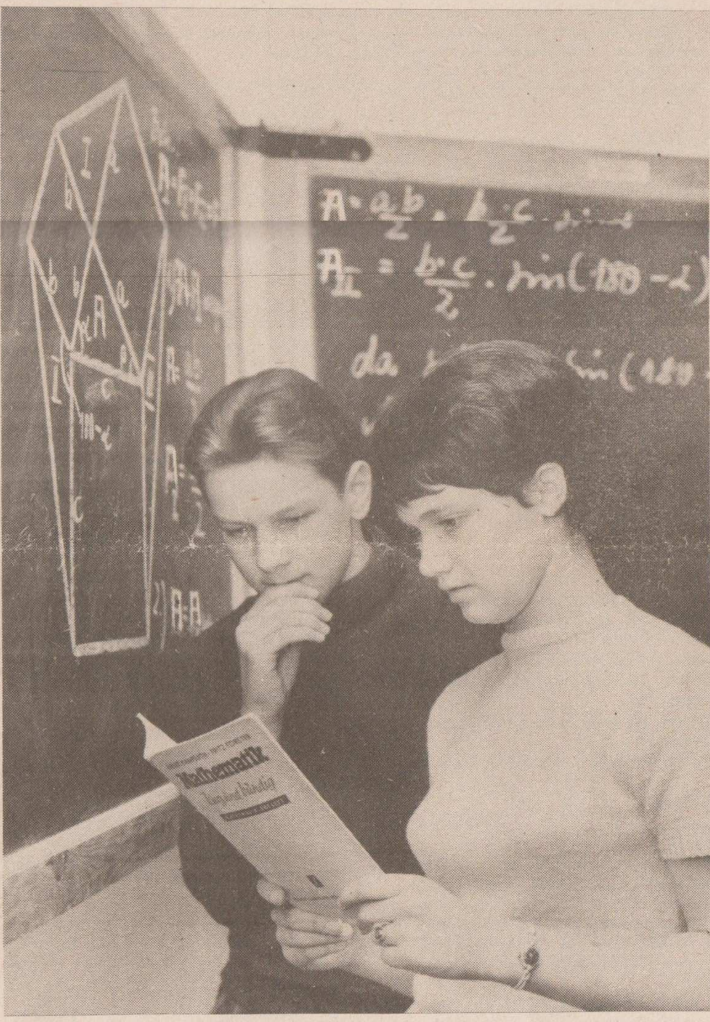
mathe LVZ
75
LEIPZIGER VOLKSZEITUNG
SONDERAUSGABE
DEZEMBER 1975
PREIS 0,40 M
Organ der Bezirksleitung Leipzig der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands

GEOMETRIE (k)ein Sorgenkind

Liebe Mädchen und Jungen!
Wie jedes Jahr erscheint auch diesmal zum Geburtstag der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" die neue Ausgabe der Mathe-LVZ. Die Mathematik gewinnt in unserem gesellschaftlichen Leben eine immer größere Bedeutung und damit auch die Geometrie, der unsere mathematische Sonderausgabe gewidmet ist.
Noch vor Jahrzehnten bestand der Geometrieunterricht in der Schule im wesentlichen aus Flächen- und Körperberechnungen. In der modernen Geometrie von heute wird darüber hinaus mit Beweisen, Herleitungen und Wechselbeziehungen zwischen Arithmetik, Algebra und Geometrie gearbeitet.
Die Geometrie stellt hohe Anforderungen. Deshalb sind Konzentration und Mitarbeit jedes einzelnen besonders wichtig, damit Geometrie nicht zum Sorgenkind im Mathematikunterricht wird.
Die 14. Ausgabe unserer Mathe-LVZ bietet 111 interessante Geometrieaufgaben für die Klassenstufen 2 bis 10.
Auch diese Ausgabe wird mit Hilfe vieler lustiger Vignetten und kleinen Knobeleien in aufgelockerter Form dargeboten.
Durch die Teilnahme am großen Preisausschreiben auf den Seiten 8/9 könnt Ihr wieder wertvolle Buchpreise gewinnen. Die Gewinner unserer vorigen Ausgabe werden auf Seite 9 veröffentlicht.

Viel Freude und Erfolg beim Lösen unserer Aufgaben wünscht Euch
Eure Leipziger Volkszeitung



Geometrie erzieht zu sauberer, gewissenhafter, genauer Arbeit, regt zu logischem, konstruktivem und räumlichem Denken an.
Foto: H Krabbes

Das Staatliche Kontor für Unterrichtsmittel und Schulmöbel in Leipzig stellt für unsere Schulen fast 100 verschiedenartige mathematische Modelle zur Verfügung. Darüber hinaus werden weit über 2000 Arbeitsmittel und Modelle für andere Unterrichtsgebiete von den Mitarbeitern dieses Kollektivs bereitgestellt.
Foto: Pullwitt

> Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur da zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf.
>
> C. F. Gauß (1777 bis 1855)

Preisausschreiben · mit Preisausschreiben ·

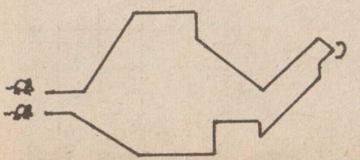
GEOMETRIE 4x8=32 Aufgaben

Junge Mathematiker hergehört !

Wenn du die folgenden Aufgaben mit Freude und Erfolg lösen willst, mußt du zunächst die Texte sehr aufmerksam lesen und zum Beispiel beachten, daß „Viereck" und „Quadrat" nicht dasselbe ist. Außer deinem Schreib- und Zeichenwerkzeug (Lineal, Zeichendreieck, Zirkel und vielleicht auch Schablonen) benötigst du manchmal eine Anzahl gleichlanger Stäbchen, wie du sie im 1. Schuljahr benutzt hast. Mit ihrer Hilfe und etwas Knetmasse kannst du ein Kantenmodell eines Würfels bauen. Für die Lösung einiger Aufgaben wäre es gut, wenn du ein Würfelmodell hättest. Es genügt ein etwas größerer Holz- oder Plastwürfel. Mitunter benötigst du etwas Papier mit quadratischen Kästchen und eine Schere. Und nun wünschen wir dir beim Knobeln viel Spaß!

Klasse 2

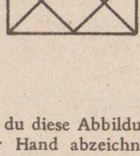
1. Eine Katze verfolgt zwei Mäuse, die in ihr Loch ausreißen und die zwei dargestellten Wege zurücklegen. Welcher der beiden Wege ist der kürzere? Welche der beiden Mäuse wird sich eher in ihr Loch in Sicherheit bringen können, wenn sie die Katze nicht vorher erwischt?



2. Zwei Strahlen (auch Halbgeraden genannt) mit gemeinsamem Anfangspunkt bilden einen Winkel.
Wie viele Winkel bilden
a) drei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt,
b) vier Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt,
c) zwei einander schneidende Geraden?

3. Zeichne
a) drei,
b) vier
Punkte A, B, C und D! Wie viele Strecken sind durch diese Punkte bestimmt?
c) Ändert sich das Ergebnis, wenn die Punkte auf einer Geraden g liegen?
d) Ändert sich das Ergebnis, wenn zwei Punkte zusammenfallen?

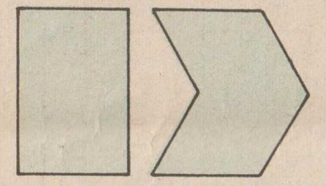
4. Wie viele Quadrate und wie viele Dreiecke sind in unserer Abbildung dargestellt?



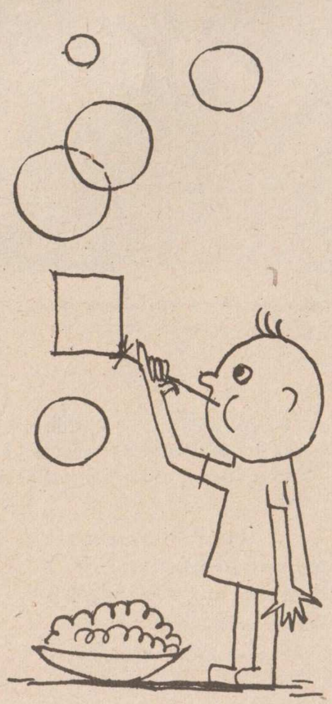
5. Kannst du diese Abbildung (Aufgabe 4) aus freier Hand abzeichnen? Wenn du denkst, daß das einfach ist, dann stelle vor dich einen Spiegel auf den Tisch und halte zwischen deine Augen und das Zeichenblatt ein weiteres Blatt Papier so, daß du das Zeichenblatt nicht mehr direkt, sondern nur noch im Spiegel sehen kannst. Nun zeichne! Drollig, nicht wahr?

6. Kannst du um ein Würfelmodell einen Faden so spannen, daß dieser Faden ein nichtquadratisches Rechteck darstellt?

7. Welche der beiden schraffierten Flächen ist größer?
Du kannst die Antwort durch geschicktes Ausschneiden und Zusammensetzen einer der beiden Figuren finden.

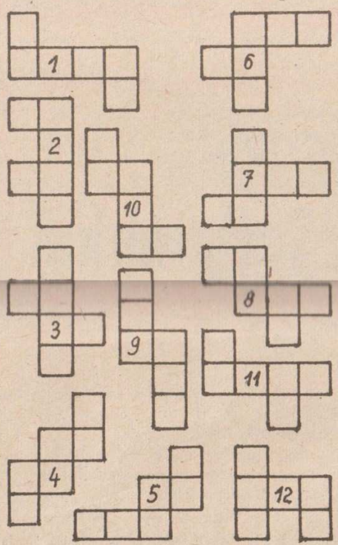


8. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Hülle einer Streichholzschachtel passend über den restlichen Teil der Schachtel zu streifen?



Klasse 3

1. Aus Papier ein Flugzeug bauen, das kann jeder. Aber kannst du auch aus Papier ein Würfelmodell falten? Du brauchst dazu einen besonders zugeschnittenen Bogen. Er muß so beschaffen sein, daß sich daraus durch entsprechendes Falten die sechs quadratischen Seitenflächen des Würfelmodells bilden lassen. Eine Schere darfst du nur zum Zuschneiden des Bogens, aber sonst nicht benutzen. Klar ist, daß auf dem Bogen sechs deckungsgleiche Quadrate gezeichnet sein müssen. Wie aber müssen diese angeordnet sein? Unsere Abbildung zeigt dir zwölf verschiedene Anordnungen von je sechs deckungsgleichen Quadraten. Nicht aus allen läßt sich ein Würfelmodell falten. Welche eignen sich, sind also „Würfelnetze", welche nicht?

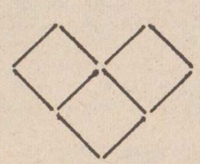


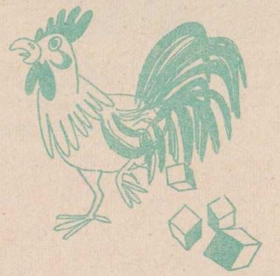
Es gibt insgesamt elf verschiedene Würfelnetze. Findest du noch die drei Würfelnetze, die in unserer Abbildung nicht dargestellt sind?

2. Wenn du dir aus einem Würfelnetz ein Würfelmodell baust und dazu auch eine passende oben offene Schachtel, so kannst du einmal probieren, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, das Würfelmodell in die Schachtel zu stecken.

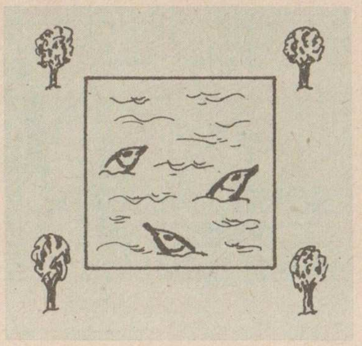
3. Kann man um eine Würfelmodell einen Faden so spannen, daß dieser Faden
a) einen nichtquadratischen Rhombus darstellt?
(Ein Rhombus ist ein Viereck, dessen Seiten alle gleichlang sind.)
b) Kann man auf diese Weise auch ein Parallelprogramm darstellen, das kein Rechteck und auch kein Rhombus ist?

4. Unsere Abbildung zeigt, wie man aus zehn gleichlangen Stäbchen drei Vierecke legen kann. Ist es möglich, ein Stäbchen wegzunehmen und aus den übrigen neun Stäbchen wieder drei Vierecke zu legen?

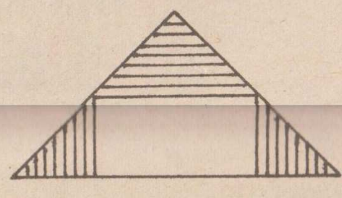




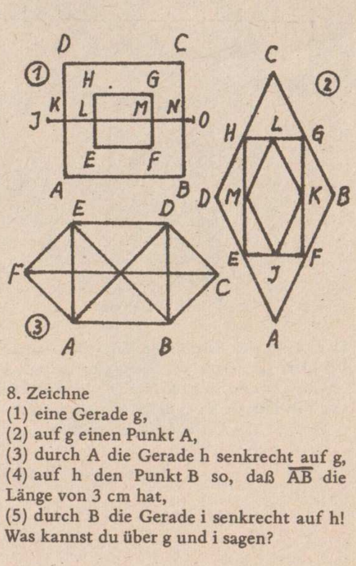
5. Ein Fischzüchter möchte seinen quadratischen Teich unter folgenden Bedingungen vergrößern: Der Teich soll doppelt so groß wie bisher und wieder quadratisch werden, ohne daß vier schöne alte Bäume an dessen Ecken gefällt werden müssen. Ist das möglich?



6. Welche Fläche ist größer, die weiß dargestellte Rechteckfläche oder die straffiert dargestellten Flächen der drei Dreiecke zusammen?



7. Jede der drei Figuren unserer Abbildung kann man in einem Zuge nachzeichnen, ohne eine Linie mehr als einmal zu durchfahren. Es gibt in jedem Falle mehrere Lösungsmöglichkeiten.



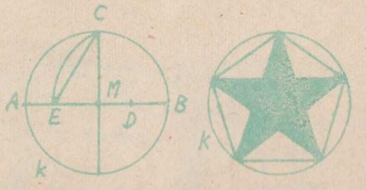
8. Zeichne
(1) eine Gerade g,
(2) auf g einen Punkt A,
(3) durch A die Gerade h senkrecht auf g,
(4) auf h den Punkt B so, daß $\overline{AB}$ die Länge von 3 cm hat,
(5) durch B die Gerade i senkrecht auf h!
Was kannst du über g und i sagen?

Klasse 4

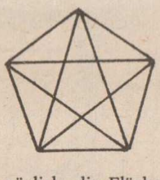
1. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck, indem du einen Radius eines Kreises k sechsmal hintereinander auf k abträgst und die sechs Punkte miteinander verbindest.
a) Auf wie viele Arten kann man alle sechs Punkte eines Sechsecks insgesamt miteinander verbinden?
b) Wie viele Strecken verbinden nicht benachbarte Punkte des Sechsecks, sind also Diagonalen des Sechsecks?

2. Kann man um ein Würfelmodell einen Faden so spannen, daß dieser Faden
a) ein nichtrechteckiges gleichschenkliges Trapez,
b) ein regelmäßiges Sechseck darstellt?

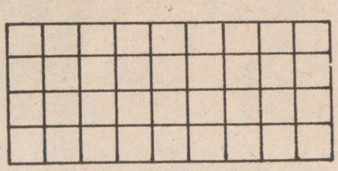
3. Kannst du einen Sowjetstern konstruieren? Wir erklären eine Konstruktionsmöglichkeit anhand unserer beiden Abbildungen:
Zeichne
(1) einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M,
(2) einen Durchmesser $\overline{AB}$ von k,
(3) halbiere $\overline{MB}$ und bezeichne den Mittelpunkt von $\overline{MB}$ mit D,
(4) zeichne um D einen Kreisbogen mit dem Radius $\overline{DC}$, der $\overline{AB}$ in E schneide!
(5) Trage $\overline{EC}$ auf k fünfmal hintereinander ab und verbinde alle fünf Punkte miteinander!
a) Auf wie viele Arten kann man alle fünf Punkte eines Fünfecks insgesamt miteinander verbinden?
b) Wie viele Diagonalen hat ein (regelmäßiges) Fünfeck?
Die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks bilden ein regelmäßiges Sternfünfeck (ein Pentagramm), das wir als Sowjetstern dargestellt finden.
c) Zeichne ein regelmäßiges Sternfünfeck in einem Zuge!



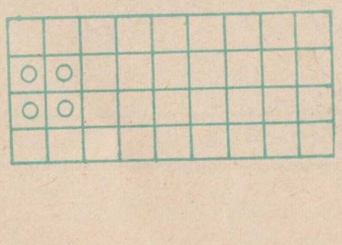
4. Wie viele Dreiecke sind in unserer Abbildung dargestellt?



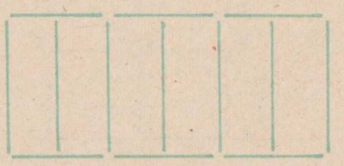
5. Ist es möglich, die Fläche eines Rechtecks, die sich aus 36 Quadratflächen zusammensetzt, so in zwei Teile zu zerlegen, daß man diese zu einer Quadratfläche zusammenlegen kann?



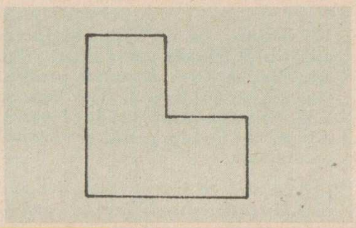
6. Vier Geschwister erbten von ihren Eltern einen großen rechteckigen Garten, in dem vier große Obstbäume standen, wie es unsere Abbildung zeigt. Die Eltern hatten gewünscht, daß jedes ihrer Kinder genau ein Viertel des Gartens, und zwar ein zusammenhängendes Stück bekommen sollte, und auf jedem Stück sollte auch einer der Obstbäume stehen. Die Geschwister berieten, wie sie den Garten teilen sollten. Kannst du helfen?



7. Jemand hat aus dreizehn gleichgroßen Brettern einen Stall für seine sechs Ziegen so gebaut, wie es unsere Abbildung, mit Hilfe von Stäbchen veranschaulicht, zeigt. Nun wurde eines der Bretter derart beschädigt, daß es entfernt werden mußte. Kann man auch aus den verbleibenden zwölf Brettern einen Stall mit sechs Buchten so bauen, daß die Buchten alle gleiche Form und gleiche Größe haben und kein Brett zersägt wird?



