

Vierstellige Logarithmen

Zahlen · Werte · Formeln

Beyrodt

Küstner

Vierstellige Logarithmen

Zahlen · Werte · Formeln

Bearbeitet von Dr. Gustav Beyrodt und Dr. Herbert Küstner

Ausgabe 1966



Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

**Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Lehrbuch für die zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule und
für die erweiterte allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt**

Redaktionsschluß: 5. Juli 1965

Redaktion: Siegm. Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack

Zeichnungen: Kurt Dornbusch, Heinz Grothmann

ES 11 G · Bestell-Nr.: 00 09 34-3 · 1,70 Lizenz Nr. 203/1000/65 (DN)

Druck: Druckerei Fortschritt Erfurt, W. II (V/4/59)

Binden: Karl-Marx-Werke Pößneck (V/15/30)

VORBEMERKUNGEN

Das vorliegende Tafelwerk ist eine Neuentwicklung auf der Grundlage der „Vierstelligen Logarithmen, Zahlen · Werte · Formeln“ (Best.-Nr. 00 915), die erstmals im Jahre 1959 erschien.

Die Ausführung der Tafeln und der Umfang der Formelsammlung entsprechen den Erfordernissen des Unterrichts in den Oberschulen und in den erweiterten Oberschulen. Darüber hinaus wird die Sammlung für Studenten und Fernstudenten sowie für Lehrer und Hörer der Volkshochschulen eine willkommene Hilfe bei der Arbeit im Fach Mathematik, aber auch in den naturwissenschaftlichen Fächern sein.

Die mathematische Formelsammlung wurde wesentlich erweitert.

Die Zahlen in den Tafeln sind gerundet und können daher eine Ungenauigkeit bis zu $\pm 0,5$ (in Einheiten der letzten Stelle) haben. Bei längeren Rechnungen heben sich die Abweichungen im allgemeinen auf.

Das Runden der vierstelligen Werte auf dreistellige wird dadurch in eindeutiger Weise ermöglicht, daß jede in der letzten Stelle auftretende 5 als auf- oder abgerundete Zahl gekennzeichnet ist. Ein Punkt über der 5 bedeutet, daß sie durch Abrunden, ein Strich über der 5, daß sie durch Aufrunden entstanden ist. Einer nicht gekennzeichneten 5 folgen ausschließlich Nullen. Man muß demnach beim weiteren Runden auf drei Stellen im ersten Fall aufrunden und im zweiten abrunden. Im dritten Fall wird ab- oder aufgerundet, je nachdem, ob die vorhergehende Zahl gerade oder ungerade ist.

$$(0,34253 \approx 0,3425 \approx 0,343; 0,34247 \approx 0,3425 \approx 0,342; 0,5 = 0,5000)$$

Periodische Dezimalzahlen werden bei einstelliger Periode durch einen oben angehängten Punkt gekennzeichnet, z. B. $\frac{1}{6} = 0,1\dot{6}$.

Der Stern (*) vor einer Ziffernfolge bedeutet, daß diese bereits zur nächsten nach links herausgestellten Zahl gehört.

Auf besondere Proportionaltafeln wurde verzichtet, damit das Interpolieren im Kopf nicht vernachlässigt wird. Die lineare Interpolation ist zulässig, wenn der Unterschied zweier benachbarter Tafeldifferenzen kleiner als etwa 3 Einheiten der letzten Stelle ist.

Zu den Logarithmen der Winkelfunktionen mit Ausnahme von $\tan 45^\circ$ bis 90° bzw. $\cot 0^\circ$ bis 45° ist die Zahl 10 addiert. Sie muß in der Rechnung wieder subtrahiert werden.

Einer Verwechslung zwischen Logarithmen und natürlichen Werten beim Aufschlagen der Winkelfunktionen soll dadurch vorgebeugt werden, daß beide Tafelgruppen weitestgehend voneinander getrennt sind.

Das Aufsuchen der gewünschten Tafel und das Ablesen der Zahlenwerte wird durch übersichtliche Gestaltung und durch ein farbiges Register erleichtert. Die tabellierten Zahlen sind von den tabellierenden (im Tafelgang) durch einen besonderen Rahmen getrennt. Bei zwei Tafelgängen, z. B. in den Tafeln 2, 3, 4 und 13, werden durch verschiedene Farbgebung der Rahmen Ablesefehler weitgehend ausgeschaltet.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100
10	00000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Beispiel
(mit Interpolation)

$$\lg 16,58 = 1,2175 \\ + 0,0021 \\ 1,2196$$

$$D = 26; n = 8 \\ d = 2,6 \cdot 8 = 20,8$$

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

lg x = 0,5494 - 1 D = 12; d = 4
 x = 0,3543 n = 40; 12 = 3,3

Grad	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1,0)	Grad
0												89
1	8,2419	7,2419	7,5429	7,7190	7,8439	7,9408	*0200	*0870	*1450	*1961	*2419	88
2	5428	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5428	87
3	7188	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041	7188	86
4	8436	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	85
		8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	9403	
5	9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	*0046	*0120	*0192	84
6	9,0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	0859	83
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	2397	80
10	9,2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79
11	2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	5341	70
20	9,5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	6990	60
30	9,6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	58
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	8081	50
40	9,8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49
41	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	8495	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\lg \sin 27,34^\circ = 0,6615 - 1 \quad D = 14; \quad n = 4$$

$$+ 0,0006 \quad d = 1,4 \cdot 4 = 5,6$$

$$0,6621 - 1$$

$$\lg \cos 56,42^\circ = 0,7430 - 1 \quad D = 11; \quad n = 2$$

$$- 0,0002 \quad d = 1,1 \cdot 2 = 2,2$$

$$0,7428 - 1$$

lg cos 45° ... lg cos 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(r,0)	
45	9,8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44
46	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	8843	40
50	9,8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	8905	39
51	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37
53	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36
54	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	9134	35
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33
57	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	9375	30
60	9,9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29
61	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27
63	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	9573	25
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	9730	20
70	9,9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18
72	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	9849	15
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14
76	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	9934	10
80	9,9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9
81	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9958	8
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	7
83	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	9983	5
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4
86	9989	9990	9990	9991	9992	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3
87	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	9997	2
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1
89	9999	9999	•0000	•0000	•0000	•0000	•0000	•0000	•0000	•0000	•0000	0

(r,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	------

$$\lg \sin \alpha = 0,8796 - 1 \quad D = 6; d = 5$$

$$\alpha = 49,28^\circ \quad n = 50:6 = 8,3$$

$$\lg \cos \alpha = 0,3081 - 1 \quad D = 37; d = 26$$

$$\alpha = 78,27^\circ \quad n = 260:37 = 7$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0												89
1	8,2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	87
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9420	85
5	9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	10068	10143	10216	84
6	9,0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	83
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	82
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	81
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	2463	80
10	9,2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	77
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	74
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	5611	70
20	9,5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	7614	60
30	9,7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	59
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	9238	50
40	9,9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	9848	46
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	0 0000	45

(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	------

$$\lg \tan 9,22^\circ = 0,2094 - 1 \quad D = 48; n = 2$$

$$+ \frac{0,0010}{0,2104 - 1} \quad d = 4,8 \cdot 2 = 9,6$$

$$\lg \cot 33,08^\circ = 0,1875 \quad D = 17; n = 8$$

$$- \frac{0,0014}{0,1861} \quad d = 1,7 \cdot 8 = 13,6$$

lg cot 45° ... lg cot 90°

lg tan 45° ... lg tan 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	Grad
45	0,0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	0152	44
46	0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	0303	43
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	0456	42
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	0762	40
50	0,0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	0916	39
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	1072	38
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	1229	37
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	1710	34
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	1875	33
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	2042	32
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	2212	31
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	2386	30
60	0,2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	2562	29
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	2743	28
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	2928	27
63	2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3313	25
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24
66	3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3936	22
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4389	20
70	0,4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19
71	4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4882	18
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425	16
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	6032	14
76	6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6613	6651	6688	6725	12
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	7113	11
79	7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7537	10
80	0,7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	8522	8
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	9109	7
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	9784	6
84	9784	9857	9932	*0008	*0085	*0164	*0244	*0326	*0409	*0494	*0580	5
85	1,0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	1554	4
86	1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663	2806	3
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357	4569	2
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167	7581	1
89	7581	8038	8550	9130	9800	2,0591	2,1561	2,2810	2,4571	2,7581		0

(1,0) ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 Grad

lg tan α = 0,4010 - 1
α = 14,13°

D = 32; d = 10
n = 100:32 = 3

lg cot α = 0,9374 - 1
α = 49,11°

D = 15; d = 2
n = 20:15 = 1,3

Grad	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	
0,0		6,2419	6,5429	6,7190	6,8439	6,9408	•0200	•0870	•1450	•1961	•2419	89,9
0,1	7,2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4723	4971	5206	5429	89,8
0,2	5429	5641	5843	6036	6221	6398	6568	6732	6890	7043	7190	89,7
0,3	7190	7332	7470	7604	7734	7859	7982	8101	8217	8329	8439	89,6
0,4	8439	8547	8651	8753	8853	8951	9046	9140	9231	9321	9408	89,5
0,5	9408	9494	9579	9661	9743	9822	9901	9977	•0053	•0127	•0200	89,4
0,6	8,0200	0272	0343	0412	0480	0548	0614	0679	0744	0807	0870	89,3
0,7	0870	0931	0992	1052	1111	1169	1227	1284	1340	1395	1450	89,2
0,8	1450	1503	1557	1609	1661	1713	1764	1814	1863	1912	1961	89,1
0,9	1961	2009	2056	2103	2150	2196	2241	2286	2331	2375	2419	89,0
1,0	8,2419	2462	2505	2547	2589	2630	2672	2712	2753	2793	2832	88,9
1,1	2832	2872	2911	2949	2988	3026	3063	3100	3137	3174	3210	88,8
1,2	3210	3246	3282	3317	3353	3388	3422	3456	3491	3524	3558	88,7
1,3	3558	3591	3624	3657	3689	3722	3754	3786	3817	3848	3880	88,6
1,4	3880	3911	3941	3972	4002	4032	4062	4091	4121	4150	4179	88,5
1,5	4179	4208	4237	4265	4293	4322	4349	4377	4405	4432	4459	88,4
1,6	4459	4486	4513	4540	4567	4593	4619	4645	4671	4697	4723	88,3
1,7	4723	4748	4773	4799	4824	4848	4873	4898	4922	4947	4971	88,2
1,8	4971	4995	5019	5043	5066	5090	5113	5136	5160	5183	5206	88,1
1,9	5206	5228	5251	5274	5296	5318	5340	5363	5385	5406	5428	88,0
2,0	8,5428	5450	5471	5493	5514	5535	5557	5578	5598	5619	5640	87,9
2,1	5640	5661	5681	5702	5722	5742	5762	5782	5802	5822	5842	87,8
2,2	5842	5862	5881	5901	5920	5939	5959	5978	5997	6016	6035	87,7
2,3	6035	6054	6072	6091	6110	6128	6147	6165	6183	6201	6220	87,6
2,4	6220	6238	6256	6274	6291	6309	6327	6344	6362	6379	6397	87,5
2,5	6397	6414	6431	6449	6466	6483	6500	6517	6534	6550	6567	87,4
2,6	6567	6584	6600	6617	6633	6650	6666	6682	6699	6715	6731	87,3
2,7	6731	6747	6763	6779	6795	6810	6826	6842	6858	6873	6889	87,2
2,8	6889	6904	6920	6935	6950	6965	6981	6996	7011	7026	7041	87,1
2,9	7041	7056	7071	7086	7100	7115	7130	7144	7159	7174	7188	87,0
3,0	8,7188	7202	7217	7231	7245	7260	7274	7288	7302	7316	7330	86,9
3,1	7330	7344	7358	7372	7386	7400	7413	7427	7441	7454	7468	86,8
3,2	7468	7482	7495	7508	7522	7535	7549	7562	7575	7588	7602	86,7
3,3	7602	7615	7628	7641	7654	7667	7680	7693	7705	7718	7731	86,6
3,4	7731	7744	7756	7769	7782	7794	7807	7819	7832	7844	7857	86,5
3,5	7857	7869	7881	7894	7906	7918	7930	7943	7955	7967	7979	86,4
3,6	7979	7991	8003	8015	8027	8039	8051	8063	8074	8086	8098	86,3
3,7	8098	8109	8121	8133	8144	8156	8168	8179	8191	8202	8213	86,2
3,8	8213	8225	8236	8248	8259	8270	8281	8293	8304	8315	8326	86,1
3,9	8326	8337	8348	8359	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	86,0
4,0	8,8436	8447	8457	8468	8479	8490	8500	8511	8522	8532	8543	85,9
4,1	8543	8553	8564	8575	8585	8595	8606	8616	8627	8637	8647	85,8
4,2	8647	8658	8668	8678	8688	8699	8709	8719	8729	8739	8749	85,7
4,3	8749	8759	8769	8780	8790	8799	8809	8819	8829	8839	8849	85,6
4,4	8849	8859	8869	8878	8888	8898	8908	8917	8927	8937	8946	85,5
4,5	8946	8956	8966	8975	8985	8994	9004	9013	9023	9032	9042	85,4
4,6	9042	9051	9060	9070	9079	9089	9098	9107	9116	9126	9135	85,3
4,7	9135	9144	9153	9162	9172	9181	9190	9199	9208	9217	9226	85,2
4,8	9226	9235	9244	9253	9262	9271	9280	9289	9298	9307	9315	85,1
4,9	9315	9324	9333	9342	9351	9359	9368	9377	9386	9394	9403	85,0
(10)	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Grad	

$$\lg \sin 2,357^\circ = 0,6128 - 2 \quad D = 19; \quad n = 7$$

$$+ 0,0013 \quad d = 1,9 \cdot 7 = 13,3$$

$$0,6141 - 2$$

lg tan 0,00° ... lg tan 5,00°

4

Grad	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	
0,0		6,2419	6,5429	6,7190	6,8439	6,9408	•0200	•0870	•1450	•1961	•2419	89,9
0,1	7,2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4723	4972	5206	5429	89,8
0,2	5429	5641	5843	6036	6221	6398	6569	6732	6890	7043	7190	89,7
0,3	7190	7332	7470	7604	7734	7860	7982	8101	8217	8329	8439	89,6
0,4	8439	8547	8651	8754	8853	8951	9046	9140	9231	9321	9409	89,5
0,5	9409	9495	9579	9662	9743	9823	9901	9978	•0053	•0127	•0200	89,4
0,6	8,0200	0272	0343	0412	0481	0548	0614	0680	0744	0807	0870	89,3
0,7	0870	0932	0992	1052	1111	1170	1227	1284	1340	1395	1450	89,2
0,8	1450	1504	1557	1610	1662	1713	1764	1814	1864	1913	1962	89,1
0,9	1962	2010	2057	2104	2150	2196	2242	2287	2331	2376	2419	89,0
1,0	8,2419	2462	2505	2548	2590	2631	2672	2713	2754	2794	2833	88,9
1,1	2833	2873	2912	2950	2988	3026	3064	3101	3138	3175	3211	88,8
1,2	3211	3247	3283	3318	3354	3389	3423	3458	3492	3525	3559	88,7
1,3	3559	3592	3625	3658	3691	3723	3755	3787	3818	3850	3881	88,6
1,4	3881	3912	3943	3973	4003	4033	4063	4093	4122	4152	4181	88,5
1,5	4181	4210	4238	4267	4295	4323	4351	4379	4406	4434	4461	88,4
1,6	4461	4488	4515	4542	4568	4595	4621	4647	4673	4699	4725	88,3
1,7	4725	4750	4775	4801	4826	4851	4875	4900	4924	4949	4973	88,2
1,8	4973	4997	5021	5045	5068	5092	5115	5139	5162	5185	5208	88,1
1,9	5208	5231	5253	5276	5298	5321	5343	5365	5387	5409	5431	88,0
2,0	8,5431	5453	5474	5496	5517	5538	5559	5580	5601	5622	5643	87,9
2,1	5643	5664	5684	5705	5725	5745	5765	5785	5805	5825	5845	87,8
2,2	5845	5865	5884	5904	5923	5943	5962	5981	6000	6019	6038	87,7
2,3	6038	6057	6076	6095	6113	6132	6150	6169	6187	6205	6223	87,6
2,4	6223	6242	6260	6277	6295	6313	6331	6348	6366	6384	6401	87,5
2,5	6401	6418	6436	6453	6470	6487	6504	6521	6538	6555	6571	87,4
2,6	6571	6588	6605	6621	6638	6654	6671	6687	6703	6719	6736	87,3
2,7	6736	6752	6768	6784	6800	6815	6831	6847	6863	6878	6894	87,2
2,8	6894	6909	6925	6940	6956	6971	6986	7001	7016	7031	7046	87,1
2,9	7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7150	7165	7179	7194	87,0
3,0	8,7194	7208	7223	7237	7252	7266	7280	7294	7308	7323	7337	86,9
3,1	7337	7351	7365	7379	7392	7406	7420	7434	7448	7461	7475	86,8
3,2	7475	7488	7502	7515	7529	7542	7556	7569	7582	7596	7609	86,7
3,3	7609	7622	7635	7648	7661	7674	7687	7700	7713	7726	7739	86,6
3,4	7739	7751	7764	7777	7790	7802	7815	7827	7840	7852	7865	86,5
3,5	7865	7877	7890	7902	7914	7927	7939	7951	7963	7975	7988	86,4
3,6	7988	8000	8012	8024	8036	8048	8059	8071	8083	8095	8107	86,3
3,7	8107	8119	8130	8142	8154	8165	8177	8188	8200	8212	8223	86,2
3,8	8223	8234	8246	8257	8269	8280	8291	8302	8314	8325	8336	86,1
3,9	8336	8347	8358	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	8446	86,0
4,0	8,8446	8457	8468	8479	8490	8501	8511	8522	8533	8543	8554	85,9
4,1	8554	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8649	8659	85,8
4,2	8659	8669	8680	8690	8700	8711	8721	8731	8741	8751	8762	85,7
4,3	8762	8772	8782	8792	8802	8812	8822	8832	8842	8852	8862	85,6
4,4	8862	8872	8882	8891	8901	8911	8921	8931	8940	8950	8960	85,5
4,5	8960	8970	8979	8989	8998	9008	9018	9027	9037	9046	9056	85,4
4,6	9056	9065	9075	9084	9093	9103	9112	9122	9131	9140	9150	85,3
4,7	9150	9159	9168	9177	9186	9196	9205	9214	9223	9232	9241	85,2
4,8	9241	9250	9260	9269	9278	9287	9296	9305	9313	9322	9331	85,1
4,9	9331	9340	9349	9358	9367	9376	9384	9393	9402	9411	9420	85,0

(10)	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Grad
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

lg cot α = 0,6855 - 2 D = 16; d = 8
 α = 87,225° n = 80; 16 = 5

lg cot 85,00° ... lg cot 90,00°

Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	.3979	4849	5649	6391	7081	7726	8332	8904	9444
2	9957	.0445	.0910	.1355	.1781	.2189	.2581	.2958	.3322	.3673
3	3,4012	4340	4657	4965	5264	5553	5835	6109	6376	6636
4	6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918
5	9120	9318	9512	9703	9890	*0073	*0254	*0431	*0604	*0775
6	4,0943	1109	1271	1431	1589	1744	1897	2047	2195	2341
7	2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694
8	3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951
10	4,6052	6151	6250	6347	6444	6540	6634	6728	6821	6913
11	7005	7095	7185	7274	7362	7449	7536	7622	7707	7791
12	7875	7958	8040	8122	8203	8283	8363	8442	8520	8598
13	8675	8752	8828	8903	8978	9053	9127	9200	9273	9345
14	9416	9488	9558	9628	9698	9767	9836	9904	9972	*0039
15	5,0106	0173	0239	0304	0370	0434	0499	0562	0626	0689
16	0752	0814	0876	0938	0999	1059	1120	1180	1240	1299
17	1358	1417	1475	1533	1591	1648	1705	1761	1818	1874
18	1930	1985	2040	2095	2149	2204	2257	2311	2364	2417
19	2470	2523	2575	2627	2679	2730	2781	2832	2883	2933
20	5,2983	3033	3083	3132	3181	3230	3279	3327	3375	3423
21	3471	3519	3566	3613	3660	3706	3753	3799	3845	3891
22	3936	3982	4027	4072	4116	4161	4205	4250	4293	4337
23	4381	4424	4467	4510	4553	4596	4638	4681	4723	4765
24	4806	4848	4889	4931	4972	5013	5053	5094	5134	5175
25	5,5215	5255	5294	5334	5373	5413	5452	5491	5530	5568
26	5607	5645	5683	5722	5759	5797	5835	5872	5910	5947
27	5984	6021	6058	6095	6131	6168	6204	6240	6276	6312
28	6348	6384	6419	6454	6490	6525	6560	6595	6630	6664
29	6699	6733	6768	6802	6836	6870	6904	6937	6971	7004
30	5,7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333
31	7366	7398	7430	7462	7494	7526	7557	7589	7621	7652
32	7683	7714	7746	7777	7807	7838	7869	7900	7930	7961
33	7991	8021	8051	8081	8111	8141	8171	8201	8230	8260
34	8289	8319	8348	8377	8406	8435	8464	8493	8522	8551
35	5,8579	8608	8636	8665	8693	8721	8749	8777	8805	8833
36	8861	8889	8916	8944	8972	8999	9026	9054	9081	9108
37	9135	9162	9189	9216	9243	9269	9296	9322	9349	9375
38	9402	9428	9454	9480	9506	9532	9558	9584	9610	9636
39	9661	9687	9713	9738	9764	9789	9814	9839	9865	9890
40	9915	9940	9965	9989	*0014	*0039	*0064	*0088	*0113	*0137
41	6,0162	0186	0210	0234	0259	0283	0307	0331	0355	0379
42	0403	0426	0450	0474	0497	0521	0544	0568	0591	0615
43	0638	0661	0684	0707	0730	0753	0776	0799	0822	0845
44	0868	0890	0913	0936	0958	0981	1003	1026	1048	1070
45	6,1092	1115	1137	1159	1181	1203	1225	1247	1269	1291
46	1312	1334	1356	1377	1399	1420	1442	1463	1485	1506
47	1527	1549	1570	1591	1612	1633	1654	1675	1696	1717
48	1738	1759	1779	1800	1821	1841	1862	1883	1903	1924
49	1944	1964	1985	2005	2025	2046	2066	2086	2106	2126
50	6,2146	2166	2186	2206	2226	2246	2265	2285	2305	2324
Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\ln 5 = 1,6094 \quad \ln 0,5 = \ln (5:10) = \ln 5 - \ln 10$$

