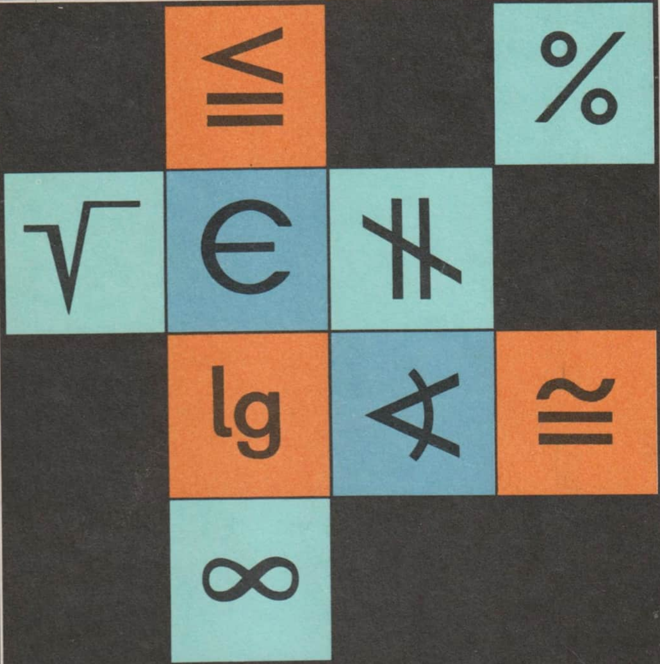
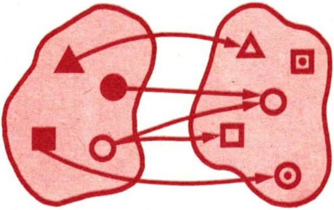


Mathematik in Übersichten

Wo finde ich was

Mathematik in Übersichten

Wissensspeicher für den Unterricht



Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1987

Autoren:
Prof. Dr. Rudolf Bittner; Abschnitte D/1 bis D/9
Prof. Dr. Dieter Ilse und
Dr. Werner Tietz: Abschnitte A/1, A/2, B/1 bis B/4, C/1 bis C/11
Siegmar Kubicek: Abschnitte D/10 bis D/12

Bei der Erarbeitung des Manuskripts wurden
die bisher im Verlag Volk und Wissen
erschienenen Lehrbücher
für das Fach Mathematik
hinzugezogen.

Vom Ministerium für Volksbildung
der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

ISBN 3-06-000809-4

12. Auflage
Ausgabe 1973
Lizenz-Nr. 203 · 1000/87(DN 000809-12)
LSV 0681
Redaktion: Karlheinz Martin
Zeichnungen: Jutta Wolff
Ausstattung: Manfred Behrendt, Prisma. Günter Wolff
Schrift: 9/10 Gill Monotype
Redaktionsschluß: 23. Mai 1986
Printed in the German Democratic Republic
Satz: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Druck: Karl-Marx-Werk Pößneck V 15/30
Bestellnummer: 730 520 7
Schulpreis DDR: 3,00

Inhalt

Zur Benutzung des Buches

In diesem Buch ist der Lehrstoff, der in den Klassen 1 bis 10 der zehnklassigen polytechnischen Oberschule im Mathematikunterricht behandelt wird, in knapper übersichtlicher Form dargestellt.
Mit Hilfe dieses Buches ist es möglich, den im Unterricht behandelten Stoff zu wiederholen. Das wird besonders dann nötig sein, wenn der Lehrstoff zurückliegender Klassen nochmals durchgearbeitet werden soll.
Das Buch gliedert sich in die Kapitel A, B, C, D und E und weitergehend dann in Abschnitte, die durch Nummern angegeben werden.
In der äußeren oberen Ecke einer jeden Seite wird durch Zeichen der Art → A 2 bzw. A 2 ← auf den jeweils auf dieser Seite behandelten Abschnitt hingewiesen.
Des weiteren wurden in diesem Buch folgende Kurzzeichen und Symbole verwendet:

▶	Wichtige Sätze und Definitionen. Zur besseren Unterscheidung wurden hierbei die Wörter SATZ bzw. DEFINITION jeweils vor den Text gesetzt, und es wurden die Definitionen mit einem roten Raster unterlegt.
■	Beispiele
↗	„siehe“ - Hinweis auf ein anderes Stichwort
Ph i Üb	Physik in Übersichten (Titel-Nr. 02 09 05)
Ch i Üb	Chemie in Übersichten (Titel-Nr. 03 09 07)
Taf	Tafelwerk Mathematik – Physik – Chemie Klassen 7 bis 10 (Titel-Nr. 00 07 15)

Die Sätze wurden in den Fällen bewiesen, in denen der Lehrplan den Beweis vorschreibt. In allen anderen Fällen wurden keine Beweise aufgenommen.

Einige Grundbegriffe

A

$+$	plus (↗ S. 22)	$\bullet\bullet\bullet$	und so weiter, bis	$\triangle$	Dreieck (↗ 162)
$-$	minus (↗ S. 25)	$\%$	Prozent (↗ S. 85)	$\cong$	kongruent (↗ 151)
$\cdot$	mal (↗ S. 22)	∞	unendlich	$\measuredangle$	Winkel (↗ 134)
$:$	geteilt durch, zu (↗ S. 25)	$\mid$	teilt (↗ S. 26)	$\overset{\curvearrowleft}{\measuredangle}$	orientierter Winkel, auch $\measuredangle(\overrightarrow{h,k})$ oder $\measuredangle\overrightarrow{AMB}$ oder $\overset{\frown}{\alpha}$ (↗ 136)
$—$	durch (Bruchstrich) (↗ S. 30)	$\lvert z\rvert$	Betrag von z (↗ S. 43)		
$=$	gleich	$\in$	Element aus (↗ S. 15)	$\overline{AB}$	Strecke $\overline{AB}$ (↗ 131)
$\neq$	ungleich	$\notin$	nicht Element aus	$\overrightarrow{AB}$	orientierte Strecke von A nach B
$<$	kleiner als (↗ S. 24)	$\{a,\ldots\}$	Menge aus $a, \ldots$	f	Funktion (↗ 58)
$>$	größer als (↗ S· 24)	$\subseteq$	Teilmenge von	$\sqrt{\ }$	Wurzel aus
$\leqq$	kleiner, gleich (höchstens) (↗ S. 24)	$\subset$	echte Teilmenge von	$[a,b]$	geordnetes Paar a, b (↗ 56)
$\geqq$	größer, gleich (mindestens) (↗ S. 24)	$\cap$	geschnitten	$\langle a,b\rangle$	abgeschlossenes Intervall a, b (↗ 59)
$\overset{\equiv}{\text{Def}}$	bedeutet nach Definition	$\emptyset$	die leere Menge	$\langle a,b)$	halboffenes Intervall (↗ 59)
$\sim$	proportional, ähnlich	$\parallel$	parallel (↗ S. 128)	(a,b)	offenes Intervall (↗ 59)
$\approx$	angenähert, rund (↗ S. 53)	$\nparallel$	nicht parallel	$\log_a$	Logarithmus zur Basis a (↗ 105)
$\triangleq$	entspricht	$\perp$	senkrecht (↗ S. 141)	$^\circ\ '\ ''$	Grad, Minute, Sekunde (↗ 140)

A 1 Allgemeines

Aussagen

Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

Aussagen	wahr oder falsch	Hinweis
1 Die Stadt Dresden liegt an der Elbe	wahr	
2 Das chemische Element Schwefel ist ein Metall	falsch	↗ Ch i Ü, Seite 10, 77
3 Die natürliche Zahl 7 ist eine Primzahl	wahr	↗ Primzahlen, Seite 26
4 $5 = 6$	falsch	
5 **Es gibt eine** natürliche Zahl x, für die gilt: x ist gerade und x ist Primzahl	wahr	↗ Primzahlen, Seite 26
6 **Für jede** natürliche Zahl x gilt: Wenn x ungerade ist, so ist x Primzahl	falsch	↗ Primzahlen, Seite 26

In den Beispielen 5 und 6 treten Variablen im Zusammenhang mit „es gibt ein" bzw. „für jedes" auf. Häufig kommt es auch vor, daß diese Variablen in Gleichungen, Ungleichungen und sprachlichen Sätzen nicht im Zusammenhang mit „es gibt ein" bzw. „für jedes" enthalten sind.

a) $5x + 7 = 0{,}3$ b) $27 > x + \pi$
c) x ist kleinstes gemeinsames Vielfaches von y und z

↗ Variablen, Seite 65
↗ Gleichungen – Ungleichungen, Seite 65f.
↗ Kleinstes gemeinsames Vielfaches, Seite 29.

Ausdrücke wie in diesen Beispielen sind keine Aussagen, denn diese Ausdrücke sind weder *wahr* noch *falsch*. Aus Ausdrücken, die Variablen enthalten, ergeben sich jedoch Aussagen, wenn man für die Variablen (aus einem vorgegebenen Grundbereich) einsetzt oder wenn man „für jedes" oder „es gibt ein" vorsetzt.

$5x + 7 = 0{,}3$	$5 \cdot 3 + 7 = 0{,}3$	f
	$5 \cdot (-1{,}34) + 7 = 0{,}3$	w
	Es gibt eine natürliche Zahl x mit $5x + 7 = 0{,}3$	f
$27 > x + \pi$	$27 > 0{,}4 + \pi$	w
	$27 > 25 + \pi$	f
	Für jede natürliche Zahl x gilt $27 > x + \pi$	f
x ist k. g. V. von y und z	24 ist k. g. V. von 6 und 8	w
	48 ist k. g. V. von 6 und 8	f
	Für jede natürliche Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y und eine natürliche Zahl z, so daß x k. g. V. von y und z ist.	w

Sätze

Die wahren Aussagen in der Mathematik werden Sätze genannt. (Man beachte die unterschiedliche Bedeutung des Wortes „Satz" in der Mathematik und in der Sprachlehre!)
Jeder Satz (im mathematischen Sinne) muß bewiesen werden. In das Buch **„Mathematik in Übersichten" wurden aber nur in den Fällen die Beweise aufgenommen, in denen der Lehrplan die Behandlung der Beweise fordert.**

↗ Beweise, Seite 12

Sätze haben häufig die Form „Wenn ..., so ...". Nach dem Wort „wenn" werden eine oder mehrere Voraussetzungen angeführt. Das Wort „so" leitet die Behauptung ein.

■ ↗ Kreis und Gerade, Seite 196: **Wenn** *A der Berührungspunkt einer Tangente t an einen Kreis um M ist,* **so** *steht der Radius $\overline{AM}$ senkrecht auf t.*

■ ↗ Teilbarkeit von Summen, Seite 27: **Wenn** $a \mid b$ *und* $a \mid c$, **so** *gilt auch* $a \mid b + c$.

Im letzten Beispiel sind in dem Satz zwei Voraussetzungen enthalten, nämlich (1) $a \mid b$ und (2) $a \mid c$.

Oftmals muß man einen Satz in Gedanken umformulieren, um Voraussetzung und Behauptung zu erkennen.

■ ↗ Kongruenzsätze, Seite 169: *Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.* Also: **Wenn** *zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,* **so** *sind sie kongruent.*

Man erkennt die Voraussetzung: Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Im folgenden Falle wird eine Aussage über **alle** Dreiecke gemacht (Allaussage):

■ ↗ Innenwinkel eines Dreiecks, Seite 164: *In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.* Das heißt:
Für jedes Dreieck *ABC* gilt: **Wenn** α, β, γ die Innenwinkel des Dreiecks *ABC* sind, **so** beträgt die Summe dieser Winkel 180°.

↗ Beweis einer Allaussage, Seite 12

Umkehrung eines Satzes

Man erhält die Umkehrung eines Satzes, indem man in diesem Satz Voraussetzung und Behauptung vertauscht. Mitunter ist die Umkehrung eines **Satzes keine wahre Aussage, also kein Satz. Die Gültigkeit (oder Wahrheit) der Umkehrung eines Satzes muß ebenfalls bewiesen werden.**

■ ↗ Sätze über das Parallelogramm, Seite 184: **Wenn** *ein Viereck ein Parallelogramm ist,* **so** *sind die Gegenseiten (in diesem Viereck) jeweils gleich lang.*
Die Umkehrung dieses Satzes lautet:
Wenn *die Gegenseiten in einem Viereck jeweils gleich lang sind,* **so** *ist das Viereck ein Parallelogramm.*
Bei diesem Beispiel stellt die Umkehrung eine wahre Aussage dar.

Ein Satz und seine wahre Umkehrung können unter Verwendung von „... genau dann, wenn ...“ zusammengefaßt werden.

■ ↗ Sätze über das Parallelogramm, Seite 184: *Ein Viereck ist ein Parallelogramm* **genau dann, wenn** *jeweils die Gegenseiten gleich lang sind.*

↗ Beweis einer „genau dann, wenn“-Aussage, Seite 13

Von Sätzen mit zwei Voraussetzungen können auf verschiedene Weise neue Aussagen gebildet werden, die man auch als „Umkehrung“ bezeichnet. Im folgenden Fall haben wir jeweils eine der Voraussetzungen als Voraussetzung der Umkehrung beibehalten.

■ ↗ Stufenwinkel, Seite 159: (1) *Sind zwei Winkel Stufenwinkel* **und** (2) *sind die beiden geschnittenen Geraden zueinander parallel,* **so** *sind die beiden Winkel kongruent.*
1. Umkehrung (Die erste Voraussetzung wird beibehalten):
Sind zwei Winkel Stufenwinkel **und** sind die beiden Winkel kongruent, **so** *sind die beiden geschnittenen Geraden zueinander parallel.*

Diese Umkehrung stellt eine wahre Aussage dar.

2. Umkehrung (Die zweite Voraussetzung wird beibehalten):
Sind zwei Winkel kongruent **und** *(liegen diese beiden Winkel) an zueinander parallelen Geraden,* **so** *sind die beiden Winkel Stufenwinkel.*

Diese Umkehrung ist nicht wahr.

„Es gibt ein“, „es gibt höchstens ein“, „es gibt genau ein“

Folgende Formulierungen müssen sorgfältig unterschieden werden:

a) „Es gibt ein“ (stets im Sinne von „es gibt *mindestens* ein“; **Existenz**)
b) „Es gibt höchstens ein“ (bedeutet nicht, daß es eins geben *muß*; im Falle der Existenz liegt **Eindeutigkeit** vor)
c) „Es gibt genau ein“ (es gibt ein, aber auch nur ein; **Existenz** *und* **Eindeutigkeit**)

Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck. Es gibt höchstens ein rechtwinkliges Dreieck. Es gibt genau ein rechtwinkliges Dreieck.	w f f
Es gibt eine gerade Primzahl. Es gibt höchstens eine gerade Primzahl. Es gibt genau eine gerade Primzahl.	w w w
In jedem Dreieck gibt es einen rechten Winkel. In jedem Dreieck gibt es höchstens einen rechten Winkel. In jedem Dreieck gibt es genau einen rechten Winkel.	f w f

Die Benutzung des bestimmten Artikels ist nur dann gestattet, wenn nachgewiesen ist, daß es genau ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften gibt.

In der Gleichung $5 + x = 9$ ist $x = 4$ *die* Lösung.
In der Ungleichung $5 + x < 9$ ist $x = 3$ *eine* Lösung.

Logische Zusammensetzungen

Einzelne Aussagen und Ausdrücke mit Variablen können zusammengesetzt werden.

und	$3 < x$; $x < 7$	$3 < x$ **und** $x < 7$ (kürzer: $3 < x < 7$)
oder	n ist gerade; n ist ungerade	n ist gerade **oder** n ist ungerade (n ist gerade oder ungerade)
wenn, so	$6 \mid n$; $3 \mid n$	**Wenn** $6 \mid n$, **so** $3 \mid n$.
genau dann, wenn	Das Viereck *ABCD* ist ein Parallelogramm. Die Diagonalen des Vierecks *ABCD* halbieren einander.	Das Viereck *ABCD* ist ein Parallelogramm **genau dann, wenn** die Diagonalen des Vierecks *ABCD* einander halbieren.
nicht	$3 = 4$	**nicht** $3 = 4$ (kürzer $3 \neq 4$)

➡ A 1

Definitionen

Eine Definition ist eine Festlegung. Eine solche Festlegung erleichtert das weitere Arbeiten mit mathematischen Begriffen und Aussagen, z. B. das Führen von Beweisen. Als Festlegung ist in der Mathematik eine Definition **im Unterschied zu einer Aussage weder wahr noch falsch.**
Im vorliegenden Buch „Mathematik in Übersichten" wurden Definitionen und Sätze in der drucktechnischen Gestaltung deutlich voneinander abgehoben.

■ Beispiel für eine Definition (↗ Ordnung, Seite 23):

DEFINITION:
Die natürliche Zahl a heißt kleiner als die natürliche Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt, so daß gilt: $a + x = b$.

■ Beispiel für einen Satz (↗ Natürliche Zahlen und gebrochene Zahlen, Seite 38):

SATZ:
Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen.

Beweise

Die Wahrheit einer Aussage muß bewiesen werden. Der Beweis eines Satzes erfolgt in der Mathematik dadurch, daß man, von geeigneten wahren Aussagen (den Voraussetzungen) ausgehend, eventuell unter Berücksichtigung von Definitionen durch **logische Schlüsse** (z. B. Fallunterscheidung) **zur Behauptung gelangt.**

Beweis einer „Allaussage" (Beweis von „Für jedes ... gilt ...")

■ ↗ Innenwinkel eines Dreiecks, Seite 164: *In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.*
Der Beweis dieses Satzes kann nicht für alle Dreiecke einzeln geführt werden, da es unendlich viele Dreiecke gibt. Man wählt ein bestimmtes Dreieck beliebig aus und führt den Beweis für dieses einzelne Dreieck. Der Satz gilt aber nur dann als für *alle* Dreiecke bewiesen, wenn beim Beweis nur Eigenschaften benutzt wurden, die allen Dreiecken zukommen.

Widerlegung einer Allaussage

Die Behauptung: *Für jede natürliche Zahl x ist $x^2 + x + 11$ eine Primzahl* ist falsch.
Beweis:
Für $x = 0, \ldots, 9$ ergibt sich tatsächlich jedesmal eine Primzahl.

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0: & 0 + 0 + 11 = 11 \\ x = 1: & 1 + 1 + 11 = 13 \\ x = 2: & 4 + 2 + 11 = 17 \end{array}\right\} \text{ 11, 13, 17 sind Primzahlen}$$

Für $x = 10$ ergibt sich dagegen
$x^2 + x + 11 = 121 = 11 \cdot 11$,
also keine Primzahl.

Durch diese Angabe eines einzigen *Gegenbeispiels* ist die Behauptung widerlegt, d. h. die Aussage – *Es gibt eine natürliche Zahl x, für die $x^2 + x + 11$ keine Primzahl ist* – ist damit bewiesen.

Beweis einer „Wenn – so"-Aussage

Wenn eine natürliche Zahl n durch 4 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.
Voraussetzung: Eine natürliche Zahl n sei durch 4 teilbar.
Behauptung: Diese natürliche Zahl n ist auch durch 2 teilbar.
Beweis:
Gemäß Voraussetzung gilt $4 \mid n$. Nach Definition der Teilbarkeitsbeziehung gibt es also eine natürliche Zahl x mit $n = 4 \cdot x$:
$n = 2 \cdot 2 \cdot x$
Es gibt also auch eine natürliche Zahl mit $n = 2 \cdot y$, nämlich $y = 2 \cdot x$.
Also gilt $2 \mid n$.

↗ Teilbarkeitsbeziehung, Seite 26

Beweis einer „genau dann, wenn"-Aussage

Eine „Wenn, so"-Aussage und ihre Umkehrung können zu einer „genau dann, wenn"-Aussage zusammengefaßt werden.

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

↗ Sätze über das Parallelogramm, Seite 184: Ein Viereck ist ein Parallelogramm **genau dann, wenn** jeweils die Gegenseiten gleich lang sind.
Das heißt:
(1) **Wenn** ein Viereck ein Parallelogramm ist, **so** sind die Gegenseiten im Viereck jeweils gleich lang.
(2) **Wenn die Gegenseiten im Viereck jeweils gleich lang sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**
Für den Beweis einer „genau dann, wenn"-Aussage hat man beide „wenn, so"-Aussagen zu beweisen, aus denen sie zusammengesetzt ist.

Beweis durch Fallunterscheidung

Mitunter läßt sich eine Aussage nicht für alle Objekte, über die die Aussage getroffen wird, mit einem einheitlichen Verfahren beweisen. Dann teilt man die betreffenden Objekte (erschöpfend) in Klassen ein und beweist die Aussage für jeden der sich durch diese Einteilung ergebenden Fälle gesondert. So muß zum Beispiel beim Beweis des Sinussatzes die Menge aller Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige eingeteilt werden.

↗ Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken – Sinussatz, Seite 120

➡ A 2

Indirekte Beweise

Ein indirekter Beweis wird geführt, indem man die Verneinung der Behauptung als richtig annimmt und aus dieser Annahme einen Widerspruch herleitet.

SATZ:

Es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat die Zahl 8 ist.
Beweis:
Annahme: Es gibt eine natürliche Zahl mit $n^2 = 8$.
Wegen
$2^2 < 8 < 3^2$
muß für diese Zahl n gelten:
$2 < n < 3$ (Monotonie).
Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß es zwischen 2 und 3 keine natürliche Zahl gibt.

A 2 Grundbegriffe der Mengenlehre

Bilden von Mengen

Mengen werden gebildet, indem man aus einem zugrunde gelegten Bereich von Dingen, dem Grundbereich, nach bestimmten Gesichtspunkten Dinge auswählt und zu einer Gesamtheit zusammenfaßt.

Grundbereich	ausgewählte Dinge
a) alle Schüler einer bestimmten Schule	Mitglieder des Chors dieser Schule
b) alle Geraden einer Ebene	alle Geraden dieser Ebene, die eine vorgegebene Richtung haben
c) alle natürlichen Zahlen	alle natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind und zwischen 10 und 30 liegen

Eine Gesamtheit von aus dem Grundbereich ausgewählten Dingen nennt man **Menge**. Als **Variable für Mengen** benutzen wir große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z. B.: M; N; A; M_0; M_1; M_2.
Die Dinge, die dieser Gesamtheit angehören, nennt man **Elemente** der betreffenden Menge. Als **Variable für Elemente** benutzen wir kleine lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z. B.: x; y; a; b; x_0; x_1; x_2.

↗ Variablen, Seite 65

Angabe von Mengen

Man kann eine Menge angeben, indem man sämtliche Elemente dieser Menge angibt.

■ $M = \{12, 15; 18; 21; 24; 27\}$ bedeutet, daß die Menge M von den Zahlen 12, 15, 18, 21, 24 und 27 und nur von diesen Zahlen gebildet wird.

Um mitzuteilen, daß z. B. a Element der Menge M ist oder z. B. y nicht Element der Menge N ist, schreibt man:
$a \in M$ gelesen: „a ist Element von M" oder „a Element M"
$y \notin N$ gelesen: „y ist nicht Element von N" oder „y nicht Element N".

Im allgemeinen werden Mengen dadurch gebildet, daß man einen Ausdruck mit einer Variablen angibt, für die man aus dem betreffenden Grundbereich einsetzen kann.
Zur Menge gehören dann genau diejenigen Dinge (Objekte), für die der Ausdruck bei der Einsetzung wahr wird. Das können endlich viele oder unendlich viele Objekte sein. Im ersten Fall spricht man von *endlichen*, im zweiten Fall von *unendlichen Mengen*.

■ a) *Grundbereich*: Menge der natürlichen Zahlen
Vorschrift: $x \in A$ genau dann, wenn $x + x = x$.
Die Menge A besitzt als einziges Element die Null, $A = \{0\}$; denn $0 + 0 = 0$.
Für jede andere natürliche Zahl x gilt:
$x + x = 2x \neq x$.

■ b) *Grundbereich*: Menge der natürlichen Zahlen
Vorschrift: $x \in B$ genau dann, wenn $x \cdot x = x$.
$B = \{0; 1\}$. B ist eine Zweiermenge.

■ c) *Grundbereich*: Menge der natürlichen Zahlen
Vorschrift: $x \in C$ genau dann, wenn $x \neq 7$.
C ist die Menge der natürlichen Zahlen außer der Zahl 7.

Die Menge, der kein Element angehört, wird die **leere Menge** genannt, in Zeichen $\emptyset$.

■ *Grundbereich*: Menge der ganzen Zahlen
Vorschrift: $x \in D$ genau dann, wenn $x + 1 = x$.
Die Gleichung $x + 1 = x$ wird durch keine Einsetzung zu einer wahren Aussage; D enthält also kein Element.
Es gilt also: $D = \emptyset$.

Teilmengen

Sind in einem Fall alle Elemente der Menge M auch Elemente der Menge N, so nennt man M eine Teilmenge von N, in Zeichen $M \subseteq N$ (gelesen: M ist Teilmenge von N).

■ Die Menge M_1 der durch 4 teilbaren Zahlen ist Teilmenge der Menge M_2 der geraden Zahlen: $M_1 = \{0; 4; 8; 12; 16; \ldots\}$; $M_2 = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots\}$.
Wir schreiben $M_1 \subseteq M_2$.

➡ A 2

■ Die Menge

$M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$

ist eine Teilmenge der Menge

$M_2 = \{1; 2; 3; 4\}$;

denn jedes Element der Menge M_1 ist auch Element der Menge M_2. Wir schreiben:

$M_1 \subseteq M_2$.

Die Beispiele unterscheiden sich dadurch, daß im ersten Fall die Menge M_2 noch Elemente enthält, die nicht Elemente der Menge M_1 sind. In einem solchen Fall spricht man von einer **echten Teilmenge** und schreibt:

$M_1 \subset M_2$.

In jedem Fall, in dem $A \subset B$ gilt, gilt auch $A \subseteq B$. Bestehen wie im zweiten Beispiel M_1 und M_2 aus genau denselben Elementen, so sind M_1 und M_2 gleich, wir schreiben:

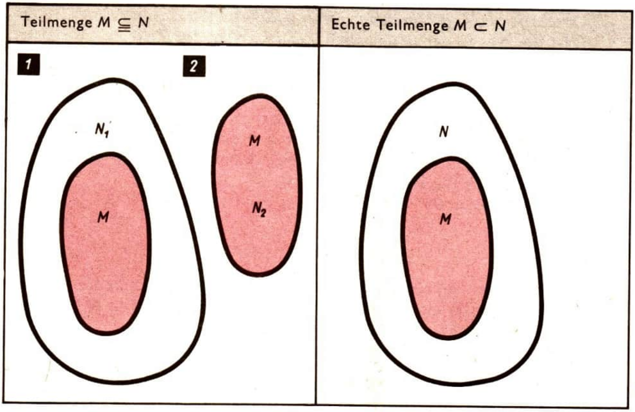
$M_1 = M_2$.

■ Es sei N die Menge aller Bücher einer Schülerbibliothek und M die Menge aller Mathematikbücher dieser Bibliothek. Es gilt dann: Die Menge M aller Mathematikbücher dieser Schülerbibliothek ist eine echte Teilmenge der Menge N aller Bücher dieser Bibliothek: $M \subset N$.

Entsprechend der obigen Erklärung der Teilmengenbeziehung gilt selbstverständlich auch $M \subseteq N$.

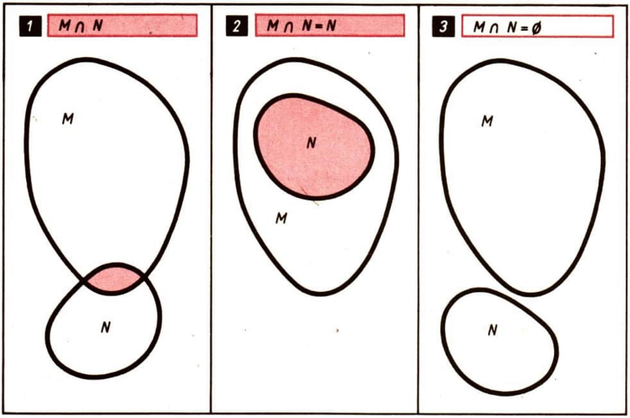
Veranschaulichung der Teilmengenbeziehung

Zur Veranschaulichung von Mengen werden häufig Punktmengen einer Ebene verwendet, die durch geschlossene Kurven begrenzt sind.



Durchschnitt von Mengen

Gegeben seien die Mengen M und N. Die Menge D heißt Durchschnitt der Mengen M und N, wenn für alle Elemente x von D gilt: $x \in M$ und $x \in N$. Man schreibt: $D = M \cap N$.	Es sei M die Menge der geraden Zahlen, N die Menge der Primzahlen. Es ist der Durchschnitt der Mengen M und N zu bilden. $M = \{0; 2; 4; 6; \ldots\}$ $N = \{2; 3; 5; 7; \ldots\}$ $M \cap N = \{2\}$



Durch die Bildung des Durchschnitts wird den Mengen M und N eine Menge $M \cap N$ zugeordnet, ähnlich wie durch die Addition von Zahlen a und b deren Summe $a + b$ zugeordnet wird. Die Addition nennt man eine Rechenoperation; entsprechend heißt die Durchschnittsbildung eine Operation mit Mengen.

Gegebene Mengen	Durchschnitt
a) M ist die Menge aller Rhomben. N ist die Menge aller Rechtecke.	$M \cap N$ ist die Menge aller Quadrate. (Diagramm: Fall 1)
b) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die gilt: $n < 15$. N ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die gilt: $n > 8$.	$M \cap N = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ (Diagramm: Fall 1)

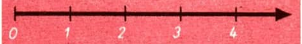
➡ A 2

Gegebene Mengen	Durchschnitt
c) M ist die Menge aller Vierecke. N ist die Menge aller Rhomben.	$M \cap N = N$ (Diagramm: Fall 2)
d) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen. N ist die Menge aller Quadratzahlen.	$M \cap N = N$ (Diagramm: Fall 2)
e) M ist die Menge aller Vierecke. N ist die Menge aller Fünfecke.	$M \cap N = \varnothing$ Es gibt keine geometrische Figur, die sowohl Viereck als auch Fünfeck ist. (Diagramm: Fall 3)
f) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die gilt: $n > 15$. N ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die gilt: $n < 8$.	$M \cap N = \varnothing$ (Diagramm: Fall 3)

Zahlenbereiche B

Natürliche Zahlen N (↗ S. 20)

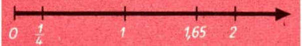
Eine natürliche Zahl kann durch unendlich viele Mengen veranschaulicht werden. Eine natürliche Zahl gibt die Anzahl der Elemente derjenigen Mengen an, durch die sie veranschaulicht werden kann. (Lediglich die Null kann nur durch eine Menge, die leere Menge, „veranschaulicht" werden).



Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

Gebrochene Zahlen Q_+ (↗ S. 30)

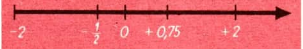
Eine gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen. Für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in N$; $c, d \neq 0$) ein und derselben Klasse gilt:
$a \cdot d = b \cdot c$



Addition, Multiplikation und Division (außer durch 0) sind uneingeschränkt ausführbar.

Rationale Zahlen Q (↗ S. 41)

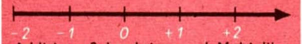
Eine rationale Zahl ist eine Klasse von Differenzen gebrochener Zahlen. Für zwei Differenzen $(a - b)$ und $(c - d)$ ($a, b, c, d \in Q_+$) ein und derselben Klasse gilt:
$a + d = b + c$.



Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0) sind uneingeschränkt ausführbar.

Ganze Zahlen Z (↗ S. 48)

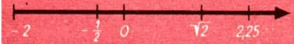
Die rationalen Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, ... bilden den Bereich der ganzen Zahlen.



Addition, Subtraktion und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

Reelle Zahlen R (↗ S. 48)

Eine reelle Zahl ist ein Dezimalbruch ohne Neunerperiode.



Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0) sind uneingeschränkt ausführbar; darüber hinaus z. B. auch das Wurzelziehen, wenn der Radikand nicht negativ ist.

B 1 Natürliche Zahlen

Nachfolger, Vorgänger

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... bezeichnet man als natürliche Zahlen.
Die kleinste natürliche Zahl ist 0.
Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger. Die natürliche Zahl a hat als Nachfolger die natürliche Zahl $a + 1$.
Jede natürliche Zahl außer 0 hat genau einen Vorgänger. Die natürliche Zahl a ($a \neq 0$) hat als Vorgänger die natürliche Zahl $a - 1$. Es gibt keine größte natürliche Zahl.

↗ Nachfolgerbeziehung, Seite 24

Zehnerpotenzen

Die Zahlen 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ... heißen Zehnerpotenzen. Das Zehnfache einer Zehnerpotenz ist gleich der nächstgrößeren Zehnerpotenz.
In Potenzschreibweise schreibt man die Zehnerpotenzen folgendermaßen:
$1 = 10^0$; $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$ usw.

↗ Die Potenz a^k, Seite 95

Grundziffer, Ziffer

Eine Ziffer ist ein Zeichen für eine natürliche Zahl.

■ „0“; „5“; „12“; „5058“ sind Ziffern.

Im dekadischen Positionssystem werden die natürlichen Zahlen mit Hilfe von zehn Grundziffern dargestellt:
„0“, „1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“, „7“, „8“, „9“.
Diese zehn Zeichen sind also sowohl Ziffern als auch Grundziffern im dekadischen Positionssystem.

Dekadisches Positionssystem

Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen darstellen. Dabei treten als Faktoren der Zehnerpotenzen nur die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 auf.

■ Die Zahl Fünfhundertneununddreißig kann dargestellt werden durch die Summe $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$. Bei Verwendung einer Tabelle, in der den Spalten Zehnerpotenzen zugeordnet sind, erhält man folgende Darstellung:

10^3	10^2	10^1	10^0
1 000	100	10	1
	5	3	9

ohne Tabelle: 539

Läßt man nun den Rahmen der Tabelle weg, so erkennt man:
Jeder Grundziffer in der Ziffer einer natürlichen Zahl ist eine Zehnerpotenz als Stellenwert zugeordnet.
Der Stellenwert einer jeden Grundziffer ist stets das Zehnfache des Stellenwertes der rechts von ihr stehenden Grundziffer.

↗ Multiplikation – „Faktoren", Seite 22

10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
					1 000	100	10	1
						5	3	9
			2	7	0	4	0	6

$539 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
$270406 = 2 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

Zweiersystem

Jede natürliche Zahl läßt sich auch als Summe von Vielfachen von Zweierpotenzen darstellen. Wir betrachten also die Potenzen $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ usw.
Dabei treten als Faktoren der Zweierpotenzen nur die Zahlen 0 und 1 auf, da das Zweifache jeder Zweierpotenz bereits gleich der nächsthöheren Zweierpotenz ist.

■ Die Zahl Neunundfünfzig kann dargestellt werden durch die Summe
$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.
Bei Verwendung einer Tabelle, in der den Spalten Zweierpotenzen zugeordnet sind, erhält man folgende Darstellung:

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	16	8	4	2	1
1	1	1	0	1	1

ohne Tabelle: 111011

Läßt man den Rahmen der Tabelle weg, so erkennt man:
Jeder Grundziffer ist bei der Darstellung einer natürlichen Zahl im Zweiersystem eine Zweierpotenz als Stellenwert zugeordnet.
Um Verwechslungen mit dem dekadischen Positionssystem zu vermeiden, benutzt man im Zweiersystem als Ziffern zuweilen die Zeichen „0" und „L" statt „0" und „1". In diesem Fall wird die Zahl aus dem obigen Beispiel durch das Zeichen „LLLOLL" dargestellt.

LOL bzw. 101 $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5$
LOOL bzw. 1001 $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 1 = 9$
LOLO bzw. 1010 $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$

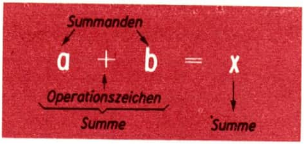
➡ B 1

Addition natürlicher Zahlen

Für je zwei beliebige natürliche Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl x, die die **Summe** der Zahlen a und b ist:

$$a + b = x.$$

Die Addition ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.



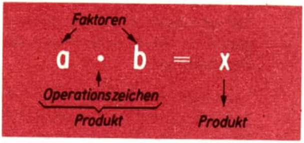
Eigenschaften der Addition
Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt:
1 $a + b = b + a$ (Kommutativität),
2 $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität). Die Assoziativität bedeutet: Sind drei Zahlen zu addieren, so sind zwei Additionen nacheinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Additionen ist dabei beliebig. Deshalb schreibt man auch nur $a + b + c$. Wegen der Kommutativität und Assoziativität kann man bei mehreren Additionen die Summanden beliebig vertauschen und zusammenfassen.
3 $a + 0 = 0 + a = a$

Multiplikation natürlicher Zahlen

Für je zwei beliebige natürliche Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl x, die das **Produkt** der Zahlen a und b ist:

$$a \cdot b = x.$$

Die Multiplikation ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.



Eigenschaften der Multiplikation
Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt:
1 $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität),
2 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität).

Eigenschaften der Multiplikation	
	Die Assoziativität bedeutet: Sind drei Zahlen zu multiplizieren, so sind zwei Multiplikationen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Multiplikationen ist dabei beliebig. Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation dürfen auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese beliebig vertauscht und zusammengefaßt werden.
3	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivität) Soll eine Summe mit einem Faktor multipliziert werden, so kann man jeden Summanden mit dem Faktor multiplizieren. Dann sind die erhaltenen Teilprodukte zu addieren.
■	$3 \cdot 17 = 3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$
4	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ **5** $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Wenn in einem Produkt wenigstens ein Faktor 0 ist, so ist das Produkt gleich 0.
Umgekehrt ist ein Produkt auch nur dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.
Zusammenfassend gilt:

▶ **SATZ:**
Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist.

Dieser Satz gilt auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren.

↗ „Es gibt ein“ – „mindestens“ –, Seite 11

Ordnung natürlicher Zahlen

▶ **DEFINITION: (Kleiner-Beziehung) Die natürliche Zahl a heißt kleiner als die natürliche Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt, so daß gilt: $a + x = b$.**	Schreibweise: $a < b$, gelesen: „a ist kleiner als b“, oder auch $b > a$, gelesen: „b ist größer als a“. Kürzer: „a kleiner b“ bzw. „b größer a“.

■ a) Es gilt: $3 < 5$; denn $3 + 2 = 5$ und $2 \neq 0$.
b) Es gilt: $99 < 100$; denn $99 + 1 = 100$ und $1 \neq 0$.
c) Es gilt nicht: $17 < 15$; denn es gibt keine natürliche Zahl $x \neq 0$, für die gilt: $17 + x = 15$.
d) Es gilt nicht: $415 < 415$; denn es gibt keine natürliche Zahl $x \neq 0$, für die gilt: $415 + x = 415$.

$a \leqq b$
(gelesen: „a kleiner gleich b) bedeutet,
daß entweder $a < b$ oder $a = b$ gilt, die Zahl a also nicht größer als b ist.
$a \geqq b$
(gelesen: „a größer oder gleich b“) bedeutet,
daß entweder $a > b$ oder $a = b$ gilt, die Zahl a also nicht kleiner als b ist.

a) Der Grundbereich sei N, und es gelte: $x \in M$ genau dann, wenn $x \leqq 5$.
$M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
b) Der Grundbereich sei N, und es gelte: $x \in M$ genau dann, wenn $x < 5$.
$M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

↗ Mengensymbole, Seite 7

↗ Variablen – Terme, Seite 65 (Variablengrundbereich)

Der Bereich der natürlichen Zahlen ist durch die Kleiner-Beziehung geordnet. Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt genau einer der Fälle
$a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Nachfolgerbeziehung

Die natürliche Zahl $a + 1$ heißt der Nachfolger der natürlichen Zahl a. Für jede natürliche Zahl a und ihren Nachfolger $a + 1$ gilt $a < a + 1$. Das heißt, jede natürliche Zahl ist kleiner als ihr Nachfolger.
Die Zahl 0 ist als kleinste natürliche Zahl nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl.
Durch die Nachfolgerbeziehung sind die natürlichen Zahlen zu einer **Folge** angeordnet.

↗ Vorgänger, Nachfolger, Seite 20

Zahlenstrahl

Eine Möglichkeit, die Ordnung der natürlichen Zahlen zu veranschaulichen, ist die Zuordnung der Zahlen zu Punkten eines Strahls. Dabei wird dem Anfangspunkt des Strahls die Zahl 0 und einem beliebigen anderen Punkt die Zahl 1 zugeordnet. Den im gleichen Abstand folgenden Punkten des Strahls werden die weiteren Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge zugeordnet. Ein Strahl, dem die natürlichen Zahlen auf diese Weise zugeordnet sind, heißt Zahlenstrahl.

↗ Abbildung, Seite 57

Subtraktion natürlicher Zahlen

Die Subtraktion natürlicher Zahlen ist die Umkehrung der Addition natürlicher Zahlen, d. h., zu gegebener Summe und zu einem gegebenen Summanden ist der andere Summand zu finden:

$b + x = a$
anders geschrieben:
$x = a - b$

$$\underbrace{\overset{\text{Minuend}}{a} \underset{\text{Operationszeichen}}{-} \overset{\text{Subtrahend}}{b}}_{\text{Differenz}} = \underset{\text{Differenz}}{x}$$

Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner ist als der Minuend oder wenn der Subtrahend gleich dem Minuenden ist.

Eigenschaften der Subtraktion

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt:

1 $a - a = 0$; $\quad a - 0 = a$.

2 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, falls die Subtraktion $b - c$ ausführbar ist.

Division natürlicher Zahlen

Die Division natürlicher Zahlen ist die Umkehrung der Multiplikation natürlicher Zahlen, d. h., zu gegebenem Produkt und zu einem gegebenen von Null verschiedenen Faktor ist der andere Faktor zu finden:

$b \cdot x = a \quad (b \neq 0)$
anders geschrieben:
$x = a : b \quad (b \neq 0)$

$$\underbrace{\overset{\text{Dividend}}{a} \underset{\text{Operationszeichen}}{:} \overset{\text{Divisor}}{b}}_{\text{Quotient}} = \underset{\text{Quotient}}{x} \quad (b \neq 0)$$

Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur ausführbar, wenn der Dividend Vielfaches des Divisors ist.
Die Division durch Null ist in allen Zahlenbereichen *grundsätzlich nicht* ausführbar, da in solchen Fällen der Quotient nicht existiert oder nicht eindeutig bestimmt wäre, die Rechenoperation also kein eindeutiges Resultat hätte.

a) $0 \cdot x = 15$
$x = 15 : 0$
Eine solche natürliche Zahl x gibt es nicht.

b) $0 \cdot x = 0$
$x = 0 : 0$
Für alle natürlichen Zahlen x gilt $0 \cdot x = 0$.

B 1

Eigenschaften der Division

1 Für jede natürliche Zahl a gilt $a : 1 = a$.

2 Für jede natürliche Zahl a **außer für $a = 0$** gilt $a : a = 1$.

3 Für jede natürliche Zahl a **außer für $a = 0$** gilt $0 : a = 0$.

Teilbarkeitsbeziehung

DEFINITION
Die natürliche Zahl a heißt Teiler der natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt: $a \cdot x = b$.

Schreibweise:
$a \mid b$.
Gelesen:
„a teilt b" oder
„a ist Teiler von b".

a) Es gilt $4 \mid 12$; denn es ist $4 \; 3 = 12$.
Wenn a Teiler von b ist, so nennt man b **Vielfaches** von a. Auch das 1-fache und das 0-fache jeder natürlichen Zahl a heißt Vielfaches von a.

Für jede natürliche Zahl a gilt:
(1) $a \mid a$ — $4 \mid 4$, denn $4 \cdot 1 = 4$,
(2) $a \mid 0$ — $2 \mid 0$, denn $2 \cdot 0 = 0$,
(3) $1 \mid a$ — $1 \mid 4$, denn $1 \cdot 4 = 4$.

Gerade Zahlen, ungerade Zahlen

DEFINITION:
Alle natürlichen Zahlen, die den Teiler 2 besitzen, heißen gerade Zahlen.
Alle anderen natürlichen Zahlen heißen ungerade Zahlen.
Die Zahl 0 ist eine gerade Zahl, denn es gilt $2 \cdot 0 = 0$.

Eine gerade Zahl b läßt sich stets in der Form $b = 2n$ darstellen.
Eine ungerade Zahl b läßt sich stets in der Form $b = 2n + 1$ darstellen.
Dabei ist n eine natürliche Zahl.

Primzahlen

DEFINITION:
Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.

Die Zahl 2 ist die einzige gerade Primzahl. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

↗ Primzahltabelle, Taf, Seite 18

Teilbarkeit von Summen

> **SATZ: (Teilbarkeit einer Summe $b + c$)**
> **Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b + c$.**

↗ Teilbarkeitsbeziehung, Seite 26

Es gilt $13 \mid 208$.
Begründung: $13 \mid 117$ und $13 \mid 91$, also auch $13 \mid 117 + 91$, d. h. $13 \mid 208$.

Die Umkehrung des Satzes über die Teilbarkeit einer Summe gilt nicht.
Die Umkehrung lautet:
Wenn $a \mid b + c$, so $a \mid b$ **und** $a \mid c$.
Das folgende Gegenbeispiel zeigt, daß dies nicht gilt:

$a = 7$, $b = 39$, $c = 3$
Es gilt $a \mid b + c$, nämlich $7 \mid 39 + 3$, d. h. $7 \mid 42$.
Es gilt aber weder $a \mid b$ noch $a \mid c$.

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

Teilbarkeit von Produkten

> **SATZ: (Teilbarkeit eines Produkts $b \cdot c$)**
> **Wenn $a \mid b$ oder $a \mid c$, so $a \mid b \cdot c$.**

Das bedeutet: Wenn eine natürliche Zahl a Teiler von mindestens einem Faktor eines Produktes ist, so teilt a das ganze Produkt.

$7 \mid 8400$, denn $8400 = 84 \cdot 100$ und $7 \mid 84$

Die Umkehrung des Satzes über die Teilbarkeit eines Produkts gilt nicht.
Die Umkehrung lautet:
Wenn $a \mid b \cdot c$, so $a \mid b$ **oder** $a \mid c$.
Das folgende Beispiel zeigt, daß dieser Satz nicht gilt:

$a = 14$, $b = 16$, $c = 21$
Es gilt $a \mid b \cdot c$, nämlich $14 \mid 16 \cdot 21$, d. h. $14 \mid 336$.
Es gilt aber weder $a \mid b$ noch $a \mid c$.

Teilbarkeitsregeln

Mit Hilfe der folgenden Sätze über die Teilbarkeit kann man schnell feststellen, ob eine gegebene Zahl durch 2, 3, 4, 5, 8, 9 oder 10 teilbar ist, ohne daß man dividieren muß.

10	Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Ziffer mit „0“ endet.
2	Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Grundziffer eine durch 2 teilbare Zahl darstellt.

➡ B 1

4	**Eine mindestens zweistellige Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen.**
8	**Eine mindestens dreistellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen.**
5	Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Ziffer mit „0" oder „5" endet.
9	Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
3	Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Primfaktorenzerlegung

Wird eine Zahl in Faktoren zerlegt, die sämtlich Primzahlen sind, so nennt man eine solche Zerlegung Primfaktorenzerlegung.

■

$$\begin{aligned}
17640 &= 2 \cdot 8820 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 4410 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2205 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 735 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 245 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49 \\
17640 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7
\end{aligned}$$

Wir schreiben kürzer:

$$17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Jede natürliche Zahl außer 0 und 1 läßt sich in Primfaktoren zerlegen. Dabei wird im Falle einer Primzahl diese Zahl selbst als Primfaktorenzerlegung aufgefaßt.
Wenn man eine bestimmte Reihenfolge der Faktoren (z. B. der Größe nach) festlegt, so kann man sogar sagen:
Jede natürliche Zahl außer 0 und 1 läßt sich *auf genau eine Art* in Primfaktoren zerlegen.
Die Zahlen 0 und 1 können nicht in Primfaktoren zerlegt werden; denn 2 ist die kleinste Primzahl. Würde man die 1 zu den Primzahlen hinzunehmen, so wäre die Primfaktorenzerlegung nicht eindeutig.

So wären zum Beispiel:
$1 \cdot 2^2 \cdot 5$ und $1^2 \cdot 2^2 \cdot 5$
dann zwei *verschiedene* Primfaktorenzerlegungen der Zahl 20.

↗ Primzahlen, Seite 26

↗ Primzahltabelle, Taf, Seite 18

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (k. g. V.)

Eine Zahl, die Vielfaches mehrerer natürlicher Zahlen ist, heißt *gemeinsames Vielfaches* dieser Zahlen.
Zu gegebenen Zahlen gibt es unendlich viele gemeinsame Vielfache.

↗ Teilbarkeitsbeziehung, Seite 26 (Vielfaches)

Vielfache von 12	12 24 36	48	60 72 84	96	...
Vielfache von 16	16 32	48	64 80	96	...
Vielfache von 24	24	48	72	96	...
Gemeinsame Vielfache		48		96, 144, 192 ...	

DEFINITION:
Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.) gegebener natürlicher Zahlen ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die durch alle gegebenen Zahlen teilbar ist.

Bei dieser Definition wurde die Null ausgeschlossen, da sie Vielfaches (das 0-fache) einer jeden Zahl ist. Würden wir die Zahl Null nämlich nicht ausschließen, so wäre das k. g. V. beliebiger Zahlen stets 0.
Zur Bestimmung des k. g. V. kann die Primfaktorenzerlegung verwendet werden.

Das k. g. V. von 24, 28 und 49 ist zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 28 &= 2^2 \cdot \quad 7 \\ 49 &= \qquad 7^2 \\ \hline \text{k. g. V.: } & 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 = 1176 \end{aligned}$$

Zur Berechnung des k. g. V. wählt man aus den Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen die jeweils höchste Potenz der auftretenden Primfaktoren aus. Das k. g. V. ist das Produkt der so ausgewählten Potenzen.

↗ Die Potenz a^k, Seite 95

Gemeinsamer Teiler

Eine Zahl, die Teiler mehrerer natürlicher Zahlen ist, heißt gemeinsamer Teiler dieser Zahlen.

Teiler von 28	1	2	4	7 14	28
Teiler von 42	1	2	3 6	7 14	21 42
Gemeinsame Teiler		2		7 14	

➡ B 2

Der **größte gemeinsame Teiler** gegebener Zahlen ist die größte Zahl, die alle gegebenen Zahlen teilt.
Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen **zueinander teilerfremd**.
Da die Zahl 1 Teiler einer jeden Zahl ist, ist sie auch stets gemeinsamer Teiler beliebig gegebener Zahlen. Bei der Aufzählung gemeinsamer Teiler wird sie deshalb nicht aufgeführt.

B2 Gebrochene Zahlen

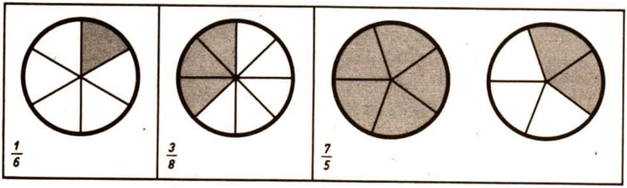
Bruch

DEFINITION:
Ein in der Form „$\frac{a}{b}$" geschriebenes Paar natürlicher Zahlen a und b ($b \neq 0$) heißt (gemeiner) Bruch.

↗ Geordnetes Paar, Seite 56

↗ Natürliche Zahlen, Seite 20

Der Nenner eines Bruches gibt an, in wieviel gleiche Teile ein Ganzes geteilt wurde. Der Zähler gibt an, wieviel solcher Teile durch den Bruch angegeben sind.



DEFINITION:
$\frac{a}{b}$ heißt echter Bruch, wenn $a < b$.
$\frac{a}{b}$ heißt unechter Bruch, wenn $a > b$ oder $a = b$.

Echte Brüche: $\frac{3}{4}, \frac{0}{5}, \frac{1}{2}$

Unechte Brüche: $\frac{5}{2}, \frac{3}{3}, \frac{8}{7}$

Kürzen, Erweitern

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. (Die hierin enthaltene Möglichkeit des Kürzens durch 1 wird beim Rechnen mit Brüchen nicht benutzt.) ↗ Gemeinsamer Teiler, Seite 29	■ $\frac{105}{140} = \frac{3}{4}$ (gekürzt durch 35)
Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben von 0 verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert. Einen Bruch kann man stets erweitern.	■ $\frac{3}{4}$ soll mit 35 erweitert werden $\frac{3 \cdot 35}{4 \cdot 35} = \frac{105}{140}$

Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gehen genau dann durch Kürzen oder durch Erweitern auseinander hervor, wenn gilt:

$$\boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

Gebrochene Zahlen

▶ **DEFINITION:**
Alle Brüche, die jeweils durch Kürzen oder durch Erweitern auseinander hervorgehen, bilden eine Klasse. Jede solche Klasse heißt gebrochene Zahl.

Häufig wird zur Angabe einer gebrochenen Zahl derjenige Bruch benutzt, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Sprechweise: „Die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$".

■

$\frac{8}{16}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{1}{2}$, ...	Diese Brüche gehören ein und derselben Klasse an, denn $\frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{64}{28}$, $\frac{160}{70}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{32}{14}$, $\frac{80}{35}$, $\frac{48}{21}$, $\frac{112}{49}$, ...	Diese Brüche gehören ein und derselben Klasse an, denn $\frac{64}{28} = \frac{160}{70} = \frac{16}{7} = \frac{32}{14} = \frac{80}{35}$	$\frac{16}{7}$
$\frac{10}{5}$, $\frac{50}{25}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{30}{15}$, $\frac{36}{18}$, $\frac{18}{9}$, $\frac{100}{50}$, ...	Diese Brüche gehören ein und derselben Klasse an, denn $\frac{10}{5} = \frac{50}{25} = \frac{2}{1} = \frac{30}{15} = \frac{36}{18} = \frac{18}{9}$	$\frac{2}{1}$

➡ B 2

Einen Bruch schreibt man mitunter als „gemischte Zahl“.

■ $5\frac{2}{3}$ bedeutet $5 + \frac{2}{3}$. Es gilt also:

$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$; kurz: $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$.

Darstellung der gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl

Die gebrochenen Zahlen können Punkten eines Strahls zugeordnet werden.

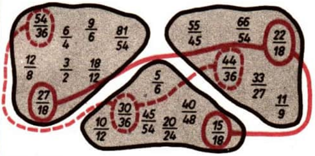
↗ Zahlenstrahl, Seite 24

Von zwei Punkten eines Zahlenstrahls, die verschiedenen gebrochenen Zahlen zugeordnet sind, liegt derjenige weiter links, der der kleineren der beiden Zahlen zugeordnet ist. Man sagt kürzer: Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt die kleinere auf dem Zahlenstrahl links von der größeren.

Gleichnamige Brüche

Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig, andernfalls heißen sie ungleichnamig.
Gegebene gebrochene Zahlen lassen sich stets durch gleichnamige Brüche darstellen, indem man zweckmäßig erweitert.

■

Gegeben	Gleichnamige Darstellungen	Veranschaulichung
$\frac{3}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{9}$	a) $\frac{27}{18}$; $\frac{15}{18}$; $\frac{22}{18}$ b) $\frac{54}{36}$; $\frac{30}{36}$; $\frac{44}{36}$ c) $\frac{81}{54}$; $\frac{45}{54}$; $\frac{66}{54}$	

Hauptnenner

▶ **DEFINITION:**
Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt der Hauptnenner (HN) dieser Brüche.

Um Brüche gleichnamig zu machen, bringt man sie zweckmäßig auf den Hauptnenner, damit die Zähler möglichst klein bleiben.

Hierfür gibt es folgende Methode:

Gegebene Brüche:	Erweiterungsfaktoren:	
$\frac{7}{168}$	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$	15
$\frac{9}{20}$	$20 = 2^2 \cdot 5$	126
$\frac{23}{126}$	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	20
	HN: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$	

$$\frac{7}{168} = \frac{15 \cdot 7}{15 \cdot 168} = \frac{105}{2520}; \quad \frac{9}{20} = \frac{126 \cdot 9}{126 \cdot 20} = \frac{1134}{2520}; \quad \frac{23}{126} = \frac{20 \cdot 23}{20 \cdot 126} = \frac{460}{2520}$$

Ordnung der gebrochenen Zahlen

DEFINITION (der Ordnungsrelation):	Schreibweise:
Die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ heißt kleiner als die gebrochene Zahl $\frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d < b \cdot c$ gilt.	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Für zwei gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt genau einer der drei Fälle:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

$\frac{3}{5}; \frac{5}{7}$	Es gilt $3 \cdot 7 < 5 \cdot 5$, also folgt $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.
$\frac{8}{11}; \frac{16}{23}$	Es gilt $8 \cdot 23 > 11 \cdot 16$, also folgt $\frac{8}{11} > \frac{16}{23}$.

Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit gleichem Nenner oder gleichem Zähler dargestellt sind, lassen sich besonders leicht vergleichen.

(1) Gleiche Nenner	(2) Gleiche Zähler
$\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ genau dann, wenn $a < c$.	$\frac{a}{b} < \frac{a}{d}$ genau dann, wenn $b > d$ und $a \neq 0$.
$\frac{3}{17}; \frac{5}{17}$ Aus $3 < 5$ folgt $\frac{3}{17} < \frac{5}{17}$.	$\frac{7}{9}; \frac{7}{8}$ Aus $9 > 8$ folgt $\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$.

B 2

Begründung für (1):

$\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ genau dann, wenn $a \cdot b < c \cdot b$ (gemäß Definition der Ordnungsrelation)

$a \cdot b < c \cdot b$ genau dann, wenn $a < c$ (gemäß Monotonie der Multiplikation)

Begründung für (2):

Es sei $a \neq 0$.

$\frac{a}{b} < \frac{a}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < a \cdot b$

$a \cdot d < a \cdot b$ genau dann, wenn $d < b$ bzw. $b > d$.

Dichtheit

Die gebrochenen Zahlen liegen überall dicht. Das bedeutet:
Keine gebrochene Zahl hat einen Nachfolger bzw. zwischen zwei gebrochenen Zahlen liegen stets beliebig viele andere.

■ Die Zahl $\frac{3}{10}$ hat keinen Nachfolger. So kann etwa $\frac{4}{10}$ nicht Nachfolger sein, denn die Zahl $\frac{7}{20}$ liegt zwischen beiden:

$\frac{3}{10} < \frac{7}{20} < \frac{4}{10}$.

Aber auch $\frac{7}{20}$ ist nicht Nachfolger von $\frac{3}{10}$, denn die Zahl $\frac{13}{40}$ liegt zwischen beiden:

$\frac{3}{10} < \frac{13}{40} < \frac{7}{20}$.

Auf diese Weise kann man für jede beliebige gebrochene Zahl, die größer als $\frac{3}{10}$ ist, nachweisen, daß sie nicht Nachfolger von $\frac{3}{10}$ ist.

↗ Nachfolger, Seite 20

Im Bereich der natürlichen Zahlen gilt *nicht*, daß zwischen zwei natürlichen Zahlen beliebig viele andere liegen. So liegt z. B. zwischen 3 und 4 überhaupt keine natürliche Zahl.

Reziprokes

▶ **DEFINITION:**

Ist $\frac{a}{b}$ eine von Null verschiedene gebrochene Zahl, so heißt die gebrochene Zahl $\frac{b}{a}$, das Reziproke der gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$.

■
a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$
b) $\frac{4}{1}$ und $\frac{1}{4}$
c) $\frac{7}{7}$ und $\frac{7}{7}$

Addition gebrochener Zahlen

Die vier Grundrechenoperationen mit gebrochenen Zahlen werden mit Hilfe von Definitionen festgelegt. Dabei definiert man jede Rechenoperation so, daß sie auf Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen zurückgeführt wird.

DEFINITION:
Gebrochene Zahlen werden addiert, indem man zu ihrer Angabe gleichnamige Brüche wählt und nur deren Zähler addiert.
Den gemeinsamen Nenner behält man bei.

↗ Gleichnamige Brüche, Seite 32

Gleichnamige Brüche	Ungleichnamige Brüche
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $(b \neq 0)$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$ $(b \neq 0;\ d \neq 0)$
$\frac{3}{8}+\frac{11}{8}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$ $\frac{5}{9}+\frac{13}{9}=\frac{18}{9}=\frac{2}{1}=2$	$\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{25+28}{60}=\frac{53}{60}$ $5+\frac{3}{7}=\frac{5}{1}+\frac{3}{7}=\frac{35+3}{7}=\frac{38}{7}$

Eigenschaften der Addition

Die Addition ist im Bereich der gebrochenen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.

Für alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ (b, d und f ungleich 0) gilt:

1 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ (Kommutativität),

2 $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$ (Assoziativität),

3 $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$.

4 Wenn $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b}+\frac{e}{f}<\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ (Monotonie).

Multiplikation gebrochener Zahlen

DEFINITION:
Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	a) $\frac{56}{9}\cdot\frac{15}{8}=\frac{56\cdot 15}{9\cdot 8}=\frac{7\cdot 5}{3\cdot 1}=\frac{35}{3}$ b) $7\frac{4}{5}\cdot 1\frac{8}{13}=\frac{39}{5}\cdot\frac{21}{13}=\frac{39\cdot 21}{5\cdot 13}=\frac{3\cdot 21}{5\cdot 1}=\frac{63}{5}$

Eigenschaften der Multiplikation

Die Multiplikation ist im Bereich der gebrochenen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
Für alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ (b, d und f ungleich 0) gilt:

1 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ (Kommutativität),

2 $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$ (Assoziativität),

3 $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$ (Distributivität),

4 $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$, **5** $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$; $(a \neq 0)$,

6 $\frac{a}{b}\cdot 0=0$.

7 Wenn $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}<\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}$; $\left(\frac{x}{y}\neq 0\right)$ (Monotonie).

↗ Multiplikation natürlicher Zahlen – Eigenschaften, Seite 22

Subtraktion gebrochener Zahlen

DEFINITION:
Gebrochene Zahlen werden subtrahiert, indem man zu ihrer Angabe gleichnamige Brüche wählt und nur deren Zähler subtrahiert. Den gemeinsamen Nenner behält man bei.

↗ Gleichnamige Brüche, Seite 32

Gleichnamige Brüche	Ungleichnamige Brüche
$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ $(b \neq 0;\ a \geqq c)$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$ $(b \neq 0;\ d \neq 0)$
a) $\frac{11}{8}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}-\frac{11}{8}$ nicht lösbar	$\frac{5}{6}-\frac{7}{15}=$ $\frac{25}{30}-\frac{14}{30}=\frac{25-14}{30}=\frac{11}{30}$

Eigenschaften der Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.
Die Subtraktion ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nur ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

Für alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ (b, d, f ungleich 0) gilt:

1 $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$, **2** $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$,

3 $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

4 Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} - \frac{e}{f} < \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$ (Monotonie).

(Falls die Subtraktionen ausführbar sind.)

↗ Subtraktion natürlicher Zahlen – Eigenschaften, Seite 25

Division gebrochener Zahlen

DEFINITION:
Gebrochene Zahlen werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert. Ausgeschlossen ist die Division durch Null.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$;
($b \neq 0$; $c \neq 0$; $d \neq 0$)

■ $\frac{8}{3} : \frac{5}{9} =$

$\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{24}{5}$

↗ Reziprokes, Seite 34

Eigenschaften der Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.
Die Division ist im Bereich der gebrochenen Zahlen uneingeschränkt ausführbar. Ausgenommen ist die Division durch Null.
Begründung: Die Division wird im Bereich der gebrochenen Zahlen auf die Multiplikation zurückgeführt, und die Multiplikation ist uneingeschränkt ausführbar.
(Zur Division durch 0 siehe Seite 25 unten.)

■ a) $\frac{3}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$ Für $\frac{x}{y}$ müßte gelten $\frac{3}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$

Wegen $x \cdot 0 = 0$ gibt es keine solche Zahl.

■ b) $\frac{0}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$ Für $\frac{x}{y}$ müßte gelten $\frac{0}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$

Diese Gleichung gilt für jede Zahl $\frac{x}{y}$

B 2

Eigenschaften der Division

Für alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ (alle Zahlen ungleich 0) gilt:

1 $\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1,$

2 $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b},$ **3** $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a},$

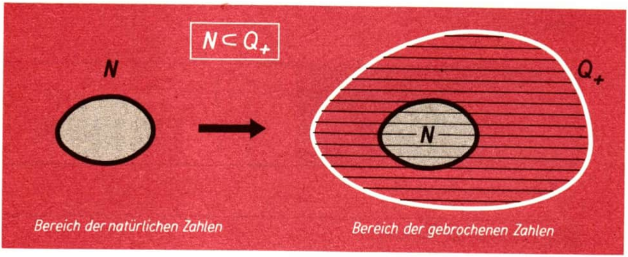
4 $0 : \frac{a}{b} = 0.$

5 Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} < \frac{c}{d} : \frac{x}{y}$; $\left(\frac{x}{y} \neq 0\right)$ (Monotonie).

Natürliche Zahlen und gebrochene Zahlen

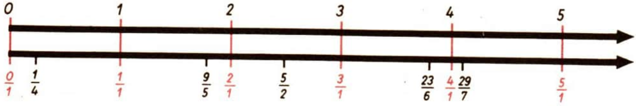
SATZ:
Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen.

↗ Teilmengen, Seite 15



Begründung:
Beim Vergleich, bei der Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division verhalten sich die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.

Man kann deshalb eine gebrochene Zahl $\frac{a}{1}$ durch die ihr zugeordnete natürliche Zahl a ersetzen.



Brüche mit dem Nenner 1	Natürliche Zahlen
$\frac{3}{1} < \frac{6}{1}$ (denn $3 \cdot 1 < 1 \cdot 6$)	$3 < 6$
$\frac{3}{1} + \frac{6}{1} = \frac{9}{1}$	$3 + 6 = 9$
$\frac{3}{1} \cdot \frac{6}{1} = \frac{18}{1}$ usw.	$3 \cdot 6 = 18$ usw.

Jede Division natürlicher Zahlen kann auch als Division gebrochener Zahlen aufgefaßt werden.

$$5:7 = \frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7}, \quad \text{also} \quad 5:7 = \frac{5}{7}$$

Umgekehrt kann jede gebrochene Zahl als Quotient natürlicher Zahlen geschrieben werden.

$$\frac{2658}{23} = 2658 : 23$$

Führt man die Division 2658 : 23 aus, so ergibt sich:

$$2658 : 23 = 115\frac{13}{23}$$

```
2658 : 23 = 115 13/23
23
 35
 23
 128
 115
  13
```

Es gilt also:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b \quad (b \neq 0)}$$

Doppelbrüche

Brüche, in denen der Zähler oder der Nenner oder beide Brüche sind, werden als Doppelbrüche bezeichnet. Allgemein werden der Bruchstrich und das Zeichen „:" gleichberechtigt verwendet.

a) $\dfrac{\frac{39}{50}}{\frac{12}{25}} = \frac{39}{50} : \frac{12}{25} = \frac{39 \cdot 25}{50 \cdot 12} = \frac{13}{8}$ b) $\dfrac{12}{\frac{6}{25}} = 12 : \frac{6}{25} = \frac{12}{1} \cdot \frac{25}{6} = 50.$

Endliche Dezimalbrüche

Man unterscheidet endliche Dezimalbrüche, unendliche periodische Dezimalbrüche und unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche. Unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche gehören nicht dem Bereich der gebrochenen Zahlen an.

