LEHRBUCH DER MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

ACHTES SCHULJAHR

VOLK UND WISSEN VERLAG · BERLIN / LEIPZIG

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

8. SCHULJAHR

Mit 175 Abbildungen

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN / LEIPZIG
1950

Herausgegeben von der Verlagsredaktion Mathematik unter Mitarbeit von Werner Kresse und Erich Weis.

Best.-Nr. 2045 1.50 DM br. (1.20 DM bei Lieferung über die Schule) · 431.–595. Tausend
Liz.-Nr. 334 · 1000/51-I-52/51
Satz: B. G. Teubner, Leipzig (M 109) — F 519
Druck: VEB Optima (15), Aschersleben

INHALTSVERZEICHNIS

A. Zur Wiederholung und Übung

I. Grundrechenarten / Bruchrechnung / Prozentrechnung 7
1. Addition und Subtraktion 7
2. Multiplikation und Division 8
3. Brüche und Dezimalbrüche 9
4. Prozentrechnung / Promillerechnung 11
5. Zinsrechnung 14

B. Volkswirtschaftliches Rechnen

II. Die Grundlagen der Planung 16
6. Die Bedeutung der Planung 16
7. Die Haushaltplanung in der Familie 16
8. Die Finanzplanung der Betriebe 18
9. Die Haushaltpläne 23

III. Statistische Auswertung und Beobachtung der Planerfüllung . 25
10. Einführung 25
11. Statistische Auswertung der Haushaltpläne 27
12. Statistische Auswertung der Betriebspläne 28

IV. Vermischte Aufgaben 29
13. Aus veröffentlichten Statistiken 29
14. Von den Aktivisten 32

V. Vom Zahlungs- und Kreditverkehr 34
15. Der bargeldlose Zahlungsverkehr 34
16. Die Zinsrechnung der Banken 40

C. Arithmetik

VI. Verbindung der 4 Grundrechenarten mit relativen Zahlen 44
17. Multiplikation von Summen 44
18. Wichtige Multiplikationsformeln 46
19. Gleichungen mit Multiplikationsklammern 48
20. Vermischte Aufgaben 50

VII. Faktorenzerlegung / Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen ... 53

21. Ausklammern ... 53
22. Formveränderung der Brüche. Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen von Brüchen ... 55
23. Addition und Subtraktion von Brüchen ... 58
24. Multiplikation und Division von Brüchen ... 60
25. Gleichungen mit Brüchen ... 63
26. Anwendungen der Gleichungen mit Brüchen ... 66
27. Gleichungen aus der Prozentrechnung ... 67

VIII. Proportionen ... 69

28. Der Verhältnisbegriff ... 69
29. Proportionen ... 71
30. Anwendungen ... 73

IX. Funktion und graphische Darstellung ... 76

31. Bildliche Darstellung von Beobachtungsreihen ... 76
32. Funktionen ... 79
33. Bildliche Darstellung von Funktionen ... 81
34. Die lineare Funktion $y = mx$ ... 83
35. Die allgemeine lineare Funktion $y = mx + b$ ... 84

X. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten ... 86

36. Zeichnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten 86
37. Rechnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten 87
38. Angewandte Aufgaben ... 91

D. Geometrie

XI. Flächenberechnung und Flächenverwandlung ... 94

39. Berechnung von Rechteck und Quadrat ... 94
40. Berechnung von Parallelogramm und Dreieck ... 96
41. Berechnung von Trapez, unregelmäßigem Viereck und Vieleck ... 99
42. Verwandlung geradlinig begrenzter Flächen ... 102
43. Der Lehrsatz des Pythagoras ... 106

XII. Quadratzahlen und Quadratwurzeln ... 109

44. Das Quadrieren der Zahlen ... 109
45. Die Quadrattafel ... 110
46. Die Quadratwurzel ... 114
47. Die Quadratwurzel aus Dezimalbrüchen / Irrationale Zahlen ... 117
48. Aufsuchen von Quadratwurzeln in der Quadrattafel ... 119
49. Anwendungen ... 121

XIII. Der Rechenstab 124
50. Der Aufbau des Rechenstabes 124
51. Einfache Multiplikation und Division mit dem Rechenstab 126
52. Multiplikation und Division mit Rückschlag 127
53. Verbindung von Multiplikation und Division 128
54. Lösung von Proportionen mit dem Rechenstab 129
55. Quadrieren und Quadratwurzelziehen 129

XIV. Aus der Kreislehre 130
56. Sehnen 130
57. Sekanten und Tangenten 132
58. Peripherie- und Zentriwinkel 135
59. Der Kreis als Bestimmungslinie 138
60. Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat (Anwendung des Thaleskreises) 140
61. Berechnung des Kreisumfanges 142
62. Berechnung des Kreisinhaltes 145

XV. Berechnung und Darstellung einfacher Körper 148
63. Würfel und Quader 148
64. Kantige Säulen / Zylinder 151
65. Pyramide / Kegel 156
66. Inhalt und Oberfläche der Kugel 159
67. Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion 163
68. Die senkrechte Parallelprojektion 166
69. Anwendungen aus der Technik 171

XVI. Aus der Ähnlichkeitslehre 176
70. Verhältnis zweier Strecken und Teilverhältnis 176
71. Strahlensätze 177
72. Anwendungen der Strahlensätze 180
73. Ähnlichkeit und Ähnlichkeitssatz 182

A. Zur Wiederholung und Übung

I. Grundrechenarten / Bruchrechnung / Prozentrechnung

1. Addition und Subtraktion

1. a) 56 943 + 74 802 + 21 314 + 6 705 + 19 832 + 97 691

b) 2 314 408 + 6 934 617 + 32 569 + 314 708 + 19 271 485 + 29 493

c) 125 314 492 + 684 307 986 + 2 513 094 + 56 789 + 15 356 941

d) 513 462 + 8 306 + 1 005 708 + 36 456 + 245 931 + 6 789 357

e) 98 234 628 + 9 573 009 + 827 653 + 14 597 358 + 82 394 + 169 985

f) 4 009 003 + 856 474 + 5 387 002 + 41 957 + 3 428 + 6 909 872

g) 368 104 923 + 14 583 929 + 5 587 293 + 46 154 329 + 7 568 321

2. Addiere die Zahlen der Spalten a bis e!
Addiere die Zahlen der Zeilen I bis VI!

	a	b	c	d	e
I	6 432 985	437 620	45 083 615	344 822	49 521 332
II	827 203	8 370 920	64 246 794	5 047 823	320 864
III	5 963 287	14 321	3 579 135	153 692	7 531 420
IV	15 247	579 802	28 003 909	85 057	342 537
V	321 968	6 304 627	5 728 097	43 512	9 876 543
VI	8 203 624	391 423	569 864	8 666 787	213 579

3. a) 5 678 923 − 896 092

b) 48 506 003 − 42 897 987

c) 2 638 914 − 1 809 956

d) 8 234 508 − 6 135 287

e) 9 407 803 − 6 298 994

f) 56 320 287 − 41 910 695

g) 4 567 890 − 3 958 203

h) 4 298 003 − 3 900 987

4. a) 16 234 508 − 2 603 516 − 4 583 006 − 4 321 765 − 1 008 093

b) 65 030 407 − 6 284 975 − 1 357 987 − 5 684 237 − 8 248 673

c) 74 986 392 − 4 580 623 − 5 802 705 − 6 532 108 − 4 310 014

d) 81 516 314 — 5 831 672 — 916 528 — 2 317 778 — 862 413

e) 5 613 209 — 384 561 — 962 309 — 1 506 218 — 2 516 413

f) 6 789 023 — 478 293 — 3 614 507 — 298 937 — 957 264

5. Subtrahiere in den einzelnen Zeilen von den Zahlen der Spalten a bis c jede Zahl der Spalten I bis III!

a	b	c	I	II	III
6 289 405	14 532 141	39 458 162	5 831 217	3 519 711	6 288 306
7 923 081	26 798 586	46 140 730	7 922 092	5 357 821	956 483
4 567 809	43 929 803	79 008 000	3 211 007	2 616 734	1 121 211
5 083 274	54 757 260	10 000 000	2 316 989	5 082 396	603 482

2. Multiplikation und Division

1. a) 56 832 · 694 **b)** 72 341 · 994 **c)** 83 045 · 675
d) 72 341 · 567 **e)** 90 284 · 375 **f)** 61 234 · 572
g) 94 723 · 295 **h)** 62 354 · 464 **i)** 75 597 · 843
k) 81 650 · 783 **l)** 84 266 · 632 **m)** 42 362 · 798

2. a) 92 645 · 321 **b)** 743 518 · 731 **c)** 583 347 · 641
d) 56 082 · 149 **e)** 293 470 · 137 **f)** 692 018 · 125
g) 37 902 · 618 **h)** 803 564 · 719 **i)** 932 441 · 513
k) 11 201 · 821 **l)** 211 119 · 164 **m)** 551 372 · 918

3. a) 5 629 · 4 568 **b)** 7 451 · 6 234 **c)** 3 141 · 8 156
d) 9 203 · 1 645 **e)** 1 101 · 3 256 **f)** 8 345 · 4 003
g) 8 270 · 5 691 **h)** 8 203 · 5 003 **i)** 6 758 · 5 309
k) 5 003 · 1 457 **l)** 6 217 · 2 708 **m)** 7 359 · 8 270

4. Multipliziere in den einzelnen Zeilen die Zahlen der Spalten a bis c mit jeder Zahl der Spalten I bis III!

a	b	c	I	II	III
67 258	121 441	567 987	561	187	324
43 210	516 357	123 456	432	503	630
78 003	297 684	654 321	98	264	721
57 876	999 878	807 905	163	74	186

5. a) $651 \cdot 43 \cdot 12$ **b)** $458 \cdot 11 \cdot 13$ **c)** $629 \cdot 141 \cdot 45$
d) $21 \cdot 49 \cdot 84$ **e)** $627 \cdot 42 \cdot 45$ **f)** $468 \cdot 24 \cdot 68$
g) $556 \cdot 78 \cdot 90$ **h)** $233 \cdot 61 \cdot 85$ **i)** $304 \cdot 27 \cdot 51$

6. a) $78\,234 : 141$ **b)** $30\,004 : 72$ **c)** $123\,916 : 43$
d) $284\,314 : 216$ **e)** $61\,508 : 304$ **f)** $284\,314 : 283$
g) $500\,600 : 64$ **h)** $62\,745 : 68$ **i)** $517\,009 : 103$
k) $83\,576 : 82$ **l)** $700\,000 : 341$ **m)** $904\,652 : 798$

7. Dividiere in den einzelnen Zeilen die Zahlen der Spalten a bis c durch jede Zahl der Spalten I bis III!

a	b	c	I	II	III
98 765	100 000	3 962 000	83	123	615
43 210	300 000	6 317 415	43	414	342
35 764	784 062	8 000 000	41	516	705
82 403	516 536	9 215 304	82	817	603

8. a) $(562 + 131) \cdot (217 - 198)$ **b)** $(374 - 98) \cdot 76$
c) $(582 - 76) \cdot (823 - 774)$ **d)** $(927 - 488) \cdot (213 + 569)$
e) $41 \cdot (823 - 567)$ **f)** $53 \cdot (274 - 56)$
g) $(897 + 926) : (976 - 583)$ **h)** $932 : (583 - 498)$
i) $76 \cdot (514 + 231)$ **k)** $(745 + 932) \cdot (821 - 143)$
l) $582 : (960 - 842)$ **m)** $65 \cdot (997 - 123)$

3. Brüche und Dezimalbrüche

1. a) $9\frac{3}{5} + 7\frac{3}{4}$ **b)** $8\frac{1}{3} + 7\frac{5}{6}$ **c)** $10\frac{1}{2} + 12\frac{3}{7}$ **d)** $41\frac{1}{8} + 42\frac{3}{5}$
e) $3\frac{1}{4} + 5\frac{2}{3}$ **f)** $16\frac{1}{6} + 7\frac{5}{7}$ **g)** $8\frac{3}{8} + 5\frac{5}{6}$ **h)** $56\frac{4}{9} - 17\frac{7}{8}$
i) $5\frac{4}{25} - 3\frac{2}{15}$ **k)** $47\frac{9}{10} - 26\frac{3}{8}$ **l)** $53\frac{1}{2} - 46\frac{7}{12}$ **m)** $19\frac{1}{5} - 11\frac{5}{6}$
n) $7\frac{4}{21} - 3\frac{3}{14}$ **o)** $15\frac{5}{8} - 7\frac{5}{6}$ **p)** $7\frac{3}{20} - 6\frac{7}{15}$ **q)** $8\frac{8}{9} - 7\frac{1}{6}$

2. a) $18\frac{5}{12} + 7\frac{8}{15}$ **b)** $9\frac{7}{20} + 6\frac{3}{11}$ **c)** $15\frac{11}{12} + 3\frac{7}{30}$ **d)** $8\frac{7}{26} - 5\frac{5}{13}$
e) $46\frac{3}{11} - 9\frac{5}{12}$ **f)** $5\frac{11}{15} - 3\frac{7}{13}$ **g)** $5\frac{3}{25} - 1\frac{7}{7}$ **h)** $8\frac{7}{40} - 5\frac{3}{28}$
i) $97\frac{6}{7} + 5\frac{5}{8}$ **k)** $46\frac{8}{9} - 5\frac{5}{6}$ **l)** $27\frac{7}{19} + 5\frac{5}{13}$ **m)** $46\frac{11}{18} - 42\frac{9}{16}$
n) $47\frac{9}{25} - 5\frac{5}{11}$ **o)** $74\frac{9}{13} - 4\frac{11}{18}$ **p)** $32\frac{5}{9} - 21\frac{7}{11}$ **q)** $92\frac{3}{4} + 25\frac{9}{17}$

3. **a)** $8\frac{1}{2}+5\frac{5}{6}-3\frac{1}{7}-2\frac{4}{5}$ **b)** $16\frac{3}{4}-8\frac{3}{5}+6\frac{2}{9}-1\frac{1}{7}$

c) $13\frac{4}{5}+9\frac{9}{10}+6\frac{1}{2}-15\frac{5}{6}$ **d)** $13\frac{7}{11}-9\frac{2}{9}+3\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}$

e) $9\frac{5}{12}+7\frac{3}{8}-10\frac{5}{6}-2\frac{1}{3}$ **f)** $48\frac{8}{9}-16\frac{2}{3}-5\frac{9}{10}+6\frac{5}{21}$

g) $47\frac{11}{12}-6\frac{5}{6}-7\frac{1}{2}+18\frac{8}{9}$ **h)** $37\frac{5}{21}-16\frac{3}{8}+7\frac{3}{14}-5\frac{4}{5}$

4. **a)** $\left(3\frac{1}{3}+5\frac{4}{5}\right)\cdot\left(6\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(8\frac{9}{10}-5\frac{2}{7}\right)\cdot\left(6\frac{1}{3}-4\frac{4}{5}\right)$

c) $\left(9\frac{9}{10}-2\frac{1}{2}\right):\left(6\frac{3}{8}+7\frac{5}{6}\right)$ **d)** $\left(5\frac{5}{9}+8\frac{3}{10}\right):\left(9\frac{4}{5}-2\frac{5}{6}\right)$

e) $\left(4\frac{4}{21}+8\frac{5}{7}\right)\cdot\left(3\frac{5}{9}-1\frac{1}{6}\right)$ **f)** $\left(7\frac{7}{12}-2\frac{1}{10}\right):\left(5\frac{1}{8}+4\frac{3}{4}\right)$

g) $\left(8\frac{11}{12}-2\frac{7}{15}\right):\left(3\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}\right)$ **h)** $\left(1\frac{1}{30}+5\frac{6}{15}\right)\cdot\left(2\frac{9}{14}-2\frac{3}{10}\right)$

5. **a)** $6{,}424+16{,}9024-3{,}85-26{,}9-2{,}082+6{,}3+7{,}4$

b) $293{,}8-26{,}35-14{,}009+2{,}0708+3{,}02945-3{,}15$

c) $141{,}09-6{,}0023-4{,}856-5{,}83+2{,}34+1{,}806-7{,}9$

d) $224{,}5683-16{,}402-141{,}003+18{,}64-0{,}9-5{,}23408$

e) $623{,}5-121{,}45-14{,}568-19{,}34702-8{,}1+16{,}234$

6. Addiere **a)** die Zahlen der Spalten a bis e, **b)** die Zahlen der Zeilen I bis IV, **c)** die Summen der Spalten, **d)** die Summen der Zeilen!

	a	b	c	d	e
I	82,946	581,5	964,580 3	19,002	46,458
II	7,20	8,16	16,43	45,97	31,062 9
III	5,582 3	0,345 6	7,029 1	4,037 89	8,297
IV	46,32	35,709	8 213,562	8,964	23,85

7. **a)** $8{,}46\cdot 23$ **b)** $19{,}083\cdot 41$ **c)** $17{,}48\cdot 65$

d) $2{,}645\cdot 97$ **e)** $19{,}2\cdot 46$ **f)** $4{,}0203\cdot 58$

g) $1{,}081\cdot 73$ **h)** $3{,}456\cdot 81$ **i)** $43{,}56\cdot 21$

k) $0{,}0923\cdot 69$ **l)** $3{,}2\cdot 42$ **m)** $0{,}099\cdot 23$

8. **a)** $21\cdot 0{,}7459$ **b)** $55\cdot 2{,}1$ **c)** $81\cdot 7{,}84$

d) $19\cdot 0{,}019$ **e)** $32\cdot 0{,}0032$ **f)** $76\cdot 7{,}006$

g) $42\cdot 4{,}2$ **h)** $46\cdot 0{,}046$ **i)** $43\cdot 3{,}043$

k) $93\cdot 3{,}0903$ **l)** $75\cdot 7{,}5$ **m)** $83\cdot 0{,}83$

9. **a)** $16{,}3 \cdot 27{,}4$ **b)** $41{,}82 \cdot 0{,}268$ **c)** $56{,}08 \cdot 5{,}1$
d) $3{,}14 \cdot 6{,}29$ **e)** $25{,}86 \cdot 2{,}8$ **f)** $53{,}04 \cdot 3{,}04$
g) $72{,}451 \cdot 7{,}4$ **h)** $5{,}6 \cdot 8{,}3457$ **i)** $36{,}495 \cdot 0{,}45$
k) $92{,}039 \cdot 0{,}0093$ **l)** $11{,}11 \cdot 1{,}1$ **m)** $8{,}2021 \cdot 1{,}22$

10. **a)** $672{,}3 : 12$ **b)** $19{,}5 : 15$ **c)** $2{,}734 : 18$
d) $46{,}3 : 16$ **e)** $9{,}458 : 14$ **f)** $62{,}745 : 8$
g) $0{,}04 : 9$ **h)** $3{,}021 : 21$ **i)** $56{,}234 : 24$
k) $6{,}2 : 32$ **l)** $5{,}05 : 15$ **m)** $12{,}6 : 24$

11. **a)** $6{,}2 : 0{,}9$ **b)** $7{,}2 : 0{,}08$ **c)** $16{,}3 : 0{,}16$
d) $14{,}759 : 2{,}8$ **e)** $15{,}34 : 6{,}1$ **f)** $19{,}5 : 0{,}018$
g) $2{,}6 : 0{,}0026$ **h)** $8{,}003 : 1{,}5$ **i)** $7{,}6 : 1{,}02$
k) $5{,}7 : 0{,}019$ **l)** $1{,}9 : 0{,}57$ **m)** $4{,}8 : 0{,}082$

12. **a)** $0{,}84 + \frac{3}{8}$ **b)** $\frac{3}{4} + 0{,}74$ **c)** $\frac{4}{5} - 0{,}62$ **d)** $8{,}9 - 2\frac{3}{4}$
e) $7{,}8 \cdot \frac{3}{5}$ **f)** $\frac{5}{16} \cdot 0{,}19$ **g)** $\frac{7}{8} : 0{,}25$ **h)** $6{,}4 : \frac{9}{32}$
i) $\frac{9}{20} + 8{,}7$ **k)** $4{,}6 - \frac{7}{15}$ **l)** $9{,}9 \cdot \frac{3}{11}$ **m)** $\frac{5}{12} : 0{,}7$

13. **a)** $\left(\frac{5}{6} + 0{,}7\right) \cdot 0{,}8$ **b)** $\left(8{,}8 - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 0{,}4$ **c)** $\left(6{,}3 - \frac{1}{5}\right) \cdot 4{,}3$
d) $\left(9\frac{1}{4} - 2{,}8\right) \cdot 5{,}6$ **e)** $\left(8\frac{1}{4} - 7{,}4\right) \cdot \left(\frac{5}{8} + 7{,}1\right)$ **f)** $\left(6{,}16 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right)$
g) $\left(7{,}5 - 2\frac{1}{4}\right) : 0{,}8$ **h)** $46 : \left(9{,}2 - 7\frac{4}{5}\right)$ **i)** $\left(11\frac{9}{20} + 3{,}4\right) \cdot \left(20\frac{5}{8} - 17{,}5\right)$
k) $\left(7\frac{1}{4} - 6{,}5\right) : \left(9\frac{1}{2} - 8{,}7\right)$ **l)** $\left(5\frac{7}{8} - 4{,}9\right) : 0{,}4$ **m)** $100 : \left(3\frac{1}{4} - 2{,}75\right)$

4. Prozentrechnung / Promillerechnung

1. **a)** 6% von 340 DM **b)** 7% von 920 kg **c)** 8% von 740 kg
d) 5% „ 2562 ha **e)** $3\frac{1}{2}$% „ 258 m **f)** $9\frac{1}{5}$% „ 810 l
g) 7% „ 974 dz **h)** 5,4% „ 96 hl **i)** 8,3% „ 934 DM
k) 9% „ 141 DM **l)** $6\frac{1}{5}$% „ 519 a **m)** $6\frac{1}{2}$% „ 90 hl
n) 2% „ 66 kg **o)** 8,3% „ 45 kp **p)** $4\frac{1}{3}$% „ 216 g

2. **a)** 25% von 450 DM **b)** 20% von 955 kg **c)** $33\frac{1}{3}$% von 741 km
d) 10% „ 962 t **e)** $6\frac{1}{4}$% „ 336 l **f)** 75% „ 928 DM
g) $12\frac{1}{2}$% „ 448 hl **h)** $66\frac{2}{3}$% „ 459 a **i)** 80% „ 568 hl
k) $16\frac{2}{3}$% „ 396 kp **l)** $8\frac{1}{3}$% „ 252 DM **m)** $37\frac{1}{2}$% „ 656 ha

3. a) 230% von 640 DM	**b)** 310% von 862 hl	**c)** 560% von 71 l
d) 510% „ 980 kg	**e)** 750% „ 74 DM	**f)** 480% „ 190 kp
g) 120% „ 120 g	**h)** 160% „ 240 kg	**i)** 350% „ 530 DM
k) 240% „ 720 dz	**l)** 430% „ 86 t	**m)** 110% „ 260 l
n) 300% „ 64 hl	**o)** 215% „ 450 DM	**p)** 230% „ 40 ha

4. a) 8% von 9 432 DM	**b)** $6\frac{1}{4}$% von 6 kg	**c)** 5,5% von 82,93 l
d) 7,3% „ 8 004 ha	**e)** 5,9% „ 18,30 DM	**f)** $4\frac{1}{3}$% „ 15,6 dz
g) $9\frac{3}{4}$% „ 24,2 kp	**h)** $6\frac{4}{5}$% „ 9,8 ha	**i)** 12,8% „ 9,40 DM
k) 2,3% „ 16,5 t	**l)** 4,6% „ 13,5 DM	**m)** $1\frac{1}{4}$% „ 32,5 ha
n) 1,7% „ 23,5 l	**o)** $2\frac{1}{5}$% „ 9,4 t	**p)** 3,2% „ 12,40 DM

Wieviel % sind

5. a) 36 DM von 180 DM	**b)** 9,2 kg von 36,8 kg
c) 50 ha „ 620 ha	**d)** 45 hl „ 300 hl
e) 8,4 dz „ 60 dz	**f)** 40 p „ 150 p
g) 90 DM „ 150 DM	**h)** 5 hl „ 700 hl
i) 30 DM „ 40 DM	**k)** 9,6 t „ 320 t

6. a) 320 DM von 200 DM	**b)** 600 DM von 500 DM
c) 84 kg „ 60 kg	**d)** 160 DM „ 120 DM
e) 900 DM „ 500 DM	**f)** 74 ha „ 30 ha
g) 900 hl „ 240 hl	**h)** 450 dz „ 240 dz
i) 62 p „ 20 p	**k)** 360 t „ 160 t ?

Berechne den Grundwert!

7. a) 6% $\widehat{=}$ 39 kg	**b)** $4\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 18 hl	**c)** $5\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 27,50 dz
d) 5% $\widehat{=}$ 42 DM	**e)** $3\frac{1}{3}$% $\widehat{=}$ 20 ha	**f)** $1\frac{1}{8}$% $\widehat{=}$ 25 DM
g) $4\frac{4}{5}$% $\widehat{=}$ 24 dz	**h)** $5\frac{1}{4}$% $\widehat{=}$ 25,50 DM	**i)** 3,1% $\widehat{=}$ 18,6 hl
k) $2\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 28,25 kg	**l)** $1\frac{1}{4}$% $\widehat{=}$ 8,75 dz	**m)** $1\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 7,5 t

8. a) $4\frac{1}{5}$% $\widehat{=}$ 12,60 DM	**b)** 8% $\widehat{=}$ 67,2 t	**c)** $1\frac{1}{4}$% $\widehat{=}$ 5,25 hl
d) $1\frac{1}{3}$% $\widehat{=}$ 8 kp	**e)** $2\frac{1}{4}$% $\widehat{=}$ 20,25 kg	**f)** 2% $\widehat{=}$ 6,14 g
g) 3% $\widehat{=}$ 12,03 kp	**h)** 15% $\widehat{=}$ 4,65 hl	**i)** $1\frac{1}{5}$% $\widehat{=}$ 12,6 kg
k) 80% $\widehat{=}$ 132 DM	**l)** 98% $\widehat{=}$ 400 DM	**m)** 72% $\widehat{=}$ 300 t

9. Bestimme den Grundwert!

Vermehrung	Vermehrter Wert	Verminderung	Verminderter Wert
a) 12%	336 hl	g) 15%	340 kg
b) 75%	560 DM	h) 27%	584 hl
c) 15%	471,50 dz	i) 41%	200,6 t
d) 11%	200,90 kg	k) 6%	164,5 DM
e) 14%	777,2 t	l) 3%	79,76 dz
f) 39%	250,20 DM	m) 16%	420 DM

10. a) 4‰ von 9 200 DM — **b)** $6\frac{1}{3}$‰ von 18 400 dz
c) 9,5‰ „ 7 200 hl — **d)** $8\frac{1}{2}$‰ „ 15 500 hl
e) 2,4‰ „ 13 200 DM — **f)** 1,8‰ „ 5 400 t
g) 9,5‰ „ 16 000 DM — **h)** 6,1‰ „ 14 000 hl
i) $3\frac{3}{5}$‰ „ 28 300 hl — **k)** 6,4‰ „ 4 000 t
l) $3\frac{1}{4}$‰ „ 24 400 kg — **m)** $1\frac{1}{6}$‰ „ 3 100 hl
n) $9\frac{1}{3}$‰ „ 8 100 kp — **o)** 0,9‰ „ 8 300 DM
p) 8,2‰ „ 900 kg — **q)** 0,7‰ „ 8 800 hl
r) $5\frac{4}{5}$‰ „ 6 200 t — **s)** 0,15‰ „ 200 DM

11. Wieviel ‰ sind

a) 32 DM von 64 000 DM — **b)** 41 DM von 16 400 DM
c) 90 „ „ 13 500 „ — **d)** 51 „ „ 72 000 „
e) 79 „ „ 9 000 „ — **f)** 195 „ „ 8 000 „
g) 120 „ „ 26 000 „ — **h)** 80 „ „ 90 000 „
i) 240 „ „ 12 000 „ — **k)** 16 „ „ 32 000 „
l) 45 „ „ 22 500 „ — **m)** 38 „ „ 17 000 „
n) 50 „ „ 42 000 „ — **o)** 6 „ „ 3 900 „
p) 50 „ „ 2 200 „ — **q)** 21 „ „ 4 200 „ ?

12. Bestimme den Grundwert!

a) 8‰ ≙ 164 kg — **b)** 6,6‰ ≙ 264 hl — **c)** 4,5‰ ≙ 18 kg
d) 6‰ ≙ 13,2 hl — **e)** 5,5‰ ≙ 27,50 DM — **f)** 0,8‰ ≙ 2,64 DM
g) 4‰ ≙ 12,8 t — **h)** 2‰ ≙ 0,6 t — **i)** 0,4‰ ≙ 0,08 hl
k) $2\frac{1}{2}$‰ ≙ 5,50 DM — **l)** 9‰ ≙ 49,5 kg — **m)** 2,6‰ ≙ 1,3 dz
n) 3,5‰ ≙ 17,5 dz — **o)** $1\frac{1}{2}$‰ ≙ 2,7 p — **p)** 12‰ ≙ 37,20 DM

5. Zinsrechnung

Wieviel Zinsen ergeben

1. a) 560 DM zu 3% in 8 Mon.	**b)** 940 DM zu $2\frac{3}{4}$% in 7 Mon.
c) 980 ,, ,, $2\frac{1}{2}$% ,, $\frac{1}{4}$ J.	**d)** 2 380 ,, ,, $3\frac{1}{4}$% ,, $\frac{1}{2}$ J.
e) 140 ,, ,, $1\frac{3}{4}$% ,, 6 Mon.	**f)** 4 509 ,, ,, $2\frac{1}{5}$% ,, 11 Mon.
g) 510 ,, ,, 2% ,, 5 Mon.	**h)** 6 348 ,, ,, 3% ,, $\frac{1}{2}$ J.
i) 750 ,, ,, 1,4% ,, $\frac{3}{4}$ J.	**k)** 162 ,, ,, 3,25% ,, $\frac{1}{4}$ J.

2. a) 3 940 DM zu 2% in $\frac{1}{4}$ J.	**b)** 4 703 DM zu $1\frac{1}{5}$% in $\frac{3}{4}$ J.
c) 5 026 ,, ,, $2\frac{1}{2}$% ,, 7 Mon.	**d)** 5 583 ,, ,, 3,1% ,, 1 Mon.
e) 985 ,, ,, $3\frac{1}{4}$% ,, $\frac{3}{4}$ J.	**f)** 6 491 ,, ,, 2,8% ,, 11 Mon.
g) 4 230 ,, ,, 3% ,, 5 Mon.	**h)** 75 ,, ,, $2\frac{1}{4}$% ,, $\frac{1}{4}$ J.
i) 784 ,, ,, $1\frac{4}{5}$% ,, 1 Mon.	**k)** 290 ,, ,, 2,8% ,, 2 Mon.

3. a) 6 230 DM zu $2\frac{1}{2}$% in 63 Tg.	**b)** 3 000 DM zu 3% in 26 Tg.
c) 9 174 ,, ,, 3% ,, 45 Tg.	**d)** 9 200 ,, ,, $2\frac{4}{5}$% ,, 1 Tg.
e) 800 ,, ,, 2,7% ,, 16 Tg.	**f)** 60 ,, ,, $1\frac{3}{4}$% ,, 108 Tg.
g) 5 130 ,, ,, $1\frac{3}{4}$% ,, 125 Tg.	**h)** 230 ,, ,, 1,8% ,, 66 Tg.
i) 875 ,, ,, $3\frac{1}{4}$% ,, 94 Tg.	**k)** 25 ,, ,, 2,4% ,, 73 Tg. ?

4. Bei welchem Zinsfuß ergeben

a) 2 980 DM in $\frac{1}{2}$ J. 44,70 DM Zinsen
b) 3 600 ,, ,, $\frac{1}{4}$ J. 22,50 ,, ,,
c) 7 100 ,, ,, $\frac{1}{2}$ J. 53,25 ,, ,,
d) 6 600 ,, ,, 1 Mon. 11,00 ,, ,,
e) 480 ,, ,, 2 Mon. 1,60 ,, ,,
f) 1 800 ,, ,, 2 Mon. 11,25 ,, ,, ?

5. Welche Einlage bringt auf der Sparkasse, die die Einlagen zu 3% verzinst,

a) in 7 Mon. 1,47 DM Zinsen	**b)** in 1 Mon. 1,50 DM Zinsen
c) ,, 2 Mon. 12,00 ,, ,,	**d)** ,, $\frac{1}{2}$ J. 14,40 ,, ,,
e) ,, $\frac{1}{2}$ J. 5,40 ,, ,,	**f)** ,, 5 Mon. 6,— ,, ,,
g) ,, 2 Mon. 0,60 ,, ,,	**h)** ,, $\frac{1}{4}$ J. 54,— ,, ,,
i) ,, 5 Mon. 3,— ,, ,,	**k)** ,, 5 Mon. 4,50 ,, ,, ?

6. In welcher Zeit ergeben

a)	500 DM	zu	2%	2,50 DM	Zinsen
b)	500 „	„	$2\frac{1}{4}$%	9,— „	„
c)	600 „	„	$2\frac{1}{2}$%	3,75 „	„
d)	270 „	„	3%	4,05 „	„
e)	900 „	„	$3\frac{1}{5}$%	7,20 „	„
f)	950 „	„	$3\frac{1}{4}$%	15,45 „	„
g)	450 „	„	$2\frac{3}{4}$%	4,66 „	„
h)	320 „	„	2,4%	1,92 „	„
i)	380 „	„	$3\frac{1}{4}$%	2,47 „	„
k)	60 „	„	1,8%	0,09 „	„ ?

7. In welcher Zeit wachsen

a)	400 DM	bei	3%	auf	403,— DM	an
b)	650 „	„	2,4%	„	657,80 „	„
c)	920 „	„	$2\frac{1}{2}$%	„	924,60 „	„
d)	240 „	„	1,5%	„	240,30 „	„
e)	860 „	„	$3\frac{1}{2}$%	„	875,05 „	„
f)	900 „	„	$3\frac{1}{2}$%	„	910,50 „	„
g)	540 „	„	2%	„	547,20 „	„ ?

8. Berechne die Zinsen und das Guthaben am Jahresende! Zinsfuß 3%. 31. 12. Guthaben aus dem Vorjahr: 190,— DM; 15. 2. Einzahlung: 370,— DM; 23. 4. Abhebung: 280,— DM; 5. 6. Abhebung: 200,— DM; 14. 8. Einzahlung: 160,— DM; 7. 10. Einzahlung: 170,— DM; 5. 12. Abhebung: 300,— DM.

9. Schließe das Konto eines Sparbuches unter Berücksichtigung von 3% Zinsen zum Jahresende ab! Guthaben aus dem Vorjahr: 260,— DM; 16. 1. Einzahlung: 120,— DM; 5. 3. Einzahlung: 70,— DM; 14. 4. Einzahlung: 110,— DM; 2. 5. Abhebung: 90,— DM; 15. 6. Abhebung: 140,— DM; 2. 8. Einzahlung: 40,— DM; 18. 10. Abhebung: 100,— DM; 5. 11. Einzahlung: 30,— DM; 15. 12. Abhebung: 60,— DM.

B. Volkswirtschaftliches Rechnen

II. Die Grundlagen der Planung

6. Die Bedeutung der Planung

Wenn wir eine Aufgabe sinnvoll lösen wollen, müssen wir für unsere Arbeit einen Plan aufstellen: Für den Aufsatz wird eine Gliederung entworfen, die Dreisatzaufgabe wird mit Hilfe eines Ansatzes gelöst, der Unterricht erfolgt nach einem Lehrplan, die Unterrichtsstunden werden nach einer Stundentafel verteilt.
Immer handeln wir also „planmäßig". Das gilt besonders im Wirtschaftsleben. Die Haushaltkosten einer Familie müssen „geplant" werden, sonst kann es sich ergeben, daß die Einkünfte nicht zur Bestreitung des Unterhalts reichen. Die Betriebe produzieren ihre Erzeugnisse nach genauem Plan; auch die Güterverteilung muß planmäßig erfolgen, wenn sie reibungslos und gerecht geschehen soll. Die vielen betrieblichen Einzelpläne sind Bestandteil des gesamten Volkswirtschaftsplanes. Dieser Volkswirtschaftsplan der Deutschen Demokratischen Republik sichert die Wiederherstellung und Entwicklung unserer Friedenswirtschaft, er ist damit Voraussetzung für ein besseres Leben.

7. Die Haushaltplanung in der Familie

1. Ein Maschinenschlosser hatte nach Abzug der Steuern und der Beiträge zur Sozialversicherung ein Jahreseinkommen von 2 760,— DM. Er verteilte sein Einkommen auf seine voraussichtlichen Ausgaben in folgender Weise:

1. Miete	480,—	DM
2. Ernährung	1 280,—	„
3. Bekleidung	240,—	„
4. Heizung und Beleuchtung	224,—	„
5. Fortbildung, Erholung und Unterhaltung	176,—	„
6. Verschiedene Aufwendungen	80,—	„

a) Wie hoch waren durchschnittlich seine monatlichen Einnahmen und Ausgaben?

b) Wieviel % seiner Einnahmen setzte er als Ausgaben in die einzelnen Posten ein?

c) Wie groß war der Überschuß am Ende des Jahres?

2. Ein Bauarbeiter hat ein monatliches Reineinkommen von 190,— DM. Er verteilt seine Ausgaben wie folgt: für Wohnung 15,3%, für Ernährung 53%, für Kleidung 8%, für Heizung und Licht 7,8%, für Erholung und Unterhaltung 9%.

a) Berechne die Höhe der einzelnen Ausgaben in DM!

b) Wieviel DM bleiben für unvorhergesehene Ausgaben oder für Ersparnisse übrig?

3. Der Kernformer Erich Schrödter der Eisengießerei in Neustadt hatte im letzten Jahre ein Reineinkommen von 2790,— DM. Abb. 1 zeigt, wie sich seine Ausgaben, in Prozenten ausgedrückt, verteilen.

a) Berechne die jährlichen (monatlichen) Ausgaben für die einzelnen Posten! b) Wie groß ist der Überschuß?

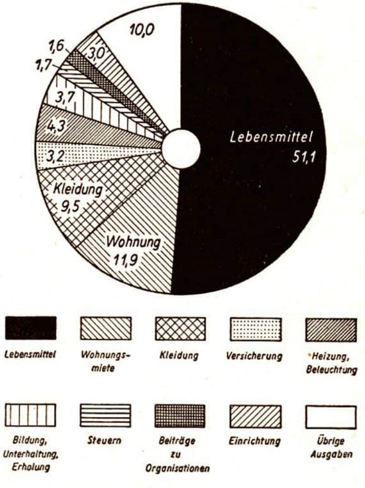


Abb. 1

4. Der Kernformer Erich Schrödter beteiligt sich an einem betrieblichen Wettbewerb. Durch Steigerung seiner Leistung erhöht sich im nächsten Jahre sein Reineinkommen auf 3840,— DM. Seine Aufwendungen für Wohnungsmiete, Heizung und Beleuchtung bleiben unverändert.

a) Wieviel Prozent des früheren Einkommens beträgt die Einkommenssteigerung?

b) Wieviel Prozent des Jahreseinkommens betragen nunmehr die Ausgaben für Wohnungsmiete, die Ausgaben für Heizung und Beleuchtung?

8. Die Finanzplanung der Betriebe

a) Die Planauflage

Die Finanzpläne unserer volkseigenen Betriebe sind wesentliche Bestandteile unseres Volkswirtschaftsplanes. Die Betriebe erhalten von der zentralen Planungsstelle eine Planauflage. Diese Planauflage gibt an, welche Gütermenge sie herzustellen bzw. umzusetzen haben. Sie richtet sich nach dem betrieblichen Leistungsvermögen und nach den gesamtwirtschaftlichen Notwendigkeiten.

1. Eine volkseigene Handelszentrale hat auf Grund ihrer Planauflage folgende Umsatzplanung vorgenommen:

Warengruppen	Tatsächlicher Umsatz im alten Jahr				Planansatz für das neue Jahr			
	Einstandspreis in 1000 DM	Handelsspanne in %	Handelsspanne in 1000 DM	Verkaufspreis in 1000 DM	Einstandspreis in 1000 DM	Handelsspanne in %	Handelsspanne in 1000 DM	Verkaufspreis in 1000 DM
Radiogeräte . . .	1 270	18,6			1 950	15		
Lampen	320	17,5			460	12		
Elektrogeräte . .	635	14,2			930	11		
Herde	276	10,9			365	9		

Unter dem Einstandspreis verstehen wir den Einkaufspreis einschließlich der Bezugskosten (Fracht, Rollgeld usw.). Die Handelsspanne ist in einem Prozentsatz des Einstandspreises ausgedrückt und umfaßt die betrieblichen Kosten sowie den Gewinn.

a) Vervollständige die Tabelle!

b) Vergleiche die Handelsspannen beider Jahre und beurteile, ob der Betrieb der Forderung auf Preissenkung entsprochen hat (Obergrenze der Handelsspanne im Großhandel 15%)!

c) Wie groß wäre der Planumsatz des neuen Jahres für die einzelnen Waren gewesen, wenn der Betrieb seine alten Handelsspannen beibehalten hätte?

d) Wieviel Prozent beträgt die Preissenkung für die einzelnen Waren? (Das Ergebnis von c) entspricht 100%.)

e) Wieviel Prozent beträgt die Preissenkung im Durchschnitt?

f) Warum sind die Ergebnisse von d) und e) nur dann richtig, wenn sich die Einstandspreise nicht verändert haben?

2. Eine Möbelfabrik erhielt für das neue Jahr die „Produktionsauflage", 3 710 Küchen herzustellen. Die Selbstkosten im vorangegangenen Jahr betrugen 190,— DM je Stück und sollen im neuen Jahr auf 165,— DM gesenkt werden. Der Verkaufspreis beläuft sich auf 210,— DM.

a) Fülle folgende Tabelle aus!

Produktionsauflage einer Möbelfabrik

Menge und Art der Erzeugnisse	Wert je Stück in DM			Wert der Gesamterzeugung		
	zu Selbstkosten des alten Jahres	zu Plankosten des neuen Jahres	Verkaufspreis	zu Selbstkosten des alten Jahres	zu Plankosten des neuen Jahres	Verkaufspreis
1	2	3	4	5	6	7

b) Um wieviel Prozent ist der Verkaufspreis höher 1. als die Selbstkosten des alten Jahres, 2. als die Plankosten im neuen Jahr?
c) Wieviel Prozent beträgt die Selbstkostensenkung?

b) Der Selbstkostenverteilungsplan

Auf Grund der Planauflage müssen die künftigen Selbstkosten geplant werden. Das geschieht im Selbstkostenverteilungsplan. Die genaue Planung der Selbstkosten ist eine Voraussetzung für die Kostensenkung und auch dafür, daß die Kosten im Verkaufspreis gedeckt werden.

3. Eine volkseigene Lebensmittelzentrale hatte folgende Kostenplanung:

Art der Kosten	Plankosten		Verteilung der Kosten in 1000 DM auf			
	in 1000 DM	in % der gesamten Plankosten	Einkauf	Lager	Verwaltung	Vertrieb
1	2	3	4	5	6	7
Löhne	180		30	99	9	42
Gehälter	147,5		26,5	19,5	72	29,5
Soziale Kosten ..	55,5		7,5	15	21	12
Steuern	56		4	8	30	14
Sonstige Kosten .	214		31	63	86	34

a) Vervollständige die Tabelle! b) Stelle fest, wieviel Prozent der Löhne auf den Einkauf, das Lager, die Verwaltung, den Vertrieb entfallen!

4. Eine volkseigene Maschinenfabrik stellte folgenden Kostenplan auf:

Art der Kosten	Herstellkosten		Verwaltungskosten	Vertriebskosten	Summe
	Direkte Kosten der Herstellung	Gemeinkosten der Herstellung			
	in 1000 DM	in 1000 DM	in 1000 DM	in 1000 DM	in 1000 DM
Material	900	—	—	—	900
Fertigungslohn	750	—	—	—	750
Gehalt	—	90	80	150	320
Gesetzliche soziale Kosten	—	84	8	15	107
Steuern	—	20	13	42	75
Verschiedene Kosten lt. Sonderaufstellung	—	65	43	21	129

Summe der direkten Kosten der Herstellung	....	DM
„ „ Gemeinkosten der Herstellung	....	„
Summe der Herstellkosten	....	DM
„ „ Verwaltungskosten	....	„
„ „ Vertriebskosten	....	„
Summe der Selbstkosten	....	DM

Zu den Herstellkosten gehören alle Aufwendungen, die in den Werkstätten entstehen: Materialkosten, Löhne, Beträge für Abnutzung der Maschinen u. a. Sie gliedern sich in direkte Kosten und Gemeinkosten. Die direkten Kosten lassen sich direkt für das einzelne Erzeugnis feststellen (Materialverbrauch, Lohnanteil). Die Gemeinkosten entstehen allgemein (Beträge für Abnutzung der Maschinen, Verwaltungskosten, Kosten für die Büros u.a.).

a) Vervollständige die Tabelle!

b) Wieviel Prozent der direkten Kosten betragen die Gemeinkosten der Herstellung?

c) Wieviel Prozent der Herstellkosten betragen die Verwaltungskosten?

d) Wieviel Prozent der Herstellkosten betragen die Vertriebskosten?

5. Die Maschinenfabrik (vgl. Aufg. 4) will die Selbstkosten für eine von ihr zu bauende Werkzeugmaschine feststellen. Sie wendet folgendes Kostenschema an:

Kosten für Material		300,— DM
Fertigungslohn		250,— „
Direkte Kosten der Herstellung		550,— DM
+ Gemeinkosten der Herstellung in einem Prozentsatz der direkten Kosten	...%	..... „
Herstellkosten		..... DM
+ Verwaltungskosten in einem Prozentsatz der Herstellkosten	...%	..... „
+ Vertriebskosten in einem Prozentsatz der Herstellkosten	...%	..... „
Selbstkosten		..... DM

6. Löse Aufg. 5 für den Fall, daß die Materialkosten einer Maschine 178,— DM und der Lohnanteil 152,— DM betragen!

c) Der Ergebnisplan

In dem Ergebnisplan haben die Betriebe nachzuprüfen, ob ihre Kosten durch ihre Umsatzerlöse gedeckt werden.

7. Die Lebensmittelzentrale (Aufg. 3) stellt folgenden Ergebnisplan auf:

Geplanter Warenumsatz zu Einstandspreisen	5 230 000,— DM
Plankosten laut Kostenplanung	653 000,— „
Warenumsatz zu Selbstkosten	.... DM
Geplanter Warenumsatz zu Verkaufspreisen	6 045 000,— DM
Ergebnis aus dem Umsatz	.... „

a) Vervollständige die Tabelle!

b) Wieviel Prozent des Einstandspreises betragen die Plankosten der Lebensmittelzentrale?

c) Wieviel Prozent der Selbstkosten beträgt das Ergebnis?

8. Die Lebensmittelzentrale will auf Grund von Aufg. 7 den Verkaufspreis einer Sendung Nährmittel feststellen, deren Einstandspreis 675,— DM beträgt. Wende bei der Berechnung die in Aufg. 7 ermittelten Prozentsätze an!

d) Der Abschreibungsplan

Alle Betriebe benötigen bestimmte Anlagen: Gebäude, Maschinen, Fahrzeuge, Betriebsausstattung. Diese Anlagen nutzen sich ab. Der Abnutzung wird dadurch Rechnung getragen, daß alljährlich bestimmte Beträge in die

Kostenrechnung hierfür eingesetzt werden. Man sagt, die Anlagen werden abgeschrieben. Die Abschreibung wird mit Hilfe eines vorgeschriebenen Prozentsatzes vom Anschaffungswert aus berechnet.

9. Die Bernsdorfer Metallwerke VEB stellen folgenden Abschreibungsplan auf:

Art der Anlage	Anschaffungswert der Anlage			Abschreibung	
	zu Beginn des Planjahres vorhanden in 1000 DM	geplante Neuanschaffung in 1000 DM	Summe in 1000 DM	in %	in DM
Gebäude	260	48		2	
Maschinen	374	56		8	
Fahrzeuge	26	5,2		9	
Betriebsausstattung	76	19		8	
Summe					

a) Vervollständige die Tabelle!

b) Wie groß ist die Summe der Anschaffungswerte **einschließlich der** Neuanschaffungen?

c) Wie groß ist die Summe der Abschreibung?

d) Berechne aus b) und c), zu welchem Prozentsatz die Anlagen der Metallwerke durchschnittlich abgeschrieben werden!

10. Die Metallwerke (vgl. Aufg. 9) haben einen Umsatz von 9 260 000 DM geplant.

a) Berechne, wieviel Prozent des Umsatzes die Abschreibung ausmacht!

b) Wie wirkt die Abschreibung auf die Preisfestsetzung für die Erzeugnisse des Betriebes?

e) Der Richtsatzplan

Die volkseigenen Betriebe erhalten die für sie notwendigen Mittel zugewiesen, und zwar durch die Vereinigung Volkseigener Betriebe, der sie angehören (VESTA, GUS, RFT[1]) u.a.). Daneben dürfen sie im vorgeschriebenen Umfange Kredite aufnehmen. Im Interesse der Gesamtwirtschaft ist es wichtig, den einzelnen Betrieben nicht mehr, aber auch nicht weniger zuzuteilen, als sie zur Erfüllung ihrer Aufgaben bedürfen. Die Betriebe müssen auch dazu angehalten werden, ihre Lagervorräte und Barbestände so knapp wie möglich zu halten.

1) VESTA: Vereinigung Volkseigener Betriebe Eisen und Stahl
GUS: „ „ „ Guß und Schmiedeeisen
RFT: „ „ „ Radio- und Fernmelde-Technik

Die Höhe der Lagerhaltung und die Art der Finanzierung werden im sog. Richtsatzplan festgestellt. In diesem Plan wird von dem geschätzten Warenumsatz eines Jahres ausgegangen. Bei Division durch 360 ergibt sich der planmäßige Tagesumsatz. Der Vorrat an Waren und an baren Mitteln soll ein Vielfaches des Tagesumsatzes sein, das durch die sog. Richttage bestimmt wird. So ist beispielsweise vorgeschrieben, daß ein Industriebetrieb für 30 Tage Rohstoffe bevorraten darf. Das Produkt aus Tagesumsatz und Richttagen ergibt den zulässigen Warenbestand.

11. Eine volkseigene Handelszentrale hat folgenden Richtsatzplan aufgestellt:

Bezeichnung des Postens	Geplanter Jahresumsatz DM	Planmäßiger Tagesumsatz (1 J. ≙ 360 Tg.) DM	Richttage	Plan-bestand DM
Waren zum Einstandspreis	1 260 000,—		20	
Sonstiges Material. .	110 000,—		30	
Kassenbestand				
Sonstige Barmittel .	1 430 000,—		6	

a) Vervollständige die Tabelle!

b) Stelle fest, welche Teile der Bestände mit Hilfe der Vereinigung finanziert werden, wenn Waren und sonstiges Material zu 30%, die flüssigen Mittel zu 100% von ihr gedeckt werden!

c) Wie groß ist der Anteil der Planbestände, die durch Kredit zu decken sind?

9. Die Haushaltpläne

Der Haushaltplan der Deutschen Demokratischen Republik wird durch Gesetz beschlossen (Art. 88 der Verfassung). Für das Haushaltjahr 1949 (1. April bis 31. Dezember 1949) wurde der Haushaltplan durch eine Verordnung der damaligen Deutschen Wirtschaftskommission (DWK) festgelegt. Der Haushaltplan der Länder wird durch Landesgesetze geregelt.

1. Der Haushaltplan für das Gebiet der Deutschen Demokratischen Republik sah für 1949 Einnahmen in Höhe von 11 985 Mill. DM und Ausgaben von 10 810 Mill. DM vor.

a) Stelle fest, um wieviel Prozent die planmäßigen Einnahmen die Ausgaben übersteigen!

b) Wieviel Prozent der Einnahmen entfallen auf die Abführungen der volkseigenen Betriebe einschließlich der Verkehrs-, Post- und Fernmeldebetriebe, wenn diese im Haushaltplanjahr 1250 Mill. DM abführten?

c) Wieviel DM machen die Einnahmen und Ausgaben je Kopf der Bevölkerung aus? (Wohnbevölkerung 17 314 000.)

2. Von den Ausgaben gemäß Haushaltplan 1949 entfielen 786 Mill. DM auf Investierungen, 800 Mill. DM auf die Entwicklung der VEB, 111 Mill. DM auf die Finanzierung der MAS, 908 Mill. DM auf die Ausgaben für Volksbildung, 292 Mill. DM auf die Ausgaben für Gesundheitswesen, 585 Mill. DM für Sozialfürsorge.

a) Stelle fest, wieviel Prozent der gesamten Ausgaben die einzeln angeführten Posten ausmachen!

b) Um wieviel Prozent sind erhöht

die Ausgaben für Volksbildung, die im vorangegangenen Jahr 610 Mill. DM betrugen,

die Ausgaben für Gesundheitswesen, die im vorangegangenen Jahr 231 Mill. DM betrugen?

3. Die von den Landtagen der Länder angenommenen Haushalte der Länder, der Städte und Kreise zeigen folgende Ergebnisse:

Länder	Die Haushalte der Länder		Der Gesamthaushaltplan der Städte und Kreise	
	im Einnahmeteil in Mill. DM	im Ausgabeteil in Mill. DM	im Einnahmeteil in Mill. DM	im Ausgabeteil in Mill. DM
Brandenburg	998,0	990,2	134,2	134,2
Mecklenburg	629,9	628,5	88,7	88,7
Sachsen-Anhalt	1 480,9	1 458,2	310,9	279,3
Sachsen	2 163,0	2 131,0	325,4	303,7
Thüringen	1 022,9	1 016,3	173,3	173,3

a) Stelle fest, um wieviel Prozent jeweils die Einnahmen die Ausgaben übersteigen!

b) Warum dürfen grundsätzlich die Ausgaben nicht höher sein als die Einnahmen?

III. Statistische Auswertung und Beobachtung der Planerfüllung

10. Einführung

Mathematische Grundlagen der graphischen Darstellung siehe Abschnitt IX!
Wer Einsicht in das Wirtschaftsleben gewinnen will, muß statistische Angaben richtig zu lesen verstehen. Er findet sie in statistischen Tabellen.

Beispiel:

Die Produktionsleistung einer Maschinenfabrik entwickelte sich wie folgt:

Januar	36 Maschinen
Februar	40 „
März	45 „
April	50 „
Mai	55 „
Juni	62 „
Halbjahresleistung ...	288 Maschinen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Zahlen zu veranschaulichen. Das geschieht entweder durch Umrechnung oder durch bildhafte Darstellung.

Entwicklungszahlen

An obigem Beispiel interessiert vor allem, wie sich die Produktionsleistung in den einzelnen Monaten entwickelt hat. Diese Entwicklung läßt sich am besten erkennen, wenn man die Produktionsleistung des ersten Monats gleich 100 setzt und die übrigen Zahlen darauf bezieht. Für den Monat Februar ergibt sich dann

$$\frac{100 \cdot 40}{36} = 111{,}1\ldots; \text{ das sind rund } 111\,\% \text{ der Januarproduktion.}$$

Ergebnisse für die übrigen Monate: März 125 %, April 139 %, Mai 153 %, Juni 172 %.
Diese Werte bezeichnet man als Entwicklungszahlen, weil sie die Entwicklung zahlenmäßig besonders deutlich erkennen lassen. Man nennt sie auch Indexzahlen.

Gliederungszahlen

Um in obigem Beispiel den Produktionsanteil der einzelnen Monate an der Halbjahresproduktion deutlich zu machen, setzt man die letztere gleich 100 und ermittelt den prozentualen Anteil jedes Monats.

Der Produktionsanteil des Monats Januar beträgt

$$\frac{100 \cdot 36}{288} = 12{,}5\text{; das sind } 12{,}5\,\% \text{ der Halbjahresproduktion.}$$

Ergebnisse für die übrigen Monate: Februar 13,9 %, März 15,6 %, April 17,4 %, Mai 19,1 %, Juni 21,5 %.
Man spricht hier von Gliederungszahlen, weil jeder einzelne Wert Glied eines Ganzen (hier der Halbjahresproduktion) ist.

Graphische Darstellungen

Besonders anschaulich und einprägsam sind graphische Darstellungen, die auch als Diagramme bezeichnet werden.
Am bekanntesten sind Liniendiagramme, die sich gut zur Darstellung einer Entwicklung eignen.
Die Produktionsleistung der Maschinenfabrik in den Monaten Januar bis Juni geht deutlich aus dem Liniendiagramm (Abb. 2) hervor.