$$\ln 50 = 3,9120 \quad = 1,6094 - 2,3026 = 0,3068 - 1$$

ln 500... ln 1000

5

Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,2146	2166	2186	2206	2226	2246	2265	2285	2305	2324
51	2344	2364	2383	2403	2422	2442	2461	2480	2500	2519
52	2538	2558	2577	2596	2615	2634	2653	2672	2691	2710
53	2729	2748	2766	2785	2804	2823	2841	2860	2879	2897
54	2916	2934	2953	2971	2989	3008	3026	3044	3063	3081
55	6,3099	3117	3135	3154	3172	3190	3208	3226	3244	3261
56	3279	3297	3315	3333	3351	3368	3386	3404	3421	3439
57	3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3578	3596	3613
58	3630	3648	3665	3682	3699	3716	3733	3750	3767	3784
59	3801	3818	3835	3852	3869	3886	3902	3919	3936	3953
60	6,3969	3986	4003	4019	4036	4052	4069	4085	4102	4118
61	4135	4151	4167	4184	4200	4216	4232	4249	4265	4281
62	4297	4313	4329	4345	4362	4378	4394	4409	4425	4441
63	4457	4473	4489	4505	4520	4536	4552	4568	4583	4599
64	4615	4630	4646	4661	4677	4693	4708	4723	4739	4754
65	6,4770	4785	4800	4816	4831	4846	4862	4877	4892	4907
66	4922	4938	4953	4968	4983	4998	5013	5028	5043	5058
67	5073	5088	5103	5117	5132	5147	5162	5177	5191	5206
68	5221	5236	5250	5265	5280	5294	5309	5323	5338	5352
69	5367	5381	5396	5410	5425	5439	5453	5468	5482	5497
70	6,5511	5525	5539	5554	5568	5582	5596	5610	5624	5639
71	5653	5667	5681	5695	5709	5723	5737	5751	5765	5779
72	5793	5806	5820	5834	5848	5862	5876	5889	5903	5917
73	5930	5944	5958	5971	5985	5999	6012	6026	6039	6053
74	6067	6080	6093	6107	6120	6134	6147	6161	6174	6187
75	6,6201	6214	6227	6241	6254	6267	6280	6294	6307	6320
76	6333	6346	6359	6373	6386	6399	6412	6425	6438	6451
77	6464	6477	6490	6503	6516	6529	6542	6554	6567	6580
78	6593	6606	6619	6631	6644	6657	6670	6682	6695	6708
79	6720	6733	6746	6758	6771	6783	6796	6809	6821	6834
80	6,6846	6859	6871	6884	6896	6908	6921	6933	6946	6958
81	6970	6983	6995	7007	7020	7032	7044	7056	7069	7081
82	7093	7105	7117	7130	7142	7154	7166	7178	7190	7202
83	7214	7226	7238	7250	7262	7274	7286	7298	7310	7322
84	7334	7346	7358	7370	7382	7393	7405	7417	7429	7441
85	6,7452	7464	7476	7488	7499	7511	7523	7534	7546	7558
86	7569	7581	7593	7604	7616	7627	7639	7650	7662	7673
87	7685	7696	7708	7719	7731	7742	7754	7765	7776	7788
88	7799	7811	7822	7833	7845	7856	7867	7878	7890	7901
89	7912	7923	7935	7946	7957	7968	7979	7991	8002	8013
90	6,8024	8035	8046	8057	8068	8079	8090	8101	8112	8123
91	8134	8145	8156	8167	8178	8189	8200	8211	8222	8233
92	8244	8255	8265	8276	8287	8298	8309	8320	8330	8341
93	8352	8363	8373	8384	8395	8405	8416	8427	8437	8448
94	8459	8469	8480	8491	8501	8512	8522	8533	8544	8554
95	6,8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8648	8659
96	8669	8680	8690	8701	8711	8721	8732	8742	8752	8763
97	8773	8783	8794	8804	8814	8824	8835	8845	8855	8865
98	8876	8886	8896	8906	8916	8926	8937	8947	8957	8967
99	8977	8987	8997	9007	9017	9027	9037	9048	9058	9068
100	6,9078	9088	9098	9108	9117	9127	9137	9147	9157	9167
Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\ln 5000 = \ln(500 \cdot 10) = \ln 500 + \ln 10 = 6,2146 + 2,3026 = 8,5172$

Quadratzahlen n^2 , $n = 1,00 \dots 5,59$

6

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,790	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,422	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

 Rückt das Komma in n eine Stelle nach rechts (links), so rückt es in n^2 zwei Stellen nach rechts (links).

Quadratzahlen n^2 , $n = 5,50 \dots 10,09$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80
10,0	100,0	100,2	100,4	100,6	100,8	101,0	101,2	101,4	101,6	101,8

$$4,63^2 = 21,44$$

$$46,3^2 = 2144$$

$$46\ 300^2 = 21,44 \cdot 10^8$$

$$0,261^2 = 0,06812$$

$$0,861^2 = 0,7413$$

$$0,0194^2 = 0,000\ 376\ 4$$

$$5,416^2 = 29,27$$

$$+ 0,02$$

$$= 29,34$$

$$\frac{11 \cdot 6}{10} = 6,6$$

Quadratwurzeln \sqrt{n} , $n = 1,0 \dots 50,9$

n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
1	1,000	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378
2	1,414	1,449	1,483	1,517	1,549	1,581	1,612	1,643	1,673	1,703
3	1,732	1,761	1,789	1,817	1,844	1,871	1,897	1,924	1,949	1,975
4	2,000	2,025	2,049	2,074	2,098	2,121	2,145	2,168	2,191	2,214
5	2,236	2,258	2,280	2,302	2,324	2,345	2,366	2,387	2,408	2,429
6	2,449	2,470	2,490	2,510	2,530	2,550	2,569	2,588	2,608	2,627
7	2,646	2,665	2,683	2,702	2,720	2,739	2,757	2,775	2,793	2,811
8	2,828	2,846	2,864	2,881	2,898	2,915	2,933	2,950	2,966	2,983
9	3,000	3,017	3,033	3,050	3,066	3,082	3,098	3,114	3,130	3,146
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302
11	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450
12	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592
13	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728
14	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860
15	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987
16	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111
17	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231
18	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347
19	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461
20	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572
21	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680
22	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785
23	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889
24	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990
25	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089
26	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187
27	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282
28	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376
29	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468
30	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559
31	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648
32	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736
33	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822
34	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908
35	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992
36	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075
37	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156
38	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237
39	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317
40	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395
41	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473
42	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550
43	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626
44	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701
45	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775
46	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848
47	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921
48	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993
49	7,000	7,007	7,014	7,021	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064
50	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134
n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9

Rückt das Komma in n zwei Stellen nach rechts (links), so rückt es in \sqrt{n} eine Stelle nach rechts (links).

Quadratwurzeln \sqrt{n} , $n = 50,0 \dots 100,9$

7

n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
50	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134
51	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204
52	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273
53	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342
54	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409
55	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477
56	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543
57	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609
58	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675
59	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740
60	7,746	7,752	7,759	7,765	7,772	7,778	7,785	7,791	7,797	7,804
61	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7,861	7,868
62	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931
63	7,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994
64	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056
65	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118
66	8,124	8,130	8,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179
67	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240
68	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301
69	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361
70	8,367	8,373	8,379	8,385	8,390	8,396	8,402	8,408	8,414	8,420
71	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,468	8,473	8,479
72	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538
73	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597
74	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654
75	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712
76	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769
77	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	8,826
78	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	8,860	8,866	8,871	8,877	8,883
79	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939
80	8,944	8,950	8,955	8,961	8,967	8,972	8,978	8,983	8,989	8,994
81	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050
82	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105
83	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160
84	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214
85	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268
86	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322
87	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375
88	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429
89	9,434	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482
90	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534
91	9,539	9,545	9,550	9,555	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586
92	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638
93	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,675	9,680	9,685	9,690
94	9,695	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742
95	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793
96	9,798	9,803	9,808	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844
97	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894
98	9,899	9,905	9,910	9,915	9,920	9,925	9,930	9,935	9,940	9,945
99	9,950	9,955	9,960	9,965	9,970	9,975	9,980	9,985	9,990	9,995
100	10,000	10,005	10,010	10,015	10,020	10,025	10,030	10,035	10,040	10,045

n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$\sqrt{8,8} = 2,966$ $\sqrt{0,88} = 0,9381$ $\sqrt{63,38} = 7,956$ $\frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$
 $\sqrt{88} = 9,381$ $\sqrt{0,888} = 0,2966$ $\frac{+0,005}{7,961}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1.1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1.2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1.3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1.4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1.5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1.6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1.7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1.8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1.9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2.0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2.1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2.2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2.3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2.4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2.5	15,62	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2.6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2.7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2.8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2.9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3.0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3.1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3.2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3.3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3.4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3.5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3.6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3.7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3.8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3.9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4.0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4.1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4.2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4.3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4.4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4.5	91,12	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4.6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4.7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4.8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4.9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5.0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5.1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5.2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5.3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5.4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5.5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

 Rückt das Komma in * eine Stelle nach rechts (links), so rückt es in *³ drei Stellen nach rechts (links).

Kubikzahlen n^3 , $n = 5,50 \dots 10,09$

8

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0
10,0	1000	1003	1006	1009	1012	1015	1018	1021	1024	1027
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$4,98^3 = 123,5$$

$$49,8^3 = 123\ 500$$

$$498^3 = 123,5 \cdot 10^6$$

$$0,169^3 = 0,004\ 827$$

$$0,169^3 = 0,050\ 24$$

$$0,999^3 = 0,999\ 9$$

$$5,427^3 = 159,2$$

$$+ 0,6$$

$$= 150,8$$

$$\frac{9 \cdot 7}{10} = 6,3$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	1,000	1,260	1,442	1,587	1,710	1,817	1,913	2,000	2,080
1	2,154	2,224	2,289	2,351	2,410	2,466	2,520	2,571	2,621	2,668
2	2,714	2,759	2,802	2,844	2,884	2,924	2,962	3,000	3,037	3,072
3	3,107	3,141	3,175	3,208	3,240	3,271	3,302	3,332	3,362	3,391
4	3,420	3,448	3,476	3,503	3,530	3,557	3,583	3,609	3,634	3,659
5	3,684	3,708	3,733	3,756	3,780	3,803	3,826	3,849	3,871	3,893
6	3,915	3,936	3,958	3,979	4,000	4,021	4,041	4,062	4,082	4,102
7	4,121	4,141	4,160	4,179	4,198	4,217	4,236	4,254	4,273	4,291
8	4,309	4,327	4,344	4,362	4,380	4,397	4,414	4,431	4,448	4,465
9	4,481	4,498	4,514	4,531	4,547	4,563	4,579	4,595	4,610	4,626
10	4,642	4,657	4,672	4,688	4,703	4,718	4,733	4,747	4,762	4,777
11	4,791	4,806	4,820	4,835	4,849	4,863	4,877	4,891	4,905	4,919
12	4,932	4,946	4,960	4,973	4,987	5,000	5,013	5,027	5,040	5,053
13	5,066	5,079	5,092	5,104	5,117	5,130	5,143	5,155	5,168	5,180
14	5,192	5,205	5,217	5,229	5,241	5,254	5,266	5,278	5,290	5,301
15	5,313	5,325	5,337	5,348	5,360	5,372	5,383	5,395	5,406	5,418
16	5,429	5,440	5,451	5,463	5,474	5,485	5,496	5,507	5,518	5,529
17	5,540	5,550	5,561	5,572	5,583	5,593	5,604	5,615	5,625	5,636
18	5,646	5,657	5,667	5,677	5,688	5,698	5,708	5,718	5,729	5,739
19	5,749	5,759	5,769	5,779	5,789	5,799	5,809	5,819	5,828	5,838
20	5,848	5,858	5,867	5,877	5,887	5,896	5,906	5,915	5,925	5,934
21	5,944	5,953	5,963	5,972	5,981	5,991	6,000	6,009	6,018	6,028
22	6,037	6,046	6,055	6,064	6,073	6,082	6,091	6,100	6,109	6,118
23	6,127	6,136	6,145	6,153	6,162	6,171	6,180	6,188	6,197	6,206
24	6,214	6,223	6,232	6,240	6,249	6,257	6,266	6,274	6,283	6,291
25	6,300	6,308	6,316	6,325	6,333	6,341	6,350	6,358	6,366	6,374
26	6,383	6,391	6,399	6,407	6,415	6,423	6,431	6,439	6,447	6,455
27	6,463	6,471	6,479	6,487	6,495	6,503	6,511	6,519	6,527	6,534
28	6,542	6,550	6,558	6,565	6,573	6,581	6,589	6,596	6,604	6,611
29	6,619	6,627	6,634	6,642	6,649	6,657	6,664	6,672	6,679	6,687
30	6,694	6,702	6,709	6,717	6,724	6,731	6,739	6,746	6,753	6,761
31	6,768	6,775	6,782	6,790	6,797	6,804	6,811	6,818	6,826	6,833
32	6,840	6,847	6,854	6,861	6,868	6,875	6,882	6,889	6,896	6,903
33	6,910	6,917	6,924	6,931	6,938	6,945	6,952	6,959	6,966	6,973
34	6,980	6,986	6,993	7,000	7,007	7,014	7,020	7,027	7,034	7,041
35	7,047	7,054	7,061	7,067	7,074	7,081	7,087	7,094	7,101	7,107
36	7,114	7,120	7,127	7,133	7,140	7,147	7,153	7,160	7,166	7,173
37	7,179	7,186	7,192	7,198	7,205	7,211	7,218	7,224	7,230	7,237
38	7,243	7,250	7,256	7,262	7,268	7,275	7,281	7,287	7,294	7,300
39	7,306	7,312	7,319	7,325	7,331	7,337	7,343	7,350	7,356	7,362
40	7,368	7,374	7,380	7,386	7,393	7,399	7,405	7,411	7,417	7,423
41	7,429	7,435	7,441	7,447	7,453	7,459	7,465	7,471	7,477	7,483
42	7,489	7,495	7,501	7,507	7,513	7,518	7,524	7,530	7,536	7,542
43	7,548	7,554	7,560	7,565	7,571	7,577	7,583	7,589	7,594	7,600
44	7,606	7,612	7,617	7,623	7,629	7,635	7,640	7,646	7,652	7,657
45	7,663	7,669	7,674	7,680	7,686	7,691	7,697	7,703	7,708	7,714
46	7,719	7,725	7,731	7,736	7,742	7,747	7,753	7,758	7,764	7,769
47	7,775	7,780	7,786	7,791	7,797	7,802	7,808	7,813	7,819	7,824
48	7,830	7,835	7,841	7,846	7,851	7,857	7,862	7,868	7,873	7,878
49	7,884	7,889	7,894	7,900	7,905	7,910	7,916	7,921	7,926	7,932
50	7,937	7,942	7,948	7,953	7,958	7,963	7,969	7,974	7,979	7,984
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Rückt das Komma in π drei Stellen nach rechts (links), so rückt es in $\sqrt[3]{\pi}$ eine Stelle nach rechts (links).

Kubikwurzeln $\sqrt[3]{n}$, $n = 500 \dots 1009$

9

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	7,937	7,942	7,948	7,953	7,958	7,963	7,969	7,974	7,979	7,984
51	7,990	7,995	8,000	8,005	8,010	8,016	8,021	8,026	8,031	8,036
52	8,041	8,047	8,052	8,057	8,062	8,067	8,072	8,077	8,082	8,088
53	8,093	8,098	8,103	8,108	8,113	8,118	8,123	8,128	8,133	8,138
54	8,143	8,148	8,153	8,158	8,163	8,168	8,173	8,178	8,183	8,188
55	8,193	8,198	8,203	8,208	8,213	8,218	8,223	8,228	8,233	8,238
56	8,243	8,247	8,252	8,257	8,262	8,267	8,272	8,277	8,282	8,286
57	8,291	8,296	8,301	8,306	8,311	8,316	8,320	8,325	8,330	8,335
58	8,340	8,344	8,349	8,354	8,359	8,363	8,368	8,373	8,378	8,382
59	8,387	8,392	8,397	8,401	8,406	8,411	8,416	8,420	8,425	8,430
60	8,434	8,439	8,444	8,448	8,453	8,458	8,462	8,467	8,472	8,476
61	8,481	8,486	8,490	8,495	8,499	8,504	8,509	8,513	8,518	8,522
62	8,527	8,532	8,536	8,541	8,545	8,550	8,554	8,559	8,564	8,568
63	8,573	8,577	8,582	8,586	8,591	8,595	8,600	8,604	8,609	8,613
64	8,618	8,622	8,627	8,631	8,636	8,640	8,645	8,649	8,653	8,658
65	8,662	8,667	8,671	8,676	8,680	8,685	8,689	8,693	8,698	8,702
66	8,707	8,711	8,715	8,720	8,724	8,729	8,733	8,737	8,742	8,746
67	8,750	8,755	8,759	8,763	8,768	8,772	8,776	8,781	8,785	8,789
68	8,794	8,798	8,802	8,807	8,811	8,815	8,819	8,824	8,828	8,832
69	8,837	8,841	8,845	8,849	8,854	8,858	8,862	8,866	8,871	8,875
70	8,879	8,883	8,887	8,892	8,896	8,900	8,904	8,909	8,913	8,917
71	8,921	8,925	8,929	8,934	8,938	8,942	8,946	8,950	8,955	8,959
72	8,963	8,967	8,971	8,975	8,979	8,984	8,988	8,992	8,996	9,000
73	9,004	9,008	9,012	9,016	9,021	9,025	9,029	9,033	9,037	9,041
74	9,045	9,049	9,053	9,057	9,061	9,065	9,069	9,073	9,078	9,082
75	9,086	9,090	9,094	9,098	9,102	9,106	9,110	9,114	9,118	9,122
76	9,126	9,130	9,134	9,138	9,142	9,146	9,150	9,154	9,158	9,162
77	9,166	9,170	9,174	9,178	9,182	9,185	9,189	9,193	9,197	9,201
78	9,205	9,209	9,213	9,217	9,221	9,225	9,229	9,233	9,237	9,240
79	9,244	9,248	9,252	9,256	9,260	9,264	9,268	9,272	9,275	9,279
80	9,283	9,287	9,291	9,295	9,299	9,302	9,306	9,310	9,314	9,318
81	9,322	9,326	9,329	9,333	9,337	9,341	9,345	9,348	9,352	9,356
82	9,360	9,364	9,368	9,371	9,375	9,379	9,383	9,386	9,390	9,394
83	9,398	9,402	9,405	9,409	9,413	9,417	9,420	9,424	9,428	9,432
84	9,435	9,439	9,443	9,447	9,450	9,454	9,458	9,462	9,465	9,469
85	9,473	9,476	9,480	9,484	9,488	9,491	9,495	9,499	9,502	9,506
86	9,510	9,513	9,517	9,521	9,524	9,528	9,532	9,535	9,539	9,543
87	9,546	9,550	9,554	9,557	9,561	9,565	9,568	9,572	9,576	9,579
88	9,583	9,586	9,590	9,594	9,597	9,601	9,605	9,608	9,612	9,615
89	9,619	9,623	9,626	9,630	9,633	9,637	9,641	9,644	9,648	9,651
90	9,655	9,658	9,662	9,666	9,669	9,673	9,676	9,680	9,683	9,687
91	9,691	9,694	9,698	9,701	9,705	9,708	9,712	9,715	9,719	9,722
92	9,726	9,729	9,733	9,736	9,740	9,743	9,747	9,750	9,754	9,758
93	9,761	9,764	9,768	9,771	9,775	9,778	9,782	9,785	9,789	9,792
94	9,796	9,799	9,803	9,806	9,810	9,813	9,817	9,820	9,824	9,827
95	9,830	9,834	9,837	9,841	9,844	9,848	9,851	9,855	9,858	9,861
96	9,865	9,868	9,872	9,875	9,879	9,882	9,885	9,889	9,892	9,896
97	9,899	9,902	9,906	9,909	9,913	9,916	9,919	9,923	9,926	9,930
98	9,933	9,936	9,940	9,943	9,946	9,950	9,953	9,956	9,960	9,963
99	9,967	9,970	9,973	9,977	9,980	9,983	9,987	9,990	9,993	9,997
100	10,000	10,003	10,007	10,010	10,013	10,017	10,020	10,023	10,027	10,030
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\sqrt[3]{751} = 9,090$

$\sqrt[3]{751\,000} = 90,90$

$\sqrt[3]{0,751} = 0,909$

$\sqrt[8]{4} = 1,587$

$\sqrt[8]{40} = 3,420$

$\sqrt[8]{400} = 7,368$

Reziproke Werte $\frac{1}{n}$, $n = 1,00 \dots 5,59$

10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,0000	•9901	•9804	•9709	•9615	•9524	•9434	•9346	•9259	•9174
1,1	0,9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	0,5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	0,3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	0,2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	0,2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die reziproken Werte $\frac{1}{n}$ ergeben periodische Dezimalbrüche, sofern nicht n ausschließlich die Primfaktoren 2 oder 5 oder auch beide besitzt. Die Periode ist nicht gekennzeichnet. Die letzte Stelle des Dezimalbruchs ist gerundet.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	0,1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	0,1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	0,1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	0,1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	0,1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001
10,0	0,1000	0999	0998	0997	0996	0995	0994	0993	0992	0991

$$\frac{7}{356} = 0,002809 \quad \frac{1000}{356} = 2,809 \quad \frac{1}{2,974} = 0,3367 - 0,0004 = 0,3363 \quad \frac{11,4}{10} = 4,4$$

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,624
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,09	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

 Rückt das Komma in d eine Stelle nach rechts (links), so rückt es in πd ebenfalls eine Stelle nach rechts (links).

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,74	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,18	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,39
10,0	31,42	31,45	31,48	31,51	31,54	31,57	31,60	31,64	31,67	31,70

$d = 3,45$ $d = 34,5$ $d = 52,48$ $\pi d = 9,305$
 $\pi d = 10,84$ $\pi d = 108,4$ $\pi d = 164,6 + 0,2 = 164,8$ $d = 2,962$

Kreisflächeninhalt $\frac{\pi}{4}d^2$, $d = 1,00 \dots 5,59$ (d Durchmesser des Kreises)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,754	8012	8171	8332	8495	8659	8825	8992	9161	9331
1,1	0,9503	9677	9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54

Rückt das Komma in d um eine Stelle nach rechts (links), so rückt es in $\frac{\pi}{4}d^2$ um zwei Stellen nach rechts (links).

