

Lösungsheft

MATHEMATIK

Zum Lehrbuch für Klasse 10

Nur für Lehrer



VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

Lösungsheft

MATHEMATIK

Zum Lehrbuch für Klasse 10

(Titel-Nr. 00 10 02, 5. Auflage)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1976

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Dietrich Bellack, Arnold Hopfe und Jürgen Karl beteiligt.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Lehrbuch</u>	<u>Lösungs-</u>
	Seite	heft
		Seite
Vorbemerkungen	-	5
Aufgaben		
a) Winkelfunktionen	98	8
b) Körperberechnung	126	33
Schüleraufträge		
A Winkelfunktionen	-	44
B Körperberechnung	-	51

4. Auflage

Lizenz Nr. 203 · 1000/75 (UN 00 21 73-4)

LSV 0645

Redaktion: Heinz Junge

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

Redaktionsschluß: 12. August 1975

Bestell-Nr. 706 211 0

EVP: 1,75 Mark

V o r b e m e r k u n g e n

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Aufgaben des Lehrbuches "MATHEMATIK, Lehrbuch für Klasse 10" (Ausgabe 1971).

Es sind überwiegend nur Lösungen aufgenommen worden, die rechnerisch zu ermitteln sind. Bei der Lösung der Aufgaben arbeiteten die Rechner mit dem "Tafelwerk, Mathematik - Physik - Chemie" (Best.-Nr. 00 07 03) und mit dem logarithmischen Rechenstab.

Bei Textaufgaben wurde aus Platzgründen auf den Antwortsatz verzichtet. Diese Maßnahme erscheint auch deshalb berechtigt, weil solche Sätze in den meisten Fällen verschieden formuliert werden können. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Aufgabe nur dann als richtig gelöst gelten kann, wenn der Schüler einen entsprechenden Antwortsatz richtig formuliert hat.

Bei allen Aufgaben muß die Genauigkeit der Ausgangswerte berücksichtigt werden.

In diesem Lösungsheft wird, ebenso wie im Lehrbuch, beim Angeben von Lösungen in Form von Gleichungen in überwiegender Maße das Gleichheitszeichen gesetzt, auch wenn die Ergebnisse Näherungswerte sind. Es wird in diesem Zusammenhang auf das Lehrbuch, Seite 34, verwiesen. In "Mathematik, Unterrichtshilfen für Klasse 10", heißt es auf Seite 25 f (vgl. auch Seite 86 unten): "... sei hier auf die Verwendung des Gleichheitszeichens bei numerischen Rechnungen hingewiesen. Es hat sich beim Rechnen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes und unter Verwendung von Zahlentafeln in der technischen Praxis und im Unterricht eingebürgert, das Annäherungszeichen nur dann zu verwenden, wenn die (mögliche) Differenz der zu vergleichenden Werte über der beim Rechnen technisch bedingten oder angestrebten Fehlergrenze liegt, also z. B. beim Schätzen und bei Überschlagsrechnungen. In anderen Fällen, auch beim Rechnen mit gerundeten Werten, wird dagegen das Gleichheitszeichen gesetzt.

Der gleiche Grundsatz gilt auch für das Rechnen mit Meßwerten."

Zahlreiche Aufgaben konnten naturgemäß nicht so formuliert werden, daß Eindeutigkeit für die Schreibweisen der Ergebnisse zu erwarten ist. Hierher gehören zum Beispiel Aufgaben, in deren

Lösungen Winkelmaße (im Gradmaß bzw. im Bogenmaß) angegeben sind.

In allen diesen Fällen wurde stets nur eine der möglichen Lösungen angegeben.

Die Lösungen für die zusätzlichen Aufgaben, die im Lehrbuch mit kursiver Numerierung gekennzeichnet sind und die im allgemeinen von höherem Schwierigkeitsgrad sind, wurden wie im Lehrbuch in waagerechte Linien eingeschlossen.

Den Abschluß des Lösungsheftes bilden die Lösungen der Schüleraufträge, die im Lehrtext verstreut und mit einem Kreis gekennzeichnet sind.

a) Winkelfunktionen

Seite 98

1. Beispiele für Zugehörigkeit
Nichtzugehörigkeit

- a) [1;7] b) [1;8] c) [2;3] d) [2;19,62]
 * [1;8] [1;9] [2;5] [2;20]

2. $[-2 + 3; 0]$ bzw. $[-0,268; 0]$
 $[-2 - 3; 0]$ bzw. $[-3,732; 0]$ Nullstellen der Funktion

	Wertebereich	Nullstellen
a)	$-9 \leq y \leq 0$	$[3;0]; [-3;0]$ $x_1 = 3; x_2 = -3$
b)	$y \leq 1$	$[1;0]$ $x = 1$
c)	$1 \leq y \leq 4$	-
d)	y bel. reell	-

4. a) $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$ 5. a) $y = \frac{17}{3}x + 3$
 b) $y = -8x^2 + 6$ b) $y = 6x^2 - \frac{9}{2}$
 c) $y = \frac{1}{2} \cdot 4^x$ c) $y = \frac{1}{5} \cdot 10^x$
 d) $y = \frac{1}{2} \cdot \log_2 x$ d) $y = -\frac{1}{2} \cdot \log_{10} x$

6. a) ja; ja b) ja; ja 7. a) nein; nein b) ja; nein
 c) ja; ja d) ja; nein c) ja; nein d) ja; nein

	Wertebereich	Nullstellen	Monotonieintervalle	Monotonieverhalten
a)	$\frac{28}{5} \geq y \geq -\frac{69}{10}$	$x = \frac{6}{25}$	$-2 \leq x \leq 3$	monoton fallend
b)	$\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{21}{4}$	-	$-3 \leq x \leq 3$	monoton steigend
c)	$13 \geq y \geq -3$	-	$-2 \leq x < 2$ $2 \leq x \leq 4$	monoton fallend monoton steigend
d)	y bel. reell	$x = 2$	x bel. reell	monoton steigend

	Wertebereich	Nullstellen	Monotonieintervalle	Monotonieverhalten
a)	$5 \leq y \leq 2$	-	$-1 \leq x < 0$ $0 = x = 1$	monoton fallend monoton steigend
b)	y bel. reell	-	x bel. reell	monoton steigend
c)	$-2 \leq y \leq 3$	$x = 1$	$\frac{1}{4} \leq x \leq 8$	monoton steigend

Seite 99

10. a) $y = \frac{4}{7}x + \frac{19}{7}$ b) $y = -\frac{3}{44}x - \frac{3}{22}$

11. Die graphische Darstellung zeigt, daß die drei Punkte ein Dreieck bilden, also nicht sämtlich auf ein und derselben Geraden liegen.

12. a) 54° b) 36° c) 54° 13. a) 26° b) 64° c) 128°
 14. a) 43° b) 94° c) 47° 15. a) 27° b) 126° c) 63° d) 117°
 16. a) 41° b) 139° 17. a) 93° b) 156°

Seite 100

20. a) 215° b) 113° c) nicht einander äquivalent
 21. a) 85° b) nicht einander äquivalent c) 173°
 22. a) 60° b) $7,5^\circ$ c) $193,4^\circ$ d) 227° e) $344,3^\circ$ f) $240,3^\circ$
 23. a) $155,6^\circ$ b) $38,4^\circ$ c) $78,5^\circ$ d) $312,4^\circ$ e) $325,6^\circ$ f) $238,7^\circ$
 24. a) 3,5 cm b) 1,2 cm 25. a) 9,5 cm b) 3,9 cm
 26. a) $90,2$ cm b) $41,6$ cm 27. a) 6,1 cm b) 14 cm
 28. b) $\text{arc } \alpha = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$
 c)

α	110°	320°	315°	70°	246°	155°	250°	180°	350°	286°	210°
arc α	1,9	5,6	5,5	1,2	4,3	2,7	4,4	3,14	6,1	5,0	3,7

29. a) 0,262 b) 1,257 30. a) 1,466 b) 3,490
 c) 0,733 d) 1,309 c) 1,780 d) 2,514
 31. a) 0,765 b) 1,265 32. a) 2,41 b) - 0,831
 c) 3,86 d) -1,056 c) 14,23 d) - 5,55
 33. a) 216° b) $84,5^\circ$ c) $53,7^\circ$ d) $277,5^\circ$ e) $48,1^\circ$ f) $-54,4^\circ$
 34. a) $156,6^\circ$ b) $-323,3^\circ$ c) $-134,5^\circ$ d) $-21,5^\circ$ e) $20,7^\circ$ f) $66,5^\circ$

Seite 101

35. a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$ c) $x = \frac{5}{6}\pi$
 d) $x = \frac{13}{6}\pi$ e) $\alpha = -30^\circ$ f) $\alpha = 420^\circ$
 36. a) $x = \frac{7}{6}\pi$ b) $\alpha = 210^\circ$ c) $\alpha = 270^\circ$
 d) $x = \frac{5}{4}\pi$ e) $x = -\frac{5}{3}\pi$ f) $\alpha = -120^\circ$
 37. a) $\{\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{13}{6}\pi\}$; $\{\frac{17}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$; $\{\frac{\pi}{4}, -\frac{31}{4}\pi\}$; $\{\frac{15}{4}\pi\}$
 b) $\{\frac{7}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\}$; $\{\frac{14}{3}\pi, \frac{20}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$; $\{\frac{19}{3}\pi, \frac{\pi}{3}\}$
 38. 10,1 km
 39. a) $y = 0,5$ 40. a) $y = 0,91$
 b) $y = 0,77$ b) $y = 0,77$
 c) $x_1 = 17,5^\circ$; $x_2 = 162,5^\circ$ c) $x_1 = 53,1^\circ$; $x_2 = 126,9^\circ$
 d) $x_1 = 194,5^\circ$; $x_2 = 345,5^\circ$ d) $x_1 = 200,5^\circ$; $x_2 = 339,5^\circ$
 41. a) nein b) nein 42. a) ja b) nein
 c) ja d) nein c) nein d) ja

1. $f(x) = \sin x$ ist eine periodische Funktion, Periode sei $a \in \mathbb{P}$, $a \neq 0$. Nach Satz A 3 gilt $f(x + a) = f(x)$.
 In Aussage A stellt \bar{x} eine beliebige reelle Zahl dar.
 In Aussage B stellt x eine reelle Zahl von 0 bis 2 dar, deshalb gilt auch $\bar{x} + 2\pi = x + k \cdot 2\pi$ bzw.
 $\sin(\bar{x} + 2\pi) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$.