↗ Dezimalbrüche, Seite 48

B 2

Endliche Dezimalbrüche sind Zehnerbrüche in einer besonderen Schreibweise.

a) $0{,}9 = \frac{9}{10}$ b) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ c) $0{,}29 = \frac{29}{100}$ d) $3{,}202 = \frac{3202}{1000} = \frac{1601}{500}$

Addition und Subtraktion endlicher Dezimalbrüche

Endliche Dezimalbrüche werden schriftlich addiert bzw. subtrahiert, indem sie zunächst so untereinander geschrieben werden, daß Stellen mit gleichem Stellenwert in derselben Spalte stehen (kurz: Komma unter Komma). Dann verfährt man wie bei der Addition bzw. Subtraktion natürlicher Zahlen. Das Komma wird im Ergebnis zwischen Einer- und Zehntelstelle gesetzt.

a)
```
   25,38
  103,009
    0,5
 + 13,71
 -------
  142,599
```

b)
```
  841,36
 - 27,053
 -  0,123
 -122,4
 -------
  691,784
```

Multiplikation endlicher Dezimalbrüche

Endliche Dezimalbrüche werden schriftlich multipliziert, indem man sie zunächst ohne Rücksicht auf das Komma wie natürliche Zahlen multipliziert.

Das Komma setzt man dann so, daß das Ergebnis soviel Dezimalstellen hat, wie die beiden Faktoren zusammen besitzen. Wenn nötig, müssen Nullen ergänzt werden.

a)
```
735,06 · 5,204
--------------
3675 30
  147 01 20
     2 94 024
--------------
3825,25 224
```

b)
```
0,047 · 0,0092
--------------
           423
            94
--------------
     0,0004324
```

Ein Dezimalbruch wird mit 10, 100, 1000, ... multipliziert, indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts versetzt.

Division endlicher Dezimalbrüche

Ein endlicher Dezimalbruch wird durch eine natürliche Zahl schriftlich dividiert, indem man wie bei der Division natürlicher Zahlen verfährt. Nach der Division der Einer des Dividenden wird im Ergebnis ein Komma gesetzt.

Ist der Divisor ein endlicher Dezimalbruch, so multipliziert man zunächst Dividenden und Divisor mit 10, 100, 1000, ..., je nachdem, ob der Divisor 1, 2, 3, ... Dezimalstellen hat. Damit ist der Divisor wieder eine natürliche Zahl.

Bricht die Division nicht ab, so berechnet man soviel Stellen des Ergebnisses, wie es für die geforderte Genauigkeit nötig ist.

■ a) 1337,19 : 87

1337,19 : 87 = 15,37
467
321
609
0

b) 1,58445 : 35,21

158,445 : 3521 = 0,045
1584
15844
17605
0

c) Der Quotient 274 : 1,2 ist auf eine Dezimalstelle genau zu berechnen.

274 : 1,2

2740 : 12 = 228,33
34
100
40
40

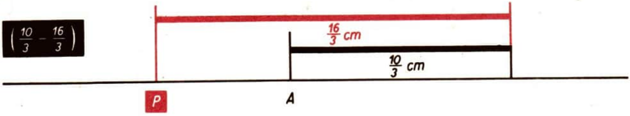
Wir berechnen zunächst auf zwei Dezimalstellen und runden dann:

274 : 1,2 ≈ 228,3

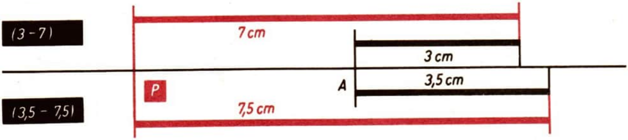
B 3 Rationale Zahlen

Differenz

Differenzen gebrochener Zahlen lassen sich auf einer Geraden durch Streckenabtragung von einem festgelegten Punkt aus darstellen. Dabei faßt man Minuend und Subtrahend als Maßzahlen für Streckenlängen auf.
Durch die im folgenden Beispiel demonstrierte *Streckenabtragung* wird jeder Differenz eindeutig ein Punkt *P* der Geraden zugeordnet.

■ 

Umgekehrt sind jedem dieser Punkte unendlich viele Differenzen zugeordnet.

■ 

Die Differenzen (3 − 7) und (3,5 − 7,5) sind demselben Punkt *P* zugeordnet, und es gilt
$3 + 7{,}5 = 7 + 3{,}5.$
Wenn für die Differenzen $(a - b)$ und $(c - d)$ die Gleichung
$a + d = b + c$
gilt, so sind sie genau demselben Punkt der Geraden zugeordnet. Man nennt sie **differenzengleich**.

B 3

Rationale Zahlen

> **DEFINITION:**
> **Eine rationale Zahl ist eine Klasse von Differenzen, die bei der Streckenabtragung alle demselben Punkt zugeordnet sind.**
> **Alle Differenzen, die in einer Klasse liegen, stellen ein und dieselbe rationale Zahl dar.**

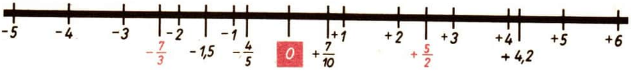
> **DEFINITION: (*a*, *b* gebrochene Zahlen)**
> **Die rationale Zahl, in der die Differenz $(a - 0)$ vorkommt, wird mit „$+a$" (gelesen: plus *a*) bezeichnet.**
> **Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0 - b)$ vorkommt, wird mit „$-b$" (gelesen: minus *b*) bezeichnet.**
> **Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0 - 0)$ vorkommt, wird nur mit „0" (Null) bezeichnet.**

$\left(\frac{7}{3}-\frac{14}{3}\right)$; $(2-4,\bar{3})$; $\left(8-\frac{31}{3}\right)$; $\left(0-\frac{7}{3}\right)$;...	Diese Differenzen gehören ein und derselben Klasse an, denn $\frac{7}{3}+4,\bar{3}=\frac{14}{3}+2$; $\frac{7}{3}+\frac{31}{3}=\frac{14}{3}+8$; usw.	$-\frac{7}{3}$
$(4-4)$; $(7,5-7,5)$; $\left(\frac{11}{5}-\frac{11}{5}\right)$; $(0-0)$;...	Diese Differenzen gehören ein und derselben Klasse an, denn $4+7,5=4+7,5$; $4+0=4+0$; usw.	0
$(12-10,5)$; $\left(4-\frac{5}{2}\right)$; $\left(\frac{7}{2}-\frac{4}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}-0\right)$;...	Diese Differenzen gehören ein und derselben Klasse an, denn $12+\frac{5}{2}=10,5+4$; $12+0=10,5+\frac{3}{2}$; usw.	$+\frac{3}{2}$

In den Bezeichnungen „$+a$" bzw. „$-b$" für rationale Zahlen heißen die Zeichen „+" bzw. „−" die Vorzeichen der rationalen Zahlen.

Zahlengerade

Jede rationale Zahl kann einem Punkt der Zahlengeraden zugeordnet werden.



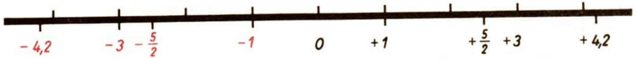
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von 0 liegen, heißen **positiv**. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „+“.
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von 0 liegen, heißen **negativ**. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „−“.
Benutzt man kleine lateinische Buchstaben als Variablen für rationale Zahlen, so kann z. B. a eine positive oder eine negative rationale Zahl oder auch die rationale Zahl 0 sein.

Entgegengesetzte rationale Zahlen

DEFINITION:
Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen zueinander entgegengesetzt.
Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt.

$+2$ und $-(+2) = -2$
$-3{,}75$ und $-(-3{,}75) = +3{,}75$
0 und 0

Zueinander entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.



↗ Symmetrie, Seite 152

Es gilt stets:

$$-(-a) = a \quad (a \in Q)$$

Absoluter Betrag

DEFINITION: ($a \in R$)
Der absolute Betrag $|a|$ einer rationalen Zahl a (kurz: Betrag von a) wird folgendermaßen festgelegt:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv oder gleich 0 ist.} \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

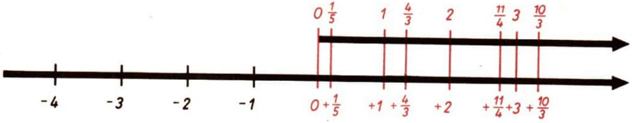
$a = +3;\quad |a| = +3$
$a = -0{,}9;\quad |a| = +0{,}9$
$a = +0{,}9;\quad |a| = +0{,}9$
$a = 0;\quad |a| = 0$

Der Betrag einer Zahl ist stets positiv oder Null. Zueinander entgegengesetzte Zahlen haben denselben Betrag.
Die positiven rationalen Zahlen und die Null werden auch kurz als „nichtnegative rationale Zahlen“ bezeichnet.
Jeder nichtnegativen rationalen Zahl entspricht genau eine gebrochene Zahl. Umgekehrt entspricht jeder gebrochenen Zahl eine nichtnegative rationale Zahl.

➡ B 3

Ordnung der rationalen Zahlen

Die nichtnegativen rationalen Zahlen werden entsprechend den gebrochenen Zahlen geordnet.



▶ **DEFINITION:** **Die rationale Zahl *a* heißt kleiner als die rationale Zahl *b*, wenn sie auf der Zahlengeraden links von *a* liegt.**	■ $+19{,}3 < +19{,}35$ $0 < +0{,}001$ $-18 < -17$ $-4 < +4$

Für zwei rationale Zahlen a und b gilt genau einer der drei Fälle:
$a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
Es gibt keine kleinste rationale Zahl.
Rationale Zahlen haben keinen Nachfolger.
Jede positive rationale Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null. Es gilt also
$0 < a$, falls a positiv,
und
$a < 0$, falls a negativ.
Falls a und b positiv sind, gilt: $a < b$ genau dann, wenn $|a| < |b|$.
Falls a und b negativ sind, gilt: $a < b$ genau dann, wenn $|a| > |b|$.

Addition rationaler Zahlen

Die vier Grundrechenarten mit rationalen Zahlen werden mit Hilfe von Definitionen festgelegt. Man definiert jede Rechenart so, daß sie auf die jeweilige Rechenart mit gebrochenen Zahlen zurückgeführt wird. Dabei setzt man als Ziel, daß beim Vergleichen und bei allen Rechenoperationen die nichtnegativen rationalen Zahlen durch die jeweils zugeordneten gebrochenen Zahlen ersetzt werden können. Nach dieser Ersetzung bilden die gebrochenen Zahlen einen Teilbereich des Bereichs der rationalen Zahlen.

■

$(+3) + (+5) = +8$	$3 + 5 = 8$
$(-3) + (-5) = -8$	$-3 - 5 = -8$
$(-3) + (+3) = 0$	$-3 + 3 = 0$
$(-3) + (+5) = +2$	$-3 + 5 = 2$
$(+3) + (-5) = -2$	$3 - 5 = -2$

Summanden	Betrag der Summe	Vorzeichen der Summe
Beide Summanden positiv	Summe der Beträge (Addition der zugeordneten gebrochenen Zahlen)	+
Beide Summanden negativ	Summe der Beträge	−
Summanden zueinander entgegengesetzt	0	
Summanden mit verschiedenen Vorzeichen und verschiedenen Beträgen	Differenz „größerer Betrag minus kleinerer Betrag" (Subtraktion wie bei den gebrochenen Zahlen)	Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag

↗ Addition gebrochener Zahlen, Seite 35
↗ Absoluter Betrag, Seite 43

Eigenschaften der Addition
Die Addition ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar. Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt: **1** $a + b = b + a$ (Kommutativität), **2** $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität), **3** $a + 0 = a$, **4** $a + (-a) = 0$. **5** Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$ (Monotonie).

Multiplikation rationaler Zahlen

Faktoren	Betrag des Produktes	Vorzeichen des Produktes
Beide Faktoren mit gleichem Vorzeichen	Produkt der Beträge (Multiplikation der zugeordneten gebrochenen Zahlen)	+
Beide Faktoren haben unterschiedliche Vorzeichen	Produkt der Beträge	−

➡ B 3

■

$(+3) \cdot (+5) = +15$	$3 \cdot 5 = 15$
$(-3) \cdot (-5) = +15$	$(-3) \cdot (-5) = 15$
$(-3) \cdot (+5) = -15$	$(-3) \cdot 5 = -15$
$(+3) \cdot (-5) = -15$	$3 \cdot (-5) = -15$

Eigenschaften der Multiplikation

Die Multiplikation ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

1 $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität),

2 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität),

3 $a \cdot 1 = a$, **4** $a \cdot 0 = 0$, **5** $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $(a \neq 0)$,

6 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivität).

7 $\left.\begin{array}{l}\text{Wenn } a < b \text{ und } c > 0, \text{ so gilt } a \cdot c < b \cdot c\\ \text{Wenn } a < b \text{ und } c < 0, \text{ so gilt } a \cdot c > b \cdot c\end{array}\right\}$ (Monotonie).

Subtraktion rationaler Zahlen

Im Bereich der *gebrochenen Zahlen* sind Addition, Multiplikation und Division (Divisor ungleich Null) uneingeschränkt ausführbar, die Subtraktion dagegen nicht. Im Bereich der *rationalen Zahlen* wird die Subtraktion durch folgende Festlegung auf die Addition zurückgeführt.

▶ **DEFINITION:**
$a - b = a + (-b)$; $a, b \in \mathbf{Q}$

Da die Addition uneingeschränkt ausführbar ist, ist auch die Subtraktion im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
Auf Grund dieser Festlegung ist die Subtraktion auch in diesem Bereich die Umkehrung der Addition. Das heißt, für beliebige rationale Zahlen a und b gibt es genau eine rationale Zahl x, für die gilt:
$b + x = a$,
nämlich die Zahl $x = a - b$; denn es gilt
$b + x = b + (a - b) = b + a + (-b) = b + (-b) + a = a$.

Eigenschaften der Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Die Subtraktion ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

1 $a - a = a + (-a) = 0$, **2** $a - 0 = a$,

3 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

4 Wenn $a < b$, so $a - c < b - c$ (Monotonie).

Division rationaler Zahlen

Dividend, Divisor	Betrag des Quotienten	Vorzeichen des Quotienten
Dividend und Divisor mit gleichen Vorzeichen	Quotient der Beträge (Division der zugeordneten gebrochenen Zahlen)	+
Dividend und Divisor mit unterschiedlichen Vorzeichen	Quotient der Beträge	−

$(+3) : (+5) = \left(+\frac{3}{5}\right)$	$3 : 5 = \frac{3}{5}$
$(-3) : (-5) = \left(+\frac{3}{5}\right)$	$(-3) : (-5) = \frac{3}{5}$
$(+3) : (-5) = \left(-\frac{3}{5}\right)$	$3 : (-5) = -\frac{3}{5}$
$(-3) : (+5) = \left(-\frac{3}{5}\right)$	$(-3) : 5 = -\frac{3}{5}$

↗ Division gebrochener Zahlen, Seite 37
↗ Absoluter Betrag, Seite 43

Eigenschaften der Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Die Division ist im Bereich der rationalen Zahlen mit Ausnahme der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar.

Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

1 $a : a = 1 \quad (a \neq 0)$,

2 $a : 1 = a$,

3 $0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$,

4 $a : b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$,

5 $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$.

6 $\left.\begin{array}{l} \text{Wenn } a < b \text{ und } c > 0, \text{ so } a : c < b : c \\ \text{Wenn } a < b \text{ und } c < 0, \text{ so } a : c > b : c \end{array}\right\}$ (Monotonie).

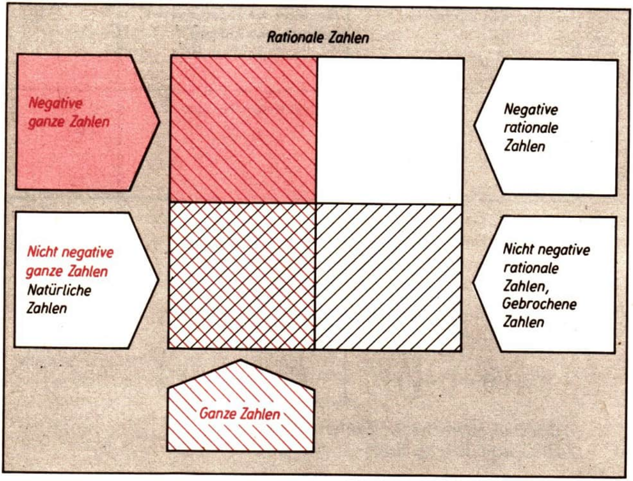
$-5 < 3 \qquad (-5) : 2 < 3 : 2 \qquad (-5) : (-2) > 3 : (-2)$

$\qquad\qquad -2{,}5 < 1{,}5 \qquad\qquad 2{,}5 > -1{,}5$

➡ B 4

Ganze Zahlen

Die rationalen Zahlen
..., -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, ...
heißen ganze rationale Zahlen (kurz: ganze Zahlen).



B 4 Reelle Zahlen

Dezimalbrüche

Jede gebrochene Zahl kann

(1) durch gemeine Brüche der Form $\frac{p}{q}$ ($p \in N$; $q \in N$; $q \neq 0$)

oder

(2) durch einen Dezimalbruch dargestellt werden.
Umgekehrt stellt aber nicht jeder Dezimalbruch eine gebrochene Zahl dar, sondern die Menge der Dezimalbrüche umfaßt auch solche, die rationale, aber keine gebrochenen Zahlen sind, und solche, die reelle, aber keine rationalen Zahlen sind.

↗ Rechnen mit endlichen Dezimalbrüchen, Seite 39 bis 41

Einige Vertreter aus der Menge der Dezimalbrüche			
	endliche	unendliche periodische	nichtperiodische
positive	0,2 0,259 12,02	$0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$ $2{,}151515\ldots = 2{,}\overline{15}$ $3{,}55666\ldots = 3{,}55\overline{6}$	$\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$ $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots$ $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,807\ldots$
negative	$-0{,}2$ $-0{,}259$ $-12{,}02$	$-0{,}\overline{3}$ $-2{,}\overline{15}$ $-3{,}55\overline{6}$	$-\pi = -3{,}141\,592\,653\ldots$ $-\sqrt{2} = -1{,}414\,213\,562\ldots$ $-\sqrt{3} = -1{,}732\,050\,807\ldots$

Die rot gerasterten Felder enthalten Dezimalbrüche, die der Menge Q angehören. (Q ist die Menge der rationalen Zahlen.)
Die schraffierten Felder enthalten Dezimalbrüche, der der Menge Q_+ angehören, (Q_+ ist die Menge der gebrochenen Zahlen.)

↗ Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($n \neq 0$; $n \in N$), Seite 100 (Wurzel)

Im Zusammenhang mit dem Aufbau des Bereichs Q_+ wurde definiert: Zehnerbrüche, die mit Hilfe der Kommaschreibweise im dekadischen Positionssystem dargestellt sind, heißen **endliche Dezimalbrüche**.
Zum Aufbau des Bereichs der reellen Zahlen ist folgende allgemeine Definition der Dezimalbrüche grundlegend:

Ein nicht negativer Dezimalbruch ist eine unendliche Folge natürlicher Zahlen, für die gilt:
1. **Das Anfangsglied a_0 ist eine beliebige natürliche Zahl**
2. **Für alle a_n mit $n \geqq 1$ gilt $0 \leqq a_n \leqq 9$**

Ein Dezimalbruch wird in folgender Form geschrieben: $a_0,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$

Das Komma grenzt das einzige Folgenglied, das mehrstellig sein kann, von den übrigen Gliedern ab.
Ein Dezimalbruch heißt *endlich*, wenn von einem Index an alle Folgenglieder a_n gleich 0 sind. Zur Vereinfachung läßt man bei endlichen Dezimalbrüchen diese Nullen weg.
Beim Rechnen kann man mit diesen endlichen Dezimalbrüchen wie mit den im Bereich der gebrochenen Zahlen definierten Zehnerbrüchen umgehen.

↗ Rechnen mit endlichen Dezimalbrüchen, Seite 39 bis 41

a) 14,357 statt $14{,}35700\overline{0}\ldots$
b) 3 statt $3{,}00\overline{0}\ldots$

Alle anderen Dezimalbrüche heißen *unendlich*. Treten in einem Dezimalbruch bestimmte Folgenglieder oder „Gruppen" von Folgengliedern, sogenannte **Perioden**, in ununterbrochener Wiederholung auf, so heißt der Dezimalbruch *periodisch*. (Die endlichen Dezimalbrüche können damit auch als periodische Dezimalbrüche mit der Periode 0 aufgefaßt werden.)

➡ B 4

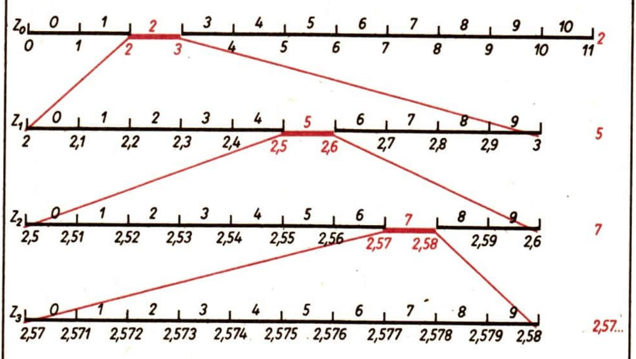
Geometrische Veranschaulichung der Dezimalbrüche

Nichtnegative Dezimalbrüche können auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden.
Hierzu teilt man die durch die natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl gegebenen Intervalle von der Länge 1 jeweils in zehn gleiche Teile ein, die so entstandenen Intervalle von der Länge $\frac{1}{10}$ wiederum in zehn gleiche Teile usw.
Man erhält so eine Folge von Intervallen der Länge
$1, \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}, \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}.$

↗ Zahlenstrahl, Seite 24
↗ Intervall, Seite 59

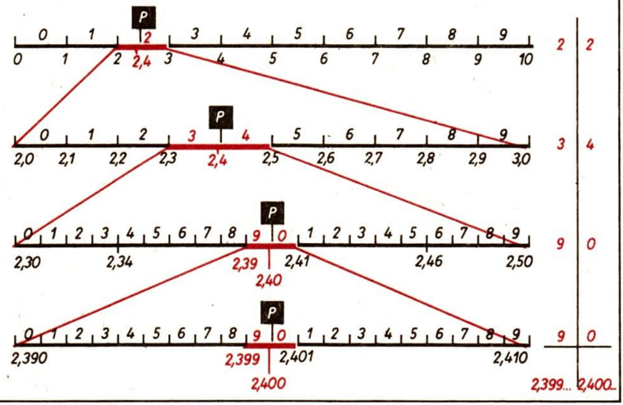
Numeriert man nun für jedes n die Intervalle der Länge $\frac{1}{10^n}$ jeweils von 0 bis 9, so entspricht der Folge der Glieder eines Dezimalbruchs eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen. Es gibt genau einen Punkt des Zahlenstrahls, der in allen diesen Intervallen liegt. Dieser eindeutig bestimmte Punkt wird dem betreffenden Dezimalbruch zugeordnet.

Dezimalbruch ⟶ Punkt



Die umgekehrte Zuordnung
Punkt ⟶ Dezimalbruch
ist jedoch nicht eindeutig; denn bei dem angegebenen Verfahren sind jedem Punkt, der bei irgendeiner der Zehnteilungen als Teilpunkt auftritt, zwei Dezimalbrüche zugeordnet.

Punkt ⟶ Dezimalbruch



Dem Punkt P sind also die Dezimalbrüche 2,4000... und 2,3999... zugeordnet. Um auch die Zuordnung „Punkt ⟶ Dezimalbruch“ eindeutig zu machen, schließt man die Dezimalbrüche mit Neunerperiode aus den Betrachtungen aus.

Negative Dezimalbrüche werden geometrisch veranschaulicht, indem ihnen Punkte einer Zahlengeraden, die links vom Nullpunkt liegen, umkehrbar eindeutig zugeordnet werden.

Ist dem Punkt P der Zahlengeraden der Dezimalbruch

$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad (a_i \in N)$

zugeordnet, so wird dem Punkt $\overline{P}$, der sich durch Spiegelung von P am Nullpunkt (Drehung um 180° mit dem Nullpunkt als Drehzentrum, auch Punktspiegelung genannt) ergibt, der Dezimalbruch

$-a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

zugeordnet.

Es gilt:

Jedem Punkt der Zahlengeraden ist eineindeutig ein Dezimalbruch zugeordnet.

↗ Punktspiegelungen (am Ende des Abschnitts Drehungen), Seite 147

Reelle Zahlen

DEFINITION:
Eine reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode.

➡ B 4

Der Bereich der reellen Zahlen wird mit P gekennzeichnet.
Die Menge der reellen Zahlen kann man in folgende Teilmengen einteilen:
(1) Die Menge aller periodischen (also auch der endlichen) Dezimalbrüche.
(2) Die Menge aller nichtperiodischen Dezimalbrüche.
Die periodischen Dezimalbrüche sind Punkten zugeordnet, denen die rationalen Zahlen entsprechen; es sind die **rationalen reellen Zahlen.**
Die nichtperiodischen Dezimalbrüche heißen **irrationale reelle Zahlen.**

Ordnung der reellen Zahlen

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Vergleich zweier reeller Zahlen a, b		
$a < 0$; $b > 0$	$a > 0$; $b > 0$	$a < 0$; $b < 0$
$a < b$	$a < b$, wenn es ein $k \in N$ mit $a_k < b_k$ gibt.	$a < b$, wenn es ein $k \in N$ mit $a_k > b_k$ gibt.
$a = -0{,}333\ldots$ $b = 0{,}100\ldots$ $-0{,}33\ldots < 0{,}100\ldots$	$a = 2{,}18356\ldots$ $b = 2{,}18376\ldots$ $\uparrow$ $a_4 < b_4$, also: $a < b$	$a = -2{,}18356\ldots$ $b = -2{,}18376\ldots$ $\uparrow$ $a_4 < b_4$, also: $a > b$

Rechnen mit reellen Zahlen

Das Rechnen mit reellen Zahlen ist so definiert (Definitionen und Ableitungen der Rechengesetze werden hier nicht angeführt), daß sich die rationalen reellen Zahlen (auch bezüglich der Ordnung) wie die rationalen Zahlen verhalten. Deshalb spricht man kurz von rationalen Zahlen.
Beim Rechnen mit reellen Zahlen erhält man das Ergebnis mit verlangter Genauigkeit, wenn man die Dezimalbrüche nach genügend vielen Gliedern abbricht und mit diesen endlichen Dezimalbrüchen, also mit rationalen Zahlen rechnet.

■ $\sqrt{2} + \sqrt{5} = x$

$1 < \sqrt{2} < 2$	$2 < \sqrt{5} < 3$	
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$	
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$	$x = 3{,}64\ldots$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$	$x = 3{,}650\ldots$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$	$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$	$x = 3{,}6502\ldots$

Auf diese Weise kann die Zahl $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Meistens verwendet man jedoch die entsprechende Tafel; in diesem Fall z. B. die Tafel auf der Seite 12 des Tafelwerks.

↗ Addition rationaler Zahlen, Seite 44
↗ Subtraktion rationaler Zahlen, Seite 46

Die Angabe der Periode bei der Division reeller Zahlen

■ $\frac{1}{3} = 1 : 3$

$$\begin{array}{l} 1 : 3 = 0{,}33\ldots \\ \overline{10} \\ \underline{}\\ 10 \\ 1 \end{array}$$

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$

$\frac{241}{99} = 241 : 99$

$$\begin{array}{l} 241 : 99 = 2{,}4343\ldots \\ \underline{198} \\ 430 \\ \underline{396} \\ 340 \\ \underline{297} \\ 430 \\ \vdots \end{array}$$

$\frac{241}{99} = 2{,}\overline{43}$

Rechnen mit Näherungswerten

Näherungswerte werden durch das Zeichen „≈" gekennzeichnet (gelesen: „angenähert gleich" oder „rund"). Näherungswerte sind z. B. gemessene Größenangaben (Längen, Massen, Zeiten) oder gerundete Zahlen. So können sich beispielsweise hinter der Längenangabe 12 cm sowohl die Länge 11,5 cm ≈ 12 cm als auch die Länge 12,4 cm ≈ 12 cm oder aber alle zwischen diesen Angaben liegenden Längen verbergen. Wenn deshalb jemand bei einer Rechnung die Angabe 12 cm in 12,0 cm verändert, so benutzt er nicht dieselbe Länge, und er muß das im Ergebnissatz berücksichtigen.

Beim Rechnen mit Näherungswerten wird folgendes beachtet:

Das Ergebnis kann nicht mehr „geltende" Ziffern aufweisen als jede der Zahlen, die in die Rechnung eingehen.

■ Der Flächeninhalt eines Rechtecks, von dem die Längen der Seiten mit $a = 4{,}2$ cm und $b = 2{,}6$ cm gegeben sind, ist zu berechnen.

$$\begin{array}{r} \underline{4{,}2 \cdot 2{,}6} \\ 84 \\ \underline{252} \\ 10{,}92 \end{array}$$

Die Ausgangswerte weisen beide zwei geltende Ziffern auf. Das Ergebnis weist vier geltende Ziffern auf. Eine größere Genauigkeit wird vorgetäuscht, was folgende Überlegung zeigt: 4,2 cm kann die gerundete Angabe für 4,15 cm oder für 4,24 cm oder für jede Länge zwischen 4,15 cm und 4,24 cm sein. Entsprechendes gilt für 2,6 cm, wo wir durch Hinzunahme einer Dezimale das Intervall $2{,}55 \leqq x \leqq 2{,}64$ erhalten.

Im Falle 4,15 cm und 2,55 cm würden wir erhalten:

$$\begin{array}{r} \underline{4{,}15 \cdot 2{,}55} \\ 830 \\ 2075 \\ \underline{2075} \\ 10{,}5825 \end{array}$$

Im Falle 4,24 cm und 2,64 cm würden wir erhalten:

$$\begin{array}{r} \underline{4{,}24 \cdot 2{,}64} \\ 848 \\ 2544 \\ \underline{1696} \\ 11{,}1936 \end{array}$$

Das Ergebnis liegt nun also zwischen 10,5825 cm² (≈ 11 cm²) und 11,1936 cm² (≈ 11 cm²). Wir gehen deshalb auch in der Beurteilung des Ergebnisses auf zwei geltende Ziffern zurück und schreiben in der üblichen Rechnung (oben) im Ergebnissatz: Der Flächeninhalt beträgt rund 11 cm².

B 4

Runden

Beim Runden werden eine oder mehrere Grundziffern am Ende einer Zahl durch Nullen ersetzt. Die links davor stehende Ziffer bleibt in gewissen Fällen erhalten (Abrunden), andernfalls wird sie um 1 erhöht (Aufrunden). Die Entscheidung, ob auf- oder abgerundet wird, hängt davon ab, ob der betreffenden Grundziffer vor der Nulleneinsetzung eine 1, 2, 3, 4 oder eine 5 oder eine 6, 7, 8, 9 folgte.

■ Der betreffenden Grundziffer „↓" folgt unmittelbar

- eine 1, 2, 3 oder 4: Abrunden $\overset{\downarrow}{8}16 \approx 800$; $\overset{\downarrow}{8}26 \approx 800$; $\overset{\downarrow}{8}36 \approx 800$; $\overset{\downarrow}{8}46 \approx 800$
- eine 6, 7, 8 oder 9: Aufrunden $\overset{\downarrow}{8}66 \approx 900$; $\overset{\downarrow}{8}76 \approx 900$; $\overset{\downarrow}{8}86 \approx 900$; $\overset{\downarrow}{8}96 \approx 900$
- eine 5 und weitere Grundziffern, die keine Nullen sind: Aufrunden $\overset{\downarrow}{8}56 \approx 900$

Gerade-Zahl-Regel

- eine 5 und dann nur Nullen und die betreffende Grundziffer „↓" stellt eine gerade Zahl dar: Abrunden $\frac{1}{8} = 0{,}1\overset{\downarrow}{2}50 \approx 0{,}12$
- eine 5 und dann nur Nullen und die betreffende Grundziffer „↓" stellt eine ungerade Zahl dar: Aufrunden $\frac{3}{8} = 0{,}3\overset{\downarrow}{7}50 \approx 0{,}38$

Im Bankwesen und Geschäftsleben wird eine Zahl, die auf die Grundziffer 5 endet, stets aufgerundet.

Überschlagen

Vor jeder exakten Berechnung sollte man das Ergebnis überschlagen, d. h., die gegebenen Zahlen entsprechend dem Sachverhalt und in Abhängigkeit von den auszuführenden Rechenoperationen vereinfachen. Dann werden die Rechenoperationen gemäß der Aufgabenstellung mit diesen vereinfachten Zahlen ausgeführt. Man erhält so einen Anhaltspunkt für die Größenordnung des zu berechnenden Ergebnisses.

■ Mit dem Rechenstab ist folgender Quotient zu berechnen:

$$\frac{5{,}26 \cdot 19{,}7}{36{,}8}$$

Für den Überschlag bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

a) $\frac{5 \cdot 21}{35} = 3$ b) $\frac{6 \cdot 18}{36} = 3$ c) $\frac{5 \cdot 20}{35} \approx 3$

Die Rundungsregeln werden hierbei nicht beachtet.

Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen

C

Funktionen (↗ S. 58)	Eine Menge geordneter Paare $[x, y]$, die eine eindeutige Abbildung von einer Menge X auf eine Menge Y ist ($x \in X$, $y \in Y$) heißt Funktion.
Lineare Funktionen (↗ S. 62)	$y = mx + n$ (m, n beliebige reelle Konstanten, $m \neq 0$) $m = \tan \varphi$ ($\varphi \neq 90°$; $\varphi \neq -90°$) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$ Der Graph ist eine Gerade.
Quadratische Funktionen (↗ S. 86)	$y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c beliebige reelle Konstanten; $a \neq 0$) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$. Der Graph ist eine Parabel.
Potenzfunktionen (↗ S. 95)	$y = x^n$ ($n > 1$; ganzzahlig) Def.-Bereich: $-\infty < x < \infty$. Die Graphen heißen Parabeln n-ten Grades. $y = x^n$ ($n < 0$; ganzzahlig) Definitionsbereich: $-\infty < x < 0$; $0 < x < \infty$ Die Graphen heißen Hyperbeln.
Exponentialfunktionen (↗ S. 104)	$y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Logarithmusfunktionen (↗ S. 105)	$y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) Definitionsbereich: $0 < x < \infty$ Die Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.
Winkelfunktionen (↗ S. 107)	$\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \end{array}\right\}$ Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$ $\left.\begin{array}{l} y = \tan x \\ y = \cot x \end{array}\right\}$ Def.-Bereich: $-\infty < x < \infty$ $\left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z \\ x \neq k\pi;\ k \in Z \end{array}\right.$

C 1 Abbildungen

Geordnetes Paar

Das geordnete Paar [*a*, *b*] ist die Menge mit den Elementen *a* und *b*, deren Reihenfolge festgelegt ist.

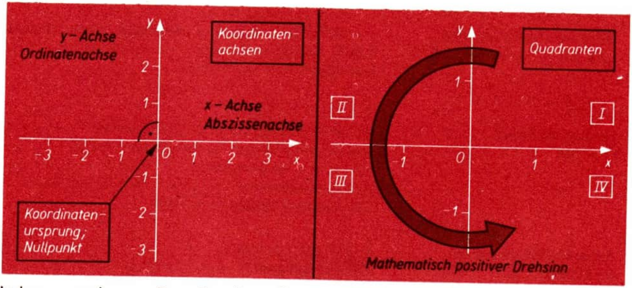
■ $[3, 4] \neq [4, 3]$; dagegen $\{3, 4\} = \{4, 3\}$

↗ Bilden von Mengen, Seite 14

Koordinatensystem

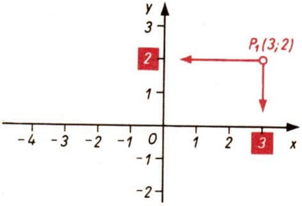
Zwei einander rechtwinklig schneidende Zahlengeraden bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Zahlengeraden heißen **Koordinatenachsen**. Ihrem Schnittpunkt entspricht auf beiden Zahlengeraden die Zahl 0. Ein solches Koordinatensystem zerlegt die Ebene in vier Teile, die **Quadranten**.

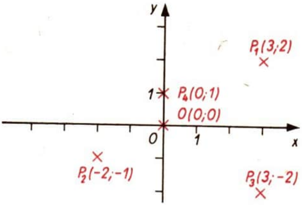
↗ Zahlengerade, Seite 42



Jedem geordneten Paar [*x*; *y*] reeller Zahlen wird durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem genau ein Punkt der Ebene zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt der Ebene genau ein geordnetes Zahlenpaar. Die Zahlen in diesem Zahlenpaar heißen die **Koordinaten** des betreffenden Punktes, die erste Zahl heißt **Abszisse**, die zweite heißt **Ordinate** des Punktes.

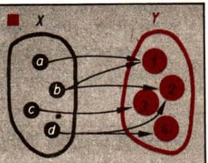
■





Abbildung

Wenn nichtleeere Mengen X und Y gegeben sind, so können geordnete Paare gebildet werden, bei denen an erster Stelle ein Element von X und an zweiter Stelle ein Element von Y steht.
Eine Menge F solcher Paare heißt **Abbildung von X auf Y,** wenn alle Elemente von X und von Y in wenigstens einem dieser Paare vorkommen.
Bei der nebenstehenden Abbildung der Menge X auf die Menge Y werden den Elementen von X Elemente von Y **zugeordnet.**



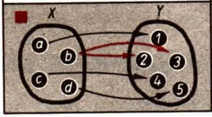
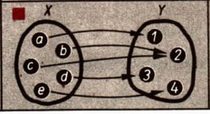
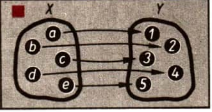
$\{[a, 1]; [b, 1]; [b, 2]; [c, 3]; [d, 2]; [d, 4]\} = F$

↗ Geometrische Abbildungen, Seite 143

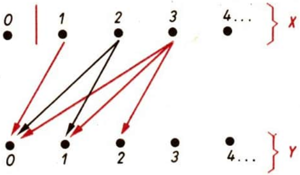
Es kann auch $X = Y$ gelten. Dann wird die Menge X auf sich abgebildet.

↗ Verschiebungen, Seite 144

Mehrdeutige, eindeutige, eineindeutige Abbildungen

mehrdeutig (nicht eindeutig)	eindeutig	eineindeutig
Wenigstens einem Element von X sind zwei oder mehr als zwei verschiedene Elemente von Y zugeordnet.	Jedem Element von X ist genau ein Element von Y zugeordnet.	Jedem Element von X ist genau ein Element von Y zugeordnet und jedes Element von Y ist genau einem Element von X zugeordnet.
		

a) Jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ werden alle die natürlichen Zahlen zugeordnet, die kleiner als n sind.

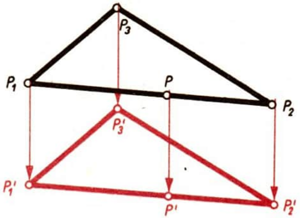


X: Menge der natürlichen Zahlen außer Null

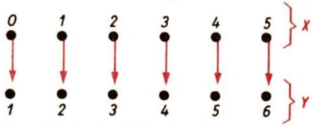
Y: Menge der natürlichen Zahlen

Diese Abbildung ist nicht eindeutig.

b) Die Menge A sei die Menge der Punkte eines Dreiecks. Durch eine Verschiebung der Ebene, in der das Dreieck liegt, wird jedem Dreieckspunkt P ein Bildpunkt P' eindeutig zugeordnet. Die Menge B der Bildpunkte ist wiederum ein Dreieck.
Diese Abbildung ist eineindeutig.



c) Jeder natürlichen Zahl von 0 bis 5 sei ihr unmittelbarer Nachfolger zugeordnet.
Zur Darstellung wählt man die Menge der geordneten Paare oder eine Tabelle.



$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $\quad$ $Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$F = \{[0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; 4], [4; 5], [5; 6]\}$

X	0	1	2	3	4	5
Y	1	2	3	4	5	6

↗ Geometrische Abbildungen, Seite 143

Funktion

DEFINITION:
Eine Menge geordneter Paare $[x; y]$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, die eine eindeutige Abbildung von einer Menge X auf eine Menge Y ist, heißt Funktion.

↗ Geordnetes Paar, Seite 56

Die Menge X heißt **Definitionsbereich**, die Menge Y heißt **Wertebereich** der Funktion.
Wird bei einer Funktion der Definitionsbereich nicht angegeben, so sollen alle die reellen Zahlen x zum Definitionsbereich gehören, für die sich aus der Funktionsgleichung ein Funktionswert $y = f(x)$ berechnen läßt.

$y = \sqrt{25 - x^2}$
Da Wurzeln nur für nichtnegative Radikanden erklärt sind, lassen sich Funktionswerte nur für die reellen Zahlen x berechnen, für die gilt: $x^2 \leqq 25$. Daraus ergibt sich als Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen x mit $-5 \leqq x \leqq 5$.

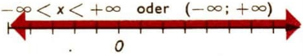
↗ Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \neq 0; n \in N)$, Seite 100

Zur Bezeichnung von Funktionen benutzt man u. a. die Buchstaben f, g, h, φ. So kann beispielsweise für die Funktionsgleichung $y = x^2$ auch $f(x) = x^2$ geschrieben werden.

Intervall

Die Menge der reellen Zahlen, die durch zwei gegebene reelle Zahlen a und b mit $a < b$ begrenzt ist, heißt **Intervall**.
Intervalle werden häufig mit Hilfe von Ungleichungen gekennzeichnet.

↗ Gleichungen – Ungleichungen, Seite 65.

abgeschlossenes Intervall	offenes Intervall
$-3 \leqq x \leqq 5$ oder $\langle -3;\, 5 \rangle$  Menge aller reellen Zahlen von -3 bis 5 (-3 und 5 gehören zum Intervall)	$-3 < x < 5$ oder $(-3;\, 5)$  Menge aller reellen Zahlen zwischen -3 und 5 (-3 und 5 gehören nicht zum Intervall)
halboffenes Intervall	**unendliches Intervall**
$-3 \leqq x < 5$ oder $\langle -3;\, 5)$  Menge aller reellen Zahlen zwischen -3 und 5 (-3 gehört zum Intervall, 5 nicht)	$-\infty < x < +\infty$ oder $(-\infty;\, +\infty)$  Menge aller reellen Zahlen

Argument, Funktionswert

Die Elemente des Definitionsbereichs einer Funktion nennt man auch Argumente der Funktion.
Die Elemente des Wertebereichs einer Funktion nennt man die zu den betreffenden Argumenten gehörigen Funktionswerte.

Einige Argumente und die zugehörigen Funktionswerte der Funktion
$y = 5x + 3 \qquad (-2 \leqq x < 3)$

Argumente:	x	-2	$-1{,}5$	0	1
Funktionswerte:	y	-7	$-4{,}5$	3	8

Beispiele für die Verwendung von Variablen zur Bezeichnung von Argument und dem jeweils zugehörigen Funktionswert.

Argumente	x	t	a
Funktionswerte	$y = f(x)$	$s = \varphi(t)$	$V = g(a)$

Die Schreibweise $y = f(x)$ (gelesen: y gleich f von x) bedeutet, daß die Zahl y in der Funktion f dem Argument x zugeordnet ist. Die Argumentvariable, für die man aus dem Definitionsbereich beliebige Elemente einsetzen kann, heißt **unabhängige Variable**. Die Variable für Funktionswerte heißt **abhängige Variable**.

➡ C 1

Darstellung von Funktionen

Die Vorschrift zum Bilden der geordneten Paare $[x; y = f(x)]$ einer Funktion f kann durch eine Wortvorschrift, durch eine Gleichung, durch Angabe der geordneten Paare in einer Wertetabelle oder durch eine graphische Darstellung (Graph) gegeben sein. Darüber hinaus gibt es noch andere Möglichkeiten, die hier nicht erwähnt werden sollen. Die genannten Möglichkeiten weisen Vor- und Nachteile auf. Deshalb benutzt man zuweilen mehrere Darstellungsformen gleichzeitig. Es ist aber in vielen Fällen nicht möglich bzw. nicht notwendig, alle Formen anzugeben.

■ *Wortvorschrift:*

Jedem Element x aus der Menge der reellen Zahlen zwischen -2 und $+3$ (diese Zahlen eingeschlossen) sei das zugehörige Quadrat x^2 zugeordnet.

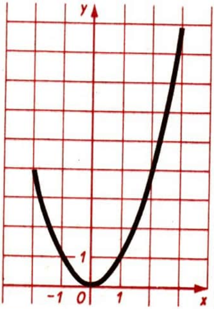
Gleichung: $y = x^2 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

Wertetabelle:

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Die Wertetabelle enthält eine für das Zeichnen notwendige Auswahl aus der Menge der zur Funktion gehörenden Paare.

Graph:



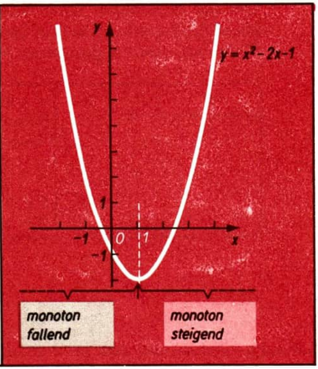
Nicht jede Gleichung, in der zwei Variable auftreten, ist eine Funktionsgleichung.

■ $x^2 + y^2 = 25$
Setzt man für x die Zahl 3 ein, so erhält man $9 + y^2 = 25$.
Diese Gleichung wird sowohl von $+4$ als auch von -4 erfüllt. Der Zahl 3 werden also zwei verschiedene Zahlen zugeordnet, d. h., die Zuordnung ist nicht eindeutig.

Monotonie

Es gibt bei Funktionen Intervalle, in denen die Funktion monoton steigt, und solche, in denen die Funktion monoton fällt.

Die Funktion $y = x^2 - 2x - 1$ ist im Intervall $-\infty < x \leqq 1$ monoton fallend, denn für wachsende Argumente dieses Intervalls fallen die zugehörigen Funktionswerte. Im Intervall $1 \leqq x < \infty$ ist diese Funktion monoton steigend.

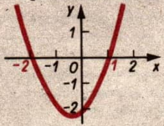


Nullstellen von Funktionen

Es gibt Funktionen, bei denen für gewisse Werte der unabhängigen Variablen x der zugehörige Funktionswert $y = f(x)$ gleich Null ist. Das bedeutet, daß unter den Zahlenpaaren der Funktion solche vorkommen, die die Form $[x; 0]$ haben. Diesen Paaren entsprechen bei der graphischen Darstellung der Funktion Punkte auf der x-Achse. Das Bild der Funktion schneidet also in diesen Punkten die x-Achse bzw. berührt diese.

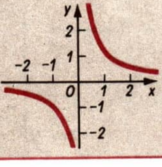
DEFINITION:
Eine Zahl aus dem Definitionsbereich einer Funktion, der bei dieser Funktion die Zahl Null zugeordnet wird, heißt Nullstelle dieser Funktion.

Die Funktion $y = x^2 + x - 2$ hat 2 Nullstellen: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$



Die Nullstellen einer Funktion sind die Abszissen derjenigen Punkte, in denen das Funktionsbild die x-Achse schneidet bzw. berührt.

Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat keine Nullstellen.



➡ C 2

Um die Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen, setzt man y gleich Null. Dadurch erhält man die Gleichung $f(x) = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind die gesuchten Nullstellen.

■ $y = \frac{1}{3}x + 4$	$y = 0$ Einsetzen in die gegebene Gleichung: $0 = \frac{1}{3}x + 4 \quad \mid \cdot 3$ $0 = x + 12 \quad \mid -12$ $x = -12$	Nullstelle: $x = -12$

C2 Lineare Funktionen

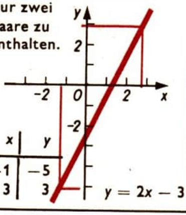
Lineare Funktionen und ihre graphische Darstellung

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ heißen **lineare Funktionen.** Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$ Wertebereich: $-\infty < y < \infty$	■ $y = 3x$ $y = 3x + 2$ $y = -3x$ $y = x$
Für $m = 0$ enthält der Wertebereich nur die Zahl n.	$y = 5$

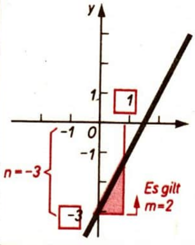
Die Graphen linearer Funktionen sind Geraden. Der Beweis hierfür folgt auf Seite 64. Der Koeffizient m heißt **Anstieg** dieser Geraden (bzw. der Funktion). Die Zahl n ist die Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse.

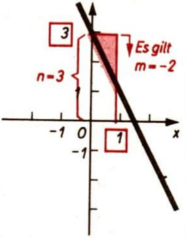
Die graphische Darstellung linearer Funktionen $y = mx + n$

mit einer Wertetabelle	mit Hilfe von m und n
Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, braucht die Wertetabelle nur zwei Paare zu enthalten.	$y = 2x - 3$ $y = -2x + 3$



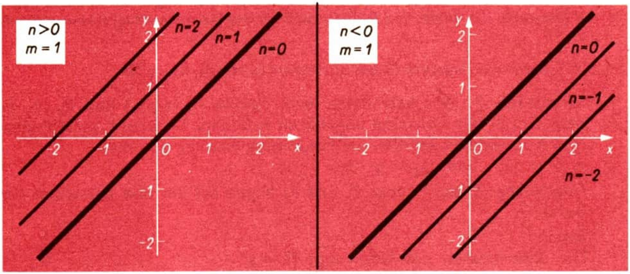
x	y
-1	-5
3	3





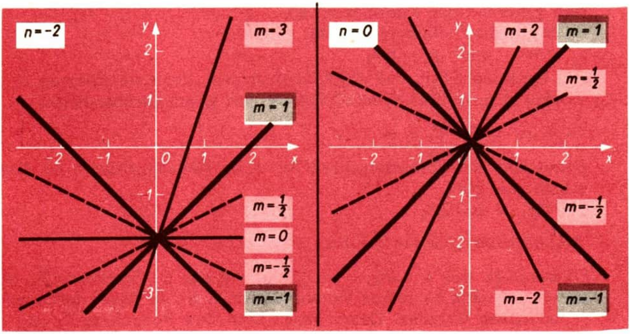
Die Bedeutung von *m* und *n* für die Lage des Graphen

a) *m* konstant, *n* variabel
Die Graphen bilden eine Schar zueinander paralleler Geraden.



↗ Punkte und Geraden einer Ebene (parallel), Seite 128

b) *n* konstant, *m* variabel
Die Graphen sind eine Schar von Geraden, die sich alle in einem Punkt schneiden. Im Falle $n = 0$ ist dieser Punkt der Ursprung O $(0; 0)$, und die Gleichung der Funktionen lautet $y = mx$.



Die Bilder der Funktionen $y = mx$ und $y = -mx$ sind symmetrisch in bezug auf die *x*-Achse und auf die *y*-Achse.
Die Richtung der jeweiligen Geraden hängt vom Koeffizienten *m* ab.
Für $m > 0$ steigt die Gerade. (Die Funktion ist monoton steigend.)
Für $m < 0$ fällt die Gerade. (Die Funktion ist monoton fallend.)
Für $m = 0$ erhält man die Gleichung $y = 0$; die Funktionswerte sind unabhängig von *x* stets gleich 0. Das Bild dieser Funktion ist die *x*-Achse.

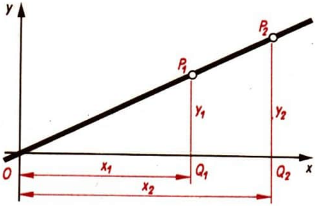
C 2

Lage der Punkte, die den Zahlenpaaren der Funktion $y = mx$ zugeordnet sind

SATZ:
Alle Punkte des Graphen einer Funktion $y = mx$ liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Anfangspunkt 0 des Koordinatensystems verläuft.

↗ Koordinatensystem (Koordinaten**ursprung**), Seite 56

Voraussetzung: Wir betrachten zwei Punkte $P_1\ (x_1; y_1)$ und $P_2\ (x_2; y_2)$, die dem Graph der Funktion angehören und vom Ursprung verschieden sind. Ihre Koordinaten erfüllen die Funktionsgleichung $y = mx$:
$y_1 = m \cdot x_1$ und $y_2 = m \cdot x_2$.
Behauptung: Diese Punkte P_1 und P_2 liegen auf ein und derselben Geraden durch O.
Beweis:
Die Koordinaten des Ursprungs $O\ (0; 0)$ erfüllen die Funktionsgleichung, denn es gilt: $0 = m \cdot 0$. Der Ursprung gehört also zum Graph der Funktion.
Die vom Ursprung verschiedenen Punkte $P_1\ (x_1; y_1)$ und $P_2\ (x_2; y_2)$ sollen ebenfalls zum Graph der Funktion gehören. Ihre Koordinaten erfüllen also die Funktionsgleichung:



$y_1 = mx_1$ und $y_2 = mx_2$
Die Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2 sind ähnlich, denn sie stimmen in einem Winkel (dem rechten Winkel) überein, und es gilt darüber hinaus

$$\frac{y_1}{x_1} = m \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{x_2} = m.$$

Damit sind die Voraussetzungen für einen Ähnlichkeitssatz für Dreiecke erfüllt. Also gilt
$\triangle OQ_1P_1 \sim \triangle OQ_2P_2$.

↗ Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Seite 222

Daraus folgt, daß $\sphericalangle P_1OQ_1 = \sphericalangle P_2OQ_2$, daß also die Strecken $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ mit der x-Achse denselben Winkel bilden, d. h., sie liegen beide auf einer gemeinsamen Geraden. Damit liegen auch ihre Endpunkte P_1 und P_2 auf dieser Geraden durch den Ursprung. Wählt man statt P_2 einen beliebigen anderen Punkt, dessen Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen, so ergibt sich durch die gleichen Überlegungen, daß er ebenfalls auf der durch O und P_1 bestimmten Geraden liegt. Das bedeutet also, daß alle Punkte, die zum Graph der Funktion gehören, auf dieser Geraden liegen.
Damit steht aber noch keineswegs fest, daß auch alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, zum Graph der Funktion $y = mx$ gehören. Hierzu muß der Satz bewiesen werden:

Alle Punkte der Geraden gehören zum Bild der Funktion.

Beweis:
Ist $P_1\ (x_1; y_1)$ ein vom Ursprung verschiedener Punkt des Graphen, so gilt für seine Koordinaten $y_1 = mx_1$, d. h. $\frac{y_1}{x_1} = m$.
Ist $P_2\ (x_2; y_2)$ ein beliebiger anderer Punkt auf der durch O und P_1 gehenden Geraden, so gilt für seine Koordinaten wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2:
$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$, also $\frac{y_2}{x_2} = m$.
Daraus folgt $y_2 = mx_2$. Also gehört P_2 zum Graph der Funktion. Da P_2 beliebig gewählt war, gilt dies für jeden Punkt der Geraden. Beide Beweise zusammen berechtigen nun zu der Feststellung:

SATZ:
Die Graphen der Funktionen $y = mx$ sind Geraden, die durch den Ursprung verlaufen.

C 3 Gleichungen und Ungleichungen

Variablen – Terme

Eine Variable ist ein Zeichen für beliebige Elemente aus einem vorgegebenen Grundbereich, dem **Variablengrundbereich**.

Gegeben sei die Gleichung $y = 2x + 1$, und für x und y sei als Variablengrundbereich die Menge der rationalen Zahlen vorgegeben. Dann kann man z. B. für x jede beliebige Ziffer, die eine rationale Zahl bezeichnet, einsetzen.

Ziffern, Variablen und sinnvolle Zusammensetzungen aus ihnen mit Hilfe der Rechenzeichen „+", „−", „·", „:" oder anderer Operationszeichen heißen Terme.

„3"; „a"; „375"; „$\frac{7}{8}$", „$2{,}7 + x$"; „$\frac{x}{y}$"; „$\frac{a+b}{2}$"; „$(6 - 4) : 8$" sind Terme.
Dagegen sind „a 4 + :"; „2 −"; „8 (+" keine Terme.

Gleichungen – Ungleichungen

Ausdrücke, in denen zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, heißen Gleichungen. Ausdrücke, in denen zwei Terme durch eins der Zeichen „$<$", „$>$", „$\leqq$", „$\geqq$", „$\neq$" verbunden sind, heißen Ungleichungen.

➡ C 3

Die Terme heißen *linke* bzw. *rechte Seite* der Gleichung oder Ungleichung. Gleichungen bzw. Ungleichungen ohne Variablen sind entweder wahre oder falsche Aussagen. Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Variablen brauchen keine Aussagen zu sein.

↗ Aussagen, Seite 8

	ohne Variablen	mit Variablen
Gleichungen	$5 + 3 = 10 - 2$ (wahr) $5 + 2 = 10 - 2$ (falsch)	$\frac{x-3}{x+5} = 7y + 6$
Ungleichungen	$\frac{7}{9} < \frac{7}{10}$ (falsch) $\frac{7}{9} > \frac{7}{10}$ (wahr)	$\frac{x}{9} \geqq 1$

Enthalten Gleichungen und Ungleichungen Variablen, so muß angegeben sein, welcher Zahlenbereich als Variablengrundbereich zur Verfügung steht.

a) $3x + 5 = 2y - 3$ $(x \in N;\ y \in N)$ b) $3x + 5 < 2$ $(x \in Q_+)$
c) $x^2 + 4x = 21$ $(-2 < x \leqq 3)$

Ist kein Zahlenbereich angegeben, so soll der Bereich der reellen Zahlen (R) als Variablengrundbereich betrachtet werden.

Gebundene Variablen – freie Variablen

Variablen, die in Verbindung mit „für jedes" oder „es gibt ein" auftreten, heißen gebundene Variablen. Alle anderen heißen freie Variablen.
Aus Gleichungen oder Ungleichungen mit Variablen können auf folgende Weise Aussagen entstehen:

(1) Einsetzen von Zahlen für sämtliche freie Variablen aus dem jeweiligen Variablengrundbereich	$3x + 5 = 2y - 3$ $(x, y \in N)$ Wir setzen für x die Zahl 2 und für y die Zahl 7 ein: $3 \cdot 2 + 5 = 2 \cdot 7 - 3$ (wahr) Wir setzen für x die Zahl 3 und für y die Zahl 7 ein: $3 \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 7 - 3$ (falsch)
(2) Binden sämtlicher Variablen mit Hilfe von „es gibt ein" oder „für alle".	Für jedes a und für jedes b gilt $a \cdot b = b \cdot a$ (wahr). Für jedes a und für jedes b gibt es ein x mit $a < x < b$ (falsch), denn es gibt den Fall $a = b$.
(3) Binden einiger Variablen und Einsetzen von Zahlen für die freien Variablen.	Es gibt ein y mit $x^2 + y^2 < 20$ $(x \in R)$. Wir setzen für x die Zahl 3 ein: Es gibt ein y mit $9 + y^2 < 20$ (wahr). Wir setzen für x die Zahl 5 ein: Es gibt ein y mit $25 + y^2 < 20$ (falsch).

Entsteht beim Einsetzen von Zahlen für Variablen eine wahre Aussage, so sagt man, daß diese Zahlen die betreffende Gleichung oder Ungleichung *erfüllen*.

Lösung

Eine Gleichung (Ungleichung) mit einer Variablen lösen heißt, alle Zahlen zu finden, die die Gleichung (Ungleichung) erfüllen. Jede solche Zahl heißt Lösung. Die Lösungen von Gleichungen (Ungleichungen) mit zwei Variablen sind Zahlenpaare.

$4x + 7 = 8$	Lösung: $\frac{1}{4}$
$4x + 7 = 8$ Variablengrundbereich: N	n. l. (nicht lösbar)
$x^2 - 2x - 8 = 0$	Lösungen: 4 und -2 Man schreibt auch $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$.
$4x + 7y = 18$	Unendlich viele Lösungspaare $[x; y]$, z. B. $[1; 2]$, $[8; -2]$
$x + y < 5$	Unendlich viele Lösungspaare, z. B. $[0; 0]$, $[1; 3]$, $[\pi; 1{,}5]$,

Äquivalente Gleichungen

DEFINITION:
Zwei Gleichungen heißen über einem gegebenen Grundbereich (zueinander) äquivalent, wenn sie über diesem Grundbereich dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Beim Lösen einer Gleichung wird diese durch schrittweises Umformen vereinfacht. Eine Umformung, die eine Gleichung in eine dazu äquivalente Gleichung überführt, heißt **äquivalente Umformung**.

Äquivalente Umformungen für Gleichungen
(1) Zusammenfassung entsprechender Glieder, die auf derselben Seite der Gleichung stehen. Entsprechende Glieder sind jeweils: Glieder, die die Variable nicht enthalten; Glieder, die die Variable in derselben Potenz enthalten. (2) Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Vielfachen der Variablen bzw. gleicher Potenzen von ihr auf beiden Seiten.

Äquivalente Umformungen für Gleichungen

(3) Multiplikation beider Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl. Division beider Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl.

(4) Vertauschung der Seiten.
Diese Umformungen werden in der Reihenfolge angewendet, die einen möglichst bequemen Lösungsweg für die gegebene Gleichung ergibt.

Folgende Umformungen von Gleichungen sind nicht-äquivalente Umformungen:

(1) Division beider Seiten einer Gleichung durch die Variable. Dabei kann die Zahl Null als Lösung fortfallen.

(2) Division beider Seiten einer Gleichung durch eine Summe oder ein Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei können die Zahlen, für die die betreffende Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird als Lösung fortfallen. Umformungen, bei denen durch Division beider Seiten der Gleichung Lösungen wegfallen, dürfen nur dann vorgenommen werden, wenn man zuvor untersucht hat, für welche Werte der Variablen der Divisor gleich Null wird. Diese Werte sind Lösungen der gegebenen Gleichung.

(3) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der Variablen. Dabei kann die Zahl Null als Lösung hinzukommen.
„Die Zahl kommt als Lösung hinzu" bedeutet, daß die betreffende Zahl Lösung der durch Multiplikation entstandenen Gleichung ist. Diese Zahl ist im allgemeinen jedoch nicht Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichung.

(4) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer Summe oder einem Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei können die Zahlen, für die die betreffende Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird, als Lösung hinzukommen.

↗ Beispiele m und n, Seiten 71 und 72.

Lösen von Gleichungen mit einer Variablen

Zur Lösung einer Gleichung muß der Variablengrundbereich bekannt sein. Wenn keine Einschränkungen gemacht werden, wird als Variablengrundbereich der Bereich P angenommen. Meistens löst man die Gleichung, indem man die Variable isoliert.

↗ Variablen – Terme (Variablengrundbereich), Seite 65
↗ Rechnerische Lösung einer linearen Gleichung mit einer Variablen, Seite 70

Werden beim Lösen nur äquivalente Umformungen ausgeführt, so erhält man die gesuchten Lösungen. Andernfalls können Lösungen fortfallen oder auch im Endergebnis Zahlen auftreten, die nicht zu den gesuchten Lösungen gehören.

■ a) Die Gleichung $3x(x-4) = 6(x-4)$ ist zu lösen.

Richtiges Vorgehen

$$3x(x-4) = 6(x-4)$$
$$3x^2 - 12x = 6x - 24$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x = 3 \pm \sqrt{9-8}$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 2$$

Falsches Vorgehen

$$3x(x-4) = 6(x-4) \quad | : (x-4)$$
$$3x = 6 \quad | : 3$$
$$x = 2$$

Die Division durch $(x-4)$ ist keine äquivalente Umformung.

↗ Lösungsformel für quadratische Gleichungen, Seite 91

■ b) Die Gleichung $\sqrt{x+42} = x$ ist zu lösen.
In diesem Fall kann man nur mit dem Quadrieren beginnen, was häufig zu nicht-äquivalenten Gleichungen führt.

$$\sqrt{x+42} = x \quad | \text{ Quadrieren}$$
$$x + 42 = x^2 \quad | \text{ Ordnen}$$
$$x^2 - x - 42 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 42}$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{13}{2}$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -6$.
Die gegebene Gleichung hat aber nur die Lösung $x_1 = 7$.

Probe bei Gleichungen

Umformungen, bei denen wie in Beispiel a) Lösungen fortfallen, dürfen nicht vorgenommen werden. Dagegen lassen sich Umformungen wie in Beispiel b) oft nicht vermeiden.
Mit Hilfe der Probe können solche Zahlen ermittelt werden, die beim Lösen einer Gleichung auf diese Weise auftreten, aber nicht zur **Lösungsmenge** L gehören. Außerdem können Rechenfehler, die bei den Umformungen entstanden sind, erkannt werden.
Bei der Probe müssen nach dem Einsetzen beide Seiten der Gleichung getrennt ausgerechnet werden. Wiederholt man nämlich bei der Probe nichtäquivalente Umformungen aus dem Lösungsgang, so können aus falschen Aussagen wahre Aussagen entstehen. Dasselbe kann auch durch Wiederholung von Rechenfehlern aus dem Lösungsgang bewirkt werden.

■ Probe für das obige Beispiel b):

$\underline{x_1 = 7}$	Linke Seite:	$\sqrt{7+42} = \sqrt{49} = 7$
	Rechte Seite:	7
	Vergleich:	$7 = 7$
$\underline{x_2 = -6}$	Linke Seite:	$\sqrt{-6+42} = \sqrt{36} = 6$
	Rechte Seite:	-6
	Vergleich:	$6 \neq -6$

Also: $L = \{7\}$.

c) Die Gleichung $\sqrt{x+3} = -5$ ist nicht lösbar, da die Wurzel nicht negativ sein kann.
Jemand „löst" die Gleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= -5 &&\mid \text{Quadrieren} \\ x+3 &= 25 &&\mid -3 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $\sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$
Rechte Seite: -5
Vergleich: $5 \neq -5$,
also ist 22 keine Lösung.
Daraus folgt: $L = \emptyset$

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Alle Gleichungen der Form $mx + n = 0$ (m, n Konstante, $m \neq 0$) heißen **lineare Gleichungen mit einer Variablen**. (Auf den Fall $m = 0$ gehen wir hier nicht ein.)

d) $5x + 3 = 0$ e) $8x + 7 = 3$, $8x + 4 = 0$ f) $8x + 7 = 3x + 2$, $5x + 5 = 0$

g) Auch $3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$ läßt sich auf die Form $mx + n = 0$ bringen; man erhält dabei: $289x - 289 = 0$

Rechnerische Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen

Das Lösen von Gleichungen erfolgt mit Hilfe äquivalenter Umformungen.

h)
$$\begin{aligned} 8x + 7 &= 3 &&\mid -7 \\ 8x &= -4 &&\mid :8 \\ x &= -\frac{4}{8} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Probe:
Linke Seite: $8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7 = -4 + 7 = 3$
Rechte Seite: 3
Vergleich: $3 = 3$, also $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

i)
$$\begin{aligned} \frac{9}{x} + \frac{1}{2} &= \frac{10}{x} + \frac{4}{9} \quad (x \neq 0) &&\mid \text{Multiplikation mit Hauptnenner } 18x \\ 18x \cdot \frac{9}{x} + 18x \cdot \frac{1}{2} &= 18x \cdot \frac{10}{x} + 18x \cdot \frac{4}{9} &&\mid \text{Kürzen} \\ 162 + 9x &= 180 + 8x &&\mid -8x - 162 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $\frac{9}{18} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
Rechte Seite: $\frac{10}{18} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$
Vergleich: $1 = 1$, also $L = \{18\}$.

Die Multiplikation mit $18x$ ist eine äquivalente Umformung, da $x = 0$ nicht als Lösung hinzukommen kann. Diese Zahl mußte nämlich von vornherein ausgeschlossen werden, da für $x = 0$ die gegebene Gleichung keinen Sinn hat.

k) $5x + a = 2b - 3a \quad | -a$

$5x = 2b - 4a \quad | :5$

$x = \dfrac{2b - 4a}{5}$

Probe:

Linke Seite: $5 \cdot \dfrac{2b - 4a}{5} + a = 2b - 3a$

Rechte Seite: $2b - 3a$

Vergleich: $2b - 3a = 2b - 3a$

Auflösung derselben Gleichung nach a:

$5x + a = 2b - 3a \quad | -5x + 3a$

$4a = 2b - 5x \quad | :4$

$a = \dfrac{2b - 5x}{4}$

Probe:

Linke Seite: $5x + \dfrac{2b - 5x}{4} = \dfrac{15x + 2b}{4}$

Rechte Seite: $2b - 3\,\dfrac{2b - 5x}{4} = \dfrac{15x + 2b}{4}$

Vergleich: $\dfrac{15x + 2b}{4} = \dfrac{15x + 2b}{4}$

l) $\dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{x-7}{x-4}$; $(x \neq 2; x \neq 4)$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-2)(x-4)$ ist eine äquivalente Umformung, da $x = 2$ und $x = 4$ ausgeschlossen sind.