Kreisflächeninhalt $\frac{\pi}{4} d^2$, $d = 5,50 \dots 10,09$

12

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,77	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54	78,70	78,85	79,01	79,17	79,33	79,49	79,64	79,80	79,96

$d = 2,45$ $d = 3,533$ $\frac{55 \cdot 3}{10} = 16,5$ $\frac{\pi}{4} d^2 = 50,50$ $\frac{11 \cdot 10}{13} \approx 8$
 $\frac{\pi}{4} d^2 = 4,714$ $\frac{\pi}{4} d^2 = 9,787 + 0,017 = 9,804$ $d = 8,018$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	80
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	87
2	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	88
3	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45

(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	------

$$\sin 23,47^\circ = 0,3971 + \frac{0,0011}{10} = 0,3982 \quad \frac{16 \cdot 7}{10} = 11,2$$

$$\cos 52,14^\circ = 0,6143 - \frac{0,0006}{10} = 0,6137 \quad \frac{14 \cdot 4}{10} = 5,6$$

cos 45° ... cos 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(I,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0

(I,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	------

$\sin \alpha = 0,3110$
 $\alpha = 18,10^\circ$
 $+ 0,02^\circ$
 $= 18,12^\circ$

$\frac{3 \cdot 10}{16} = 1,9$

$\cos \alpha = 0,8768$
 $\alpha = 28,80^\circ$
 $- 0,06^\circ$
 $= 28,74^\circ$

$\frac{5 \cdot 10}{8} = 6,2$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,0000	45
(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad	

$$\tan 48,17^\circ = 1,115$$

$$+ 0,002$$

$$= 1,117$$

$$\frac{3 \cdot 7}{10} = 2,1$$

$$\cot 62,23^\circ = 0,5272$$

$$- 0,0007$$

$$= 0,5265$$

$$\frac{22 \cdot 3}{10} = 6,6$$

cot 45° ... cot 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	Grad
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	036	030	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	963	971	980	988	997	•006	•014	•023	•032	•041	•050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	904	921	937	954	971	989	•006	•024	•042	•060	•078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	•011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	705	745	787	829	872	915	959	•005	•050	•097	•145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	11,43	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0		0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

tan α = 0,3650

α = 20,00°
+ 0,05° = 20,05°

10 · 10 = 3,3
19

cot α = 0,5286

α = 62,20°
- 0,06° = 62,14°

$\frac{14 \cdot 10}{23} = 6,1$

cot 0° ... cot 45°

Exponentialfunktion und Hyperbelfunktionen $x = 0,00 \dots 0,50$

18

π rad	$x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
0,00	0,00°	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,01	0,57	0,0100	1,0000	0,0100	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100
0,02	1,15	0,0200	0,9998	0,0200	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200
0,03	1,72	0,0300	0,9996	0,0300	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300
0,04	2,29	0,0400	0,9992	0,0400	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400
0,05	2,86	0,0500	0,9988	0,0500	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500
0,06	3,44	0,0600	0,9982	0,0601	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599
0,07	4,01	0,0699	0,9976	0,0701	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699
0,08	4,58	0,0799	0,9968	0,0802	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798
0,09	5,16	0,0899	0,9960	0,0902	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898
0,10	5,73°	0,0998	0,9950	0,1003	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997
0,11	6,30	0,1098	0,9940	0,1104	1,1163	1,8958	0,1102	1,0061	0,1096
0,12	6,88	0,1197	0,9928	0,1206	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194
0,13	7,45	0,1296	0,9916	0,1307	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293
0,14	8,02	0,1395	0,9902	0,1409	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391
0,15	8,59	0,1494	0,9888	0,1511	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489
0,16	9,17	0,1593	0,9872	0,1614	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586
0,17	9,74	0,1692	0,9856	0,1717	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684
0,18	10,31	0,1790	0,9838	0,1820	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781
0,19	10,89	0,1889	0,9820	0,1923	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877
0,20	11,46°	0,1987	0,9801	0,2027	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974
0,21	12,03	0,2085	0,9780	0,2131	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070
0,22	12,61	0,2182	0,9759	0,2236	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165
0,23	13,18	0,2280	0,9737	0,2341	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260
0,24	13,75	0,2377	0,9713	0,2447	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355
0,25	14,32	0,2474	0,9689	0,2553	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449
0,26	14,90	0,2571	0,9664	0,2660	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543
0,27	15,47	0,2667	0,9638	0,2768	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636
0,28	16,04	0,2764	0,9611	0,2876	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729
0,29	16,62	0,2860	0,9582	0,2984	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821
0,30	17,19°	0,2955	0,9553	0,3093	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913
0,31	17,76	0,3051	0,9523	0,3203	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004
0,32	18,33	0,3146	0,9492	0,3314	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095
0,33	18,91	0,3240	0,9460	0,3425	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185
0,34	19,48	0,3335	0,9428	0,3537	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275
0,35	20,05	0,3429	0,9394	0,3650	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364
0,36	20,63	0,3523	0,9359	0,3764	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452
0,37	21,20	0,3616	0,9323	0,3879	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540
0,38	21,77	0,3709	0,9287	0,3994	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627
0,39	22,35	0,3802	0,9249	0,4111	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714
0,40	22,92°	0,3894	0,9211	0,4228	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799
0,41	23,49	0,3986	0,9171	0,4346	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885
0,42	24,06	0,4078	0,9131	0,4466	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969
0,43	24,64	0,4169	0,9090	0,4586	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053
0,44	25,21	0,4259	0,9048	0,4708	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136
0,45	25,78	0,4350	0,9004	0,4831	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219
0,46	26,36	0,4439	0,8961	0,4954	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301
0,47	26,93	0,4529	0,8916	0,5080	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382
0,48	27,50	0,4618	0,8870	0,5206	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462
0,49	28,07	0,4706	0,8823	0,5334	1,6323	0,6126	0,5098	1,1223	0,4542
0,50	28,65°	0,4794	0,8776	0,5463	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621

x		$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
rad	Grad								
0,50	28,65°	0,4794	0,8776	0,5463	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621
0,51	29,22	0,4882	0,8727	0,5594	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699
0,52	29,79	0,4969	0,8678	0,5726	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777
0,53	30,37	0,5055	0,8628	0,5859	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854
0,54	30,94	0,5141	0,8577	0,5994	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930
0,55	31,51	0,5227	0,8525	0,6131	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005
0,56	32,09	0,5312	0,8473	0,6269	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080
0,57	32,66	0,5396	0,8419	0,6410	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154
0,58	32,23	0,5480	0,8365	0,6552	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227
0,59	33,80	0,5564	0,8309	0,6696	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299
0,60	34,38°	0,5646	0,8253	0,6841	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370
0,61	34,95	0,5729	0,8196	0,6989	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441
0,62	35,52	0,5810	0,8139	0,7139	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511
0,63	36,10	0,5891	0,8080	0,7291	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581
0,64	36,67	0,5972	0,8021	0,7445	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649
0,65	37,24	0,6052	0,7961	0,7602	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717
0,66	37,82	0,6131	0,7900	0,7761	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784
0,67	38,39	0,6210	0,7838	0,7923	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850
0,68	38,96	0,6288	0,7776	0,8087	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915
0,69	39,53	0,6365	0,7712	0,8253	1,9937	0,5016	0,7461	1,2477	0,5980
0,70	40,11°	0,6442	0,7648	0,8423	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044
0,71	40,68	0,6518	0,7584	0,8595	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107
0,72	41,25	0,6594	0,7518	0,8771	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169
0,73	41,83	0,6669	0,7452	0,8949	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231
0,74	42,40	0,6743	0,7385	0,9131	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291
0,75	42,97	0,6816	0,7317	0,9316	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351
0,76	43,54	0,6889	0,7248	0,9505	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411
0,77	44,12	0,6961	0,7179	0,9697	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469
0,78	44,69	0,7033	0,7109	0,9893	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527
0,79	45,26	0,7104	0,7038	1,0092	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584
0,80	45,84°	0,7174	0,6967	1,0296	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640
0,81	46,41	0,7243	0,6895	1,0505	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696
0,82	46,98	0,7311	0,6822	1,0717	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751
0,83	47,56	0,7379	0,6749	1,0934	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805
0,84	48,13	0,7446	0,6675	1,1156	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858
0,85	48,70	0,7513	0,6600	1,1383	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911
0,86	49,27	0,7578	0,6524	1,1616	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963
0,87	49,85	0,7643	0,6448	1,1853	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014
0,88	50,42	0,7707	0,6372	1,2097	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064
0,89	50,99	0,7771	0,6294	1,2346	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114
0,90	51,57°	0,7833	0,6216	1,2602	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163
0,91	52,14	0,7895	0,6137	1,2864	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211
0,92	52,71	0,7956	0,6058	1,3133	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259
0,93	53,29	0,8016	0,5978	1,3409	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306
0,94	53,86	0,8076	0,5898	1,3692	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352
0,95	54,43	0,8134	0,5817	1,3984	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398
0,96	55,00	0,8192	0,5735	1,4284	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443
0,97	55,58	0,8249	0,5653	1,4592	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487
0,98	56,15	0,8305	0,5570	1,4910	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531
0,99	56,72	0,8360	0,5487	1,5237	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574
1,00	57,30°	0,8415	0,5403	1,5574	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616

Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen $x = 1,00 \dots 1,50$

rad	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
1,00	57,30°	0,8415	0,5403	1,5574	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616
1,01	57,87	0,8468	0,5319	1,5922	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658
1,02	58,44	0,8521	0,5234	1,6281	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699
1,03	59,01	0,8573	0,5148	1,6652	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739
1,04	59,59	0,8624	0,5062	1,7036	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779
1,05	60,16	0,8674	0,4976	1,7433	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818
1,06	60,73	0,8724	0,4889	1,7844	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857
1,07	61,31	0,8772	0,4801	1,8270	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895
1,08	61,88	0,8820	0,4713	1,8712	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932
1,09	62,45	0,8866	0,4625	1,9171	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969
1,10	63,03°	0,8912	0,4536	1,9648	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005
1,11	63,60	0,8957	0,4447	2,0143	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041
1,12	64,17	0,9001	0,4357	2,0660	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076
1,13	64,74	0,9044	0,4267	2,1198	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110
1,14	65,32	0,9086	0,4176	2,1759	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144
1,15	65,89	0,9128	0,4085	2,2345	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178
1,16	66,46	0,9168	0,3993	2,2958	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210
1,17	67,04	0,9208	0,3902	2,3600	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243
1,18	67,61	0,9246	0,3809	2,4273	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275
1,19	68,18	0,9284	0,3717	2,4979	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306
1,20	68,75°	0,9320	0,3624	2,5722	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337
1,21	69,33	0,9356	0,3530	2,6503	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367
1,22	69,90	0,9391	0,3436	2,7328	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397
1,23	70,47	0,9425	0,3342	2,8198	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426
1,24	71,05	0,9458	0,3248	2,9119	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455
1,25	71,62	0,9490	0,3153	3,0096	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483
1,26	72,19	0,9521	0,3058	3,1133	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511
1,27	72,77	0,9551	0,2963	3,2236	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538
1,28	73,34	0,9580	0,2867	3,3413	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565
1,29	73,91	0,9608	0,2771	3,4672	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591
1,30	74,48°	0,9636	0,2675	3,6021	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617
1,31	75,06	0,9662	0,2579	3,7471	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643
1,32	75,63	0,9687	0,2482	3,9033	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668
1,33	76,20	0,9711	0,2385	4,0723	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692
1,34	76,78	0,9735	0,2288	4,2556	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717
1,35	77,35	0,9757	0,2190	4,4552	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741
1,36	77,92	0,9779	0,2092	4,6734	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764
1,37	78,50	0,9799	0,1994	4,9131	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787
1,38	79,07	0,9819	0,1896	5,1774	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810
1,39	79,64	0,9837	0,1798	5,4707	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832
1,40	80,21°	0,9854	0,1700	5,7979	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854
1,41	80,79	0,9871	0,1601	6,1654	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875
1,42	81,36	0,9887	0,1502	6,5811	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896
1,43	81,93	0,9901	0,1403	7,0555	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917
1,44	82,51	0,9915	0,1304	7,6018	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937
1,45	83,08	0,9927	0,1205	8,2381	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957
1,46	83,65	0,9939	0,1106	8,9886	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977
1,47	84,22	0,9949	0,1006	9,8874	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996
1,48	84,80	0,9959	0,0907	10,9834	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015
1,49	85,37	0,9967	0,0807	12,3499	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033
1,50	85,94°	0,9975	0,0707	14,1014	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051

Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen $x = 1,50 \dots 10,0$

15

rad	Grad	sin x	cos x	tan x	e ^x	e ^{-x}	sinh x	cosh x	tanh x
1,5	85,94	0,9975	0,0707	14,1014	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051
1,6	91,67	0,9996	-0,0292	-34,233	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217
1,7	97,40	0,9917	-0,1288	-7,6966	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354
1,8	103,13	0,9738	-0,2272	-4,2863	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468
1,9	108,86	0,9403	-0,3233	-2,9271	6,6859	0,1496	3,2682	3,4177	0,9562
2,0	114,59	0,9093	-0,4161	-2,1850	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640
2,1	120,32	0,8632	-0,5048	-1,7098	8,1662	0,1225	4,0219	4,1443	0,9705
2,2	126,05	0,8085	-0,5885	-1,3738	9,0250	0,1108	4,4571	4,5679	0,9757
2,3	131,78	0,7457	-0,6663	-1,1192	9,9742	0,1003	4,9370	5,0372	0,9801
2,4	137,51	0,6755	-0,7374	-0,9160	11,0232	0,0907	5,4662	5,5569	0,9837
2,5	143,24	0,5985	-0,8011	-0,7470	12,182	0,0821	6,0502	6,1323	0,9866
2,6	148,97	0,5155	-0,8569	-0,6016	13,464	0,0743	6,6947	6,7690	0,9890
2,7	154,70	0,4274	-0,9041	-0,4727	14,880	0,0672	7,4063	7,4735	0,9910
2,8	160,43	0,3350	-0,9422	-0,3555	16,445	0,0608	8,1919	8,2527	0,9926
2,9	166,16	0,2392	-0,9710	-0,2404	18,174	0,0550	9,0596	9,1146	0,9940
3,0	171,89	0,1411	-0,9900	-0,1425	20,086	0,0498	10,018	10,068	0,9951
3,1	177,62	0,0416	-0,9991	-0,0416	22,198	0,0450	11,076	11,122	0,9959
3,2	183,35	-0,0584	-0,9983	0,0585	24,533	0,0408	12,246	12,287	0,9967
3,3	189,08	-0,1577	-0,9875	0,1597	27,113	0,0369	13,538	13,575	0,9973
3,4	194,81	-0,2555	-0,9668	0,2643	29,964	0,0334	14,965	14,999	0,9978
3,5	200,54	-0,3508	-0,9365	0,3746	33,115	0,0302	16,543	16,573	0,9982
3,6	206,26	-0,4425	-0,8968	0,4935	36,598	0,0273	18,285	18,313	0,9985
3,7	211,99	-0,5298	-0,8481	0,6247	40,447	0,0247	20,211	20,236	0,9988
3,8	217,72	-0,6119	-0,7910	0,7736	44,701	0,0224	22,339	22,362	0,9990
3,9	223,45	-0,6878	-0,7259	0,9474	49,402	0,0202	24,661	24,711	0,9992
4,0	229,18	-0,7568	-0,6536	1,1578	54,598	0,0183	27,290	27,308	0,9993
4,1	234,91	-0,8183	-0,5748	1,4235	60,340	0,0166	30,162	30,178	0,9995
4,2	240,64	-0,8716	-0,4903	1,7778	66,686	0,0150	33,336	33,351	0,9996
4,3	246,37	-0,9162	-0,4008	2,2858	73,700	0,0136	36,843	36,857	0,9996
4,4	252,10	-0,9516	-0,3073	3,0963	81,451	0,0123	40,719	40,732	0,9997
4,5	257,83	-0,9775	-0,2108	4,6373	90,017	0,0111	45,003	45,014	0,9998
4,6	263,56	-0,9937	-0,1122	8,8602	99,484	0,0101	49,737	49,747	0,9998
4,7	269,29	-0,9999	-0,0124	80,713	109,947	0,0091	54,969	54,978	0,9998
4,8	275,02	-0,9992	0,0875	-11,385	121,510	0,0082	60,751	60,759	0,9999
4,9	280,75	-0,9825	0,1865	-5,2675	134,290	0,0074	67,141	67,149	0,9999
5,0	286,48	-0,9589	0,2837	-3,3805	148,41	0,0067	74,203	74,210	0,9999
5,1	292,21	-0,9258	0,3780	-2,4494	164,02	0,0061	82,008	82,014	0,9999
5,2	297,94	-0,8835	0,4685	-1,8856	181,27	0,0055	90,633	90,639	0,9999
5,3	303,67	-0,8323	0,5544	-1,5013	200,34	0,0050	100,16	100,17	1,0000
5,4	309,40	-0,7728	0,6347	-1,2175	221,41	0,0045	110,70	110,71	1,0000
5,5	315,13	-0,7055	0,7087	-0,9956	244,69	0,0041	122,34	122,35	1,0000
5,6	320,86	-0,6313	0,7756	-0,8139	270,43	0,0037	135,21	135,22	1,0000
5,7	326,59	-0,5507	0,8347	-0,6597	298,87	0,0033	149,43	149,44	1,0000
5,8	332,32	-0,4646	0,8855	-0,5247	330,30	0,0030	165,15	165,15	1,0000
5,9	338,05	-0,3739	0,9275	-0,4031	365,04	0,0027	182,52	182,52	1,0000
6,0	343,77	-0,2794	0,9602	-0,2910	403,43	0,0025	201,71	201,72	1,0000
6,5	372,42	0,2151	0,9766	0,2203	665,14	0,0015	332,57	332,57	1,0000
7,0	401,07	0,6570	0,7539	0,8714	1096,6	0,0009	548,32	548,32	1,0000
8,0	458,37	0,9894	0,1455	-6,7997	2981,0	0,0003	1490,5	1490,5	1,0000
9,0	515,66	0,4121	-0,9111	-0,4523	8103,1	0,0001	4051,5	4051,5	1,0000
10,0	572,96	-0,5440	-0,8391	0,6484	22026	0,0000	11013	11013	1,0000

α°	arc α	α°	arc α	α°	arc α
0	0,0000	45	0,7854	90	1,5708
1	0175	46	8029	91	5882
2	0349	47	8203	92	6057
3	0524	48	8378	93	6232
4	0698	49	8552	94	6406
5	0,0873	50	0,8727	95	1,6581
6	1047	51	8901	96	6755
7	1222	52	9076	97	6930
8	1396	53	9250	98	7104
9	1571	54	9425	99	7279
10	0,1745	55	0,9599	100	1,7453
11	1920	56	9774	105	8326
12	2094	57	9948	110	9199
13	2269	58	1,0123	115	2,0071
14	2443	59	0,297	120	0,944
15	0,2618	60	1,0472	125	2,1817
16	2793	61	0647	130	2689
17	2967	62	0821	135	3562
18	3142	63	0996	140	4435
19	3316	64	1170	145	5307
20	0,3491	65	1,1345	150	2,6180
21	3665	66	1519	155	7053
22	3840	67	1694	160	7925
23	4014	68	1868	165	8798
24	4189	69	2043	170	9671
25	0,4363	70	1,2217	175	3,0543
26	4538	71	2392	180	1416
27	4712	72	2566	185	2289
28	4887	73	2741	190	3161
29	5061	74	2915	195	4034
30	0,5236	75	1,3090	200	3,4907
31	5411	76	3265	205	5779
32	5585	77	3439	210	6652
33	5760	78	3614	215	7525
34	5934	79	3788	220	8397
35	0,6109	80	1,3963	225	3,9270
36	6283	81	4137	230	4,0143
37	6458	82	4312	235	1015
38	6632	83	4486	240	1888
39	6807	84	4661	245	2761
40	0,6981	85	1,4835	250	4,3633
41	7156	86	5010	260	5379
42	7330	87	5184	270	7124
43	7505	88	5359	280	8869
44	7679	89	5533	300	5,2360
45	0,7854	90	1,5708	360	6,2832

Neugrad α	Altgrad	Neugrad α	Altgrad
0,01	0,00900	0,51	0,45900
02	01800	52	46800
03	02700	53	47700
4	03600	54	48600
05	04500	55	49500
0,06	0,05400	0,56	0,50400
07	06300	57	51300
08	07200	58	52200
09	08100	59	53100
10	09000	60	54000
0,11	0,09900	0,61	0,54900
12	10800	62	55800
13	11700	63	56700
14	12600	64	57600
15	13500	65	58500
0,16	0,14400	0,66	0,59400
17	15300	67	60300
18	16200	68	61200
19	17100	69	62100
20	18000	70	63000
0,21	0,18900	0,71	0,63900
22	19800	72	64800
23	20700	73	65700
24	21600	74	66600
25	22500	75	67500
0,26	0,23400	0,76	0,68400
27	24300	77	69300
28	25200	78	70200
29	26100	79	71100
30	27000	80	72000
0,31	0,27900	0,81	0,72900
32	28800	82	73800
33	29700	83	74700
34	30600	84	75600
35	31500	85	76500
0,36	0,32400	0,86	0,77400
37	33300	87	78300
38	34200	88	79200
39	35100	89	80100
40	36000	90	81000
0,41	0,36900	0,91	0,81900
42	37800	92	82800
43	38700	93	83700
44	39600	94	84600
45	40500	95	85500
0,46	0,41400	0,96	0,86400
47	42300	97	87300
48	43200	98	88200
49	44100	99	89100
50	45000	1,00	90000

Am Kreis mit Radius r ist die dem Mittelpunktswinkel α zugeordnete

$$\text{Bogenlänge } b = r \cdot \text{arc } \alpha = r \cdot \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{arc } 15,63^\circ \\ = 0,2618 \\ + 0,01096 \\ \approx 0,2728 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc } 226^\circ \\ = 3,4907 \\ + 0,4538 \\ = 3,9445 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc } \alpha = 3,9867 \\ 200^\circ \hat{=} 3,4907 \\ + 28^\circ \hat{=} 0,4887 \\ + 0,42^\circ \hat{=} 0,0073 \\ = 228,42^\circ \hat{=} 3,9867 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38,41768 \\ = 34,2000^\circ \\ + 0,3690^\circ \\ + 0,0068^\circ \\ = 34,5758^\circ \\ \approx 34,576^\circ \end{aligned}$$

18 Dezimalteile des Altgrads in Minuten und Sekunden

0,°	' "	0,°	' "	0,°	' "	0,°	' "
01	0' 36"	26	15' 36"	51	30' 36"	76	45' 36"
02	1' 12"	27	16' 12"	52	31' 12"	77	46' 12"
03	1' 48"	28	16' 48"	53	31' 48"	78	46' 48"
04	2' 24"	29	17' 24"	54	32' 24"	79	47' 24"
05	3' 0"	30	18' 0"	55	33' 0"	80	48' 0"
06	3' 36"	31	18' 36"	56	33' 36"	81	48' 36"
07	4' 12"	32	19' 12"	57	34' 12"	82	49' 12"
08	4' 48"	33	19' 48"	58	34' 48"	83	49' 48"
09	5' 24"	34	20' 24"	59	35' 24"	84	50' 24"
10	6' 0"	35	21' 0"	60	36' 0"	85	51' 0"
11	6' 36"	36	21' 36"	61	36' 36"	86	51' 36"
12	7' 12"	37	22' 12"	62	37' 12"	87	52' 12"
13	7' 48"	38	22' 48"	63	37' 48"	88	52' 48"
14	8' 24"	39	23' 24"	64	38' 24"	89	53' 24"
15	9' 0"	40	24' 0"	65	39' 0"	90	54' 0"
16	9' 36"	41	24' 36"	66	39' 36"	91	54' 36"
17	10' 12"	42	25' 12"	67	40' 12"	92	55' 12"
18	10' 48"	43	25' 48"	68	40' 48"	93	55' 48"
19	11' 24"	44	26' 24"	69	41' 24"	94	56' 24"
20	12' 0"	45	27' 0"	70	42' 0"	95	57' 0"
21	12' 36"	46	27' 36"	71	42' 36"	96	57' 36"
22	13' 12"	47	28' 12"	72	43' 12"	97	58' 12"
23	13' 48"	48	28' 48"	73	43' 48"	98	58' 48"
24	14' 24"	49	29' 24"	74	44' 24"	99	59' 24"
25	15' 0"	50	30' 0"	75	45' 0"	1,00	60' 0"

$$\begin{aligned}
 17,3147^\circ &= 17^\circ \\
 + & 18' 36'' \\
 + & 1' 40'' \\
 + & 2,52'' \\
 \hline
 &= 17^\circ 18' 52,92'' \\
 &\approx 17^\circ 18' 53''
 \end{aligned}$$