43. a) nicht lösbar b) lösbar c) nicht lösbar d) lösbar
 44. a) lösbar b) nicht lösbar c) lösbar d) lösbar
 45. a) $\{0\}$ b) $\{-2\pi; -\pi\}$ c) - d) $\{\pi\}$
 46. a) $\{0\}$ b) $\{0; \pi; 2\pi\}$ c) - d) $\{-\pi\}$

Seite 102

48.	Wertebereich	Nullstellen	Monotonieintervalle	Monotonieverhalten
a)	$-4 \leq y \leq 4$	$\{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$	$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{2}\pi$	monoton fallend
			$-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$	monoton steigend
b)	$-2,5 \leq y \leq 2,5$	$\{-2\pi; -\pi; 0\}$	$-2\pi \leq x < -\frac{3}{2}\pi$ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$	monoton steigend
			$-\frac{3}{2}\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$	monoton fallend

49. a) ja b) nein c) ja d) nein
 e) ja f) ja g) nein h) ja
 50. a) $\frac{2\pi}{5}$ b) 1 c) $\frac{\pi}{4}$ d) 6 e) $\frac{4}{3}\pi$ f) $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi$

51.	Wertebereich	Nullstellen	Monotonieintervalle	Monotonieverhalten
a)	$-1 \leq y \leq 1$	$\{-4\pi; 0; 4\pi\}$	$-4\pi \leq x < -2\pi$ $2\pi \leq x \leq 4\pi$	monoton fallend
			$-2\pi \leq x < 2\pi$	monoton steigend
b)	$-1 \leq y \leq 1$	$\{\frac{k\pi}{4}\}$ mit $k \in \mathbb{G};$ $-16 \leq k \leq 16$	$-4\pi \leq x < -\frac{31\pi}{8}$ $\frac{(4k-1)\pi}{8} \leq x < \frac{(4k+1)\pi}{8}$ mit $k \in \mathbb{G};$ $-7 \leq k \leq 7$ $\frac{31\pi}{8} \leq x \leq 4\pi$	monoton steigend
			$\frac{(4k+1)\pi}{8} \leq x < \frac{(4k+3)\pi}{8}$ mit $k \in \mathbb{G};$ $-8 \leq k \leq 7$	monoton fallend

Seite 103

53. a) $\{-\frac{14}{5}\pi; -\frac{7}{5}\pi; 0; \frac{7}{5}\pi; \frac{14}{5}\pi\}$
 b) $\{0; \frac{\pi}{\sqrt{2}}\}$ c) $\{0; \frac{3}{2}\pi; 3\pi; \frac{9}{2}\pi; 6\pi\}$
 d) $\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{3}{8}\pi; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}; 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3}{8}\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{5}{8}\pi; \frac{3}{4}\pi\}$
 e) $\{0; \pi; 2\pi\}$ f) $\{0; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi\}$
 g) $\{0; 3\pi\}$ h) $\{-\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3\}$
54. a) $y = 3 \cdot \sin x; \quad y = \sin 4x; \quad y = 3 \cdot \sin 4x$
 b) $y = \frac{2}{9} \sin x; \quad y = \sin \frac{x}{10}; \quad y = \frac{2}{9} \cdot \sin \frac{x}{10}$

- c) $y = \frac{4}{3} \cdot \sin x; \quad y = \sin \frac{5}{3} x; \quad y = \frac{4}{3} \cdot \sin \frac{5}{3} x$
 55. a) $y = 2,3 \sin \frac{2\pi}{3} x$ b) $y = 4 \sin 4x$
 c) $y = \sin 20x$ d) $y = 0,7 \sin \frac{6}{5} x$
56. $f_1(x) = 1,4 \sin x \quad (-2\pi \leq x \leq 2\pi)$
 $f_2(x) = 2 \sin 3x \quad (-2\pi \leq x \leq 2\pi)$
 $f_3(x) = 0,4 \sin x \quad (-2\pi \leq x \leq 2\pi)$
 $f_4(x) = 2,5 \sin \frac{\pi}{2} x \quad (-5 \leq x \leq 6)$

Seite 104

2. $y = 3 \cdot \sin x; \quad y = 3 \cdot \sin 5x; \quad$ Allgemeine Lösung:
 $y = 3 \cdot \sin 9x; \dots \quad y = 3 \sin (4k+1)x$
 mit $k \in \mathbb{N}$

57. a) nicht lösbar b) lösbar 58. a) lösbar b) lösbar
 c) nicht lösbar d) nicht lösbar c) nicht lösbar d) lösbar
 e) nicht lösbar e) nicht lösbar

59. a) $\{-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$ b) - 60. a) - b) $\{-\frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi\}$
 c) $\{\frac{3}{2}\pi\}$ d) $\{\frac{7}{2}\pi\}$ e) $\{\frac{5}{2}\pi\}$
 f) $\{-\frac{27}{2}\pi; -\frac{25}{2}\pi; -\frac{23}{2}\pi; -\frac{21}{2}\pi\}$

3. a) $a \neq 4; \quad -1 \leq a \leq \frac{7}{3}$ b) $b \neq \frac{2}{3}; \quad 0 \leq b \leq \frac{1}{2}$

4. 1. Fall: Vor.: $b = a$

NB: $a \neq 0$

HB: wenn $a = b$, so gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2; \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 2; \quad 1 + 1 = 2$

2. Fall: Vor.: $a \neq b$ ($a, b \in \mathbb{P}; a, b > 0$)

Beh.: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

Beweis: $\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} > 2; a^2+b^2 > 2ab; a^2+b^2 - 2ab > 0$

$(a - b)^2 > 0$ ($a - b$)² ist in diesem Falle stets eine positive reelle Zahl.

61. a) positiv b) negativ 62. a) negativ b) positiv
 c) negativ d) positiv o) negativ d) negativ
 e) negativ f) negativ e) positiv f) negativ
 g) positiv h) positiv g) positiv h) negativ
63. a) $\sin 38^\circ$ b) $\frac{1}{\sin 130^\circ}$ 64. a) $\cos 45^\circ$ b) $\frac{1}{\cos 237^\circ}$
- c) nicht def. d) nicht def. c) 0 d) nicht def.

Seite 105

- e) $\tan 170^\circ$ f) $\tan^2 314^\circ$ e) $\cot 212^\circ$ f) $\cot^2 \frac{\pi}{6}$
 g) nicht def. h) 1 g) nicht def. h) 1
65. a) 1,5 b) 0,433 c) 1,41 d) 2 e) 1,155
 66. a) 1 b) 0 c) 0,816 d) nicht def. e) 0,333
67. a) $x = (2k+1)\pi$ b) $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 d) $x = \frac{k\pi}{2}$ e) $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ f) An allen Stellen definiert
 g) $x = \frac{k\pi}{2}$
68. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ c) $x = k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$
 d) $x = k\pi$ e) $x = k\pi$ f) $x = k\pi$ g) $x = \frac{k\pi}{2}$

(Bei den Aufgaben 67 und 68 ist $k \in \mathbb{G}$.)

69. Voraussetzung: ΔABC gleichseitig ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a;$
 $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$);

h ist Höhe im ΔABC

Behauptung: $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} a$

Beweis: $\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$

$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$

70. b) $a = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ cm} = 3,54 \text{ cm}$

5. Behauptung:

Die Gleichung gilt nur für $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{G}$)

Voraussetzungen:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (2) $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

(3) $\cot^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$

Beweis:

Nach (1), (2) und (3) gilt:

$1 + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

Nach elementaren Umformungen ergibt sich:

$2 \sin^2 x = 1$; $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit

$x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{G}$)

6. Behauptung:

Gleichung ist für $x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{G}$) nicht definiert.

Beweis:

$$\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} = 1$$

$$\frac{\tan x \cdot \cot^2 x - \tan x}{\cot x - \tan^2 x \cdot \cot x} = 1 \quad (\tan x \cdot \cot x = 1)$$

$$\frac{\cot x - \tan x}{\cot x - \tan x} = 1 \quad \text{Diese Gleichung ist für alle } x \neq \frac{k\pi}{4} \text{ gültig.}$$

71. a) ja b) ja c) ja

Seite 106

72. a) ja b) ja c) ja

73. a) $b = 2; x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} k\pi$ 74. a) $a = 0; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi$

b) $a = 1; x = k\pi$ b) $b = 3; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $a = 3; x = k\pi$ c) $b = \frac{7}{2}; x = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

75. a) -3; 0 b) $5; \frac{5}{2}$ c) 0; 2 76. a) $\frac{1}{4}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}$ b) $-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\sqrt{2}$
 c) $\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$

77. a) $-\frac{1}{4}\sqrt{7}$ b) -0,8 c) -0,1 d) 0

78. a) $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ b) $-\frac{2}{5}\sqrt{6}$ c) $-\frac{1}{2}\sqrt{21}$ d) $-\frac{1}{3}\sqrt{91}$

7. a) $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$

b) Für alle Zahlen x ($x \in P$) definiert

c) $x = k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Für alle Lösungen gilt $k \in G$.

Seite 107

79. a) ja b) nein c) nein d) ja e) ja

80. a) nein b) ja c) ja d) ja e) ja

81. a) $51,3^\circ$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{1}{8}\pi$ d) $35,2^\circ$ e) 144° f) $-\pi$

82. a) $75,1^\circ$ b) $\frac{1}{5}\pi$ c) $\frac{1}{3}\pi$ d) 45° e) -40° f) $\frac{5}{6}\pi$

83. $\sin 35^\circ = \cos 55^\circ$

84. $\tan 16,7^\circ = \cot 73,3^\circ$

$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$

$\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \cos \frac{5}{4}\pi$

$\sin 42,3^\circ = \cos 47,7^\circ$

$\sin 150^\circ = \cos 75^\circ$

85. a) $x = \frac{3}{10}\pi$ b) $x = 0,37$

86. a) $x = \frac{2}{5}\pi$ b) $x = 0,77$

c) $x = 0,9$ d) $x = \frac{1}{14}\pi$

c) $x = 1,15$ d) $x = \frac{3}{8}\pi$

e) $x = \frac{2}{3}\pi$ f) n.l. ($\tan \frac{3}{2}\pi$ nicht def.) e) $x = \frac{5}{4}\pi$ f) $x = -\frac{13}{6}\pi$

87. a) $A'(5;2); B'(2;4); O'(4;6)$ b) $A'(8;4); B'(13;1); O'(11;6)$

$[x'; y'] = [6 - x; y]$

$[x'; y'] = [10 - x; y]$

$$\left. \begin{aligned} &8. \left[\sin x ; \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] \\ &\left[\tan x ; \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] \\ &\left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) ; \cos x \right] \\ &\left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) ; \cot x \right] \end{aligned} \right\}$$

Symmetrieeigenschaften der Graphen;

Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$;

bei $\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$ außerdem

Spiegelung an Parallele zur

y-Achse durch Punkt $[\frac{(2k+1)\pi}{2}; 0]$

88. a) nein b) ja c) nein d) ja

89. a) ja b) nein c) nein d) ja

Seite 108

90. a) nein b) ja c) nein d) nein e) ja

91. a) ja b) ja c) nein d) nein e) ja

92. a) $x = 37^\circ$ b) $x = 77^\circ$ c) $x = 63^\circ$
 d) $x = 67^\circ$ e) $x = 65^\circ$ f) $x = 53^\circ$
93. a) $x = 28^\circ$ b) $x = 46^\circ$ c) $x = 58^\circ$
 d) $x = 76^\circ$ e) $x = 36^\circ$ f) $x = 7^\circ$
94. a) $180^\circ - 55^\circ$ b) $180^\circ + 37^\circ$ 95. a) $180^\circ + 36^\circ$ b) $180^\circ + 83^\circ$
 c) $360^\circ - 46^\circ$ d) $180^\circ - 18^\circ$ e) $360^\circ - 66^\circ$ d) $180^\circ - 61^\circ$
 e) $180^\circ + 85^\circ$ f) $360^\circ - 75^\circ$ e) $180^\circ + 34^\circ$ f) $360^\circ - 86^\circ$
 g) $180^\circ - 6^\circ$ h) $180^\circ - 82^\circ$ g) $180^\circ + 43^\circ$ h) $180^\circ + 75^\circ$
 i) $180^\circ + 89^\circ$ i) $360^\circ - 18^\circ$
96. a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 g) $\sqrt{3}$ h) -1 i) $-\frac{1}{2}$ k) $-\frac{1}{2}$
97. a) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 g) $-\sqrt{3}$ h) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ i) $-\sqrt{3}$ k) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
-
9. $\tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ = 1$
 $= \tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = 1$
 $= \tan 10^\circ \cdot \cot 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1$
 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
-
98. a) $\{1; 44^\circ\}$ 99. a) $\{-1; 36^\circ\}$ 100. a) $\{-1; 42^\circ\}$ 101. a) $\{-1; 37^\circ\}$
 b) $\{-1; 47^\circ\}$ b) $\{-1; 16^\circ\}$ b) $\{1; 37^\circ\}$ b) $\{-1; 53^\circ\}$
 c) $\{-1; 6^\circ\}$ c) $\{-1; 17^\circ\}$ c) $\{-1; 2^\circ\}$ c) $\{1; 36^\circ\}$
 d) $\{-1; 48^\circ\}$ d) $\{1; 66^\circ\}$ d) $\{-1; 45^\circ\}$ d) $\{-1; 27^\circ\}$

Seite 109

102. a) 0,2419 b) 0,2588 c) 0,0523 d) 0,5000
 e) 0,2419 f) 0,2588 g) 0,0523 h) 0,5000
 i) 0,9703 k) 0,9659 l) 0,9986 m) 0,8660

103. a) 0,2317 b) 0,3057 c) 0,5707 d) 0,9593
 e) 0,2317 f) 0,3057 g) 0,5707 h) 0,9593
 i) 0,9728 k) 0,9521 l) 0,8211 m) 0,2623
104. a) 0,2198 b) 0,9999 c) 0,0122 d) 0,8886
 e) 0,7986 f) 0,6574 g) 0,9898 h) 0,4462
 i) 0,6745 k) 0,7002 l) 0,7107 m) 14,30
105. a) 0,6745 b) 0,7002 c) 0,7107 d) 14,30
 e) 1,483 f) 1,428 g) 1,407 h) 0,0699
 i) 10,02 k) 114,6 l) 3,006 m) 2,006
106. a) 5,005 b) 4,011 c) 1,000 d) 0,0140
 e) 1,308 f) 0,5184 g) 1,857 h) 0,9673
 i) 2,023 k) 0,9627 l) 1,213 m) 5,145
107. a) 0,0175 b) 57,29 c) 0,0175 d) 0,9998
108. a) $14,3^0$ 109. a) $79,0^0$ 110. a) $63,7^0$ 111. a) $30,9^0$
 b) $25,5^0$ b) $46,2^0$ b) $32,3^0$ b) $15,3^0$
 c) $64,0^0$ c) $10,6^0$ c) $78,7^0$ c) $27,9^0$
 d) $25,0^0$ d) $18,1^0$ d) $45,2^0$ d) $82,4^0$
112. a) $73,3^0$ 113. a) $52,4^0$ 114. a) $21,0^0$ 115. a) $28,8^0$
 b) $75,5^0$ b) $59,2^0$ b) $64,3^0$ b) $66,1^0$
 c) $19,9^0$ c) $72,8^0$ c) $50,3^0$ c) $65,1^0$
 d) $71,0^0$ d) $36,6^0$ d) $66,6^0$ d) $66,3^0$
116. a) $16,5^0$ 117. a) 1,068 118. a) 0,124
 b) $66,6^0$ b) 0,349 b) 1,225
 c) $61,5^0$ c) 0,297 c) 0,459
 d) $46,5^0$ d) 0,332 d) 1,102
119. a) 0,497 120. a) 0,345 121. a) 0,094 122. a) 0,356
 b) 0,642 b) 0,967 b) 0,982 b) 1,429
 c) 0,789 c) 0,446 c) 0,966 c) 0,348
 d) 0,054 d) 0,356 d) 0,023 d) 0,226

Seite 110

123. a) $21,8^\circ$; $158,2^\circ$ b) $32,7^\circ$ c) $43,3^\circ$ d) $124,6^\circ$ $55,4^\circ$
 124. a) $25,6^\circ$; $154,4^\circ$ b) $66,9^\circ$ c) $51,2^\circ$ d) $65,7^\circ$
 125. a) n.l. b) $133,1^\circ$ c) $126,6^\circ$ d) $110,4^\circ$
 126. a) $65,7^\circ$; $114,3^\circ$ b) $132,2^\circ$ c) $166,7^\circ$ d) $56,1^\circ$
 127. a) n.l. b) $61,2^\circ$ c) $156,3^\circ$ d) $46,5^\circ$
 128. a) n.l. b) $124,9^\circ$ c) $123,2^\circ$ d) $154,9^\circ$
 129. a) $x = 0,4289$ 130. a) $y = 0,2235$ 131. a) $a = 1,921$
 b) $a = 0,6600$ b) $x = 0,9391$ b) $w = 1,347$
 c) $u = 0,8049$ c) $z = 0,6594$ c) $v = 2,204$
 d) $z = 0,1167$ d) $b = 0,5206$ d) $z = 1,897$

132. a) $0,433$ 133. a) $0,75$ 134. a) $1,28$
 b) $0,592$ b) $0,41$ b) $1,37$
 c) $1,125$ c) $1,02$ c) $0,117$
 d) $0,325$ d) $1,09$ d) $0,187$
 135. a) $x = 0,5878$ b) $a = -0,5095$ c) $v = -1,376$
 d) $y = -0,7536$ e) $b = -8,144$ f) $x = -0,9511$
 136. a) $z = -1,111$ b) $z = 0,7880$ c) $w = -1,428$
 d) $x = -0,4877$ e) $u = -0,3057$ f) $y = -0,1908$

137.

x	$101,7^\circ$	$94,3^\circ$	$115,6^\circ$	$159,9^\circ$
sin x	0,9792	0,9972	0,9018	0,3437

138.

x	$178,4^\circ$	$210,4^\circ$	$119,6^\circ$	$128,7^\circ$
cos x	-0,9996	-0,8625	-0,4939	-0,6252

Seite 111

139.

x	$154,7^\circ$	$124,9^\circ$	$215,8^\circ$	$91,4^\circ$
tan x	-0,4727	-1,433	0,7212	-40,92

140.

x	$104,6^\circ$	$293,5^\circ$	$156,5^\circ$	$129,7^\circ$
cot x	-0,2605	-0,4348	-2,300	-0,8302

141. a) $\{2; 18^\circ\}$ b) $\{5; 72^\circ\}$ c) $\{16; 131^\circ\}$ d) $\{1; 68^\circ\}$
 142. a) $0,616$ b) $0,559$ c) $-0,404$ d) $7,115$
 143. a) $0,545$ b) $-0,990$ c) $0,601$ d) $1,881$
 144. a) $[0,7; 0,643]$ 145. a) $[1,6\pi; -0,951]$
 b) $[1,4; 0,173]$ b) $[3,8; -9,789]$
 c) $[0,3\pi; 1,376]$ c) $[1,7; -7,6]$
 d) $[0,2\pi; 1,376]$ d) $[5,2; -0,531]$

In den Aufgaben 146. bis 151. gilt $k \in \mathbb{Z}$.

146. a) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ 147. a. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
 b) $x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ b) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$
 c) $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$
 d) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
 e) $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{7}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ e) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$
 f) $x = \pi + k \cdot 2\pi$ f) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

148. a) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ 149. a) $\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi < x < \frac{9}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 b) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
 c) $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ c) $-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$
 und
 $\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi < x < \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

a) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ d) $\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi < x < \frac{8}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 e) $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ e) $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < (k+1)\pi$
 f) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ f) $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

und

$\frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi$

150. a) $[\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi ; \frac{1}{2}] ; [\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi ; \frac{1}{2}]$

b) $[\frac{\pi}{3} + k\pi ; \sqrt{3}]$

151. a) $[\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi ; -\frac{1}{2}] ; [\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi ; -\frac{1}{2}]$

Seite 112

152. a) $\alpha) x = 3,5 \cdot \sin \frac{5}{2}\pi t$ $\beta) x = 5,4 \cdot \sin \frac{5}{3}\pi t$

b) $\alpha) 3,5 \text{ cm}$

$\beta) 4,7 \text{ cm}$

c) Einfluß der Größe des Massestückes

153. a) $i = \frac{9}{2}\sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t$; $u = 220 \sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t$

d) $i = 6,1 \text{ A}$

$u = 296 \text{ V}$

154. a)

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
t_n	0 s	1,77s	3,49s	5,10s	6,55s	7,81s	8,83s	9,58s	10,04s	10,19s
s_h	0 m	15,4m	59,6m	127,4m	210,6m	299,1m	382,2m	450,1m	494,4m	509,7m
s	0 m	349m	655m	883m	1004m	1004m	883m	655m	349m	0m

Seite 113

155. $\alpha = 0,72^\circ$

156.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
g	977,94	978,10	978,54	979,23	980,07	980,96	981,80

α	70°	80°	90°
g	982,49	982,93	983,09

157. a) $x = \{\frac{\pi}{6} ; \frac{11}{6}\pi\}$ b) $x = \{4,00 ; 5,44\}$

c) $x = \{\frac{\pi}{6} ; \frac{7}{6}\pi\}$; $x + \frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $x = \{38,7^\circ ; 218,7^\circ\} = \{0,68 ; 3,82\}$; $x + k\pi$

158. a) nicht def. b) $x = \{\frac{\pi}{6} ; \frac{5}{6}\pi ; \frac{7}{6}\pi ; \frac{11}{6}\pi\}$

c) $x = \{\frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi ; \frac{4}{3}\pi ; \frac{5}{3}\pi\}$; $x + \frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $x = \{\frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi ; \frac{4}{3}\pi ; \frac{5}{3}\pi\}$; $x + k\pi$

159. a) $x = \{\frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi ; \frac{4}{3}\pi ; \frac{5}{3}\pi\}$ b) $x = \{\frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi ; \frac{4}{3}\pi ; \frac{5}{3}\pi\}$

c) nicht def.