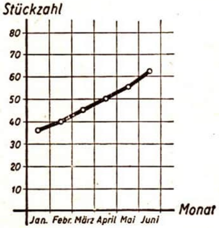


Abb. 2 Liniendiagramm

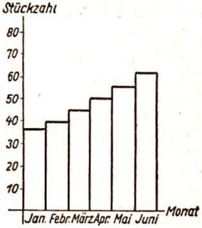


Abb. 3. Säulendiagramm

Oft wird auch ein Säulendiagramm (Abb. 3) verwendet, das die einzelnen Zahlengrößen durch Säulen verschiedener Höhe verdeutlicht.
In den Abb. 2 und 3 hätten statt der Stückzahlen auch die Entwicklungszahlen in Prozenten durch einen ähnlichen Linienzug oder ein entsprechendes Säulendiagramm dargestellt werden können.
Wenn, wie bei der Anwendung von Gliederungszahlen, der Produktionsanteil der einzelnen Monate an der Gesamterzeugung des ersten Halbjahres verdeutlicht werden soll, dann bedient man sich des Kreisdiagramms.
Die gesamte Kreisfläche entspricht der Halbjahresproduktion. Die Produktionsleistungen der einzelnen Monate werden durch Sektoren dargestellt, deren Mittelpunktswinkel sich im Dreisatz errechnen lassen (Abb. 4):

$$\begin{array}{rcl} 288 \text{ Stück} & \triangleq & 360^\circ \\ 36 \quad \text{„} & \triangleq & x^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{360^\circ \cdot 36}{288} = 45^\circ$$

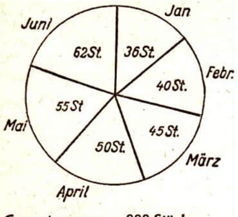


Abb. 4. Kreisdiagramm

Der Mittelpunktswinkel des Kreissektors für die Darstellung der Januarproduktion beträgt 45°.

Die Werte für die übrigen Kreissektoren sind:

Februar 50°, März 56°, April 62,5°,
Mai 69°, Juni 77,5°.

Bei diesem Kreisdiagramm hätte man auch von den Gliederungszahlen ausgehen können.

Der Kreis besitze vorteilhaft eine Prozentteilung.

11. Statistische Auswertung der Haushaltpläne

Der Haushaltplan des Landes Sachsen-Anhalt für 1950 wies folgende Beträge auf:

Bezeichnung der Einzelpläne	Einnahmen in Millionen DM	Ausgaben in Millionen DM
Volksvertretung	—	0,8
Ministerpräsident, Verwaltungsleitung	1,0	19,8
Inneres	—	7,4
Finanzen	78,1	90,1
Industrie	11,1	44,8
Land- und Forstwirtschaft	82,7	88,1
Handel und Versorgung	1,3	8,5
Arbeit und Gesundheitswesen	18,5	114,8
Verkehr	1,8	28,9
Volksbildung	14,9	194,2
Justiz	10,3	23,8
Haushaltausgleich zwischen der Republik und dem Land	401,5	—
Zusammen	621,2	621,2

Ermittle die Gliederungszahlen für die einzelnen Einnahmeposten und sodann auch für die Ausgaben! (Die Endsumme entspricht 100%.)

12. Statistische Auswertung der Betriebspläne

1. Eine volkseigene Maschinenfabrik hatte einen Verkaufserlös von 900 000 DM geplant. Sie erzielte einen tatsächlichen Umsatz von 1 125 000 DM. Die Entwicklung der Kosten wird durch folgende Zahlen verdeutlicht:

Kostengruppen	Geplante Kosten (Plankosten)	Entstandene Kosten (Ist-Kosten)
Material	210 000,— DM	260 000,— DM
Löhne	310 000,— „	388 000,— „
Gehalt	80 000,— „	85 000,— „
Gesetzliche soziale Kosten	39 000,— „	47 000,— „
Sonstige Kosten	239 000,— „	273 000,— „
	878 000,— DM	1 053 000,— DM

a) Ermittle Gliederungszahlen, sowohl für die geplanten als auch für die infolge der Umsatzsteigerung tatsächlich entstandenen Kosten (Ist-Kosten) und stelle daraus fest, ob sich die Zusammensetzung der Kosten verschoben hat!

b) Ermittle Indexzahlen (s. S. 25!) für die tatsächlich entstandenen Kosten (Plankosten jeweils 100%)!

c) Wie groß ist die Indexzahl für den Verkaufserlös? (Planerlös ≘ 100%.)

d) Beurteile 1. ob der Betrieb seine Planauflage erfüllt hat, 2. ob der Betrieb der Forderung nach Kostensenkung entsprochen hat!

e) Stelle für die einzelnen Kostengruppen die Plankosten neben den Ist-Kosten in einem Säulendiagramm dar, ebenso auch den geplanten Verkaufserlös und den tatsächlich erzielten (50 000 DM ≘ 1 cm)!

f) Stelle die Plankosten in einem Säulendiagramm dar!

2. Die Textilwerke Altenberg VEB hatten in den 4 Quartalen eines Jahres folgende Erlös- und Kostenentwicklung (s. Seite 29!):

a) Ermittle die Entwicklungszahlen für die einzelnen Vierteljahre! (1. Vierteljahr ≘ 100%.)

b) Stelle Gliederungszahlen für die verschiedenen Kosten eines Vierteljahres fest! (Summe der Kosten ≘ 100%.)

c) Stelle die Entwicklung des Verkaufserlöses, der einzelnen Kostenarten und der Gesamtkosten in einem Liniendiagramm dar! (Wert des 1. Vierteljahres jeweils 100%.)

	1. Viertelj. DM	2. Viertelj. DM	3. Viertelj. DM	4. Viertelj. DM
I. Erlöse	880 000,—	1 120 000,—	1 340 000,—	1 560 000,—
II. Kosten				
1. Material	190 000,—	240 000,—	290 000,—	340 000,—
2. Lohn	300 000,—	370 000,—	440 000,—	520 000,—
3. Gehalt..........	75 000,—	85 000,—	88 000,—	90 000,—
4. Miet- und Pachtkosten	40 000,—	40 000,—	40 000,—	40 000,—
5. Abschreibungen von Betriebsanlagen	30 000,—	30 000,—	30 000,—	30 000,—
6. Sonstige Kosten .	225 000,—	255 000,—	312 000,—	280 000,—
Gesamtkosten	860 000,—	1 020 000,—	1 200 000,—	1 300 000,—

IV. Vermischte Aufgaben

13. Aus veröffentlichten Statistiken

1. Ergebnis der Volkszählung vom 29. Oktober 1946 in den Ländern der Deutschen Demokratischen Republik.
Wohnbevölkerung: männlich 7 379 546, weiblich 9 934 188.
Wohnbevölkerung in den einzelnen Ländern:

Land	männlich	weiblich	insgesamt	in Prozentzätzen männlich	in Prozentzätzen weiblich
Brandenburg......	1 066 405	1 461 087			
Mecklenburg	912 385	1 227 255			
Sachsen-Anhalt ...	1 801 800	2 358 739			
Thüringen	1 262 326	1 665 171			
Sachsen	2 336 630	3 221 936			

a) Berechne die gesamte Wohnbevölkerung!
b) Berechne den Anteil der männlichen und weiblichen Bevölkerung in %!
c) Fülle die leeren Spalten der Tabelle aus!
d) Gib an, wie sich die Bevölkerung prozentual auf die einzelnen Länder verteilt!
e) Stelle die Ergebnisse von d) in einem Säulendiagramm dar!
f) Stelle die auf die einzelnen Länder entfallende Wohnbevölkerung durch Kreisausschnitte dar und berechne dabei aus dem Länderwert die Größe des Mittelpunktswinkels!

2. Lies aus Abb. 5 ab, wie groß die Baumwollerzeugung in der UdSSR seit 1913 in t war. Setze die Erzeugung 1913 gleich 100 und berechne die Erzeugung der übrigen Jahre in %!

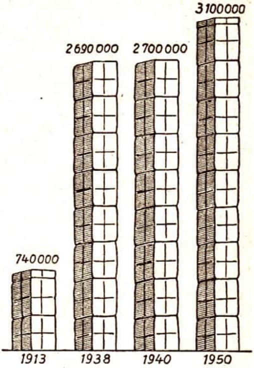


Abb. 5. Baumwollerzeugung in der UdSSR. Ertrag an Rohbaumwolle in Tonnen.

3. Das Gebiet der Länder der Deutschen Demokratischen Republik umfaßt 107 481,2 km². Die landwirtschaftlich genutzte Fläche beträgt 6 595 020 ha. Hiervon sind 2 743 306 ha durch die Bodenreform vom Jahre 1945 erfaßt worden. Auf dieser Fläche wurden u. a. 317 000 Bauernstellen für 1 500 000 Menschen errichtet.

Von der aufgeteilten Fläche sind

Ackerland	1 101 188 ha
Gärten	13 737 „
Wiesen	207 385 „
Ödland	144 339 „
Wald	853 617 „
übrige Fläche	423 040 „

Bestimme in %, wie die aufgeteilte Fläche genutzt worden ist!

4. In Thüringen wurden durch die Bodenreform in den Bodenfonds 187 851 ha übergeführt. Hiervon erhielten

Land Thüringen	28 239 ha	Lehr- und Zuchtgüter	17 344 ha
Gemeinden	25 444 „	Neubauern	116 824 „

a) Gib die Aufteilung des Bodens in % an! **b)** Wie groß waren durchschnittlich die aufgeteilten Güter, wenn insgesamt 1 087 Güter von der Bodenreform erfaßt worden sind? **c)** Wie groß ist durchschnittlich eine Bauernstelle, wenn 18 732 Bauern bedacht wurden?

5. Die Produktion der UdSSR an Roheisen, Rohstahl, Kohle und Erdöl entwickelte sich wie folgt:

Erzeugung	1913[1])	1940	Plan 1950
	Millionen t		
Roheisen	4,2	14,9	19,5
Rohstahl	4,2	18,3	25,4
Kohle	29,1	165,0	250,0
Erdöl	9,2	31,0	35,4

1) Gebietsumfang der UdSSR 1938.

Setze die Zahlen für 1913 gleich 100 und errechne daraus die Entwicklungszahlen, die sich für 1940 und für den Produktionsplan 1950 ergeben!

6. Der Viehbestand der UdSSR zeigt folgende Entwicklung:

Jahr	Pferde	Rindvieh	Ziegen	Schweine
	Millionen Stück			
1932	19,6	40,7	52,1	11,6
1937	16,7	57,0	73,7	22,8
1938	17,5	63,2	102,6	30,6
1945	10,5	47,0	69,4	10,4
1950 (Plan)	15,3	65,3	121,5	31,2

a) Setze die Zahlen von 1932 gleich 100 und errechne für die folgenden Jahre die Entwicklungszahlen!

b) Beurteile die Entwicklung!

c) Wie zeigt sich aus der Entwicklung des Pferdebestandes die bedeutende Zunahme der Traktoren in der sowjetischen Landwirtschaft?

7. Stelle die Entwicklung der Pferde- und Rindviehbestände (Aufg. 6) bildlich dar. Trage auf einer Waagerechten nacheinander gleiche Strecken ab, bezeichne ihre Endpunkte durch Jahreszahlen und trage auf den Senkrechten in den Endpunkten der Strecken als Bilder der Viehbestände für je 5 Mill. Stück 1 cm ab!

8. a) Stelle die Gesamtbevölkerung jedes Landes der Deutschen Demokratischen Republik (nach Aufgabe 1) in einem Säulendiagramm dar! Für jedes Land ist eine Säule zu errichten. Höhe der Säulen: 500 000 Einwohner ≙ 1 cm.

b) Stelle die auf die einzelnen Länder entfallende Bevölkerung durch ein Kreisdiagramm dar! Gib den sich ergebenden Ausschnitten verschiedene Farben!

9. In den Ländern der Deutschen Demokratischen Republik betrug die Bevölkerungszahl nach der Volkszählung

	vom 29. Oktober 1946	vom 17. Mai 1939:
Brandenburg	2,53 Millionen	2,41 Millionen
Mecklenburg	2,14 „	1,41 „
Sachsen-Anhalt	4,16 „	3,44 „
Thüringen	2,93 „	2,43 „
Sachsen	5,56 „	5,47 „

Vergleiche die Ergebnisse beider Zählungen und stelle sie in Schaubildern a) durch Säulendiagramme, b) durch Kreisausschnitte dar! Warum ist das „Kreisdiagramm“ für die vorliegende Aufgabe aufschlußreicher?

10. Stelle die Ergebnisse von Aufgabe 3 durch Kreisausschnitte dar!

11. Verdeutliche die Ergebnisse der Bodenreform in Thüringen auf Grund der Aufgabe 4 durch Kreisausschnitte!

14. Von den Aktivisten

1. Im Zwickau-Ölsnitzer Steinkohlenrevier förderte eine Gruppe von Bergarbeitern im September täglich durchschnittlich 2 897 t. An 29 Fördertagen des Oktober wurden folgende Mengen gefördert:

Tag	Menge in t	Tag	Menge in t	Tag	Menge in t
1.	2 805	11.	3 299	21.	3 430
2.	3 049	12.	3 300	22.	3 436
3.	3 104	13.	3 310	23.	3 446
4.	2 985	14.	3 326	24.	3 453
5.	2 928	15.	3 311	25.	3 334
6.	3 139	16.	3 365	26.	3 416
7.	3 124	17.	3 464	27.	3 487
8.	3 149	18.	3 421	28.	3 502
9.	2 989	19.	3 379	29.	3 516
10.	2 923	20.	3 392		

a) Stelle die durchschnittliche Förderung im Oktober fest! (Summe der Förderungsmenge geteilt durch Anzahl der Tage.)

b) Wieviel Prozent liegt die Oktoberförderung durchschnittlich über der im September?

c) Stelle die täglichen Förderungsmengen des Oktober in Gliederungszahlen dar!

d) Setze die durchschnittliche Förderung des Oktober gleich 100 und bilde für die täglichen Förderungsmengen Indexzahlen!

e) Im Monat September wurde an 28 Tagen gefördert. Bestimme daraus die gesamte Monatsförderung und stelle sie in einem Säulendiagramm der des Oktober gegenüber! (10 000 t $\triangleq$ 1 cm Säulenhöhe.)

f) Stelle die täglichen Förderungsmengen des Oktober in einem Liniendiagramm dar! (200 t $\triangleq$ 1 cm.)

2. 5 Aktivisten aus dem Zwickauer Steinkohlengebiet förderten an 6 aufeinanderfolgenden Tagen die Steinkohlenmengen (in m³), die die Aufstellung auf S. 33 oben zeigt.

a) Ermittle die gesamten Förderungsmengen der einzelnen Aktivisten und stelle sie in einem Säulendiagramm einander gegenüber! (2 m³ $\triangleq$ 1 cm Säulenhöhe.)

Tag	1. Aktivist	2. Aktivist	3. Aktivist	4. Aktivist	5. Aktivist
1.	3,1	2,4	2,4	1,5	1,5
2.	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0
3.	6,8	3,6	3,6	3,5	3,5
4.	6,5	4,0	4,3	4,0	4,5
5.	6,5	5,0	5,0	4,2	4,5
6.	5,2	4,6	5,2	4,5	4,8

b) Stelle die Tagesleistungen des ersten und zweiten Aktivisten in einem Liniendiagramm dar! (1 m³ $\triangleq$ 2 cm.)
c) Setze die täglichen Leistungen des ersten Aktivisten gleich 100 und ermittle für die einzelnen Tage daraus Indexzahlen der übrigen!
d) Stelle die Gesamtförderung der einzelnen Aktivisten in einem Kreisdiagramm dar!
e) Stelle fest, um wieviel Prozent die einzelnen Aktivisten durchschnittlich die Arbeitsnorm überschritten, wenn diese 3,1 m³ je Schicht betrug!

3. Während eines Wettbewerbs im Mansfelder Kupfererzbergbau förderten drei Aktivistengruppen folgende Erzmengen:

Tag	1. Gruppe (Soll 9 Wagen)	2. Gruppe (Soll 12 Wagen)	3. Gruppe (Soll 12 Wagen)
1.	20 Wagen	16 Wagen	22 Wagen
2.	14 ,,	18 ,,	15 ,,
3.	16 ,,	18 ,,	20 ,,
4.	17 ,,	16 ,,	20 ,,
5.	13 ,,	18 ,,	17 ,,
6.	—	19 ,,	18 ,,
7.	14 ,,	19 ,,	19 ,,
8.	12 ,,	19 ,,	16 ,,
9.	17 ,,	20 ,,	18 ,,
10.	6 ,,	8 ,,	20 ,,
11.	22 ,,	27 ,,	18 ,,
12.	19 ,,	20 ,,	19 ,,
13.	17 ,,	17 ,,	14 ,,
14.	20 ,,	18 ,,	16 ,,
15.	21 ,,	19 ,,	19 ,,

a) Ermittle die Gesamtförderung jeder Gruppe für die 15 Tage des Wettbewerbs!
b) Wie groß ist die durchschnittliche Fördermenge der einzelnen Gruppen je Tag?
c) Mit wieviel Prozent hat jede Gruppe 1. ingesamt, 2. an jedem Tage ihr Soll erfüllt?

d) Stelle die Fördermenge der ersten Gruppe in einem Liniendiagramm dar!

e) Setze die durchschnittliche Fördermenge der zweiten Gruppe gleich 100 und ermittle für die Leistung der einzelnen Tage Entwicklungszahlen!

f) Zeichne ein Kreisdiagramm, aus dem die gesamten Fördermengen der einzelnen Gruppen ersichtlich sind!

V. Vom Zahlungs- und Kreditverkehr

15. Der bargeldlose Zahlungsverkehr

Es liegt im volkswirtschaftlichen Interesse, daß sich jeder einzelne in den bargeldlosen Zahlungsverkehr einschaltet. Dazu hat er sich bei einer Geldanstalt (Bank, Sparkasse, Postscheckamt) ein Konto errichten zu lassen. Auf dieses Konto kann er selbst einzahlen. Lohn- und Gehaltsempfängern werden ihre Einkünfte häufig auf ihr Konto überwiesen. Der Kontoinhaber kann in bestimmtem Umfange über sein Guthaben bar verfügen und Barauszahlungen an seine Gläubiger leisten. Wenn der Zahlungsempfänger selbst ein Konto unterhält, dann ist der Ausgleich durch Überweisung vollständig bargeldlos möglich. Dieses Verfahren hat viele Vorzüge:

1. Der Umlauf an Zahlungsmitteln wird vermindert.
2. Die Barmittel fließen bei den Geldanstalten zusammen und können volkswirtschaftlich wichtigen Aufgaben zugeführt werden.
3. Der einzelne ist nicht der Gefahr des Geldverlustes, insbesondere des Diebstahls ausgesetzt.
4. Postwege werden überflüssig. Geldzählen ist nicht mehr nötig. Daraus ergibt sich eine erhebliche Zeitersparnis.
5. Jede Zahlung kann noch nach Jahren durch die Aufzeichnungen der Geldanstalt nachgewiesen werden.
6. Die Gebühren sind geringer als im Barverkehr.

a) Der Postscheckverkehr

Die Postscheckämter der Deutschen Post sind wichtige Mittler des bargeldlosen Zahlungsverkehrs, und zwar nicht nur für Betriebe, sondern für jedermann. Postscheckämter bestehen im Gebiet der Deutschen Demokratischen Republik in Berlin, Dresden, Erfurt, Leipzig und Magdeburg. Außer den Postscheckämtern stehen alle Postämter in Stadt und Land für den Postscheckdienst bereit.

Wer sich am Postscheckverkehr beteiligen will, muß den Antrag auf Eröffnung eines Kontos stellen. Den Vordruck hierfür bekommt er bei jedem Postamt, bei dem er auch die erste Einzahlung auf dieses Konto leisten kann. Auf jedem Konto muß eine Stammeinlage von 5 DM gehalten werden. Nach oben ist das Guthaben nicht begrenzt. Eine Verzinsung des Guthabens erfolgt nicht.

Die Vordrucke für den Postscheckverkehr sind verschieden, je nachdem, ob

nur der Zahlungsempfänger,
nur der Absender
oder beide Beteiligten

ein Konto unterhalten.

Zahlkarte. Sie wird verwendet, wenn nur der Empfänger ein Konto hat (Abb. 6). Die Einzahlung kann bei jedem Postamt erfolgen. Der Betrag wird dem Empfänger auf sein Postscheckkonto gutgeschrieben.

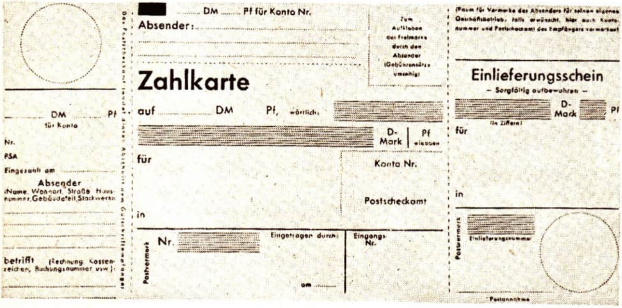
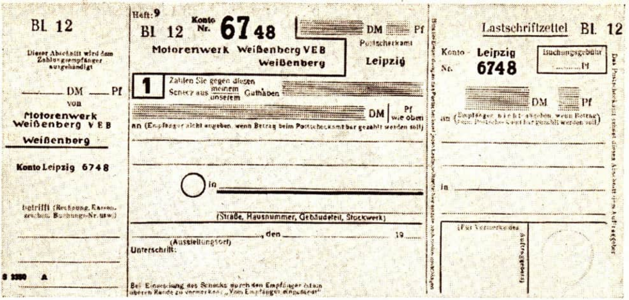


Abb. 6. Zahlkarte

1. Otto Hentzschel, Leipzig S 3, Bornaische Str. 112, zahlt an Karl Fischer, Gotha, Friedrichrodaer Str. 14, 50,— DM durch Zahlkarte. Karl Fischer ist Inhaber des Postscheckkontos Erfurt Nr. 7803.
Fülle die Zahlkarte aus!

Postscheck. Er wird verwendet, wenn nur der Absender ein Konto hat. Die Auszahlung an den Empfänger geschieht über die Postämter durch den Geldbriefträger. Der Postscheck (Abb. 7) dient dem Inhaber des Kontos auch zu Barabhebungen beim Postscheckamt.

2. Heinz Kluge, Plauen, Bahnhofstr. 45, weist am 20. August das Postscheckamt Leipzig durch Postscheck an, aus seinem Guthaben (Konto Nr. 974 36) den Betrag von 439,75 DM an Erich Krause, Magdeburg, Leipziger Str. 9, zu zahlen. Fülle den Postscheck aus!


BI. 12

Dieser Abschnitt wird dem Zahlungsempfänger ausgehändigt

DM Pf

von

Motorenwerk Weißenberg VEB

Weißenberg

Konto Leipzig 6748

betrifft (Rechnung, Kassenzeichen, Buchungs-Nr. usw.)

Heft: 9

BI. 12 Konto Nr. 6748 DM Pf

Postscheckamt Leipzig

Motorenwerk Weißenberg VEB

Weißenberg

1 Zahlen Sie gegen diesen Scheck aus meinem / unserem Guthaben

DM Pf wie oben

an (Empfänger nicht angeben, wenn Betrag beim Postscheckamt bar gezahlt werden soll)

in

(Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

, den 19

(Ausstellungsort)

Unterschrift:

Lastschriftzettel BI. 12

Konto Leipzig Nr. 6748

Buchungsgebühr Pf

DM Pf

an

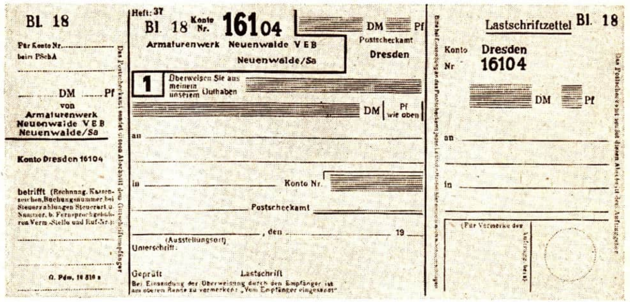
in

(Für Vermerke des Auftraggebers)

Abb. 7. Postscheck

Überweisung. Durch die Überweisung (Abb. 8) wird der Zahlungsausgleich völlig **bargeldlos** bewirkt. Es erfolgt nur eine Umbuchung des Guthabenbetrages von einem Konto auf ein anderes.

3. Die Märkische Konsumgenossenschaft e. G. m. b. H.[1]), Neustadt, Breite Str. 6, zahlt am 18. Juni an die Schönebecker Zuckerwerke VEB, Schönebeck/Elbe, Feldstr. 16, den Betrag von 2 840,— DM durch Überweisung von ihrem Postscheckkonto Berlin Nr. 764 18 auf das Postscheckkonto der Zuckerwerke, Magdeburg Nr. 76 54. Fülle das Überweisungsformular aus!


BI. 18

Für Konto Nr.

beim PSchA

DM Pf

von

Armaturenwerk Neuenwalde VEB

Neuenwalde/Sa

Konto Dresden 16104

betrifft (Rechnung, Kassenzeichen, Buchungsnummer bei Steuerzahlungen Steuerart u. Nummer, b. Fernsprechgebühren Verm.-Stelle und Ruf-Nr.)

Heft: 37

BI. 18 Konto Nr. 16104 DM Pf

Postscheckamt Dresden

Armaturenwerk Neuenwalde VEB

Neuenwalde/Sa

1 Überweisen Sie aus meinem / unserem Guthaben

DM Pf wie oben

an

in Konto Nr.

Postscheckamt

, den 19

(Ausstellungsort)

Unterschrift:

Geprüft Lastschrift

Bei Einsendung der Überweisung durch den Empfänger ist am oberen Rande zu vermerken: „Vom Empfänger eingesandt"

Lastschriftzettel BI. 18

Konto Dresden Nr 16104

DM Pf

an

in

(Für Vermerke des Auftraggebers)

Abb. 8. Postschecküberweisung

1) e. G. m. b. H. bedeutet eingetragene Genossenschaft mit beschränkter Haftung.

Gebührensätze

Im Zahlungsverkehr der Post gelten folgende Gebührensätze (in DM):

	Postanweisung	Zahlkarte	Postscheck	Postschecküberweisung
bis 10 DM	0,20	0,10	Grundgebühr	
bis 25 DM	0,30	0,15	0,15 DM	
bis 100 DM	0,40	0,20	zuzüglich	gebührenfrei
bis 250 DM	0,60	0,25	0,01 DM	
bis 500 DM	0,80	0,30	für je	
bis 750 DM	1,—	0,40	angefangene	
bis 1000 DM	1,20	0,50	20,— DM	

4. a) Berechne die Gebühren zu den Aufgaben 1 bis 3!

b) Welchen Betrag erspart jemand, der sechs Rechnungen über 8,30 DM, 15,75 DM, 76,50 DM, 180,— DM, 475,— DM und 720,45 DM statt durch Postanweisung durch Zahlkarte begleicht?

c) Wie groß ist die Ersparnis bei Zahlung durch Postscheck?

5. Jemand schuldet 25,— DM (420,— DM, 1 800,— DM). Welche Zahlungsmöglichkeiten durch die Post sind vorhanden?
Bestimme für jeden Fall die Portokosten und vergleiche sie!
Beachte dabei, daß Postanweisungen nur bis 1 000 DM zugelassen sind!

b) Der Zahlungsverkehr der Banken und Sparkassen

Überweisungen

Auch die Banken und Sparkassen pflegen den Überweisungsverkehr. Er wickelt sich am einfachsten ab, wenn sowohl der Absender als auch der Zahlungsempfänger bei der gleichen Bank ein Konto unterhält. Dann ist nur eine einfache **Umbuchung** von Konto zu Konto nötig. Wenn dagegen der Zahlungsempfänger sein Konto bei einer anderen Bank hat als der Absender, müssen die beteiligten Banken miteinander verrechnen.

6. Hellmut Fischer, Chemnitz, Breiter Weg 192, überweist von seinem Konto bei der Stadtsparkasse Chemnitz an das Steueramt der Stadt Chemnitz, Konto bei der Sächsischen Landeskreditbank, Zweigstelle Chemnitz, den Betrag von 456,75 DM.
Beschaffe einen Überweisungsvordruck und fülle ihn aus!

Der Scheckverkehr

Der Inhaber eines Bankkontos kann über sein Guthaben auch durch **Scheck** (Abb. 9) verfügen. In diesem Scheck fordert er seine Bank auf, aus seinem Guthaben eine bestimmte Summe bei Vorlage des Schecks zu bezahlen.

Scheck Konto-Nr.

G № 810474 7456 DM

Berlin 1 Bank 11

BERLINER STADTKONTOR

Berlin C 111, Kurstraße 36-51

Zahlen Sie gegen diesen Scheck aus meinem/unserem Guthaben

Deutsche Mark ______________________

Pf. wie oben

an ______________________

oder Überbringer

______________________, den ______________________ 194__

(Ausstellungsort)

(Stempel und Unterschrift)

Schecks, in denen der Zusatz „oder Überbringer" gestrichen ist, werden nicht bezahlt. Die Angabe einer Zahlungsfrist auf dem Scheck gilt als nicht geschrieben.

(44) Berliner Stadtkontor / 1284 Vordr. 4181 18. 11. 49 75 000 1. 435/49

Abb. 9. Bankscheck

Wenn die Bezahlung nicht in bar, sondern nur durch Gutschrift auf das Konto des Zahlungsempfängers erfolgen soll, spricht man von Verrechnungsschecks. Diese tragen (meist quer über den Vordruck gestempelt) den Vermerk „Nur zur Verrechnung".

Folgende sechs Bestandteile des Schecks sind gesetzlich vorgeschrieben[1]):

① Die Angabe der Bank, die zahlen soll (Bezogener);
② der Zahlungsort;
③ die unbedingte Anweisung, eine bestimmte Geldsumme zu zahlen;
④ die Bezeichnung „Scheck";
⑤ Ort und Tag der Ausstellung;
⑥ die Unterschrift des Ausstellers.

7. Schlossermeister Otto Löwe in Brandenburg unterhält bei der Stadtsparkasse Brandenburg ein Konto. Er benötigt zu Lohnauszahlungen am 16. August 432,– DM.

a) Fülle den Barscheck hierfür aus!

b) Warum kommt hier kein Verrechnungsscheck in Frage?

---

1) Siehe Vordruck.

8. Martin Lemke in Kottbus hat bei der Volksbank Kottbus e.G.m.b.H. ein Konto. Er will am 30. November an das KWU[1]) Kottbus durch Verrechnungsscheck 1 345,— DM zahlen.

a) Fülle den Scheckvordruck aus!

b) Überlege, wie sich der Zahlungsausgleich gestaltet, wenn das KWU bei der Volksbank ebenfalls ein Konto unterhält oder wenn es bei einer anderen Bank Inhaber eines Kontos ist!

c) Die Verbuchung

Buchungen durch den Konteninhaber

Wer sich über seinen Zahlungsverkehr und damit über den Stand seines Guthabens (oder seiner Schulden) Rechenschaft ablegen will, noch ehe er einen Kontoauszug der Bank oder des Postscheckamts erhält, muß selbst darüber **Buch führen.** Betriebe tun das in jedem Fall. Sie führen über alle ihre Vermögens- und Schuldenbestände Konten. Ein Konto ist eine zweiseitig geführte Rechnung. Es nimmt Vermögensposten in der linken Seite auf (Lastschrift oder Sollbuchung), Schulden dagegen in der rechten (Gutschrift oder Habenbuchung).

Ein Guthaben bei einer Bank oder beim Postscheckamt bedeutet immer einen Vermögensposten. Dieser ist im Konto links einzutragen. Hat die Bank dagegen einen Kredit gewährt, dann hat der Konteninhaber Schulden. Er muß den Bestand an Schulden im Konto rechts eintragen.

9. Otto Steinkopf, Halle, führt Buch über sein Konto bei der Deutschen Notenbank. Seine Aufzeichnungen haben folgendes Aussehen:

Bankkonto

1. 1. Anfangsbestand	1 645,—	3. 2. Überweisung an KWU Halle	500,—
19. 2. Bareinzahlung	2 400,—	24. 2. Scheckhingabe an Paul Berg	420,—
6. 3. Scheck von Karl Kleinberg	900,—	15. 3. Barabhebung	200,—
		20. 3. Überweisung an Kurt Kluge	380,—
		31. 3. Schlußbestand	3 445,—
	4 945,—		4 945,—

a) Eröffne das Konto am 1. 4.!

b) Verbuche alsdann folgende Geschäftsfälle:

1. Überweisung von Fritz Scheffel .... 320,—
2. Überweisung an KWU Halle .... 1 654,—
3. Scheck von Hans Werner .... 345,—

[1]) KWU ist die Abkürzung für Kommunal-Wirtschafts-Unternehmen.

4. Barabhebung	300,–
5. Überweisung an Richard Streuber	125,–
6. Scheck an Alfred Möschke	232,–
7. Barauszahlung an Gustav Haage	98,–

c) Schließe das Konto ab! Beachte dabei die Form des Abschlusses (Additionsstriche, Eintragung der beiden Seitensummen in gleicher Zeilenhöhe, Anbringung eines Sperrhakens in der an Beträgen kleineren Seite)!

d) Leite aus dem Konto Regeln ab für die Verbuchung des Anfangsbestandes, der Zugänge, der Abgänge und des Schlußbestandes!

10. Im Postscheckkonto einer Genossenschaft sind folgende Vorgänge zu buchen: Anfangsbestand 31 298 DM, Überweisung vom Nährmittelwerk Neuhausen VEB 2 320,56 DM, Überweisung an die Einkaufszentrale Altstetten 1 373,37 DM, Barabhebung 500 DM, Überweisung vom KWU Grünfelde 1 912 DM, Überweisung auf das Bankkonto 1 000 DM. Entwirf ein Konto und trage die Vorgänge ein!

11. Die Konsum-Genossenschaft Winterberg hat folgende Vorgänge auf ihrem Bankkonto zu verbuchen: Anfangsbestand 16 312,76 DM, Überweisung vom Kommunalen Wirtschaftsbetrieb Breitenroda 1 376,18 DM, Barabhebung für Lohn- und Gehaltszahlungen 1 950,– DM, Überweisung an die Landwirtschaftliche Ein- und Verkaufsgenossenschaft 3 712,18 DM, Überweisung vom Postscheckkonto 2 100,– DM, Bankspesen 13,60 DM, Guthaben-Zinsen 24,36 DM.
Führe das Bankkonto bei der Genossenschaft!

16. Die Zinsrechnung der Banken

Die Verzinsung von Sparguthaben

Bei Banken und Sparkassen kann für das eingezahlte Geld, das nicht zum Zahlungsausgleich verwendet werden soll, ein **Sparkonto** eingerichtet werden. Die Sparguthaben werden verzinst, und zwar zur Zeit mit 3% jährlich, wenn man täglich abheben will.

Die Verzinsung erfolgt bei Neueinlagen vom Tage nach der Einzahlung ab, bei Abhebungen bis zum Tage vor der Abhebung. Den Tag des Beginns der Verzinsung nennt man die Wertstellung.

Die Zinsen können auf verschiedene Weise ermittelt werden. Am einfachsten und im Bankverkehr am gebräuchlichsten ist die **Zinsstaffel.**

Beispiel: Heinz Thümmler besitzt ein Sparbuch, das folgende Eintragungen aufweist:

1. 1.	Vortrag aus dem alten Jahr (Wert 31. 12.)	300,–
6. 2.	Einlage	200,–
19. 3.	Einlage	500,–
11. 5.	Abhebung (Wert 10. 5.)	400,–
2. 10.	Einlage	700,–

Wie groß ist die Einlage einschließlich der Zinsen bis zum 31. 12.?

Weg der Lösung:

1. Anfertigung der eigentlichen Staffel (s. unten, Spalten 1 bis 3).
2. Berechnung der Zinstage. Dabei ist zu beachten, daß nicht die einzelne Einzahlung oder Abhebung zu verzinsen ist, sondern das sich nach jeder Buchung ergebende Guthaben. Das Anfangsguthaben (der Vortrag) bleibt vom 31. 12. bis 6. 2. unverändert, ist also für diese Zeit (36 Tage) zu verzinsen. Dann ergibt sich ein Guthaben von 500,– DM, das bis 19. 3. (43 Tage) zu verzinsen ist. Nunmehr wächst der Einlagenbestand auf 1 000,– DM. Am 11. 5. verringert er sich auf 600,– DM mit Wertstellung vom 10. 5. 1 000,– DM müssen bis 10. 5., also 51 Tage, verzinst werden. In entsprechenden Schritten wird bis zum Ende des Jahres weitergerechnet.

   Die Richtigkeit der Tageberechnung läßt sich leicht prüfen, denn bei jährlichem Abschluß müssen sich insgesamt 360 Tage ergeben.
3. Berechnung der Zinszahlen nach der Formel $\frac{k}{100} \cdot t$ (vgl. 7. Schuljahr).
4. Berechnung der Zinsen nach der Formel $\frac{\text{Summe der Zinszahlen}}{\text{Zinsdivisor}} = \text{Zinsen}$.

Die Zinsstaffel hat folgendes Aussehen:

Tag	+ / —	Betrag DM	Tage	Zinszahlen
1	2	3	4	5
31. 12.		300,—	36	108
6. 2.	+	200,—		
		500,—	43	215
19. 3.	+	500,—		
		1 000,—	51	510
10. 5.	—	400,—		
		600,—	142	852
2. 10.	+	700,—		
		1 300,—	88	1144
31. 12.	Zinsen 3 %	23,58	360	2829
31. 12.	Guthaben	1 323,58		

Aufgaben

1. Friedrich Lepper läßt sich ein Sparkonto errichten und zahlt folgende Beträge ein:

3. Juli	640,– DM	12. Okt.	190,– DM
15. Aug.	226,– „	22. „	275,– „
4. Sept.	93,– „	16. Nov.	149,– „
26. „	380,– „	2. Dez.	345,– „

Stelle für den 31. 12. eine Zinsstaffel auf! Zinsen 3%. Wie lassen sich bei dieser Aufgabe die Tage nachprüfen?

2. Die Schneiderin Johanna Bertram läßt sich bei der Filiale der Deutschen Notenbank in Wildenstein ein Sparkonto einrichten, das folgende Eintragungen aufweist:

7. 3.	Einzahlung	40,– DM
6. 5.	Einzahlung	75,– „
8. 6.	Einzahlung	30,– „
26. 7.	Einzahlung	20,– „
15. 8.	Abhebung	100,– „
21. 10.	Einzahlung	60,– „
11. 11.	Abhebung	25,– „
28. 12.	Einzahlung	60,– „

Stelle das Guthaben am 31. Dez. fest. Zinsen $3\frac{1}{2}$%.

3. Das Sparkonto des Bäckers Heinrich Witte weist folgende Eintragungen auf:

1. Juli	Vortrag (Wert 30. 6.)	230,– DM
16. „	Einzahlung	435,– „
20. Aug.	Einzahlung	501,– „
5. Sept.	Abhebung	646,– „
24. „	Einzahlung	900,– „
16. Okt.	Abhebung	332,– „
12. Nov.	Abhebung	651,– „
18. Dez.	Einzahlung	937,– „

Stelle das Guthaben am 31. Dez. fest! Zinsen 3%.

Die Verzinsung von Bankkrediten

Bankkredite müssen von dem Kreditnehmer verzinst werden. Gegenwärtig beträgt der Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%. Außerdem wird eine Kreditprovision in Höhe von $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{8}$% je Monat erhoben. Das bedeutet einen zusätzlichen Zins von 1 bis $1\frac{1}{2}$% je Jahr. Die Berechnung der Zinsen erfolgt in der Form der Staffel. Daneben ist natürlich das Konto aufzustellen. Sein Überschuß (Saldo) muß mit dem der Staffel übereinstimmen.

4. Fritz Röhl, Rostock, erhielt von der Deutschen Notenbank Kredit eingeräumt. Sein Konto entwickelte sich in der Buchführung der Bank wie folgt:

1. 7.	(Wert 30. 6.) Schuldensaldo	1 450,–	DM
17. 7.	Überweisung von Franz Richter	560,–	„
18. 8.	Überweisung an Erwin Jahn	1 240,–	„
25. 9.	Barabhebung	400,–	„
19. 10.	Gutschrift für Scheck Berger	265,–	„
11. 11.	Überweisung an Hans Maar	545,–	„
6. 12.	Überweisung von Hugo List	210,–	„

a) Stelle das Konto auf!

b) Fertige die Zinsstaffel an (Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%)!

c) Schließe das Konto ab, wenn noch eine Kreditprovision von $\frac{1}{8}$% je Monat und verschiedene Spesen von 5,30 DM zu berücksichtigen sind!

5. Das Konto von Erich Reinert, Magdeburg, bei der Deutschen Notenbank ist für den 30. Juni abzuschließen. Dabei ist die Zinsstaffel anzufertigen. Zinsfuß $4\frac{1}{2}$%, Kreditprovision $\frac{1}{12}$% je Monat, verschiedene Spesen 6,80 DM.

Soll

1. Jan.	(Wert 31. 12.) Vortrag	8 500,–	DM
10. Febr.	Überweisung an K. Reich	1 900,–	„
28. Mai	Abhebung	2 143,–	„
12. Juni	Scheck Nr. 21 234	875,–	„

Haben

5. Febr.	Einzahlung	6 526,–	DM
24. April	Scheck auf Leipzig	1 415,–	„
7. Mai	Überweisung von R. Fisch	900,–	„

C. Arithmetik

VI. Verbindung der 4 Grundrechenarten mit relativen Zahlen

17. Multiplikation von Summen

Die Aufgabe $74 \cdot 53$ kann man so lösen:

$$\begin{aligned} 74 \cdot 53 = (70 + 4) \cdot 53 \quad &= 70 \cdot 53 + 4 \cdot 53 \\ &= 70 \cdot (50 + 3) + 4 \cdot (50 + 3) \\ = (70 + 4) \cdot (50 + 3) &= 70 \cdot 50 + 70 \cdot 3 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

Bestimme das Ergebnis! Vergleiche damit Abb. 10a!

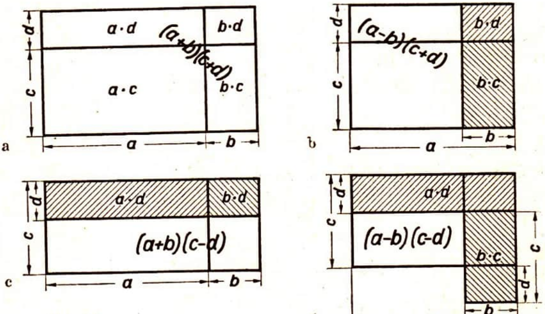


Abb. 10

Setze für die bestimmten Zahlen die allgemeinen Zahlen a, b, c und d ein! Abb. 10a bis d veranschaulicht geometrisch die Ergebnisse der folgenden Aufgaben:

1. $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = ac + bc + ad + bd$
2. $(a - b) \cdot (c + d) = (a - b) \cdot c + (a - b) \cdot d = ac - bc + ad - bd$
3. $(a + b) \cdot (c - d) = (a + b) \cdot c - (a + b) \cdot d = ac + bc - ad - bd$
4. $(a - b) \cdot (c - d) = (a - b) \cdot c - (a - b) \cdot d = ac - bc - ad + bd$

Man multipliziert zwei mehrgliedrige Ausdrücke miteinander, indem man jedes Glied des einen mit jedem Glied des anderen multipliziert und die Summe aller Teilprodukte bildet. Die Teilprodukte erhalten bei gleichen Vorzeichen der Faktoren das Pluszeichen, bei ungleichen das Minuszeichen.

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac+bc+ad+bd$$
$$(a+b)\cdot(c-d) = ac+bc-ad-bd$$
$$(a-b)\cdot(c+d) = ac-bc+ad-bd$$
$$(a-b)\cdot(c-d) = ac-bc-ad+bd$$

Aufgaben

1. a) $7(3m-5n)+6(4n-5m)+2(7m+3n)$

b) $3(2a-11)-17a-4(5b-8a)+19b$

c) $8x(3x-5y)-5y(2x-7y)+6x(11x-9y)-7y(4x-3y)$

d) $(5m-7r)4m-(3m-8r)5r-(7r-2m)6m+(5m-r)3r$

2. a) $(10+3)\cdot(30+6)$ **b)** $(40-2)\cdot(70+3)$ **c)** $(100-3)\cdot(60-2)$

d) $(a+3)\cdot(b+5)$ **e)** $(x+2)\cdot(y-7)$ **f)** $(9-z)\cdot(z+4)$

g) $(5a-3)\cdot(4b-8)$ **h)** $(m+3)\cdot(3m-10)$ **i)** $(28-e)\cdot(5f-3g)$

3. a) $(2a+5b)(7a+4b)$ **b)** $(5x+3y)(6x-5y)$

c) $(9r-7s)(2r+5s)$ **d)** $(8p-3q)(5p-7q)$

e) $(x+3y+z)(2x-y)$ **f)** $(9a+7b)(4a-b+3c)$

4. a) $(2a-3b-5c)(4a-5b+7c)$ **b)** $(3a+5b-2c)(a+4b-7c)$

c) $(5x-2y+7z)(3x-4y-2z)$ **d)** $(3p+8q+5r)(7p-2q-r)$

5. a) $(a+1)(a+2)(a-3)$ **b)** $(a+2)(a+3)(a+4)$

c) $(a-1)(a-2)(a-3)$ **d)** $(2x+1)(3x-1)(x+3)$

e) $(5x+3)(4x+5)(6x-5)$ **f)** $(7m-5)(8-6n)(3m+9n)$

Anmerkung: Man berechnet die Produkte, indem man zuerst zwei Faktoren miteinander und dann das Ergebnis mit dem dritten Faktor multipliziert.

6. Was ergibt

a) $(8a+5)\cdot(3a-4)$, und was ergibt $8a+5\cdot 3a-4$

b) $(2x+3)\cdot(x+4)$, und was ergibt $2x+3\cdot x+4$?

7. Berechne den Wert folgender Zahlenausdrücke auf zwei Arten! Setze die gegebenen Werte einmal vor, das andere Mal nach dem Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke (Auflösen der Klammern) ein:

a) $(2x^2-13x-5)(2x-3)$ für $x=4$

b) $(4a^2-5a-11)(-3a+5)$ für $a=-1$

c) $(-3y^2 + 5y - 6)(y^2 - 3y + 7)$ für $y = -2$

d) $(-u^3 + 3u^2 + 7u - 3)(2u^2 - 5)$ für $u = -3$

e) $(-2a + 5)(-3a + 2) - (-5a + 4)(-3a + 1)$ für $a = 2$

f) $(6v^2 - 3v + 7)(-v + 3) - (-3v^2 + 7v - 2)(-4v + 5)$ für $v = 3$!

18. Wichtige Multiplikationsformeln

Berechne nach der Regel im Abschnitt 17 den Wert der Klammerausdrücke

$$(50 + 3) \cdot (50 + 3); \quad (50 - 3) \cdot (50 - 3); \quad (50 + 3) \cdot (50 - 3)!$$

Löse rechnerisch die Aufgaben:

$$(a + b) \cdot (a + b); \quad (a - b) \cdot (a - b); \quad (a + b) \cdot (a - b)!$$

Schreibe, soweit möglich, Aufgaben und Teilprodukte als Potenzen!

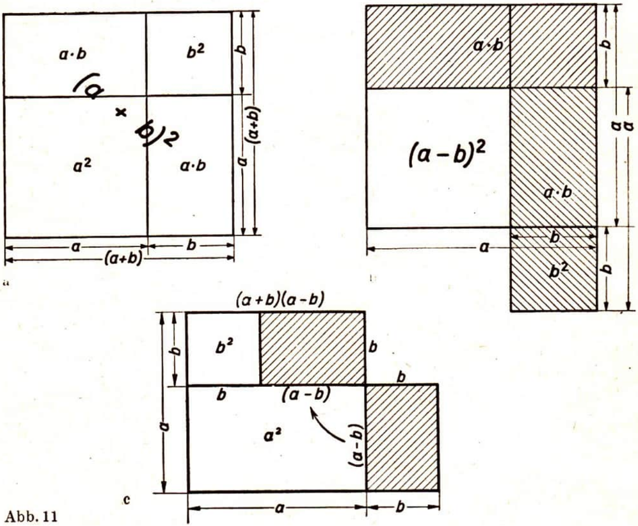


Abb. 11

Abb. 11 a bis c zeigt die zeichnerische Lösung dieser Aufgaben. Weise daran die Richtigkeit der Rechnung nach! Führe die Zeichnungen mit bestimmten Zahlen auf Millimeterpapier aus!

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\text{II.} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ &\text{III.} \quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Sprich die Formeln auch in Form von Sätzen aus!
Lies die Formeln von rechts nach links und merke auch die Umkehrungen!

Aufgaben

1. a) $(c+d)^2$ **b)** $(m+n)^2$ **c)** $(p+5)^2$ **d)** $(7+a)^2$ **e)** $(x+4)^2$
f) $(3a+b)^2$ **g)** $(c-d)^2$ **h)** $(5-v)^2$ **i)** $(p-12)^2$ **k)** $(3m-4)^2$
l) $(10a-4b)^2$ **m)** $(u+v)\cdot(u-v)$ **n)** $(y+z)\cdot(y-z)$
o) $(c-5)\cdot(c+5)$ **p)** $(r+15)\cdot(r-15)$ **q)** $(20-a)\cdot(20+a)$

2. a) $(x+y)^2$ **b)** $(3x+2y)^2$ **c)** $(7a+9b)^2$ **d)** $(1{,}2a+0{,}9b)^2$
e) $(b-c)^2$ **f)** $(5x-7)^2$ **g)** $(9a-10b)^2$ **h)** $(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b)^2$
i) $(x+y)(x-y)$ **k)** $(3a+5b)(3a-5b)$ **l)** $(7x-11y)(7x+11y)$

3. a) $(2\frac{1}{2}-\frac{4}{5}a)^2$ **b)** $(\frac{2}{3}a+9)^2$ **c)** $(0{,}3c-0{,}1)^2$ **d)** $(0{,}9x-2{,}5y)^2$
e) $(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b)^2$ **f)** $(1{,}2a+3{,}5b)(1{,}2a-3{,}5b)$ **g)** $(a+b+c)^2$

4. a) $(a+b)^2+(a-b)^2$ **b)** $(u+v)^2-(u-v)^2$
c) $(x-y)^2-(x+y)^2$ **d)** $(m+n)^2+(m-n)^2-(m+n)\cdot(m-n)$
e) $(a+b)\cdot(a-b)-(a+b)^2+(a-b)^2$

5. a) $(7a-5b)(9a+2b)+(4a+11b)(a-5b)+(5a-9b)^2$
b) $5x(3{,}2x-1{,}8y)+(0{,}8x-1{,}5y)(1{,}2x+0{,}6y)-(1{,}4x-5y)^2$
c) $(9a+8b)^2-(9a-8b)^2+(9a+8b)(9a-8b)$

6. Aus welchen Produkten sind folgende Ausdrücke entstanden:
a) $u^2+2uv+v^2$ **b)** $m^2-2mn+n^2$ **c)** p^2-q^2
d) a^2+6a+9 **e)** m^2-36 **f)** $c^2-10c+25$
g) $4m^2+12mn+9n^2$ **h)** $25x^2-60xy+36y^2$ **i)** $49c^2-81d^2$?

7. a) $(a+2)(a-3)(a+4)$ **b)** $(x-1)(x-2)(x+3)$
c) $(x-a)(x-b)(x-c)$ **d)** $(3x-3)(3x+7)(6x-5)$
e) $(3x+5)(7x-5)(2x+1)$ **f)** $(a+b)(a+b)(a+b)$

8. a) $(x-y)^3$ **b)** $(a+5)^3$ **c)** $(x-6)^3$ **d)** $(2a+3b)^3$
e) $(5x-2y)^3$ **f)** $(1-3x)^3$ **g)** $(4a-1)^3$

9. Berechne unter Anwendung der Formel $(a+b)^2$:
21^2; 34^2; 42^2; 51^2; 63^2; 72^2; 85^2; 94^2; 102^2; 153^2; 255^2; 303^2; 540^2!

10. Berechne mit Hilfe der Formel $(a - b)^2$:
29^2; 38^2; 49^2; 59^2; 68^2; 78^2; 89^2; 99^2; 107^2; 148^2; 198^2; 396^2; 995^2!

11. Berechne mit Hilfe der Formel $(a + b)(a - b)$:
$27 \cdot 33$; $36 \cdot 44$; $42 \cdot 58$; $58 \cdot 62$; $69 \cdot 71$; $84 \cdot 96$; $104 \cdot 116$; $248 \cdot 252$!

12. Berechne 45^2! Wieviel ist dann $44 \cdot 46$; $47 \cdot 43$; $41 \cdot 49$?

13. Berechne 87^2! Wie groß ist dann $85 \cdot 89$; $82 \cdot 92$; $86 \cdot 88$?

14. Die Kreuzmethode zur Multiplikation beliebiger zweistelliger Zahlen. Berechne $(Z + E)(z + e)$, wobei Z und z Zehner, E und e Einer bedeuten. Schreibe die Klammern noch einmal untereinander und erkläre die folgenden Rechnungen! (Beginne mit den Einern!)

$$\begin{array}{ccc} Z + E & 20 + 6 & 26 \\ \underline{z + e} & \underline{30 + 4} & \text{oder kürzer}\quad \underline{34} \\ Ee + (Ez + Ze) + Zz & 6 \cdot 4 + (6 \cdot 30 + 20 \cdot 4) + 20 \cdot 30 & 884 \end{array}$$

Rechne:

1. $E \cdot e$	$6 \cdot 4$	$= 24$,	schreibe 4, merke 2
2. $E \cdot z + Z \cdot e$	$6 \cdot 3 + 2 \cdot 4$	$= 26, \ldots + 2 = 28$,	„ 8, „ 2
3. $Z \cdot z$	$2 \cdot 3$	$= 6, \ldots + 2 = 8$,	„ 8

Löse folgende Aufgaben nach der Kreuzmethode:

a) $23 \cdot 34$ **b)** $45 \cdot 56$ **c)** $87 \cdot 91$ **d)** $64 \cdot 76$
e) $58 \cdot 63$ **f)** $84 \cdot 37$ **g)** $26 \cdot 41$ **h)** $53 \cdot 67$!

19. Gleichungen mit Multiplikationsklammern

Beispiel: $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$
Auflösen der Klammern $72 - 20x - 36x + 84 = 30x - 240 - 6x - 84$
Ordnen .... $-20x - 36x - 30x + 6x = -240 - 84 - 72 - 84$
Zusammenfassen .... $-80x = -480$
Teilen durch den Faktor von x .... $\underline{\underline{x = 6}}$

Mache die Probe!

Aufgaben

1. a) $4(x + 9) = 56$ **b)** $7(x - 3) = 35$ **c)** $3x + 1 = 4(9 - x)$
d) $13x - 2(4x - 5) = 66 - 3x$ **e)** $5(2x + 7) = 9(2x - 5)$
f) $2(2x + 1) = 11(17 - 3x)$

g) $8(3x-2)-7x=13x+5(12-3x)$

h) $7(3x+6)+5(x-3)=11-4(17-4x)$

i) $8(2x-5)+3(2x+3)=6(8-x)-2x+71$

2. a) $8(2x-17)=24$ **b)** $25(9+3x)=5x+285$

c) $3(2-x)=2(42-3x)$ **d)** $4x+18=2(x+13)$

e) $8(2x-14)=(9+x)6$ **f)** $(5x-7)6=3(x-5)$

g) $6(x-5)=2(10-2x)$ **h)** $8x-17=(x-4)3$

i) $2(2x-5\frac{1}{2})=(x+4\frac{1}{2})3$ **k)** $7(3x+2\frac{1}{2})=(4\frac{1}{2}+x)11$

3. a) $2{,}5(3x-4)=(10-2{,}5x)2$ **b)** $1\frac{1}{2}(3x+5)=1\frac{1}{4}x+12\frac{3}{4}$

c) $3{,}1(2x+5)=2(2{,}1x+17{,}25)$ **d)** $3\frac{1}{2}(6+3x)=(x+1\frac{1}{3})5$

e) $5\frac{1}{5}(3x-1\frac{1}{2})=(7-1\frac{1}{5}x)2$

f) $4{,}5(4x-6\frac{1}{2})=2(8x+11\cdot 15)$

g) $4(2x-3)+3(4x+2)=2(x+16)-2$

h) $5(3x-7)+4(6-x)=4+3(x+20)-2x$

i) $9(x-5)+3(4+5x)=7(x-2)-3x+1$

k) $6(6x-6)+5(5-5x)=3(4x+5)+2(3+x)-4x$

4. a) $(x+4)(x+3)=(x+1)(x+7)$

b) $(x+11)(x-9)=(x+3)(x-7)$

c) $(x+4)(x-9)-13=(x-5)(x-7)$

d) $(x-5)(x+6)=(x+3)(x-6)+20$

e) $(3x-5)(2x+5)=(x+1)(6x-4)$

5. a) $(x+3)^2=(x+2)^2+15$

b) $(x+3)^2+(x-2)^2=(x+4)^2+(x-5)^2$

c) $(x-5)^2+(x-9)^2=(x-2)^2+(x-3)^2+3$

d) $(3x-7)^2+(4x-5)^2=(5x-7)^2-11$

e) $(3x-5)^2-(2x+3)^2=5(x-2)(x+2)-6$

6. a) Vergrößert man eine Zahl um 8 und multipliziert darauf die Summe mit 4, so erhält man 52. Wie heißt die Zahl?

b) Vermindert man eine Zahl um 6 und multipliziert die Differenz mit 9, so erhält man 27. Berechne die Zahl!