8. Zerlege die dargestellte Figur, die aus den Flächen dreier deckungsgleicher Quadrate gebildet werden kann, in vier deckungsgleiche Figuren!

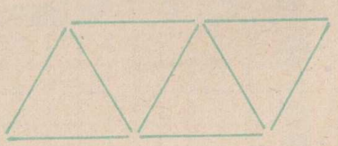


Klasse 5

1. Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks soll durch drei gleichlange Strecken in die Flächen von
a) drei,
b) vier
deckungsgleichen gleichschenkligen Dreiecken zerlegt werden.

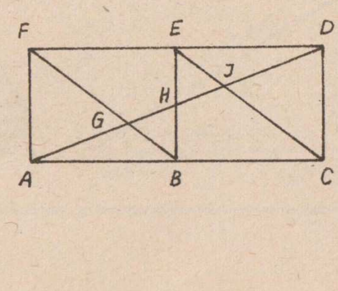
2. Die Fläche eines Quadrats soll durch vier gleichlange Strecken in die Fläche eines Quadrats und die Flächen von vier deckungsgleichen Dreiecken zerlegt werden.

3. Wir haben mit neun gleichlangen Stäbchen vier gleichseitige Dreiecke dargestellt.
Wir nehmen nun drei Stäbchen weg und stellen aus den restlichen sechs wieder vier gleichseitige Dreiecke dar. Aber wie?



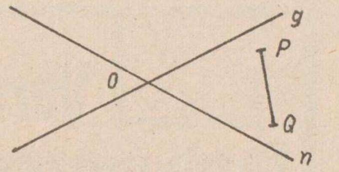
4. Jemand hat einen roten Holzwürfel von 3 cm Kantenlänge und möchte diesen Würfel in lauter kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegen.
a) Wie viele kleine Würfel kann man aus dem roten Würfel herstellen?
Wie viele von den kleinen Würfeln haben
b) drei rote Seitenflächen,
c) zwei rote Seitenflächen,
d) eine rote Seitenfläche,
e) keine rote Seitenfläche?

5. Welche und wie viele Dreiecke sind in unserer Abbildung dargestellt?

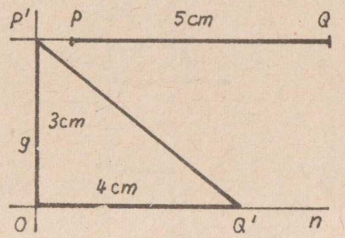


6. Gib die Lagemöglichkeiten von
a) einer Geraden,
b) zwei,
c) drei,
d) vier,
e) fünf
verschiedenen Geraden einer Ebene übersichtlich an!
Wir empfehlen dir, beim Zeichnen folgende Systematik zu beachten:
– Zeichne eine „hinzukommende" Gerade h so, daß sie eine schon gezeichnete Gerade g nicht schneidet, also parallel g ist!
– Zeichne h dann so, daß sie g schneidet!
– Beachte dies auch für eine dritte Gerade i, wobei i
• zunächst durch keinen schon gezeichneten Punkt P gehen soll,
• dann durch P gehen soll usw.
Wie viele Möglichkeiten gibt es in den Fällen a), b), c), d) und e)? Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst du?

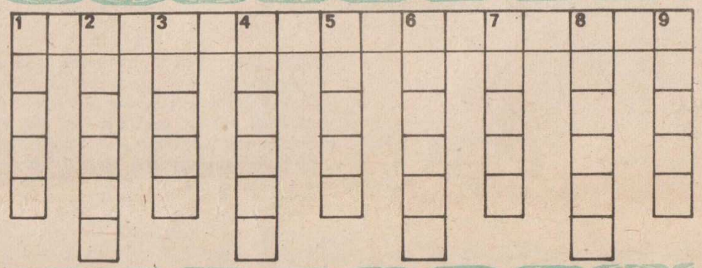
7. Gegeben seien zwei einander in 0 schneidende Geraden g und h und eine Strecke $\overline{PQ}$ derart, daß weder P noch Q auf g oder h liegen.
Ist es möglich, durch Verschiebung eine Strecke P'Q' mit P' als Bild von P und Q' als Bild von Q so zu konstruieren, daß
a) P' auf g, Q' auf h,
b) P' auf h, Q' auf g
liegt? Konstruiere gegebenenfalls jeweils die Verschiebung!



8. Gegeben seien zwei einander in 0 schneidende Geraden g und h mit $g \perp h$. Ein Punkt P' liege auf g, ein Punkt Q' auf h derart, daß $\overline{0P'}$ die Länge von 3 cm, $\overline{0Q'}$ die Länge von 4 cm hat. Auf der zu h durch P' gehenden Parallelen i liegt eine Strecke $\overline{PQ}$ von 5 cm Länge.
Ist es möglich, $\overline{PQ}$ durch Drehung in $\overline{P'Q'}$ derart zu überführen, daß
a) P' das Bild von P, Q' das Bild von Q,
b) P' das Bild von Q, Q' das Bild von P
ist?
Kostruiere gegebenenfalls jeweils das Drehzentrum und den Drehwinkel!



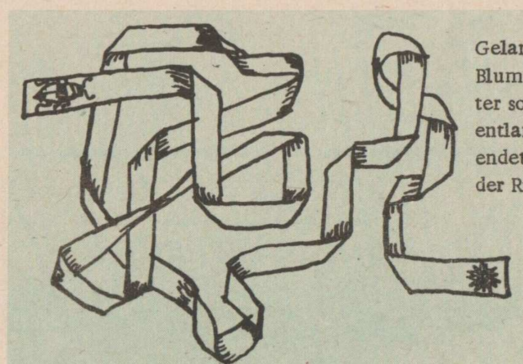
Geometrische Kenntnisse gefragt



Senkrecht
1 altes russisches Längenmaß
2 Begriff aus der Bruchrechnung
3 Stelle im dekadischen Positionssystem
4 Flächenmaß
5 Raummaß für Flüssigkeiten
6 Teilungsart einer Strecke
7 andere Bezeichnung für Rhombus
8 bedeutender Mathematiker (1643 bis 1727)
9 geometrischer Grundbegriff im dreidimensionalen Raum
Werden in die freien Felder der waagerechten Zahlenreihe die Buchstaben A B D E E I K L richtig eingefügt, so ergibt sich waagerecht ein geometrischer Begriff, den alle Schüler der 6. Klassen kennen.

Lösung
Senkrecht: 1 WERST 6 INNERE
2 NENNER 7 RAUTE
3 EINER 8 NEWTON
4 HEKTAR 9 EBENE
5 LITER
Waagerecht: WINKELHALBIERENDE

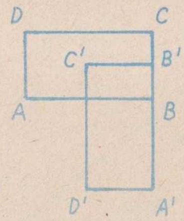
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch
74 Altenburg,
Clara-Zetkin-Oberschule



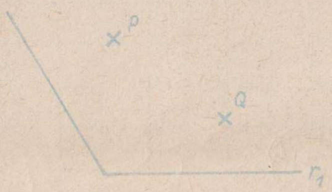
Gelangt der Käfer zur Blume wenn er weiter so auf dem Band entlang spaziert - oder endet sein Weg auf der Rückseite?

Verschiebung, Drehung und Spiegelung

1. Die Abbildung stellt zwei kongruente Rechtecke ABCD und A'B'C'D' dar, wobei B' Mittelpunkt von BC ist und A' auf der Geraden $\overline{BC}$ liegt. Es ist eine Drehung (Drehzentrum, Drehsinn, Drehwinkel) anzugeben, durch die das Rechteck ABCD auf das Rechteck A'B'C'D' abgebildet wird.



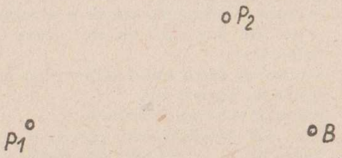
2. Es seien r_1 und r_2 zwei auf der Zeichenebene senkrecht stehende Spiegel, die sich in der Geraden s schneiden. Die Punkte P und Q liegen in der Zeichenebene. Wir fassen Q als Lichtquelle auf und fragen nach sämtlichen von Q ausgehenden Lichtstrahlen, die P treffen.
a) Wie viele solcher Strahlen gibt es? (Reflexionsgesetz anwenden!)
b) Führe die Konstruktion dieser Strahlen durch!



3. Das Rechteck ABCD mit den Seiten $\overline{AB}$ = a und $\overline{BC}$ = b stellt die Spielfläche eines Billardtisches dar. Die Punkte K_1 und K_2 symbolisieren zwei auf der Spielfläche ruhende Kugeln, deren Abstände c, d, e und f von der Bande des Tisches bekannt sind. In welchem Punkt P von $\overline{BC}$ muß die Kugel K_1 auftreffen, um nach dem Berühren der Bande die Kugel K_2 zu treffen? Die Aufgabe ist a) zeichnerisch durch Konstruktion des Punktes P zu lösen; b) numerisch durch Berechnung der Strecke $\overline{BP}$ zu lösen. Abb. s. Lös.

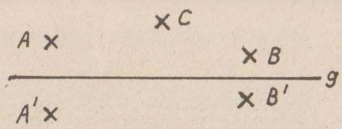
4. Welches ist der kürzeste Weg, der von einem Punkte A, der zwischen den Schenkeln eines spitzen Winkels α liegt, zu einem Punkt des einen, danach zu einem Punkt des anderen Schenkels und schließlich zum Punkte A zurückführt?

5. Gegeben sind drei Punkte B, P_1 und P_2. Man konstruiere zwei kongruente, sich in B berührende Kreise k_1 und k_2 derart, daß k_1 durch P_1 und k_2 durch P_2 geht.

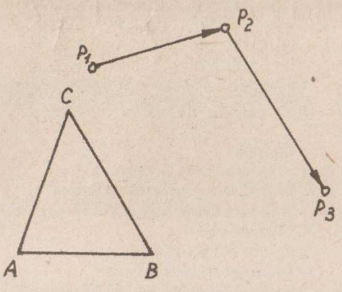


6. Ein Punkt P im Innern eines Quadrates ABCD habe von den Eckpunkten A, B und C dieses Quadrates die Abstände $\overline{PA}$ = 1 cm, $\overline{PB}$ = 2 cm und $\overline{PC}$ = 3 cm. Es ist die Seite $\overline{AB}$ dieses Quadrates a) zu konstruieren, b) aus den gegebenen Abständen $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ zu berechnen.

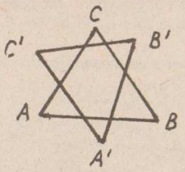
7. Die Abbildung stellt drei Originalpunkte A, B, C und zwei Bildpunkte A', B' dar, die durch Spiegelung von A und B an der Geraden g entstanden sind. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Lineal und Bleistift den Bildpunkt C', der symmetrisch zu C bezüglich der Geraden g liegt. Gib eine Konstruktionsbeschreibung an!



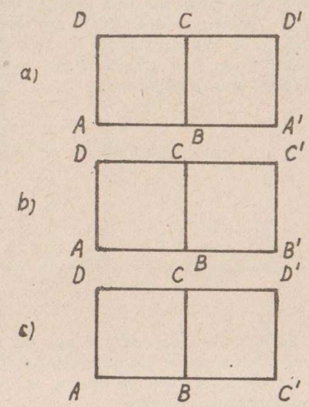
8. Die nachstehende Zeichnung stellt ein Dreieck ABC und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ dar. Mit dem Dreieck ABC sollten nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile gegeben sind.



9. Das Dreieck A'B'C' sei das Bild des Dreiecks ABC, das durch Drehung des Dreiecks ABC um den Punkt D als Drehzentrum und um den Winkel ADA' = φ als Drehwinkel entstanden ist. Es sind das Drehzentrum D und der Drehwinkel φ durch Konstruktion zu bestimmen.



10.* Jedes der unter den Zeichnungen a), b) und c) abgebildeten Quatrate ABCD wurde einer beonderen Bewegung unterworfen. Gib an, um welche Art von Bewegung es sich jeweils handelt, und ermittle die Bewegungsgrößen!



11.* Beweise, daß die hintereinander ausgeführten Spiegelungen eines Dreiecks ABC an zwei zueinander parallelen Geraden ($g_1 \parallel g_2$) durch eine Verschiebung des Dreiecks ABC um den doppelten Abstand der Geraden g_1 und g_2 dargestellt werden kann.

12.* Gegeben sei eine Gerade g und zwei einander entsprechende Punkte A und A', die symmetrisch bezüglich der Geraden g als Symmetrieachse liegen. Ferner sei ein Punkt B, der mit A auf der gleichen Seite von g liegt, derart gegeben, daß B nicht auf AA' liegt, und daß AB nicht parallel zu g verläuft. Es ist der Bildpunkt B' von B unter alleiniger Verwendung eines Lineals zu konstruieren, das heißt, es dürfen nur Geraden gezogen werden.

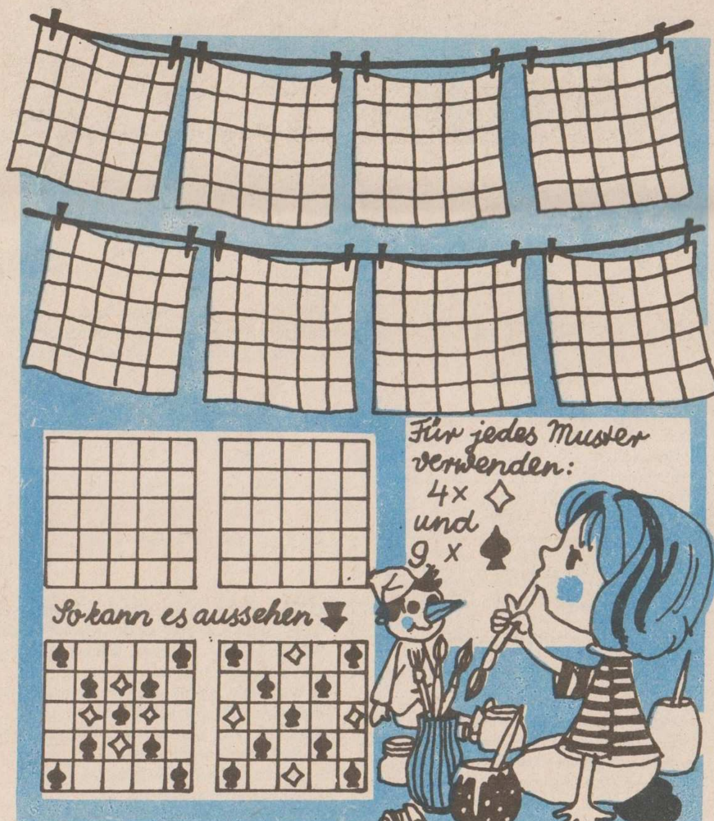
13.* Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, den Radien r_1 = 2 cm und r_2 = 3 cm und dem Mittelpunktsabstand $\overline{M_1M_2}$ = 9 cm. Ferner sei ein Punkt P gegeben, für den $\overline{PM_1}$ = 4 cm und $\overline{PM_2}$ = 6 cm gilt. Auf dem Kreis k_1 ist ein Punkt A, auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt P halbiert wird.

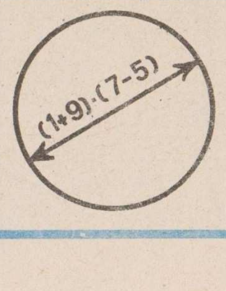
14.* Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Verwandle dieses Dreieck durch Konstruktion in ein flächengleiches Drachenviereck!

15.* Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r = 3 cm sowie eine Strecke $\overline{AB}$ = a = 4 cm, die außerhalb von k liegt. Es ist eine Sehne $\overline{CD}$ = s des Kreises k so zu konstruieren, daß AB $\parallel$ CD und $\overline{AB} = \overline{CD}$ gilt.

* Die mit Sternchen versehenen Aufgaben sind als Übung gedacht. Aus Platzgründen muß auf die Lösung dieser Aufgaben verzichtet werden.

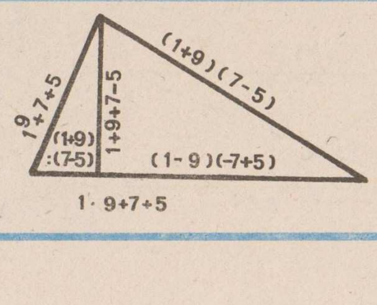
Entwerft symmetrische Muster! Es gibt noch mindestens 14 weitere Möglichkeiten als die beiden links unten gezeigten

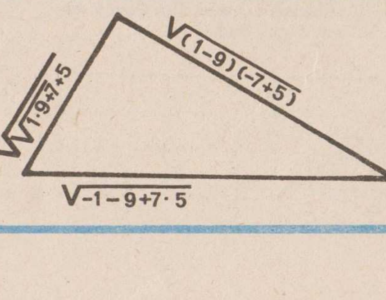




$$U \approx \frac{-1+9\cdot7\cdot5}{(1+9):(7-5)}$$

$$A \approx -1+9\cdot7\cdot5$$





GEOMETRIE und Arithmetik

1. Es ist zu untersuchen, ob es vier Würfel W_1, W_2, W_3, W_4 gibt, die folgende Eigenschaften besitzen:
a) Die Maßzahlen ihrer Kantenlängen (in cm) seien vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
b) Die Summe aus den Maßzahlen der Rauminhalte (in cm^3) der Würfel W_1, W_2 und W_3 sei gleich der Maßzahl des Rauminhalts (in cm^3) des Würfels W_4.

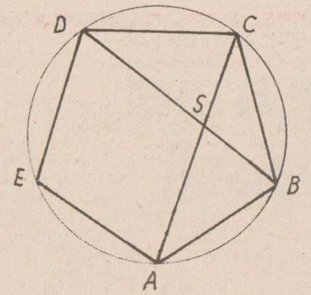
2. Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $n > 3$ anzugeben, für die die Anzahl n der Seiten eines konvexen n-Ecks ein ganzzahliges Vielfaches der Anzahl seiner Diagonalen ist.

3. Gibt es ein konvexes Vieleck, bei dem die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl seiner Seiten? Die Antwort ist zu begründen.