d) $x = \{\frac{2}{3}\pi ; \frac{4}{3}\pi\}$

10. a) ja

b) ja

11. a) $x = \{21,3^\circ ; 158,7^\circ\} = \{0,371 ; 2,78\}$

b) $x = \{124,8^\circ\} = \{2,18\}$

c) $x = \{30^\circ ; 150^\circ\} = \{\frac{\pi}{6} ; \frac{5}{6}\pi\}$

12. a) $x = \{62,2^\circ ; 117,8^\circ\} = \{1,08 ; 2,05\}$

b) $x = \{70,5^\circ\} = \{1,23\}$

c) $x = \{135^\circ\} = \{\frac{3}{4}\pi\}$

160. a) $c = 13,6 \text{ cm}$; $\alpha = 68,9^\circ$; $\beta = 21,1^\circ$; $A = 31,1 \text{ cm}^2$

b) $b = 490 \text{ m}$; $\alpha = 40,6^\circ$; $\beta = 49,4^\circ$; $A = 1,03 \cdot 10^5 \text{ m}^2$

c) $a = 73 \text{ m}$; $b = 102 \text{ m}$; $\beta = 54,5^\circ$; $A = 3723 \text{ m}^2$

d) $b = 69 \text{ mm}$; $c = 94 \text{ mm}$; $\beta = 47,8^\circ$; $A = 2174 \text{ mm}^2$

161. a) $c = 38,0 \text{ m}$; $\alpha = 24,6^\circ$; $\beta = 65,4^\circ$; $A = 272,6 \text{ m}^2$

b) $b = 25,1 \text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $A = 182 \text{ cm}^2$

c) $a = 8,0 \text{ cm}$; $b = 6,8 \text{ cm}$; $\alpha = 49,7^\circ$; $A = 27,2 \text{ cm}^2$

d) $a = 42,2 \text{ m}$; $c = 91,1 \text{ m}$; $\alpha = 27,6^\circ$; $A = 1702,8 \text{ m}^2$

162. a) $a = 8,8 \text{ m}$ b) $a = 5,0 \text{ cm}$ c) $a = 48,2 \text{ m}$ d) $a = 19,9 \text{ cm}$
 $b = 16,3 \text{ m}$ $b = 5,0 \text{ cm}$ $c = 54,4 \text{ m}$ $b = 9,1 \text{ cm}$
 $\alpha = 28,4^\circ$ $c = 7,0 \text{ cm}$ $\alpha = 62,3^\circ$ $c = 21,9 \text{ cm}$
 $\beta = 61,6^\circ$ $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 27,7^\circ$ $\alpha = 65,4^\circ$
 $A = 71,7 \text{ m}^2$ $\beta = 45^\circ$ $A = 610 \text{ m}^2$ $\beta = 24,6^\circ$
 $A = 12,5 \text{ cm}^2$ $A = 90,5 \text{ cm}^2$

163. a) $a = 16,8 \text{ cm}$; $b = 21,8 \text{ cm}$; $c = 27,5 \text{ cm}$; $\beta = 52,5^\circ$; $A = 183,1 \text{ cm}^2$
 b) $c = 17,1 \text{ m}$; $b = 4,2 \text{ m}$; $\alpha = 75,7^\circ$; $\beta = 14,3^\circ$; $A = 34,9 \text{ m}^2$
 c) $a = 14,4 \text{ m}$; $b = 20,7 \text{ m}$; $\alpha = 34,8^\circ$; $\beta = 55,2^\circ$; $A = 149 \text{ m}^2$
 d) $a = 15,2 \text{ cm}$; $b = 10,8 \text{ cm}$; $c = 18,6 \text{ cm}$; $\alpha = 54,5^\circ$;
 $A = 82,1 \text{ cm}^2$

Seite 114

164. a) $b = 10,3 \text{ cm}$ b) $a = 1,17 \text{ m}$ c) $\alpha = 51,5^\circ$
 $c = 14,7 \text{ cm}$ $c = 2,36 \text{ m}$ $a = 1,2 \text{ dm}$
 $\alpha = 45,6^\circ$ $\alpha = 29,7^\circ$ $b = 1,0 \text{ dm}$
 $\beta = 44,4^\circ$ $\beta = 60,3^\circ$ $c = 1,6 \text{ dm}$
 165. a) $a = 11,6 \text{ m}$ b) $b = 11,0 \text{ cm}$ c) $a = b = 27,1 \text{ cm}$
 $c = 16,3 \text{ m}$ $c = 18,2 \text{ cm}$ $c = 38,3 \text{ cm}$
 $\alpha = 45,2^\circ$ $\alpha = 52,8^\circ$ $\alpha = \beta = 45^\circ$
 $\beta = 44,8^\circ$ $\beta = 37,2^\circ$
 166. $h = 3,1 \text{ m}$; $\beta = 12,6^\circ$ 167. $\alpha = 4,3^\circ$; $l = 620 \text{ m}$
 168. Sonnenhöhe $26,7^\circ$ 169. $h = 31,0 \text{ m}$
 170. Höhe des Flugzeugs $0,9 \text{ km}$ 171. Länge des Haltetaus 33 m
 172. Neigung des Geländers $32,6^\circ$ 173. Höhe einer Stufe 17 cm
 174. $v = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 175. Die Flugrichtung ändert sich um $1,6^\circ$.

176.	α	30°	45°	177.	α	30°	45°	60°
	F_Z	540 kp	382 kp		F_Z	693 kp	400 kp	231 kp
	F_D	468 kp	270 kp		F_D	800 kp	566 kp	462 kp

Seite 115

178. $F_N = 45,9 \text{ kp}$; $F_R = 19,9 \text{ kp}$ 179. $\alpha = 12,1^\circ$
 180. a) 4800 m $b = 3,9^\circ$ 181. 1570 m 182. $31,9 \text{ m}$
 183. Ein Teilstrich entspricht $0,06^\circ$. Die Entfernung sei a Längeneinheiten.
 Behauptung: $\tan 0,06^\circ = \frac{a}{1000} = \frac{1}{1000}$

Beweis: Da der Tangens kleiner Winkel ($\alpha < 5^\circ$) dem Bogenmaß des Winkels gleichgesetzt werden kann, gilt

$$\text{arc } \alpha = \frac{\pi \cdot 0,06^\circ}{180^\circ} = 0,00105 \approx 0,001$$

184. a) $b = 25,1 \text{ m}$; $\alpha = \beta = 73,5^\circ$; $\gamma = 33,0^\circ$; $A = 172,3 \text{ m}^2$
 b) $a = b = 106 \text{ m}$; $\alpha = \beta = 53,7^\circ$; $\gamma = 72,6^\circ$; $A = 5312 \text{ m}^2$
 185. a) $b = 3,75 \text{ m}$; $\alpha = \beta = 71,7^\circ$; $\gamma = 36,6^\circ$; $A = 4,18 \text{ m}^2$
 b) $a = b = 4,95 \text{ m}$; $c = 2,74 \text{ m}$; $\alpha = \beta = 73,95^\circ$; $A = 6,52 \text{ m}^2$
 186. a) $a = b = 21,0 \text{ m}$; $\alpha = \beta = 62,25^\circ$; $A = 182,3 \text{ m}^2$
 b) $b = 5,6 \text{ cm}$; $c = 5,7 \text{ cm}$; $\alpha = \beta = 59^\circ$; $\gamma = 62^\circ$; $A = 13,9 \text{ cm}^2$
 187. a) $a = b = 63,1 \text{ m}$; $\beta = 53,2^\circ$; $\gamma = 73,6^\circ$; $A = 1908,9 \text{ m}^2$
 b) $b = 18,8 \text{ cm}$; $c = 36,0 \text{ cm}$; $\alpha = \beta = 16,8^\circ$; $A = 97,7 \text{ cm}^2$
 188. $52,6^\circ$ bzw. $37,4^\circ$; $74,7^\circ$ 189. $a = 3,00 \text{ m}$; $b = 5,77 \text{ m}$

Seite 116

190. $e = 5,0 \text{ cm}$; $f = 12,0 \text{ cm}$; $A = 29,9 \text{ cm}^2$
 191. $a = 1,10 \text{ dm}$; $e = 1,04 \text{ dm}$; $f = 1,93 \text{ dm}$

192. $\sphericalangle BAD = 38,9^\circ$
 $\sphericalangle DCB = 97,1^\circ$
 $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = 112,0^\circ$
 $\overline{AC} = 7,8 \text{ cm}$
 $A = 16,4 \text{ cm}^2$

193. $\beta = 64,8^\circ$
 $\gamma = \delta = 115,2^\circ$
 $\sphericalangle (e; f) = 38,8^\circ$
 $h = 1,59 \text{ cm}$
 $A = 7,16 \text{ cm}^2$

194. $70,6^\circ$; $109,4^\circ$
 196. a) $\alpha = 169,8^\circ$; $\beta = 190,2^\circ$
 b) $l = 9,1 \text{ m}$
 198. a) $19,5 \%$ b) $16,2 \%$
 200. a) $5,2^\circ$ b) $0,52^\circ$ c) $0,052^\circ$
 201. a) $1,75 \text{ m}$ b) 670 km c) 262 000 km
 202. Sonne: $1,39 \cdot 10^6 \text{ km}$; Mond: $3,56 \cdot 10^3 \text{ km}$
 203. a) $17,6''$ b) $1,9^\circ$ c) $59,0^\circ$

195. 44%
 197. a) $\alpha = \beta = 197,7^\circ$
 b) $l = 7,2 \text{ m}$
 199. a) $9,4 \%$ b) $7,3 \%$

Seite 117

204. $15,7 \text{ km}$

14. $s = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$; $b = \frac{r + \alpha^\circ}{180^\circ}$; $h = r(1 - \cos \frac{\alpha}{2})$

15.

Abstand in cm	1	2	3	4	5	6	7	8
Abstand im Gradmaß	5,74	11,48	17,26	23,06	29,96	34,92	40,98	47,18
Abstand in cm	9	10	11	12	13	14	15	16
Abstand im Gradmaß	53,48	60,00	66,72	73,78	81,08	88,86	97,20	106,26

205.

n	A_i	$< A_{\text{Kreis}}$	$< A_u$
3	$1,30 r^2$	$< 3,14 r^2$	$< 5,20 r^2$
4	$2,00 r^2$	$< 3,14 r^2$	$< 4,00 r^2$
5	$2,38 r^2$	$< 3,14 r^2$	$< 3,63 r^2$
6	$2,60 r^2$	$< 3,14 r^2$	$< 3,46 r^2$

Seite 118

206. a) $r_u = 15,2 \text{ cm}$; $r_i = 13,7 \text{ cm}$; $A = 633 \text{ cm}^2$
 b) $a = 14,5 \text{ cm}$; $r_i = 22,4 \text{ cm}$; $A = 1620 \text{ cm}^2$
 c) $a = 25,3 \text{ dm}$; $r_u = 21,5 \text{ dm}$; $A = 1100 \text{ dm}^2$
 d) $a = 2,2 \text{ m}$; $r_u = 2,9 \text{ m}$; $r_i = 2,7 \text{ m}$

207.

n	3	4	5	6	n	3	4	5	6
a in dm	1,73	1,41	1,18	1,00	a in dm	3,46	2,00	1,45	1,15
u in dm	5,20	5,66	5,88	6,00	u in dm	10,4	8,00	7,26	6,93

	Insgesamt	Gleiche Länge	Längermaß
209.	9	3	5,00 cm
		6	4,33 cm
210.	14	7	3,60 cm
		7	4,50 cm

211. 695 mm^2 ; $24,3 \%$ 212. $11,1 \text{ cm}$; $17,3 \%$
 213. rel. Fehler: $3,5 \%$ 214. rel. Fehler: $3,5 \%$

16. a) $n = 10$ b) $n = 32$ 17. a) $n = 9$ b) $n = 26$

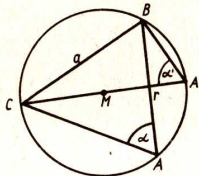
215. a) $b = 7,3 \text{ cm}$ 216. a) $b = 1,40 \text{ km}$
 b) $a = 12,7 \text{ m}$ b) $a = 10,9 \text{ m}$

Seite 119

217. a) $\alpha = 24,5^\circ$
 b) $\beta = 40,0^\circ$
 219. a) $\beta = 42,8^\circ$
 b) $\gamma = 101,4^\circ$

218. a) $\alpha = 64,4^\circ$
 b) $\gamma = 19,5^\circ$
 220. a) $\gamma = 47,6^\circ$
 b) $\beta = 77,5^\circ$

18.