7. Zwei Zahlen betragen zusammen 15. Multipliziert man die erste mit 4, die zweite mit 7 und addiert die Produkte, so erhält man 78. Wie heißen die beiden Zahlen?

Anleitung: Die erste Zahl ist x, die zweite $(15-x)$.

8. Beim Aufbau der Turnhalle in Neuendorf helfen zwei Klassen beim Zubringen (Treiben) der Ziegelsteine. Sie stehen miteinander im Wettbewerb. Am ersten Tage tragen sie zusammen 7 500 Steine, am nächsten Tag 17 900. Die erste Klasse hat dabei 2mal soviel und die zweite Klasse 3mal soviel wie am Vortage getragen. Wieviel Steine hat jede der Klassen am ersten und am zweiten Tage getragen?

9. Am ersten Tage eines Klassenwettbewerbs wurde der Schüler Erich Fischer gefragt, wieviel Pluspunkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn ihr zu der Zahl meiner Pluspunkte noch 9 hinzuzählt, die Summe mit 9 malnehmt, so sind es 9 Pluspunkte mehr als 99. Nun rechnet euch aus, wieviel Pluspunkte ich erhalten habe!"

10. Eine Autoreparaturwerkstatt reparierte in einem Monat insgesamt 240 Autos und Motorräder; zusammen hatten die Fahrzeuge 780 Räder. Wieviel Motorräder sind repariert worden?

11. Die Konsum-Genossenschaft Sommerfeld bezog zusammen 2 500 Flaschen Apfelsaft und Vierfruchtmost. Sie zahlte dafür 3 050,— DM. Wieviel Flaschen Apfelsaft und wieviel Flaschen Vierfruchtmost wurden bezogen, wenn für eine Flasche Apfelsaft 1,40 DM und für eine Flasche Vierfruchtmost 1,10 DM gezahlt werden mußten?

12. Ein Vater ist jetzt 58, sein Sohn 28 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater viermal so alt wie sein Sohn?

13. Die Länge eines Rechtecks ist um 6 cm größer als seine Breite. Verlängert man Länge und Breite dieses Rechtecks um je 4 cm, so nimmt sein Flächeninhalt um 72 cm² zu. Berechne Länge und Breite des Rechtecks!

20. Vermischte Aufgaben

1. Vereinfache durch Zusammenfassen der untereinanderstehenden Größen!

a)
$$\begin{array}{rrrr}
+9x & +8y & -z & -7v \\
-4x & +7y & +8z & -v \\
+x & -12y & -3z & +5v \\
+5x & +6y & -7z & +8v \\
\hline
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr}
-8a & +b & -12c & -d \\
+a & -5b & -3c & +7d \\
+9a & +5b & +c & -4d \\
-3a & +8b & +9c & -5d \\
\hline
\end{array}$$

2. a) $10u + (11v - 9w) - (7u + 9v - 8w) - (3u + 2v + 5w)$

b) $43x - 29y - 14z - (19x + 21y - 2z) - (6x + 11y - 13z)$

c) $24r - (6s - 5r) - [7s - (6r + 5s) - (4r + 3s) - 9r]$

d) $7{,}2a - (5{,}3b + 3{,}1c) - [5a - (1{,}6b + 4{,}8c) - 4b] + c$

e) $3\frac{1}{2}x - [(4y + 2\frac{1}{4}z - \frac{2}{3}x) + 4z] - 3\frac{1}{4}y + 2\frac{1}{2}z$

Anmerkung: Löse bei Doppelklammern erst die inneren Klammern auf!

3. a) $5(2x - 7y) + 6(5y - 2x) - 3(4x + 7y)$

b) $(12u - 3v)4u - (11v - 6u)5v + (7v - 3u)8v - (9u + 2v)7v$

c) $7a(0{,}5a - 0{,}3b) + 9b(0{,}4b - 0{,}7a) - 3{,}4(4a^2 - 9ab + 2b^2)$

d) $3r(2\tfrac{1}{2}r - \tfrac{2}{3}s) - 2s(4\tfrac{1}{4}r - 1\tfrac{1}{3}t) + 5t(2\tfrac{1}{5}r - 3\tfrac{1}{4}s)$

4. a) $(9x + 7y)(8x - 5y) + (4x - 11y)(12x - 5y)$

b) $(6p - 5q)(2p - 3q) - (8p - 7q)(4p - 5q) - (9p - q)(2q - 5p)$

c) $(3a - 4b - 5c)(4a + 5b - 3c) - (7a + b - 2c)(2a - 3b + c)$

d) $(5x + 6y)^2 - (3x - 7y)^2 + (4x - 5y)(4x + 5y)$

e) $(3x - 7)^2 - (5x - 2)^2 - (6x + 7)(7 - 6x)$

5. Löse folgende Gleichungen:

a) $5(3x + 11) - 4(5 + 2x) = 7(2x - 7) + 21$

b) $15(2x - 16) - 6(x + 14) = 4(18 - 5x) - 12(3x - 7)$

c) $(17 - 3x)(10 + 12x) + (9x - 17)(4x - 25) = 0$

d) $(x + 9)^2 - (x - 4)^2 = (x + 7)^2 + 4(x + 10) - (x - 2)^2$

e) $(5x - 7)^2 + (9x - 4)^2 = 6(3x - 4)(3x + 4) + 13(2x - 5)^2 + 13$!

6. Beachte den Unterschied von:

a) $2a$ und a^2, **b)** $3a$ und a^3,

c) $a^2 + b$, $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$ und $(a + b)\,2$,

d) $a^2 - b$, $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$ und $(a - b)\,2$!

Setze $a = 6$, $b = 4$!

7. a) Die Summe dreier Zahlen ist 154. Die zweite Zahl ist um 4 größer als das Dreifache der ersten und die dritte um 12 kleiner als das Fünffache der ersten. Wie heißen die Zahlen?

b) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen beträgt 178. Berechne diese Zahlen!

8. a) Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist a, die Einerziffer b. Drücke die Zahl durch a und b aus!

b) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 13. Subtrahiert man von dieser Zahl 27, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Suche die Zahl!

c) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert vom Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die Zahl?

9. Die Schüler einer Klasse kaufen gemeinsam einen Schlagball. Gibt jeder Schüler 25 Pf, so bleiben 95 Pf übrig, gibt aber jeder 15 Pf, so fehlen 1,15 DM an dem zu zahlenden Preis. Wieviel Schüler sind in der Klasse, und wieviel DM kostet der Ball?

10. In einer Gießerei fertigen zwei Gießer zusammen 280 Gußstücke. Der erste Gießer stellt 50 Stücke mehr her als der zweite. Wieviel Stücke gießt jeder?

11. Eine Steinkohlengrube förderte an zwei Tagen zusammen 4 800 t. Am ersten Tage förderte sie 300 t weniger als am zweiten. Wie groß waren die Fördermengen der einzelnen Tage?

12. Am dritten und vierten Tage förderte die Grube zusammen 5 600 t, und zwar am vierten 800 t mehr als am dritten. Wie groß waren die Fördermengen des dritten und des vierten Tages?

13. Für den Bau eines Neubauerngehöftes hatten sich 5 Bauern für die Anfuhr der Ziegelsteine bereit erklärt. Jeder sollte die gleiche Anzahl von Fuhren durchführen. Da das Gespann des ersten Bauern anderweitig benötigt wurde, mußte jeder der vier anderen 3 Fuhren mehr durchführen als sonst nötig gewesen wären. Wieviel Fuhren waren insgesamt notwendig?

14. Unter die Preisträger eines Wettbewerbs sollen 360,— DM so geteilt werden, daß der zweite Preisträger 36,— DM mehr erhält als der dritte und der erste 36,— DM mehr als der zweite. Wieviel DM erhält jeder?

15. Unter die besten drei Aktivistengruppen wird eine Prämie von 1 800,—DM verteilt, und zwar so, daß die erste Gruppe 120,— DM mehr als die zweite und die dritte Gruppe 180,— DM weniger als die zweite erhält. Nimm die Verteilung vor!

16. Jemand erhält beim Wechseln eines Hundertmarkscheines Zehnmarkscheine und Fünfmarkscheine, im ganzen 16 Stück.

17. Ein Chemiker will 100 cm³ einer wäßrigen Salzlösung von der Dichte 1,5 g/cm³ so verdünnen, daß er eine Lösung von der Dichte 1,2 g/cm³ erhält. Wieviel cm³ Wasser muß er hinzufügen?

18. 5 kg einer Säure von der Dichte 1,8 g/cm³ sollen mit Wasser so verdünnt werden, daß die verdünnte Säure die Dichte 1,2 g/cm³ hat. Wieviel Gramm Wasser muß man zusetzen?

VII. Faktorenzerlegung
Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen

21. Ausklammern

Aufgaben, in denen ein Produkt aus mehreren Faktoren durch eine Zahl oder durch ein Produkt mehrerer Faktoren geteilt werden soll, werden mit Hilfe des Bruchstriches gelöst.

Beispiel: $\frac{48 \cdot 130}{120} \overset{:(12 \cdot 10)}{=} \frac{4 \cdot 13}{1} = 52$.

Warum kann man bei der Aufgabe $\frac{48 + 130}{120}$ nicht mit 120 kürzen? Man erkennt: Nur dann, wenn Zähler und Nenner Produkte sind, die gleiche Faktoren enthalten, kann man den Bruch kürzen.

Dies gilt auch für das Rechnen mit allgemeinen Zahlen.

Kürze: $\frac{10\,a\,b}{5\,a}$; $\frac{12\,a\,b}{4\,b}$; $\frac{18\,a\,b + 12\,b}{6\,b}$!

Warum darf man die ersten beiden Brüche ohne weiteres kürzen, den letzten aber erst nach der Umformung?

Um auch diesen kürzen zu können, verwandelt man die Summe $(18\,a\,b + 12\,b)$ in das Produkt $6\,b(3\,a + 2)$. Die Aufgabe lautet also in veränderter Form

$$\frac{6\,b\,(3\,a + 2)}{6\,b};$$

durch Kürzen erhält man als Ergebnis $3\,a + 2$.

Einen mehrgliedrigen Ausdruck, dessen Summanden einen Faktor gemeinsam haben, kann man als Produkt schreiben, indem man den gemeinsamen Faktor ausklammert.

$$ab + ac = a\,(b + c) \qquad ab - ac = a\,(b - c)$$

$$ab + ac - ad = a\,(b + c - d)$$

Beachte besonders: $ab + a = ab + a \cdot 1 = a(b + 1)$!

Beispiele: a) $12\,a^2 b - 9\,a b^2 = 3\,a b\,(4\,a - 3\,b)$

b) $ab + ac - a = a(b + c - 1)$

c) $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)\,(a + b)$

d) $ab - ac + b^2 - bc = a(b - c) + b(b - c) = (b - c)\,(a + b)$

Aufgaben

Schreibe folgende mehrgliedrige Ausdrücke als Produkte:

1. a) $6a + 6b$ **b)** $7a + 4a$ **c)** $5x - 5y$ **d)** $ab + ac$
e) $10m - 7m$ **f)** $mx - nx$ **g)** $am - an$ **h)** $39a - 39g$

2. a) $5a + a$ **b)** $9x - x$ **c)** $m + am$ **d)** $4r - 4$
e) $xy + x$ **f)** $ay - a$ **g)** $ab^2 + b^2$ **h)** $am - a^2$

3. a) $9a + 6b$ **b)** $25m - 15n$ **c)** $48x + 60y$ **d)** $35ab - 49x$
e) $12xy + 18z$ **f)** $15r - 10s$ **g)** $12a^2 - 6a$ **h)** $30a^2b - 40ab^3$

4. a) $4a + 6b + 8c$ **b)** $15m + 10n + 250$ **c)** $ab + ax - ad$
d) $18x - 30y - 12z$ **e)** $5{,}6a + 7{,}2b - 4c$ **f)** $4\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}y + 6z$

5. a) $25ab + 30ac - 15ad$ **b)** $16mx - 40my + 32mz$
c) $21m^2 - 49mn + 35mo$ **d)** $65a^2bc + 39ab^2c - 26abc^2$

6. a) $m(x + y) + n(x + y)$ **b)** $2a(m - 3) - 5b(m - 3)$
c) $5xy(3a - b) - 4vw(3a - b)$ **d)** $4rs(a - 5) - 9st(a - 5)$
e) $a(r + s) - b(r + s) - c(r + s)$
f) $3x(p - q) - 4y(p - q) + 5z(p - q)$

7. a) $ac + ad + bc + bd$ **b)** $ab + ac + bd + cd$
c) $pr - ps + qr - qs$ **d)** $am - an - bm + bn$
e) $8ax - 12bx - 20ay + 30by$ **f)** $60a^2b - 45ab + 36a^2c - 27ac$
g) $30am - 15a - 24bm + 12b$ **h)** $56x^2 - 40xy + 63xz - 45yz$

8. a) $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $x^2 - 2xy + y^2$ **c)** $a^2 + 8a + 16$
d) $m^2 - 10mn + 25n^2$ **e)** $a^2 - 2a + 1$ **f)** $x^2 - 14xy + 49y^2$
g) $9a^2 + 24ab + 16b^2$ **h)** $25x^2 - 60xy + 36y^2$ **i)** $64c^2 + 80cd + 25d^2$

9. a) $a^2 - b^2$ **b)** $x^2 - y^2$ **c)** $4x^2 - 9y^2$
d) $49m^2 - 64n^2$ **e)** $25c^2 - 81d^2$ **f)** $400x^2 - 900y^2$

10. a) $a^2 + 8a + 15$ **b)** $a^2 - 9a + 20$ **c)** $m^2 + 10m + 21$
d) $x^2 - 5x + 4$ **e)** $10a^2 - 11ab + b^2$ **f)** $18x^2 + 9xy + y^2$!

11. Multiplikation von zweistelligen Zahlen mit gleichem Zehner, besonders von solchen, deren Einer zusammen wieder einen vollen Zehner ergeben (23 und 27, 66 und 64 usw.). Nenne die Zehner-zahl Z und die beiden Einerzahlen E und e! Schreibe die Aufgabe mit zwei Multiplikationsklammern und multipliziere aus! In dem Ergebnis klammere Z aus und beachte, daß $E + e = 10$ ist!

Gib die Rechenregel durch Stichworte wieder und rechne danach:

a) $33 \cdot 37$ **b)** $46 \cdot 44$ **c)** $72 \cdot 78$ **d)** $95 \cdot 95$ **e)** 35^2 **f)** 75^2!

g) Bilde selbst 10 weitere Aufgaben!

h) Untersuche, ob sich das Verfahren auch für andere zweistellige Paare von Zahlen mit gleichem Zehner eignet!

22. Formveränderung der Brüche. Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen von Brüchen

Löse folgende Aufgaben:

$$2:5; \quad 1:8; \quad b:5; \quad c:d!$$

Schreibe folgende Aufgaben in Bruchform und stelle das Vorzeichen des Ergebnisses durch Anwenden der Regeln über das Teilen relativer Zahlen fest:

$$(+a):(+b); \quad (-a):(-b); \quad (+a):(-b); \quad (-a):(+b)!$$

1. Jede Divisionsaufgabe mit bestimmten oder allgemeinen Zahlen kann als Bruch geschrieben werden.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

2. Haben Zähler und Nenner eines Bruches gleiche Vorzeichen, dann hat der Bruch einen positiven, haben Zähler und Nenner entgegengesetzte Vorzeichen, dann hat der Bruch einen negativen Wert.

3. Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

4. Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

5. Der Hauptnenner ungleichnamiger Brüche ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der einzelnen Nenner.

Beispiele: a) $\frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}$; $\quad \frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}$ [2.]

b) $\frac{a}{b} \overset{\cdot m}{\cong} \frac{ma}{mb}$; $\quad \frac{a+b}{a-b} \overset{\cdot x}{\cong} \frac{x(a+b)}{x(a-b)}$ [3.]

c) $\frac{ab}{bc} \overset{:b}{\cong} \frac{a}{c}$; $\quad \frac{a^2+ab}{ac-ab} = \frac{a(a+b)}{a(c-b)} \overset{:a}{\cong} \frac{a+b}{c-b}$

d) $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$;

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} \quad \text{und} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{a(a+b)}{a^2-b^2} \text{ [5.]}$$

e) $\frac{a+b}{3b}$; $\frac{a^2-b}{6ab}$; $\frac{a}{3(a+b)^2}$; $\frac{b}{4a^2b+4ab^2}$ [5.]

Faktorenzerlegung der Nenner	Erweiterungsfaktoren	Erweiterter Zähler
$3b = 3b$	$2^2 \cdot a \cdot (a+b)^2$	$2^2 \cdot a \cdot (a+b)^3$
$6ab = 2 \cdot 3ab$	$2 \cdot (a+b)^2$	$2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a^2-b)$
$3(a+b)^2 = 3(a+b)^2$	$2^2 \cdot ab$	$2^2 \cdot a^2b$
$4a^2b + 4ab^2 = 2^2 \cdot ab \cdot (a+b)$	$3 \cdot (a+b)$	$3 \cdot (a+b) \cdot b$

Hauptnenner: $2^2 \cdot 3 \cdot ab \cdot (a+b)^2 = 12ab(a+b)^2$

$$\frac{a+b}{3b} = \underline{\underline{\frac{4a(a+b)^3}{12ab(a+b)^2}}} \qquad \frac{a^2-b}{6ab} = \underline{\underline{\frac{2(a+b)^2(a^2-b)}{12ab(a+b)^2}}}$$

$$\frac{a}{3(a+b)^2} = \underline{\underline{\frac{4a^2b}{12ab(a+b)^2}}} \qquad \frac{b}{4a^2b+4ab^2} = \underline{\underline{\frac{3(a+b)b}{12ab(a+b)^2}}}$$

Aufgaben

1. Bestimme das Vorzeichen folgender Brüche:

$\frac{+5}{-6}$; $\frac{-a}{+b}$; $\frac{-5x}{-7y}$; $\frac{+3b}{+5c}$; $\frac{-2ab}{+5cd}$; $\frac{-9xyz}{-5uvw}$; $\frac{+5ab}{-3rs}$!

2. Erweitere mit 5; (-3); a; $(-2b)$; $4a^2$; $(a+b)$; $(4x-3y)$ folgende Brüche:

a) $\frac{x}{5}$ **b)** $\frac{7}{b}$ **c)** $\frac{a}{b}$ **d)** $\frac{3x}{5y}$ **e)** $\frac{a+b}{7a}$ **f)** $\frac{2c}{x+y}$ **g)** $\frac{3x+7y}{4x-5}$!

3. Bringe

a) $\frac{5}{6}$ auf den Nenner 24 **b)** $\frac{7}{8}$ auf den Nenner 56

c) $\frac{4}{a}$ „ „ „ ab **d)** $\frac{x}{5}$ „ „ „ 45

e) $\frac{5x}{6y}$ „ „ „ $36xy$ **f)** $\frac{3a}{7b}$ „ „ „ $84a^2b^2$

g) $\frac{7rs}{5ab}$ „ „ „ $40a^2b^2$ **h)** $\frac{6mn}{5xy}$ „ „ „ $35x^2yz$

i) $\frac{a+b}{a-b}$ „ „ „ **1.** a^2-b^2 **2.** $a^2-2ab+b^2$

k) $\frac{x-y}{x+y}$ auf den Nenner **1.** $x^2+2xy+y^2$ **2.** x^2-y^2

l) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ „ „ „ **1.** $25a^2-16b^2$ **2.** $25a^2-40ab+16b^2$

m) $\frac{r+s}{3r-2s}$ „ „ „ **1.** $9r^2-4s^2$ **2.** $9r^2-12rs+4s^2$

n) $\frac{5r-9m}{4r+3}$ „ „ „ **1.** $16r^2-9$ **2.** $16r^2+24r+9$!

4. Kürze folgende Brüche:

a) $\frac{27}{36}$ b) $-\frac{35}{60}$ c) $\frac{5a}{15}$ d) $\frac{7b}{9b}$ e) $\frac{12ab}{9b}$ f) $\frac{abc}{bcd}$

g) $-\frac{18xy}{12yz}$ h) $\frac{a}{ax}$ i) $\frac{b}{b^2}$ k) $\frac{a^3}{a^4}$ l) $\frac{x^2y^4}{x^3y^2}$ m) $\frac{10x^2y^3z}{25x^4yz^2}$!

5. Verwandle in folgenden Brüchen Zähler und Nenner in Produkte und kürze dann:

a) $\frac{ax+bx}{ax}$ b) $\frac{8a+16}{7a+14}$ c) $\frac{12ax-18ay}{24ap+30aq}$ d) $\frac{25rx-35ry}{35sx-49sy}$

e) $\frac{5a+c}{25a^2-c^2}$ f) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}$ g) $\frac{a^2+a}{a+1}$ h) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

i) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$ k) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ l) $\frac{4a-4}{a^2-2a+1}$ m) $\frac{5a+5b}{a^2-b^2}$!

6. Mache folgende Brüche gleichnamig:

a) $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{12}$ b) $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{6}$ c) $\frac{a}{8}$ und $\frac{b}{10}$ d) $\frac{2x}{7}$ und $\frac{3y}{5}$

e) $\frac{4}{r}$ und $\frac{1}{s}$ f) $\frac{5}{2x}$ und $\frac{3}{5y}$ g) $\frac{x}{y}$ und $\frac{z}{v}$ h) $\frac{3r}{m}$ und $\frac{7s}{n}$

i) $\frac{2x}{5y}$ und $\frac{3v}{4w}$ k) $\frac{5y}{8x}$ und $\frac{7x}{12z}$ l) $\frac{2x}{3y}$ und $\frac{5x}{6z}$ m) $\frac{3a}{8b}$ und $\frac{5b}{6c}$

n) $\frac{3}{4a}$; $\frac{7}{10b}$ und $\frac{6}{5c}$ o) $\frac{4x}{a^2}$; $\frac{3y}{ab}$ und $\frac{2z}{b^2}$

p) $\frac{a}{a^2-b^2}$ und $\frac{b}{a+b}$ q) $\frac{x}{x+y}$ und $\frac{y}{x-y}$

r) $\frac{b}{ab+b^2}$ und $\frac{c}{a^2-b^2}$ s) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ und $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}$

t) $\frac{a}{b(a-b)}$; $\frac{b}{a(a+b)}$ und $\frac{c}{a^2-b^2}$ u) $\frac{x}{x-y}$; $\frac{y}{x+y}$ und $\frac{z}{(x+y)^2}$!

23. Addition und Subtraktion von Brüchen

Allgemein gilt für die Addition und Subtraktion von Brüchen:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Beispiele: a) $\frac{3a-4b}{2x} - \frac{5a-8b}{2x} = \frac{3a-4b-(5a-8b)}{2x}$

$= \frac{3a-4b-5a+8b}{2x} = \frac{-2a+4b}{2x} = \frac{2(2b-a)}{2x} = \underline{\underline{\frac{2b-a}{x}}}$

b) $\frac{4x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{20x-6x}{15} = \underline{\underline{\frac{14x}{15}}}$

c) $\frac{a-2b}{2ab} + \frac{2}{a-b} - \frac{a+b}{a^2-ab}$

Faktorenzerlegung der Nenner	Erweiterungsfaktor	Erweiterte Zähler
$2ab = 2ab$	$(a-b)$	$(a-2b)(a-b) = a^2-3ab+2b^2$
$a-b = 1(a-b)$	$2ab$	$2 \cdot 2ab = 4ab$
$a^2-ab = a(a-b)$	$2\ b$	$(a+b) \cdot 2b = 2ab+2b^2$

Hauptnenner: $2ab(a-b)$

Zähler des Ergebnisses: $a^2-ab = a(a-b)$

$$\frac{a(a-b)}{2ab(a-b)} = \underline{\underline{\frac{1}{2b}}}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{4} + \frac{b}{4}$ b) $\frac{b}{8} - \frac{c}{8}$ c) $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} - \frac{z}{12}$ d) $\frac{r}{5} + \frac{s}{5} - \frac{t}{5}$

e) $\frac{x}{a} + \frac{y}{a}$ f) $\frac{p}{r} + \frac{q}{r}$ g) $\frac{m}{s} - \frac{n}{s}$ h) $\frac{u}{v} + \frac{w}{v} - \frac{x}{v}$

2. a) $\frac{xy}{g} + \frac{yz}{g}$ b) $\frac{st}{u} + \frac{vw}{u}$ c) $\frac{a}{cd} + \frac{b}{cd}$ d) $\frac{4}{r} - \frac{pq}{r}$

e) $\frac{a+b}{3} - \frac{b}{3}$ f) $\frac{x+y}{z} - \frac{y}{z}$ g) $\frac{v-w}{x} + \frac{w}{x}$ h) $\frac{3a+2b}{c} - \frac{3b}{c}$

3. a) $\frac{a+b}{z} + \frac{a-b}{z}$ b) $\frac{a+b}{z} - \frac{a-b}{z}$ c) $\frac{a-b}{y} - \frac{a+b}{y}$

d) $\frac{3(x+y)}{a} + \frac{4(x-y)}{a} - \frac{2x-3y}{a}$

4. a) $\frac{7a}{5x}+\frac{9a}{5x}-\frac{6a}{5x}$ b) $\frac{13a}{7b}-\frac{17a}{7b}-\frac{11a}{7b}+\frac{19a}{7b}$

c) $\frac{2a-3b}{5}+\frac{5a-6b}{5}-\frac{4b-3a}{5}-\frac{2b}{5}$

d) $\frac{7x-8y}{18}-\frac{12x-13y}{18}-\frac{14x+15y}{18}+\frac{21x-7y}{18}$

e) $\frac{7x+5y}{x}+\frac{3y-4x}{x}+\frac{2x+y}{x}-\frac{7y-3x}{x}$

5. a) $\frac{5x+2y}{x-y}+\frac{x-3y}{x-y}$ b) $\frac{7m-3n}{m+n}-\frac{5m-4n}{m+n}$

c) $\frac{3a+5b}{a+b}+\frac{a-4b}{a+b}-\frac{5a-7b}{a+b}+\frac{7a-2b}{a+b}$

d) $\frac{x^2+4xy+y^2}{x-y}-\frac{3xy-2x^2+4y^2}{x-y}-\frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$

6. a) $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$ b) $\frac{m}{2}-\frac{m}{3}$ c) $\frac{3a}{5}+\frac{4a}{7}$ d) $\frac{3p}{5}+\frac{4p}{9}-\frac{p}{2}$

e) $\frac{b}{8}+\frac{1}{11}$ f) $\frac{z}{6}-\frac{2}{3}$ g) $\frac{9}{10}-\frac{x}{2}$ h) $\frac{2}{7}+\frac{a}{2}-\frac{1}{14}$

7. a) $\frac{3a}{2}-\frac{4a}{5}$ b) $\frac{7x}{4}+\frac{5x}{6}$ c) $\frac{3x}{8}-\frac{x}{6}$ d) $\frac{x}{5}+2x$

e) $a-\frac{5a}{9}$ f) $\frac{4r}{3}+\frac{3r}{8}-\frac{7r}{12}$ g) $\frac{7a}{4}-\frac{4a}{5}-\frac{3a}{10}+a$

h) $\frac{4a}{15}+\frac{7b}{12}-\frac{3a}{10}-\frac{b}{6}$ i) $\frac{3a}{8}+\frac{5b}{6}-\frac{a}{4}+\frac{2b}{3}$

8. a) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$ b) $\frac{5}{z}-\frac{6}{w}$ c) $\frac{25}{a}-\frac{13}{b}$ d) $\frac{c}{g}-\frac{d}{h}$

e) $\frac{3a}{4c}+\frac{5b}{2d}$ f) $\frac{10x}{7p}-\frac{4y}{7q}$ g) $\frac{15m}{a}+\frac{3n}{5b}$ h) $\frac{12a}{7m}-\frac{11v}{8n}$

9. a) $\frac{3}{a}+\frac{5}{4a}$ b) $\frac{7}{3x}-\frac{4}{5x}$ c) $\frac{3}{2b}+\frac{4}{3b}-\frac{5}{4b}$ d) $\frac{2}{5y}-\frac{3}{4y}+1$

e) $\frac{a}{b}-\frac{c}{bd}$ f) $\frac{3a}{4c}+\frac{2c}{b}$ g) $\frac{a}{cd}+\frac{c}{ab}$ h) $\frac{p}{x}-\frac{r}{y}+\frac{q}{z}$

i) $\frac{5bc}{3a}+\frac{3ac}{4b}-\frac{7ab}{2c}$ k) $\frac{3y}{kz}+\frac{5x}{yz}-\frac{2z}{xy}$

10. a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ b) $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ c) $\frac{m}{u}+\frac{1}{v}-\frac{n}{w}$

d) $\frac{3m}{4x^2y}-\frac{5n}{3xy^2}$ e) $\frac{5}{a^2bc}-\frac{2}{ab^2c}+\frac{3}{abc^2}$ f) $\frac{8a}{pq}-\frac{6a}{pq^2}$

11. a) $\frac{2a+3b}{4a}-\frac{3a-7b}{5b}$ b) $\frac{11x-4y}{7x}-\frac{14x+3y}{11y}$

c) $\frac{6v+5w}{4v}+\frac{2w+3v}{3w}-1$ d) $2-\frac{a+5b}{3a}+\frac{3a+8b}{4b}$

12. a) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$ **b)** $\frac{3}{a-b}-\frac{2}{a+b}$ **c)** $\frac{7}{a+b}+\frac{3}{5a}$

d) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$ **e)** $\frac{a}{y+b}-\frac{b}{y-b}$ **f)** $\frac{3x}{a^2-b^2}-\frac{2x}{a+b}$

13. a) $\frac{1}{3}+1$ **b)** $\frac{3}{8}-5$ **c)** $\frac{3}{a}+3$ **d)** $\frac{x}{y}-1$ **e)** $\frac{p}{q}-a$

f) $\frac{x}{y}-z+\frac{y}{x}$ **g)** $\frac{p(p+q)}{p-q}-1$ **h)** $4+\frac{(a-b)^2}{ab}$

24. Multiplikation und Division von Brüchen

Eine Grube fördert jährlich a t Kohle. Wie groß ist die Förderung a) in 1, b) in 7, c) in x Monaten?

Drücke die Anzahl der Monate als Teile des Jahres aus! Rechne:

a) $\frac{1}{12}$ von a oder $a\cdot\frac{1}{12}=\frac{a}{12}$

b) $\frac{7}{12}$ von a, d.h. $a\cdot\frac{7}{12}$ oder $\frac{a}{12}\cdot 7$

$$\frac{a}{12}\cdot 7=\frac{a}{12}+\frac{a}{12}+\frac{a}{12}+\frac{a}{12}+\frac{a}{12}+\frac{a}{12}+\frac{a}{12}=\frac{a\cdot 7}{12}$$

c) $\frac{x}{12}$ von a, d.h. $a\cdot\frac{x}{12}$ oder $\frac{a}{12}\cdot x=\frac{a\cdot x}{12}$!

Der b-te Teil der geförderten Kohle wird an die Bergleute zum Eigenverbrauch abgegeben. Wie groß ist diese Menge in a) 1, b) 7, c) x Monaten?

Jetzt ist zu rechnen:

a) $\frac{a}{12}:b$ oder $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{12}$ $\qquad \frac{a}{12}:b=\frac{a:b}{12}=\frac{a}{12\cdot b}$

b) $\frac{a\cdot 7}{12}:b$ oder $\frac{a}{b}\cdot\frac{7}{12}$ $\qquad \frac{(a\cdot 7):b}{12}=\frac{a\cdot 7}{12\cdot b}$

c) $\frac{a\cdot x}{12}:b$ oder $\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{12}$ $\qquad \frac{(a\cdot x):b}{12}=\frac{a\cdot x}{12\cdot b}$.

Setze für a und b zunächst bestimmte Zahlen, z.B. $a = 60\,000$, $b = 10$, ein und rechne! Schreibe das Ergebnis in allgemeinen Zahlen! Stelle durch die Probe die Richtigkeit der Rechnung fest!

Stelle nach diesem Beispiel Formeln mit allgemeinen Zahlen für das Teilen durch Brüche auf!

Weil sich der Wert eines Quotienten nicht ändert, wenn Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert werden, entsteht aus

$a:\frac{b}{c}$ durch Erweitern mit c die Form $(a\cdot c):b=\frac{ac}{b}$,

aus $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ durch Erweitern mit d die Form $\left(\frac{a\cdot d}{b}\right):c=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

In entsprechender Weise lassen sich auch die übrigen Regeln der Bruchrechnung durch allgemeine Zahlen ausdrücken.

$$\boldsymbol{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}} \qquad \boldsymbol{a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}}$$

Beispiele: 1. $\frac{5a}{27b^4} \cdot 18ab^2 = \frac{5a \cdot 18ab^2}{27b^4} = \underline{\underline{\frac{10a^2}{3b^2}}}$

2. $\frac{14(a+b)}{5c} \cdot \frac{7c^2}{a^2-b^2} = \frac{14(a+b) \cdot 7c^2}{5c(a^2-b^2)} = \underline{\underline{\frac{98c}{5(a-b)}}}$

3. $\frac{18ab^3}{5c} : 6a^2b = \frac{18ab^3}{5c \cdot 6a^2b} = \underline{\underline{\frac{3b^2}{5ac}}}$

4. $\frac{9mn}{10(m-n)} : \frac{12n}{m-n} = \frac{9mn \cdot (m-n)}{10(m-n) \cdot 12n} = \underline{\underline{\frac{3m}{40}}}$

Aufgaben

1. a) $\frac{4}{9} \cdot 2$ **b)** $\frac{a}{12} \cdot 9$ **c)** $\frac{7}{u} \cdot 8$ **d)** $\frac{a}{m} \cdot m$ **e)** $\frac{4s}{t} \cdot 5$

f) $\frac{4}{a} \cdot 3b$ **g)** $\frac{11}{20m} \cdot 15$ **h)** $\frac{a^2}{b} \cdot a$ **i)** $\frac{8u}{3v} \cdot 5u^2$ **k)** $\frac{m+n}{z} \cdot 9v$

2. a) $\frac{a}{4b} \cdot 3b$ **b)** $\frac{3x}{8y} \cdot 12y$ **c)** $\frac{7ab}{15xy} \cdot 5xy$ **d)** $36ay \cdot \frac{5by}{24cx}$

e) $4xy \cdot \frac{3ab}{5xz}$ **f)** $\frac{13uv}{15a^2b} \cdot 5ab^2$ **g)** $\frac{7xy}{12a^2bc} \cdot 18abc^2$ **h)** $\frac{11ab}{15xy^2z} \cdot 25x^2yz$

3. a) $\frac{25xy}{24(x^2-y^2)} \cdot 32y(x+y)$ **b)** $\frac{3ab}{25(a^2-b^2)} \cdot 35a(a+b)$

c) $\left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{3z} - \frac{z}{4x}\right) \cdot 12xyz$ **d)** $\left(\frac{7x^3}{2y^3} + \frac{9x^2}{4y^2} - \frac{7x}{8y}\right) \cdot 4xy$

4. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{3a}{8} \cdot \frac{10}{21}$ **c)** $\frac{4x^2}{9y^2} \cdot \frac{3xy}{4z^2}$ **d)** $\frac{6m}{5b} \cdot \frac{2bc}{21a}$

e) $\frac{ac}{xy} \cdot \frac{x}{a}$ **f)** $\frac{3a}{4b} \cdot \frac{6x}{7y} \cdot \frac{11b}{9a}$ **g)** $\frac{ax}{by} \cdot \frac{bz}{ac} \cdot \frac{cy}{xz}$ **h)** $\frac{5cd}{18mn} \cdot \frac{24no}{35de} \cdot \frac{42ef}{11op}$

5. a) $\frac{a+b}{m+n} \cdot \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{c}{a+b} \cdot \frac{d}{a-b}$ **c)** $\frac{u+v}{u-v} \cdot \frac{u-v}{u+v}$ **d)** $\left(\frac{15a}{c} + \frac{6}{d}\right) \cdot \frac{9}{m}$

6. a) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ **b)** $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u}$ **c)** $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5a}{7b}$ **d)** $\left(\frac{1}{2a}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{3x}{5y}\right)^2$ **f)** $\frac{9a}{4b} \cdot \frac{10b}{3a}$

g) $\frac{5xy}{16ab} \cdot \frac{24a^2}{25xy^2}$ **h)** $\frac{7ax}{6by} \cdot \frac{3cy}{5dx}$ **i)** $\frac{5xy}{2ab} \cdot \frac{8a^2}{15y^2}$ **k)** $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$

7. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ **b)** $\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{w}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}-\frac{w}{z}\right)$

8. a) $\left(\frac{x}{y}+a\right)\left(a-\frac{x}{y}\right)$ **b)** $\left(\frac{3a}{4b}-\frac{7x}{9y}\right)\left(\frac{4b}{9a}+\frac{3y}{7x}\right)$ **c)** $\left(\frac{x}{y}+\frac{a}{b}\right)^2$

d) $\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)$

9. a) $\frac{6}{7}:3$ **b)** $\frac{14}{15}:10$ **c)** $\frac{a}{5}:a$ **d)** $\frac{bc}{d}:b$

e) $\frac{12a}{x}:4a$ **f)** $\frac{16xy}{3z}:8y$ **g)** $\frac{9a^2}{4b}:3a$ **h)** $\frac{162p^2q}{27x}:18pq$

10. a) $\frac{ab}{c}:ad$ **b)** $\frac{9a^2b}{2cd}:3ab$ **c)** $\frac{25rs^2}{9t^2}:15rs^2$

d) $\frac{15x^2y}{2z}:(-5xy)$ **e)** $\frac{7(a^2-b^2)}{2ab}:(a+b)$ **f)** $\frac{24x(x-y)}{5x+y}:16x(x^2-y^2)$

11. a) $\left(\frac{15a^2b}{4c}-\frac{12ab^2}{5c}+\frac{9a^2b^2}{3c}\right):3ab$ **b)** $\left(\frac{10x^2y^2}{3z}+\frac{8xy^2}{5z^2}\right):(-6x^2y)$

12. a) $\left(\frac{25m^2n}{6r}-\frac{30mn^2}{7s}\right):5mn$ **b)** $\left(\frac{117x^2y^2}{12ab}+\frac{91xy}{4c}\right):13xy$

c) $\left(5+\frac{18ad}{11u}-\frac{30a^2b^2}{7v}\right):(-6ab)$ **d)** $\left(\frac{x^2+12x+36}{x+3}+\frac{x+6}{y+3}\right):(x+6)$

13. a) $\frac{4}{5}:\frac{8}{15}$ **b)** $\frac{15}{17}:\frac{21}{34}$ **c)** $\frac{a}{b}:\frac{1}{b}$ **d)** $\frac{x}{y}:\frac{x}{y}$ **e)** $\frac{m+n}{pq}:\frac{m}{q}$

f) $\frac{x^2y^2}{u^2v^2}:\frac{xy}{uv}$ **g)** $\frac{9z^2}{10xz}:\frac{3z}{5x}$ **h)** $\frac{52u^2v^4}{15z^2}:\frac{39u^4v^2}{30z^4}$ **i)** $\frac{11m^2n}{16p^2q^2}:\frac{55mn^2}{72p^2q}$

14. a) $1:\frac{1}{a}$ **b)** $3:\frac{1}{x}$ **c)** $a:\frac{1}{a}$ **d)** $x:\frac{2}{x}$ **e)** $a:\frac{b}{a}$ **f)** $12x:\frac{8x}{3y}$

g) $25a^2:\frac{15a}{4b}$ **h)** $8x^2yz:\frac{6xy}{5z}$ **i)** $18rs^2:\frac{12r^2t}{5ms}$ **k)** $25u^2:\frac{10uv}{2w^2}$

15. a) $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}$ **b)** $\frac{a}{y}:\frac{b}{y}$ **c)** $\frac{5a}{b}:\frac{2a}{c}$ **d)** $\frac{5xy}{2ab}:\frac{7xz}{3bc}$ **e)** $\frac{8ax}{3by}:\frac{10bx}{9cy}$

f) $\frac{4x^2y}{9uv^2}:\frac{2xy^2}{3u^2v}$ **g)** $\frac{12abc}{5xyz}:\frac{8a^2b^2}{15yz}$ **h)** $\frac{42m^2n}{11ab}:\frac{28mn^2}{33b^2}$

16. a) $\left(\frac{a}{bc}+\frac{bc}{d^2}+\frac{2a}{bd}\right):\frac{a}{b}$ **b)** $\left(\frac{2ac}{3bd}-\frac{11}{45}-\frac{2b}{3a}\right):\frac{4a}{9b}$

c) $\left(\frac{3a^2}{2bx}-\frac{2ab}{5cx}-\frac{5by}{3ax}\right):\frac{a}{2bx}$ **d)** $\left(\frac{3xy}{2ab}-\frac{4x}{3a}-\frac{5y}{4b}\right):\frac{5by}{6ax}$

17. a) $\frac{4ab}{x+y}:\frac{6ax}{x+y}$ **b)** $\frac{a-b}{3x}:\frac{ab}{3x}$ **c)** $\frac{28(a^2-b^2)}{27(x+y)}:\frac{35(a+b)}{18(x^2-y^2)}$

18. a) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}:\frac{a+b}{a-b}$ **b)** $\frac{x+y}{x-y}:\frac{x^2y^2}{(x-y)^2}$ **c)** $\frac{5y+5z}{8y-8z}:\frac{20y+20z}{16y-16z}$

19. a) $\left(\frac{3a}{4b} + \frac{9a}{20b}\right) : \frac{3a}{4b}$ b) $\left(\frac{21p^2q}{25xy^2} - \frac{24pq^2}{35x^2y}\right) : \frac{3pq}{5xy}$

c) $\left(\frac{132x^4y^3z^2}{117a^2b^3c^4} + \frac{96x^2y^3z^4}{104a^4b^3c^2}\right) : \frac{12x^3y^2z^3}{13a^3b^3c^3}$

20. a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{bc}}$ c) $\frac{\frac{x^2}{y}}{\frac{x}{y^2}}$ d) $\frac{\frac{6x}{uv}}{\frac{8xv}{u}}$ e) $\frac{\frac{a}{x-y}}{\frac{a}{x+y}}$ f) $\frac{\frac{ab}{x-y}}{\frac{b^2}{x^2-y^2}}$

g) $\frac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}}$ h) $\frac{\frac{36}{x^2}}{\frac{24}{xy}}$ i) $\frac{\frac{w}{u} - \frac{v}{u}}{\frac{1}{u^2}}$ k) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ l) $\frac{a + \frac{1}{b}}{a - \frac{1}{b}}$ m) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

25. Gleichungen mit Brüchen

Rechne $\frac{5}{8} \cdot 8$; $\frac{7}{12} \cdot 12$; $\frac{3}{4} \cdot 4$; $\frac{5}{x} \cdot x$; $\frac{4}{5x} \cdot 5x$!

Man erkennt: Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man als Produkt den Zähler des Bruches.
Diese Erkenntnis benutzen wir, um das Lösen von Gleichungen mit Brüchen zu vereinfachen.
Bei diesen Gleichungen kommt es darauf an, die Brüche vor dem Ordnen zu beseitigen.
Es soll die Gleichung gelöst werden

$$\frac{x-13}{3} = \frac{x+7}{8}.$$

Mit welcher Zahl muß man die Gleichung multiplizieren, damit die linke Seite ganzzahlig wird; mit welcher Zahl, damit außerdem der Nenner auf der rechten Seite wegfällt?

> **In einer Gleichung werden als Summanden auftretende Brüche dadurch beseitigt, daß man die Gleichung mit dem Hauptnenner der Brüche multipliziert.**

Beispiele:

1. $$\frac{x-13}{3} = \frac{x+7}{8}$$

Der Hauptnenner ist 24.
Beseitigung der Nenner .... $8(x-13) = 3(x+7)$
Auflösen der Klammern .... $8x - 104 = 3x + 21$
Ordnen .... $8x - 3x = 21 + 104$
Zusammenfassen .... $5x = 125$
Teilen durch den Faktor von x .... $\underline{\underline{x = 25}}$
Mache die Probe!

2. $$\frac{16}{3(x+1)} = \frac{7}{9}$$

Der Hauptnenner ist $9(x + 1)$.

Beseitigung der Nenner .... $48 = 7(x + 1)$

Division durch 7 .... $\frac{48}{7} = x + 1$

Ordnen mit Vertauschung der Seiten .... $x = \frac{48}{7} - 1$

$$x = 6\frac{6}{7} - 1$$

$$x = 5\frac{6}{7}$$

Mache die Probe!

Aufgaben

1. a) $\frac{x}{7} = 2$ **b)** $\frac{3x}{4} = 6$ **c)** $\frac{5x}{2} = 7$ **d)** $\frac{x}{3} + x = 8$

e) $\frac{x}{5} - 3 = 1$ **f)** $\frac{x}{2} + 5 = x$ **g)** $\frac{x}{3} + \frac{x}{8} = 11$ **h)** $\frac{x}{4} - \frac{x}{9} = 10$

2. a) $\frac{4}{x} = 2$ **b)** $\frac{5}{x} = 4$ **c)** $\frac{12}{x} + 1 = 3$ **d)** $\frac{18}{x} - 3 = 5$

e) $\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = 1$ **f)** $\frac{8}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{11}{6}$ **g)** $\frac{10}{3x} + \frac{8}{5x} - \frac{7}{15} = 2$

3. a) $\frac{3x}{8} + \frac{2x}{5} = 3\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{5x}{6} - \frac{4x}{9} = 2\frac{1}{3}$

c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 3$ **d)** $\frac{5x}{4} + \frac{3}{2} - \frac{2x}{5} = x$

e) $\frac{8x}{15} - \frac{4x}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - \frac{5x}{12} - 76$

4. a) $\frac{6}{x} - \frac{9}{2x} + \frac{5}{3x} = \frac{7}{5x} + \frac{53}{60}$ **b)** $\frac{5}{x} - \frac{7}{3x} = \frac{25}{7x} - \frac{17}{21x} - \frac{2}{63}$

c) $\frac{x}{2} = \frac{x}{4} - \frac{x}{9} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18} - \frac{x}{3} + \frac{x}{12} = 8$

5. a) $\frac{2x-41}{9} + \frac{x-4}{5} = 9$ **b)** $\frac{6x+7}{7} - \frac{5x-3}{8} = 3$

c) $\frac{6x+3}{11} = 10 - \frac{3x-1}{2}$ **d)** $\frac{5-7x}{13} - 4x = \frac{66-5x}{9} + 5$

6. a) $\frac{x-8}{4} + \frac{5x-3}{6} = \frac{3x-5}{12}$ **b)** $\frac{x-7}{5} - \frac{x-2}{15} = \frac{x-8}{6} - \frac{x-29}{3}$

c) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-1}{8} = \frac{3x-2}{7} - 5$ **d)** $\frac{2x-4}{5} + \frac{x+4}{7} = \frac{2x-9}{7} + \frac{3x-11}{5}$

7. a) $\frac{15-3x}{4}-\frac{x-3}{6}=\frac{4x-7}{9}-\frac{3x-7}{12}$

b) $\frac{4(23-2x)}{5}-\frac{5(11x+1)}{9}=\frac{2(5x-2)}{9}-17$

c) $4+\frac{3(x-12)}{4}=\frac{2(x-9)}{3}-\frac{x-6}{6}+\frac{x+9}{5}$

d) $\frac{3(3x+5)}{5}-\frac{2(4x-7)}{15}=\frac{5x+19}{12}-\frac{5(6x-19)}{4}+3x$

8. a) $\frac{5x+7}{8x+4}=\frac{7}{10}$ b) $\frac{9x-4}{8x+7}=\frac{8}{5}$ c) $\frac{13x+3}{7x+1}=\frac{15}{8}$

d) $\frac{25-x}{x+3}=\frac{3}{4}$ e) $\frac{32x-27}{5x+3}=\frac{3}{2}$ f) $\frac{17x+2}{23x-8}=\frac{18}{19}$

9. a) $\frac{10}{3x-2}=\frac{6}{2x-3}$ b) $\frac{16}{3x-4}=\frac{22}{2x+3}$ c) $\frac{21}{3x-1}=\frac{14}{3x+1}$

d) $\frac{180}{x+4}=\frac{240}{3x-3}$ e) $\frac{150}{x-4}=\frac{225}{x+4}$ f) $\frac{224}{5x+2}=\frac{105}{3x-3}$

10. a) $\frac{x+5}{x+1}=\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{x-6}{2x-3}=\frac{x-2}{2x+9}$ c) $\frac{x+7}{2x+6}=\frac{2x+8}{4x+1}$

d) $\frac{3x-5}{7-4x}=\frac{6x-11}{15-8x}$ e) $\frac{6x-36}{2x-11}=\frac{3x-14}{x-4}$ f) $\frac{x-10}{x}=\frac{x-5}{x-4}$

11. a) $\frac{12x+3}{5x-3}=\frac{24x-9}{10x-11}$ b) $\frac{x+20}{46-x}=\frac{x+2}{20-x}$ c) $\frac{3(x-2)}{x+2}=\frac{6x-1}{2x+1}$

d) $\frac{7x+5}{x+5}+\frac{3x+2}{x-6}=10$ e) $\frac{4x-7}{2x-5}-\frac{3x-5}{3x+4}=1$ f) $\frac{x+3}{x+4}=\frac{2x+1}{2(x+1)}$

12. a) $\frac{x}{a}=b$ b) $\frac{a}{x}=b$ c) $\frac{x}{a}-b=c$ d) $a-\frac{x}{b}=c$

e) $\frac{a}{x}-b=c$ f) $a-\frac{b}{x}=c$ g) $a-\frac{2a}{x}=b$ h) $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=c$

13. a) $\frac{4a}{3a-x}=5$ b) $\frac{8b}{2x-b}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{3c-x}{x+5c}=\frac{5}{2}$

d) $\frac{x}{p}-\frac{x}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ e) $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=m+n$ f) $\frac{x}{r}-r=\frac{x}{s}-s$

g) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ h) $\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}=0$ i) $\frac{5(x-a)}{x+a}=1$

14. Um welchen gleichen Betrag muß man Zähler und Nenner von $\frac{3}{5}$ vermehren, damit der Bruch den Wert $\frac{3}{4}$ annimmt?

15. Ein Bruch mit dem Wert $\frac{4}{5}$ geht dadurch in seinen Kehrwert über, daß man den Zähler um 18 vermehrt. Wie heißt er?

26. Anwendungen der Gleichungen mit Brüchen

Beispiel: Wieviel Minuten nach 2 Uhr stehen die Zeiger einer Uhr genau übereinander?

1. Vorläufige Antwort: Die Zeiger stehen x Minuten nach 2 Uhr übereinander.

2. Aufstellen der Gleichung: Um 2 Uhr bilden die beiden Zeiger der Uhr einen Winkel von 60°. Der große Zeiger überstreicht in einer Minute 6°, der kleine Zeiger in einer Minute $\frac{1}{2}°$. x Minuten nach 2 Uhr steht der große Zeiger um $6° \cdot x$ von der 12 entfernt, der kleine Zeiger aber um $60° + \frac{1}{2}° \cdot x$. Da sich die Zeiger in diesem Augenblick decken sollen, müssen beide Winkel gleich sein, also gilt $6 \cdot x = 60 + \frac{1}{2} \cdot x$.

3. Lösen der Gleichung:
$$5\tfrac{1}{2} \cdot x = 60$$
$$x = \frac{60 \cdot 2}{11}$$
$$x = 10\tfrac{10}{11}$$

4. Endgültige Antwort: Die Zeiger stehen $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr übereinander.

5. Probe: $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr steht der große Zeiger um $6° \cdot 10\frac{10}{11} = 65\frac{5}{11}°$ von 12 entfernt, der kleine Zeiger um $60° + \frac{1}{2}° \cdot 10\frac{10}{11} = 65\frac{5}{11}°$; also decken die Zeiger einander.

Aufgaben

1. Wieviel Minuten nach **a)** 1, **b)** 3, **c)** 5, **d)** 8, **e)** 10 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr zum erstenmal übereinander?

2. Wieviel Minuten nach **a)** 12, **b)** 3, **c)** 8, **d)** 6, **e)** 11 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr zum erstenmal einen gestreckten Winkel?

3. Wieviel Minuten nach **a)** 2, **b)** 4, **c)** 7, **d)** 8, **e)** 10 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr zum erstenmal einen rechten Winkel?

4. Zwei Radfahrer fuhren sich von Berlin und Leipzig aus entgegen. Wann trafen sie sich, wenn der erste 14 und der andere $18\frac{2}{3}$ Std. Fahrzeit für die ganze Strecke nötig hatte und beide um 5.00 Uhr abfuhren?

5. Ein Kraftpostwagen, der auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 53 km/h fährt, wird von einem Personenkraftwagen, der 30 Min. später abgefahren war und eine Geschwindigkeit von 78 km/h hat, überholt. In welcher Entfernung vom Abfahrtsort tritt dies ein?

6. Ein Lastkraftwagen wird 1 Std. und 25 Min. nach seinem Aufbruch von einem Personenkraftwagen eingeholt, der 30 Min. später vom gleichen Ort abfuhr. Die Geschwindigkeit des Personenkraftwagens ist 18 km/h größer als die des Lastkraftwagens.

a) Welche Geschwindigkeiten haben beide Wagen?

b) Welche Wegstrecke durchfuhren sie?

7. Ein Schwimmbecken wird durch zwei Pumpen gefüllt. Die eine Pumpe füllt das Becken allein in 8 Stunden, die andere in 12 Stunden. In wieviel Stunden ist das leere Becken gefüllt, wenn beide Pumpen gleichzeitig wirken?

8. Zum Füllen eines Wasserbehälters dienen 3 Röhren. Die eine Röhre füllt den Behälter allein in 45, die zweite in 36 und die dritte in 60 Minuten. In wieviel Minuten füllen die 3 Röhren gemeinsam den Behälter?

9. Die Felder eines volkseigenen Gutes werden mit Hilfe eines 20-PS-Schleppers in 18 Tagen gepflügt. Der neu angeschaffte Traktor von 30 PS würde es in 12 Tagen schaffen. In wieviel Tagen wird das Umpflügen der Felder unter Einsatz beider Traktoren bewältigt?

10. Der beste Mäher eines volkseigenen Gutes mäht eine Wiese in 12 Stunden, ein anderer würde dazu 15 Stunden nötig haben. In wieviel Stunden würden beide gemeinsam die Arbeit schaffen?

27. Gleichungen aus der Prozentrechnung

Wir haben früher Aufgaben aus der Prozentrechnung mit Hilfe des Dreisatzes gelöst. Sie lassen sich auch in Gleichungen darstellen.

Beispiel: Ihrem Investitionsplan gemäß bezieht eine Schraubenfabrik eine Werkzeugmaschine zum Einstandspreis von 2 650,– DM. Dieser Preis setzt sich zusammen aus dem reinen Einkaufspreis zuzüglich 6% Bezugsspesen (Fracht und Rollgeld). Wie hoch ist der Einkaufspreis?

Vorläufige Antwort: Der Einkaufspreis beträgt x DM.

Bilden der Gleichung: Die Bezugsspesen werden vom Einkaufspreis als dem Grundwert berechnet. 1 % des Einkaufspreises beträgt $\frac{x}{100}$ DM, 6 % betragen dann $\frac{6x}{100}$ DM. Als Ausdruck für den Einstandspreis ergibt sich x DM $+ \frac{6x}{100}$ DM, das sind nach den Angaben der Aufgabe 2 650 DM. Die Gleichung lautet also

$$x + \frac{6x}{100} = 2\,650.$$

Löse die Gleichung und mache die Probe!