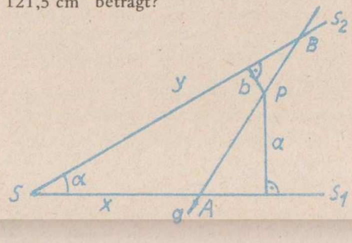
4. Ermittle die Länge der Mittellinie eines rechtwinkligen Trapezes ABCD mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = c$ für $a > c$, wenn eine Diagonale das Trapez in ein rechtwinkliges und in ein gleichseitiges Dreieck zerlegt.

5. In einem Rechteck ABCD mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ verbinde man den Mittelpunkt P der Seite $\overline{AB}$ mit dem Eckpunkt D des Rechtecks. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ mit der Geraden DP sei Q. Unter welchen Bedingungen für die Rechteckseiten a und b ist der Winkel PQC ein Rechter?

6. Die nachstehende Abbildung stellt ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ dar, die sich im Punkte S schneiden. Es sind das Viereck ASDE und die Dreiecke $\triangle ABS$, $\triangle CDS$ und $\triangle BCS$ näher zu beschreiben.



7. Die abgebildete Figur stellt einen Winkel $\alpha = 30°$ mit seinem Scheitel S und den Schenkeln s_1 und s_2 dar. Ein innerer Punkt P dieses Winkels hat von s_1 den Abstand $a = 4$ cm und von s_2 den Abstand $b = 3$ cm. Durch den Punkt P wurde eine Gerade g gezeichnet, die s_1 in A und s_2 in B schneidet. Welche Länge müssen die Strecken $\overline{AS} = x$ und $\overline{BS} = y$ haben, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ABS genau $121{,}5\ cm^2$ beträgt?



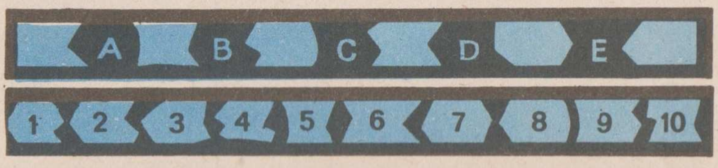
8. Von allen Rechtecken mit einem gegebenen konstanten Umfang u ist dasjenige Rechteck zu ermitteln, das den größten Flächeninhalt besitzt.

9. Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen 9 m und 8 m soll von einem überall gleich breiten Rasenstreifen umgeben werden, der ein Viertel so groß ist wie die Beetfläche. Ermittle die Breite des Rasens!

10.* Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB} = 25$ mm und der Kathete $\overline{BC} = 20$ mm. Auf der Kathete $\overline{BC}$ wurde ein innerer Punkt D so festgelegt, daß $\overline{BD} = 15$ mm gilt. Vom Punkt D wurde das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse $\overline{AB}$ gefällt. Es ist der Umfang des Dreiecks BDE zu ermitteln!

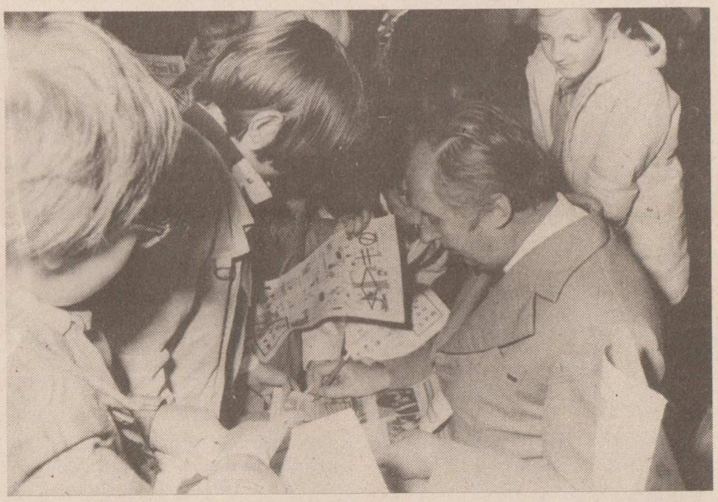
11.* Einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge a sei ein Kreis ein- und ein zweiter Kreis umbeschrieben. Diese beiden konzentrischen Kreise bilden einen Kreisring, dessen Flächeninhalt durch die Seite a des gleichseitigen Dreiecks ABC auszudrücken ist.

12.* Gegeben sei eine dreiseitige regelmäßige Pyramide mit der Seitenkante $s = 10$ cm und dem Winkel $\alpha = 75°$ zwischen Seiten- und Grundkante. Wie lang ist der kürzeste Weg auf dem Mantel der Pyramide, der von einem Eckpunkt der Grundfläche ausgehend einmal um die Pyramide herum zum Ausgangspunkt zurück führt?



Welche der abgebildeten Teile (1 - 10) füllen genau die Lücken des oberen Streifens (A - E) aus?

Lösung:
A + 8; B + 2; C + 9; D + 3; E + 6

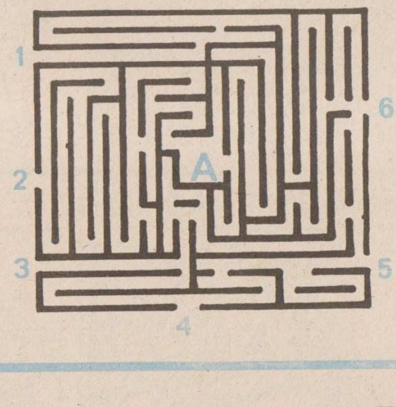


Der Initiator der Mathe-LVZ im Gespräch mit Schülern. Foto: Heiden

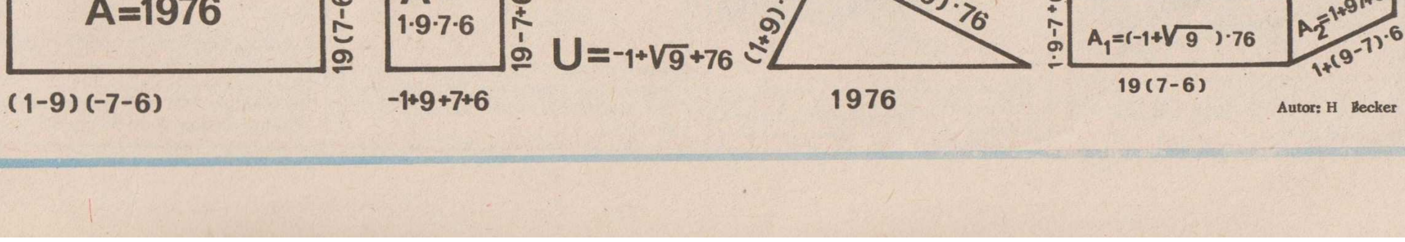
Knobelei

Von welchem Eingang aus führt der Weg in die Mitte des Irrgartens ?

Nr. 2



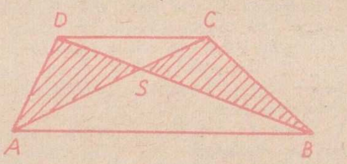
Lösung: Von Nr 2 aus



Autor: H. Becker

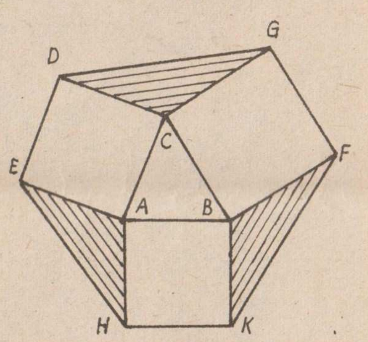
Wir üben uns in Beweisen

1. Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.



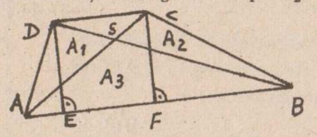
2. Beweise: Wenn in einem Trapez ABCD der Schenkel $\overline{AD}$ gleich der kleineren Grundseite $\overline{CD}$ ist, dann halbiert die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle BAD = \alpha$.
3. Beweise: Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete halb so lang wie die Hypotenuse ist, so beträgt der dieser Kathete gegenüberliegenden Winkel 30°.
4. Gegeben sei ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma$. Von A aus ist die Senkrechte zu BC, von B aus ist die Senkrechte zu AC zu ziehen, ihr Schnittpunkt sei D. Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ zusammen zwei Rechte betragen.
5. Beweise, daß die Winkelhalbierenden zweier innerer Ergänzungswinkel, die durch zwei Parallelen und eine Schneidende gebildet werden, einen rechten Winkel einschließen.
6. In einem Viereck ABCD sei Winkel $\sphericalangle BAD = \alpha = \sphericalangle BCD = \gamma = 90^\circ$. Beweise, daß die Winkelhalbierenden der Winkel β und δ parallel verlaufen oder zusammenfallen.

7. Beweise: Die vier Schnittpunkte der Halbierenden der Innenwinkel eines Parallelogramms sind die Eckpunkte eines Rechtecks.
8. Beweise: Wenn sich die Seiten eines Quadrates und eines flächengleichen Rechtecks in natürlichen Zahlen ausdrücken lassen, so kann das Verhältnis ihrer Umfänge keine natürliche Zahl sein.
9. Wenn die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes aufeinander senkrecht stehen, dann ist die Mittellinie dieses Trapezes gleich seiner Höhe. Dieser Satz ist zu beweisen.
10. Beweise: Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises mit dem Mittelpunkt des Inkreises zusammenfällt, dann ist das Dreieck gleichseitig.
11* In einem Viereck, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, ist der Flächeninhalt gleich dem halben Produkt der Diagonalen. Diese Aussage ist zu beweisen.
12* Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines spitzwinkligen Dreiecks ist gemeinsamer Eckpunkt für sechs Dreiecke, in die das Dreieck durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird. Beweise, daß diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind.
13* Die Seitenmitten E und F der parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Parallelogramms sind mit den Eckpunkten D und B zu verbinden. Beweise, daß diese beiden Verbindungsstrecken die Diagonale $\overline{AC}$ in drei gleiche Teilabschnitte teilen.
14* Vom Schnittpunkt der Diagonalen eines Rhombus sind die Lote auf die Rhombusseiten zu fällen. Beweise, daß die Fußpunkte dieser Lote Eckpunkte eines Rechtecks sind.
15* Über den drei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC wurden die Quadrate gezeichnet. Es wurden die Eckpunkte D und G, F und K, E und H miteinander verbunden. Es ist zu beweisen, daß die dabei entstandenen pythagoreischen Ergänzungsdreiecke $\triangle GDC$, $\triangle EHA$ und $\triangle KFB$ flächengleich sind dem Dreieck ABC.

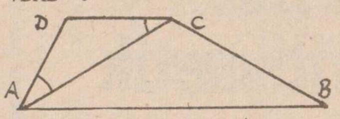


Lösungen

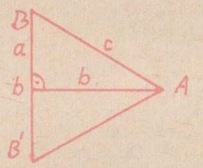
1) Wir fällen von C und D das Lot auf AB, die Fußpunkte seien E und F, dann gilt $\overline{DE} = \overline{CF} = h$. Es seien A_1, A_2, A_3 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ASD$, $\triangle BCS$, $\triangle ABS$. Dann gilt $A_1 + A_3 = A_2 + A_3$, da die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ flächengleich sind (gleiche Grundlinie und gleiche Höhe). Somit gilt auch $A_1 = A_2$.



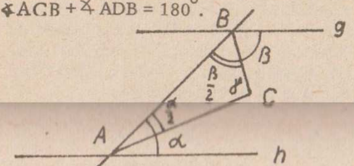
2) Aus $\overline{AD} = \overline{CD}$ folgt $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$. Aus $AB \parallel CD$ folgt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Somit gilt auch $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC$, das heißt, die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BAD = \alpha$



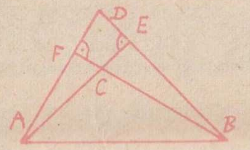
3) In dem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem Winkel $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ sei $c = 2a$. Wir spiegeln B an der Geraden AC als Symmetrieachse und erhalten den Bildpunkt B'. Dann gilt $\overline{BB'} = 2a = c$ und $\overline{AB} = \overline{AB'} = c$, das heißt Dreieck ABB' ist gleichseitig und somit auch gleichwinklig. Aus $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ und $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ folgt $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.



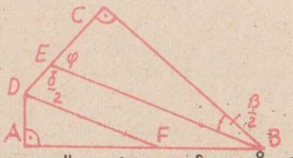
4) Das Viereck CEDF besitzt zwei rechte Innenwinkel. Somit gilt $\sphericalangle FCE + \sphericalangle EDF = 180^\circ$. Ferner gilt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FCE$ als Scheitelwinkel. Daraus folgt $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180^\circ$.



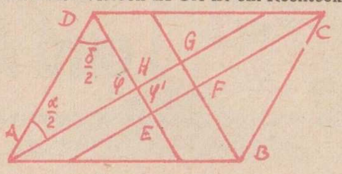
5) Aus $g \parallel h$ folgt $\alpha + \beta = 180^\circ$ und somit $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ = R$. Für die Winkelsumme im Dreieck ABC gilt nun $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \varphi = 180^\circ$, $90^\circ + \varphi = 180^\circ$, also $\varphi = 90^\circ$.



6) Das Viereck ABCD besitzt zwei rechte Innenwinkel. Folglich gilt $\beta + \delta = 180^\circ$ bzw. $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = 90^\circ$. Für das rechtwinklige Dreieck EBC gilt $\varphi + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ$. Daraus folgt $\varphi = \frac{1}{2}\delta$. Deshalb sind die Geraden BE und DF zueinander parallel. Die beiden Winkelhalbierenden der Winkel β und δ fallen zusammen, wenn Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.



7) Aus $AB \parallel CD$ folgt $\alpha + \delta = 180^\circ$, also $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = 90^\circ$. Für die Summe der Innenwinkel gilt im Dreieck AHD $\varphi + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = 180^\circ$, folglich $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi' = \varphi = 90^\circ$ als Scheitelwinkel. Analog dazu gilt $\sphericalangle HEF = \sphericalangle EFG = \sphericalangle FGH = 90^\circ$, das heißt Viereck EFGH ist ein Rechteck.

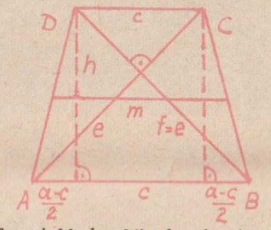


8) Es sei a die Länge der Quadratseite, und es seien b und c die Längen der Rechteckseiten mit $b \neq c$; dann gilt $a^2 = b \cdot c$. Aus $u_1 = 4a$ und $u_2 = 2(b + c)$ folgt

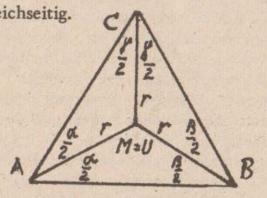
$$\frac{4a}{2(b+c)} = \frac{2a}{b+c} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{m_g}{m_a}.$$

Für $b \neq c$ ist das geometrische Mittel m_g stets kleiner als das arithmetische Mittel m_a aus den Zahlen b und c. Deshalb gilt $u_1 : u_2 = m_a : m_g < 1$. Deshalb kann das Verhältnis der Umfänge keine natürliche Zahl sein.

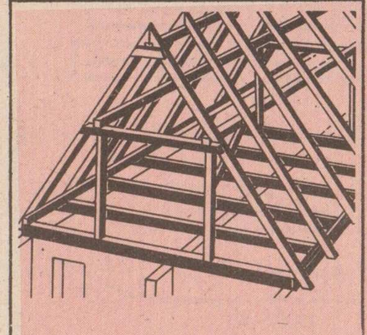
9) Da das Trapez ABCD gleichschenklig ist, gilt $\overline{AC} = \overline{BD} = e$. Für den Flächeninhalt des Trapezes erhalten wir $A = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2}e^2$ und $A = m \cdot h$. Daraus folgt $e^2 = 2mh$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner $e^2 = h^2 + (c + \frac{a-c}{2})^2 = h^2 + (\frac{a+c}{2})^2 = h^2 + m^2$. Durch Substitution erhalten wir $h^2 + m^2 = 2mh$ bzw. $h^2 - 2mh + m^2 = 0$, also $(h-m)^2 = 0$, $h - m = 0$, $h = m$.



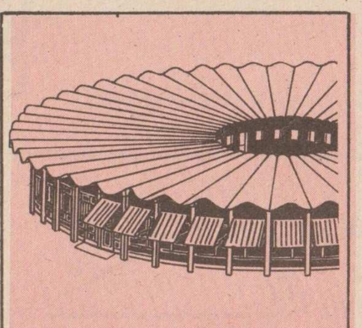
10) Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises und U der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks ABC, und es gelte M = U. Dann gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$ und $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM = \frac{1}{2}\gamma$. Aus $\overline{AM} = \overline{BM}$ folgt $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta$ bzw. $\alpha = \beta$. Analog dazu gilt $\beta = \gamma$ und $\alpha = \gamma$. Das Dreieck ABC ist somit gleichwinklig und deshalb auch gleichseitig.



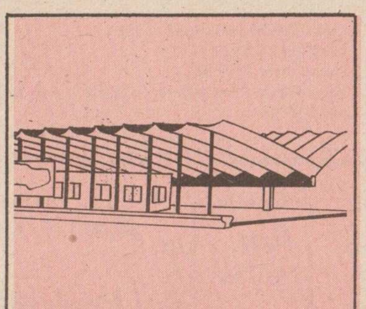
Geometrie in der Praxis



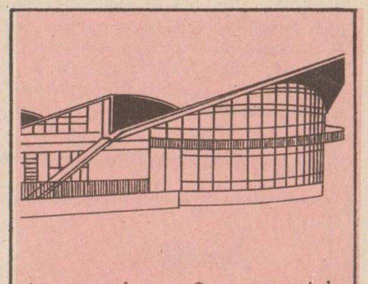
1 Traditionelles Steildach mit hölzernem Dachstuhl



2 Konische HP-Schalen, kreisrunder Kindergarten mit 144 Plätzen (Halle Neustadt)



3 Vorgefertigte HP-Schalen, schmetterlingsähnliche Dachform. (Freisitz auf der Regattastrecke am Brandenburger Beetzsee)



4 Hyperschalen, am Ort gegossen, jede Schale hat eine Seitenlänge von 20 m (Gaststätte Rostock-Südstadt)
Zeichnungen: Manfred Wunderlich, aus „Kunsterziehung in der Schule“.