Im rechtwinkligen Dreieck A'BC gilt:

$$\sin \alpha' = \frac{a}{2r} \text{ bzw. } 2r = \frac{a}{\sin \alpha'}$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:

$$\alpha' = \alpha$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r = d.$$

19. Aus der Gleichung $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ (Flächeninhalt eines Dreiecks ABC) ergibt sich mit $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$ (nach dem Sinussatz) die vorgegebene Gleichung.

221. a) $A = 21,7 \text{ cm}^2$
 b) $A = 770,5 \text{ m}^2$
 223. a) $A = 890 \text{ m}^2$
 b) $A = 648,8 \text{ mm}^2$

222. a) $A = 1665 \text{ m}^2$
 b) $A = 7,55 \text{ km}^2$
 224. a) $A = 225 \text{ m}^2$
 b) $A = 32,0 \text{ cm}^2$

20. a) $\alpha' = 20,8^\circ$; $\beta' = 57,6^\circ$; $\gamma' = 101,6^\circ$ b) $A = 5,5 \text{ cm}^2$

225. a) $c = 13 \text{ m}$
 b) $a = 19,1 \text{ cm}$
 227. a) $\alpha = 57,4^\circ$
 b) $\gamma = 67,8^\circ$

226. a) $b = 29,1 \text{ cm}$
 b) $c = 200 \text{ m}$
 228. a) $\beta = 95,3^\circ$
 b) $\beta = 160,8^\circ$

229. $A = 84 \text{ cm}^2$

230. $A = 370,5 \text{ m}^2$

231. $\alpha_1 = 45,4^\circ$; $\beta_1 = 59,6^\circ$; $\gamma_1 = 75,0^\circ$; $c_1 = 19 \text{ cm}$
 $\alpha_2 = 33,2^\circ$; $\beta_2 = 41,8^\circ$; $\gamma_2 = 105,0^\circ$; $c_2 = 25 \text{ cm}$

232. nicht lösbar

233. $\alpha = 68,7^\circ$; $\gamma = 51,3^\circ$; $a = 5,4 \text{ cm}$; $b = 5,0 \text{ cm}$

234. $\beta = 25,4^\circ$; $\gamma = 118,6^\circ$; $a = 19,7 \text{ m}$; $c = 29,4 \text{ m}$

235. 616 m

Seite 120

236. 4620 m

21. a) $b \cdot \sin \alpha < a$ b) $b \cdot \sin \alpha = a$ c) $b \cdot \sin \alpha > a$

237. a) Keine Lösung, da in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist

238. b) Keine Lösung; Begründung wie bei 237. a)

239. b) Keine Lösung, da in jedem Dreieck der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüberliegt. Der Seite a müßte also ein Winkel $\alpha > 135^\circ$ gegenüber liegen. Das ist nicht möglich, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

240. a) Keine Lösung; Begründung wie bei 239. b)

b) Keine Lösung; Begründung wie bei 239. b)

241. b) Keine Lösung, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt

242. a) Keine Lösung; Begründung wie bei 241. b)

243. a) $1 \text{ cm} < c < 7 \text{ cm}$

244. a) $11 \text{ mm} < a < 237 \text{ mm}$

b) $0^\circ < \beta < 115^\circ$

b) $0^\circ < \alpha < 68^\circ$

245. a) $0^\circ < \beta < 180^\circ$

246. a) $b \geq 7 \text{ cm}$

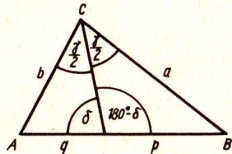
b) $0^\circ < \alpha < 32,3^\circ$

b) $0^\circ < \beta < 23,9^\circ$

Seite 121

247. a) $b = 5,8 \text{ cm}$; $\alpha = 70,3^\circ$; $\gamma = 46,5^\circ$; $A = 12,8 \text{ cm}^2$
 b) $a = 18,93 \text{ m}$; $\beta = 60,9^\circ$; $\gamma = 44,8^\circ$; $A = 114,6 \text{ m}^2$
248. a) $c = 200 \text{ m}$; $\alpha = 36,9^\circ$; $\beta = 40,8^\circ$; $A = 8051 \text{ m}^2$
 b) $c = 291 \text{ cm}$; $\alpha = 38,5^\circ$; $\beta = 93,8^\circ$; $A = 35\,500 \text{ cm}^2$
249. a) $\alpha = 97,7^\circ$; $\beta = 21,3^\circ$; $\gamma = 61,0^\circ$; $A = 4,64 \text{ m}^2$
 b) $\alpha = 46,4^\circ$; $\beta = 64,5^\circ$; $\gamma = 69,1^\circ$; $A = 428 \text{ m}^2$
250. a) $\alpha = 53,4^\circ$; $\beta = 99,6^\circ$; $\gamma = 27,0^\circ$; $A = 1,68 \text{ km}^2$
 b) $\alpha = 70,0^\circ$; $\beta = 45,8^\circ$; $\gamma = 64,2^\circ$; $A = 26,3 \text{ km}^2$
251. a) $a = 485 \text{ m}$; $b = 576 \text{ m}$; $\gamma = 36,7^\circ$
 b) $a = 4,58 \text{ m}$; $\beta = 38,3^\circ$; $\gamma = 54,5^\circ$
 c) $c_1 = 76,3 \text{ m}$; $\alpha_1 = 47,7^\circ$; $\gamma_1 = 95,0^\circ$
 $c_2 = 13,7 \text{ m}$; $\alpha_2 = 132,4^\circ$; $\gamma_2 = 10,3^\circ$
252. a) $a = 16,0 \text{ km}$; $c = 11,9 \text{ km}$; $\beta = 24,3^\circ$
 b) $c = 26,1 \text{ cm}$; $\alpha = 24,1^\circ$; $\beta = 28,6^\circ$
 c) $c_1 = 33,7 \text{ cm}$; $\beta_1 = 56,8^\circ$; $\gamma_1 = 69,2^\circ$
 $c_2 = 1,8 \text{ cm}$; $\beta_2 = 123,2^\circ$; $\gamma_2 = 2,8^\circ$

22.



- (1) $\sin \frac{\alpha}{2} : \sin \delta = q : b$
 (2) $\sin \frac{\alpha}{2} : \sin (180^\circ - \delta)$
 $= \sin \frac{\alpha}{2} : \sin \delta = p : a$
 Aus (1) und (2) folgt:
 $q : b = p : a$ oder
 $q : p = b : a$.

253. a) $h_a = 5,7 \text{ cm}$; $h_b = 7,3 \text{ cm}$; $h_c = 5,0 \text{ cm}$
 b) $h_a = 4,8 \text{ cm}$; $h_b = 3,6 \text{ cm}$; $h_c = 2,9 \text{ cm}$

254. a) $h_a = 6,6 \text{ cm}$; $h_b = 4,4 \text{ cm}$; $h_c = 3,3 \text{ cm}$
 b) $h_a = 3,2 \text{ cm}$; $h_b = 1,7 \text{ cm}$; $h_c = 3,3 \text{ cm}$
255. $\xi = 1,9 \text{ cm}$ 256. $\xi = 15 \text{ mm}$
 257. $28,9^\circ$; $46,6^\circ$; $104,5^\circ$ 258. 30° ; 90° ; $\sqrt{3} : 1$
259. $d_1 = 59 \text{ mm}$; $d_2 = 75 \text{ mm}$ 260. $d_2 = 12,1 \text{ cm}$;
 $A = 2055 \text{ mm}^2$ $A = 54,6 \text{ cm}^2$
261. $a = c = 12,7 \text{ cm}$; $b = d = 7,3 \text{ cm}$;
 $\alpha = \gamma = 63,6^\circ$; $\beta = \delta = 116,4^\circ$; $A = 83,0 \text{ cm}^2$
262. $a = c = 7,8 \text{ m}$; $b = d = 6,3 \text{ m}$;
 $\alpha = \gamma = 75,3^\circ$; $\beta = \delta = 104,7^\circ$; $A = 47,5 \text{ m}^2$
263. $\alpha = 67,0^\circ$; $\beta = 84,9^\circ$ 264. $\alpha = 74,1^\circ$; $\beta = 91,0^\circ$
 $\gamma = 95,1^\circ$; $\delta = 113,0^\circ$ $\gamma = 89,0^\circ$; $\delta = 105,9^\circ$
 $A = 35,9 \text{ cm}^2$ $A = 24,0 \text{ cm}^2$
265. $\angle M_2 M_1 M_3 = 47,8^\circ$ 266. $\angle M_2 M_1 M_3 = 46,4^\circ$
 $\angle M_1 M_2 M_3 = 57,9^\circ$ $\angle M_1 M_2 M_3 = 56,4^\circ$
 $\angle M_1 M_3 M_2 = 74,3^\circ$ $\angle M_1 M_3 M_2 = 77,2^\circ$

Seite 122

267. Kurs: $N 102,3^\circ W$; $v = 41,3 \text{ kmh}^{-1}$ 268. $\overline{AP} = 99 \text{ m}$
 269. $\overline{F_1 Z} = 5,2 \text{ km}$; $\overline{F_2 Z} = 10,4 \text{ km}$ 270. $\overline{F_1 S} = 19,4 \text{ km}$;
 271. $F (27 \text{ m}; 350 \text{ m})$ $\overline{F_2 S} = 25,7 \text{ km}$