$(x-2)(x-4)\dfrac{x+3}{x-2} = (x-2)(x-4)\dfrac{x-7}{x-4}$ | Kürzen und Klammern auflösen

$x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - 2x - 7x + 14$ | Zusammenfassen

$8x = 26$ | : 8

$x = \dfrac{13}{4}$

Probe:

Linke Seite: $\dfrac{\frac{13}{4} + 3}{\frac{13}{4} - 2} = \dfrac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}} = 5$ Rechte Seite: $\dfrac{\frac{13}{4} - 7}{\frac{13}{4} - 4} = \dfrac{-\frac{15}{4}}{-\frac{3}{4}} = 5$

Vergleich: $5 = 5$, also $L = \left\{\dfrac{13}{4}\right\}$.

m) $x(x-7) = x(x-3)$ | Klammern auflösen

$x^2 - 7x = x^2 - 3x$ | $-x^2 + 3x$

$-4x = 0$ | $:(-4)$

$x = 0$

Probe: Linke Seite: $0(0-7) = 0$

Rechte Seite: $0(0-3) = 0$

Vergleich: $0 = 0$, also $L = \{0\}$.

Wenn in dieser Aufgabe zunächst durch die Variable x dividiert wird, so wird eine nicht-äquivalente Umformung durchgeführt. Die Lösung $x = 0$ fällt dabei fort.

$x(x-7) = x(x-3) \quad | :x$

$x - 7 = x - 3$

Diese Gleichung ist nicht lösbar.

n) $(x-3)(x+4) = (x-7)(x-3)$ | Klammern auflösen
$x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 - 3x - 7x + 21$ | $-x^2 + 10x + 12$
$11x = 33$ | $:11$
$x = 3$

Probe: Linke Seite: $(3-3)(3+4) = 0 \cdot 7 = 0$
Rechte Seite: $(3-7)(3-3) = (-4) \cdot 0 = 0$
Vergleich: $0 = 0$, also $L = \{3\}$.

Wenn in dieser Aufgabe die gegebene Gleichung zunächst durch $(x-3)$ dividiert wird, so ist das eine nicht-äquivalente Umformung. Die Lösung $x = 3$ fällt weg.

$(x-3)(x+4) = (x-7)(x-3)$ | $:(x-3)$
$x + 7 = x - 7$

Diese Gleichung ist nicht lösbar.

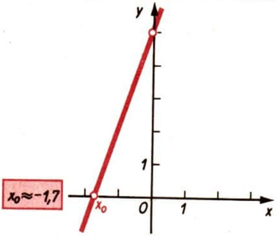
Graphische Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen

Jede lineare Gleichung mit einer Variablen (z. B. x) läßt sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $mx + n = 0$; $(m \neq 0)$ bringen.
Die Lösung dieser Gleichung ist die Nullstelle der Funktion $y = mx + n$.

↗ Nullstelle von Funktionen, Seite 61

Zur graphischen Lösung der Gleichung $mx + n = 0$ zeichnet man das Bild der Funktion $y = mx + n$ und liest die Nullstelle aus der Zeichnung ab. Wegen der Zeichenungenauigkeit bekommt man nach diesem Verfahren im allgemeinen nicht die genaue Lösung.

$3x + 5 = 0$;
zugehörige Funktionsgleichung:
$y = 3x + 5$
Nullstelle: $x \approx -1{,}7$
Probe:
Linke Seite: $3 \cdot (-1{,}7) + 5$
$= -5{,}1 + 5 = -0{,}1$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $-0{,}1 \neq 0$



Die Probe führt zu der Aussage, daß $-1{,}7$ nicht Lösung der Gleichung $3x + 5 = 0$ ist. Im Rahmen der Zeichenungenauigkeit kann man im Vergleich die Ungleichung $-0{,}1 \neq 0$ durch die wahre Aussage $-0{,}1 \approx 0$ ersetzen und $-1{,}7$ als **Näherungslösung** der gegebenen Gleichung akzeptieren. $\left(\text{Bei der rechnerischen Lösung ergibt sich } x = \frac{5}{3}.\right)$

Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

DEFINITION:
Zwei Ungleichungen heißen über einem gegebenen Grundbereich zueinander äquivalent, wenn sie über diesem Grundbereich dieselben Lösungen besitzen.

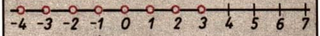
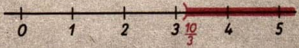
Äquivalente Umformungen für Ungleichungen
(1) Zusammenfassung entsprechender Glieder, die auf derselben Seite der Ungleichung stehen. (2) Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Vielfachen der Variablen bzw. gleicher Potenzen von ihr auf beiden Seiten. (3) Multiplikation beider Seiten mit ein und derselben positiven Zahl. Division beider Seiten durch ein und dieselbe positive Zahl. (4) Multiplikation beider Seiten mit ein und derselben negativen Zahl mit Umkehrung des Relationszeichens. Division beider Seiten durch ein und dieselbe negative Zahl mit Umkehrung des Relationszeichens.

Lösen von Ungleichungen mit einer Variablen

Die Zahlen, die für die Variable eingesetzt die jeweils betrachtete Ungleichung erfüllen, bilden die **Lösungsmenge** L der Ungleichung. Wenn keine Einschränkungen gemacht werden, wird als Variablengrundbereich der Bereich R angenommen.
Man löst eine lineare Ungleichung mit einer Variablen, indem man die Variable isoliert. Dazu formt man die Ungleichung äquivalent um.

Graphische Darstellung der Lösungsmenge linearer Ungleichungen mit einer Variablen

Die Lösungsmenge linearer Ungleichungen mit einer Variablen kann auf einer Zahlengeraden veranschaulicht werden.

$2x - 3 < x + 1;\ x \in Z \quad \vert +3$ $2x < x + 4 \quad \vert -x$ $x < 4$ $L = \{x < 4;\ x \in Z\}$.	**Die roten Punkte stellen einen Teil der Lösungsmenge dar.** 
$1{,}5\,x - 1 > 4;\ x \in R \quad \vert +1$ $1{,}5\,x > 5 \quad \vert :1{,}5$ $x > \frac{10}{3}$ $L = \left\{x > \frac{10}{3};\ x \in R\right\}$.	**Der rote Teil der Zahlengeraden stellt einen Teil der Lösungsmenge dar.**  **$x = \frac{10}{3}$ gehört nicht zur Lösungsmenge.**

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Gleichungen der Form $ax + by = c$ (a, b und c Konstanten, $a \neq 0$, $b \neq 0$) und alle Gleichungen, die sich durch äquivalente Umformungen auf diese Form bringen lassen, heißen lineare Gleichungen mit zwei Variablen. (Auf die Fälle $a = 0$ oder $b = 0$ gehen wir hier nicht ein.)

➡ C 3

Jedes Zahlenpaar $[x; y]$, das die Gleichung $ax + by = c$ erfüllt, heißt Lösung dieser Gleichung.
Jede dieser linearen Gleichungen mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen.

■

$3x + 4y = 7$

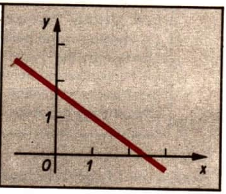
Durch äquivalente Umformung erhalten wir

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$.

Lösungen sind z. B. die Paare

$[1; 1]$, $[-1; 2{,}5]$, $\left[0; \frac{7}{4}\right]$, $\left[\frac{7}{3}; 0\right]$

x	y
1	1
-1	2,5
0	$\frac{7}{4}$
$\frac{7}{3}$	0



Die gesamte Lösungsmenge einer jeden Gleichung $ax + by = c$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$ wird dargestellt durch den jeweiligen Graph der Funktion $ax + by = c$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$.

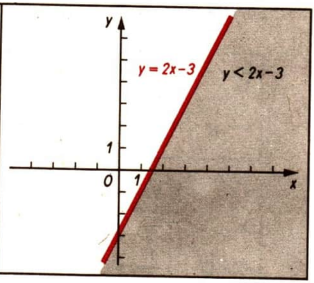
Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

$ax + by + c < 0$ bzw. $ax + by + c > 0$ sind lineare Ungleichungen mit zwei Variablen. Die Lösungen sind Zahlenpaare $[x; y]$.
Die Lösungsmenge kann durch Punkte der Ebene, die durch das x, y-Koordinatensystem aufgespannt wird, dargestellt werden.

■

$$\begin{array}{rl|l}
6 & < 4x - 2y & -6 \\
0 & < 4x - 2y - 6 & +2y \\
2y & < 4x - 6 & :2 \\
y & < 2x - 3 &
\end{array}$$

Die Lösungsmenge wird durch Punkte der der Halbebene, die unterhalb der Geraden $y = 2x - 3$ liegt, dargestellt.



Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen

(1) $a_1x + b_1y = c_1$ Variablen: x, y
(2) $a_2x + b_2y = c_2$ Konstanten: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen.

↗ Lineare Gleichungen mit zwei Variablen, Seite 73

> **DEFINITION:**
> **Die Lösungsmenge eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen ist gleich dem Durchschnitt der Lösungsmengen der beiden Einzelgleichungen.**

↗ Durchschnitt von Mengen, Seite 17

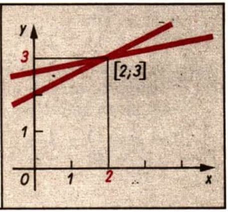
(1) $\quad 2x - 4y = -8$
(2) $-0{,}5x + 3y = 8$

Zu (1):

x	-2	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
y	1	$1{,}75$	2	$2{,}25$	$2{,}5$	3	$3{,}5$

Zu (2):

x	$-0{,}5$	0	1	$1{,}5$	2	3
y	$\frac{31}{12}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{35}{12}$	3	$\frac{19}{6}$



Die Probe muß an beiden Gleichungen vorgenommen werden.
Ein Gleichungssystem kann a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) unendlich viele Lösungen haben.

(1) $3x + 4y = 3$ (2) $3x + 4y = 8$	(1) $\quad 2x - 4y = -8$ (2) $-0{,}5x - 3y = \quad 8$	(1) $x + \quad y = 2$ (2) $4x + 4y = 8$
keine Lösung	Lösung: $x = 2$ $y = 3$	Unendlich viele Lösungen
Gleichungen des Systems widersprechen einander		Gleichungen des Systems sind voneinander abhängig

Rechnerische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Zur Lösung von Gleichungssystemen gibt es drei Verfahren:
a) das Gleichsetzungsverfahren,
b) das Einsetzungsverfahren,
c) das Verfahren der gleichen Koeffizienten.

Das Ziel jedes dieser Verfahren ist es, das Lösen eines Systems mit zwei Variablen auf das Lösen von Gleichungen mit einer Variablen zurückzuführen. Man sagt: Eine der Variablen wird eliminiert. Jedes Gleichungssystem kann mit jedem der drei Lösungsverfahren gelöst werden, falls es überhaupt lösbar ist. Die Anwendung jeweils eines der drei Lösungsverfahren auf ein Gleichungssystem ergibt
a) einen Widerspruch, falls das System nicht lösbar ist,
b) die Lösung, falls das System genau eine Lösung hat,
c) eine wahre Aussage, falls das System unendlich viele Lösungen hat.

➡ C 3

Das Gleichsetzungsverfahren

■ (1) $y = 1 + x$
(2) $y = 13 - 2x$

Wenn man die Existenz einer Lösung voraussetzt, so erfüllen die Zahlen des Lösungspaares beide Gleichungen. Auf den linken Seiten der beiden Gleichungen steht dann dieselbe Zahl, also auch auf den rechten Seiten, d. h., es gilt
$1 + x = 13 - 2x.$

Die beiden rechten Seiten wurden gleichgesetzt. Dadurch ist die Variable y eliminiert worden und eine Gleichung mit einer Variablen entstanden, die wie üblich gelöst wird:

$$\begin{aligned} 1 + x &= 13 - 2x \quad | \quad +2x - 1 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist eine Zahl des Lösungspaares gefunden. Zur Bestimmung der anderen setzt man sie in eine der gegebenen Gleichungen ein:

(1) $y = 1 + 4$
$y = 5$

Probe:

(1) Linke Seite: 5
Rechte Seite: $1 + 4 = 5$
Vergleich: $5 = 5$

(2) Linke Seite: 5
Rechte Seite: $13 - 8 = 5$
Vergleich: $5 = 5$

Also $L = \{[4; 5]\}$.

Das Einsetzungsverfahren

■ a) (1) $9x - 5y = 3$
(2) $y = 8x - 13$

Unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung werden beide Gleichungen von den Zahlen des Lösungspaares erfüllt. Gleichung (2) besagt dann, daß man in Gleichung (1) $8x - 13$ für y einsetzen und so die Variable y eliminieren kann:

$$\begin{aligned} (1)\; 9x - 5(8x - 13) &= 3 && \text{Klammer auflösen} \\ 9x - 40x + 65 &= 3 && \text{Zusammenfassen} \\ -31x + 65 &= 3 && -65 \\ -31x &= -62 && :(-31) \\ x &= 2 && \text{Einsetzen in (2)} \end{aligned}$$

(2) $y = 8 \cdot 2 - 13$
$y = 3$

Probe:

(1) Linke Seite: $9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3$
Rechte Seite: 3
Vergleich: $3 = 3$

(2) Linke Seite: 3
Rechte Seite: $8 \cdot 2 - 13 = 3$
Vergleich: $3 = 3$

Also $L = \{[2; 3]\}$.

b) $$\begin{array}{ll|l}
(1) & \frac{11}{4}x + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4} & \\
(2) & \qquad \frac{x}{2} = 1 - y & \cdot 2 \\
\hline
(2) & \qquad x = 2 - 2y & \text{Einsetzen in (1)} \\
(1) & \frac{11}{4}(2 - 2y) + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4} & \\
 & \frac{11}{2} - \frac{11}{2}y + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4} & \\
 & \qquad \frac{11}{2} = \frac{17}{4} &
\end{array}$$

Es hat sich ein Widerspruch ergeben. Das bedeutet, daß es kein Zahlenpaar gibt, das beide Gleichungen des gegebenen Systems erfüllt. Die beiden Gleichungen widersprechen einander.

↗ Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen (Tabelle), Seite 75

Das erkennt man deutlich auch daran, daß man das gegebene Gleichungssystem auf folgende Form bringen kann:

$$\begin{array}{ll}
(1) & x + 2y = \frac{17}{11} \\
(2) & x + 2y = 2 \\
\hline
\end{array}$$

c) $$\begin{array}{ll}
(1) \; x - 3y = 15 & \\
\qquad y = \frac{1}{3}x - 5 & \text{Einsetzen in (1)} \\
\hline
x - 3\left(\frac{3}{1}x - 5\right) = 15 & \\
\quad x - x + 15 = 15 & \\
\qquad 15 = 15 &
\end{array}$$

Es ist die wahre Aussage $15 = 15$ entstanden. Das System hat unendlich viele Lösungen. Jedes Zahlenpaar, das die eine Gleichung erfüllt, erfüllt auch die andere. Die Gleichungen sind voneinander abhängig.

↗ Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen (Tabelle), Seite 75

Das zeigt auch folgende Umformung:

$$\begin{array}{ll|l}
(1) & x - 3y = 15 & \\
(2) & \qquad y = \frac{1}{3}x - 5 & \cdot(-3) \\
\hline
(1) & x - 3y = 15 & \\
(2) & \quad -3y = -x + 15 & +x \\
\hline
(1) & x - 3y = 15 & \\
(2) & x - 3y = 15 &
\end{array}$$

➡ C 3

Verfahren der gleichen Koeffizienten

■ $(1)\ 6x - 4y = -28$
$(2)\ 7x + 2y = -6$

Durch geeignetes Multiplizieren oder Dividieren beider Gleichungen erhält man für eine der Variablen gleiche Koeffizienten. Durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen wird dann diese Variable eliminiert.

Eliminieren von x:

$$\begin{aligned}(1)\quad 6x - 4y &= -28 \quad | \cdot 7\\ (2)\quad 7x + 2y &= -6 \quad | \cdot 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)\quad 42x - 28y &= -196\\ (2)\quad 42x + 12y &= -36\end{aligned}$$

$(1) - (2)$:

$$\begin{aligned}-40y &= -160\\ y &= 4\end{aligned}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{aligned}(2)\quad 7x + 2 \cdot 4 &= -6 \quad | -8\\ 7x &= -14 \quad | :7\\ x &= -2\end{aligned}$$

Eliminieren von y:

$$\begin{aligned}(1)\quad 6x - 4y &= -28 \quad | \ :2\\ (2)\quad 7x + 2y &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)\quad 3x - 2y &= -14\\ (2)\quad 7x + 2y &= -6\end{aligned}$$

$(1) + (2)$:

$$\begin{aligned}10x &= -20\\ x &= -2\end{aligned}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{aligned}(2)\quad 7 \cdot (-2) + 2y &= -6 \quad | +14\\ 2y &= 8 \quad | :2\\ y &= 4\end{aligned}$$

Probe:

(1) Linke Seite: $6 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 = -12 - 16 = -28$
Rechte Seite: -28
Vergleich: $-28 = -28$

(2) Linke Seite: $7 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -14 + 8 = -6$
Rechte Seite: -6
Vergleich: $-6 = -6$

Also: $L = \{[-2;\ 4]\}$.

Graphische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

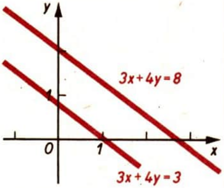
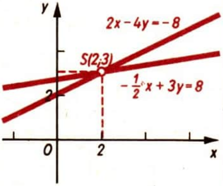
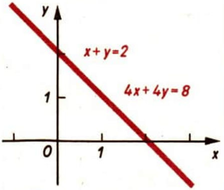
Zur graphischen Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

$(1)\ a_1x + b_1y = c_1$
$(2)\ a_2x + b_2y = c_2$
(Es sei nicht a_1 und b_1 oder a_2 und b_2 gleichzeitig Null)

stellt man die Lösungen beider Gleichungen in ein und demselben Koordinatensystem dar.

↗ Lineare Gleichungen mit zwei Variablen, Seite 73

Dadurch erhält man zwei Geraden. Die Lösungen des Gleichungssystems sind diejenigen Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen. Die graphischen Darstellungen dieser Lösungen sind also diejenigen Punkte, die auf beiden Geraden liegen.
Hat das gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung, so findet man diese als Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden in der graphischen Darstellung.

1. Fall: **Zwei parallele nicht zusammenfallende Geraden.** **Die Gleichungen widersprechen einander.** **Das System hat keine Lösung.**	■ $(1)\ 3x + 4y = 3$ $(2)\ 3x + 4y = 8$ $(1)\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ $(2)\ y = -\frac{3}{4}x + 2$	
2. Fall: **Zwei einander schneidende Geraden.** **Das System hat genau eine Lösung.**	■ $(1)\ 2x - 4y = -8$ $(2)\ -\frac{1}{2}x + 3y = 8$ $(1)\ y = \frac{1}{2}x + 2$ $(2)\ y = \frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$ **Man liest ab:** $x \approx 2;\ y \approx 3$	
3. Fall: **Zwei zusammenfallende Geraden.** **Die Gleichungen sind voneinander abhängig.** **Das System hat unendlich viele Lösungen.**	■ $(1)\ x + y = 2$ $(2)\ 4x + 4y = 8$ $(1)\ y = -x + 2$ $(2)\ y = -x + 2$	

Systeme von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen

Mit Hilfe derselben Lösungsverfahren wie bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen werden die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Variablen schrittweise verringert. Das heißt, zuerst wird eine Variable eliminiert, wobei man ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen erhält.

■

$$\begin{array}{llr|l}
(1) & 3x + 4y + 3z = & 1 & \cdot 2 \\
(2) & 2x - y - z = & 6 & \cdot(-3) \\
(3) & x + 3y + 2z = & -1 & \\
\hline
(1) & 6x + 8y + 6z = & 2 & \text{Addition} \\
(2) & -6x + 3y + 3z = & -18 & \text{von (1) und (2)} \\
\hline
(1') & 11y + 9z = & -16 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcl|l}
(1) & 3x + 4y + 3z & = & 1 & \\
(2) & 2x - y - z & = & 6 & \\
(3) & x + 3y + 2z & = & -1 & (-2) \\
\hline
(2) & 2x - y - z & = & 6 & \text{Addition von (2) und (3)} \\
(3) & -2x - 6y - 4z & = & 2 & \\
\hline
(2') & -7y - 5z & = & 8 & \\
(1') & 11y + 9z & = & -16 & \cdot 5 \\
(2') & -7y - 5z & = & 8 & \cdot 9 \\
\hline
(1') & 55y + 45z & = & -80 & \text{Addition von (1') und (2')} \\
(2') & -63y - 45z & = & 72 & \\
\hline
 & -8y & = & -8 & :(-8) \\
 & y & = & 1 & \text{Einsetzen in (2')} \\
(2') & -7 \cdot 1 - 5z & = & 8 & +7 \\
 & -5z & = & 15 & :(-5) \\
 & z & = & -3 &
\end{array}
$$

$y = 1$ und $z = -3$ in (3) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
x + 3 \cdot 1 + 2(-3) &= -1 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Probe:

(1) Linke Seite: $3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = 6 + 4 - 9 = 1$
Rechte Seite: 1
Vergleich: $1 = 1$

(2) Linke Seite: $2 \cdot 2 - 1 + 3 = 4 - 1 + 3 = 6$
Rechte Seite: 6
Vergleich: $6 = 6$

(3) Linke Seite: $2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 2 + 3 - 6 = -1$
Rechte Seite: -1
Vergleich: $-1 = -1$

Also $L = \{[2; 1; -3]\}$.

C 4 Proportionalität, Prozentrechnung Zinsrechnung

Verhältnis von Zahlen

▶ **DEFINITION:**

Das Verhältnis der Zahlen a und b (a, b beliebig reell; $a \neq 0$, $b \neq 0$) ist der Quotient $\frac{a}{b}$ (auch $a : b$ geschrieben).

Das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ermöglicht einen Vergleich der Zahlen a und b. Dieser Vergleich ist besonders übersichtlich, wenn das Verhältnis durch Erweitern bzw. Kürzen und Runden in ganzen Zahlen angegeben wird.

↗ Runden, Seite 54
↗ Kürzen, Erweitern, Seite 31

Verhältnisse von Größen

Gleichartige Größenangaben können verglichen werden, indem man bei gleichen Einheiten das Verhältnis ihrer Maßzahlen bildet.	*Verschiedenartige Größenangaben* können verglichen werden, indem man das Verhältnis ihrer Maßzahlen bildet und zu diesem die Einheit hinzufügt, die sich durch die Quotientenbildung ergibt.
■ Verhältnis der Spurweite der Modellbahn TT zur Spurweite der Reichsbahn: $\frac{12\ \text{mm}}{1435\ \text{mm}} \approx \frac{1}{120}$.	■ Verhältnis der zurückgelegten Weglänge eines 100-m-Läufers zur dazu benötigten Zeit: $\frac{100\ \text{m}}{12{,}8\ \text{s}} \approx 7{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 28\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Absoluter Fehler

▶ **DEFINITION:**
Die Differenz zwischen einem Meß- oder Näherungswert und dem tatsächlichen bzw. geforderten Wert einer Größe heißt absoluter Fehler.

Je nach Vorzeichen dieser Differenz ist der absolute Fehler positiv oder negativ. Er hat dieselbe Dimension wie die betrachtete Größe.

↗ Rechnen mit Näherungswerten, Seite 53

Der relative Fehler

▶ **DEFINITION:**
Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum tatsächlichen bzw. geforderten Wert einer Größe heißt relativer Fehler.

Der relative Fehler ist eine Zahl (ohne Einheit), die dasselbe Vorzeichen hat wie der zugehörige absolute Fehler.

➡ C 4

Der prozentuale Fehler

▶ **DEFINITION:**
Der prozentuale Fehler ist der in Prozenten angegebene relative Fehler.

↗ Prozentrechnung, Seite 85

■ Bei einer Präzisionsmessung wurde die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu 299792,5 km · s⁻¹ ermittelt. Wie groß ist demgegenüber der Fehler, wenn 300000 km · s⁻¹ angegeben werden?

↗ Lichtgeschwindigkeit c, Ph i Üb, Seite 203
↗ Lichtgeschwindigkeit c, Taf, Seite 39

absoluter Fehler	$300000\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1} - 299790\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1} = +210\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$
relativer Fehler	$\dfrac{+210\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}}{299790\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}} = +0{,}0007$
prozentualer Fehler	$+0{,}0007 = +\dfrac{0{,}07}{100} = +0{,}07\ \%$

Zueinander proportionale Zahlenfolgen

▶ **DEFINITION:**
Zahlenfolgen heißen zueinander (direkt) proportional, wenn sich jedes Glied der einen Folge aus dem entsprechenden Glied der anderen Folge durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor ergibt.
Dieser Faktor heißt Proportionalitätsfaktor.

x sei ein Glied der ersten Folge, y ein Glied der zweiten.
$y \sim x$
$y = k \cdot x$
$k = \dfrac{y}{x}$

■

x	5	7	10	11	15	20	23	30
y	7,5	10,5	15	16,5	22,5	30	34,5	45

Proportionalitätsfaktor: $k = \dfrac{3}{2}$

Die Verhältnisse entsprechender Glieder zweier zueinander proportionaler Zahlenfolgen sind alle untereinander gleich (gleich dem Proportionalitätsfaktor):

$\dfrac{y}{x} = k.$

DEFINITION:
Zahlenfolgen heißen zueinander umgekehrt proportional, wenn sich jedes Glied der einen Folge aus dem Reziproken des entsprechenden Gliedes der anderen Folge durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor ergibt.

x sei ein Glied der ersten Folge, y ein Glied der zweiten.

$y \sim \frac{1}{x}$

$y = k \cdot \frac{1}{x}$

$k = y \cdot x$

↗ Reziprokes, Seite 34

x	22	18	15	14	10	9	7	4
y	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$

Die Produkte entsprechender Glieder zweier zueinander umgekehrt proportionaler Zahlenfolgen sind alle untereinander gleich $x \cdot y = k$.

Zueinander proportionale Größen, zueinander umgekehrt proportionale Größen

Eine Größe heißt direkt proportional zu einer Größe , wenn sich aus jeder Maßzahl der einen Größe bei festgewählten Einheiten die zugeordnete Maßzahl der anderen Größe durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor k ergibt.

a) Der Widerstand R eines Leiters mit konstantem Querschnitt ist (direkt) proportional zur Länge l des Leiters. Ein Versuch ergab folgende Werte:

l in cm	50	100	150	200
R in Ω	1,7	3,6	5,0	7,1

Verhältnisse aus anderen einander zugeordneten Größen können geringe Abweichungen ergeben, die auf Meßungenauigkeiten beruhen.

$R \sim l$

$$k_1 = \frac{R_1}{l_1} = \frac{1{,}7\ \Omega}{50\ \text{cm}} \approx 0{,}034\ \frac{\Omega}{\text{cm}} \qquad k_2 = \frac{3{,}6\ \Omega}{100\ \text{cm}} = 0{,}036\ \frac{\Omega}{\text{cm}}$$

↗ Widerstandsgesetz, Ph i Üb, Seite 121

b) Die Masse m eines Körpers ist proportional zu seinem Volumen V:
$m \sim V$; $m = \varrho \cdot V$
Der Proportionalitätsfaktor ist die Dichte ϱ des Körpers.

↗ Dichte, Ph i Üb, Seite 50

Eine Größe heißt umgekehrt proportional zu einer Größe , wenn sich aus dem Reziproken jedes Zahlenwertes der einen Größe bei festgewählten Einheiten der zugeordnete Zahlenwert der anderen Größe durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor k ergibt.

c) Der Widerstand R eines Leiters mit konstanter Länge ist umgekehrt proportional zum Querschnitt A des Leiters. Ein Versuch ergab folgende Werte:

R in Ω	1,6	0,72	0,5	0,4
A in mm^2	0,16	0,32	0,48	0,64

Produkte aus anderen einander zugeordneten Größen können geringe Abweichungen ergeben, die auf Meßungenauigkeiten beruhen.

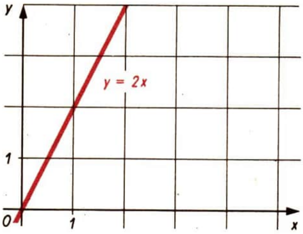
$R \sim \frac{1}{A}$

$k_1 = R_1 \cdot A_1 = 1{,}6 \cdot 0{,}16\ \Omega \cdot mm^2 \approx 0{,}26\ \Omega \cdot mm^2$
$k_2 = 0{,}72 \cdot 0{,}32\ \Omega \cdot mm^2 \approx 0{,}23\ \Omega \cdot mm^2$

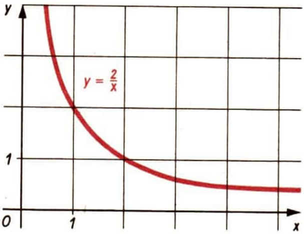
↗ Widerstandsgesetz, Ph i Üb, Seite 121

Graphische Darstellung von Proportionalitäten

Direkte Proportionalität
$y = k \cdot x;\ k = 2;\ x, y \in R$



Umgekehrte Proportionalität
$y \cdot x = k;\ k = 2;\ x, y \in R$



↗ Reelle Zahlen, Seite 51

Verhältnisgleichungen

Eine Gleichung der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \neq 0)$ bzw. $a : b = c : d$ nennt man auch eine Verhältnisgleichung (Proportion).
Die Zahlen a, b, c, d heißen die *Glieder* der Verhältnisgleichung.
Es gibt Anwendungen, in denen zueinander proportionale Größen auftreten. Mit Hilfe von Verhältnisgleichungen kann man in diesen Fällen aus drei passend gegebenen Maßzahlen die zugehörige vierte errechnen.

Wieviel Gramm Magnesiumoxid entstehen bei der Verbrennung von 10 g Magnesium?

Aufstellen der Gleichung für die Reaktion: $2\,Mg + O_2 \rightarrow 2\,MgO$

Eintragen der gegebenen und der gesuchten Größen:

$$\underset{10\,g}{2\,Mg} + O_2 \rightarrow \underset{x}{2\,MgO}$$

$$\underset{48\,g}{2\,Mg} + O_2 \rightarrow \underset{80\,g}{2\,MgO}$$

Aufstellen der Verhältnisgleichung

$$\frac{10\,g}{48\,g} = \frac{x}{80\,g}$$

$$x = \frac{10\,g \cdot 80\,g}{48\,g}$$

Es entstehen 16,7 g Magnesiumoxid.

$$x = \frac{50}{3}\,g \approx 16{,}7\,g$$

↗ Masseberechnungen bei chem. Reaktionen, Ch i Üb, Seite 57

Prozentrechnung

Um zwei Verhältnisse bequem vergleichen zu können, wählt man als gemeinsamen Nenner dieser Verhältnisse (als Vergleichszahl) häufig die Zahl 100.

DEFINITION:
Ein Prozent einer Zahl ist der hundertste Teil dieser Zahl.
Für 1 Prozent schreibt man 1 %.

1 % von G sind $\frac{G}{100}$

p % von G sind $p \cdot \frac{G}{100}$

Der Prozentrechnung liegt die folgende Verhältnisgleichung zugrunde, in der W der Prozentwert, p der Prozentsatz und G der Grundwert ist.

$$\boxed{\frac{W}{p} = \frac{G}{100}}$$

Berechnung des Grundwertes	Prozentsatzes	Prozentwertes
$G = \frac{W \cdot 100}{p}$	$p = \frac{W \cdot 100}{G}$	$W = \frac{G \cdot p}{100}$

Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen unter Berücksichtigung der Zeit. Dabei entsprechen die Zinsen eines Geldbetrages für ein volles Jahr dem Prozentwert.

Prozentrechnung	Zinsrechnung
Grundwert G	Grundbetrag G
Prozentsatz p	Zinssatz p
Prozentwert W	Zinsen Z
	Zeit t

$$\boxed{\frac{Z}{p} = \frac{G}{100}}$$

Zinsen für t Jahre:	t Monate:	t Tage:
$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{12}$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}$

Festlegung: 1 Jahr = 12 Monate; 1 Monat = 30 Tage

In der Wirtschaft ergeben sich bei längeren Zinszeiträumen höhere Zinsen, da die Zinsen ihrerseits mit verzinst werden (Zinseszinsrechnung).

C 5 Quadratische Funktionen

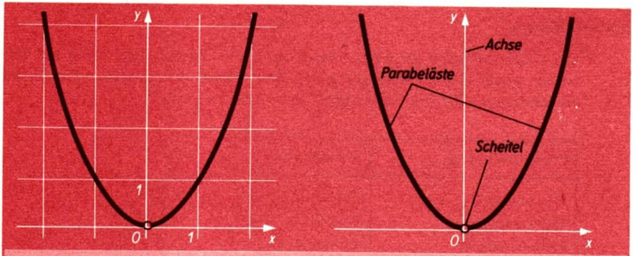
Quadratische Funktionen

Jede Funktion mit der Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$, wobei die Koeffizienten a, b, c beliebige reelle Zahlen mit $a \neq 0$ sind, heißt quadratische Funktion.

$$y = \underbrace{ax^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{bx}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{absolutes Glied}}$$

Die Funktion $y = x^2$

Gilt in der Gleichung der quadratischen Funktion $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, so erhält man die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$.
Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, treten im Wertebereich *nur* nichtnegative Zahlen auf. Andererseits ist jede nichtnegative reelle Zahl Quadrat einer reellen Zahl. Im Wertebereich treten also auch *alle* nichtnegativen reellen Zahlen auf.
Der Graph der Funktion $y = x^2$ ist eine **quadratische Parabel**. Für $x = 0$ ergibt sich der kleinste Funktionswert, nämlich $y = 0$.



Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$; *Wertebereich:* $0 \leq y < \infty$

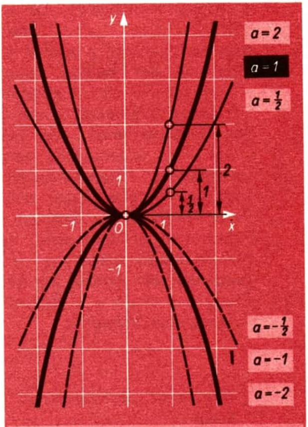
Wegen $x^2 = (-x)^2$ haben Parabelpunkte mit gleicher Ordinate den gleichen Abstand von der y-Achse. Das bedeutet, daß die y-Achse Symmetrieachse der Parabel ist.
Man nennt diese Symmetrieachse auch **Parabelachse**. Die beiden zueinander symmetrischen Teile der Parabel heißen **Parabeläste**.
Der Punkt, in dem eine Parabel ihre Symmetrieachse schneidet, heißt **Scheitel** dieser Parabel. Der Scheitel der Parabel $y = x^2$ liegt im Ursprung. Die Parabel öffnet sich nach oben. Die Richtungsangaben „nach oben" bzw. „nach unten" beziehen sich immer auf die übliche Lage der Koordinatenachsen. Im Intervall $-\infty < x \leqq 0$ ist die Funktion $y = x^2$ monoton fallend, im Intervall $0 \leqq x < \infty$ monoton steigend.

↗ Funktion (Definitionsbereich, Wertebereich), Seite 58
↗ Axiale Symmetrie (Symmetrieachse), Seite 152
↗ Monotonie, Seite 60

Die Funktionen $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Gilt in der Gleichung der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ entweder $a > 0$ oder $a < 0$ sowie $b = 0$ und $c = 0$, so erhält man die Funktion $y = ax^2$.
Beim Vergleich der beiden Funktionen $y = x^2$ und $y = ax^2$ erkennt man:
Für jedes Argument x erhält man den Funktionswert der Funktion $y = ax^2$, indem man den entsprechenden Funktionswert der Funktion $y = x^2$ mit a multipliziert.

↗ Argument, Funktionswert, Seite 59



Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Wertebereich: $0 \leqq y < \infty$ falls $a > 0$
$-\infty < y \leqq 0$ falls $a < 0$

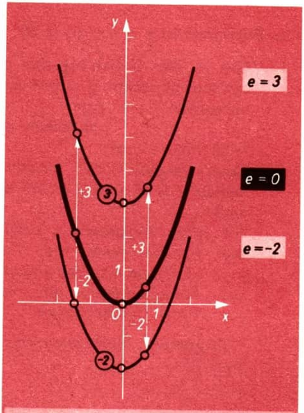
Beim Vergleich der Graphen beider Funktionen erkennt man in den einzelnen Fällen:

$\lvert a \rvert > 1$	$a > 0$	Streckung der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ in Richtung der y-Achse; Öffnung nach oben
	$a < 0$	Streckung der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse; Öffnung nach unten ↗ Spiegelung an einer Geraden, Seite 148

$\lvert a\rvert = 1$	$a = 1$	keine Änderung; Öffnung nach oben
	$a = -1$	Spiegelung der Parabel $y = x^2$ an der x-Achse; Öffnung nach unten
$\lvert a\rvert < 1$	$a > 0$	Stauchung der Parabel $y = x^2$ in Richtung der y-Achse; Öffnung nach oben
	$a < 0$	Stauchung der Parabel $y = x^2$ in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse; Öffnung nach unten

Die Funktionen $y = x^2 + e$

Wenn in der Gleichung der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ gilt: $a = 1$, $b = 0$, $c = e$, so erhält man die Funktion $y = x^2 + e$. Beim Vergleich der beiden Funktionen $y = x^2$ und $y = x^2 + e$ erkennt man: Für jedes Argument x erhält man den Funktionswert der Funktion $y = x^2 + e$, indem man zum entsprechenden Funktionswert der Funktion $y = x^2$ die Zahl e addiert. Beim Vergleich der Graphen beider Funktionen erkennt man, daß die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + e$ gegenüber der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ um e in Richtung der y-Achse verschoben ist.



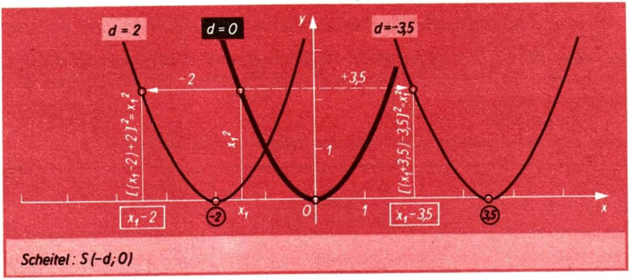
Scheitel : $S(0;e)$

↗ Argument, Funktionswert, Seite 59

Die Funktionen $y = (x + d)^2$

Eine quadratische Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$, für die $a = 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ist, läßt sich einfacher untersuchen, wenn ihre Gleichung die Form $y = (x + d)^2 + e$ hat. Unter Umständen ergibt sich $e = 0$, so daß die Gleichung die Form $y = (x + d)^2$ annimmt. Die Funktionen $y = x^2$ und $y = (x + d)^2$ unterscheiden sich dadurch, daß derselbe Funktionswert, den die Funktion $y = x^2$ für das Argument x annimmt, von der Funktion $y = (x + d)^2$ für das Argument $x - d$ angenommen wird.
Es ist nämlich $[(x - d) + d]^2 = x^2$.

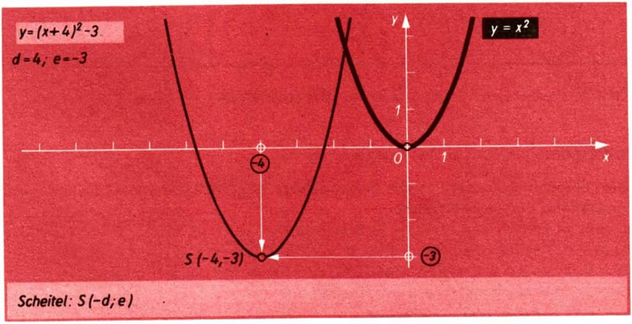
Der Graph der Funktion $y = (x + d)^2$ ist also die um $-d$ in Richtung der x-Achse verschobene Parabel $y = x^2$.



Scheitel: S(-d;0)

Die Funktionen $y = (x + d)^2 + e$

Es liegt derselbe Fall der quadratischen Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ vor wie im Fall der Gleichung $y = (x + d)^2$, nur daß die Koeffizienten b und c so beschaffen sind, daß noch ein Summand e auftritt.
Das bedeutet, daß der Graph der Funktion $y = (x + d)^2 + e$ die um e In Richtung der y-Achse **und** um $-d$ in Richtung der x-Achse verschobene Parabel $y = x^2$ ist.



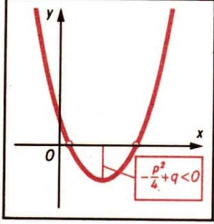
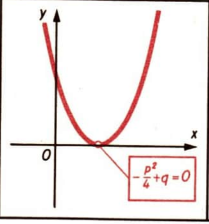
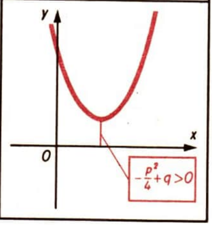
Scheitel: S(-d;e)

Die Funktionen $y = x^2 + px + q$

Aus $y = (x + d)^2 + e$
erhält man durch Ausrechnen

$y = x^2 + 2dx + d^2 + e$	Zur Abkürzung setzt man $2d = p$
$y = x^2 + px + q$	und $d^2 + e = q$.

Umgekehrt ist der Graph einer jeden Funktion $y = x^2 + px + q$ eine zu der Parabel $y = x^2$ kongruente Parabel mit dem Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse liegt und die sich nach oben öffnet. Die Koordinaten des Scheitelpunktes ergeben sich aus den Gleichungen $2d = p$ und $d^2 + e = q$. Die Anzahlen der Nullstellen der Funktionen
$y = x^2 + px + q$
lassen sich jeweils an der Ordinate des Scheitelpunktes ablesen:

$-\frac{p^2}{4} + q < 0$	$-\frac{p^2}{4} + q = 0$	$-\frac{p^2}{4} + q > 0$
zwei Nullstellen	eine Nullstelle	keine Nullstelle
Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse	Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse	Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse
		

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$; Wertebereich: $-\frac{p^2}{4} + q \leqq y < \infty$.

Die Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Die Gleichungen der zuvor behandelten quadratischen Funktionen sind Spezialfälle dieser Gleichung:
a) $y = x^2$ erhält man für $a = 1$; $b = c = 0$
b) $y = ax^2$ erhält man für $a \neq 0$; $b = c = 0$
c) $y = x^2 + px + q$ erhält man für $a = 1$; $b = p$; $c = q$
Durch Ausklammern von a erhält man aus
$y = ax^2 + bx + c$ die Gleichung

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 + px + q);\ \left(\frac{b}{a} = p;\ \frac{c}{a} = q\right)$$

Der Graph dieser Funktion ergibt sich dadurch, daß die Ordinaten aller Punkte der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ auf das $|a|$-fache gestreckt oder gestaucht und eventuell (falls $a < 0$) an der x-Achse gespiegelt werden.

↗ Die Funktionen $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ (Tabelle), Seite 87

C 6 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ und alle Gleichungen, die sich durch äquivalente Umformungen auf diese Form bringen lassen, heißen quadratische Gleichungen.
Die Nullstellen der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Je nach der Anzahl der Nullstellen hat diese Gleichung zwei Lösungen oder eine Lösung oder sie hat keine Lösung. Dividiert man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch a, so erhält man

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

und setzt man nun $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$, so erhält man die **Normalform der quadratischen Gleichung**:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Zur Lösung dieser Gleichung unterscheidet man vier Fälle:

(1) p, q beliebig: $x^2 + px + q = 0$
(2) p beliebig, $q = 0$: $x^2 + px = 0$
(3) $p = 0$, q beliebig: $x^2 + q = 0$
(4) $p = 0$, $q = 0$: $x^2 = 0$

Die Fälle (2) bis (4) sind Spezialfälle von (1).
Diese Spezialfälle lassen sich auch mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel, die für (1) in Anwendung gebracht wird, lösen; es gibt jedoch hierfür auch kürzere Lösungswege.

↗ Äquivalente Gleichungen, Seite 67

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Folgende äquivalente Umformungen der Normalform der quadratischen Gleichung führen zur Lösungsformel:

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + px = -q$$
$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Das Glied $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ heißt „quadratische Ergänzung“. Es ermöglicht die Termumwandlung:
$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ gibt es keine Lösung x, da $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ für keine Zahl x negativ wird.

➡ C 6

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0$ kann man wie folgt äquivalent umformen:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = 0$$

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist, sind folgende Zahlen Lösungen:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; für x_1 wird der erste Faktor gleich 0.

$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; für x_2 wird der zweite Faktor gleich 0.

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

■ a) $x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{21}{32} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1 + 168}{256}}$

$= -\frac{1}{16} \pm \frac{13}{16}$

$x_1 = \frac{3}{4}$

$x_2 = -\frac{7}{8}$

Also: $L = \left\{\frac{3}{4}; -\frac{7}{8}\right\}$

Probe:

Lösung: $x_1 = \frac{3}{4}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{21}{32}$

$= \frac{9}{16} + \frac{3}{32} - \frac{21}{32} = 0$

Vergleich: $0 = 0$

Lösung $x_2 = -\frac{7}{8}$

$\left(-\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{21}{32}$

$= \frac{49}{64} - \frac{7}{64} - \frac{42}{64} = 0$

Vergleich: $0 = 0$

■ b) $x^2 - 4{,}2x + 4{,}41 = 0$

$x_{1,2} = 2{,}1 \pm \sqrt{4{,}41 - 4{,}41}$

$x_{1,2} = 2{,}1$

Also: $L = \{2{,}1\}$.

Probe:

$2{,}1^2 - 4{,}2 \cdot 2{,}1 + 4{,}41$

$= 4{,}41 - 8{,}82 + 4{,}41 = 0$

Vergleich: $0 = 0$

c) $x^2 - 1{,}3x + 9{,}5 = 0$

$$x_{1,2} = 0{,}65 \pm \sqrt{0{,}65^2 - 9{,}5}$$

Wegen $0{,}65^2 - 9{,}5 < 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

Diskriminante

Der Radikand in der Lösungsformel, er lautet $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, ist für die Anzahl der Lösungen entscheidend; er heißt **Diskriminante**. Die Scheitelpunktsordinate des Graphen der zur gegebenen Gleichung gehörenden Funktion ist gleich $-D$.

Diskriminante D	Anzahl der Lösungen von $x^2 + px + q = 0$	Anzahl der Nullstellen von $y = x^2 + px + q$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$	zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	zwei Nullstellen
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	eine Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$	eine Nullstelle
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	keine Lösung	keine Nullstelle

Für welche x gilt

$(x - a)(x + 1) + a(a - x) = b + x \quad (a + b \geqq 0)$?

$$x^2 + x - ax - a + a^2 - ax = b + x$$
$$x^2 - 2ax + a^2 - a - b = 0$$

Es ist $p = -2a$ und $q = a^2 - a - b$.

Wegen

$$D = \frac{p^2}{4} - q = a^2 - a^2 + a + b = a + b$$

hat die gegebene Gleichung nur dann reelle Lösungen, wenn $a + b \geqq 0$ ist. In diesem Fall ist

$x_1 = a + \sqrt{a + b}$ und

$x_2 = a - \sqrt{a + b}$.

Zerlegung in Linearfaktoren

Die Zahlen x_1 und x_2 sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ genau dann, wenn sich die linke Seite dieser Gleichung folgendermaßen in ein Produkt aus zwei in x linearen Faktoren zerlegen läßt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

➡ C 6

■ Die Summe $x^2 + 6x - 7$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.
Wir lösen die Gleichung $x^2 + 6x - 7 = 0$ und erhalten als Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -7$.
Folglich gilt: $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$.

Satz von Vieta

▶ **SATZ:**
Die Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Die Lösungen einer Gleichung heißen auch **Wurzeln** dieser Gleichung. Der Satz von VIETA kann zur Probe benutzt werden.

■
$$x^2 + \frac{2}{5}x - 0{,}32 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1+8}{25}}$$
$$= -\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}$$
$$x_1 = \frac{2}{5}; \quad x_2 = -\frac{4}{5}$$

Probe:
$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{5} = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{8}{25} = -0{,}32 = q$$

Spezialfälle der Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Auf der Seite 91 sind vier Fälle für quadratische Gleichungen unterschieden worden, wobei die Fälle (2) bis (4) Spezialfälle von (1) sind. Diese Spezialfälle sind wie jede quadratische Gleichung mit der allgemeinen Lösungsformel lösbar.

↗ Lösungsformel für quadratische Gleichungen, Seite 91 und 92

Bequemer wird in diesen Fällen die Lösung auf folgende Weise:

$x^2 + q = 0$	$x^2 + px = 0$
$x^2 = -q$ Für $q > 0$ keine Lösung. Für $q = 0$ gilt $x_{1,2} = 0$. Für $q < 0$ gilt $x_1 = \sqrt{-q}$; $x_2 = -\sqrt{-q}$.	$x(x+p) = 0$ Für $p = 0$ gilt $x_{1,2} = 0$. Für $p \neq 0$ gilt $x_1 = 0$; $x_2 = -p$

C 7 Potenzfunktionen $y = x^k$ $(k \in Z)$

Die Potenz a^k

DEFINITION:
Die Potenz a^k wird für reelle Zahlen a und ganze Zahlen k folgendermaßen definiert:

$a^k \underset{\text{Def}}{=} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (k Faktoren) für $k \geqq 2$

$a^k \underset{\text{Def}}{=} a$ für $k = 1$

$a^k \underset{\text{Def}}{=} 1$ für $k = 0$ und $a \neq 0$

$a^k \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{a^{-k}}$ für $k < 0$ und $a \neq 0$

Dabei heißt a die Basis der Potenz und k der Exponent.

Durch den letzten Teil dieser Definition werden Potenzen mit negativen Exponenten mit Hilfe von Potenzen, deren Exponent eine natürliche Zahl ist, definiert.

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $\quad 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$

Die Beziehung $a^k = \frac{1}{a^{-k}}$ im letzten Teil der Definition bzw. die zu ihr äquivalente $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ kann auf alle k ausgedehnt werden, so daß gilt:

$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ $(k \in Z, a \neq 0)$.

Vorzeichen von Potenzen

In der folgenden Tabelle gelte $a \in R$ und $k \in Z$.

	k gerade $(k = 2m)$	k ungerade $(k = 2m + 1)$
$a > 0$	$a^k > 0$	$a^k > 0$
$a < 0$	$a^k > 0$	$a^k < 0$

a) $3 > 0$; $\quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > 0$

b) $-2 < 0$; $\quad (-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64 > 0$

c) $-2 < 0$; $\quad (-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32 < 0$

C 7

Wenn $a \in R (a \neq 0)$ und $k \in Z$, so gilt:

$\boxed{(-a)^{2k} = a^{2k}}$ und $\boxed{(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}}$

a) $6^{-4} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$

$(-6)^{-4} = \frac{1}{(-6)^4} = \frac{1}{1296}$

also: $(-6)^{-4} = 6^{-4}$

b) $0{,}2^5 = 0{,}00032$

$(-0{,}2)^5 = -0{,}00032$

also: $(-0{,}2)^5 = -0{,}2^5$

Für die Zahlen 0 und 1 gilt:

$0^k = 0$ für alle $k > 0$	$1^k = 1$ für alle k

Rechnen mit Potenzen, Potenzgesetze

SATZ:
Für das Rechnen mit Potenzen gelten die folgenden Regeln, wobei $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist.

	gleiche Basis und gleicher Exponent	
Addition Subtraktion	$x \cdot a^n \pm y \cdot a^n = (x \pm y) \cdot a^n$ (x, y beliebig reell)	
	gleiche Basis	**gleicher Exponent**
Multiplikation	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzierung	$(a^m)^n = a^{m\,n} = (a^n)^m$	

Bemerkung: Diese Rechenregeln gelten auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, falls dadurch kein Nenner gleich 0 wird.

a) $3a^5 + 0{,}8a^5 = 3{,}8a^5$; $\quad \frac{1}{3}a^{-7} - \frac{4}{9}a^{-7} + \frac{1}{18}a^{-7} = -\frac{1}{18}a^{-7}$

b) $a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{4+3}$

$a^4 \cdot a^{-3} = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = a = a^1 = a^{4+(-3)}$

c) $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$

d) $\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3 = a^{8-5}$

$\frac{a^5}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{5-8}$

$\frac{a^8}{a^{-5}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{\frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}} = a^{13} = a^{8-(-5)}$

e) $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$

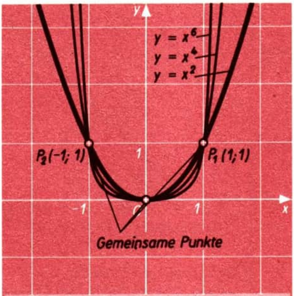
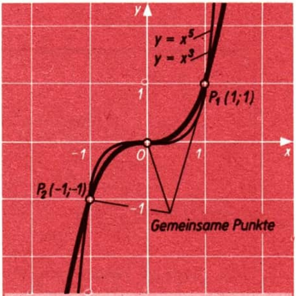
f) $(a^3)^4 = (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) = a^{3+3+3+3} = a^{12} = a^{3 \cdot 4}$

$(a^3)^{-4} = \frac{1}{(a^3)^4} = \frac{1}{a^{12}} = a^{-12} = a^{3 \cdot (-4)}$

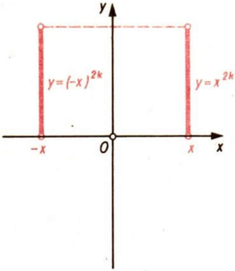
Zu beachten ist der Unterschied zwischen $(a^m)^n$ und $a^{(m^n)}$. Statt $a^{(m^n)}$ schreibt man auch a^{m^n}

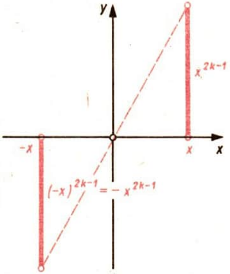
■ $(2^3)^2 = 8^2 = 64; \quad 2^{3^2} = 2^9 = 512$

Die Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Funktionen $y = x^{2m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$	Funktionen $y = x^{2m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$
Die Graphen der Funktionen $y = x^2$, $y = x^4$, … heißen Parabeln 2., 4., … Grades.	Die Graphen der Funktionen $y = x^3$, $y = x^5$, … heißen Parabeln 3., 5., … Grades.
 Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$ Wertebereich: $0 \leqq y < +\infty$	 Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$ Wertebereich: $-\infty < y < +\infty$
Die Graphen liegen achsensymmetrisch zur y-Achse, denn es gilt: $(-x)^{2m} = x^{2m}$.	Die Graphen liegen punktsymmetrisch zum Ursprung, denn es gilt: $(-x)^{2m-1} = -x^{2m-1}$.

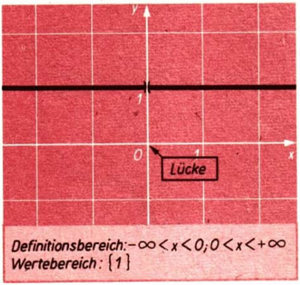
Funktionen $y = x^{2m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$	Funktionen $y = x^{2m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$
(Also gehört zu einer beliebigen Zahl x und der zu ihr entgegengesetzten Zahl $(-x)$ derselbe Funktionswert.)	(Also unterscheiden sich der zu einer beliebigen Zahl $x \neq 0$ gehörende Funktionswert und der zur entgegengesetzten Zahl $-x$ gehörende Funktionswert nur durch das Vorzeichen.





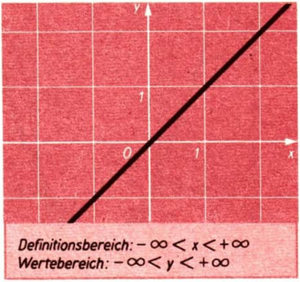
↗ Radiale Symmetrie (punktsymmetrisch), Seite 153

Die Funktion $y = x^0$



Der Graph der Funktion $y = x^0$ besteht aus allen Punkten auf der Parallelen zur x-Achse im Abstand $+1$, ausgenommen der Punkt $(0; 1)$.

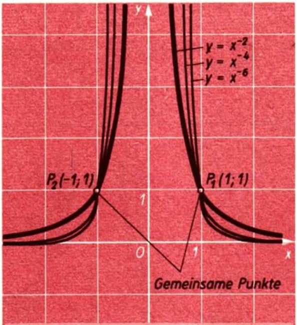
Die Funktion $y = x^1$

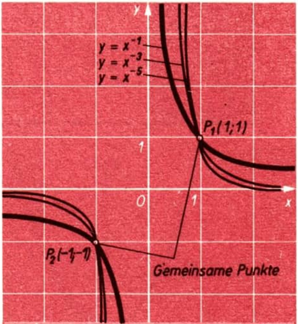


Der Graph der Funktion $y = x^1$ ist eine Gerade durch den Ursprung und durch den Punkt $(1; 1)$.

Nach der Definition auf Seite 95 ist die Potenz $y = x^0$ für alle $x \neq 0$ gleich 1, für $x = 0$ jedoch nicht definiert. Man sagt, die Funktion $y = x^0$ habe bei $x = 0$ eine Lücke.

Die Potenzfunktionen $y = x^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

<table>
<tr><th>Funktionen $y = x^{-2m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$</th><th>Funktionen $y = x^{-(2m-1)}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Graphen der Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, … heißen Hyperbeln. Sie bestehen aus zwei Teilen, den Hyperbelästen.</td></tr>
<tr><td>

Definitionsbereich: $-\infty < x < 0; 0 < x < +\infty$
Wertebereich: $0 < y < +\infty$</td>
<td>

Definitionsbereich: $-\infty < x < 0; 0 < x < +\infty$
Wertebereich: $-\infty < y < 0; 0 < y < +\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Hyperbeläste nähern sich beliebig dicht der x-Achse, und zwar um so mehr, je mehr der Betrag von x zunimmt. Dabei wird die x-Achse selbst jedoch nicht erreicht, da die Funktionswerte stets größer als 0 sind. Man sagt, die Funktionen nähern sich asymptotisch der x-Achse. Entsprechend nähern sich die Funktionen asymptotisch der y-Achse, wenn der Betrag von x beliebig klein wird.</td></tr>
</table>

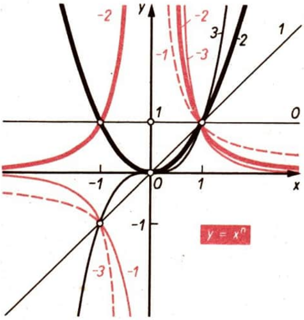
↗ Axiale Symmetrie, Seite 152

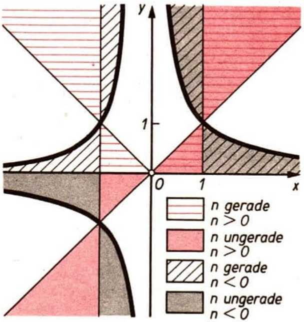
Zusammenfassender Überblick über die Potenzfunktionen $y = x^k$ (k beliebige ganze Zahl)

$y = x^k$	k positiv		k negativ		$k = 0$
	gerade	ungerade	gerade	ungerade	
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$
Wertebereich	$0 \leqq y < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$0 < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$ außer $y = 0$	$y = 1$

C 7

$y = x^k$	k positiv		k negativ		$k = 0$
	gerade	ungerade	gerade	ungerade	
Gemeinsame Punkte	$(-1; 1)$ $(1; 1)$ $(0; 0)$	$(-1; -1)$ $(1; 1)$ $(0; 0)$	$(-1; 1)$ $(1; 1)$	$(-1; -1)$ $(1; 1)$	–
steigend	$0 \leqq x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < 0$	–	–
fallend	$-\infty < x \leqq 0$	–	$0 < x < \infty$	$-\infty < x < 0$ und $0 < x < \infty$	–





Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \neq 0; n \in N)$

Im Bereich der reellen Zahlen gibt es zu jeder nichtnegativen Zahl a und zu jeder natürlichen Zahl n $(n \geqq 1)$ genau eine nichtnegative Zahl b mit $b^n = a$.

DEFINITION:

$\sqrt[n]{a}$ $(a \geqq 0; n \geqq 1; n \in N)$ ist diejenige nichtnegative Zahl b mit $b^n = a$.

$\sqrt[n]{a}$, gelesen: n-te Wurzel aus a	n Wurzelexponent a Radikand	■ $\sqrt[5]{32} = 2$

Wegen $\sqrt[1]{a} = a$ $(a \geqq 0)$ wird das Zeichen „$\sqrt[1]{\ }$" nicht geschrieben. Statt „$\sqrt[2]{a}$" wird meist „$\sqrt{a}$" geschrieben. Es gilt $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a > 0)$.

$$a^{\frac{m}{n}} \underset{\text{Def}}{=} \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0;\ m, n \in Z;\ n > 0)$$

Falls $m > 0$, ist die Definitionsgleichung auch für $a = 0$ sinnvoll:

$0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = \sqrt[n]{0} = 0$

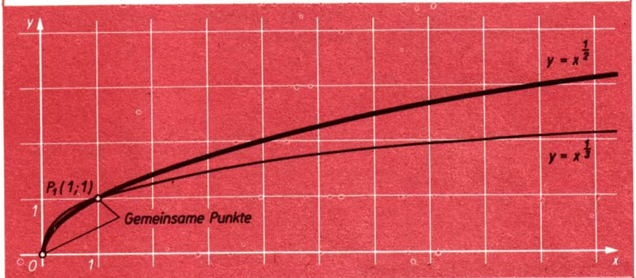
Falls $m = 1$ ergibt sich der Spezialfall:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geqq 0;\ n \in Z;\ n > 0)$$

Beispiele für Graphen der Funktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$

x	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	4	6	8	10
$y = x^{\frac{1}{2}}$	0	0,22	0,32	0,45	0,55	0,71	0,84	1	1,41	1,73	2	2,45	2,83	3,16
$y = x^{\frac{1}{3}}$	0	0,37	0,46	0,58	0,67	0,79	0,89	1	1,26	1,44	1,59	1,82	2	2,15

Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$



Definitionsbereich: $0 \leqq x < \infty$; Wertebereich: $0 \leqq y < \infty$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

SATZ:
Für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle rationalen Zahlen r, r_1 und r_2 gilt:

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $\qquad a^r : b^r = (a : b)^r$ $\qquad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$

$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $\qquad a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$

gleiche Exponenten:	
$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$	$1{,}3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = (1{,}3 \cdot 5)^{\frac{3}{2}} = 6{,}5^{\frac{3}{2}}$
$a^r : b^r = (a : b)^r$	$2{,}4^{-\frac{2}{5}} : 0{,}6^{-\frac{2}{5}} = (2{,}4 : 0{,}6)^{-\frac{2}{5}} = 4^{-\frac{2}{5}}$
gleiche Basen:	
$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$	$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = 3^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{3^{11}}$
$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$	$3^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}} = 3^{-\frac{1}{15}} = \frac{1}{\sqrt[15]{3}}$
$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$	$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

SATZ:
Wenn $r_1 < r_2$, so gilt
$a^{r_1} < a^{r_2}$, falls $a > 1$
$a^{r_1} > a^{r_2}$, falls $a < 1$. (Monotonie)

Einige Potenzgesetze für rationale Exponenten werden auch in Wurzelschreibweise formuliert (Wurzelgesetze).

Es gelte $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$:	
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b > 0)$	$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Rationalmachen des Nenners

Steht im Nenner eines Bruches eine Wurzel, so gelingt es mitunter, durch Erweitern oder Kürzen die Wurzel zu beseitigen. Das nennt man Rationalmachen des Nenners.

a) Gegeben sei $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}$ mit $a \in Q$ und $b \in Q$, $b > 0$. Der Nenner soll rational gemacht werden.

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{b}$$

Wenn allerdings im Radikanden der Wurzel im Nenner eine irrationale Zahl steht, so kann auf diese Weise der Nenner nicht rational gemacht werden, aber man kann Wurzeln aus dem Nenner beseitigen.

b) $\frac{3}{\sqrt{\pi}} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{\pi}$

Im folgenden Beispiel treten im Nenner eines Bruches zwei Wurzeln als Summanden auf.

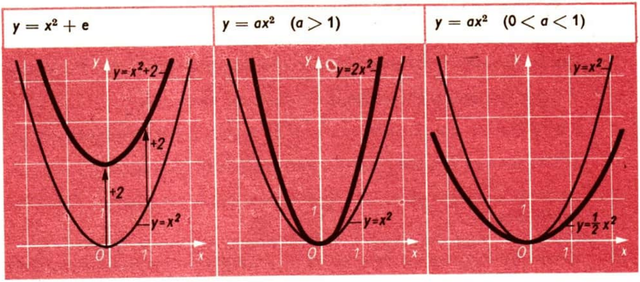
c) $$\frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} = \frac{(\sqrt{18} - \sqrt{12})(\sqrt{18} - \sqrt{12})}{(\sqrt{18} + \sqrt{12})(\sqrt{18} - \sqrt{12})}$$
$$= \frac{18 - 2\sqrt{12 \cdot 18} + 12}{18 - 12} = \frac{30 - 12\sqrt{6}}{6}$$
$$= 5 - 2\sqrt{6}$$

Rationale und nichtrationale Funktionen

Die Potenzfunktionen $y = x^n$; $y = ax^n$; $y = ax^n + b$ $(n \in Z)$ sind Beispiele für **rationale Funktionen**. Dagegen gehören die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{p}{q}}$ (p, $q \in Z$; $q > 0$; p ist nicht Vielfaches von q), die Exponentialfunktionen (↗ 104), die Logarithmusfunktionen (↗ 105) und die Winkelfunktionen (↗ 109) zu den nichtrationalen Funktionen.

Verschiebung, Stauchung, Streckung

Die Funktion $y = x^2$ enthält alle geordneten Zahlenpaare $[x; x^2]$ mit $x \in R$.
Der Graph von $y = x^2$ ist eine Parabel, die alle Punkte $P(x; x^2)$ enthält.
Durch die **Verschiebung des Graphen von $y = x^2$ um e in Richtung der y-Achse erhält man den Graphen von $y = x^2 + e$.**
Durch die **Streckung des Graphen von $y = x^2$ in Richtung der y-Achse von der x-Achse aus** erhält man den Graphen von $y = ax^2$ $(a > 1)$.
Durch die **Stauchung des Graphen von $y = x^2$ in Richtung der y-Achse zur x-Achse hin** erhält man den Graphen von $y = ax^2$ $(0 < a < 1)$.



Potenzen mit reellen Exponenten

Zu jeder positiven rationalen Zahl a und jeder reellen Zahl c existiert genau eine positive reelle Zahl b mit $a^c = b$.

■ $3^{\sqrt{2}}$ ist diejenige reelle Zahl x, für die gilt:

$$3 = 3^1 < x < 3^2 = 9$$
$$4{,}65554 \approx 3^{1{,}4} < x < 3^{1{,}5} \approx 5{,}19615$$
$$4{,}70697 \approx 3^{1{,}41} < x < 3^{1{,}42} \approx 4{,}75896$$

Nach weiteren Schritten erhält man $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}72880\ldots$. Auf diese Weise kann man $3^{\sqrt{2}}$ mit beliebiger Genauigkeit annähern.

↗ Reelle Zahlen, Seite 51

C 8 Exponentialfunktionen

Jede Funktion mit einer Gleichung der Form $y = a^x$ $(a, x \in R,\ a > 0)$ heißt **Exponentialfunktion**.

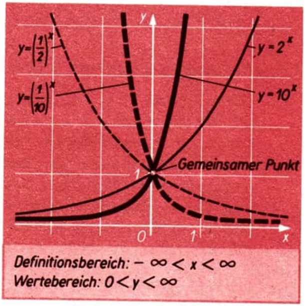
■
$a = 2;\quad y = 2^x$

$a = 10;\quad y = 10^x$

$a = \frac{1}{2};\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

$a = \frac{1}{10};\quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$

$a = 1;\quad y = 1^x$



Die Exponentialfunktionen gehören zu den nichtrationalen Funktionen

↗ Rationale und nichtrationale Funktionen, Seite 103

Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ liegen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse zu den Graphen der entsprechenden Funktionen $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, denn für entgegengesetzte Argumente werden die gleichen Funktionswerte angenommen.