°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	3,60"	7,20"	10,80"	14,40"	18,00"	21,60"	25,20"	28,80"	32,40"
0,000	0,36"	0,72"	1,08"	1,44"	1,80"	2,16"	2,52"	2,88"	3,24"

Minuten und Sekunden in Dezimalteile des Altgrads

Min.	Grad	Min.	Grad	Sek.	Grad	Sek.	Grad
1'	0,016°	31'	0,516°	1"	0,00028°	31"	0,00861°
2	033'	32	533'	2	056	32	889
3	050	33	550	3	083	33	917
4	066'	34	566'	4	111	34	944
5	083'	35	583'	5	139	35	972
6	100	36	600	6	0,00167°	36	0,01000°
7	116'	37	616'	7	194	37	028
8	133'	38	633'	8	222	38	056
9	150	39	650	9	250	39	083
10	166'	40	666'	10	278	40	111
11'	0,183°	41'	0,683°	11"	0,00306°	41"	0,01139°
12	200	42	700	12	333	42	107
13	216'	43	716'	13	361	43	194
14	233'	44	733'	14	389	44	222
15	250	45	750	15	417	45	250
16	266'	46	766'	16	0,00444°	46	0,01278°
17	283'	47	783'	17	472	47	306
18	300	48	800	18	500	48	333
19	316'	49	816'	19	528	49	361
20	333'	50	833'	20	556	50	389
21'	0,350°	51'	0,850°	21"	0,00583°	51"	0,01417°
22	366'	52	866'	22	611	52	444
23	383'	53	883'	23	639	53	472
24	400	54	900	24	667	54	500
25	416'	55	916'	25	694	55	528
26	433'	56	933'	26	0,00722°	56	0,01556°
27	450	57	950	27	750	57	583
28	466'	58	966'	28	778	58	611
29	483'	59	983'	29	806	59	639
30	500	60	1,000	30	833	60	667

$$\begin{aligned}
 25^\circ 16' 33'' &= 25,00000^\circ \\
 + & 0,26667^\circ \\
 + & 0,00917^\circ \\
 \hline
 &= 25,27584^\circ \\
 &\approx 25,2758^\circ
 \end{aligned}$$

	z	$\lg z$		z	$\lg z$		z	$\lg z$
π	3,1416	0,4971	$\frac{1}{\pi}$	0,3183	0,5029-1	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,2533	0,0981
2π	6,2832	0,7982	$\frac{3}{4\pi}$	0,2387	0,3779-1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,5642	0,7514-1
3π	9,4248	0,9743	$\frac{180}{\pi}$	57,296	1,7581	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,3989	0,6009-1
4π	12,5664	1,0992	$\frac{1}{2\pi}$	0,1592	0,2018-1	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,7979	0,9019-1
$\frac{2\pi}{3}$	2,0944	0,3211	$\frac{1}{4\pi}$	0,0796	0,9008-2	$\sqrt{\frac{4}{\pi}}$	1,1284	0,0525
$\frac{4\pi}{3}$	4,1888	0,6221	π^2	9,8696	0,9943	$\sqrt{\frac{40}{\pi}}$	3,5682	0,5525
$\frac{\pi}{2}$	1,5708	0,1961	$4\pi^2$	39,478	1,5964	$\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$	1,4646	0,1657
$\frac{\pi}{3}$	1,0472	0,0200	$\frac{\pi^2}{4}$	2,4674	0,3922	e	2,7183	0,4343
$\frac{\pi}{4}$	0,7854	0,8951-1	π^3	31,006	1,4914	$\frac{1}{e}$	0,3679	0,5657-1
$\frac{\pi}{6}$	0,5236	0,7190-1	$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013	0,0057-1	M^*	0,4343	0,6378-1
$\frac{\pi}{180}$	0,0175	0,2419-2	$\frac{1}{4\pi^2}$	0,0253	0,4036-2	$\frac{1}{M}^{**}$	2,3026	0,3622
$\pi\sqrt{2}$	4,4429	0,6477	$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	e^2	7,3891	0,8686
$\pi\sqrt{3}$	5,4414	0,7357	$2\sqrt{\pi}$	3,5449	0,5496	$\frac{1}{e^2}$	0,1353	0,1314-1
$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	2,2214	0,3466	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,8862	0,9475-1	\sqrt{e}	1,6487	0,2171
$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	1,8138	0,2586	$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991	$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448

* $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10}$; ** $\frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = \ln 10$.

19

	z	$\lg z$		z	$\lg z$		z	$\lg z$
e^π	23,141	1,3644	$\frac{1}{g^2}$	0,0104	0,0167-2	$\pi\sqrt{2g}$	13,9155	1,1435
g^*	9,81	0,9917	\sqrt{g}	3,1321	0,4958	$\frac{\pi}{\sqrt{g}}$	1,0030	0,0013
g^2	96,236	1,9833	$\sqrt{2g}$	4,4294	0,6463	$\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$	2,0061	0,3023
$\frac{1}{g}$	0,1019	0,0083-1	$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0,3193	0,5042-1	$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$	0,7093	0,8508-1
$\frac{1}{2g}$	0,0510	0,7073-2	$\pi\sqrt{g}$	9,8398	0,9930	$\frac{\pi^2}{g}$	1,0061	0,0026

Höhere Potenzen einiger Primzahlen

20

n	2^n	n	2^n
1	2	16	65 536
2	4	17	131 072
3	8	18	262 144
4	16	19	524 288
5	32	20	1 048 576
6	64	21	2 097 152
7	128	22	4 194 304
8	256	23	8 388 608
9	512	24	16 777 216
10	1 024	25	33 554 432
11	2 048	26	67 108 864
12	4 096	27	134 217 728
13	8 192	28	268 435 456
14	16 384	29	536 870 912
15	32 768	30	1 073 741 824

n	3^n	n	3^n
1	3	16	43 046 721
2	9	17	129 140 163
3	27	18	387 420 489
4	81	19	1 162 261 467
5	243	20	3 486 784 401
6	729	21	10 460 353 203
7	2 187	22	31 381 059 609
8	6 561	23	94 143 178 827
9	19 683	24	282 429 536 481
10	59 049	25	847 288 609 443
11	177 147		
12	531 441		
13	1 594 323		
14	4 782 969		
15	14 348 907		

n	5^n	n	5^n	n	5^n	n	5^n	n	5^n
1	5	5	3 125	9	1 953 125	13	1 220 703 125	17	762 939 453 125
2	25	6	15 625	10	9 765 625	14	6 103 515 625	18	3 814 697 265 625
3	125	7	78 125	11	48 828 125	15	30 517 578 125	19	19 073 486 328 125
4	625	8	390 625	12	244 140 625	16	152 587 890 625	20	95 367 431 640 625

n	7^n	n	7^n	n	7^n	n	11^n	n	11^n
1	7	6	117 649	11	1 977 326 743	1	11	6	1 771 561
2	49	7	823 543	12	13 841 287 201	2	121	7	19 487 171
3	343	8	5 764 801	13	96 889 010 407	3	1 331	8	214 358 881
4	2 401	9	40 353 607	14	678 223 072 849	4	14 641	9	2 357 947 691
5	16 807	10	282 475 249	15	4 747 561 509 943	5	161 051	10	25 937 424 601

* Maßzahl der in m/s² ausgedrückten Fallbeschleunigung in 50° geographischer Breite.

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung	Beispiele	
Tera-	T	1 000 000 000 000 (10 ¹²) Einheiten	TΩ	
Giga-	G	1 000 000 000 (10 ⁹) Einheiten	GW	
Mega-	M	1 000 000 (10 ⁶) Einheiten	MΩ, MW, Mp	
Kilo-	k	1 000 (10 ³) Einheiten	km, kg, kp, kV, kW	
Hekto-	h	100 (10 ²) Einheiten	ha, hl	
Deka-	da	10 (10 ¹) Einheiten	dag	
Dezi-	d	0,1 (10 ⁻¹) Einheiten	dm, dg, dl	
Zenti-	c	0,01 (10 ⁻²) Einheiten	cm, cg, cl	
Milli-	m	0,001 (10 ⁻³) Einheiten	mm, mg, mp, ml, mV	
Mikro-	μ	0,000 001 (10 ⁻⁶) Einheiten	μV, μA, μW, μF, μm	
Nano-	n	0,000 000 001 (10 ⁻⁹) Einheiten	nF, nm	
Piko-	p	0,000 000 000 001 (10 ⁻¹²) Einheiten	pF, pm	
Größe, Formelzeichen	Maßeinheit Benennung	Kurzzeichen	Beziehung der Einheit zu den Grundeinheiten	Definition der Grundeinheit
Länge <i>l, b, h, d, r, s</i>	Meter Seemeile	m sm*	1 sm = 1852 m	<p>Das Meter ist der Abstand der Mittelstriche der auf dem Internationalen Meterprototyp angebrachten Strichgruppen bei der Gleichgewichtstemperatur zwischen Eis und reinem, luftgesättigtem Wasser unter dem Druck einer physikalischen Atmosphäre</p> <p>Auf der XI. Generalkonferenz der Meterkonvention 1960 wurde beschlossen, das oben definierte Meter auf eine bestimmte Lichtwellenlänge zurückzuführen. Ein Meter entspricht danach 1 650 763,73 Wellenlängen der Orange-Linie des Krypton-Isotops 86 im Vakuum.</p>
Fläche <i>A, S, F</i>	Quadratmeter Ar Hektar	m² a ha	1 m² = 1 m · 1 m 1 a = 10² m² 1 ha = 100 a = 10⁴ m²	
Volumen <i>V, τ</i>	Kubikmeter Liter	m³ l	1 m³ = 1 m · 1 m · 1 m 1 l = 1,000 028 · 10⁻³ m³	
ebener Winkel <i>α, β, γ,</i> <i>φ, ψ</i>	Radian	rad	1 rad = $\frac{\pi}{2}$ grad	
	rechter Winkel	⊥	1° = 1⊥/90 = 60'	
	Grad	°	1' = 1°/60 = 60"	
	Minute	'	1" = 1'/60	
	Sekunde	"	1 g = 1⊥/100	
	Neugrad, Gon	g	1 g = 100°	
Raumwinkel <i>ω, Ω</i>	Steradian	sr	1 c = 100°c	
Zeit <i>t, τ, z</i>	Sekunde	s	1 min = 60 s	
	Minute	min	1 h = 60 min = 3600 s	
	Stunde	h	1 d = 24 h = 86 400 s	
	Tag	d		
Frequenz <i>ν, f</i>	Hertz	Hz	1 Hz = 1 s⁻¹	
Geschwindigkeit <i>c, u, v</i>	Meter/Sekunde	m/s	1 m/s = 1 m s⁻¹	
	Knoten	kn*	1 kn = 1 sm/h = $\frac{1852}{3600}$ m s⁻¹	
Beschleunigung <i>a, b</i>	Meter/Quadratsekunde	m/s²	1 m/s² = 1 m s⁻²	

* Nur für Schifffahrt und Flugwesen zugelassen.

Größe, Formelzeichen	Maßeinheit Benennung	Kurz- zeichen	Beziehung der Einheit zu den Grundeinheiten	Definition der Grundeinheit
Winkel- geschwindig- keit ω	Radian/Se- kunde	rad/s	$1 \text{ rad/s} = 1 \text{ s}^{-1}$	
Winkel- beschleuni- gung β	Radian/Qua- dratsekunde	rad/s ²	$1 \text{ rad/s}^2 = 1 \text{ s}^{-2}$	
Masse m	Kilogramm Gramm, Tonne	kg g t	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$	Das Kilogramm ist die Masse des Inter- nationalen Kilo- grammprototyps
Dichte ρ, d	Kilogramm/ Kubikmeter	kg/m ³	$1 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ m}^{-3} \text{ kg}$	
Kraft F, P, K	Newton, Dyn, Kilopond, Pond	N dyn kp p	$1 \text{ N} = 1 \text{ m kg s}^{-2}$ $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$ $1 \text{ kp} = 9,806 65 \text{ N}$ $1 \text{ p} = 10^{-3} \text{ kp}$	
Druck p	Newton/Qua- dratmeter, Bar	N/m ² bar	$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ $= 10^5 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	
	technische Atmosphäre, physikalische Atmosphäre, Torr	at atm Torr	$1 \text{ at} = 10^4 \text{ kp/m}^2$ $= 98 066,5 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$ $1 \text{ atm} = 101 325 \text{ N/m}^2$ $= 101 325 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$ $1 \text{ Torr} = 1/760 \text{ atm}$ $= \frac{101 325}{760} \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	
Arbeit, Energie, Wärmemenge W, A, E, Q	Joule, Wattsekunde, Newtonmeter, Erg, Kalorie	J Ws Nm erg cal	$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}$ $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$	
Leistung P, N	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}$	Bis auf weiteres darf noch folgende Einheit verwendet werden: Pferdestärke, Kurzzeichen PS; $1 \text{ PS} = 735,498 75 \text{ W}$ $= 75 \text{ kpm/s}$
	Voltampere	VA	$1 \text{ VA} = 1 \text{ W}$ für elektr. Scheinleistungen	
	Var	var	$1 \text{ var} = 1 \text{ W}$ für elektr. Blindleistungen	
elektrische Stromstärke I	Ampere	A		Das Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elek- trischen Stromes durch zwei geradlinige, par- allele, unendlich lange Leiter der relativen Permeabilität 1 und von vernachlässig- barem Querschnitt, die einen Abstand von
elektrische Spannung U	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$	
elektrischer Widerstand R	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-2}$	

Größe, Formelzeichen	Maßeinheit Benennung	Kurz- zeichen	Beziehung der Einheit zu den Grundeinheiten	Definition der Grundeinheit
elektrischer Leitwert G	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$ $= 1 \text{ m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$	1 m haben und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im leeren Raum je 1 m Länge der Doppelleitung $2 \cdot 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2}$ beträgt.
Elektrizitäts- menge Q, q	Coulomb, Amperesekunde	C As	$1 \text{ C} = 1 \text{ As} = 1 \text{ s A}$	
elektrische Kapazität C	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ $= 1 \text{ m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$	
elektrische Verschiebung D	Coulomb/Qua- dratmeter	C/m^2	$1 \text{ C/m}^2 = 1 \text{ m}^{-2} \text{ s A}$	
elektrische Feldstärke E	Volt/Meter	V/m	$1 \text{ V/m} = 1 \text{ m kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$	
magnetischer Fluß Φ, Ψ	Weber, Voltsekunde	Wb Vs	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$	
Induktivität L	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ $= 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$	
magnetische Induktion B	Weber/Qua- dratmeter, Voltsekunde/ Quadratmeter	Wb/m^2 Vs/m^2	$1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ Vs/m}^2$ $= 1 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$	
magnetische Feldstärke H	Ampere/Meter	A/m	$1 \text{ A/m} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ A}$	
Kelvin- Temperatur T, Θ, Y	Grad Kelvin	$^{\circ}\text{K}$	Bei der Angabe von Temperatur- differenzen werden die Namen Grad Kelvin und Grad Celsius durch Grad, die Kurzzeichen $^{\circ}\text{K}$ und $^{\circ}\text{C}$ durch grad ersetzt.	
Celsius- Temperatur t, θ, y	Grad Celsius	$^{\circ}\text{C}$		
Lichtstärke I	Candela	cd		Die Candela ist die Lichtstärke, mit der ein Schwarzer Strah- ler bei der Temperatur des beim Druck einer physikalischen Atmo- sphäre erstarrenden Platins senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet, wenn diese $1/600\,000 \text{ m}^2$ beträgt.
Leuchtdichte B, L	Candela/Qua- dratmeter, Stilb	cd/m^2	$1 \text{ cd/m}^2 = 1 \text{ m}^{-2} \text{ cd}$	
		sb	$1 \text{ sb} = 10^{-4} \text{ cd/m}^2$ $= 1 \text{ cd/cm}^2$	
Lichtstrom Φ, F	Lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$	
Beleuch- tungsstärke E	Lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$ $= 1 \text{ m}^{-2} \text{ cd sr}$	

Ausländische und nicht mehr gültige Maße

22

1 geogr. Meile = 7420,4 m $\hat{=}$ $\frac{1}{15}$ Äquatorgrad	1 Berkowetz (russ.) = 163,85 kg
1 Seemeile = 1852 m $\hat{=}$ $\frac{1}{60}$ Meridiangrad	1 Pud (russ.) = 16,38 kg
1 statute mile (engl.) = 1609,34 m; 1 km = 0,6214 st. mi.	1 pound (engl.) = 0,4536 kg; 1 kg = 2,2046 lbs
1 Zoll (engl.) = 1" = 25,400 mm	1 ounce (engl.) = $\frac{1}{16}$ lb = 28,35 g
1 foot (engl.) = 12" = 0,3048 m; 1 m = 3,2808 ft	1 hundredweight (engl.) = 112 lbs = 50,8024 kg
1 yard (engl.) = 0,9144 m; 1 m = 1,0933 yd	1 long-ton (engl.) = 20 cwt = 2240 lbs = 1016,0475 kg
1 fathom (engl.) = 1,8288 m (Tiefenmaß, 1 Faden)	1 short-ton (am.) = 2000 lbs = 907,19 kg
1 Sashen (russ.) = 2,1336 m	1 Registertonne = 2,832 m ³ ; 1 m ³ = 0,3531 Registertonnen
1 Werst (russ.) = 500 Sashen = 1,0668 km	1 Krushka (russ.) = 1,230 l
1 Morgen (preuß.) = 25,53 a; 1 ha = 3,92 Morgen	1 Botschka (russ.) = 4,9195 hl
1 Morgen (sächs.) = 27,67 a; 1 ha = 3,62 Morgen	1 barrel Petroleum (am.) = 158,988 l
1 Desjatine (russ.) = 1,0925 ha	1 gallon (engl.) = 4,544 l
1 Pfund = 0,500 kg 1 Zentner = 50 kg	1 bushel = 35,237 l (am.) = 36,349 l (engl.)
	1 horsepower (engl.) = 1,0139 PS; 1 PS = 0,9863 HP

Griechisches Alphabet

23

Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua	Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua	Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua
A	α	Alpha	A	α		I	ι	Jota
B	β	Beta	B	β		K	κ	Kappa
Γ	γ	Gamma	C	γ		Λ	λ	Lambda
Δ	δ	Delta	D	δ		M	μ	My
E	ε	Epsilon	E	ε		N	ν	Ny
Z	ζ	Zeta	Z	ζ		Ξ	ξ	Xi
H	η	Eta	H	η		O	ο	Omikron
Θ	θ	Theta	Th	θ		Π	π	Pi
						I	ι	
						K	κ	
						L	λ	
						M	μ	
						N	ν	
						X	ξ	
						Ö	δ	
						P	ρ	
						ϱ	ϱ	
						Σ	σς	
						T	τ	
						Υ	υ	
						Φ	φ	
						Χ	χ	
						Ψ	ψ	
						Ω	ω	
						R(h)	r(h)	
						S	s	
						T	t	
						Y	y	
						Ph	ph	
						Ch	ch	
						Ps	ps	
						Ö	ö	

Deutsches (Fraktur-) Alphabet

24

Anti- qua	Fraktur Schrift	Druck	Anti- qua	Fraktur Schrift	Druck	Anti- qua	Fraktur Schrift	Druck	Anti- qua	Fraktur Schrift	Druck
A, a	<i>A, a</i>	A, a	H, h	<i>H, h</i>	H, h	N, n	<i>N, n</i>	N, n	T, t	<i>T, t</i>	T, t
B, b	<i>B, b</i>	B, b	I, i	<i>I, i</i>	I, i	O, o	<i>O, o</i>	O, o	U, u	<i>U, u</i>	U, u
C, c	<i>C, c</i>	C, c	J, j	<i>J, j</i>	J, j	P, p	<i>P, p</i>	P, p	V, v	<i>V, v</i>	V, v
D, d	<i>D, d</i>	D, d	K, k	<i>K, k</i>	K, k	Q, q	<i>Q, q</i>	Q, q	W, w	<i>W, w</i>	W, w
E, e	<i>E, e</i>	E, e	L, l	<i>L, l</i>	L, l	R, r	<i>R, r</i>	R, r	X, x	<i>X, x</i>	X, x
F, f	<i>F, f</i>	F, f	M, m	<i>M, m</i>	M, m	S, s	<i>S, s</i>	S, s	Y, y	<i>Y, y</i>	Y, y
G, g	<i>G, g</i>	G, g							Z, z	<i>Z, z</i>	Z, z

Römische Zahlzeichen

25

I	1	V	5	X	10	L	50	C	100	D	500	M	1000
I	1	II	2	III	3	IV	4	V	5	VI	6	VII	7
XX	20	XXX	30	XL	40	L	50	LX	60	LXX	70	LXXX	80
CC	200	CCC	300	CD	400	D	500	DC	600	DCC	700	DCCC	800
								CM	900	XC	90	IC	99
										XM	990	M	1000
MCDXCVI 1496 MDCCLXXXIII 1883 MCMLXIII 1963													

Zeichen	Sprechweise, Erläuterung	Zeichen	Sprechweise, Erläuterung
...	und so weiter (bis)	\triangle	Dreieck
$=$	Beispiele: $k = 1, 2, \dots, n$; $a = 1, 41421 \dots$ ist gleich	\cong	kongruent
\equiv	identisch gleich	\sphericalangle	Winkel
	Beispiel: $f(x) \equiv 0$. Die Funktion f hat an jeder Stelle x den Wert Null	\overline{AB}	Strecke AB
\neq	nicht gleich, ungleich	\overbrace{AB}	Bogen AB
$\not\equiv$	nicht identisch gleich	$ z $	Betrag von z
\sim	proportional, ähnlich	$\text{arc } z$	Arkus z
\approx	angenähert, nahezu gleich, rund (Die letzte Stelle wird mit Hilfe der Rundungsregeln ermittelt.)	$n!$	n Fakultät
$\hat{=}$	entspricht	$\binom{n}{p}$	n über p Binomialkoeffizient
$<$	kleiner als	Σ	Summe
$>$	größer als		Die untere Grenze und die Summationsveränderliche stehen unter, die obere Grenze über dem Summenzeichen.
\leq	kleiner od. gleich, höchstens gleich	Π	Produkt
\geq	größer od. gleich, mindestens gleich	$\sqrt{\quad}; \sqrt[n]{\quad}$	Quadratwurzel; n -te Wurzel aus
\approx	klein gegen } von anderer Größen-	i, j	imaginäre Einheit, $i^2 = j^2 = -1$ (j wird in der Wechselstromtechnik verwendet)
\gg	groß gegen } ordnung	π	Pi Verhältnis Kreisumfang zum Durchmesser dieses Kreises $\pi = 3,14159 \dots$
$+$	plus	$f(x)$	f von x
$-$	minus		Wert der Funktion f an der Stelle x . Anstatt f und x auch andere Buchstaben, z. B. φ (t).
\cdot, \times	mal	∞	unendlich
$\div, /, :$	durch, geteilt durch, zu	(a, b)	offenes Intervall a b Beispiel: (a, b) bedeutet $a < x < b$
$\%$	Prozent, von hundert	$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall a b oder Beispiel: $[a, b]$ bedeutet $a \leq x \leq b$
‰	Promille, von tausend	$\langle a, b \rangle$	
\parallel	parallel		
\nparallel	nicht parallel		
$\uparrow\uparrow$	gleichsinnig parallel		
$\uparrow\downarrow$	gegensinnig parallel		
\perp	rechtwinklig zu, senkrecht auf		

