Lösungsheft **Mathematik** zum Lehrbuch **Klasse 9**

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Lösungsheft
Mathematik

Zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 9
(Titel-Nr. 00 09 05; Ausgabe 1987)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1989

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Siegrid Bellack, Walter Blaurock, Prof. Dr. habil. Hans Bock, Dr. sc. Peter Borneleit, Dr. sc. Peter Göthner, Dr. Claus Peter Helmholz und Dr. Gerlinde Wußing beteiligt.

Redaktion: Annemarie Mai

Lösungsheft Mathematik : zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 9, Ausg. 1987. Nur für Lehrer. - 2. Aufl. - Berlin : Volk u. Wissen, 1989. - 108 S.

ISBN 3-06-002207-0

2. Auflage
Lizenz Nr. 203·1000/89 (DN 00 22 07-2)
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Redaktionsschluß: 24. August 1988
LSV 0645
Bestell-Nr. 709 254 7
00530

Vorbemerkungen

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Schüleraufträge und Aufgaben des Lehrbuches

Mathematik, Klasse 9 (Titel-Nr. 00 09 05 - Ausgabe 1987).

Dabei wurden Konstruktionsaufgaben nicht und Beweisaufgaben in unterschiedlicher Ausführlichkeit berücksichtigt. Ebenso fehlen Lösungen von Schüleraufträgen, die mit einem größeren sprachlichen Aufwand verbunden sind. Bei Anwendungsaufgaben wurde aus Gründen der Platzersparnis teilweise auf den Antwortsatz verzichtet.
Für Aufgaben, bei denen vom Schüler nur einige aus einer größeren Vielfalt möglicher Lösungen anzugeben sind, wurden im allgemeinen Lösungsvorschläge angegeben, die mit der Bemerkung "z. B." eingeleitet werden. Auf diese Weise wird dem Lehrer die Möglichkeit gegeben, bei der Besprechung derartiger Aufgaben im Unterricht schnell auf einige Lösungen zurückgreifen zu können.

Gelegentlich finden sich im Lösungsheft auch Ablaufpläne, mit denen die Tastenfolge beim Einsatz des Taschenrechners angegeben wird. Dabei wurde natürlich der Schulrechner SR 1 bevorzugt berücksichtigt. Bei diesen Ablaufplänen wie auch bei der Angabe von Lösungen, die mit Hilfe von Taschenrechnern ermittelt wurden, wurde die jeweilige Rechneranzeige in eckigen Klammern angegeben. Auch die Rechneranzeige von Zwischenergebnissen, die für die Kontrolle des vom Schüler eingeschlagenen Rechenweges von Interesse sein könnte, wurde im Lösungsheft mitunter erfaßt. (Dabei sollte man bedenken, daß auf Grund unterschiedlicher Rechenwege wie auch durch Rundungen der Zwischenergebnisse bei der Rechneranzeige geringfügige Abweichungen auftreten können. Diese Unterschiede beeinflussen aber nicht das sinnvoll gerundete Endergebnis.)

Rechneranzeige und Resultate geben auch Aufschluß darüber, wie die Gestalter des Lösungsheftes die Anwendung der Regeln beim Arbeiten mit Näherungswerten sehen. Die Rundungen, die beim Auftreten von Meßwerten oder von Näherungen im Zusammenhang mit unendlichen Dezimalbrüchen vorgenommen wurden, basieren auf den Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten, die in Klasse 6 eingeführt wurden.

Die Redaktion

A Arbeiten mit Variablen

Lerneinheit A 1: Zur Wiederholung

● 1 a) x ist ein Element der Menge M; y ist ein Element der Menge K.

b) Folgende Aussagen sind falsch: $16{,}5 \notin Q$; $-22{,}5 \in Z$; $0{,}01 \notin Q_+$; $15 \notin R$. Die übrigen Aussagen sind wahr.

● 2 a) $4{,}371 \in T$; $-0{,}009\,8 \in T$; $10\,000 \in T$; $25 \cdot 10^5 \in T$; $\frac{1}{3} \notin T$; $-3{,}8 \cdot 10^3 \in T$; $37{,}418\,538\,9 \notin T$; $\sqrt{2} \notin T$; $0{,}000\,000\,1 \in T$; $\pi \notin T$

b) z. B. $5\,000 \cdot 10^{90} \in T$ und $10^{20} \in T$, jedoch
$5\,000 \cdot 10^{90} \cdot 10^{20} \notin T$
$2{,}222\,2 \in T$ und $3{,}333\,3 \in T$, jedoch
$2{,}222\,2 \cdot 3{,}333\,3 \notin T$
$5 \cdot 10^{10} \in T$ und $0{,}01 \in T$, jedoch
$5 \cdot 10^{10} + 0{,}01 \notin T$

c) Es gibt keine irrationale Zahl, die Element von T ist.

● 3 $M_1 = M_8$; $M_2 = M_7$; $M_3 = M_9$; $M_4 = M_6$; $M_5 = M_{10}$

● 4 $\{3;\ 4\}$

● 5 z. B. $A \subset N$; $B \subset N$; $C \subset B$; $D \subset N$; $A \subset D$

● 6 z. B. $a \cdot x_1$; $17{,}5 - (-\pi)$; $x_1 : (y + 5)$; $-(y + 5)$; $[17{,}5 - (-\pi)] \cdot (y + 5)$

● 7 z. B. $N \subset Q_+$; $\frac{2}{3} \in Q_+$, aber $\frac{2}{3} \notin N$
$Z \subset Q$; $-0{,}3 \in Q$, aber $-0{,}3 \notin Z$
$N \subset Z$; $-5 \in Z$, aber $-5 \notin N$
$Q \subset R$; $\sqrt{7} \in R$, aber $\sqrt{7} \notin Q$

● 8 − 5 gehört nicht zum Variablengrundbereich von t.
1 und − 1 gehören nicht zum Variablengrundbereich von a.
Alle reellen Zahlen, die größer als 2 oder kleiner als − 2 sind, gehören nicht zum Grundbereich von u. Alle reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 5 sind, gehören nicht zum Variablengrundbereich von x.

● 9 Für n^2 erhält man 4; $\frac{1}{4}$; 0,01; 1; 16;

für $\frac{1}{n^2}$ erhält man $\frac{1}{4}$; 4; 100; 1; $\frac{1}{16}$;

für $\frac{1}{n^3}$ erhält man $\frac{1}{8}$; 8; 1 000; − 1; − $\frac{1}{64}$;

für n^3 erhält man 8; $\frac{1}{8}$; 0,001; − 1; − 64.

● 10 Für $n \cdot b \cdot 17 \cdot c^2$: n = 0 oder b = 0 oder c = 0;

für $(a - b) \cdot 1\,000$: z. B. a = 1, b = 1 oder a = $\sqrt{2}$, b = $\sqrt{2}$;

für $(a + b + c) \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$: z. B. a = 1, b = 1, c = − 2;

für $|a| + |b| - 1$: z. B. a = 0, b = − 1 oder a = $\frac{1}{2}$, b = $\frac{1}{2}$.

1.

	N	Z	Q_+	Q	R
− 3		+		+	+
1 000	+	+	+	+	+
$-\frac{3}{17}$				+	+
− 0,1				+	+
$\frac{1}{\pi}$					+
$0{,}1\overline{7}$			+	+	+
$\sqrt{3}$					+
0,315			+	+	+
$-\sqrt{7}$					+
25^{25}	+	+	+	+	+

2. 336 ∈ M; 476 ∈ M; 588 ∈ M; 806 ∉ M; 980 ∈ M

3. a), c), d), e), f) richtig; b) falsch

4. a) {0; 1; 2} b) {0; 1; 2; 3} c) {− 1; 0; 1; 2}

5. a) M_1 ist die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

b) M_2 ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen.

c) M_3 ist die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen.

d) M_4 ist die Menge aller Zahlen $\frac{1}{n + 1}$ mit n ∈ N.

6. a) C = {0; 6} b) C = {5; 10; 15; 20; 25} c) C = {9; − 9}

7. a) nein b) − a; a^2; 10 000 + a

c) ja, z. B. für a = 1 und b = − 1

8. a) a = 5; b beliebig oder b = 0; a beliebig oder a = 0; b beliebig

b) z. B. a = 6; b = $\frac{1}{12}$ oder a = 3; b = − $\frac{1}{12}$

c) z. B. a = − 1; b = − $\frac{5}{36}$ d) z. B. a = 10; b = $\frac{1}{2}$

9. a) für x = $\frac{2}{3}$ b) für a = 0 und für a = 6

c) für m = − 9 und für m = 0 d) für y = 0, für y = 3 und für y = − 3

10.* a) x = 4 b) y = − 5 c) v = $\frac{17}{11}$ d) u = 0

11. a), b), d), f), h) wahr; c), e), g) falsch

Lerneinheit A 2: Struktur von Termen

● 11 $(2a - b) + d^3$ ist eine Summe. $(2a - b + d)^3$ ist eine Potenz. $2 \cdot (a - b + d^3)$ ist ein Produkt. $2a - (b + d)^3$ ist eine Differenz.

● 12 z. B. $a + b \cdot c$; $(a + b) \cdot c$; $\frac{a}{b} - c$; $\frac{a - b}{c}$; $(a + b)^3$; $a^{2 \cdot 3}$; $(a - b) + (c - d)$

● 13 a) 5 $\boxed{+}$ 15 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{=}$ [25.] ;
3 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{+}$ 15 $\boxed{=}$ [9.]

b) 3 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 16 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{=}$ [0.] ;
3 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 16 $\boxed{=}$ [10.]

c) 2 $\boxed{\times}$ 72 $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{=}$ [18.] ;
2 $\boxed{\times}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ 72 $\boxed{=}$ [4.5]

d) 2 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ 12 $\boxed{=}$ [2.] ;
12 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ [18.] ; 12 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ [18.]

● 14 9 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 16 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ [104.]

1. a) Summe b) Differenz c) Summe d) Produkt e) Summe
f) Quotient g) Quotient h) Differenz i) Potenz

2. a) 5 (x + y − z : 2); x (y − 7 : z); (u : v + s) · (t − 4)
   b) (5x + y − z) : 2; (x · y − 7) : z; u: (v + st − 4)
   c) 5x + (y − z : 2); nicht möglich; u : v + (st − 4)
   d) (5x − y) − z : 2; xy − 7 : z; (u : v + st) − 4

3. a) $\frac{a-b}{c}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ c) $\frac{a}{b+6}$ d) $\frac{a+b}{c-d^2}$

   e) $\frac{a \cdot b}{c}$ f) $\frac{1}{a \cdot b}$ g) $\frac{\frac{2}{a}}{\sqrt{5}}$ h) $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{r}{s}}$

4. a) 1 : (a + b) b) (2a − b) : (3b − 5) c) (x · y) : (u · v)
   d) (1 + 1 : a) : b e) (1 : (a − b)) : (1 : (a + b))

5. a) a · b + (c − d) b) a · b − (c − d) c) a · b · (c − d)
   d) $\frac{a \cdot b}{c-d}$

6. a) 9 b) 7 c) − 23 d) 5,3

7. a) 17 + 49 : 7 [24.] b) 4 · 7,2 + 2,8 · 1,8 [33.84]
   c) $\sqrt{2,9 + 7,3}$ [3.1937439] d) 2,9 + $\sqrt{7,3}$ [5.6018512]
   e) 2,5 − $4,6^2$: 1,9 [− 8.6368421] f) $\left(\frac{2,5 - 4,6}{1,9}\right)^2$ [1.2216067]

8. a $\boxed{+}$ b $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ c $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$

9. Zu $(a + b)^2$ gehört a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$.
   Zu $a + b^2$ gehört a $\boxed{+}$ b $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$.
   Zu $\frac{a \cdot b}{a + b}$ gehört a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ a $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$.
   Zu $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ gehört a $\boxed{\div}$ b $\boxed{+}$ b $\boxed{\div}$ a $\boxed{=}$.
   Zu $\sqrt{a + b}$ gehört a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$.
   Zu $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ gehört a $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$.
   Zu $\frac{a + b}{a - b}$ gehört a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ a $\boxed{-}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$.

10. a) Es gilt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, aber nicht $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
    b) Es gilt a · b = b · a, aber nicht $a^b = b^a$.

    c) Es gilt $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, aber nicht $\frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}$.

Lerneinheit A 3: Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners

● 15 für $\boxed{x^2}$: 361; 0,09; 1 022 121; 0; 1; 0,025 6
für $\boxed{+/-}$: − 19; − 0,3; − 1 011; 0; 1; 0,16
für $\boxed{1/x}$: 0,052 631; 3,333 333 3; 0,000 989 11; E; − 1; − 6,25
für $\boxed{\sqrt{}}$: 4,358 898 9; 0,547 72; 31,796 226; 0; E; E

● 17 a) und b): Beide Ablaufpläne führen zum gleichen Ergebnis.

● 18

a − b : c	$a - b \cdot c^2$	$a - b^3 : c$	$a + \sqrt{b} - a \cdot c$
1,942 340 4	− 47,569 8	3,797 872 3	9,868 966 4
−7,767 272 7	− 17,196	−11,307 441	9,614 287 9

● 19 Man erhält in beiden Fällen 9,569 7. Der zweite Rechenweg ist aufwendiger.

● 20 a) 7,5 $\boxed{+}$ 3,3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 6,1 $\boxed{\div}$ 4,2 $\boxed{=}$ [4.2154 − 01]

Überschlag: $\frac{7,5 + 3,3}{6,1 \cdot 4,3} \approx \frac{11}{25} = 0,44$

b) 5,6 $\boxed{-}$ 3,3 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ 2,7 $\boxed{\times}$ 3,5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ [−4.1086956]

● 21 richtiges Ergebnis: 70
Ablaufplan: 4 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ 2 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

● 23 a) c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{}$ $\boxed{x \to M}$ a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

1. a) 39,581 282; Überschlag: 4 + 7 · 5 − 8 : 4 = 37
   b) 0,461 184 1; Überschlag: $1 + 2^2 - \sqrt{25} = 0$
   c) 54,88; Überschlag: $8^2 + 2 - 9 = 57$

2.