Für $a > 1$ sind die Exponentialfunktionen monoton steigend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Graphen asymptotisch der x-Achse.

Für $0 < a < 1$ sind die Exponentialfunktionen monoton fallend.
Für größer werdende Argumente nähern sich ihre Graphen asymptotisch der x-Achse.
Für $a = 1$ ergibt sich $y = 1^x$, also die konstante Funktion $y = 1$.

↗ Axiale Symmetrie, Seite 152
↗ Monotonie (monoton, steigend), Seiten 60 und 61
↗ Die Potenzfunktionen $y = x^{-n}$ (asymptotisch), Seite 99

Keine Exponentialfunktion hat eine Nullstelle. Die Graphen aller Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt (0; 1), denn für beliebiges $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$, insbesondere also für $a > 0$.
Der Wertebereich jeder Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen.
Das erkennt man folgendermaßen
1) Jede solche Funktion hat wegen der positiven Basis nur positive Funktionswerte.
2) Es treten auch alle positiven reellen Zahlen als Funktionswerte auf, denn zu jedem positiven y gibt es genau eine reelle Zahl x, für die $y = a^x$ bei fest vorgegebenem $a > 0$ und $a \neq 1$ gilt.
Beide Behauptungen werden mit Hilfe von Intervallschachtelungen bewiesen.

C 9 Logarithmusfunktionen

Der Logarithmus

Zu jeder positiven Zahl b und zu jeder positiven Zahl $a \neq 1$ gibt es genau eine Zahl x, für die $b = a^x$ gilt.

DEFINITION:
$\log_a b$ $(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$ ist diejenige reelle Zahl c, für die $a^c = b$ gilt.
$\log_a b = c$ genau dann, wenn $a^c = b$.

$\log_a b$ gelesen: Logarithmus von b zur Basis a	b Numerus a Basis	■ $\log_2 8 = x$; $2^x = 8$ $\log_2 8 = 3$; $2^3 = 8$

Wegen
$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
bzw.
$a^1 = a$
gilt für jede positive Basis a mit $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \log_a a = 1$$

Logarithmengesetze

SATZ:
Sind u und v positive reelle Zahlen und ist a eine positive Zahl mit $a \neq 1$, so gilt:

(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v;$

(2) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v;$

(3) $\log_a u^r = r \cdot \log_a u \quad (r \in R).$

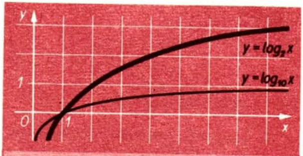
Beweis zu (1): Auf Grund der Definition des Logarithmus folgt aus
$\log_a u = b$ und $\log_a v = c$:
$u = a^b$ und $v = a^c$.
Auf Grund der Gültigkeit der Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten ist $u \cdot v = a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, also $\log_a (u \cdot v) = b + c = \log_a u + \log_a v$. Entsprechend werden die anderen Gesetze bewiesen.

Logarithmusfunktionen

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \log_a x$ $(a, x \in R;\ a, x > 0;\ a \neq 1)$ heißen Logarithmusfunktionen. Die Logarithmusfunktionen gehören zu den nichtrationalen Funktionen.

↗ Rationale und nichtrationale Funktionen, Seite 103

$a = 2;\quad y = \log_2 x$
$a = 10;\quad y = \log_{10} x$



Definitionsbereich: $0 < x < \infty$
Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

Für $\log_{10} x$, $\log_2 x$ und $\log_e x$ sind die Schreibweisen $\lg x$, $\operatorname{ld} x$ bzw. $\ln x$ üblich.

↗ Taf, Seite 25

Für $a > 1$ sind die Logarithmusfunktionen monoton steigend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Graphen asymptotisch dem negativen Teil der y-Achse.
Für $0 < a < 1$ sind die Logarithmusfunktionen monoton fallend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Graphen asymptotisch dem positiven Teil der y-Achse.
Alle Logarithmusfunktionen haben als einzige Nullstelle $x = 1$, d. h., ihre Graphen verlaufen durch den Punkt (1; 0).

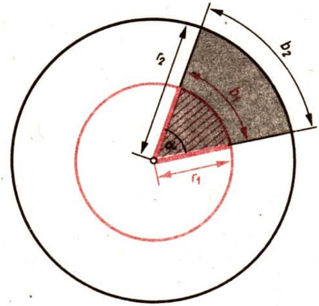
↗ Monotonie (monoton steigend), Seiten 60 und 61
↗ Die Potenzfunktionen $y = x^{-n}$ (asymptotisch), Seite 99

C 10 Winkelfunktionen

Bogenmaß

Neben dem Gradmaß wird für die Winkelmessung das Bogenmaß benutzt. Beim Bogenmaß ordnet man bei vorgegebener Längeneinheit LE dem Vollwinkel die Maßzahl 2π zu. 2π ist die Maßzahl des Umfangs eines Kreises mit dem Radius der Länge 1 (Einheitskreis).

Das Bogenmaß eines beliebigen Winkels erhält man, indem man den Winkel als Zentriwinkel eines *beliebigen* Kreises auffaßt und das Verhältnis aus der Länge des zugehörigen Bogens und der Länge des Radius dieses Kreises bildet. Dieses Verhältnis ist für alle Kreise gleich. (Eine Begründung hierfür soll an dieser Stelle nicht gegeben werden.)



Es gilt also $\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2}$. Das Bogenmaß wird mit „arc α" bezeichnet, so daß gilt: $\operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{r}$, und da in einem beliebigen Kreis $\frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}$, folgt

$$\boxed{\operatorname{arc}\alpha = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}.}$$

↗ Kreisbogen, Seite 235

Für den im Gradmaß gemessenen Winkel α, dessen Bogenmaß 1 ist, gilt:

$$1 = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}30°.$$

Einige Umrechnungswerte:

Gradmaß	α (in °)	360°	180°	90°	57,30°	1°
Bogenmaß	arc α	$2\pi \approx 6{,}28$	π	$\frac{\pi}{2}$	1	0,0175

↗ Einheiten des Winkels, Seite 140
↗ Taf, Seite 20

Neben der Umrechnungstafel im Tafelwerk kann man den Rechenstab benutzen, indem man z. B. die Proportionaleinstellung für

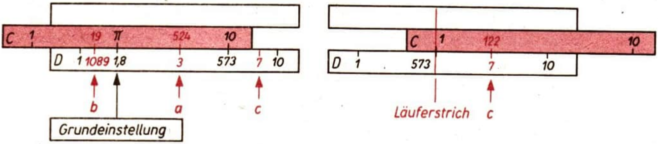
$$\frac{\operatorname{arc}\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}$$

anwendet. Dabei muß unter Umständen eine Zungenverschiebung vorgenommen werden.

a) arc 30° = x
$x \approx 0{,}524$

b) 1,9 = arc y
$y \approx 108{,}9°$

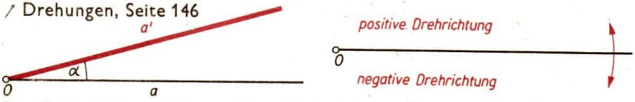
c) arc 70° = z
$z \approx 1{,}22$



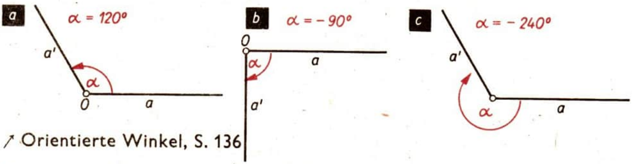
Erweiterung des Winkelbegriffs

Die Schenkel eines Winkels können auch als Original und Bild bei der Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt angesehen werden. So ist im folgenden Bild der Strahl a' das Bild des Strahls a bei einer Drehung um den Winkel α mit dem Anfangspunkt 0 des Strahls a als Drehzentrum.

↗ Winkel, Seite 134
↗ Drehungen, Seite 146

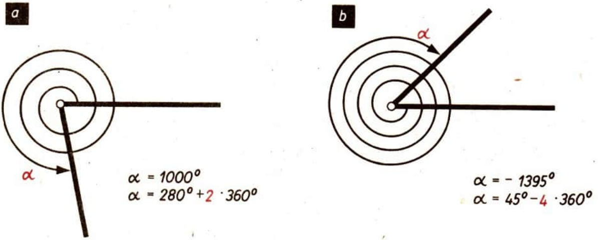


Die Orientierung eines solchen Winkels kann durch ein Vorzeichen angezeigt werden.



↗ Orientierte Winkel, S. 136

Die Anknüpfung an die Drehung ermöglicht den Übergang zu Winkeln über 360°.



Winkel, deren Gradmaße sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheiden, heißen einander **äquivalente Winkel** und bilden jeweils eine Klasse. In einer Menge von einander äquivalenten Winkeln gibt es genau einen Winkel, für dessen Maß α gilt: $0° \leqq \alpha < 360°$. Das Maß dieses Winkels wird als **Hauptwert** der einander äquivalenten Winkel bezeichnet.

Die Winkel 5°, −355°, 725° sind einander äquivalent, denn es ist $5° - (-355°) = 360°$ und es ist $725° - 5° = 720° = 2 \cdot 360°$.
Der Hauptwert dieser drei Winkel ist 5°.

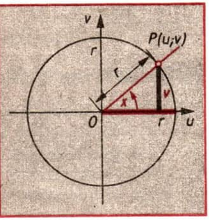
Winkelfunktionen

DEFINITION:

$$\sin x \underset{\text{Def}}{=} \frac{v}{r} \quad (x \in R;\ r > 0;\ r,\ v \in R;\ -r \leqq v \leqq r)$$

Die Sinusfunktion ist also die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $\left[x; \frac{v}{r}\right]$.

Sie wird mit „sin" bezeichnet.

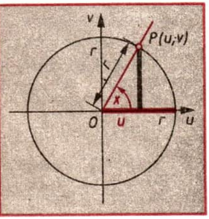


DEFINITION:

$$\cos x \underset{\text{Def}}{=} \frac{u}{r} \quad (x \in R;\ r > 0;\ r,\ u \in R;\ -r \leqq u \leqq r)$$

Die Kosinusfunktion ist also die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $\left[x; \frac{u}{r}\right]$.

Sie wird mit „cos" bezeichnet.



DEFINITION:

$$\tan x \underset{\text{Def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left[x \in R;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in Z\right]$$

Die Tangensfunktion ist also die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $\left[x; \frac{\sin x}{\cos x}\right]$ mit $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$. Sie wird mit „tan" bezeichnet.

DEFINITION:

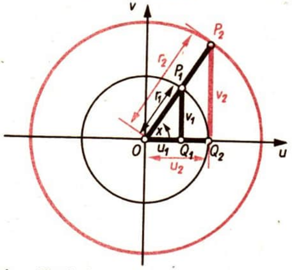
$$\cot x \underset{\text{Def}}{=} \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \in R;\ x \neq k \cdot \pi;\ k \in Z)$$

Die Kotangensfunktion ist also die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $\left[x; \frac{\cos x}{\sin x}\right]$ mit $x \neq k\pi$; $k \in Z$. Sie wird mit „cot" bezeichnet.

Bemerkung: Diese Definitionen der Winkelfunktionen sind unabhängig von der Wahl des Kreises und damit von der Größe des Radius r.
Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2 gilt nämlich

$$\sin x = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

$$\cos x = \frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2}$$

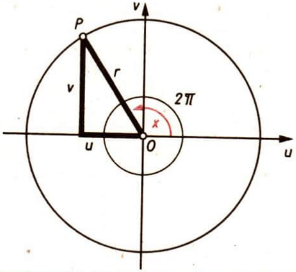


↗ Funktion, Seite 58
↗ Geordnetes Paar, Seite 56
↗ Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Seite 222

Periodizität der Winkelfunktionen

Die in diesen Definitionen auftretenden Verhältnisse sind für den Winkel $x + 2\pi$ dieselben wie für den Winkel x.
Das gilt nicht nur für eine Drehung um 2π, sondern auch für jede Drehung um ein ganzzahliges Vielfaches $k \cdot 2\pi$ von 2π. Also gilt für jeden Winkel x aus dem jeweiligen Definitionsbereich:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \sin (x + k \cdot 2\pi) \\ \cos x &= \cos (x + k \cdot 2\pi) \\ \tan x &= \tan (x + k \cdot 2\pi) \\ \cot x &= \cot (x + k \cdot 2\pi) \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$



DEFINITION:
Eine Funktion f heißt periodisch, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, so daß für jedes x gilt:
$f(x) = f(x + a)$
Jede solche Zahl a heißt Periode.

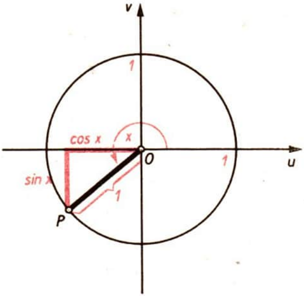
Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen.

Perioden der Winkelfunktionen sind beispielsweise
2π, $(k = 1)$; 4π, $(k = 2)$; 100π, $(k = 50)$.

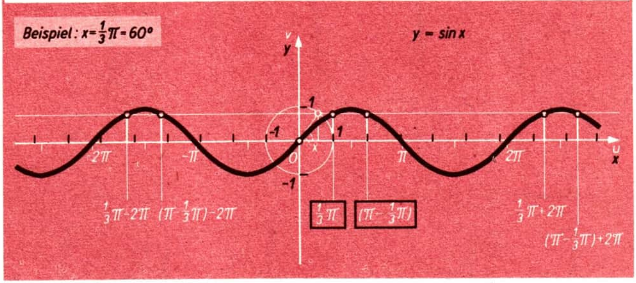
Für die Sinus- und Kosinusfunktion ist 2π die kleinste Periode.
Für die Tangens- und Kotangensfunktion ist π die kleinste Periode.
Für letztere gilt also $\tan x = \tan (x + k\pi)$ bzw. $\cot x = \cot (x + k\pi)$, k ganz.

Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

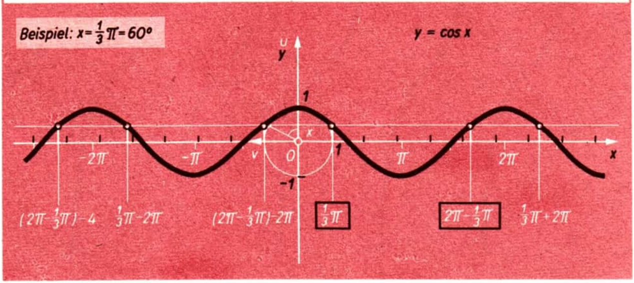
Zur graphischen Darstellung der Winkelfunktionen kann man die Funktionswerte dem Einheitskreis entnehmen. Als **Einheitskreis** bezeichnet man einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ LE.



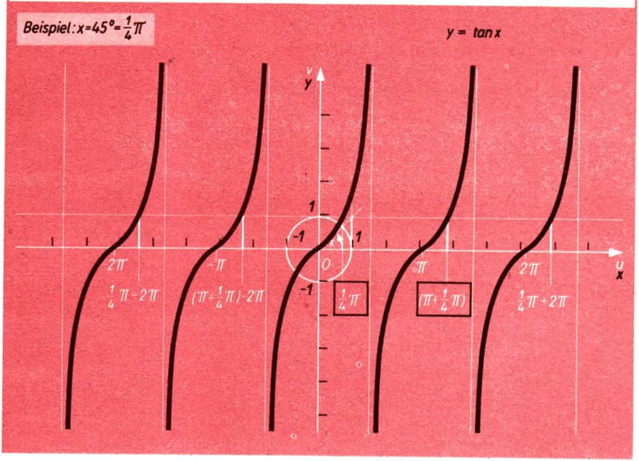
$y = \sin x$



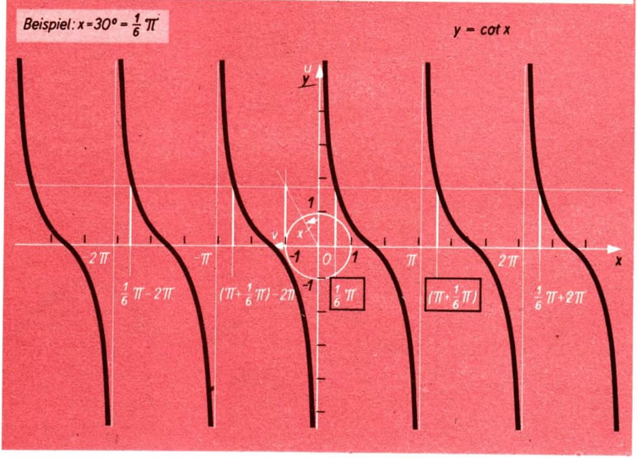
$y = \cos x$



$y = \tan x$


Beispiel: x=45° = 1/4 π
y = tan x
v
y
1
-1
1
-1
0
x
u
x
-2π
-π
π
2π
1/4 π - 2π
(π + 1/4 π) - 2π
1/4 π
(π + 1/4 π)
1/4 π + 2π

$y = \cot x$


Beispiel: x=30° = 1/6 π
y = cot x
u
y
1
-1
1
-1
0
v
x
x
-2π
-π
π
2π
1/6 π - 2π
(π + 1/6 π) - 2π
1/6 π
(π + 1/6 π)
1/6 π + 2π

		$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Definitionsbereich		$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$ $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in Z$	$-\infty < x < \infty$ $x \neq k\pi;\ k \in Z$
Wertebereich		$-1 \leqq y \leqq 1$	$-1 \leqq y \leqq 1$	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Vorzeichen der Funktionswerte in den Quadranten	**I**	$+$	$+$	$+$	$+$
	II	$+$	$-$	$-$	$-$
	III	$-$	$-$	$+$	$+$
	IV	$-$	$+$	$-$	$-$
monoton steigend		$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$(2k-1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$	$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$	
monoton fallend		$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$	$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$		$k \cdot \pi < x < (k+1)\pi$
Nullstellen		$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$	$x_k = k\pi$	$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
kleinste Perioden		2π	2π	π	π

Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten

SATZ:

Es gilt:

(1) Für alle x: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

(2) für alle x mit $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$: $\tan x \cdot \cot x = 1$.

Beweis:

(1) Für den Einheitskreis gilt: $u = \cos x$ und $v = \sin x$.

Daraus folgt

$\sin^2 x + \cos^2 x = v^2 + u^2 = 1$ (Satz des *Pythagoras*).

(2) Entsprechend der Definition für den Tangens und den Kosinus gilt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Daraus folgt:

$$\tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

(Weitere Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten sind im Tafelwerk, Seite 34 und 35, aufgeführt.)

↗ Satz des *Pythagoras*, Seite 226

Komplementwinkelbeziehungen

SATZ:

Für beliebige reelle Zahlen x gilt mit den nötigen Einschränkungen bei tan und cot:

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, **(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$,**

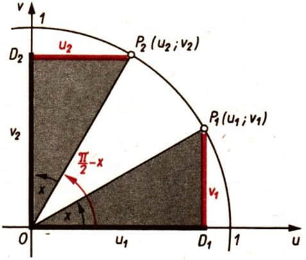
(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, **(4) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$.**

Beweis (am Beispiel des ersten Quadranten):

Aus der Kongruenz der Dreiecke OD_1P_1 und OP_2D_2 folgt:

$$\cos x = u_1 = v_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin x = v_1 = u_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

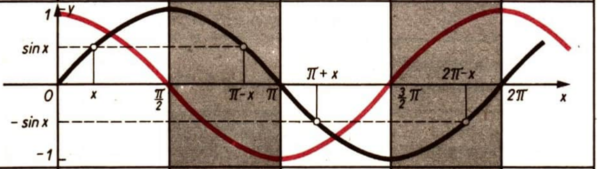
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Quadrantenbeziehungen

SATZ:
Für alle reellen Zahlen x mit den nötigen Einschränkungen bei tan und cot gilt:

$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(2\pi - x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(2\pi - x) = -\tan x$
$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$	$\cot(2\pi - x) = -\cot x$

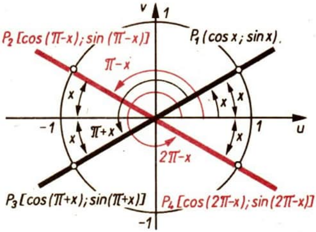
Quadrant	I x	II $\pi - x$	III $\pi + x$	IV $2\pi - x$	



	sin x	$+\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	
	cos x	$-\cos x$	$-\cos x$	$+\cos x$	
	tan x	$-\tan x$	$+\tan x$	$-\tan x$	
	cot x	$-\cot x$	$+\cot x$	$-\cot x$	

Beweis:
Die Quadrantenbeziehungen kann man auf der Grundlage der Symmetrieeigenschaften der Graphen beweisen. Legen wir den Einheitskreis zugrunde, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$\sin(\pi - x) = \sin x$;
$\cos(\pi - x) = -\cos x$.



➡ C 10

Die Funktionen $y = a \sin x$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$;
Wertebereich: $-|a| \leqq y \leqq |a|$
Die Werte der Funktion $y = a \sin x$ erhält man, indem man die Werte der Funktion $y = \sin x$ mit a multipliziert. Gilt $|a| \neq 1$, so ergibt sich dadurch ein anderer Wertebereich.

$\|a\| > 1$	$a > 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse
$\|a\| = 1$	$a = 1$	keine Änderung
	$a = -1$	Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse
$\|a\| < 1$	$a > 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse

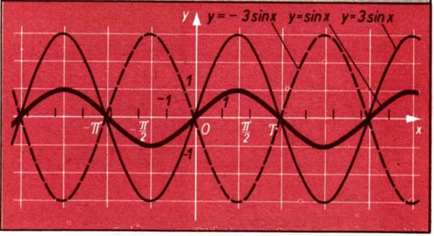
↗ Axiale Symmetrie, Seite 152
↗ Verschiebung, Stauchung, Streckung, Seite 103

a) $y = \sin x$
Wertebereich:
$-1 \leqq y \leqq 1$

b) $y = 3 \sin x$
Wertebereich:
$-3 \leqq y \leqq 3$

c) $y = -3 \sin x$
Wertebereich:
$-3 \leqq y \leqq 3$

Einfluß des Faktors a auf den Wertebereich



Die Funktionen $y = \sin bx$ $(b \neq 0)$

Den Wert $\sin x_1$, den die Funktion $y = \sin x$ an der Stelle x_1 annimmt, nimmt die Funktion $y = \sin bx$ an der Stelle $\frac{x_1}{b}$ an; denn es gilt:

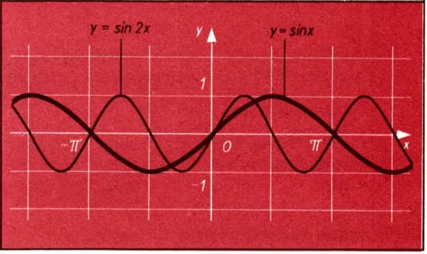
$$\sin\left(b \cdot \frac{x_1}{b}\right) = \sin x_1$$

$\lvert b\rvert > 1$	$b > 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse
$\lvert b\rvert = 1$	$b = 1$	keine Änderung
	$b = -1$	Spiegelung an der y-Achse
$\lvert b\rvert < 1$	$b > 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse

a) $y = \sin x$
Nullstellen:
$k \cdot \pi \quad (k \in Z)$
kleinste Periode:
2π

b) $y = \sin 2x$
Nullstellen:
$k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in Z)$
kleinste Periode:
$\frac{2\pi}{2} = \pi$

Einfluß des Faktors b auf die Anzahl der Nullstellen in einem Intervall und die Länge der kleinsten Periode



↗ Gleichung einer Schwingung, Ph i Üb, Seite 175

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Für Winkel zwischen 0° und 90° lassen sich die Funktionswerte der Winkelfunktionen als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck auffassen.

SATZ:
Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$	Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von **Gegenkathete zu Hypotenuse.**

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$	Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von **Ankathete zu Hypotenuse.**
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$	Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von **Gegenkathete zu Ankathete.**
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$ $\cot\beta = \frac{a}{b}$	Der Kotangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von **Ankathete zu Gegenkathete.**

↗ Rechtwinkliges Dreieck, Seite 167

C 11 Trigonometrische Berechnungen

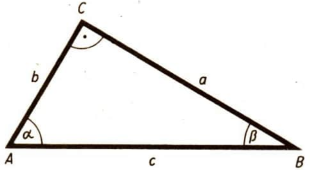
Die Frage, ob ein Dreieck durch gegebene Stücke eindeutig bestimmt ist, kann mit Hilfe der Kongruenzsätze entschieden werden.

↗ Kongruenzsätze, Seite 169

Ist das Dreieck eindeutig bestimmt, so kann es aus den gegebenen Stücken sowohl konstruiert als auch mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden.

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle möglich:

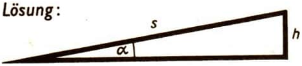


Gegeben	
1. Fall: Hypotenuse und eine Kathete: a, c	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\beta = 90° - \alpha$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $b = c \cdot \cos\alpha$

Gegeben	
2. Fall: **Beide Katheten: a, b**	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\beta = 90° - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$
3. Fall: **Ein Winkel und die Gegenkathete: α, a**	$\cot\alpha = \frac{b}{a}$; $b = a\cot\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$
4. Fall: **Ein Winkel und die Ankathete: α, b**	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $a = b \cdot \tan\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $c = \frac{b}{\cos\alpha}$
5. Fall: **Ein Winkel und die Hypotenuse: α, c**	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $a = c \cdot \sin\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $b - c \cdot \cos\alpha$

Eine Eisenbahnlinie soll über eine Brücke von 13,70 m Höhe geführt werden. Wie lang muß die zur Brücke ansteigende Strecke mindestens sein, wenn der Steigungswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

Lösung:



$\alpha = 1°$
$h = 13{,}70$ m

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{13{,}70}{\sin 1°}\,\text{m}$$

$$s = \frac{13{,}70}{0{,}0175}\,\text{m}$$

Aus der Tafel entnehmen wir:
$\sin 1° = 0{,}0175$
Überschlag:
$s \approx 14 : \frac{2}{100}\,\text{m} = 700\,\text{m}$

Wir benutzen den Rechenstab und erhalten: $s \approx 785$ m.

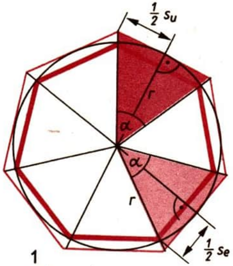
Ergebnis: Die ansteigende Strecke muß mindestens 785 m lang sein.

➡ C 11

Berechnung gleichschenkliger Dreiecke

Jedes gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse in zwei kongruente rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Dadurch treten bei der Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks dieselben Fälle auf wie beim rechtwinkligen Dreieck.

■ Einem Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm ist je ein regelmäßiges 7-Eck ein- bzw. umbeschrieben. Die Seitenlängen sind zu berechnen.



Lösung:

$r = 3{,}00$ cm

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} = 51{,}43^\circ \qquad \frac{\alpha}{2} = 25{,}71^\circ$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}s_e}{r} = \frac{s_e}{2r}$$

$$\begin{aligned} s_e &= 2r\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 0{,}4337 \text{ cm} \\ &\approx 2{,}60 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}s_u}{r} = \frac{s_u}{2r}$$

$$\begin{aligned} s_u &= 2r\tan\frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 0{,}4813 \text{ cm} \\ &\approx 2{,}89 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seitenlänge des einbeschriebenen Siebenecks beträgt 2,60 cm, die des umbeschriebenen Siebenecks beträgt 2,89 cm.

↗ Gleichschenkliges Dreieck, Seite 166
↗ Kongruenz, Seite 151

Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken

Mit Hilfe der folgenden Sätze lassen sich Stücke eines beliebigen Dreiecks berechnen.

▶ **SATZ (Sinussatz):**
In jedem Dreieck ist der Quotient aus der Länge einer Seite und dem Sinus ihres Gegenwinkels konstant.
In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

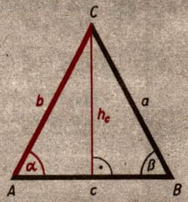
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

bzw.

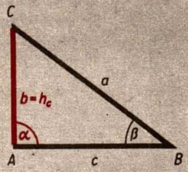
$$\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$$

Beweis:

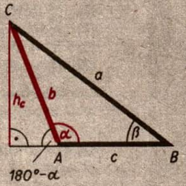
a **Das Dreieck ist spitzwinklig,**
$\alpha < 90°$.
$h_c = a \cdot \sin\beta$; $h_c = b \cdot \sin\alpha$
Die Gleichsetzung ergibt
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ sowie
$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.



b **Das Dreieck ist rechtwinklig,**
$\alpha = 90°$.
$h_c = a \cdot \sin\beta$; $h_c = b$
Die Gleichsetzung ergibt
$a \cdot \sin\beta = b$.
Wir können schreiben:
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, denn $\sin\alpha = 1$.
Damit erhalten wir ebenfalls
$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.



c **Das Dreieck ist stumpfwinklig**
$\alpha > 90°$.
$h_c = a \cdot \sin\beta$; $h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$
Die Gleichsetzung ergibt
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin(180° - \alpha)$.
Da $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ ist, folgt daraus
wiederum
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, sowie
$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.



SATZ (Kosinussatz):
In jedem Dreieck ist das Quadrat der Länge einer Seite gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus den Längen dieser beiden Seiten und dem Kosinus des von beiden Seiten eingeschlossenen Winkels.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$;
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$;
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$

➡ C 11

Beweis:

a **Das Dreieck ist spitzwinklig, $\alpha < 90°$.**

(1) $h_c^2 = b^2 - u^2$ (Satz des *Pythagoras*, $\triangle$ *ADC*)

(2) $h_c^2 = a^2 - v^2$ (Satz des *Pythagoras*, $\triangle$ *DBC*)

(2a) $h_c^2 = a^2 - (c - u)^2$

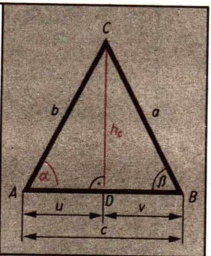
(2b) $h_c^2 = a^2 - c^2 + 2cu - u^2$

Die Gleichsetzung von (1) und (2b) ergibt:

$$a^2 - c^2 + 2cu - u^2 = b^2 - u^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cu$$

Da $u = b \cdot \cos\alpha$ ist, folgt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

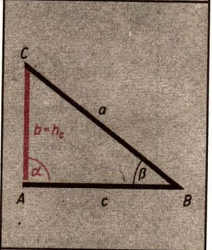


b **Das Dreieck ist rechtwinklig, $\alpha = 90°$.**

$h_c = b;\quad a^2 = b^2 + c^2$

Da $\cos\alpha = \cos 90° = 0$ ist, läßt sich ebenfalls schreiben:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$



c **Das Dreieck ist stumpfwinklig, $\alpha > 90°$.**

(1) $h_c^2 = b^2 - u^2$ (Satz des *Pythagoras*)

(2) $h_c^2 = a^2 - v^2$

(2a) $h_c^2 = a^2 - (c + u)^2$

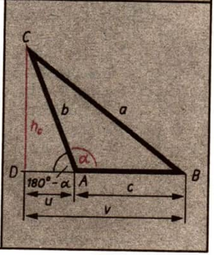
(2b) $h_c^2 = a^2 - c^2 - 2cu - u^2$

Die Gleichsetzung von (1) und (2b) ergibt:

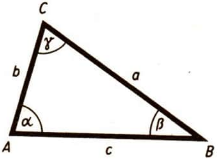
$$a^2 - c^2 - 2cu - u^2 = b^2 - u^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cu$$

Da $u = b \cdot \cos(180° - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$, folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$



Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle der Dreiecksberechnung möglich (vier Grundaufgaben, ↗ Kongruenzsätze, Seite 169).



Gegeben	Anfangsschritt	Berechnung der übrigen Stücke
c, β, γ (sww) Im Fall wsw wird zunächst der dritte Winkel berechnet und dann wie hier weitergerechnet.	Sinussatz: $b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta$	$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; $a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$
α, c, a (wss)	Sinussatz: $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}c$	$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$
a, γ, b (sws)	Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}a$; $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$
a, b, c (sss)	Kosinussatz: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ oder $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot b$

a) Gegeben: $\alpha = 63{,}7°$; $c = 7{,}3$ cm; $a = 11{,}4$ cm; gesucht: γ, β, b

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c = \frac{\sin 63{,}7°}{11{,}4\text{ cm}} \cdot 7{,}3\text{ cm} \approx \frac{0{,}8965 \cdot 7{,}3}{11{,}4} \approx 0{,}5741$$

$\gamma_1 = 35{,}0°$ $[\gamma_2 = 145{,}0°]$.

γ_2 kommt nicht in Betracht, da $\alpha + \gamma_2 > 180°$. Außerdem würde für γ_2 der größere Winkel der kleineren Seite gegenüberliegen, was im Widerspruch zu dem Satz, daß in jedem Dreieck der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt, stünde.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $\beta = 81{,}3°$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{11{,}4\text{ cm}}{\sin 63{,}7°} \cdot \sin 81{,}3° \approx \frac{11{,}4 \cdot 0{,}9885}{0{,}8965}\text{ cm}$$

$b = 12{,}6$ cm

b) Gegeben: $\alpha = 36{,}4°$; $c = 9{,}2$ cm; $a = 3{,}5$ cm; gesucht: γ, β, b

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c = \frac{\sin 36{,}4°}{3{,}5\text{ cm}} \cdot 9{,}2\text{ cm} \approx \frac{0{,}5934 \cdot 9{,}2}{3{,}5} \approx 1{,}56$$

Es gibt keinen Winkel γ mit $\sin\gamma > 1$. Es gibt also kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.

c) Gegeben: $\alpha = 43{,}9°$; $c = 14{,}8$ cm; $a = 12{,}3$ cm;
gesucht: γ, β, b

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c = \frac{\sin 43{,}9°}{12{,}3 \text{ cm}} \cdot 14{,}8 \text{ cm} \approx \frac{0{,}6934 \cdot 14{,}8}{12{,}3} \approx 0{,}835$$

$\gamma_1 = 56{,}6°$; $\quad \gamma_2 = 123{,}4°$

$\alpha + \gamma_1$ und $\alpha + \gamma_2$ sind beide kleiner als 180°. Ebenso ist für beide Winkel der Satz erfüllt, daß der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Daher muß mit beiden Winkeln weitergerechnet werden.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $\quad \beta_1 = 79{,}5°$; $\quad \beta_2 = 12{,}7°$

$$b_1 = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta_1 = \frac{12{,}3 \text{ cm}}{\sin 43{,}9°} \cdot \sin 79{,}5° \approx \frac{12{,}3 \cdot 0{,}9833}{0{,}6934} \text{ cm}$$

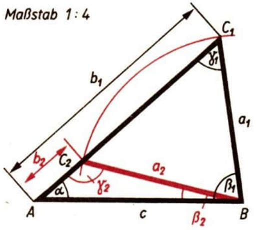
$b_1 = 17{,}4$ cm

$$b_2 = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta_2 = \frac{12{,}3 \text{ cm}}{\sin 43{,}9°} \cdot \sin 12{,}7° \approx \frac{12{,}3 \cdot 0{,}2198}{0{,}6934} \text{ cm}$$

$b_2 = 3{,}9$ cm

Bemerkung: Wie das letzte Beispiel zeigt, ist ein Dreieck nur dann eindeutig durch zwei Seiten und einen Winkel bestimmt, wenn dieser Winkel Gegenwinkel der größeren von beiden gegebenen Seiten ist. Andernfalls gibt es entweder kein Dreieck oder zwei nicht kongruente Dreiecke mit den gegebenen Stücken.

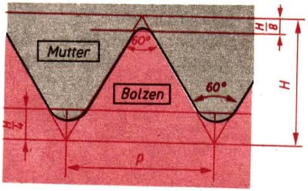
↗ Kongruenzsatz ssw, Seite 171



Anwendung der trigonometrischen Berechnungen

Sachaufgaben, die auf Dreiecksberechnungen führen, können mit Hilfe trigonometrischer Verfahren gelöst werden.

Bei einem metrischen ISO-Gewinde nach TGL 7907 ist das im Bild dargestellte Grundprofil festgelegt. Dabei heißen die Größen P Steigung, H Profilhöhe und $H_1 = \frac{5}{8}H$ Nenntragtiefe.
Es sollen H und H_1 für eine Steigung von 4,0 mm berechnet werden.



Lösung:

$$\tan 30° = \frac{P}{2H}$$

$$H = \frac{P}{2 \cdot \tan 30°}$$

$$H \approx \frac{4}{2 \cdot 0{,}5774}\ \text{mm}$$

$H \approx 3{,}46$ mm

(bei Anwendung des Rechenstabs)

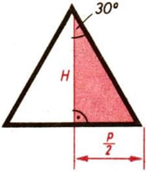
Da für die Nenntragtiefe H_1 gilt

$$H_1 = \frac{5}{8} H,$$

erhalten wir

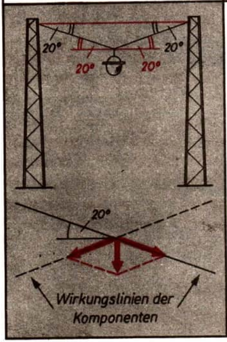
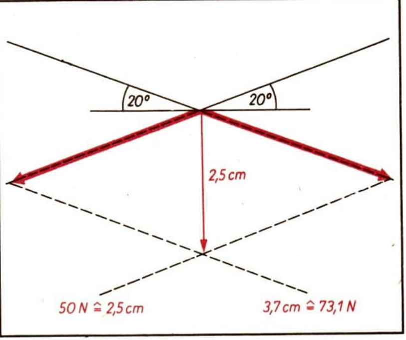
$$H_1 \approx \frac{5}{8} \cdot 3{,}46\ \text{mm}$$

$H_1 \approx 2{,}16$ mm



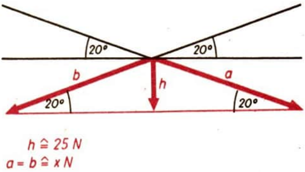
Ergebnis: Die Profilhöhe beträgt 3,46 mm und die Nenntragtiefe 2,16 mm.

■ Eine Straßenleuchte habe die Gewichtskraft von 50 N. Sie hänge an zwei Drahtseilen, die mit der Waagerechten Winkel von 20° bilden. Es ist zeichnerisch und rechnerisch die Zugkraft in den Halteseilen zu ermitteln.

Aufgabe	Zeichnerische Lösung
	

Rechnerische Lösung:

Die Kraft von 50 N, die auf Grund der Schwerkraft auf die Straßenleuchte einwirkt, wird von zwei gleich großen Kräften abgefangen, wenn die Straßenleuchte in der Mitte zwischen den beiden Haltemasten hängt. Somit erhalten wir in der nebenstehenden Darstellung ein gleichschenkliges Dreieck, in dem die beiden Schenkel die resultierenden Kräfte repräsentieren und die Höhe auf die Basis des Dreiecks die Hälfte der Kraft von 50 N darstellt.



➡ C 11

Die beiden Basiswinkel haben eine Größe von je 20°, da es sich um Stufenwinkel bezüglich derjenigen Winkel handelt, die entstehen, wenn man die Waagerechte durch den Befestigungspunkt der Lampe legt.

$$\sin 20° = \frac{25\ \mathrm{N}}{x\ \mathrm{N}}$$

$$x\ \mathrm{N} \approx \frac{25}{0{,}3420}\ \mathrm{N}$$

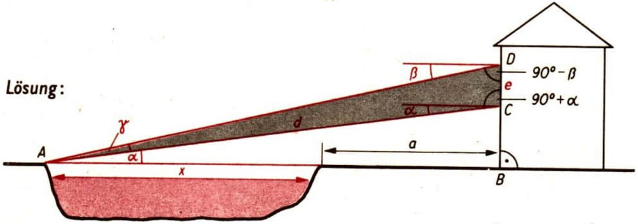
$$x\ \mathrm{N} \approx 73{,}1\ \mathrm{N}$$

Ergebnis: In jedem Halteseil wird eine Zugkraft von 73,1 N wirksam.

↗ Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften in Ph i Ü, Seite 65 und 66

■ In einer Entfernung von $a = 10$ m vom Ufer eines Flusses steht ein Haus. Visiert man von zwei senkrecht übereinanderliegenden Fenstersimsen, deren Höhenunterschied $e = 8$ m ist, das andere Ufer an, so erhält man Neigungswinkel von $\alpha = 18{,}4°$ und $\beta = 24{,}6°$. Wie breit ist der Fluß?

Lösung:



1. Schritt: Wir berechnen im Dreieck ACD den Winkel γ:

$\gamma = 180° - (90° - \beta + 90° + \alpha)$

$\gamma = 180° - 180° + \beta - \alpha = \beta - \alpha = 24{,}6° - 18{,}4° = 6{,}2°.$

2. Schritt: Wir wenden im Dreieck ACD den Sinussatz an:

$e : \sin\gamma = d : \sin(90° - \beta)$

$$d = \frac{e \cdot \sin(90° - \beta)}{\sin\gamma} = \frac{e \cdot \cos\beta}{\sin\gamma}$$

3. Schritt: Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:

$$\cos\alpha = \frac{x + a}{d}$$

$x = d \cdot \cos\alpha - a$

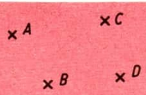
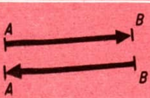
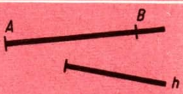
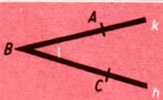
Wir setzen nun für d ein:

$$x = \frac{e \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} \cdot \cos\alpha - a$$

$$x = \frac{8\ \mathrm{m} \cdot \cos 24{,}6° \cdot \cos 18{,}4°}{\sin 6{,}2°} - 10\ \mathrm{m}$$

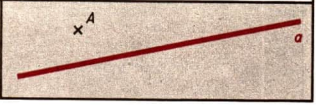
$$x = \frac{8 \cdot 0{,}9092 \cdot 0{,}9489}{0{,}1080}\ \mathrm{m} - 10\ \mathrm{m} \approx 63{,}9\ \mathrm{m} - 10\ \mathrm{m}$$

Ergebnis: Der Fluß ist etwa 54 m breit.

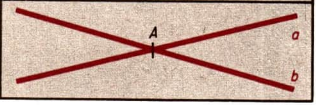
Figur	Bezeichnung	Darstellung
Punkt (↗ S. 128)	$A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ (große lateinische Buchstaben)	
Gerade (↗ S. 128)	$a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots$ (kleine lateinische Buchstaben) oder AB, PQ, …	
Strecke (↗ S. 131)	$\overline{AB}$ oder $\overline{BA}$	
Orientierte Strecke (↗ S. 131)	$\overrightarrow{AB}$ bedeutet: A liegt vor B $\overrightarrow{BA}$ bedeutet: B liegt vor A	
Strahl (↗ S. 132)	Strahl AB (A ist Anfangspunkt) oder Strahl h	
Winkel (↗ S. 134)	Winkel bis 180°: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ $\measuredangle\, ABC$ oder $\measuredangle\, CBA$ $\measuredangle\, (h, k)$ oder $\measuredangle\, (k, h)$	
Orientierter Winkel (↗ S. 136)	$\measuredangle\, \overrightarrow{(h, k)}$ bedeutet: h liegt vor k $\measuredangle\, \overrightarrow{(k, h)}$ bedeutet: k liegt vor h	

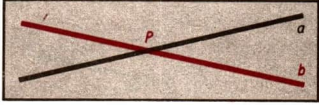
D1 Lage- und Anordnungsbeziehungen

Punkte und Geraden einer Ebene

Gegenseitige Lage von Punkten und Geraden	
A liegt auf a oder *a geht durch A*	*A liegt nicht auf a* oder *a geht nicht durch A*
	

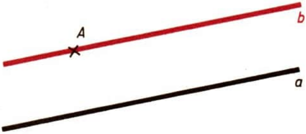
Durch zwei verschiedene Punkte *A* und *B* geht genau eine Gerade.

Verbindungsgerade	**Schnittpunkt**
Die Gerade *AB* geht *sowohl* durch *A* *als auch* durch *B*	Der Punkt *A* liegt *sowohl* auf *a* *als auch* auf *b*
	

Gegenseitige Lage zweier Geraden einer Ebene	
a schneidet b	*a ist parallel zu b*
a und *b* sind verschieden und haben genau einen Punkt, den Schnittpunkt, gemeinsam.	*a* und *b* sind verschieden und haben keinen Punkt gemeinsam **oder** *a* und *b* fallen zusammen.
	

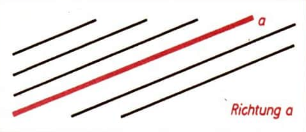
Es gilt stets:

Wenn eine Gerade *a* und ein Punkt *A* gegeben sind, so gibt es durch diesen Punkt *A* eine und nur eine Gerade, die zu *a* parallel ist.



Richtung

DEFINITION:
Richtung *a* heißt die Menge aller Geraden, die zu einer gegebenen Geraden *a* parallel sind.

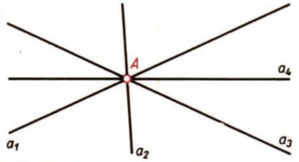


Jede Gerade legt genau eine Richtung fest.

Geraden gleicher Richtung	Geraden verschiedener Richtung
a und *b* haben die gleiche Richtung genau dann, wenn sie zueinander parallel sind.	*a* und *b* haben verschiedene Richtungen genau dann, wenn sie einander schneiden.
	

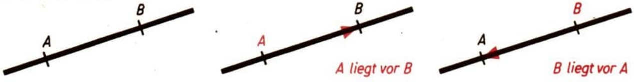
Geradenbüschel

Durch einen Punkt kann man beliebig viele Geraden zeichnen, die in ein und derselben Ebene liegen.
Die Menge aller Geraden, die in ein und derselben Ebene liegen und durch einen gemeinsamen Punkt gehen, heißt Geradenbüschel.



Orientierte Geraden

Wenn festgelegt wird, welcher von den verschiedenen Punkten *A* und *B* einer gegebenen Geraden *AB* vor dem anderen liegt, so heißt die Gerade orientiert.
„*A* liegt vor *B*" und „*B* liegt vor *A*" heißen einander entgegengesetzte Orientierungen. Die Orientierung kann durch eine Pfeilspitze veranschaulicht werden.

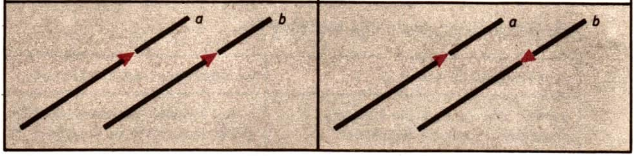


➡ D 1

Richtungssinn

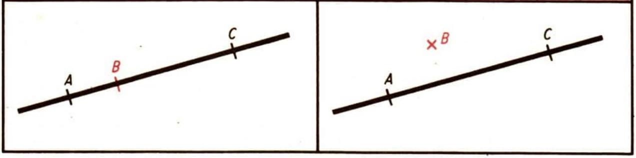
Durch jede orientierte Gerade wird ein Richtungssinn festgelegt.
Zwei parallele Geraden haben den gleichen Richtungssinn, wenn sie gleich orientiert sind. Zwei parallele Geraden haben entgegengesetzten Richtungssinn, wenn sie entgegengesetzt orientiert sind.

Gleich orientierte Geraden	Entgegengesetzt orientierte Geraden



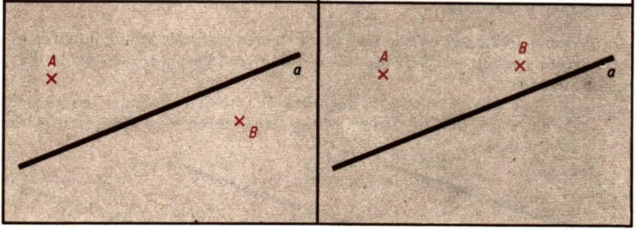
Zwischenbeziehung

B liegt zwischen A und *C*	*B liegt nicht zwischen A* und *C*

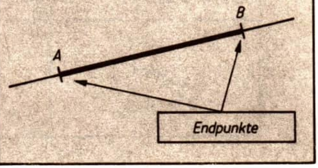


Man sagt nur dann, daß ein Punkt zwischen zwei anderen Punkten liegt, wenn sie alle drei auf ein und derselben Geraden liegen.

Lagemöglichkeiten zweier verschiedener Punkte bezüglich einer Geraden	
A und *B* liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden *a*	*A* und *B* liegen auf derselben Seite der Geraden *a*



Strecken

Zwei verschiedene Punkte A und B sowie die Menge aller Punkte, die auf der Geraden AB zwischen A und B liegen, bilden die Strecke $\overline{AB}$. Die Punkte A und B einer Strecke $\overline{AB}$ heißen Endpunkte der Strecke.	*Strecke $\overline{AB}$ oder Strecke $\overline{BA}$* 

Die Schreibweise „$\overline{AB}$" wird sowohl für die *Strecke* als auch für die *Länge der Strecke* benutzt.

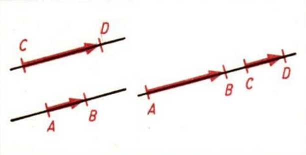
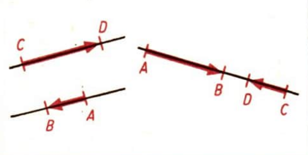
↗ Streckenmessung, Seite 137

Orientierte Strecken

Wenn festgelegt wird, welcher Endpunkt einer Strecke vor dem anderen liegt, so heißt die Strecke orientiert.

Liegt A vor B, so schreibt man $\overrightarrow{AB}$.
Die Orientierung kann in der Zeichnung durch eine Pfeilspitze veranschaulicht werden.

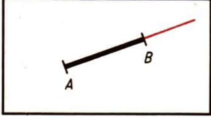
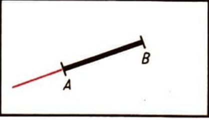
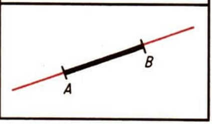
Zwei orientierte Strecken, die zueinander parallel sind, können entweder gleich orientiert oder entgegengesetzt orientiert sein.

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind gleich orientiert.	$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind entgegengesetzt orientiert.
	

Die orientierten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ sind zueinander entgegengesetzt orientiert.

➡ D 1

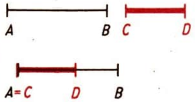
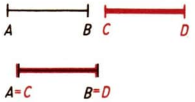
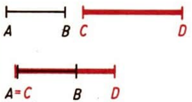
Verlängerung einer Strecke

Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus	Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus	Verlängerung von $\overline{AB}$ über A und B hinaus
		

Vergleich zweier Strecken

Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kann man vergleichen, indem man eine von beiden auf der anderen abträgt.

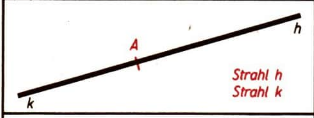
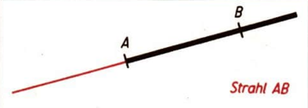
↗ Abtragen einer Strecke, Seite 154

Fall 1	Fall 2	Fall 3
 *Ergebnis:* $\overline{AB} > \overline{CD}$	 *Ergebnis:* $\overline{AB} = \overline{CD}$	 *Ergebnis:* $\overline{AB} < \overline{CD}$

Für je zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gilt entweder $\overline{AB} < \overline{CD}$ oder $\overline{AB} = \overline{CD}$ oder $\overline{AB} > \overline{CD}$.

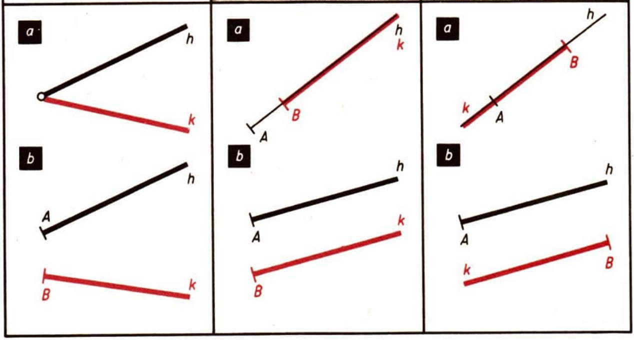
Strahlen

Jeder Punkt A einer Geraden *a* zerlegt diese Gerade in zwei Strahlen. Strahlen werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet. Man kann zur Bezeichnung auch den Punkt A und einen weiteren Punkt des Strahls heranziehen.

	
Der Punkt *A* gehört in diesem Bild beiden Strahlen an.	Der Punkt *A* und die Menge aller Punkte der Geraden *AB*, die mit *B* auf derselben Seite von *A* liegen, bilden den Strahl *AB*.

Den Punkt A eines Strahls AB nennt man seinen Anfangspunkt. Er liegt vor allen anderen Punkten des Strahls. Somit legt jeder Strahl einen Richtungssinn fest.

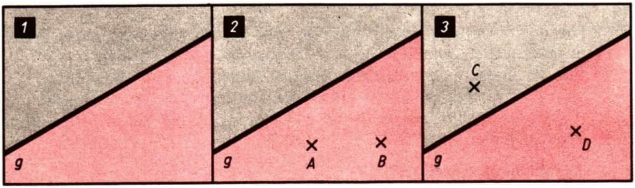
Lagemöglichkeiten zweier Strahlen *h* und *k*		
verschiedene Richtung	gleiche Richtung	
	gleicher Richtungssinn	entgegengesetzter Richtungssinn



Strahlen, die auf parallelen Geraden liegen, nennt man zueinander parallel. Strahlen, die zueinander parallel sind und nur diese, haben entweder gleichen oder entgegengesetzten Richtungssinn.

Halbebenen

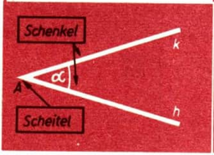
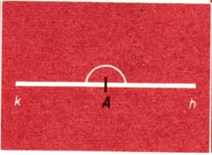
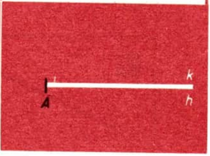
Jede Gerade einer Ebene zerlegt diese Ebene in zwei Halbebenen. Im Bild 2 liegen die Punkte A und B in derselben Halbebene bezüglich der Geraden g. Die Punkte C und D im Bild 3 liegen in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden g. Die Punkte der Geraden g gehören weder zu der einen noch zu der anderen Halbebene.



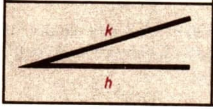
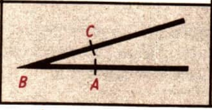
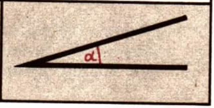
➡ D 1

Winkel

Ein Paar Strahlen *h* und *k*, die denselben Anfangspunkt haben, bilden einen Winkel.
Die Strahlen *h* und *k* heißen die *Schenkel*, der gemeinsame Anfangspunkt beider Strahlen heißt der *Scheitel* des Winkels.

Winkel (*h*, *k*)	Gestreckter Winkel	Nullwinkel
		

Beim gestreckten Winkel sind die beiden Schenkel verschiedene Strahlen auf ein und derselben Geraden.
Beim Nullwinkel fallen die beiden Schenkel zusammen.
Für Winkel sind folgende Bezeichnungen gebräuchlich:

∢ (*h*, *k*) *h* und *k* sind die Schenkel	∢ *ABC* *B* ist der Scheitel, die Strahlen *BA* und *BC* sind die Schenkel	α
		

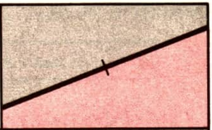
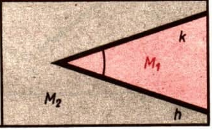
Bemerkung: Die Schreibweise ∢ (*h*, *k*) bzw. ∢ *ABC* bzw. α wird sowohl für den *Winkel* als auch für die *Winkelgröße* benutzt.

↗ Winkelmessung, Seite 139

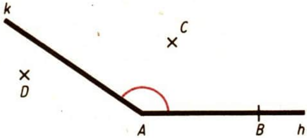
Jeder Winkel, der nicht Nullwinkel ist, teilt die übrigen Punkte der Ebene in genau zwei Teilmengen ein. Die Punkte, die auf den Schenkeln liegen, gehören nicht zu den beiden Teilmengen.

Für den Vergleich zweier Winkel bzw. für die Messung eines Winkels ist es erforderlich, eine der beiden Teilmengen auszuzeichnen.
Von den Punkten der ausgezeichneten Teilmenge sagt man, daß sie innerhalb des Winkels liegen. Die Punkte der anderen Teilmenge liegen außerhalb des Winkels. Die ausgezeichnete Teilmenge wird durch einen Bogen gekennzeichnet.

↗ Teilmengen, Seite 15

Der Winkel (h, k) sei ein gestreckter Winkel. Dann sind die beiden Teilmengen die Halbebenen bezüglich der Geraden, auf der die Schenkel liegen.	
Der Winkel (h, k) sei kein gestreckter Winkel. Dann besteht die eine Menge (M_1) aus allen Punkten, die auf dem rot gerasterten Ebenenstück liegen. M_2 besteht aus allen Punkten, die weder zu M_1 gehören, noch auf den Schenkeln liegen.	

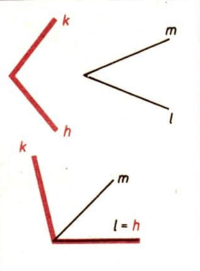
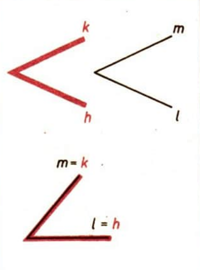
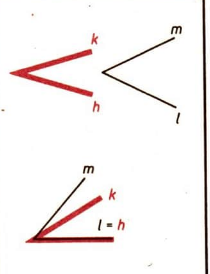
C liegt innerhalb des Winkels (h, k),
A, B liegen auf dem Winkel (h, k),
D liegt außerhalb des Winkels (h, k).



Vergleich zweier Winkel

Zwei Winkel kann man vergleichen, indem man einen von beiden an einen Schenkel des anderen in geeigneter Weise anträgt. (Für beide Winkel muß festgelegt sein, welche Punkte der Ebene innerhalb des betreffenden Winkels liegen.)

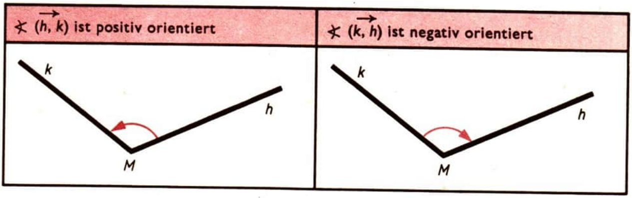
↗ Antragen eines Winkels an einen Strahl, Seite 154

Fall 1	Fall 2	Fall 3
		
Ergebnis: $\sphericalangle(h,k) > \sphericalangle(l,m)$	*Ergebnis:* $\sphericalangle(h,k) = \sphericalangle(l,m)$	*Ergebnis:* $\sphericalangle(h,k) < \sphericalangle(l,m)$

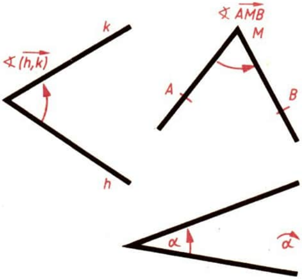
Für je zwei Winkel, $\sphericalangle\,(h, k)$ und $\sphericalangle\,(l, m)$, gilt entweder $\sphericalangle\,(h, k) < \sphericalangle\,(l, m)$ oder $\sphericalangle\,(h, k) = \sphericalangle\,(l, m)$ oder $\sphericalangle\,(h, k) > \sphericalangle\,(l, m)$.

D 1

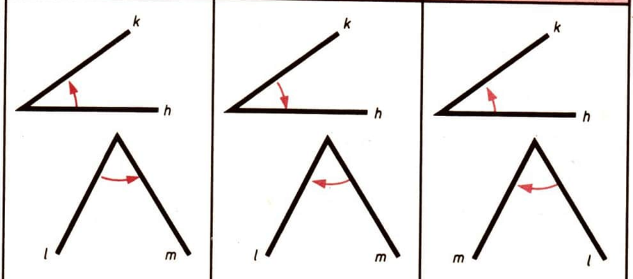
Orientierte Winkel



Die Orientierung eines Winkels kann man durch einen Kreisbogen mit Pfeilspitze kennzeichnen. Zur Bezeichnung eines orientierten Winkels verwendet man die Zeichen „$\sphericalangle\ \overrightarrow{(h, k)}$“ oder „$\sphericalangle\ \overrightarrow{AMB}$“ oder Winkel „$\overset{\curvearrowleft}{\alpha}$“.
Erfolgt die Orientierung eines Winkels so, daß der Kreisbogen mit Pfeilspitze den entgegengesetzten Drehsinn eines Uhrzeigers angibt, so heißt der Winkel *positiv orientiert*, andernfalls *negativ orientiert*.



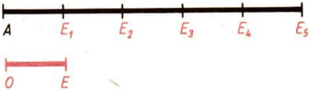
Gleich orientierte Winkel		Entgegengesetzt orientierte Winkel



Beide Winkel sind positiv orientiert	Beide Winkel sind negativ orientiert	$\sphericalangle\ \overrightarrow{(h, k)}$ ist positiv orientiert, $\sphericalangle\ \overrightarrow{(l, m)}$ ist negativ orientiert

D 2 Strecken- und Winkelmessung

Streckenmessung



Zur Messung einer Strecke kann man

a) eine *Einheitsstrecke* von beliebiger Länge festlegen
und
b) feststellen, wie oft man diese Einheitsstrecke auf der zu messenden Strecke abtragen kann.

Im allgemeinen verwendet man diejenigen Einheitsstrecken, die als *Einheiten der Länge* gesetzlich festgelegt sind. Als Grundeinheit der Länge wurde das *Meter* bestimmt.

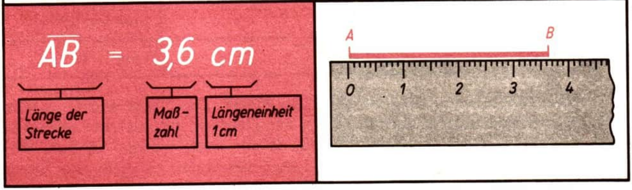
↗ Einheiten der Länge, Seite 138
↗ Tabelle physikalischer Größen und Einheiten, Ph i Ü, Seite 15

Indem man angibt, wie oft eine Längeneinheit bzw. Bruchteile von ihr auf einer gegebenen Strecke hintereinander abgetragen werden kann, ordnet man der betreffenden Strecke eine positive reelle Zahl zu. Auf diese Weise kann jeder Strecke $\overline{AB}$ in Verbindung mit einer Längeneinheit eine positive reelle Zahl zugeordnet werden; man nennt diese Zahl *Maßzahl*.

↗ Reelle Zahlen, Seite 51

Die Längenangabe für eine Strecke ist eindeutig, wenn die Maßzahl der Länge und die Längeneinheit angegeben werden.

Die Strecke $\overline{AB}$ wurde mit einem Lineal gemessen. Die Länge von $\overline{AB}$ beträgt 3,6 cm.

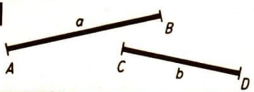


Bemerkung: Das Zeichen „$\overline{AB}$“ wurde in diesem Fall zur Bezeichnung der Streckenlänge herangezogen, während es auf Seite 131 unter dem Stichwort „Strecken“ zur Bezeichnung der Strecke selbst diente.

Zur Bezeichnung von Strecken benutzt man auch kleine lateinische Buchstaben. Aus dem Zusammenhang ist ersichtlich, ob der gewählte Buchstabe für eine *Strecke*, zur Bezeichnung einer *Streckenlänge* oder für die *Maßzahl* einer Streckenlänge verwendet wurde.

D 2

1



Die Strecken $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = b$ liegen auf Geraden verschiedener Richtung. Die Variablen a und b stehen für Strecken.

2

Eine Messung ergab $a = 3{,}0$ cm. Die Variable a steht für die Streckenlänge.

3 Die Entfernung zweier Orte A und B auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000 betrage: $\overline{AB} = a$ cm.
Dann sind A und B $a \cdot 250$ m voneinander entfernt. Die Variable a steht für die Maßzahl der Streckenlänge.

Einheiten der Länge

Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Kilometer	km	1 km $= 10^3$ m
Meter	**m**	**Basiseinheit**
Dezimeter	dm	1 dm $= 10^{-1}$ m
Zentimeter	cm	1 cm $= 10^{-2}$ m
Millimeter	mm	1 mm $= 10^{-3}$ m
Mikrometer	µm	1 µm $= 10^{-6}$ m
Nanometer	nm	1 nm $= 10^{-9}$ m
Pikometer	pm	1 pm $= 10^{-12}$ m

Das grundlegende Längenmaß ist das Meter. Das Meter wurde im Jahre 1872 von vielen Ländern, darunter auch von Deutschland, als gesetzliches Längenmaß eingeführt. Gegenwärtig gibt es nur noch wenige Länder, die überwiegend andere Einheiten der Länge benutzen, so z. B. die Vereinigten Staaten von Amerika und Großbritannien.

Definition des Meters: Auf Grund einer internationalen Vereinbarung ist das Meter als die Länge festgelegt, die 1650763,73 Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus $2\,p_{10}$ und $5\,d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht.

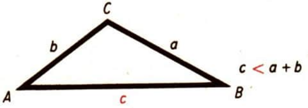
Eigenschaften der Streckenmessung

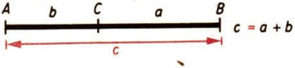
(1) Der gewählten Einheitsstrecke wird die Zahl 1 zugeordnet.
(2) Gleich langen Strecken werden gleiche Maßzahlen zugeordnet.

(3) Ist c die Maßzahl von $\overline{AB}$, b die Maßzahl von $\overline{AC}$ und a die Maßzahl von $\overline{BC}$, so gilt:

$$\boxed{c \leqq a + b}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn C zwischen A und B liegt.





Summe zweier Strecken

Die Maßzahl der Summe zweier Strecken ergibt sich durch Addition der Maßzahlen der beiden Strecken. Die Summe der Maßzahlen zweier Strecken nennt man kurz *Summe der beiden Strecken*.

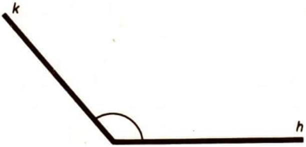
Entfernung zweier Punkte

Unter der Entfernung zweier Punkte A und B versteht man die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

■ Die Entfernung der Punkte A und B beträgt 3,6 cm.

Winkelmessung

Zur Messung eines Winkels kann man
a) einen *Einheitswinkel* von beliebiger Größe festlegen
und
b) feststellen, wie oft dieser Einheitswinkel oder Teile von ihm innerhalb des Winkels von einem Schenkel aus nacheinander angetragen werden können.



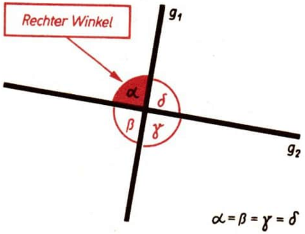
Im allgemeinen verwendet man den Einheitswinkel, der als *Einheit des Winkels* gesetzlich festgelegt ist. Bei dieser Messung kann man jedem Winkel (h, k) eine positive reelle Zahl zuordnen.
Die Zahl, die bei einer Messung dem Winkel (h, k) zugeordnet wird, heißt *Maßzahl der Größe des Winkels* bei dem gegebenen Einheitswinkel.

↗ Reelle Zahlen, Seite 51

D 2

Einheiten des Winkels

Man verwendet als Einheitswinkel den Grad, der in der Tafel der gesetzlichen Einheiten auf der Grundlage des rechten Winkels definiert wird. Jeder der vier Winkel, die zwei sich unter gleichen Nebenwinkeln schneidende Geraden bilden, heißt *rechter Winkel*. Der Grad ist der 90ste Teil des rechten Winkels. Neben diesem *Gradmaß* wird auch das *Bogenmaß* verwendet.