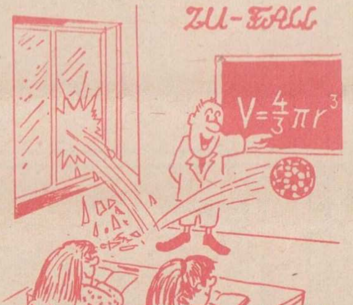
Mit Zirkel, Lineal + Zeichendreieck

1. Zeichne einen spitzen Winkel α mit dem Scheitelpunkt S und den Schenkeln s_1 und s_2. Lege auf dem Schenkel s_1 einen Punkt P fest. Konstruiere auf dem Schenkel s_2 einen Punkt Q so, daß $\overline{QS} = \overline{QP}$ ist! Die Konstruktion ist zu begründen.

2. Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$, trage in A an AB einen spitzen Winkel an. Konstruiere auf dem Schenkel dieses spitzen Winkels, auf dem nicht der Punkt B liegt, einen Punkt C so, daß $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ gilt. Die Konstruktion ist zu begründen.

3. Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Punkt H, der nicht auf der Geraden AB liegt. Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $\overline{AB}$ eine Seite und H der Schnittpunkt der Höhen dieses Dreiecks ist. Die Konstruktion ist zu begründen.

4. Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Lege in seinem Inneren einen von M verschiedenen Punkt P fest. Konstruiere denjenigen Punkt auf der Peripherie des Kreises k, der von P
a) den kleinsten,
b) den größten Abstand hat.
Die Konstruktion ist zu begründen.



5. Zeichne einen Halbkreis k mit dem Durchmesser $\overline{AB}$. Konstruiere ein Quadrat CDEF so, daß die Seite $\overline{CD}$ auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt und der Halbkreis k durch die Punkte E und F geht. Die Konstruktion ist zu begründen.

6. Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Lege im Inneren von k zwei Punkte P und Q mit $P \neq Q$, $P \neq M$ und $Q \neq M$ fest. Konstruiere ein dem Kreis k einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete durch P und dessen andere Kathete durch Q geht. Bei welcher Lage von P und Q ist diese Konstruktion nicht ausführbar?

7. Von einem Trapez ABCD mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gegeben: $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 4{,}5$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm. Konstruiere das Trapez ABCD und begründe die Konstruktion!

8. Zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Lege in seinem Inneren einen von M verschiedenen Punkt P fest. Konstruiere zwei kongruente aufeinander senkrecht stehende Sehnen von k, die sich in P schneiden. Die Konstruktion ist zu begründen.

9. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es ist ein Rhombus DEFG so zu konstruieren, daß D mit A zusammenfällt, E innerer Punkt von $\overline{AB}$, F innerer Punkt von $\overline{BC}$ und G innerer Punkt von $\overline{AC}$ ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

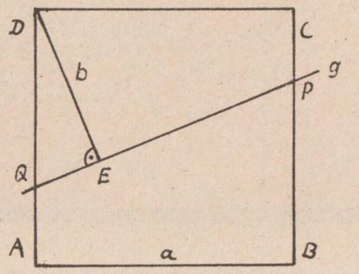
10. Einem gegebenen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist ein Dreieck ABC so einzubeschreiben, daß für den Winkel $\sphericalangle ABC = \beta = 45^\circ$ und für den Winkel $\sphericalangle CAB = \alpha = 105^\circ$ gilt. Die Konstruktion ist zu beschreiben.

11. Es ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC mit Winkel $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ aus $a + b = 9$ cm zu konstruieren.

12. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ aus $a = 4$ cm, $b + c = 8$ cm.

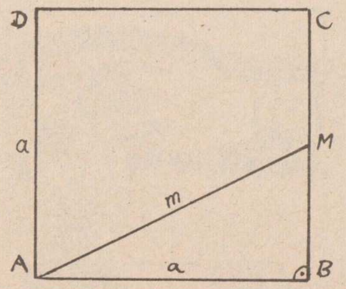
13. Gegeben sei ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 34^\circ$. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 85° beträgt. Die Konstruktion ist zu begründen!

14. Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$ dar. Für den inneren Punkt P von $\overline{BC}$ und den inneren Punkt Q von $\overline{AD}$ gilt $\overline{CP} = \overline{AQ}$. Vom Punkte D wurde das Lot $\overline{DE} = b$ auf die Gerade PQ = g gefällt.
Aus $\overline{AB} = a = 4$ cm und $\overline{DE} = b = 2{,}5$ cm ist die Gerade PQ = g zu konstruieren.

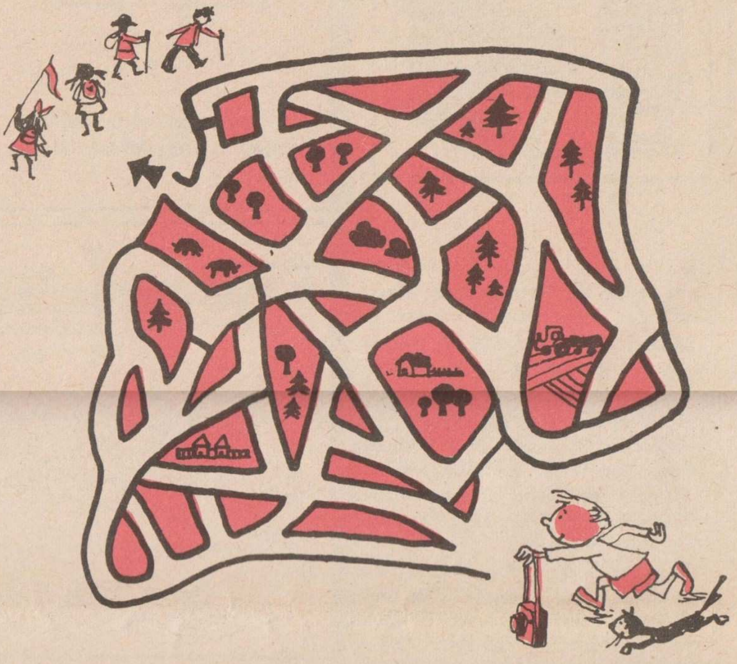


15. Gegeben sei ein Quadrat ABCD und ein innerer Punkt P der Seite $\overline{AD}$ mit $\overline{AP} < \overline{DP}$. Es ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r zu konstruieren, der die Strecke $\overline{DP}$ zur Sehne und die Gerade AB zur Tangente hat.

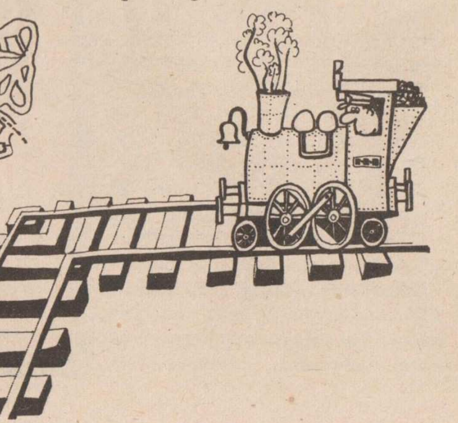
16. Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat ABCD dar. Der Mittelpunkt M der Seite $\overline{BC} = a$ wurde mit dem Eckpunkt A verbunden. Es ist ein Quadrat ABCD aus $\overline{AM} = m = 6$ cm zu konstruieren.

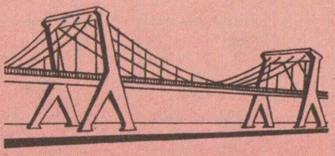


Wer findet den Weg?

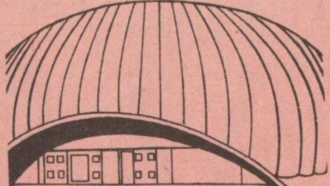


Die Klasse hatte Wandertag. Jörg hatte seinen Fotoapparat mitgenommen, um einige Aufnahmen zu machen. Dabei ließ er sich Zeit und verlor seine Freunde. Wer findet für ihn den richtigen Weg?

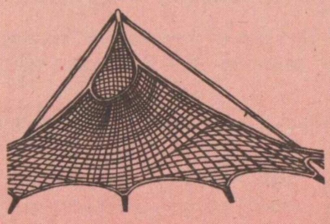




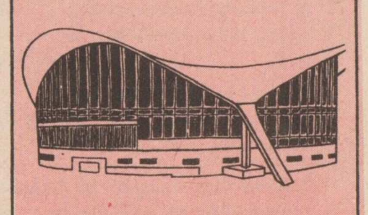
5 Hängedach: 250 m lang, 20 m breit, Dach hängt an Kabeln, Entfernung der beiden Brückenportale: 165 m (Mantua)



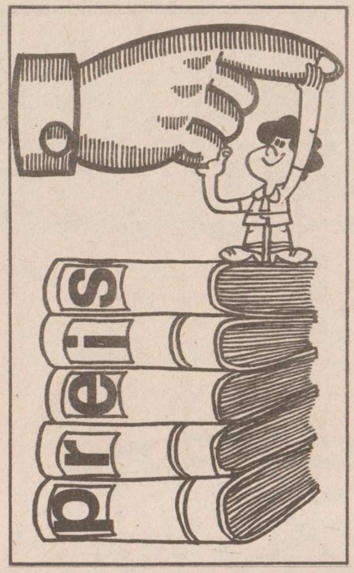
6 Pneumatische Hallenkonstruktion: Ausstellungsräume bis zu 500 m^2, Kunststoff; ein Druck von 0,1 atü stabilisiert die Halle (Leipzig)



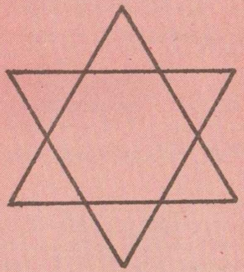
7 Zeltdach: Flächentragwerk — Seilnetzkonstruktion (München)



8 Schalendach: Dach aus einer hyperbolischen Parabolidschale, die nur 7 cm stark ist. Drei Stahlbetonstützen tragen das 1200 m^2 große Dach („Teepott", Warnemünde)



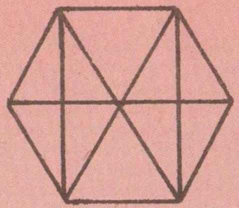
PREISAUSS



Wieviel verschiedene Strecken enthält die abgebildete Sternfigur?

Klasse 2:
Gegeben seien zwei Geraden g und h, die verschieden voneinander sind.
Wir wissen:
Der Punkt P liegt auf der Geraden g;
der Punkt Q liegt auf der Geraden g;
der Punkt Q liegt auf der Geraden h.
Welche Aussage können wir schlußfolgern?

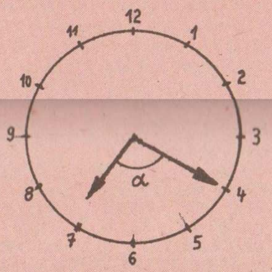
Gegeben: Regelmäßiges Sechseck



Gesucht: Anzahl und Art der in der Figur enthaltenen Drei- und Vierecke.

Klasse 5:
Ein Rechteck habe einen Umfang von 18 cm. Wieviel solcher Rechtecke mit ganzzahligen Maßzahlen der Seitenlängen gibt es?

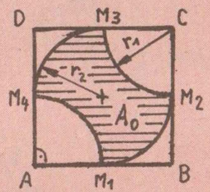
Gegeben: Uhrzeit 7. 20 Uhr



Gesucht: Die Größe des vom großen und kleinen Zeiger gebildeten Winkels; $\sphericalangle = \ldots.^{o}$

Klasse 6:
Die Länge des Umfangs eines Rechtecks betrage 60 cm. Die Differenz aus den Längen zweier benachbarter Seiten sei gleich 20 cm. Welchen Flächeninhalt besitzt dieses Rechteck?

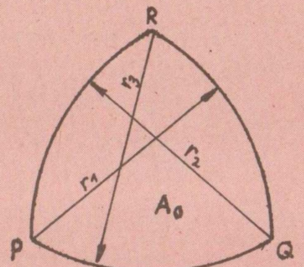
Gegeben: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{CA} = a = 10$ cm; $\sphericalangle BAD = 90^{o}$; $\overline{AM_1} = \overline{BM_1}$; $\overline{BM_2} = \overline{CM_2}$; $\overline{CM_3} = \overline{DM_3}$; $\overline{DM_4} = \overline{AM_4}$; $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}a$.



Gesucht: $A_o = \ldots . cm^2$

Klasse 8:
Eine Streichholzschachtel habe die Kantenlänge $a = 17$ mm, $b = 37$ mm und $c = 52$ mm. Für welche von allen möglichen quaderförmigen 10-Schachtel-Packungen wird am wenigsten Einschlagpapier benötigt?

Gegeben:
$\widehat{PQ} \cong \widehat{QR} \cong \widehat{RP}$; =
$r_1 = r_2 = r_3 = 4$ cm



Gesucht: $A_o = \ldots cm^2$

Gewinner 1974 - Einzel

Preisausschreiben: 1974: Umweltschutz

Zu unserem Preisausschreiben „Umweltschutz" gingen 4827 Lösungen aus allen Teilen der DDR ein. Wir wählten die Preisträger aus und überreichten im Februar 1975 Urkunden und Buchprämien an:
Dag Schöber, Leipzig; Tobias Ohls, Berlin; Sylke Bertolt, Grimmen; Andreas Illing, Gersdorf; G. Liebe, Hartmannsdorf; Evelyn Funk, Lobenstein; Ulrike und Harald Stock, Leipzig; Ralf, Sabine und Ute Bauer, Berlin; Katharina Hermann, Greifswald; Johannes und Rudolf Rhein, Greifswald; Andrea Piechert, Eichicht; Gerald Werner, Meiningen; Burkhard Riedel, Lebus; Annett Gärtner, Torgelow; B. Thomas, Zittau; Andre und Heiko Matz, Grünhain; Hans Jacob, Frankfurt (O.); Ulf König, Markgrafpieske; Kerstin Pöschl, Einsiedel; Uta Kunze, Breitenworbis; Jan Heller, Berlin; Beatrix Kalla, Stahnsdorf; Sylvia Nauck, Schilda; Jürgen Weinert, Tröbitz; Iris Schreiber, Loissin. 30 Kollektive (Schulen, AG's, Klassen usw.) erhielten ebenfalls Anerkennungsurkunden und Buchpreise.

Preisausschreiben – Wettbewerbsbedingungen

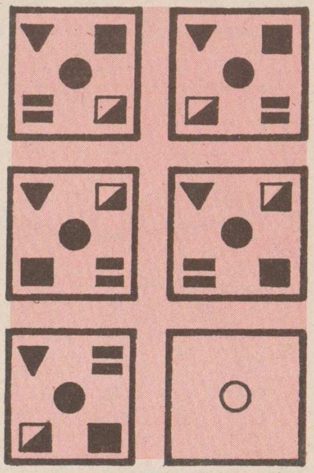
Lieber Schüler!

In unserem großen Preisausschreiben haben wir für die Klassenstufen 2 bis 12 wieder interessante Knobeleien ausgewählt.
Je Klassenstufe sind zwei Aufgaben vorgesehen.

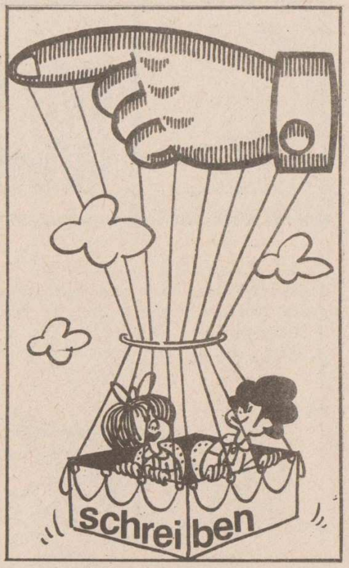
Schicke die Lösungen der Aufgaben Deiner (oder höherer Klassenstufen) unter Angabe Deines Namens, Deines Alters und Deiner Adresse bis zum
1. Februar 1976

an die
LEIPZIGER VOLKSZEITUNG
Verlag, Abt. Absatz
701 Leipzig PSF 660
Kennwort: Mathe-LVZ.

Das Los wird wieder die Preisträger ermitteln. Viel Freude und Erfolg
Eure
Leipziger Volkszeitung.



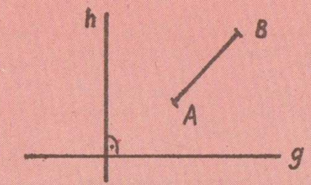
CHREIBEN



asse 3:
einem gleichschenkligen Dreieck sei die nge eines Schenkels doppelt so groß wie Länge der Basis dieses Dreiecks. Er-ttle die Längen der Seiten dieses gleich-enkligen Dreiecks, wenn sein Um-g 95 cm beträgt.

Gegeben: g und h mit $g \perp h$

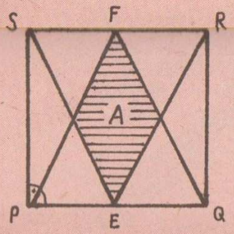
Strecke $\overline{AB}$



Gesucht: Zwei nacheinander auszuführende Verschiebungen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ so daß der Bildpunkt A`` von A auf g und der Bildpunkt B`` von B auf h liegt.

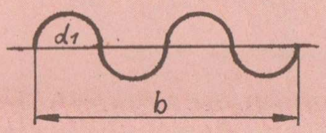
Klasse 4:
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen $AB = a = 40$ cm und $BC = b = 30$ cm. Ermittle die Länge der Seite eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat.

egeben: $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP}$
$a = 12$cm
$= \overline{EQ}$; $\overline{SF} = \overline{FR}$;
$SPQ = 90^\circ$.

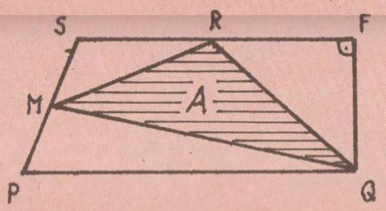


Gesucht: $A = \ldots \text{cm}^2$

Klasse 7:
Die Abbildung veranschaulicht den Querschnitt eines Wellblechs. Die Wellenlinie wird aus kongruenten Halbkreisen vom Durchmesser $d_1 = 10$ cm gebildet. Man prüfe nach, wie sich der Materialverbrauch bei gleichbleibender Breite b des Wellblechs verändert, wenn bei den Halbkreisen ein kleinerer Durchmesser $d_2 = 5$ cm zugrundegelegt wird.