4,14	− 14,8	0,909 09	18
2,19	− 16,75	0,2	3,96
452,14	433,2	163,818 18	3 243,6
24,44	5,5	8,290 909 1	164,16

3. a) 732,25; Überschlag: $10^2 + 25^2 = 725$

b) 0,173 810 8; Überschlag: $\sqrt{400} - \sqrt{400} = 0$

c) − 0,321 74; Überschlag: $\frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

d) − 25,401 6; Überschlag: $9 \cdot (-3) = -27$

4. Die Näherungswerte sind im folgenden mit (NW) gekennzeichnet.

a) 345,6; 368,256; 345,833 33 (NW); − 9 654,5; 345,5 (NW)

b) 345,4; 322,744; 345,166 67 (NW); 10 345,5; 345,5 (NW)

c) 34,55; 7 862,198; 115,166 67 (NW); − 3 455 000; 0,000 345 5

d) 3 455; 15,182 809 (NW); 1 036,5; − 0,034 55; $3,455 \cdot 10^8$

e) 0,01; 517,835 54 (NW); 0,111 11 (NW); 10^8; 10^{-12}

5. a) 22,739 02; Überschlag: $4^2 + \sqrt{25} = 16 + 5 = 21$

b) 0,658 96; Überschlag: $\frac{75 - 8}{20 \cdot 5} = \frac{67}{100} = 0,67$

c) 151,954 85; Überschlag: $12^2 + \sqrt{196} - 3^2 = 144 + 14 - 9 = 149$

6. a) 2,73 $\boxed{+}$ 6,789 $\boxed{+}$ 3,15 $\boxed{\times}$ 6,789 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 6,789 $\boxed{=}$
[4.5521211]

b) 6,789 $\boxed{x \to M}$ $\boxed{+}$ 2,73 $\boxed{+}$ 3,15 $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$
Die Gefahr, Ziffern fehlerhaft einzutippen, ist bei dem unter a) genannten Ablaufplan größer.

7. a)

$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\lvert(1 + 3x) - (1 + x)^3\rvert$
3,375	2,5	0,875
1,331	1,3	0,031
0,857 375	0,85	0,007 375
1,061 21	1,06	0,001 21
1,003	1,003	0

Es ist $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, also $\lvert(1 + x)^3 - (1 + 3x)\rvert = \lvert 3x^2 + x^3\rvert$. "Nähert" sich x der Zahl 0, so gilt dies (erst recht) auch für $\lvert 3x^2 + x^3\rvert$.

b) Ein Näherungswert von $\sqrt{1,088}$ ist $1 + \frac{0,088}{2} = 1,044$.
Der SR1 liefert 1,043 072 4.

8.* 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ [1.5]
2 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ [1.4]
2 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ [1.4166667]
2 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$
[1.4137931]

$\sqrt{2} \approx 1,414\,213\,6$
Je "länger" der Kettenbruch, desto genauer ist der Näherungswert für $\sqrt{2}$.

9.* a) s = 5,7 cm; A = 5,4 cm² [5.3598507]

b) s $\boxed{-}$ a $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ s $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ s $\boxed{-}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$
(Fortsetzung) s $\boxed{-}$ c $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

10.* a) $\overline{AB} = 4,2$ LE [4.2107007] (LE − Längeneinheiten)
$\overline{AC} = 4,5$ LE [4.494441]
$\overline{BC} = 3,9$ LE [3.9357337]

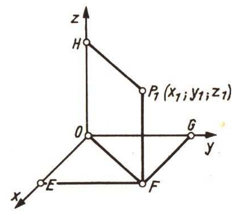
b) d = 0 genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

c) Die Summe der Quadrate reeller Zahlen ist stets nichtnegativ. Die Quadratwurzel aus einer solchen Summe existiert stets und ist ebenfalls eine nichtnegative Zahl.

d) x_1 $\boxed{-}$ x_2 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x \to M}$ y_1 $\boxed{-}$ y_2 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

11. a) x_1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ y_1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ z_1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

b) $\overline{OP_1} = 5,83$ LE; $\overline{OP_2} = 9,98$ LE;
$\overline{OP_3} = 4,00$ LE; $\overline{OP_4} = 9,11$ LE;
$\overline{OP_5} = 9,66$ LE;
(LE − Längeneinheiten)



c) Es ist $\overline{OE} = x_1$, $\overline{OG} = y_1$ und $\overline{OH} = z_1$.
Im Dreieck OEF gilt:
$\overline{OF}^2 = x_1^2 + y_1^2$.
Im Dreieck OFP_1 gilt:
$\overline{OP_1}^2 = \overline{OF}^2 + z_1^2$.
Damit ergibt sich $\overline{OP_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

12.* a) Der SR1 liefert Näherungswerte für

$2 : 7$; $189\,457 \cdot 889$; $2 \cdot \sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2} + 1$; $9 \cdot 10^{20} - 3$;

2^{25}; $\frac{1}{3} + 3$.

b) $(6 : 7) \cdot 7 - 6 = 6 - 6 = 0$

Der SR1 liefert $-10^{-8} = -0{,}000\,000\,01$, da für $6 : 7$ nur ein Näherungswert angegeben wird.

Lerneinheit A 4: Algorithmen

● 24 6

● 25 1,090 909 1

● 26 Die gesuchten Reste sind 1; 5; 21; 66.

1. $\frac{a - b}{a + b}$

3. a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ a $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

Wortvorschrift:
1. Lies die Zahl für a und die Zahl für b!
2. Berechne die Summe $s = a + b$!
3. Notiere s!
4. Berechne das Produkt $p = a \cdot b$!
5. Berechne den Quotienten $q = \frac{p}{s}$!
6. Notiere q als Termwert!

5.
1. Zeichne die Punkte A und B!
2. Zeichne Kreise um A und um B mit $r > \frac{1}{2}\,\overline{AB}$!
3. Bezeichne die beiden Schnittpunkte der Kreise mit S_1 bzw. mit S_2!
4. Zeichne die durch S_1 und S_2 verlaufende Gerade g!
5. Die gesuchte Mittelsenkrechte ist g.

6. a) Durch den Algorithmus wird jeder Zahl ihr absoluter Betrag zugeordnet.

b) Durch den Algorithmus wird jeder nichtnegativen Zahl a die Quadratwurzel aus a zugeordnet.

7. a), b), d), e), g), h), k), l), ja;

c), f), i) nein

Lerneinheit A 5: Beschreiben von Sachverhalten mit Hilfe von Variablen

● 27 $\frac{V}{h}$; $\frac{A}{g}$; $\frac{m}{V}$; $\frac{F}{A}$; $\frac{s}{t}$; $\frac{n}{A}$; u. a.; $\frac{W_2}{W_1}$

● 28 Z. B. beschreibt $a \cdot \frac{b}{c}$

- die Radialkraft, wenn a die Masse, b das Quadrat der Geschwindigkeit und c der Radius ist;
- den Widerstand eines Leiters, wenn a der spezifische Widerstand des Stoffes, aus dem der Leiter besteht, b seine Länge und c seine Querschnittsfläche ist;
- die magnetische Feldstärke, wenn a die Stromstärke, b die Windungszahl der Spule und c die Spulenlänge ist.

● 29 a) Für alle $a, b \in N$ gilt: $a + b = b + a$.

b) Für alle $a, b, c \in Q$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

c) Für alle $a, b, c \in R$ gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

1. a) $4n + 1$; $n \in N$ b) $(n + (n + 1))^2$; $n \in N$

c) $(2n + 1)^2 \cdot (2m + 1)^2$; $n, m \in N$

d) $(10a + b) - (10c + d)$; $a, b, c, d \in N$; $0 < a \leqq 9$; $0 \leqq b \leqq 9$; $0 < c \leqq 9$; $0 \leqq d \leqq 9$

2. a) eine natürliche Zahl, die – durch 5 geteilt – den Rest 9 läßt

b) eine zweistellige natürliche Zahl

c) das Quadrat einer ungeraden Zahl

d) das Produkt aus einer durch 3 und einer durch 5 teilbaren natürlichen Zahl

3. a) $(a + b) \cdot (a - b)$; $a, b \in Q$ b) $\frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2}$; $a, b \in R$, $|a| \neq |b|$

c) $\frac{100a + 10b + c}{a + b + c}$; $a, b, c \in N$; $0 < a \leqq 9$; $0 < b \leqq 9$; $0 < c \leqq 9$

4. a) z. B. a und b; 2a und $\frac{b}{2}$; 0,1a und 10b

b) z. B. 2a und b; a und 2b; $\sqrt{2}$ a und $\sqrt{2}$ b

c) z. B. $\frac{a}{2}$ und b; a und $\frac{b}{2}$; $\frac{a}{4}$ und 2 b

d) z. B. a und a; $\frac{a}{2}$ und 2a; 7a und $\frac{1}{7}$ a

e) z. B. a + b und a + b; 2 (a + b) und $\frac{a+b}{2}$; 0,01 (a + b) und 100 (a + b)

5. a) $n - 1$, $n + 1$; $n \in N$; $n \neq 0$ b) $n = 22$ c) $M = \{323; 360; 399\}$

6. b) Für alle $a, b, c \in R$ gilt:
(1) wenn $a > b$ und $c > 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
(2) Wenn $a > b$ und $c < 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$.

Lerneinheit A 6: Nutzen von Variablen beim Beweisen

● 30 a) $2n \cdot (2n + 1) \cdot (2n + 2)$; $n \in N$
$= 2 \cdot n \cdot (2n + 1) \cdot 2(n + 1)$
$= 4 \cdot [n(2n + 1) \cdot (n + 1)]$
Da mit $n \in N$ auch $n \cdot (2n + 1) \cdot (n + 1) \in N$ gilt, ist das Produkt ein Vielfaches von 4, also durch 4 teilbar.
b) Z. B. ist $1 \cdot 2 \cdot 3$ nicht durch 4 teilbar.

● 31 $2n \cdot 2m \cdot 2p = 8n \cdot m \cdot p$. Mit $n, m, p \in N$ ist auch $n \cdot m \cdot p \in N$; also ist das Produkt ein Vielfaches von 8.

● 32 a) z. B. $5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ und $4 \mid 24$
b) $(2n + 1)^2 - 1 = (4n^2 + 2n + 2n + 1) - 1 = 4 \cdot (n^2 + n)$
Mit $n \in N$ ist auch $(n^2 + n) \in N$; also ist $4 \cdot (n^2 + n)$ durch 4 teilbar.

1. a) (1) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5 \cdot (n + 2)$
Mit $n \in N$ ist auch $(n + 2) \in N$; also ist $5 \cdot (n + 2)$ durch 5 teilbar.
(2) $2n + (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 3) + (2n + 4) =$
$= 10n + 10 = 10 \cdot (n + 1)$
Mit $n \in N$ ist auch $(n + 1) \in N$; also ist $10 \cdot (n + 1)$ durch 10 teilbar.
b) Z. B. ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ nicht durch 10 teilbar.

2. $a \mid b$ bedeutet: Es gibt ein $n \in N$ mit $a \cdot n = b$. (1)
$b \mid c$ bedeutet: Es gibt ein $m \in N$ mit $b \cdot m = c$. (2)

Für b wird in (2) die linke Seite von (1) eingesetzt. Man erhält: $(a \cdot n) \cdot m = c$ bzw. $a \cdot (n \cdot m) = c$. Also existiert mit $n \cdot m$ eine natürliche Zahl, die mit a multipliziert c ergibt; d. h., $a \mid c$.

3. a) $(2n)^2 + (2m)^2 = 4n^2 + 4m^2 = 4 \cdot (n^2 + m^2)$; also gilt wegen $(n^2 + m^2) \in N$: $4 \mid [(2n)^2 + (2m)^2]$.
b) Z. B. ist $2^2 + 6^2 + 10^2$ kein Vielfaches von 8.
c) $(2m + 1 + 2m + 1)^2 = (2n + 2m + 2)^2 = [2(m + n + 1)]^2$
$= 4(n + m + 1)^2$; also gilt wegen $(m + n + 1)^2 \in N$:
$4 \mid (2n + 1 + 2m + 1)^2$.

4. 1. Zahl: 2n; 2. Zahl: 2n + 1; 3. Zahl: 2n + 2
$2n \cdot (2n + 1) \cdot (2n + 2) = 4n(n + 1)(n + 1)$
Mit $n \in N$ ist auch $n \cdot (n + 1)(n + 1) \in N$, also ist das Produkt durch 4 teilbar. Außerdem ist entweder n oder aber n + 1 gerade und genau eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch 3 teilbar.

5. Es sei $b = a + 1$, $c = a + 2$ und $d = a + 3$ mit $a \in N$.
a) $a + d = a + (a + 3) = 2a + 3$; $b + c = (a + 1) + (a + 2)$
$= 2a + 3$, also $a + d = b + c$
b) $a \cdot d = a(a + 3) = a^2 + 3a$; $b \cdot c = (a + 1)(a + 2)$
$= a^2 + 3a + 2$, also $a \cdot d < b \cdot c$

6. a) Alle Gleichungen sind wahre Aussagen.
b) $6^2 - 1 = 5 \cdot 7$; $7^2 - 1 = 6 \cdot 8$; $8^2 - 1 = 7 \cdot 9$
c) $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$; $a \in N$
d) Für alle $a \in N$ gilt: $(a - 1) \cdot (a + 1) = a^2 + a - a - 1 = a^2 - 1$.

7. (1) $3 \mid 3$, aber 3 ist nicht kleiner als 3.
(2) $4 < 5$, aber 4 teilt nicht 5.
(3) $(1 + 4)^2 = 25$, aber $1^2 + 4^2 = 17$.
(4) $\sqrt{9 + 16} = 5$, aber $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

8. a) Für a = 2 und b = 1 ergibt sich $(2 + 1)(2 - 1) = 3$ und $2^2 - 1^2 = 3$.
b) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$
$= a^2 - b^2$.
c) Die erste, dritte und vierte Aussage ist jeweils wahr. Jede der beiden anderen Aussagen ist falsch.