Zeichen	Sprechweise, Erläuterung
\rightarrow	gegen, nähert sich unbegrenzt, strebt nach, konvergiert nach
\lim	Beispiel: $x \rightarrow a$ bedeutet x strebt nach a Limes Beispiel: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bedeutet $f(x)$ strebt gegen den Grenzwert b , wenn $x \rightarrow a$ in beliebiger Weise gegen a strebt
Δf	Delta f Differenz zweier Funktionswerte
$f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$	f Strich x , f Zweistrich x , \dots , f n Strich x Ableitung 1., 2., \dots , n -ter Ordnung der Funktion $f(x)$
$y', y'', \dots, y^{(n)}$	y Strich, y Zweistrich, \dots , y n Strich 1., 2., \dots , n -te Ableitung von y
d	Differentialzeichen
$df(x)$	Differential der Funktion $f(x)$ $df(x) = f'(x) dx$
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$	dy nach dx , d zwei y nach dx hoch zwei (nach dx Quadrat), dny nach dx hoch n ; 1., 2., \dots , n -ter Differentialquotient
\int	Integralzeichen
$\int_b^f f(x) dx$	Integral f von x dx Unbestimmtes Integral
$\int_a^f f(x) dx$	Integral $f(x) dx$ von a bis b Bestimmtes Integral; a und b sind die Grenzen
$F(x) \Big _a^b$	$F(x)$ zwischen den Grenzen a und b

Zeichen	Sprechweise		
\log_a	Logarithmus zur Basis a		
\lg	Zehnerlogarithmus $\lg x = \log_{10} x$		
\lg	Zweierlogarithmus $\lg x = \log_2 x$		
\ln	Natürlicher Logarithmus $\ln x = \log_e x$		
M_a	Modul des Logarithmensystems zur Basis a		
	$M_a = \frac{1}{\ln a}$, $M_{10} = 0,434\ 29 \dots = \lg e = \frac{1}{\ln 10}$		
\sin	Sinus		
\cos	Kosinus		
\tan	Tangens		
\cot	Kotangens		
\arcsin	Arkussinus		
\arccos	Arkuskosinus		
\arctan	Arkustangens		
arccot	Arkuskotangens		
\sinh	Hyperbelsinus		
\cosh	Hyperbelkosinus		
\tanh	Hyperbeltangens		
\coth	Hyperbelkotangens		
arsinh	Areasinus		
arcosh	Areakosinus		
artanh	Areatangens		
arcoth	Areakotangens		
	Trigonometrische Funktionen oder Winkelfunktionen		
	Arkusfunktionen, Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen		
	Hyperbelfunktionen. Es können auch kürzere Bezeichnungen wie sh, ch, th, cth verwendet werden		
	Areafunktionen Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen		
Mathematische Zeichen aus der Mengenlehre			
\in	Element aus	\cup	vereinigt
\notin	nicht Element aus	\cap	geschnitten
\subset	enthalten in	\sim	äquivalent
\supset	echt enthalten in		

2. Grundrechenoperationen

2.1. Bezeichnungen

1. Stufe	Addition , addieren Summand plus Summand gleich Summe: $a + b = c$.
	Subtraktion , subtrahieren (Umkehrung der Addition) Minuend minus Subtrahend gleich Differenz: $c - b = a$. a ist diejenige Zahl, zu der man b addieren muß, um c zu erhalten. Man kann die Zahl b subtrahieren, indem man die entgegengesetzte Zahl $(-b)$ addiert: $c - b = c + (-b)$.
2. Stufe	Multiplikation , multiplizieren Faktor mal Faktor gleich Produkt: $a \cdot b = c$. Im Falle natürlicher Zahlen kann man die Multiplikation als wiederholte Addition gleicher Summanden erklären.
	Division , dividieren (Umkehrung der Multiplikation) Dividend geteilt durch Divisor gleich Quotient: $c : b = a$ ($b \neq 0$). a ist diejenige Zahl, die mit b multipliziert c ergibt. Man kann durch die Zahl b dividieren, indem man mit der reziproken Zahl $\frac{1}{b}$ dieser Zahl multipliziert: $c : b = c \cdot \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$).

2.2. Grundrechenoperationen mit Null und Eins ($a \neq 0$)

$$a + 0 = a; \quad a - 0 = a; \quad 0 - a = -a$$

$$a \cdot 0 = 0; \quad a \cdot 1 = a; \quad a : 0 \text{ (nicht erklärt); } a : 1 = a; \quad 0 : a = 0$$

2.3. Gesetze der Addition und Multiplikation

Kommutationsgesetz	$a + b = b + a$ $12 + 2 = 2 + 12$	$a \cdot b = b \cdot a$ $12 \cdot 2 = 2 \cdot 12$
Assoziationsgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $3 + (4 + 2) = (3 + 4) + 2$ $3 + 6 = 7 + 2$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $3 \cdot (4 \cdot 2) = (3 \cdot 4) \cdot 2$ $3 \cdot 8 = 12 \cdot 2$
Distributionsgesetz	$a \cdot (b + c) = ab + ac$ $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$ $3 \cdot 6 = 12 + 6$	

2.4. Regeln für das Rechnen mit Klammerausdrücken (Hierbei sind a, b, c und d beliebige Zahlen)

Addition:	$a + (b + c) = a + b + c$; $a + (b - c) = a + b - c$
Subtraktion:	$a - (b + c) = a - b - c$; $a - (b - c) = a - b + c$
Multiplikation:	$a(b + c) = ab + ac$; $a(b - c) = ab - ac$ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$; $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$ $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$; $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
Spezialfall: binomische Formeln	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Division:	$(a + b) : c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$); $(a - b) : c = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$)

2.5. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen (Grundrechenoperationen der 3. Stufe)

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Basis hoch Exponent gleich Potenz: $a^n = c$ ($a \neq 0$).

Im Falle natürlicher Exponenten kann man das Potenzieren als wiederholtes Multiplizieren gleicher Faktoren erklären.

Definitionen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \text{ natürlich})$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Beachte:

$$0^n = 0 \quad (n \neq 0); \quad 0^0 \text{ nicht erklärt}$$

Gesetze für das Rechnen mit Potenzen:

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 2. a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

(m, n ganzzahlig;

$$3. a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m; \quad 4. (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$a \cdot b \neq 0$;

a, b beliebig reell)

Wurzeln (Radizieren, i. Umkehrung des Potenzierens)

Definition:

Die n -te Wurzel aus dem Radikanden b ist gleich demjenigen nicht-negativen Wert a , der mit n potenziert b ergibt: $\sqrt[n]{b} = a$ ($b \geq 0$; n natürlich). Hierin ist n der Wurzelexponent, b der Radikand und a der Wurzelwert.

Für $\sqrt[n]{b}$ schreibt man auch $b^{\frac{1}{n}}$.

Beachte:

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad (n \text{ natürlich}); \quad \sqrt[n]{1} = 1 \quad (n \text{ natürlich})$$

$$\sqrt[n]{a} \text{ (nicht erklärt)}$$

Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln:

$$1. \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad 2. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

(m, n natürlich;
 $a \geq 0$; $b > 0$)

$$3. \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad 4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition:

Für rationale Zahlen $r = \frac{p}{q}$ (p, q ganzzahlig, $q > 0$) und $a > 0$ gilt:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Für diese Potenzen gelten die oben genannten Gesetze 1 bis 4 für das Rechnen mit Potenzen.

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

Für eine positive Basis a kann der Potenzbegriff auch auf den Fall nichtrationaler Exponenten α erweitert werden.

Ist r_n eine beliebige Folge rationaler Zahlen, die gegen α strebt, so kann man definieren: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$.

Für diese Potenzen gelten (bei positiver Basis) ebenfalls die Gesetze 1 bis 4 für das Rechnen mit Potenzen.

Logarithmen (Logarithmieren, 2. Umkehrung des Potenzierens)

Definition:

Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl c , mit der man a potenzieren muß, um b zu erhalten:

$$c = \log_a b \quad (a, b \text{ positiv; } a \neq 1).$$

Hierbei heißen b der Numerus, a die Basis und c der Logarithmus.

Es gilt: $a^{\log_a b} = b$

Beachte:

Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen: (gleiche Basen; $b, b_1, b_2 > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$; r beliebig reell)

$$\log_a 1 = 0 \quad (a \neq 1, \text{ positiv}); \quad \log, a \text{ nicht erklärt}$$

$$1. \log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$

$$2. \log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2; \quad 3. \log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Insbesondere gilt, falls $r = \frac{1}{n}$ ($n \neq 0$) ist:

$$3. a) \log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$4. \log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

$$5. \log_a a^c = \frac{\log_a c}{\log_a a^*}$$

(verschiedene Basen; $a, a^*, c > 0$, aber ungleich 1)

3. Gleichungen

3.1. Lineare Gleichungen

Eine Gleichung mit einer Unbekannten

Durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen und der Regeln für das Rechnen mit Klammernausdrücken kann eine derartige Gleichung auf die

Normalform $ax + b = 0$ (a, b konstant)

gebracht werden. Zur Lösung dieser Gleichung werden folgende Fälle unterschieden:

I. $a \neq 0$

Dann ist $x = -\frac{b}{a}$ die einzige Lösung dieser Gleichung.

II. $a = 0$

II. a) $b \neq 0$. Die Gleichung besitzt keine Lösung.

II. b) $b = 0$. Jede Zahl x ist Lösung dieser Gleichung.

Beispiel:

$$\frac{2x + 5}{3} = \frac{3x + 7}{7}$$

Ermittlung der Lösung $x = x_0$:

$$\frac{2x_0 + 5}{3} = \frac{3x_0 + 7}{7}$$

$$14x_0 + 35 = 9x_0 + 21$$

$$\text{Normalform: } 5x_0 + 14 = 0$$

$$x_0 = -\frac{14}{5}$$

Probe:

$$l. \text{ Seite: } \frac{2 \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) + 5}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$r. \text{ Seite: } \frac{3 \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) + 7}{7} = -\frac{1}{5}$$

Formeln

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten

Durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen und der Regeln für das Rechnen mit Klammersymbolen kann eine derartige Gleichung auf die Form

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ konstant})$$

gebracht werden.

Zur Lösung dieser Gleichung werden folgende Fälle unterschieden:

I. $b \neq 0$

$$\text{Dann erhält man } y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Setzt man hier auf der rechten Seite beliebige Werte für x ein und rechnet die entsprechenden Werte für y aus, so ist jedes derartige Paar x, y Lösung dieser Gleichung, und man erhält auf diese Weise alle Lösungen der Gleichung.

II. $b = 0$

In diesem Fall liegt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten vor.

Beispiel:

$$\frac{12}{9}(6 - 3x) = \frac{8}{3}y$$

$$3x + 2y = 6$$

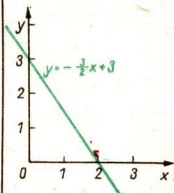
$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Einige Lösungspaare:

x	0	2	6
y	3	0	-6

Grafische Darstellung:

Die Koordinaten x_i und y_i aller Punkte $P_i(x_i; y_i)$, die auf der Geraden $y = -\frac{3}{2}x + 3$ liegen, sind Lösungen dieser Gleichung.



Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen und der Regeln für das Rechnen mit Klammersymbolen kann ein derartiges Gleichungssystem auf die Form

$$(1) \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$(2) \quad a_2x + b_2y = c_2$$

gebracht werden. Dabei sind a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 und c_2 Konstanten; x und y sind Unbekannte.

Zur Lösung dieses Gleichungssystems werden folgende Fälle unterschieden:

I. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

In diesem Fall gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems. Sie lautet:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Man kann so verfahren, daß man zunächst eine Unbekannte eliminiert. Hierzu wird eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst und der gefundene Ausdruck in die andere Gleichung eingesetzt (substituiert). Man erhält dadurch eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiel:

$$(1) \quad 5x + 4y = 8$$

$$(2) \quad 2x - y = 11$$

Überprüfung:

$$5 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \neq 0$$

Einsetzen in die Lösungsformel:

$$x = \frac{8 \cdot (-1) - 11 \cdot 4}{5 \cdot (-1) - 2 \cdot 4} = \frac{-52}{-13} = 4$$

$$y = \frac{5 \cdot 11 - 2 \cdot 8}{5 \cdot (-1) - 2 \cdot 4} = -3$$

Ausführliche Lösung:

$$(1) \quad 5x + 4y = 8$$

$$(2) \quad 2x - y = 11$$

$$(2a) \quad y = 2x - 11$$

Substitution von $y = 2x - 11$ in (1):

$$(1a) \quad 5x + 4(2x - 11) = 8$$

$$x = 4$$

Substitution von $x = 4$ in (2a):

$$(2b) \quad y = 2 \cdot 4 - 11$$

$$y = -3$$

Grafische Lösung:

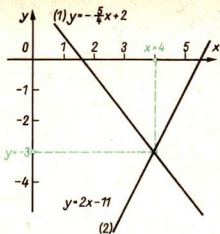
Man faßt jede der beiden Gleichungen als analytischen Ausdruck einer linearen Funktion auf und zeichnet die Bilder in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Das Lösungspaar erhält man als Koordinaten des Schnittpunktes.

$$\text{II. } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

In diesem Fall ist entweder die linke Seite der Gleichung (1) ein Vielfaches (k -faches) der linken Seite der Gleichung (2), oder die linke Seite der Gleichung (2) ist das k -fache der Gleichung (1), d. h., die linken Seiten sind voneinander abhängig.

Nun werden zwei Fälle unterschieden:

II. a) Auch die rechte Seite der Gleichung (1) ist das k -fache der rechten Seite der Gleichung (2), bzw. die rechte Seite der Gleichung (2) ist das k -fache der Gleichung (1). Dann sind die beiden Gleichungen **voneinander abhängig**. Zur Lösung eines solchen Gleichungssystems genügt es, die eine Gleichung zu lösen, von der die andere das k -fache ist. Es gilt also eine Gleichung mit zwei Unbekannten zu lösen.



Beispiel:

$$(1) \quad 2x = 3y - 1$$

$$(2) \quad 7 = 21y - 14x$$

$$(1a) \quad 2x - 3y = -1$$

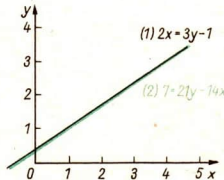
$$(2a) \quad 14x - 21y = -7$$

Die Gleichung (2a) ist das 7fache der Gleichung (1a).

Wir lösen nur (1a):

$$(1b) \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

x	0	1	3
y	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{7}{3}$

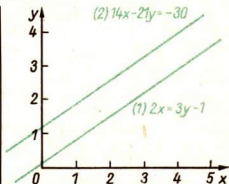


II. b) Die rechte Seite der Gleichung (1) bzw. (2) ist nicht das k -fache der rechten Seite der Gleichung (2) bzw. (1). In diesem Fall besitzt das Gleichungssystem **keine Lösung**.

Beispiel:

$$(1) \quad 2x - 3y = -1$$

$$(2) \quad 14x - 21y = -30$$



Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten

Allgemeines Eliminationsverfahren: Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt den gefundenen Ausdruck in die übrigen Gleichungen ein. In einer der noch übrigbleibenden Gleichungen löst man nach einer weiteren Unbekannten auf und setzt den gefundenen Ausdruck in jede der nunmehr übrigbleibenden Gleichungen ein. So fährt man fort und versucht, die Anzahl der Gleichungen auf eine zu reduzieren. Stößt man bei dieser Reduktion auf einen Widerspruch, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Beispiel:

$$5x - 3y + 2z + u = 4$$

$$3x - 2y + z - 5u = 2$$

$$2x + y - z + 2u = 1$$

$$6x - 4y + 2z + u = 0$$

$$u = 4 - 5x + 3y - 2z$$

$$28x - 17y + 11z = 22$$

$$8x - 7y + 5z = 7$$

$$x - y = -4$$

$$y = x + 4$$

Formeln

Anderenfalls hat es, je nachdem, ob diese letzte Gleichung nur eine oder mehrere Unbekannte enthält, eine bzw. mehrere Lösungen.

$$\begin{aligned} 11x + 11z &= 90 \\ x + 5z &= 35 \\ \hline x &= -5z + 35 \\ z &= \frac{295}{44} \\ x &= \frac{65}{44}; y = \frac{241}{44}; u = -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

3.2. Quadratische Gleichungen

Durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen und der Regeln für das Rechnen mit Klammerausdrücken kann eine quadratische Gleichung auf die allgemeine Form

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (A \neq 0; A, B, C \text{ konstant})$$

gebracht werden.

Über das Vorhandensein von reellen Lösungen entscheidet die

$$\text{Diskriminante } D = B^2 - 4AC$$

Man erhält im Falle $D > 0$ die beiden Lösungen

$$(*) \quad x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \quad (\text{Beispiel 1}).$$

Im Falle $D = 0$ fallen diese beiden Lösungen zusammen (Doppellösung).

Im Falle $D < 0$ gibt es keine reelle Lösung.

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung wird häufig nach Division durch A auf die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht. In diesem Falle geht die Lösungsformel (*) in

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

über (Beispiel 2).

Unter Benutzung der Lösungen x_1 und x_2 kann im Falle $D \geq 0$ die linke Seite der Normalform folgendermaßen umgeformt werden (Zerlegung in Linearfaktoren):

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Multipliziert man die rechte Seite aus, so erkennt man die Beziehungen (VIETAScher Wurzelsatz):

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Grafische Lösung:

Zerlegung in zwei Funktionen über

$$x^2 = -px - q$$

in

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = -px - q.$$

Die Normalparabel $y = x^2$ hat mit der Geraden $y = -px - q$ entweder zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam (Beispiel 3).

Beispiel 1:

$$6x^2 + 7x - 5 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 169 > 0$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2 \cdot 6} = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$$

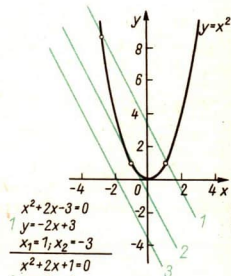
Beispiel 2:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -2$$

$$x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -3$$

Beispiel 3:



$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$1 \quad y = -2x + 3$$

$$x_1 = 1; x_2 = -3$$

$$x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$2 \quad y = -2x - 1$$

$$x_{1,2} = -1$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$3 \quad y = -2x - 4$$

keine reellen Lösungen

3.3. Algebraische Gleichungen n-ten Grades

Durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen und der Regeln für das Rechnen mit Klammerausdrücken kann eine algebraische Gleichung auf die Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0$$

gebracht werden. Kennt man eine Lösung x_1 dieser Gleichung n-ten Grades, die man durch Probieren gefunden hat, so kann man auf der linken Seite dieser Gleichung den Linearfaktor $(x - x_1)$ abspalten und damit die Gleichung auf eine $n - 1$ -ten Grades reduzieren.

Beispiel:

Die kubische Gleichung $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ hat, wie man durch Probieren findet, die Lösung $x_1 = 1$. Man erhält

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x - 1)(x^2 - 5x + 4).$$

Die beiden anderen Lösungen findet man aus der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$$

$$x_2 = 4; \quad x_3 = 1.$$

In diesem Beispiel bilden x_1 und x_3 eine Doppellösung.

3.4. Spezielle algebraische Gleichungen (Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen reduzieren lassen.)

Biquadratische Gleichungen der Form $Ax^4 + Bx^2 + C = 0 \quad (A \neq 0)$

Diese Gleichung ist eine quadratische Gleichung für x^2 . Man setzt $x^2 = z$ und löst die Gleichung $Az^2 + Bz + C = 0$. Im Falle $D = B^2 - 4AC \geq 0$ erhält man die Lösungen z_1 und z_2 . Sind diese beiden Lösungen negativ, so hat die Gleichung $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ keine reellen Lösungen. Ist $z_1 \geq 0$ und $z_2 < 0$, so hat die Gleichung die reellen Lösungen $x_1 = \sqrt{z_1}$ und $x_2 = -\sqrt{z_1}$ und nur diese. Ist $z_1 \geq 0$ und auch $z_2 \geq 0$, so erhält man die Lösungen

$$x_1 = \sqrt{z_1}, \quad x_2 = -\sqrt{z_1}, \quad x_3 = \sqrt{z_2}, \quad x_4 = -\sqrt{z_2}.$$

Symmetrische Gleichungen der Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0)$

Eine solche Gleichung läßt sich durch Division durch x^2 auf

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

zurückführen. Nach der Substitution $z = x + \frac{1}{x}$ erhält man dann die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c - 2a = 0$. Nach Auflösung dieser Gleichung findet man x aus der Gleichung $z = x + \frac{1}{x}$ bzw. aus $x^2 - zx + 1 = 0$.

3.5. Exponentialgleichungen

Eine Gleichung der Form $a^x = b \cdot (a > 0; a \neq 1; b > 0)$ läßt sich durch Logarithmieren lösen:

$$x \lg a = \lg b$$

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Beispiel:

$$2^x = 511$$

$$x = \frac{\lg 511}{\lg 2}$$

$$x \approx 8,998$$

3.6. Goniometrische Gleichungen

Zur Lösung der goniometrischen Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0, \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

dividiert man diese durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ und sucht einen Winkel α , für den $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

und $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ist. Dann geht die Gleichung über in

$$\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \equiv \sin(x + \alpha) + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Formeln

$$\text{oder } \sin(x + \alpha) = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Diese Gleichung hat dann und nur dann eine Lösung, wenn $c^2 \leq a^2 + b^2$ ist.