23. a) $w_\alpha = 73 \text{ mm}$ $\angle(w_\alpha; w_\beta) = \{53,1^\circ; 126,9^\circ\}$
 $w_\beta = 60 \text{ mm}$ $\angle(w_\alpha; w_\gamma) = \{59,3^\circ; 120,7^\circ\}$
 $w_\gamma = 53 \text{ mm}$ $\angle(w_\beta; w_\gamma) = \{67,8^\circ; 112,2^\circ\}$
 b) $w_\alpha = 8,8 \text{ cm}$ $\angle(w_\alpha; w_\beta) = \{30,0^\circ; 150,0^\circ\}$
 $w_\beta = 7,1 \text{ cm}$ $\angle(w_\alpha; w_\gamma) = \{72,4^\circ; 107,6^\circ\}$
 $w_\gamma = 3,2 \text{ cm}$ $\angle(w_\beta; w_\gamma) = \{77,5^\circ; 102,5^\circ\}$
24. $\alpha = 131,8^\circ$; $\beta = 106,6^\circ$; $\gamma = 73,4^\circ$; $\delta = 48,2^\circ$
 $e = 9 \text{ cm}$; $f = 10 \text{ cm}$; $A = 40 \text{ cm}^2$

25. a) Geschwindigkeit: 8,6 km; Kurs: S 78,9° O

b) Kurs: S 61,6° O; Zeit: 1,1 h

Seite 123

272. a) $\overline{AC} = 168$ m; $\overline{BC} = 240$ m b) $\overline{AC} = 188$ m; $\overline{BC} = 349$ m

273. a) $\overline{AC} = 140$ m; $\overline{BC} = 86$ m b) $\overline{AC} = 171,4$ m; $\overline{BC} = 97,7$ m

274. $\overline{AS} = 3\,122$ m; $\overline{BS} = 3\,180$ m 275. N 95,7° O

Abstand: 3 116 m

276. $\overline{AB} = 2,180$ km; 277. Verbindungsstrecke: 245 m;

$\sphericalangle BAC = 98,2^\circ$; $\sphericalangle CBA = 43,1^\circ$ 88,8° bzw. 56,4°

287. A = 13 920 m²

279. A = 39 700 m²

Seite 124

280. A = 144 000 m²

281. A = 13 300 m²

282. $\overline{AB} = 551$ m

283. $\overline{AB} = 526$ m

26. a) $\overline{CD} = 146$ m

b) $\overline{CD} = 127$ m

27. a) $\overline{AB} = 784$ m

b) $\overline{AB} = 308$ m

28. b) $\overline{AB} = 904$ m

$\overline{AC} = 660$ m

$\overline{AD} = 574$ m

b) Körperberechnung

Seite 126

1. $A_0(V) = 6 \sqrt[3]{V^2}$

2. $V(A_0) = \frac{A_0}{6} \sqrt{\frac{A_0}{6}}$

3. a) a = 20 cm b) a = 0,93 cm

4. c = 18,5 cm

V = 8000 cm³ V = 0,80 cm³

V = 12 800 cm³

5. $A_M = 8\,496$ mm²

6. V = 311 760 mm³

V = 29 430 mm³

7. m = 23,74 kg

8. m = 43,73 kg

9. A = 321 mm²

10. A = 378 mm²

11. $A_G = 6,0$ cm²; h = 6,0 cm;

12. V = 2520,0 cm³

V = 36,0 cm³

$\alpha = 69,6^\circ$

13. t = 1036 s = 17 min 16 s

14. $A_G = 1,61$ m²; V = 209,30 m³

15. $V(a) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$; $A_0(a) = \frac{3}{2} \pi a^2$

16. $V(a) = \pi a^3$; $A_0(a) = 4 \pi a^2$

17. a) $A_M = 163,4$ cm²; $A_0 = 263,9$ cm²; V = 326,7 cm³

b) r = 0,5 m; $A_0 = 26,6$ m²; V = 6,2 m³

18. a) h = 3 cm; $A_M = 50$ cm²; $A_0 = 107$ cm²

b) r = 1,33 dm; $A_M = 37,7$ dm²; $A_0 = 48,8$ dm²

19.

r in cm	4	6	8	10	12	14	16
h(r) in cm	20 (19,9)	9 (8,8)	5 (4,98)	3 (3,2)	2 (2,2)	2 (1,6)	1 (1,2)

20.

r in cm	4	8	12	16	20	24
h(r) in cm	8 (7,99)	4 (3,98)	3 (2,7)	2 (1,99)	2 (1,6)	1 (1,3)

21. $A_0 = 34,9$ dm²

22. V = 513 cm³

23. 1482 Tanks liegend; 338 Tanks stehend

Seite 128

1. $V = 12\,000\text{ cm}^3$; $V(x) = 4x^3 - 220x^2 + 3000x$

2. a) 2215 l b) 1683 kp c) 252 km

3. $V(\alpha) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \tan \alpha$; $V(\alpha) = 32,8 \cdot \tan \alpha$

$$A_M(\alpha) = \frac{a^2}{2} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} + \tan \alpha \right) = \frac{a^2}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1 + 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$A_M(\alpha) = 35,5 \cdot \frac{1 + 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$V(51,6^\circ) = 41,4\text{ cm}^3$ $A_M(51,6^\circ) = 73,6\text{ cm}^2$

24. $h = 12\text{ cm}$

25. $s = 10,4\text{ cm}$

26. $V = 24\text{ cm}^3$

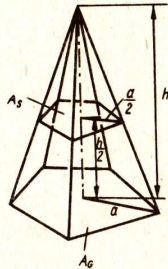
27. 76,4 %

28. $A_G : A_M = 1 : \sqrt{2}$

29. $a = 5,7\text{ cm}$; $s = 13,4\text{ cm}$

30. a) $54,10\text{ m}^2$ b) $51,30\text{ m}^2$

31.



Voraussetzungen:

(1) Wird durch eine n-seitige Pyramide ein ebener Schnitt parallel zur Grundfläche gelegt, so sind Grundfläche und Schnittfläche einander ähnliche n-Ecke.

(2) Wenn zwei einander ähnliche n-Ecke den Ähnlichkeitsfaktor k besitzen, so gilt für ihre Flächeninhalte:

$A : A' = k^2$; vgl. "Mathematik, Lehrbuch für Klasse 8", Satz B 17, Seite 43.

Behauptung:

Wenn eine Pyramide in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten wird, beträgt der Inhalt der Schnittfläche ein

Viertel des Inhalts der Grundfläche.

$A_G : A_S = 4 : 1$ (A_G : Inhalt der Grundfläche;
 A_S : Inhalt der Schnittfläche)

Beweis:

Nach dem Strahlensatz gilt:

$k = a : a' = h : h'$ (Im Bild oben bedeuten:
 $= h : \frac{h}{2} = 2:1$ h : Höhe der Vollpyramide;
 $k = 2 : 1$ h' : Höhe des Pyramidenstumpfes;

Daraus folgt: a : Strecke in A_G ;

$A : A' = k^2$ (nach Voraussetzung (2)) a' : Strecke in A_S)

$A_G : A_S = (2:1)^2 = 4:1$

32. $V_{\text{Spitze}} : V_{\text{Vollpyramide}} = 1 : 8$

$V_{\text{Pyramidenstumpf}} : V_{\text{Vollpyramide}} = 7 : 8$

Seite 129

33. $A = 360\text{ mm}^2$

34. $A = 509\text{ mm}^2$

35. $A_0(h) = \pi r(r + \sqrt{h^2 + r^2})$

36. $A_0(r) = \pi r(r + \sqrt{h^2 + r^2})$

37. a) $s = 18,6\text{ cm}$

38. a) $r = 12,7\text{ cm}$

$A_M = 309,6\text{ cm}^2$

$A_M = 706,2\text{ cm}^2$

$A_0 = 397,9\text{ cm}^2$

$A_0 = 1213\text{ cm}^2$

$V = 523,6\text{ cm}^3$

$V = 2077,0\text{ cm}^3$

b) $r = 2,2\text{ cm}$

b) $r = 6\text{ cm}$

$s = 4,4\text{ cm}$

$h = 8\text{ cm}$

$A_M = 30,4\text{ cm}^2$

$A_M = 188\text{ cm}^2$

$A_0 = 45,6\text{ cm}^2$

$V = 302\text{ cm}^3$

39. $V = 13\,400\text{ mm}^3$

40. $r = 6,63\text{ cm}$

$A_0 = 3643\text{ mm}^2$

$A_0 = 304,5\text{ cm}^2$

$V = 206,4\text{ cm}^3$

41. $r = 0,38 \text{ m}$
 $V = 0,14 \text{ m}^3$

42. $r = 10 \text{ cm}$
 $h = 39 \text{ cm}$
 $V = 4084 \text{ cm}^3$

43. a) $V = 268,1 \text{ cm}^3$; $A_0 = 201,1 \text{ cm}^2$

b) $r = 0,28 \text{ m}$; $V = 0,1 \text{ m}^3$

44. a) $V = 2144,7 \text{ cm}^3$; $A_0 = 804,2 \text{ cm}^2$

b) $r = 0,62 \text{ dm}$; $A_0 = 4,83 \text{ dm}^2$

Seite 130

45. $A_0 = 113 \frac{1}{7} \text{ cm}^2$

46. $V = 113 \frac{1}{7} \text{ cm}^3$

47. $A_0 = 510,1 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

48. $A_0 = 37,9 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

$V = 1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$

$V = 2,199 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$

49. $A_{\text{Afrika}} = 298 \text{ cm}^2$

50. $d = 29 \text{ cm}$

$[\text{Fläche Afrika: } 30244 \cdot 10^3 \text{ km}^2]$ $[\text{Fläche Asien: } 44343 \cdot 10^3 \text{ km}^2]$

4. Äußerer Radius $R = 3,6 \text{ cm}$

5. Äußerer Radius $R = 2,9 \text{ cm}$

6. a) $h_K : h_Z = \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{4}$

b) $A_{M_K} : A_{M_Z} = 1 : 2$

c) $A_{O_K} : A_{O_Z} = 1 : 2$

7. Voraussetzungen:

(1) Halbkugel, Zylinder und Kegel stimmen im Radius r der Grundfläche und in der Körperhöhe h überein. Damit ist $r = h$.

(2) Satz des Cavalieri; vgl. Lehrbuch für Klasse 8,

Bestell-Nr. 00 08 06 - 1, Seite 80, Satz D 1.

Behauptung:

$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$

Beweis:

Der Beweis erfolgt nach o. a. Lehrbuch, Seite 92 f. Man vergleicht dabei die Halbkugel mit einem Restkörper, der entsteht, wenn man sich aus dem Kreiszyylinder den Kreiskegel ausgebohrt denkt.

Man legt in beliebiger Höhe einen Schnitt parallel zur Grundflächenebene und berechnet den Inhalt der Schnittflächen; vgl. Bild D 22 a. a. O.

Halbkugel:

Restkörper:

Die Schnittfläche ist eine Kreisfläche mit dem

Die Schnittfläche ist ein Kreisring mit den Radien

Radius φ

$r_1 = h$ und $r_a = r$.

$\varphi^2 = r^2 - h^2$

$A_2 = r_a^2 \pi - r_1^2 \pi$

$A_1 = \pi(r^2 - h^2)$

$A_2 = \pi(r^2 - h^2)$

Die Schnittflächen beider Körper sind also flächengleich. Damit erfüllen die Halbkugel und der Restkörper (Differenz des Kreiszyinders und des Kreiskegels) alle Voraussetzungen des Satzes von Cavalieri. Folglich haben sie gleiche Volumen.