9.* b) Es gibt eine natürliche Zahl a, so daß a und a + 1 einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler d besitzen.

c) Die in b) formulierte Annahme bedeutet:
Es existiert ein $m \in N$ mit $d \cdot m = a$, und
es existiert ein $m' \in N$ mit $d \cdot m' = a + 1$.
Subtrahiert man auf der linken Seite der zweiten Gleichung $d \cdot m$ und auf der rechten Seite a, so erhält man
$d \cdot m' - d \cdot m = (a + 1) - a$
$d \cdot (m' - m) = 1.$
Ein Produkt natürlicher Zahlen kann jedoch nur dann gleich 1 sein, wenn jeder der Faktoren gleich 1 ist.
Also folgt d = 1 im Widerspruch zur Annahme.

10.* In allen Fällen entstehen wahre Aussagen. Bei der Division muß zusätzlich $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gefordert werden.

Lerneinheit A 7: Wiederholung des Umformens von Termen

● 33

a	b	$3a - a(b - 2) - 2ab$	$5a - 3ab$
1	2	-1	-1
2	-1	16	16
-3	5	30	30

● 34 a) $6t - 3s - 7s - 3t$
b) $5u + (-7v) + 3w + (-19)$
c) $9a + b$; $5y - 12z$; $31r + 20s + 4rs$

● 35 a) $8a - b + 10c$ b) $3ab$

● 36 a) $6a^3b^2$ b) $-2,4\,s^7t^6u^2$ c) $8a^5b^5c$

● 37 a) $\frac{8}{y}$ b) $\frac{3a}{4c}$

● 38 a) $-6ab - 10a^3$; $-21m^2n + 14mn^2 - 49mn$; $-xz + yz$
b) $a(3 + 5r)$; $3xyz^2(6x - 7z)$; $4s(2s - r + 3r^2)$

● 39 $8a + \frac{9}{4}b$; $s + 4 + 5r$; $-7\frac{x}{y} + 9 - 3y$

● 40 a) $2a^2 + ab - b^2$ c) $8t^2 - 6st^2 + 16st - 3s^2t + 6s^2$
b) $x^2 - y^2$ d) $16r^3 + 10r^2s^4 - 8rs - 5s^5$

1. a) $2a + 4b$ b) $r + 33s$ c) $12 + x + 21y$
d) $-\frac{r}{3} - a$ e) $-f - 5g$ f) $5r^2 + 3r + 4s - 3s^2$

2. Die angegebene Umformung ist falsch. Die Gleichheit der Termwerte bei drei Belegungen der Variablen ist kein Beweis für die Richtigkeit einer Umformung.

3. a) $p - q + r - 1$ b) $5p - 7q + 9r + 1$
c) $-5p + 7q - 9r - 1$ d) $\frac{4}{3}p - \frac{5}{4}q + r$
e) $\frac{14}{3}p - \frac{27}{4}q + 9r$ f) $6p - 7q + 11r + 1$
g) $2p + 4r$ h) $4p - 4q + 7r$

4. a) $-532,392\,5\,x^3y^2$ b) $\frac{-0,219\,49}{x}$ c) $33,960\,617\,x^2y^2z$
d) $\frac{3,440\,929\,9}{z}$ e) $-1\,672,560\,4\,x^4y^3z$ f) $\frac{1,671\,059\,9}{y^2}$
g) $-290,880\,06\,x^4y^5z^2$ h) $\frac{-8,338\,703\,1}{y^3z^2}$
i) $-29,472\,312\,x^2y^3$

5. a) $12a^2x + 4ax^2$ b) $-2m^3n^2 + 2m^2n$
c) $\frac{s^2t}{2} - \frac{s^3}{2} + st$ d) $5a + a^2b$

6. a) $2a + 6x$ b) $-mn + 1$ c) $t - s + \frac{3t}{s}$ d) $\frac{1}{2} + 0,1\frac{a}{b} - 0,03a$

7. a) $ab + b - 1$ b) $s + 2 + t$ c) $-\frac{rt}{20} - \frac{rs}{10} + \frac{t^2}{5} - \frac{1}{20} + \frac{1}{s}$
d) $-14rs + 8$ e) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

8. a) $-3,08p - 3,83 + 12,31q$ b) $80 \cdot \frac{1}{y} - 11\,000 \cdot \frac{1}{xy} + 200 \cdot \frac{1}{x^2}$
c) $-62,47 \cdot \frac{1}{x^2} + 200,33 \cdot \frac{y^2}{x} - 101,42$

9. a) $-2r^2 - 7rs + 99s^2$ b) $-2r^2 - 7rs + 99s^2$
c) $r^2 + 18rs + 81s^2$ d) $121s^2 - 44rs + 4r^2$
e) $\frac{5}{8}r^2 + \frac{119}{24}rs - 6s^2$ f) $\frac{25}{64}r^2 - \frac{5}{6}rs + \frac{4}{9}s^2$
g) $-\frac{25}{8}r^2 - \frac{55}{24}rs + 6s^2$ h) $25r^2 + 90rs + 81s^2$
i) $10r^3 + 53r^2s - 432rs^2 - 891s^3$

10. a) $t\,(v_o - \frac{1}{2}g \cdot t)$ b) $s\,(r_1 + r_2)$ c) $h^2\,(r - \frac{h}{3})$
d) $\frac{n}{2}\,(n + 1)$ e) $ab\,(2 + 3x - y)$ f) $3ab\,(3ab - 2a - b)$
g) $5rt\,(s - 14 + 7st)$

11. a) 2 b) 0 c) − 2,24 d) 3,6 e) − 0,4 f) 0,8

12. a) $r = \frac{abc}{4A}$ b) $a = \frac{bc}{b-c}$ c) $a = \frac{4}{5b}$
d) $a = \frac{2A}{h} - c$ e) $d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ f) $r = \frac{V}{\pi h^2} + \frac{h}{3}$

13.* a) $14ac - 12bc$ b) $\frac{47}{16}v^2 - \frac{3}{8}vw$ c) 0 d) $-\frac{7a}{5} + \frac{2}{3}$

Lerneinheit A 8: Die binomischen Formeln

● 41 (1) $a^2 + 2ab + b^2$; $x^2 + 2xy + y^2$; $m^2 + 2mn + n^2$
(2) $a^2 - b^2$; $x^2 - y^2$; $m^2 - n^2$

● 42 $k^2 + 2k + 1$; $k^2 - 1$; $k^2 - 2k + 1$; $a^2 - 2ab + b^2$;
$4a^2 - 2ab + 0{,}25\,b^2$; $s^2 - 2st + t^2$; $a^2 + 14a + 49$;
$m^2 - 14m + 49$; $p^2 - 81$; $0{,}01x^2 - 0{,}09y^2$; $u^2v^2 - 289$; $a^2 - b^2$

● 43 Der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $(a + b)$ setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten zweier Quadrate mit den Seitenlängen a bzw. b und den Flächeninhalten zweier Rechtecke, von denen jedes die Seitenlängen a und b hat.

● 44 a) Vollständige Quadrate sind (1); (3); (6).
b) (1) $(3x + a)^2$; (3) $(4b - a)^2$; (6) $(p + q)^2$

● 45 $(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$

1. a) $49 + 14b + b^2$ b) $9z^2 + 6tz + t^2$ c) $s^2 - 10rs + 25r^2$
d) $225a^2 + 600ac + 400c^2$ e) $1{,}69r^2 - 0{,}52rf + 0{,}04f^2$
f) $\frac{a^2}{16} + \frac{ab}{14} + \frac{b^2}{49}$ g) $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ h) $9t^4 - 30t^2r^2 + 25r^4$

2. a) $f^2 - g^2$ b) $4k^2 - p^2$ c) $1{,}21a^2 - 1{,}44$
d) $t^2 - 0{,}006\,4\,s^2$ e) $a^4 - d^2$ f) $\frac{r^2}{25} - \frac{s^2}{49}$

3. a) $(d + r)(d - r)$ b) $(b + a)(b - a)$ c) $(2m + 5n)(2m - 5n)$
d) $(R_1 + R_2)(R_1 - R_2)$ e) $(y + x)(y - x)$
f) $(0{,}1u + 3v)(0{,}1u - 3v)$ g) $(\sqrt{3}s + 6t)(\sqrt{3}s - 6t)$
h) $(\frac{2}{3}a + 1{,}2b)(\frac{2}{3}a - 1{,}2b)$

4. a) $(s + t)^2$ b) $(x + 2)^2$ c) $(x - \frac{3}{2})^2$ d) $(s - \frac{1}{2})^2$
g) $(2a - b)^2$ i) $(u - 10)^2$ o) $(f + g)^2$
e), f), h), k), l), m) und n) nicht möglich

5. a) z. B. $(0 + 0)^2 = 0^2 + 0^2$; $(7 + 0)^2 = 7^2 + 0^2$
b) z. B. $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$; $[2 + (-2)]^2 \neq 2^2 + (-2)^2$

6. a) $97^2 = (100 - 3)^2 = 10\,000 - 600 + 9 = 9\,409$
b) $52^2 = (50 + 2)^2 = 2\,500 + 200 + 4 = 2\,704$
c) $104 \cdot 96 = (100 + 4) \cdot (100 - 4) = 10\,000 - 16 = 9\,984$
d) $98 \cdot 102 = (100 - 2) \cdot (100 + 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$

7. Der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge a setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten $(a - b)^2$ und b^2 zweier Quadrate und den Flächeninhalten $(a - b) \cdot b$ und $(a - b) \cdot b$ zweier Rechtecke:
$a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2 \cdot b \cdot (a - b)$.
Hieraus folgt:
$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a - b + 2b) = (a - b)\,(a + b)$.

8. a) $(a + b)^2$
b) Nach dem Satz des Pytagoras besitzt eine Seite die Länge $\sqrt{a^2 + b^2}$; also gilt $A_{Quadrat} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2$.
c) $A_{Dreieck} = \frac{a \cdot b}{2}$
d) $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
e) Für $a = b$ folgt:
Flächeninhalt des äußeren Quadrats: $A_{Quadrat\ 1} = (2a)^2 = 4a^2$;
Flächeninhalt des inneren Quadrats: $A_{Quadrat\ 2} = (\sqrt{a^2 + a^2})^2 = 2a^2$.
$A_{Quadrat\ 1} : A_{Quadrat\ 2} = 2 : 1$

9. a) Man wählt für (1) $c = a$ und $d = b$.
Man wählt für (2) $c = a$ und $d = -b$.

b) $(-a-b)^2 = [(-a)+(-b)]^2 = (-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2=a^2+2ab+b^2$

c) $(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(-a+b)^2 = [(-a)+b]^2 = (-a)^2+2(-a)\cdot b+b^2 = a^2-2ab+b^2$

10. a) $s^2 + 8s + 16 - 16 = (s + 4)^2 - 16$

b) $s^2 + 8s + 5 + 16 - 16 = (s + 4)^2 - 11$

c) $m^2 + 2mn + n^2 - n^2 = (m + n)^2 - n^2$

d) $m^2 + 10mn + 25n^2 - 25n^2 = (m + 5n)^2 - 25n^2$

e) $x^2 + 20x + 100 - 100 = (x + 10)^2 - 100$

f) $x^2 + 20x + 12 + 100 - 100 = (x + 10)^2 - 88$

g) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

h) $x^2 - 6x - 100 + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 109$

11. a) $(y + 1)^2 + 2$ b) $(y + 2)^2 - 1$ c) $(y - 1)^2 + 2$

d) $(y - 2)^2 - 1$ e) $(y + 1)^2 - 4$ f) $(y - 2)^2 - 7$

12. a) $s^2 - 4s = (s - 2)^2 - 4$; kleinster Termwert ist -4 (für $s = 2$).

b) $t^2 + t = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$; kleinster Termwert ist $-\frac{1}{4}$ (für $t = -\frac{1}{2}$).

c) $u^2 + 2u + 100 = (u + 1)^2 + 99$; kleinster Termwert ist 99 (für $u = -1$).

d) $r^2 - 6r - 30 = (r - 3)^2 - 39$; kleinster Termwert ist -39 (für $r = 3$).