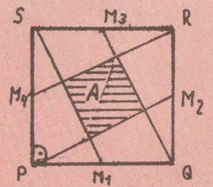
Gegeben:
$PQ \parallel RS$; $\overline{PM} = \overline{MS}$; $\overline{RS} = 7$ cm
$\overline{PQ} = 13$ cm; $\overline{QF} = 10$ cm;
$QRF = 90^\circ$



Gesucht: $A = \ldots \text{cm}^2$

sse 9:
fte und Bücher werden gewöhnlich in ndardisierten Formaten hergestellt. Die ndform, ein Rechteck mit einer Fläche 1 m^2, wird als Format A 0 bzeichnet. rch fortgesetztes Halbieren der jewein Länge entstehen daraus weitere Forte A 1, A 2, A 3 usw. Dabei wird vergt, daß die entstehenden Rechtecke ereinander ähnlich sind. Berechne ge und Breite für das Format A 4.

Gegeben:
$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = a$;
$\overline{PM_1} = \overline{QM_1}$; $\overline{QM_2} = \overline{RM_2}$;
$\overline{RM_3} = \overline{SM_3}$; $\overline{SM_4} = \overline{PM_4}$;
$\measuredangle$ QRS $= 90^\circ$



Gesucht:
A = ... (ausgedrückt durch PQ = a)

Klasse 10/12:
Drei Kanäle mit quadratischem Querschnitt sind so bemessen, daß jeder folgende Querschnitt eine um 2 m längere Seite hat. Es sind die Längen der Quadratseiten der drei Kanalquerschnitte zu berechnen, die zusammen einen Gesamtquerschnitt von 251 m^2 besitzen.

Gewinner 1974 - Kollektive

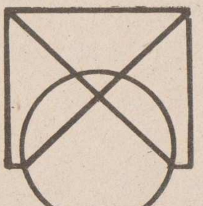
In diesem Jahr zeichneten wir folgende Kollektive für die aktive und umfassende Beteiligung am Wettbewerb der Mathe-LVZ aus und überreichten Anerkennungsurkunden und Buchpreise an:
alpha-Club der OS Lössau (35 % der Schüler dieser Schule nahmen teil!); Klasse 3 der 16. OS Potsdam-Babelsberg; AG Junge Mathematiker Kuhfelde; Kreis-AG Mathematik, Freiberg; AG Mathematik Diesterweg-OS (Kl. 9), Karl-Marx-Stadt; AG Mathematik Geschwister-Scholl-OS Sondershausen; Kreisclub Mathematik Gräfenhainichen; OS Otto Grotewohl, Pekatel; 10. OS „Otto Drews", Greifswald; AG Mathematik (Kl. 6), Pionierhaus Wismar; 4. OS Zittau, Kl. 5b; OS Ziegelheim; OS II Bergsdorf; OS Bernsbach/Erzgeb.; Mathematik-Zirkel (Kl. 4) OS Espenhain; Fachzirkel Mathematik 4. OS „Hans Beimler, Neubrandenburg; AG Mathematik (Kl. 8) OS Niegripp; OS Lippersdorf (Kl. 5); OS Berndten; OS Willi Wallstab, Löderburg; OS Wendendorf (Kl. 5/6); W.-Pieck-OS (Kl. 7), Neubrandenburg; OS „J. Gagarin", Zwickau; Goethe-OS Waren; OS Altchemnitz; Firtz-Große-OS Berlin; OS Wohlmirstedt (Kl. 9); „F.-Schiller"-OS, Zella Mehlis; OS Groß-Schönebeck; OS „Willy Mehlhorn", Langenbod

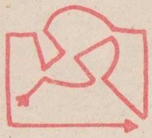
Vie müssen die geometrischen iguren im Quadrat rechts unten ngeordnet werden?

Lösung

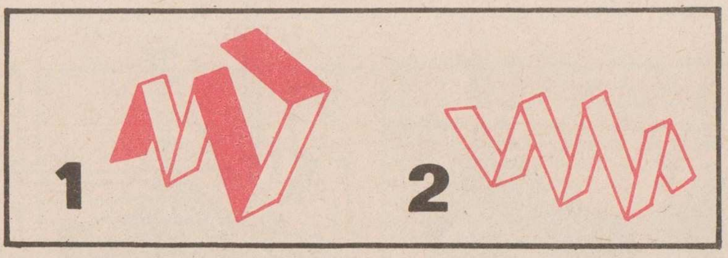
3 kleine Knobeleien

In einem Zug nachzeichnen!





Lösung

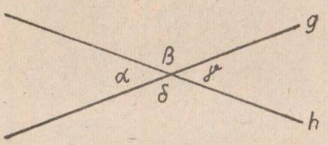


1. An welcher Stelle fehlt auf dem gefalteten Papierstreifen der Schatten?
2. Zeichne die Schatten in Nr 2 ein Die Lichtquelle steht senkrecht unter dem Streifen.

Lösung

Wir berechnen Winkelgrößen

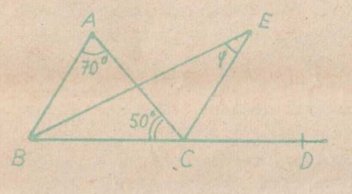
1. Die Abbildung stellt zwei sich schneidende Geraden g und h dar, für deren Schnittwinkel $\alpha+\beta+\gamma=250^\circ$ gilt. Wie groß ist jeder der vier Winkel α, β, γ und δ?



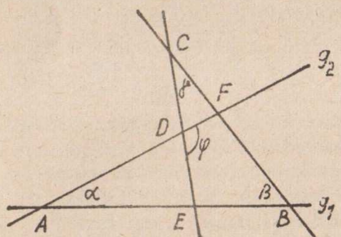
2. Die Größe des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei um 30° größer als die eines Basiswinkels. Berechne die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks!

3. Zeichne ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=5$ cm. Konstruiere über der Seite $\overline{CD}$ des Quadrates ein gleichseitiges Dreieck DCE so, daß der Punkt E innerhalb des Quadrates ABCD liegt. Verbinde E mit A und B. Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle AEB=\varphi$.

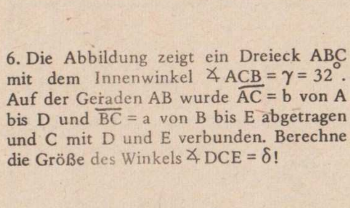
4. In der nachstehenden Abbildung halbiert die Gerade BE den Winkel $\measuredangle ABC$, die Gerade CE halbiert den Winkel $\measuredangle ACD$. Es ist die Größe des Winkels $\measuredangle BEC=\varphi$ zu berechnen.



5. In der nachstehenden Abbildung schneiden die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 einander in den Punkten A, B, C, D, E, F. Die Größen der Winkel $\measuredangle DAE$, $\measuredangle EBF$, $\measuredangle DCF$ seien α, β, γ. Ermittle die Größe des Winkels $\measuredangle EDF=\varphi$.

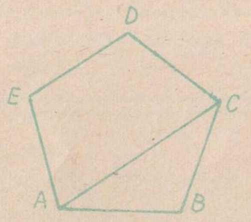


6. Die Abbildung zeigt ein Dreieck ABC mit dem Innenwinkel $\measuredangle ACB=\gamma=32^\circ$. Auf der Geraden AB wurde $\overline{AC}=b$ von A bis D und $\overline{BC}=a$ von B bis E abgetragen und C mit D und E verbunden. Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle DCE=\delta$!

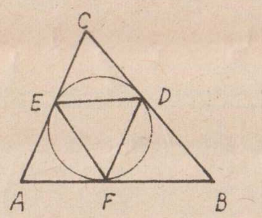


7. Gegeben sei ein Drachenviereck ABCD mit den Winkeln $\measuredangle BAD=\alpha=\frac{2}{3}R$ und $\measuredangle BCD=\gamma=R$. Gib die Größe der Winkel β und δ an.

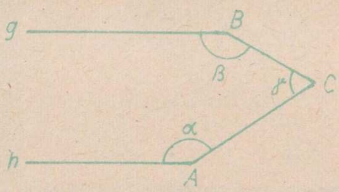
8. Die Abbildung stellt ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE mit der Diagonalen $\overline{AC}$ dar. Es sind die Innenwinkel des Vierecks ACDE und des Dreiecks ABC zu berechnen.

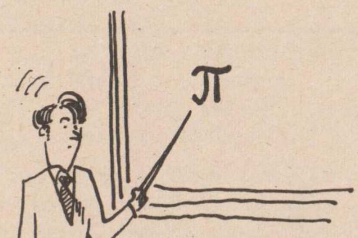


9. Die abgebildete Figur stellt ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Inkreis dar. Die Berührungspunkte D, E, F des Inkreises mit den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC legen ein weiteres Dreieck fest. Es sind die Innenwinkel des Dreiecks DEF durch die Innenwinkel des Dreiecks ABC auszudrücken.



10. Für die Geraden g und h abgebildeten Figur gilt $g \parallel h$. Es ist die Größe des Winkels γ zu berechnen für $\alpha=120^\circ$ und $\beta=140^\circ$.





Ungleichungen in der Geometrie

1. Für die Länge a und die Breite b (beide in m) eines Zimmers mit rechteckiger Grundfläche gelte $7{,}5 \leqq a \leqq 7{,}6$ und $5{,}4 \leqq b \leqq 5{,}5$. Eignet sich dieser Raum für eine Schulbibliothek, dessen Fläche nicht kleiner als 40 m^2 sein soll?

2. Beim Messen der Länge a und der Breite b eines Rechtecks erhielt man $a = 5{,}4\ \text{cm} \pm 0{,}1\ \text{cm}$ und $b = 3{,}7\ \text{cm} \pm 0{,}1\ \text{cm}$. Bestimme den Näherungswert für den Umfang und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

3. Für die Länge a (in cm) der Seite eines Quadrates gelte $5{,}1 \leqq a \leqq 5{,}2$. Zwischen welchen Werten liegt der Umfang u (in cm) dieses Quadrates?

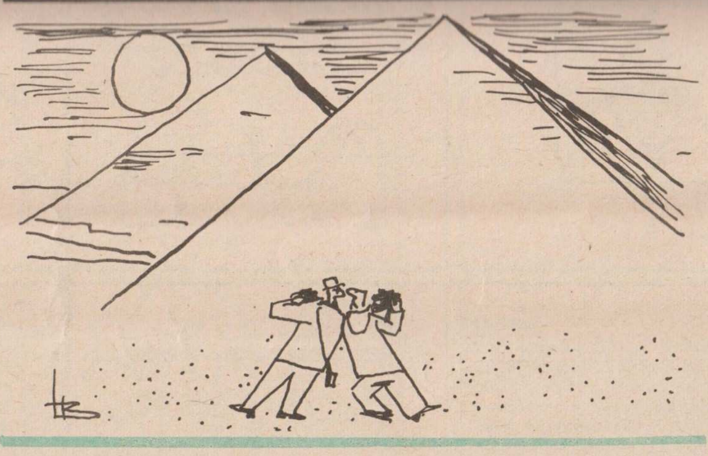
4. Für die Basis a (in mm) und die Schenkel b (in mm) eines gleichschenkligen Dreiecks gelte $26 \leqq a \leqq 28$ und $41 \leqq b \leqq 43$. Zwischen welchen Werten liegt der Umfang u (in mm) dieses Dreiecks?

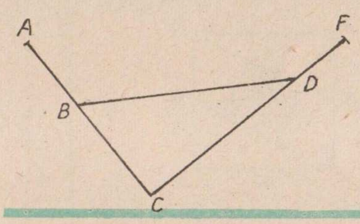
5. Für die Länge der parallelen Grundseiten a und c (beide in cm) eines Trapezes gelte $3{,}4 \leqq a \leqq 3{,}5$ und $6{,}2 \leqq c \leqq 6{,}3$. Zwischen welchen Werten liegt die Mittellinie m (in cm) dieses Trapezes?

6. Für die Innenwinkel α, β und γ eines Dreiecks ABC gelte $58^\circ \leqq \beta \leqq 59^\circ$ und $102^\circ \leqq \gamma \leqq 103^\circ$. Zwischen welchen Werten liegt die Größe des Winkels α?

7. Für die Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC gelte $a < b < c$. Ferner sei c = 5 cm, und die Differenz aus den anderen beiden Seiten betrage 1 cm. Es sind alle möglichen Längen für die Seiten dieses Dreiecks zu ermitteln, deren Maßzahlen natürliche Zahlen sind.

8. Die Bodenfläche eines rechteckigen Werkzeugkastens soll kleiner als 0,21 m^2 werden. Die Breite soll 25 cm kleiner als die Länge sein. Zwischen welchen Grenzen liegt die Länge?



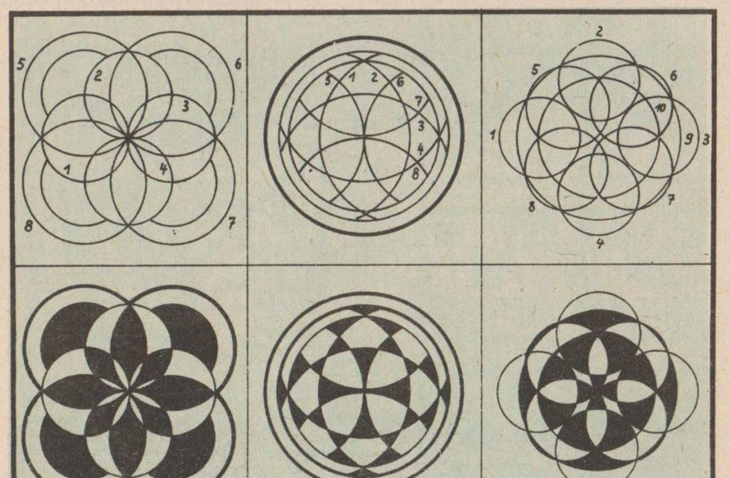


9. Es ist zu beweisen, daß das gleichschenklige Dreieck unter allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe den kleinsten Umfang hat!

10. Es ist zu beweisen, daß der halbe Umfang eines jeden Dreiecks länger ist als jede Dreieckseite!

11. Beweise, daß der abgebildete Streckenzug ABDF kürzer ist als der Streckenzug ACF!

Mit Zirkel gearbeitet! -- Mit Zirkel gearbeitet!



LÖSUNGEN

LÖSUNGEN

4 · 8 = 32 Geometrieaufgaben

Klasse 2

1. Beide Wege sind gleichlang.

2. Wir können die Strahlen mit p, q, r und s bezeichnen. Dann bilden
a) p und q, p und r sowie q und r je einen Winkel (3 Winkel),
b), c) p und q, p und r, p und s, q und r, q und s sowie r und s je einen Winkel (6 Winkel).

3. a) A, B und C bilden drei Strecken: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.
b) A, B, C und D bilden sechs Strecken: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.
c) Nein. d) Ja. Wenn zum Beispiel die Punkte B und C zusammenfallen, so entsteht nur noch eine Strecke: $\overline{AB}$. Wenn zum Beispiel C und D zusammenfallen, so gibt es nur noch drei Strekken (siehe Aufgabe a)!).

4. Sechs Quadrate: Vier "kleine" Quadrate, die ein weiteres Quadrat bilden, und das "ganze" Quadrat.
20 Dreiecke (Abb. G 1).

5. -

6. Ja, die beiden Abbildungen zeigen je ein Beispiel (Abb.G 2)

7. Die beiden Figuren sind gleichgroß. (Abb. G 3)

8. Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten.

Klasse 3

1. Die Anordnungen 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10 und 11 sind Würfelnetze, die Anordnungen 2, 5, 6 und 12 sind keine Würfelnetze. Es gibt noch die folgenden drei Würfelnetze (Abb. G 4).

2. Es gibt 24 Möglichkeiten (Abb. G 5).

3. Ja; unsere Abbildungen zeigen je ein Beispiel für die Lösung von Aufgabe a) und Aufgabe b) (Abb. G 6).

4. Ja; unsere Abbildung zeigt ein Beispiel für eine Lösung (Abb. G 7).

5. Abb. G 8.

6. Beide Flächen sind gleichgroß (Abb. G 9).

7. (1) Zum Beispiel von I nach K, D, C, N, B, A, K, L, H, G, M, F, E, L, M, N, O.
(2) Zum Beispiel von H nach C, G, B, F, A, E, D, H, L, K, I, M, L, G, K, F, I, E, M, H.
(3) Zum Beispiel von F nach E, B, D, E, A, D, C, B, A, F, C.

8. g und i sind parallel und haben den Abstand von 3 cm.

Klasse 4

1. Du kannst A mit B, C, D, E und F verbinden, B mit C, D, E und F, C mit D, E und F, D mit E und F sowie E mit F (Abb.G 10). Man kann die sechs Punkte eines Sechsecks auf 5+4+3+2+1=15 Arten miteinander verbinden; neun dieser Strecken sind die Diagonalen des Sechsecks, die übrigen die Seiten des Sechsecks.

2. Ja; unsere Abbildungen zeigen je ein Beispiel für die Lösung von Aufgabe a) und Aufgabe b) (Abb. G 11).

3. a) Auf 10 Arten. b) Fünf Diagonalen. c) Zum Beispiel von A nach D, B, E, C und A. (Abb. G 12)

4. 35 Dreiecke (Abb. G 13).

5. Abb. G 14. 6. Abb. G 15.

7. Abb. G 16. 8. Abb. G 17.

Klasse 5

1. Abb. G 18. 2. Abb. G 19.

3. Abb. G 20. Stelle die sechs Stäbchen zu einer Pyramide zusammen!

4. a) 27 Würfel, b) 8 Würfel, c) 12 Würfel, d) 6 Würfel, e) ein Würfel.

5. 16 Dreiecke: ABG, AGF, BHG, HIE, IDE, CDI; ABF, ABH, BEF, BCE, CDE, HDE; ACI, DFG; ACD, ADF.

6. Abb. G 21. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt a) 1, b) 2, c) 4, d) 8, e) 16, verdoppelt sich also jeweils.

7. Ja. Um einen geeigneten Verschiebungspfeil zu finden, zeichnen wir
a) durch P die Parallele g_1 zu g und durch Q die Parallele h_1 zu h,
b) durch Q die Parallele g_2 zu g und durch P die Parallele h_2 zu h.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei A, der Schnittpunkt von g_2 und h_2 sei B. Durch $\overrightarrow{AO}$ und $\overrightarrow{BO}$ sind die beiden gesuchten Verschiebungen bestimmt. Abb. G 22.