Aufgaben

1. Gemäß ihrem Investitionsplan bezieht eine Spinnerei einen Webstuhl zum Einstandspreis von 4 815,— DM. Die Bezugskosten belaufen sich auf 7%. Wie groß ist der Einkaufspreis?

2. Der Selbstkostenpreis einer Sendung Lebensmittel beträgt 1 176,— DM. In diesem Preis ist ein Verwaltungskostenanteil von 12% des Einstandspreises enthalten. (Der Einstandspreis ist der Grundwert.)

a) Wie groß ist der Einstandspreis?

b) Wie groß ist der Einkaufspreis für diese Sendung, wenn mit 5% Bezugsspesen zu rechnen ist?

c) Berechne durch eine einzige Gleichung aus dem Selbstkostenpreis den Einkaufspreis!

3. In einem Tagebau förderte man am dritten Tage eines Monats 4 620 t Rohkohle. Das waren 7% mehr als am Vortage. Wie groß war die Förderung des Vortages? Wie groß war die Förderung des ersten Tages dieses Monats, wenn die Förderung des zweiten Tages 9% über dem ersten lag? Versuche, in einer einzigen Gleichung die Förderung des ersten Tages mit der des dritten in Verbindung zu bringen!

4. Beim Verkauf einer Ware im Einzelhandel müssen 2% Umsatzsteuer einkalkuliert werden[1]), die von dem Bruttoverkaufspreis zu berechnen sind. Das ist der Betrag, den der Käufer tatsächlich zu zahlen hat. Wenn man von diesem Betrag die Umsatzsteuer absetzt, kommt man zum Nettoverkaufspreis.

Ein Wohnzimmer soll zu einem Nettoverkaufspreis von 840,— DM verkauft werden.

a) Wie groß ist der Bruttoverkaufspreis?

b) Wie groß ist der Einstandspreis, wenn die Handelsspanne 14% des Einstandspreises beträgt?

c) Wie groß ist der Einkaufspreis, wenn 4% Bezugsspesen entstehen?

5. Zwei Posten Ware haben zusammen einen Einkaufspreis von 322,— DM; der erste Posten ist um 30% teurer als der zweite. Wieviel DM kostet jeder Posten?

6. Eine Handelszentrale gibt an 4 aufeinanderfolgenden Tagen 50%, 25%, $12\frac{1}{2}$% und $6\frac{1}{4}$% des ursprünglichen Vorrates an Taschenlampenbatterien ab und behält noch einen Rest von 1 500 Batterien. Berechne den Vorrat und die Zahl der an den einzelnen Tagen verkauften Batterien!

---

1) Die Umsatzsteuer beträgt 3%, davon dürfen aber nur 2% kalkuliert werden.

7. Die Neustädter Konsumgenossenschaft erwirbt 2 Lieferwagen für zusammen 9 660,– DM. Der erste ist um 16% billiger als der zweite. Wieviel DM kostet jeder Wagen?

8. Zwei Arbeitskollektive einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8 200 Transformatorspulen. Bei der Kontrolle der Erzeugnisse müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden. Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wieviel Spulen wurden von jedem Kollektiv hergestellt?

9. Die Schraubenfabrik Luckau VEB hat für die Neustädter Metallwerke Sechskantschrauben und Rundkopfschrauben herzustellen und benötigt hierzu 2 706 kg Stangen-Messing. Beim Drehen der Schrauben wird nicht das gesamte Material ausgenutzt, weil Späne abfallen, und zwar bei den Sechskantschrauben 30%, bei den Rundkopfschrauben 20%. Die Masse aller Späne beträgt 712,8 kg. Welche Masse hatte **a)** das Sechskantstab-Messing für das Drehen der Sechskantschrauben, **b)** das Rundmessing für das Drehen der Rundkopfschrauben?

10. Die Büromaschinenfabrik Freiental VEB steigerte in diesem Jahr ihre Leistungen um 40% und stellte 7 420 Büromaschinen her. Wie groß war die Produktion im vergangenen Jahr?

11. Die Konsumgenossenschaft Tanndorf bezog Obstkonserven im Rechnungsbetrag von 280,— DM und Gemüsekonserven im Rechnungsbetrag von 345,— DM. Da verschiedene Dosen unbrauchbar waren, machte die Konsumgenossenschaft einen Abzug geltend und zahlte nur 604,20 DM. Wieviel Prozent betrug der Abzug von jedem Posten, wenn er vom zweiten $1\frac{1}{2}$% höher war als vom ersten?

12. Die Produktion einer Strumpffabrik stieg im zweiten Vierteljahr gegenüber dem ersten um 46,7% und betrug dann 108 232 Paar. Wie groß war sie im ersten Vierteljahr?

VIII. Proportionen

28. Der Verhältnisbegriff

Ein Fußgänger legt durchschnittlich 5 km, ein Radfahrer 12 km in der Stunde zurück. Man kann die beiden Geschwindigkeiten miteinander vergleichen, indem man z. B. feststellt, daß der Radfahrer in 1 Std. 7 km mehr zurücklegt als der Fußgänger. Die beiden Geschwindigkeiten können auch dadurch miteinander verglichen werden, daß man ihr **Verhältnis** angibt.

Man sagt dann: Die Geschwindigkeiten des Fußgängers und des Radfahrers verhalten sich wie 5 : 12.
Das Verhältnis der Geschwindigkeiten eines Radfahrers und eines Motorradfahrers ist 12 : 57. Was bedeutet das? Das Verhältnis 12 : 57 kann auch dargestellt werden durch 4 : 19. Gib an, welche Überlegung zu dieser Umformung des ursprünglichen Verhältnisses 12 : 57 geführt hat!

Erklärungen:

Jedes Verhältnis besteht aus **zwei Gliedern.** Man nennt sie erstes und zweites Glied oder Vorder- und Hinterglied.
Das Verhältnis zweier Zahlen läßt sich als Bruch darstellen, dessen Wert den Wert des Verhältnisses angibt. Zähler und Nenner des Bruches heißen in diesem Fall Glieder des Verhältnisses.

Der Wert eines Verhältnisses bleibt unverändert, wenn man seine Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiele: 1. $3 : 4 = 9 : 12$
2. $20 : 15 = 4 : 3$

Aufgaben

Welche Werte haben folgende Verhältnisse:

1. **a)** 12 : 18 **b)** 15 : 20 **c)** 27 : 36 **d)** 4 : 28
e) 39 : 52 **f)** 132 : 156 **g)** 225 : 300 **h)** 42 : 168
i) 77 : 99 **k)** 45 : 75 **l)** 36 : 180 **m)** 45 : 81

2. **a)** $4a : 7a$ **b)** $6x : 18x$ **c)** $8c : 16c$
d) $25a : 75a$ **e)** $12xy : 48xy$ **f)** $14e : 49e$
g) $16e : 28f$ **h)** 0,5 : 2,5 **i)** 3,5 : 2,8
k) $14{,}4a : 4{,}8b$ **l)** $6{,}5x : 1{,}3y$ **m)** $7{,}2xy : 3{,}2x^2y$

3. **a)** 32 m : 48 m **b)** 18 DM : 81 DM **c)** 39 km : 91 km
d) 135 kg : 45 kg **e)** 26 DM : 39 DM **f)** 66 m : 22 m
g) 96 hl : 168 hl **h)** 35 DM : 21 DM **i)** 25 kg : 325 kg?

4. Bilde ein Verhältnis aus den Größen:
a) 6 m und 12 cm **b)** 48 Pf und 2,40 DM **c)** 32 Tg. und 24 Std.
d) 95 a und 5 ha **e)** 17 cm und 5 m **f)** 9 Dtzd. und 11 Stck.!

5. Drücke folgende Verhältnisse durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:
a) 36 : 27 **b)** 39 : 26 **c)** 48 : 36
d) 77 : 55 **e)** 81 : 36 **f)** 169 : 91
g) 216 : 132 **h)** 72 : 45 **i)** 108 : 144!

6. Erweitere folgende Verhältnisse mit 2 (4; 12; 15):

a) $6 : 7$ **b)** $6 : 37$ **c)** $19 : 14$
d) $121 : 15$ **e)** $8 : 15$ **f)** $46 : 3$
g) $9 : 11$ **h)** $125 : 126$ **i)** $37 : 121$!

7. Drücke folgende Verhältnisse in kleinsten ganzen Zahlen aus:

a) $\frac{5}{12} : \frac{7}{12}$ **b)** $\frac{4}{11} : \frac{10}{11}$ **c)** $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$
e) $\frac{5}{8} : \frac{5}{12}$ **f)** $\frac{5}{6} : \frac{4}{9}$ **g)** $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ **h)** $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$
i) $2\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$ **k)** $\frac{3}{4} : 4\frac{1}{2}$ **l)** $3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{8}$ **m)** $3{,}2 : 4{,}8$!

29. Proportionen

Welchen Wert haben die Verhältnisse $3 : 6$ und $4 : 8$? Zwei Verhältnisse, die denselben Wert haben, kann man einander gleichsetzen, z. B. $3 : 6 = 4 : 8$. In allgemeinen Zahlen:

$$a : b = c : d.$$

Man kann die Gleichung $2 : 5 = 6 : x$ als Quotientengleichung (Bruchgleichung) $\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$ schreiben. Aus der Produktengleichung

$$2 \cdot x = 5 \cdot 6$$

folgt

$$x = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$x = 15.$$

Erklärung:

Setzt man zwei Verhältnisse, die denselben Wert haben, einander gleich, so entsteht eine **Verhältnisgleichung (Proportion)** aus vier Gliedern. Anstatt mehr als zwei Verhältnisse mit demselben Wert durch Gleichheitszeichen miteinander zu verbinden, z. B. $4 : 5 = 8 : 10 = 12 : 15$, pflegt man die Form $4 : 8 : 12 = 5 : 10 : 15$ zu schreiben. Eine solche Gleichung nennt man eine **fortlaufende Proportion.** Sind die Innen- oder Außenglieder einer Proportion einander gleich (z. B. $4 : 8 = 8 : 16$), so bezeichnet man die gleichen Innen- oder Außenglieder als **mittlere Proportionale** der beiden anderen Glieder.

In jeder Proportion aus vier Gliedern ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Aufgaben

1. Bilde durch Vertauschen von Gliedern neue Proportionen aus:

a) $4 : 8 = 2 : 4$ **b)** $12 : 16 = 6 : 8$ **c)** $5 : 15 = 20 : 60$
d) $1 : 3 = 9 : 27$ **e)** $5 : 25 = 10 : 50$ **f)** $6a : 9b = 18a : 27b$
g) $a : b = c : d$ **h)** $5a : 3b = 60 : 4d$ **i)** $ab : c = e : fg$!

2. a) Wieviel viergliedrige Proportionen lassen sich aus der fortlaufenden Proportion $1:2:3 = 7:14:21$ bilden?

b) Bilde selbst sechs-, acht- und zehngliedrige fortlaufende Proportionen! Man erhält die Glieder der rechten Seite, indem man alle Glieder der linken Seite mit demselben Faktor multipliziert.

c) Bilde fortlaufende Proportionen aus den folgenden gleichen Verhältnissen:

$$5:7;\quad 15:21;\quad 20:28;\qquad \frac{10}{15};\ \frac{14}{21};\ \frac{24}{36};\ \frac{32}{48}!$$

3. Schreibe als Bruchgleichung:

a) $15:45 = 20:60$ **b)** $6:9 = 18:27$ **c)** $5a:3b = 6a:7c$
d) $6{,}4:a = 3{,}2:b$ **e)** $25x:3y = 7x:z$ **f)** $xy:z = 5a:b$!

4. Bilde die Produktengleichung für:

a) $2:3 = 8:12$ **b)** $4:7 = 16:28$ **c)** $9:11 = 45:55$
d) $12:16 = 15:20$ **e)** $21:14 = 36:24$ **f)** $125:50 = 25:10$
g) $14a:12b = 28a:24b$ **h)** $\frac{1}{2}:\frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}:1$
i) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4} = 1\frac{2}{3}:1\frac{1}{2}$ **k)** $0{,}15:0{,}05 = 0{,}45:0{,}15$
l) $7a:35e = 28a:140e$ **m)** $11f:3e = f:a$!

5. Bestimme die Unbekannte aus:

a) $3:x = 6:12$ **b)** $8:x = 16:48$ **c)** $x:10 = 12:24$
d) $x:9 = 11:33$ **e)** $x:14 = 50:70$ **f)** $3:4 = 18:x$
g) $26:32 = 52:x$ **h)** $9:17 = x:51$ **i)** $5:6 = x:144$
k) $46:61 = x:305$ **l)** $28:19 = 140:x$ **m)** $x:18 = 54:108$

6. a) $3:8 = x:24$ **b)** $5:9 = 25:x$ **c)** $1{,}5:7{,}5 = x:30$
d) $x:7 = 4:14$ **e)** $x:10{,}5 = 7:21$ **f)** $0{,}3:x = 1{,}8:9$
g) $2{,}7:x = 8{,}1:24{,}3$ **h)** $a:b = x:c$
i) $x:a = b:c$ **k)** $m:n = o:x$
l) $p:x = g:r$ **m)** $x:f = s:t$!

7. Suche zu drei aufeinanderfolgenden Gliedern einer Verhältnisgleichung das vierte Glied (die 4. Proportionale):

a) 10, 12 und 6 **b)** 8, 12 und 32 **c)** 25, 30 und 50
d) 7, 14 „ 70 **e)** 21, 63 „ 42 **f)** 100, 50 „ 250
g) 28, 35 „ 70 **h)** 81, 45 „ 162 **i)** 49, 84 „ 70
k) 144, 60 „ 252 **l)** 180, 324 „ 120 **m)** 9,6, 13,2 und 13,6

8. a) $8 : 4 = (x + 16) : x$ **b)** $x : (105 - x) = 16 : 24$
c) $x : (x + 2) = 3 : 5$ **d)** $(x + 4) : x = 51 : 34$
e) $x : (x + 3) = 28 : 35$ **f)** $(x - 3) : x = 4 : 7$
g) $4 : 3 = (63 - x) : x$ **h)** $49 : 35 = x : (x - 12)$
i) $8 : 5 = (27 + x) : x$ **k)** $51 : 34 = x : (25 - x)$
l) $25 : 15 = (56 - 3x) : x$ **m)** $68 : 51 = (20 + 2x) : 4x$
n) $63 : 45 = (31 - 2x) : 3x$ **o)** $24 : 8 = (88 + 4x) : 5x$
p) $25 : 15 = (62 - 7x) : 2x$ **q)** $36 : 12 = (120 + 11x) : 7x$
r) $63 : (44 - x) = 91 : x$ **s)** $38 : x = 16 : (x - 33)$!

30. Anwendungen

Aus 8 dz Leinsamen gewinnt man 95,2 l reines Öl. Wieviel l Öl gewinnt man aus 5 dz? Früher haben wir solche Aufgaben durch einen Dreisatz gelöst, jetzt wollen wir sie durch Aufstellen einer Verhältnisgleichung lösen. Die gewonnenen Mengen Öl stehen in demselben Verhältnis wie die Mengen des Leinsamens.
Wenn man die unbekannte Menge Öl mit x bezeichnet, so kann man folgende Verhältnisgleichung aufstellen:

$$8 : 5 = 95{,}2 : x \quad \text{oder in Bruchform:} \quad \frac{8}{5} = \frac{95{,}2}{x}.$$

Vergleiche die Brüche mit den Zahlen des Ansatzes! Was ergibt sich also?
8 Schüler graben ein Beet des Schulgartens in $2\frac{1}{2}$ Std. um. In wieviel Std. haben 5 Schüler die Arbeit geschafft? Die Arbeitszeiten stehen im umgekehrten Verhältnis zu den Schülerzahlen, also $8 : 5 = x : 2\frac{1}{2}$ oder in Bruchform $\frac{8}{5} = \frac{x}{2\frac{1}{2}}$.
Der Ansatz der Aufgabe heißt:

8 Schüler graben $2\frac{1}{2}$ Std.
5 „ „ x „

Daraus folgt die Verhältnisgleichung

$$\frac{8}{5} = \frac{x}{2\frac{1}{2}}.$$

Aufgaben

1. In einer Maschinenfabrik steht eine Arbeitsgruppe im Leistungslohn. Sie erhält für die Anfertigung von 72 gleichartigen Maschinenteilen 330,40 DM Lohn. Wie hoch ist der Lohn für die Anfertigung von **a)** 96, **b)** 45, **c)** 26 Maschinenteilen?

2. Ein Gießereifacharbeiter erhält für den Guß von 1800 kg 48,— DM Lohn. Wie hoch ist der Lohn für den Guß von 2250 kg ?

3. Ein volkseigenes Gut erntet auf 18 ha 318 dz Roggen. Wieviel erntet es bei gleichen Ertragsbedingungen auf 7 ha ?

4. Für jeden in der Kaolin-Industrie Beschäftigten betrug im Jahre 1946 die durchschnittliche Leistung 3,9 t, 1949 4,5 t. Wieviel t konnte 1949 ein Werk erzeugen, das im Jahre 1946 730 t erzeugte und seine Beschäftigtenzahl nicht geändert hatte ?

5. Jede Arbeiterin einer Strumpffabrik stellte in einem Vierteljahr durchschnittlich 522 Paar Strümpfe her. Durch technische Verbesserungen und durch die Einführung des Leistungslohnes stieg die Leistung im vergleichbaren Zeitraum des nächsten Jahres auf 912 Paar. Wie groß ist gegenwärtig der Wert der Produktion einer Mitarbeiterin, wenn er vor der Leistungssteigerung 901,— DM betrug ?

6. Ein Dachpappenwerk steigerte seine Erzeugung je Arbeiter von 1362 m² monatlich im nächsten Jahr auf 1788 m². Wie groß war die durchschnittliche Lohnsteigerung, wenn nur Leistungslohn gezahlt wurde, der im ersten halben Monat 178,— DM je Arbeiter betrug ?

7. 6 Arbeiter erhielten (bei gleichem Stundenlohn und gleicher Arbeitszeit) zusammen wöchentlich 345,60 DM Lohn.
a) Wieviel DM waren an 11 Arbeiter zu zahlen ?
b) Wie groß war der Stundenlohn, wenn die wöchentliche Arbeitszeit 48 Stunden betrug ?

8. Aus 12 kg Hanf kann ein Seil von 316,8 m Länge hergestellt werden. Wieviel m Seil von gleicher Stärke erhält man aus 35 kg Hanf ?

9. Die Hallische Sole ist 21,6%ig. Wieviel kg Salz gewinnt man aus 4250 (7800; 12500) kg dieser Sole ?

10. Für die Herstellung von 1760 Konservendosen benötigt man 126,3 m² Weißblech. Wieviel Blech ist zur Anfertigung von 9624 Dosen nötig ?

11. Das Bruttogewicht einer Warensendung beträgt 180 kg, das Nettogewicht 174,6 kg. Wieviel % beträgt die Tara ?

12. Eine Radfahrerin legt eine Wegstrecke in 3 Std. zurück. Wie lange braucht ein Kraftfahrer für die gleiche Strecke, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 1 : 4 verhalten ?

13. Ein D-Zug erreicht bei einer Geschwindigkeit von 64 km/h sein Ziel in $4\frac{1}{2}$ Std. Wie lange braucht ein Personenzug zu derselben Strecke, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 3 : 5 verhalten ?

14. Mit seinem Auto erreicht A. ein 300 km entferntes Ziel am Tage in 6 Std. Die Geschwindigkeit bei der Rückfahrt während der Nacht verhält sich zur Geschwindigkeit bei der Hinfahrt wie 4 : 5. Wie lange dauert die Rückfahrt?

15. Für einen Straßenbau werden die Kosten in Höhe von 178 360 DM von zwei Gemeinden mit 2 450 und 3 920 Einwohnern im Verhältnis ihrer Einwohnerzahlen aufgebracht.

16. Ein Fußgänger und ein Radfahrer verlassen zu gleicher Zeit Neustadt. Ihre Geschwindigkeiten verhalten sich wie 1 : 3. Der Fußgänger legt stündlich 4,5 km zurück. Wie groß ist der Vorsprung des Radfahrers nach $3\frac{1}{2}$ Std.?

17. Durch einen 2 m langen Hebebaum soll ein Sandsteinquader, der 250 kp wiegt, gehoben werden. Der Lastarm sei 20 cm lang. Wieviel kp Kraft sind erforderlich, wenn der Hebebaum **a)** als zweiseitiger, **b)** als einseitiger Hebel gebraucht wird und die Kraft jedesmal am Ende wirkt?

18. Der Hebel eines Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kp befestigt. Welche Kraft drückt auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

19. Zwei Personen tragen an einer Stange einen Korb mit einem Gewicht von 100 kp so, daß der Abstand des Korbes von dem Stärkeren $\frac{2}{5}$ der ganzen Stangenlänge beträgt. Wieviel kp hat jeder zu tragen, wenn das Gewicht der Stange unberücksichtigt bleibt?

20. Auf einer Wippe sitzt 2 m vom Drehpunkt entfernt ein Junge, dessen Gewicht 48 kp beträgt. Auf der anderen Seite, 2,40 m vom Drehpunkt entfernt, sitzt seine Schwester. Wieviel wiegt sie, wenn die Wippe im Gleichgewicht ist?

21. Zwei Jungen, von denen der eine 52 kp, der andere 39 kp wiegt, legen ein Brett über einen Balken, um es als Wippe zu benutzen. Der schwerere Junge sitzt 1,50 m vom Balken entfernt. In welche Entfernung vom Balken muß sich der andere Junge setzen, wenn die Wippe im Gleichgewicht sein soll?

22. Welche Kraft ist aufzuwenden, und auf welchem Weg wirkt sie, wenn 120 kp 1 m hoch gehoben werden? Es werden angewandt **a)** ein gleicharmiger Hebel, **b)** ein ungleicharmiger Hebel, dessen Kraftarm dreimal so lang wie der Lastarm ist, **c)** ein einseitiger Hebel, dessen Kraftarm sechsmal so lang wie der Lastarm ist, **d)** eine feste Rolle, **e)** eine lose Rolle.

IX. Funktion und graphische Darstellung

31. Bildliche Darstellung von Beobachtungsreihen

Die Körperlänge eines Kindes wurde an jedem Geburtstag gemessen. Aus den Werten der einzelnen Jahre ergab sich die folgende Zusammenstellung:

Lebensalter in Jahren:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Länge in cm:	75	85	93	97	103	111	121	125	128	130	135	140

Stelle die Längen durch Strecken in $\frac{1}{20}$ der natürlichen Größe dar! Zeichne diese Strecken in gleichen Abständen als Senkrechte auf einer waagerechten Geraden nebeneinander und schreibe unter jede Strecke das zugehörige Lebensalter! Vergleiche Zeichnung und Tafel nach der Übersichtlichkeit! In welchen Punkten der waagerechten Geraden muß man sich die senkrechten Strecken gezeichnet denken, um die Länge des Kindes auch für zwischen den Geburtstagen liegende Tage anzugeben?

Zeichne die Linie, die die Endpunkte aller dieser Senkrechten verbinden würde! Lies an der so gewonnenen „Schaulinie" die Größe des Kindes ab für das Alter von $1\frac{1}{2}$ Jahren, $7\frac{1}{2}$ Jahren, $5\frac{1}{2}$ Jahren!

Zeitlich veränderliche Vorgänge können durch eine Schaulinie dargestellt werden. Zu diesem Zweck gibt man auf einer waagerechten Geraden den Zeitpunkt der Beobachtung an und zeichnet in diesem Punkt eine zur waagerechten Geraden senkrechte Strecke, deren Länge der beobachteten Größe entspricht (Abb. 12). Die Verbindungslinie der Endpunkte aller dieser Strecken liefert ein Schaubild der Beobachtungsreihe.

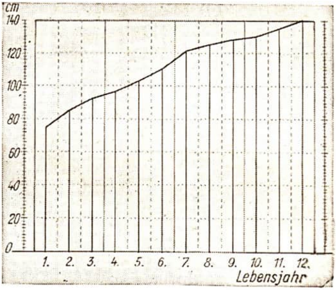


Abb. 12

Aufgaben

1. An einem Novembertag wurde die Lufttemperatur alle zwei Stunden am Thermometer abgelesen und folgende Tafel aufgestellt:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatur	6,2°	4,4°	4,0°	5,8°	8,0°	10.4°	11,8°	12,8°	11,4°	9,6°	8,4°	7,8°	7,0°

a) Zeichne auf Millimeterpapier von einem Punkt aus eine waagerechte Gerade als Zeitachse und eine senkrechte als Temperaturachse (1 cm $\triangleq$ 2 Std., 1 cm $\triangleq$ 2 °)! Bestimme die Endpunkte der Temperaturstrecken, die zu den angegebenen Zeiten gehören, ohne die Strecken selbst zu ziehen! Verbinde die aufeinanderfolgenden Endpunkte geradlinig miteinander!

b) Lege in einer zweiten Zeichnung durch die Endpunkte freihändig eine krumme Linie (Temperaturkurve)[1])! Warum gibt diese Kurve den wirklichen Temperaturverlauf besser wieder als der Streckenzug?

c) Lies an der Temperaturkurve die Temperaturen um 1, 3, 5 ...; 0.30, 1.30, 2.30 ... Uhr ab! Wann zeigte das Thermometer an diesem Tage 8°, 10°, 12°?

2. An einem Orte betrugen die Niederschläge eines Jahres: im Januar 43,6 mm; im Februar 39,7 mm; im März 54,2 mm; im April 41,1 mm; im Mai 60,9 mm; im Juni 37 mm, im Juli 54,4 mm; im August 21,2 mm; im September 31,9 mm; im Oktober 62,5 mm; im November 52,9 mm; im Dezember 9,3 mm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche monatliche Niederschlagsmenge?

b) Gib den Unterschied zwischen der größten und geringsten Niederschlagsmenge, die Schwankungsbreite, in % der durchschnittlichen monatlichen Niederschlagsmenge an!

c) Berechne die durchschnittliche monatliche Abweichung vom Monatsmittel in % des Monatsmittels!

d) Zeichne die Niederschlagskurve!

3. Die folgende Tafel gibt Aufschluß über die Zahl der Gewittertage in einer Stadt Norddeutschlands während der Jahre 1887 bis 1919.

Jahre	Gewittertage	Jahre	Gewittertage	Jahre	Gewittertage
1887	12	1898	13	1909	19
1888	14	1899	19	1910	28
1889	19	1900	15	1911	13
1890	26	1901	19	1912	22
1891	27	1902	15	1913	15
1892	18	1903	13	1914	18
1893	18	1904	17	1915	17
1894	21	1905	18	1916	9
1895	33	1906	12	1917	13
1896	23	1907	17	1918	20
1897	13	1908	37	1919	7

a) Wieviel Gewittertage kommen im Durchschnitt auf ein Jahr?

b) Zeichne die Kurve der Gewittertage!

---

[1]) linea curva (lat.) : die gekrümmte Linie.

c) Gib die Schwankungsbreite in % des nach Aufgabe a) errechneten Jahresdurchschnitts an!

d) Berechne die durchschnittliche jährliche Abweichung vom nach Aufgabe a) ermittelten Durchschnitt in % dieses Durchschnitts!

4. Aus Abb. 13 ist die durchschnittliche monatliche Temperatur für Dresden abzulesen.

a) Wie groß ist die Schwankungsbreite der Temperaturkurve?

b) Berechne die durchschnittliche Jahrestemperatur und die Abweichungen der Monatstemperatur in % der durchschnittlichen Jahrestemperatur!

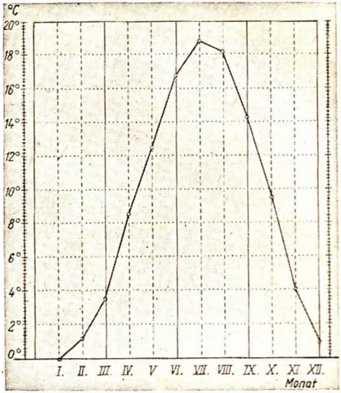


Abb. 13

5. Abb. 14 zeigt einen Ausschnitt aus der Fieberkurve eines Kranken. Die Temperatur wurde täglich morgens und abends gemessen.

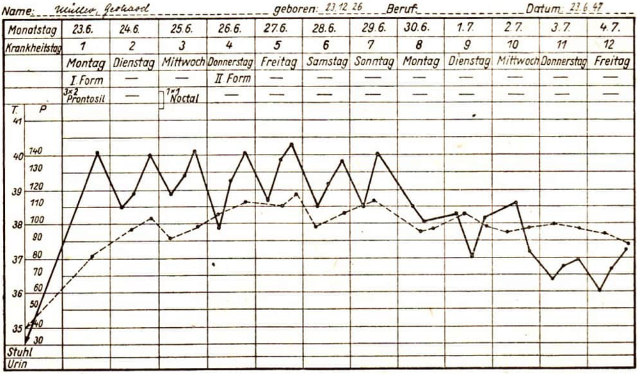


Abb. 14

a) Welche Bedeutung kommt der Fieberkurve zu?
b) Entnimm der Fieberkurve, wie hoch die Temperatur an jedem Krankheitstag war, und stelle eine Zahlentafel folgendermaßen auf:

Krankheitstag			
morgens mittags abends			

c) Wie groß ist die tägliche Steigerung und die Schwankung von Tag zu Tag, die aus den Abendtemperaturen abgelesen werden?
d) Entnimm der gestrichelten Pulsschlagkurve, wie hoch der Puls an jedem Krankheitstag war!
e) Welches ist die höchste und welches ist die tiefste Zahl der gemessenen Pulsschläge, und am wievielten Krankheitstage treten sie auf?

6. Bei einem anderen Kranken wurden von Beginn der Krankheit an folgende Körpertemperaturen zweimal täglich gemessen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
morgens	38,2	38,4	37,2	38,6	38,8	38,1	37,4	36,8	37,2	37,5	37,2	36,9
abends	39,3	39,1	38,9	39,7	40,1	39,5	39,1	39,4	39,5	39,2	39,0	38,2

Zeichne die Kurve der Körpertemperaturen! Vergleiche Abb. 14!

7. Veranschauliche durch eine Kurve das Wachsen eines Roggenhalmes, das Anfang Mai beobachtet wurde!

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Höhe des Sprosses (in cm)	12,2	14,3	15,6	18,1	20,4	23,2	26,6	29,8	31,4	34,0	37,2	40,5

(1 cm der Zeichnung $\triangleq$ 1 Tag, 0,3 cm $\triangleq$ 1 cm Wachstum; wähle auf dem senkrechten Zahlenstrahl 10 cm Sproßhöhe als Ausgangspunkt!)

32. Funktionen

Wie groß ist a) der Umfang u und b) der Flächeninhalt y eines Quadrats mit der Seite $x = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$ cm?
Wie berechnet man die Werte von u und y aus den zugehörigen Werten von x? Stelle die Werte übersichtlich in einer „Wertetafel" zusammen und zeichne die Schaulinien!

1. Hängt eine veränderliche Größe y von einer anderen Größe x so ab, daß zu jedem Wert von x ein Wert von y gehört, dann nennt man y eine **Funktion** von x.
2. Die Zuordnung zwischen y und x kann oft durch eine Rechenvorschrift angegeben werden, die die Form einer Gleichung hat und **Funktionsgleichung** heißt.

Aufgaben

1. Der in einer Stunde zurückgelegte Weg beträgt im Durchschnitt

	bei gewöhnlicher Fahrt	bei rascher Fahrt
mit einem Fahrrad	12 km	15 km
mit einem Kraftrad	30 km	40 km

Wie lautet die Funktionsgleichung für den in der Zeit x Stunden zurückgelegten Weg y km!

2. a) Stelle die Zinsen y DM, die ein Kapital von 500 DM im Laufe von x Monaten bei einer Verzinsung von 3% bringt, als Funktion der Zeit durch eine Funktionsgleichung dar!

b) Stelle die Zinsen y, die ein Kapital x im Laufe von $\frac{3}{4}$ Jahren bei einer Verzinsung von 3% bringt, als Funktion des Kapitals dar!

c) Stelle die Zinsen y DM, die ein Kapital von 500 DM im Laufe von $\frac{3}{4}$ Jahren bei einer Verzinsung von x% bringt, als Funktion des Zinsfußes dar!

3. a) Stelle den Winkel y an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks als Funktion des Basiswinkels x dar!

b) Stelle den Basiswinkel y eines gleichschenkligen Dreiecks als Funktion des Winkels x an der Spitze dar!

4. Stelle den spitzen Winkel y eines rechtwinkligen Dreiecks als Funktion des zweiten spitzen Winkels x dar!

5. Für das Wickeln eines Elektromagneten erhielt eine Wicklerin —,76 DM. Stelle den Lohn y als Funktion der Produktionsmenge x dar!

6. Ein Behälter enthält 20 l Wasser. Um 12 Uhr wird eine Abflußröhre geöffnet, durch die in jeder Sekunde $\frac{1}{2}$ l Wasser abfließt.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Abhängigkeit der noch im Behälter befindlichen Wassermenge y (y in Litern) von der seit 12 Uhr verflossenen Zeit x angibt (x in Sekunden)!

b) Prüfe, ob man für x den Wert 50 oder auch negative Werte einsetzen kann!

c) Auf welchen Bereich muß man hier die Werte von x beschränken?

7. Die Länge eines Messingdrahtes wächst bei jeder Temperaturzunahme von 1° C um $\frac{1}{50\,000}$ seiner Länge bei 0° C. Ein solcher Draht sei bei 0° C 20 m lang. Drücke seine Länge als Funktion der Temperatur aus!

33. Bildliche Darstellung von Funktionen

Berechne den Wert der Funktion $y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + 1$ für die Werte $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$ und stelle die gefundenen Werte in einer Wertetafel zusammen. Zeichne wie bei der bildlichen Darstellung von Beobachtungsreihen ein Schaubild der Funktion für die in der Tafel zusammengestellten Werte!

Bei der bildlichen Darstellung von Funktionen unter Benutzung einzelner Wertepaare verfährt man wie bei der Veranschaulichung von Beobachtungsreihen. Zur eindeutigen Bestimmung der Lage eines Punktes der Ebene errichtet man im Nullpunkt der Zahlengeraden die Senkrechte und erhält so ein Achsenkreuz, das die Ebene in 4 Felder (Quadranten) teilt (Abb. 15). Die Zahlengerade heißt x-Achse oder Abszissenachse[1]), die Senkrechte y-Achse oder Ordinatenachse[2]). Beide Geraden bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen **Koordinatenachsen**[3]).

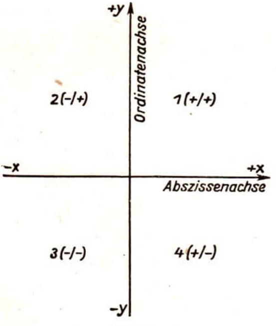


Abb. 15

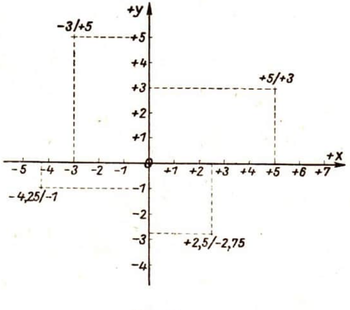


Abb. 16

Die Lage eines Punktes der Ebene ist durch seine Abstände von den Achsen bestimmt. Die Vorzeichen dieser Abstände lassen das Feld erkennen, in dem der Punkt liegt. Der Abstand des Punktes von der y-Achse heißt

1) abscindere (lat.): abschneiden.
2) ordinare (lat.): zuordnen.
3) coordinare (lat.): zusammenstellen.

seine **Abszisse** (x), der Abstand von der x-Achse seine **Ordinate** (y), die Zahlen x und y nennt man die **Koordinaten** (Netzzahlen) des Punktes ($x; y$) (Abb. 16).

Ist y der Wert einer Funktion, der sich zu einem willkürlich gewählten Wert x ergibt, so können zusammengehörende Werte für x und y übersichtlich in einer Wertetafel zusammengestellt werden, in der die x-Werte der Größe nach geordnet sind. Abb. 16a zeigt das Muster der Wertetafel für die Funktion $y = 2x + 3$. Anschaulicher wirkt ihre bildliche Darstellung. In ein Achsenkreuz zeichnet man jeden x-Wert als Abszisse, den dazugehörigen y-Wert als Ordinate eines Punktes ein und erhält so eine Reihe von Punkten. Denkt man sich jedesmal den Übergang von einem x-Wert zu dem ihm in der Wertetafel folgenden nicht wie in der Tafel durch einen Sprung ausgeführt, sondern durch allmähliche Veränderung erfolgend, so geht der zugehörige y-Wert in seinen Nachbarwert über. Der Ordinatenendpunkt beschreibt dabei eine Kurve, die als das Bild der Funktion bezeichnet wird.

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
.	.
.	.

Abb. 16a

Beispiel: Die Menge des Wasserdampfes, die 1 m³ Luft höchstens aufnehmen kann, ist eine Funktion der Temperatur.

Wertetafel:

Temperatur (x)	Menge des Wasserdampfes (y)
— 10°	2,1 g
— 5°	3,2 g
0°	4,8 g
+ 5°	6,8 g
+ 10°	9,4 g
+ 15°	12,8 g
+ 20°	17,3 g

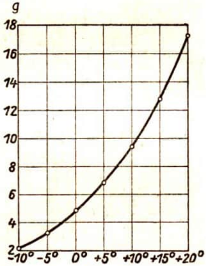


Abb. 17

Die Kurve der Funktion zeigt Abb. 17.

Aufgaben

1. Bestimme in einem auf Millimeterpapier gezeichneten Achsenkreuz die Lage folgender Punkte:

a) (3 ; 6) **b)** (— 2 ; + 3) **c)** (— 4 ; — 5) **d)** (1 ; — 3) **e)** (— 4 ; 4)

f) (2 ; — $1\frac{1}{3}$) **g)** (— 1 ; $\frac{2}{3}$) **h)** (5,2 ; 6,3) **i)** (— 2,6 ; — 7,1)

k) (1,8 ; — 3,5) **l)** (+ 1,2 ; — 4,7) **m)** (— 4,3 ; 2,4) **n)** (— 1,3 ; — 4,8)!

2. Zeichne beliebige Punkte in ein Achsenkreuz und bestimme jedesmal ihre Koordinaten!

3. Stelle für folgende Funktionen Wertetafeln zusammen und zeichne jede Schaulinie in einem rechtwinkligen Achsenkreuz:

a) $y = x$ **b)** $y = \frac{2}{3}x$ **c)** $y = x + 1$ **d)** $y = 2x - 3$

e) $y = \frac{2}{x}$ **f)** $y = \frac{4}{x}$ **g)** $y = \frac{6}{x-3}$ **h)** $y = \frac{5}{x+2}$

i) $y = x^2$ **k)** $y = 0{,}5x^2$ **l)** $y = 0{,}5x^2 + 2$ **m)** $y = 0{,}8x^2 - 3$!

34. Die lineare Funktion $y = mx$

Die Angabe, die Wichte des Eisens ist 7,8 p/cm³, bedeutet, daß der Quotient aus dem Gewicht des Eisens und seinem Rauminhalt unveränderlich 7,8 p/cm³ ist. Bezeichnet man das Gewicht des Eisens mit y, den Rauminhalt, den es einnimmt, mit x, so erhält man $\frac{y}{x} = 7{,}8$ oder $y = 7{,}8x$ als Gleichung zwischen Rauminhalt und Gewicht des Eisens. Stelle eine Wertetafel dieser Funktion auf und zeichne die Funktionskurve! Stelle die Gleichungen zwischen Rauminhalt und Gewicht anderer Körper auf: Aluminium (Wichte 2,7 p/cm³), Wasser (Wichte 1 p/cm³), Kork (Wichte 0,24 p/cm³)!

Erklärung: Ist das Verhältnis zweier veränderlicher Größen konstant, ist z. B. $\frac{y}{x} = m$, so folgt $y = mx$. Die feste Zahl m heißt **Verhältniszahl** oder **Proportionalitätsfaktor.** Die Funktion $y = mx$ ist eine lineare Funktion.

Das Bild der Funktion $y = mx$ ist eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht. Die Größe m ist das Maß für den Anstieg der Geraden.

Ist $m = m_1$ und $m_1 > 0$, so steigt die Gerade, ist $m = m_2$ und $m_2 < 0$, so fällt sie mit wachsendem x (Abb. 18). Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als", das Zeichen $<$ dagegen „kleiner als".

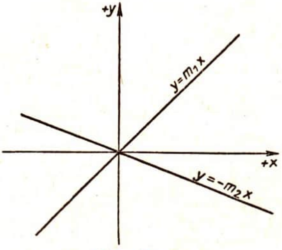


Abb. 18

Aufgaben

1. a) Durch wieviel Punkte ist eine Gerade bestimmt?

b) Wieviel Funktionswerte der linearen Funktion $y = mx$ braucht man also nur zu bestimmen, um ihre Schaulinie zu zeichnen?

2. Zeichne das Bild folgender Funktionen:

a) $y = x$ **b)** $y = 3x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$ **d)** $y = 2{,}4x$

e) $y = -x$ **f)** $y = -4x$ **g)** $y = \frac{3}{5}x$ **h)** $y = -1{,}8x$!

3. In 2,4 kg Messing sind 0,8 kg Zink enthalten; das andere Metall ist Kupfer. **a)** Stelle das Verhältnis Zink : Kupfer fest! **b)** Stelle die für die Herstellung des Messings nötige Menge Zink (y) als Funktion des Kupfers (x) dar und zeichne das Bild der Funktion!

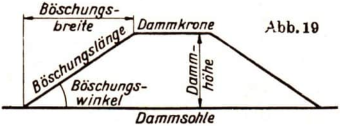


Abb. 19

4. Die Steilheit einer Böschung wird bestimmt durch das Verhältnis von Dammhöhe zur Böschungsbreite (Abb. 19). Stelle für das Verhältnis 1 : 1,5 (1 : 2; 1 : 2,5) die Dammhöhe als eine Funktion der Böschungsbreite dar und zeichne das Bild der Funktion!

5. Neuerdings wird der Luftdruck statt in mm Quecksilbersäule (y) in Millibar (x) angegeben. 750 mm Quecksilbersäule entsprechen 1000 Millibar.
Stelle die Höhe der Quecksilbersäule als Funktion der Millibar dar und zeichne das Bild der Funktion!

35. Die allgemeine lineare Funktion $y = mx + b$

Der Temperaturbereich zwischen dem Gefrierpunkt und dem Siedepunkt des Wassers ist beim Celsiusthermometer in 100, beim Fahrenheitthermometer in 180 Teile geteilt. Wieviel Fahrenheitgrade entsprechen daher 1° C? Der Gefrierpunkt des Wassers wird bei der Fahrenheitskala mit 32° bezeichnet. Welche Funktionsgleichung besteht daher zwischen den Fahrenheitgraden y und den Celsiusgraden x? Zeichne diese Funktion! Vergleiche das Bild dieser Funktion mit dem Schaubild für $y = \frac{9}{5}x$!

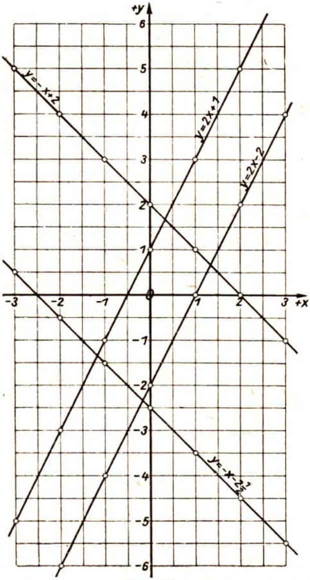


Abb. 20

Das Bild der Funktion $y = mx + b$ ist eine Gerade mit dem Anstieg m; b bezeichnet den auf der y-Achse durch die Gerade entstehenden Abschnitt (Abb. 20).

Aufgaben

1. Entwirf die Wertetafel und zeichne das Bild folgender Funktionen:

a) $y = x + 2$ **b)** $y = 2x - 5$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + 5$ **d)** $y = -\frac{2}{3}x + 3$!

2. Zeichne die Bilder der Funktionen:

$$y = 2x + 3; \quad y = 2x + 5; \quad y = 2x - 7!$$

Vergleiche die Richtung dieser drei Geraden miteinander!
Von welcher Größe hängt die Lage der Geraden ab?

3. Zeichne die Bilder der Funktionen:

$$y = 2x + 3; \qquad y = 3x + 3; \qquad y = \tfrac{1}{2}x + 3; \qquad y = \tfrac{2}{3}x + 3!$$

Durch welchen Punkt der y-Achse gehen die vier Geraden? Welche Größe ist hierfür maßgebend?

4. Leite aus der Gleichung $2x + y = 14$ eine Gleichung von der Form $y = mx + b$ ab! (Entwickle y als eine Funktion von x!) Stelle die Wertetafel und das Bild der Funktion her!

5. Entwickle aus der Gleichung $3x - 2y = 5$ die Veränderliche y als Funktion der Veränderlichen x und stelle Wertetafel und Bild der Funktion her!

6. Bestimme, ohne y als Funktion von x zu entwickeln, einige ganzzahlige Wertepaare von x und y, die der Funktionsgleichung $3x - 2y = 5$ genügen! Zeichne das Bild der Funktion und vergleiche es mit dem nach Aufg. 5 gezeichneten!

7. Eine Funktion lautet: $y = 5x - 2$. Versuche, ohne eine Wertetafel herzustellen, den Verlauf der Geraden anzugeben!

8. Gib ohne Herstellung der Wertetafel den Verlauf der Bilder folgender Funktionen an:

a) $y = -2x + 3$ **b)** $y = 6x + 4$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = -7$

e) $y = -7x - 5$ **f)** $x = 0$ **g)** $x = -2\frac{1}{5}$ **h)** $y = +x$!

X. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

36. Zeichnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten

Die Differenz zweier Zahlen beträgt 1. Wie heißen diese Zahlen? Bezeichne die größere der Zahlen mit x, die kleinere mit y und stelle ihren Zusammenhang durch eine Gleichung dar; stelle eine Wertetafel für Zahlenpaare auf, die der Gleichung genügen!

Eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten reicht also zu deren Bestimmung nicht aus. Zwischen den beiden Unbekannten muß noch eine andere Beziehung bestehen. So kann man in der oben angeführten Aufgabe z. B. festsetzen, daß das Doppelte der kleineren Zahl um 2 mehr als die größere Zahl ergeben soll. Stelle die Gleichung auf!

Zur eindeutigen Bestimmung zweier Unbekannten x und y sind zwei verschiedene Gleichungen nötig, die einander nicht widersprechen und voneinander unabhängig sind.

Zeichnerische Lösung:

Die Schaubilder der beiden Gleichungen sind zwei Geraden; in dasselbe Achsenkreuz gezeichnet, sind die Koordinaten des Schnittpunktes beider Geraden die Lösung beider Gleichungen (Abb. 21).

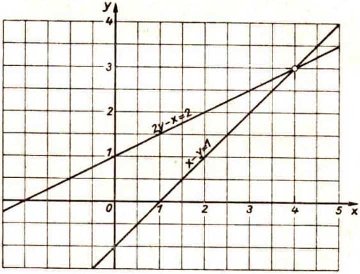


Abb. 21

Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen durch Zeichnung:

1. $x + y = 8$, $y = 3x$

2. $x - 2y = 0$, $x + y = 3$

3. $2x - y = 14$, $y = x - 2$

4. $x + 2y = 6$, $x - \frac{1}{2}y = 1$

5. $4x + y = 0$, $3x + 2y = 5$

6. $\frac{1}{3}x - y = 4\frac{1}{6}$, $2x + 3y = 7$

7. $y = 2x - 2$, $y = 5x - 11$

8. $y = -\frac{3}{5}x + 4\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$

9. $4x = 7y + 2$, $12x = 25y - 2$

10. $9y = 5x + 2$
$3y = 29 - 4x$

11. $21x = 9y - 3$
$3x = 31 - 5y$

12. $4x - 7y = 8$
$7y = 3x + 1$!

13. Zeichne das Schaubild der Funktionsgleichung $2x + 5y = 10$! Für welchen Wert von x schneidet die Gerade die x-Achse, und für welchen Wert von y schneidet sie die y-Achse?

14. Bringe die in Aufgabe 13 gegebene Funktionsgleichung auf die Form $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$! Wie erkennt man nun sofort, in welchen Punkten die Gerade die beiden Achsen schneidet?

15. Bringe die Gleichung

a) $2x + 3y = 12$ **b)** $4x - 3y = 12$ **c)** $3x - 5y = 15$ **d)** $5x + 2y = 20$

auf die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und zeichne dann das Bild der Gleichung!

37. Rechnerische Lösung der Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten

a) Das Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt den gefundenen Ausdruck an Stelle dieser Unbekannten in die andere Gleichung ein. Dadurch erhält man eine neue Gleichung mit nur einer Unbekannten.

Beispiel:

$$\text{I. } x - 2y = 4$$
$$\text{II. } 2x + 5y = 35$$

Man erhält aus I:

$$x = 4 + 2y$$

Für x wird in II $(4 + 2y)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{III. } 2(4 + 2y) + 5y &= 35 \\ 8 + 4y + 5y &= 35 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \\ x &= 4 + 6 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Probe:

$$10 - 2 \cdot 3 = 4$$
$$2 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = 35$$

b) Das Gleichsetzungsverfahren

Man löst beide Gleichungen nach derselben Unbekannten auf und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich.

Beispiel:

$$\text{I. } 8x - 3y = 19 \qquad x = \frac{19 + 3y}{8}$$

$$\text{II. } 5x + 2y = 39 \qquad x = \frac{39 - 2y}{5}$$

$$\text{III. } \frac{19 + 3y}{8} = \frac{39 - 2y}{5}$$

$$5\,(19 + 3y) = 8\,(39 - 2y)$$

$$95 + 15y = 312 - 16y$$

$$31y = 217$$

$$\underline{\underline{y = 7}}$$

$$x = \frac{19 + 21}{8}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Probe:

$$8 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 19$$

$$5 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 39$$

c) Das Additionsverfahren

Zuerst werden beide Gleichungen so umgeformt, daß auf einer Seite nur zwei Glieder stehen, die die Unbekannten enthalten, auf der anderen Seite nur bekannte Zahlen vorkommen. Dann gestaltet man die Gleichungen durch Multiplikation so um, daß bei einer der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen entstehen. Durch Addition der linken Seiten und der rechten Seiten beider Gleichungen erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiel:

$$\text{I. } 3x + 7y = 27 \mid \cdot 5$$

$$\text{II. } 2x - 5y = -11 \mid \cdot 7$$

Durch Multiplikation der Gleichung I mit 5 und der Gleichung II mit 7 erhält man

$$\text{III. } 15x + 35y = 135$$

$$\text{IV. } 14x - 35y = -77$$

Die Addition der Gleichungen III und IV ergibt

$$\text{V. } 29x = 58$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Nach Einsetzen in Gleichung I erhält man

$$3 \cdot 2 + 7y = 27$$
$$7y = 21$$
$$\underline{\underline{y = 3}}$$

Probe:
$$3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 27$$
$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -11$$

Multipliziere Gleichung I mit 2 und Gleichung II mit (— 3) und löse dadurch die Aufgabe!

Aufgaben

1. Löse die Gleichungen der Aufgaben 1 bis 12 in Abschn. 36 rechnerisch!

2. $5x - 2y = 19$; $15x = 31 - 7y$ **3.** $8x + 9y = 93$; $8x - 5y = 23$ **4.** $16x + 11y = 33$; $43y - 48x = 38$

5. a) $x + y = 21$; $x - y = 11$ **b)** $x - y = 8$; $x + y = 20$ **c)** $x + 5y = 29$; $x + 3y = 19$ **d)** $4x + y = 31$; $2x - y = 11$

6. a) $7x - 5y = 11$; $3x + 5y = 19$ **b)** $5x + 7y = 50$; $9x + 14y = 97$ **c)** $2x + 2y = 32$; $2x - 3y = 2$

d) $12x - 13y = 9$; $17y - 4x = 35$ **e)** $8x - 5y = 49$; $7x + 15y = 101$ **f)** $13x - 11y = 2$; $16x + 9y = 25$

7. a) $39x - 38y = 1$; $91x - 57y = 4$ **b)** $69x - 51y = 0$; $115x + 34y = 7$ **c)** $15x - 3y = 123$; $2x + 11y = 62$

d) $7x - 9y = 11$; $5x + 8y = 80$ **e)** $6x + 11y = 96$; $7x - 3y = 17$ **f)** $x - 3y = 0$; $11x - 2y = 62$

8. a) $3x + 13y = 19$; $5x - 2y = 8$ **b)** $4x + 5y = 31$; $6y - 5x = -2$ **c)** $2x + 3y = -21$; $5x - 4y = 5$

d) $8x - 9y = 2$; $7y - 5x = 7$ **e)** $10x + 7y = 99$; $6y - 7x = 7$ **f)** $5x + 2y = 22$; $3y - 11x = -4$

9. a) $x + 13 = y + 9$; $y - 5 = 21 - x$ **b)** $x + 24 = y + 18$; $y + 5 = 35 - x$

c) $4x + 11 = 42 - y$; $17 + y = 6 + 2x$ **d)** $3x + 17 = 11y + 6$; $4y - 11 = 38 - 3x$

10. a) $0{,}5x - 1{,}9 = 0{,}3y - 1$
$2{,}5 - 0{,}3y = 0{,}3x - 1{,}4$

b) $0{,}15 = 0{,}53 - 0{,}7x - 0{,}5y$
$0{,}13 + 0{,}5y = 0{,}59 - 0{,}9x$

c) $12(2x - 3y) - 7(x + y) = 84$
$9(5x - 8y) = 8(3x - 5y + 21) + 696$

d) $(2x + 3y - 7) : (5x - 2y + 4) = 3 : 4$
$(7x - 9y + 15) : (4x - 5y + 12) = 2 : 5$

11. a) $x + y = 33$
$x : y = 6 : 5$

b) $x - y = 6$
$x : y = 4 : 3$

c) $x : y = 9 : 11$
$(x - 6) : (y + 6) = 3 : 5$

12. a) $\frac{3x}{4} - 2y = 1$
$\frac{x}{3} - y = 0$

b) $2x - \frac{5y}{3} = 4$
$3x - \frac{7y}{2} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{4} - \frac{4y}{3} = -10$

13. a) $\frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 1$
$\frac{x}{4} = \frac{2y}{5} - 3$

b) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 17$
$\frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 19$

c) $\frac{9x}{4} + \frac{10y}{3} = 5\frac{5}{6}$
$\frac{11y}{5} - \frac{10x}{3} = -44\frac{1}{3}$

14. a) $1{,}5x - 2y = 1$
$2{,}5x - 3y = 6$

b) $2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8$
$0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4$

c) $0{,}16x - 0{,}11y = 1$
$0{,}19x - 0{,}11y = 1$

15. a) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$
$\frac{x+3}{y+3} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$
$\frac{x+2}{y-2} = 1$

c) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{2}{3}$
$\frac{x+1}{y-2} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{7-2x}{5-3y} = \frac{3}{2}$
$y - x = 4$

16. a) $\frac{5}{x+2y} = \frac{7}{2x+y}$
$\frac{7}{3x-2} = \frac{5}{6-y}$

b) $\frac{x+2y+1}{2x-y+1} = 2$
$\frac{3x-y+1}{x-y+3} = 5$

c) $\frac{75}{2x+3} = \frac{35}{2y-3}$
$\frac{36}{21-2x} = \frac{20}{20-3y}$

17. a) $\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5}$
$\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x$

b) $\frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1$
$\frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1$

18. Die Summe zweier Zahlen beträgt 34, ihre Differenz 28. Wie groß ist jede von ihnen?

19. Die Summe zweier Zahlen beträgt 25. Sie verhalten sich wie 2 : 3. Wie groß ist jede von ihnen?

20. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 7. Sie verhalten sich wie 6 : 5. Wie groß ist jede von ihnen?

21. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 7. Vermehrt man beide Zahlen um 3, so verhalten sich die entstandenen Zahlen wie 3 : 4. Wie groß sind die ursprünglichen Zahlen?

22. Die Summe zweier Zahlen beträgt 350. Dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 8 zum Quotienten und 8 zum Rest. Wie heißen die Zahlen?

23. Ein Bruch erhält den Wert $\frac{3}{4}$, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner je um 2 vermindert; dagegen erhält er den Wert $\frac{1}{2}$, wenn man den Zähler um 1 vermindert und den Nenner um 2 vermehrt.

24. Welcher Bruch erhält den Wert $\frac{2}{3}$, wenn man Zähler und Nenner um 3 vermindert, dagegen den Wert $\frac{1}{2}$, wenn man Zähler und Nenner um 4 vermindert?

