1}{2}\,(5 + \sqrt{7})$;

$y = \frac{1}{6}\,(5 + \sqrt{7})\,x + \frac{1}{2}\,(5 - \sqrt{7})$

1. a) $P_1\ (0;7)$; $\quad P_2\ (2{,}8;6{,}72)$; $\quad P_3\ (-2{,}8;6{,}72)$

2. a) $P_1\ (-3;0)$; $P_2\ (-3{,}75;-1{,}5)$; $\quad P_3\ (-3{,}75;1{,}5)$

3. b) $P_1\ (-21{,}2;-21{,}2)$; $\quad P_2\ (-21{,}2;21{,}2)$;

$P_3\ (21{,}2;-21{,}2)$; $\quad P_4\ (21{,}2;21{,}2)$

S. 144 bis 150

4. $P_1\ (4b;\frac{3}{5}b)$; $\quad P_2\ (4b;-\frac{3}{5}b)$

5. $P_1\ (6;\sqrt{5})$; $\quad P_2\ (-6;\sqrt{5})$; $\quad P_3\ (\frac{21}{5}\sqrt{5};-\frac{19}{10}\sqrt{5})$;

$P_4\ (-\frac{21}{5}\sqrt{5};-\frac{19}{10}\sqrt{5})$

6. $P_1\ (4;3)$; $P_2\ (4;-3)$

1. Schnittpunkte der Geraden: $P_1\ (-\frac{5}{2};-5)$; $P_2\ (5;-5)$;

$P_3\ (-\frac{5}{2};15)$

Berührungspunkte: $B_1\ (2;3)$; $\quad B_2\ (-\frac{5}{2};0)$; $\quad B_3\ (0;-5)$

Gleichungen der Verbindungslinien: $16x - 9y - 5 = 0$;

$2x + 3y + 5 = 0$; $8x + y + 5 = 0$

Schnittpunkt: $S\ (-\frac{5}{11};\ -\frac{15}{11})$

2. Koordinatentransformation liefert $y^2 = x$ und

$P_1\ (1;1)$; $\quad P_2\ (9;-3)$; $\quad P_3\ (4;2)$.

Tangentengleichungen: $y = \frac{1}{2}\,(x+1)$; $y = -\frac{1}{6}\,x - 1{,}5$;

$y = \frac{1}{4}\,x + 1$

Seitengleichungen: $y = \frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}$; $\quad y = -x + 6$;

$y = -\frac{1}{2}\,x + 1{,}5$

Schnittpunkte: $S_1\ (-\frac{13}{3};-\frac{7}{9})$; $\quad S_2\ (\frac{2}{3};\ \frac{7}{6})$; $\quad S_3\ (\frac{11}{3};\ \frac{7}{3})$

Die Schnittpunkte liegen auf einer Geraden.

3. Ellipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\quad V = 12\,\pi$ VE

Hyperbel: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; $\quad V = 790{,}56\,\pi$ VE

Zylinder: $\quad V = 675\,\pi$ VE

Volumen: $1477{,}56\,\pi$ VE $\hat{=}$ $1477{,}56\,\pi\ cm^3$ $\quad$ Masse: 36,187 kg

S. 150 bis 151

4. a) Parabel: $x^2 = 25(y-7)$; $A = 660$ FE

Zylinder: $A = 44$ FE bzw. 92 FE;

Bohrung: 272 FE

Gesamtfläche: 524 FE $\hat{=}$ 524 cm^2

b) $V = 1593$ VE $\hat{=}$ 1593 cm^3

5. a) Hyperbel: $\frac{x^2}{36} - \frac{3y^2}{625} = 1$; $V = 1987{,}2$ VE $\hat{=}$ 1987,2 m^3

b) $\varnothing \approx 12{,}8$ m

6. Ellipse: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; $V = 2{,}25\pi$ VE

Parabel: $x^2 = -\frac{160}{11}(y-1{,}1)$; $V = 2{,}55\pi$ VE

Gesamtvolumen: $V = 0{,}3\pi$ VE

7. a) Ellipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1$; $V = \frac{10}{3}\pi$ dm^3

Hyperbel: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$; $V = 14\frac{1}{4}\pi$ dm^3

Zylinder: $V = 12\pi$ dm^3

$V \approx 29{,}6\pi$ dm^3

b) $m \approx 210{,}2\pi$ kg

8. Aphel = a; Perihel = b

Für die Bahngleichung ergibt sich jeweils $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(z.B. für Erde: $\frac{x^2}{151{,}1^2} + \frac{y^2}{146{,}2^2} = 1$).

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
ε (gerundeter Wert)	0,75	0,17	0,25	0,56	0,42	0,45	0,41	0,18

9.

	a)	b)	c)	d)
ε (gerundet)	0,3	0,34	0,14	0,14
Bahngleichung (gerundete Werte) Koordinateneinheit 10^3km	$\frac{x^2}{136^2}+\frac{y^2}{130^2}=1$	$\frac{x^2}{483^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$	$\frac{x^2}{130^2}+\frac{y^2}{129^2}=1$	$\frac{x^2}{130^2}+\frac{y^2}{129^2}=1$

10. a) Parabel b) $x_W = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$ c) $y_H = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$

d) $S\left(\frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}; \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)$

11. (5,625;0) $f = 5{,}625$

12. Parabelspiegel: Parabel $y^2 = 2px$

$P_1(x_1;y_1)$ sei ein Punkt der Parabel, $M(p;0)$ der Mittelpunkt, t die Tangente in P_1 und g die Gerade durch P_1 und M.

$g \equiv yp + y_1x - 2x_1y_1 = 0$ $m_g = -\frac{y_1}{p}$

$t \equiv yy_1 - px - px_1 = 0$ $m_t = \frac{p}{y_1}$

$m_g = -\frac{1}{m_t}$, d.h. $g \perp m$, d.h. Reflexion durch M.

13. $p = 12$

14. a) $y^2 = 28{,}8x$ und $y^2 = 48(x-2)$

b) A_1 (0,2;2,4) A_2 (2,12;2,4) C_2 (2;0)

$\overline{A_1A_2} = 1{,}92$ m $\overline{A_1C_2} = 3$ m

15. a) $x^2 = -\frac{1445}{16}y$ und $x^2 = -\frac{3200}{39}(y+2)$

b) $\overline{PA_1} = 22{,}42$ m und $\overline{A_1A_2} = 4{,}24$ m

16. a) $y^2 = 40x$

b) (Strebenlänge in m)

$\overline{P_7Q_7} = 10$ m; $\overline{P_6Q_6} = 9{,}38$ m; $\overline{P_5Q_5} = 7{,}5$ m; $\overline{P_4Q_4} = 4{,}38$ m;

$\overline{P_2Q_2} = 5{,}62$ m; $\overline{P_1Q_1} = 12{,}5$ m;

$\overline{P_6Q_5} = \overline{P_6Q_7} = 10{,}6$ m; $\overline{P_4Q_5} = 6{,}7$ m; $\overline{P_2Q_1} = 7{,}5$ m

№ 0491

002150-2