Seite 131

8. $A_{\text{Schnittfläche}} = 31 \text{ cm}^2$; $V_{\text{Restkörper}} = 167 \text{ cm}^3$

9. $A_{\text{Restkörper}} = 140 \text{ cm}^2$; $V_{\text{Restkörper}} = 106 \text{ cm}^3$

67. $V_{\text{Restkörper}} = \frac{5}{6} a^3$

68. 96,4 %

71. Öffnungswinkel 60°

72. $r = \sqrt{3} \cdot h$

Seite 133

75. 104 t 76. 409 t 77. $A_G = 30,4 \text{ m}^2$ 78. $A_G = 50,8 \text{ m}^2$

79. a) $V_{\text{Würfel}} : V_{\text{Kugel}} = 1 : \frac{\pi}{2} \sqrt{3}$

b) $A_{0\text{Würfel}} : A_{0\text{Kugel}} = 1 : \frac{\pi}{2}$

80. a) $V_{\text{Würfel}} : V_{\text{Kugel}} = 1 : \frac{\pi}{6}$

b) $A_{0\text{Würfel}} : A_{0\text{Kugel}} = 1 : \frac{\pi}{6}$

81. a) $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} = 1 : \frac{8}{3} \sqrt{2}$

b) $A_{0\text{Zylinder}} : A_{0\text{Kugel}} = 1 : \frac{4}{3}$

82. a) $V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Doppelkegel}} = 1 : \sqrt{2}$

b) $A_{0\text{Kugel}} : A_{0\text{Doppelkegel}} = 1 : \sqrt{2}$

Seite 134

12. $h_1 : h_2 = A_2 : (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$

(h_1 : Höhe des Pyramidenstumpfes;

h_2 : Höhe der Pyramidenspitze;

A_1 : Grundfläche der Vollpyramide bzw. des Pyramidenstumpfes;

A_2 : Grundfläche der Pyramidenspitze bzw. Deckfläche des Pyramidenstumpfes)

13. $A_{0\text{Würfel}} : A_{0\text{Oktaeder}} = 1 : \frac{1}{6} \sqrt{3}$

$V_{\text{Würfel}} : V_{\text{Oktaeder}} = 1 : \frac{1}{6}$

14. $V = \frac{9}{8} a^3$; $A_0 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} (11 + 3 \sqrt{2})$

Seite 136

18. $V = 255,2 \text{ m}^3$; $A_0 = 201,8 \text{ m}^2$

105. $V = 130 \text{ cm}^3$

$A_0 = 176 \text{ cm}^2$

107. $V = 64 \text{ cm}^3$

$A_0 = 112 \text{ cm}^2$

109. $V = 49,5 \text{ cm}^3$

$A_0 = 89,7 \text{ cm}^2$

106. $V = 217 \text{ cm}^3$

$A_0 = 256 \text{ cm}^2$

108. $V = 59 \text{ cm}^3$

$A_0 = 116 \text{ cm}^2$

110. $V = 395,8 \text{ cm}^3$

$A_0 = 333,8 \text{ cm}^2$

111. $A_{0\text{Pyramidenspitze}} = 21 \text{ cm}^2$; $A_{0\text{Pyramidenstumpf}} = 81 \text{ cm}^2$

112. a) $V_{\text{Vollpyramide}} = 83 \text{ cm}^3$; $V_{\text{Pyramidenspitze}} = 32 \text{ cm}^3$;

$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = 51 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Pyramidenstumpf}} : V_{\text{Vollpyramide}} = 51 : 83 = 1 : 1,6$

b) $A_{0\text{Pyramidenstumpf}} = 95 \text{ cm}^2$; $A_{0\text{Vollpyramide}} = 126 \text{ cm}^2$

$A_{0\text{Pyramidenstumpf}} : A_{0\text{Vollpyramide}} = 95 : 126 = 1 : 1,3$

113. $A_0 = 159 \text{ cm}^2$

$V = 118 \text{ cm}^3$

114. $V = 87,9 \text{ cm}^3$

$A_0 = 114,3 \text{ cm}^2$

Seite 137

115. $A_0 = 397 \text{ cm}^2$

$V = 400 \text{ cm}^3$

116. $V = 189 \text{ cm}^3$

a) 48° (Seitenkanten)

b) $63,4^\circ$ (Seitenflächen)

117. $a_1 = 12 \text{ cm}$; $a_2 = 6 \text{ cm}$

118. $a_1 = 1,1 \text{ dm}$; $a_2 = 0,7 \text{ dm}$

119. $76,3^\circ$ (Seitenkanten)

120. 78° (Seitenkanten)

$80,3^\circ$ (Seitenflächen)

$80,2^\circ$ (Seitenflächen)

19. Höhe des oberen Teilkörpers: 5,6 cm
 Höhe des unteren Teilkörpers: 9,6 cm
 Der obere Teilkörper hat die größere Mantelfläche.

125. a) $s = 6,9 \text{ cm}$
 $A_M = 201,2 \text{ cm}^2$
 $A_O = 338,9 \text{ cm}^2$
 $V = 463,9 \text{ cm}^3$

b) $r_2 = 8 \text{ cm}$
 $A_M = 691 \text{ cm}^2$
 $A_O = 1507 \text{ cm}^2$
 $V = 3115 \text{ cm}^3$

c) $h = 10 \text{ cm}$
 $s = 10 \text{ cm}$
 $A_O = 1075 \text{ cm}^2$
 $V = 2500 \text{ cm}^3$

127. $3,90 \text{ m}^3$

Seite 138

129. $15,5 \text{ cm}$

133. $A_O = 100,32 \text{ m}^2$
 $V = 80,02 \text{ m}^3$

126. a) $h = 14,1 \text{ cm}$
 $A_M = 1095,6 \text{ cm}^2$
 $A_O = 2039,5 \text{ cm}^2$
 $V = 6611,8 \text{ cm}^3$

b) $r_1 = 8,5 \text{ cm}$
 $A_M = 335,8 \text{ cm}^2$
 $A_O = 618,0 \text{ cm}^2$
 $V = 947,5 \text{ cm}^3$

c) $h = 3 \text{ cm}$
 $s = 3 \text{ cm}$
 $A_M = 97 \text{ cm}^2$
 $A_O = 226 \text{ cm}^2$

128. $1,46 \text{ m}^3$

130. 12 l

134. Dachfirst $9,20 \text{ m}$
 $A_O = 147,45 \text{ m}^2$
 $V = 209,59 \text{ m}^3$

Inhalte der einzelnen Dachflächen:

135. Dreieck links: $A = 14,44 \text{ m}^2$
 Dreieck unten: $A = 20,42 \text{ m}^2$
 Trapez oben: $A = 71,46 \text{ m}^2$
 Trapez links: $A = 51,05 \text{ m}^2$
 Trapez rechts: $A = 61,25 \text{ m}^2$
 Parallelogramm: $A = 40,84 \text{ m}^2$
 Inhalts des Dachraumes: $V = 310,93 \text{ m}^3$

136. Inhalte der einzelnen Dachflächen:

Dreieck links bzw. Dreieck rechts: $A = 15,40 \text{ m}^2$
 Dreieck unten: $A = 10,89 \text{ m}^2$
 Trapez oben: $A = 76,99 \text{ m}^2$
 Trapez links bzw. Trapez rechts: $A = 38,50 \text{ m}^2$
 Parallelogramm links bzw. Parallelogramm rechts: $A = 30,80 \text{ m}^2$
 Inhalt des Dachraumes: $V = 275,51 \text{ m}^3$

137. $31,07 \text{ m}^3$

138. a) $A_M = 52,2 \text{ dm}^2$
 $V = 36,24 \text{ dm}^3$
 b) $A_M = 23,78 \text{ dm}^2$
 $V = 11,87 \text{ dm}^3$

139. a) $A_M = 30,26 \text{ m}^2$
 $V = 14,45 \text{ m}^3$

b) $A_M = 41,53 \text{ dm}^2$
 $V = 27,50 \text{ dm}^3$

140. $h = 3,1 \text{ m}$

141. 21%

142. a) $V = 256 \overline{\text{I}}$
 b) $V = 64 \overline{\text{I}}$

143. a) $A_O = 160 \overline{\text{I}}$
 b) $A_O = 256 \overline{\text{I}}$

144. Für Prisma und Zylinder gilt: $A_G = A_D = A_Q$
 $V = \frac{h}{6} \cdot 6 A_G = A_G \cdot h$

Für Pyramide und Kegel gilt: $A_G = 4 A_Q$ (Satz des Cavalieri);
 $A_D = 0$.

$V = \frac{h}{6} \cdot (A_G + A_Q) = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

145. Für Pyramidenstümpfe und Kegelstümpfe gilt:

$$A_Q = \frac{1}{4}(A_G + A_D + 2\sqrt{A_G A_D}) \quad (\text{Zu ermitteln mit Hilfe des Lehrbuches für Klasse 8, Seite 43, Satz B 17})$$

$$4A_Q = A_G + A_D + 2\sqrt{A_G A_D}$$

$$V_{St} = \frac{h}{6}(A_G + A_D + 4A_Q) = \frac{h}{6}(2A_G + 2A_D + 2\sqrt{A_G A_D})$$

$$V_{St} = \frac{h}{3}(A_G + A_D + \sqrt{A_G A_D})$$

Für eine Halbkugel gilt: $h = r$; $A_D = 0$;

$$A_Q = \frac{3}{4} A_G, \text{ da } \varrho^2 = \frac{3}{4} r^2$$

(ϱ sei Radius von A_Q) ist.

$$V_{HK} = \frac{h}{6}(A_G + A_D + 4A_Q) = \frac{h}{6}(A_G + 3A_G)$$

$$V_{HK} = \frac{2}{3} h A_G = \frac{2}{3} \pi r^3$$

146. Absoluter Fehler 6 cm^3 147. Absoluter Fehler $1,04 \text{ cm}^3$

Relativer Fehler $11,5 \%$ Relativer Fehler $3,2 \%$

148. 916 Kugelbomben

149. 341,4 kg

150. $2,348 r^2 \text{ t}$ (r in m)

$$20. \quad 2 \pi a r^2 > v > \pi a r^2$$

$$21. \quad \text{Absoluter Fehler } \frac{\pi h}{6} (r_1 - x)^2 \text{ mit } x = r_2$$

Lösungen zu einigen Schüleraufträgen

Der Faktor a hat Einfluß nur auf den Wertebereich der Funktion $y = a \cdot \sin x$ ($-a \leq y \leq a$ für $a > 0$). Nullstellen, Monotonieverhalten und kleinste Periode verändern sich gegenüber der Funktion $y = \sin x$ nicht.

20. a) $\frac{2}{3}\pi$ b) 2 c) 20π d) $\frac{2}{\sqrt{2}}\pi = \sqrt{2}\pi$

21. Der Faktor b hat keinen Einfluß auf den Wertebereich ($-1 \leq y \leq 1$).

Die Nullstellen liegen bei $x = k \cdot \frac{\pi}{b}$ mit $b \neq 0$.