13. a) $(m + n)^2 - (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2) = 4mn$

b) $(m + n)^2 + (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2 = 2(m^2+n^2)$

14.* a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

c) $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ d) $u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

15. $a^2 - 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2 \leq A \leq a^2 + 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2$

Lerneinheit A 9: Addition und Subtraktion von Quotienten

● 46 Für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d mit $b = 0$ und $d = 0$ gilt $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

● 47 $\frac{11}{7}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{41}{60}$

● 48 a) $\frac{y}{4x}$ b) $\frac{u + 4v}{3uv}$ c) $\frac{m - n}{m + n}$

● 49

Erweiterungsfaktor	Erweiterter Bruch
$a\ (a \neq 0)$	$\frac{a^2 + a}{ab}$
$4x$	$\frac{100\ x^2y}{68xz}$
$t-1\ (t \neq 1)$	$\frac{(12m+n)(t-1)}{5mn\ (t - 1)}$

● 50

	Bruch	Erweiterungsfaktor	Bruch	Erweiterungsfaktor
a)	$\frac{1}{2a} = \frac{3b}{6ab}$	$3b$	$\frac{1}{6b} = \frac{a}{6ab}$	a
b)	$\frac{1}{24rs^2t} = \frac{3rt^2}{72r^2s^2t^3}$	$3rt^2$	$\frac{7}{36r^2st^3} = \frac{14s}{72r^2s^2t^3}$	$2s$
c)	$\frac{x}{x+y} = \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}$	$x-y$	$\frac{4y}{x - y} = \frac{4y(x+y)}{(x-y)(x+y)}$	$x + y$
d)	$\frac{a}{6(a+b)(a-b)} = \frac{5a(a+b)}{30(a+b)^2(a-b)}$	$5(a+b)$	$\frac{b}{10(a+b)^2} = \frac{3b(a-b)}{30(a+b)^2(a-b)}$	$3(a - b)$

1. a) $\frac{a}{4c}$ b) $\frac{s}{2t}$ c) $\frac{3w}{2z}$ d) $\frac{a^2}{3b^2}$ e) 1 f) $\frac{4}{5(m+n)}$

2. a) 1 und $\frac{4}{a}$ b) $\frac{4}{3}$ und $\frac{12}{x}$ c) $\frac{7}{11}$ und $\frac{7s}{t}$ d) 1 und 1

3. a) $\frac{75ab}{70bc}$ b) $\frac{(a+b)\cdot 5st}{85\ rst}$ c) $\frac{4rm^3n}{60m^2n^2}$

4. a) $\frac{s+r}{s\cdot r}$ b) $\frac{3b+5a}{a+b}$ c) $\frac{m^2+n^2}{nm}$ d) $\frac{y+15}{15xy}$

e) $\frac{c^2-4}{2c}$ f) $\frac{4b-3a}{60a^2b}$ g) $\frac{120ad + 7ac}{112bcd}$ h) $\frac{a-1}{a^2}$

i) $\frac{5xz - 2y^2}{60xyz}$ k) $\frac{a+b^4}{b^2}$ l) $\frac{a-ab^2}{b^2}$

m) $\frac{a+b^2}{b^2}$ n) $\frac{a^2+b^4}{ab^2}$

5. a) $\frac{c-4}{20c}$ b) $\frac{3c-9}{100c}$ c) $\frac{14m+5n}{(m+n)\cdot m}$

d) $\frac{9n-5}{mn}$ e) $\frac{uv-5v^2+15u-15v}{15v}$ f) $\frac{2u^2+2uv-3v^2}{3uv}$

6. a) $\frac{2u-1}{u^2-v^2}$ b) $\frac{a^2bx-ab^2x-a^2by-ab^2y+a^2xy-b^2xy}{(a+b)(a-b)\cdot ab}$

c) $\frac{7y^2-5x^2+3(x+y)}{xy\cdot(x+y)}$ d) $\frac{-20v^3-5v^2+41v-100u+20}{(4v+5)\cdot 40v}$

7. a) $1 = 1$; wahr b) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$; wahr

c) $-z = -z$; wahr d) $s = s$; wahr

Lerneinheit A 10: Multiplikation und Division von Quotienten

● 51 Für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d ($b \neq 0$; $c \neq 0$; $d \neq 0$) gilt: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

● 52 $\frac{32}{45}$ und $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{6}$ und $\frac{32}{75}$

● 53 $\frac{t}{s}$; $\frac{9}{7}$; f; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{c}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{a+b}{a-b}$

● 54 a) $y \neq 0$; $z \neq 0$; $\frac{4x^2}{z}$ b) $m \neq 0$; $\frac{3n^4}{2}$

c) $r \neq 0$; $t \neq 0$; $s \neq 0$; $\frac{16p^2s}{t}$ d) $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$; $\frac{z}{9y^2}$

e) $m \neq 0$; $n \neq 0$; $\frac{2u^2}{75m^2}$ f) $r \neq 0$; $p \neq 0$; $t \neq 0$; $s \neq 0$; $\frac{4}{81r^2s^3t}$

1. a) $\frac{8}{7}$ und $\frac{24}{ab}$ b) $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{2}$

c) $\frac{35}{12}$ und $\frac{7b}{4a}$ d) $\frac{1}{9}$ und $\frac{2}{3b}$

2. a) $\frac{ru}{sv}$ b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{-3m^2p}{7n}$ d) $\frac{y}{x}$

e) $\frac{1}{a^2-b^2}$ f) 1 g) $\frac{y}{5y+2}$ h) $\frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd}$

3. a) $\frac{b}{a}$ b) $\frac{5}{ax}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{abxy}$ e) $-\frac{7}{12}$

f) 8 000 mpf g) $\frac{1}{s^2}$ h) $\frac{250b^2}{a}$ i) $\frac{81a}{128b}$ k) $-\frac{2}{bx}$

4. a) $\frac{c}{b}$ b) $\frac{12mr}{25}$ c) $\frac{y(a+b)}{4x}$ d) $-\frac{6}{s}$

5. a) $-\frac{5m^2+7}{5n}$ b) $-\frac{2v}{u}$ c) $\frac{3}{4}$

6.* a) $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$; wahr b) $\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$; wahr

7.* a) $-a$ b) 8

Lerneinheit A 11: Weitere Beispiele für Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners

● 55 a) $\left.\begin{array}{l} p\ \boxed{x^2}\ \boxed{\div}\ 4\ \boxed{=} \\ p\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{=}\ \boxed{x^2} \end{array}\right\}$ 0,002 5; 13,104 4; 11,868 025

b) $\left.\begin{array}{l} a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{=}\ \boxed{x{\to}M}\ a\ \boxed{-}\ b\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}\ \boxed{=} \\ a\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ b\ \boxed{x^2}\ \boxed{=} \end{array}\right\}$ 5,519 5; -0,093 699

c) $\left.\begin{array}{l} x\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 2\ \boxed{\times}\ x\ \boxed{\times}\ y\ \boxed{+}\ y\ \boxed{x^2}\ \boxed{=} \\ x\ \boxed{+}\ y\ \boxed{=}\ \boxed{x^2} \end{array}\right\}$ 47,059 6; 0,064 009

● 56 <u>1. Term:</u>

a) 4,3 $\boxed{+}$ 7,9 $\boxed{-}$ 3,6 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 2,8 $\boxed{=}$ [24.08]

b) 4,3 $\boxed{\times}$ 2,8 $\boxed{+}$ 7,9 $\boxed{\times}$ 2,8 $\boxed{-}$ 3,6 $\boxed{\times}$ 2,8 $\boxed{=}$ [24.08]

c) Beim Weg b) ist der Rechenaufwand größer.

<u>2. Term:</u>

a) 4,79 $\boxed{+}$ 9,34 $\boxed{=}$ $\boxed{x{\to}M}$ 5,83 $\boxed{-}$ 4,98 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ [12.0105]

b) 4,79 $\boxed{\times}$ 5,83 $\boxed{+}$ 4,79 $\boxed{\times}$ 4,98 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 9,34 $\boxed{\times}$ 5,83 $\boxed{+}$ 9,34 $\boxed{\times}$ 4,98 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ [12.0105]

c) Bei einem Taschenrechner mit einem Speicher, wie ihn der SR1 hat, vereinfacht sich die Berechnung von Termwerten durch Umformen nicht.

● 60 a) $a - \frac{b^2}{c}$ b) $\left(\frac{a \cdot b}{100} + c\right) \cdot a$

c) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ d) $\frac{\sqrt{a-b}}{c+d}$

● 61 Gleichwertige Ablaufpläne sind (1) und (4); (2) und (3); (5) und (6).

2. a) $\pi \boxed{\times} r_1 \boxed{x^2} \boxed{-} \pi \boxed{\times} r_2 \boxed{x^2} \boxed{=}$

b) $\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi$

Ablaufplan: $r_1 \boxed{x^2} \boxed{-} r_2 \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{\times} \pi \boxed{=}$

3. a) (1) ist falsch. b) (1) ist falsch.
c) (1) und (3) sind falsch. d) (1) und (2) sind falsch.

4. Term	Ablaufplan
$2\pi r\cdot(r+h)$	$2 \boxed{\times} \pi \boxed{\times} r \boxed{=} \boxed{x \to M} r \boxed{+} h \boxed{=} \boxed{\times} \boxed{MR} \boxed{=}$
$(r+h)\cdot 2\pi r$	$r \boxed{+} h \boxed{=} \boxed{\times} 2 \boxed{\times} \pi \boxed{\times} r \boxed{=}$
$2\pi r^2+2\pi rh$	$2 \boxed{\times} \pi \boxed{\times} r \boxed{x^2} \boxed{+} 2 \boxed{\times} \pi \boxed{\times} r \boxed{\times} h \boxed{=}$

5. b) 406

c)* $n \boxed{\div} 2 \boxed{\times} \boxed{(} 2 \boxed{\times} a \boxed{+} \boxed{(} n \boxed{-} 1 \boxed{)} \boxed{\times} d \boxed{)} \boxed{=}$

6. a) 3,605 551 3

b) Mit dem SR1 berechnet ergibt $3{,}605\ 551\ 3^2 = 13$. Die Differenz ist folglich kleiner als 0,000 000 05.

c) Beginnt man z. B. mit $x_1 = 33$, so ergibt sich $x_2 = 31{,}651\ 515$ und $x_3 = 31{,}622\ 79$ mit $|1\ 000 - x_3^2| < 0{,}001$.

Lerneinheit A 12: Zur Wiederholung

1. 3^3; $(-5)^2$; 19^1; $1{,}7^4$; c^3; d^1; $(a-b)^2$; $(\frac{2}{3})^5$; $(2x + 7)^2$

2. $2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5$; $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$;
$(-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$; $(a+1) \cdot (a+1)$

3. a^n ist das Produkt aus n gleichen Faktoren a ($n \geqq 2$).
$a^1 = a$

4. $(-2)^4 = 16$; $(-1)^4 = 1$; $0^4 = 0$; $1^4 = 1$; $2^4 = 16$

5. n = 3; 2; 4; 1

6. 2 und -2

7. a) 2^3 b) $(\frac{1}{2})^5$ c) $(\frac{1}{2})^3$

8. $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

9. Für alle $a \in R$ gilt: $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a \cdot a = a^2$.

10. $25x^2 + 20x + 4$; $4x^2 - 4x + 1$; $1 - 2x + x^2$

11. a - b und b - a

12. $a^3 = 175{,}616$ Ablaufplan: $a^2 \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{y^x} 3 \boxed{=}$

13. $a^2 = \frac{1}{4}$

Lerneinheit A 13: Potenzen mit natürlichen Exponenten n ($n \geqq 1$)

● 63 Für $m \leqq n$ entstehen Terme, die noch nicht definiert sind.

● 64 (1): Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

(3): Potenzen mit gleichen, von Null verschiedenen Basen werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert. Dabei muß der Exponent des Dividenden größer sein als der Exponent des Divisors.

(4): Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert. Dabei muß die Basis des Divisors von Null verschieden sein.
Ein Quotient wird potenziert, indem man sowohl den Dividenden als auch den Quotienten potenziert.

(5): Eine Potenz wird potenziert, indem man ihre Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.
In der Potenz einer Potenz dürfen die Exponenten vertauscht werden.

1. a) positiv (Exponent ist eine gerade **Zahl.**)
b) negativ (Exponent ist eine ungerade Zahl.)
c) negativ (Entgegengesetztes einer positiven Zahl; vgl. a))
d) positiv (Entgegengesetztes einer negativen Zahl; vgl. b))

2. a) 81,299 b) 0,362 467 c) 12 155,1
d) - 132,651 e) 1,749 01
(Diese Werte wurden unter Verwendung der Taste $\boxed{y^x}$ berechnet.)

3. a) $2 \boxed{y^x} 4 \boxed{+} 3 \boxed{y^x} 3 \boxed{-} 4 \boxed{x^2} \boxed{+} 5 \boxed{x^2} \boxed{=} \boxed{52.}$

b) 2 $\boxed{y^x}$ 6 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 4 $\boxed{=}$ [65536.]

bzw. nach Termumformung: 2 $\boxed{y^x}$ 16 $\boxed{=}$ [65536.]

c) 3 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 2,4 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ [56.76]

d) 2,5 $\boxed{-}$ 1,62 $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ 4 $\boxed{\times}$ 2,31 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ [7.3920804]

e) 2,1 $\boxed{\times}$ 1,2 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{y^x}$ 4 $\boxed{=}$ [330.3504]

f) 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ [-72.]

g) 3 $\boxed{y^x}$ 4 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ [290.]

h) 3 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{-}$ 2,6 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ [145.24]

4. a) $4^8 = 65\,536$ b) $(-2)^7 = -128$ c) $81 \cdot 64 = 5\,184$
d) a^6 e) x^9 f) $\frac{20}{21} b^5$
g) x^7 h) $-x^7$ i) $\frac{3}{8} a^5 b^8 c^3$

5. a) m^8 b) y^{10} c) $\frac{3}{28} v^8$ d) $-x^7$ e) $595{,}852\ a^5 b^4$

6. a) $(x-1)^5$ b) a^2 c) $5^4 = 625$ d) $\frac{1}{3} x^2$
e) $-x^3$ f) $-x^3$ g) x^4 h) x^3

7. a) $(a - b)^6 c^{12}$ b) $\frac{1}{3} m^3$ c) b^{14}

8. a) a^{3m} b) x^{m-2} c) 5^{5k+1}

9. a) $(xyz)^2$ b) $[ab\,(c+d)]^4$ c) $(\frac{mk}{l})^2$ d) $\left[\frac{(a-b)(a-1)}{a+b}\right]^5$

10. a) $(abc)^3$ b) $(\frac{m}{n})^5$ c) $(\frac{r-s}{k+s})^4$ d) $(x^2 - y^2)^3$

11. a) m^8 b) $0{,}027\ m^{15}$ c) $\frac{125}{216} \frac{x^9}{y^6}$
d) $\frac{1}{4} p^8$ e) $\frac{16\ a^4}{49\ b^6}$

12. a) $3^7 = 3^{m+2}$; $7 = m + 2$; $m = 5$; $L = \{5\}$
b) $a^{n+4} = a^{10}$; $n + 4 = 10$; $n = 6$; $L = \{6\}$
c) $2^{n+m} = 2^4$; $n + m = 4$; $L = \{(1;3), (2;2), (3;1)\}$
d) $3^{2n} = 3^8$; $2n = 8$; $n = 4$; $L = \{4\}$

13. a) $(\frac{1}{6})^3$ b) $(2a^3b^3)^3$ c) $(\frac{2}{3} p^2q^5)^5$

14. a) $(\frac{3}{2})^2$ b) $(\frac{1}{2} b^3)^4$ c) $(225\ p^3)^3$

15. a) wahr (Man erhält die Beziehung durch Anwenden der Potenzgesetze; vgl. "Ausgewählte Lösungen" im Lehrbuch.)

b) wahr (z. B. $2^1 + 2^1 = (2 + 2)^1$)
c) falsch (z. B. $2^2 + 2^2 \neq (2 + 2)^2$)
d) falsch (z. B. $2^1 \cdot 3^2 \neq 2^2 \cdot 3^1$)
e) falsch (Für alle solche Zahlen gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Potenzgesetz).)