8. Ja. $\overline{P'Q'}$ ist 5 cm lang. Die Mittelsenkrechten von a) $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$, b) $\overline{PQ'}$ und $\overline{QP'}$ schneiden einander jeweils in dem gesuchten Drehzentrum O_1 bzw. O_2 (Abb. G 23).

Verschiebung – Drehung – Spiegelung

1. Bei einer Drehung liegen Original- und Bildpunkt auf einem Kreis um das Drehzentrum Z. Wir konstruieren deshalb die Mittelsenkrechten von $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$, die sich in Z schneiden. Der $\sphericalangle AZA' = \varphi$ ist dann der Drehwinkel (Abb. V 1).

2. Es gibt genau vier solche Strahlen, nämlich s_1, s_2, s_3, s_4. s_1 erreicht nach Reflexion an r_1 und r_2 den Punkt P, s_2 erreicht nach Reflexion an r_1, s_3 nach Reflexion an r_2 den Punkt P. s_4 erreicht den Punkt P direkt. Aus der Abbildung ist das Konstruktionsverfahren ersichtlich. Man spiegelt Q an r_1 und erhält Q'; ferner spiegelt man P an r_2 und erhält P'. Man verbindet Q' mit P' bzw. Q' mit P bzw. P' mit Q und erhält jeweils die gesuchten Punkte auf den Spiegelungsgeraden als Schnittpunkt mit r_1 bzw. r_2. (Abb. V 2).

3. Der Punkt K_1 ist an $\overline{BC}$ (Symmetrieachse) zu spiegeln; der Bildpunkt von K_1 sei K_1'. Die Strecke $\overline{K_2K_1'}$ schneidet $\overline{BC}$ im Punkte P. Der Streckenzug $\overline{K_1PK_2}$ stellt den Weg der Kugel K_1 dar. Auf Grund der Symmetrieverhältnisse ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel.

Aus der Abbildung wird ersichtlich:

$$x : (b-c-f) = d : (a-e+d)$$

$$x = \frac{d(b-c-f)}{a-e+d} ;$$

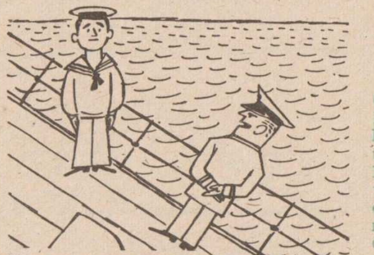
$$\overline{BP} = c + x = c + \frac{d(b-c-f)}{a-e+d}$$

$$= \frac{c(a-e) + d(b-f)}{a-e+d} \quad \text{(Abb. V 3)}$$

4. Wir spiegeln A an s_1 und an s_2 als Spiegelachse; die entstandenen Bildpunkte seien A' und A''. Die Gerade A'A'' schneide s_1 in P und s_2 in Q.
Die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A' und A'' ist die Gerade A'A''. Wegen $\overline{AP} = \overline{PA'}$ und $\overline{AQ} = \overline{QA''}$ ist $\overline{A'A''}$ gleich dem Umfang des Dreiecks APQ. Der gesuchte kürzeste Weg führt somit von A nach P, von P nach Q und von Q zurück nach A. (Abb. V 4).

5. Wir drehen den Punkt P_1 um B als Drehpunkt im positiven Sinn um 180° und erhalten P_1^* als Bildpunkt von P_1. Wir drehen ferner den Punkt P_2 um B als Drehzentrum im positiven Sinn um 180° und erhalten P_2^* als Bildpunkt von P_2. Auf Grund der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (k_1 und k_2 sollen sich berühren und gleiche Radien besitzen) geht k_2 durch P_1^* und k_1 durch P_2^*. Es sind also nur die Umkreise der beiden Dreiecke $\triangle BP_1P_2^*$ und $\triangle P_2BP_1^*$ zu konstruieren; diese besitzen die geforderten Eigenschaften (Abb. V 5).

6. Bei der vorliegenden Aufgabe ist es zweckmäßig, eine Drehung durchzuführen, bei der man ein Dreieck erhält, dessen Seiten man aus den gegebenen Stücken konstruieren und berechnen kann. Drehen wir nämlich das Quadrat ABCD um den Punkt B im negativen Drehsinn um einen Winkel von 90°, so bleibt der Punkt B fest, und es werden die Punkte A auf C, C auf C', D auf D' und P auf P' abgebildet. Ferner gilt $\overline{PA} = \overline{P'C} = 1$ cm, $\overline{PB} = \overline{P'B} = 2$ cm, $\sphericalangle PBP' = 90°$.
a) Wir konstruieren zunächst das gleichschenklige Dreieck PBP' aus den bekannten Stücken und dann das Dreieck PP'C aus $\overline{PP'}$, $\overline{PC} = 3$ cm, $\overline{P'C} = 1$ cm. Wir erhalten das Viereck PBP'C, dessen Diagonale $\overline{BC}$ gleich der gesuchten Seite des Quadrates ABCD ist.
b) Bei der Berechnung der gesuchten Seitenlänge x des Quadrates ABCD können wir analog verfahren. Wir erhalten zunächst $\overline{PP'}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{P'B}^2 = 4\text{ cm}^2 + 4\text{ cm}^2 = 8\text{ cm}^2$. Ferner gilt $\overline{PP'}^2 + \overline{P'C}^2 = 8\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2 = 9\text{ cm}^2 = \overline{PC}^2$, also $\sphericalangle PP'C = 90°$ und wegen $\sphericalangle BP'P = 45°$ schließlich $\sphericalangle BP'C = 135°$. Daher gilt nach dem Kosinussatz
$x^2 = \overline{BC}^2 = \overline{P'B}^2 + \overline{P'C}^2 - 2 \cdot \overline{P'B} \cdot \overline{P'C} \cdot \cos 135°$,
$x^2 = 4\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\text{ cm}^2$
$= (5 + 2\sqrt{2})\text{ cm}^2$, also
$x \approx 2{,}80$ cm.
Das Quadrat ABCD hat also die Seitenlänge von rund 2,8 cm. (Abb. V 6).



"Grundstellung einnehmen heißt senkrecht zum Deck! Nicht zum Horizont!"

7. Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte A und C; sie schneide die Symmetrieachse g im Punkt P. Dann zeichnen wir die Gerade durch die Punkte P und A'. Die nun zu zeichnende Verbindungsgerade der Punkte B und C schneide die Symmetrieachse g im Punkte Q. Der Schnittpunkt der Geraden PA' mit der Geraden QB' ist der gesuchte Bildpunkt C'. (Abb. V 7).

8. Es ist auch zulässig, sofort die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_3}$ durchzuführen (Abb. V 8).

9. Bei der Drehung einer Figur liegen zwei einander entsprechende Punkte (Original- und Bildpunkt) auf einem Kreis um das Drehzentrum D. Die Kreise aller Paare einander entsprechender Punkte sind konzentrische Kreise, d.h., sie haben den gleichen Mittelpunkt D. Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises. Man erhält demnach das Drehzentrum D, indem man zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ die Mittelsenkrechten konstruiert, deren Schnittpunkt mit D zusammenfällt. Der Winkel $\sphericalangle ADA' = \varphi$ ist dann der Drehwinkel (Abb. V 9).

Mit Zirkel, Lineal und Zeichendreieck

1. Wegen $\overline{QS} = \overline{QP}$ ist das Dreieck SPQ gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte der Basis $\overline{SP}$ geht durch die Spitze Q des gleichschenkligen Dreiecks SPQ. (Abb. Z 1)

2. Aus $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ folgt $\overline{AC} = \overline{AB}$, d.h., Dreieck ABC ist gleichschenklig. Der Kreis um A mit $\overline{AB}$ als Radius schneidet den freien Schenkel des in A an AB angetragenen spitzen Winkels im Punkte C. (Abb. Z 2)

3. Wir zeichnen die Geraden AH und BH. Die Senkrechte durch A zu BH schneidet die Senkrechte durch B zu AH im Punkte C. (Abb. Z 3)

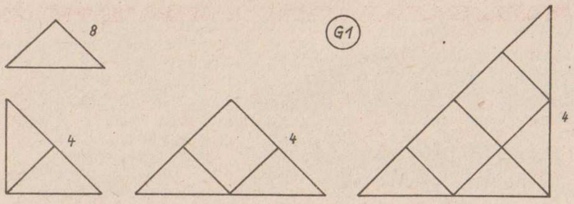
4. Wir zeichnen die Gerade MP, sie schneide den Kreis k in den Punkten A und B. Dann ist $\overline{AB}$ ein Durchmesser von k. Der Punkt A hat von P den größten, der Punkt B hat von P den kleinsten Abstand.
Begründung: Verbinden wir einen weiteren Punkt Q des Kreises k mit B und M, dann gilt $\overline{MB} = \overline{MQ} = r$ und somit auch $\sphericalangle MBQ = \sphericalangle MQB$. Da P zwischen M und B liegt, gilt ferner $\sphericalangle BQP < \sphericalangle MQB$, also auch $\sphericalangle BQP < \sphericalangle PBQ$. Da aber in jedem Dreieck dem größeren von zwei Winkeln die größere von zwei Seiten gegenüberliegt, gilt die Ungleichung $\overline{PB} < \overline{PQ}$. (Abb. Z 4)

5. Wir zeichnen durch A die Senkrechte zu AB und tragen auf ihr den Durchmesser $\overline{AB}$ von A bis Q ab und verbinden Q mit M. Die Gerade QM schneidet den Halbkreis k im Punkte F. Die Länge $\overline{CF}$ des von F auf AB gefällten Lotes ist gleich der Länge der Seite des zu konstruierenden Quadrates CDEF.
Begründung: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AMQ$ und $\triangle CMF$ folgt
$\overline{AQ} : \overline{AM} = 2r : r = 2 : 1$,
also auch $\overline{CF} : \overline{CM} = 2 : 1$ und somit $\overline{CF} = \overline{CD}$. (Abb. Z 5)

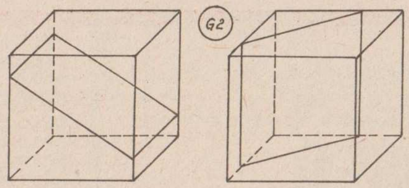
6. Der Thaleskreis mit dem Durchmesser $\overline{PQ}$ schneidet den Kreis k in den Punkten A und B, und es gilt $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PBQ = 90°$. Daraus ergibt sich die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks. Die Konstruktion ist nicht ausführbar, wenn die beiden Kreise keinen Punkt gemeinsam haben. (Abb. Z 6)

7. Die Parallele zu AD durch C schneide AB in E, dann ist Vier-

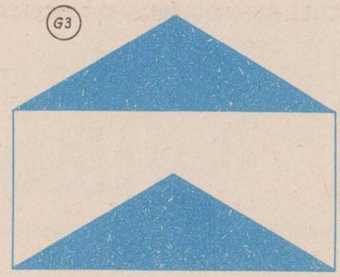
G1



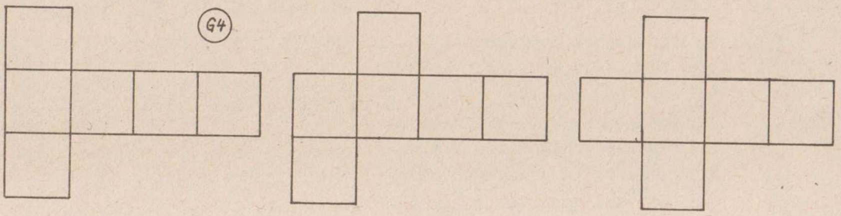
G2



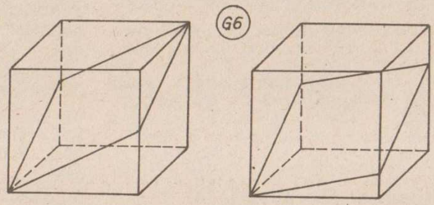
G3



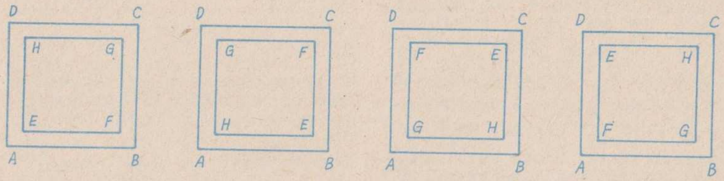
G4



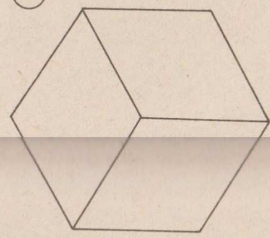
G6



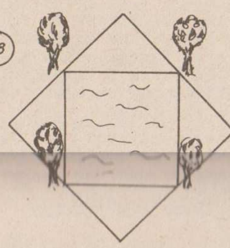
G5



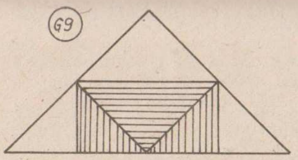
G7



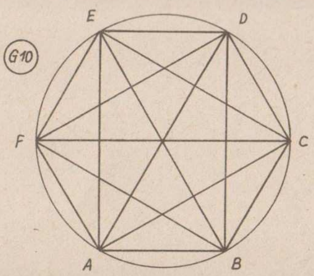
G8



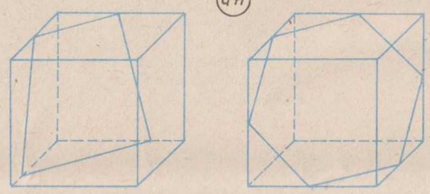
G9



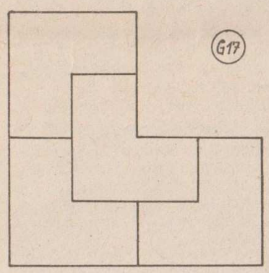
G10



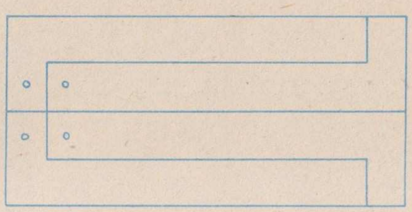
G11



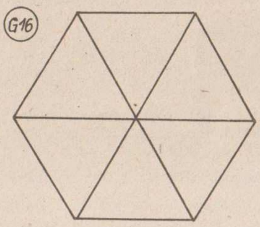
G17



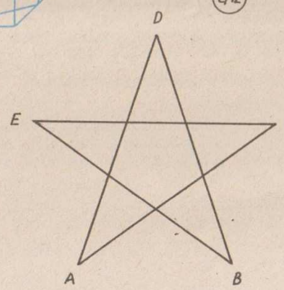
G15



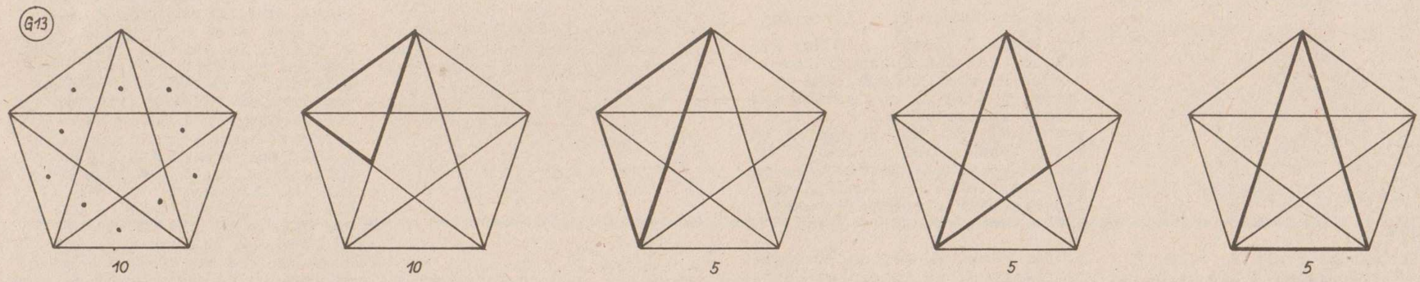
G16



G12

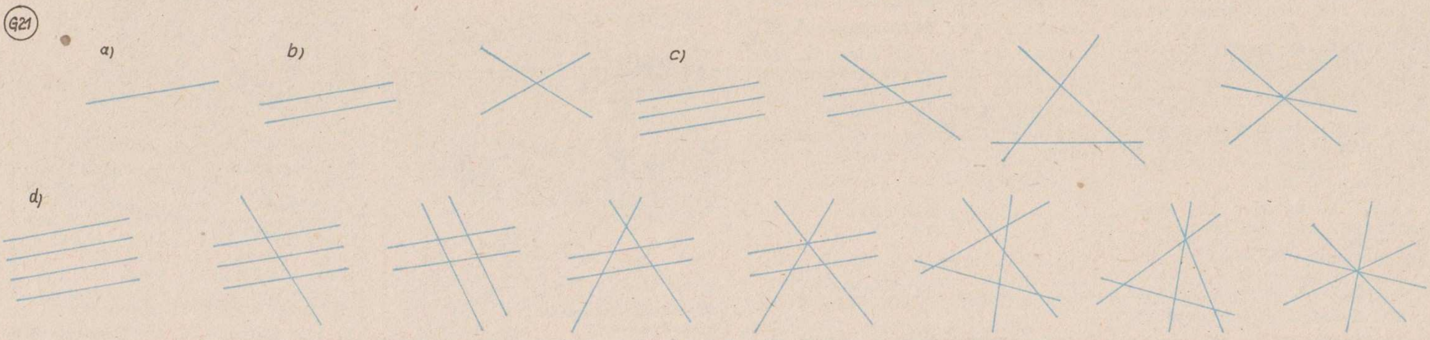


G13

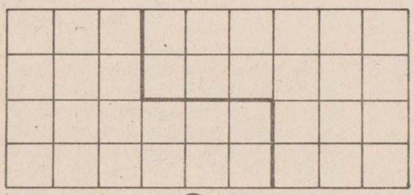


10 Dreiecke | 10 Dreiecke | 5 Dreiecke | 5 Dreiecke | 5 Dreiecke

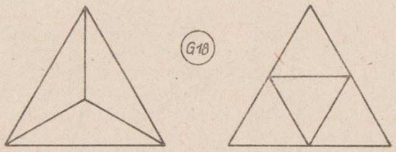
G21



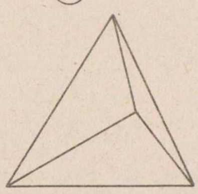
G14



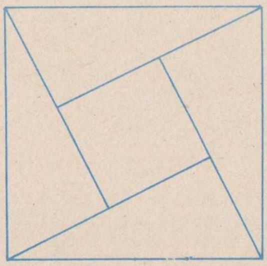
G18



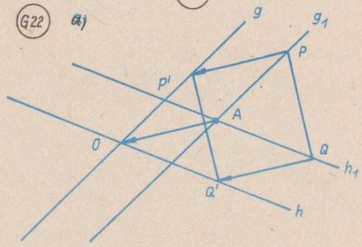
G20



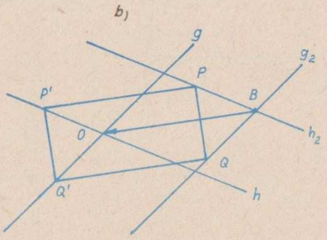
G19



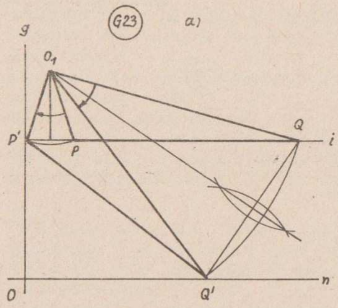
G22 a)