Der Faktor b verändert die Monotonieintervalle.

$\frac{\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b} \leq x < \frac{3\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b}$ monoton fallend

$\frac{3\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b} \leq x < \frac{5\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b}$ monoton steigend

23. a) nein b) nein c) ja
d) ja e) nein f) nein

24. $\cos(-2\pi) = \cos 0 = \cos 2\pi = \frac{u}{r} = \frac{r}{r} = 1$ $P(u;v) = P(r;0)$

$\cos(-\frac{3}{2}\pi) = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{u}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $P(u;v) = P(0;r)$

$\cos(-\pi) = \cos \pi = \frac{u}{r} = \frac{-r}{r} = -1$ $P(u;v) = P(-r;0)$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{u}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $P(u;v) = P(0;-r)$

$\cos n \cdot 2\pi = \cos 2\pi = 1$

$\cos(n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos(n \cdot 2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$

$\cos(n \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0$

25. Eigenschaften der Kosinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x \in P$)

Definitionsbereich	$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$	$\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$
Wertebereich	$1 \geq y > 0$	0	$0 > y \geq -1$	$-1 \leq y < 0$	0	$0 < y \leq 1$
Vorzeichen der Funktionswerte	+		-	-		+
Monotonieverhalten	monoton fallend		monoton fallend	monoton steigend		monoton steigend

26. Der Graph der Kosinusfunktion entsteht aus dem Graph der Sinusfunktion lediglich durch Verschieben längs der x-Achse (um $k \cdot \frac{\pi}{2}$), so daß unter anderen Eigenschaften auch die kleinste Periode 2π erhalten bleibt.

27. a) Keine Lösungen b) Lösungen c) Keine Lösungen
d) Lösungen e) Keine Lösungen f) Lösungen

28. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b) $x = k \cdot 2\pi$ c) $x = \pi + k \cdot 2\pi$

29. $F_{\pi} = G \cdot \cos x$

30. a) $x = 3$ b) $x = \{-2; 5\}$ c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $x = 0$ e) $x = k\pi$ f) $x = k\pi$

g) $x = 1$ h) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i) kein x

31.

	a	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1
b	-1	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	-1
	$-\frac{1}{10}$	10	1	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	-1	-10
	$-\frac{1}{100}$	100	10	1	0	-1	-10	-100
	0	-	-	-	-	-	-	-

$\frac{1}{100}$	- 100	- 10	- 1	0	1	10	100
$\frac{1}{10}$	- 10	- 1	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	1	10
1	- 1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1

33. a) $\{0,58; 1; 1,73\}$ b) $\{1,73; 1; 0,58\}$

34. Auf Grund der Definitionen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bzw. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ sind die Einschränkungen $\cos x \neq 0$ bzw. $\sin x \neq 0$ notwendig, da die Division durch Null im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist.

35. a) $x = k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

36.

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\frac{\sin x}{\cos x}$	+	-	+	-
$\frac{\cos x}{\sin x}$	+	-	+	-

37. Fall 1: Bei Annäherung an die Stelle $x = \pi$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$) von links streben $\cos x$ gegen - 1 und $\sin x$ gegen 0. Der Quotient $\frac{\cos x}{\sin x}$ nimmt dabei negative Werte von beliebig großem absolutem Betrag an.

Fall 2: Bei Annäherung an die Stelle $x = \pi$ ($\pi < x < \frac{3}{2}\pi$) von rechts streben $\cos x$ gegen - 1 und $\sin x$ gegen 0. Der Unterschied zu Fall 1 besteht darin, daß in diesem Intervall $\sin x$ und $\cos x$ gleiches Vorzeichen besitzen, der Quotient $\frac{\cos x}{\sin x}$ folglich positiv ist und bei Annäherung an die Stelle $x = \pi$ beliebig große positive Werte annimmt.

38. a) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

b) $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$

c) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

39. a) $\frac{2}{3} \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2} \sqrt{6}$ c) $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ d) $\frac{2}{3} \sqrt{3}$

40. b)

	A	B	C	D
Abstand von der x-Achse in LE	2	2	$\frac{3}{2}$	1
Abstand von der y-Achse in LE	1	0	2	1

c) $\overline{AO} = \sqrt{5}$ LE; $\overline{AB} = 1$ LE; $\overline{DO} = \sqrt{2}$ LE

41. $P_{11}(\frac{1}{2}; 2)$, $P_{12}(-\frac{1}{2}; 2)$, $P_{13}(-\frac{1}{2}; -2)$, $P_{14}(\frac{1}{2}; -2)$
 $P_{21}(1; \frac{5}{3})$, $P_{22}(-1; \frac{5}{3})$, $P_{23}(-1; -\frac{5}{3})$, $P_{24}(1; -\frac{5}{3})$
 $P_{31}(3; \frac{4}{5})$, $P_{32}(-3; \frac{4}{5})$, $P_{33}(-3; -\frac{4}{5})$, $P_{34}(3; -\frac{4}{5})$

43.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$
$\sin^2 x$	-	keine
$\cos^2 x$	keine	-
$\tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot^2 x$	$x \neq k\pi$	$x \neq k\pi$

45. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$
 $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$
 $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\tan(2\pi - x) = -\tan x$
 $\cot(\pi - x) = -\cot x$
 $\cot(\pi + x) = \cot x$
 $\cot(2\pi - x) = -\cot x$

49. $\tan 60^\circ : 1,732 < \sqrt{3}$; denn $1,732^2 \approx 2,999 < 3,000$
 $\sin 60^\circ : 0,8660 < \frac{1}{2}\sqrt{3}$; denn $0,8660^2 \approx 0,7499 < 0,7500$

50. a) $y = 0,5736$ b) $y = 0,0750$ c) $z = 0,2588$
 d) $w = 0,9984$ e) $x = 0,9325$ f) $v = 0,1736$

51.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Stab	0,113	0,131	0,301	0,284	0,523	0,552
Tafel	0,1132	0,1305	0,3007	0,2840	0,5225	0,5519
	g)	h)	i)	k)	l)	m)
Stab	0,707	0,707	0,843	0,584	0,908	0,216
Tafel	0,7071	0,7071	0,8434	0,5835	0,9078	0,2164
	n)	o)	p)	q)		
Stab	0,985	1,000	1,000	0,100		
Tafel	0,9848	1,0000	1,0000	0,0993		

52.

	a)	b)	c)	d)	e)	
x im Gradmaß	7,5°	81,1°	10,2°	14,1°	73,3°	
x im Bogenmaß	0,130	1,416	0,177	0,246	1,280	
	f)	g)	h)	i)		
x im Gradmaß	25,6°	61,4°	5,7°	84,3°		
x im Bogenmaß	0,446	1,072	0,100	1,471		

53.

	a)	b)	c)	d)
Stab	0,354	0,481	0,433	0,298
Tafel	0,3541	0,4813	0,4327	0,2981
	e)	f)	g)	h)
Stab	0,392	0,047	0,024	0,072
Tafel	0,3919	0,0472	0,0244	0,0717

54.

	a)	b)	c)	d)
Stab	3,31	1,03	1,3	1,3
Tafel	3,312	1,028	1,299	1,299
	e)	f)	g)	h)
Stab	1,94	1,83	6,69	3,56
Tafel	1,937	1,834	6,691	3,558

55. Einteilung der Dreiecke nach Seiten

unregelmäßig	Seiten paarweise verschieden lang
gleichschenkelig	ein Paar gleich langer Seiten
gleichseitig	alle Seiten gleich lang

Einteilung der Dreiecke nach Winkeln

spitzwinklig	alle Winkel spitz
rechtwinklig	ein rechter Winkel
stumpfwinklig	ein stumpfer Winkel

58. $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ $a = c \cdot \sin \alpha$; $b = c \cdot \cos \alpha$

$A = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

60. Summe der Innenwinkel eines n-Ecks: $(n-2) \cdot 180^\circ$

Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen n-Ecks: $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

63. $a = 5,5 \text{ cm}$; $\beta = 61,0^\circ$; $\gamma = 70,5^\circ$

65. a) $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$; $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$

B Körperberechnung

1. $V(A_G) = A_G \cdot h$ Diese Funktion ist eine lineare Funktion.

5. a) Die Mantellinien eines geraden Kreiszyinders stehen auf der Begrenzungslinie der Grundfläche (Kreis) senkrecht.

b) Ein gerader Kreiszyinder kann durch Rotation eines Rechteckes (Quadrates) um eine der Mittellinien oder Rechteckseiten (Quadratseiten) erzeugt werden.

$$6. V = A_G \cdot h \quad A_G = a \cdot b; \quad h = c$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_O = 2 A_G + A_M \quad A_G = a \cdot b; \quad A_M = 2(ac + bc)$$

$$A_O = 2ab + 2(ac + bc) = 2(ab + ac + bc)$$

8. Ein gerader Kreiskegel kann erzeugt werden durch Rotation

- eines gleichseitigen Dreiecks um eine seiner Symmetrieachsen (Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden, Höhen, Mittelsenkrechten);
- eines gleichschenkligen Dreiecks um seine Symmetrieachse;
- eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten.

$$9. V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h \quad A_G = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$10. r(a) = \frac{R(h-a)}{h} = -\frac{R}{h} a + R \quad \begin{array}{l} (R: \text{Radius der Grundfläche;} \\ r: \text{Radius der Schnittfläche;} \\ h: \text{Höhe des Kreiskegels;} \\ a: \text{Abstand der Grundfläche} \\ \text{von der Schnittfläche)} \end{array}$$

$$11. r(a) = \sqrt{R^2 - a^2} \quad \begin{array}{l} (R: \text{Kugelradius;} \\ r: \text{Radius des Schnittkreises;} \\ a: \text{Abstand des Kugelmittelpunktes} \\ \text{von der Schnittkreisfläche)} \end{array}$$

$$23. a) V_{\text{Kreiskegelstumpf}} = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$= \frac{1}{3} h (r_1^2 \pi + r_1 r_2 \pi + r_2^2 \pi)$$

$$r_1^2 \pi = A_G; \quad r_2^2 \pi = A_D$$

$$r_1 r_2 \pi = \sqrt{r_1^2 \pi r_2^2 \pi} = \sqrt{A_G A_D}$$

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{1}{3} h (A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D)$$

$$b) H(r_1, r_2, h) = \frac{r_1 (H - h)}{r_2} \quad \begin{array}{l} (H: \text{Höhe des Vollkegels;} \\ r_1: \text{Radius der Grundfläche} \\ \text{des Vollkegels bzw. des} \\ \text{Kegelstumpfes;} \\ r_2: \text{Radius der Deckfläche} \\ \text{des Kegelstumpfes bzw.} \\ \text{der Grundfläche des} \\ \text{Ergänzungskegels;} \\ h: \text{Höhe des Kegelstumpfes)} \end{array}$$

$$c) V_{\text{Kreiskegelstumpf}} = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \quad r_1 = r_2 = r$$

$$V_{\text{Kreiszylinder}} = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + r^2 + r^2) = \pi r^2 h$$

62914