Lerneinheit A 14: Wurzeln

● 65 a) 6 b) 3 c) 2 d) 10

● 66 Es sei b eine nichtnegative reelle Zahl. Unter $\sqrt[3]{b}$ versteht man diejenige nichtnegative reelle Zahl a, für die $a^3 = b$ gilt.
$\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

● 67 $\sqrt[6]{64} = 2$, denn $64 \geqq 0$, $2^6 = 64$, $2 \geqq 0$.
$\sqrt[8]{0} = 0$, denn $0 \geqq 0$, $0^8 = 0$, $0 \geqq 0$.
$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$, denn $\frac{1}{81} \geqq 0$, $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$, $\frac{1}{3} \geqq 0$.

● 68 $\sqrt[3]{4^3} = 4$; $\sqrt[4]{2^4} = 2$; $\sqrt[5]{(\frac{1}{2})^5} = \frac{1}{2}$
Es gilt jeweils $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(a \geqq 0)$.

1. 9; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$

2.

	a	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$
a)	12,3	3,51	2,31
b)	7 850	88,6	19,9
c)	0,342	0,585	0,699
d)	1,25	1,12	1,08
e)	0,001 67	0,040 9	0,119

3. a) 7 b) 3,2 c) a^2 d) -5 e) 2

4. a) $b \geqq 0$ b) $a \leqq 0$ c) $x > 0$, $m \in N$, $m \geqq 2$ d) $a \leqq 1$
e) keine Einschränkungen

Lerneinheit A 15: Erweiterung des Potenzbegriffs

● 69 $7^0 = 1$; $(-4)^0 = 1$; $11^{-5} = \frac{1}{11^5}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2}$

● 70 a) $\frac{1}{10^3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ d) 2^2 e) 2^2

● 71 a) 5^{-2} b) 2^{-6} c) 10^{-4} d) 3^{-1} e) 12^{-2} f) 30^{-2}

● 72 $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; $0,5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}$; $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$

● 73 4; 5; $\frac{1}{5}$; 2; 4

● 74 Der Ablaufplan entspricht dem Term $23^{\frac{1}{7}}$, und es ist

$23^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{23}$.

1. a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) 8 f) 625

2. a) $\frac{1}{5^6}$ b) $\frac{1}{x^4}$ c) $\frac{1}{15^c}$ d) 6^2 e) x^k

   f) $(-10)^3$ g) $\frac{a^4}{b^3}$ h) $\frac{n^6}{m^3}$ i) x^8y^2 k) $\frac{16^4}{2^6} = 2^{10}$

3. a) $\frac{1}{4^3}$ b) $\frac{1}{(-b)^2} = \frac{1}{b^2}$ c) a^6 d) $\frac{1}{a^5}$

   e) $(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{5^3}$ f) 2^3 g) $\frac{1}{x^4y^4}$

4. a) 5^{-1} b) 2^{-3} c) 10^{-3} d) 3^{-4} e) 2^{-10} f) 10^{-6}

5. a) 15,625 b) 15,625 Es ist $\frac{1}{0,4^3} = 0,4^{-3}$.

6. Nein. Gegenbeispiele: $2^4 = (-2)^4$, $2^4 = 4^2$

7. a) $1\ g \cdot cm^{-3}$; Dichte b) $1\ m \cdot s^{-1}$; Geschwindigkeit

   c) $1\ N \cdot m^{-2}$; Druck d) $1\ m \cdot s^{-2}$; Beschleunigung

   e) $1\ \Omega\ mm^2 \cdot m^{-1}$; spez. Widerstand f) $1\ N \cdot m \cdot s^{-1}$; Leistung

   g) $1\ kg \cdot m \cdot s^{-2}$; Kraft h) $1\ km \cdot h^{-1}$; Geschwindigkeit

8. a) $\frac{1}{5^6}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $\frac{25}{16}a^6$ d) $\frac{1}{n^{12}v^6}$ e) $\frac{a+b}{a-b}$

9. a) $5^{\frac{1}{3}}$ b) $10^{\frac{1}{2}}$ c) $4^{\frac{2}{3}}$ d) $11^{-\frac{3}{2}}$ e) $(\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$ f) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

   g) $(\frac{5}{6})^{\frac{4}{3}}$ h) $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$ i) $6^{\frac{2}{3}}$ k) $32^{-\frac{3}{2}}$ l) $7^{\frac{1}{3}}$ m) $8^{\frac{1}{2}}$

10. a) 1,782 6 b) 2,449 49 c) 0,707 107

    d) 0,385 129 e) 3,615 74

11. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{6^2}$ c) $\sqrt{\frac{1}{13}}$ d) $\sqrt[4]{(\frac{7}{8})^3}$

    e) $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ f) $\sqrt{7}$ g) $\sqrt[3]{\frac{1}{21}}$ h) $\sqrt{\frac{8}{5}}$

Lerneinheit A 16: Verallgemeinerung der Potenzgesetze

● 75 **Voraussetzung:** $a, b \in R$; $a \neq 0$; $b \neq 0$

Behauptung: $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$

Beweis: $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$

$(a \cdot b)^0 = 1 \quad (a \cdot b \neq 0)$

$a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$, w. z. b. w.

● 76 **Vorüberlegung:**

$(3^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{5}})^5 = (\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{7^2})^5 = (\sqrt[5]{3^2})^5 \cdot (\sqrt[5]{7^2})^5 = 3^2 \cdot 7^2$

$\left[(3 \cdot 7)^{\frac{2}{5}}\right]^5 = \left[\sqrt[5]{(3 \cdot 7)^2}\right]^5 = (3 \cdot 7)^2$

Beweis:

$3^2 \cdot 7^2 = (3 \cdot 7)^2$	(Potenzgesetz)
$(\sqrt[5]{3^2})^5 \cdot (\sqrt[5]{7^2})^5 = \left[\sqrt[5]{(3 \cdot 7)^2}\right]^5$	(nach Definition)
$(\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{7^2})^5 = \left[\sqrt[5]{(3 \cdot 7)^2}\right]^5$	(Potenzgesetz: natürliche Exponenten)
$\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{3 \cdot 7^2}$	
$3^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = (3 \cdot 7)^{\frac{2}{5}}$, w. z. b. w.	(nach Definition)

● 77 a) u^{-8} b) z^{m-n} c) x^{-7} d) a^n e) $(\frac{x}{y})^{-2}$ f) $(u \cdot v)^3$

1. a) 1 b) a c) x d) $0,03\ xy^4$ e) $\frac{9b}{5a^2}$

2. a) $-\frac{1}{16}$ b) $0{,}4\,q^{-8}$ c) $\frac{1}{ab^{3n}c}$ d) x^{-8}

3. a) $\frac{a \cdot b^{k+1}}{c}$ b) $\frac{9}{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x} - 4$

4. a) $-\frac{1}{125}$ b) $\frac{1}{a^4}$ c) $\frac{1}{3p^2}$ d) $\frac{r^{6n}}{q^2}$ e) 2^{8-2a+c}

5. a) $\frac{1}{81}$ b) $\frac{10}{x^2}$ c) $\frac{1}{a^{10}}$ d) $\frac{r^{12}}{s^9 t^3}$ e) $\frac{1}{(a-b)^2}$

6. $R = 0{,}015\,5\ \Omega \cdot mm^2 \cdot m^{-1} \cdot \frac{300\ m}{12\ mm^2} = 0{,}39\ \Omega$ $\boxed{0.3875}$

7. a) $3^3 = 3^{6+n};\ 3 = 6 + n;\ n = -3;\ L = \{-3\}$
b) $a^{n+10} = a^5;\ n + 10 = 5;\ n = -5;\ L = \{-5\}$
c) $5^{7+n} = 5^3;\ 7 + n = 3;\ n = -4;\ L = \{-4\}$
d) $3^{3n} = 3^3;\ 3n = 3;\ n = 1;\ L = \{1\}$

8. a) 9 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{9}$ d) n^6
e) 6 f) 7 g) $\frac{1}{4}$ h) $a^{-\frac{5}{7}}$

9. a) $6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$ b) nicht definiert c) $(\frac{5}{17})^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\frac{25}{289}}$
d) $30^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$ e) $(\frac{1}{3})^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ f) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

10. a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ b) $9^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{9^6} = 9 \cdot \sqrt[5]{9}$ c) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
d) $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{49}$ e) $3^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{27}$ f) n^3

11. a) $11\sqrt{3}$ b) $5\sqrt[3]{9}$ c) $(10 - a)\sqrt{2}$

12. a) $4\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{51}$ c) u d) $a^2\,x^2$
e) 3 f) $\sqrt[3]{5}$ g) 5 h) $6\sqrt{2}$
i) x^2 k) b l) 2 m) $\frac{3}{\sqrt{40}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$

13. a) 20 b) $\frac{\sqrt[3]{40}}{100}$ c) $3x\sqrt[3]{3}$ d) $3\sqrt[3]{6}$

e) $\left|\frac{a}{b}\right| \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}$ f) $\frac{1}{700}$ g) $15\,a|b|\sqrt{a}$ h) $\frac{2}{3}|b|\sqrt[3]{\frac{2|b|}{cd}}$
falls $x:y \geq 0$; falls $a \geq 0$ falls $cd > 0$
$y \neq 0,\ b \neq 0$

14.* a) $2\sqrt{2}$ b) $-3\sqrt{2}$ c) $6 + 2\sqrt{2}$ d) $35\sqrt{2} - 52$

15. a) 5 b) 3 c) 9 d) $a^{14}b^{12}$
e) 16 f) 9 g) 5

16. a) $\sqrt[4]{6}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[4]{3}$ d) 3 e) $\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2}$

17. a) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ b) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ d) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt{15}$

Lerneinheit A 17: Darstellung von Zahlen mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen

● 78 a) 0,571 42 b) 0,052 631 c) 2 280 000 000
d) 0,020 685 e) 0,000 151 29 f) 0,000 056 088
g) 450 850 000

● 79 d) $2{,}068\,5 \cdot 10^{-2}$ e) $1{,}512\,9 \cdot 10^{-4}$
f) $5{,}608\,8 \cdot 10^{-5}$ g) $4{,}508\,5 \cdot 10^{8}$

● 80 b) 0,052 631 579 d) 0,020 685 01 g) 450 850 740

● 81 a) $9{,}999\,999\,9 \cdot 10^{99}$ b) $-9{,}999\,999\,9 \cdot 10^{99}$
c) $1 \cdot 10^{-99}$ d) $-1 \cdot 10^{-99}$

● 82 $\boxed{E\quad 0.}$ wird bei c), e), f) und h) angezeigt.

Begründung:
c) $5 \cdot 10^{99} \cdot 2 = 10^{100} > 9{,}999\,999\,9 \cdot 10^{99}$
e) $(4{,}1 \cdot 10^{50})^2 = 4{,}1^2 \cdot 10^{100} > 9{,}999\,999\,9 \cdot 10^{99}$
f) $\frac{1}{7 \cdot 10^{99}} = \frac{1}{7} \cdot 10^{-99} < 1 \cdot 10^{-99}$
h) $(1 \cdot 10^{-97}) : 500 = 1 \cdot 10^{-97} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-99} < 1 \cdot 10^{-99}$

● 83

	$1/x$	$\sqrt{x}$	x^2
größte positive Zahl	$1\cdot10^{99}$	$9{,}999\,999\,9\cdot10^{99}$	$9{,}999\,999\,9\cdot10^{49}$
kleinste positive Zahl	$1\cdot10^{-99}$	$1\cdot10^{-99}$	$1\cdot10^{-49}$
größte negative Zahl	$-1\cdot10^{-99}$	——	$-1\cdot10^{-49}$
kleinste negative Zahl	$-1\cdot10^{99}$	——	$-9{,}999\,999\,9\cdot10^{49}$

● 85

b)			$3{,}75 \leqq x \leqq 3{,}85$
c)		3	$0{,}802\,5 \leqq x \leqq 0{,}803\,5$
d)	0,007	1	
e)		2	
f)			$2{,}495 \leqq x \leqq 2{,}505$
h)		2	
i)			$399{,}5 \leqq x \leqq 400{,}5$

● 86

k)	$7{,}4\cdot10^{3}$	2	$7\,350 \leqq x \leqq 7\,450$
l)	$7{,}400\cdot10^{3}$	4	$7\,399{,}5 \leqq x \leqq 7\,400{,}5$
m)	$8{,}0\cdot10^{-4}$	2	$0{,}000\,795 \leqq x \leqq 0{,}000\,805$
n)	$2\cdot10^{1}$	1	$15 \leqq x \leqq 25$

1. a) $6{,}024\cdot10^{23}$ Moleküle b) $2{,}988\cdot10^{-23}$ g
c) $1{,}602\cdot10^{-19}$ C d) $1{,}495\cdot10^{11}$ m

2. a) 1Mt b) 1 kt c) 1 dt d) 1 mA
e) 1 km f) 1 mg g) 1 hPa

3. a) 700 000 b) 0,005 c) 98 340 000
d) 60 000 e) 84,2 f) 0,046
g) 0,000 343 h) 64 200 000 i) 0,000 083
k) 3 200 000

4. a) $2{,}421\cdot10^{3}$ b) $3{,}504\cdot10^{7}$ c) $2{,}38\cdot10^{-1}$
d) $4{,}8\cdot10^{-5}$ e) $4\cdot10^{2}$ f) $-2{,}341\cdot10^{1}$
g) $-5\cdot10^{-5}$ h) $1\cdot10^{-3}$ i) $2{,}05\cdot10^{-2}$
k) $3{,}416\,5\cdot10^{4}$

5. a) 10^{-9} F b) 10^{-6} F c) 10^{3} m d) 10^{-1} m e) 10^{-2} m
f) 10^{-3} m g) 10^{-6} m h) 10^{-9} m i) 10^{9} W k) 10^{6} W
l) 10^{3} W m) 10^{6} V n) 10^{-3} V o) 10^{3} t p) 10^{6} t

6. Die Lösung hängt vom konkreten Klassenzimmer ab.
Zum Vergleich: Die Luft in einem Zimmer mit den Maßen 8,0 m x 5,0 m x 3,5 m hat eine Masse von etwa 180 kg.