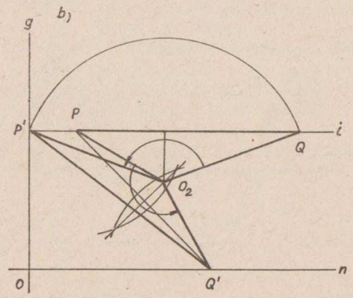
b)



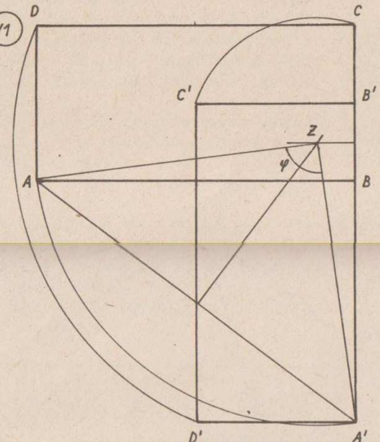
G23 a)



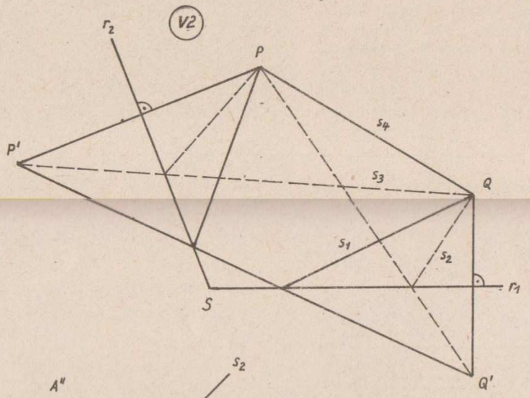
b)



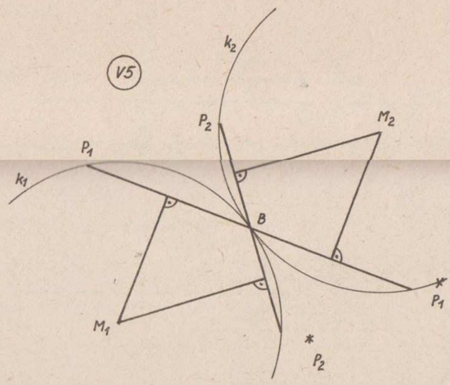
V1



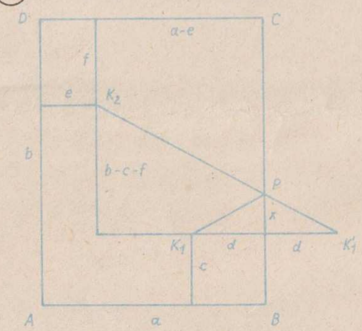
V2



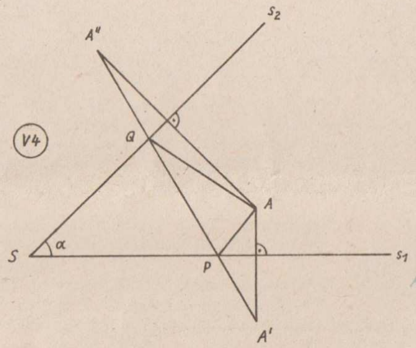
V5



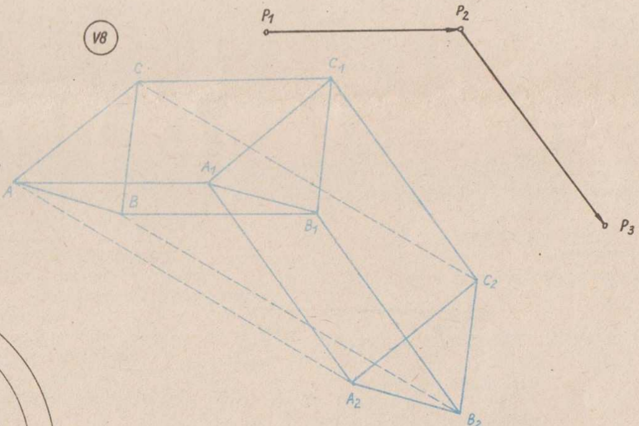
V3



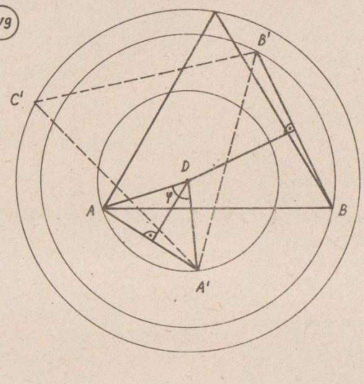
V4



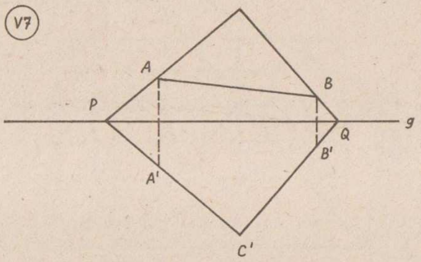
V8



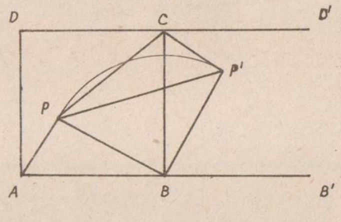
V9



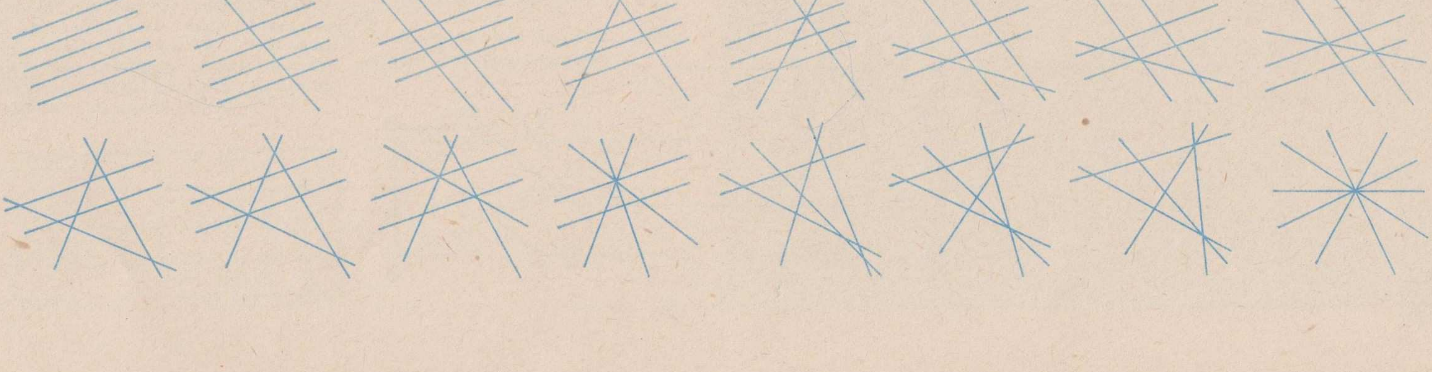
V7



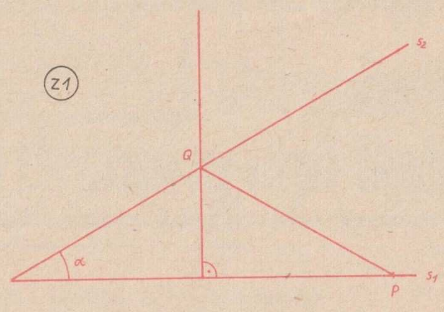
V6



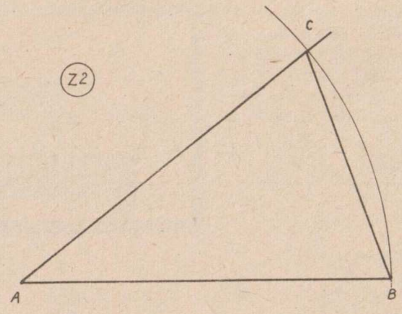
e)



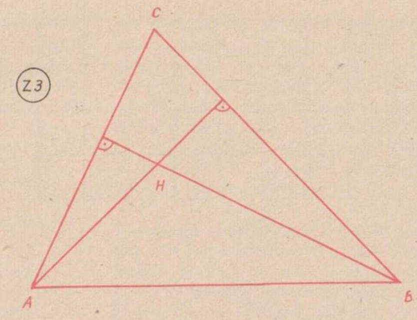
Z1



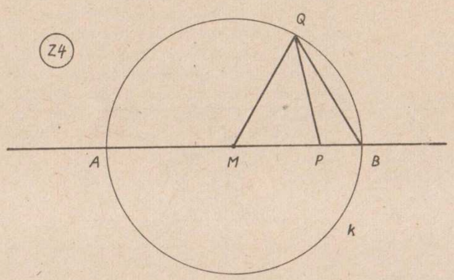
Z2



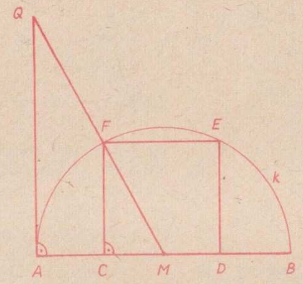
Z3



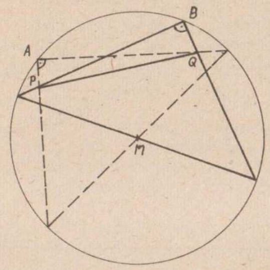
Z4



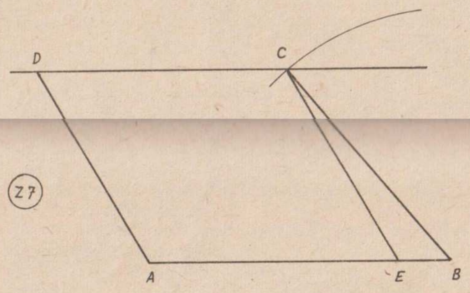
Z5



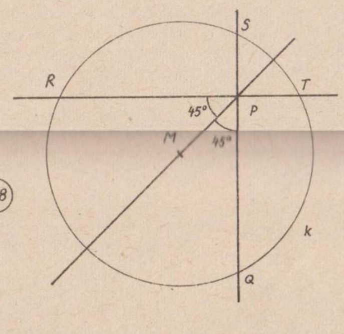
Z6



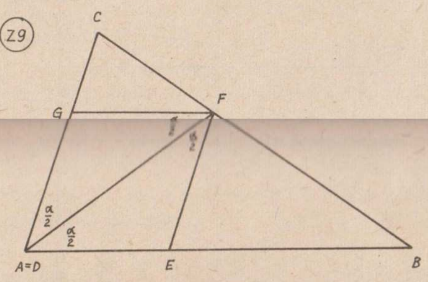
Z7



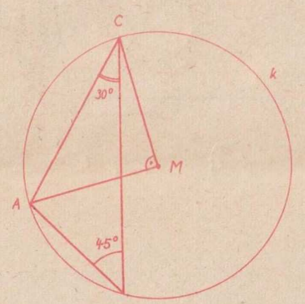
Z8



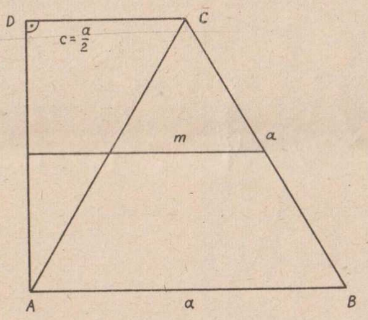
Z9



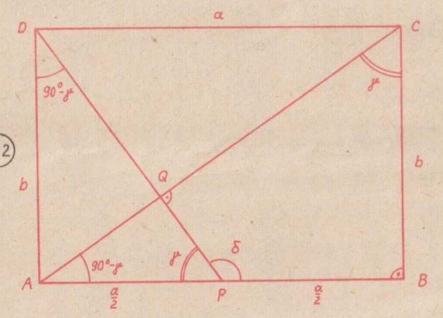
Z10



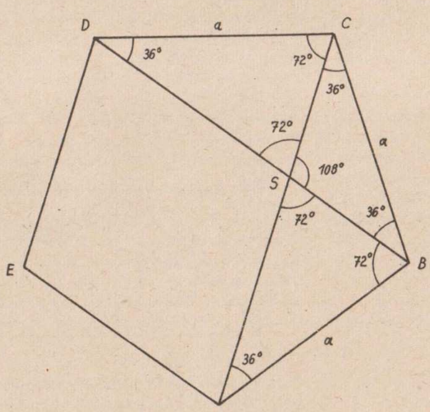
A1



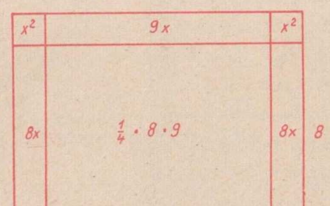
A2



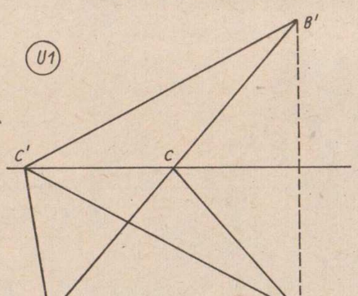
A3



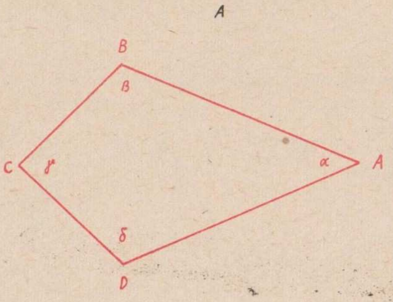
A4



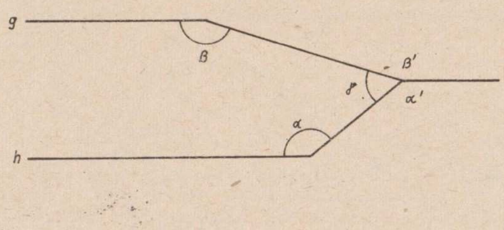
U1



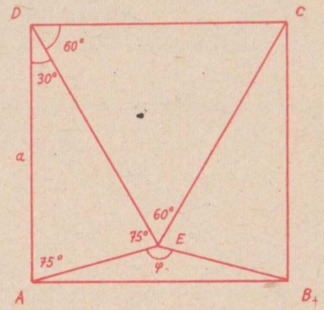
W2



W3



W1



eck AECD ein Parallelogramm mit $\overline{AE} = \overline{CD} = c$. Deshalb gilt $\overline{EB} = a - c$. Wir konstruieren das Dreieck EBC aus $\overline{EB} = a - c = 1{,}5$ cm, $\overline{BC} = b = 4$ cm und $\overline{EC} = \overline{AD} = d = 3$ cm. Der Kreis um B mit $\overline{AB} = a = 6$ cm schneidet die Gerade EB in A. Die Parallele durch A zu EC schneidet die Parallele durch C zu AB in D. (Abb. Z 7)

8. Wir verbinden M mit P und tragen in P an PM nach beiden Seiten je einen Winkel von 45° an. Die Gerade PM ist Symmetrieachse der Figur, deshalb gilt $\overline{PQ} = \overline{PR}$ und $\overline{PS} = \overline{PT}$, also auch $\overline{QS} = \overline{RT}$. (Abb. Z 8)

9. Wir konstruieren die Winkelhalbierende $\overline{AF}$ des Winkels $\sphericalangle BAC = \alpha$, ziehen durch F eine Parallele zu AC, die AB in E schneidet und eine weitere Parallele zu AB, die AC in G schneidet. Das Viereck DEFG ist der zu konstruierende Rhombus. Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck DEFG ein Parallelogramm, also $\overline{AG} = \overline{EF}$ und $\overline{AE} = \overline{GF}$. Wegen $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EFD$ gilt ferner $\overline{AE} = \overline{EF}$, d.h., Viereck DEFG ist ein Rhombus. (Abb. Z 9)

10. Wir zeichnen vom Mittelpunkt M des Kreises k aus zwei Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$, die aufeinander senkrecht stehen. In C tragen wir an CA einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel k in B schneidet. Wir verbinden A mit B. Der Peripheriewinkel $\sphericalangle ABC = \beta$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\sphericalangle AMC$ und somit 45°. Aus $180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ = \frac{5}{6}R$ folgt die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. (Abb. Z 10)

Geometrie und Arithmetik

1. Die Maßzahlen der Kantenlängen der vier Würfel seien n, n+1, n+2, n+3; dann gilt

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = (n+3)^3$,

$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27$,

$2n^3 - 12n - 18 = 0$,

$n^3 - 6n - 9 = 0$,

$n(n^2 - 6) = 9$.

Nur die natürliche Zahl n = 3 erfüllt diese Gleichung, und es gilt

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$.

Somit gibt es genau vier Würfel mit den geforderten Eigenschaften; ihre Kantenlängen betragen 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm.