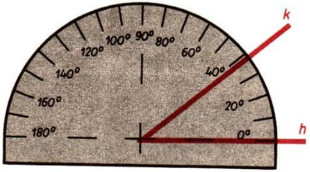


↗ Bogenmaß, Seite 107

Unterteilung des Gradmaßes

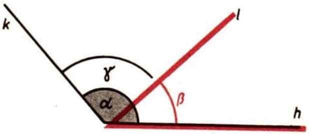
Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Grad	1°	
Minute	$1'$	$1^\circ = 60'$
Sekunde	$1''$	$1^\circ = 3600''$

■ Der Winkel (h, k) wurde mit einem Winkelmesser gemessen. Die Größe des Winkels (h, k) beträgt 39°.
$\sphericalangle (h, k) = 39^\circ$



Eigenschaften der Winkelmessung

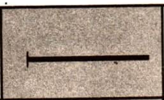
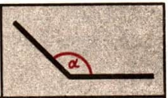
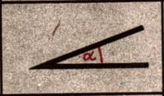
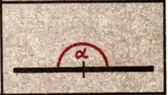
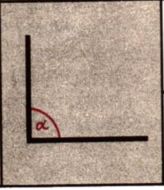
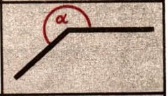
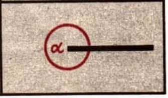
(1) Dem gewählten Einheitswinkel wird die Zahl 1 zugeordnet.
(2) Gleich großen Winkeln werden gleiche Maßzahlen zugeordnet.
(3) Ist α die Maßzahl von $\sphericalangle (h, k)$,
β die Maßzahl von $\sphericalangle (h, l)$
und γ die Maßzahl von $\sphericalangle (l, k)$,
so gilt:
Wenn l innerhalb des Winkels (h, k) liegt, so ist $\alpha = \beta + \gamma$.



Summe zweier Winkel

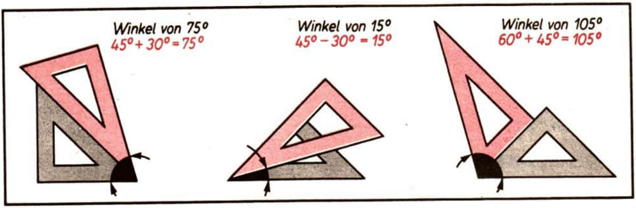
Die Maßzahl der Summe zweier Winkel ergibt sich durch Addition der Maßzahlen der beiden Winkel. Die Summe der Maßzahlen zweier Winkel nennt man kurz *Summe der beiden Winkel*.

Winkelarten

Nullwinkel $\alpha = 0°$		stumpfer Winkel $90° < \alpha < 180°$	
spitzer Winkel $0° < \alpha < 90°$		gestreckter Winkel $\alpha = 180°$	
rechter Winkel $\alpha = 90°$		überstumpfer Winkel $180° < \alpha < 360°$	
		Vollwinkel $\alpha = 360°$	

Zeichnen einiger spezieller Winkel

Winkel von 90°, 60°, 45° und 30° lassen sich mit Hilfe von Zeichendreiecken unmittelbar zeichnen. Andere spezielle Winkel ergeben sich durch Zusammensetzen zweier Zeichendreiecke.

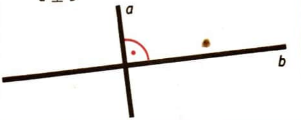


Senkrechte

▶ **DEFINITION:**
Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht genau dann, wenn sie sich unter einem rechten Winkel schneiden.

a steht senkrecht auf *b*

$a \perp b$

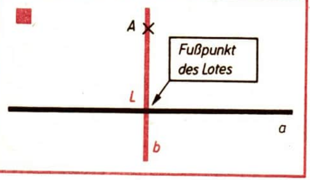


➡ D 2

Jede von zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden heißt eine Senkrechte der anderen.
Durch jeden Punkt einer Geraden gibt es eine und nur eine Gerade der Ebene, die senkrecht auf der gegebenen Geraden steht.

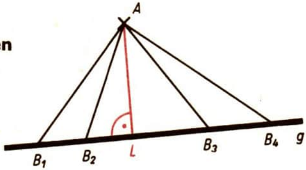
Lot

DEFINITION:
Als Lot von einem Punkt *A* auf eine Gerade *a* bezeichnet man diejenige Gerade, die durch *A* geht und senkrecht auf *a* steht.
Dabei wird vorausgesetzt, daß *A* nicht ein Punkt der Geraden *a* ist.



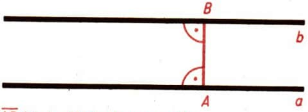
Von jedem Punkt gibt es auf jede Gerade, die nicht durch diesen Punkt geht, ein und nur ein Lot.

Abstand eines Punktes von einer Geraden



Verbindet man einen Punkt *A* mit verschiedenen Punkten einer Geraden *g*, die nicht durch *A* geht, so erhält man Strecken unterschiedlicher Länge. Die kürzeste aller dieser Strecken ist diejenige, die senkrecht auf *g* steht. Die Länge dieser Strecke heißt Abstand des Punktes *A* von der Geraden *g*.
Ist $\overline{AL}$ der Abstand eines Punktes *A* von einer Geraden *g*, so gilt für jeden Punkt $B \neq L$ der Geraden g: $\overline{AB} > \overline{AL}$.

Abstand zweier paralleler Geraden

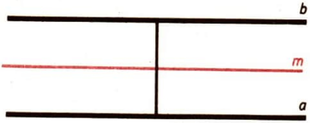


$\overline{AB}$ *ist der Abstand von a und b*

Als Abstand zweier paralleler Geraden *a* und *b* wird die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ bezeichnet, wobei folgendes gilt:
(1) *A* liegt auf *a* und *B* liegt auf *b*.
(2) Die Gerade *AB* steht senkrecht auf der Geraden *a* und auf der Geraden *b*.

↗ Punkte und Geraden einer Ebene (parallel), Seite 128

Mittelparallele, Mittellinie



Mittelparallele oder Mittellinie zweier verschiedener paralleler Geraden *a* und *b* heißt die Gerade, deren Punkte von *a* und *b* denselben Abstand haben.

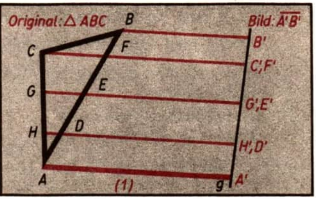
D 3 Bewegungen und Kongruenz

Geometrische Abbildungen

Werden den Punkten einer Punktmenge M_1 durch eine gewisse Vorschrift Punkte einer Punktmenge M_2 zugeordnet, so sagen wir, daß M_1 in M_2 abgebildet wird. Bei geometrischen Abbildungen unterscheiden wir *Originale* und *Bilder*.

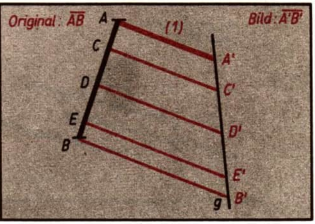
Eindeutige Abbildungen: Jedem Originalpunkt wird ein und nur ein Bildpunkt zugeordnet.

Original sei das Dreieck ABC, Bild sei die Strecke $\overline{A'B'}$ auf der Geraden g. Diese eindeutige Abbildung wurde nach folgender Vorschrift gewonnen:
(1) Dem Punkt A wurde der Punkt A' zugeordnet.
(2) Jedem Punkt $P \neq A$ des Dreiecks wurde der Schnittpunkt der Parallelen zu AA' mit der Geraden g zugeordnet.



Eineindeutige Abbildungen: Jedem Originalpunkt wird ein und nur ein Bildpunkt zugeordnet. Zu jedem Bildpunkt gehört ein und nur ein Originalpunkt.

Original sei die Strecke $\overline{AB}$. Bild sei die Strecke $\overline{A'B'}$ auf der Geraden g. Diese eineindeutige Abbildung wurde nach folgender Vorschrift gewonnen:
(1) Dem Punkt A wurde der Punkt A' zugeordnet.
(2) Jedem Punkt $P \neq A$ der Strecke wurde der Schnittpunkt der Parallelen zu AA' mit der Geraden g zugeordnet.



Jede eineindeutige Abbildung ist auch eindeutig.
Eineindeutige Abbildungen heißen auch umkehrbar eindeutige Abbildungen.
Eine Abbildung nach der Vorschrift, die in den beiden letzten Beispielen angewandt wurde, heißt *Parallelprojektion*.
Bei einer *eineindeutigen Abbildung der Ebene auf sich* wird jedem Punkt A der Ebene genau ein Punkt A' der Ebene als Bildpunkt zugeordnet und jeder Punkt der Ebene besitzt genau einen Originalpunkt. A und A' heißen *einander entsprechende Punkte* bei der betreffenden Abbildung.
Wird bei einer Abbildung der Ebene auf sich eine Figur F auf eine Figur F' abgebildet, so nennt man F und F' *einander entsprechende Figuren* bei dieser Abbildung.

➡ D 3

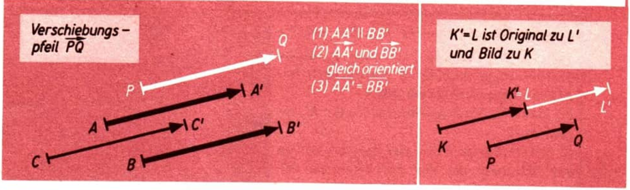
Verschiebungen

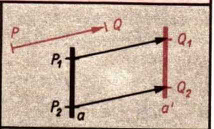
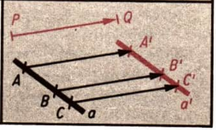
DEFINITION:
Eine Verschiebung ist eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der für je zwei Punkte A und B und ihre Bildpunkte A' bzw. B' gilt:
(1) Die Geraden AA' und BB' sind zueinander parallel.
(2) Die Strahlen AA' und BB' sind gleich orientiert.
(3) Die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ sind gleich lang.

Ist A' das Bild eines Punktes A bei einer Verschiebung, so ist die Verschiebung durch die orientierte Strecke $\overrightarrow{AA'}$ eindeutig bestimmt.
Wird eine Verschiebung durch eine orientierte Strecke $\overrightarrow{PQ}$ angegeben, so spricht man von der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$. Die orientierte Strecke $\overrightarrow{PQ}$ wird dann auch *Verschiebungspfeil* genannt. Ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ legt
(1) die *Richtung*,
(2) den *Richtungssinn* und
(3) die *Verschiebungsweite*

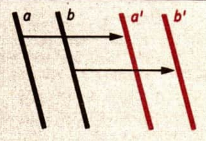
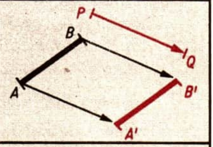
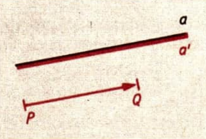
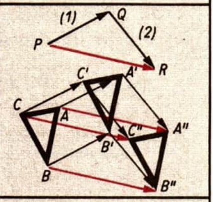
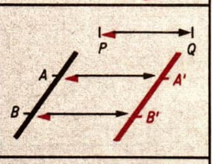
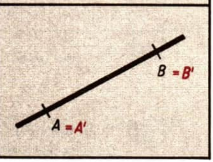
der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ fest. Die Verschiebungsweite wird durch die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ angegeben. Bei einer Verschiebung ist jeder Originalpunkt gleichzeitig Bildpunkt eines anderen Originalpunktes.

Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$



Eigenschaften der Verschiebungen	
1 Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade. Originalgerade und zugehörige Bildgerade sind parallel zueinander.	
2 Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.	

Eigenschaften der Verschiebungen (Fortsetzung)

3 Das Bild zweier zueinander paralleler Geraden sind wieder zwei zueinander parallele Geraden.	
4 Das Bild jeder Strecke $\overline{AB}$ ist eine Strecke $\overline{A'B'}$ gleicher Länge.	
5 Jede Gerade, die in der Verschiebungsrichtung liegt, wird auf sich selbst abgebildet.	
6 Die *Nacheinanderausführung* zweier Verschiebungen ist eine Verschiebung.	
7 Die *Umkehrabbildung* einer Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ ist die Verschiebung $\overrightarrow{QP}$.	
8 Die *Identität* ist die Verschiebung mit der Verschiebungsweite Null.	

↗ Konstruktion einer Verschiebung, Seite 156

➡ D 3

Drehungen

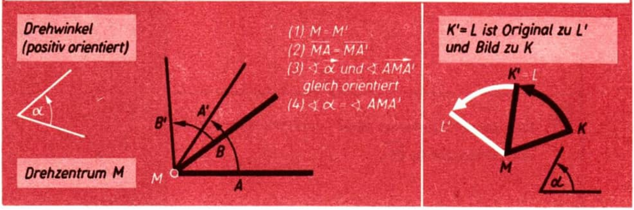
DEFINITION:
Eine Drehung um einen Punkt M ist eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der folgendes gilt:
(1) Der Punkt M wird auf sich selbst abgebildet.
(2) Ist A ein von M verschiedener Punkt, so liegt sein Bildpunkt A' auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$.
(3) Sind A bzw. B von M verschiedene Punkte und A' bzw. B' ihre Bildpunkte, so sind die orientierten Winkel $\sphericalangle\, \overrightarrow{AMA'}$ und $\sphericalangle\, \overrightarrow{BMB'}$ gleich orientiert.
(4) Die Winkel $\sphericalangle\, AMA'$ und $\sphericalangle\, BMB'$ sind gleich groß.

Ist A' das Bild eines Punktes A bei einer Drehung um $M \neq A$, so ist die Drehung durch den Punkt M und den orientierten Winkel $\sphericalangle\, \overrightarrow{AMA'}$ eindeutig bestimmt.
Bei einer Drehung um M heißt M das *Drehzentrum*; der orientierte Winkel $\sphericalangle\, \alpha$ heißt *Drehwinkel*. Seine Größe gibt die Größe der Drehung, seine Orientierung den *Drehsinn* an. Der Drehsinn ist positiv oder negativ, je nachdem, ob der Drehwinkel positiv oder negativ orientiert ist.

↗ Orientierte Winkel, Seite 136

Bei einer Drehung um M ist mit Ausnahme von M jeder Originalpunkt gleichzeitig Bildpunkt eines anderen Originalpunktes.

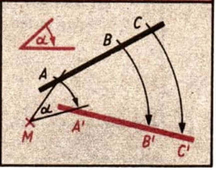
Drehung



Eigenschaften der Drehungen um M

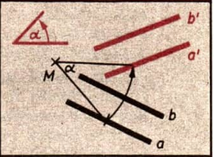
1 Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade.

2 Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.

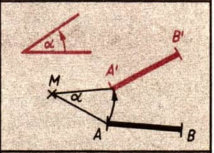


Eigenschaften der Drehungen um *M* (Fortsetzung)

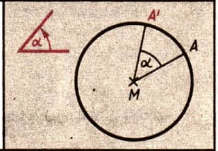
3 Zwei zueinander parallele Geraden haben als Bild Geraden, die wieder zueinander parallel sind.



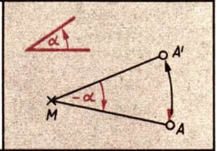
4 Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild eine Strecke $\overline{A'B'}$ gleicher Länge.



5 Jeder Kreis um das Drehzentrum *M* wird auf sich selbst abgebildet.

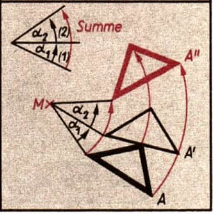


6 Die *Umkehrabbildung* einer Drehung um *M* mit einem Drehwinkel α ist eine Drehung um *M*, deren Drehwinkel der zu α entgegengesetzt orientierte Winkel gleicher Größe ist.



7 Die *Nacheinanderausführung* zweier Drehungen um *M* ist eine Drehung um *M*. Haben beide Drehungen denselben Drehsinn, so ist die Größe des Drehwinkels bei der Nacheinanderausführung gleich der Summe der beiden Drehwinkel.

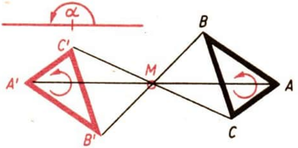
8 Die *Identität* ist die Drehung um *M* mit dem Null- oder Vollwinkel als Drehwinkel.



↗ Konstruktion einer Drehung, S. 157

Drehungen um einen Punkt mit einem Drehwinkel von 180° werden auch *Punktspiegelungen* genannt.

↗ Bild eines Dreiecks bei einer Drehung um einen Punkt, S. 157, 158



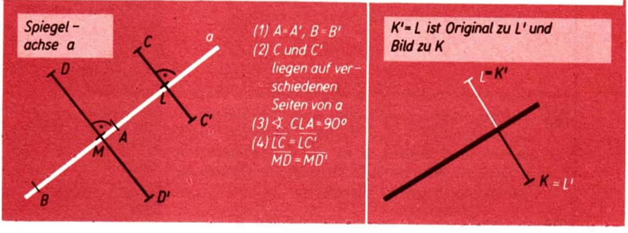
➡ D 3

Spiegelungen an einer Geraden

▶ **DEFINITION:**
Eine Spiegelung an einer Geraden *a* ist eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der folgendes gilt (*A′* sei das Bild von *A*):
(1) Jeder Punkt der Geraden *a* wird auf sich selbst abgebildet.
(2) Jeder Punkt A, der nicht der Geraden *a* angehört, und sein Bildpunkt *A′* liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden *a*.
(3) Jede Gerade *AA′* schneidet die Gerade *a* in einem Punkt *L* unter einem rechten Winkel.
(4) Die Strecken $\overline{LA}$ und $\overline{LA'}$ sind gleich lang.

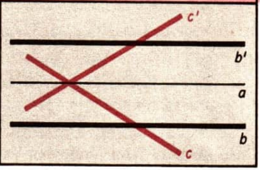
Jede Spiegelung an einer Geraden ist durch die Angabe zweier Punkte dieser Geraden eindeutig bestimmt.
Die Gerade *a* bei der Spiegelung an *a* heißt *Spiegelachse* oder *Symmetrieachse* dieser Spiegelung. Das Bild *A′* eines Punktes A wird bei einer Spiegelung an einer Geraden auch das Spiegelbild von A genannt. Liegt A nicht auf *a*, so sagt man, daß der Punkt A und sein Spiegelbild *A′* *spiegelbildlich* zur Geraden *a* liegen.
Bei einer Spiegelung an g sind mit Ausnahme der Punkte, die der Geraden g angehören, alle Originalpunkte gleichzeitig Bildpunkte anderer Originalpunkte.

Spiegelung an *a*



Eigenschaften der Spiegelungen an Geraden

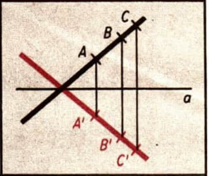
1 Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade. Original- und Bildgerade sind entweder parallel zur Spiegelachse oder sie schneiden sich auf ihr.



Eigenschaften der Spiegelungen an Geraden (Fortsetzung)

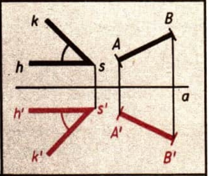
2 Liegt ein Punkt *B* zwischen den Punkten *A* und *C*, so liegt auch der Bildpunkt *B'* zwischen den Bildpunkten *A'* und *C'*.

3 Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind ebenfalls parallel.



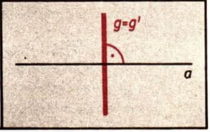
4 Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Spiegelbild eine Strecke $\overline{A'B'}$ gleicher Länge.

5 Jeder Winkel (*h*, *k*) hat als Spiegelbild einen Winkel (*h'*, *k'*) gleicher Größe.



6 Jede Gerade, die senkrecht auf der Spiegelgeraden steht, wird auf sich selbst abgebildet.

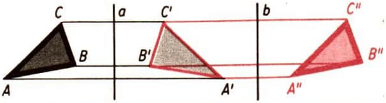
7 Die *Umkehrabbildung* einer Spiegelung an *a* ist (wieder) die Spiegelung an *a*.



↗ Konstruktion einer Spiegelung, Seite 158

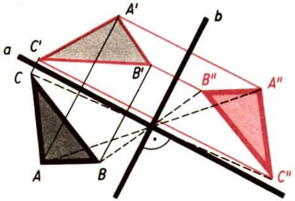
Hintereinanderausführung von Spiegelungen

Zwei Spiegelungen an zwei zueinander parallelen Geraden



Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden ist eine Verschiebung.

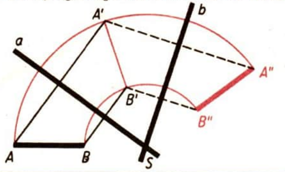
Zwei Spiegelungen an zueinander senkrechten Geraden



Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen an zueinander senkrechten Geraden ist eine Drehung um den Schnittpunkt beider Geraden mit einem Drehwinkel von 180°.

➡ D 3

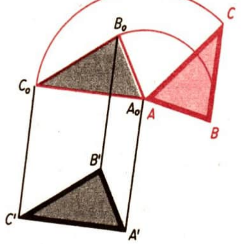
Zwei Spiegelungen an Geraden, die einander schneiden.



Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen an Geraden, die einander in S schneiden, ist eine Drehung um S.

Bewegungen

DEFINITION:
Bewegung heißt jede eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, die
(1) eine Verschiebung oder
(2) eine Drehung um einen Punkt oder
(3) eine Spiegelung an einer Geraden oder
(4) eine Abbildung ist, die aus endlich vielen Verschiebungen, Drehungen um einen Punkt oder Spiegelungen an Geraden zusammengesetzt ist.



Die Bewegung setzt sich aus der Drehung um A mit dem Drehwinkel $\sphericalangle\, \overrightarrow{BAB_0} = 130^0$ und aus der Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$ zusammen.

↗ Verschiebungen, Seite 144
↗ Drehungen, Seite 146
↗ Spiegelungen an einer Geraden, Seite 148

Eigenschaften von Bewegungen

1 Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade.

2 Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.

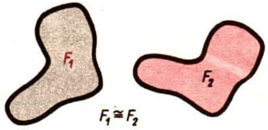
3 Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind parallel.

4 Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild eine Strecke $\overline{A'B'}$ gleicher Länge.

5 Jeder Winkel (h, k) hat als Bild einen Winkel (h', k') gleicher Größe.

Kongruenz

DEFINITION:
Zwei Figuren heißen kongruent genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, bei der die eine Figur das Bild der anderen Figur ist.
Schreibweise: $F_1 \cong F_2$ (lies F_1 ist kongruent zu F_2)



Eigenschaften der Kongruenz

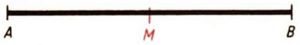
1. Jede Figur ist zu sich selbst kongruent.
2. Wenn F_1 zu F_2 kongruent ist, so ist auch F_2 zu F_1 kongruent.
3. Ist F_1 zu F_2 kongruent, und ist F_2 zu F_3 kongruent, so ist auch F_1 zu F_3 kongruent.

Kongruenz bei Strecken und Winkeln

Zwei Strecken sind kongruent genau dann, wenn sie gleich lang sind.
Zwei Winkel sind kongruent genau dann, wenn sie gleich groß sind.

Mittelpunkt einer Strecke

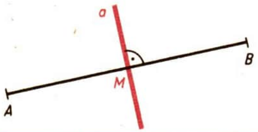
DEFINITION:
Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ heißt der Punkt M zwischen den Punkten A und B, für den gilt: $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.



Mittelsenkrechte einer Strecke

DEFINITION:
Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ heißt die Gerade, die durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht und senkrecht auf der Geraden AB steht.

a ist Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$



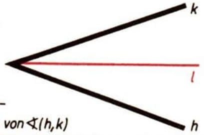
Eigenschaften der Mittelsenkrechten einer Strecke

1. Jeder Punkt C der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

2 Jeder Punkt C der Ebene, der von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt ist, liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

Winkelhalbierende eines Winkels

DEFINITION:
Winkelhalbierende eines Winkels (h, k) heißt der Strahl l, der vom Scheitel des Winkels ausgeht, innerhalb des Winkels (h, k) verläuft und für den gilt:
$\sphericalangle (h, l) \cong \sphericalangle (l, k)$.



l ist Winkelhalbierende von $\sphericalangle(h,k)$

Eigenschaften der Winkelhalbierenden eines Winkels

1 Jeder Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels hat von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand.

2 Jeder Punkt innerhalb eines Winkels, der von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand hat, liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels.

Symmetrie

Figuren heißen *symmetrisch*, wenn es eine Bewegung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird. Dabei ist die Identität ausgeschlossen.

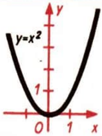
↗ Drehungen, Seite 146 (siehe Eigenschaften der Drehungen Nr. 8)

Axiale Symmetrie:
Die Spiegelung an g bildet das große A auf sich selbst ab.
(↗ Axiale Symmetrie, Seite 152)

Radiale Symmetrie:
Bei Drehung um einen Winkel von 60° wird die Figur auf sich selbst abgebildet.

Axiale Symmetrie

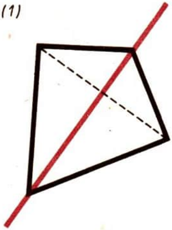
DEFINITION:
Eine Figur heißt axialsymmetrisch, wenn es eine Spiegelung an einer Geraden gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.
Die Gerade heißt Symmetrieachse oder Spiegelungsachse.



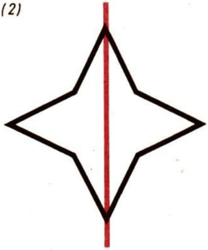
Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ ist axialsymmetrisch. Ihre Symmetrieachse ist die Ordinatenachse.
↗ Seite 86 und 87.

- Jede Strecke ist axialsymmetrisch. Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte der Strecke.
- Jeder vom Nullwinkel verschiedene Winkel ist axialsymmetrisch. Symmetrieachse ist die Gerade, auf der die Winkelhalbierende des Winkels liegt.
- Jede Gerade ist axialsymmetrisch; Symmetrieachsen sind alle Geraden, die senkrecht auf der gegebenen Geraden stehen. Strahlen sind nicht axialsymmetrisch.
- Weitere Beispiele für axialsymmetrische Figuren:

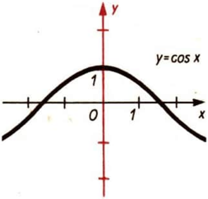
(1)



(2)



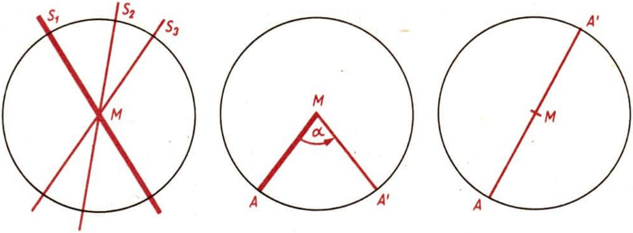
(3)



Radiale Symmetrie

Bei der radialen Symmetrie ist eine Drehung um einen Punkt diejenige Bewegung, die eine Figur auf sich selbst abbildet. Wenn diese Drehung speziell um einen Drehwinkel von 180° erfolgt, so nennt man die Figur *zentralsymmetrisch* oder *punktsymmetrisch*.
Der Kreis ist eine axialsymmetrische Figur. Er hat unbegrenzt viele Symmetrieachsen.
Der Kreis ist auch eine radialsymmetrische Figur; denn jede Drehung um seinen Mittelpunkt *M* bildet den Kreis auf sich ab.
Der Kreis ist damit auch eine zentralsymmetrische Figur; denn wenn *jede* Drehung um den Punkt *M* den Kreis auf sich selbst abbildet, so bildet auch die Drehung um 180° den Kreis auf sich selbst ab.

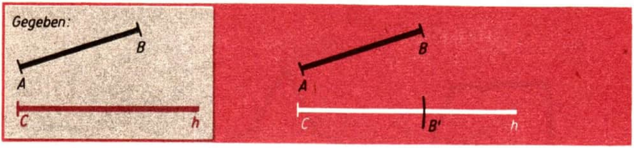
↗ Symmetrieverhältnisse am Kreis, Seite 195



D4 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Unter einer *Konstruktion mit Zirkel und Lineal* verstehen wir folgende Aufgabe:
Aus gegebenen Punkten einer Ebene sind weitere Punkte dieser Ebene, die bestimmten Bedingungen genügen, zu ermitteln.

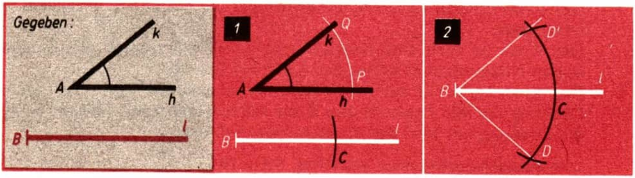
Abtragen einer Strecke auf einem Strahl



Konstruktion:
Wir greifen die gegebene Strecke $\overline{AB}$ mit dem Zirkel ab und zeichnen um C einen kleinen Kreisbogen. Den Schnittpunkt mit dem Strahl h bezeichnen wir mit B'.

$\overline{CB'}$ ist die auf dem Strahl h abgetragene Strecke $\overline{AB}$. Die Konstruktion ist eindeutig.
Zum Abtragen von Strecken verwendet man auch einen Stechzirkel.
Ist nicht die Strecke selbst sondern ihre Länge gegeben, so verwendet man ein Lineal mit Längeneinteilung.

Antragen eines Winkels an einen Strahl



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen um A einen Kreisbogen mit beliebigem Radius und bezeichnen seine Schnittpunkte mit den Strahlen des Winkels (h, k) mit P bzw. Q. Mit demselben Radius schlagen wir nun einen Kreisbogen um B und bezeichnen seinen Schnittpunkt mit dem Strahl l mit C.

(2) Wir zeichnen um C den Kreis mit dem Radius $\overline{PQ}$ und bezeichnen seine Schnittpunkte mit dem Kreis um B mit D bzw. D'. Dann zeichnen wir die Strahlen BD und BD'.

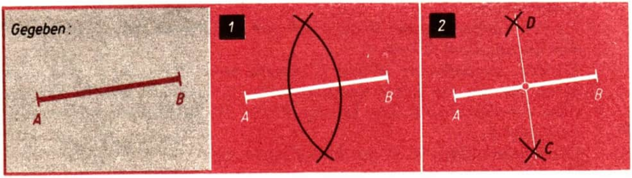
Sowohl der Winkel CBD als auch der Winkel $D'BC$ erfüllen die gestellte Aufgabe.

Ist nicht der Winkel selbst, sondern seine Größe gegeben, so verwendet man einen Winkelmesser zum Antragen des Winkels an einen Strahl.

Mittelpunkt und Mittelsenkrechte einer Strecke

Der Mittelpunkt einer Strecke ergibt sich als Schnittpunkt der Strecke mit ihrer Mittelsenkrechten.

↗ Mittelsenkrechte einer Strecke, Seite 151

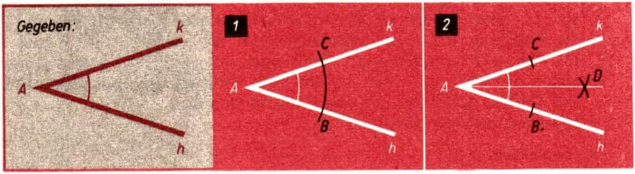


Konstruktion:
(1) Wir zeichnen um A und B jeweils einen Kreisbogen mit einem Radius $r > \frac{\overline{AB}}{2}$.

↗ Kreis – Kreisfläche, Seite 194

(2) Wir bezeichnen die Schnittpunkte der beiden Kreisbögen mit C bzw. D und zeichnen die Verbindungsgerade. Die Gerade CD ist die Mittelsenkrechte der Geraden AB.
Die Konstruktion ist eindeutig.

Winkelhalbierende

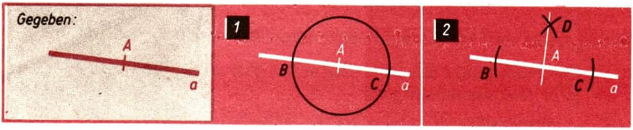


Konstruktion:
(1) Wir zeichnen einen Kreisbogen mit dem beliebig gewählten Radius r um A und bezeichnen die Schnittpunkte mit den Schenkeln des Winkels mit B bzw. C.
(2) Wir zeichnen um B und C jeweils einen Kreisbogen mit demselben Radius r. Wir erhalten dabei zwei Schnittpunkte. Den Schnittpunkt, der weiter von A entfernt ist, bezeichnen wir mit D. Nun zeichnen wir den Strahl AD, der Winkelhalbierende des Winkels (h, k) ist.
Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Winkelhalbierende eines Winkels, Seite 152

D 4

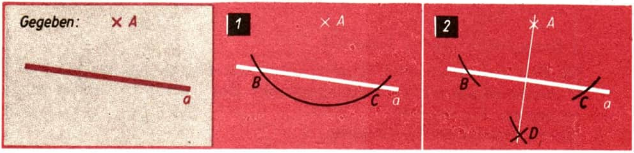
Senkrechte in einem Punkt einer Geraden



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen einen Kreis um A und bezeichnen seine Schnittpunkte mit der Geraden mit B bzw. C.
(2) Wir zeichnen um B und C jeweils einen Kreisbogen und bezeichnen einen der beiden Schnittpunkte beider Kreisbogen mit D. Wir zeichnen dann die Gerade AD. Die Gerade AD ist die Senkrechte auf der Geraden a im Punkt A.
Die Konstruktion ist in der Ebene eindeutig.

↗ Senkrechte, Seite 141

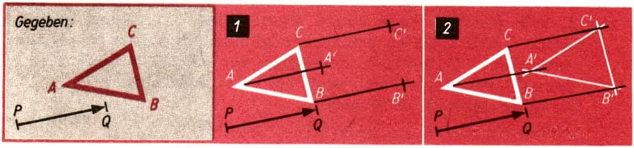
Lot von einem Punkt auf eine Gerade



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen einen Kreisbogen um A mit einem Radius r, der größer als der Abstand des Punktes A von der Geraden a sein muß. Wir bezeichnen die Schnittpunkte dieses Kreisbogens mit der Geraden a mit B bzw. C.
(2) Wir zeichnen um B und C Kreisbögen mit demselben Radius in der Halbebene bezüglich a, in der A nicht liegt. Wir erhalten den Schnittpunkt D. Die Gerade AD ist das Lot von A auf die Gerade a.
Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Lot, Seite 142

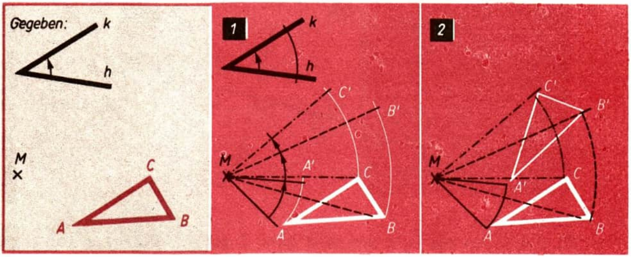
Bild eines Dreiecks bei einer Verschiebung



Konstruktion:

(1) Wir zeichnen von A, B und C aus Strahlen, die mit dem Strahl PQ gleich orientiert sind. Wir tragen auf diesen Strahlen die Strecke $\overline{PQ}$ ab und bezeichnen die so gewonnenen Punkte mit A', B' und C'.
(2) Wir zeichnen das Dreieck $A'B'C'$, das das Bild des Dreiecks ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ ist.

Bild eines Dreiecks bei einer Drehung um einen Punkt

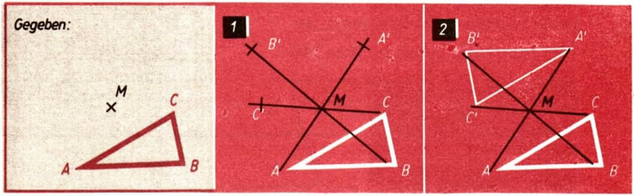


Konstruktion:

(1) Wir zeichnen die Strahlen MA, MB und MC. Wir zeichnen um M Kreisbogen mit den Radien $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$. An die Schenkel MA, MB und MC tragen wir den orientierten Winkel $\overrightarrow{(h, k)}$ entsprechend der gegebenen Orientierung an.
Die Schnittpunkte der freien Schenkel[1]) der angetragenen Winkel mit den entsprechenden Kreisbogen bezeichnen wir mit A', B' bzw. C'.
(2) Wir zeichnen das Dreieck $A'B'C'$, das das Bild des Dreiecks ABC bei der Drehung um M um den Winkel $\overrightarrow{(h, k)}$ ist.

Bei einer Drehung um 180° vereinfacht sich das Konstruktionsverfahren beträchtlich.

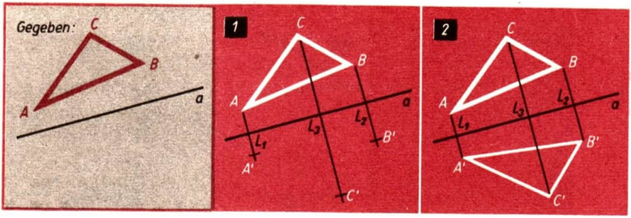
↗ Drehungen, Seite 147 („Punktspiegelung“ am Schluß der Ausführungen)



[1]) Ein Schenkel heißt „frei“, wenn auf ihm noch kein Punkt gewählt wurde.

Konstruktion:
(1) Wir zeichnen von A, B und C aus die Strahlen AM, BM bzw. CM. Wir tragen von M aus die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ bzw. $\overline{CM}$ auf den Strahlen ab, so daß wir die Punkte A', B' bzw. C' erhalten.
(2) Wir zeichnen das Dreieck $A'B'C'$, das das Bild des Dreiecks ABC bei einer Drehung um M um einen Winkel der Größe 180° ist.

Bild eines Dreiecks bei einer Spiegelung an einer Geraden



Konstruktion:
(1) Wir fällen die Lote von A, B bzw. C auf die Gerade a und bezeichnen ihre Fußpunkte mit L_1, L_2 bzw. L_3. Wir tragen die Strecken $\overline{L_1A}$, $\overline{L_2B}$ bzw. $\overline{L_3C}$ auf den Loten ab und bezeichnen die so gewonnenen Punkte mit A', B' bzw. C'.
(2) Wir zeichnen das Dreieck $A'B'C'$, das Spiegelbild des Dreiecks ABC bei der Spiegelung an a ist.

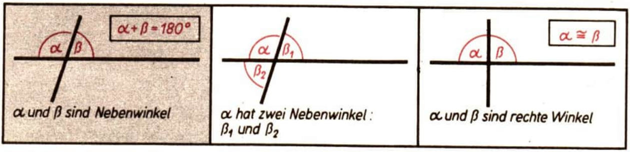
↗ Spiegelungen an einer Geraden, Seite 148

D 5 Winkelpaare

Nebenwinkel

Nebenwinkel haben den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam; die beiden anderen Schenkel der Winkel liegen auf einer Geraden.
Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°. Jeder Winkel hat zwei Nebenwinkel. Ein Winkel ist ein rechter Winkel genau dann, wenn er einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

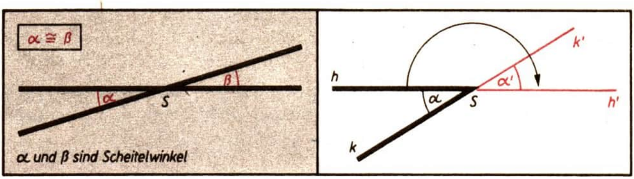
↗ Einheiten des Winkels, Seite 140



α und β sind Nebenwinkel — *α hat zwei Nebenwinkel: β_1 und β_2* — *α und β sind rechte Winkel*

Scheitelwinkel

Scheitelwinkel haben den Scheitel gemeinsam.
Die Schenkel bilden paarweise eine Gerade. Scheitelwinkel sind kongruent.
Sind zwei Winkel Scheitelwinkel, so ist der eine das Bild des anderen bei einer Drehung um 180°.



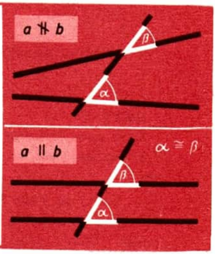
α und β sind Scheitelwinkel

Stufenwinkel

Stufenwinkel treten auf, wenn zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden. Dabei darf die dritte Gerade nicht durch den Schnittpunkt der beiden Geraden gehen.

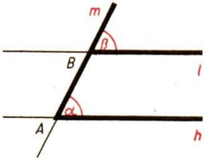
Stufenwinkel zeichnen sich folgendermaßen aus:
(1) Ihre Scheitel sind verschieden.
(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind Strahlen mit gleichem Richtungssinn.
(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden.

↗ Strahlen, Seite 132 (Lagemöglichkeit zweier Strahlen)



SATZ:
Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.

Der Satz hat zwei *Voraussetzungen*:
(1) Die Winkel $\alpha = \sphericalangle (h, k)$ und $\beta = \sphericalangle (l, m)$ seien Stufenwinkel mit den Scheiteln A bzw. B.
(2) Die Geraden l und h seien zueinander parallel.
Behauptung: Die Stufenwinkel α und β sind kongruent.
Beweis:
Der Winkel (l, m) ist das Bild des Winkels (h, m) bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$. Folglich gilt: $\alpha \cong \beta$.



➡ D 5

Die Umkehrung des Satzes lautet, wenn man die erste Voraussetzung beibehält:

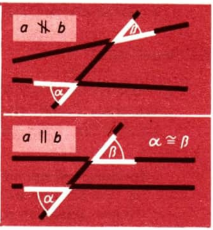
▶ **SATZ:**
Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die beiden Winkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden parallel zueinander.

Wechselwinkel

Wechselwinkel treten auf, wenn zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden. Dabei darf die dritte Gerade nicht durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden gehen.

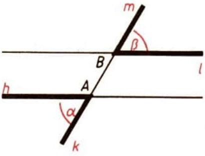
Wechselwinkel zeichnen sich folgendermaßen aus:
(1) Ihre Scheitel sind verschieden.
(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind Strahlen mit entgegengesetztem Richtungssinn.
(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden.

↗ Strahlen, Seite 132 (Lagemöglichkeit zweier Strahlen)



▶ **SATZ:**
Sind zwei Winkel Wechselwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.

Der Satz hat zwei *Voraussetzungen*:
(1) Die Winkel $\alpha = \sphericalangle(h, k)$ und $\beta = \sphericalangle(l, m)$ seien Wechselwinkel mit den Scheiteln A bzw. B.
(2) Die Geraden h und l seien zueinander parallel.
Behauptung: Die Wechselwinkel α und β sind kongruent.



Beweis:
Der Winkel (l, m) ist das Bild des Winkels (h, k) bei einer Bewegung, die sich aus der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ und der Drehung um B um einen Drehwinkel $180°$ zusammensetzt. Folglich gilt $\alpha \cong \beta$.
Die Umkehrung des Satzes lautet, wenn man die erste Voraussetzung beibehält:

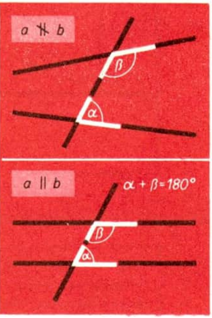
▶ **SATZ:**
Sind zwei Winkel Wechselwinkel und sind die beiden Winkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden parallel zueinander.

Entgegengesetzt liegende Winkel

Entgegengesetzt liegende Winkel treten auf, wenn zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden. Dabei darf die dritte Gerade nicht durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden gehen.

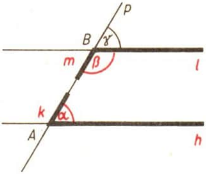
Entgegengesetzt liegende Winkel zeichnen sich folgendermaßen aus:
(1) Ihre Scheitel sind verschieden.
(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind Strahlen mit entgegengesetztem Richtungssinn.
(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden.

↗ Strahlen, Seite 132 (Lagemöglichkeit zweier Strahlen)



SATZ:
Sind zwei Winkel entgegengesetzt liegende Winkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so betragen die beiden Winkel zusammen 180°.

Der Satz hat zwei *Voraussetzungen*:
(1) Die Winkel $\alpha = \sphericalangle\,(h, k)$ und $\beta = \sphericalangle\,(l, m)$ seien entgegengesetzt liegende Winkel mit den Scheiteln A bzw. B.
(2) Die Geraden h und l seien zueinander parallel.
Behauptung: Die entgegengesetzt liegenden Winkel α und β betragen zusammen 180°.
Beweis:
Der Winkel $\gamma = \sphericalangle\,(l, p)$ sei Nebenwinkel von β. Dann gilt $\gamma + \beta = 180°$. Da γ und α entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel an geschnittenen Geraden sind, gilt $\gamma \cong \alpha$.
Aus beiden Beziehungen ergibt sich:
$\alpha + \beta = 180°$.



↗ Stufenwinkel, Seite 159; Wechselwinkel, Seite 160

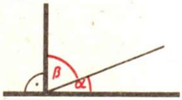
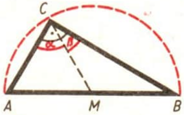
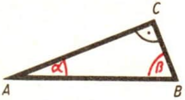
Die Umkehrung des Satzes lautet, wenn man die erste Voraussetzung beibehält:

SATZ:
Sind zwei Winkel entgegengesetzt liegende Winkel und betragen beide Winkel zusammen 180°, so sind die geschnittenen Geraden parallel zueinander.

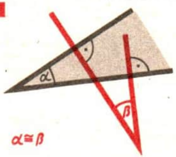
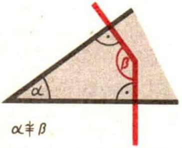
➡ D 6

Komplementwinkel

Je zwei Winkel, die zusammen 90° betragen, heißen Komplementwinkel.

$\alpha + \beta = 90°$ 	$\alpha + \beta = 90°$  ↗ Satz des *Thales*, Seite 201	$\alpha + \beta = 90°$  ↗ Rechtwinkliges Dreieck, Seite 167

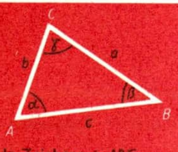
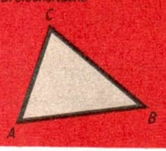
Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind kongruent, falls der Scheitel des einen nicht innerhalb oder auf einem Schenkel des anderen Winkels liegt.	 $\alpha \cong \beta$  $\alpha \ncong \beta$

D 6 Dreiecke

Dreieck – Dreiecksfläche

Unter einem Dreieck verstehen wir eine Figur, die von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten und deren Verbindungsstrecken gebildet wird.

 In Zeichen: △ ABC	Dreiecksfläche 	Eckpunkte A, B, C Seiten $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ Innenwinkel $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$

Die Winkel α und β *liegen* der Seite *c an.*
Die Winkel β und γ *liegen* der Seite *a an.*
Die Winkel γ und α *liegen* der Seite *b an.*

Der Winkel α *liegt* der Seite *a gegenüber.*
Der Winkel β *liegt* der Seite *b gegenüber.*
Der Winkel γ *liegt* der Seite *c gegenüber.*

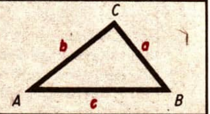
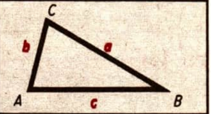
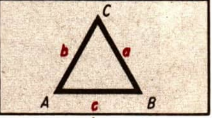
Die Seiten und Winkel eines Dreiecks heißen auch seine *Stücke.* Bezüglich eines Dreiecks unterscheiden wir:
(1) Punkte innerhalb des Dreiecks,
(2) Punkte auf dem Dreieck,
(3) Punkte außerhalb des Dreiecks.

Die Menge aller Punkte der Ebene, die entweder innerhalb oder auf einem Dreieck liegen, nennt man die dem Dreieck zugehörige *Dreiecksfläche.* Zuweilen wird auch eine Dreiecksfläche kurz als Dreieck bezeichnet.

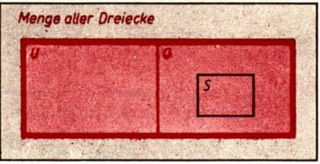
↗ Flächeninhalt des Dreiecks, Seite 231

■ Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* beträgt 12 cm². Gemeint ist, daß der Inhalt der **Dreiecksfläche** *ABC* 12 cm² beträgt.

Einteilung der Dreiecke

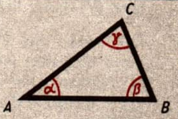
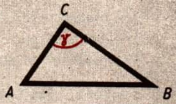
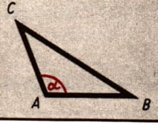
Einteilung der Dreiecke nach der Länge der Seiten		
Unregelmäßige Dreiecke	Die Seiten der Dreiecke sind paarweise verschieden lang.	
Gleichschenklige Dreiecke	Es gibt ein Paar gleich langer Seiten.	
Gleichseitige Dreiecke	Die drei Seiten sind gleich lang.	

Die Menge aller *gleichseitigen Dreiecke* (S) ist eine Teilmenge der Menge aller *gleichschenkligen Dreiecke* (G), die ihrerseits Teilmenge der Menge *aller Dreiecke* ist.
Die Menge aller unregelmäßigen Dreiecke (U) ist ebenfalls Teilmenge der Menge aller Dreiecke.



↗ Teilmenge, Seite 15

➡ D 6

Einteilung der Dreiecke nach der Größe der Winkel		
Spitzwinklige Dreiecke	Alle Winkel des Dreiecks sind spitze Winkel.	
Rechtwinklige Dreiecke	Ein Winkel des Dreiecks ist ein rechter Winkel.	
Stumpfwinklige Dreiecke	Ein Winkel des Dreiecks ist ein stumpfer Winkel.	

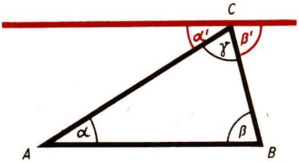
Die Menge aller Dreiecke kann in die drei Teilmengen
(1) spitzwinklige Dreiecke,
(2) rechtwinklige Dreiecke,
(3) stumpfwinklige Dreiecke
zerlegt werden. Dabei besitzen je zwei dieser Mengen kein gemeinsames Element.

Übersicht über mögliche Dreiecksarten			
	unregelmäßig	**gleichschenklig**	**gleichseitig**
spitzwinklig	×	×	×
rechtwinklig	×	×	nicht möglich
stumpfwinklig	×	×	nicht möglich

Innenwinkel eines Dreiecks

▶ **SATZ: (Satz über die Innenwinkel eines Dreiecks)**
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Voraussetzung: Die Innenwinkel eines Dreiecks ABC seien α, β und γ.
Behauptung: Die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ beträgt genau 180°.



Beweis:
Wir zeichnen die Parallele durch den Eckpunkt C des Dreiecks zur Geraden AB. Wir bezeichnen den zu α gehörigen Wechselwinkel mit α' und den zu β gehörigen Wechselwinkel mit β'.
Es gilt:

$$\alpha' + \gamma + \beta' = 180° \text{ (als gestreckter Winkel)}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \\ \beta' &= \beta \end{aligned}\right\} \text{ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)}$$

Daraus folgt:

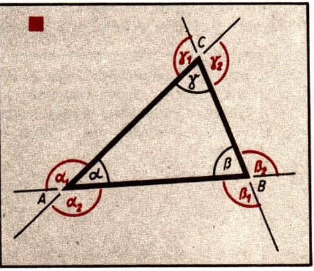
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°.}$$

↗ Wechselwinkel, Seite 160

Folgerungen aus dem Satz über die Innenwinkel eines Dreiecks:
(1) Jedes rechtwinklige Dreieck besitzt genau einen rechten Winkel.
(2) Jedes stumpfwinklige Dreieck besitzt genau einen stumpfen Winkel.

Außenwinkel eines Dreiecks

Zu jedem Innenwinkel gibt es zwei Nebenwinkel. Diese Nebenwinkel bilden ein Scheitelwinkelpaar; sie sind also kongruent. Jeder dieser Nebenwinkel heißt Außenwinkel des Dreiecks.



Wird von den Außenwinkeln eines Dreiecks gesprochen, so sind drei Außenwinkel mit verschiedenen Scheitelpunkten gemeint. Die Außenwinkel des Dreiecks ABC sind beispielsweise die Außenwinkel α_1, β_1 und γ_1.

▶ **SATZ: (Satz über die Außenwinkel eines Dreiecks)**
Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Es genügt, den Beweis für einen Außenwinkel eines Dreiecks ABC zu führen.

D 6

Voraussetzung: Der Winkel α_1 sei Außenwinkel eines Dreiecks ABC. Die beiden Winkel β und γ seien die nicht anliegenden Innenwinkel.

Behauptung: Es gilt die Beziehung $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Beweis:

$\alpha + \alpha_1 = 180°$ (als Nebenwinkel)

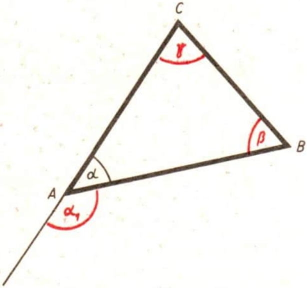
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (als Summe der Innenwinkel)

Daraus folgt:

$\alpha + \alpha_1 = \alpha + \beta + \gamma$ bzw.

$$\boxed{\alpha_1 = \beta + \gamma.}$$

↗ Nebenwinkel, Seite 158

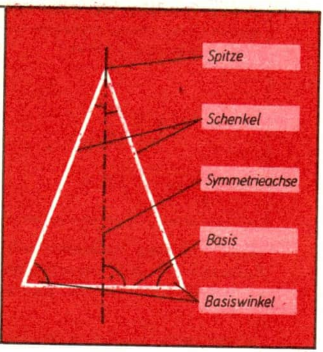


Aus dem Satz über die Außenwinkel eines Dreiecks folgt:
Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°. (Zur Begründung bildet man die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \beta + \gamma + \alpha + \gamma + \alpha + \beta$ und wendet dann den Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck an.)

Gleichschenklige Dreiecke

In jedem gleichschenkligen Dreieck gibt es ein Paar gleich langer Seiten, die *Schenkel*. Die dritte Seite wird *Basis* genannt.

Jedes gleichschenklige Dreieck ist axialsymmetrisch. Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte der Basis, die zugleich Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze ist.



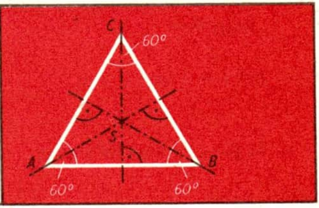
Die Basiswinkel eines jeden gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß. Die Basiswinkel eines jeden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks betragen 45°.

↗ Axiale Symmetrie, Seite 152

Gleichseitige Dreiecke

In jedem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang.

Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen. Es sind dies die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten.



Die Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks sind paarweise gleich groß. Jeder Innenwinkel beträgt 60°.

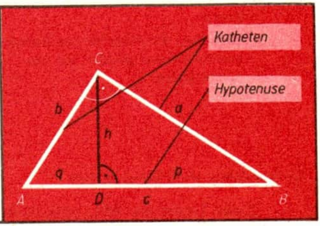
Übersicht über die Abbildungen eines gleichseitigen Dreiecks *ABC* auf sich selbst	
Drehungen um *S* (Schnittpunkt der Symmetrieachsen)	Drehwinkel 120° Drehwinkel 240° Drehwinkel 360°
Spiegelungen an den Symmetrieachsen	Spiegelachse *AS* Spiegelachse *BS* Spiegelachse *CS*

Rechtwinklige Dreiecke

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel ein Rechter. Die diesem Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*, die gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse*.

$q = \overline{AD}$ heißt der zu b gehörige Hypotenusenabschnitt

$p = \overline{BD}$ heißt der zu a gehörige Hypotenusenabschnitt



Wenn $\gamma = 90°$ ist, so gilt $\alpha + \beta = 90°$.

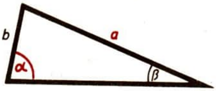
↗ Innenwinkel eines Dreiecks, Seite 164
↗ Höhensatz, Seite 223

➡ D 6

Seiten – Winkel – Beziehungen

▶ **SATZ:**
In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Aus $a > b$ folgt $\alpha > \beta$.



Es gilt auch die Umkehrung:

▶ **SATZ:**
In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber.

Aus $\alpha > \beta$ folgt $a > b$.

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10
↗ Beweise, Seite 12 (Beweis einer „genau dann, wenn"-Aussage)

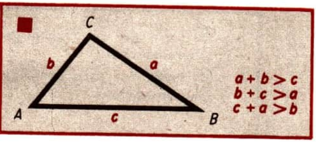
Folgerungen aus der Seiten-Winkel-Beziehung:
(1) Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel gegenüber.
(2) Dem größten Winkel eines Dreiecks liegt die größte Seite gegenüber.
(3) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede der Katheten.

↗ Rechtwinklige Dreiecke, Seite 167

(4) In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als jede der beiden anderen Seiten.

Dreiecksungleichung (Seiten-Beziehung)

▶ **SATZ:**
In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.



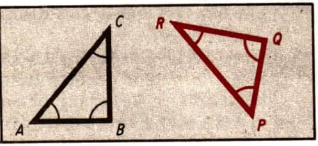
Kongruenz von Dreiecken

Zwei Dreiecke ABC und PQR heißen kongruent, wenn es eine Bewegung gibt, bei der das eine Dreieck Bild des anderen Dreiecks ist.
Schreibweise: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

↗ Kongruenz, Seite 151
↗ Bewegung, Seite 150

Gibt es zu jeder Seite eines Dreiecks und zu jedem Winkel dieses Dreiecks je eine zu ihr kongruente Seite bzw. je einen zu ihm kongruenten Winkel in einem anderen Dreieck, so stimmen die Dreiecke in den Seiten und Winkeln überein. Die paarweise kongruenten Seiten und Winkel nennt man *gleichliegende Seiten* bzw. *gleichliegende Winkel*.

Aus $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ folgt für den Fall der nebenstehend dargestellt ist:
$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$,
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$,
$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle QRP$.



Wenn zwei Dreiecke in gleichliegenden Seiten und in gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, dann sind die Dreiecke kongruent.
Aus $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$
und
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle QRP$
folgt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Kongruenzsätze

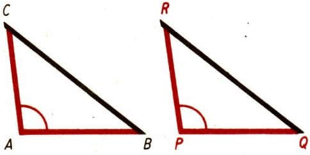
SATZ: (Kongruenzsatz sws)
Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Voraussetzung: Für zwei Dreiecke ABC und PQR gelte:
(1) $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; (2) $\overline{AC} \cong \overline{PR}$; (3) $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Beweis:

a) Wegen (3) gibt es eine Bewegung, bei der gilt:
P ist Bild von A;
Strahl PQ ist Bild des Strahls AB;
Strahl PR ist Bild des Strahls AC.



b) Bei dieser Bewegung ist wegen (1) der Punkt Q Bild des Punktes B.

Wegen (2) ist der Punkt R das Bild des Punktes C. Wegen a) und b) ist das Dreieck PQR Bild des Dreiecks ABC bei einer Bewegung; folglich gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

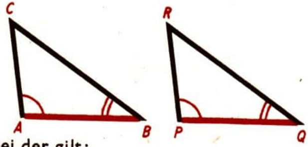
SATZ: (Kongruenzsatz wsw)
Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.

➡ D 6

Voraussetzung: Für zwei Dreiecke ABC und PQR gelte:

(1) $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; (2) $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$;
(3) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



Beweis:

a) Wegen (2) gibt es eine Bewegung, bei der gilt:
P ist Bild von A;
Strahl PQ ist Bild des Strahls AB;
Strahl PR ist Bild des Strahls AC.

b) Bei dieser Bewegung ist wegen (1) der Punkt Q Bild des Punktes B.

c) Bei dieser Bewegung ist das Bild C' von C ein Punkt des Strahls PR. Es gilt $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQC'$.

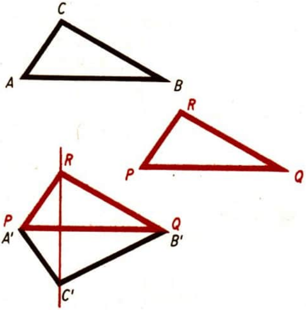
Mit (3) ergibt sich aus dem Vergleich
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQC'$
$\sphericalangle PQC' \cong \sphericalangle PQR$. Daraus folgt $C' = R$.

Wegen a), b) und c) ist das Dreieck PQR Bild des Dreiecks ABC bei einer Bewegung; folglich gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

▶ **SATZ: (Kongruenzsatz sss)**
Zwei Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent.

Voraussetzung: Für zwei Dreiecke ABC und PQR gelte:

(1) $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; (2) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$;
(3) $\overline{AC} \cong \overline{PR}$.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\overline{AB}$ größte Seite des Dreiecks ABC und $\overline{PQ}$ größte Seite des Dreiecks PQR.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Beweis:

a) Die Winkel, die den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{PQ}$ anliegen, sind dann spitze Winkel.

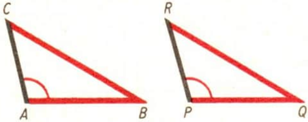
b) Wegen (1) gibt es eine Bewegung, bei der gilt:
P ist Bild von A;
Q ist Bild von B;
das Bild C' von C und Punkt R liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden PQ.

c) Es gilt: $\overline{PC'} \cong \overline{AC}$ und $\overline{QC'} \cong \overline{BC}$.
Wegen (3) bzw. (2) sind dann die Dreiecke PRC' bzw. QRC' gleichschenklig.
Es folgt $\sphericalangle PRC' \cong \sphericalangle PC'R$ bzw. $\sphericalangle C'RQ \cong \sphericalangle RC'Q$.
Damit gilt:
$\sphericalangle PRQ \cong \sphericalangle PC'Q$.

d) Die Dreiecke *PRQ* und *PC'Q* sind somit nach dem Kongruenzsatz (sws) kongruent. Folglich gibt es eine zweite Bewegung, bei der das Dreieck *PQR* das Bild des Dreiecks *PQC'* ist.

Wegen b) und d) gibt es eine Bewegung, bei der das Dreieck *PQR* das Bild des Dreiecks *ABC* ist; folglich gilt: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

SATZ: (Kongruenzsatz ssw)
Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, sind kongruent.

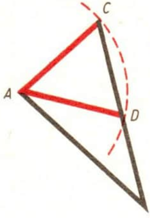


(Dieser Satz wird hier nicht bewiesen.)

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ $(\overline{BC} > \overline{AB})$
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$

Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen, müssen nicht notwendig kongruent sein.

Die nebenstehenden Dreiecke *ABC* und *ABD* stimmen in zwei Seiten und dem Winkel überein, der der kleineren Seite gegenüberliegt. Die Dreiecke sind jedoch nicht kongruent.

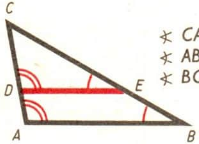


$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
$\overline{AC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC} = \overline{AD} < \overline{AB}$
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ABD$

Zwei Dreiecke, die in den drei Winkeln übereinstimmen, sind ähnlich. Kongruenz kann, muß aber nicht vorliegen.

↗ Ähnliche Figuren, Seite 220

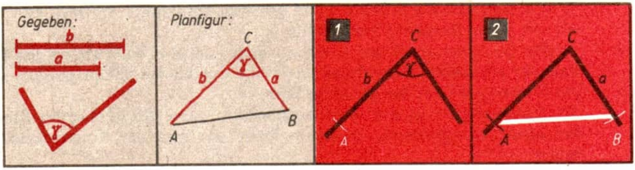
Die Dreiecke *ABC* und *DEC* stimmen in den drei Winkeln überein. Sie sind jedoch nicht kongruent.



$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDE$
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEC$
$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle ECD$

Dreieckskonstruktionen

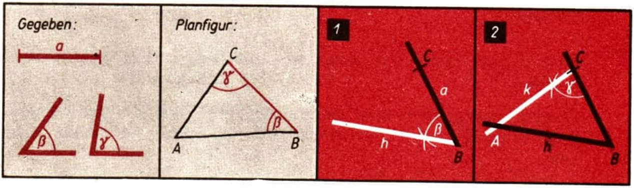
Gegeben: sws



➡ D 6

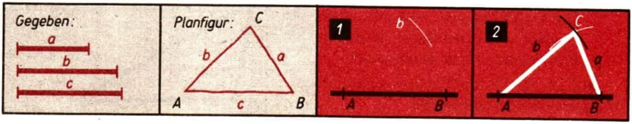
Konstruktion:
(1) Wir zeichnen den Winkel γ mit dem Scheitel C.
Wir tragen von C aus auf einem Schenkel des Winkels die Strecke b ab und bezeichnen den so gewonnenen Punkt mit A.
(2) Wir tragen von C aus auf dem anderen Schenkel des Winkels die Strecke a ab und bezeichnen den so gewonnenen Punkt mit B.
Wir verbinden A und B und erhalten das Dreieck ABC. Die Konstruktion ist eindeutig.

■ Gegeben: wsw



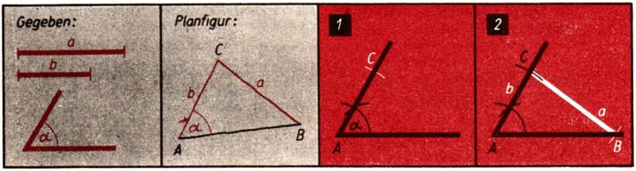
Konstruktion:
(1) Wir zeichnen die Strecke a und erhalten die Punkte B und C. Wir tragen in B an den Strahl BC den Winkel β an und bezeichnen den freien Schenkel des angetragenen Winkels mit h.
(2) Wir tragen in C an den Strahl CB den Winkel γ so an, daß der freie Schenkel des angetragenen Winkels den Strahl h schneidet. Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit A.
Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck. Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn die Summe der gegebenen Winkel kleiner als 180° ist. Dann aber ist die Konstruktion eindeutig.

■ Gegeben: sss



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen die Strecke c und erhalten die Punkte A und B. Wir zeichnen um A den Kreis mit dem Radius b.
(2) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius a. Falls die beiden Kreise einander schneiden, bezeichnen wir einen der beiden Schnittpunkte mit C. Das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck.
Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn die gegebenen Strecken der Dreiecksungleichung genügen. Dann aber ist die Konstruktion eindeutig.

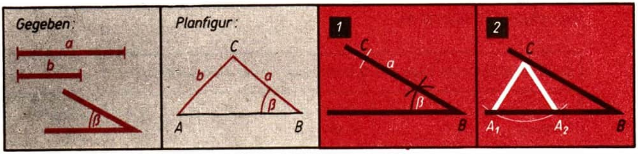
Gegeben: ssw



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen den Winkel α mit dem Scheitel A.
Wir tragen auf einem Schenkel des Winkels α von A aus die Strecke b ab und bezeichnen den so gewonnenen Punkt mit C.
(2) Wir zeichnen um C den Kreis mit dem Radius a; er schneidet den freien Schenkel des Winkels α in einem Punkt, den wir mit B bezeichnen. Das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck. Die Konstruktion ist eindeutig.

Die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren Seite im Dreieck gegenüberliegt, ist im allgemeinen nicht eindeutig. Unter Umständen ist die Konstruktion überhaupt nicht ausführbar.

↗ Kongruenzsätze, erstes Beispiel auf Seite 171



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen den Winkel β mit dem Scheitel B.
Wir tragen von B aus auf einem Schenkel des Winkels β die Strecke a ab und bezeichnen den so gewonnenen Punkt mit C.
(2) Wir zeichnen um C den Kreis mit dem Radius b. Er schneidet in unserem Beispiel den freien Schenkel des Winkels β in zwei Punkten, die wir mit A_1 bzw. A_2 bezeichnen.
Beide Dreiecke, $\triangle A_1BC$ und $\triangle A_2BC$ genügen den gestellten Bedingungen.

Mittelsenkrechten eines Dreiecks

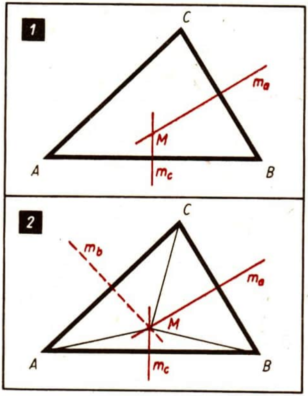
In jedem Dreieck ABC gibt es drei Mittelsenkrechten:
die Mittelsenkrechte der Seite a: m_a,
die Mittelsenkrechte der Seite b: m_b,
die Mittelsenkrechte der Seite c: m_c.