7. a) $1{,}41\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ b) $3{,}34\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ c) $5{,}52\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$

8. a) $42\,760\,000 \approx 4{,}28\cdot10^{7} \approx 4{,}3\cdot10^{7} \approx 4\cdot10^{7}$
b) $538\,000\,000 = 5{,}38\cdot10^{7} \approx 5{,}4\cdot10^{7} \approx 5\cdot10^{7}$
c) $9\,378\,000\,000 \approx 9{,}38\cdot10^{9} \approx 9{,}4\cdot10^{9} \approx 9\cdot10^{9}$
d) $35\,790 \approx 3{,}58\cdot10^{4} \approx 3{,}6\cdot10^{4} \approx 4\cdot10^{4}$
e) $897\,000 = 8{,}97\cdot10^{5} \approx 9{,}0\cdot10^{5} \approx 9\cdot10^{5}$

9. z. B. 1 km $= 10^{3}$ m ; 1 pm $= 10^{-12}$ m;
1 km$^2 = 10^{6}$ m^2 ; 1 cm$^2 = 10^{-2}$ dm^2;
1 km$^3 = 10^{9}$ m^3 ; 1 mm$^3 = 10^{-9}$ m^3

Lerneinheit A 18: Das Dezimalsystem und andere Positionssysteme

● 87 a) Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 2 entweder den Rest 0 oder den Rest 1.
b) 0 und 1

● 88

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 7 \\ \hline 20 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{2{,}5\cdot 5} \\ 12{,}5 \\ \hline\hline \end{array}$$

1. a) 50 240 b) 703,409 01 c) 451 000 000
d) 900 000,000 04 e) 0,000 003 18 f) 2,000 000 001

2. a) 21 b) 28 c) 3,75
d) 2,25 e) 73 f) 7,75

3.* a) LLOOOO = 48 b) LOOLOOL = 73
c) LOLOLLO = 86 d) LOLOLOOL = 169
e) LLOOOOOLLO = 774 f) LOOLLLLLOLLO = 2 550

Lerneinheit A 19: Der Logarithmus

● 89

z	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt[3]{10}$	$\sqrt{10}$	10	100	1 000
x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

B Ungleichungen und Gleichungssysteme

Lerneinheit B 1: Zur Wiederholung

● 1

	ohne Variable: wahre Aussagen	ohne Variable: falsche Aussagen	Mit genau einer Variablen	Mit mehr als einer Variablen
Gleichungen	$127^0-1=0$	$\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=1$ $(-3):(-\frac{1}{3})=1$	$x^2=7$ $4x+3=7x-5$ $(x-1)(x+1)=0$ $x^2-5x+6=0$	$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$ $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}$ $a^2+b^2=c^2$
Ungleichungen	$1\cdot2\cdot3<(\frac{3+1}{2})^3$ $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$	$\pi<3{,}14$ $3<-10\,000$	$(1+n)^2>n^2$ $\|x\|>4$ $4(z-3)+6>2z+1$	$a+b>c$ $y>x+2$ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>1$

● 3 $3^2-9=0$; wahr

$(-3)^2-9=0$; wahr

$|4{,}99-1|<4$; wahr

$2+(-18)=16$; falsch

$8+8=16$; wahr

$0>1+2\cdot(-1)$; wahr

$9^2-9=0$; falsch

$|5{,}01-1|<4$; falsch

$|-99-1|<4$; falsch

$7{,}01+8{,}9=16$; falsch

$0>1+2\cdot1$; falsch

$0>-1+2\cdot1$; falsch

● 4 a) "Gleichwertige Aussagen" sind (1), (2), (4) und (5).
b) wie bei a)

● 5 a)

Gleichungen	Lösungsmenge bez. des Variablengrundbereiches: N	Z	Q_+	Q	R
$4x+1=-9$	$L=\emptyset$	$L=\emptyset$	$L=\emptyset$	$L=\{-\frac{5}{2}\}$	$L=\{-\frac{5}{2}\}$
$y^2=2$	$L=\emptyset$	$L=\emptyset$	$L=\emptyset$	$L=\emptyset$	$L=\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$
$\|y\|=3$	$L=\{3\}$	$L=\{3;-3\}$	$L=\{3\}$	$L=\{3;-3\}$	$L=\{3;-3\}$
$2a=a+a$	$L=N$	$L=Z$	$L=Q_+$	$L=Q$	$L=R$

Ungleichungen	Lösungsmenge bez. des Variablengrundbereiches: N	Z	R
$x+1<4$	$L=\{0;1;2\}$	$L=\{2;1;0;-1;-2;-3;\ldots\}$	Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als 3 sind
$\|x\|<3$	$L=\{0;1;2\}$	$L=\{-2;-1;0;1;2\}$	Menge aller reellen Zahlen, die zwischen -3 und 3 liegen
$2x<x$	$L=\emptyset$	$L=\{-1;-2;-3;\ldots\}$	Menge aller negativen reellen Zahlen

● 6 a) $L=\{0;1;2;3;4\}$ b) $L=\{0;1;2;3;4\}$
c) $L=\{1;2;3\}$ d) $L=\{2;3;4\}$
e) $L=\{0;1;2;3;4;5\}$ f) $L=\{1;2;3;\ldots\}$

1. 0 und -7 erfüllen $x(x+7)=0$.
2; $\frac{1}{2}$; 7 und 0 erfüllen $2x+1>-1$.

2. 1; 2; 3 und 4

3. 2; 3 und 4 erfüllen die Ungleichung; keine Lösungen sind z. B. 1; 5; 6.

4. z. B. 3,2

5. $L=\{0;1;2;3\}$

6. Zu L_1 gehören 4 und -4. Zu L_2 gehören 0; -3; -4; - 1000; π; $\sqrt{2}$; 3,99; 2^{-3}.

7. a) $L = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
b) $L = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 98; 99\}$ c) $L = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
d) $L = \emptyset$ e) $L = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$
f) L besteht aus allen gebrochenen Zahlen, die größer als 0 und kleiner als 1 sind.
g) L besteht aus allen rationalen Zahlen z mit $0 < z \leqq 1$.
h) $L = \emptyset$ i) $L = \{1\}$

8. z. B. $x < 1\,000$

9. L ist die Menge aller reellen Zahlen, die sowohl größer als 3 als auch kleiner als 9 sind.

10. $x^2 > x$ erfüllen z. B. 2; 3 und 4.
(relle Zahlen x mit $x < 0$ oder $x > 1$)
$x > x^2$ erfüllen z. B. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$.
(relle Zahlen x mit $0 < x < 1$)

11. z. B. -3; 3 und 5 (alle ganzen Zahlen außer 0; 1; 2)

12.* z. B. (-1; -1); (2; -3); (-5; 1)

13.* $L = \{(0;0); (0;1); (0;2); (1;0); (1;1); (2;0)\}$

14.* Die Punkte, welche den geordneten Paaren zugeordnet werden können, die $y > x + 1$ erfüllen, liegen "oberhalb" der durch $y = x + 1$ bestimmten Geraden g.

Lerneinheit B 2: Äquivalente Gleichungen - äquivalente Ungleichungen

● 7 Die Lösungsmengen L_1, L_2, L_3 und L_4 der vier Gleichungen stimmen überein: $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = \{1\}$.

● 8 a) $x^2 - 16 = 0$ ist äquivalent zu $|x| = 4$.
$x + 1 = 9 - x$ ist äquivalent zu $8 - 2x = 0$.
b) Nur bei der letztgenannten Umformung entsteht keine zu $3x = 6$ äquivalente Gleichung.

● 9 $2x < 6$ ist äquivalent zu $x + 1 < 4$; keine dieser Ungleichungen ist äquivalent zu $x - 2 < 0$.

● 10 $L = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $3x < 15$ ist äquivalent z. B. zu $x < 5$ ($x \in N$) und zu $x + 1 < 6$ ($x \in N$); $3x < 15$ ist nicht äquivalent z. B. zu $3x > 15$ ($x \in N$) und zu $2x < 20$ ($x \in N$).

1. $x < 2$ ist bez. N äquivalent zu $x + 3 < 2 + 3$.

2. Z. B. gehört 0 zur Lösungsmenge von $x + 1 > 0$, nicht aber zur Lösungsmenge von $2x > 1$.

3. $4y > 2$ ist äquivalent z. B. zu $2y > 1$.
$z + 1 > 5$ ist äquivalent z. B. zu $z > 4$.

4. $L = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ist sowohl Lösungsmenge von $x < 5$ ($x \in N$) als auch Lösungsmenge von $x + 2 < 7$ ($x \in N$). Die beiden Ungleichungen sind äquivalent.

5. a) ja b) nein c) nein 6. z. B. $x > 1$ ($x \in N$)

7. a) N bzw. Q_+ b) N bzw. Z c) Q bzw. R

8.* a) ja b) ja
(Begründung: Aus $L_1 = L_2$ und $L_2 = L_3$ folgt $L_1 = L_3$.)

Lerneinheit B 3: Umformungsregeln für Ungleichungen

● 11
$$\begin{aligned} 2\left(x + \tfrac{1}{2} - 2x\right) &= 20 + x - 1 \\ 2x + 1 - 4x &= 19 + x \quad &|- 1 - x \\ -3x &= 18 \quad &|: (-3) \\ x &= -6 \end{aligned}$$
$L = \{-6\}$

● 12 Die letzte Umformung ist falsch. Richtig: $-2x < -14 \;|: (-2)$
$x > 7$

● 13 a) $x < 5$ und $5 > x$; $x > 5$ und $5 < x$
$x > -3$ und $-3 < x$; $-3 > x$ und $x < -3$
b) $2y < 8$ und $8 > 2y$; $8 < 2y$ und $2y > 8$
c) **Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:**
Wenn $a < b$, so $b > a$.

● 14 a) Alle Ausgangsgleichungen sind wahre Aussagen.
Addiert man auf beiden Seiten einer solchen Ungleichung die gleiche reelle Zahl, so sind die entstehenden Ungleichungen wieder wahre Aussagen.

b) Ist eine reelle Zahl a kleiner als eine reelle Zahl b, so ist auch die Summe $a + c$ kleiner als die Summe $b + c$. Für alle a, b, $c \in R$ gilt: Wenn $a > b$, so $a + c > b + c$.

● 15 a) Addition von 1   b) Subtraktion von n
c) Addition von $3z - 1$
Die beiden Ungleichungen sind jeweils einander äquivalent.

● 16 $x > 1$ und $x + 1 > 2$ und $-x > 1 - 2x$ haben die gleiche Lösungsmenge. $4x + 1 > 9$ und $4x > 8$ und $x + 2 > 10 - 3x$ haben die gleiche Lösungsmenge.

● 17 $-6 < -9$ und $-200 < -300$ sind falsche Aussagen.
Bei Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl muß das Ungleichheitszeichen "umgekehrt" werden.

● 18 a) Ist eine reelle Zahl a kleiner als eine reelle Zahl b und werden diese beiden Zahlen mit einem <u>positiven</u> Faktor c multipliziert, so ist stets das Produkt $a \cdot c$ kleiner als das Produkt $b \cdot c$.
Werden die beiden Zahlen a und b aber mit einem <u>negativen</u> Faktor c multipliziert, so ist das Produkt $a \cdot c$ stets größer als das Produkt $b \cdot c$.
b) Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:
(1) Wenn $a > b$ und $c > 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
(2) Wenn $a > c$ und $c < 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$.

● 19 (1) Wenn $a > b$ und $c > 0$, so $a : c > b : c$.
(2) Wenn $a > b$ und $c < 0$, so $a : c < b : c$.

● 20 $-4x > 16$ und $-x > 4$; $x > -4$ und $-x < 4$;
$-\frac{1}{4}x > 16$ und $\frac{1}{4}x < -16$; $-\frac{1}{4}x < 16$ und $\frac{1}{4}x > -16$

● 21 $3x + 1{,}5 < x + 1$ geht aus $\frac{6\,(x + 0{,}5)}{2} < 2x + 1 - x$ durch Umformen der Terme auf beiden Seiten der Ungleichung hervor.

● 23
$3x + 4 > 5x$	
$3x > 5x - 4$	Subtraktion von 4 auf beiden Seiten
$3x - 5x > -4$	Subtraktion von 5x auf beiden Seiten
$-2x > -4$	Zusammenfassen auf der linken Seite
$x < 2$	Division durch -2 auf beiden Seiten; "Umkehren" des Ungleichheitszeichens

1. a) $x = 1$ b) $x = \frac{1}{6}$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ e) $x = 10$

2. a) $x < 12$ b) $x > 25$ c) $x < 49$ d) $x > 1$
e) $x > -\frac{5}{23}$ f) $x < -18$ g) $-4 < x$ h) $2x < -1{,}3$

3. a) Division durch 2   b) Vertauschen der Seiten
c) Subtraktion von 22   d) Division durch -4
e) Subtraktion von x   f) Termumformungen
g) Multiplikation mit 4   h) Multiplikation mit -3

4. Vertauschen der Seiten;
Addition von $-2y + 7$;
Division durch -4;
Ausmultiplizieren einer Klammer;
Subtraktion von 2 und (dann) Multiplikation mit -10;
Multiplikation mit 3 und (dann) Ausmultiplizieren einer Klammer

5. Klaus hat äquivalent umgeformt.

6. (1) und (3) sind wahre Aussagen; (2) und (4) sind falsche Aussagen.