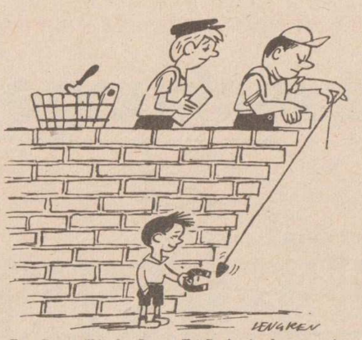
2. Ein konvexes n-Eck besitzt $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen. Nun soll gelten $n = k\cdot\frac{n}{2}(n-3)$ mit k = 1, 2, 3, ...
Wegen $n \neq 0$ erhalten wir daraus

$1 = \frac{k}{2}(n-3)$, $\quad 2 = k(n-3)$, $\quad n = \frac{2}{k} + 3$.

Nur $k_1 = 1$, $n_1 = 5$ und $k_2 = 2$, $n_2 = 4$ erfüllen diese Gleichung. Das heißt, nur in einem Viereck und in einem Fünfeck ist die Anzahl der Seiten gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Anzahl der Diagonalen.

3. Ein konvexes n-Eck besitzt $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Es soll gelten $2n = \frac{n}{2}(n-3)$ und wegen $n \neq 0$ erhalten wir daraus $4 = n - 3$ bzw. n = 7. Ein konvexes 7-Eck besitzt 14 Diagonalen.

4. Da ein rechtwinkliges Dreieck nicht gleichseitig sein kann, ist das Dreieck ABC gleichseitig; somit gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$.
Dann gilt $c = \frac{a}{2}$ und $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{2}) = \frac{3}{4}a$ (Abb. A 1).



5. Der Winkel $\sphericalangle PQC$ ist dann ein rechter, wenn $\delta + \gamma = 180^\circ$ gilt. Daraus folgt $\sphericalangle APQ = \gamma$ (als Nebenwinkel zu δ). Somit sind die Dreiecke $\triangle APD$ und $\triangle ABC$ einander ähnlich, und es gilt

$b : \frac{a}{2} = a : b$ bzw. $a = b\sqrt{2}$.
(Abb. A 2).

6. Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Aus $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ folgt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 36^\circ$. Aus $\overline{BC} = \overline{CD} = a$ folgt $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC = 36^\circ$. Deshalb gilt $\sphericalangle ABC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ und $\sphericalangle ASB = 72^\circ$ und somit $\overline{AB} = \overline{AS} = a$, $\overline{BS} = \overline{CS}$, $\overline{CD} = \overline{SD} = a$. Das Viereck ASDE ist ein Rhombus, die Dreiecke $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ sind gleichschenklig. (Abb. A 3)

7. Für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABS$ gilt

$A = \frac{1}{2}xy\cdot\sin 30^\circ = \frac{1}{4}xy = 121{,}5$,

also $xy = 486$, $\quad y = \frac{486}{x}$. $\qquad$ (1)

Es gilt aber auch $A = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}(4x + 3y) = 121{,}5$, also

$4x + 3y = 243$. $\qquad$ (2)

Aus (1) und (2) folgt durch Substitution

$4x + \frac{3\cdot 486}{x} = 243$

$4x^2 + 1458 = 243x$

$x^2 - \frac{243}{4}x + \frac{1458}{4} = 0$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 54$ und $x_2 = 6{,}75$. Deshalb gilt $y_1 = 9$ und $y_2 = 72$.
Wir erhalten somit zwei Lösungen, nämlich $\overline{AS} = 54$ cm und $\overline{BS} = 9$ cm; $\overline{AS} = 6{,}75$ cm und $\overline{BS} = 72$ cm.

8. Es sei x die Maßzahl der einen Rechteckseite; dann ist $\frac{u}{2} - x$ die Maßzahl der anderen Rechteckseite. Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt somit

$A = x(\frac{u}{2} - x) = \frac{ux}{2} - x^2$ bzw.

$A = (\frac{u}{4})^2 - (\frac{u}{4})^2 + \frac{u}{2}x - x^2 = \frac{u^2}{16} - (\frac{u}{4} - x)^2$.

Nun ist $(\frac{u}{4} - x)^2$ nicht negativ. Die rechte Seite der Gleichung hat somit ihren maximalen Wert für $(\frac{u}{4} - x)^2 = 0$; daraus folgt $\frac{u}{4} - x = 0$, also $x = \frac{u}{4}$. D. h., den größten Flächeninhalt von allen möglichen Rechtecken besitzt das Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{u}{4}$.

9. Es sei x die Breite des Rasens; dann gilt

$4x^2 + 2\cdot 8x + 2\cdot 9x = \frac{1}{4}\cdot 8\cdot 9$,

$x^2 + \frac{17}{2}x - \frac{9}{2} = 0$,

$x = -\frac{17}{4} + \frac{19}{4} = \frac{1}{2}$.

Der Rasen besitzt eine Breite von 0,5 m (Abb. A 4).

Wir arbeiten mit Winkelgrößen

1. Aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ und $\alpha + \beta + \gamma = 250^\circ$ folgt $\delta = 110^\circ$. Dann gilt auch $\beta = \delta = 110^\circ$ als Scheitelwinkel. Wegen $\alpha = \gamma$ erhalten wir $2\alpha + 110^\circ = 250^\circ$, also $\alpha = \gamma = 70^\circ$.

2. Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und $\alpha = \beta$ und $\gamma = \alpha + 30^\circ$ folgt $3\alpha + 30^\circ = 180^\circ$, also $\alpha = 50^\circ$ und $\gamma = 80^\circ$.

3. Aus $\overline{AD} = \overline{ED} = a$ folgt $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$. Aus $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ und $\sphericalangle EDC = 60^\circ$ folgt $\sphericalangle ADE = 30^\circ$. Daraus erhalten wir $\sphericalangle DAE = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$, also $\sphericalangle AEB = 360^\circ - 2\cdot 75^\circ - 60^\circ = 150^\circ$. (Abb. W 1)

4. Es gelten folgende Beziehungen:
$\sphericalangle ABC = \beta = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$, also
$\sphericalangle CBE = \frac{1}{2}\beta = 30^\circ$;

$\sphericalangle ACD = \delta = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, also $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}\delta = 65^\circ$ und somit $\sphericalangle BCE = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$.
Daraus folgt schließlich

$\sphericalangle BEC = \varphi = 180^\circ - (30^\circ + 115^\circ) = 35^\circ$.

5. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel. Deshalb gilt $\sphericalangle AFC = \alpha + \beta$ und $\sphericalangle EDF = \varphi = \alpha + \beta + \gamma$.

6. Aus $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ folgt $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\alpha$; aus $\overline{BE} = \overline{BC} = a$ folgt $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE = \frac{1}{2}\beta$. Wegen $\alpha + \beta + 32^\circ = 180^\circ$ erhalten wir $\alpha + \beta = 148^\circ$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 74^\circ$.
Darum gilt $\sphericalangle DCE = \delta = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ$.

7. Es seien $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle ADC = \delta$. Wegen $\beta = \delta$ folgt aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, somit $\alpha + 2\beta + \gamma = 360^\circ$ bzw. $60^\circ + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ$, also $2\beta = 210^\circ$ und $\beta = 105^\circ$ (Abb. W2)

8. Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Aus $\overline{BA} = \overline{BC}$ folgt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$. Die Innenwinkel des gleichschenkligen Trapezes ACDE betragen $\sphericalangle EAC = \sphericalangle DCA = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

9. Wegen $\overline{AE} = \overline{AF}$ gilt $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AFE = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.
Wegen $\overline{BD} = \overline{BF}$ gilt $\sphericalangle BFD = \sphericalangle BDF = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$.
Nun gilt $\sphericalangle AFE + \sphericalangle EFD + \sphericalangle BFD = 180^\circ$, also $(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) + \sphericalangle EFD + (90^\circ - \frac{1}{2}\beta) = 180^\circ$ bzw.
$\sphericalangle EFD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.
Analog dazu gilt $\sphericalangle EDF = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle DEF = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$.

10. Wir zeichnen durch C die Parallele zu g. Dann gilt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Wegen $\alpha' + \beta' + \gamma = 360^\circ$ gilt auch $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta = 360^\circ - 120^\circ - 140^\circ = 100^\circ$. (Abb. W 3).

Ungleichungen in der Geometrie

1. Aus $7{,}5 \leqq a \leqq 7{,}6$ und $5{,}4 \leqq b \leqq 5{,}5$ folgt $7{,}5 \cdot 5{,}4 \leqq a\cdot b \leqq 7{,}6 \cdot 5{,}5$ bzw. $40{,}5 \leqq A \leqq 41{,}8$.
Dieser Raum ist für den Zweck geeignet.

2. Aus $5{,}3 \leqq a \leqq 5{,}5$ und $3{,}6 \leqq b \leqq 3{,}8$ folgt $8{,}9 \leqq a + b \leqq 9{,}3$, also $17{,}8 \leqq 2(a + b) \leqq 18{,}6$ bzw. $17{,}8 \leqq u \leqq 18{,}6$.
Ferner gilt $5{,}3 \cdot 3{,}6 \leqq a \cdot b \leqq 5{,}5 \cdot 3{,}8$ bzw. $19{,}08 \leqq A \leqq 20{,}90$.

3. Aus $5{,}1 \leqq a \leqq 5{,}2$ folgt $4 \cdot 5{,}1 \leqq 4 \cdot a \leqq 4 \cdot 5{,}2$ bzw. $20{,}4 \leqq u \leqq 20{,}8$.

4. Aus $26 \leqq a \leqq 28$ und $82 \leqq 2\cdot b \leqq 86$ erhalten wir $108 \leqq a + 2b \leqq 114$ bzw. $108 \leqq u \leqq 114$.

5. Aus $3{,}4 \leqq a \leqq 3{,}5$ und $6{,}2 \leqq c \leqq 6{,}3$ folgt $9{,}6 \leqq a + c \leqq 9{,}8$, also $4{,}8 \leqq \frac{1}{2}(a + c) \leqq 4{,}9$ bzw. $4{,}8 \leqq m \leqq 4{,}9$.

6. Aus $58^\circ \leqq \beta \leqq 59^\circ$ und $102^\circ \leqq \gamma \leqq 103^\circ$ folgt $160^\circ \leqq \beta + \gamma \leqq 162^\circ$.
Wegen $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ gilt deshalb $18^\circ \leqq \alpha \leqq 20^\circ$.

7. Wegen $a < b < c = 5$ cm und $b = a + 1$ cm gilt $a < a + 1$ cm < 5 cm. Es ergeben sich für die Seiten des Dreiecks folgende möglichen Längen:
(Beachte $a + b > c$!)

a	b	c
2 cm	4 cm	5 cm
3 cm	4 cm	5 cm

8. Die Länge der rechteckigen Bodenfläche des Werkzeugkastens betrage x cm und die Breite (x - 25) cm. Dann beträgt der Flächeninhalt $F = x(x-25)$ cm^2.
Nun gilt

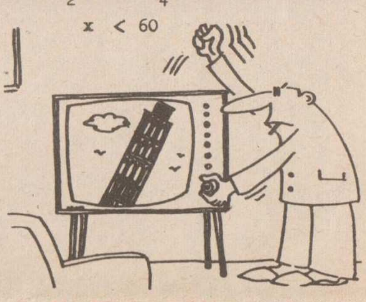
$x(x - 25) < 2100$ und $x > 25$,

$x^2 - 25x < 2100$,

$(x - \frac{25}{2})^2 < 2100 + \frac{625}{4}$.

$(x - \frac{25}{2})^2 < \frac{9025}{4}$

$x < 60$



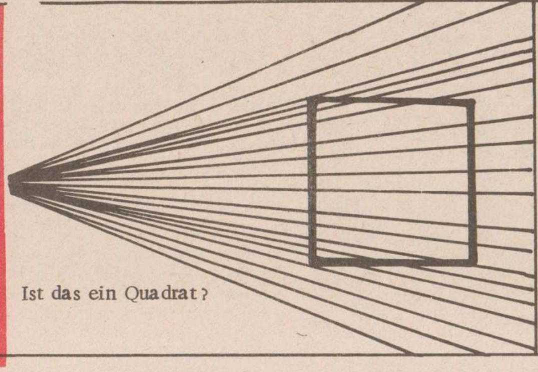
9. Die Figur stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ dar. Durch C wurde eine Parallele zu AB gezogen und auf ihr ein weiterer Punkt C' festgelegt und mit A und B verbunden. Dann wurde B an der Parallelen als Symmetrieachse gespiegelt; es sei B' Bildpunkt von B. Nun gilt $\overline{B'C} = \overline{BC}$ und $\overline{BC'} = \overline{B'C'}$. Wegen $\overline{BC} = \overline{AC}$ gilt ferner $\overline{B'C} = \overline{AC}$.
Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt $u_1 = \overline{AB} + \overline{AB'}$, und der Umfang des Dreiecks ABC' beträgt $u_2 = \overline{AB} + \overline{AC'} + \overline{B'C'}$. Nach der Dreiecksungleichung gilt aber $\overline{AB'} < \overline{AC'} + \overline{B'C'}$ und somit $u_1 < u_2$. (Abb. U 1)

10. Aus $a + b > c$ folgt nach dem Monotoniegesetz der Addition $a + b + c > 2c$ und somit $\frac{a + b + c}{2} > c$.

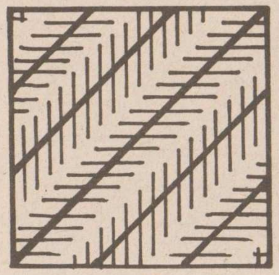
11. Aus $\overline{ABDF} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DF}$ und $\overline{ACF} = \overline{AB} - \overline{BC} - \overline{CD} - \overline{DF}$ folgt wegen $\overline{BD} < \overline{BC} + \overline{CD}$ die Richtigkeit der Ungleichung $\overline{ABDF} < \overline{ACF}$.

An dieser Mathe-LVZ arbeiteten mit:
Studienrat J. Lehmann, VLdV, 29. Oberschule Leipzig, Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ (Idee und Gestaltung); Dr. W. Türke, IfL Auerbach (Geometrieaufgaben Klassen 2 bis 5); Studienrat Th. Scholl, Ministerium f. Volksbildung, Berlin (Aufgaben der Seiten 3 bis 11);
Typografische Gestaltung: B.Radestock/J. Lehmann
Wir danken den Zeichnern Lenuren, H. Büttner, H. Parschau, L. Otto, W. Tilmann, K.-H. Guckuk, M. Wunderlich, G. Sprengel, H.-J. Starke, W. P. Rosanzew.
Veröffentlicht unter Liz.-Nr. 107 des Presseamtes der DDR, Satz, TASTOMAT Eggersdorf, Druck: Fortschritt Erfurt

Optische Täuschungen

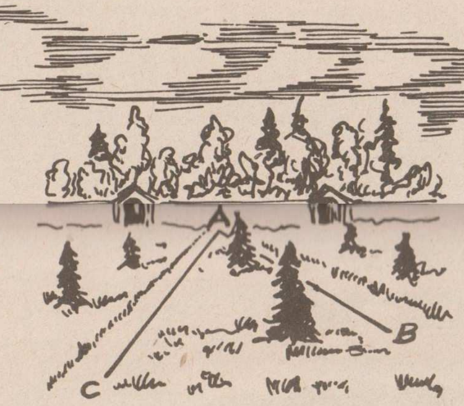


Ist das ein Quadrat?

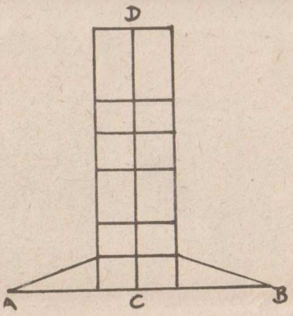


Parallel?

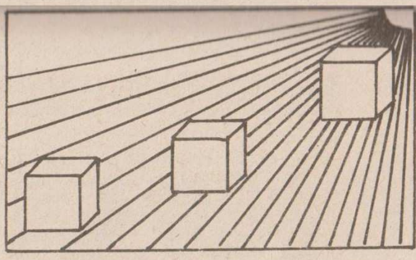
Welche Schnur, die die Tauben ziehen, ist kürzer?



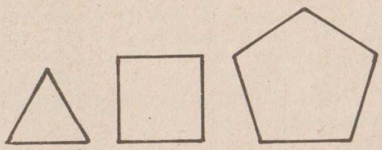
Welche Strecke ist länger:
AC oder AB ?



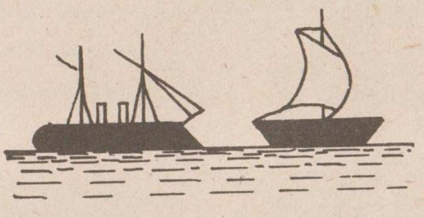
Welche Strecke ist länger:
AB oder CD ?



Welcher von den drei Würfeln
ist der größte?

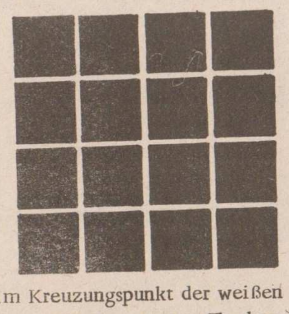


Welche der Grundlinien ist die kürzeste?

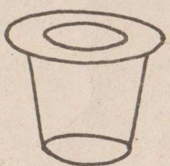


Welches Schiffsdeck ist länger?

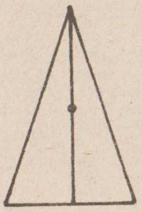
Welche ist die größte
der Figuren?



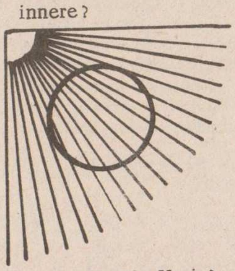
Am Kreuzungspunkt der weißen Linien
nimmt das Auge graue Flecke war
die gar nicht vorhanden sind!



Welche Ellipse ist größer:
Die untere oder oben die
innere?

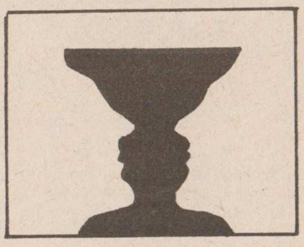


Halbiert der Punkt
die Höhe oder nicht?



Ist das ein Kreis?

Optische Täuschung:
Auf der Unvollkommenheit des menschlichen
Auges und der unvollkommenen Verarbeitung
der Einzeleindrücke zum Gesamtbild beruhen-
de gesetzmäßig auftretende Wahrnehmungs-
störung (Sinnestäuschung).



Kopfsilhouette oder Vase?