Beispiel:

$$6 \sin x + 8 \cos x = 1$$

Ermittlung der Lösung $x = x_0$:

$$6 \sin x_0 + 8 \cos x_0 = 1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\frac{3}{5} \sin x_0 + \frac{4}{5} \cos x_0 = \frac{1}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha \sin x_0 + \sin \alpha \cos x_0 = 0,1$$

$$\sin(x_0 + \alpha) = 0,1.$$

Man sucht nun für die rechte Seite der Gleichung einen Winkel β , so daß gilt:

$$\sin \beta = 0,1.$$

Für diesen Winkel β ist dann $x_0 = \beta - \alpha$ eine Lösung, denn durch Einsetzen findet man:

$$6 \sin(\beta - \alpha) + 8 \cos(\beta - \alpha) = 1$$

$$6(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) + 8(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = 1$$

$$\sin \beta (6 \cos \alpha + 8 \sin \alpha) + \cos \beta (8 \cos \alpha - 6 \sin \alpha) = 1$$

$$0,1 \left(\frac{18}{5} + \frac{32}{5} \right) + \cos \beta \left(\frac{24}{5} - \frac{24}{5} \right) = 1$$

Aus der Tafel entnimmt man:

$$x_1 \approx -47,4^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 \approx 12,1^\circ + k \cdot 360^\circ$$

4. Binomische Formeln; Binomischer Satz

4.1. Binomische Formeln

2. Potenz

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

3. Potenz

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4. Potenz

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

5. Potenz

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$

6. Potenz

$$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$$

Bildungsgesetz für die Koeffizienten (PASCALSches Dreieck)

Exponent

0

1

2

3

4

5

6

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Für beliebige reelle a, b gilt $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}), (n = 1, 2, \dots)$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^n b^n - \dots + a^2 b^{2n-2} - a b^{2n-1} + b^{2n}), (n = 0, 1, 2, \dots)$$

4.2. Permutationen

Definition:

Jede Anordnung von n Elementen nennt man eine Permutation dieser Elemente. Ihre Anzahl ist:

$$P(n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$0! = 1$$

Beispiel: 3 Elemente

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

$$P(3) = 3! = 6$$

Rekursionsformel:

$$P(n) = n \cdot P(n - 1)$$

1.3. Binomialkoeffizienten (n beliebig reell; p natürlich)

Definition:

$$\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(p-1)]}{p!}; \quad \binom{n}{0} = 1$$

Für natürliche Zahlen $n \geq p$ gilt:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

1.4. Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$$

5. Zahlenfolgen und Reihen; Grenzwerte

5.1. Begriffe und Erläuterungen

Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Aussage $H(n)$ ist richtig für jede natürliche Zahl n , wenn folgendes gilt:

1. $H(n)$ ist richtig für $n = 1$.
2. Aus der Gültigkeit von $H(n)$ für $n = k$ folgt bei jeder natürlichen Zahl k die Gültigkeit von $H(n)$ für $n = k + 1$.

Der Beweis durch vollständige Induktion erfordert zwei Beweisschritte:

1. Induktionsanfang: Man zeigt, daß $H(1)$ gilt.
2. Induktionsschritt: Man zeigt, daß aus der Richtigkeit $H(k)$ (Induktionsvoraussetzung) die Richtigkeit von $H(k+1)$ (Induktionsbehauptung) folgt.

Die Schlüsse dürfen an kein spezielles k gebunden sein, d. h., man kann sich für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken.

Unter dieser Voraussetzung kann man dann die Gültigkeit von $H(n)$ für alle n folgern.

Endliche Folge

Funktion, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen $k = 1; 2; \dots; n$ sind.

Unendliche Folge
monoton
wachsend

Funktion, deren Definitionsbereich die Menge aller natürlichen Zahlen ist.

streng monoton
wachsend
monoton fallend
streng monoton
fallend

Bezeichnung für eine Zahlenfolge, bei der für alle k gilt $a_k \leq a_{k+1}$.

Bezeichnung für eine Zahlenfolge, bei der für alle k gilt $a_k < a_{k+1}$.

Bezeichnung für eine Zahlenfolge, bei der für alle k gilt $a_k \geq a_{k+1}$.

alternierend

Bezeichnung für eine Zahlenfolge, bei der für alle k gilt $a_k > a_{k+1}$.

Allgemeines

Bezeichnung für eine Zahlenfolge, bei der für alle k gilt $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.

Glied

Formelzeichen (Symbol): a_k .

Gesamte Folge

Formelzeichen: $\{a_k\}$.

Arithmetische
Folge

Die Folge $\{a_k\}$ heißt arithmetisch, wenn für jedes k gilt:

$$a_{k+1} - a_k = d; \quad d \text{ unabhängig von } k.$$

$$\text{Rekursionsformel: } a_{k+1} = a_k + d$$

$$a_k = a_1 + (k-1)d \text{ für alle } k$$

$$\text{Summe: } s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = n a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Formeln

Definition des arithmetischen Mittels von n Zahlen

$$A = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu$$

Bei einer arithmetischen Folge ist für $k \geq 2$ stets a_k das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

Differenzenfolgen

Die erste Differenzenfolge wird von den Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder einer Folge $\{a_k\}$ gebildet. Formelzeichen der Folge: $\{\Delta a_k\}$. Die zweite Differenzenfolge wird von den Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge $\{\Delta a_k\}$ gebildet. Formelzeichen: $\{\Delta^2 a_k\}$. Weitere Differenzenfolgen können entsprechend gebildet werden.

Geometrische Folge

Eine Folge $\{a_k\}$ heißt geometrisch, wenn für jedes k gilt:

$$a_{k+1} : a_k = q \neq 0; \quad a_k \neq 0;$$

der Quotient q der Folge hängt nicht von k ab.

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \text{ für alle } k$$

$$\begin{aligned} \text{Summe: } s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ falls } q \neq 1 \\ &= \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, \text{ falls } q \neq 1 \end{aligned}$$

$$s_n = n, \text{ falls } q = 1$$

Definition des geometrischen Mittels von n positiven Zahlen

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^n a_\nu}$$

Bei einer geometrischen Folge ist für $k \geq 2$ stets a_k das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder: $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$.

Schranken einer Folge $\{a_k\}$

Obere Schranke M , wenn für alle n gilt: $a_n \leq M$.

Untere Schranke m , wenn für alle n gilt: $a_n \geq m$.

M und m brauchen keine Glieder der Folge zu sein.

Grenzwert einer Folge $\{a_k\}$

Die Zahl g heißt Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wenn in jeder Umgebung von g alle Folgenglieder von einem gewissen a_m ab liegen. Für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl m , so daß für alle $n \geq m$ die Glieder a_n zwischen $g - \varepsilon$ und $g + \varepsilon$ liegen.

Konvergente Folgen

Folgen, die einen Grenzwert haben. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

Divergente Folgen

Folgen, die keinen Grenzwert haben.

Nullfolgen

Folgen mit dem Grenzwert 0. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Partialsomme

$$\text{Teilsumme } s_n, \sum_{k=1}^n a_k$$

Konvergente unendliche Reihe

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge $\{s_n\}$ ihrer

Partialsommen mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert.

Summe der unendlichen Reihe
Unendliche geometrische

Grenzwert s der Partialsommenfolge $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Sie ist dann und nur dann konvergent, wenn $|q| < 1$.

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$

$$\text{Summe: } s = \frac{a}{1 - q}$$

Harmonische Folge

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = \frac{1}{k} \quad (k = 1; 2; \dots; n).$$

Die Glieder bilden eine Nullfolge.

Harmonische Reihe

$$\{s_n\} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, ist also divergent.

$n \rightarrow \infty$

Harmonisches Mittel

Die Bezeichnung harmonische Reihe rührt daher, daß jedes Glied dieser Reihe das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist.

Unter dem harmonischen Mittel H zweier positiver Zahlen a, b versteht man den reziproken Wert des arithmetischen Mittels der reziproken Werte der beiden gegebenen Zahlen.

$$H = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Für die harmonische Reihe gilt: $\frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{(k-1) + (k+1)}{2}}$

5.2. Einige häufig auftretende Summen

Natürliche Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2} (n+1)$$

Gerade Zahlen

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Ungerade Zahlen

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Quadratzahlen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kubikzahlen

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

5.3. Grenzwertsätze¹

1. Der Grenzwert einer Summe existiert und ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden, falls deren Grenzwerte existieren.

2. Der Grenzwert eines Produktes existiert und ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren, falls deren Grenzwerte existieren.

3. Der Grenzwert eines Quotienten existiert und ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Dividend und Divisor, falls deren Grenzwerte existieren und der Grenzwert des Divisors ungleich Null ist.

$$\lim_{x \rightarrow a} (u \pm v)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} u \pm \lim_{x \rightarrow a} v$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (u \cdot v) = \lim_{x \rightarrow a} u \cdot \lim_{x \rightarrow a} v$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u}{\lim_{x \rightarrow a} v}$$

5.4. Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \quad \text{für } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1 \quad \text{für } a = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \text{für } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \quad \text{nicht vorhanden für } a \leq -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,7182818284\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = \frac{a}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

¹ Dabei handelt es sich um eigentliche Grenzwerte.

Bedeutung der Formelzeichen (Symbole)

A Flächeninhalt	$s = \frac{u}{2}$ (im Dreieck)	e, f Diagonalen
V Volumen		d Durchmesser
A_O Oberflächeninhalt	a, b, c Seiten	r Umkreisradius
A_M Mantelinhalt	g Grundseite	ρ Inkreisradius
A_G Grundflächeninhalt	h_g Höhe in bezug auf die Grundseite	ϱ Bogen
u Umfang		m Mittelstrecke
		p, q Hypotenusenabschnitte

6.1. Ebene Figuren

Allgemeines Dreieck: $A = \frac{g \cdot h_g}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \varrho \cdot s = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$

$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$ (Der Umkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.)

$\varrho = \frac{A}{s}$ (Der Inkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.)

$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ Die Seitenhalbierenden schneiden einander im Schwerpunkt und teilen sich im Verhältnis 2 : 1.

Rechtwinkliges Dreieck (γ sei 90°): $A = \frac{a \cdot b}{2}$ Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Satz des EUKLID: $a^2 = p \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$ Satz des PYTHAGORAS: $a^2 + b^2 = c^2$.

Gleichseitiges Dreieck: $A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$; $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$; $r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$; $\varrho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$

Quadrat: $A = a^2$; $e = a\sqrt{2}$; $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $\varrho = \frac{a}{2}$ **Rechteck:** $A = a \cdot b$; $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

Parallelogramm: $A = g \cdot h_g$ **Trapez:** $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$ **Drachenviereck:** $A = \frac{1}{2} e \cdot f$

Regelmäßige Vielecke

Ecken-zahl n	Seite s_n	Umfang u_n	Flächeninhalt A_n
3	$r\sqrt{3} \approx 1,7321r$	$3r\sqrt{3} \approx 5,1962r$	$\frac{3}{4}r^2\sqrt{3} \approx 1,2990r^2$
6	$r = 1,0000r$	$6r = 6,0000r$	$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3} \approx 2,5981r^2$
12	$r\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0,5176r$	$12r\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 6,2117r$	$3r^2 = 3,0000r^2$
4	$r\sqrt{2} \approx 1,4142r$	$4r\sqrt{2} \approx 5,6568r$	$2r^2 = 2,0000r^2$
8	$r\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0,7654r$	$8r\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 6,1229r$	$2r^2\sqrt{2} \approx 2,8284r^2$
16	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 0,3901r$	$16r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 6,2416r$	$4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3,0616r^2$
5	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 1,1756r$	$\frac{5}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 5,8780r$	$\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 2,3776r^2$
10	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0,6180r$	$5r(\sqrt{5}-1) \approx 6,1803r$	$\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 2,9389r^2$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

Teilungen: harmonisch $AP:PB = AQ:QP = k$ $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} \right)$

stetig (Goldener Schnitt) $r : s = s : (r - s)$, $s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Formeln

$$\text{Kreis} = \frac{\pi}{4} d^2; \quad u = 2\pi r = \pi d; \quad b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi d$$

$$\text{Kreisausschnitt (Kreissektor): } A = \frac{br}{2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad \text{Kreiring: } A = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)$$

$$\text{Kreisabschnitt (Kreissegment): } A = \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \frac{r^2}{2} \quad A = \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2) (d_1 - d_2)$$

$$\text{Ellipse: } (D \text{ große Achse, } d \text{ kleine Achse). } A = \frac{\pi}{4} D \cdot d; \quad u \approx \pi \cdot \frac{D+d}{2}$$

6.2. Körper

$$\text{Würfel (e Raumdiagonale): } V = a^3; \quad A_0 = 6a^2; \quad e = a\sqrt{3}$$

$$\text{Quader: } V = a \cdot b \cdot c; \quad A_0 = 2(ab + ac + bc); \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Prisma: } V = A_G \cdot h \quad \text{Zylinder: } V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h; \quad A_M = 2\pi r h = \pi d h$$

$$\text{Pyramide: } V = \frac{1}{3} A_G h \quad \text{Kegel: } V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{12} d^2 h; \quad A_M = \pi r s = \frac{\pi}{2} d s$$

$$\text{Pyramidenstumpf (h Stumpfhöhe): } \quad \text{Kegelstumpf (h Stumpfhöhe):}$$

$$V = \frac{h}{3} (A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2) \quad V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

$$A_M = \pi s (r_1 + r_2) = \frac{\pi}{2} s (d_1 + d_2)$$

$$\text{Kugel: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3; \quad A_0 = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

$$\text{Kugelausschnitt (Kugelsegment) (r Kugelradius, h Abschnittshöhe):}$$

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) = \frac{\pi}{3} h^2 \left(\frac{3}{2} d - h \right); \quad A_M = 2\pi r h = \pi d h \text{ (Kugelkappe)}$$

$$\text{Kugelausschnitt (Kugelsektor) (r Kugelradius, h Abschnittshöhe): } V = \frac{2\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{6} d^2 h$$

$$\text{Kugelschicht: } V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6} \left(\frac{3}{4} d_1^2 + \frac{3}{4} d_2^2 + h^2 \right)$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi d h \text{ (Kugelzone)}$$

$$\text{Ellipsoid (a, b, c Halbachsen): } V = \frac{4\pi}{3} abc$$

$$\text{Rotationsellipsoid (a, b Halbachsen } \hat{z} \text{ a Drehachse): } V = \frac{4\pi}{3} ab^2$$

$$\text{Rotationsparaboloid (} \varrho \text{ Grundkreisradius): } V = \frac{\pi}{2} \varrho^2 h$$

$$\text{GULDINsche Regel: Inhalt einer Drehfläche} = \text{erzeugende Linie} \times \text{Weg des Schwerpunktes}$$

$$\text{Inhalt eines Drehkörpers} = \text{erzeugende Fläche} \times \text{Weg des Schwerpunktes}$$

7. Funktionen

Aus dem Bild einer Funktion $y = f(x)$ erhält man das Bild der Funktion $y = c \cdot f(ax + b) + d$ durch Parallelverschiebung und Streckung (Stauchung).

7.1. Lineare Funktionen

$y = mx + n$ (m, n beliebige Konstanten). Das Bild ist eine Gerade, die die x -Achse im Punkt $P(0; n)$ schneidet und die Steigung m hat.

Zwischen dem Winkel φ , den die Gerade mit der x -Achse bildet, und der Steigung m besteht die Gleichung $m = \tan \varphi$, woraus sich insbesondere die folgende Übersicht ergibt:

m	φ
$(-\infty; -1)$	$(-90^\circ; -45^\circ)$
-1	-45°
$(-1; 0)$	$(-45^\circ; 0^\circ)$
0	0°
$(0; 1)$	$(0^\circ; 45^\circ)$
1	45°
$(1; \infty)$	$(45^\circ; 90^\circ)$

Eine Gerade, die mit der x -Achse den Winkel 90° einschließt, d. h., die parallel zur y -Achse liegt, läßt sich nicht in dieser Form darstellen.

Im Fall $n = 0$ und nur dann geht die Gerade durch den Ursprung.

Im Fall $m = 0$ und nur dann ist die Gerade horizontal.

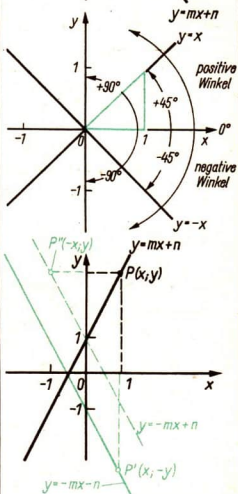
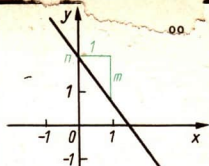
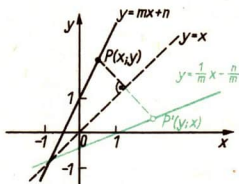
Ist $m \neq 0$, so ist die Funktion monoton und daher eindeutig.

Das Spiegelbild der Geraden $y = mx + n$ an der x -Achse wird durch die Funktion $y = -mx - n$ beschrieben.

Das Spiegelbild der Geraden $y = mx + n$ an der y -Achse wird durch die Funktion $y = -mx + n$ beschrieben.

Das Spiegelbild der Geraden $y = mx + n$ an der Geraden $y = x$ wird im Falle $m \neq 0$ durch die Funktion

$y = \frac{1}{m}(x - n)$ beschrieben. Diese Funktion ist die **inverse Funktion** zu $y = mx + n$.



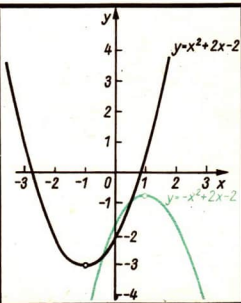
7.2. Quadratische Funktion

$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad (A \neq 0)$$

$$y = A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}$$

Das Bild ist eine Parabel, deren Scheitel im Punkt $S \left(-\frac{B}{2A}; \frac{4AC - B^2}{4A^2} \right)$ liegt. Sie ist nach oben geöffnet, wenn $A > 0$ ist, und nach unten geöffnet, wenn $A < 0$ ist.

Sie entsteht aus der Normalparabel $y = x^2$ durch eine Parallelverschiebung und, falls $|A| \neq 1$, ist anschließend im Falle $|A| > 1$ eine Streckung und im Falle $|A| < 1$ eine Stauchung vorzunehmen. Im Falle $A < 0$ muß noch eine Drehung um 180° um den Scheitelpunkt erfolgen.



7.3. Potenzfunktionen

$$y = x^n \quad (n \geq 2)$$

Potenzfunktionen der Art $y = x^{2k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) sind gerade Funktionen, denn es gilt $f(-x) = f(x)$.

Potenzfunktionen der Art $y = x^{2k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) sind ungerade Funktionen, denn es gilt $f(-x) = -f(x)$. Außerdem sind sie monoton wachsend und daher eindeutig.

Die Bilder sind verallgemeinerte Parabeln.

Im Fall $n = 2$ handelt es sich um eine Kegelschnitts-
parabel.

1. Erweiterung

$$y = x^n \quad (n < 0, \text{ ganzzahlig; } x \neq 0)$$

Die Bilder sind verallgemeinerte Hyperbeln. Im Fall $n = -1$ handelt es sich um eine Kegelschnitts-
hyperbel.

$$y = x^{2k} \quad (k = -1, -2, -3, \dots)$$

(symmetrisch zur y-Achse)

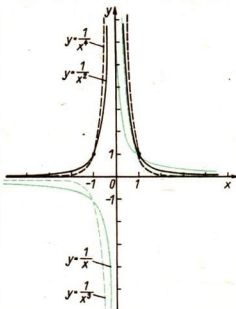
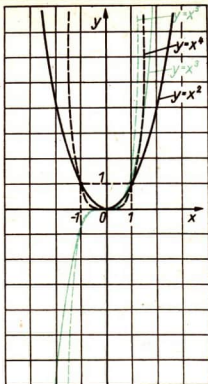
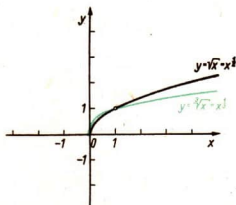
$$y = x^{2k+1} \quad (k = -1, -2, -3, \dots)$$

(zentrosymmetrisch zum Ursprung)

2. Erweiterung

$$y = x^n \quad (n \text{ gebrochene Zahl; } x > 0)$$

Im Falle $n = \frac{1}{k}$ werden die Potenzfunktionen als Wurzelfunktionen bezeichnet; sie sind erklärt für $0 \leq x < \infty$.



Unter einer **ganzen rationalen Funktion** versteht man eine Funktion, die für alle x erklärt ist und sich in der Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (a_k \text{ Konstanten})$$

darstellen läßt. Im Falle $a_n \neq 0$ heißt n der Grad der Funktion.

Unter einer **rationalen Funktion** versteht man eine Funktion, die sich in ihrem gesamten Definitionsbereich in der Form

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_2 x^2 + B_1 x + B_0}$$

$$y = \frac{\sum_{i=0}^m A_i x^i}{\sum_{k=0}^n B_k x^k} \quad (m, n \geq 0; A_i, B_k \text{ Konstanten; } B_n \neq 0)$$

Formeln

darstellen läßt und die für alle x , mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners, erklärt ist. Im Fall $n = 0$ erhält man die ganzen rationalen Funktionen.

Ist $n \geq 1$ und der Zähler nicht durch den Nenner ohne Rest teilbar, so heißt die Funktion **gebrochen rational**. Eine gebrochene Funktion heißt

echt gebrochen, wenn der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist ($m < n$),
unecht gebrochen, wenn der Grad des Zählers größer oder gleich dem Grad des Nenners ist ($m \geq n$).

7.4. Exponentialfunktion

$$y = a^x \quad (a > 0; a \neq 1)$$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

Wertevorrat: $0 < y < \infty$

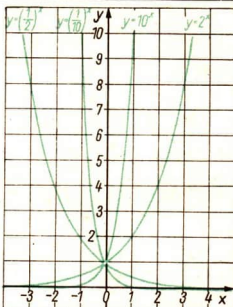
Eigenschaften:

Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend und daher eineindeutig.

Für $a < 1$ ist sie streng monoton fallend und daher eineindeutig.

Die Kurve nähert sich für $x \rightarrow -\infty$ asymptotisch der x -Achse.

Der Punkt $P(0; 1)$ ist wegen $a^0 = 1$ ein gemeinsamer Punkt der Bilder aller Exponentialfunktionen.



7.5. Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x \quad (a > 1; 0 < a < 1)$$

Definitionsbereich: $0 < x < \infty$

Wertevorrat: $-\infty < y < \infty$

Aus $a^x = y$ folgt $x = \log_a y$ und nach dem Vertauschen der Variablen $y = \log_a x$.

Eigenschaften:

Die Funktion ist eineindeutig und für $a > 1$ streng monoton steigend, für $a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

Die y -Achse ist Asymptote.

Für $x \rightarrow 0$ strebt $\log x \rightarrow -\infty$.

Der Punkt $P(1; 0)$ ist wegen $\log_a 1 = 0$ ein gemeinsamer Punkt der Bilder aller Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion sind zueinander invers, d. h., es bestehen stets gleichzeitig die beiden Gleichungen $a^x = y$ und $x = \log_a y$.

Zusatz:

Einige wichtige Prozesse in der Natur lassen sich durch Exponential- und Logarithmusfunktionen beschreiben.