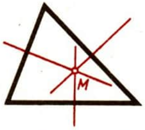
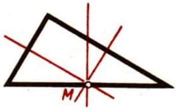
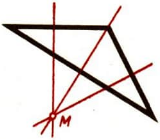
↗ Mittelsenkrechte einer Strecke, Seite 151 und 155

➡ D 6

> **SATZ:**
> **In jedem Dreieck schneiden die Mittelsenkrechten einander in einem Punkt.**

Voraussetzung: m_c, m_a und m_b seien die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC.
Behauptung: m_c, m_a und m_b schneiden einander in einem Punkt.
Beweis:
(1) Der Schnittpunkt von m_c und m_a sei M.
(2) Dann gilt einerseits
$\overline{AM} \cong \overline{BM}$
und andererseits
$\overline{BM} \cong \overline{CM}$.
Daraus folgt
$\overline{AM} \cong \overline{CM}$.
Der Punkt M ist demnach von den Punkten A und C gleich weit entfernt und liegt deshalb auch auf m_b. Die Mittelsenkrechte m_b geht also ebenfalls durch M.

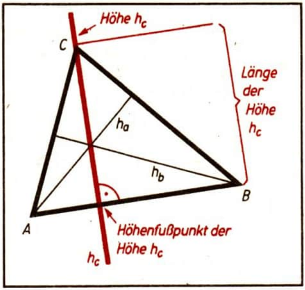


Übersicht über die Lage des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten		
spitzwinkliges Dreieck	rechtwinkliges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck
		
M liegt innerhalb des Dreiecks.	M ist Mittelpunkt der Hypotenuse.	M liegt außerhalb des Dreiecks.

Höhen eines Dreiecks

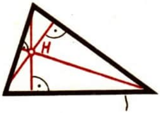
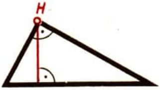
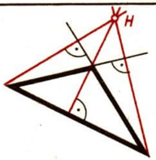
In jedem Dreieck ABC gibt es drei Höhen:
die Höhe bezüglich der Seite a: h_a,
die Höhe bezüglich der Seite b: h_b,
die Höhe bezüglich der Seite c: h_c.

Eine Höhe eines Dreiecks ist das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die jeweils gegenüberliegende Seite bzw. deren Verlängerung. Die Fußpunkte dieser Lote heißen die *Höhenfußpunkte*. Unter der *Länge einer Höhe* versteht man den Abstand des betreffenden Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite oder deren Verlängerung. (Hierbei sieht man also nur einen Teil des jeweiligen Lotes als Höhe an, d. h., man faßt die Höhe als Strecke auf.)



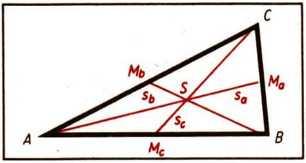
SATZ:
In jedem Dreieck schneiden die Höhen einander in einem Punkt.

↗ Lot, Seite 142

Übersicht über die Lage des Schnittpunktes der Höhen		
spitzwinkliges Dreieck	rechtwinkliges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck
		
H liegt innerhalb des Dreiecks.	*H* ist der Scheitel des rechten Winkels.	*H* liegt außerhalb des Dreiecks.

Seitenhalbierende eines Dreiecks

In jedem Dreieck *ABC* gibt es drei Seitenhalbierende:
die Seitenhalbierende der Seite a: s_a,
die Seitenhalbierende der Seite b: s_b,
die Seitenhalbierende der Seite c: s_c.



➡ D 6

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sind Geraden, die jeweils durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite gehen.
Unter der *Länge einer Seitenhalbierenden* eines Dreiecks ABC versteht man die Länge der Strecke $\overline{CM_c}$ bzw. $\overline{AM_a}$ bzw. $\overline{BM_b}$. (Hierbei sieht man also nur einen Teil der jeweiligen Geraden als Seitenhalbierende des Dreiecks an, d. h., man faßt die Seitenhalbierende als Strecke auf.)

▶ **SATZ:**
In jedem Dreieck schneiden die Seitenhalbierenden einander in einem Punkt.

Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden liegt stets innerhalb des Dreiecks.

Winkelhalbierende eines Dreiecks

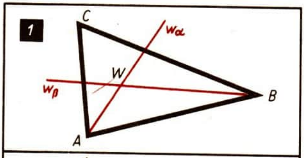
In jedem Dreieck ABC gibt es drei Winkelhalbierende:
die Winkelhalbierende des Winkels α : w_α,
die Winkelhalbierende des Winkels β : w_β,
die Winkelhalbierende des Winkels γ : w_γ.

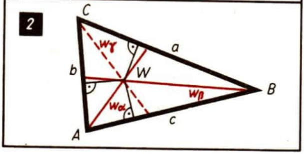
Unter der *Länge der Winkelhalbierenden* eines Dreiecks versteht man die Länge der Strecke, deren Endpunkte der Scheitel des betreffenden Winkels und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der gegenüberliegenden Seite sind.

↗ Winkelhalbierende eines Winkels, Seite 152 und 155
↗ Inkreis eines Dreiecks, Seite 177

▶ **SATZ:**
In jedem Dreieck schneiden die Winkelhalbierenden einander in einem Punkt.

Voraussetzung: w_α, w_β und w_γ seien die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC.
Behauptung:
w_α, w_β und w_γ schneiden einander in einem Punkt.
Beweis:
(1) Der Schnittpunkt von w_α und w_β sei W.
(2) Dann hat W
einerseits von den Seiten b und c
und
andererseits von den Seiten a und c
denselben Abstand.





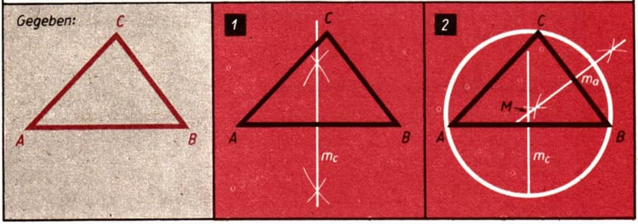
Daraus folgt,
daß W auch von den Seiten a und b denselben Abstand hat.
W liegt deshalb auch auf w_γ.
Die Winkelhalbierende w_γ geht deshalb ebenfalls durch W.
Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks liegt stets innerhalb eines Dreiecks.

Umkreis eines Dreiecks

Für jedes Dreieck gibt es einen Kreis, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks.
Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks.

↗ Mittelsenkrechte eines Dreiecks, Seite 173

Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks



Konstruktion:
(1) Wir konstruieren die Mittelsenkrechte m_c der Strecke $\overline{AB}$.
(2) Wir konstruieren die Mittelsenkrechte m_a der Strecke $\overline{BC}$.
Ihren Schnittpunkt mit m_c bezeichnen wir mit M.
Wir zeichnen den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$. Dieser Kreis ist der Umkreis des Dreiecks ABC.
Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Mittelsenkrechte einer Strecke, Seiten 151 und 155
↗ Kreis – Kreisfläche, Seite 194

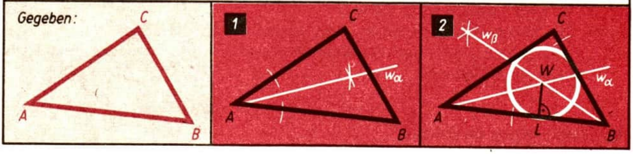
Inkreis eines Dreiecks

Für jedes Dreieck gibt es einen Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt. Dieser Kreis heißt Inkreis des Dreiecks.
Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks.

↗ Winkelhalbierende des Dreiecks, Seite 176

D 6

Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks



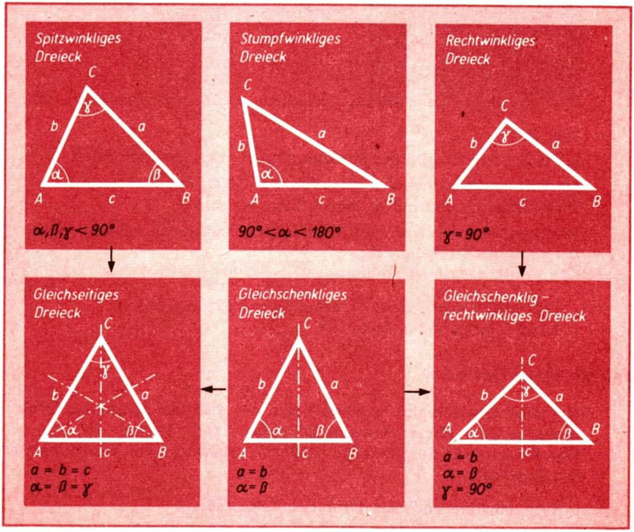
Konstruktion:

(1) Wir konstruieren die Winkelhalbierende w_α.

(2) Wir konstruieren die Winkelhalbierende w_β. Ihren Schnittpunkt mit w_α bezeichnen wir mit W.
Wir fällen das Lot von W auf die Gerade AB. Den Fußpunkt des Lotes bezeichnen wir mit L.
Wir zeichnen den Kreis um W mit dem Radius $\overline{WL}$.

Dieser Kreis ist der Inkreis des Dreiecks ABC.
Die Konstruktion ist eindeutig.

Übersicht über die Arten der Dreiecke



D 7 Vierecke, Vielecke[1)]

Viereck – Vierecksfläche

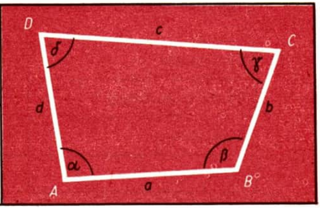
Das Viereck $ABCD$ ist die Menge aller Punkte, die auf den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ oder $\overline{DA}$ liegen. Dabei liegen jeweils drei der Punkte A, B, C, D nicht auf einer Geraden.

Eckpunkte: A, B, C, D

Seiten: $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$

Innenwinkel: $\sphericalangle\, DAB = \alpha$; $\sphericalangle\, ABC = \beta$

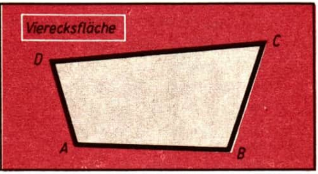
$\sphericalangle\, BCD = \gamma$; $\sphericalangle\, CDA = \delta$



Bezüglich eines Vierecks unterscheidet man:

(1) Punkte innerhalb des Vierecks,
(2) Punkte auf dem Viereck,
(3) Punkte außerhalb des Vierecks.

Die zum Viereck $ABCD$ zugehörige *Vierecksfläche* ist die Menge aller Punkte der Ebene, die entweder auf dem Viereck oder innerhalb des Vierecks liegen.

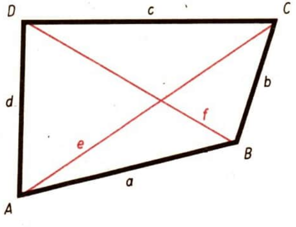


Häufig wird auch eine Vierecksfläche kurz als Viereck bezeichnet.

■ Der Inhalt des Vierecks $ABCD$ beträgt 15 cm². Gemeint ist, daß der Inhalt der Vierecksfläche $ABCD$ 15 cm² beträgt.

Diagonalen

Die Strecken $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ in einem Viereck $ABCD$ haben gegenüberliegende Punkte des Vierecks als Endpunkte. Diese Strecken werden Diagonalen genannt.



[1)] In diesem Kapitel werden nur sogenannte konvexe Vielecke betrachtet. Alle folgenden Sätze sind auf konvexe Vielecke eingeschränkt. Dies wird aber nicht besonders hervorgehoben, da in der zehnklassigen polytechnischen Oberschule konkave und überschlagene Vierecke nicht behandelt werden.

D 7

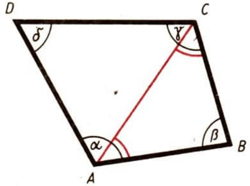
Stücke eines Vierecks

Die Seiten, die Diagonalen, die Innenwinkel eines Vierecks und die Winkel, die von je einer Seite und von einer Diagonalen mit einem gemeinsamen Eckpunkt bestimmt werden, bezeichnet man als Stücke eines Vierecks.

Gegenseiten	a und c; b und d
Benachbarte Seiten	a und b; b und c; c und d; d und a
Gegenwinkel	α und γ; β und δ
Benachbarte Winkel	α und β; β und γ; γ und δ; α und δ

Winkelsumme im Viereck

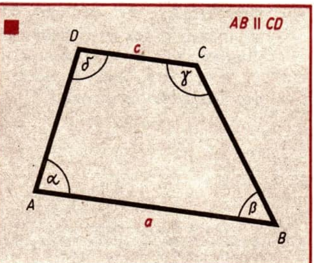
SATZ:
In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360°.



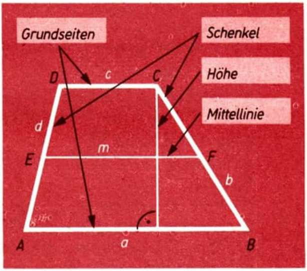
Voraussetzung: Gegeben sei ein Viereck $ABCD$ mit den Innenwinkeln α, β, γ und δ.
Behauptung: Die Summe der Innenwinkel beträgt 360°:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
Beweis:
Die Diagonale $\overline{AC}$ zerlegt das Viereck in die Dreiecke ABC und ACD.
Die Summe der Innenwinkel jedes der beiden Dreiecke beträgt 180°. Die Winkel der beiden Dreiecke zusammen bilden die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$. Ihre Summe beträgt also: $180° + 180° = 360°$.

Trapeze

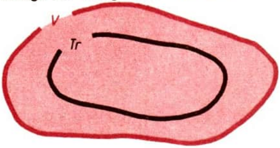
DEFINITION:
Jedes Viereck mit einem Paar zueinander paralleler Gegenseiten heißt Trapez.



Im Trapez heißen die parallelen Gegenseiten *Grundseiten*, die nicht parallelen Gegenseiten *Schenkel*.
Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Schenkel heißt *Mittellinie im Trapez*.
Jede durch das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Grundseite oder deren Verlängerung bestimmte Strecke heißt *Höhe im Trapez*.

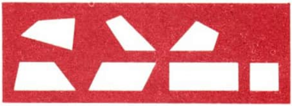


Die Menge aller Trapeze ist eine Teilmenge der Menge aller Vierecke.



↗ Flächeninhalt des Trapezes, Seite 232

Einige Vierecke aus der Menge V.



Einige Vierecke aus der Menge Tr.

Sätze über das Trapez

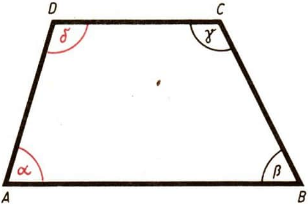
SATZ:
Die Winkel, die ein und demselben Schenkel eines Trapezes anliegen, betragen zusammen 180°.

Voraussetzung: In einem Trapez $ABCD$ seien α und δ Winkel, die demselben Schenkel anliegen.

Behauptung: $\alpha + \delta = 180°$.

Beweis:
Die Winkel α und δ sind entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen. Sie betragen also zusammen 180°.

↗ Entgegengesetzt liegende Winkel, Seite 161



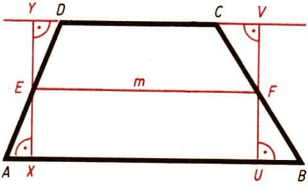
$\alpha + \delta = 180°$

$\beta + \gamma = 180°$

D 7

SATZ:
In jedem Trapez ist die Mittellinie parallel zu den Grundseiten.

Voraussetzung: In einem Trapez $ABCD$ seien E und F die Mittelpunkte der Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.
Behauptung: $EF \parallel AB$ und $EF \parallel DC$
Beweis:
(1) Wir errichten in E und F die Senkrechten bezüglich der Geraden EF. Ihre Schnittpunkte mit der Geraden AB bzw. CD bezeichnen wir mit X und Y bzw. U und V.



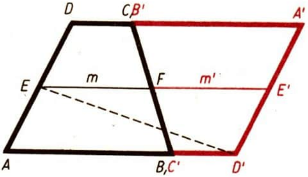
(2) Nach dem Kongruenzsatz wsw gilt:
$\triangle XEA \cong \triangle YED$ und $\triangle UFB \cong \triangle VFC$.
Daraus folgt:
$\overline{XE} \cong \overline{YE}$ und $\overline{UF} \cong \overline{VF}$.
(3) Wegen (1) und (2) gilt bei der Spiegelung an der Geraden EF:
Y ist Bild von X sowie V ist Bild von U.
Daraus folgt: $\sphericalangle EXU \cong \sphericalangle EYV$.
Da diese Winkel außerdem entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen sind und deshalb zusammen 180° betragen, ist jeder von ihnen ein rechter Winkel.
(4) Wegen (1) und (3) sind die Stufenwinkel XEF und XYV an den geschnittenen Geraden EF und CD kongruent. Also sind die Geraden EF und CD parallel. Ebenso folgt die Parallelität der Geraden EF und AB.

↗ Stufenwinkel, Seite 159
↗ Kongruenzsätze, Seite 169

SATZ:
In jedem Trapez ist die Mittellinie halb so lang wie die Summe der beiden Grundseiten.

Voraussetzung: $\overline{EF}$ sei die Mittellinie in einem Trapez $ABCD$ mit den Grundseiten a und c.
Behauptung: $\overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot (a + c)$

Beweis:
Das Trapez $A'B'C'D'$ sei das Bild des Trapezes $ABCD$ bei der Drehung um F mit einem positiv orientierten Drehwinkel von 180°.
Es gilt:
(1) E' liegt auf der Geraden EF und D' liegt auf der Geraden AB.
(2) $\triangle EAD' \cong \triangle D'E'E$.



Daraus folgt:
$\overline{EE'} \cong \overline{AD'}$.
(3) $\overline{EE'} = m + m'$ und $\overline{AD'} = a + c'$.
Daraus folgt:
$m + m' = a + c'$.
Wegen $m = m'$ und $c' = c$ ergibt sich:

$$2m = a + c \quad \text{oder} \quad m = \frac{a + c}{2}.$$

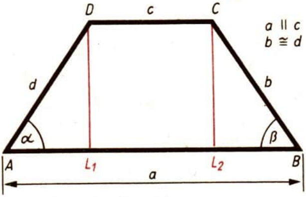
Die Mittellinie ist also halb so lang wie die Summe der beiden Grundseiten.

↗ Orientierte Winkel, Seite 136

Gleichschenkliges Trapez

Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn es genau ein Paar paralleler Seiten besitzt und wenn die Schenkel gleich lang sind.

> **SATZ:**
> **In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Winkel, die ein und derselben Grundseite anliegen, kongruent.**

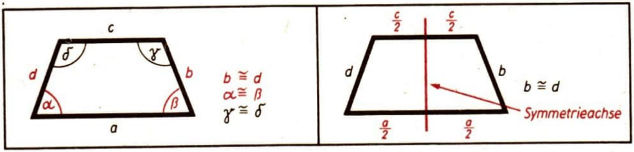


Voraussetzung: Das Viereck $ABCD$ sei ein beliebiges gleichschenkliges Trapez, dessen Grundseite $\overline{AB}$ größer als die Grundseite $\overline{CD}$ ist.
Behauptung: $\sphericalangle\, DAB \cong \sphericalangle\, CBA$ und $\sphericalangle\, ADC \cong \sphericalangle\, BCD$
Beweis:
Die Fußpunkte der Lote von D und C auf die Seite $\overline{AB}$ seien L_1 bzw. L_2. Dann sind die Dreiecke AL_1D und BL_2C nach dem Kongruenzsatz ssw kongruent. Damit ergibt sich die Kongruenz der Winkel DAB und CBA. Die Kongruenz der Winkel ADC und BCD folgt aus der Kongruenz der Winkel ADL_1 und BCL_2.

↗ Kongruenzsätze, Seite 169

Jedes gleichschenklige Trapez ist axialsymmetrisch. Symmetrieachse ist die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grundseiten des gleichschenkligen Trapezes.

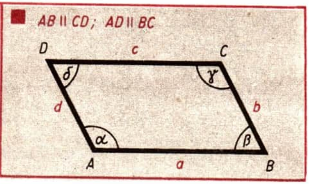
↗ Axiale Symmetrie, Seite 152



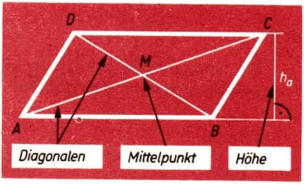
➡ D 7

Parallelogramm

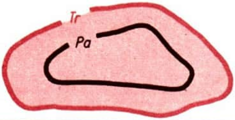
▶ **DEFINITION:**
Jedes Viereck mit zwei Paaren zueinander paralleler Gegenseiten heißt Parallelogramm.



Jede durch das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Grundseite oder deren Verlängerung bestimmte Strecke heißt eine zu dieser Seite gehörende *Höhe des Parallelogramms*. Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms heißt *Mittelpunkt des Parallelogramms*.



Die Menge aller Parallelogramme ist eine Teilmenge der Menge aller Trapeze.



Einige Vierecke aus der Menge Tr.

Einige Vierecke aus der Menge Pa.

↗ Flächeninhalt des Parallelogramms, Seite 230

Sätze über das Parallelogramm

▶ **SATZ:**
Ein Viereck ist ein Parallelogramm genau dann, wenn jeweils die Gegenseiten gleich lang sind.

Der Satz ist eine „genau dann, wenn"-Aussage und drückt folgendes aus:

(1) *Wenn* ein Viereck ein Parallelogramm ist, *so* sind die Gegenseiten jeweils gleich lang.
(2) *Wenn* die Gegenseiten jeweils gleich lang sind, *so* ist das Viereck ein Parallelogramm.

↗ Beweis einer „genau dann, wenn"-Aussage, Seite 13

Beweis für die Aussage (1):

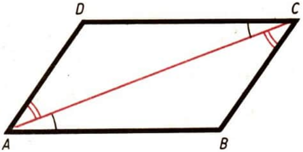
Voraussetzung: Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm; also gilt $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.

Behauptung: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ und $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Beweis:

Aus $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (nach Kongruenzsatz wsw) folgt

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.



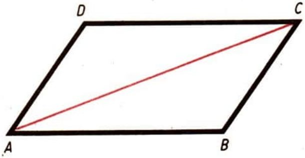
Beweis für die Aussage (2):

Voraussetzung: In einem Viereck $ABCD$ gelte:

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Behauptung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm, also soll gelten:

$AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$



Beweis:

Aus $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (nach Kongruenzsatz sss) folgt

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle DAC$.

Das sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Geraden. Also sind einerseits die Geraden AB und CD sowie andererseits die Geraden BC und DA parallel zueinander.

↗ Wechselwinkel, Seite 160

SATZ:
Ein Viereck ist ein Parallelogramm genau dann, wenn die Diagonalen einander halbieren.

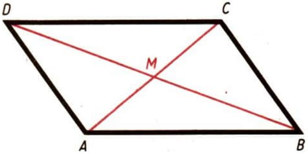
Erste Aussage:

Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, so halbieren die Diagonalen einander.

Voraussetzung: Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm; also gilt $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.

Behauptung:

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{MD}$.



Beweis:

Aus $\triangle ABM \cong CDM$ (nach Kongruenzsatz wsw) folgt

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{DM}$.

Zweite Aussage:

Wenn in einem Viereck die Diagonalen einander halbieren, so ist es ein Parallelogramm.

Voraussetzung: In einem Viereck $ABCD$ gelte:

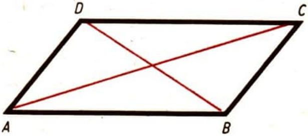
$\overline{AM} \cong \overline{MC}$; $\overline{BM} \cong \overline{MD}$.

D 7

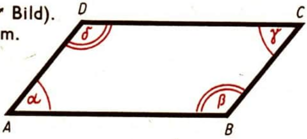
Behauptung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Beweis:
Aus $\triangle ABM \cong \triangle DMC$ (nach Kongruenzsatz sws)
folgt
$\sphericalangle MAB \cong \sphericalangle MCD$ und $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CDM$.
Das sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Geraden. Also sind die Geraden AB und BC zueinander parallel.
Die Parallelität der Geraden BC und AD ergibt sich in entsprechender Weise aus der Kongruenz der Dreiecke AMD und CMB.

↗ Kongruenzsätze, Seite 169
↗ Wechselwinkel, Seite 160

SATZ:
Ein Viereck ist ein Parallelogramm genau dann, wenn jeweils die Gegenwinkel gleich groß sind.



Erste Aussage:
Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, so sind die Gegenwinkel jeweils gleich groß.
Voraussetzung: Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm; also gilt
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ und $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Behauptung: $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$.
Beweis:
Aus $\triangle DAB \cong \triangle BCD$ (nach dem Kongruenzsatz sss)
folgt $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle BCD$.
Aus $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (nach dem Kongruenzsatz sss)
folgt $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$.
Zweite Aussage:
Wenn in einem Viereck die Gegenwinkel gleich groß sind, so ist es ein Parallelogramm.
Voraussetzung: Im Viereck $ABCD$ gelte:
$\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle BCD$; $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$ (↗ Bild).
Behauptung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

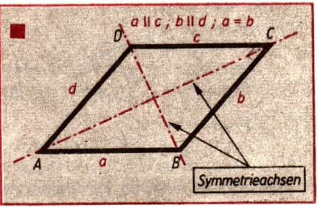


Beweis:
Es sei $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Wegen
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
gilt $2\alpha + 2\beta = 360°$
und damit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel α und β sind entgegengesetzt liegende Winkel an den geschnittenen Geraden AD und BC. Folglich sind diese Geraden zueinander parallel.
Aus $2\beta + 2\gamma = 360°$ bzw. $\beta + \gamma = 180°$ folgt die Parallelität der Geraden AB und CD.

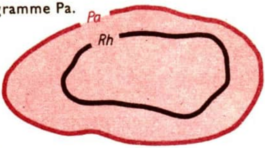
↗ Entgegengesetzt liegende Winkel, Seite 161

Rhombus

DEFINITION:
Jedes Parallelogramm mit einem Paar benachbarter Seiten, die gleich lang sind, heißt Rhombus.



Die Menge aller Rhomben Rh ist eine Teilmenge der Menge aller Parallelogramme Pa.



Einige Vierecke aus der Menge Pa.

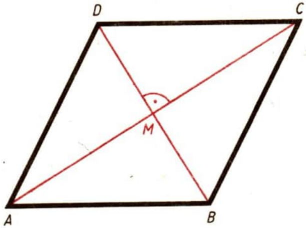
Einige Vierecke aus der Menge Rh.

Folgerungen:
(1) In jedem Rhombus sind die Seiten gleich lang.
(2) In jedem Rhombus sind die Gegenseiten parallel.
(3) In jedem Rhombus sind die Gegenwinkel gleich groß.
(4) In jedem Rhombus halbieren die Diagonalen einander.

SATZ:
Ein Parallelogramm ist ein Rhombus genau dann, wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

↗ Beweis einer „genau dann, wenn“-Aussage, Seite 13

Erste Aussage:
Wenn ein Parallelogramm ein Rhombus ist, so stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
Voraussetzung: $ABCD$ sei ein Rhombus, also gilt $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
Behauptung: $AC \perp BD$
Beweis: Es gilt
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (nach Voraussetzung),
$\overline{BM} \cong \overline{BM}$,
$\overline{AM} \cong \overline{CM}$ (im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander).

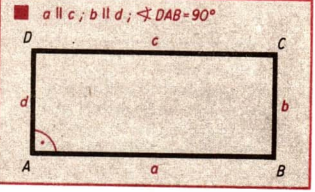


Daraus folgt
$\triangle ABM \cong \triangle CBM$
und weiter
$\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle CMB$.
Diese Winkel sind Nebenwinkel. Folglich ist jeder von ihnen ein rechter Winkel. Die Diagonalen stehen also senkrecht aufeinander.

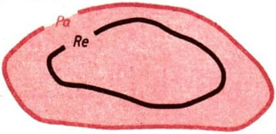
Zweite Aussage:
Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, so ist das Parallelogramm ein Rhombus.
Voraussetzung: Im Parallelogramm $ABCD$ mögen die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht aufeinander stehen: $AC \perp BD$.
Behauptung: $ABCD$ ist ein Rhombus.
Beweis: Es gilt $\overline{AM} \cong \overline{CM}$; $\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle CMB$; $\overline{BM} \cong \overline{BM}$
und damit
$\triangle ABM \cong \triangle CMB$.
Daraus folgt: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

Rechteck

DEFINITION:
Jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel heißt Rechteck.

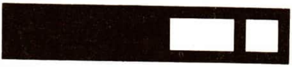


Die Menge aller Rechtecke Re ist eine Teilmenge der Menge aller Parallelogramme Pa.



Einige Vierecke aus der Menge Pa.

Einige Vierecke aus der Menge Re.



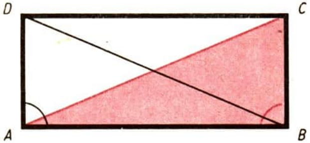
↗ Flächeninhalt des Rechtecks, Seite 230

Folgerungen:
(1) In jedem Rechteck sind alle Winkel rechte Winkel.
(2) In jedem Rechteck sind die Gegenseiten gleich lang und zueinander parallel.
(3) In jedem Rechteck halbieren die Diagonalen einander.

> **SATZ:**
> **Ein Parallelogramm ist ein Rechteck genau dann, wenn die Diagonalen gleich lang sind.**

↗ Beweis einer „genau dann, wenn"-Aussage, Seite 13

Erste Aussage: Wenn ein Parallelogramm ein Rechteck ist, so sind die Diagonalen gleich lang.
Voraussetzung: Das Viereck $ABCD$ sei ein Rechteck.
Behauptung: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
Beweis:
Es gilt: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$; $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAD$; $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
und damit
$\triangle ABC \cong \triangle BAD$.
Daraus folgt: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

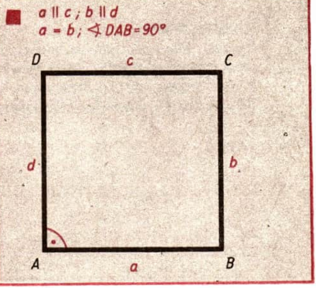


Zweite Aussage:
Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist das Parallelogramm ein Rechteck.
Voraussetzung: $ABCD$ sei ein Parallelogramm, und es gelte $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
Behauptung: $ABCD$ ist ein Rechteck.
Beweis:
Es gilt: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$; $\overline{BC} \cong \overline{AD}$; $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ und damit
$\triangle ABC \cong \triangle BAD$.
Daraus folgt: $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAD$.
Diese Winkel betragen als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen zusammen 180°. Folglich ist jeder von ihnen ein rechter Winkel. Das Parallelogramm ist also ein Rechteck.

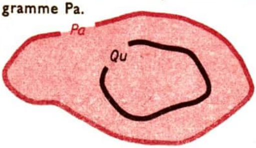
↗ Entgegengesetzt liegende Winkel, Seite 161

Quadrat

> **DEFINITION:**
> **Jedes Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten und einem rechten Winkel heißt Quadrat.**



Die Menge aller Quadrate Qu ist eine Teilmenge der Menge aller Parallelogramme Pa.



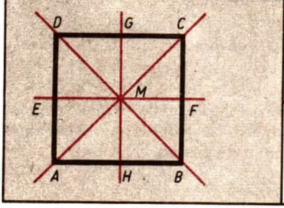
Einige Vierecke aus der Menge Pa.

Ein Viereck aus der Menge Qu.

↗ Flächeninhalt des Quadrats, Seite 230

Folgerungen:
(1) In jedem Quadrat sind alle Seiten gleich lang.
(2) In jedem Quadrat sind alle Winkel rechte Winkel.
(3) In jedem Quadrat sind die Diagonalen gleich lang.
(4) In jedem Quadrat stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

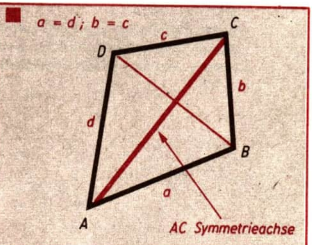
Übersicht über die Abbildungen eines Quadrates auf sich selbst



Drehungen um seinen Mittelpunkt *M*	Drehwinkel von 90° Drehwinkel von 180° Drehwinkel von 270° Drehwinkel von 360°
Spiegelungen an den Symmetrieachsen	Spiegelachse *AC* Spiegelachse *BD* Spiegelachse *EF* Spiegelachse *GH*

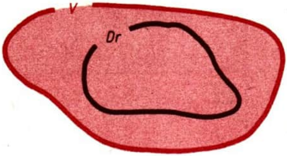
Drachenviereck

DEFINITION:
Jedes Viereck, bei dem die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Ecken Symmetrieachse dieses Vierecks ist, heißt Drachenviereck.



↗ Axiale Symmetrie, Seite 152

Die Menge aller Drachenvierecke Dr ist eine Teilmenge der Menge aller Vierecke V.

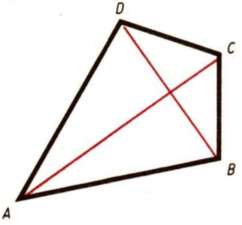


Einige Vierecke aus der Menge V.

Einige Vierecke aus der Menge Dr.

SATZ:
In jedem Drachenviereck gibt es zwei Paare benachbarter gleich langer Seiten.

Voraussetzung: Ein Viereck *ABCD* sei ein Drachenviereck.
Behauptung: Es gibt zwei Paare benachbarter gleich langer Seiten.
Beweis:
Wir nehmen an, daß die Gerade *AC* Spiegelungsachse im Viereck *ABCD* sei.
Bei der Spiegelung an *AC* gilt:
A wird auf sich selbst abgebildet,
B wird auf *D* abgebildet,
D wird auf *B* abgebildet und
C wird auf sich selbst abgebildet.
Bei der Spiegelung an *AC* entsprechen demnach einerseits die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ sowie andererseits die Seiten $\overline{CB}$ und $\overline{CD}$ einander.
Wir erhalten also $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ sowie $\overline{CB} \cong \overline{CD}$.



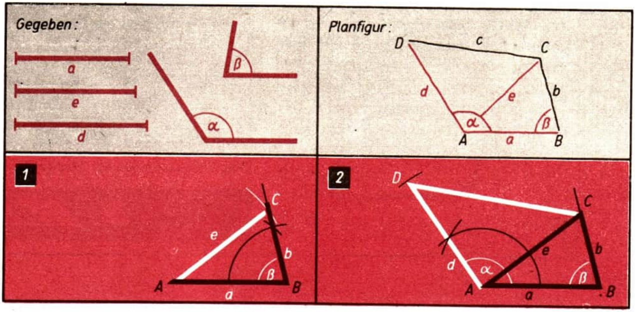
SATZ:
In jedem Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

↗ Spiegelungen an einer Geraden, Seite 148

Konstruktion von Vierecken

Jedes Viereck läßt sich aus fünf gegebenen Stücken konstruieren. Falls es sich um spezielle Vierecke handelt, verringert sich die Anzahl der erforderlichen Stücke. Für die Konstruktion eines Quadrates, z. B. wird nur noch eine Strecke (als Seite oder Diagonale) benötigt.

D 7

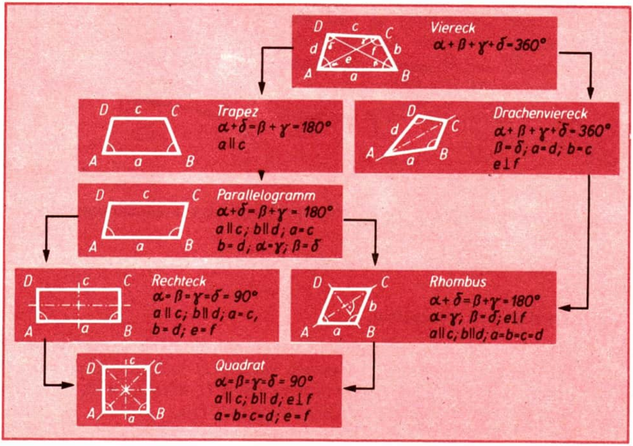


Konstruktion:
(1) Aus a, e und β läßt sich das Dreieck ABC konstruieren.
(2) Wir tragen in A an den Strahl AB den Winkel α an.
Wir zeichnen um A einen Kreis mit dem Radius d. Seinen Schnittpunkt mit dem freien Schenkel[1]) des Winkels α bezeichnen wir mit D.
Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Dreieckskonstruktionen, Seite 171

[1]) Ein Schenkel heißt „frei", wenn auf ihm noch kein Punkt gewählt wurde.

Übersicht über die Arten der Vierecke

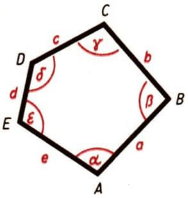


Vielecke

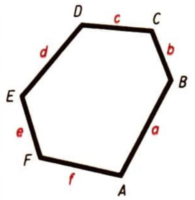
Neben Dreiecken und Vierecken gibt es Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke, ...
Alle diese Figuren zeichnen sich dadurch aus, daß
(1) eine gewisse Anzahl von Punkten *A*, *B*, *C*, ..., *X* durch die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{XA}$ verbunden sind,
(2) je drei aufeinanderfolgende dieser Punkte nicht auf ein und derselben Geraden liegen.
Diese Figuren heißen *Vielecke* oder auch *n-Ecke*.
Die Punkte *A*, *B*, *C*, ..., *X* heißen *Eckpunkte*, die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{XA}$ *Seiten* des Vielecks *ABC* ... *X*.

Vielecke

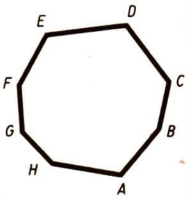
1 *Fünfeck*



2 *Sechseck*



3 *Achteck*



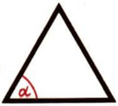
Die zu einem Vieleck zugehörige Fläche ist die Menge der Punkte der Ebene, die auf dem Vieleck oder innerhalb des Vielecks liegen.

Regelmäßige *n*-Ecke

Regelmäßig heißt jedes *n*-Eck, dessen Seiten gleich lang und dessen Winkel gleich groß sind.

Beispiele für regelmäßige *n*-Ecke

$n = 3$

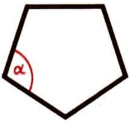


$\alpha = 60°$

$n = 4$

$\alpha = 90°$

$n = 5$



$\alpha = 108°$

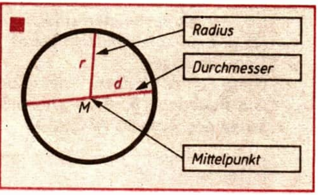
$n = 6$

$\alpha = 120°$

D 8 Kreise

Kreis – Kreisfläche

DEFINITION:
Die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt *M* dieser Ebene die Entfernung *r* haben, heißt Kreis um den Mittelpunkt *M* mit dem Radius *r*.



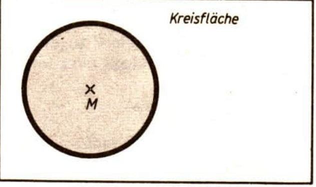
Als *Radius* eines Kreises mit dem Mittelpunkt M bezeichnet man

(1) jede Verbindungsstrecke $\overline{MA}$ eines Kreispunktes A mit dem Mittelpunkt M und

(2) die gemeinsame Länge r aller Verbindungsstrecken $\overline{MA}$ der Kreispunkte A mit dem Mittelpunkt M.

Bezüglich eines Kreises unterscheidet man:
(1) Punkte innerhalb des Kreises,
(2) Punkte auf dem Kreis,
(3) Punkte außerhalb des Kreises.

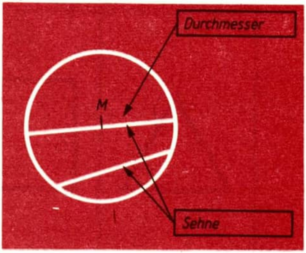
Die zu einem Kreis zugehörige *Kreisfläche* ist die Menge aller Punkte der Ebene, die entweder auf dem Kreis oder innerhalb des Kreises liegen.



Häufig wird auch eine Kreisfläche kurz als Kreis bezeichnet.

Der Inhalt eines Kreises um M beträgt 10 cm². Gemeint ist, daß der Inhalt der Kreisfläche 10 cm² beträgt.

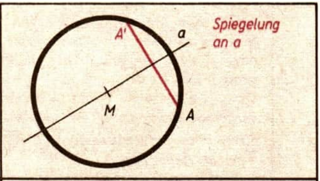
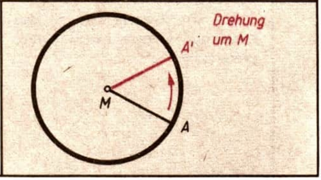
↗ Flächeninhalt des Kreises, Seite 234



Jede Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte A und B auf einem Kreis liegen, heißt *Sehne* dieses Kreises. Jede Sehne durch den Mittelpunkt M eines Kreises wird *Durchmesser* genannt.

Eigenschaften der Kreise (ohne Beweis)	
1	Jeder Strahl, der von einem Punkt der Kreisfläche ausgeht, hat mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam.
2	Eine Gerade hat mit einem Kreis höchstens zwei Punkte gemeinsam.
3	Zwei verschiedene Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.

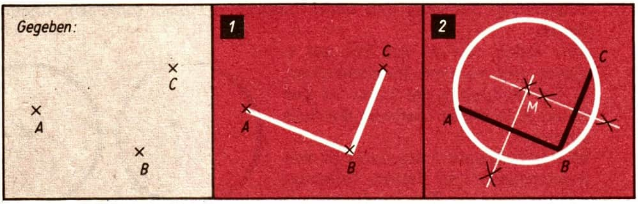
Symmetrieverhältnisse am Kreis

Jeder Kreis ist axialsymmetrisch. Symmetrieachse ist jede Gerade durch den Mittelpunkt.	
Jeder Kreis ist radialsymmetrisch. Symmetriezentrum ist der Mittelpunkt.	

↗ Radiale Symmetrie, Seite 153

Konstruktion eines Kreises

Durch drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, kann man genau einen Kreis konstruieren. Dazu bringt man die Mittelsenkrechten zweier Sehnen zum Schnitt.



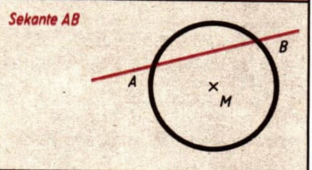
↗ Mittelsenkrechte einer Strecke, Seite 151

➡ D 8

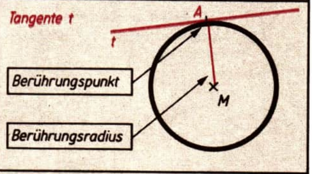
Kreis und Gerade

Lagemöglichkeiten von Kreis und Gerade

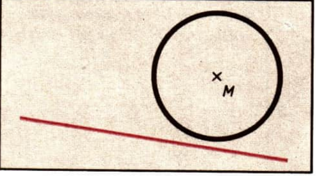
Fall 1: Die Gerade **schneidet** den Kreis. Jede Gerade, die mit einem gegebenen Kreis zwei Punkte gemeinsam hat, heißt *Sekante* dieses Kreises.



Fall 2: Die Gerade **berührt** den Kreis. Jede Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt *Tangente* dieses Kreises.
Den gemeinsamen Punkt A nennt man *Berührungspunkt* dieser Geraden mit dem Kreis. Die Verbindungsstrecke $\overline{AM}$ heißt dann *Berührungsradius*.

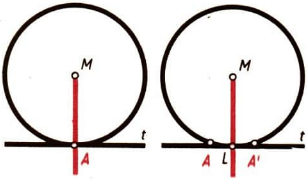


Fall 3: Die Gerade **meidet** den Kreis. Kreis und Gerade haben keinen Punkt gemeinsam.



▶ **SATZ: (Satz über die Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius)**
Wenn A der Berührungspunkt einer Tangente t an einen Kreis um M ist, so steht der Radius $\overline{AM}$ senkrecht auf t.

Voraussetzung: Die Gerade t sei Tangente an einen Kreis um M, und A sei ihr Berührungspunkt.
Behauptung: Tangente und Berührungsradius stehen senkrecht aufeinander.
Beweis:
Wir fällen von M das Lot auf t. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:
a) Der Fußpunkt des Lotes ist der Punkt A. In diesem Falle ist der Satz bewiesen.
b) Der Fußpunkt L des Lotes ist von A verschieden. In diesem Falle bestimmen wir das Bild der Geraden t und das Bild des Kreises bei der



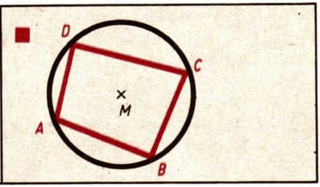
Spiegelung an der Geraden ML. Das Bild des Punktes A sei A'. Das Bild A' liegt dann sowohl auf der Geraden t als auch auf dem Kreis, da t wegen des rechten Winkels auf sich selbst abgebildet wird. Die Gerade t hat dann mit dem Kreis zwei Punkte gemeinsam. Das ist nicht möglich, da t Tangente sein soll. Es kann also immer nur der Fall a) eintreten.

↗ Spiegelung an einer Geraden, Seite 148

SATZ: (Umkehrung des Satzes über die Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius)
Steht der Radius $\overline{AM}$ eines Kreises senkrecht auf einer Geraden t durch den Punkt A, so ist die Gerade t Tangente an den Kreis im Punkt A.

Sehnenviereck

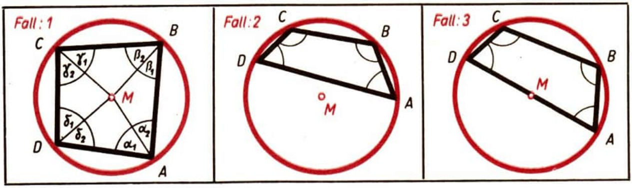
Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt Sehnenviereck.



SATZ: (Satz über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks)
In jedem Sehnenviereck betragen die Gegenwinkel jeweils zusammen 180°.

Voraussetzung: Ein Viereck $ABCD$ sei ein Sehnenviereck eines Kreises.
Behauptung: Die Gegenwinkel betragen jeweils zusammen 180°.
Beweis:
Der Mittelpunkt des Kreises sei M. Die Winkel des Sehnenvierecks seien α, β, γ und δ.
Der Punkt M liegt entweder innerhalb oder außerhalb oder auf einer Seite des Sehnenvierecks $ABCD$.

↗ Beweis durch Fallunterscheidung, Seite 13



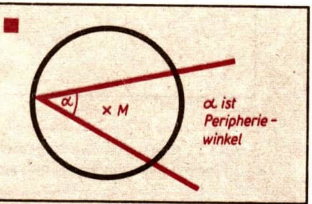
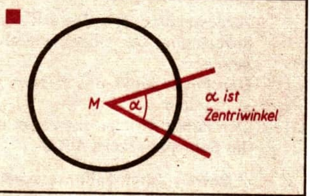
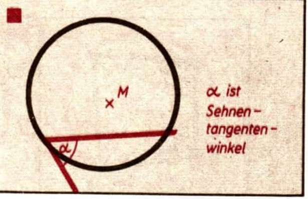
➡ D 8

Wir führen nur den Beweis für den ersten der drei möglichen Fälle. Dazu verbinden wir M mit den Eckpunkten des Vierecks und erhalten vier gleichschenklige Dreiecke, in denen die Basiswinkel gleich groß sind.

↗ Gleichschenkliges Dreieck, Seite 166

Aus
$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 360°$
folgt wegen
$\alpha_2 = \beta_1, \quad \gamma_1 = \beta_2; \quad \gamma_2 = \delta_1$ und $\alpha_1 = \delta_2$
$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 360°$
bzw.
$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°.$
Da $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ und $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ ist, finden wir
$\alpha + \gamma = 180°.$
Ebenso folgt
$\beta + \delta = 180°.$

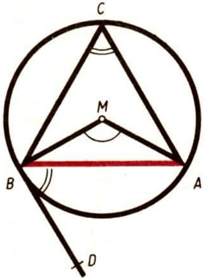
Kreis und Winkel

Peripheriewinkel heißt jeder Winkel, dessen Scheitel auf einem Kreis liegt und dessen Schenkel den Kreis schneiden.	
Zentriwinkel heißt jeder Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt eines Kreises ist.	
Sehnentangentenwinkel heißt jeder Winkel, dessen Scheitel auf einem Kreis liegt, dessen einer Schenkel den Kreis schneidet und dessen anderer Schenkel auf einer Tangente des Kreises liegt.	

Zwei Peripheriewinkel ABC und $AB'C$, deren Scheitel B und B' auf derselben Seite der Sehne $\overline{AC}$ liegen, heißen *Peripheriewinkel über derselben Sehne.*

Liegen die Scheitel eines Peripheriewinkels ACB und des Zentriwinkels AMB auf derselben Seite der Sehne $\overline{AB}$, so sagt man, daß die Winkel *einander zugehörig* sind oder daß sie *über derselben Sehne liegen.*

Ein Peripheriewinkel ACB (ein Zentriwinkel AMB) und ein Sehnentangentenwinkel ABD heißen *einander zugehörig*, wenn der Scheitel des Peripheriewinkels (des Zentriwinkels) und der Punkt D auf verschiedenen Seiten der Sekante AB liegen.



Peripheriewinkelsatz

SATZ:
Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß.

Voraussetzung: Die Winkel $\alpha = \sphericalangle BAD$ und $\alpha' = \sphericalangle BA'D$ seien Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{BD}$ eines Kreises.

Behauptung: Die Winkel α und α' sind gleich groß.

Beweis:

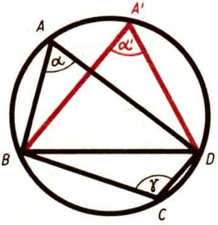
Wir wählen einen Punkt C des Kreises so, daß er mit A und damit auch mit A' auf verschiedenen Seiten der Geraden BD liegt. Nach dem Satz über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks gilt für den Winkel $BCD = \gamma$ einerseits

$\alpha + \gamma = 180°$

und andererseits

$\alpha' + \gamma = 180°$

Daraus folgt $\alpha = \alpha'$.



↗ Sehnenviereck – Satz über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks, Seite 197

Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz

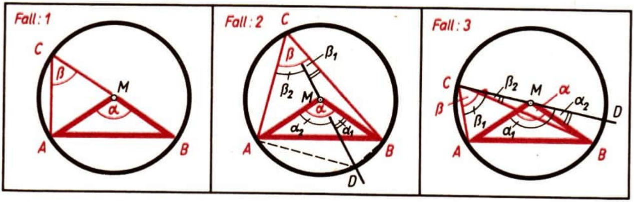
SATZ:
Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über derselben Sehne.

Voraussetzung: Der Winkel $AMB = \alpha$ sei Zentriwinkel in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M, und $\sphericalangle ACB = \beta$ sei ein Peripheriewinkel in diesem Kreis über derselben Sehne $\overline{AB}$. Der Punkt M liege nicht auf $\overline{AB}$, jedoch mit C auf derselben Seite der Geraden AB.

➡ D 8

Behauptung: Der Zentriwinkel α ist doppelt so groß wie β.
Beweis:
Der Mittelpunkt M des Kreises liegt dann entweder auf einem Schenkel des Winkels β (Fall 1) oder er liegt innerhalb des Winkels β (Fall 2) oder er liegt außerhalb des Winkels β (Fall 3).

↗ Beweis durch Fallunterscheidung, Seite 13



Fall 1: M liege auf $\overline{BC}$.
Das Dreieck AMC ist gleichschenklig; es gilt

$\sphericalangle\, MCA = \sphericalangle\, MAC$.

Der Winkel AMB ist Außenwinkel des Dreiecks MCA. Daraus folgt $\alpha = 2\beta$.

↗ Gleichschenkliges Dreieck, Seite 166; Außenwinkel, Seite 165

Fall 2: M liege innerhalb des Winkels β.
Der Strahl CM schneide den Kreis in D. Nach Fall 1 gilt:

$\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.

Daraus folgt wegen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ebenfalls $\alpha = 2\beta$.

Fall 3: M liege außerhalb des Winkels β.
Der Strahl CM schneide den Kreis in D. Nach Fall 1 gilt:

$\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.

Daraus folgt wegen $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ebenfalls $\alpha = 2\beta$.

Zentriwinkel-Sehnentangentenwinkel-Satz

▶ **SATZ:**
Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.

▶ **SATZ:**
Jeder Peripheriewinkel ist genauso groß wie ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel.

Voraussetzung: Der Winkel $AMB = \alpha$ sei ein Zentriwinkel in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M; der Winkel $ACB = \beta$ sei ein zugehöriger Peripheriewinkel und der Winkel $BAD = \gamma$ ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel.

Behauptung: Der Zentriwinkel α ist doppelt so groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel γ.

Beweis:

Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei L. Da das Dreieck ABM gleichschenklig ist, ist die Gerade ML Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ und Winkelhalbierende von α.

Es sei $\sphericalangle LAM = \delta$.

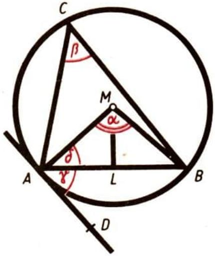
Da der Radius $\overline{MA}$ senkrecht auf $\overline{AD}$ steht, gilt $\gamma + \delta = 90°$.

Da das Dreieck MLA rechtwinklig ist, gilt

$$\frac{\alpha}{2} + \delta = 90°$$

Daraus folgt

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 2\gamma.$$



Damit ist der Zentriwinkel-Sehnentangentenwinkel-Satz bewiesen.

Aus $\alpha = 2\beta$ (Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz) folgt:

$2\beta = 2\gamma$ bzw. $\beta = \gamma$.

Damit ist auch der Peripheriewinkel-Sehnentangentenwinkel-Satz bewiesen.

Satz des Thales

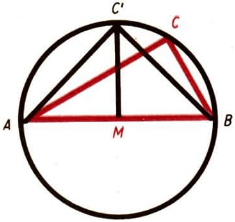
▶ **SATZ:**
Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.

Voraussetzung: Der Winkel ACB sei ein Peripheriewinkel in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{AB}$.

Behauptung: Der Peripheriewinkel ACB ist ein rechter Winkel.

Beweis:

Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide den Kreis in C', wobei C' mit C auf derselben Seite der Geraden AB liege. Die Dreiecke AMC' und BMC' sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die bezüglich der Geraden MC' spiegelbildlich liegen. Da die Basiswinkel gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke stets 45° betragen, ist der Winkel $AC'B$ ein rechter Winkel. Wegen des Peripheriewinkelsatzes ist dann auch der Winkel ACB ein rechter Winkel.



↗ Peripheriewinkelsatz, Seite 199

➡ D 8

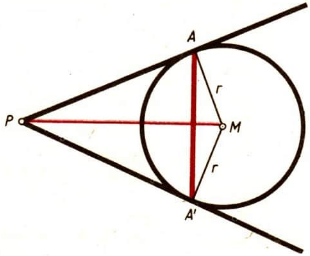
Die Umkehrung des *Thales*-Satzes lautet:
Wenn in einem Kreis ein Peripheriewinkel ein rechter Winkel ist, so steht er über einem Durchmesser. Gleichbedeutend damit ist die folgende Formulierung:

> **SATZ: (Umkehrung des *Thales*-Satzes):**
> **Der Scheitel C des rechten Winkels eines jeden rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt auf dem Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit dem Radius $\overline{MA}$.**

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

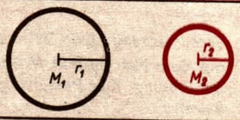
Tangenten an einen Kreis

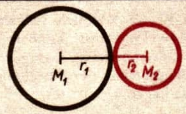
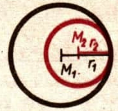
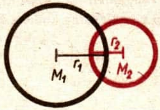
Von einem Punkt P außerhalb eines Kreises gibt es genau zwei Tangenten an den Kreis.
Die Berührungspunkte A und A' der Tangenten von einem Punkt P außerhalb eines Kreises an diesen Kreis liegen bezüglich der Geraden PM symmetrisch. Die Tangentenabschnitte $\overline{PA}$ und $\overline{PA'}$ sind deshalb gleich lang.



↗ Tangentenkonstruktionen, Seite 204

Zwei Kreise

Lagemöglichkeiten zweier Kreise		
Fall 1: Beide Kreise haben keinen Punkt gemeinsam.	Fall 1 a: $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$	
	Fall 1 b: $(r_1 > r_2)$ $\overline{M_1M_2} < r_1 - r_2$	
	Fall 1 c: $(r_1 > r_2)$ $M_1 = M_2$	

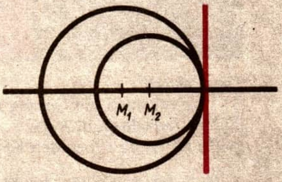
Lagemöglichkeiten zweier Kreise (Fortsetzung)		
Fall 2: Beide Kreise haben genau einen Punkt gemeinsam.	Fall 2a: $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$	
	Fall 2b: $(r_1 > r_2)$ $\overline{M_1M_2} = r_1 - r_2$	
Fall 3: Beide Kreise haben genau zwei Punkte gemeinsam.	$r_1 \geqq r_2$ $r_1 - r_2 < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$	

Haben zwei Kreise den Mittelpunkt gemeinsam (Fall 1c), so heißen sie *konzentrisch*. Die Fläche, die zwei konzentrische Kreise begrenzen, heißt *Kreisring*.

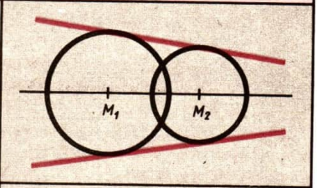
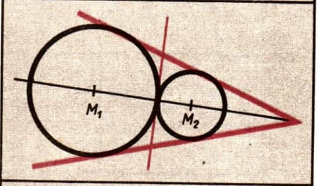
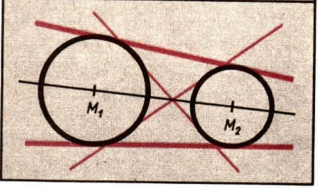
↗ Kreisring, Seite 235

Gemeinsame Tangenten zweier Kreise

Eine Tangente eines Kreises, die gleichzeitig Tangente eines zweiten Kreises ist, heißt *gemeinsame Tangente beider Kreise*. Man unterscheidet gemeinsame innere und gemeinsame äußere Tangenten zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2.
Gemeinsame innere Tangente zweier Kreise heißt jede gemeinsame Tangente, die die Gerade M_1M_2 zwischen den Punkten M_1 und M_2 schneidet.
Gemeinsame äußere Tangente zweier Kreise heißt jede gemeinsame Tangente, die die Gerade M_1M_2 nicht zwischen M_1 und M_2 schneidet.

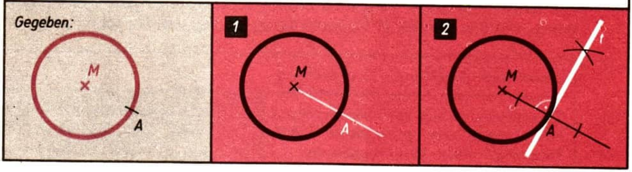
Gemeinsame Tangenten zweier Kreise	
Zwei Kreise, die sich von innen berühren, haben genau eine gemeinsame äußere Tangente in ihrem Berührungspunkt.	

➡ D 8

Gemeinsame Tangenten zweier Kreise (Fortsetzung)	
Zwei Kreise, die sich schneiden, haben genau zwei gemeinsame äußere Tangenten, die axialsymmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte beider Kreise liegen.	
Zwei Kreise, die sich von außen berühren, haben eine und nur eine gemeinsame innere Tangente (im Berührungspunkt) und zwei gemeinsame äußere Tangenten.	
Zwei Kreise ohne gemeinsame Punkte haben im Falle 1 a (↗ 202) genau zwei gemeinsame innere und zwei gemeinsame äußere Tangenten. In den Fällen 1 b und 1 c gibt es keine gemeinsamen Tangenten.	

Tangentenkonstruktionen

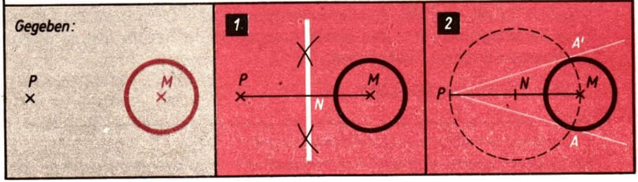
Tangente in einem Punkt A eines Kreises



Konstruktion:
(1) Wir zeichnen die Gerade MA.
(2) Wir errichten in A die Senkrechte t auf die Gerade MA; sie ist die Tangente im Punkte A an den Kreis. Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Senkrechte in einem Punkt einer Geraden, Seite 156

Tangente von einem Punkt P außerhalb eines Kreises



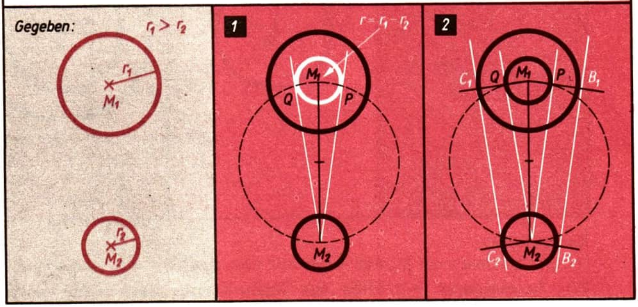
Konstruktion:

(1) Wir konstruieren den Mittelpunkt N der Strecke $\overline{PM}$.

(2) Wir zeichnen den Kreis um N mit dem Radius $\overline{MN}$ und bezeichnen seine Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis mit A und A'.
Wir zeichnen die Geraden PA und PA'. Die Dreiecke $PA'M$ und PAM sind nach dem *Thales*-Satz rechtwinklig.
Folglich sind die Geraden PA und PA' die Tangenten von P an den gegebenen Kreis. Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Satz des *Thales*, Seite 201

Gemeinsame äußere Tangenten zweier Kreise



Konstruktion:

(1) Wir zeichnen um M_1 den Kreis mit dem Radius $r = r_1 - r_2$. Wir konstruieren dann mit Hilfe des Thaleskreises über $\overline{M_1M_2}$ von M_2 die Tangenten an diesen Kreis. Die Berührungspunkte bezeichnen wir mit P und Q.

(2) Wir zeichnen die Strahlen M_1P und M_1Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_1 in den Punkten B_1 bzw. C_1. Wir konstruieren in M_2 die Senkrechten auf die Geraden M_2P bzw. M_2Q. Ihre Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis um M_2 bezeichnen wir mit B_2 bzw. C_2.
Wir zeichnen die Geraden B_1B_2 bzw. C_1C_2; sie sind die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise.

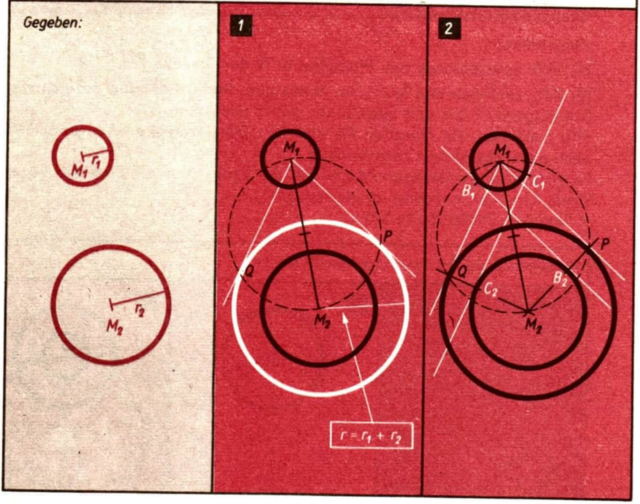
D 8

Die Konstruktion ist eindeutig.

Bemerkung: Falls die Radien der gegebenen Kreise gleich lang sind, so werden in M_1 und M_2 die Senkrechten auf die Gerade M_1M_2 konstruiert. Ihre Schnittpunkte mit den Kreisen ergeben die Berührungspunkte der gemeinsamen äußeren Tangenten.

↗ Satz des *Thales*, Seite 201

Gemeinsame innere Tangenten zweier Kreise



Konstruktion:

(1) Wir zeichnen um M_2 den Kreis mit dem Radius $r = r_1 + r_2$.
Wir konstruieren mit Hilfe des *Thales*-Kreises über $\overline{M_1M_2}$ von M_1 die Tangenten an diesen Kreis. Die Berührungspunkte bezeichnen wir mit P und Q.

(2) Wir zeichnen die Strahlen M_2P und M_2Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_2 in den Punkten B_2 bzw. C_2.
Wir konstruieren in M_1 die Senkrechten auf die Geraden M_1P bzw. M_1Q. Ihre Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis um M_1 bezeichnen wir mit B_1 bzw. C_1.
Wir zeichnen die Geraden B_1B_2 und C_1C_2; sie sind die gemeinsamen inneren Tangenten beider Kreise.
Die Konstruktion ist eindeutig.

↗ Satz des *Thales*, Seite 201

D 9 Ähnlichkeit; Satzgruppe des *Pythagoras*

Streckenverhältnis

Wenn zwei Strecken s_1 und s_2 bei gleicher Längeneinheit die Maßzahlen z_1 bzw. z_2 haben, so nennt man den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ das Streckenverhältnis von s_1 und s_2.

Man schreibt auch $\frac{s_1}{s_2} = \frac{z_1}{z_2}$ oder $s_1 : s_2 = z_1 : z_2$.

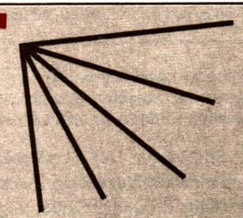
■ Die Länge einer Strecke s_1 betrage 8 cm, die Länge einer Strecke s_2 sei 5 cm. Das Streckenverhältnis beider Strecken beträgt dann $s_1 : s_2 = 1{,}6$.

↗ Division – Quotient, Seite 25
↗ Strecken, Seite 131

Strahlenbüschel

Die Menge aller Strahlen, die in ein und derselben Ebene liegen und einen gemeinsamen Anfangspunkt haben, heißt Strahlenbüschel.

■

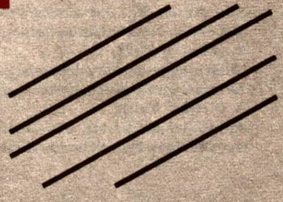


↗ Geradenbüschel, Seite 129

Parallelenschar

Die Menge aller Geraden, die zueinander parallel sind und in ein und derselben Ebene liegen, nennt man eine Parallelenschar dieser Ebene.

■



↗ Bilden von Mengen, Seite 14
↗ Punkte und Geraden einer Ebene – parallel, Seite 128

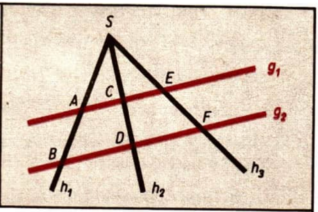
➡ D 9

Strahlenabschnitte, Parallelenabschnitte

Schneidet eine Parallelenschar ein Strahlenbüschel, so entstehen Strahlenabschnitte und Parallelenabschnitte.

Strahlenabschnitte
auf h_1: $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{AB}$
auf h_2: $\overline{SC}$, $\overline{SD}$, $\overline{CD}$
auf h_3: $\overline{SE}$, $\overline{SF}$, $\overline{EF}$

Parallelenabschnitte
auf g_1: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{CE}$
auf g_2: $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$



Beispiele für *gleichliegende Strahlenabschnitte*
auf h_1 und h_2: $\overline{SA}$ und $\overline{SC}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SD}$ sowie $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$,
auf h_1 und h_3: $\overline{SA}$ und $\overline{SE}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SF}$ sowie $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$.
Beispiele für *gleichliegende Parallelenabschnitte*
auf g_1 und g_2: $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ sowie $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$.

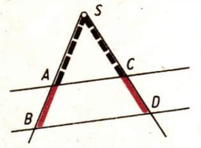
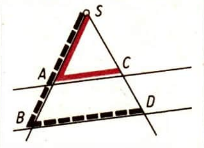
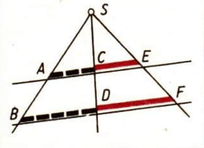
Einander zugehörig heißen ein Strahlenabschnitt und ein Parallelenabschnitt, wenn der Strahlenabschnitt vom Anfangspunkt S des Strahlenbüschels bis zu einem Endpunkt des betreffenden Parallelenabschnittes reicht.