38. Angewandte Aufgaben

1. Zur Finanzierung eines Sonderauftrages wurde einem Betrieb ein langfristiger Kredit gewährt, für den jährlich 1680,— DM Zinsen zu zahlen waren. Wäre der Zinsfuß $\frac{1}{2}$% höher gewesen, so hätte der Zins 240,— DM mehr betragen.

a) Wie groß war der Kredit? **b)** Wie groß war der Zinsfuß?

2. Zum Ausbau seines Gehöftes erhielt ein Bauer ein Darlehen, für das er jährlich 50,— DM Zinsen zahlte. Wäre der Zinsfuß $\frac{1}{2}$% größer gewesen, so hätten 56,25 DM Zinsen aufgewendet werden müssen.

a) Wie groß war das Darlehen? **b)** Wie groß war der Zinsfuß?

3. Ein Darlehen trägt jährlich a DM Zinsen. Würde es um p% höher ausgeliehen, so würden d DM Zinsen mehr einkommen. Wie groß sind Darlehen und Zinsfuß?

4. Ein Einfamilienhaus war mit zwei Hypotheken in Höhe von 5000,— DM und 3000,— DM belastet, die zu verschiedenen Zinsfüßen zu verzinsen waren. Die Zinsen betrugen 385,— DM jährlich. Die Hypotheken wurden später von der Sparkasse übernommen, die einen einheitlichen ermäßigten Zinsfuß festsetzte, so daß sich die Zinsen um 65,— DM im Jahr ermäßigten.

a) Wie groß war der neue Zinsfuß?

b) Wie groß waren die früheren Zinsfüße, wenn die erste Hypothek von 5000,— DM um $\frac{1}{2}$% höher zu verzinsen war als die zweite Hypothek?

5. Für einen Wiederaufbaukredit sind jährlich 135,— DM Zinsen zu zahlen. Wenn der Zinsfuß um $\frac{1}{4}$% herabgesetzt wird, ermäßigen sich die Zinsen um 7,50 DM.

a) Wie hoch ist der Kredit? **b)** Wie hoch ist der Zinsfuß?

6. Zwei Kredite von insgesamt 6 500 DM werden zu $2\frac{1}{2}$% bzw. 3% verzinst. Der zweite Kredit erfordert jährlich 25 DM weniger Zinsen als der erste. Wie groß ist jeder Kreditbetrag?

7. Zwei Darlehen über 800,— DM und 1 200,— DM, von denen das erste drei Monate später fällig war als das zweite, wurden vorzeitig zurückgezahlt. Dabei sparte der Kreditnehmer bei jedem Darlehen 27,— DM Zins.

a) Wie hoch war der Zinsfuß, der für beide Darlehen einheitlich festgesetzt war?

b) Nach wieviel Monaten wäre das erste Darlehen fällig gewesen?

8. Zwei Fuhrleute A. und B. hatten es übernommen, die Steine zum Bau einer Straße in 12 Tagen anzufahren. Nach 8 Tagen mußte jedoch B. aufhören, da eines seiner Pferde erkrankt war. In wieviel Tagen hätte jeder Fuhrmann die Steine allein herbeigefahren, wenn A. nach dem Ausscheiden von B. noch 7 Tage zu tun hatte?

9. Wenn ein Autobus auf der Fahrt von A nach B in der Stunde 5 km mehr zurücklegt, als seiner fahrplanmäßigen Geschwindigkeit entspricht, so kommt er in B 20 Minuten zu früh an. Fährt er dagegen in der Stunde 5 km weniger, so verspätet er sich um 25 Minuten. Wie weit ist A von B entfernt, und wieviel km/h beträgt die fahrplanmäßige Geschwindigkeit des Autobusses?

10. Ein Tagebau förderte im Januar und Februar zusammen 310 000 t Rohbraunkohle. Im Januar förderte er 32 000 t weniger als im Februar. Wieviel förderte er in den einzelnen Monaten?

11. In einem Wettbewerb der achten Klassen errangen die Mädchen 76 Punkte mehr als die Jungen und damit $\frac{3}{5}$ der insgesamt erreichten Punktzahl. Welche Punktzahl erreichten **a)** die Mädchen, **b)** die Jungen?

12. Die Produktionsauflage einer Maschinenfabrik lag um 40 Maschinen höher als die Produktion des Vorjahrs und wurde um $\frac{1}{3}$ übererfüllt, wodurch eine Produktion erreicht wurde, die 60% über der des Vorjahres lag. Wie groß war **a)** die Vorjahrsproduktion, **b)** die Produktionsauflage des neuen Jahres?

13. Mischt man zwei Sorten Farben, von denen 1 kg 1,30 DM bzw. 1,60 DM kostet, so stellt sich der Preis für 1 kg der Mischung auf 1,50 DM. Er würde sich aber nur auf 1,40 DM stellen, wenn von der geringeren Sorte 8 kg mehr und von der besseren 14 kg weniger genommen würden. Wieviel kg von jeder Sorte werden zu der ersten Mischung genommen?

14. Werden 1,4 kg Silber mit 3,5 kg einer zweiten Sorte legiert, so entsteht Silber mit dem Feingehalt 825. Werden dagegen 3,2 kg der ersten und 2,4 kg der zweiten Sorte legiert, so hat das Silber den Feingehalt 775. Welchen Feingehalt hat jede der beiden Sorten?

15. In einem Dreieck ist die Summe der Winkel α und β 91°, ihre Differenz beträgt 37°. Wie groß ist jeder Winkel?

16. In einem Rechteck beträgt die Summe der beiden anstoßenden Seiten 105,1 cm; ihre Differenz ist 43,5 cm. Wie lang sind die Seiten?

17. Der Umfang eines Rechtecks ist 1,59 m. Die eine Seite ist 25 cm länger als die andere. Wie lang sind die Seiten?

18. Die Mittellinie eines Trapezes mißt 67 cm, der Unterschied der Grundseiten beträgt 24 cm. Wie lang ist jede?

19. Wenn man die beiden Seiten eines Rechtecks um je 1 cm verlängert, wächst der Flächeninhalt des Rechtecks um 10 cm². Verkürzt man die kürzere Seite um 1 cm, so wird der Flächeninhalt um 5 cm² kleiner. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

20. Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 4 cm und verkürzt die größere um 3 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 21 cm² größer ist als die Fläche des Rechtecks. Wie groß sind dessen Seiten?

21. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie 9 zu 11. Ihre Umfänge, die sich wie 20 zu 23 verhalten, sind zusammen 172 cm lang. Wie groß sind die Seiten des ersten Rechtecks?

22. Verlängert man in einem Dreieck eine Seite um 7 cm und die zu ihr gehörige Höhe um 2 cm, so wächst sein Flächeninhalt um 117 cm². Verlängert man dagegen die Seite um 1 cm und die Höhe um 4 cm, so wächst der Flächeninhalt nur um 53 cm². Wie groß ist die Seite und die zu ihr gehörige Höhe?

23. Die Differenz der Flächeninhalte zweier Quadrate ist 180 m²; die Summe ihrer Umfänge beträgt 120 m. Wie lang sind die Seiten?

D. Geometrie

XI. Flächenberechnung und Flächenverwandlung

39. Berechnung von Rechteck und Quadrat

Zeichne Rechtecke, für die jede Seite eine ganze Anzahl von Zentimetern mißt!
Schneide aus starkem Papier Quadratzentimeter aus und bedecke mit ihnen mehrere durch die gezeichneten Rechtecke begrenzte Flächen! Wie groß ist jedesmal der Flächeninhalt?
Zeichne ein „Quadratnetz" mit einem Parallelenabstand von 1 cm auf Pauspapier, d. h. stelle einen „Raster" her und bedecke damit eine Postkarte, eine Seite des Tagebuches, den Deckel des Halterkastens usw.! Zähle die Fläche in cm^2 aus (Abb. 22)! Kann man in jedem Falle den Flächeninhalt genau angeben?
In derselben Weise läßt sich angenähert die Größe einer durch eine beliebige ebene Figur abgegrenzten Fläche ermitteln.
In Abb. 23 kann man die Zahl der Einheitsquadrate angeben, die ganz innerhalb der Fläche liegen. Zähle ein zweites Mal die von den Grenzlinien der Fläche durchschnittenen Quadrate hinzu! Suche den Mittelwert! Er gibt ungefähr den Inhalt des Dreiecks an.

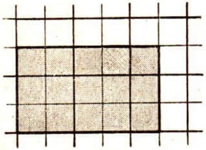


Abb. 22

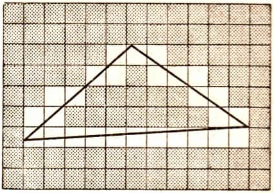


Abb. 23

Der Inhalt einer Fläche wird gewöhnlich nicht ausgezählt, sondern nach einer Formel berechnet.
Die Flächeneinheit ist das Quadratmeter (m^2). Zum Messen großer oder kleiner Flächen werden Vielfache oder Teile des Quadratmeters benutzt.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist ab.[1]

$$F = ab$$

Der Flächeninhalt eines Quadrats über der Seite a ist a^2.

$$F = a^2$$

Aufgaben

1. Die Seite eines Quadrats mißt **a)** 37 cm, **b)** 68,9 cm, **c)** 95,87 cm, **d)** 57 mm. Wie groß sind Umfang und Inhalt?

2. Länge und Breite eines Rechtecks werden gemessen mit **a)** 54 cm und 19 cm, **b)** 3,80 m und 69 cm, **c)** 548 m und 236 m, **d)** 17 cm und 38 mm. Wie groß sind Umfang und Inhalt?

3. Der Flächeninhalt eines Quadrats soll aus seinem Umfang, der **a)** 64 m, **b)** 180 cm, **c)** 42 m, **d)** 630 m, **e)** 1 376 m lang ist, berechnet werden.

4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten **a)** 4,5 und 3,5 m, **b)** 52,2 und 37,9 cm, **c)** 78,5 und 52,6 cm, **d)** 246,8 und 23,75 m?

5. Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 884 (1 462; 618,75; 915,9) cm², und eine seiner Seiten ist 34 (43; 27,5; 32,25) cm lang. Wie lang ist die andere Seite?

6. Ein Rechteck hat einen Umfang von 199,5 (813,6) cm, seine Seiten unterscheiden sich um 12,5 (43,2) cm. **a)** Wie lang ist jede Seite? **b)** Wie groß ist der Flächeninhalt?

7. Der Boden eines quadratischen Zimmers von 6,25 m Seitenlänge wird mit Ölfarbe gestrichen. Der Maler berechnet 1 m² Anstrich mit 1,15 DM. Wieviel DM kann der Maler für seine Arbeit fordern?

8. Ein quadratischer Garten wurde zum Preise von 1,75 DM für 1 m² gekauft. Als bald darauf die Umzäunung erneuert werden mußte, kostete diese 660 DM, wobei das Meter mit 3,75 DM berechnet wurde. Wieviel DM hat der Garten gekostet?

9. Beim Verkauf einer Baustelle, die die Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten $a = 36{,}10$ m und $b = 65{,}70$ m besitzt, wurde 1 m² mit 13,75 DM berechnet. Wie teuer war die Baustelle?

10. Für eine Baustelle von rechteckiger Gestalt, die 33,70 m breit und 57,60 m tief ist, wurden 48 528 DM bezahlt. Wieviel DM kostet 1 m²?

---

[1] Vorausgesetzt, daß beide Strecken in gleichen Einheiten gemessen sind.

5 [00 805-10]

11. In einem Neubau sind 72 Fenster zu verglasen. Jedes Fenster hat vier rechteckige Scheiben von 50 cm Breite und 130 cm bzw. 60 cm Höhe. 1 m^2 Fensterglas kostet 16 DM. Wieviel DM kostet das Glas der Fenster des Neubaues?

12. Ein Wohnzimmer von 5,80 m Länge und 4,75 m Breite wird tapeziert. Bei der Berechnung sind Türen und Fenster nicht zu berücksichtigen. 1 Rolle Tapete (50 cm breit) liefert zweimal die Zimmerhöhe und kostet 0,98 DM. Die erforderliche Borte stellt sich auf 11 Pf für das Meter, und der Tapezierer fordert für seine Arbeit 12 DM. Wieviel DM kostet das Tapezieren des Zimmers?

13. Für die Vorratskammer ist zum Schutz gegen Fliegen im Sommer ein Holzrahmen mit Drahtgeflecht nötig. Wieviel m Latten und wieviel m^2 Drahtgeflecht müssen beschafft werden? (Entnimm die Maße der Abb. 24!)

Beachte die „Bemaßung" in der Zeichnung!

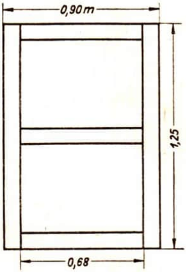


Abb. 24

Die Maßzahlen für waagerechte Strecken stehen aufrecht, die von senkrechten Strecken so, daß sie von rechts lesbar sind. Der „Maßpfeil" stößt beiderseits an Verlängerungen der zu bemaßenden Strecke an.

Veranschauliche durch Zeichnung die Richtigkeit der Gleichungen:

14. a) $ab + ac = a(b + c)$

b) $ab - ac = a(b - c)$

15. a) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

b) $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$!

40. Berechnung von Parallelogramm und Dreieck

Stelle aus Stäben oder Pappstreifen (Gliedermaßstab) ein Gelenkparallelogramm her! Gib ihm zunächst die Form eines Rechtecks; verkleinere einen Winkel allmählich bis auf 0°; wie verändert sich dabei der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten (die Höhe)? Zähle den Flächeninhalt aus, wenn die Höhe nur noch $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Höhe beträgt! Wie ändert sich dabei der Flächeninhalt? Wovon ist er also abhängig? Weshalb kann der Inhalt eines Parallelogramms nicht aus den beiden Seiten allein berechnet werden?

Erklärung: Der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten eines Parallelogramms heißt Höhe und eine der zugehörigen Seiten Grundlinie des Parallelogramms (Abb. 25a, b).

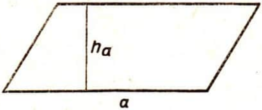


Abb. 25a

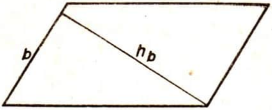


Abb. 25b

1. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

$$F = g \cdot h$$

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zu ihr gehörigen Höhe.

$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$

Beweis zu Satz 1 (Abb. 26):

Die Dreiecke $AA'D$ und $BB'C$ stimmen in folgenden Stücken überein:

$$A'D = B'C \text{ als Höhe des Parallelogramms,}$$
$$\sphericalangle AA'D = \sphericalangle BB'C \text{ als Rechte,}$$
$$AD = BC \text{ als Gegenseiten im Parallelogramm.}$$

Folglich ist $\triangle AA'D \cong \triangle BB'C$ nach *ssw*, und $A'B'CD$ ist ein Rechteck, dessen Flächeninhalt gleich ist dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$. Daraus folgt für das Parallelogramm $F = g \cdot h$.

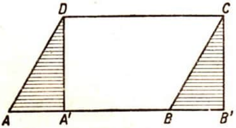


Abb. 26

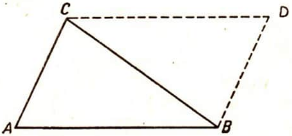


Abb. 27

Beweis zu Satz 2 (Abb. 27):

Zum Beweis zieht man durch B und C die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. Ihr Schnittpunkt ist D. Dann ist

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle ABC \text{ (Wechselwinkel)}$$
$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ACB \text{ („)}$$
$$\underline{BC = BC}$$

Also ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ nach *wsw* und die Fläche von $\triangle ABC$ die Hälfte der Fläche des Parallelogramms $ABDC$. Daraus folgt $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Aufgaben

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms für

a) $g = 24$ cm	$h = 19$ cm	**b)** $g = 36$ cm	$h = 12{,}5$ cm
c) $g = 4{,}5$ m	$h = 2{,}4$ m	**d)** $g = 38{,}5$ cm	$h = 22{,}7$ cm
e) $g = 142{,}5$ cm	$h = 82{,}4$ cm	**f)** $g = 4{,}5$ cm	$h = 137$ cm
g) $g = 82{,}75$ m	$h = 7{,}28$ m	**h)** $g = 7{,}5$ cm	$h = 5{,}4$ cm?

2. Zeichne ein Parallelogramm aus den beiden Seiten $a = 6$ cm; $b = 4$ cm, die einen Winkel von 60° einschließen! Bestimme die beiden Höhen und berechne den Flächeninhalt auf zweierlei Art! Vergleiche die beiden Ergebnisse!

3. Wie groß ist die Grundlinie eines Parallelogramms für

a) $F = 5\,162$ cm² und $h = 58$ cm
b) $F = 6\,528{,}51$ cm² und $h = 75{,}3$ cm
c) $F = 55\,957{,}5$ m² und $h = 67{,}5$ m
d) $F = 282{,}8540$ m² und $h = 4{,}73$ m?

4. Zeichne ein Dreieck aus $a = 11$ cm, $b = 8$ cm und $c = 6$ cm und bestimme die Längen der drei Höhen aus der Zeichnung! Berechne den Inhalt aus jeder Dreiecksseite und der dazugehörigen Höhe und vergleiche die Ergebnisse! Sprich das Ergebnis der Untersuchung in einem Satz aus!

5. Zeichne ein Dreieck aus $a = 6$ cm; $b = 8$ cm; $c = 9$ cm! Zeichne die drei Höhen und berechne den Flächeninhalt auf dreierlei Art! Vergleiche die Ergebnisse!

6. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks nach folgenden Angaben:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$c =$	15 cm	64 cm	27,4 cm	7,28 m	36,7 cm	2,775 m
$h_c =$	22 cm	55 cm	22,5 cm	87,5 m	44,8 cm	3,808 m!

7. Wie groß ist die Höhe h_c des Dreiecks für

a) $F = 3{,}54$ m² und $c = 1{,}5$ m
b) $F = 2{,}21$ m² „ $c = 0{,}65$ m
c) $F = 142{,}35$ cm² „ $c = 32{,}5$ cm
d) $F = 530{,}55$ cm² „ $c = 32{,}4$ cm?

8. Entwickle eine Formel für die Inhaltsberechnung des rechtwinkligen Dreiecks! (Bezeichne die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, mit a und b!) Bestimme die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn

a) $a = 48$ cm und $b = 76{,}9$ cm **b)** $a = 238$ m und $b = 485{,}5$ m ist!

9. Ein Gartengrundstück hat die Form eines Parallelogramms. Die Seiten a und b messen 52 m und 29 m und bilden einen Winkel von 72°. Zeichne die Fläche im Maßstab 1 : 500; entnimm der Zeichnung das fehlende Maß! Berechne **a)** die Größe des Gartens, **b)** den Kaufpreis, wenn 1 m² mit 2,85 DM bezahlt wird!

10. Die Giebelseite eines einstöckigen Hauses sollte einen Kalkanstrich erhalten; 1 m² kostete 0,68 DM. Berechne mit Hilfe der in Abb. 28 angegebenen Maße, wieviel DM der Kalkanstrich kostete!

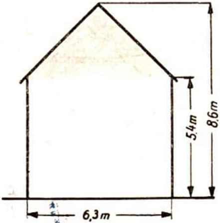


Abb. 28

11. Im Winkel zweier Straßen, die einander rechtwinklig kreuzen, liegt der Acker des Bauern G. Er hat die Form eines Dreiecks; die Eckpunkte liegen vom Kreuzpunkt 128 m und 89 m entfernt. Er wird als Baustelle benötigt. Dafür erhält G. in anderer Lage einen rechteckigen Acker, der an der Straße 20 m breit ist. Berechne seine Länge!

41. Berechnung von Trapez, unregelmäßigem Viereck und Vieleck

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus Mittellinie und Höhe.

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad \text{oder} \quad F = m \cdot h$$

Beweis (Abb. 29): Zeichnet man im Trapez $ABCD$ die Mittellinie EF und legt GH parallel zu AD durch E, so hat das Parallelogramm $AGHD$ den gleichen Inhalt wie das Trapez; denn es ist $\triangle\, GBE \cong \triangle\, HCE$. Die Grundlinie ($AG$) des Parallelogramms ist gleich $EF = \frac{a+c}{2}$. Folglich ist der Inhalt des Trapezes $F = \frac{a+c}{2} \cdot h$.

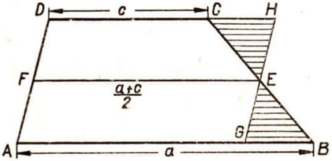


Abb. 29

Ein unregelmäßiges Viereck wird berechnet, indem man es durch eine Diagonale in Dreiecke zerlegt. Die Dreieckszerlegung kann man auch bei jedem beliebigen Vieleck anwenden. Beschreibe das Verfahren nach Abb. 30!

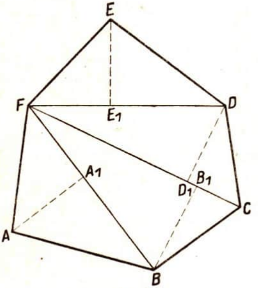


Abb. 30

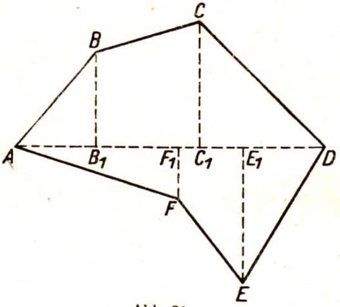


Abb. 31

Abb. 31 zeigt die Inhaltsberechnung eines Vielecks nach dem Trapezverfahren. Man zeichnet im Vieleck eine Diagonale und fällt von den übrigen Ecken die Lote darauf. Dadurch wird das Vieleck in Trapeze und rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die einzeln berechnet werden können.

Aufgaben

1. Leite die Formel für den Flächeninhalt des Trapezes noch auf zwei andere Weisen ab (Abb. 29):

a) Verlängere AB über B hinaus um CD bis G und verbinde G mit D!

b) Verlängere AB wie bei **a)** und CD über C hinaus um AB bis H und verbinde H mit G!

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezes für

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$a =$	13 cm	25 cm	54 cm	127 cm	79 m	8,45 m	35,97 m
$c =$	9 cm	19 cm	46 cm	73 cm	58 m	3,67 m	19,48 m
$h =$	16 cm	15 cm	33 cm	59 cm	37 m	4,53 m	23,75 m?

3. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des **a)** in Abb. 30, **b)** in Abb. 31 gezeichneten Vielecks? Greife die Strecken mit dem Stechzirkel ab und gib ihre Längen auf mm genau an!

4. Jede der sechs Scheiben einer Straßenlaterne ist ein Trapez. Die parallelen Seiten sind 24 und 12 cm lang. Die Höhe beträgt 37,5 cm.

a) Wieviel m² Glas sind zu einer Laterne erforderlich?

b) Für eine Straße sind 64 Laternen nötig. Man rechnet beim Glas auf Bruch und Abfall $7\frac{1}{2}$%. Wieviel m² Glas sind für die Laternen nötig?

5. Die Traufenlinien eines aus zwei gleichen Trapezen und zwei gleichen Dreiecken bestehenden Daches (Walmdach, Draufsicht Abb. 32) sind 30,6 m bzw. 19,5 m und seine Firstseite ist 22,8 m lang. Die Höhen der Trapeze betragen 11,05 m und die Höhen der Dreiecke 6,5 m. Das Dach soll neu gedeckt werden. Wie groß ist die Gesamtfläche, die zu decken ist?

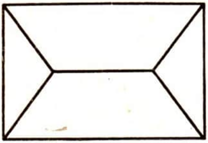


Abb. 32

6. Ein Gärtner hat ein trapezförmiges Stück Ackerland, dessen parallele Seiten 28,75 bzw. 15,45 m lang und 112,5 m voneinander entfernt sind, für 68 DM jährlich gepachtet und für die Umzäunung 62,50 DM ausgegeben. Wie groß ist sein Reinertrag im ersten Jahr, wenn 1 m² durchschnittlich einen Ertrag von 1,20 DM lieferte?

7. Ein Bauplatz hat die Gestalt eines Vierecks, und seine größere Diagonale ist 55,4 m lang. Die Ecken der zweiten Diagonale sind von der ersten 16,2 bzw. 21,8 m entfernt. 1 m² des Platzes kostet 7,50 DM. Wie teuer ist der Bauplatz?

8. Ein Stück Land hat die Form eines Vierecks. Seine größere Diagonale ist 26,5 m lang und von den Endpunkten der anderen Diagonale 8,25 bzw. 7,35 m entfernt. Bestimme die Größe!

9. Ein Feldmesser hat ein Wiesengrundstück $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$ (Abb. 33) zu vermessen. Er verfährt nach dem Trapezverfahren. Auf der abgesteckten Standlinie AE = 85 m mißt er von A aus die Entfernungen der Fußpunkte der Senkrechten; er bezeichnet sie als Rechtswerte. Die Längen der Senkrechten (BB_1, CC_1 usw.) nennt er Hochwerte. Berechne mit Hilfe der in die Zeichnung eingetragenen Maße den Flächeninhalt der Wiese!

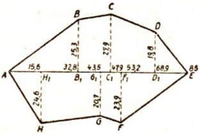


Abb. 33

42. Verwandlung geradlinig begrenzter Flächen

Zwei Felder liegen zwischen zwei Wegen und grenzen so aneinander, wie es Abb. 34 zeigt. Die Bauern M. und N. kommen überein, die gebrochene Grenzlinie durch eine geradlinige so zu ersetzen, daß keiner Nachteil erleidet. Gib in einer Skizze an, welche Lösungen möglich sind! Verbinde A mit B und ziehe durch C die Parallele zu AB! Welche Teilfläche muß eine andere Gestalt erhalten?

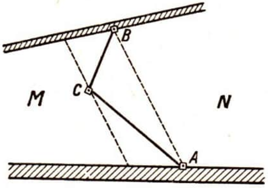


Abb. 34

Erklärung: Eine Fläche verwandeln heißt, ihr eine andere Gestalt geben, ohne den Flächeninhalt zu verändern.

Das Zeichen für flächengleich ist $=$; unterscheide deckungsgleich ($\cong$) und flächengleich ($=$)!

Dreiecke (Parallelogramme) sind flächengleich, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Beweis: In Abb. 35 ist zu AB im Abstand h_c die Parallele gezogen, auf ihr liegen die Eckpunkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 der über AB gezeichneten Dreiecke; dann ist $h_{c1} = h_{c2} = h_{c3} = h_{c4} = h_{c5}$. Der Inhalt dieser über der Grundseite $AB = c$ gezeichneten Dreiecke ist $\frac{1}{2} c \cdot h_{c1} = \frac{1}{2} c \cdot h_{c2} = \frac{1}{2} c \cdot h_{c3} = \frac{1}{2} c \cdot h_{c4} = \frac{1}{2} c \cdot h_{c5}$.

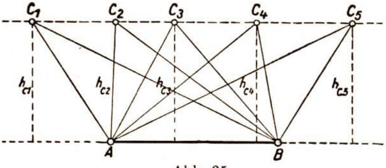


Abb. 35

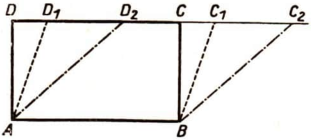


Abb. 36

Beweis: Der Inhalt der in Abb. 36 über der Seite $AB = a$ gezeichneten Parallelogramme ist $a \cdot h$, wobei $h = AD = BC$ ist.

Zieht man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonalen die Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonalen nicht geschnittenen Parallelogramme flächengleich; sie heißen Ergänzungsparallelogramme.

Beweis (Abb. 37): Es ist

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC,$$

desgleichen $\triangle AIE \cong \triangle AFE$

und $\triangle EGC \cong EHC.$

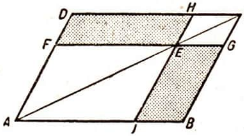


Abb. 37

Vermindert man das Dreieck ABC um die Dreiecke AIE und EGC und das Dreieck ADC um die Dreiecke AFE und EHC, so bleiben die flächengleichen Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ übrig.

Aufgaben

1. Weise nach, daß in Abb. 37 **a)** die Parallelogramme $ABGF$ und $AIHD$, **b)** die Parallelogramme $IBCH$ und $FGCD$ flächengleich sind!

2. Zeichne ein Dreieck ABC aus $a = 7{,}8$ cm, $b = 3{,}5$ cm und $c = 7{,}6$ cm! Verwandle es unter Beibehaltung der Seite c **a)** in ein gleichschenkliges Dreieck ABC_1, **b)** in ein rechtwinkliges Dreieck ABC_2, in dem $\beta_2 = R$ ist!

3. Verwandle das Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels α in ein anderes Dreieck AB_1C_1, das die gegebene Grundseite c_1 hat!

Anleitung (Abb. 38): Trage auf AB die Strecke $AB_1 = c_1$ ab, verbinde B_1 mit C, ziehe die Parallele zu B_1C durch B, welche die Verlängerung von AC in C_1 schneidet! Weise nach, daß $\triangle AB_1C_1 = \triangle ABC$ ist!

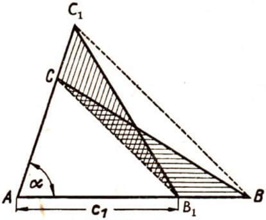


Abb. 38

4. Führe Aufg. 3 für den Fall durch, daß c_1 größer als c ist!

Anleitung: Der Punkt B_1 liegt auf der Verlängerung von AB; zeichne nach der Anleitung zu Aufg. 3!

5. Zeichne $\triangle ABC$ aus $a = 4{,}9$ cm, $b = 3{,}6$ cm und $c = 5{,}8$ cm! Verwandle es unter Beibehaltung der Seite b in ein anderes, von dem gegeben ist **a)** $c_1 = 6{,}7$ cm, **b)** $a_1 = 5{,}7$ cm, **c)** $s_b = 5{,}2$ cm!

6. Verwandle $\triangle ABC$ ($a = 3{,}2$ cm, $b = 4{,}6$ cm, $c = 5{,}8$ cm) in ein anderes, dessen Höhe h_{c1} **a)** 3,8 cm, **b)** 1,9 cm beträgt! (S. Abb. 39!)

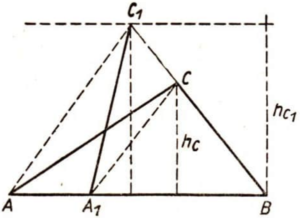


Abb. 39

7. Verwandle ein Dreieck in ein Parallelogramm (Rechteck) **a)** mit gleicher Grundlinie, **b)** mit gleicher Höhe! (Vergleiche die Abb. 40 und 41!)

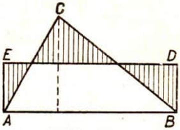


Abb. 40

8. Verwandle das Viereck $ABCD$ unter Beibehaltung der Seite a und des Winkels α in ein Dreieck (Abb. 42)!

9. Verwandle ein Fünfeck in ein Dreieck! (Mehrere Lösungen!)

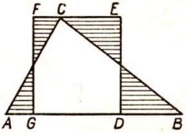


Abb. 41

10. Erkläre Abb. 43! Zeichne fünf Dreiecke, deren Höhen gleich sind, und verwandle sie **a)** in ein einziges Dreieck, **b)** in ein einziges Rechteck!

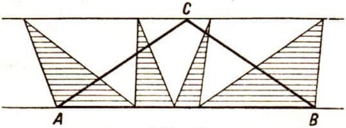


Abb. 43

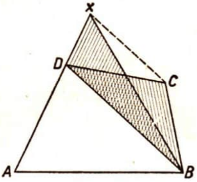


Abb. 42

11. Zeichne ein Parallelogramm aus $a = 6{,}2$ cm, $b = 4{,}5$ cm und $\alpha = 48°$! Verwandle es unter Beibehaltung der Seite a **a)** in ein Rechteck, **b)** in ein anderes Parallelogramm, in dem $\alpha_1 = 65°$ ist!

12. Verwandle ein Parallelogramm unter Beibehaltung einer Seite und eines Winkels in ein Dreieck!

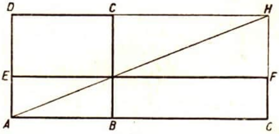


Abb. 44

13. Verwandle ein Rechteck in ein anderes, von dem eine Seite gegeben ist! **(Verwende Ergänzungsparallelogramme!)**

14. a) Verwandle ein Quadrat $ABCD$ in ein Rechteck, von dem eine Seite gegeben ist! Verfahre nach Abb. 44!

b) Laß in der Zeichnung Punkt H auf der Geraden DC wandern! Welche Folgen hat es für die Form des Rechtecks? Verfolge den Weg des Punktes F!

15. Verwandle ein Parallelogramm unter Beibehaltung des Winkels α in ein anderes, von dem gegeben ist **a)** a_1, **b)** b_1!

16. Verwandle ein Parallelogramm mit den Seiten a und b **a)** in ein anderes mit den Seiten a_1 und b_1, **b)** in einen Rhombus mit der Seite a_1, **c)** in ein Dreieck, das die gleiche Höhe hat, **d)** in ein Dreieck, das die gleiche Grundseite hat!

17. Verwandle ein Trapez **a)** in ein Dreieck, **b)** in ein Parallelogramm, **c)** in ein Rechteck!

18. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck (Achteck, Zwölfeck) und verwandle es **a)** in ein Dreieck, **b)** in ein Rechteck! Beachte, daß die Teildreiecke gleiche Höhen haben!

19. Beim Zuschneiden ist ein dreieckiger Stoffrest übriggeblieben, zwei seiner Seiten messen 90 bzw. 65 cm und bilden einen Winkel von 75°. Es soll eine rechteckige Stoffbahn daraus genäht werden, die 90 cm lang ist. An Hand einer Zeichnung im Maßstab 1 : 10 ist zu überlegen, wie der Stoff zugeschnitten und die Teile zusammengenäht werden müssen. Die Maße sind der Zeichnung zu entnehmen.

20. Beim Anfertigen von Vorhängen sind zwei gleiche trapezförmige Stoffreste übriggeblieben. Es messen nach den Bezeichnungen in Abb. 45 $AB = 130$ cm; $CD = 96$ cm; $h = 60$ cm und der Winkel $\alpha = 68°$. Aus beiden Resten soll eine rechteckige Bahn von gleicher Breite hergestellt werden. In welcher Weise ist das möglich? (Skizze!)

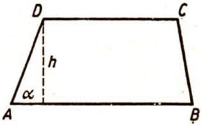


Abb. 45

21. Der Acker des Bauern G. schiebt sich in das Grundstück des Bauern Str., so daß von dessen Besitz auf der Straßenseite ein dreieckiges Stück abgetrennt wird. Da hierdurch die Bearbeitung sehr erschwert wird, wollen sie einen Tausch so vornehmen, daß G. das Dreieck an der Straße und Str. dafür einen Streifen an der gegenüberliegenden Seite erhält (Abb. 46). Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung!

22. Zwei Nachbargärten bilden zusammen ein großes Rechteck von 53 m Länge und 16 m Breite. Die Grenzlinie verläuft aber schräg, und zwar von Meter 23,7 an der einen Längsseite bis zum Meter 34,5 an der anderen Längsseite. Die Grenze soll rechtwinklig gelegt werden. Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 500!

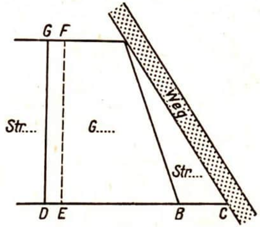


Abb. 46

23. Die Grenze zweier aneinanderstoßender Grundstücke (Abb. 47) ist eine gebrochene Linie. Zur Erleichterung der Bodenbestellung kommen die Nachbarn überein, die Grenze von C aus geradlinig zu führen. Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung!

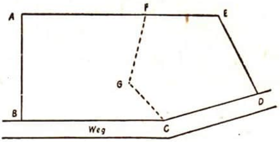


Abb. 47

43. Der Lehrsatz des Pythagoras

Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, errichte über den Schenkeln und der Grundlinie die Quadrate und ziehe in den Quadraten die Diagonalen, wie Abb. 48a zeigt! Vergleiche die entstandenen Dreiecke miteinander! Vergleiche den Flächeninhalt beider Kathetenquadrate mit dem des Hypotenusenquadrats! Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm! Miß die Länge der Hypotenuse! Zeichne über jeder Seite das Quadrat und zerlege es in Quadratzentimeter! Zähle die Inhalte beider Kathetenquadrate zusammen und vergleiche die Summe mit dem Inhalt des Hypotenusenquadrats!

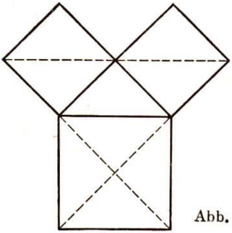


Abb. 48a

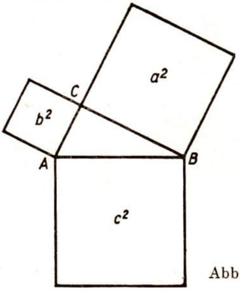


Abb. 48b

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Lehrsatz des Pythagoras).

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(Abb. 48 b)}$$

Beweis (Abb. 49): Man zeichnet zweimal ein Quadrat mit der Seite $a + b$ und legt in jedes von ihnen vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und den Hypotenusen c, wie es Abb. 49 zeigt. Der Inhalt dieser vier Dreiecke ist $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$.

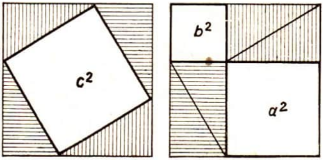


Abb. 49

Die im ersten Falle von den Hypotenusen, im zweiten Falle von den Katheten abgegrenzten Vierecke sind gleichseitig und rechtwinklig, sind also Quadrate mit den Seiten c, b und a. Dann ist der Inhalt

$$\begin{array}{llr} \text{des ersten} & \text{Quadrats} & F = c^2 + 2ab, \\ \text{des zweiten} & \quad ,, & F = a^2 + b^2 + 2ab \\ \hline & c^2 + 2ab & = a^2 + b^2 + 2ab \\ & c^2 & = a^2 + b^2. \end{array}$$

Aufgaben

1. a) Beweise den Satz des Pythagoras unter Benutzung der Formel für $(a - b)^2$ nach Abb. 50!

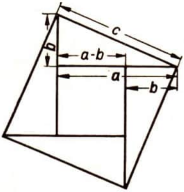


Abb. 50

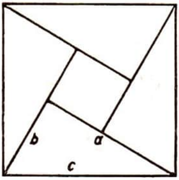


Abb. 51

b) Lege vier kongruente rechtwinklige Dreiecke nach Art der Abb. 51 zusammen! Weise nach, daß dabei zwei Quadrate entstehen müssen, berechne das frei bleibende innere Quadrat aus den Katheten a und b und drücke den Inhalt des großen Quadrats durch die in ihm enthaltenen Teile aus! Benutze diese Überlegungen zu einem neuen Beweis für den Satz des Pythagoras!

c) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes (Abb. 52) **1.** als Summe der Teildreiecke, **2.** als Trapez! Benutze wieder die Teilergebnisse zum Beweis des pythagoreischen Satzes!

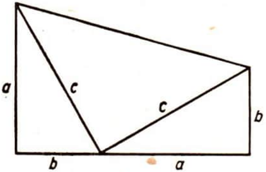


Abb. 52

2. Zeichne zwei Quadrate und dann ein drittes, das gleich der Summe der beiden Quadrate ist!

3. Zeichne zwei Quadrate mit den Seiten

a) $a_1 = 3$ cm und $a_2 = 4{,}5$ cm

b) $a_1 = 2{,}8$ cm und $a_2 = 3{,}5$ cm

c) $a_1 = 1{,}8$ cm und $a_2 = 3{,}6$ cm

und dazu das Quadrat, das gleich der Summe der beiden gegebenen Quadrate ist!

4. Zeichne ein Quadrat, das gleich der Summe von **a)** 3, **b)** 4, **c)** 6, **d)** 7 Quadraten mit den Seiten s_1, s_2, s_3 . . . ist! Abb. 53 zeigt eine praktische Lösung dieser Aufgabe.

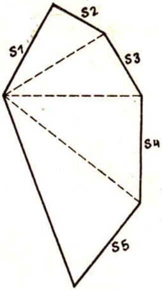


Abb. 53

5. Zeichne ein Quadrat mit der Seite $a = 2$ cm und daneben Quadrate, die doppelt, dreimal, viermal, fünfmal, sechsmal so groß sind! Miß deren Seiten und vergleiche!

6. Es ist anzunehmen, daß schon die alten Ägypter einen rechten Winkel mit Hilfe eines Seiles absteckten, das durch Knoten in Teile von 3, 4 und 5 Längeneinheiten zerlegt war. Führe den Versuch auf dem Schulhof mit einer 3 m + 4 m + 5 m langen Schnur aus und begründe das Verfahren!

7. Versuche weitere rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können (pythagoreische Dreiecke)!

Anleitung: Die Schenkel eines rechten Winkels werden, vom Scheitelpunkt beginnend, mit Zentimetereinteilung versehen und als Katheten betrachtet; die Hypotenuse kann mit dem Zirkel abgegriffen werden.

8. a) Man nennt positive ganze Zahlen a, b und c, durch die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ befriedigt wird, pythagoreische Zahlen. 3, 4 und 5 sind z. B. pythagoreische Zahlen. Weise nach, daß auch $3n$, $4n$ und $5n$ pythagoreische Zahlen sind, wenn n irgendeine positive ganze Zahl ist.

b) Man hat gefunden, daß sich pythagoreische Zahlen auf folgende Art ergeben:

Sind m und n zwei beliebige positive ganze Zahlen, so liefern die Ausdrücke $2mn$, $m^2 - n^2$ und $m^2 + n^2$ pythagoreische Zahlen. Stelle eine Tabelle pythagoreischer Zahlen auf, in der z. B. m und n alle Zahlen von 1 bis 10 durchlaufen!

XII. Quadratzahlen und Quadratwurzeln

44. Das Quadrieren der Zahlen

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite 5 cm (9 cm, 30 m, 700 m) mißt?
Jedes Produkt aus zwei gleichen Faktoren läßt sich als Flächeninhalt eines Quadrats auffassen.
Man schreibt $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$ und nennt 64 die **zweite Potenz** oder das **Quadrat** der Grundzahl 8.
Welche Formeln kann man benutzen, um zwei- und mehrstellige Zahlen ins Quadrat zu erheben?

Erklärung: Eine Zahl **quadrieren** heißt, ihre zweite Potenz oder ihr Quadrat bestimmen.

Aufgaben

1. Wie groß sind die Quadrate folgender Zahlen:

a) 26 **b)** 37 **c)** 43 **d)** 47 **e)** 56 **f)** 68
g) 0,1 **h)** 8,3 **i)** 0,94 **k)** 0,013 **l)** $\frac{1}{3}$ **m)** $\frac{11}{12}$?

2. Quadriere die folgenden Zahlen nach Zerlegen in geeignete Faktoren, wie z.B. $63^2 = 3^2 \cdot 21^2 = 9 \cdot 441 = 4\,410 - 441 = 3\,969$:

a) 27^2 **b)** 33^2 **c)** 35^2 **d)** 36^2 **e)** 56^2!

3. Zeige die Richtigkeit der Formel
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$!

4. Berechne folgende Quadrate

a) 125^2 **b)** 432^2 **c)** 683^2 **d)** 745^2 **e)** 876^2 **f)** 989^2 **g)** 569^2 **h)** 794^2
nach der Formel für das Quadrat einer dreigliedrigen Summe! Schreibe jeweils die Teilprodukte untereinander und beachte, welche Stelle von dem einzelnen Teilprodukt beeinflußt wird!

5. Es ist $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + a + (a + 1)$, demnach
$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 20 + 21$.

Berechne ebenso **a)** 31^2; 41^2; ...; 91^2, **b)** 101^2; 201^2; 801^2; 901^2!

6. Es ist $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 = a^2 - a - (a - 1)$, demnach
$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 20 - 19 = 361$.

Berechne ebenso **a)** 29^2; 39^2; ...; 99^2 **b)** 199^2; 299^2; ...; 999^2!

7. Es ist $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 5 \cdot 20 + 5^2 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 5^2 = 20 \cdot 30 + 5^2$.
Berechne entsprechend 35^2; 45^2; . . .; 95^2!

8. Es ist $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$; begründe die Formel!

9. Benutze die Formel der Aufgabe 8, um Quadratzahlen nach folgendem Beispiel zu berechnen:
$107^2 = 114 \cdot 100 + 49 = \underline{\underline{11\,449}}$

a) 103^2 **b)** 197^2 **c)** 206^2 **d)** 307^2 **e)** 498^2 **f)** 999^2 **g)** 54^2 **h)** 48^2!

45. Die Quadrattafel

Um das Berechnen der Quadrate zu ersparen, hat man die Quadratzahlen in Tafeln zusammengestellt. So enthält die hier beigefügte Quadrattafel die Quadrate der Zahlen 1,00 bis 9,99. Jeweils die beiden ersten Ziffern der Zahlen 1,00 bis 9,99 stehen in der linken Spalte, die letzte Ziffer steht in der ersten Zeile. Das Quadrat der Zahl 1,23 z. B. steht im Schnittpunkt der zu 1,2 gehörenden Zeile mit der zur Endziffer 3 gehörenden Spalte. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen heißt **Tafeldifferenz** (D). In der mit D überschriebenen Spalte steht die Tafeldifferenz zwischen der letzten Quadratzahl einer Zeile und der ersten der folgenden Zeile.

Aufsuchen von Quadratzahlen

I. Die Quadratzahl jeder zweistelligen Zahl ist in der Tafel genau, die jeder dreistelligen Zahl näherungsweise angegeben.

Beispiele:

1. $6{,}7^2 = \underline{\underline{44{,}89}}$
2. $4{,}56^2 \approx \underline{\underline{20{,}79}}$
3. $45{,}6^2 = 4{,}56^2 \cdot 10^2 \approx 20{,}79 \cdot 100 \approx \underline{\underline{2\,079}}$
4. $456^2 = 4{,}56^2 \cdot 100^2 \approx 20{,}79 \cdot 10\,000 \approx \underline{\underline{207\,900}}$
5. $0{,}456^2 = 4{,}56^2 : 10^2 \approx 20{,}79 : 100 \approx \underline{\underline{0{,}2079}}$

II. Die Quadratzahl einer vierstelligen Zahl ist nicht ohne weiteres der Tafel zu entnehmen. Sie kann aus den Quadratzahlen der benachbarten dreistelligen Zahlen angenähert berechnet werden und liegt zwischen den benachbarten Quadratzahlen. Das Verfahren zur Berechnung von Zwischenwerten wird Interpolation (Zwischenschaltung) genannt.

Beispiel: Wie groß ist $3{,}568^2$?

Nach der Tafel ist $3{,}56^2$ ($= 3{,}560^2$) $\approx 12{,}67$ und $3{,}57^2$ ($= 3{,}570^2$) $\approx 12{,}74$. Wenn die Grundzahl 3,560 um 10 Tausendstel (10 Einheiten der letzten Dezimale) wächst, nimmt ihr Quadrat um 7 Hundertstel (7 Einheiten der letzten Dezimale) zu.

Der Wert für $3{,}568^2$ liegt zwischen 12,67 und 12,74. Zur Vereinfachung nimmt man nun an, daß die Quadratzahlen innerhalb des kleinen Zahlenbereiches im selben Verhältnis wie die Grundzahlen wachsen.

Den Zwischenwert berechnet man durch folgende Schlüsse:

Wächst die Grundzahl um 10 Einheiten, so wächst ihr Quadrat um 7 Einheiten.

Wächst die Grundzahl um 1 Einheit, so wächst ihr Quadrat um $\frac{7}{10}$ Einheiten.

Wächst die Grundzahl um 8 Einheiten, so wächst ihr Quadrat um $\frac{7 \cdot 8}{10}$ Einheiten.

$$\frac{7 \cdot 8}{10} = 5{,}6 \approx 6$$

$$\mathbf{3{,}568^2 \approx 12{,}67 + 0{,}06 = 12{,}73}$$

Aufgaben

1. Berechne **a)** die Quadrate der Zahlen 1 bis 20,

b) die Quadrate der reinen Zehnerzahlen!

2. Rechne und schreibe die Ergebnisse tabellarisch untereinander!

a) 1^2; 2^2; ...; 9^2 **b)** 10^2; 20^2; ...; 90^2; 99^2

c) 100^2; 200^2; ...; 900^2; 999^2

d) $1\,000^2$; $2\,000^2$; ...; $9\,000^2$; $9\,999^2$

e) $0{,}1^2$; $0{,}2^2$; ...; $0{,}9^2$ **f)** $0{,}01^2$; $0{,}02^2$; ...; $0{,}99^2$

g) $0{,}001^2$; $0{,}002^2$; $0{,}043^2$; $0{,}087^2$; $0{,}038^2$; $0{,}999^2$

3. Leite aus den Beispielen der Aufgabe 2 folgende Regeln ab:

a) Das Quadrat einer 1stelligen Zahl ist 1- oder 2stellig.
Das Quadrat einer 2stelligen Zahl ist 3- oder 4stellig usw.

b) Das Quadrat eines Dezimalbruches hat doppelt soviel Stellen hinter dem Komma wie die Grundzahl.

4. Berechne in jeder folgenden Aufgabe das Quadrat der ersten Zahl und leite von diesem die übrigen ab:

a) 15^2; 150^2; $1{,}5^2$; $1\,500^2$; $0{,}15^2$; $0{,}015^2$; $15\,000^2$;

b) 63^2; $0{,}63^2$; 630^2; $6{,}3^2$; $0{,}063^2$; $6\,300^2$; $63\,000^2$;

c) 87^2; $8\,700^2$; $0{,}087^2$; $87\,000^2$; $8{,}7^2$; 870^2; $0{,}87^2$;

d) 354^2; $3{,}54^2$; $3\,540^2$; $35{,}4^2$; $35\,400^2$; $0{,}354^2$; $354\,000^2$!

Quadratzahlen von 1,00

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	22
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	24
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	26
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	28
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	30
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	32
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	34
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	36
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	38
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	40
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	42
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	44
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	46
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	48
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	50
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	52
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	54
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	56
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	58
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	60
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	62
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	7
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	7
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	7
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	7
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	8
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	8
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	8
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	8
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	8
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	9
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	9
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	9
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	9
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	9
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	10
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	10
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	10
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	10
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	10
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	11
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	11
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	11
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

bis 9,99 und Quadratwurzeln

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	11
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	11
5,7	32,49	32,60	32.72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	12
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	12
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	12
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	12
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	12
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	13
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	13
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	13
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	13
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	13
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	14
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	14
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	14
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	14
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	14
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	15
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	15
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	15
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	15
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	15
7,7	59.29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	16
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	16
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	16
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	16
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	16
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	17
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	17
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	17
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	17
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	17
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	18
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	18
8.9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	18
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	18
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	18
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	19
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	19
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	19
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	19
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	19
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	20
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	20
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	20
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

5. Bestimme mit Hilfe der Quadrattafel die Werte

a) $1{,}4^2$; $2{,}7^2$; $5{,}8^2$; $9{,}6^2$; $7{,}4^2$; $2{,}3^2$; $4{,}1^2$; $8{,}7^2$; $6{,}3^2$

b) $1{,}83^2$; $2{,}95^2$; $6{,}74^2$; $8{,}88^2$; $5{,}97^2$; $2{,}17^2$; $3{,}44^2$; $5{,}13^2$; $9{,}19^2$

c) 23^2; 39^2; 87^2; 56^2; 99^2; 42^2; 18^2; 47^2; 63^2; 75^2

d) 245^2; 768^2; 375^2; 939^2; 417^2; 142^2; 328^2; 496^2; 857^2; 521^2

e) $65{,}3^2$; $79{,}2^2$; $45{,}9^2$; $91{,}8^2$; $50{,}7^2$; $83{,}4^2$; $26{,}7^2$; $44{,}4^2$; $63{,}3^2$

f) $0{,}732^2$; $0{,}394^2$; $0{,}086^2$; $0{,}509^2$; $0{,}057^2$; $0{,}873^2$; $0{,}074^2$; $0{,}771^2$!

6. a) $3{,}784^2$	**b)** $5{,}972^2$	**c)** $8{,}659^2$	**d)** $7{,}587^2$
e) $86{,}45^2$	**f)** $39{,}49^2$	**g)** $439{,}6^2$	**h)** $0{,}739\,4^2$
i) $6{,}753^2$	**k)** $96{,}78^2$	**l)** $653{,}3^2$	**m)** $9{,}476^2$!

7. Wie hoch ist der Kaufpreis für eine quadratische Baustelle, deren Seite 37,5 m mißt, wenn 1 m² mit 5,60 DM bezahlt wird?

46. Die Quadratwurzel

Wie groß ist der Umfang eines quadratischen Gartens von 784 m² Flächeninhalt?

Will man die Aufgabe lösen, so muß man zuerst berechnen, wie lang die Seite des Quadrats ist. Es muß die Grundzahl gesucht werden, die, mit sich selbst multipliziert, die Quadratzahl 784 ergibt. Nun ist $28 \cdot 28 = 784$; man nennt die Grundzahl 28 die Quadratwurzel aus 784 und schreibt $28 = \sqrt{784}$.

Eine Seite des Gartens mißt also 28 m, der Umfang $4 \cdot 28$ m $= 112$ m.

Erklärung: Unter der **Quadratwurzel** aus einer Zahl a versteht man diejenige Zahl, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl a ist. Die gegebene Zahl a heißt **Radikand**[1]).

Beispiel: 9 ist die Quadratwurzel aus 81; man schreibt $9 = \sqrt{81}$. 81 ist der Radikand.

> **Die Quadratwurzel aus einer 1- oder 2stelligen Quadratzahl ist 1stellig.**
> **Die Quadratwurzel aus einer 3- oder 4stelligen Quadratzahl ist 2stellig.**
> **Die Quadratwurzel aus einer 5- oder 6stelligen Quadratzahl ist 3stellig.**

Die Quadratwurzel aus 3- und 4stelligen Zahlen

Beispiel: Die Quadratwurzel aus 4 096 soll berechnet werden.

1) radix (lat.): Wurzel.

Man teilt die Zahl von rechts nach links in Gruppen zu je 2 Stellen. Die Quadratwurzel muß 2stellig werden, also Zehner und Einer enthalten, die man mit a und b bezeichnet. In 4 096 ist 3 600 als größtes Zehnerquadrat enthalten. Da $60^2 = 3\,600$ ist, ist $a = 60$. Der Rest 496 ist die Summe von $2ab$ und b^2. Im Verhältnis zu $2ab$ ist b^2 klein und wird zunächst vernachlässigt. Man findet die Einer (b), indem man 496 durch $2a$ (= 120) dividiert. $2ab$ (= 480) wird von 496 subtrahiert, der Rest 16 ist b^2.

$$\begin{array}{rll}
 & \sqrt{40'96} = \overset{a}{60} + \overset{b}{4} & \\
a^2 = & \underline{36\;00} & \\
 & 4\;96 : 120\ (2a) & \\
2ab = & \underline{4\;80} & \\
 & 16 & \\
b^2 = & \underline{16} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie das Verfahren abgekürzt werden kann:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{40'96} = \underline{\underline{64}} \\
a^2 = & \underline{36} \\
 & 49 : 12 \\
2ab = & \underline{48} \\
 & 16 \\
b^2 = & \underline{16} \\
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{40'96} = \underline{\underline{64}} \\
a^2 = & \underline{36} \\
 & 49|6 : 12|4 \\
2ab + b^2 = & \underline{49\;6} \\
 & 0
\end{array}$$

Erkläre und begründe beide Verfahren!

Die Quadratwurzel aus 5- und mehrstelligen Zahlen

Beispiel: Die Quadratwurzel aus 556 516 soll berechnet werden.

Die Einteilung in Gruppen zu je 2 Stellen von rechts nach links zeigt, daß die Wurzel 3stellig wird. Man bezeichnet die Hunderter, Zehner und Einer mit a, b und c. Das nächstniedere Hundertquadrat ist 490 000. Den Rest 66 516 dividiert man durch $2a$ (= 1 400) und erhält so b (= 40). Es müssen $2ab$ und b^2 (letzteres nicht vergessen!) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{55'65'16} = \overset{a}{700} + \overset{b}{40} + \overset{c}{6} \\
a^2 = & \underline{49\;00\;00} \\
 & 6\;65\;16 : 1\,400\ (2a) \\
2ab = & \underline{5\;60\;00} \\
 & 1\;05\;16 \\
b^2 = & \underline{16\;00} \\
 & 89\;16 : 1\,480\ (2(a+b)) \\
2(a+b)c = & \underline{88\;80} \\
 & 36 \\
c^2 = & \underline{36} \\
 & 0
\end{array}$$

Um c zu erhalten, dividiert man den Rest 8 916 durch $2(a+b) = 1\,480$; $2(a+b)c = 8\,880$. Der Rest 36 ist das Einerquadrat (vgl. Abb. 54).