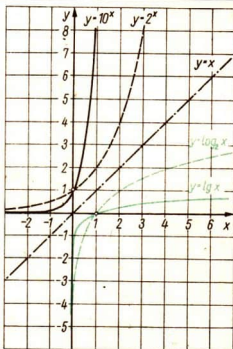
Beispiele:

Wachstumsprozesse: $g = g_0 e^{ct}$ (g_0 Anfangsbestand, c Konstante, t Zeit, $e \approx 2,7183$)
 (Zinseszins, biologisches Wachstum)

Zerfallsprozesse: $m = m_0 e^{-\lambda t}$ (m_0 Anfangsmenge, λ Zerfallskonstante, t Zeit).

GAUSS'sche Glockenkurve: $y = e^{-x^2}$ In der Fehleruntersuchung und Statistik von großer Bedeutung.

Fallbewegung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes: $s = \frac{g}{f} t - \frac{g}{f^2} (1 - e^{-ft})$



Es sei \mathbb{K} ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Auf der Kreislinie befindet sich ein laufender Punkt mit der Ordinate v und der Abszisse u .

Der Sinus des Winkels x ist das Verhältnis der Ordinate v zur Maßzahl des Radius.

$$\sin x = \frac{v}{r}$$

Der Kosinus des Winkels x ist das Verhältnis der Abszisse u zur Maßzahl des Radius.

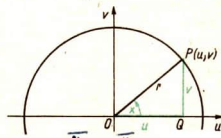
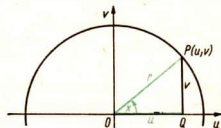
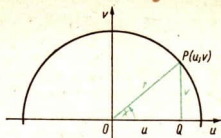
$$\cos x = \frac{u}{r}$$

Der Tangens des Winkels x ist das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u .

$$\tan x = \frac{v}{u} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; n \text{ ganzzahlig} \right)$$

Der Kotangens des Winkels x ist das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v .

$$\cot x = \frac{u}{v} \quad \left(x \neq n\pi; n \text{ ganzzahlig} \right)$$



Vorzeichen in den vier Quadranten

	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

Beziehungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\cot(90^\circ - x) = \tan x$$

Potenzen von Winkelfunktionen

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$
$\sin^2 x$	—	$1 - \cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{1}{1 + \cot^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	—	$\frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	—	$\frac{1}{\cot^2 x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	—

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x); \quad \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

Spezielle Funktionswerte

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
cot	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

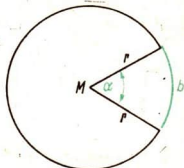
Quadrantenbeziehungen (x im Gradmaß)

	$90^\circ \pm x$	$180^\circ \pm x$	$270^\circ \pm x$	$360^\circ \pm x$	$-x$
sin	cos x	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	$-\sin x$
cos	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	cos x	cos x
tan	$\mp \cot x$	$\pm \tan x$	$\mp \cot x$	$\pm \tan x$	$-\tan x$
cot	$\mp \tan x$	$\pm \cot x$	$\mp \tan x$	$\pm \cot x$	$-\cot x$

Periodizität der Winkelfunktionen

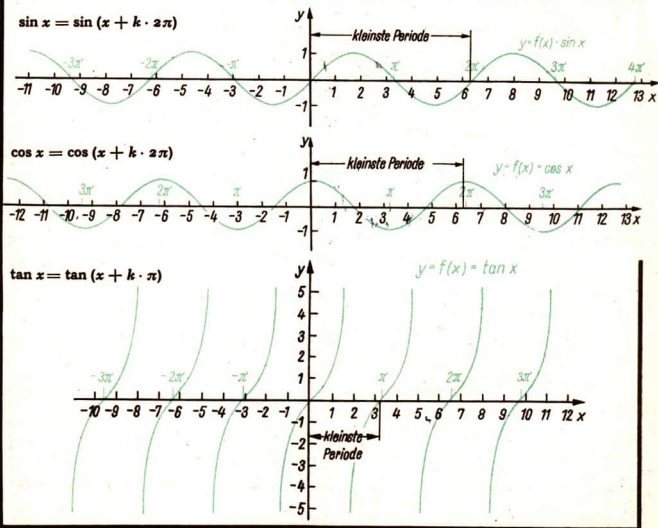
Bogenmaß: Verhältnis der Bogenlänge eines Winkels zum Radius

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha^\circ = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$$

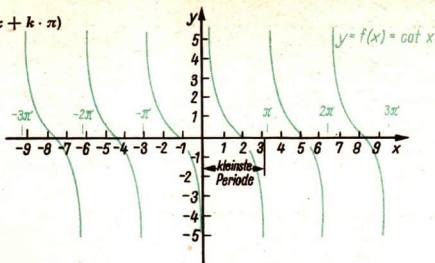


Winkelfunktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < \infty$ ohne $\frac{\pi}{2} + n\pi$	$-\infty < y < \infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < \infty$ ohne $n\pi$	$-\infty < y < \infty$

n ganzzahlig



$$\cot x = \cot(x + k \cdot \pi)$$



Additionstheoreme für Winkelfunktionen

Winkelfunktionen von Summen und Differenzen

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

Produkte von Winkelfunktionen

$$2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \cos x \cdot \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

Winkelfunktionen des einfachen, doppelten, dreifachen, halben Winkels

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (\text{Im ganzen Definitionsbereich von } \tan \frac{x}{2})$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (\text{für } x \neq k\pi)$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad (\text{Im ganzen Definitionsbereich von } \tan \frac{x}{2})^1$$

Summen und Differenzen zweier Sinus- und Kosinusfunktionen

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

¹ Dabei ergibt sich das Vorzeichen aus dem Quadranten, in dem $\frac{x}{2}$ liegt.

Rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90^\circ$)	$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}; \quad \tan \alpha = \cot \beta = \frac{a}{b}$ $A = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha$
Beliebiges Dreieck	<p>Sinussatz $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = d$ <p>Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$</p> $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma; \quad A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$ <p>(Es gelten auch die zyklischen Vertauschungen)</p>

7.7. Zyklometrische Funktionen

Durch Umkehrung der Winkelfunktionen in ihren einzelnen Monotonie-Intervallen entstehen die zyklometrischen Funktionen.

$$y = \arcsin x \quad (\text{gesprochen: Arkussinus } x)$$

$$y = \arctan x$$

$$y = \arccos x$$

$$y = \operatorname{arccot} x$$

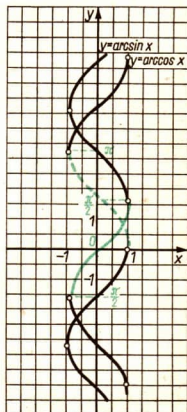
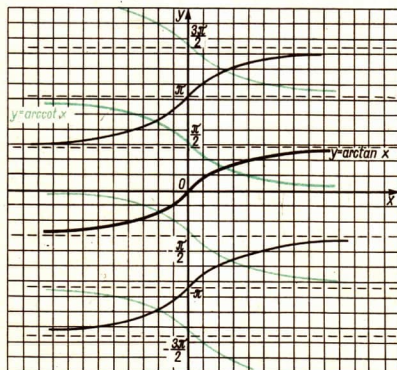
Hauptwerte mit den Bedingungen:

$$y = \arcsin x; \quad |y| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{in } |x| \leq 1$$

$$y = \arctan x; \quad |y| < \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } x$$

$$y = \arccos x; \quad 0 \leq y \leq \pi \quad \text{in } |x| \leq 1$$

$$y = \operatorname{arccot} x; \quad 0 < y < \pi \quad \text{für alle } x$$



Die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ werden für alle x definiert durch:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

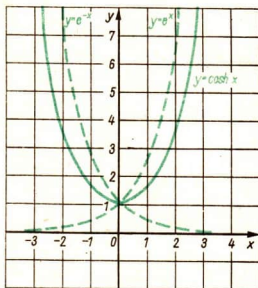
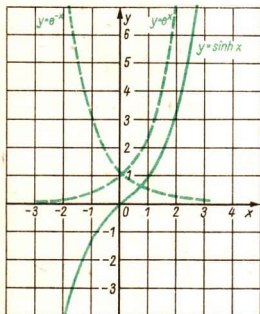
Eigenschaften:

$\sinh(-x) = -\sinh x$ (ungerade Funktion); $\cosh(-x) = \cosh x$ (gerade Funktion)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$



8. Analytische Geometrie der Ebene

Verschiebung
(Translation)

$$P(x; y) \quad x = a + \xi; \quad y = b + \eta$$

$$P(\xi; \eta) \quad \xi = x - a; \quad \eta = y - b$$

Drehung (Rotation)

Drehung um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinn

$$P(x; y) \quad x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \quad y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

$$P(\xi; \eta) \quad \xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Translation
und Rotation

$$P(x; y) \quad x = a + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \quad y = b + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

$$P(\xi; \eta) \quad \xi = (x - a) \cos \varphi + (y - b) \sin \varphi;$$

$$\eta = -(x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi$$

Streckenlänge

$$s = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad s = \overline{OP} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Richtung

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \sin \varphi = \frac{y_2 - y_1}{s}$$

Teilpunkt T

$$\text{Teilverhältnis } \lambda: \quad x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Mittelpunkt M

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Dreieck,
vorzeichenbehafteter
Flächeninhalt

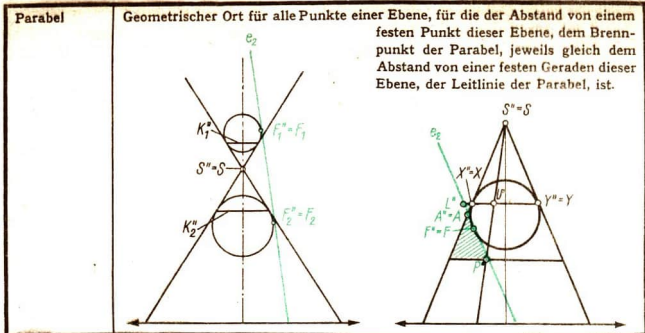
$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

Formeln

Gleichung der Geraden	<p>Normalform: $y = mx + n$, n Abschnitt auf der y-Achse</p> <p>Punktrichtungsgleichung: $y - y_1 = m(x - x_1)$ [Gerade durch den Punkt $P(x_1; y_1)$ mit der Steigung m]</p> <p>Zweipunktgleichung: $(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$ [Gerade durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$]</p> <p>Steigung: $m = \tan \varphi$, falls $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; k ganzzahlig</p> <p>Achsenabschnittsgleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ($a \cdot b \neq 0$) [Gerade, die die x-Achse im Punkt $P_1(a; 0)$ und die y-Achse im Punkt $P_2(0; b)$ schneidet.]</p> <p>Allgemeine Form: $Ax + By + C = 0$, ($A^2 + B^2 > 0$)</p> <p>Hessesche Normalform: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, ($p \geq 0$) [$p$ Abstand des Nullpunktes von der Geraden; α Winkel zwischen Lot in Richtung vom Ursprung und positiver x-Achse (falls $p > 0$)]</p> <p>$\cos \alpha = -\frac{ C }{C} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; $\sin \alpha = -\frac{ C }{C} \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$</p> <p>$p = \frac{ C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$, ($C \neq 0$)</p> <p>Vorzeichenbehaltener Abstand der Geraden vom Punkt $P_1(x_1; y_1)$: $d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$</p>
Zwei Geraden	<p>$y = m_1x + n_1$; $y = m_2x + n_2$</p> <p>Schnittwinkel ψ aus $\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ (für $\psi \neq 90^\circ$)</p> <p>Die beiden Geraden sind dann und nur dann parallel, wenn $m_1 = m_2$ gilt.</p> <p>Die beiden Geraden sind dann und nur dann zueinander senkrecht, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$ oder $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.</p> <p>(Zur Ermittlung des Schnittpunktes zweier Geraden vergleichen Sie mit dem Abschnitt 3.1. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten!)</p>

8.1. Kegelschnitte als geometrische Örter

Kreis	Geometrischer Ort für alle Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt, den gleichen Abstand r haben.	
Ellipse	Geometrischer Ort für alle Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene, den Brennpunkten der Ellipse, konstant ist.	
Hyperbel	Geometrischer Ort für alle Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene, den Brennpunkten der Hyperbel, konstant ist.	



8.2. Kegelschnitte

Begriff	Kreis r Radius	Ellipse ¹ a große Halb- achse	Hyperbel ¹ b kleine Halb- achse	Parabel $2p$ Parameter
Mittelpunkt $O(0; 0)$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$		Scheitel $O(0; 0)$: $y^2 = 2px$
Tangente in P_1 (Polare zu P_1)	$xx_1 + yy_1 = r^2$	$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1$		$y \cdot y_1 = p(x + x_1)$
Normale durch P_1	$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$	$y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$		$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1)$
Asymptoten	—	—	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$	—
Asymptotenwinkel φ	—	—	$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$	—
Mittelpunkt $M(c; d)$	$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$	$\frac{(x - c)^2}{a^2} \pm \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1$		Scheitel $M(c; d)$: $(y - d)^2 = 2p(x - c)$
Tangente in P_1 (Polare zu P_1)	$(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$	$\frac{(x - c)(x_1 - c)}{a^2} \pm \frac{(y - d)(y_1 - d)}{b^2} = 1$		$(y - d)(y_1 - d) = p(x - c) + p(x_1 - c)$
$2p$ ist eine Sehne senkrecht durch den Brennpunkt	$p = r$	$p = \frac{b^2}{a}$		p
Scheitelgleichung	$y^2 = 2px - x^2$	$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} \cdot x^2$		$y^2 = 2px$
Exzentrizität linear e	$e = 0$	$e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$		—
numerisch e	$e = 0$	$e < 1$	$e > 1$	$e = 1$
Polargleichung		$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$		Länge des Brennstrahls $x_1 + \frac{p}{2}$, (Subtangente $2x_1$, Subnormale p)

¹ Bei den übereinandergesetzten Rechenzeichen gilt das obere Rechenzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel.

Größe des Winkels zwischen Schnittebene und Kegelachse	$0 \leq \varphi < \beta$	$\varphi = \beta$	$\beta < \varphi < 90^\circ$	$\varphi = 90^\circ$
$\varepsilon = \cos \varphi : \cos \beta$	$\varepsilon > 1$	$\varepsilon = 1$	$1 > \varepsilon > 0$	$\varepsilon = 0$
Art des Kegelschnitts	Hyperbel	Parabel	Ellipse	Kreis

9. Vektorrechnung

Darstellung, Bezeichnung	<p>Der Vektor wird durch einen Pfeil bestimmter Länge, dessen Richtung und Durchlaufsinne dargestellt und mit großen oder kleinen Frakturbuchstaben ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots; a, b, c, \dots$) bezeichnet. a bezeichnet die Länge des Vektors (Betrag von a).</p> <p>\vec{AB} bedeutet die Verschiebung des Punktes A nach B. $\overline{AB} = c$.</p> <p>$a = a (i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma)$</p>	<p>Beispiel: Vektor a vom Betrage 2 und der Richtung 225°.</p>
freier Vektor	Vektor, der im Raum parallel zu sich verschoben werden kann.	
gebundener Vektor	als Ortsvektor an einen Punkt gebunden; als liniengebundener oder linienflüchtiger Vektor an eine Trägergerade gebunden	
spezielle Vektoren	<p>Ortsvektor im Nullpunkt: Vektor mit dem Anfangspunkt im Ursprung eines Koordinatensystems</p> <p>Nullvektor: freier Vektor mit dem Betrag Null und beliebiger Richtung (0)</p> <p>entgegengesetzter Vektor: Vektor, in dem der Durchlaufsinne umgekehrt ist. $\vec{BA} = -\vec{AB} = (-c)$.</p> <p>Einheitsvektor: Vektor der Länge 1. Der Einheitsvektor, der in Richtung und Durchlaufsinne mit dem Vektor a übereinstimmt ($a \neq 0$), wird mit a° bezeichnet (Einheitsvektor zu a).</p>	

Komponenten-
darstellung
eines Vektors im
orthonormierten
Rechtssystem

Zerlegung eines Vektors in zwei (oder drei) Komponenten durch (meist zueinander rechtwinklige) nicht parallele Einheitsvektoren mit deren Vielfachen. Für Maßzahlen werden Antiquabuchstaben (a, b, \dots) verwendet.

Eindimensionales Koordinatensystem:

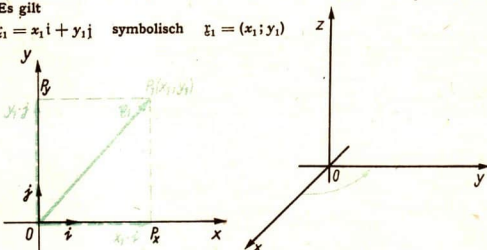
Gerade mit festgelegter x -Richtung (Einheitsvektor), eindimensionaler

Ortsvektor \vec{OP}_1 : $\xi_1 = x_1 \cdot i$.



Zweidimensionales xy -Koordinatensystem: positive x -Achse wird um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch positivem Sinn in y -Achse überführt. Ein Punkt P_1 ist durch den Vektor \vec{OP}_1 und seine Projektionen \vec{OP}_x und \vec{OP}_y festgelegt. Es gilt

$$\vec{\xi}_1 = x_1 i + y_1 j \quad \text{symbolisch} \quad \xi_1 = (x_1; y_1)$$



Dreidimensionales xyz -Koordinatensystem: positive z -Achse durch Rechtschraube festgelegt, wenn der positive Teil der x -Achse auf kürzestem Wege in den positiven Teil der y -Achse überführt wird.

$$\vec{OP}_1 = \xi_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 l \quad [\text{symbolisch} \quad \xi_1 = (x_1; y_1; z_1)]$$

Die Komponenten eines Vektors im orthonormierten Rechtssystem sind dessen Projektionen auf die Richtungen x, y, z . Die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bildet der Ortsvektor $\vec{r} \neq 0$ mit den Einheitsvektoren i, j, l .

Im Raum: $x = |\vec{r}| \cos \alpha_1$; $y = |\vec{r}| \cos \alpha_2$; $z = |\vec{r}| \cos \alpha_3$.

In der Ebene: $x = |\vec{r}| \cos \alpha_1$; $y = |\vec{r}| \cos \alpha_2$

Richtungskosinus von \vec{r} : $\cos \alpha_1 = \frac{x}{|\vec{r}|}$; $\cos \alpha_2 = \frac{y}{|\vec{r}|}$; $\cos \alpha_3 = \frac{z}{|\vec{r}|}$

$$\xi_1 = [|\xi_1| \cos \alpha] i + [|\xi_1| \sin \alpha] j$$

$$\xi_1^\circ = (\cos \alpha) i + (\sin \alpha) j$$

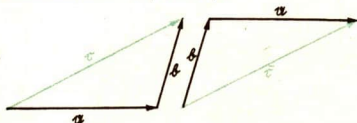
Projektion
von Vektoren

Neigungswinkel
von $\vec{OP}_1 = \xi_1$
gegen die
 x -Achse

9.1. Addition und Subtraktion von Vektoren

Addition

Grafisch: Zwei Vektoren werden unter Beachtung von Richtung und Durchlaufsinne aneinandergesetzt. Die Resultante schließt das Dreieck. Es gilt das kommutative Gesetz $a + b = b + a$

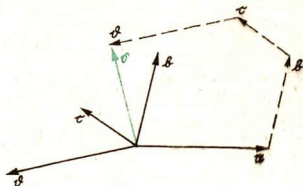


Rechnerisch: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha, b)$ mit Kosinussatz c^2 } berechnen.
 $\sin(\alpha, b) : \sin(\alpha, b) = a : b$ mit Sinussatz α, c, b }

Formeln

Mehr als zwei Vektoren

Graphisch: Die addierten Vektoren bilden aneinandergereiht einen Vektorzug. Die Verbindung des Ausgangspunktes mit dem Endpunkt des letzten Vektors gibt die Vektorsumme, den Schlußvektor s . Es gilt das assoziative Gesetz $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

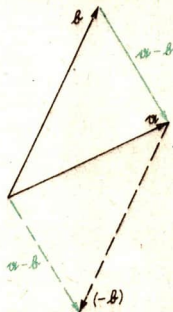


Subtraktion

Die Differenz zweier Vektoren a und b ist diejenige Verschiebung c , die zur Verschiebung b hinzukommen muß, um zum gleichen Ergebnis zu kommen, das die Verschiebung um a liefert.

$$b + c = a \text{ oder } c = a - b$$

Die Subtraktion des Vektors b ist gleichwertig mit der Addition des entgegengesetzten Vektors $(-b)$.



In Komponenten-darstellung

Zwei Vektoren werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert.

$$a + b = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j$$

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert.

$$a - b = (a_x - b_x)i + (a_y - b_y)j$$

Ein Vektor wird mit der Zahl t vervielfacht, indem man jede seiner Komponenten mit t vervielfacht.

$$ta = ta_x i + ta_y j$$

9.2. Multiplikation bei Vektoren

Multiplikation mit skalaren Faktoren

Ist t eine positive Zahl, so entspricht ta einem Vektor b , der dieselbe Richtung, denselben Durchlaufsinne und den t -fachen Betrag wie a hat. $|b| = t|a|$; $at = t \cdot a$

Festsetzungen

$$at = ta, \quad a = |a|a^0; \quad a^0 = \frac{1}{|a|}a = \frac{a}{|a|}; \quad a = -|a|(-a^0)$$

Es gelten das Assoziationsgesetz: $r(ta) = t(ra) = rta$;

das erste Distributionsgesetz: $(r + t)a = ra + ta$;

das zweite Distributionsgesetz: $r(a + b) = ra + rb$.

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b ($a \neq 0, b \neq 0$) ist eine Zahl c , die gleich dem Produkt aus den Beträgen $|a|$ und $|b|$ und dem Kosinus des von a und b eingeschlossenen Winkels $(a, b) = \gamma$ ist.

$$a \cdot b = c; \quad c = |a| |b| \cos(a, b) = a \cdot b \cos \gamma$$

Kommutationsgesetz

$$b \cdot a = a \cdot b$$

$$b \cdot a = |b| |a| \cos(b, a) = |a| |b| \cos[-(a, b)] = |a| |b| \cos(a, b) = a \cdot b$$

Orthogonalität

Multiplikation eines Skalarproduktes mit einer Zahl

Skalares Produkt und Projektion

Distributionsgesetz

Besondere Werte von Skalarprodukten

Koordinatendarstellung

Vektorprodukt (vektorielles Produkt)

Besonderheiten des Vektorprodukts

Kommutationsgesetz

$a \cdot b = 0$ ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Orthogonalität zweier Vektoren $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

$t(a \cdot b) = a \cdot (tb) = (ta) \cdot b$. Die Multiplikation mit $t > 0$ hat keinen Einfluß auf den eingeschlossenen Winkel und daher auch nicht auf den Kosinus des Winkels.

a_b ist die Projektion des Vektors a auf den Vektor b und b_a die des Vektors b auf den Vektor a .

$$\text{Es ist } |a_b| = |a| |\cos(a, b)| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} = |a \cdot b^0|$$

$$\text{und } |b_a| = |b| |\cos(a, b)| = \frac{|a \cdot b|}{|a|} = |b \cdot a^0|$$

und damit $a \cdot b = a_b \cdot b$ sowie $a \cdot b = a \cdot b_a$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleich dem Skalarprodukt aus der Projektion des einen Vektors (auf den anderen) und dem anderen Vektor.

$$c(a + b) = ca + cb$$

$$a \cdot a = |a|^2 \text{ oder } a^2 \quad \begin{array}{l} i \cdot i = 1; j \cdot j = 1; k \cdot k = 1 \\ i \cdot j = 0; i \cdot k = 0; j \cdot k = 0 \end{array}$$

$$\text{Skalarprodukt } a \cdot b = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z; \\ |a|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2; \quad |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

Richtungskosinus

$$\cos \alpha_1 = \frac{a \cdot i}{|a|} = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_z}{a}$$

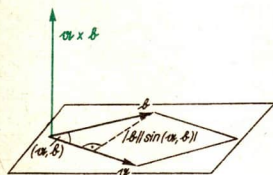
$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Schreibweise: $a \times b$

Sprechweise: Vektorprodukt aus a und b oder a kreuz b

Das vektorielle Produkt $a \times b$ zweier von 0 verschiedener Vektoren a und b ist ein Vektor mit dem Betrag $|a| \cdot |b| |\sin(a, b)|$. Falls der Betrag größer ist als Null, steht der Vektor $a \times b$ auf a und b senkrecht, und a, b und $a \times b$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Das vektorielle Produkt aus dem Nullvektor und einem beliebigen Vektor ist der Nullvektor.