■ (↗ Bild oben). Der Strahlenabschnitt $\overline{SB}$ und der Parallelenabschnitt $\overline{BD}$ sind einander zugehörig. Auch der Strahlenabschnitt $\overline{SE}$ und der Parallelenabschnitt $\overline{EA}$ sind einander zugehörig.

Strahlensatz

▶ **SATZ:**
Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt:
1. (erster Teil):
Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl.
2. (zweiter Teil):
Gleichliegende Parallelenabschnitte verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte auf ein und demselben Strahl.
3. (dritter Teil):
Parallelenabschnitte auf einer Parallelen verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Parallelenabschnitte auf einer anderen Parallelen.

Für Geradenbüschel gilt ein entsprechender Satz.

Erster Teil	Zweiter Teil	Dritter Teil
		
(1) $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ (2) $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$ (3) $\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$	(4) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ (5) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$	(6) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$ (7) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$ (8) $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BF}}$

Beweis des Strahlensatzes

Wir beschränken uns jeweils auf einen der möglichen Fälle. Die anderen Fälle lassen sich in entsprechender Weise beweisen.

Beweis zum ersten Teil:

Wir beweisen den Fall $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$

1. Es ist ein Strahlenbüschel h_1, h_2 gegeben.
2. Das Strahlenbüschel wird von einer Parallelenschar g_1, g_2 geschnitten, so daß die Strahlenabschnitte $\overline{SA}$, $\overline{AB}$, $\overline{SC}$, $\overline{CD}$ entstehen.

Behauptung: $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Beweis:

Für das Dreieck SAC gilt (Bild 1):

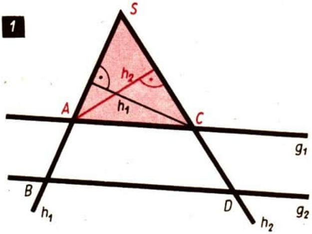
$$A_{\triangle SAC} = \frac{\overline{SA} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{SC} \cdot h_2}{2}.$$

Daraus folgt:

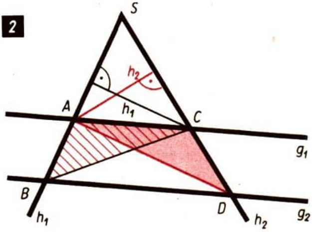
(a) $\overline{SA} \cdot h_1 = \overline{SC} \cdot h_2$.

Die Dreiecke ABC und ADC haben gleich große Flächeninhalte; denn sie stimmen in der Seite $\overline{AC}$ und der zugehörigen Höhe überein (Bild 2).

1



2



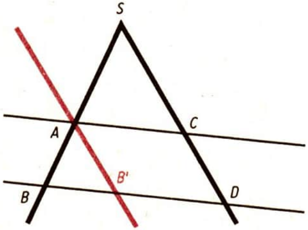
D 9

Es gilt:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} \quad \text{und} \quad A_{\triangle ADC} = \frac{\overline{CD} \cdot h_2}{2}.$$

Somit ergibt sich:

(b) $\overline{AB} \cdot h_1 = \overline{CD} \cdot h_2$.



Aus (a) und (b) folgt $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Beweis zum zweiten Teil:

Wir beweisen den Fall $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$.

Voraussetzung (siehe oben)

Behauptung: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$.

Beweis:

Wir zeichnen durch A die Parallele zu CD. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden BD sei B'. Es gilt:

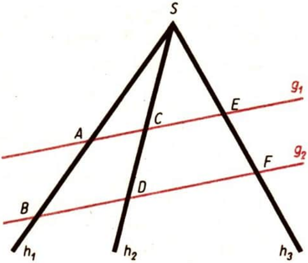
(a) $\overline{B'D} = \overline{AC}$ (als Gegenseiten eines Parallelogramms)

(b) $\frac{\overline{B'D}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ (nach dem ersten Teil des Strahlensatzes)

Aus (a) und (b) folgt: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$.

Beweis zum dritten Teil:

Wir beweisen den Fall $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$.



Voraussetzung:

1. Es ist ein Strahlenbüschel h_1, h_2, h_3 gegeben.
2. Das Strahlenbüschel wird von einer Parallelenschar g_1, g_2 geschnitten, so daß die Parallelenabschnitte $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ und $\overline{DF}$ entstehen.

Behauptung: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

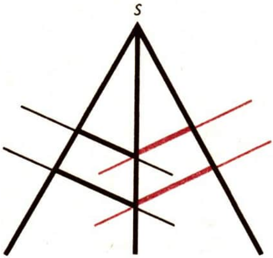
Beweis:

Nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

Daraus folgt

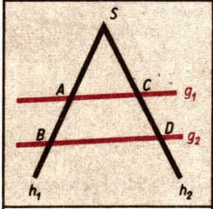
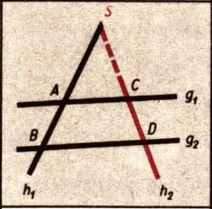
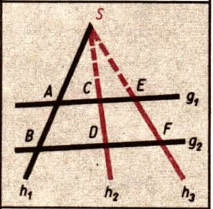
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} \quad \text{und weiter} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}.$$



Der Satz gilt auch, wenn die Parallelenabschnitte verschiedenen Scharen angehören.

Umkehrung des Strahlensatzes

SATZ:
1. (Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes)
Wird ein Strahlenbüschel von Geraden geschnitten und verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl, so bilden die schneidenden Geraden eine Parallelenschar.
2. (Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes)
Wird eine Parallelenschar von einem Strahl *h* mit dem Anfangspunkt *S* und von Geraden geschnitten, die nicht parallel zu *h* sind, und verhalten sich gleichliegende Parallelenabschnitte wie die zugehörigen Strahlenabschnitte auf *h*, so gehen die schneidenden Geraden durch *S*.
3. (Umkehrung zum dritten Teil des Strahlensatzes)
Wird eine Parallelenschar von paarweise nicht parallelen Geraden geschnitten und verhalten sich die Parallelenabschnitte auf einer Parallelen wie die gleichliegenden Parallelenabschnitte auf einer anderen Parallelen, so gehen die schneidenden Geraden durch einen gemeinsamen Punkt.

<table>
<tr><th>Erster Teil</th><th>Zweiter Teil</th><th>Dritter Teil</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Aus
(1) $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ oder
(2) $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$ oder
(3) $\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$
folgt $g_1 \parallel g_2$.</td>
<td>Aus
$g_1 \parallel g_2$ und
$\overline{AC} \neq \overline{BD}$ und
$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$
folgt
CD geht durch S.</td>
<td>Aus
$AC \nparallel BD$ und
$g_1 \parallel g_2$ sowie
$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$ oder
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$ oder
$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BF}}$ folgt
AB, CD und EF gehen durch einen gemeinsamen Punkt.</td>
</tr>
</table>

➡ D 9

Beweis der Umkehrung des Strahlensatzes

Wir beschränken uns jeweils auf einen der möglichen Fälle. Die anderen Fälle lassen sich in entsprechender Weise beweisen.

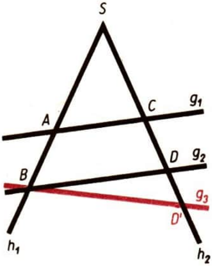
Beweis der Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes:

Wir führen den Beweis für den Fall $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Voraussetzung:
1. Es ist ein Strahlenbüschel h_1, h_2 gegeben.
2. Das Strahlenbüschel wird von den Geraden g_1 und g_2 geschnitten, und es gilt $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$.

Behauptung: g_1 und g_2 sind zueinander parallel.

Beweis:
Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, g_1 und g_2 seien nicht parallel zueinander. Dann gibt es durch B eine und nur eine Parallele zu g_1. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden SC sei $D' \neq D$. Dann gilt:



$\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD'}}$ (nach dem ersten Teil des Strahlensatzes)

$\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ (nach Voraussetzung)

Daraus ergibt sich

$\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD'}}$ und weiter $\overline{CD} = \overline{CD'}$.

Das steht im Widerspruch zu $D' \neq D$. Folglich sind g_1 und g_2 parallel.

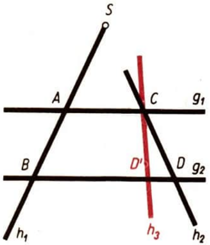
Beweis der Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes:

Voraussetzung:
1. Es ist eine Parallelenschar g_1, g_2 gegeben: $g_1 \parallel g_2$.
2. Die Parallelenschar wird von einem Strahl h_1 mit dem Anfangspunkt S sowie von einer Geraden h_2, die nicht zu h_1 parallel ist, geschnitten, und es gilt:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ und $\overline{AC} \neq \overline{BD}$.

Behauptung: Die Gerade h_2 geht durch S.

Beweis:
Wir führen den Beweis, indem wir annehmen, es gäbe einen Strahl SC, der die Gerade g_2 nicht in D, sondern in D' schneidet.
Dann würde gelten:



$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ (nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$$ (nach Voraussetzung)

Daraus folgt:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$ und weiter $\overline{BD'} = \overline{BD}$.

Das ist aber nur für $D = D'$ möglich. Folglich geht die Gerade CD durch S.

Beweis der Umkehrung zum dritten Teil des Strahlensatzes:

Wir führen den Beweis für den Fall $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$.

Voraussetzung:

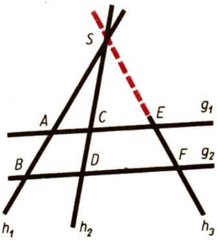
1. Es ist eine Parallelenschar g_1, g_2 gegeben: $g_1 \parallel g_2$.
2. Die Parallelenschar wird von paarweise nicht parallelen Geraden h_1, h_2, h_3 geschnitten, und es gilt (siehe Bild)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$ und $\overline{AC} \neq \overline{BD}$.

Behauptung: Die Geraden h_1, h_2 und h_3 gehen durch einen gemeinsamen Punkt.

Beweis:

Wir führen den Beweis, indem wir zeigen, daß h_3 durch S geht, wenn S der Schnittpunkt von h_1 und h_2 ist. Es gilt:



a) $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$ (nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes)

b) $$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$ (nach Voraussetzung) bzw.

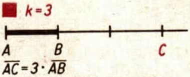
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}.$$

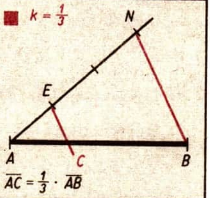
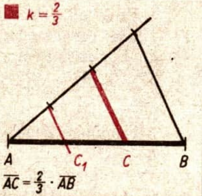
Aus a) und b) ergibt sich $\frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$.

Auf Grund der Umkehrung des zweiten Teiles des Strahlensatzes folgt dann, daß die Gerade EF durch S geht.

Vervielfachen einer Strecke, Teilen einer Strecke

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann eine Strecke in k kongruente Teile geteilt sowie ihr k-faches ermittelt werden, wobei $k = \frac{m}{n}$ (m, n natürliche Zahlen) sein soll.

Das k-fache einer Strecke ($\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$)	
1 $k = n$ (n natürliche Zahl) Wir verlängern $\overline{AB}$ über B (oder A) hinaus und tragen von B (von A) aus die Strecke $\overline{AB}$ auf der Verlängerung $(n-1)$-mal ab.	

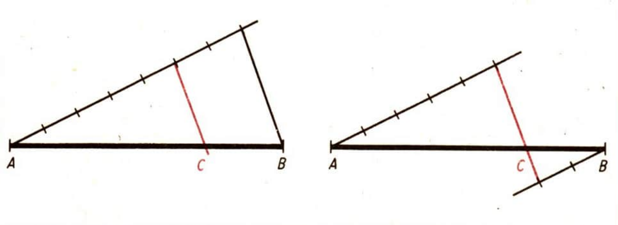
Das k-fache einer Strecke ($\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$) (Fortsetzung)	
2 $k = \frac{1}{n}$ (n natürliche Zahl, $n \neq 0$) Wir tragen von A (oder B) aus auf einem geeigneten Strahl eine Strecke $\overline{AE}$ (bzw. $\overline{BE}$) n-mal ab. Wir bezeichnen den Endpunkt der Streckenfolge mit N. Wir zeichnen durch E die Parallele zu BN (bzw. zu AN).	
3 $k = \frac{m}{n}$ (m, n natürliche Zahlen, $n \neq 0$) 1. Schritt: Wir konstruieren zuerst wie im Fall 2 $\left(k = \frac{1}{n}\right)$ den n-ten Teil der gegebenen Strecke $\overline{AB}$. 2. Schritt: Wir konstruieren dann wie im Fall 1 ($k = n$) das m-fache des n-ten Teils der Strecke $\overline{AB}$.	
4 Ist k *irrational*, so ersetzen wir k durch rationale Näherungswerte. Dabei richtet sich die Anzahl der Stellen nach dem Komma nach den Erfordernissen und Möglichkeiten der Rechnung.	$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$ $\approx 1{,}414214$ $\approx 1{,}414$

↗ Reelle Zahlen, Seite 51, (irrationale reelle Zahlen)

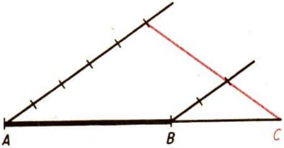
Innere und äußere Teilung einer Strecke

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann eine Strecke innen und außen geteilt werden.

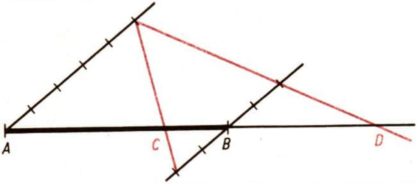
Eine Strecke $\overline{AB}$ wird innen im Verhältnis 5 : 2 geteilt



Eine Strecke $\overline{AB}$ wird außen im Verhältnis 5 : 2 geteilt



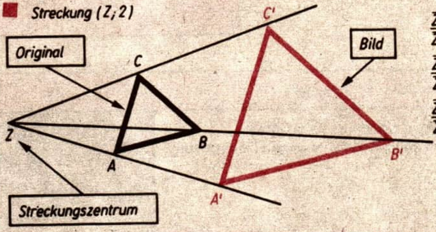
Eine Strecke $\overline{AB}$ wird innen und außen im Verhältnis 5 : 2 geteilt



Zentrische Streckung

DEFINITION:
Eine zentrische Streckung der Ebene ist eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der jedem Punkt P der Ebene sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet wird:
1. **Ein Punkt wird als Streckungszentrum Z festgelegt.**
2. **Eine positive reelle Zahl wird als Streckungsfaktor k festgelegt.**
3. **P' liegt auf dem Strahl ZP mit $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ für $P \neq Z$.**
4. **Z hat sich selbst als Bildpunkt: $Z' = Z$.**

Streckung (Z; 2)



$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{4{,}0\,\text{cm}}{2{,}0\,\text{cm}} = 2$$
$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{7{,}0\,\text{cm}}{3{,}5\,\text{cm}} = 2$$
$$\frac{\overline{ZC'}}{\overline{ZC}} = \frac{5{,}0\,\text{cm}}{2{,}5\,\text{cm}} = 2$$

↗ Reelle Zahlen, Seite 51

➡ D 9

Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor k bezeichnen wir mit $(Z; k)$. Originalpunkt P und sein Bildpunkt P' werden auch einander entsprechende Punkte bei der zentrischen Streckung genannt.
Bei einer zentrischen Streckung spricht man
im Falle $k > 1$ von einer *maßstäblichen Vergrößerung*,
im Falle $0 < k < 1$ von einer *maßstäblichen Verkleinerung*.
Im Falle $k = 1$ werden alle Punkte P des Originals auf sich selbst abgebildet.

Konstruktion der Bilder bei zentrischen Streckungen

■ Das Bild eines Dreiecks ABC ist bei der zentrischen Streckung $\left(D; \frac{4}{3}\right)$ zu konstruieren.

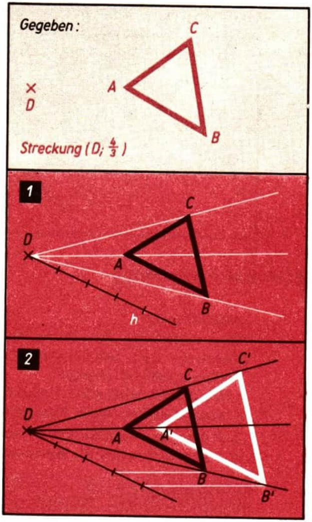
Konstruktion:

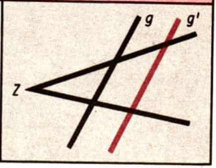
(1) Wir zeichnen die Strahlen DA, DB, DC und einen weiteren Hilfsstrahl h mit dem Anfangspunkt D.

(2) Wir konstruieren $\overline{DB'} = \frac{4}{3} \cdot \overline{DB}$.

Nach dem Strahlensatz erhalten wir A' als Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch B'. Entsprechend erhalten wir C' als Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch A'!
Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks ABC bei der zentrischen Streckung $\left(D; \frac{4}{3}\right)$.

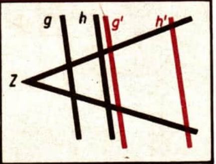
↗ Strahlensatz, Seite 208



Eigenschaften zentrischer Streckungen	
1 Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade. Original- und Bildgerade sind parallel zueinander.	

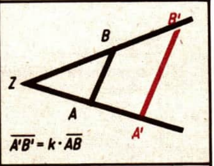
Eigenschaften zentrischer Streckungen (Fortsetzung)

2 Die Bilder zueinander paralleler Geraden sind Geraden, die zueinander und zu den Originalen parallel sind.



3 Das Bild jeder Strecke ist eine zu ihr parallele Strecke.

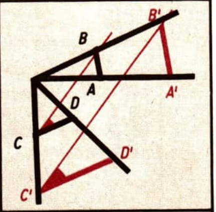
4 Das Bild jeder Strecke ist bei der Streckung (Z; k) das k-fache ihrer Originalstrecke.



5 Die Bilder zweier Strecken stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie ihre Originalstrecken:

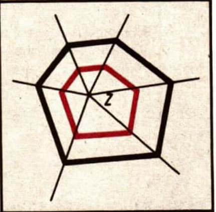
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

6 Einander entsprechende Winkel sind kongruent: $\sphericalangle\, BCD \cong \sphericalangle\, B'C'D'$.

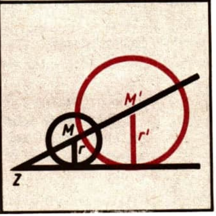


7 Das Bild jedes n-Ecks ist wieder ein n-Eck. Regelmäßige n-Ecke haben regelmäßige n-Ecke als Bilder.

↗ Vieleck, Seite 193



8 Das Bild jedes Kreises ist wieder ein Kreis. Für die Radien r des Originalkreises und r' des Bildkreises gilt $r' = kr$.



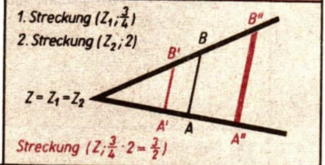
➡ D 9

Zusammensetzungen zweier zentrischer Streckungen

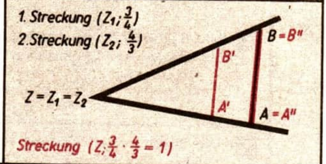
Die Streckungen $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ werden zusammengesetzt.

Fall 1: $Z_1 = Z_2$

Fall 1a: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$
Die Zusammensetzung der Streckungen $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ ergibt eine Streckung $(Z; k)$ mit $Z = Z_1 = Z_2$ und $k = k_1 \cdot k_2$.

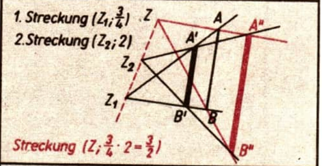


Fall 1b: $k_1 \cdot k_2 = 1$
Ergebnis der Zusammensetzung:
Identität

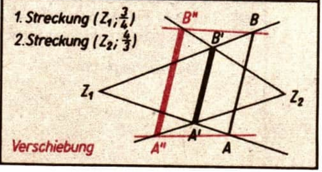


Fall 2: $Z_1 \neq Z_2$

Fall 2a: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$
Die Zusammensetzung der Streckungen $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ ergibt eine Streckung $(Z; k)$, bei der Z auf der Geraden Z_1Z_2 liegt und $k = k_1 \cdot k_2$ gilt.



Fall 2b: $k_1 \cdot k_2 = 1$
Ergebnis der Zusammensetzung:
Verschiebung mit der Verschiebungsrichtung Z_1Z_2



Ähnlichkeitsabbildungen

▶ **DEFINITION:**
Ähnlichkeitsabbildung heißt jede eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, die
(1) eine Bewegung oder
(2) eine zentrische Streckung oder
(3) eine Abbildung ist, die aus einer Bewegung und einer zentrischen Streckung zusammengesetzt ist.

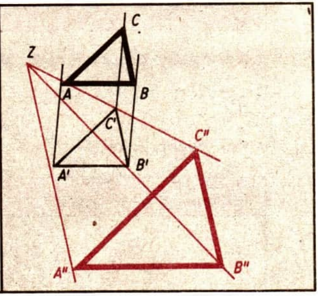
↗ Bewegungen, Seite 150

Unter dem *Ähnlichkeitsfaktor* einer Ähnlichkeitsabbildung versteht man den Quotienten k aus den Längen von Bild- und zugehöriger Originalstrecke.
Ist eine Ähnlichkeitsabbildung eine zentrische Streckung $(Z; k)$, so nennt man das Streckungszentrum Z auch *Ähnlichkeitspunkt*.

↗ Streckenverhältnis, Seite 207

Die nebenstehende Ähnlichkeitsabbildung setzt sich aus der Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$ und der Streckung $\left(Z; \frac{\overline{ZA''}}{\overline{ZA'}}\right)$ zusammen.
Der Ähnlichkeitsfaktor bei dieser Ähnlichkeitsabbildung ist:

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C''A''}}{\overline{CA}} = k$$

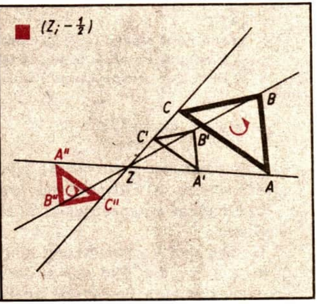


Eine Ähnlichkeitsabbildung, die entweder keine Geradenspiegelung oder eine gerade Anzahl von Geradenspiegelungen enthält, heißt *gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung*.
Eine Ähnlichkeitsabbildung, die entweder genau eine Geradenspiegelung oder eine ungerade Anzahl von Geradenspiegelungen enthält, heißt *ungleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung*.

↗ Spiegelungen an einer Geraden, Seite 148

Ähnlichkeitsabbildungen mit negativem Streckungsfaktor

Eine Ähnlichkeitsabbildung $(Z; -k)$ mit $k > 0$ ist aus der Streckung $(Z; k)$ und aus einer Drehung um Z mit einem Drehwinkel von 180° zusammengesetzt. $(Z; -k)$ ist eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung.



↗ Ähnliche Figuren – gleichsinnig ähnliche Figuren, Seite 220

➡ D 9

Ähnliche Figuren

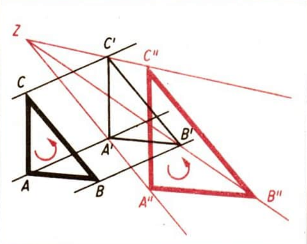
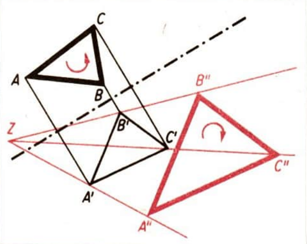
▶ **DEFINITION:**
Zwei (ebene) Figuren heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der die eine Figur das Bild der anderen Figur ist.

Schreibweise: $F_1 \sim F_2$ (lies: F_1 ist ähnlich zu F_2)

↗ Zueinander proportionale Zahlenfolgen – Zeichen $\sim$, Seite 82

Kongruente Figuren sind ähnliche Figuren mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 1$.

↗ Kongruenz, Seite 151

Gleichsinnig ähnliche Figuren	Ungleichsinnig ähnliche Figuren
	

Ähnlichkeit von Vielecken

▶ **SATZ:**
Wenn zwei n-Ecke ($n \geqq 3$) einander ähnlich sind, so gilt:
a) Einander entsprechende Winkel sind gleich groß.
b) Einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis.

↗ Vieleck, Seite 193

Voraussetzung: Zwei n-Ecke seien einander ähnlich.
Behauptung: a) Einander entsprechende Winkel sind gleich groß.
b) Einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis.
Beweis:
Gemäß der Voraussetzung gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der das eine n-Eck das Bild des anderen n-Ecks ist. Ist die Ähnlichkeitsabbildung entweder eine Bewegung oder eine zentrische Streckung, so ergeben sich die Eigenschaften a) und b) unmittelbar aus den Eigenschaften der entsprechenden Abbildungen (Bewegung bzw. zentrische Streckung).

Wir betrachten den Fall, daß die Ähnlichkeitsabbildung aus einer Bewegung und einer zentrischen Streckung zusammengesetzt ist. Für beliebige Punkte P, Q, R, S der n-Ecke gilt dann:

(1) bei der Bewegung

$$\sphericalangle P'Q'R' = \sphericalangle PQR \quad \text{und} \quad \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{R'S'}}{\overline{RS}} = 1,$$

(2) bei der zentrischen Streckung

$$\sphericalangle P''Q''R'' = \sphericalangle P'Q'R' \quad \text{und} \quad \frac{\overline{P''Q''}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{R''S''}}{\overline{R'S'}} = k.$$

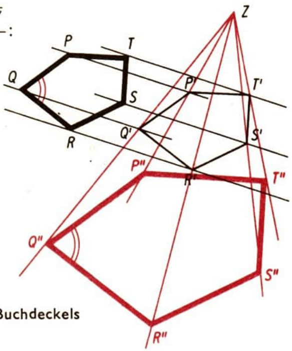
Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle P''Q''R'' = \sphericalangle PQR$.

Weiter ergibt sich wegen $\overline{P'Q'} = \dfrac{\overline{PQ} \cdot \overline{R'S'}}{\overline{RS}}$:

$$\frac{\overline{P''Q''}}{\dfrac{\overline{PQ} \cdot \overline{R'S'}}{\overline{RS}}} = \frac{\overline{R''S''}}{\overline{R'S'}}$$

$$\frac{\overline{P''Q''} \cdot \overline{RS}}{\overline{PQ} \cdot \overline{R'S'}} = \frac{\overline{R''S''}}{\overline{R'S'}}$$

$$\frac{\overline{P''Q''}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{R''S''}}{\overline{RS}}$$



↗ Vgl. mit den Bildern auf der Rückseite des Buchdeckels

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

SATZ:
Wenn es zwischen den Eckpunkten zweier *n*-Ecke ($n \geqq 3$) bei Beachtung der Reihenfolge eine umkehrbar eindeutige Zuordnung so gibt, daß
a) einander entsprechende Winkel gleich groß sind und
b) einander zugeordnete Seiten das gleiche Verhältnis bilden, so sind die beiden *n*-Ecke einander ähnlich.

Wir beweisen den Satz für den Fall $n = 4$.

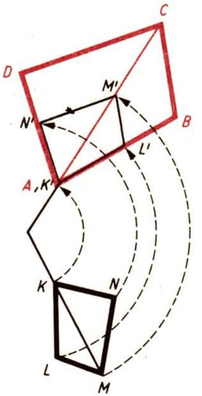
Voraussetzung: Zwei Vierecke $ABCD$ und $KLMN$ mögen so gegeben sein, daß es zwischen den Eckpunkten (bei Beachtung der Reihenfolge) eine eineindeutige Zuordnung so gibt, daß
a) einander entsprechende Winkel gleich groß sind und
b) einander zugeordnete Seiten das gleiche Verhältnis bilden.
Behauptung: Die Vierecke $ABCD$ und $KLMN$ sind ähnlich.

Beweis:
Entsprechend der Voraussetzung gelte:

➡ D 9

a) $\sphericalangle DAB = \sphericalangle NKL$; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle KLM$
$\sphericalangle BCD = \sphericalangle LMN$; $\sphericalangle CDA = \sphericalangle MNL$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{NK}} = k$



Wegen a) gibt es eine Bewegung mit folgenden Eigenschaften:

(1) Viereck $K'L'M'N'$ ist Bild des Vierecks $KLMN$.

(2) $K' = A$; L' liegt auf AB; N' liegt auf AD.

(3) $L'M'$ ist parallel zu BC. $M'N'$ ist parallel zu CD. Da bei der Bewegung Streckenlängen erhalten bleiben, gilt wegen b):

(4) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{K'L'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{L'M'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{M'N'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{N'K'}} = k.$

Aus (2), (3) und (4) folgt auf Grund der Umkehrung des Strahlensatzes (zweiter Teil), daß CM' durch A geht. Damit gilt:

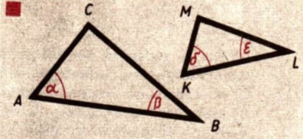
(5) Viereck $ABCD$ ist Bild des Vierecks $K'L'M'N'$ bei einer zentrischen Streckung.

Aus (1) und (5) folgt:

Das Viereck $ABCD$ ist Bild des Vierecks $KLMN$ bei einer Ähnlichkeitsabbildung. Die beiden Vierecke sind also einander ähnlich.

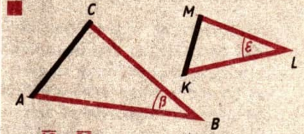
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

▶ **SATZ (Hauptähnlichkeitssatz):**
Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie einander ähnlich.



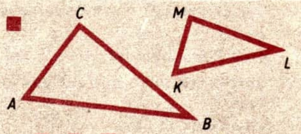
Aus $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$

▶ **SATZ:**
Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und wenn die anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden, so sind die Dreiecke einander ähnlich.



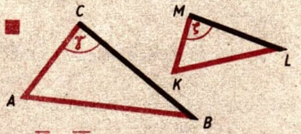
Aus $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{LM}}$ und $\beta = \varepsilon$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$

SATZ:
Wenn jede Seite eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen Dreiecks gleiche Verhältnisse bildet, so sind die Dreiecke einander ähnlich.



Aus $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{MK}}$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$

SATZ:
Wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen gleiche Verhältnisse bilden und wenn die beiden Dreiecke in dem Winkel übereinstimmen, der der jeweils größeren der beiden Seiten gegenüberliegt, so sind die Dreiecke einander ähnlich.



Aus $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{KM}}$, $\overline{AB} > \overline{AC}$

und $\gamma = \zeta$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$

Die Ähnlichkeitssätze werden hier nicht bewiesen.

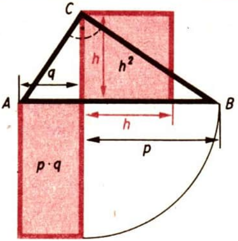
Höhensatz

Für die folgenden Sätze über rechtwinklige Dreiecke (Höhensatz, Kathetensatz, Satz des *Pythagoras*) werden jeweils zwei Formulierungen angegeben.
In der ersten Formulierung werden Maßzahlen, in der zweiten Formulierung werden Flächen miteinander verglichen.

SATZ:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat der Maßzahl der Höhe auf die Hypotenuse ist gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Hypotenusenabschnitte.
$h^2 = p \cdot q$

Zweite Formulierung:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat über der Höhe hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

↗ Rechtwinklige Dreiecke, Seite 167



Der Beweis wird mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke geführt.
Voraussetzung: Ein Dreieck *ABC* sei rechtwinklig.
Behauptung: Das Quadrat der Maßzahl der Höhe auf die Hypotenuse ist gleich dem Produkt aus den

Maßzahlen der Hypotenusenabschnitte.

Beweis:

Der Fußpunkt der Höhe h auf die Hypotenuse c sei D. Die Hypotenusenabschnitte seien $q = \overline{AD}$ und $p = \overline{BD}$. Es gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz:

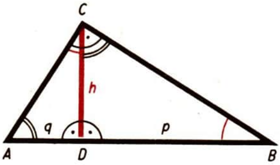
$\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

Daraus folgt:

$\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$ bzw.

$h^2 = p \cdot q$.

↗ Höhen eines Dreiecks, Seite 174



Umkehrung des Höhensatzes

SATZ:
Wenn eine Seite eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h innen so in zwei Abschnitte p und q geteilt wird, daß $h^2 = p \cdot q$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig; p und q sind dann die Hypotenusenabschnitte.

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

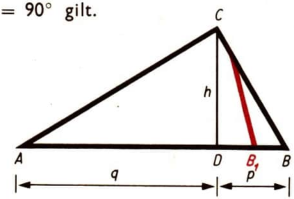
Voraussetzung: Die Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC wurde durch die zugehörige Höhe $\overline{CD} = h$ innen so in zwei Abschnitte $\overline{DB} = p$ und $\overline{AD} = q$ geteilt, daß $h^2 = p \cdot q$ gilt.

Behauptung: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, und p und q sind die Hypotenusenabschnitte.

Beweis:

Die Behauptung besagt, daß $\sphericalangle BCA = 90°$ gilt.

Wir führen den Beweis indirekt, d. h. wir weisen nach, daß die gegenteilige Behauptung (also $\sphericalangle BCA \neq 90°$) im Widerspruch zur Voraussetzung steht.



Wir nehmen also an, es gelte $\sphericalangle BCA \neq 90°$. Dann gäbe es in C auf die Gerade AC eine Senkrechte, die die Gerade AB in einem Punkte, $B_1 \neq B$ schneidet. Der Punkt B_1 läge auf der Geraden DB. Wenn wir nun $\overline{DB_1}$ mit $p_1 \neq p$ bezeichnen, müßte gelten:

$h^2 = q \cdot p_1$ und $h^2 \neq q \cdot p$.

Das stünde aber im Widerspruch zur Voraussetzung, in der $h^2 = p \cdot q$ angenommen wurde. Deshalb muß die Annahme, $\sphericalangle BCA$ sei kein rechter Winkel, falsch sein.

↗ Indirekter Beweis, Seite 14

Kathetensatz

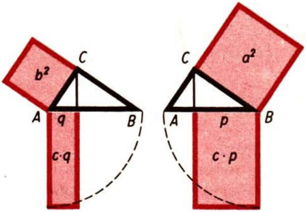
> **SATZ:**
> **In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat der Maßzahl jeder Kathete ist gleich dem Produkt aus den Maßzahlen von Hypotenuse und dem der betreffenden Kathete zugehörigen Hypotenusenabschnitt.**
>
> $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$
>
> Zweite Formulierung:
> **In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat über jeder Kathete hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem der betreffenden Kathete zugehörigen Hypotenusenabschnitt.**

↗ Rechtwinklige Dreiecke, Seite 167

Der Beweis wird mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke geführt.

Voraussetzung: Ein Dreieck ABC sei rechtwinklig.

Behauptung: Das Quadrat der Maßzahl jeder Kathete ist gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Hypotenuse und des dem der betreffenden Kathete zugehörigen Hypotenusenabschnittes.



Beweis:

Der Fußpunkt der Höhe h auf die Hypotenuse c sei D.

Es gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz:

$\triangle ADC \sim \triangle ABC.$

Daraus folgt:

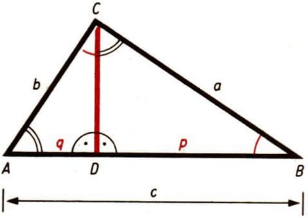
$q : b = b : c$ bzw. $b^2 = c \cdot q.$

Weiter gilt:

$\triangle BDC \sim \triangle ABC.$

Daraus folgt

$p : a = a : c$ bzw. $a^2 = c \cdot p$



↗ Höhen eines Dreiecks, Seite 174

Umkehrung des Kathetensatzes

> **SATZ:**
> **Wenn für die Seiten a, b und $c = p + q$ eines Dreiecks die Beziehung $a^2 = p \cdot c$ oder $b^2 = q \cdot c$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und c ist Hypotenuse.**

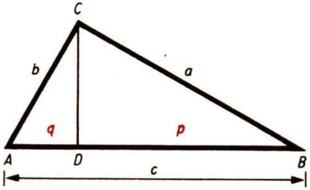
↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

D 9

Voraussetzung: Für die Seiten a, b und c eines beliebigen Dreiecks ABC und für die Abschnitte $\overline{AD} = q$ und $\overline{BD} = p$ der Seite $\overline{AB} = c = p + q$ gelte die Beziehung $a^2 = p \cdot c$ oder $b^2 = q \cdot c$. D liege demnach zwischen A und B.
Behauptung: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
Beweis:
Im Dreieck DBC gilt nach dem Satz des *Pythagoras*
$a^2 = p^2 + h^2$.
Außerdem gilt gemäß Voraussetzung:
$a^2 = p \cdot c$.
Daraus folgt:

$$p^2 + h^2 = p \cdot c$$
$$h^2 = p \cdot c - p^2$$
$$h^2 = p(c - p)$$

und, da $c - p = q$,
$h^2 = p \cdot q$.



Für das Dreieck ABC sind folglich die Voraussetzungen für die Umkehrung des Höhensatzes erfüllt. Demnach ist $\sphericalangle BCA$ ein rechter Winkel. Der Fall $b^2 = q \cdot c$ läßt sich in derselben Weise beweisen.

Satz des *Pythagoras*

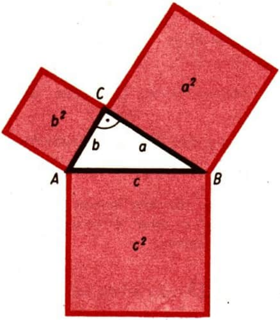
SATZ:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate, die aus den Maßzahlen der Katheten gebildet werden.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Zweite Formulierung:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Die beiden Kathetenquadrate haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat.

↗ Rechtwinklige Dreiecke, Seite 167

Der Beweis wird mit Hilfe des Kathetensatzes geführt.
Voraussetzung: Ein Dreieck ABC sei rechtwinklig.
Behauptung: Das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate, die aus den Maßzahlen der Katheten gebildet werden.
Beweis:
Aus $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$
(Kathetensatz)



folgt

$$a^2 + b^2 = pc + qc$$
$$a^2 + b^2 = c(p + q)$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Umkehrung des Satzes von *Pythagoras*

SATZ:
Wenn für die Seiten a, b, c eines Dreiecks die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und c ist Hypotenuse.

↗ Umkehrung eines Satzes, Seite 10

Voraussetzung: Für die Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC gelte die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$.
Behauptung: Das Dreieck ist rechtwinklig, und c ist die Hypotenuse.
Beweis:
Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit a und b als Katheten, seine Hypotenuse sei c_1. Für das Dreieck $A_1B_1C_1$ gilt nach dem Satz des *Pythagoras*:
$a^2 + b^2 = c_1^2$.
Dann gilt
$c^2 = c_1^2$ bzw. $c = c_1$.
Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ stimmen demnach in den Seiten überein. Folglich sind sie kongruent. Der Winkel BCA ist also ein rechter Winkel.

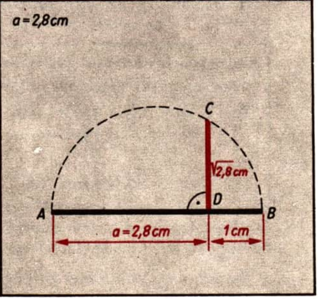
Anwendung der Satzgruppe des *Pythagoras*

Die Satzgruppe des *Pythagoras* wird für Konstruktionen, Berechnungen und Beweise herangezogen.

Eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ cm ist zu konstruieren

Höhensatz
(1) Wir zeichnen $\overline{AD} = a$ cm und $\overline{DB} = 1$ cm derart, daß D zwischen A und B liegt.
(2) Wir zeichnen über $\overline{AB}$ den Thaleskreis und errichten in D die Senkrechte auf AB. Der Schnittpunkt mit dem Kreis ist C.

Die Strecke $\overline{CD}$ hat die Länge $\sqrt{a}$ cm.



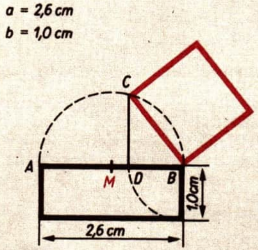
Zu einem Rechteck ist ein Quadrat mit gleichem Inhalt zu konstruieren

Kathetensatz

(1) Wir tragen auf der längeren Rechteckseite $\overline{AB} = a$ von B aus die Strecke $\overline{BD} = b$ ab und erhalten den Punkt D.

(2) Der Schnittpunkt der Senkrechten in D auf AB mit dem *Thales*-Kreis über $\overline{AB}$ ergibt den Punkt C.

Die Strecke $\overline{CB}$ ist Seite des gesuchten Quadrates.



Wie lang ist die Raumdiagonale eines Quaders ($a = 6{,}5$ cm; $b = 2{,}9$ cm; $c = 3{,}5$ cm)?

Satz des Pythagoras

(1) Im rechtwinkligen Dreieck ACG gilt:
$d^2 = f^2 + c^2$.

(2) Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:
$f^2 = a^2 + b^2$.

Aus (1) und (2) folgt:
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

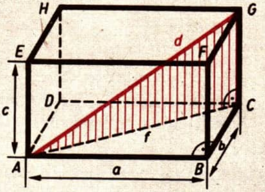
Überschlag: $d \approx \sqrt{36 + 9 + 9}$ cm
$= \sqrt{54}$ cm

7 cm $< d <$ 8 cm

Numerische Lösung mit dem Rechenstab:

$d = \sqrt{6{,}5^2 + 2{,}9^2 + 3{,}5^2}$ cm
$\approx \sqrt{42{,}2 + 8{,}4 + 12{,}2}$ cm $= \sqrt{62{,}8}$ cm

$d \approx 7{,}9$ cm



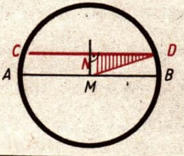
Ergebnis:
Die Raumdiagonale hat eine Länge von rund 7,9 cm.

Der Durchmesser eines Kreises beträgt 18 cm. Parallel zu ihm wird im Abstand von 3 cm eine Sehne gezeichnet. Die Länge der Sehne ist zu berechnen.

Aus Symmetriegründen genügt die Berechnung von $\overline{ND}$. Es gilt $\overline{MN} = 3$ cm.

$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{ND}$; $\quad \overline{ND} = \sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{MN}^2}$
$= \sqrt{9^2 - 3^2}$ cm
$= \sqrt{72}$ cm

$\overline{ND} \approx 8{,}5$ cm



Ergebnis:
Die Sehne hat eine Länge von rund 17 cm.

Ein Beispiel für die Anwendung der Satzgruppe des *Pythagoras* für Beweisführungen wird beim Beweis des Kosinussatzes gegeben.

↗ Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken, Seite 120

D 10 Flächenberechnungen

Man unterscheidet in der Mathematik zwischen *Dreieck* und *Dreiecksfläche* (Viereck und Vierecksfläche usw.).

↗ Dreieck – Dreiecksfläche, Seite 162;
Viereck – Vierecksfläche, Seite 179

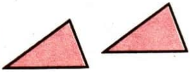
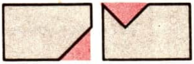
Im Rahmen der Abschnitte D 10 und D 11 wird zur Vereinfachung in der Redeweise von vornherein nur von „Dreiecken“, „Vierecken“ usw. gesprochen. Dabei haben die Variablen in den Gleichungen folgende Bedeutung:

Seiten	$a, b, c, \ldots$	Grundseite	g
Radius	r	zu g gehörige Höhe	h_g
Durchmesser	d	Umfang	u
Höhe	h	Flächeninhalt	A
■ $a = 5{,}2\ \text{cm}$; $A = 6\ \text{cm}^2$ (Größenangaben)			

Einheiten des Flächeninhalts

Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Quadratmillimeter	mm^2	$1\ \text{mm}^2$
Quadratzentimeter	cm^2	$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$
Quadratdezimeter	dm^2	$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$
Quadratmeter	m^2	$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$
Ar	a	$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$
Hektar	ha	$1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\,000\ \text{m}^2$
Quadratkilometer	km^2	$1\ \text{km}^2 = 100\ \text{ha} = 1\,000\,000\ \text{m}^2$

Flächengleichheit

Von Figuren, für die folgendes zutrifft, kann man sagen, daß sie flächengleich sind.		
 Die Figuren sind kongruent.	 Die Figuren können in paarweise zueinander kongruente Teilflächen zerlegt werden.	 Die Figuren lassen sich durch paarweise zueinander kongruente Teilflächen zu kongruenten Flächen ergänzen.

D 10

Umfang von Vielecken

Der Umfang eines Vielecks ergibt sich aus der Summe der einzelnen Seitenlängen.

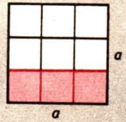
↗ Vielecke, Seite 193
↗ Flächeninhalt des unregelmäßigen Vielecks, Seite 233

Flächeninhalt von Quadrat und Rechteck

Die Herleitung der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von Quadrat und Rechteck kann unter gewissen Einschränkungen, die hier nicht aufgeführt werden, folgendermaßen erfolgen:
Es werden diese Figuren vollständig durch Einheitsquadrate ausgelegt, so daß man von jeweils a Streifen mit b Einheitsquadraten sprechen kann.

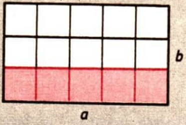
Quadrat

$A = a^2$
$u = 4a$



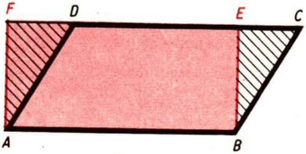
Rechteck

$A = a \cdot b$
$u = 2(a + b)$



↗ Quadrat, Seite 189; Rechteck, Seite 188

Flächeninhalt des Parallelogramms

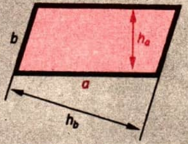


Im Parallelogramm *ABCD* fällen wir von *A* und *B* die Lote auf die Gerade *CD* und bezeichnen die Fußpunkte mit *F* bzw. *E*. Nur der Punkt *E* liege zwischen den Punkten *C* und *D*.
Die Flächen *ABCD* und *ABEF* haben die Teilfläche *ABED* gemeinsam:
Die Teilflächen *BCE* und *ADF* sind kongruent. Die beiden Flächen *ABCD* und *ABEF* sind also flächengleich. (Bei anderer Lage der Lote verläuft diese Überlegung entsprechend.) Daraus folgt: Jedes Parallelogramm ist flächengleich einem Rechteck, das als Seiten eine Seite und die zugehörige Höhe des Parallelogramms hat.

Parallelogramm

$A = g \cdot h_g$
$u = 2(a + b)$
a oder b ist Grundseite: g
h_a bzw. h_b ist zugehörige Höhe: h_g

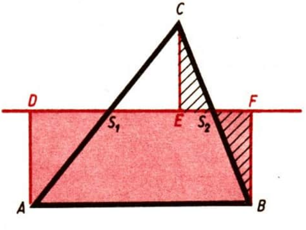
$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$



Aus $A = g \cdot h_g$ ergibt sich:
Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen Höhen haben gleiche Flächeninhalte

↗ Parallelogramm, Seite 184
↗ Lot, Seite 142

Flächeninhalt des Dreiecks



Im Dreieck ABC fällen wir von A, B und C die Lote auf die Parallele zur Geraden AB durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ und bezeichnen die Fußpunkte der Lote mit D, E und F. Die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ seien S_1 bzw. S_2.
Der Punkt E liege zwischen den Punkten S_1 und S_2, die ihrerseits zwischen den Punkten D und F liegen mögen.
Das Dreieck und das Rechteck haben die Teilfläche ABS_2S_1 gemeinsam. Aus $\triangle CS_1E \cong \triangle AS_1D$ und $\triangle CS_2E \cong \triangle BS_2F$ ergibt sich dann die Flächengleichheit des Dreiecks und des Rechtecks. (Bei anderer Lage der Lote und der Geraden durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verläuft die Überlegung entsprechend.) Daraus folgt:
Jedes Dreieck ist flächengleich einem Rechteck mit einer Seite und der zugehörigen halben Höhe des Dreiecks als Rechteckseiten.

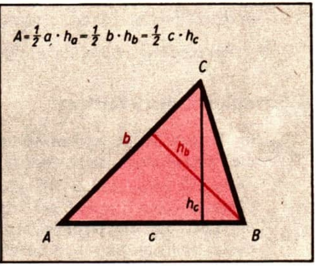
Dreieck

$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$

$u = a + b + c$

a oder b oder c ist Grundseite: g

h_a bzw. h_b bzw. h_c ist zugehörige Höhe: h_g



Aus $A = \frac{1}{2} g h_g$ ergibt sich:

Dreiecke mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

↗ Dreieck – Dreiecksfläche, Seite 162

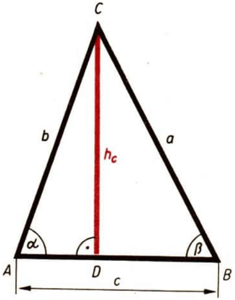
Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann auch mit Hilfe von Winkelfunktionen ermittelt werden.

D 10

Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.	$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ $A = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

↗ Winkelfunktionen, Seite 109

Beweis:



$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ (*)

$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$;

$h_c = b \sin \alpha$ ($\triangle ADC$)

$\sin \beta = \frac{h_c}{a}$;

$h_c = a \sin \beta$ ($\triangle BCD$)

Für h_c in (*) eingesetzt:

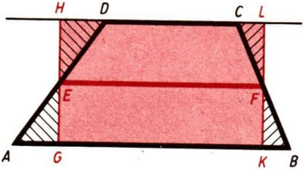
$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ und

$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta$.

Die dritte Gleichung erhält man bei Verwendung von h_a oder h_b. Der Beweis für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke verläuft wie bei den entsprechenden Fällen im Beweis des Sinussatzes.

↗ Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken – Sinussatz, Seite 120

Flächeninhalt des Trapezes



Im Trapez *ABCD*, in dem $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die *Grundseiten* sein mögen und $\overline{AB} > \overline{CD}$ gelte, fällen wir von den Mittelpunkten *E* bzw. *F* der Schenkel die Lote auf die Grundseiten bzw. deren Verlängerung und bezeichnen die Fußpunkte mit *G* und *H* bzw. *K* und *L*.

Die Flächen *ABCD* und *GKLH* haben die Teilfläche *GKFCDE* gemeinsam. Aus $\triangle AGE \cong \triangle DHE$ und $\triangle BKF \cong \triangle CLF$ ergibt sich dann die Flächengleichheit der Trapez- und der Rechtecksfläche. Daraus folgt:

Jedes Trapez ist flächengleich einem Rechteck mit der Mittellinie und der Höhe des Trapezes als Rechtecksseiten.

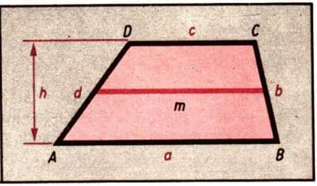
Die Länge der Mittellinie *m* in einem Trapez ist gleich der halben Summe aus den Längen der Grundseiten.

Trapez

$A = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$

$u = a + b + c + d$

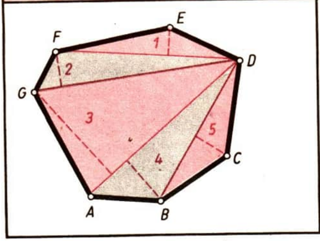
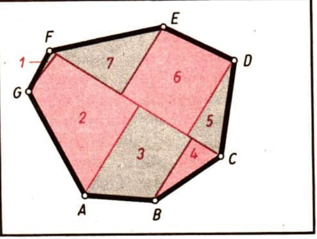
a und c sind Grundseiten,
h ist Höhe im Trapez.



Aus $A = m \cdot h$ ergibt sich:
Trapeze mit gleich langen Mittellinien und gleich langen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

↗ Trapeze, Seite 180

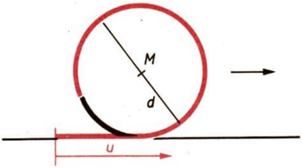
Flächeninhalt des unregelmäßigen Vielecks

Dreiecksmethode	Trapezmethode
	
$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$,	$u = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

Umfang des Kreises

Folgende Überlegung führt zur Vermutung, daß die Umfänge von Kreisen zu den zugehörigen Kreisdurchmessern proportional sind:

1. Man mißt bei verschiedenen Kreisscheiben (Pappe) mit unterschiedlichen Durchmessern $d_1, d_2, \ldots, d_n$ jeweils den Umfang durch Abrollen.
2. Man berechnet jeweils den Quotienten $\frac{u_1}{d_1}, \frac{u_2}{d_2}, \ldots, \frac{u_n}{d_n}$.
3. Es ergibt sich annähernd stets dieselbe Zahl k:



$$\frac{u}{d} = k$$

$$u = k \cdot d.$$

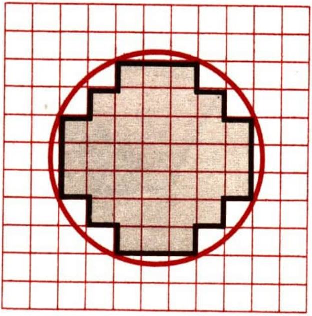
Man kann mit Mitteln, die bis zur Klasse 10 nicht erarbeitet werden, nachweisen, daß diese Beziehung für alle Kreise gilt und daß sich als Proportionalitätsfaktor eine irrationale Zahl, die mit π bezeichnet wird, ergibt:

$\boxed{u = \pi \cdot d}$ bzw. $\boxed{u = 2\pi \cdot r}$

In Berechnungen wird für π näherungsweise mit 3,14 oder $\frac{22}{7}$ gerechnet.

↗ Zueinander proportionale Zahlenfolgen, Seite 82
↗ Reelle Zahlen, Seite 51, (Irrationalzahl)
↗ Die Zahl π in Taf, 3. Umschlagseite
↗ Kreis, Seite 194

Flächeninhalt des Kreises



Folgende Überlegung führt zur Vermutung, daß die Flächeninhalte von Kreisen zu den Quadraten der zugehörigen Radien proportional sind:

1. Man legt die Flächen verschiedener Kreise mit unterschiedlichen Radien $r_1, r_2, \ldots, r_n$ mit Einheitsquadraten aus und bildet die Summe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Einheitsquadrate. Je kleiner man dabei die Einheitsquadrate wählt, desto mehr nähert man sich bei der Summenbildung dem Flächeninhalt des Kreises an, ohne ihn jedoch jemals zu erreichen.
2. Man berechnet jeweils den Quotienten
$$\frac{A_1}{r_1^2}, \frac{A_2}{r_2^2}, \ldots, \frac{A_n}{r_n^2}.$$
3. Es ergibt sich annähernd stets dieselbe Zahl k:

$$\frac{A}{r^2} = k$$

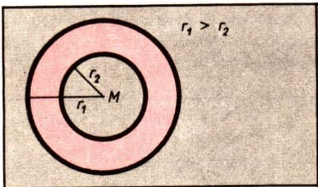
$$A = k \cdot r^2.$$

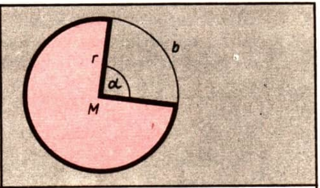
Man kann mit mathematischen Mitteln, die bis zur Klasse 10 nicht erarbeitet werden, nachweisen, daß diese Beziehung für alle Kreise gilt und daß sich als Proportionalitätsfaktor bei unbegrenzter Annäherung der Summen von Einheitsquadraten an den Flächeninhalt des Kreises die Zahl π ergibt (↗ Umfang des Kreises):

$$\boxed{A = \pi r^2}$$ bzw. $$\boxed{A = \frac{\pi}{4} d^2}$$

↗ Zueinander proportionale Zahlenfolgen, Seite 82

Kreisring, Kreisausschnitt





Kreisring

$A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$, falls $r_1 > r_2$

$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$, falls $d_1 > d_2$

Kreisausschnitt

$A = \frac{br}{2} = \frac{\alpha \cdot \pi}{360°} r^2$

$u = 2r + b$

$b = r \cdot \operatorname{arc} \alpha = r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$

Kreisbogen

Der Kreisbogen wird mit Hilfe der Verhältnisgleichung

$$\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$$

berechnet.

↗ Verhältnisgleichungen, Seite 84

D 11 Körperberechnungen

Geometrische Körper

Als geometrischer Körper wird eine Menge von Punkten bezeichnet, die allseitig von einer Fläche (von einer einzigen Fläche, z. B. bei der Kugel, oder von mehreren zusammenhängenden Flächenstücken, z. B. beim Würfel) begrenzt ist.

Ein geometrischer Körper ist ein abstraktes Gebilde. Es wird von bestimmten Eigenschaften der realen Körper, z. B. der stofflichen Zusammensetzung,

der Masse, der Farbe, der Oberflächenbeschaffenheit, aber auch von unwesentlichen Einzelheiten der Form abgesehen.
Bei geometrischen Körpern ist zwischen der begrenzenden Fläche und dem Körper selbst zu unterscheiden, z. B. *Kugelfläche* oder *Kugelkörper*.
Im folgenden soll, wenn nur die Bezeichnung „Kugel" angeführt wird, stets die Kugelfläche gemeint sein.
Bei der Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhalts geometrischer Körper bedeuten die Variablen in der Regel Größen. Die Formeln zur Körperberechnung können ebenso wie die Formeln zur Flächenberechnung als Gleichungen von Funktionen aufgefaßt werden. Dabei haben die Variablen in den Gleichungen folgende Bedeutung:

Seiten	$a, b, c, \ldots$	Grundflächeninhalt	A_G
Radius	r	Mantelinhalt	A_M
Durchmesser	d	Oberflächeninhalt	A_o
Körperhöhe	h	Volumen	V

↗ Terme, Variablen, Seite 65

Einheiten des Rauminhalts

Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Kubikmillimeter	mm³	1 mm³
Kubikzentimeter	cm³	1 cm³ = 1000 mm³; 10 cm³ = 1 cl
Kubikdezimeter	dm³	1 dm³ = 1000 cm³; 1 dm³ = 1 l
Kubikmeter	m³	1 m³ = 1000 dm³ = 1 000 000 cm³
Milliliter	ml	1 ml = 1 cm³
Zentiliter	cl	1 cl = 10 ml; 1cl = 10 cm³
Liter	l	1 l = 100 cl = 1000 ml
		1 l = 1 dm³
Hektoliter	hl	1 hl = 100 l

↗ Tabelle physikalischer Größen und Einheiten, Ph i Ü, Seite 15

Würfel und Quader

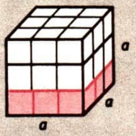
Die Herleitung der Formel zur Berechnung des Volumens von Würfel und Quader kann unter gewissen Einschränkungen, die hier nicht aufgeführt werden, folgendermaßen erfolgen:
Der Würfel bzw. Quader wird durch Einheitswürfel geeigneter Kantenlänge vollständig ausgelegt, indem zunächst Stangen und dann Schichten gebildet werden.
Die Oberfläche von Würfel und Quader läßt sich in eine Ebene abwickeln.

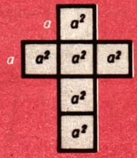
Würfel

$V = a^3$

$A_O = 6a^2$

a Schichten zu je
a Stangen mit je
a Einheitswürfeln



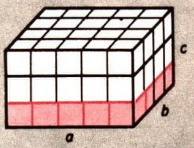


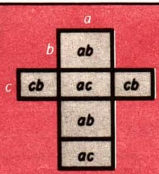
Quader

$V = a \cdot b \cdot c$

$A_O = 2(ab + ac + bc)$

c Schichten zu je
b Stangen mit je
a Einheitswürfeln

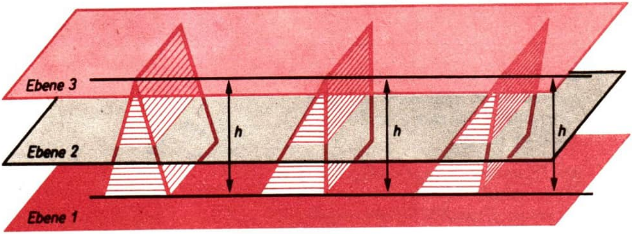




Der Würfel ist ein spezieller Quader.

Volumenvergleiche

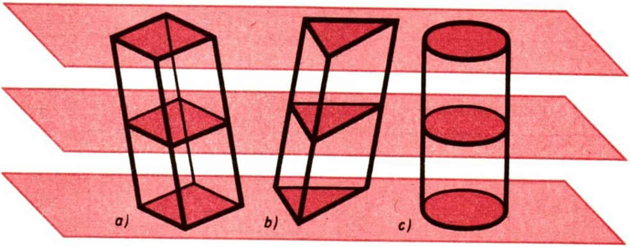
SATZ DES CAVALIERI:
Wenn für Körper mit gleich langen Höhen und gleichen Grundflächeninhalten gilt, daß parallel zur Grundflächenebene in beliebigen, aber jeweils gleichen Abständen von dieser geführte Schnitte stets zu Schnittflächen mit gleich großen Flächeninhalten führen, so haben diese Körper gleiche Volumina.



	Körper 1		Körper 2		Körper 3
Ebene 1	A_{G_1}	=	A_{G_2}	=	A_{G_3}
Ebene 2	A_{S_1}	=	A_{S_2}	=	A_{S_3}
	h_1	=	h_2	=	h_3

➡ D 11

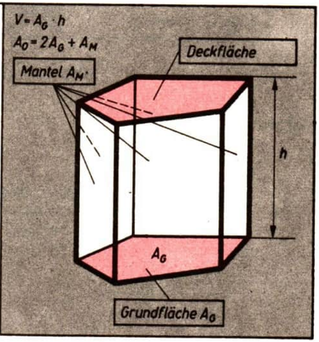
Der Satz des *Cavalieri* kann zur Ermittlung des Volumens beliebiger Körper verwendet werden. Der Satz wird hier nicht bewiesen.



Prisma

Ein Prisma wird von folgenden Flächen begrenzt:
(1) von zwei kongruenten *n*-Ecken, die in parallelen Ebenen liegen,
und
(2) von *n* Parallelogrammen.

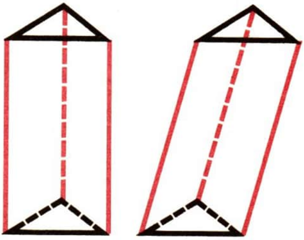
Die kongruenten *n*-Ecke stellen die Grund- und Deckfläche dar. Die *n* Parallelogramme (Seitenflächen) bilden den Mantel.



Ein Prisma heißt *gerade*, wenn alle Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen, andernfalls heißt es *schief*.

Ein Prisma heißt regelmäßig, wenn
(1) es gerade ist und
(2) seine Grundfläche ein regelmäßiges *n*-Eck ist.

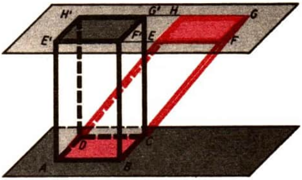
Der Quader ist ein spezielles gerades Prisma.



↗ Vielecke (*n*-Eck), Seite 193
↗ Parallelogramm, Seite 184

Schiefes Prisma

Für die Berechnung des Oberflächeninhalts und des Volumens schiefer Prismen gelten die unter dem Stichwort „Prisma" aufgeführten Formeln.
Bei der Berechnung der Mantelfläche ist zu beachten, daß es sich beim n-seitigen schiefen Prisma um n Parallelogramme handelt, von denen unter Umständen nur einige Rechtecke sind.
Der Nachweis, daß die Formel $V = A_G \cdot h$ auch für das schiefe Prisma gilt, erfolgt mit Hilfe des Satzes von *Cavalieri*:
Zu jedem schiefen Prisma mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h gibt es ein gerades Prisma mit derselben Höhenlänge und demselben Grundflächeninhalt. Da man zeigen kann, daß das schiefe Prisma und das gerade Prisma in gleichen Abständen von den Grundflächen inhaltsgleiche Schnittflächen (parallel zu den Grundflächenebenen) besitzen, haben sie nach dem Satz des *Cavalieri* gleiche Volumina.



Somit gilt für das Volumen des schiefen Prismas dieselbe Formel wie für das Volumen des geraden Prismas.

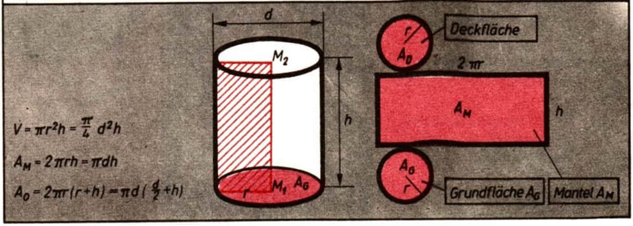
↗ Volumenvergleiche – Satz des **Cavalieri**, Seite 237

Kreiszylinder

Bei der Rotation eines Rechtecks um eine Seite als Achse wird ein gerader Kreiszylinder beschrieben.

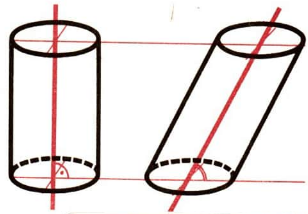
Ein Zylinder wird begrenzt
(1) von zwei kongruenten Kreisflächen, die in zueinander parallelen Ebenen liegen und
(2) von einer gekrümmten Fläche, die, abgewickelt in die Ebene, ein Rechteck darstellt.

↗ Kongruenz, Seite 151
↗ Kreis – Kreisfläche, Seite 194

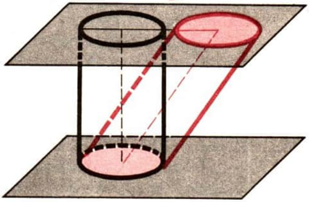


➡ D 11

Die Gerade durch die Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche heißt *Achse des Kreiszylinders*.
Ein Kreiszylinder heißt *gerade*, wenn seine Achse senkrecht auf der Grundfläche steht, andernfalls heißt er *schief*.



Schiefer Kreiszylinder



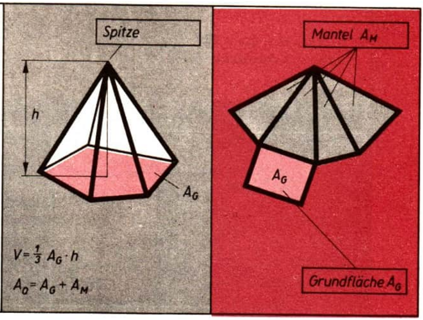
Für die Berechnung des Volumens schiefer Kreiszylinder gilt die unter dem Stichwort „Kreiszylinder" aufgeführte Formel $V = \pi r^2 h$. Der Nachweis hierfür erfolgt mit Hilfe des Satzes von *Cavalieri*:
Zu jedem schiefen Kreiszylinder mit dem Grundflächeninhalt πr^2 und der Höhenlänge h gibt es einen geraden Kreiszylinder mit derselben Höhenlänge und demselben Grundflächeninhalt. Man kann zeigen, daß der schiefe Kreiszylinder und der gerade Kreiszylinder in gleichen Abständen von den Grundflächen inhaltsgleiche Schnittflächen (parallel zu den Grundflächenebenen) besitzen. Nach dem Satz des *Cavalieri* haben sie damit gleiche Volumina.
Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiszylinder, da der Mantel eines schiefen Kreiszylinders eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen läßt.

↗ Volumenvergleiche – Satz des *Cavalieri*, Seite 237

Pyramide

Eine Pyramide wird von folgenden Flächen begrenzt:
(1) von einem n-Eck und
(2) von n Dreiecken.

Das n-Eck stellt die Grundfläche der Pyramide dar.
Die n Dreiecke (Seitenflächen) bilden den Mantel der Pyramide.



Die Oberfläche der Pyramide läßt sich in eine Ebene abwickeln.

Eine Pyramide heißt *gerade*, wenn
(1) ihre Grundfläche einen Mittelpunkt hat und wenn
(2) ihre Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt.
Pyramiden, die nicht gerade sind, heißen *schief*.
Eine Pyramide heißt *regelmäßig*, wenn sie
(1) gerade ist und wenn
(2) ihre Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

Volumen der Pyramide

Die Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

wird folgendermaßen hergeleitet:

Erster Gedanke: Man beschränkt sich vorerst auf dreiseitige Pyramiden.