7.* für $x > 0$: $1 > x$
Die Lösungsmenge L_1 besteht aus allen reellen Zahlen zwischen 0 und 1.
für $x < 0$: $1 < x$
Die Lösungsmenge L_2 ist leer.
Die Lösungsmenge L der Ungleichung stimmt mit L_1 überein.

8.* a) a; a^2; a^3 b) a^3; a^2; a c) a; a^3; a^2 d) a^3; a; a^2

Lerneinheit B 4: Lösen linearer Ungleichungen mit einer Variablen

● 24 a) $3x + 6 > 0$ b) $3x + 9 > 0$ c) $3x - 8 < 0$

● 25 $x < -3$ <u>Probe:</u> $2\,(-3) + 4 = 3\,(-3) + 7$ (wahr)
z. B. für $x = -4$ gilt $2\,(-4) + 4 > 3(-4) + 7$

● 26 $L = \emptyset$

● 27 Die Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen x mit $0 < x < \frac{1}{2}$.

● 28 Die Lösungsmenge besteht
aus allen reellen Zahlen, falls $a = 1$;
aus allen reellen Zahlen, die kleiner sind als $\frac{1}{a-1}$, falls $a > 1$;
aus allen reellen Zahlen, die größer sind als $\frac{1}{a-1}$, falls $a < 1$.

1. a) $x > 2$ b) $y > -0{,}5$ c) $z > 4$ d) $u > 1{,}8$
 e) $x < 15$ f) $y > -1$ g) $z < 7$ h) $u < -2$

2. a) $x < \frac{1}{4}$ b) $x > 5$ c) $u > -1$ d) $v < 2$
 e) $y < 6$ f) $z < -10$ g) $x < 15$ h) $x < \frac{5}{2}$
 i) $x > \frac{17}{4}$ k) $z > \frac{120}{19}$ l) $u < -\frac{21}{13}$ m) $k > 10$

3. a) $x < 6$ b) $y > 2$ c) $x < 12$ d) $u > -9$
 e) $v < \frac{11}{2}$ f) R g) $\emptyset$ h) $w < 2$ i) $\emptyset$

4. a) $x < \frac{4}{7}$; $x \in R$ b) $x \leqq \sqrt{5}$; $x \in R$ c) $x < 0$; $x \in R$
 $x < \frac{4}{7}$; $x \in Q$ $x < \sqrt{5}$; $x \in Q$ $x < 0$; $x \in Q$
 $L = \{0\}$; $x \in N$ $L = \{0;\ 1;\ 2\}$; $x \in N$ $L = \emptyset$; $x \in N$

5. a) $x > 2{,}11$ [2.1071429] b) $x < -1{,}69$ [-1.6856812]
 c) $x < 0{,}10$ [9.8623-02] d) $x > -0{,}07$ [-6.6579-02]

6. a) $L = \{19\}$ b) L besteht aus allen reellen Zahlen x mit $x < \frac{7}{4}$.

7. a) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $-2 < x \leqq 3$.
 b) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x \leqq -3$.
 c) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x > \frac{3}{4}$.
 d) $L = \emptyset$

8.* $b > 0$ und $a \mid b$ und $a \neq b$

9.* a) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x < a - b$.
 b) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x > \frac{-c}{a+2b}$, falls $a + 2b > 0$.
 L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x < \frac{-c}{a+2b}$, falls $a + 2b < 0$.
 c) Falls $a > 0$, ist L die Menge aller $x \in R$ mit $x < \frac{b+3}{a}$.
 Falls $a < 0$, ist L die Menge aller $x \in R$ mit $x > \frac{b+3}{a}$.
 Falls $a = 0$, ist $L = R$ für $b > -3$ und $L = \emptyset$ für $b \leqq -3$.

10.* a) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $-3 < x < 3$.
 b) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $-1 < x < 0$.
 c) L ist die Menge aller $x \in R$ mit $x > 1$ oder $x < -3$.

● 29 Da das rechtwinklige Dreieck nicht gleichschenklig ist, sind die Hypothenusenabschnitte $p = \frac{c}{2} + d$ und $q = \frac{c}{2} - d$ $(d \neq 0)$ unterschiedlich groß.

Höhensatz: $h^2 = (\frac{c}{2} + d)(\frac{c}{2} - d) = \frac{c^2}{4} - d^2$

Wegen $d^2 > 0$ gilt $h^2 < \frac{c^2}{4}$ bzw. $h < \frac{c}{2}$.

Hinweis: Weniger elegant, aber von den Schülern evtl. leichter zu finden, ist der folgende Beweis:

Feststellung	Begründung
$p - q \neq 0$	Wegen $a \neq b$ ist $p \neq q$.
$(p - q)^2 > 0$	Für alle $x \in R$ mit $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$.
$p^2 - 2pq + q^2 > 0$	binomische Formel
$p^2 + 2pq + q^2 > 4pq$	$\mid + 4pq$
$(p + q)^2 > 4pq$	binomische Formel
$c^2 > 4h^2$	$p + q = c$; Höhensatz
$c > 2h$	Radizieren; $c > 0$; $h > 0$
$\frac{c}{2} > h$	$\mid : 2$
w. z. b. w.	

1. Ansatz: $20 < a + (a - 2) + (a - 3) < 30$
 Folgende ganzzahlige Seitenlängen kommen in Betracht:
 9 cm; 7 cm; 6 cm bzw. 10 cm; 8 cm; 7 cm bzw. 11 cm; 9 cm; 8 cm.

3. $-2 < x < 2$
 $-1 < x \leqq 4$
 $-3 \leqq x \leqq -1$

4. $20{,}59 < u + v < 21{,}96$
 $5{,}39 < u - v < 6{,}76$
 $96{,}283\,8 < u \cdot v < 111{,}798\,8$
 $1{,}672\,069\,8 < u : v < 1{,}941\,504\,2$

5. Es gilt: $\frac{630}{63}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} < v_D < \frac{670}{61}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ und
 $\frac{415}{39}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} < v_P < \frac{435}{37}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
 Die Durchschnittsgeschwindigkeiten v_D von Dieter und v_P von Peter liegen in sich überlappenden Intervallen. Es kann deshalb keine Aussage darüber gemacht werden, wer von den beiden Fahrern die größere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte.

6. Für den Widerstand R_3 gilt: $9{,}2\,\Omega < R_3 < 19{,}2\,\Omega$.

7. Aus $a > 0$ folgt durch Multiplikation mit a: $a^2 > 0$.
Aus $a = 0$ folgt durch Multiplikation mit a: $a^2 = 0$.
Aus $a < 0$ folgt durch Multiplikation mit a: $a^2 > 0$.
Also gilt: $a^2 \geqq 0$ für jedes $a \in R$.

8. Multipliziert man die Ungleichung $a < b$ mit der (positiven) Zahl $\frac{1}{a \cdot b}$, so erhält man $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ bzw. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

9. $a < b$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $d > 0$ mit $a + d = b$.
$b < c$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $e > 0$ mit $b + e = c$.
Also gilt: $c = b + e = (a + d) + e = a\,(d + e)$.
Mit $d > 0$ und $e > 0$ ist auch $d + e > 0$ und damit $a < c$.

10.* $a < b$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $e > 0$ mit $a + e = b$.
$c < d$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $f > 0$ mit $c + f = d$.
Also gilt: $b \cdot d = (a + e) \cdot (c + f) = a \cdot c + (a \cdot f + e \cdot c + e \cdot f)$.
Mit $a > 0$, $b > 0$, $e > 0$ und $f > 0$ gilt auch $a \cdot f + e \cdot c + e \cdot f > 0$, d. h., es gibt eine positive Zahl, die zu $a \cdot c$ addiert $b \cdot d$ ergibt. Also gilt: $a \cdot c < b \cdot d$.

<u>anderer Lösungsweg:</u>
Vor.: $a < b$, $c < d$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$
Beh.: $a \cdot c < b \cdot d$
Beweis: $a < b \;|\cdot c$ $\qquad$ $c < d \;|\cdot b$
$a \cdot c < b \cdot c$ $\qquad$ $b \cdot c < b \cdot d$
vgl. Aufg. 9
$a \cdot c < b \cdot d$, w. z. b. w.

11.* $a < b$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $e > 0$ mit $a + e = b$.
$c < d$ bedeutet: Es gibt eine Zahl $f > 0$ mit $c + f = d$.
Damit gilt: $b + d = (a + e) + (c + f) = a + c + (e + f)$.
Mit $e > 0$ und $f > 0$ ist auch $e + f > 0$. Also gibt es eine positive Zahl, die zu $a + c$ addiert $b + d$ ergibt, d. h., $a + c < b + d$.

<u>anderer Lösungsweg:</u> analog zum zweiten Lösungsweg der Aufgabe 10*

Lerneinheit B 6: Zur Wiederholung

1. a) $f(2) = 9$; $f(-1) = -3$; $f(0) = 1$; $g(2) = 1$; $g(-1) = -5$; $g(0) = -3$; $h(2) = -1$; $h(-1) = 2$; $h(0) = 1$
b) $(2;-1) \in h$; $(1;5) \in f$; $(4;5) \in g$; $(1;0) \in h$; $(0;1) \in f$; $(0;1) \in h$; $(2;9) \in f$; $(-\frac{1}{4};0) \in f$
c) $f(3) = 13$; $f(-2) = -7$; $f(-\frac{1}{4}) = 0$; $g(0{,}5) = -2$; $g(10) = 17$; $g(\frac{3}{2}) = 0$; $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $h(1) = 0$; $h(8) = -7$

2. a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = 3$ c) $x_0 = -6$ d) $x_0 = -\frac{1}{4}$

3. a) Die Graphen sind Geraden, die alle durch den Punkt S (0;2) gehen. Sie haben unterschiedliche Anstiege.
b) Z. B. steigt $y = 2x + 2$ stärker als $y = x + 2$.
Z. B. steigt $y = \frac{1}{2}x + 2$ schwächer als $y = x + 2$.
Z. B. hat $y = x$ den gleichen Anstieg wie $y = x + 2$.

4. Die Graphen sind Geraden mit gleichem Anstieg (parallele Geraden). Sie schneiden die y-Achse in verschiedenen Punkten: $P_1\,(0;3)$, $P_2\,(0;-4)$, $P_3\,(0;0)$.

5. Für $0 < m < 1$ liegt der Anstiegswinkel α zwischen 0° und 45°.
Für $1 < m$ ist der Anstiegswinkel α größer als 45°.
Für $m < -1$ liegt der Anstiegswinkel α zwischen 90° und 135°.
Für $-1 < m < 0$ liegt der Anstiegswinkel α zwischen 135° und 180°.
Für $m = 0$ ist der Anstiegswinkel $\alpha = 0^\circ$, der Graph der Funktion fällt mit der x-Achse zusammen.

6. Für $n > 0$ schneidet die Gerade den positiven Teil der y-Achse. Für $n = 0$ verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung. Für $n < 0$ schneidet die Gerade den negativen Teil der y-Achse.

7. a) S (-1;1) b) S (2,5;-2) c) S (2;2) d) und e) kein Schnittpunkt

Lerneinheit B 7: Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

● 30 a) $L = \{(0;5); (1;4); (2;3); (3;2); (4;1); (5;0)\}$
b) z. B. $(0;-1)$; $(\frac{1}{2};0)$; $(-7;-15)$; $(3;5)$; $(\frac{1}{4};-\frac{1}{2})$
c) z. B. $(1;2)$; $(7;2)$; $(100;2)$; $(-90;2)$; $(0;2)$
d) $L = \emptyset$

● 31 a) $y = -2x + 5$ $\quad (0;5);\ (\frac{5}{2};0);\ (2;1);\ (-1;7)$

b) $x = -\frac{y}{2} + \frac{5}{2}$ $\quad (0;5);\ (\frac{5}{2};0);\ (2;1);\ (-1;7)$

c) Die geordneten Paare in a) stimmen mit denen in b) überein.

1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen sind:
$2x + 3y + 4 = 0$; $2x = -5y$; $y = 2x+3$; $0 \cdot x = 2y + 3$;
$2u - 3v = 5$; $2s = 4 - t$; $x - y = 8 + x - 3y$; $3x + 0y = 4$

2. z. B. $(2;1);\ (1;2);\ (3;0);\ (0;3);\ (-1;4)$

3. $L = \{(0;0);\ (1;1);\ (2;2);\ \ldots;\ (n;n);\ \ldots\}$

4. a) z. B. $2x + y = 4$; z. B. $x = y$; z. B. $x + y = 0$;
z. B. $7x + 9y = 0$; z. B. $x + y = \frac{7}{6}$; z. B. $2x + y = 1{,}7$
b) z. B. $x + y = 3$; $2x - y = 0$; $5x - 2y - 1 = 0$
c) z. B. $y = x + 2$

5. z. B. $(1;4);\ (0;3);\ (1;2);\ (-2;1);\ (-3;0);\ (-4;-1);$
$(-5;-2);\ (-6;-3)$
Weitere Lösungen sind z. B. $(2;5);\ (3;6);\ (-7;-4)$.

6. a) z. B. $(0;1);\ (2;4);\ (-2;-2)$ b) z. B. $(0;0);\ (2;-1);\ (-2;1)$
c) z. B. $(0;-\frac{3}{2});\ (3;0);\ (-3;-3)$

7. Die erste und die zweite Gerade sind identisch. Die dritte Gerade verläuft parallel zur ersten (bzw. zweiten) und hat mit ihr keinen Punkt gemeinsam.

9.* a) Hyperbel b) Parabel c) Kreis d) Ellipse

10. $x + 2y = 5\ (x, y \in R)$
L ist die Menge aller geordneten Paare $(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Wenn x die Menge aller reellen Zahlen "durchläuft", so ergibt sich das jeweils zugehörige y aus
$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.
$x - y = -2\ (x, y \in Z)$
L ist die Menge aller geordneten Paare $(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Wenn x die Menge aller ganzen Zahlen "durchläuft", so ergibt sich das jeweils zugehörige y aus $y = x + 2$.