Erkläre und begründe auch die folgenden abgekürzten Rechenweisen:

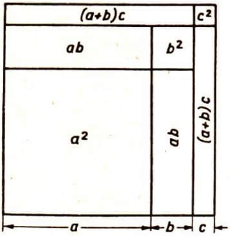


Abb. 54

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{55'65'16} = \underline{\underline{746}} \\
\underline{49} \\
\;\;66:14 \\
\;\;\underline{56} \\
\;\;105 \\
\;\;\;\underline{16} \\
\;\;\;891:148 \\
\;\;\;\underline{888} \\
\;\;\;\;\;\;36 \\
\;\;\;\;\;\;\underline{36} \\
\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\sqrt{55'65'16} = \underline{\underline{746}} \\
\underline{49} \\
\;\;66|5:14|4 \\
\;\;\underline{57\,6} \\
\;\;\;8\,91|6:148|6 \\
\;\;\;\underline{8\,91\,6} \\
\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Bei Quadratzahlen mit mehr als 6 Stellen wird das Verfahren in gleicher Weise fortgesetzt.

Aufgaben

Wie groß ist die Quadratwurzel aus

1. a) 4 **b)** 1 **c)** 16 **d)** 49 **e)** 64
f) 25 **g)** 36 **h)** 81 **i)** 121 **k)** 144
l) 256 **m)** 196 **n)** 289 **o)** 169 **p)** 324

2. a) 900 **b)** 2 500 **c)** 3 600 **d)** 16 900 **e)** 19 600
f) 14 400 **g)** 4 900 **h)** 22 500 **i)** 62 500 **k)** 12 100

3. a) $\frac{1}{25}$ **b)** $\frac{9}{16}$ **c)** $12\frac{1}{4}$ **d)** $7\frac{1}{9}$ **e)** $7\frac{9}{16}$
f) $5\frac{4}{9}$ **g)** $3\frac{1}{16}$ **h)** $6\frac{19}{25}$ **i)** $12\frac{24}{25}$ **k)** $3\frac{13}{36}$

4. a) a^2 **b)** a^2b^2 **c)** $x^2 + 2xy + y^2$ **d)** $9a^2 + 24ab + 16b^2$?

Berechne die folgenden Quadratwurzeln:

5. a) $\sqrt{576}$ **b)** $\sqrt{841}$ **c)** $\sqrt{1225}$ **d)** $\sqrt{3844}$
e) $\sqrt{8649}$ **f)** $\sqrt{3249}$ **g)** $\sqrt{7056}$ **h)** $\sqrt{9025}$
i) $\sqrt{7569}$ **k)** $\sqrt{9409}$ **l)** $\sqrt{1849}$ **m)** $\sqrt{6241}$

6. a) $\sqrt{15\,129}$ **b)** $\sqrt{27\,889}$ **c)** $\sqrt{328\,329}$ **d)** $\sqrt{524\,176}$
e) $\sqrt{857\,476}$ **f)** $\sqrt{77\,284}$ **g)** $\sqrt{308\,025}$ **h)** $\sqrt{649\,636}$
i) $\sqrt{17\,161}$ **k)** $\sqrt{88\,209}$ **l)** $\sqrt{246\,016}$ **m)** $\sqrt{994\,009}$
n) $\sqrt{494\,209}$ **o)** $\sqrt{370\,881}$ **p)** $\sqrt{638\,401}$ **q)** $\sqrt{331\,776}$

7. **a)** $\sqrt{390\,625}$ **b)** $\sqrt{559\,504}$ **c)** $\sqrt{863\,041}$ **d)** $\sqrt{495\,616}$
e) $\sqrt{603\,729}$ **f)** $\sqrt{741\,321}$ **g)** $\sqrt{165\,649}$ **h)** $\sqrt{788\,544}$
i) $\sqrt{313\,600}$ **k)** $\sqrt{589\,824}$ **l)** $\sqrt{820\,836}$ **m)** $\sqrt{978\,121}$!

Anwendungen

8. Ein quadratförmiger Bauplatz kostet 5 880 DM, wenn 1 m² mit 7,50 DM bezahlt wird. Wie lang ist die Seite des Bauplatzes?

9. Jemand verkaufte ein quadratisches Grundstück für 720 DM. Wie groß war die Seitenlänge des Grundstücks, wenn er für 1 m² 5 DM erhielt?

47. Die Quadratwurzel aus Dezimalbrüchen
Irrationale Zahlen

Die Quadratwurzel aus Dezimalbrüchen und gemischten Zahlen. Wieviel Stellen rechts vom Komma haben die Quadrate der Zehntel, Hundertstel und Tausendstel? Wieviel Stellen muß demnach die Quadratwurzel aus einem 2-, 4-, 6-, 8stelligen Dezimalbruch besitzen, der eine Quadratzahl ist? (Vergleiche Aufg. 2 und 3 in Abschn. 45!)

Beispiele:

$$\sqrt{0,'23'91'21} = \underline{\underline{0{,}489}}$$
```
 16
 ---
  791 : 8|8
  704
  ---
   8721 : 96|9
   8721
   ----
      0
```

$$\sqrt{7'64,'52'25} = \underline{\underline{27{,}65}}$$
```
 4
 -
 364 : 4|7
 329
 ---
  3552 : 54|6
  3276
  ----
   27625 : 552|5
   27625
   -----
       0
```

Bei Dezimalbrüchen teilt man vom Komma aus nach rechts, bei gemischten Zahlen, die als Dezimalbrüche geschrieben sind, vom Komma aus nach links und rechts Gruppen zu je 2 Stellen ab.

Irrationale Zahlen

Die Quadratwurzel aus 5 soll bestimmt werden.

1. $\sqrt{5}$ kann keine ganze Zahl sein, denn $2^2 < 5 < 3^2$.

2. $\sqrt{5}$ kann keine gemischte Zahl sein, denn gemischte Zahlen ergeben mit sich selbst multipliziert wieder gemischte Zahlen.

3. $\sqrt{5}$ kann gezeichnet werden (Abb. 55), aber weder eine ganze Zahl noch ein unechter Bruch gibt ihren Wert an, und auf jedem noch so fein unterteilten Maßstab kann die Länge der Strecke, die $\sqrt{5}$ darstellt, daher nur angenähert abgelesen werden.

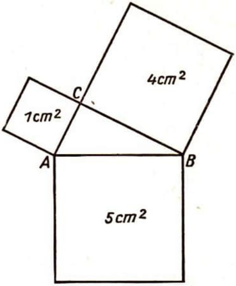


Abb. 55

Zahlen, die wie $\sqrt{5}$ weder ganze Zahlen noch Brüche sind, nennt man **irrationale**[1]) Zahlen. Ganze Zahlen und Brüche sind rationale Zahlen.

4. Will man den Näherungswert für eine Quadratwurzel berechnen, auch wenn die Wurzel eine irrationale Zahl ist, so wendet man das für ganze Zahlen und Dezimalbrüche geübte Verfahren an. Je nach der verlangten Genauigkeit bricht man die Rechnung ab, wenn man **2, 3, 4** oder mehr Stellen nach dem Komma erhalten hat.

Beispiele:

a) $\sqrt{7} = 2{,}6457 \approx 2{,}646 \approx 2{,}65$

4
300 : 4|6
276
2400 : 52|4
2096
30400 : 528|5
26425
397500 : 5290|7
370349
----

b) $\sqrt{0{,}60} = 0{,}77459 \approx 0{,}7746 \approx 0{,}775$

49
1100 : 14|7
1029
7100 : 154|4
6176
92400 : 1548|5
77425
1497500 : 15490|9
1394181

Aufgaben

1. a) $\sqrt{0{,}49}$ **b)** $\sqrt{2{,}25}$ **c)** $\sqrt{2{,}56}$ **d)** $\sqrt{6{,}25}$ **e)** $\sqrt{0{,}0625}$
f) $\sqrt{1{,}44}$ **g)** $\sqrt{0{,}0144}$ **h)** $\sqrt{1{,}21}$ **i)** $\sqrt{0{,}0121}$ **k)** $\sqrt{0{,}0004}$

2. a) $\sqrt{0{,}0676}$ **b)** $\sqrt{0{,}4624}$ **c)** $\sqrt{0{,}8836}$ **d)** $\sqrt{0{,}5184}$
e) $\sqrt{0{,}6724}$ **f)** $\sqrt{0{,}027\,889}$ **g)** $\sqrt{0{,}082\,369}$ **h)** $\sqrt{0{,}390\,625}$
i) $\sqrt{0{,}649\,636}$ **k)** $\sqrt{0{,}435\,621}$ **l)** $\sqrt{0{,}023\,459}$ **m)** $\sqrt{0{,}423\,876}$

1) irrationális (lat.): kein Verhältnis besitzend.

3. **a)** $\sqrt{10{,}89}$ **b)** $\sqrt{457{,}96}$ **c)** $\sqrt{18{,}4041}$ **d)** $\sqrt{13{,}205\,956}$
e) $\sqrt{5\,745{,}64}$ **f)** $\sqrt{735{,}440}$ **g)** $\sqrt{65{,}4481}$ **h)** $\sqrt{548{,}0281}$

4. **a)** $\sqrt{3\,686{,}9184}$ **b)** $\sqrt{33{,}790\,969}$ **c)** $\sqrt{709\,469{,}29}$ **d)** $\sqrt{9\,531{,}6169}$
e) $\sqrt{49\,079{,}9716}$ **f)** $\sqrt{2\,816{,}4249}$ **g)** $\sqrt{77{,}951\,241}$ **h)** $\sqrt{231\,101{,}3329}$

5. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{38}$ **e)** $\sqrt{96}$
f) $\sqrt{360}$ **g)** $\sqrt{12{,}62}$ **h)** $\sqrt{83{,}17}$ **i)** $\sqrt{3{,}349}$ **k)** $\sqrt{7\,175}$
l) $\sqrt{552{,}3}$ **m)** $\sqrt{0{,}018\,23}$ **n)** $\sqrt{0{,}9}$ **o)** $\sqrt{0{,}072\,5}$ **p)** $\sqrt{14{,}4}$
q) $\sqrt{\frac{13}{20}}$ **r)** $\sqrt{\frac{19}{50}}$ **s)** $\sqrt{3\frac{4}{5}}$ **t)** $\sqrt{3\frac{1}{20}}$ **u)** $\sqrt{4\frac{2}{5}}$

Anleitung: Verwandle die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche!

48. Aufsuchen von Quadratwurzeln in der Quadrattafel

1. Ist die Quadratzahl in der Tafel enthalten, so kann man die Quadratwurzel ohne weiteres ablesen.

   Beispiele:

   a) $\sqrt{79{,}21} = 8{,}9$ b) $\sqrt{29{,}92} = 5{,}47$

   c) $\sqrt{571{,}2} = \sqrt{5{,}712 \cdot 100} = \sqrt{5{,}712} \cdot \sqrt{100} = 2{,}39 \cdot 10 = 23{,}9$

   d) $\sqrt{0{,}5402} = \sqrt{54{,}02 : 100} = \sqrt{54{,}02} : \sqrt{100} = 7{,}35 : 10 = 0{,}735$

2. Ist die Quadratzahl nicht in der Tafel enthalten, so sucht man die zur nächstniederen Quadratzahl gehörige dreiziffrige Zahl. Die vierte Ziffer dieser Zahl bestimmt man durch Zwischenschalten mit Hilfe eines Dreisatzes.

   a) $\sqrt{90}$

   Die nächstniedere Quadratzahl ist 89,87; die nächsthöhere 90,06; die Tafeldifferenz (D) beträgt 19 Einheiten ihrer letzten Dezimale. Man liest ab: $\sqrt{89{,}87} = 9{,}48$ und schließt:

   Wächst die Quadratzahl um 19 Einheiten, so wächst die Wurzel um 10 Einheiten.

   Wächst die Quadratzahl um 1 Einheit, so wächst die Wurzel um $\frac{10}{19}$ Einheiten.

   Wächst die Quadratzahl um 13 Einheiten, so wächst die Wurzel um $\frac{10 \cdot 13}{19}$ Einheiten.

$$\frac{10 \cdot 13}{19} = 6\frac{16}{19} \approx 7$$

$$\sqrt{90} = 9{,}48 + 0{,}007 = \underline{\underline{9{,}487}}$$

b) $\sqrt{3\,964}$

$\sqrt{3\,964} = \sqrt{39{,}64 \cdot 100} = \sqrt{39{,}64} \cdot \sqrt{100}$

$\sqrt{39{,}56} = 6{,}29$; Nebenrechnung: $\frac{10 \cdot 8}{13} = 6\frac{2}{13} \approx 6$

$\sqrt{39{,}64} = 6{,}29 + 0{,}006 = 6{,}296$

$\sqrt{3\,964} = 6{,}296 \cdot 10 = \underline{\underline{62{,}96}}$

Aufgaben

1. a) $\sqrt{5{,}905}$ **b)** $\sqrt{62{,}73}$ **c)** $\sqrt{384{,}2}$ **d)** $\sqrt{9\,643}$
e) $\sqrt{0{,}3552}$ **f)** $\sqrt{0{,}0392}$ **g)** $\sqrt{187\,500}$ **h)** $\sqrt{0{,}003\,956}$
i) $\sqrt{58\,560}$ **k)** $\sqrt{0{,}7797}$ **l)** $\sqrt{0{,}08352}$ **m)** $\sqrt{717\,400}$

2. a) $\sqrt{36{,}9}$ **b)** $\sqrt{80{,}75}$ **c)** $\sqrt{3{,}085}$ **d)** $\sqrt{94{,}56}$
e) $\sqrt{55{,}28}$ **f)** $\sqrt{5\,790}$ **g)** $\sqrt{0{,}4854}$ **h)** $\sqrt{342{,}5}$
i) $\sqrt{892\,500}$ **k)** $\sqrt{0{,}001\,994}$ **l)** $\sqrt{0{,}000\,2345}$ **m)** $\sqrt{0{,}01857}$

3. Das Weißen der Decke einer quadratischen Küche kostete 12,46 DM. Wie groß war die Seitenlänge der Decke, wenn der Maler für 1 m² 0,68 DM berechnet hatte?

4. Weise nach, daß nach dem Lehrsatz des Pythagoras für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks folgende Gleichungen bestehen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

5. Berechne in einem rechtwinkligen Dreieck die dritte Seite und den Flächeninhalt, wenn gegeben sind:

a) $a = 8$ cm, $b = 15$ cm **b)** $a = 35$ cm, $c = 37$ cm **c)** $b = 75$ cm, $c = 1{,}28$ m!

6. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $F = 2\,425{,}6$ cm²; die Seite a mißt 64 cm. Wie groß ist der Umfang?

7. Berechne für ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite c

a) den Umfang U aus $c = 18$ cm und $h_c = 27$ cm,

b) h_c und F aus $c = 45$cm und $a = 89$ cm,

c) c und F aus $a = 17{,}5$ m und $h_c = 14{,}8$ m!

8. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mißt **a)** 12 cm, **b)** 37 cm, **c)** 9,84 m. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt!

Anleitung (Abb. 56):

Es ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$. $\quad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

9. Wie lang sind die Diagonalen **a)** eines Quadrates mit der Seite $a = 29$ cm, **b)** eines Rechtecks mit den Seiten $a = 25{,}4$ cm und $b = 19{,}3$ cm?

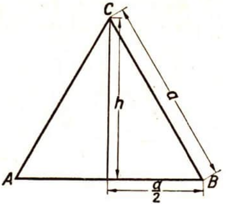


Abb. 56

10. Die Diagonale eines quadratischen Platzes ist 184 m lang. Wie groß sind Umfang und Fläche des Platzes?

11. Die Diagonalen eines Rhombus messen $e = 42{,}4$ cm und $f = 35{,}2$ cm. **a)** Wie lang ist die Seite des Rhombus? **b)** Wie groß ist der Flächeninhalt?

12. Der Durchmesser eines Kreises ist 16 cm lang; parallel zu ihm legt man in Abständen von 2 zu 2 cm Sehnen in den Kreis. Berechne ihre Längen!

49. Anwendungen

1. Der Fußboden einer Waschküche soll mit Fliesen belegt werden. Es werden 350 Stück einer Sorte bestellt, die 24 cm lang und 15 cm breit sind. Da die Ziegelei sie nicht vorrätig hat, werden Mauersteine von 25 cm Länge und 12 cm Breite genommen. Wieviel Mauersteine müssen angefahren werden?

2. Die Wände einer Küche sollen 1,35 m hoch mit Kacheln bekleidet werden. Die Küche ist 4,25 m lang und 3,60 m breit. Die Eingangstür ist 1,10 m und die Tür zur Speisekammer 0,70 m breit. Die Kacheln sind quadratisch, die Seite mißt 15 cm. Wieviel Kacheln sind nötig?

3. Die Punkte A und B (Abb. 57) liegen auf zwei Straßen, die einander rechtwinklig schneiden; sie sollen durch einen Weg verbunden werden. Wegen eines dazwischenliegenden Gehölzes kann die Strecke AB nicht gemessen werden.

Man mißt AC zu 550 m und BC zu 380 m. Berechne AB!

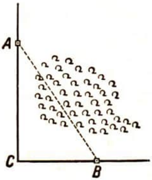


Abb. 57

4. Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an der Wand hinauf?

5. Die Giebelseite eines Hauses, die der Wetterseite zugekehrt ist, muß neu verputzt werden. Der Dachgiebel ist ein gleichseitiges Dreieck. Entnimm die Maße der Abb. 58 und berechne die Kosten des Verputzens, wenn 1 m² 6,40 DM kostet!

6. Ein Garten in Form eines gleichschenkligen Trapezes hat die parallelen Seiten $a = 59{,}5$ m bzw. $c = 45{,}5$ m und die Breite $h = 24$ m. Der Garten soll mit einem schmiedeeisernen Gitter eingezäunt werden, von dem das Meter mit 14,40 DM berechnet wird. Wie teuer ist die Umzäunung?

7. Eine Telegraphenstange ist durch ein Drahtseil befestigt, dessen Verankerung in der Erde vom Fußpunkt der Stange 7,50 m entfernt ist. Bis zur Drahtbefestigung beträgt die Höhe der Stange schätzungsweise 6 m. Wie lang ist das Drahtseil?

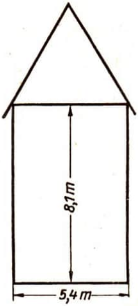


Abb. 58

8. Ein Junge läßt einen Drachen steigen, so hoch es sein 87 m langer Bindfaden zuläßt. Sein Freund, der 50 m von ihm entfernt steht, sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe über dem Erdboden hat der Drachen erreicht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

9. Bei einer Flurbereinigung erhält der Bauer Schade für zwei auseinanderliegende rechteckige Ackerflächen in anderer Lage einen gleich großen, quadratischen Ackerplan. Der erste Acker ist 24 m breit und 165 m lang, der zweite 35 m breit und 140 m lang. Wie lang muß die Seite des neuen Ackerplanes abgesteckt werden?

10. An eine 12 m lange Hauswand wird ein Schuppen mit einem einfachen Pultdach gebaut. Berechne nach den Maßen in Abb. 59,

a) wie lang die schräg verlaufende Dachkante wird,

b) wieviel m² Bretter zum Bedecken des Daches erforderlich sind!

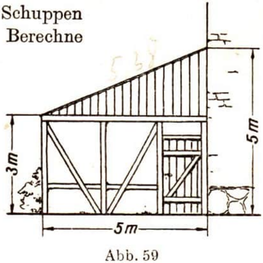


Abb. 59

11. Wie groß sind bei dem Dachbinder in Abb. 60 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m ist?

12. Ein Turmdach soll mit Dachziegeln neu gedeckt werden. Die Turmspitze hat die Form einer quadratischen Pyramide; sie ist 14,2 m hoch, die Grundkante mißt 8,6 m. Berechne: Wie groß sind **a)** eine Seitenkante, **b)** die Höhe einer

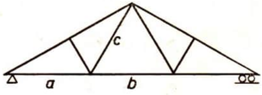


Abb. 60

Dachfläche, **c)** die gesamte Dachfläche? **d)** Wie hoch werden die Kosten, wenn der Preis für 1 m² 7,85 DM beträgt?

Anleitung: Abb. 61 zeigt den Weg der Lösung. Schneide aus einer Kartoffel ein Modell der Turmspitze und führe die entsprechenden Schnitte aus!

13. Erika fertigt drei quadratische Decken, deren Seiten 40 cm lang sind, und umgibt sie mit einer Spitze, von der 1 m 1,45 DM kostet. Sie will dazu passend noch drei Decken von gleicher Form, aber mit doppelt so großer Fläche herstellen. Wieviel DM kostet die Spitze **a)** für die ersten drei, **b)** für die letzten drei Decken?

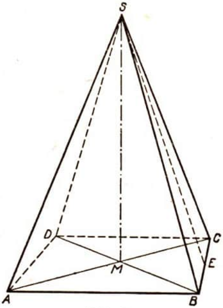


Abb. 61

14. Ein Schiff ist von Helgoland 8,5 sm (1 sm = 1,852 km) entfernt und will bei geradliniger Fahrt in einem Abstand von 4 sm an der Insel vorbeikommen. Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn es nach $1\frac{1}{4}$ Std. an Helgoland vorbeikommt?

15. Ein Schiff kam nach einer 13stündigen geradlinigen Fahrt in einem Abstand von 4,3 sm an dem Warnemünder Leuchtturm vorbei und hatte stündlich 4,75 sm zurückgelegt. Wie weit war das Schiff ursprünglich vom Warnemünder Leuchtturm entfernt?

16. Ein Schiff war von dem Leuchtturm auf Wangeroog 14,3 sm entfernt und kam bei einer (geradlinigen) Fahrt von 5,25 Knoten (5,25 Knoten = Geschwindigkeit von 5,25 sm in der Stunde) nach 2 Std. 40 Min. an dem Turm vorbei. In welcher Entfernung kam das Schiff an dem Turm vorbei?

17. Um Meerestiefen zu messen, wird das Echolot benutzt (Abb. 62). Der Schallerreger befindet sich in S, der Schallempfänger in E. Die Schiffsbreite beträgt $b = 18$ m (15 m). Der Schall pflanzt sich in Meerwasser mit einer Geschwindigkeit von 1510 m/s fort. Während der Zeitmessung ruht das Schiff.

a) Berechne Wassertiefen für einen Zeitunterschied $t = 0{,}05$; $0{,}08$; $0{,}1$ s!

b) Berechne für dieselben Zeitunterschiede die Wassertiefen, wenn die Schiffsbreite vernachlässigt wird! Vergleiche!

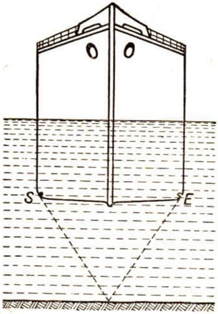


Abb. 62

XIII. Der Rechenstab

50. Der Aufbau des Rechenstabes

Setze folgende Zahlenreihen nach rechts fort:

0, 2, 4, 6, 8, ... und 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...!

Wir können die erste Zahlenreihe veranschaulichen, indem wir auf der Zahlenachse mit Zweierschritten nach rechts schreiten (Abb. 63). Jedem Schritt entspricht die Addition von 2.

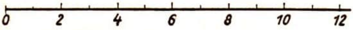


Abb. 63

Dasselbe Voranschreiten auf der Zahlenachse können wir aber auch deuten durch die Festsetzung, daß jedem Zweierschritt eine Multiplikation mit 2 entsprechen soll. Wir müssen dann die Punkte auf der Zahlenachse wie in Abb. 64 beziffern.

Warum beginnt die „Additionsachse" (Abb. 63) mit Null, die „Multiplikationsachse" (Abb. 64) dagegen mit 1?

Wie löst man mit zwei gegeneinander verschiebbaren Additionsstäben die Aufgaben $2 + 2$; $2 + 4$; $4 + 6$; $8 - 4$; $6 - 2$?

Abb. 64

Wie kann man mit zwei gegeneinander verschiebbaren Multiplikationsstäben die Aufgaben $2 \cdot 2$; $2 \cdot 4$; $4 \cdot 4$; $16:2$; $16:4$ lösen?

Man kann jede der obigen Multiplikationsaufgaben als Produkt von Primfaktoren schreiben, z. B. $4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^2$. Welche Faktoren kommen in diesen Aufgaben vor? Unser Multiplikationsstab gestattet nur die Multiplikation von Potenzen der 2. Fertige zwei entsprechende Stäbe an für die Multiplikation von Potenzen der 3 und löse mit ihnen folgende Aufgaben: $3 \cdot 3$; $3 \cdot 9$; $3 \cdot 27$; $27 : 9$!

Die Einteilung auf unseren Multiplikationsstäben soll nun verfeinert werden. Wir betrachten den Zweierstab. Welche Zahl steht in der Mitte zwischen a) 1 und 64, b) 1 und 16, c) 1 und 4, d) 1 und 2? Welche neuen Teilstriche gewinnt man durch Ausführung der Rechnungen a) $2 \cdot 1{,}41$, b) $4 \cdot 1{,}41$ usw.? Durch die Proportion $1 : x = x : 4$ findet man die mittlere Proportionale von 1 und 4. Wo findet man sie auf dem Multiplikationsstab?

Zu welchen Zahlen gelangt man durch weiteres Halbieren der durch Multiplikation der Zweierpotenzen mit 1,41 entstandenen Strecken?

Man hat Stäbe hergestellt, mit denen es möglich ist, alle Multiplikations- und Divisionsaufgaben für ganze und gebrochene Zahlen bis auf die ersten 3 geltenden Ziffern zu lösen, indem man die diesen Zahlen zugeordneten Strecken addiert oder subtrahiert. Solche Rechenstäbe benutzen vor allem Techniker, Ingenieure, Statistiker und Wissenschaftler. Die Begründung der in den folgenden Abschnitten mitgeteilten Vorschriften für das Rechnen mit diesen Rechenstäben wird später nachgeholt.

Die Rechenstäbe (Abb. 65) bestehen aus einem Stabkörper S, dessen Mitte ein in der Längsrichtung beweglicher Schieber Z (Zunge) einnimmt. Ein beweglicher Läufer L mit einem feinen Strich gestattet das Einstellen und Festhalten bestimmter Punkte. Es sind 4 Teilungen A, B, C und D vorhanden, von denen je zwei, nämlich A und B einerseits und C und D andererseits, einander gleich sind.

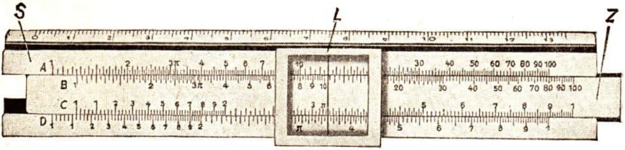


Abb. 65

Diese Teilungen werden auch **Leitern** genannt. An einer bestimmten Stelle können für mit 1 beginnende Ziffernfolgen die ersten 4, für die übrigen die ersten 3 Ziffern abgelesen werden. In Abb. 65 steht der Läuferstrich über 3,6 der Leiter D. Zu dieser Einstellung gehörende Zahlwerte sind 3,60; 36,0; 360; 0,360; 0,0360 usw. Der Rechenstab zeigt nicht, an welcher Stelle der durch den Teilstrich angegebenen Zahl das Komma steht. Einfache Multiplikationen und Divisionen werden meist mit den Leitern C und D durchgeführt.

Aufgaben

1. a) Wieviel bedeutet auf D (und C) ein Teilstrich zwischen 1 und 2, 2 und 4, 4 und 10?

b) Beantworte dieselben Fragen für A (und B)!

2. a) Stelle den Läuferstrich auf D nacheinander auf die Teilstriche für 2,5; 4,4; 1,9; 8,3; 1,64; 3,74; 5,25; 9,65; 2,42; 1,37!

b) Stelle den Läuferstrich auf D nacheinander an die Stellen 2,35; 3,23; 1,835; 5,175; 2,2; 2,02; 4,5; 4,05; 1,3; 10,3!

3. Stelle den Läuferstrich auf A an folgende Stellen, wobei z. B. zwischen 3 und 30 genau zu unterscheiden ist: 1,73; 17,3; 43,5; 28,75; 5,55; 7,05; 31,5; 3,15; 16,08!

51. Einfache Multiplikation und Division mit dem Rechenstab

a) Multiplikation

Beispiel: $2 \cdot 3 = 6$ (Abb. 66)

Einstellen: 1 auf C (C1) über 2 auf D (D 2); Läuferstrich auf C 3.

Ablesen: Auf D unter C 3.

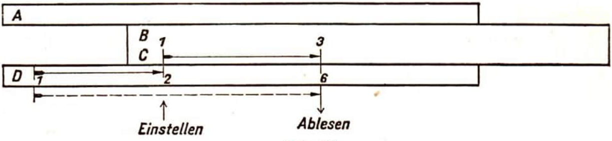


Abb. 66

b) Division

Beispiel: $8 : 4 = 2$ (Abb. 67)

Einstellen: C 4 über D 8; Läuferstrich auf C 1.

Ablesen: Auf D unter C 1.

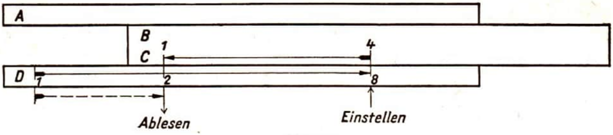


Abb. 67

Schätze vor jeder Benutzung des Rechenstabes das Ergebnis durch Überschlagsrechnung ab, um festzustellen, wohin das Komma zu setzen ist!

Aufgaben

1. Multipliziere auf den Leitern C und D:

a) $1{,}8 \cdot 3{,}5$ **b)** $2{,}4 \cdot 1{,}5$ **c)** $4{,}15 \cdot 1{,}47$ **d)** $2{,}62 \cdot 3{,}16$
e) $5{,}65 \cdot 1{,}56$ **f)** $20{,}1 \cdot 0{,}21$ **g)** $0{,}405 \cdot 0{,}102$ **h)** $1{,}64 \cdot 19{,}3$
i) $1{,}64 \cdot 0{,}25$ **k)** $1{,}64 \cdot 7{,}2$ **l)** $2{,}65 \cdot 3{,}17$ **m)** $5{,}28 \cdot 11{,}74$
n) $5{,}3 \cdot 1{,}74$ **o)** $110{,}8 \cdot 0{,}086$ **p)** $22{,}1 \cdot 0{,}43$ **q)** $42{,}5 \cdot 0{,}38$!

2. Dividiere auf den Leitern C und D:

a) $4 : 1{,}725$ **b)** $6{,}3 : 3{,}48$ **c)** $38{,}4 : 2{,}3$ **d)** $61 : 0{,}147$
e) $67{,}4 : 0{,}445$ **f)** $17 : 1{,}32$ **g)** $7{,}6 : 29$ **h)** $70 : 3{,}25$
i) $4{,}08 : 18{,}4$ **k)** $0{,}7 : 4{,}61$ **l)** $2{,}8 : 3{,}1$ **m)** $4{,}9 : 1{,}03$!

3. Berechne die folgenden Quotienten:

a) $\frac{21,4}{13,6}$ $\frac{43,5}{13,6}$ $\frac{71,8}{13,6}$ **b)** $\frac{5,78}{4,92}$ $\frac{7,36}{4,92}$ $\frac{8,15}{4,92}$!

52. Multiplikation und Division mit Rückschlag

Liegt die Ablesemarke nicht mehr im Bereich der Teilung D, so wird Punkt 10 (in Abb. 65 die rechts stehende 1) der Teilung C an Stelle von Punkt 1 (in Abb. 65 die links stehende 1) als Einstell- bzw. Ablesemarke verwendet. Die Zunge wird im Falle der Multiplikation nach links „durchgeschoben"; man nennt das einen Rückschlag.

Beispiel 1 (Multiplikation): $5 \cdot 4 = 20$ (Abb. 68)

Einstellen: C 10 über D 5 (dadurch wird der eine Faktor durch 10 dividiert, an den Ziffern des Ergebnisses also nichts geändert); Läuferstrich auf C 4.

Ablesen: Auf D unter C 4.

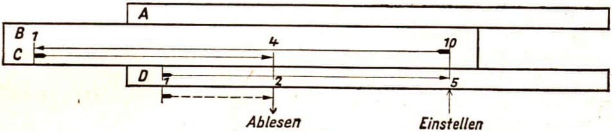


Abb. 68

Beispiel 2 (Division): $30 : 6 = 5$

Einstellen: C 6 über D 3; Läuferstrich auf C 10.

Ablesen: Auf D unter C 10 (dadurch wird der Quotient mit 10 multipliziert, an den Ziffern also nichts geändert).

Aufgaben

1. Multipliziere auf den Leitern C und D:

a) $1,64 \cdot 655$ **b)** $42,4 \cdot 0,52$ **c)** $508 \cdot 0,39$ **d)** $30,7 \cdot 0,094$
e) $375 \cdot 382$ **f)** $7,45 \cdot 0,306$ **g)** $1,63 \cdot 0,845$ **h)** $4,2 \cdot 2,7$
i) $5,3 \cdot 1,74$ **k)** $3,35 \cdot 34,5$ **l)** $3,04 \cdot 42,75$ **m)** $813 \cdot 0,141$
n) $111 \cdot 95,5$ **o)** $4,31 \cdot 3,5$ **p)** $5,27 \cdot 0,29$ **q)** $8,02 \cdot 1,98$!

2. Berechne folgende Produkte mit dem Rechenstab:

a) $5,2 \cdot 0,83 \cdot 1,76$ **b)** $17,45 \cdot 8,6 \cdot 0,84$ **c)** $7,65 \cdot 4,24 \cdot 165$
d) $0,368 \cdot 6,75 \cdot 3,34$ **e)** $22,8 \cdot 0,374 \cdot 5,67$ **f)** $124,2 \cdot 0,94 \cdot 3,72$!

3. Dividiere auf den Leitern C und D:

a) $5 : 6{,}55$ **b)** $168 : 4{,}4$ **c)** $13 : 0{,}625$ **d)** $17 : 4{,}35$

e) $3{,}08 : 51{,}4$ **f)** $638 : 87{,}5$ **g)** $23{,}5 : 75$ **h)** $5{,}4 : 725$

i) $4{,}08 : 55{,}5$ **k)** $22{,}1 : 0{,}0366$ **l)** $35{,}4 : 0{,}895$ **m)** $18{,}4 : 0{,}426$!

4. Berechne die folgenden Quotienten:

a) $\frac{3{,}21}{8{,}27}$ $\frac{4{,}23}{8{,}27}$ $\frac{6{,}78}{8{,}27}$ **b)** $\frac{3{,}82}{0{,}743}$ $\frac{4{,}64}{0{,}743}$ $\frac{7{,}15}{0{,}743}$ **c)** $\frac{5{,}28}{32{,}7}$ $\frac{4{,}95}{32{,}7}$ $\frac{2{,}74}{32{,}7}$

d) $\frac{82{,}4}{14{,}25}$ $\frac{3{,}92}{14{,}25}$ $\frac{13{,}16}{14{,}25}$ **e)** $\frac{7{,}08}{4{,}25}$ $\frac{6{,}39}{4{,}25}$ $\frac{3{,}19}{4{,}25}$ **f)** $\frac{22{,}4}{51{,}6}$ $\frac{43{,}8}{51{,}6}$ $\frac{67{,}8}{51{,}6}$!

53. Verbindung von Multiplikation und Division

Beispiel: $\frac{6 \cdot 3}{4} = 4{,}5$ (Abb. 69)

Einstellen: C 4 über D 6; Läuferstrich auf C 3.
Ablesen: Auf D unter C 3.

Führe die Division vor der Multiplikation aus! Man kommt dabei, sofern die Zunge nicht durchgeschoben werden muß, mit einer Einstellung aus.

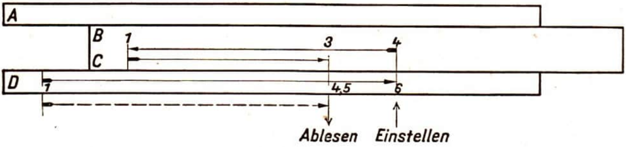


Abb. 69

Aufgaben

1. a) $\frac{2{,}40 \cdot 6{,}3}{8{,}55} = \frac{2{,}40}{8{,}55} \cdot 6{,}3$ **b)** $\frac{2{,}40 \cdot 1{,}57}{8{,}55}$ **c)** $\frac{86 \cdot 0{,}12}{40{,}3}$ **d)** $\frac{86 \cdot 0{,}72}{46{,}3}$

e) $(32{,}4 \cdot 0{,}42) : 6{,}3$ **f)** $(32{,}4 \cdot 1{,}75) : 6{,}3$ **g)** $\frac{5{,}65 \cdot 21{,}6}{0{,}364}$ **h)** $\frac{5{,}65 \cdot 8{,}5}{0{,}364}$

2. a) $\frac{4{,}55 \cdot 1{,}935 \cdot 3{,}87}{2{,}98 \cdot 6{,}44}$ **b)** $\frac{26{,}3 \cdot 0{,}965 \cdot 0{,}303}{7{,}77 \cdot 153}$ **c)** $\frac{3{,}42 \cdot 4{,}2 \cdot 1{,}43}{1{,}195 \cdot 2{,}06}$

d) $\frac{57{,}8 \cdot 0{,}021 \cdot 63{,}5}{6{,}14 \cdot 0{,}321}$ **e)** $\frac{2{,}34 \cdot 2{,}01 \cdot 1{,}84}{0{,}885 \cdot 9{,}23}$ **f)** $\frac{1{,}53 \cdot 203 \cdot 0{,}139}{65{,}4 \cdot 0{,}53}$

g) $\frac{36{,}8 \cdot 4{,}63 \cdot 27{,}9}{130 \cdot 51{,}1}$ **h)** $\frac{0{,}735 \cdot 3{,}84 \cdot 12{,}05}{1{,}875 \cdot 6{,}94}$ **i)** $\frac{0{,}134 \cdot 2{,}58 \cdot 21{,}3}{1{,}45 \cdot 7{,}82}$

54. Lösung von Proportionen mit dem Rechenstab

1. a) Stelle den Schieber so weit nach rechts, daß die 1 der Leiter B unter der 3 der Leiter A steht! Welche Zahl steht dann unter dem Teilstrich 6, 15, 30, 60 usw. der Leiter A?

   b) Bilde den Quotienten je zweier untereinanderstehender Zahlen! Was erhält man? Bilde daraus eine größere Zahl von Verhältnisgleichungen!

   c) Führe ähnliche Versuche mit anderen Einstellungen des Schiebers durch! Welche allgemeine Regel folgt aus dem Ergebnis?

2. Führe die entsprechenden Untersuchungen wie in Aufg. 1 auch für die Leitern C und D durch!

3. Löse mit Hilfe der in Aufg. 1 gefundenen Regel die folgenden Gleichungen:
   a) $4 : 3 = 7 : x$ b) $2{,}5 : 3{,}8 = 9{,}7 : x$ c) $4{,}7 : 1{,}4 = 13{,}9 : x$!

55. Quadrieren und Quadratwurzelziehen

Während die Teilungen A und B die Zahlen von 1 bis 100 umfassen, enthalten die Teilungen C und D nur die Zahlen 1 bis 10. Jede Zahl der Teilung A oder B ist auf den Teilungen C und D in doppeltem Abstand vom Anfangspunkt zu suchen. Stellt man den Läuferstrich z. B. auf D 3, so zeigt er oben auf diejenige Zahl, die auf D doppelt so weit von 1 entfernt ist wie 3. Das ist die Zahl 9. Welche Zahl steht auf der Teilung A über D 4; D 6; D 7; D 8; D 9; D 1,5; D 2,5; D a? Zu welchen Rechnungen wird man daher die Teilungen A und D verwenden?

Wie der Rechenstab zum Quadrieren verwendet wird, zeigt Abb. 70. Die Bestimmung der Quadratwurzel geschieht nach dem umgekehrten Verfahren. Dabei ist zu beachten, daß alle Radikanden mit ungerader Stellenzahl auf der ersten Hälfte der Teilung A, alle Radikanden mit gerader Stellenzahl auf der zweiten Hälfte der Teilung A einzustellen sind.

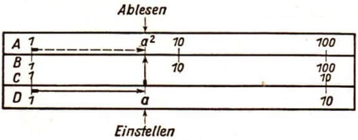


Abb. 70

Beispiele: $\sqrt{6{,}4} = 2{,}53$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$; $\sqrt{22{,}5} = 4{,}74$.

Um Fehler zu vermeiden, schätze in jedem Falle die 1. Ziffer der Wurzel vor dem Einstellen ab!

Aufgaben

1. Berechne:

a) $1{,}91^2$ **b)** $27{,}2^2$ **c)** 366^2 **d)** $0{,}905^2$ **e)** $11{,}4^2$ **f)** 39^2 **g)** $22{,}8^2$
h) 134^2 **i)** $16{,}1^2$ **k)** $1{,}84^2$ **l)** $0{,}208^2$ **m)** 346^2 **n)** $0{,}425^2$ **o)** $60{,}5^2$
p) $14{,}49^2$ **q)** $189{,}7^2$ **r)** 247^2 **s)** $69{,}6^2$ **t)** $3{,}063^2$ **u)** $4{,}29^2$ **v)** $0{,}534^2$!

2. Bestimme:

a) $\sqrt{2{,}56}$ **b)** $\sqrt{3{,}1}$ **c)** $\sqrt{3{,}35}$ **d)** $\sqrt{3{,}5}$ **e)** $\sqrt{4{,}25}$ **f)** $\sqrt{4{,}5}$ **g)** $\sqrt{1{,}3}$
h) $\sqrt{12{,}4}$ **i)** $\sqrt{12{,}8}$ **k)** $\sqrt{13{,}4}$ **l)** $\sqrt{15{,}2}$ **m)** $\sqrt{16{,}4}$ **n)** $\sqrt{19{,}8}$ **o)** $\sqrt{24}$
p) $\sqrt{4{,}6}$ **q)** $\sqrt{1{,}6}$ **r)** $\sqrt{8{,}7}$ **s)** $\sqrt{12{,}2}$ **t)** $\sqrt{15{,}6}$ **u)** $\sqrt{25{,}6}$ **v)** $\sqrt{36{,}5}$
w) $\sqrt{11{,}1}$ **x)** $\sqrt{2{,}54}$ **y)** $\sqrt{43{,}2}$ **z)** $\sqrt{3{,}5}$!

XIV. Aus der Kreislehre

56. Sehnen

Abb. 71 stellt einen Mauerbogen dar. Die mit *sp* gekennzeichnete Strecke bezeichnet man als **Spannweite,** die mit *h* bezeichnete Strecke als **Bogen-, Stich-** oder **Pfeilhöhe.** Der „Stichbogen" der Maueröffnung ist aus einem Kreis entstanden. Abb. 72 zeigt, wie man den Mittelpunkt des Kreises findet. Wie heißen die Strecken, die dem Kreis in Abb. 73 eingezeichnet sind?

Radius, Sehnenlänge oder Spannweite und Stichhöhe sind voneinander abhängig. Untersuche die Abhängigkeit!

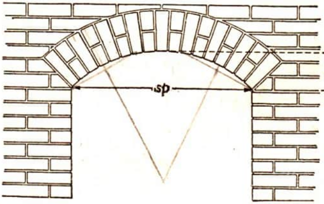


Abb. 71

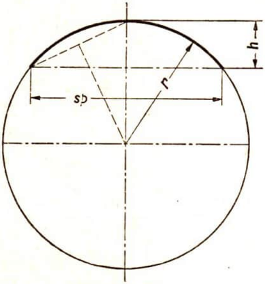


Abb. 72

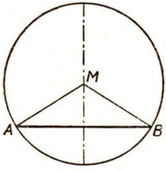


Abb. 73

Erklärung: Die Verbindungsstrecke zweier Punkte des Kreisumfanges heißt **Sehne.** Jede durch den Kreismittelpunkt gehende Sehne heißt **Durchmesser.**

> **1. Durchmesser sind größte Sehnen eines Kreises.**
> **2. Jeder Durchmesser ist Symmetrieachse des Kreises.**
> **3. Die Symmetrieachse der Sehne eines Kreises geht durch den Kreismittelpunkt (Abb. 73).**
> **4. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.**

Beweis zu Satz 1 (Abb. 74a):

Der Abstand ME der Sehne AB vom Kreismittelpunkt M ist kleiner als der Abstand MF der Sehne CD, es gilt also

$$ME < MF \quad \text{und} \quad ME \perp AB,\ MF \perp CD.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken AEM und CFM ist

$$AE^2 = r^2 - ME^2 \quad \text{und} \quad CF^2 = r^2 - MF^2$$

und wegen $ME^2 < MF^2$

$$AE^2 > CF^2, \quad AE > CF, \quad 2AE > 2 \cdot CF.$$

Weil $\quad 2 \cdot AE = AB, \quad 2 \cdot CF = CD,$

ergibt sich $\quad \underline{\underline{AB > CD.}}$

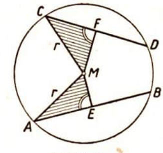


Abb. 74a

Von zwei ungleichen Sehnen ist die dem Mittelpunkt näher liegende die größere. Den kleinsten Mittelpunktsabstand (Null!) hat der Durchmesser. Er ist daher die größte Sehne.

Beweis zu Satz 4 (Abb. 74b):

Aus $\quad AB = CD$ und $ME \perp AB,\ MF \perp CD$

folgt $\quad AE = EB$ und $CF = FD,$

d.h. $\quad AE = CF,$

mithin $\quad \triangle AEM \cong \triangle CFM,$

daher $\quad \underline{\underline{ME = MF.}}$

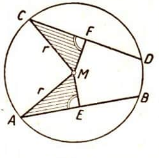


Abb. 74b

Aufgaben

1. Bestimme den Mittelpunkt eines Kreises, der mit Hilfe einer Tasse, eines Tellers u. a. gezeichnet wurde!

2. Miß, wie groß in Abb. 71 die Spannweite und die Pfeilhöhe sind! Zeichne im Maßstab 2 : 1 das Stichbogenfenster und suche zuerst den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises als Schnittpunkt zweier Achsen!

3. Zeichne ein Flachbogenfenster mit 150 cm Spannweite und $\frac{1}{6}$ Pfeilhöhe (d.i. $\frac{1}{6}$ der Spannweite)! (Maßstab beifügen; Maße eintragen!)

4. Zeichne ein Kreisbogenfenster (Halbkreis) mit 120 cm Spannweite! (Maßstab beifügen; Maße eintragen!)

5. Zeichne einen hölzernen Kleiderbügel mit Steg, der die Gestalt eines Kreisabschnittes (Kreisbogen mit zugehöriger Sehne) besitzt!

6. Zeichne einen Kreis, der durch die Punkte A und B geht und dessen Mittelpunkt auf einer (nicht auf AB senkrechten) Geraden g liegt!

7. Zeichne Kreise mit dem Radius $r = 5$ cm, die durch zwei gegebene, 6 cm voneinander entfernte Punkte A und B gehen!

8. Ziehe durch den Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne so, daß sie durch den Punkt A halbiert wird!

9. Zeichne einen Kreis, der durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte geht!

57. Sekanten und Tangenten

In Abb. 75 ist eine beliebige Gerade um einen Punkt P gedreht worden. Gib an, in wieviel Punkten jede Gerade den Kreis schneidet, und vergleiche die Lage der Schnittpunkte der Geraden im Laufe der Drehung! Welche besondere Lage hat die Gerade, wenn sie durch Punkt C bzw. C' geht?
In Abb. 76 ist eine Gerade parallel zu sich selbst verschoben. Gib in jeder Lage der Geraden die Symmetrieachse der von der Geraden durch den Kreis abgeschnittenen Sehne an!

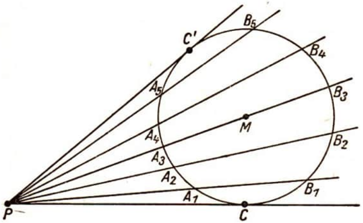


Abb. 75

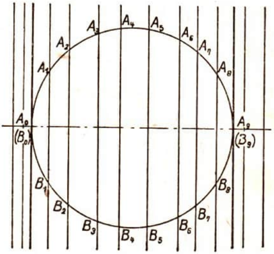


Abb. 76

Was ergibt sich, wenn beide Schnittpunkte zusammenfallen? Wie verändert sich der Abstand der Geraden vom Kreismittelpunkt, wenn sie sich dieser Grenzlage nähert?

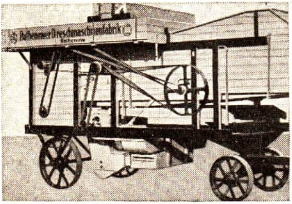


Abb. 77

Bezeichne die Lage der Riemen zu den Rädern der Dreschmaschine (Abb. 77) bzw. der Kette zu Zahnkranz und Kettenrad des Fahrrades (Abb. 78)!

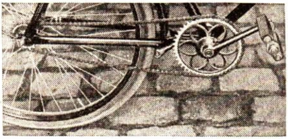


Abb. 78

Erklärungen:

Eine Gerade, die den Kreis in zwei Punkten schneidet, heißt Schneidende oder **Sekante**[1]).

Eine Gerade, die den Kreis berührt, heißt Berührende oder **Tangente**[2]).

Der Radius zum Berührungspunkt heißt **Berührungsradius.**

> **1. Die Tangente steht auf dem Berührungsradius senkrecht.**
>
> **2. Von einem Punkt außerhalb eines Kreises können zwei Tangenten an den Kreis gezeichnet werden. Ihre Tangentenabschnitte sind gleich; die Berührungssehne und der von den Tangenten gebildete Winkel werden durch die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit dem Punkt (Zentrale) halbiert.**

Beweis zu Satz 2 (Abb. 79):

Jeder Durchmesser, auch der in seiner Verlängerung durch P gehende, ist Symmetrieachse für den Kreis. Also gibt es zu einer durch P gehenden Tangente eine ihr symmetrische.

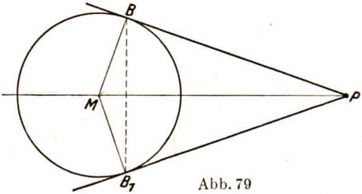


Abb. 79

Bestimmungslinie:

Die in einem Punkt auf einer Geraden errichtete Senkrechte ist die Bestimmungslinie für die Mittelpunkte aller Kreise, die die Gerade in diesem Punkt berühren.

Aufgaben

1. Zeichne an einen Kreis in einem Punkt des Umfangs die Tangente!

Ausführung: Zeichne den Berührungsradius und errichte auf ihm im Berührungspunkt die Senkrechte!

---

1) secáre (lat.): schneiden. 2) tángere (lat.): berühren.

2. Zeichne von einem Punkt P außerhalb eines gegebenen Kreises an ihn die beiden Tangenten und begründe die Konstruktion!

Ausführung (Abb. 80):

Schlage um den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises mit seinem doppelten Radius und um den Punkt P mit dem Radius MP Kreise, die einander in D und D' schneiden!

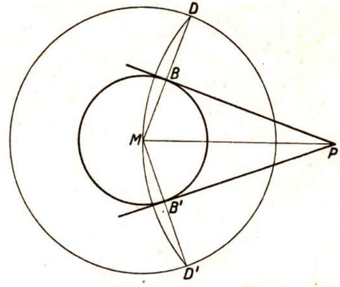


Abb. 80

Zeichne die gesuchten Tangenten als Symmetrieachsen zu MD und MD'!

3. Zeichne einen Kreis, der zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen Punkt A **a)** auf einer der Parallelen, **b)** zwischen den Parallelen geht!

4. Zeichne einen Kreis, der die Gerade g in dem Punkt A berührt und durch den (nicht auf g liegenden) Punkt B geht!

5. Um M sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm gezeichnet.

a) Zeichne an den Kreis Tangenten, die zu einer gegebenen Geraden g parallel laufen!

b) Zeichne an den Kreis Tangenten, die mit einer gegebenen Geraden g den Winkel $\alpha = 45°$ bilden!

c) Beschreibe in den Kreis ein Quadrat!

6. Zeichne Kreise ($r = 2$ cm), die zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berühren!

7. Zeichne Kreise, die zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berühren, und zwar eine von ihnen in einem gegebenen Punkt P!

8. Den Mittelpunkt kreisförmiger Querschnitte von Büchsen, Rundhölzern usw. finden die Handwerker durch einen Mittelpunktssucher (Abb. 81).

a) Stelle einen solchen Mittelpunktssucher her!

b) Wie wird er benutzt, um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden?

c) Dürfen die Schenkel des Winkelhakens einen beliebigen Winkel miteinander bilden?

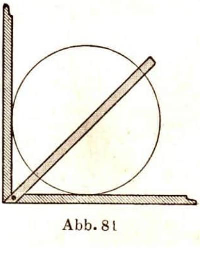


Abb. 81

9. Ein Schienenstrang von 1,435 m Spurweite muß seine Richtung um 120° ändern. Fertige eine maßstäbliche Zeichnung für den Fall, daß die beiden Richtungen durch einen Kreisbogen vom Krümmungsradius $r = 600$ m zu verbinden sind (Abb. 82)!

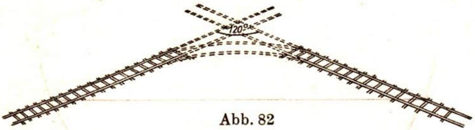


Abb. 82

58. Peripherie- und Zentriwinkel

Stelle ein Modell her, wie es Abb. 83 zeigt! Bringe den Winkel in verschiedene Lagen! Bezeichne die Punkte, auf die der Scheitelpunkt fällt! Auf was für einer Linie scheinen die Punkte zu liegen? Prüfe das Ergebnis auch für andere Winkel!

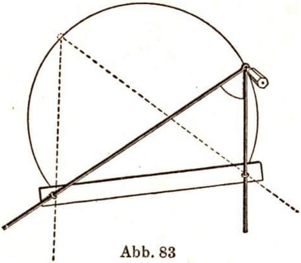


Abb. 83

Erklärungen:

Der Winkel, den die Radien eines Kreises einschließen, heißt **Mittelpunktswinkel** (Zentriwinkel; $\sphericalangle AMB$, Abb. 84). Zu jedem Kreisbogen gehört ein Zentriwinkel.

Zwei von einem Punkt des Kreises ausgehende Sehnen bilden einen **Umfangswinkel** (Peripheriewinkel; $\sphericalangle ACB$, Abb. 84). Ein Peripheriewinkel steht auf dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

Der Winkel, den eine Tangente und eine von ihrem Berührungspunkt aus gezogene Sehne bilden, heißt **Sehnentangentenwinkel** ($\sphericalangle BAT$, Abb. 85).

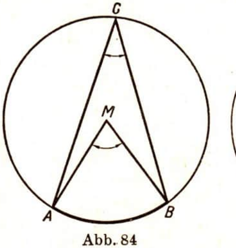


Abb. 84

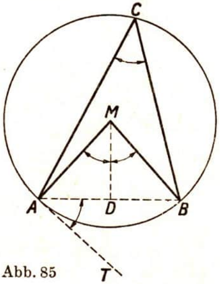


Abb. 85

1. Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

2. Peripheriewinkel auf demselben Bogen eines Kreises sind gleich (als Folgerung von 1).

3. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel (Satz des Thales; als Folgerung von 1).

4. Jeder Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen.

Anleitung für den Beweis zu Satz 1: Alle Peripheriewinkel, die mit einem Zentriwinkel auf demselben Bogen stehen, lassen sich zu drei Gruppen zusammenfassen:

a) Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf einem der Schenkel des Peripheriewinkels (Abb. 86a).

b) Der Mittelpunkt des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels (Abb. 86b).

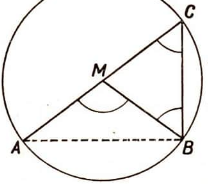


Abb. 86 a

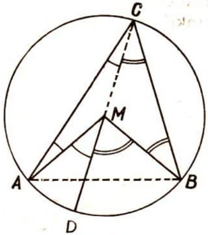


Abb. 86 b

c) Der Mittelpunkt des Kreises liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels (Abb. 86c).

Im Falle a) ist der Zentriwinkel Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, in dem der Peripheriewinkel ein Winkel an der Grundlinie ist.

Im Falle b) ist der Zentriwinkel gleich der Summe zweier Außenwinkel an der Spitze zweier gleichschenkliger Dreiecke.

Im Falle c) ist der Zentriwinkel gleich dem Unterschied zweier Außenwinkel an der Spitze zweier gleichschenkliger Dreiecke.

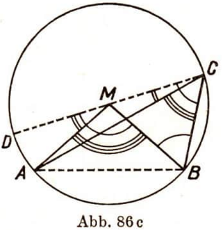


Abb. 86 c

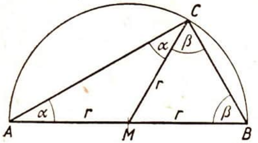


Abb. 87

Anleitung für den Beweis zu Satz 3 (Abb. 87): Da der Zentriwinkel im Halbkreis 180° ist, ist der Peripheriewinkel 90° (als Folgerung von 1).