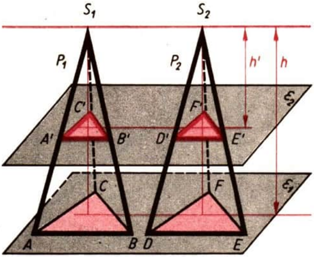
Zweiter Gedanke: Man kann zeigen, daß Pyramiden mit gleichen Grundflächeninhalten und gleich langen Höhen gleiche Volumina haben.

Dritter Gedanke: Jedes dreiseitige Prisma mit dem Volumen $V = A_G \cdot h$ kann in drei volumengleiche Pyramiden zerlegt werden, so daß jede dieser Pyramiden das Volumen $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ hat.

Vierter Gedanke: Bei einer mehrseitigen Pyramide kann durch geeignete Schnitte eine Zerlegung in dreiseitige Pyramiden erfolgen. Das Volumen der mehrseitigen Pyramide kann als Summe der Volumina der dreiseitigen Pyramiden ermittelt werden.

Zum zweiten Gedanken:
Für die beiden Pyramiden P_1 und P_2 im nebenstehenden Bild soll gemäß Voraussetzung gelten:

(1) $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle DEF}$
(2) $h_1 = h_2 = h$
(3) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



Man darf den Strahlensatz anwenden und erhält für P_1:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AS_1}}{\overline{A'S_1}} \quad \text{sowie} \quad \frac{\overline{AS_1}}{\overline{A'S_1}} = \frac{h}{h'}$$

und daraus $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{h}{h'}$. Entsprechend findet man

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{h}{h'} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{h}{h'}.$$

↗ Strahlensatz, Seite 208

Demnach sind die Dreiecke ähnlich. Auf Grund des Satzes über die Flächeninhalte ähnlicher Figuren gilt für P_1:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

↗ Taf Seite 17: Ähnlichkeit zweier Vielecke

In entsprechender Weise ergibt sich für P_2:

$$\frac{A_{\triangle DEF}}{A_{\triangle D'E'F'}} = \frac{h^2}{h'^2}$$

und damit

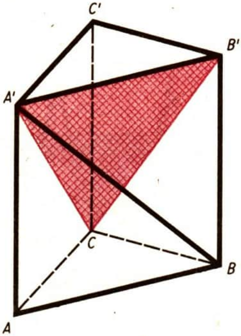
$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle A'B'C'}} = \frac{A_{\triangle DEF}}{A_{\triangle D'E'F'}}.$$

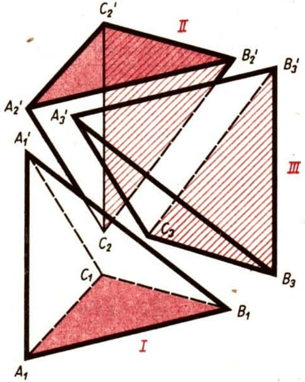
Da laut Voraussetzung (1) $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle DEF}$ gilt, ergibt sich $A_{\triangle A'B'C'} = A_{\triangle D'E'F'}$. Damit sind für die Pyramiden die Voraussetzungen des Satzes von CAVALIERI erfüllt.

↗ Volumenvergleiche – Satz des CAVALIERI, Seite 237

Zum dritten Gedanken:
Das Prisma $ABCA'B'C'$ ist in die Pyramiden
I $A_1'A_1B_1C_1$; II $C_2A_2'B_2'C_2'$; III $A_3'C_3B_3B_3'$
zerlegt worden.

a) Es gilt $V_{\text{I}} = V_{\text{II}}$, denn die beiden Pyramiden haben kongruente Grundflächen ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) und gleich lange Höhen ($\overline{AA'} = \overline{CC'}$).





b) Es gilt $V_{\text{II}} = V_{\text{III}}$, denn die beiden Pyramiden haben kongruente Grundflächen ($\triangle CBB' \cong \triangle CB'C'$) und gleich lange Höhen. Beide Pyramiden haben nämlich die gemeinsame Spitze A', so daß die Höhe durch die Strecke $\overline{A'C'}$ angegeben werden kann.

c) Aus a) und b) folgt $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{III}}$, und weiter $V_{\mathrm{Prisma}} = 3V_{\mathrm{I}}$ bzw.
$V_1 = \frac{1}{3} V_{\mathrm{Prisma}}$.

Zum vierten Gedanken:
Ist eine beliebige n-seitige Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h gegeben, so läßt sie sich in k $(k = n - 2)$ dreiseitige Pyramiden mit gleich langen Höhen und den Grundflächeninhalten $A_1, \ldots, A_k$ zerlegen.

Wegen

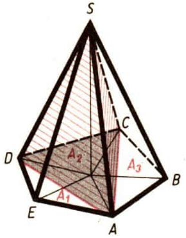
$$V_{\mathrm{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_1 h + \frac{1}{3} A_2 h + \ldots + \frac{1}{3} A_k h = \frac{1}{3} (A_1 + \ldots + A_k)\, h$$

und

$$A_1 + \ldots + A_k = A_G$$

ergibt sich

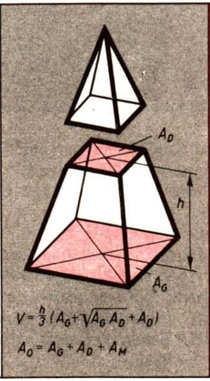
$$V_{\mathrm{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G h.$$

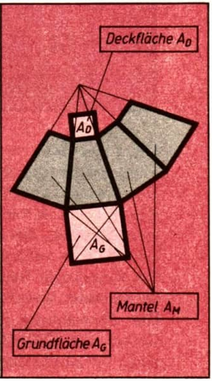


Pyramidenstumpf

Ein zur Grundflächenebene paralleler Schnitt durch eine Pyramide erzeugt einen *Pyramidenstumpf* und eine Restpyramide.

Ein Pyramidenstumpf wird begrenzt
(1) von zwei ähnlichen, aber nicht kongruenten n-Ecken, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, und
(2) von n Trapezen.





↗ Ähnliche Figuren, Seite 220

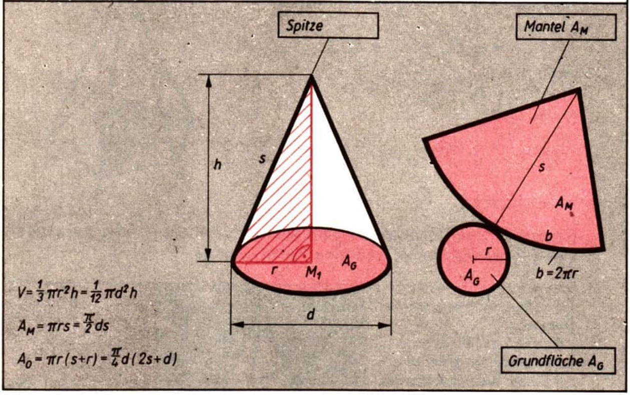
Die ähnlichen Vielecke, die in parallelen Ebenen liegen, werden *Grundfläche* bzw. *Deckfläche* genannt. Die Trapeze sind die einzelnen *Seitenflächen* des Pyramidenstumpfes. Die Gesamtheit der Seitenflächen bildet die *Mantelfläche* (den *Mantel*) des Pyramidenstumpfes.

➡ D 11

Kreiskegel

Bei der Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete als Achse wird ein gerader Kreiskegel beschrieben.
Ein Kreiskegel wird begrenzt
(1) von einer Kreisfläche
und
(2) von einer gekrümmten Fläche, die, abgewickelt in die Ebene, einen Kreisausschnitt darstellt.

↗ Kreis – Kreisfläche, Seite 194



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h$$

$$A_M = \pi r s = \frac{\pi}{2} d s$$

$$A_O = \pi r(s+r) = \frac{\pi}{4} d(2s+d)$$

Die Kreisfläche wird *Grundfläche* genannt. Die gekrümmte Fläche heißt die *Mantelfläche* (der *Mantel*) des Kreiskegels.
Die Gerade durch den Mittelpunkt der Grundfläche und die Spitze des Kegels heißt *Achse*.
Jede Strecke, die die Spitze mit einem Punkt der Begrenzungslinie der Grundfläche verbindet, heißt *Mantellinie des Kreiskegels*.
Ein Kreiskegel heißt gerade, wenn seine Achse senkrecht auf der Grundfläche steht, anderenfalls heißt er schief.
Die Berechnung des Volumens jedes geraden Kreiskegels läßt sich auf Grund des CAVALIERIschen Prinzips nach der Formel für das Volumen einer Pyramide durchführen.

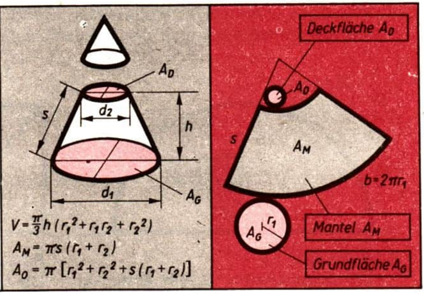
↗ Volumenvergleiche – Satz des CAVALIERI, Seite 237

Kreiskegelstumpf

Ein zur Grundflächenebene paralleler Schnitt durch einen geraden Kreiskegel erzeugt einen *Kreiskegelstumpf* und einen Restkegel.

Ein Kegelstumpf wird begrenzt
(1) von zwei Kreisflächen verschiedenen Durchmessers, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, und
(2) von einer in die Ebene abwickelbaren Fläche.

↗ Kreis–Kreisfläche, Seite 194

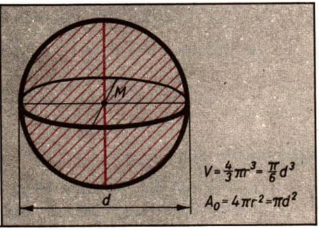


Die Kreisflächen, die in parallelen Ebenen liegen, werden *Grundfläche* bzw. *Deckfläche*, die gekrümmte Fläche wird *Mantelfläche* (*Mantel*) des Kreiskegelstumpfes genannt. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grundfläche und der Deckfläche heißt *Achse* des Kreiskegelstumpfes. Jede Strecke, die einen Punkt der Begrenzungslinie der Deckfläche mit einem Punkt der Begrenzungslinie der Grundfläche verbindet, heißt *Mantellinie des Kreiskegelstumpfes*.

Kugel

Bei der Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser als Achse wird eine Kugel beschrieben.

↗ Kreis–Kreisfläche, Seite 194



Alle Punkte auf der Kugel haben vom Mittelpunkt *M* den gleichen Abstand *r*. Alle Punkte, die vom Mittelpunkt *M* den Abstand *r* haben, liegen auf der Kugel.

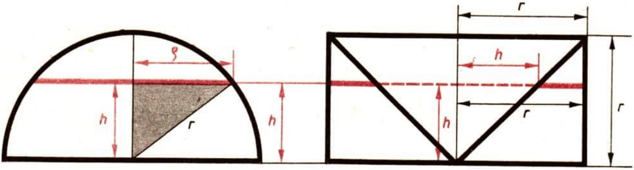
Volumen der Kugel

Die Berechnung des Volumens einer Kugel wird auf die Berechnung der Volumina eines entsprechenden Kreiszylinders und Kreiskegels zurückgeführt; denn mit dem Satz des CAVALIERI kann bewiesen werden, daß das Volumen einer Halbkugel gleich dem Volumen eines Kreiszylinders verringert um das Volumen eines Kreiskegels ist.

↗ Kreiszylinder, Seite 239; ↗ Kreiskegel, Seite 244

D 11

Wir legen in beliebiger Höhe einen Schnitt parallel zur Grundflächenebene und berechnen den Inhalt der Schnittflächen.



Halbkugel:
Die Schnittfläche ist ein Kreis mit dem Radius ϱ.

$\varrho^2 = r^2 - h^2$
$A_1 = \pi\varrho^2$
$= \pi(r^2 - h^2)$

Restkörper:
Die Schnittfläche ist ein Kreisring mit den Radien
$r_i = h$ und $r_a = r$.
$A_2 = r_a^2\pi - r_i^2\pi$
$A_2 = \pi(r^2 - h^2)$

Die Schnittflächen beider Körper sind also flächengleich. Damit erfüllen die Halbkugel und der Restkörper alle Voraussetzungen des Satzes von CAVALIERI. Folglich haben sie gleiche Volumen. Da das Volumen des Restkörpers

$$V_R = V_{Zyl.} - V_{Kegel} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

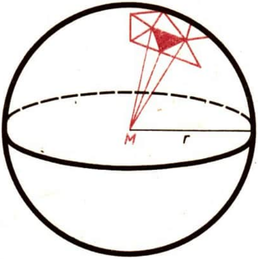
beträgt, folgt für das Volumen der Halbkugel ebenfalls $V_H = \frac{2}{3}\pi r^3$ und für das Volumen der Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

↗ Volumenvergleiche – Satz des CAVALIERI, Seite 237

Oberfläche der Kugel

Die Formel für die Oberfläche einer Kugel läßt sich nicht mit elementaren Mitteln beweisen. Deshalb soll die Herleitung der Formel hier nur grob umrissen werden.

Man denkt sich der Kugel einen Körper einbeschrieben, der von n Dreiecksflächen begrenzt wird. Dabei soll der Fußpunkt eines jeden Lotes vom Kugelmittelpunkt auf eine Dreiecksfläche jeweils ins Innere dieser Dreiecksfläche fallen. Die Dreiecksflächen bilden die Grundflächen von n Pyramiden, deren Spitzen sämtlich im Mittelpunkt der Kugel liegen. Für das Volumen V_n des einbeschriebenen Körpers gilt:



$$V_n = \frac{1}{3}A_1h_1 + \frac{1}{3}A_2h_2 + \dots + \frac{1}{3}A_nh_n.$$

Bei genügend großer Anzahl der Pyramiden und genügend kleinem Inhalt der größten ihrer Grundflächen unterscheidet sich die kürzeste der Pyramidenhöhen beliebig wenig vom Radius r der Kugel. Deshalb gilt:

$$V_n \approx \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \dots + \frac{1}{3}A_nr$$

$$V_n \approx \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

$$\frac{3V_n}{r} \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Bei dieser Annäherung unterscheidet sich V_n beliebig wenig von $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$, so daß gilt:

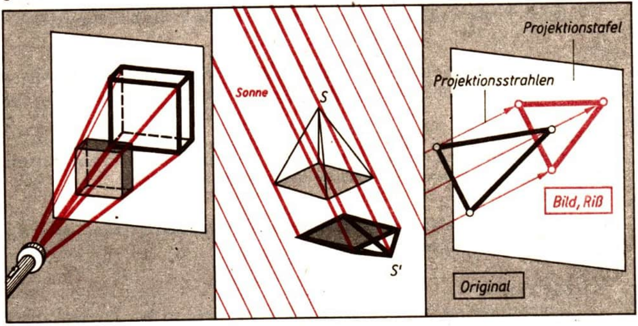
$$A_1 + A_2 + \dots + A_n \approx \frac{3V_n}{r} \approx \frac{3}{r}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2.$$

Außerdem unterscheidet sich die Summe $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ beliebig wenig von A_O: $A_1 + A_2 + \dots + A_n \approx A_O$.
Daraus schließen wir, daß $A_O = 4\pi r^2$ ist.

D 12 Darstellende Geometrie

Projizieren

„Projizieren" heißt das Abbildungsverfahren, bei dem man sich das Bild des Originals als Schattenwurf durch Lichtstrahlen entstanden denkt. Die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten nennt man *Projektionsgeraden.*



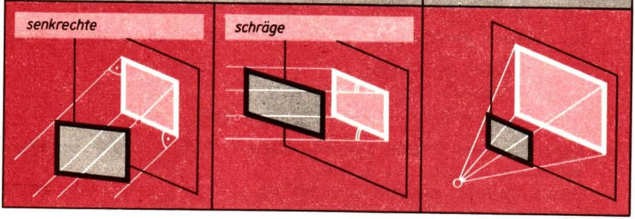
↗ Geometrische Abbildungen, Seite 143

➡ D 12

Projektionsarten

Je nach der Lage der Projektionsgeraden zueinander und zur Projektionstafel unterscheidet man zwischen der *Parallelprojektion* (senkrechte und schräge Parallelprojektion) und der *Zentralprojektion*.

Parallelprojektion	Zentralprojektion
Die Projektionsgeraden liegen alle parallel zueinander.	**Die Projektionsgeraden gehen alle durch einen Punkt.**



Die senkrechte Parallelprojektion wird auch *senkrechte Projektion* genannt. Die senkrechte Projektion wird als *Eintafelprojektion* und *Zweitafelprojektion* angewendet.

Parallelprojektion

Für die senkrechte und schräge Parallelprojektion gelten die folgenden Sätze:

▶ **SATZ (1):**
Jedem Punkt als Original wird eindeutig ein Punkt als Bild zugeordnet.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht; denn jedem Bildpunkt können alle Punkte der jeweiligen Projektionsgeraden als Original zugeordnet werden.

▶ **SATZ (2):**
Jeder Geraden als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsgeraden entweder ein Punkt oder eine Gerade als Bild zugeordnet.

Liegt die Originalgerade parallel zu den Projektionsgeraden, so hat sie als Bild einen Punkt, sonst eine Gerade.

▶ **SATZ (3):**
Jeder Strecke als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsgeraden entweder ein Punkt oder eine Strecke als Bild zugeordnet.

Liegt die Originalstrecke parallel zu den Projektionsgeraden, so hat sie als Bild einen Punkt; sonst eine Strecke.

SATZ (4):
Parallelen Geraden als Original werden je nach ihrer Lage zu den Projektionsgeraden zwei Punkte, eine einzige Gerade oder parallele Geraden als Bild zugeordnet.

Liegen die Originale parallel zu den Projektionsgeraden, so haben sie zwei Punkte als Bilder; sonst eine einzige Gerade oder parallele Geraden, je nachdem, ob die durch die Originale aufgespannte Ebene parallel zu den Projektionsgeraden liegt oder nicht.

SATZ (5):
Jeder ebenen Figur als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsgeraden eine Strecke oder eine ebene Figur als Bild zugeordnet.

Liegt die Ebene des Originals parallel zu den Projektionsgeraden, so hat die ebene Figur als Bild eine Stecke, sonst eine ebene Figur.

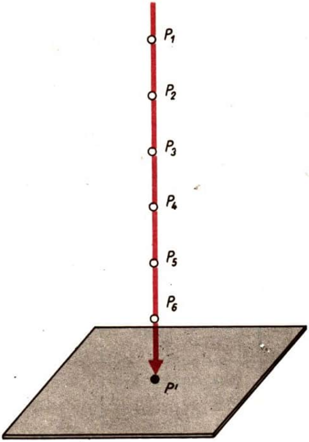
SATZ (6):
Jedem Körper als Original wird eine ebene Figur als Bild zugeordnet.

Senkrechte Eintafelprojektion

Die Projektionsgeraden liegen senkrecht zur Bildebene. Man ordnet jedem Raumpunkt P einen Bildpunkt P' in der Bildebene zu, indem man von P aus das Lot auf die Bildebene fällt. Der Fußpunkt des Lotes ist der Bildpunkt P'. Das Bild nennt man auch *Riß*.

↗ Lot, Seite 142

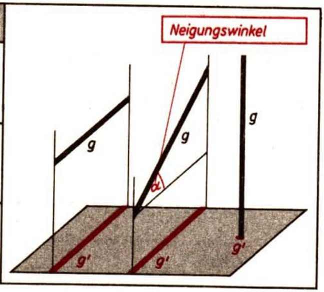
Jedem Punkt des Raumes P ist ein Bildpunkt P' zugeordnet – umgekehrt sind jedem Bildpunkt P' unendlich viele Originalpunkte zugeordnet [↗ Satz (1)].



➡ D 12

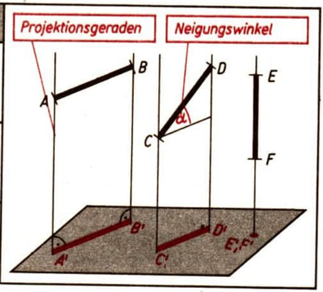
1 Abbildung von Geraden [↗ Satz (2)]

Original	Bild
parallel zur Bildebene	Gerade
geneigt zur Bildebene $0° < \alpha < 90°$	Gerade
senkrecht zur Bildebene	Punkt



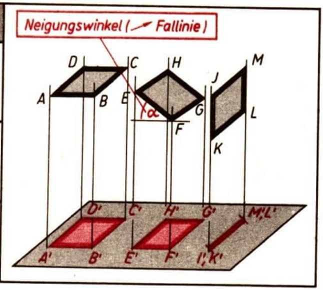
2 Abbildung von Strecken [↗ Satz (3)]

Original	Bild
parallel zur Bildebene	Strecke – kongruent zum Original
geneigt zur Bildebene $0° < \alpha < 90°$	Strecke – verkürzt gegenüber dem Original
senkrecht zur Bildebene	Punkt

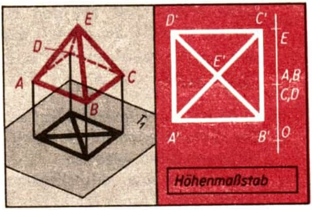


3 Abbildung ebener Figuren [↗ Satz (5)]

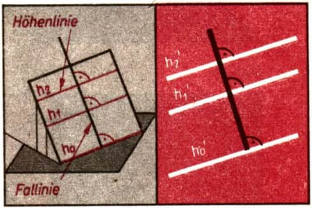
Original	Bild
parallel zur Bildebene	kongruente Figur
geneigt zur Bildebene $0° < \alpha < 90°$	verkleinerte Figur
senkrecht zur Bildebene	Strecke



Höhenmaßstab, Neigungswinkel

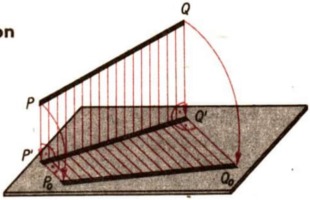


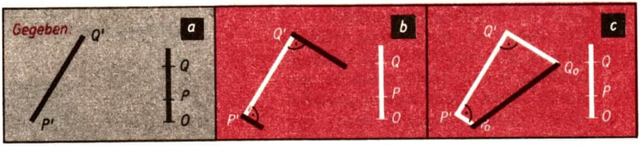
Die senkrechte Eintafelprojektion ist nicht eineindeutig.
Indem man dem Riß einen *Höhenmaßstab* beifügt, aus dem die Höhe eines jeden Originalpunktes über der Bildebene hervorgeht, wird Eineindeutigkeit erzielt. Den Punkten der Bildebene wird die Höhe 0 zugeordnet.
Geraden, die weder parallel noch senkrecht zur Bildebene liegen, schneiden die Bildebene in einem *Neigungswinkel* φ ($0° < \varphi < 90°$). *Ebenen* können durch Höhenlinien mit Höhenmaßstab dargestellt werden. Als *Höhenlinie* bezeichnet man eine Gerade, auf der nur Punkte gleicher Höhe über der Bildebene liegen. Jede Gerade in einer geneigten Ebene, die senkrecht zu den Höhenlinien dieser Ebene liegt, heißt *Fallinie*. Die Bilder der Höhenlinien einer geneigten Ebene liegen parallel zueinander. Diese Tatsache beruht auf dem Satz:
Zueinander parallele Geraden, die nicht in Projektionsrichtung liegen, haben bei Parallelprojektion zueinander parallele Bilder. Das Bild einer Geraden, die bezüglich einer geneigten Ebene Fallinie ist, verläuft senkrecht zu den Bildern der Höhenlinien dieser Ebene.



Grundaufgaben bei der Eintafelprojektion

a) *Es ist die wahre Länge einer Strecke zu ermitteln.*
Die Strecke wird durch ihren Riß und einen Höhenmaßstab für die beiden Punkte gegeben. Dann kann man das charakteristische Trapez $PP'Q'Q$ in die Bildebene umklappen.

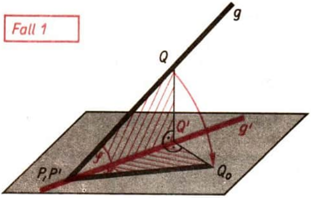


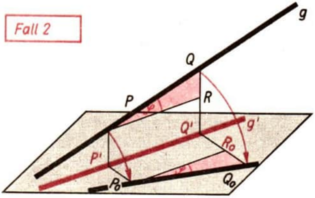


Konstruktion:
Wir errichten in den Punkten P' und Q' die Senkrechten zur Strecke $\overline{P'Q'}$.

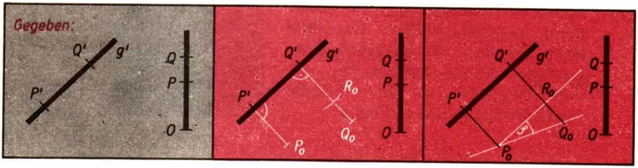
Dann tragen wir auf den entsprechenden Senkrechten die Höhen der Punkte P und Q ab, die wir dem Höhenmaßstab entnehmen. Damit erhalten wir die Punkte P_0 und Q_0 und mit der Verbindungsstrecke $\overline{P_0Q_0}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

b) *Es ist der Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebene zu ermitteln.*
Die Gerade wird durch ihren Riß und den Riß zweier Geradenpunkte mit Höhenmaßstab gegeben.
Dann kann man ein charakteristisches Dreieck (Fall 1) oder ein charakteristisches Trapez (Fall 2) in die Bildebene umklappen.



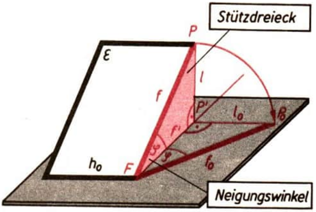


(Fall 2)



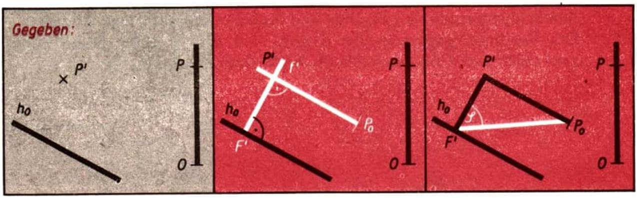
Konstruktion:
Wir errichten in den Punkten P' und Q' die Senkrechten zur Geraden $P'Q'$. Dann tragen wir auf den entsprechenden Senkrechten die Höhen der Punkte P und Q ab.
Wir verbinden nun P_0 mit Q_0 und ziehen durch P_0 die Parallele zu g', die $Q'Q_0$ in R_0 schneidet. Mit dem Winkel $R_0P_0Q_0$ haben wir den gesuchten Neigungswinkel φ gefunden.

c) *Es ist der Neigungswinkel einer Ebene gegen die Bildebene zu ermitteln.*
Die Ebene sei durch eine Höhenlinie h_0 und den Riß eines Ebenenpunktes P mit Höhenmaßstab gegeben. Unter dem Neigungswinkel einer Ebene versteht man den Neigungswinkel, den jede ihrer Falllinien bezüglich der Bildebene besitzt.



Man ermittelt den Neigungswinkel einer Ebene, indem man ein *Stützdreieck* in die Bildebene umklappt.

↗ Höhenmaßstab, Neigungswinkel – Fallinie, Seite 251

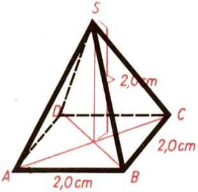


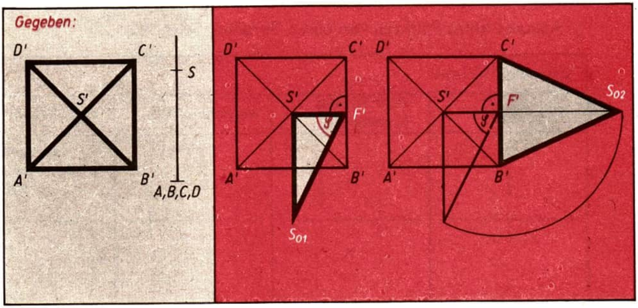
Konstruktion:
Wir fällen von P' das Lot auf die Höhenlinie h_0 und bezeichnen den Lotfußpunkt mit F'. Dann errichten wir die Senkrechte auf dem Lot f' in P' und tragen auf der Senkrechten die Strecke $\overline{OP}$ ab. Wir verbinden F' mit P_0 und erhalten mit dem Winkel $P'F'P_0$ den gesuchten Neigungswinkel.

↗ Lot von einem Punkt auf eine Gerade, Seite 156

Darstellung eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion

Die nebenstehende Pyramide wurde in der folgenden Bildserie in Eintafelprojektion dargestellt. Dann wurden der Neigungswinkel φ einer Seitenfläche, die wahre Länge einer Seitenhöhe und die wahre Größe und Gestalt einer Seitenfläche ermittelt.

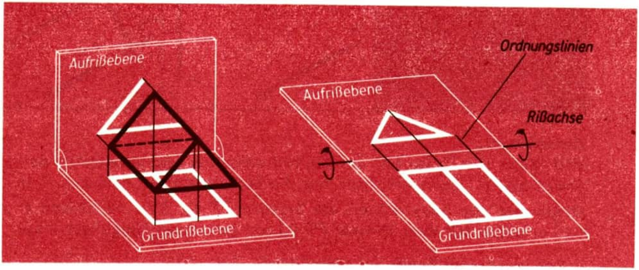




➡ D 12

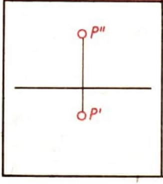
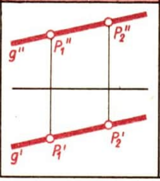
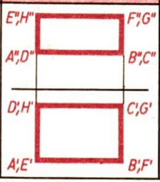
Zweitafelprojektion

Bei der Zweitafelprojektion erfolgt die zeichnerische Darstellung durch senkrechte Parallelprojektion auf zwei Projektionstafeln, die Grund- und Außrißtafel, die senkrecht zueinander angenommen werden.
Die Schnittgerade von Grund- und Aufrißtafel nennt man Rißachse.
Die Verbindungsgerade von Grund- und Aufriß eines jeden Punktes, die senkrecht zur Rißachse verläuft, heißt *Ordnungslinie*.



Haupteigenschaften der Zweitafelprojektion	
1	Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einer Senkrechten zur Rißachse (auf einer Ordnungslinie).
2	Liegen ein Grundrißpunkt und ein Aufrißpunkt nicht auf derselben Senkrechten zur Rißachse, so gehören sie als Bilder nicht dem gleichen Originalpunkt an.
3	Der Abstand des Grundrisses P' von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes P von der Aufrißebene T_2 an.
4	Der Abstand des Aufrisses P'' von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes P von der Grundrißebene T_1 an.

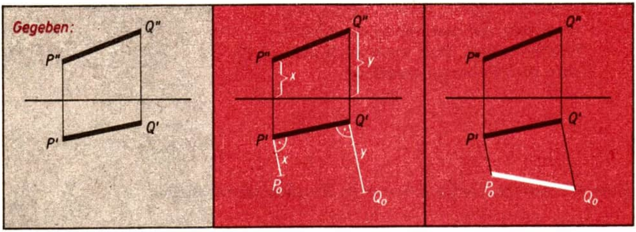
↗ Abstand eines Punktes von einer Geraden, Seite 142

Zweitafelprojektion			
eines Punktes	einer Strecke (Geraden)	eines Quaders	einer Ebene
			

Grundaufgaben bei der Zweitafelprojektion

Es ist die wahre Länge einer Strecke zu ermitteln.
Die Strecke wird durch ihren Grundriß und ihren Aufriß gegeben.
Dann kann man im Grundriß wie im Falle der Eintafelprojektion das charakteristische Trapez in die Grundrißebene umklappen, indem man die Höhen der Endpunkte dem Aufriß entnimmt.

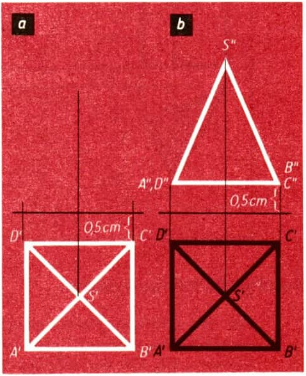
↗ Senkrechte Eintafelprojektion, Seite 249



Konstruktion:
Wir errichten in P' und Q' jeweils die Senkrechten zu $P'Q'$. Aus dem Aufriß entnehmen wir die Strecken x bzw. y und tragen sie von P' bzw. Q' aus ab. Wir ermitteln so die Punkte P_0 bzw. Q_0. Wir verbinden P_0 mit Q_0 und erhalten die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$.
(Weitere Grundaufgaben werden hier nicht angeführt.)

Darstellung eines Körpers in Zweitafelprojektion

Eine quadratische Pyramide mit Grundkanten der Länge 2,0 cm und einer Höhe von 2,2 cm soll in Zweitafelprojektion dargestellt werden. Der Abstand der Grundfläche von der Grund- und der Aufrißebene soll jeweils 0,5 cm betragen.

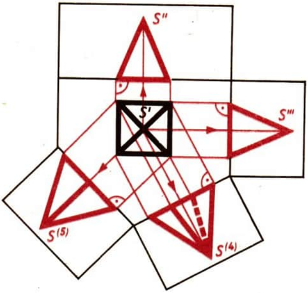


Konstruktion:
Wir zeichnen die Rißachse und den Grundriß der Pyramide im Abstand von 0,5 cm von der Rißachse.
Dann zeichnen wir Ordnungslinien von den Grundrißpunkten aus und erhalten im Abstand der jeweiligen Höhen (0,5 cm bzw. 2,7 cm von der Rißachse entfernt) die Aufrißpunkte.

➡ D 12

Unterschiedliche Anordnung des Aufrisses

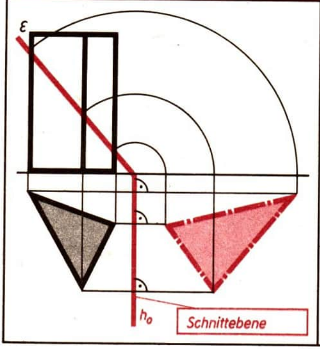
Die Aufrißebene muß nicht notwendig vertikal stehend *hinter* dem Original angenommen werden. Die Lage der Aufrißebene ist beliebig; sie hängt vom Zweck der Darstellung ab. Man kann die Außrißebene so legen, daß eine bestimmte Körperkante, deren wahre Länge man ermitteln will, parallel zu dieser Aufrißebene liegt. Man kann auch mehrere Aufrißebenen anordnen.



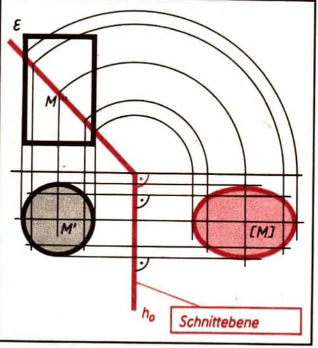
Ebene Schnitte durch Körper in Zweitafelprojektion

Wir beschränken uns hier auf Schnittebenen, die senkrecht zur Aufrißebene liegen.

Schnitt durch ein gerades dreiseitiges Prisma



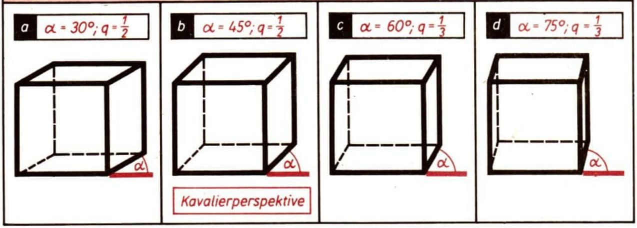
Schnitt durch einen geraden Kreiszylinder



Schräge Parallelprojektion

Bei der schrägen Parallelprojektion liegen die Projektionsgeraden geneigt zur Bildtafel, wobei Winkel zwischen 0° und 90° auftreten können. Als Bildebene wird für die schräge Parallelprojektion meist eine vertikale Ebene angenommen. Je nach Richtung der Projektionsgeraden entstehen unterschiedliche Bilder vom Original. Die Bilder werden durch den *Verzerrungswinkel* α und durch das *Verkürzungsverhältnis* q charakterisiert.

Darstellung eines Würfels in schräger Parallelprojektion

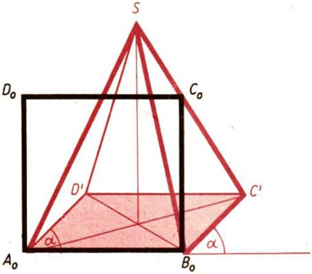


Strecken, die parallel zur Bildebene liegen, werden in wahrer Länge gezeichnet. Winkel, die parallel zur Bildebene liegen, werden in wahrer Größe gezeichnet. Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen (Tiefenstrecken), werden unter Berücksichtigung des Verkürzungsverhältnisses q und unter dem Verzerrungswinkel α zur Richtung, die eine horizontale Gerade auf der Bildebene hat, gezeichnet. Das durch schräge Parallelprojektion erhaltene Bild nennt man das Schrägbild des Originals.
Die Kavalierperspektive ist eine spezielle schräge Parallelprojektion mit dem Verzerrungswinkel $\alpha = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $q = 1:2$.

Darstellung einer Pyramide in Kavalierperspektive

a) Die Grundfläche sei ein Quadrat ($a = 3{,}0$ cm). Die Spitze soll 3,5 cm senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegen.

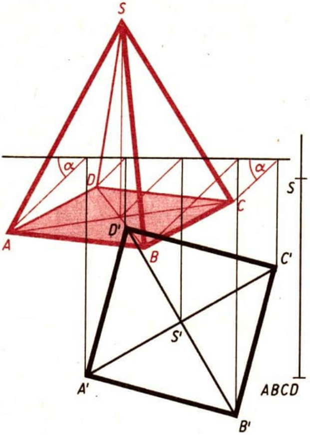
Konstruktion:
Wir zeichnen einen Grundriß der Grundfläche $A_0B_0C_0D_0$ und tragen an $\overline{A'B'}$ die Strecken $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'C'}$, deren Originale $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ senkrecht auf der Bildebene stehen, in halber Länge im Winkel $\alpha = 45°$ gegen die Horizontale an.



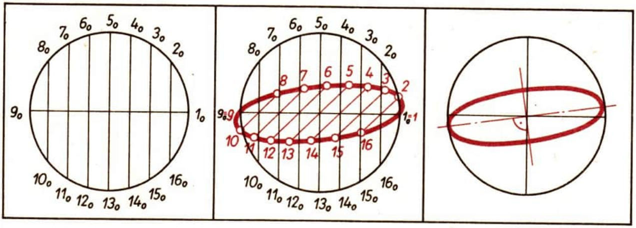
↗ „freie Schenkel" siehe Fußnote auf Seite 157
↗ Lot von einem Punkt auf eine Gerade, Seite 156

b) Die Pyramide ist durch ihren Grundriß mit Höhenmaßstab gegeben.

Konstruktion:
Wir zeichnen eine horizontale Gerade und fällen von Grundrißpunkten Lote auf diese Gerade. In den Lotfußpunkten tragen wir Winkel von 45° gegen die Horizontale an. Auf den freien Schenkeln werden die betreffenden verkürzten Strecken (siehe Bild) abgetragen.

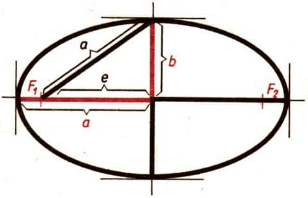


Zur Abbildung eines Kreises in Kavalierperspektive benutzt man als Hilfslinien einen Durchmesser, der parallel zur Bildebene und horizontal liegt, und zu diesem Durchmesser senkrechte Sehnen als Tiefenstrecken.



↗ Kreis, Seite 194

Das Schrägbild eines Kreises in Kavalierperspektive ist eine *Ellipse*.
Eine Ellipse ist eine zweiachsig symmetrische Figur; die längere Achse heißt Hauptachse $2a$, die kürzere Nebenachse $2b$.
Die große Achse der Ellipse, die der Kreis in Kavalierperspektive als Bild besitzt, ist um einen Winkel von etwa 7° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gegen den waagerechten Durchmesser des Kreises gedreht.



Anhang E

Einige Daten aus der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik

Der Ursprung für die Beschäftigung der Menschen mit Mengen, Zahlen und ihren Beziehungen sowie mit dem Messen und Konstruieren geometrischer Gebilde ist in den Bedürfnissen zu suchen, sich mit dem Naturgeschehen auseinanderzusetzen, es zu nutzen und zu verändern.

■ Der Ackerbau erforderte in den alten Kulturen der Menschheit am Nil, am Euphrat und Tigris, am Hwangho und am Indus die Einhaltung von Terminen für die Aussaat, die Absteckung von Kanälen zur Bewässerung, die regelmäßige Neuvermessung der Felder nach Überschwemmungen, die Aufteilung der Ernten usw. In diesem Zusammenhang ergab sich die Notwendigkeit, Messungen durchzuführen, einen Kalender aufzustellen, Gleichungen zu berechnen, trigonometrische Vermessungen durchzuführen.

Die Entwicklung der frühesten mathematischen Erkenntnisse hat sich bei allen Völkern unter ähnlichen gesellschaftlichen Bedingungen vollzogen, wobei in den Anfängen eine isolierte Entwicklung anzutreffen ist, während sich später durch Handel und Eroberungen ein Austausch von Informationen herausbildete.
Die Erkenntnisse auf mathematischem Gebiet hatten stets großen Einfluß auf das gesellschaftliche Leben, auf die Entwicklung der Produktivkräfte und auf die Weltanschauung. Fortschritte in der Mathematik konnten seit eh und je sowohl zu einer Verbesserung der Lebenslage der Völker genutzt werden, sie konnten aber auch von einer menschheitsfeindlichen, machthungrigen Minderheit für die Unterdrückung breiter Schichten der Völker angewendet werden.
Beispiele hierfür lassen sich bis in unsere Zeit hinein erbringen. Es gab Perioden in der Menschheitsgeschichte, in denen die herrschende Klasse die neuen Erkenntnisse sorgsam vor dem Volk hütete, sie im engen Kreis für ihre Zwecke zur Wahrung ihrer Vormachtstellung nutzten.

■ So verhielt es sich im Falle der erstaunlich hoch entwickelten Fähigkeiten eines Teils der altägyptischen Priesterschaft.

Es gab jedoch auch Perioden, in denen die herrschende Klasse das Aufkommen neuer Ideen auf vielen Gebieten bereits im Keim grausam unterdrückte und Wissenschaftler verfolgte.

■ *Kopernikus* (1473–1543) und *Galilei* (1564–1642) hatten durch ihre Arbeiten die im Mittelalter unantastbare Auffassung, wonach die Erde als zentraler Körper der Welt anzusehen sei, widerlegt. Die Kirche bekämpfte diese für sie gefährlichen Ideen, indem sie diejenigen, die den neuen Auffassungen zustimmten, als Ketzer bestrafte.

➡ E

In einer Übersicht sollen nun einige Daten aus der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik gegeben werden. Im allgemeinen kann für die Gewinnung neuer mathematischer Erkenntnisse nicht ein bestimmter Zeitpunkt angegeben werden. Die Jahreszahl in der vorderen Spalte ist deshalb nur als Hilfe für eine grobe chronologische Einordnung der Ereignisse gedacht. Da es sich bei den Arbeiten der Mathematiker besonders seit dem 17. Jahrhundert um Forschungen auf solchen Gebieten handelt, die über den Unterrichtsstoff bis zur Klasse 10 hinausgehen, wurden hier nur einige bemerkenswerte Ergebnisse zusammengetragen.

um 1800 v.u.Z. In Ägypten wird mit Stammbrüchen $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ gerechnet. Ein Bruch, der nach unserer Schreibweise einen größeren Zähler als 1 hat, wurde als Summe ausgedrückt, z. B. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

um 550 v.u.Z. Griechische Mathematiker und Philosophen beschäftigten sich mit dem Zahlbegriff.
Pythagoras (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.) versteht unter einer Zahl die aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit. Damit wurden die 0 und die 1 nicht als Zahlen angesehen.
Pythagoras und seine Schüler sammeln wichtige Erkenntnisse über die Beziehungen der Zahlen zueinander (z. B. Teilbarkeit). Der Satz des *Pythagoras* war allerdings schon lange vor *Pythagoras* in Ägypten, Babylonien, Indien und China bekannt.

um 300 v.u.Z. Erscheinen des mehrbändigen Werkes „Elemente", in dem *Euklid von Alexandria* alle bis dahin bekannten Sätze zur ebenen und räumlichen Geometrie systematisch erfaßt hat. (Dabei erstmaliges Unterscheiden in Grundsätze – Axiome –, in Definitionen und in Sätze. Dagegen Fehlen sämtlicher Anwendungen der Mathematik auf die Praxis wegen der in dieser Zeit sehr verbreiteten Auffassung, daß jegliche praktische Arbeit Sache der Sklaven sei.)

um 250 v.u.Z. Für die Berechnung des Kreises und der Kugel werden gute Näherungsformeln gefunden. Der griechische Mathematiker *Archimedes von Syrakus* (gest. 212 v.u.Z.) ermittelt durch Einbeschreiben und Umbeschreiben von regelmäßigen Vielecken in bzw. um einen Kreis, daß π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. (In Dezimalbrüchen geschrieben:
$3{,}140845 \ldots < \pi < 3{,}142857 \ldots$)
↗ Ph i Üb, S. 85

um 100 v.u.Z. Die Berechnung des Volumens von zahlreichen mathematischen Körpern (z. B. Pyramide, Zylinder, Kegelstumpf) und in Anwendung dessen von Türmen, Fässern, Gewölben, Obelisken und anderen Gegenständen wird genau oder aber mit guter Näherung durchgeführt. Großes Verdienst kommt hierbei dem griechischen Mathematiker *Heron von Alexandria* zu.
Heron hat auch als erster die Entstehung eines Kreises durch Drehung um einen Mittelpunkt erklärt.

um 500 Für π wird von dem indischen Mathematiker *Aryabhata* ein ausgezeichneter Näherungswert verwendet, der, als Dezimalzahl geschrieben, der Zahl 3,1416 entspricht. *Aryabhata* gehört auch zu den ersten, die in ihren Schriften mit negativen Zahlen operieren (durch die kaufmännische Praxis eingeleitet: Schulden).

um 800 Arabische Mathematiker finden neue Verfahren zur Auflösung von Gleichungen. In einem Rechenbuch mit dem Titel „Hisab aljabr w'almugabalah" stellt *Al-Hwarazmi* (gest. um 840) diese Rechenregeln zusammen. („aljabr – Ergänzung": Ursprung für unser heutiges Wort „Algebra".)

um 976 Erstes Auftreten der arabischen Ziffern (Ursprung in Indien) in Europa. Es dauerte jedoch noch Jahrhunderte, bis die arabischen Ziffern die verbreitet gebrauchten römischen Zahlzeichen überflügelten.

um 1450 Herausgabe einer Zusammenfassung aller bis dahin bekannten trigonometrischen Kenntnisse unter Neuaufnahme des Kosinussatzes durch den bedeutenden Mathematiker *Regiomontan* (1436–1476).

um 1500 Von den Stadtverwaltungen zahlreicher Städte werden sogenannte Rechenmeister als Rechner und Lehrer angestellt, in Deutschland u. a. *Adam Ries* (1492–1559) und *Michael Stifel* (1487–1567). Zahlreiche Rechenverfahren werden entwickelt (Grundrechenoperationen mit natürlichen und mit gebrochenen Zahlen). Die Symbole $+$, $-$, $=$ sowie Klammern werden eingeführt. Auch der Wurzelhaken tritt erstmals auf.

1525 In einem Buch von *Christian Rudolff von Jauer* zur Algebra wird ein besonderes Zeichen für die Variable in Gleichungen mit einer Variablen benutzt.

1591 Der große französische Mathematiker *Francois Vieté* (1540–1603) verwendet in seinen Arbeiten Konsonanten – z. B. *B, G, D* – für vorkommende Konstanten und Vokale – z. B. *A, E, I, O* – für Veränderliche. Damit wurde ein großer Schritt in Richtung auf eine einheitliche schriftliche Ausdrucksweise getan.

1609 *Adrianus Romanus* (1561–1615) führt Abkürzungen für Sinus und Tangens ein.

1610 Ausarbeitung der ersten Logarithmentafeln durch den Schweizer *Jost Bürgi* (1552–1632) und den Schotten *John Neper* (1550–1617), die um die gleiche Zeit unabhängig voneinander an diesen Tafeln arbeiten.

1631 Der Engländer *Thomas Harriot* (1560–1621) benutzt die Zeichen $<$ und $>$ zur Darstellung von Ungleichungen. In einem Buch, das 10 Jahre nach *Harriots* Tod herausgegeben wird, treten diese Zeichen erstmals gedruckt auf.

1637 Der hervorragende französische Mathematiker *René Descartes* (1596–1650) führt als erster für die Potenzen die heutige Schreibweise ein.

um 1640 Die ersten Rechenstäbe mit logarithmisch eingeteilten Skalen werden in England von *Gunter, Oughtred, Wingate, Bartridge* entwickelt.

1693 Erstes Auftreten der heute gebräuchlichen Schreibweise für Proportionen
$a : b = c : d$
in einem Werk des berühmten deutschen Mathematikers und Philosophen

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Das Rechnen mit Proportionen war allerdings lange vor dieser Zeit bekannt. Bereits *Archimedes von Syrakus* hatte die Hebelgesetze mit Hilfe von Proportionen erkannt.

1620 bis 1675 Die ersten mechanisch arbeitenden Rechenmaschinen werden von *Wilhelm Schickhardt* (1591–1635), *Blaise Pascal* (1623–1662) und *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) entwickelt. Die Maschine von *Leibniz* enthielt Konstruktionsprinzipien, die noch heute gebräuchlich sind.

um 1780 Begründung der darstellenden Geometrie auf wissenschaftlicher Grundlage durch den französischen Mathematiker *Gaspard Monge* (1746–1818).

1829 Bei seinen geometrischen Arbeiten gelangt der russische Mathematiker *N. Lobatschewski* (1793–1856) zu interessanten Erkenntnissen, die in ähnlicher Form auch von dem Ungarn *Janos Bolyai* (1802–1860) und *Carl Friedrich Gauss* (1777 bis 1855) unabhängig und zur gleichen Zeit gewonnen werden.
Danach ist der Grundsatz „Es gibt zu einer Geraden durch einen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, genau eine Parallele" eine Forderung, die auf eine ganz spezielle Geometrie, die euklidische Geometrie, zielt.
↗ Punkte und Geraden einer Ebene, Seite 128

um 1870 Der deutsche Mathematiker *Georg Cantor* (1845–1918) begründet die Mengenlehre, die heute auf Grund ihrer vielseitigen Anwendbarkeit eine große Bedeutung erlangt hat.

um 1880 Die ersten Lochkartenmaschinen, die eine Grundlage für die Datenerfassung und schnelle Auswertung der Daten in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen bilden, werden vom Amerikaner *Hermann Hollerith* (1860–1929) gebaut.

1882 Es gelingt der Nachweis, daß es unmöglich ist, zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Damit hat der deutsche Mathematiker *P. Lindemann* (1852–1939) ein seit der Antike aufgeworfenes Problem, die sogenannte „Quadratur des Kreises" geklärt.

1889 Der Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen wird durch die Arbeiten des italienischen Mathematikers *G. Peano* (1858–1932) durch die Einführung des Peanoschen Axiomensystems fundiert.

1941 Der erste Rechenautomat, der auf Relais-Basis arbeitet, wird von dem deutschen Bauingenieur *Konrad Zuse* fertiggestellt.

1946 In den USA wird der erste elektronisch arbeitende Rechenautomat „ENIAC" von *Eckert*, *Mauchly* und *Goldstine* fertiggestellt.

1946 Die Konstante π wird mit Hilfe eines elektronischen Rechenautomaten bis auf 808 Stellen berechnet.

1951 Unter Leitung des sowjetischen Wissenschaftlers *S. A. Lebedew* wird der schnellrechnende elektronische Rechenautomat BESM aufgebaut, der eine Arbeitsgeschwindigkeit bis zu 10000 Operationen in der Sekunde entwickelt. Dieser Rechner arbeitet auf der Basis von Transistoren.

Griechisches Alphabet

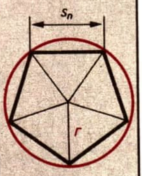
Buchstabe		Name, Aussprache	Buchstabe		Name, Aussprache	Buchstabe		Name, Aussprache
A	α	Alpha	I	ι	Jota	P	ϱ	Rho
B	β	Beta	K	$\varkappa$	Kappa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
E	ε	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Die Primzahlen bis 1010

	47	109	193	271	359	443	541	619	719	821	911
2	53	113	197	277	367	449	547	631	727	823	919
3	59	127	199	281	373	457	557	641	733	827	929
5	61	131		283	379	461	563	643	739	829	937
7	67	137	211	293	383	463	569	647	743	839	941
11	71	139	223		389	467	571	653	751	853	947
13	73	149	227	307	397	479	577	659	757	857	953
17	79	151	229	311		487	587	661	761	859	967
19	83	157	233	313	401	491	593	673	769	863	971
23	89	163	239	317	409	499	599	677	773	877	977
29	97	167	241	331	419			683	787	881	983
31		173	251	337	421	503	601	691	797	883	991
37	101	179	257	347	431	509	607			887	997
41	103	181	263	349	433	521	613	701	809		
43	107	191	269	353	439	523	617	709	811	907	1009

Regelmäßige Vielecke (r Umkreisradius)

Eckenzahl n	Seite s_n		Umfang u_n	
3	$r\sqrt{3}$	$\approx 1{,}7321r$	$3r\sqrt{3}$	$\approx 5{,}1962r$
6	r	$= 1{,}0000r$	$6r$	$= 6{,}0000r$
4	$r\sqrt{2}$	$\approx 1{,}4142r$	$4r\sqrt{2}$	$\approx 5{,}6569r$
8	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\approx 0{,}7654r$	$8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\approx 6{,}1229r$
5	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\approx 1{,}1756r$	$\frac{5}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\approx 5{,}8779r$
10	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\approx 0{,}6180r$	$5r(\sqrt{5}-1)$	$\approx 6{,}1803r$



regelmäßiges Fünfeck
$s_n \approx 1{,}1756r$

➡ E

Quadrate, Quadratwurzeln, Kuben, Kubikwurzeln

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n^4	$\frac{1}{n}$
0,1	0,01	0,316	0,001	0,464	0,0001	10,000
0,2	0,04	0,447	0,008	0,585	0016	5,000
0,3	0,09	0,548	0,027	0,669	0081	3,333
0,4	0,16	0,632	0,064	0,737	0,0256	2,500
0,5	0,25	0,707	0,125	0,794	0625	2,000
0,6	0,36	0,775	0,216	0,843	1296	1,667
0,7	0,49	0,837	0,343	0,888	0,2401	1,429
0,8	0,64	0,894	0,512	0,928	4096	1,250
0,9	0,81	0,949	0,729	0,965	6561	1,111
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,0000	1,000
1,1	1,210	1,049	1,331	1,032	1,4641	0,909
1,2	1,440	1,095	1,728	1,063	2,0736	0,833
1,3	1,690	1,140	2,197	1,091	2,8561	0,769
1,4	1,960	1,183	2,744	1,119	3,8416	0,714
1,5	2,250	1,225	3,375	1,145	5,0625	0,667
1,6	2,560	1,265	4,096	1,170	6,5536	0,625
1,7	2,890	1,304	4,913	1,193	8,3521	0,588
1,8	3,240	1,342	5,832	1,216	10,4976	0,556
1,9	3,610	1,378	6,859	1,239	13,0321	0,526
2,0	4,000	1,414	8,000	1,260	16,0000	0,500
2,1	4,410	1,449	9,261	1,281	19,4481	0,476
2,2	4,840	1,483	10,65	1,301	23,4256	0,455
2,3	5,290	1,517	12,17	1,320	27,9841	0,435
2,4	5,760	1,549	13,82	1,339	33,1776	0,417
2,5	6,250	1,581	15,63	1,357	39,0625	0,400
2,6	6,760	1,612	17,58	1,375	45,6976	0,385
2,7	7,290	1,643	19,68	1,392	53,1441	0,370
2,8	7,840	1,673	21,95	1,409	61,4656	0,357
2,9	8,410	1,703	24,39	1,426	70,7281	0,345
3,0	9,000	1,732	27,00	1,442	81,0000	0,333
3,1	9,610	1,761	29,79	1,458	92,3521	0,323
3,2	10,24	1,789	32,77	1,474	104,8576	0,312
3,3	10,89	1,817	35,94	1,489	118,5921	0,303
3,4	11,56	1,844	39,30	1,504	133,6336	0,294
3,5	12,25	1,871	42,88	1,518	150,0625	0,286
3,6	12,96	1,897	46,66	1,533	167,9616	0,278
3,7	13,69	1,924	50,65	1,547	187,4161	0,270
3,8	14,44	1,949	54,87	1,560	208,5136	0,263
3,9	15,21	1,975	59,32	1,574	231,3441	0,256
4,0	16,00	2,000	64,00	1,587	256,0000	0,250
4,1	16,81	2,025	68,92	1,601	282,5761	0,244
4,2	17,64	2,049	74,09	1,613	311,1696	0,238
4,3	18,49	2,074	79,51	1,626	341,8801	0,233
4,4	19,36	2,098	85,18	1,639	374,8096	0,227
4,5	20,25	2,121	91,13	1,651	410,0625	0,222

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n^4	$\frac{1}{n}$
4,6	21,16	2,145	97,34	1,663	447,7456	0,217
4,7	22,09	2,168	103,8	1,675	487,9681	0,213
4,8	23,04	2,191	110,6	1,687	530,8416	0,208
4,9	24,01	2,214	117,6	1,698	576,4801	0,204
5,0	25,00	2,236	125,0	1,710	625,0000	0,200
5,1	26,01	2,258	132,7	1,721	676,5201	0,196
5,2	27,04	2,280	140,6	1,732	731,1616	0,192
5,3	28,09	2,302	148,9	1,744	789,0481	0,189
5,4	29,16	2,324	157,5	1,754	850,3056	0,185
5,5	30,25	2,345	166,4	1,765	915,0625	0,182
5,6	31,36	2,366	175,6	1,776	983,4496	0,179
5,7	32,49	2,387	185,2	1,786	1055,6001	0,175
5,8	33,64	2,408	195,1	1,797	1131,6496	0,172
5,9	34,81	2,429	205,4	1,807	1211,7361	0,169
6,0	36,00	2,449	216,0	1,817	1296,0000	0,167
6,1	37,21	2,470	227,0	1,827	1384,5841	0,164
6,2	38,44	2,490	238,3	1,837	1477,6336	0,161
6,3	39,69	2,510	250,0	1,847	1575,2961	0,159
6,4	40,96	2,530	262,1	1,857	1677,7216	0,156
6,5	42,25	2,550	274,6	1,866	1785,0625	0,154
6,6	43,56	2,569	287,5	1,876	1897,4736	0,152
6,7	44,89	2,588	300,8	1,885	2015,1121	0,149
6,8	46,24	2,608	314,4	1,895	2138,1376	0,147
6,9	47,61	2,627	328,5	1,904	2266,7121	0,145
7,0	49,00	2,646	343,0	1,913	2401,0000	0,143
7,1	50,41	2,665	357,9	1,922	2541,1681	0,141
7,2	51,84	2,683	373,2	1,931	2687,3856	0,139
7,3	53,29	2,702	389,0	1,940	2839,8241	0,137
7,4	54,76	2,720	405,2	1,949	2998,6576	0,135
7,5	56,25	2,739	421,9	1,957	3164,0625	0,133
7,6	57,76	2,757	439,0	1,966	3336,2176	0,132
7,7	59,29	2,775	456,5	1,975	3515,3041	0,130
7,8	60,84	2,793	474,6	1,983	3701,5056	0,128
7,9	62,41	2,811	493,0	1,992	3895,0081	0,127
8,0	64,00	2,828	512,0	2,000	4096,0000	0,125
8,1	65,61	2,846	531,4	2,008	4304,6721	0,123
8,2	67,24	2,864	551,4	2,017	4521,2176	0,122
8,3	68,89	2,881	571,8	2,025	4745,8321	0,120
8,4	70,56	2,898	592,7	2,033	4978,7136	0,119
8,5	72,25	2,915	614,1	2,041	5220,0625	0,118
8,6	73,96	2,933	636,1	2,049	5470,0816	0,116
8,7	75,69	2,950	658,5	2,057	5728,9761	0,115
8,8	77,44	2,966	681,5	2,065	5996,9536	0,114
8,9	79,21	2,983	705,0	2,072	6274,2241	0,112
9,0	81,00	3,000	729,0	2,080	6561,0000	0,111
9,1	82,81	3,017	753,6	2,088	6857,4961	0,110
9,2	84,64	3,033	778,7	2,095	7163,9296	0,109

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n^4	$\frac{1}{n}$
9,3	86,49	3,050	804,4	2,103	7480,5201	0,108
9,4	88,36	3,066	830,6	2,110	7807,4896	0,106
9,5	90,25	3,082	857,4	2,118	8145,0625	0,105
9,6	92,16	3,098	884,7	2,125	8493,4656	0,104
9,7	94,09	3,114	912,7	2,133	8852,9281	0,103
9,8	96,04	3,130	941,2	2,140	9223,6816	0,102
9,9	98,01	3,146	970,3	2,147	9605,9601	0,101
10	100,0	3,162	1000	2,154	10000,0000	0,100
11	121,0	3,317	1331	2,224	14641	0,091
12	144,0	3,464	1728	2,289	20736	0,083
13	169,0	3,606	2197	2,351	28561	0,077
14	196,0	3,742	2744	2,410	38416	0,071
15	225,0	3,873	3375	2,466	50625	0,067
16	256,0	4,000	4096	2,520	65536	0,062
17	289,0	4,123	4913	2,571	83521	0,059
18	324,0	4,243	5832	2,621	104976	0,056
19	361,0	4,359	6859	2,668	130321	0,053
20	400,0	4,472	8000	2,714	160000	0,050
21	441,0	4,583	9261	2,759	194481	0,048
22	484,0	4,690	10648	2,802	234256	0,045
23	529,0	4,796	12167	2,844	279841	0,043
24	576,0	4,899	13824	2,884	331776	0,042
25	625,0	5,000	15625	2,924	390625	0,040
26	676,0	5,099	17576	2,962	456976	0,038
27	729,0	5,196	19683	3,000	531441	0,037
28	784,0	5,292	21952	3,037	614656	0,036
29	841,0	5,385	24389	3,072	707281	0,034
30	900,0	5,477	27000	3,107	810000	0,033
31	961,0	5,568	29791	3,141	923521	0,032
32	1024	5,657	32768	3,175	1048576	0,031
33	1089	5,745	35937	3,208	1185921	0,030
34	1156	5,831	39304	3,240	1336336	0,029
35	1225	5,916	42875	3,271	1500625	0,029
36	1296	6,000	46656	3,302	1679616	0,028
37	1369	6,083	50653	3,332	1874161	0,027
38	1444	6,164	54872	3,362	2085136	0,026
39	1521	6,245	59319	3,391	2313441	0,026
40	1600	6,325	64000	3,420	2560000	0,025
41	1681	6,403	68921	3,448	2825761	0,024
42	1764	6,481	74088	3,476	3111696	0,024
43	1849	6,557	79507	3,503	3418801	0,023
44	1936	6,633	85184	3,530	3748096	0,023
45	2025	6,708	91125	3,557	4100625	0,022

Register

A

B

D

E

S

T

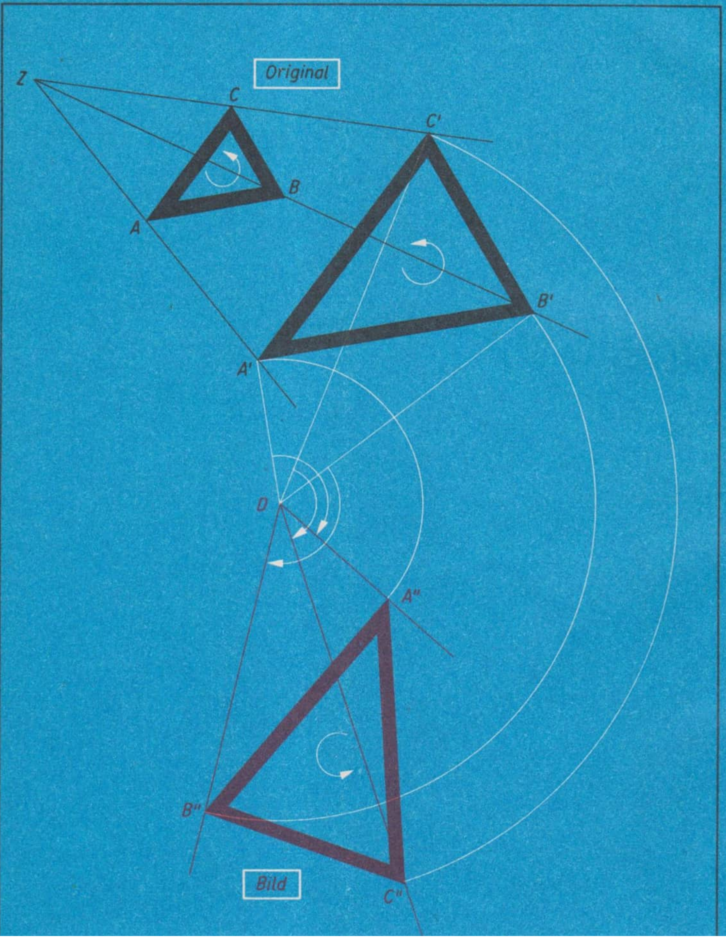
U

V

Gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung

(1) Streckung $\left(Z;\ \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = 2\right)$;

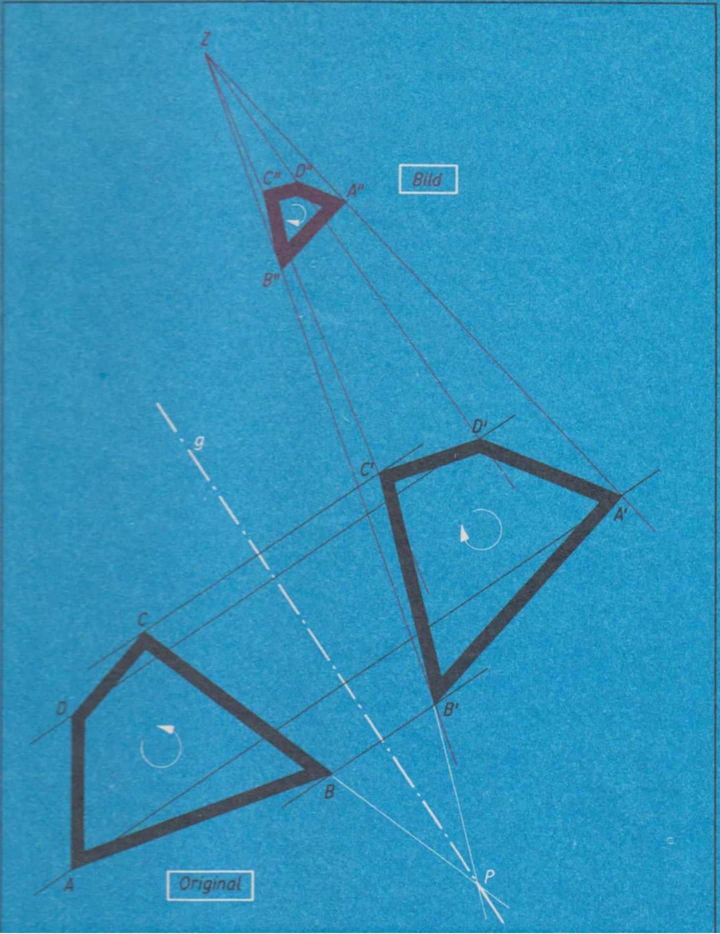
(2) Drehung um D, Drehwinkel $\sphericalangle A'DA'' = -140°$



Ungleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung

(1) Spiegelung an g;
(2) Streckung

$$\left(Z;\ \frac{\overline{ZA''}}{\overline{ZA'}} = \frac{1}{3}\right)$$



Kurzwort: 00 08 09 Mathe in Uebers.