Der Betrag des Vektorproduktes $a \times b$ ist gleich dem Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Beträgen $|a|$ und $|b|$ der Vektoren a bzw. b als Seiten. Der in den Raum zeigende Vektor $a \times b$ zweier Vektoren a und b stellt den Flächenumlaufsinn des von a und b gebildeten Parallelogramms dar. Dieser Vektor wird Stellungsvektor genannt. Es gilt $a \times b = -(b \times a)$

Wenn $a, b, a \times b$ wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand angeordnet sind (Rechtssystem), folgen $b, a, b \times a$ wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der linken Hand (Linkssystem).

Für Vektorprodukt nicht allgemein gültig.

Entfernung zweier Punkte	In der Ebene: $\vec{P_1P_2} = \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$ $l = \xi_2 - \xi_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Im Raum: $\vec{P_1P_2} = \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ $l = \xi_2 - \xi_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Mittelpunkt einer Strecke	$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$; In der Ebene: $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Gleichung einer Geraden (Parameter- darstellung)	Für den Raum gilt ferner: $z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$ Punktrichtungsgleichung: $\xi = \xi_1 + t\alpha$; t Parameter, α Richtungsfaktor Zweipunktgleichung: $\xi = \xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)$ Parallele zur x -Achse: $\xi = \xi_1 + t i$ Parallele zur y -Achse: $\xi = \xi_1 + t j$
Schnittpunkt zweier Geraden Gleichung einer Ebene	Die Gleichungen zweier Geraden nach den Parametern auflösen. Punktrichtungsgleichung: $\xi = \xi_1 + r\alpha + s\beta$ Dreipunktgleichung: $\xi = \xi_1 + r(\xi_2 - \xi_1) + s(\xi_3 - \xi_1)$ (r und s sind Parameter)
Hessesche Normalform	Gleichung einer orientierten Geraden: $e^0 \cdot (\xi - \xi_1) = 0$, Gleichung einer nicht orientierten Geraden, die nicht durch den Ursprung geht: $l^0 \cdot \xi - l^0 \cdot \xi_1 = 0$, $l^0 \cdot \xi_1 > 0$.
	Abstand eines Punktes von einer Geraden: $d = l^0 \xi_0 - l = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - l$. Gleichung einer orientierten Ebene: $e^0 \cdot (\xi - \xi_1) = 0$. Gleichung einer nicht orientierten Ebene, die nicht durch den Ursprung geht: $l^0 \cdot \xi - l^0 \cdot \xi_1 = 0$, $l^0 \cdot \xi_1 > 0$. Abstand eines Punktes von einer Ebene: $d = l^0 \cdot \xi_0 - l = x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_2 + z_0 \cos \alpha_3 - l$
Kreis Kugel	Mittelpunkt mit Ortsvektor m ($M(a; b)$): $(\xi - m)^2 = r^2$ Mittelpunkt im Koordinatenursprung $\xi^2 = r^2$

10. Differentialrechnung

Differenzenquotient	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$
Definitionen:	1. Ist die Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt,
	und strebt für jede Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$, für die $x_0 + h_n$ in
	dieser Umgebung liegt, stets die Folge der zugehörigen
	Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ einem Grenzwert g zu, so
	sagt man, die Funktion $y = f(x)$ sei an der Stelle x_0 differenzierbar.
	2. Diesen Grenzwert g nennt man den Differentialquotienten oder die
	erste Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 .
	Also:
	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
	Für jede an der Stelle $x = x_0$ differenzierbare Funktion $y = f(x)$ gilt:
	$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0)$, d. h., $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.

Schreibweisen
und Bezeichnungen
des Differential-
quotienten

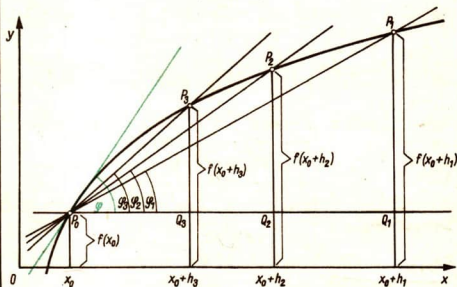
Geometrische Deutung
(Steigung)

- $f'(x_0)$ (gesprochen *f*-Strich an der Stelle $x = x_0$);
- $y'|_{x=x_0}$ (gesprochen *y*-Strich an der Stelle $x = x_0$);
- $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ (gesprochen *dy* nach *dx* an der Stelle $x = x_0$).

Sekante in x_0 an $f(x_0)$: $\tan \varphi_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$

Tangente in x_0 an $f(x_0)$: $\tan \varphi_0 = f'(x_0)$.

Die Steigung der Tangente im Punkte P_0 des Bildes der Funktion $y = f(x)$ ist, falls $y = f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist, gleich der Ableitung der Funktion $y' = f'(x_0)$.



10.1. Regeln für die Differentiation

	Funktion	Ableitung
Konstanter Faktor	$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$
Summe, Differenz	$y = \varphi(x) \pm \psi(x) = u \pm v$ $y = f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$	$y' = u' \pm v'$ $y' = f'(x) = \sum_{k=1}^n f_k'(x)$
Produkt	$y = f(x) = \varphi(x) \psi(x) = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$ ←
Quotient	$y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ←
Konstante	$y = f(x) = (0 \cdot x + n) = n$	$y' = 0$
Kettenregel	$y = f[\varphi(x)]$ oder $y = f(u)$ mit $u = \varphi(x)$	$y' = f'[\varphi(x)] = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ mit $u = \varphi(x)$ ←
Umkehrregel	$y = f(x)$, invers $x = g(y)$	$f'(x) \cdot g'(y) = 1$ oder $\frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$
logarithmische Differentiation	$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ logarithmiert: $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$	$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$ und daraus: $y' = [g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}] \cdot [f(x)]^{\varphi(x)}$

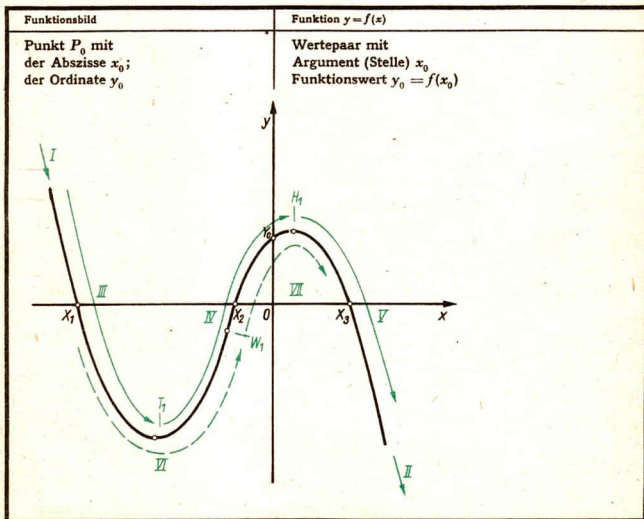
Formeln

10.2. Ableitungen einiger Funktionen

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
$y = x^n$ (n beliebig rational)	$y' = n \cdot x^{n-1};$ $y'' = n(n-1)x^{n-2};$ $y^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad (k \leq n)$ $= 0 \quad (k > n)$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}; y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2};$ $y''' = \frac{2!}{x^3};$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$	
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; y'' = -\frac{1!}{x \cdot \ln a};$ $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \cdot \ln a}$
$y = \arcsin x$ (Hauptwert)	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$	$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \arccos x$ (Hauptwert)	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$	$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{coth} x$	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$

11. Kurvendiskussion

11.1. Begriffe und Bezeichnungen für Funktionsbilder und Funktionen



Funktionsbild	Funktion $y = f(x)$
Abszisse x_1 des Schnittpunkts X_1 mit der x -Achse	(reelle) Nullstelle X_1 der Funktion; Bedingung: $y_1 = f(x_1) = 0$
Ordinate y_2 des Schnittpunkts Y_2 mit der y -Achse	Funktionswert y_2 für Argument $x_2 = 0$; Bedingung: $y_2 = f(0)$
Lokaler Maximumpunkt H_1 mit der Abszisse x_H ; der Ordinate y_H Lokaler Minimumpunkt T_1 mit der Abszisse x_T ; der Ordinate y_T	Lokale Maximumstelle x_H der Funktion Lokaler Maximumwert (lokales Maximum) der Funktion [$y_H = f(x_H)$] Lokale Minimumstelle x_T der Funktion Lokaler Minimumwert (lokales Minimum) der Funktion [$y_T = f(x_T)$]
Gemeinsame Bezeichnungen	
Lokaler Extrempunkt mit der Abszisse x_E der Ordinate y_E	Lokale Extremstelle x_E der Funktion Lokaler Extremwert (lokales Extremum) der Funktion $y_E = f(x_E)$
Wendepunkt W_1 mit der Abszisse x_W , der Ordinate y_W	ohne besondere Bezeichnung
Wachsende (fallende) Monotoniebögen Konvexbogen, Konkavbogen	Intervalle, in denen die Funktion monoton wächst (fällt). Intervalle, in denen die Funktion konvexes (konkaves) Verhalten zeigt.
Verhalten im Unendlichen	Grenzwert der Funktion für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

11.2. Bedingungen für besondere Punkte bei ganzen rationalen und gebrochenen rationalen Funktionen

Besondere Punkte	Notwendige (n), hinreichende (h) Bedingung bei	
	$y = f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ $(k \geq 0, \text{ ganzzahlig})$	$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{k=0}^n b_k x^k}$ $(a_i; b_i \text{ reell; } b_n \neq 0)$
Schnittpunkt mit y -Achse x -Achse	$x = 0$ (n u. h) $y = 0$ (n u. h)	$x = 0$; $N(x) \neq 0$ (n u. h) $Z(x) = 0$; $N(x) \neq 0$ (h)

Formeln

Lokale innere Extrempunkte	$y' = 0$ (n)	$y' = 0$ (n)
Minimumpunkte	$y' = 0; y'' > 0$ (h)	$y' = 0; y'' > 0$ (h)
Maximumpunkte	$y' = 0; y'' < 0$ (h)	$y' = 0; y'' < 0$ (h)
Wendepunkte	$y'' = 0$ (n)	$y'' = 0$ (n)
Polstellen		$N(x) = 0; Z(x) \neq 0$ (h)
Verhalten im Unendlichen (Asymptotenkurven)	$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \pm \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \pm \infty$	$y = f(x) = g(x) + r(x)$ verhält sich für $x \rightarrow \pm \infty$ genau wie $y = g(x)$

11.3. Verfahren zur Bestimmung von Funktionswerten bzw. Näherungswerten

HORNERSCHEM Schema zur Berechnung von Funktionswerten $y = f(x)$ bei bestimmtem Argument x ,

$$\text{wenn } f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$+ a_n \cdot x_1$	$+ a_{n-1} \cdot x_1$	\dots	$+ a_2' x_1$	$+ a_1' x_1$	$+ a_1' x_1$	$+ a_1' x_1$
a_n	a_{n-1}'	a_{n-2}'	\dots	a_2'	a_1'	$a_0' = f(x_1)$

Schnennäherungsverfahren (Regula Falsi): Aus zwei (bekannten) Näherungswerten x_1 und x_2 erhält man mit Hilfe von $\xi = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$, wenn $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ gilt, einen besseren Näherungswert für eine Nullstelle ξ von $y = f(x)$, wenn ein solches ξ vorhanden ist und wenn zwischen ξ und x_1 jeweils $f'(x)$ und $f(x)$ einerlei Vorzeichen haben.

Tangentennäherungsverfahren (NEWTONSCHEM Näherungsverfahren): Aus einem (bekannten) Näherungswert x_1 erhält man mit Hilfe von $\xi = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, wenn $f(x_1) \cdot f'(x_1) > 0$ gilt, einen besseren Näherungswert für eine Nullstelle ξ von $y = f(x)$, wenn ein solches ξ vorhanden ist und wenn zwischen ξ und x_1 jeweils $f'(x)$ und $f(x)$ einerlei Vorzeichen haben.

12. Integralrechnung

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx$$

Gesamtheit aller Funktionen $y = F(x)$, deren 1. Ableitung gleich einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist, für die gilt $F'(x) = f(x)$.

Bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x) dx$ Grenzwert von Summen von Produkten, eine bestimmte Zahl. a und b sind die Integrationsgrenzen, $a \leq x \leq b$ das Integrationsintervall, $f(x)$ der Integrand und x die Integrationsveränderliche.

Berechnung des bestimmten Integrals	In der Stammfunktion werden die Integrationsgrenzen a und b eingesetzt und die Differenz berechnet: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$
-------------------------------------	--

12.1. Integrationsmethoden

Konstanter Faktor	$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$
Summe, Differenz	$\int [u(x) \pm v(x)] dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$
Partielle Integration	$\int u \cdot v' dx = uv - \int uv' dx$
Substitutionsregel	$\int f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u) du = \int f(x) dx$ mit $x = \varphi(u)$ oder $\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \frac{dx}{du} \cdot du$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C, (x < 1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln x + \sqrt{x^2+1} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C, (x > 1)$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arc} \cot x + C_2$	

12.3. Flächen- und Rauminhaltsberechnung durch Integration

Inhalt der Fläche, die begrenzt wird:
von dem Funktionsbild, der x -Achse und den
Parallelen zur y -Achse durch a und b ,

$$A_a^b = \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \quad (\text{falls } a \text{ kleiner als } b)$$

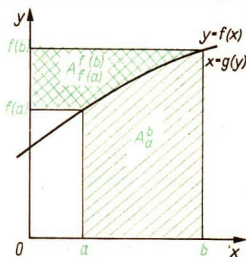
von dem Funktionsbild, der y -Achse und den
Parallelen zur x -Achse durch $f(a)$ und $f(b)$.

$$A_{f(a)}^{f(b)} = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} |x| dy \right| = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} |g(y)| dy \right|,$$

wenn $x = g(y)$ invers zu $y = f(x)$

Inhalt einer Fläche, die allseitig von Funktionsbildern
begrenzt wird.

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f_1(x) - f_2(x)| dx \quad (\text{falls } x_1 \text{ kleiner als } x_2)$$

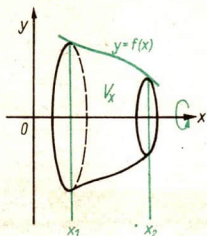


Rauminhalt aus Querschnittsfunktion	$Q = \varphi(x); V = \int_a^b \varphi(x) dx$ (falls a kleiner als b)
-------------------------------------	---

Formeln

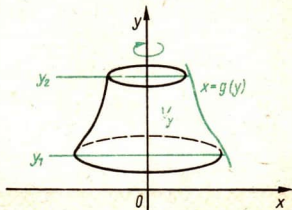
Rauminhalt von Drehkörpern bei Rotation um die x -Achse

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \quad (\text{falls } x_1 \text{ kleiner als } x_2)$$



Rotation um die y -Achse

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2 dy \quad (\text{falls } y_1 \text{ kleiner als } y_2)$$



Mantel eines Drehkörpers: $A_{M_x} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Schwerpunkt einer Fläche

$$\xi = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

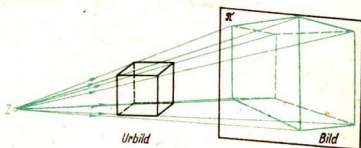
Schwerpunkt eines Drehkörpers

$$\xi = \frac{\int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx}; \quad \eta = 0$$

13. Darstellende Geometrie

Zentralprojektion:

Die Projektionsstrahlen gehen von einem Punkt, dem Zentrum, aus.

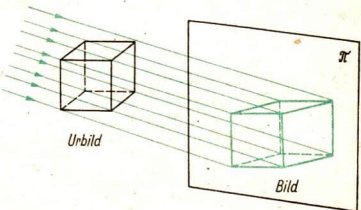


Parallelprojektion:

Die Projektionsstrahlen verlaufen parallel, das Zentrum liegt unendlich weit (Sonderfall der Zentralprojektion).

Orthogonale Parallelprojektion:
Die Projektionsstrahlen treffen im rechten Winkel auf die Bildebene.

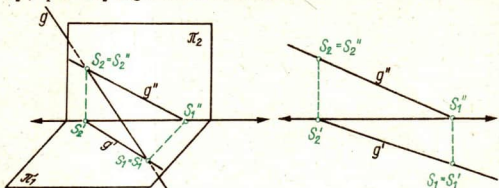
Schiefwinklige Parallelprojektion:
Die Projektionsstrahlen treffen im spitzen Winkel auf die Bildebene.



13.1. Senkrechte Zweitafelprojektion

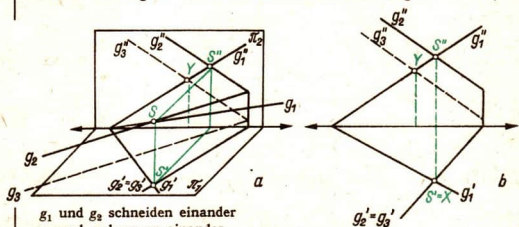
Gerade

Jede Gerade, die nicht parallel zu den Rißtafeln verläuft, durchstößt diese in den Spurpunkten S_1 und S_2 . Es fallen zusammen S_1 mit S_1' und S_2 mit S_2'' ; S_1'' und S_2' liegen auf der Rißachse.



Zwei Geraden

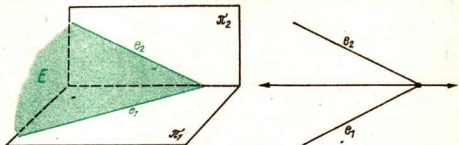
Zwei Geraden schneiden einander genau dann, wenn der Schnittpunkt ihrer Grundrisse mit dem Schnittpunkt ihrer Aufrisse durch eine Ordnungslinie verbunden werden kann. Ist das nicht möglich, so kreuzen die Geraden einander. Man sagt auch, daß die Geraden windschief liegen.



g_1 und g_2 schneiden einander
 g_1 und g_3 kreuzen einander

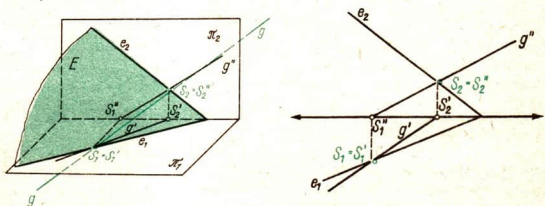
Ebene

Eine Ebene wird durch ihre Grundrißspur e_1 und ihre Aufrißspur e_2 , die einander auf der Rißachse schneiden, dargestellt.



Ebene und inzidierende Gerade

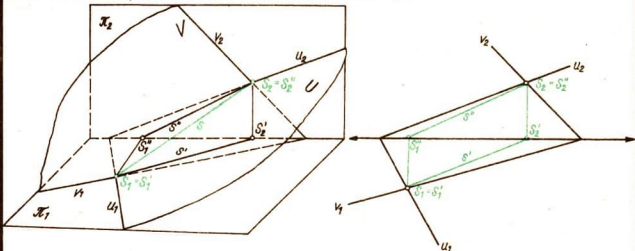
Die Spurpunkte der mit der Ebene inzidierenden Geraden liegen auf den entsprechenden Spurgeraden der Ebene: $S_1 = S_1'$ auf e_1 ; $S_2 = S_2''$ auf e_2 .



Formeln

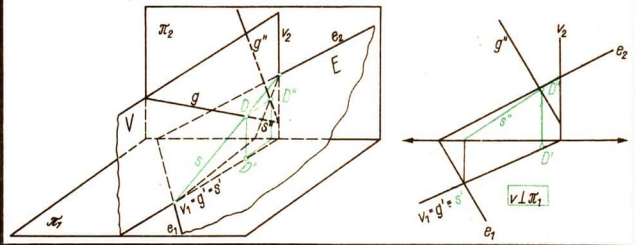
Schnittgerade zweier Ebenen

Die Schnittpunkte entsprechender Spuren zweier Ebenen sind die Spurpunkte der Schnittgeraden dieser Ebenen.



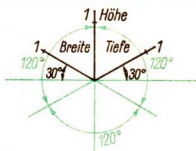
Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

Die Gerade g fällt nicht mit der Ebene e zusammen und ist auch nicht zu ihr parallel. Durch g wird eine Hilfsebene V senkrecht zur Grundräftafel gelegt. Nachdem man die Schnittgerade beider Ebenen konstruiert hat, ermittelt man den Durchstoßpunkt.



13.2. Standardisierte axonometrische Projektionen (nach TGL 0-5)

isometrisch



Für Darstellungen, bei denen in drei Ansichten Wesentliches klar gezeigt werden soll.

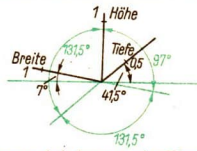
$$q_1 = q_2 = q_3; \alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$$

Die Strecken in den drei Achsrichtungen werden bei der isometrischen senkrechten

Parallelprojektion auf $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,817 \approx \frac{4}{5}$ verkürzt.

Im standardisierten isometrischen Verfahren werden die Strecken in den drei Achsrichtungen unverkürzt aufgetragen.

dimetrisch



Für Darstellungen, bei denen in der Hauptansicht Wesentliches gezeigt werden soll.

$$q_1 = q_2 = 2q_3; \alpha = \beta \approx 131,5^\circ, \gamma \approx 97^\circ$$

Die Breiten und Höhen werden bei dieser dimetrischen senkrechten Parallelprojektion

auf $q = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0,943 \approx \frac{19}{20}$, die Tiefen auf

$q = \frac{1}{3} \sqrt{2} \approx 0,471 \approx \frac{9}{20}$ verkürzt.

Im standardisierten dimetrischen Verfahren werden die Breiten und Höhen unverkürzt und die Tiefen auf die Hälfte verkürzt aufgetragen.

Formeln