Ein weiterer Beweis:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \; (\triangle\, ABC),$$

also $\qquad \underline{\underline{\alpha + \beta = \sphericalangle\, ACB = 90^\circ.}}$

Anleitung für den Beweis zu Satz 4 (Abb. 88 bis 90): Der Durchmesser BE ermöglicht es, die Eigenschaften der Tangente auszunutzen. Gehe von der Gleichheit der rechten Winkel ABE und BDE aus!

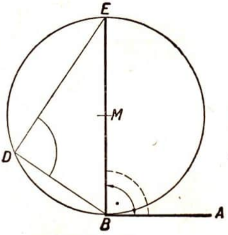


Abb. 88

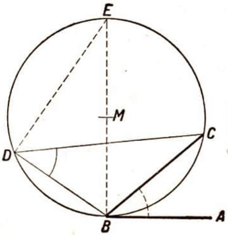


Abb. 89

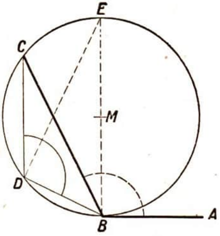


Abb. 90

Aufgaben

1. Zeichne in einen Kreis mit dem Radius $r = 4{,}5$ cm **a)** einen spitzen, **b)** einen rechten, **c)** einen stumpfen Zentriwinkel! Zeichne zu jedem Zentriwinkel mehrere zugehörige Peripheriewinkel und überzeuge dich durch Messen von ihrer Gleichheit!

2. Zeichne einen Kreis mit dem Radius $r = 3{,}2$ cm und in ihn eine 5,5 cm lange Sehne!

a) Beweise Satz 1 für den Peripheriewinkel, der auf dem größeren Bogen steht! (Benutze den Durchmesser, dessen Lage durch den Scheitelpunkt bestimmt ist!)

b) Stelle fest, in welcher Beziehung dieser Peripheriewinkel zu dem über dem kleineren Bogen (Ergänzungsbogen) steht!

c) Sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

3. Bestimme die Länge der Sehne, die in einem Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm zu dem Peripheriewinkel $\alpha = 30°$ gehört!

4. Zeichne Dreiecke aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises $r = 4$ cm und **a)** $\gamma = 60°$; $h_c = 5$ cm, **b)** $\gamma = 75°$; $s_c = 4{,}8$ cm!

59. Der Kreis als Bestimmungslinie

1. Der Kreis mit dem Durchmesser AB ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch A und B gehen.

2. Der Kreisbogen, der eine Strecke AB als Sehne und den Winkel γ als Peripheriewinkel faßt, ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller Winkel von der gegebenen Größe γ, deren Schenkel durch A und B gehen (Abb. 91).

Beweis (Abb. 92): Rückt der Scheitelpunkt C eines über einer Sehne AB stehenden Winkels ACB vom Umfang ins Innere des Kreises (C_2), so wird der Winkel größer, rückt er nach außen (C_1), so wird er kleiner, denn nach dem Satz vom Außenwinkel ist

$$\sphericalangle AC_2B = \sphericalangle \gamma + \sphericalangle C_2BC,$$

also $$\sphericalangle AC_2B > \sphericalangle \gamma,$$

und $$\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle \gamma - \sphericalangle CBC_1,$$

also $$\sphericalangle AC_1B < \sphericalangle \gamma.$$

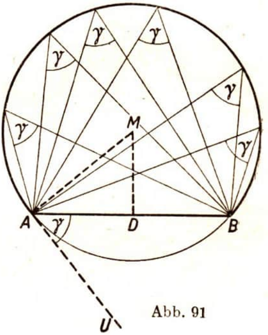


Abb. 91

Zeichnet man über der Sehne AB eines Kreises nach derselben Seite mehrere Peripheriewinkel (Abb. 91), so sind nach Satz 2 (S. 136) alle Peripheriewinkel über dem Bogen AB einander gleich, ihre Größe sei γ. Nach der vorangegangenen Feststellung liegen die Scheitel aller Winkel, die größer als γ sind, innerhalb des Kreises und die Scheitel aller Winkel, die kleiner als γ sind, außerhalb des Kreises. Also liegen auf dem Kreisbogen, der über der Sehne AB nach dieser Seite geht, nur die Scheitel aller Winkel, die gleich γ sind.

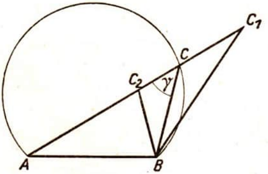


Abb. 92

Aufgaben

1. Zeichne den Kreisbogen, der über der Strecke AB als Sehne den Winkel γ als Peripheriewinkel faßt!

Ausführung (Abb. 91): Trage an AB in A $\sphericalangle BAU = \gamma$ an! Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Senkrechten auf AU in A.

Zeichenübungen

2. Benutze den Satz des Thales, um die Höhen eines Dreiecks zu zeichnen!

3. Benutze den Satz des Thales, um von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Tangenten an den Kreis zu zeichnen!

4. Zeichne Dreiecke aus **a)** $c = 5$ cm; $\gamma = 75°$; $h_c = 3$ cm, **b)** $c = 6$ cm; $\gamma = 60°$; $s_c = 4$ cm!

5. Bestimme im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks einen Punkt P, von dem aus alle Seiten unter demselben Winkel gesehen werden!

Anwendungen

6. Sieht der Seemann drei Landmarken A, B und C (insbesondere Leuchttürme) und kennt er ihre Lage und ihre Entfernungen voneinander aus der Karte, so kann er durch zwei Winkelmessungen α und β den eigenen Standort durch Zeichnung finden. Untersuche, ob die Lösung immer möglich ist bzw. ob das Ergebnis eindeutig ist!

Beispiele:				Gesichtswinkel für AB	Gesichtswinkel für BC
a)	$AB = 6{,}5$ km	$BC = 4{,}6$ km	$\sphericalangle ABC = 120°$	$\sphericalangle \alpha = 69°$	$\beta = 40°$
b)	$AB = 5{,}6$ km	$BC = 6{,}4$ km	$\sphericalangle ABC = 130°$	$\sphericalangle \alpha = 52°$	$\beta = 54°$
c)	$AB = 3{,}8$ km	$BC = 4{,}1$ km	$\sphericalangle ABC = 145°$	$\sphericalangle \alpha = 36°$	$\beta = 60°$

7. Bestimme den in Aufgabe **6** gesuchten Standort auf folgende Weise:

1. Zeichne die beiden Winkel α und β so auf Pauspapier, daß sie einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam haben (Spinne des Seemanns)!

2. Schiebe das Blatt über der Zeichnung mit den drei Punkten A, B und C so lange hin und her, bis jeder der drei Winkelschenkel durch einen der drei Punkte geht! Vergleiche die Lösungen der Aufgaben **6** und **7** miteinander!

Dieses Verfahren, den eigenen Standort durch Anschneiden bekannter Punkte, also nur durch Winkelmessungen zu finden, heißt „Rückwärts einschneiden“.

60. Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat (Anwendung des Thaleskreises)

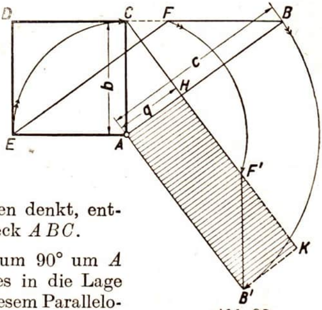


Abb. 93

Abb. 93 zeigt eine andere Art, ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, als die Aufgabe 14a in Abschn. 42 verlangt.

Beschreibe nach Abb. 94, wie ein Quadrat in ein Parallelogramm mit derselben Grundlinie und Höhe verwandelt werden kann! Auch wenn man sich die Seite FB in ihrer eigenen Richtung beliebig verschoben denkt, entsteht immer ein rechtwinkliges Dreieck ABC.

Wird das Parallelogramm $ABFE$ um 90° um A als Drehpunkt gedreht, so kommt es in die Lage $AB'F'C$ (Abb. 93). Gib an, wie das diesem Parallelogramm gleiche Rechteck $AB'KH$ hergestellt worden ist!

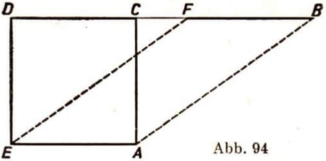


Abb. 94

Das Quadrat $ACDE$ hat als Seite die Kathete AC des rechtwinkligen Dreiecks ABC, das Rechteck $AB'KH$ den zur Kathete AC gehörenden Hypotenusenabschnitt AH als eine, die Länge der Hypotenuse AB als andere Seite.

1. Der Kathetensatz:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt (Lehrsatz des Euklid).

$$a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$$

Anleitung für den Beweis (Abb. 93): Weise nach, daß $CH \perp AB$ steht! Parallelogramm $ABFE$ ist flächengleich dem Quadrat $ACDE$ (b^2) und dem Rechteck $AHKB'$ ($c \cdot q$).

Wende den Lehrsatz des Pythagoras auf das rechtwinklige Teildreieck ADC an, das durch Zeichnung der Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABC entsteht (Abb. 95). Suche ein Rechteck, das dem Quadrat über der Höhe CD flächengleich ist!

2. Der Höhensatz:
Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

$$h^2 = p \cdot q$$

Beweis (Abb. 95):

$$h^2 = b^2 - q^2 = cq - q^2$$
$$h^2 = q(c - q) = p \cdot q$$

Ein Rechteck läßt sich sowohl nach dem Kathetensatz wie nach dem Höhensatz in ein Quadrat verwandeln.

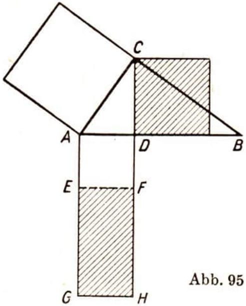


Abb. 95

Aufgaben

1. Beweise den Lehrsatz des Pythagoras mit Hilfe des Kathetensatzes!

Zeichenübungen

2. Verwandle mit Hilfe des Kathetensatzes ein Quadrat mit der Seite 4 cm in ein Rechteck, von dem eine Seite **a)** 6,5 cm, **b)** 5,2 cm, **c)** 2,8 cm lang ist!

3. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein Quadrat:

a) $a = 4$ cm $b = 7$ cm **b)** $a = 2{,}5$ cm $b = 4{,}8$ cm
c) $a = 1{,}8$ cm $b = 6{,}5$ cm **d)** $a = 8{,}1$ cm $b = 5{,}9$ cm!

Anleitung: 1. Lösung: Die längere Seite des Rechtecks wird Hypotenuse und die kürzere Hypotenusenabschnitt eines rechtwinkligen Dreiecks. Die über dem Hypotenusenabschnitt liegende Kathete ist Seite des gesuchten Quadrats. 2. Lösung: Die beiden Rechteckseiten werden Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks. Seine Höhe ist Seite des gesuchten Quadrats. In beiden Fällen wird der Scheitelpunkt des rechten Winkels bestimmt 1. durch den Halbkreis über der Hypotenuse, 2. durch die Senkrechte im Endpunkt des Hypotenusenabschnitts.

4. Zeichne ein Quadrat, das **a)** doppelt, **b)** dreimal, **c)** fünfmal so groß ist wie das Quadrat mit der Seite 2,5 cm!

5. Die Seite eines Quadrats mißt 7,5 cm. Zeichne das Quadrat, das **a)** halb so groß ist wie das gegebene, **b)** den dritten, **c)** den fünften Teil des gegebenen beträgt!

6. Verwandle **a)** ein Dreieck, **b)** einen Rhombus, **c)** ein Trapez in ein Quadrat!

7. Zeichne ein Quadrat, das gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate ist!

8. Zeichne ein Quadrat mit dem Flächeninhalt

a) $20\ cm^2$ **b)** $29\ cm^2$ **c)** $34\ cm^2$ **d)** $41\ cm^2$
e) $12\ cm^2$ **f)** $21\ cm^2$ **g)** $27\ cm^2$ **h)** $33\ cm^2$!

Anleitung: Zerlege die Zahlen in Summen oder Differenzen von Quadratzahlen oder in geeignete Faktoren, z. B. $60 = 8^2 - 2^2$; $47 = 7^2 - 1^2 - 1^2$ bzw. $5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$; $54 = 6 \cdot 9$!

Anwendungen

9. Infolge einer Flurbereinigung wird ein 28 m langes und 17 m breites Gemüseland gegen ein gleich großes quadratisches getauscht. Einer Zeichnung im Maßstab 1 : 500 soll entnommen werden, wie lang eine Seite des quadratischen Stückes Gemüseland sein muß.

61. Berechnung des Kreisumfanges

Weise an Abb. 96 nach, daß der Umfang eines Kreises größer als $6r = 3d$ und kleiner als $8r = 4d$ ist, also zwischen $3d$ und $4d$ liegt!

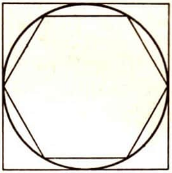


Abb. 96

Miß an walzen- oder kegelförmigen Gegenständen (Töpfen, Büchsen, Teilen des Fahrrades) Durchmesser und Umfang eines Kreises und prüfe, wievielmal der Durchmesser im Umfang enthalten ist! Vergleiche die aus verschiedenen Messungen stammenden Quotienten aus Umfang und Durchmesser miteinander!

Zeichne einen Kreis um M mit $r = 6$ cm und in ihn und um ihn das regelmäßige Sechseck! Vergleiche den Umfang des Kreises mit den Umfängen des eingeschriebenen und umbeschriebenen Sechsecks! Verdopple nun die Seitenzahl, so daß das regelmäßige eingeschriebene bzw. umbeschriebene Zwölfeck entsteht! Vergleiche wieder die drei Umfangslinien! Beachte auch Abb. 97!

Zeichne einen Kreis von 5 cm Radius und darin einen Durchmesser; nimm dann eine kleine Strecke, etwa $\frac{1}{2}$ cm, in den Zirkel (Stechzirkel) und untersuche, wievielmal sich diese Strecke als Sehne in den Kreis einzeichnen und wievielmal sie sich auf dem Durchmesser abtragen läßt! In welchem Verhältnis stehen Kreisumfang und Kreisdurchmesser ungefähr zueinander?

Wenn man den Umfang eines Kreises durch seinen Durchmesser teilt, erhält man immer dieselbe Zahl, die zwischen 3 und 4 liegt; man bezeich-

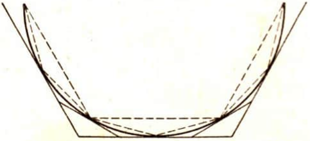


Abb. 97

net sie mit dem griechischen Buchstaben π (sprich „Pi"); die Zahl ist ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch: $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$ In den meisten Fällen begnügt man sich mit den Näherungswerten 3,14; 3,141 6 oder $3\frac{1}{7}$. Zur Ermittlung der Zahl π sind mathematische Hilfsmittel erforderlich, die erst später zur Verfügung stehen.

1. Der Quotient aus Umfang und Durchmesser hat bei allen Kreisen denselben Wert; er wird mit π bezeichnet.

$$\frac{u}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{u}{2r} = \pi \approx 3{,}14$$

2. Ein Kreis mit dem Radius r hat den Umfang

$$u = 2\pi r.$$

3. Die Länge b eines Kreisbogens ist ebensooft in dem Kreisumfang enthalten wie sein Zentriwinkel α in 360°.

$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360}{\alpha}$$

Es ist daher $$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180}.$$

Aufgaben

1. Berechne den Umfang eines Kreises, wenn

a) $d = 9$ cm (21 cm; 38,5 cm; 78 cm; 2,52 m),

b) $r = 8$ cm (56 cm; 1,69 m; 54,6 m; 185 m) ist!

In welchem Fall wird man mit $3\frac{1}{7}$ rechnen?

2. Wie groß ist **a)** der Durchmesser, **b)** der Radius eines Kreises, dessen Umfang 25,12 cm (84,78 cm; 187 cm; 737,9 m; 1000 m) mißt?

3. Wie groß ist in einem Kreis mit dem Radius $r = 14$ cm ein Bogen, der zu dem Zentriwinkel

a) $\alpha = 60°$	**b)** $\alpha = 45°$
c) $\alpha = 36°$	**d)** $\alpha = 24°$
e) $\alpha = 144°$	**f)** $\alpha = 225°$
g) $\alpha = 168°$	**h)** $\alpha = 17°$
i) $\alpha = 59°$	**k)** $\alpha = 63°$

gehört?

4. Berechne den Zentriwinkel α, dessen Bogen gleich dem Radius des Kreises ist!

Anwendungen

5. Ein Tischler soll einen kreisförmigen Tisch für 8 Personen anfertigen. Wie groß muß er den Durchmesser nehmen, wenn auf jede Person 80 cm gerechnet werden?

6. a) Miß den Durchmesser der Räder eines Fahrrades! Wieviel Umdrehungen machen sie auf einer 45 km langen Strecke?

b) Führe die Berechnung für den Fall durch, daß $d = 73$ cm ist!

7. Der Durchmesser des Triebrades einer Personenzuglokomotive mißt 1,75 m.

a) Welche Strecke legt die Lokomotive bei 100 Umdrehungen zurück?

b) Wie oft dreht sich das Triebrad bei einer Fahrt von Berlin nach Wittenberg (95 km)?

8. Der Durchmesser von Röhren wird in der Technik in mm angegeben. Gas- und Wasserleitungsrohre haben u.a. folgende äußere Rohrdurchmesser: 56; 118; 274; 429; 738; 1256. Berechne jedesmal den Umfang des Rohres!

9. Wie groß ist der Durchmesser, wenn **a)** ein Wagenrad einen Umfang von 3,77 m, **b)** ein Baum einen Umfang von 2,35 m, **c)** das Abfallrohr einer Regenrinne einen Umfang von 47,1 cm, **d)** ein Zylinder einen Umfang von 2,83 m hat?

10. Der Bauklempner schneidet aus einer 2 m langen und 1 m breiten Blechtafel sechs Rohrmäntel parallel zur kürzeren Seite für die Fallrohre der Regenrinnen. Vom Umfang jedes Mantels gehen 1,5 cm für die Lötnaht ab. Wie groß ist der Durchmesser eines Rohres?

11. Ein Stück Blech soll zu Wellblech, dessen Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen mit dem Radius $r = 2$ (3; 3,5; 4; 5) cm zusammensetzt, geformt werden.

a) Fertige dazu eine Zeichnung an und berechne ($r = 2$ cm), wieviel m glattes Blech man zu 1 m Wellblech braucht!

b) Untersuche, ob man an Blech spart, wenn man der Rechnung einen anderen der angeführten Radien zugrunde legt!

c) Führe die Rechnung auch mit allgemeinen Zahlen durch!

12. a) Die Länge des Erdäquators wird mit rund 40 000 km angegeben. Berechne daraus den Radius der Erde!

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit (in m/s) eines Ortes am Äquator infolge der Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse?

c) Um die Erdkugel längs des Äquators sei ein Band gelegt! Man will das Band so lang machen, daß es überall einen Meter von der Erdoberfläche absteht. Um wieviel Meter muß es zu diesem Zweck verlängert werden?

13. Berechne auf einem Längenkreis

a) den Bogen, der zum Zentriwinkel 1° (1′) gehört,

b) den Zentriwinkel, der zu einer geographischen Meile (7 420 m) gehört (Radius der Erdkugel $r = 6\,370$ km),

c) den Radius der Erdkugel, der zu einer Seemeile (1852 m) gehört (eine Seemeile entspricht einer Bogenminute)!

62. Berechnung des Kreisinhaltes

Bestimme den Inhalt des Kreises in Abb. 98 durch Auszählen der Quadrate, die ganz innerhalb des Kreises liegen; beim zweitenmal zähle auch die Quadrate mit, die von der Kreislinie durchschnitten werden! Miß nach, wie viele der kleinen Quadrate in 1 cm² enthalten sind, und vergleiche die für den Inhalt des Kreises gefundenen Näherungswerte mit dem Inhalt des Quadrates über seinem Radius! Zeichne auf Millimeterpapier Kreise mit verschiedenen Halbmessern (1 cm; 2 cm; 3,2 cm), ermittle die angenäherten Flächeninhalte der Kreise und gib jedesmal das Verhältnis aus dem Flächeninhalt und dem Quadrat über dem entsprechenden Radius an! Schneide aus einem Stück Pappe einen Kreis mit der Längeneinheit 1 dm Radius aus und ebenso ein Quadrat mit derselben Längeneinheit! Wäge beide Stücke recht sorgfältig und berechne, wievielmal so schwer die Kreisscheibe ist als das Quadrat! (Bei einem dieser Versuche ergeben sich die Gewichte 60 p und 19 p, also ist 3,16 die „Verhältniszahl“ beider Gewichte.) Genau sovielmal ist die Fläche des Einheitsquadrates in der Fläche des Einheitskreises enthalten. Diese Verhältniszahl ist ein Näherungswert für die Zahl π.

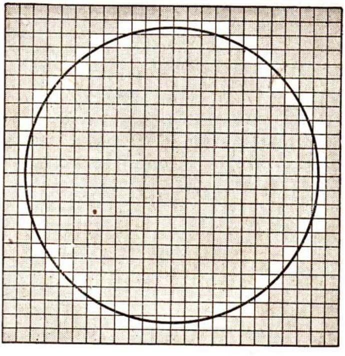


Abb. 98

Die Fläche des Einheitskreises ist rund 3,14 Flächeneinheiten groß.

Schneide nun aus demselben Material Kreise mit dem Radius 2 dm, 3 dm usw. aus und bestimme ihre Gewichte! Vergleiche die Ergebnisse mit dem Gewicht des Einheitskreises! Man findet: Ist der Radius doppelt so groß, so ist das Gewicht 4 mal so groß, ist der Radius 3 mal so groß wie der des Einheitskreises, so ist das Gewicht 9 mal so groß wie das des Einheitskreises; die Gewichte nehmen also mit dem Quadrat des Radius zu, dasselbe muß auch für die Flächeninhalte gelten, d. h.:

Die Kreisinhalte nehmen, verglichen mit dem Inhalt des Einheitskreises, wie die Quadrate ihrer Radien zu.

Da der Kreis mit dem Radius der Längeneinheit den Inhalt π hat, so ist πr^2 der Inhalt des Kreises mit dem Radius r.

1. Ein Kreis mit dem Radius r hat den Flächeninhalt $F = \pi r^2$.

2. Der Flächeninhalt A eines Kreisausschnittes mit dem Zentriwinkel α ist

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{2} r \cdot \pi r \frac{\alpha}{180} = \frac{1}{2} r \cdot b.$$

Inwiefern erinnert diese Formel an die für den Inhalt eines Dreiecks?

Anleitung für den Beweis zu Satz 2 (Abb. 99): Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes steht zum Flächeninhalt des Kreises in demselben Verhältnis wie sein Bogen b zum Kreisumfang u oder wie sein Zentriwinkel α zu 360°.

$$A : \pi r^2 = b : u \quad \text{oder} \quad A : \pi r^2 = \alpha : 360°$$

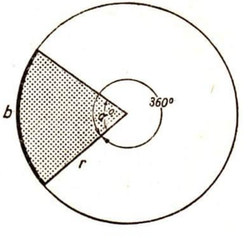


Abb. 99

Aufgaben

1. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius
a) $r = 7$ cm, **b)** $r = 35$ cm, **c)** $r = 4{,}2$ cm, **d)** $r = 5{,}6$ cm, **e)** $r = 18$ mm!

2. Der Durchmesser eines Kreises beträgt **a)** $d = 12$ cm, **b)** $d = 16$ cm, **c)** $d = 27$ cm, **d)** $d = 45$ m, **e)** $d = 32$ mm. Berechne den Flächeninhalt!

3. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Umfang von **a)** 1,56 m, **b)** 3,25 m, **c)** 18,7 cm, **d)** 2 m, **e)** 56,6 cm, **f)** 12,56 m, **g)** 345,40 m!

4. Ein Quadrat und ein Kreis haben den gleichen Umfang von 110 cm. Welche Fläche ist größer?

5. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt und ungleichen Radien begrenzen einen Kreisring. Der Unterschied der beiden Radien heißt Breite des Ringes. Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisringes mit den Radien **a)** $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 7$ cm, **b)** $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 9$ cm, **c)** $r_1 = 1{,}6$ cm, $r_2 = 1{,}4$ cm?

d) Entwickle eine Formel für den Flächeninhalt des Kreisringes!

6. Berechne den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn folgende Stücke gegeben sind:

a) Radius $r = 25$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 60°$
b) ,, $r = 32$ cm, ,, $\alpha = 72°$
c) ,, $r = 16$ cm, ,, $\alpha = 39°$
d) ,, $r = 40$ cm, ,, $\alpha = 112°$
e) ,, $r = 56$ cm, Bogen $b = 88$ cm
f) ,, $r = 62$ cm, ,, $b = 57$ cm
g) ,, $r = 18$ cm, ,, $b = 39$ cm!

7. Zeichne drei Kreise, deren Radien 2 cm, 4 cm und 6 cm messen! Berechne **a)** die Umfänge, **b)** die Inhalte der Kreise und vergleiche die Ergebnisse!

8. Der Stamm einer alten Eiche im Park von Muskau in der Lausitz hat einen Umfang von 7,85 m. Berechne seinen Querschnitt!

9. Die Seite einer quadratischen Marmorplatte mißt 89 cm. Aus ihr wird die größte Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne **a)** die Tischfläche, **b)** den Abfall!

10. Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß hat einen Umfang von 248 cm und eine Wandstärke von 2 cm. Wie groß ist sein metallischer Querschnitt?

11. Beschaffe die Maße der wirklichen Größe des in Abb. 100 gezeichneten Verkehrszeichens und berechne die Größe des weißen Kreises und des roten Randes!

12. Eine Zugstange aus Stahl hat einen Umfang von 9,60 cm. Die höchste zulässige Zugkraft für 1 cm² Querschnitt beträgt 825 kp. Wieviel kp darf der auf die Stange ausgeübte Zug höchstens betragen?

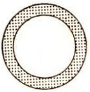


Abb. 100

13. Abb. 101 zeigt die Hochsprunganlage eines Sportplatzes, die aus einer rechteckigen Sprunggrube und einem Anlauffeld besteht.

a) Zeichne die Anlage im Maßstab 1 : 100!

b) Entnimm der Zeichnung die fehlenden Maße, insbesondere den Zentriwinkel, und berechne die Fläche der Sprunggrube, die Anlauffläche und die Gesamtfläche der Anlage!

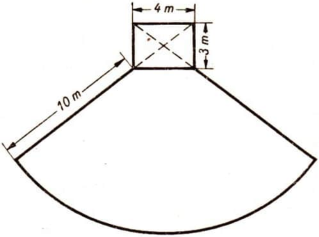


Abb. 101

XV. Berechnung und Darstellung einfacher Körper

63. Würfel und Quader

Stelle das Pappmodell eines nach oben aufklappbaren Würfels her, dessen Kante 5 cm lang ist! Wieviel Würfel von 1 cm^3 Inhalt bedecken den Boden einmal? Wieviel solcher Schichten müssen übereinandergelegt werden, um den ganzen Würfel auszufüllen?

Stelle das Pappmodell eines Quaders her, dessen Kanten 5 cm, 4 cm und 3 cm lang sind und stelle wie beim Würfel fest, wieviel Kubikzentimeter nötig sind, um den Quader auszufüllen!

Bestimme die Oberflächen von Würfel und Quader!

Erklärungen:

1. Den Rauminhalt eines Körpers gibt die Anzahl der Einheitswürfel an, mit denen er ausgefüllt werden kann.

2. Der Rauminhalt eines Körpers wird gewöhnlich nicht durch Einheitswürfel ausgezählt, sondern nach einer Formel berechnet.

3. Die Einheit der Raummaße ist das Kubikmeter (m^3).
   Zum Messen großer oder kleiner Rauminhalte verwendet man Vielfache oder Teile des Kubikmeters.

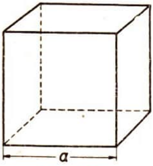


Abb. 102

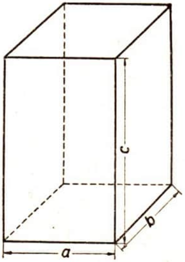


Abb. 103

1. Der Rauminhalt eines Würfels mit der Kante a (Abb. 102) ist

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

2. Der Rauminhalt eines Rechtkants (Quaders) mit den Kanten a, b, c (Abb. 103) ist

$$V = a \cdot b \cdot c = abc.$$

3. Die Oberfläche eines Würfels mit der Kante a ist

$$O = 6a^2.$$

4. Die Oberfläche eines Rechtkants (Quaders) mit den Kanten a, b und c ist

$$O = 2(ab + bc + ac).$$

Aufgaben

1. Berechne Oberfläche und Rauminhalt für Würfel mit folgenden Kantenlängen: **a)** 12 cm **b)** 7 mm **c)** 3,5 m **d)** 1,3 dm!

2. Berechne Oberfläche und Rauminhalt für Rechtkante mit folgenden Kantenlängen:

	a	b	c
a)	25 cm	12 cm	17 cm
b)	36 cm	45 cm	8 cm
c)	2 m	0,8 m	1,5 m
d)	5 dm	20 cm	4 dm

3. Berechne in folgender Zusammenstellung, die Kantenlängen und Rauminhalte von Rechtkanten enthält, die fehlenden Größen:

	Länge a	Breite b	Höhe c	Rauminhalt V
a)	5 cm	4 cm	3 cm	
b)	3 cm	4 cm		96 cm^3
c)	15,3 m		4,7 m	89,8875 m^3
d)		2,5 dm	0,3 dm	15,75 dm^3

4. Berechne Rauminhalt und Gewicht (Rauminhalt mal Wichte) von Rechtkanten nach folgenden Angaben:

	Länge a	Breite b	Höhe h	Werkstoff	Wichte
a)	2,9 cm	1,3 cm	0,7 cm	Blei	11,36 p/cm^3
b)	41 cm	23 cm	19 cm	Aluminium	2,5 p/cm^3
c)	25 cm	4 cm	0,75 cm	Grauguß	7,2 p/cm^3
d)	85 cm	42 cm	7 cm	Granit	2,7 p/cm^3
e)	1,2 m	0,80 m	12 cm	Sandstein	2,3 p/cm^3

5. In folgender Übersicht sind die Kantenlängen und Gewichte von Würfeln aus verschiedenem Material zusammengestellt. Ermittle die verwendeten Werkstoffe!

	Kantenlänge	Gewicht
a)	12 cm	12,442 kp
b)	4 cm	727 p
c)	25 cm	39,063 kp
d)	30 cm	72,9 kp
e)	33 cm	82,655 kp

6. a) Ein Klassenzimmer ist 11,35 m lang, 7,25 m breit und 4,10 m hoch. Wie groß ist sein Rauminhalt?

b) Miß das Klassenzimmer aus und bestimme seinen Rauminhalt!

7. Aus einer rechteckigen Weißblechtafel mit den Kanten $a = 53$ cm, $b = 76$ cm soll ein oben offener Kasten hergestellt werden. Um Werkstoff zu sparen, wird die Blechtafel so eingeteilt, daß nichts abfällt (Abb. 104, Maßstab 1 : 10). Die abgeschnittenen Schmalseiten werden eingelötet.

a) Wie hoch wird der Kasten? (Blechstärke vernachlässigen!)

b) Welchen Rauminhalt hat er?

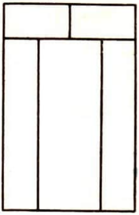


Abb. 104

8. Ein quaderförmiger Kachelofen steht auf einem 20 cm hohen Sockel und hat einschließlich des Sockels die folgenden Ausmaße: 200 cm · 80 cm · 48 cm. Auf einer Schmalseite ist zum Warmhalten von Geschirr und dgl. ein Hohlraum von 30 cm Breite, 40 cm Tiefe und 25 cm Höhe eingelassen.

a) Wie groß ist die Wärmfläche des Ofens **1.** ohne, **2.** mit Berücksichtigung des Hohlraumes? (Nach unten in den Sockel hinein findet keine Wärmeabgabe statt.)

b) Welchen Rauminhalt hat der Ofen mit und ohne Hohlraum?

9. Die Ladekästen (Pritschen) einiger gebräuchlicher deutscher Lastkraftwagen haben folgende Ausmaße:

Pritschenlänge	4,0 m	4,4 m	5,0 m
Pritschenbreite	2,05 m	2,3 m	2,35 m
Wandhöhe	0,47 m	0,465 m	0,5 m
Nutzlast	**3 000 kp**	**3 500 kp**	6 000 kp

a) Berechne für jeden Wagen das Fassungsvermögen der Kästen!

b) Prüfe nach, ob bei einer Beladung mit Sand (Wichte 2,1 p/cm³) oder mit Schlacke (Wichte 0,7 p/cm³) die zulässige Ladegrenze erreicht wird oder nicht, und gib an, wieviel m³ von jedem dieser Stoffe höchstens geladen werden dürfen!

10. Ein Ziegelstein nach DIN 105[1]) ist 25 cm lang, 12 cm breit, 6,5 cm hoch (Wichte 1,8 p/cm³).

a) Welchen Rauminhalt, welches Gewicht hat er?

b) Wieviel Ziegelsteine könnte ein Lastkraftwagen (Aufg. 9) höchstens laden?

11. Ein Ziegelstein nach DIN 105 neu hat als Vollziegel die Normmaße 24 cm lang, 11,5 cm breit, 7,1 cm hoch. Die Normmaße sind abgeleitet aus dem Richtmaß, das sich aus den Maßen von Ziegelstein und Fuge zusammensetzt. Es ist 25 cm lang, 12,5 cm breit und 8,3 cm hoch.

a) Welchen Rauminhalt, welches Gewicht hat der neue Ziegelstein?

b) Wieviel Ziegelsteine (nach dem neuen Richtmaß) gehen auf 1 m, wenn sie **1.** der Länge, **2.** der Breite nach nebeneinander-, **3.** der Höhe nach übereinanderliegen?

c) Wieviel Stück gehen auf 1 m³ nach der neuen Normung?

d) Wieviel Stück gehen auf 1 m³ nach der alten Normung, wenn die Richtmaße $26 \times 13 \times 7{,}7$ betragen?

12. Gehsteigplatten aus Granit sind 75 cm lang, 60 cm breit und 10 cm hoch. 1 m³ des Gesteins wiegt 2 800 kp. Wieviel Platten kann jeder Wagen nach den Angaben in Aufg. 9 laden?

13. Große Pflastersteine aus Granit sind 20 cm lang, 15 cm breit und 13 cm hoch. Wieviel Steine kann jeder Wagen aus Aufg. 9 laden?

14. Zum Bau von Baracken sollen quaderförmige Holzbalken von 4,5 m Länge, 20 cm Breite und 15 cm Höhe verladen werden, 1 cm³ des Holzes wiegt 0,7 p. Wieviel Balken kann jeder Wagen aus Aufg. 9 laden, wenn bei den kleineren Wagen die Rückwand heruntergeklappt wird?

64. Kantige Säulen / Zylinder

Abb. 105 zeigt kantige Säulen. Zeichne die Endflächen dieser kantigen Säulen! Zeichne ihre Seitenflächen! Zerschneide einen Quader aus Plastilin in der Richtung einer Diagonale der Grundfläche! Vergleiche den Rauminhalt einer der entstandenen Säulen mit dem des ursprünglichen Quaders! Zerlege auch die Endflächen der kantigen Säulen durch Diagonalen in Dreiecke!

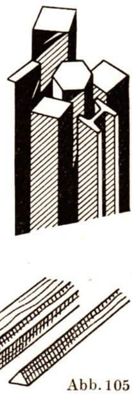


Abb. 105

1) DIN: Kennzeichen für die Arbeiten des Deutschen Normenausschusses. 105: Nummer des Normblattes (alt).

Erklärungen:

Kantige Säulen haben als Grund- und Deckfläche deckungsgleiche Vielecke. Die Seitenflächen der kantigen Säulen sind Rechtecke.

Zylinder (Rundsäulen) haben als Grund- und Deckfläche deckungsgleiche Kreisflächen; die Seitenfläche oder der **Mantel** läßt sich in ein Rechteck abwickeln.

1. Eine gerade Säule mit der Grundfläche G und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = G \cdot h.$$

Beweis: a) Für eine dreiseitige Säule mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche (Abb. 106):

Die gegebene Säule wird mit einer dazu deckungsgleichen zusammengesetzt zu einem Quader.

Dann ist Quaderinhalt = Quadergrundfläche mal Quaderhöhe,

also Säuleninhalt = halber Quaderinhalt

= halbe Quadergrundfläche mal Quaderhöhe

= Säulengrundfläche mal Säulenhöhe.

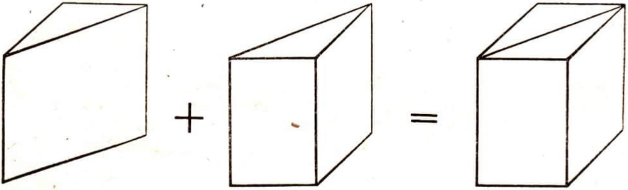


Abb. 106

Entsprechend verläuft der Beweis

b) für eine beliebige gerade dreiseitige Säule (Abb. 107),

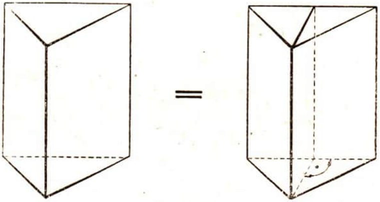


Abb. 107

c) für eine beliebige gerade Säule (Abb. 108):

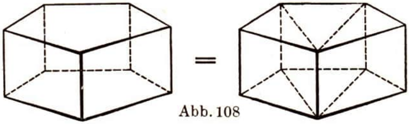


Abb. 108

2. Der gerade Zylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = \pi r^2 h$$

Da der Zylinder mit beliebiger Genauigkeit durch kantige Säulen genügend hoher Kantenzahl ersetzt werden kann, ergibt sich auch hier der Rauminhalt, indem man die Grundfläche mit der Höhe multipliziert.

3. Die Oberfläche des geraden Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h ist

$$O = 2\pi r\,(r + h)$$

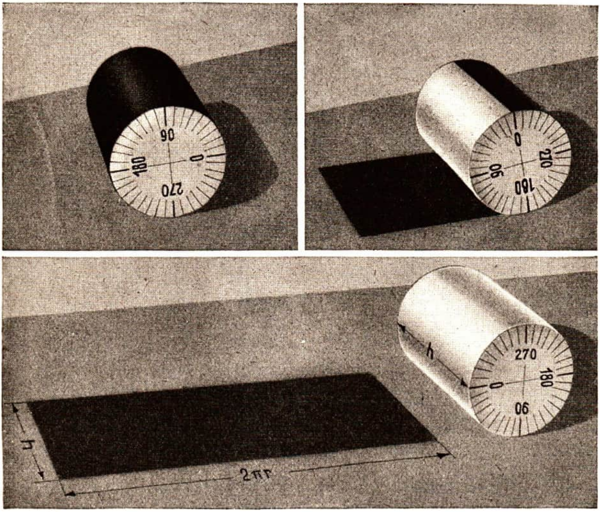


Abb. 109

Beweis (Abb. 109): Durch Abrollen des Mantels entsteht ein Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfang des Grundkreises, also $2\pi r$, und dessen Breite gleich der Höhe h des Zylinders ist. Der Inhalt ist also gleich $2\pi rh$. Zur Mantelfläche $2\pi rh$ müssen die beiden Kreisflächen $2\pi r^2$ addiert werden: $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$.

Aufgaben

1. Die Grundfläche einer dreiseitigen Säule ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 4 cm und 3 cm, ihre Höhe beträgt 20 cm. Berechne ihre Oberfläche und ihren Rauminhalt!

2. Berechne **a)** den Mantel (d. i. die Summe der Seitenflächen), **b)** die Oberfläche, **c)** den Rauminhalt der in Abb. 110 dargestellten regelmäßigen Sechskantsäule, deren Maße in cm in der Zeichnung angegeben sind.

Anleitung: Zerlege die Grundfläche in 6 deckungsgleiche Dreiecke und berechne deren Höhe!

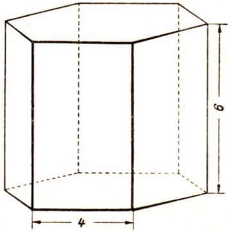


Abb. 110

·**3. a)** bis **c)** Führe dieselbe Aufgabe für die in Abb. 111 wiedergegebene regelmäßige fünfseitige Säule durch! Die angegebenen Zahlen bedeuten wieder die wahren Maße in cm.

Anleitung: Zeichne die Grundfläche in wahrer Größe aus 5 deckungsgleichen Dreiecken und entnimm der Zeichnung die Dreieckshöhe!

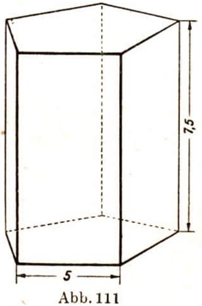


Abb. 111

4. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um die Seite a gedreht. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche der entstandenen Rundsäule?

a) $a = 9$ cm; $b = 7$ cm

b) $a = 15$ cm; $b = 18$ cm

5. Um wieviel cm³ ändert sich der Rauminhalt, wenn das Rechteck (Aufg. 4) um die Seite b gedreht wird?

6. Wird ein Rechteck um seine größere Seite gedreht, so entsteht eine Rundsäule, deren Grundfläche den Umfang $U = 44$ cm hat. Wie groß ist die Oberfläche der Rundsäule, wenn sich die Seiten um 3 cm unterscheiden?

7. Die Giebelseite eines Daches ist ein gleichseitiges Dreieck.

a) Die Länge der Dreiecksseite betrage 10 m und die Länge des Daches 15 m. Fertige eine maßgerechte Zeichnung (1 : 200) von der Stirnfläche und einer Seitenfläche des Daches!

b) Wie groß ist die Fläche des Daches, die mit Ziegeln gedeckt werden muß?

c) Welchen Luftraum umschließt das Dach?

8. Die Sprunglatte, die beim Hochsprung benutzt wird, hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 30 mm lang ist. Die Sprunglatte ist 4 m lang. Wie schwer ist sie, wenn 1 cm³ des Holzes 0,79 p wiegt?

9. Abb. 112 zeigt die Querschnitte **a)** des Dortmund-Ems-Kanals vor der Erweiterung, **b)** des Dortmund-Ems-Kanals nach der Vergrößerung, **c)** des Ems-Weser-Kanals. Flächeninhalt des Kanalquerschnittes: **a)** 103,9 m², **b)** 109,0 m², **c)** 81,5 m². Berechne die Wassermengen bei einer Kanallänge von 120 m!

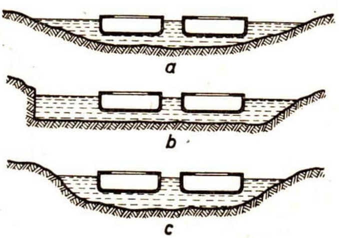


Abb. 112

10. Nach den Wettkampfbestimmungen ist für Steinstoßen ein vierkantiges Wurfgerät von 15 kp Gewicht vorgeschrieben. Es wird beispielsweise ein Quader aus Gußstahl verwendet, der 15 cm lang, 10 cm breit und 13 cm hoch ist. Wieviel p wiegt 1 cm³ Gußstahl?

11. Ein Giebelzelt wird aus quadratischen Zeltbahnen hergestellt (Abb. 113). Eine quadratische Zeltbahn ist 1,60 m lang. Wieviel m² Zeltstoff werden für das Zelt verwendet und wieviel m³ Luftraum stehen zur Verfügung, wenn die vordere Fläche des Zeltes 1,28 m² groß ist?

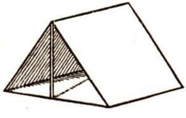


Abb. 113

12. Eine Lieferung eichener Eisenbahnschwellen umfaßt 1 200 „Zwischenschwellen“, die 2,5 m lang, 25 cm breit und 16 cm hoch sind, und 180 „Stoßschwellen“, die 30 cm breit sind und in den übrigen Maßen mit den Zwischenschwellen übereinstimmen. Wieviel Güterwagen sind für die Beförderung der Schwellen nötig, wenn 1 m³ Eichenholz eine Masse von 900 kg hat und ein Güterwagen mit 15 t beladen wird?

13. Bis zu welcher Höhe füllt ein Liter Wasser ein Gefäß von der Form einer Rundsäule, wenn der Halbmesser des Grundkreises 4 cm beträgt?

14. Ein Meßzylinder soll in cm^3 eingeteilt werden; die Teilstriche sollen 2 mm voneinander entfernt sein. Wie groß muß bei der Herstellung der lichte Durchmesser gemacht werden?

15. Nach der Eichordnung sollen Hohlmaße bis zum Eichstrich doppelt so hoch wie weit sein. In welcher Höhe muß deshalb der Eichstrich eines Fünflitermaßes angebracht sein?

16. Um den Durchmesser eines Haarröhrchens zu bestimmen, wurden 150 mg Quecksilber hineingebracht (Dichte $= 13{,}6\ g/cm^3$). Der entstandene Quecksilberfaden war 9 mm lang. Berechne den Durchmesser des Haarröhrchens!

17. Ein rechteckiges Stück Blech mit den Seiten $a = 20$ cm und $b = 45$ cm wird zum Mantel einer Rundsäule zusammengebogen. Bei welchem der beiden möglichen Fälle erhält man den größeren Hohlraum? (Rechne 1 cm auf den Falz!)

65. Pyramide / Kegel

1. Versuche einen Würfel aus Ton, Kitt oder Plastilin nach Art von Abb. 114 durch Schnitte in drei deckungsgleiche Pyramiden zu zerlegen!

a) Durch welche Eckpunkte gehen die einzelnen Schnittebenen? Welche Gerade ist ihnen gemeinsam?

b) Gib die entstandenen Pyramiden an, schreibe an die Eckpunkte in Abb. 114 die Buchstaben! Vergleiche die Pyramiden hinsichtlich ihrer Größe miteinander und mit dem Würfel!

Wäge sie ab! Welche Vermutungen ergeben sich?

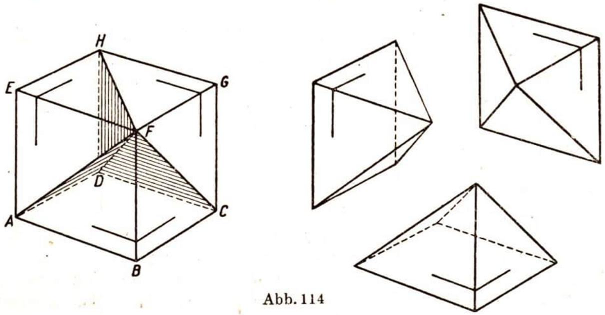


Abb. 114

2. Versuchsmäßige Bestimmung des Rauminhalts. Zeichne auf dünne Pappe das Netz einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 5$ cm und der Höhe $h = 4$ cm und das Netz einer quadratischen Säule mit gleicher Grundkante und Höhe (beide ohne Grundfläche)! Fertige aus beiden Netzen Modelle an, die an der Grundfläche offen sind! Fülle die Pyramide bis zum Rand mit trockenem Sand und entleere sie in die quadratische Säule! Wie oft läßt sich dies ausführen?

3. Fertige eine Hyazinthentüte und dazu das Modell einer Rundsäule mit derselben Grundfläche und Höhe an! Führe den Versuch der Aufgabe 2 für Kegel und Rundsäule aus!

1. Der Rauminhalt einer Pyramide ist ein Drittel des Rauminhaltes eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

2. Der Rauminhalt eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h ist

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Bemerkung: Daß nach diesen Formeln der richtige Wert des Rauminhalts berechnet werden kann, wird hier nur durch die Erfahrung bestätigt. Die Aufstellung der Formel erfordert weitere mathematische Kenntnisse als bis jetzt erarbeitet worden sind.

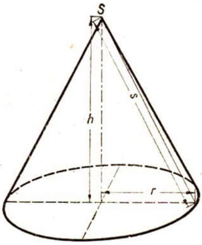


Abb. 115

Andeutung des Beweises (Abb. 115): Ein gerader Kreiskegel kann als eine gerade Pyramide mit der Grundfläche πr^2 und der Höhe h angesehen werden.

3. Der Mantel eines geraden Kegels mit dem Radius des Grundkreises r und der Mantellinie s hat den Flächeninhalt

$$M = \pi r s.$$

Beweis (Abb. 116a bis d): Die Abwicklung des Kegelmantels liefert einen Kreisausschnitt. Dabei ist der Radius ϱ des Kreisausschnittes gleich der Mantellinie s, der Bogen b des Kreisausschnittes gleich dem Grundkreisumfang $2\pi r$ des Kegels. Also ergibt sich nach Abschn. 62 für den Flächeninhalt des Kreisausschnittes

$$M = \frac{b\varrho}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

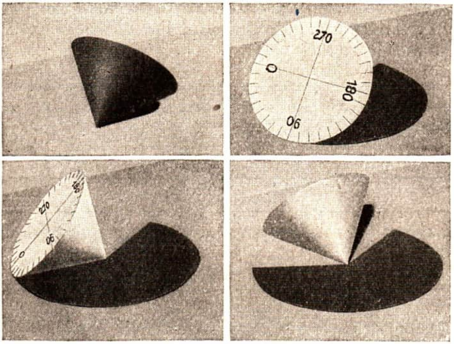


Abb. 116a–d

4. Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels mit dem Radius des Grundkreises r und der Mantellinie s hat den Flächeninhalt

$$O = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s).$$

Aufgaben

1. Ein Turm, der die Gestalt einer quadratischen Säule hat, endigt in einer quadratischen Pyramide. Sein Umfang mißt 12 m, die Seitenhöhe des Daches 5,75 m.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe der Turmspitze fest und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach!

b) Wieviel DM kostet das Decken des Daches, wenn für 1 m² Schieferdach 7,50 DM zu zahlen sind?

2. Die Cheopspyramide bei Giseh (s. Lehrbuch der Mathematik für die Grundschule, 6. Schuljahr II, S. 31!) hat als Grundfläche ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 233 m; sie ist 145 m hoch.

Berechne **a)** die Höhe eines Seitendreiecks, **b)** die Länge einer Seitenkante, **c)** ihren Rauminhalt!

3. Ein Zelt, das am Boden 11 m Umfang hat, hat die Gestalt einer quadratischen Pyramide. Seine Höhe beträgt 1,60 m. Berechne den Luftraum, den das Zelt umschließt!

4. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b wird um die Kathete a gedreht. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt des entstehenden Kegels?

a) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm **b)** $a = 24$ cm; $b = 7$ cm
c) $a = 15$ cm; $b = 8$ cm **d)** $a = 40$ cm; $b = 9$ cm

5. Ein Quadrat wird um eine seiner Diagonalen gedreht. Wie groß ist der Rauminhalt des entstehenden Doppelkegels, wenn die Quadratseite 9 cm lang ist?

6. Der abgerollte Mantel eines geraden Kegels ist ein Kreisausschnitt mit der Fläche $M = 150$ cm² und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 60°$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

7. Zeichne einen Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm! Schneide einen Halbkreis heraus und forme ihn zu einem Kegel! Wie groß ist sein Rauminhalt?

8. Das kegelförmige Dach eines Eiskellers hat 4 m Radius in der Traufe bei 3 m Höhe. Es erhält eine 25 cm starke Eindeckung von Stroh. Wieviel m³ Stroh sind zur Eindeckung nötig?

9. Auf einen kreisrunden Turm mit 11 m Umfang ist ein 6 m hohes kegelförmiges Dach gesetzt und mit Blech beschlagen worden. Für 1 m² werden einschließlich Arbeitslohn 5,60 DM berechnet. Wie teuer wurde das Dach?

10. Aus einem Marmorkegel (Wichte 2,84 p/cm³) mit der Höhe $h = 21$ cm und der Mantellinie $s = 29$ cm ist ein Kegel von gleicher Grundfläche und der Höhe $h' = 7$ cm ausgebohrt und der Raum mit Blei gefüllt worden (Wichte = 11,35 p/cm³). Wie schwer ist nun der Kegel geworden?

11. Genormte Trichter haben einen Öffnungswinkel von 60° und eine Trichterweite von 4,5 cm; 7 cm; 10 cm; 25 cm. Wieviel cm³ können in die Trichter hineingefüllt werden?

66. Inhalt und Oberfläche der Kugel

Vergleiche eine Glasmurmel, einen Ball, eine Kegelkugel usw. miteinander! Durch welches Bestimmungsstück unterscheiden sich Kugeln voneinander? Oberfläche und Rauminhalt der Kugel sind also nur von der Größe des Kugelradius abhängig.
Miß den Durchmesser einer Glasmurmel, stelle ihren Rauminhalt durch Hineinlegen in einen Meßzylinder fest! Vergleiche den Rauminhalt mit dem eines Würfels, dessen Kante gleich dem Radius der Glasmurmel ist!

Fülle einen Schöpflöffel, der die Form einer Halbkugel hat, mit Wasser aus einem Meßzylinder! Vergleiche den Rauminhalt des Schöpflöffels wieder mit dem Rauminhalt des Würfels, dessen Kante gleich dem Radius des Schöpflöffels ist!

1. Der Rauminhalt einer Kugel mit dem Radius r ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist

$$O = 4\pi r^2.$$

Versuch zur Bestimmung des Rauminhaltes der Kugel:

Stelle aus Pappe einen Zylinder und einen Kegel her, die dieselbe Grundfläche wie ein halbkugelförmiger Schöpflöffel und den Radius der Grundfläche zur Höhe haben (Abb. 117)! Fülle den Kegel mit trockenem Sand und untersuche, wie oft der Inhalt des Kegels in die Rundsäule und in den Schöpflöffel entleert werden kann! Der Versuch zeigt zwischen den Rauminhalten

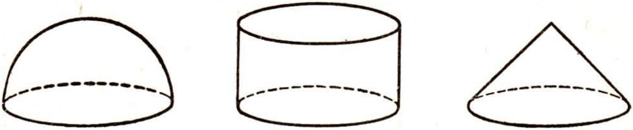


Abb. 117

der drei Körper die Beziehung: Rauminhalt der Halbkugel = Rauminhalt der Rundsäule – Rauminhalt des Kegels.

Bemerkung: Zum Beweis dieser Beziehungen sind Hilfsmittel erforderlich, die jetzt noch nicht zur Verfügung stehen.

Da der Rauminhalt der Rundsäule $\pi r^2 \cdot r$ oder πr^3 und der Rauminhalt des Kegels gleich $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$ oder $\frac{1}{3}\pi r^3$ ist, so erhält man für den Rauminhalt der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$. Für die Vollkugel ergibt sich damit

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Beweis zu Satz 2: Denkt man sich der Kugel einen Körper mit n ebenen Flächen einbeschrieben und verbindet alle Ecken dieses Körpers mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entstehen n Pyramiden mit den Höhen $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ und den Grundflächen $g_1, g_2, g_3, \ldots g_n$ (Abb. 118). Für den Rauminhalt dieses Körpers erhält man $\frac{1}{3}(g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + \cdots + g_n h_n)$. Mit wachsendem n nähern sich die Höhen unbegrenzt dem

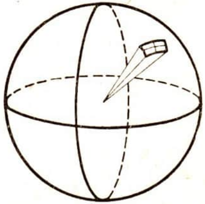


Abb. 118

Wert r und die Summe der n Grundflächen der Pyramiden unbegrenzt der Oberfläche O der Kugel. Für den Rauminhalt der Kugel darf daher gesetzt werden

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{O \cdot r}{3}.$$

Daraus folgt für die Oberfläche

$$O = 4\pi r^2.$$

Aufgaben

1. Eine Kugel hat den Radius **a)** $r = 15{,}4$ cm, **b)** $r = 32{,}5$ cm. Wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Eine Kugel hat die Oberfläche **a)** $O = 616$ cm², **b)** $O = 55{,}44$ cm². Wie groß ist ihr Rauminhalt? (Für π benutze den Näherungswert $\frac{22}{7}$!)

3. Ein eiserner Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder, der unten durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,8 m hoch, sein Grundkreis hat 2 m Durchmesser (lichte Weite).

a) Wieviel hl Wasser faßt dieser Behälter?

b) Wie groß ist die Benetzungsfläche des Behälters?

4. Ein gefüllter Ballon hat einen Radius $r = 2{,}1$ m. Wieviel m³ Gas müssen zu seiner Füllung entwickelt werden?

5. Ein kreisrunder Turm von 11 m Umfang ist durch ein halbkugelförmiges Dach abgeschlossen. Die Halbkugel wird mit Zinkblech belegt. 1 m² kostet einschließlich Arbeitslohn 5,75 DM. Wieviel DM kostet das Belegen des Daches?

6. Bei einem im Maßstab 1 : 100 gehaltenen Modell eines Planetariums hat die halbkugelförmige Kuppel den Umfang des Grundkreises $u = 39$ cm. Berechne den wirklichen Durchmesser der Kuppel!

7. Wie groß ist die Oberfläche und welches Gewicht besitzt eine Kugel aus

a) Buchsbaumholz (Wichte 1,15 p/cm³) mit dem Halbmesser $r = 40$ cm,
b) Sandstein („ 2,33 „) „ „ „ $r = 9$ „ ,
c) Messing („ 8,40 „) „ „ „ $r = 6$ „ ,
d) Elfenbein („ 1,92 „) „ „ „ $r = 5$ „ ?

8. Die beiden Eingangspfeiler eines Gartentores sind durch Sandsteinkugeln abgeschlossen. Die Herstellung der Oberflächen beider Sandsteinkugeln kostet 8,48 DM, wenn 1 m² mit 15 DM berechnet wird. Jede

Kugel wurde aus einem Würfel gearbeitet, dessen Kante gleich dem Durchmesser der Kugel ist. 1 m^3 Sandstein kostet 82 DM.

a) Wie groß ist der Durchmesser einer Sandsteinkugel?

b) Wieviel DM kostet jede Kugel?

c) Wie groß war der Abfall bei der Herstellung jeder Kugel?

9. Aus einem Holzwürfel mit der Kante $a = 28$ cm wird eine Kugel so gedreht, daß der Abfall möglichst gering wird. Wieviel cm^3 betrug der Abfall?

10. a) Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser $2r = 3$ cm können aus einem Bleirohr von 1,8 m Länge, 3 cm Wandstärke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4% verlorengehen?

b) Wie schwer ist jede Kugel, wenn die Wichte des Bleis 11,35 p/cm^3 ist?

11. Die zum Kugelstoßen verwendete Kugel wiegt 7,25 kp und hat einen Umfang von 391 mm, wenn sie aus Stahl besteht. Enthält sie eine Bleifüllung, so beträgt der Umfang 346 mm. Der Stahlmantel dieser Kugel ist rund 7 mm dick. Die Wichte des Bleis beträgt 11,35 p/cm^3.

a) Berechne den Durchmesser der Stahlkugel und die Wichte des Stahls!

b) Berechne den Durchmesser der Kugel mit Bleifüllung!

c) Berechne das Gewicht des Stahlmantels und der Bleifüllung dieser Kugel!

12. Ein Schlagball hat ein Gewicht von 90 p und einen Umfang von 22 cm. Berechne den Durchmesser und die Wichte des Balles!

13. Der Radius der Erde wird mit 6 370 km angegeben. Berechne, unter der Voraussetzung, daß die Erde eine vollständige Kugel ist, **a)** den Umfang eines Längenkreises der Erdkugel, **b)** ihre Oberfläche, **c)** ihren Rauminhalt!

14. Vergleiche Oberfläche und Rauminhalt des Mondes mit den bei der Erde berechneten Größen, wenn sein Durchmesser mit 3 476 km bestimmt wurde!

15. Der Radius der Sonne beträgt 695 400 km.

a) Bestimme ihren Rauminhalt!

b) Wieviel Erdkugeln könnte man aus dem Rauminhalt der Sonnenkugel formen?

16. Ein großer Schulglobus hat 84 cm Durchmesser. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte des Globusses und der Erdkugel zueinander?

67. Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion

Hält man das Drahtmodell eines Quaders so in das Sonnenlicht, daß zwei seiner Flächen waagerecht und zwei andere parallel zu einer Bildwand liegen, so entsteht ein Schattenbild des Quaders (Abb. 119). Wie ändert sich das Schattenbild, wenn der Quader bei unveränderter Lage der Bildwand gedreht, gehoben oder gesenkt wird?

Das Schattenbild eines Körpers (hervorgerufen durch parallele Lichtstrahlen, die schräg auf die Bildebene fallen) heißt **Schrägbild** des Körpers (**schiefe Parallelprojektion**[1])).

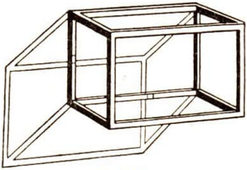


Abb. 119

Für jede schiefe Parallelprojektion gelten folgende Sätze:

1. **Jede Gerade gibt als Bild wieder eine Gerade, wenn sie nicht in der Richtung der Lichtstrahlen verläuft (Abb. 120a).**
2. **Parallele Geraden liefern als Bilder parallele Geraden.**
3. **Strecken, die der Bildebene parallel sind, behalten in der Projektion ihre natürliche Größe.**
4. **Strecken, die auf der Bildebene senkrecht stehen, werden durch die Projektion verkürzt oder verlängert. Ihre Bilder sind unter demselben Winkel α gegen die Waagerechte geneigt und in demselben Verhältnis q verkleinert oder vergrößert. $\sphericalangle\alpha$ nennt man den Verzerrungswinkel, q das Verzerrungsverhältnis.**

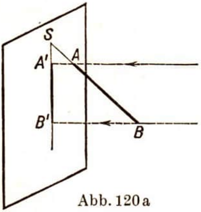


Abb. 120a

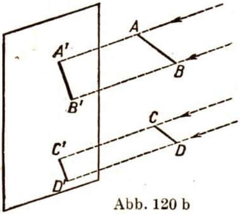


Abb. 120 b

Zu Satz 2 (Abb. 120b): Die parallelen Ebenen $ABA'B'$ und $CDC'D'$ werden von jeder Schnittebene, also auch von der Bildebene, in parallelen Geraden geschnitten.

---

1) proicere (lies: projicere) (lat.): hinwerfen.

Zu Satz 3 (Abb. 120c): $ABB'A'$ ist ein Parallelogramm.

Zu Satz 4 (Abb. 120d): a) Die Schenkel der Winkel mit den Scheiteln A, C und E sind je drei Parallele, die Winkel liegen daher in parallelen Ebenen, die die Bildebene in den parallelen Geraden $A'B$, $C'D$ und $E'F$ schneiden.

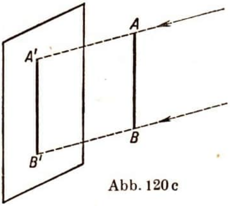


Abb. 120c

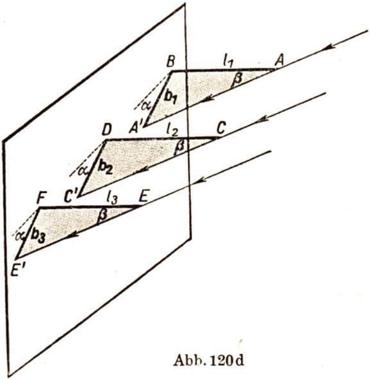


Abb. 120d

b) $\triangle ABA'$, $\triangle CDC'$ und $\triangle EFE'$ haben die gleiche Gestalt, da sie außer im rechten Winkel auch in dem Winkel β übereinstimmen. Bezeichnet man mit l die Länge der zur Bildebene senkrechten Strecken und mit b die Länge ihrer Bilder, so ist in allen Dreiecken

$$\frac{b}{l} = q.$$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Sätze 1 bis 4, indem als Bildebene ein Buchdeckel und als schattengebende Gerade Bleistifte benutzt werden!

2. Unter welcher Bedingung zeigen Rechteck, Trapez, gleichschenkliges Dreieck als Projektion die in Abb. 121 a und b dargestellte Form? α und q sind anzugeben!

3. a) Zeichne das Schrägbild eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 5{,}6$ cm so, daß zwei gegenüberliegende Flächen der Bildebene parallel sind! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$.

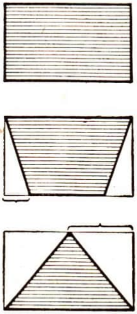


Abb. 121 a

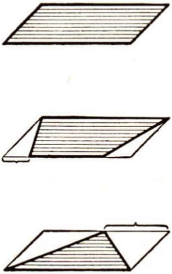


Abb. 121 b

b) Zeichne das Schrägbild des Würfels der Aufgabe **a)** so, daß vier seiner Flächen um 45° gegen die Bildebene geneigt sind! $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$.

Anleitung: Suche die durch gegenüberliegende Kanten gehende Fläche auf, die der Bildebene parallel ist, und zeichne sie in natürlicher Größe! Zeichne dann das Bild der senkrecht auf ihr stehenden Flächen!

4. Es ist die Projektion einer Kreisscheibe zu zeichnen, deren Ebene senkrecht zur Bildebene liegt! Abb. 121c soll als Anleitung dienen. α und q dieses Bildes sind anzugeben!

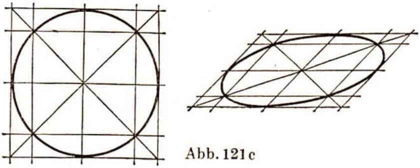


Abb. 121c

5. Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Kanten $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $c = 6$ cm so, daß

a) zwei gegenüberliegende Flächen der Bildebene parallel sind,

b) zwei gegenüberliegende Kanten in einer Ebene liegen, die der Bildebene parallel ist! Wähle Verzerrungswinkel und Verzerrungsmaßstab beliebig!

6. Zeichne das Schrägbild einer quadratischen Platte ($a = b = 6$ cm; $c = 2$ cm) mit quadratischem Durchbruch ($a' = 2{,}5$ cm) in der Mitte, dessen Kanten den Plattenkanten parallel laufen! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$.

7. Zeichne das Schrägbild einer Sechskantschraubenmutter (ohne Gewindebohrung), Schlüsselweite $s = 2{,}2$ cm (Abb. 122), Höhe 1,5 cm, $\alpha = 45°$; $q = \frac{2}{3}$, so daß

a) die Sechsecke der Bildebene parallel sind,

b) zwei parallele Seitenflächen der Bildebene parallel sind!

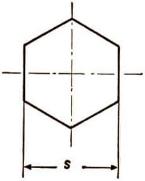


Abb. 122

8. Zeichne das Schrägbild eines Viererzeltes aus 4 dreieckigen Zeltbahnen (Länge = Breite = 3,20 m; Höhe = 1 m) im Maßstab 1 : 50 so, daß zwei gegenüberliegende Grundkanten der Bildebene parallel sind! $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$.

Anleitung: Der Aufbau der Pyramide erfolgt von der liegenden Grundfläche aus, im Mittelpunkt der Grundfläche wird die senkrechte Achse errichtet und die Pyramidenhöhe auf ihr abgetragen. Die Verbindungsstrecken der Spitze mit den Ecken der Grundfläche ergeben die Pyramidenform.

9. Zeichne das Schrägbild einer Riemenscheibe mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Breite von 8 cm im Maßstab 1 : 5, wenn die Kreisflächen waagerecht liegen; $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$!

10. Zeichne das Schrägbild einer senkrechten Rundsäule mit dem Grundkreisradius $r = 2{,}5$ cm und der Höhe $h = 6$ cm ($\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$)!

11. Zeichne das Schrägbild eines geraden Kreiskegels mit $r = 4$ cm und $h = 3$ cm! $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ (Abb. 123).

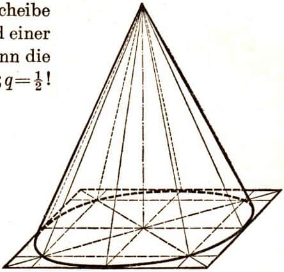


Abb. 123

68. Die senkrechte Parallelprojektion

Ein Haus mit Satteldach ist $l = 15$ m lang, $b = 10{,}5$ m breit, in der Front $h_1 = 4{,}2$ m und im Giebel $h_2 = 7{,}5$ m hoch. Die Abb. 124 zeigt seine senkrechte **Eintafelprojektion.** Das Bild entsteht durch Projektionsstrahlen, die senkrecht auf die als Projektionstafel dienende Grundebene des Hauses treffen. Die Zeichnung ist hier im Maßstab 1 : 300 ausgeführt. In ihr fällt z. B. das mit E' bezeichnete Bild des oberen Endpunktes E der senkrechten Hauskante AE auf A, deshalb kann die Länge dieser Kante aus dem Bild

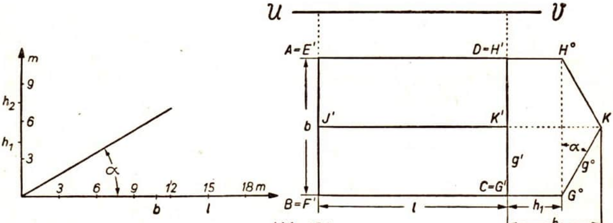
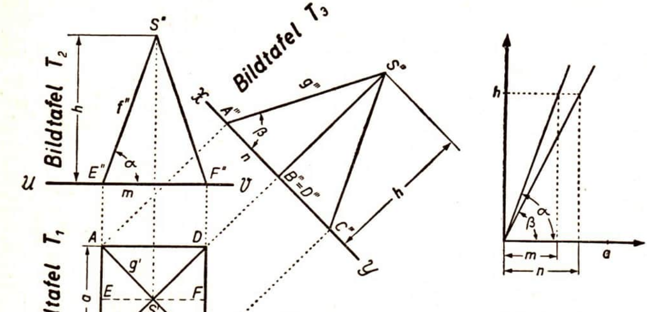


Abb. 124

nicht festgestellt werden. Dasselbe gilt für alle zur Grundebene senkrecht stehenden Kanten. Die Abstände, die nicht in der Tafelebene liegende Punkte von dieser haben, werden gewöhnlich durch einen neben das Bild gezeichneten Höhenmaßstab angegeben. Der zu Abb. 124 gehörende Höhenmaßstab enthält den aus der Zeichnung ermittelten Böschungswinkel α des Grates g. Beschreibe, wie der Winkel α gefunden worden ist!
Zeichne die Abb. 124 ins Heft, ziehe etwa 1 cm oberhalb zu der geraden Linie AD eine Parallele UV und entwirf auf dem Zeichenblatt über UV die Vorderansicht des Hauses!



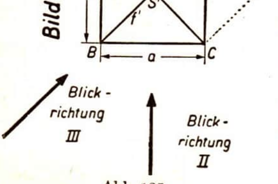


Abb. 125

Die Abb. 125 zeigt als $ABCDS'$ die senkrechte Eintafelprojektion einer geraden Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S. Warum kann man aus dieser Eintafelprojektion allein nicht die Höhe der Pyramide erkennen?

Zu einer vollständigen senkrechten Eintafelprojektion gehört der Höhenmaßstab, der auch zur Darstellung der Böschungswinkel verwendet wird.

Ist von einer quadratischen Pyramide entweder der Böschungswinkel α der Seitenfläche oder der Böschungswinkel β der Seitenkante bekannt, so kann die Pyramidenhöhe h hergestellt werden. Beschreibe den Gang der Konstruktion!

Die Vorderansicht der Pyramide hängt von der Blickrichtung ab. Die Abb. 125 zeigt zwei solche Ansichten. Sie entstehen ebenfalls durch senkrechte Parallelprojektion. Das eine Mal ist die Zeichentafel parallel zum Mittelschnitt EFS, das andere Mal parallel zum Diagonalschnitt ACS der Pyramide auf die Gerade UV bzw. XY der Grundebene gestellt. Weil in Abb. 125 auf demselben Zeichenblatt drei Bilder der Pyramide gezeichnet sind, erscheint jeder Pyramidenpunkt mehrfach. Ein Punkt und seine Bilder werden mit demselben Buchstaben bezeichnet. Die besondere Bedeutung wird durch Indizes zum Ausdruck gebracht, die den Buchstaben angehängt werden. Beschreibe die Konstruktionen! Welche Buchstaben hätte man an die mit E'' und F'' bezeichneten Punkte noch schreiben können? Welche Bedeutungen haben die Winkel α und β?

Der für die senkrechte Eintafelprojektion nötige Höhenmaßstab wird überflüssig, wenn von einem Gegenstand zwei senkrechte Parallelprojektionen auf zwei zueinander rechtwinkligen Tafeln vorliegen. Man spricht dann von der senkrechten **Zweitafelprojektion.** Die beiden Bildtafeln T_1 und

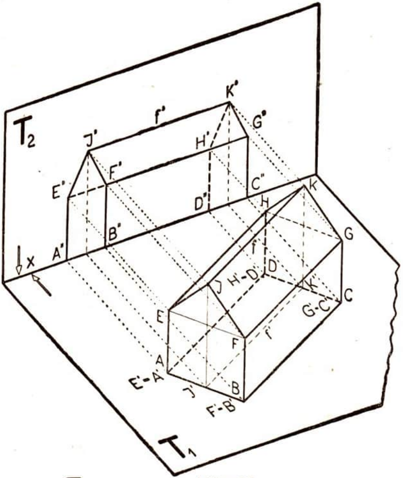


Abb. 126

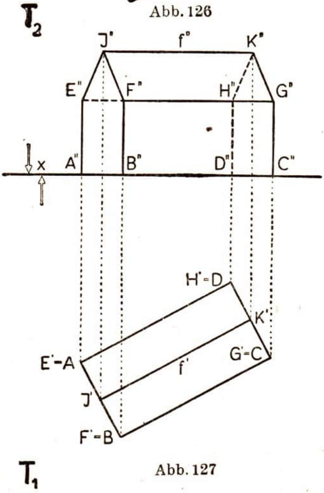


Abb. 127

T_2 schneiden einander in der Projektionsachse x. Gewöhnlich wird die eine Bildtafel T_1 als waagerechte (horizontale) Ebene angenommen. Sie wird deshalb Grundrißtafel genannt, und das auf ihr liegende Bild heißt das Grundrißbild oder kurz der Grundriß des dargestellten Gegenstands. Die andere Bildtafel T_2 heißt dann Aufrißtafel, das zugehörige Bild Aufrißbild oder Aufriß des Gegenstands. Die auf die beiden Tafeln kommenden Bilder zeichnet man auf dasselbe Zeichenblatt; die beiden Tafeln werden dazu um die Projektionsachse so weit gedreht, bis beide in eine gemeinsame Zeichenebene umgelegt sind.

Die das Bild entwerfenden Projektionsstrahlen stehen auf der betreffenden Bildtafel senkrecht (Abb. 126. 127).

Jeder Gegenstand (Punkt P, Strecke s usw.) hat zwei Bilder oder Projektionen. Der Punkt P ergibt als Grundrißbild P' und als Aufrißbild P'', s gibt s' und s''.

Ist das Bild einer Gegenstandskante in einer Projektionsrichtung sichtbar, so wird es als Vollinie gezeichnet; ist die Kante unsichtbar, weil sie von dem Gegenstand verdeckt ist, wird das Bild als Strichlinie gezeichnet.

Für die senkrechte Zweitafelprojektion gelten folgende Sätze (Abb. 126, 127):

1. **Die Aufrißbilder aller Punkte, die in der Grundrißtafel liegen, fallen in die Projektionsachse (A'', B'').**

   Die Grundrißbilder aller Punkte, die in der Aufrißtafel liegen, fallen in die Projektionsachse.

2. **Die beiden Bilder eines Punktes liegen nach der Umlegung der Tafeln auf einer Senkrechten zur Projektionsachse und werden durch eine dünne Strichlinie verbunden (E' E'' usw.).**

3. **Jede Gerade hat zu Bildern wieder gerade Linien, sofern sie nicht in der Richtung der Bildstrahlen verläuft (z.B. FI und BF).**

4. **Parallele Geraden haben zu Bildern parallele (oder zusammenfallende) Geraden ($FI \parallel GK$; $HE \parallel FG$).**

5. **Die Aufrißbilder horizontaler Geraden, die nicht auf der Aufrißtafel senkrecht stehen, laufen zur Projektionsachse parallel (FG). Die Grundrißbilder der zur Aufrißtafel parallelen Geraden, die nicht auf der Grundrißtafel senkrecht stehen, laufen zur Projektionsachse parallel.**

6. **Die Projektionen von Strecken, die einer Bildtafel parallel laufen, behalten in dieser Tafel ihre natürliche Länge, die in der anderen Tafel liegenden Projektionen erscheinen verkürzt ($FG = F'G' \neq F''G''$).**

Aufgaben

1. a) Zeichne nach Abb. 126, 127 die Projektionen der Hauskanten BF, FG, FI in besonderen Bildern!

b) Verlängere die Kanten FG und FI bis zu den Punkten, in denen sie die Bildtafeln durchstoßen; man nennt diese Punkte die Spurpunkte der Geraden. Wir bezeichnen den Spurpunkt in der Grundrißtafel mit H, den in der Aufrißtafel mit V.

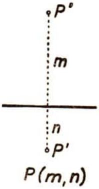


Abb. 128

2. Zeichne **a)** die Dachfläche $FGKI$, **b)** die Giebelfläche $ABFIE$, **c)** die Hauswand $BCGF$ in der Zweitafelprojektion!

3. a) Wie hoch liegt der in Abb. 128 dargestellte Punkt P über der Tafel T_1, und wie weit liegt er vor der Tafel T_2?

b) Zeichne die Projektionen der folgenden Punkte, wenn die erste Zahl den Abstand über der Tafel T_1, die zweite den vor der Tafel T_2 in cm angibt! A (3; 2), B (2; 3), C (4; 4), D (0; 5), E (3; 0).

4. Stelle zu den Abb. 129 bis 136 mit Hilfe von Bleistiften oder Streichhölzern die Lagen der Punkte und Strecken im Raume dar!

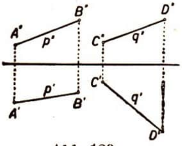


Abb. 129

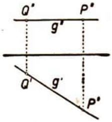


Abb. 130

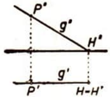


Abb. 131

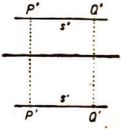


Abb. 132

5. a) Zeichne die Bilder der Strecke $s = A\,B$, wenn $A\,(5;\,4)$ und $B\,(3;\,2)$ und $s' = 7$ cm lang sind!

b) Wähle auf s einen beliebigen Punkt P und lege durch ihn eine beliebige Strecke $t = CD$!

c) Lege durch P eine Strecke u parallel zu T_2!

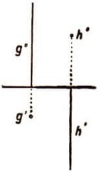


Abb. 133

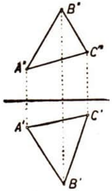


Abb. 134

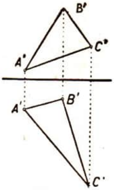


Abb. 135

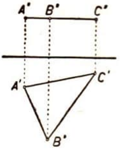


Abb. 136

6. a) Warum liegen die in Abb. 137 dargestellten Strecken $A\,B$ und $C\,D$ nicht in einer Ebene?

b) Nenne in Abb. 126, 127 zwei Strecken, die nicht in einer Ebene liegen! Zeichne ihre Projektionen, verlängere sie und zeige, daß ihre Bilder dem in Abb. 137 dargestellten Falle entsprechen!

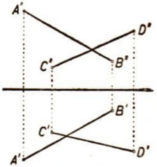


Abb. 137

7. Zeichne **a)** einen Quader, **b)** einen Würfel, **c)** ein dreiseitiges Prisma in beliebiger Stellung in Zweitafelprojektion, wenn die Grundfläche in der Tafel T_1 liegt!

8. Zeichne 1. eine stehende, 2. eine liegende **a)** dreikantige, **b)** kreisrunde Säule!

9. Zeichne einen geraden Kreiskegel, dessen Achse senkrecht **a)** zu T_1, **b)** zu T_2 steht!

10. Erkläre die Abb. 138 bis 143!

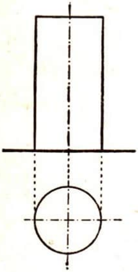


Abb. 138

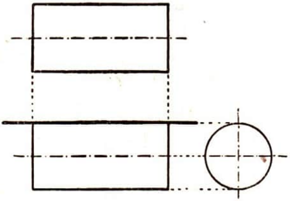


Abb. 139

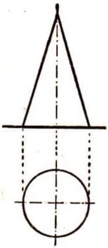


Abb. 140

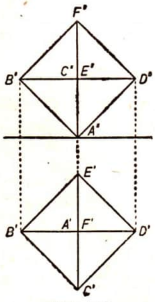


Abb. 141

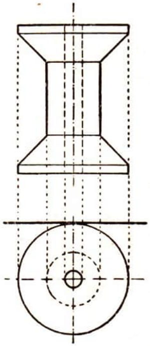


Abb. 142

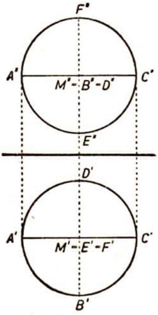


Abb. 143

69. Anwendungen aus der Technik

1. Der Trog eines Schiffshebewerkes hat eine Länge von 85 m, eine Breite von 12 m, eine Wassertiefe von 2,50 m.

a) Welchen Raum nimmt die Wassermenge ein; wie schwer ist sie?

b) Die gesamte Eisenkonstruktion des Troges wiegt 1 600 t. Wie schwer ist der mit Wasser gefüllte Trog?

c) Wie schwer ist der Trog, wenn ein Schiff von 1 000 t Gewicht eingefahren ist? (Denke an die Wasserverdrängung!)

2. Ein anderes Schiffshebewerk hat einen Trog mit einer Breite von 12,50 m, einer Länge von 85 m. Seine Wassertiefe beträgt 2,50 m.

a) Wieviel Wasser faßt der Trog?

b) Das Gewicht des leeren Troges und der Stahlträger, auf denen er ruht, ist ebenso groß wie das Gewicht seiner Wasserfüllung. Welche Last wird bei jedem Aufstieg des Troges gehoben?

3. Abb. 144 zeigt die Querschnitte von gleichschenkligem Winkelstahl (a), ungleichschenkligem Winkelstahl (b) und ⅂-Stahl (c). Die Fläche des Querschnittes ist bei (a) 26,2 cm²; bei (b) 33,2 cm²; bei (c) 14,5 cm². Wie schwer ist ein solcher Profilstahl von 4 m Länge, wenn 1 cm³ Stahl 7,85 p wiegt?

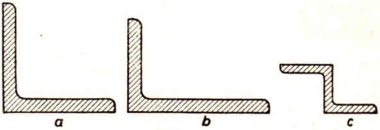


Abb. 144

4. Ein Badeofen in Form einer Rundsäule, der 222 l faßt, hat einen Durchmesser von 50 cm. Das im Innern befindliche Rauchrohr hat einen Durchmesser von 12 cm. Wie hoch ist der Badeofen, und wieviel Blech war zu seiner Herstellung nötig, wenn für den Falz 5% gerechnet werden?

5. Ein Wagenrad von 8 cm Breite erhält einen Reifen aus Flachstahl (Wichte = 7,85 p/cm³), wodurch der Durchmesser von 30 auf 32 cm vergrößert wird. Berechne die durch den Reifen entstandene Gewichtszunahme!

6. Das Gewicht einer Kreisscheibe (Durchmesser $d = 20$ cm), soll durch Ausbohren von vier kreisförmigen Löchern um $\frac{1}{4}$ verringert werden. Berechne den Durchmesser der Löcher!

7. Der Mantel eines 16 m hohen und 24 m weiten (äußere Weite!) Gasbehälters wird mit Mennige grundiert und dann dreimal mit Ölfarbe gestrichen. 1 m² wird mit 1,15 DM berechnet. Bestimme die Kosten für den Anstrich!

8. Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß ist 5,25 m lang und besitzt einen Umfang von 2,20 m. Es wiegt 1 220 kp. Die Wichte des Eisens ist 7,25 p/cm³. Wie dick ist die Wand des Rohres?

9. Wieviel kp Kupfer sind zur Herstellung eines 8 500 km langen Leitungsdrahtes erforderlich, wenn er einen Durchmesser von 1 mm (1,2 mm; 0,8 mm) besitzen soll und die Wichte des Kupfers 8,9 p/cm³ ist?

10. Für das Gehäuse einer kleinen Gleichstromdynamomaschine hat man ein Stahlrohrstück von 102/87 mm Durchmesser und 80 mm Länge nötig. Berechne das Gewicht des Rohrstückes! (Wichte des Stahls s. Aufg. **3**!)

11. Bei den verschiedenen Motoren der Verbrennungskraftmaschinen gibt es Erfahrungswerte für das Verhältnis $K = \frac{\text{Hubraum}}{\text{Zylinderdurchmesser}}$. Berechne den Hubraum für Zylinderdurchmesser von 4 (5; 7; 9,5) cm nach der Tafel!

Motorart	K
Dieselmotoren . . .	1,30 bis 1,70
Ottomotoren	1,10 ,, 1,45

12. Ein Grünfuttersilo ist ein kreisrunder säulenförmiger Behälter, der zum Einsäuern von Viehfutter dient. Er ist $h = 13{,}5$ m hoch und hat eine innere, „lichte" Weite von 6 m. Wieviel m³ vermag er zu fassen? Abb. 145.

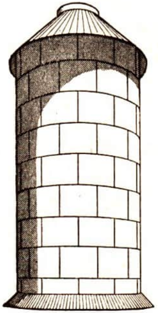


Abb. 145

13. Das Walmdach eines Hauses von $a = 25$ m Breite und $b = 14$ m Tiefe ist unter dem Neigungswinkel $\alpha = 60°$ gegen alle Seiten aufgesetzt.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe des Daches fest!

b) Zerlege den Dachraum durch zwei Ebenen, die senkrecht zum Dachfirst durch dessen Endpunkte gelegt werden, in Körper mit bekannten Inhaltsformeln und berechne den Rauminhalt des Daches!

c) Zeichne 1. die senkrechte Eintafelprojektion, 2. die Zweitafelprojektion des Walmdaches in geeignetem Maßstab!

14. Ein Walmdach hat die in Abb. 146 angegebenen Maße in Metern.

a) Zerlege mit Hilfe von zwei geeigneten Schnittebenen den Dachraum in Körper, für die Formeln bekannt sind, und berechne den Rauminhalt des Daches!

b) Zeichne 1. die senkrechte Eintafelprojektion, 2. die Zweitafelprojektion des Walmdaches und bestimme daraus die Höhen der Dachflächen!

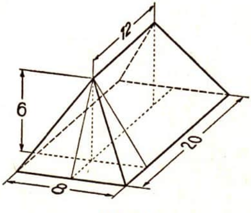


Abb. 146

c) Berechne die Flächenhöhen und vergleiche die Ergebnisse mit den durch die Zeichnung gefundenen Werten!

d) Berechne, wie groß die mit Ziegeln zu deckenden Dachflächen sind!

15. Zerlege den in Abb. 147 in Zweitafelprojektion dargestellten Sandhaufen durch geeignete Schnittebenen in solche Raumteile, deren Inhaltsformeln bekannt sind, und berechne, wieviel m³ Sand in ihm lagern!

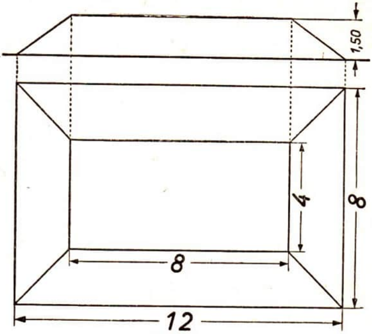


Abb. 147

16. Ein Topf aus Weißblech hat unten 13 cm, oben 8 cm lichte Weite. Seine innen gemessene räumliche Höhe ist 12,5 cm.

a) Zeichne den Topf in Zweitafelprojektion! Ergänze die Aufrißzeichnung zu einem gleichschenkligen Dreieck und miß die Verlängerung der Höhe aus! Sie ist die Höhe des „Ergänzungskegels“.

b) Berechne mit Hilfe der Höhe des Ergänzungskegels den Rauminhalt, den der Topf faßt!

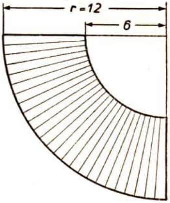


Abb. 148

17. Der in Abb. 148 dargestellte Viertelkreisring läßt sich zum Mantel eines Kegelstumpfes formen und ist der Zuschnitt zum Mantel eines Bechers.

a) Berechne die Durchmesser seines Grund- und seines Deckkreises!

b) Zeichne mit Hilfe der berechneten Durchmesserlängen den Achsenschnitt des Kegelstumpfes und miß seine Höhe aus!

c) Berechne diese Höhe mit Hilfe der Durchmesserlängen!

18. Erkläre die Zweitafelprojektion der in Abb. 149 dargestellten festen Rolle mit Schere!

a) Wie stehen hier die Bildtafeln?

b) Aus wieviel Einzelteilen besteht die Schere, und welche Maße haben sie?

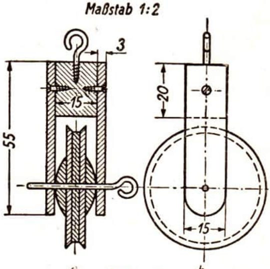


Abb. 149

19. Eine freitragende steinerne Treppe besteht aus mehreren Stufen, deren unterste als „Antritt“ einen rechtwinkligen Querschnitt hat, während die anderen Stufen ein rechtwinkliges Dreieck zum Querschnitt haben (Abb. 150). Der waagerechte Teil der Stufe heißt „Auftritt“ b, der senkrechte Teil heißt „Steigung“ h. Das günstigste Steigungsverhältnis wird allgemein aus der Erfahrungsformel $2h + b = 62$ cm berechnet.

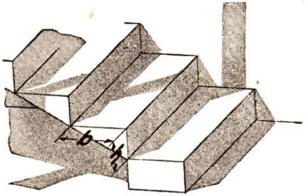


Abb. 150

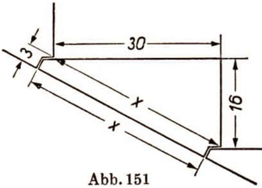


Abb. 151

a) Berechne die Steigung h der Treppe für einen 30 cm breiten Auftritt! Wieviel Stufen sind nötig, wenn die Treppe 1,44 m hoch führen soll, und welche waagerechte Weite benötigt man für diese Treppe?

b) Zeichne die Seitenansicht der Treppe, wenn eine einfache Lagerung der Stufen angenommen wird, bei der die Stufen mit den Kanten aneinanderstoßen, und entnimm der Zeichnung den Anstiegswinkel!

c) Die wirkliche Lagerung ist aus Abb. 151 zu ersehen. Berechne die Länge der Strecke x und den Flächeninhalt des Querschnitts der Steinstufe sowie deren Gewicht, wenn die Treppe 1 m breit und die Wichte des Steines 2,1 p/cm³ ist!

20. Bei einer Wendeltreppe haben die Steinstufen die in Abb. 152 dargestellte Form. Mit den schraffierten Flächen liegen sie aufeinander. Die Höhe der Stufen beträgt 30 cm.

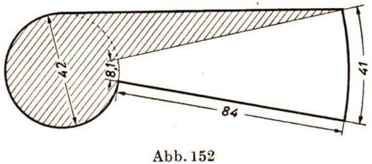


Abb. 152

a) Wieviel Stufen kommen auf eine volle Umdrehung?

b) Um wieviel Meter ist man bei einer vollen Umdrehung gestiegen?

c) Wieviel volle Umdrehungen muß man ausführen, und wieviel Stufen sind nötig, wenn der Turm 76 m hoch ist?

d) Stelle die Anstiegsmaße der Treppe für ihre beiden Ränder zeichnerisch dar und miß die Anstiegswinkel!

XVI. Aus der Ähnlichkeitslehre

70. Verhältnis zweier Strecken und Teilverhältnis

Abb. 153 veranschaulicht, welche Strecken ein Fußgänger (a), ein Reiter (b) und ein Kraftradfahrer (c) in einer Stunde zurücklegen. Lies aus der Zeichnung ab, in welchem Verhältnis die Strecken zueinander stehen! Wodurch erleichtert die Zeichnung diese Feststellung?

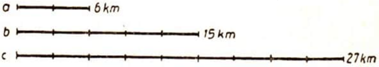


Abb. 153

Gib an, in welchen Verhältnissen die Hebel HF und ED der in Abb. 154 dargestellten Dezimalwaage geteilt sind!

Erklärungen:

Das Verhältnis zweier Strecken ist gleich dem Verhältnis ihrer Maßzahlen. Das gemeinsame Maß der beiden Strecken ist die Strecke, die in beiden gleichzeitig enthalten ist.

Liegt ein Punkt C auf einer Strecke AB so, daß sich die Entfernungen des Punktes C von den Endpunkten A und B der Strecke wie $p:q$ verhalten, so sagt man, der Punkt teile die Strecke im Verhältnis $p:q$.

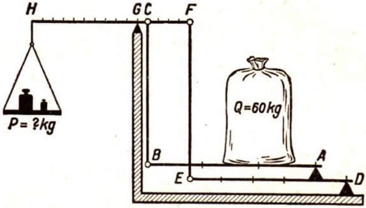


Abb. 154

Es gibt auch Strecken ohne ein gemeinschaftliches Maß. Die Diagonale des Einheitsquadrates z. B. hat die Länge $\sqrt{2}$, die Quadratseite die Länge 1. $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Daher haben die Diagonale und die Seite eines Quadrates kein gemeinsames Maß, sie sind inkommensurabel[1]).

Aufgaben

1. a) Rechne nach Abb. 153 aus, in welcher Zeit Fußgänger, Reiter und Kraftfahrer 1 km zurücklegen!

b) Gib an, in welchem Verhältnis die Strecken zueinander stehen!

c) Fertige eine Zeichnung so, daß die Verhältnisse an ihr abzulesen sind!

2. Zeichne je zwei Streckenpaare mit den Verhältnissen **a)** $2:5$, **b)** $4:3$, **c)** $7:5$, **d)** $3:1$, **e)** $2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$!

3. Zeichne mehrere Streckenpaare und bestimme die Streckenverhältnisse! Gib die Länge der Strecken **a)** auf 1 cm, **b)** auf 1 mm genau an!

1) in- (lat. Vorsilbe): un-, mensura (lat.): Maß, also unvergleichbar.

4. Ziehe in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele und miß auf jeder der beiden anderen Seiten die Streckenverhältnisse der entstandenen Abschnitte!

5. Zeichne eine Strecke AB von 12 cm Länge und teile sie durch einen zwischen den Endpunkten gelegenen Teilpunkt so, daß sich die Teilstrecken wie **a)** 7 : 5, **b)** 1 : 11, **c)** 5 : 19, **d)** 17 : 7, **e)** 5 : 3 verhalten!

71. Strahlensätze

Zum Putzen von Schaufenstern wird eine spitz zulaufende Leiter benutzt (Abb. 156). Zeichne sie in der Draufsicht!

Vergleiche die Entfernungen der Stangen in der Zeichnung mit den Entfernungen der Leitersprossen!

In Abb. 155 erkennt man Fernsprechleitungen längs einer Eisenbahnstrecke.

Wie verlaufen die Linien in Wirklichkeit und wie in der Zeichnung?

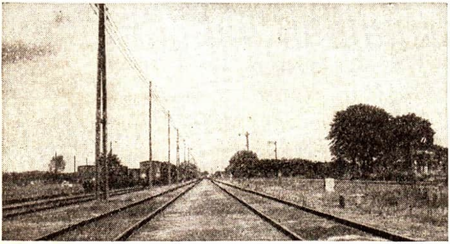


Abb. 155

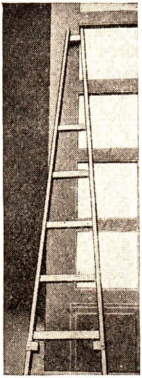


Abb. 156

Parallelensatz: Teilt man eine Strecke AB in n gleiche Teile und legt durch die Endpunkte der Teilstrecken Parallelen, so begrenzen diese auf jedem durch A oder B gelegten Strahl n gleiche Abschnitte (Abb.157).

Jede Parallele durch die zwischen A und B liegenden Teilpunkte ist Mittellinie in einem durch die Zeichnung entstandenen Trapez.

Bemerkung: Durch die Parallelen wird also die Teilung der Strecke AB auf die durch A (oder B) gehenden Strahlen übertragen.

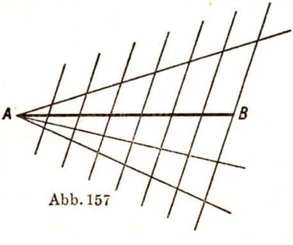


Abb. 157

Erster Strahlensatz: Werden von einem Punkt ausgehende Strahlen durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich zwei Abschnitte auf einem Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf jedem anderen (Abb. 158 und 159).

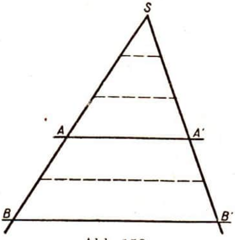


Abb. 158

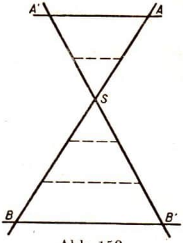


Abb. 159

In Abb. 158 schneiden zwei Parallelen die von S ausgehenden Strahlen in A, B, A' und B'. Der Abschnitt SA ist 27 mm (p mm) und der Abschnitt AB 18 mm (q mm) lang. Demnach verhält sich SA zu AB wie $3 : 2$ ($p : q$). Teilt man SA in 3 (p) und AB in 2 (q) gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte Parallelen zu den schon gezeichneten Parallelen, so werden auf dem anderen Strahl ebensoviel Teilabschnitte erzeugt. Sie sind etwas kürzer, aber nach dem Parallelensatz untereinander gleich. Die Abschnitte SA' und $A'B'$ verhalten sich ebenfalls wie $3 : 2$ ($p : q$).

Es ist $\quad SA : AB = 3 : 2\ (p : q)$

$\qquad\qquad SA' : A'B' = 3 : 2\ (p : q)$,

folglich ist $\quad SA : AB = SA' : A'B'$.

Führe den Beweis nach Abb. 159!

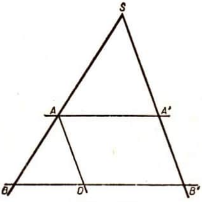


Abb. 160

Man kann die letzte Verhältnisgleichung mehrfach umformen; weise nach, daß z. B. folgende Umformungen richtig sind:

$$SA : SA' = AB : A'B'$$
$$AB : SA = A'B' : SA'.$$

Zweiter Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf zwei Parallelen wie die vom Ausgangspunkt der Strahlen bis zu diesen Parallelen reichenden Abschnitte eines Strahles (Abb. 160).

Zieht man $AD \parallel SB'$, so verhält sich

$$DB' : BB' = SA : SB;$$

da aber $\quad DB' = AA'$ ist,

so folgt $\quad AA' : BB' = SA : SB$

und entsprechend $\quad AA' : BB' = SA' : SB'$.

Aufgaben

1. Zeichne zu drei gegebenen Strecken a, b und c eine vierte Strecke x so, daß $a : b = c : x$ gilt!

Anleitung: Abb. 161 zeigt, wie man die Aufgabe nach dem 1. Strahlensatz lösen kann. Ordne die Strecken auch anders an! Löse die Aufgabe auch mit Hilfe des 2. Strahlensatzes!

Anmerkung: Die gesuchte Strecke x wird als 4. Proportionale zu a, b und c bezeichnet.

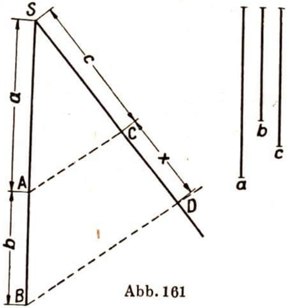


Abb. 161

2. Teile die Strecke AB durch einen Punkt C im Verhältnis $p : q$ (z.B. 5 : 3)!

Ausführung (Abb. 162): Man zieht durch A und B in einer beliebigen Richtung Parallelen, trägt auf diesen von A aus p (5) gleiche Teile, von B aus nach der anderen Seite q (3) gleiche Teile ab und verbindet die Endpunkte der letzten Teilstrecken miteinander.

3. Teile in einem Dreieck, dessen Seiten 6 cm, 7 cm und 8 cm lang sind, die größte Seite im Verhältnis 3 : 5 und zeichne durch den Teilungspunkt die Parallele zu der kleinsten Seite! Berechne

a) die Abschnitte auf der mittleren Seite,

b) die Länge der Parallelen und miß dann nach!

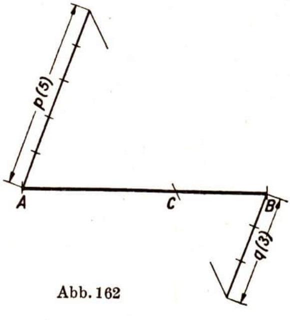


Abb. 162

4. Zeichne eine beliebig lange Strecke und teile sie im Verhältnis

a) 4 : 5 b) 3 : 8 c) 7 : 4
d) 11 : 6 e) $m : n$!

5. Benutze eine Heftseite mit Linien, um eine gegebene Strecke in n (3, 4, 5, . . .) gleiche Teile zu teilen! Begründe das Verfahren!

6. Teile die Fläche eines Dreiecks durch eine Gerade von einer Ecke aus in zwei Teile, die sich wie 3 : 4 verhalten!

72. Anwendungen der Strahlensätze

1. a) Miß Länge und Breite von Briefmarken aus! Zeichne die Fläche einer Marke vergrößert aus Strecken, die sich zu den ursprünglichen wie 3 : 5 verhalten, ohne deren Maßzahlen zu berechnen! Abb. 163 zeigt die Lösung.

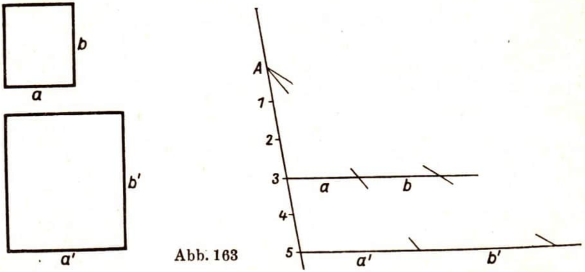


Abb. 163

b) Gib an, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt bei der Vergrößerung der Seiten gewachsen ist!

2. Verkleinere entsprechend eine Postkarte (DIN A 6) im Verhältnis 8 : 3!

3. Zum schnellen Vergrößern und Verkleinern einzelner Strecken ist ein Doppelzirkel (Proportionalzirkel) hergestellt worden, wie ihn Abb. 164 zeigt.

a) Beschreibe den Zirkel und erkläre, wie er angewendet wird!

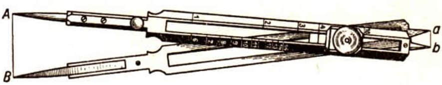


Abb. 164

b) Fertige aus schmalen Pappstreifen oder Holzschienen das Modell eines solchen Zirkels und befestige die Streifen so aufeinander, daß eine Vergrößerung 3 : 1 entsteht!

c) Benutze den hergestellten Doppelzirkel zum Vergrößern und Verkleinern von Quadraten, Rechtecken, Dreiecken und anderen Flächen, die du zeichnest!

4. a) Abb. 165 zeigt eine aus dem Physikunterricht bekannte Lochkamera. Stelle durch Versuche fest, wie stark die Lochkamera verkleinert! Bestimme die Verkleinerung im Bild!

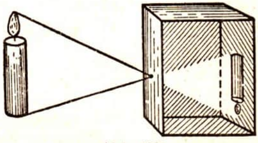
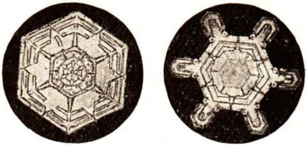


Abb. 165

b) Der Durchmesser von Eiskristallen schwankt etwa zwischen 0,005 mm und 2 mm. Die Abb. 166 a und b zeigen photographische Aufnahmen von Eiskristallen, die im Verhältnis 1 : 100 vergrößert sind. Wie groß sind die größten Durchmesser dieser Eiskristalle in Wirklichkeit?



a Abb. 166 b

5. Der Fühlhebel (Abb. 167) dient zum Messen geringer Dicken. Gib auf Grund des Bildes an, wie groß die geringste Dicke ist, die noch gemessen werden kann, wenn sich $b : a = 1 : 10$ verhält!

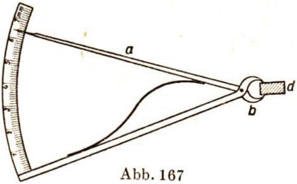


Abb. 167

6. Auf Karten und Winkelmessern findet man einen verjüngten Maßstab (Abb. 168).

a) Stelle fest, welcher Strahlensatz Anwendung findet!

b) In welcher Weise wachsen die Längen der Parallelen zwischen den Strahlen? Beachte, daß Abb. 168 im Maßstab 2 : 1 gezeichnet wurde!

c) Wie lang ist die untere eingezeichnete Strecke?

d) Führe Messungen mit dem verjüngten Maßstab auf Wanderkarten aus!

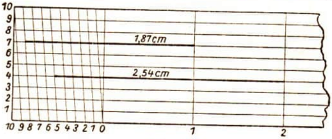


Abb. 168

7. Nach dem Portugiesen Pedro Nunes (1542) ist der häufig angewendete **Nonius** benannt (Abb. 169). Ist er z. B. 9 mm lang und in 10 gleiche Abschnitte geteilt, so ist ein Teil $\frac{9}{10}$ mm lang. Trifft der Teilstrich 0 des Nonius auf einen Millimeterstrich des Maßstabes der Schieblehre, so ist dasselbe beim Teilstrich 10 des

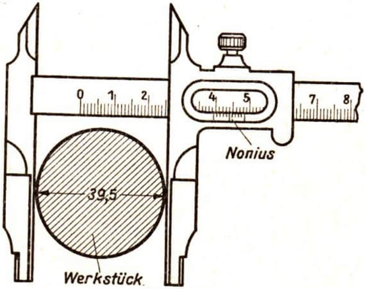


Abb. 169

Nonius festzustellen. Erfüllt der Teilstrich 1 des Nonius diese Bedingung, so ist der Teilstrich 0 um $\frac{1}{10}$ mm weitergerückt. Es können also Zehntelmillimeter abgelesen werden. Was ist bei der in Abb. 169 gezeichneten Einstellung abzulesen? Verwende den Nonius bei Messungen mit der Schieblehre!

8. Die Entfernung zweier Masten einer Hochspannungsleitung, die schräg über einen Kanal führt, soll durch Aufstellen von Fluchtstäben und Streckenmessungen nach Abb. 170 ermittelt werden. Beschreibe und begründe das Verfahren!

Beispiele:

	a	b	c
a)	21 m	18 m	9 m
b)	24 m	20 m	12 m

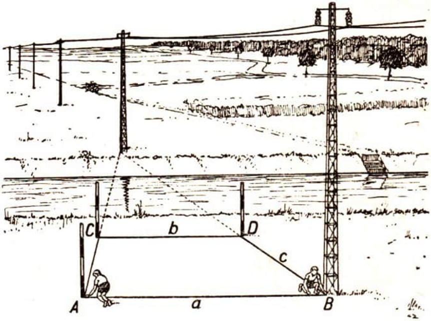


Abb. 170

9. Löse die folgenden Gleichungen durch Zeichnung auf:

a) $\frac{4}{5} = \frac{3}{x}$ **b)** $\frac{3}{7} = \frac{5}{x}$ **c)** $\frac{5}{9} = \frac{x}{4}$ **d)** $\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$

e) $5x = 28$ **f)** $ax = bc$ **g)** $ax = b^2$ **h)** $ax = 3b^2$!

73. Ähnlichkeit und Ähnlichkeitssatz

Stelle fest, welche Vielecke in Abb. 171 einander ähnlich sind und welche nicht! Versuche durch Messungen die Gründe für die Ähnlichkeit und für die Unähnlichkeit zu finden!

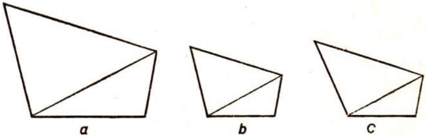


Abb. 171

Erklärungen: Dreiecke und Vielecke heißen **ähnlich,** wenn sie in gleichliegenden Winkeln und im Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen. Ähnliche Flächen haben die gleiche Gestalt. Das Zeichen für ähnlich ist $\sim$[1]).

1) Das Zeichen für ähnlich war ursprünglich ein umgelegtes S (lat. similis: ähnlich).

Bezeichnet m den Wert des Verhältnisses entsprechender Seiten in ähnlichen Vielecken, so ist das Ähnlichkeitsverhältnis m gleichbedeutend mit dem von früher her bekannten Maßstab der Zeichnung. m gibt die lineare Vergrößerung (Verkleinerung) an.

Jede Parallele zu einer Seite eines Dreiecks schneidet von diesem ein ihm ähnliches Dreieck ab.

Anleitung für den Beweis (Abb. 172):

Weise nach, daß die Winkel gleich sind und daß entsprechende Seiten das gleiche Verhältnis haben (Strahlensätze)!

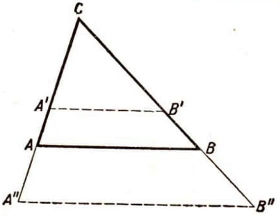


Abb. 172

Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Winkel überein, so sind sie ähnlich.

Anleitung für den Beweis (Abb. 173): Verschiebt man $\triangle A'B'C'$ so auf $\triangle ABC$, daß $\sphericalangle \gamma'$ auf $\sphericalangle \gamma$ fällt, so erhält es die neue Lage $A''B''C$. Dann ist $A''B'' \parallel AB$ (warum?). Daraus ergibt sich nach obigem Satz die Verhältnisgleichheit aller entsprechenden Seiten.

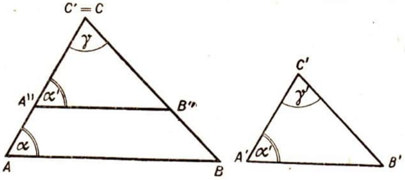


Abb. 173

Aufgaben

1. Welche Eigenschaften haben **a)** flächengleiche Dreiecke, **b)** ähnliche Dreiecke, **c)** deckungsgleiche Dreiecke? Wie kommen diese Unterschiede in den Zeichen für die Gleichheit usw. zum Ausdruck?
2. Nenne Dreiecke und Vierecke, die einander immer ähnlich sind!
3. In welchen Fällen sind **a)** gleichschenklige Dreiecke, **b)** rechtwinklige Dreiecke, **c)** Parallelogramme, **d)** Rhomben, **e)** Rechtecke einander ähnlich?
4. Vergleiche Kreise verschiedener Größe in bezug auf die Ähnlichkeit miteinander!

5. Zeichne Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen:

a) $\alpha = 75°$; $\beta = 40°$ **b)** $\alpha = 60°$; $\gamma = 57°$ **c)** $\beta = 100°$; $\gamma = 45°$!

6. Abb. 174 zeigt einen „Storchschnabel", der zur Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen benutzt wird. Punkt P wird festgehalten, der Stift in F folgt den Umrissen einer Zeichnung. Dann zeichnet der Schreibstift in Z die verkleinerte ähnliche Figur.

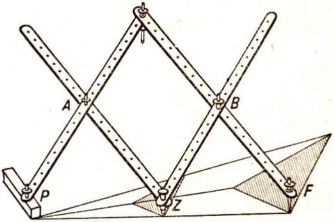


Abb. 174

a) Fertige ein Modell des Storchschnabels an und übe das Vergrößern und Verkleinern an geeigneten Vorlagen!

b) Weise nach, daß die von den Stiften F und Z beschriebenen Zeichnungen ähnliche Vielecke sind!

c) Wovon hängt das Vergrößerungsverhältnis m ab?

7. Bei der in Abb. 175 abgebildeten Form des Storchschnabels läßt sich der Stab S nach dem verlangten Maßstab verschieben. Wird A festgehalten, so kann man einen der Stifte in B und C als Führungsstift, den anderen als Zeichenstift benutzen.

a) Erkläre den Gebrauch dieses Storchschnabels und stelle den Maßstab m der Verkleinerung (Vergrößerung) fest!

b) Wie ändert sich der Maßstab, wenn an die Stelle von A der Punkt C tritt?

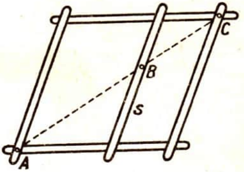


Abb. 175

8. Zeige, daß jedes rechtwinklige Dreieck durch die Höhe so in zwei Dreiecke zerlegt wird, daß **a)** jedes Teildreieck dem ganzen Dreieck und **b)** beide Teildreiecke einander ähnlich sind!

9. Zeichne zu folgenden Stücken die mittlere Proportionale:

a) 3 cm und 5 cm, **b)** 4 cm und 6 cm, **c)** 5 cm und 7 cm!

Die Vorlagen zu den Abbildungen stammen von Photo Haecker, Rathenow (77, Rathenower Dreschmaschinenfabrik VEB); K. Knoch. Schneekristallformen. Naturwissenschaften 18 (1930), Heft 11, S. 244 bis 246 (166); von der Bildstelle des volkseigenen Verlages Volk und Wissen (6, 7, 8, 9, 78, 155, 156).