Lerneinheit B 8: Systeme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen

● 33 a) $x + y = 3$
$3x + 4y = 7$
b) $a_1 = 1;\ b_1 = 1;\ c_1 = 3$
$a_2 = 3;\ b_2 = 4;\ c_2 = 7$

● 34 a) $L_{(I)} = \{(0;3);\ (1;2);\ (2;1);\ (3;0)\}$
b) $L_{(II)} = \{(0;5);\ (1;3);\ (2;1)\}$ c) $L = \{(2;1)\}$

● 35 Die Summe zweier Zahlen x und y kann nicht sowohl 5 als auch 2 sein.

● 36 a) $L_{(I)} = L_{(II)}$
b) L besteht aus der Menge aller geordneten Paare $(x;y)$ mit $y = 2x$ und $x \in R$.

1. a) $\{c;d\}$ b) $\{2;2\}$

2. a) Eine Summe kann nicht sowohl gleich 2 als auch gleich 0 sein.
b) Dividiert man (II) durch 2, so erhält man (I). (I) und (II) besitzen also die gleiche Lösungsmenge, nämlich die Menge aller geordneten Paare $(x;y)$ mit $x = 5 - 2y$ und $y \in R$. Dies ist auch die Lösungsmenge des Systems.
c) Die Lösungsmenge von (I) besteht aus allen Paaren $(x;2)$ mit $x \in R$. In der Lösungsmenge von (II) kommt genau ein solches Paar vor, nämlich $(0;2)$.

3. a) $L_{(I)} = \{(1;2);\ (7;0);\ (4;1)\}$
b) $L_{(II)} = \{(0;4);\ (1;2);\ (2;0)\}$ c) $(1;2) \in L_{(I)}$ und $(1;2) \in L_{(II)}$

4. a) $L_{(I)} = L_{(II)} = \{(0;2);\ (3;1);\ (6;0)\}$
b) Es existiert kein solches Paar.

5. a) z. B. $x + y = 101$ b) z. B. $y = x$ c) z. B. $2x + 2y = 200$

6. a) $L = \{(2;1)\}$ b) $L = \{(-2;-2)\}$ c) $L = \{(7;3)\}$
d) $L = \{(\frac{45}{19};\frac{30}{19})\}$ e) $L = \{(1{,}2;\ 3{,}4)\}$ f) $L = \{(0{,}1;-1{,}1)\}$

<u>Hinweis:</u> Hier sind die exakten Lösungen angegeben. Graphisch ermittelte Werte können durch Einsetzen in das gegebene System auf Genauigkeit überprüft werden.

7. a) S $(3;-1)$ b) S $(3;2)$ c) S $(-3;2)$

8.* a) $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$; $y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$

b) Es existiert ein Schnittpunkt genau dann, wenn
$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$ gilt (d. h., $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$).

c) Die beiden Geraden verlaufen parallel. Für $c_1 \neq 0$ haben sie keinen Punkt gemeinsam; für $c_1 = 0$ fallen sie zusammen.

9.* a) für $m = 3$ und $c = 4$ b) für $m = 3$ und $c \neq 4$

10. a) $L = \{(0;1)\}$ b) $L = \{(0;0)\}$ c) $L = \emptyset$
d) L ist die Menge aller Paare $(x;y)$ mit $y = \frac{1}{2}x - 1$ und $x \in R$.

11. a) genau eine Lösung   b) keine Lösung
c) unendlich viele Lösungen   d) keine Lösung
e) unendlich viele Lösungen   f) genau eine Lösung

12.* $L = \{(2\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})\}$

Lerneinheit B 9: Rechnerisches Lösen linearer Gleichungssysteme

● 37 a) $L = \{(-2;1)\}$ b) $L = \{(-2;1)\}$

● 38 a) $S\ (6;-6)$ b) $S\ (-5;4)$

● 39 a) $L = \{(-1;3)\}$ b) $a = 2$

1. a) $L = \{(7;3)\}$ b) $L = \{(80;20)\}$ c) $L = \{(36;18)\}$
d) $L = \{(8;6)\}$ e) $L = \emptyset$
f) L besteht aus allen Paaren $(x;y)$ mit $y = \frac{2x-15}{3}$ und $x \in R$.
g) $L = \{(3;2)\}$ h) $L = \{(-1;0{,}5)\}$ i) $L = \{(-2;-5)\}$
k) $L = \{(5;3)\}$ l) $L = \{(-2;7)\}$ m) $L = \{(-9;-6)\}$
n) $L = \{(12;6)\}$

2. a) $L = \{(1{,}24;2{,}08)\}$ b) $L = \{(0{,}8;-3{,}2)\}$
c) $L = \{(0{,}31;0{,}13)\}$ d) $L = \{(2;4)\}$

3. a) $L = \{(-1;15)\}$ b) $L = \{(\frac{5}{3};0)\}$

4. a) $L = \{(13;5)\}$ b) $L = \{(-3;1)\}$ c) $L = \{(0;0{,}2)\}$

5. a) $L = \{(2;-1)\}$ b) $L = \{(3;1)\}$ c) $L = \{(-2;13)\}$
d) $L = \{(-8;-5)\}$ e) L besteht aus der Menge aller $(x;y)$ mit $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x$ und $x \in R$.   f) $L = \{(10;36)\}$

6. a) $S\ (0{,}5;0{,}5)$ b) $S\ (3;-2)$ c) $S\ (1;2)$ d) $S\ (-3;4)$
e) $S\ (1;0)$ f) $S\ (0;1)$

7. a) $L = \{(3;2)\}$ b) $L = \{(7;5)\}$ c) $L = \{(3;4)\}$ d)* $L = \emptyset$
Das gegebene Gleichungssystem ist nur definiert, falls $|x| \neq |y|$; $x \neq -2y$; und $2x \neq 3y$.
Unter diesen Bedingungen ist es äquivalent zum System
$13\,x = -\,14\,y$
$\underline{\ \ x = 2\,y\ \ }$
Dieses System wird nur durch $x = 0;\ y = 0$ erfüllt.
(0;0) ist jedoch nicht Lösung des Ausgangssystems.

8. $L = \{(\frac{a+b}{2});\ (\frac{a-b}{2})\}$; für $a = b$ erhält man $x = a;\ y = 0$.

9. $L = \{(0;0)\}$, falls $a \neq b$; falls $a = b$, ist L die Menge aller Paare $(x;-x)$ mit $x \in R$.

10.* Für $a = 3$ besitzt das System unendlich viele Lösungen.
Für $a \neq 3$ besitzt das System keine Lösung.

11.* Eine Lösung ist (0;0). Für $a_1 = m \cdot a_2$ und $b_1 = m \cdot b_2$ besitzt das System unendlich viele Lösungen.

12.* a) $L = \{(a^2;b^2)\}$ b) $L = \{(\frac{a+3b}{5};\ \frac{a-2b}{5})\}$
c) $L = \{(\frac{1}{a+b};\frac{1}{a+b})\}$, falls $a \neq -b$ und $a \neq b$;
L = Menge aller $(x,\ \frac{1}{a} - x)$ mit $x \in R$, falls $a = b \neq 0$;
$L = \emptyset$, falls $a = -b$.

13.* a) $L = \{(1;-2;1)\}$ b) $L = \{(1;3;-2)\}$ c) $L = \{(1;0;4)\}$

Lerneinheit B 10: Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen

1. 12 und −8   2. 72 und 27

3. $a = \frac{15}{2}$; $b = 9$ 4. $\frac{15}{17}$

5. Die Bedingungen gelten für die Zahl 73.

6. Die Schenkel sind je 20 cm, die Basis ist 30 cm lang.

7. 6 cm bzw. 4,8 cm

8. Die Grundseite ist 26 cm, die zugehörige Höhe 22 cm lang.

9.* Die Drahtstücke besaßen eine Länge von etwa 12,9 cm.
[12.855476]

10. Der Vater ist 44 Jahre alt, der Sohn ist 12 Jahre alt.

11.* Alter des Vaters: 45 Jahre; Alter der Mutter: 44 Jahre;
Alter des Sohnes: 20 Jahre

12. sieben Vierbetthütten und fünf Dreibetthütten

13. a) Die Köchin kaufte drei "gute" und fünfzehn "schlechte" Heringe.
b) im laufenden Jahr: 16 Jungen und 24 Mädchen
im vergangenen Jahr: 24 Jungen und 16 Mädchen

14. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt etwa 2,9 km $\cdot$ h^{-1}; die mittlere Eigengeschwindigkeit des Schubverbandes beträgt etwa 12,0 km $\cdot$ h^{-1}.

15. Nach ca. 7 Minuten ([6.8235292]) treffen die Jagdflugzeuge den Aufklärer (genauer: 6 min 49 s).

16.* Auf einer Strecke von 10,5 km macht das Treibrad 2 000 Umdrehungen.

17. stündlicher Zufluß: 150 000 m^3
Verbrauch einer Turbine pro Stunde: 40 000 m^3

18. Masse einer langen Platte: 3,5 t
Masse einer kurzen Platte: 2,5 t

19. a) Der Mähdrescher E 512 erntet 12 ha ab, der Mähdrescher E 516 erntet 24 ha ab.
b) Der Mähdrescher E 516 könnte etwa 83 ha abernten.

20. a) Beim Einsatz der moderneren Maschine werden bei der Herstellung von 100 Werkstücken 1 020 Minuten (17 Stunden) eingespart.
b) Bei der Herstellung von 15 Werkstücken benötigen beide Maschinen die gleiche Zeit. Sie werden dazu 230 Minuten eingesetzt.

21. Es werden 1,85 t sechsundneunzigprozentige Schwefelsäure und 1,15 t siebzigprozentige Schwefelsäure benötigt.

22. 6,3 t Stahl und 5,7 t Grauguß

23. In der Platte sind 872,6 cm^3 Kupfer und 227,4 cm^3 Zink. (Die Legierung besteht zu 82,8 % aus Kupfer und zu 17,2 % aus Zink.)

24. 1,2 A und 0,8 A

25. 55 V und 165 V

Komplexe Übungen im Kapitel B

1. a) Für alle $n \in N$ gilt: $n < n + 1$.
b) Für alle $a \in R$ gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$.
c) Für alle $a, b \in R$ gilt: $(a + b)^2 \geq 2ab$.
d) Für beliebige Dreiecke mit den Seitenlängen a, b, c gilt:
$a < b + c$, $b < a + c$ und $c < a + b$.

2. a) $3a^2 - 9{,}5ab - 10b^2$ b) 10^{-4} c) $\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{7}{6}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{3}}$ d) $4xy$

3. 61,5 und 49

4. a) a^{-1} b) a^1 c) a^{-3} d) a^{-2} e) $a^{-\frac{1}{3}}$

5. a) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ b) $2 - 2\sqrt{2} + 1$

6. a) $n - 4$; $n - 3$; $n - 2$; $n - 1$; n; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$;
$n + 4$; $n + 5$; $n + 6$
b) höchstens sechs

7. a) $-\frac{t}{s}$; $-\frac{s}{t}$; $\frac{s}{t}$; 1; $\frac{t}{s}$
b)* $\left|1 - \frac{t}{s}\right| > \left|1 - \frac{s}{t}\right|$

Begründung:
Aus $(t - s)^2 > 0$
folgt $t^2 - 2st + s^2 > 0$
$t^2 - st > st - t^2 \quad |: st$
$\frac{t}{s} - 1 > 1 - \frac{s}{t}$,
also (beachte Aufg. a))
$\left|1 - \frac{t}{s}\right| = \frac{t}{s} - 1 > 1 - \frac{s}{t} = \left|1 - \frac{s}{t}\right|$.

8. a) $L_{(1)}$ besteht aus allen $x \in R$ mit $x < 4$.
b) 0; 1; 2; 3 c) $n = 1$

9. a) $L = \{16; 17; 18; 19\}$ b) $T = \{17; 19\}$

10. b)* $L_{(1)} = \{(2;2); (-\frac{2}{3};\frac{2}{3})\}$ und $L_{(2)} = \{(-1;1)\}$

11. $M = \{5; 9; 15\}$

12. a) L besteht aus allen $x \in R$ mit $x < 2$.
b) $M_1 = \{0;1\}$ c) $M_2 = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0\}$ d) $D = \{0\}$

13. a) Formt man das gegebene System um in $5x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{5}$,
$\underline{5x - \sqrt{5}y = 4{,}4}$
so erkennt man, daß die Lösungsmenge leer ist.
b) $L = \{(0;2)\}$ c) $L = \{(-236{,}842\ 11;\ 531{,}578\ 96)\}$
d) Die Darstellung des gegebenen Systems ergibt zwei voneinander verschiedene parallele Geraden, während sich die Geraden für das in b) beschriebene System im Punkt S (0;2) schneiden.

14.* Für $a = -\frac{2}{3}$ besitzt das System keine Lösung.

15. a) $S_1\ (-4;0)$, $S_2\ (0;4)$ b) $y = x - 1$

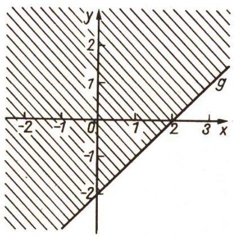
16. b) $y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$ c) P_4 liegt auf g.

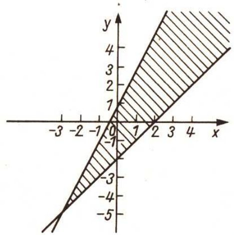
17. a) $a = 3$ und $b = 4$ b) $a = 3$ und $b \in R$, $b \neq 4$

18. b) $S_1\ (a;0)$, $S_2\ (0;b)$ c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

19. a) $L = \{(1;5)\}$ b) S (1;5)
c) (I): $S_1\ (\frac{7}{2};0)$, $S_2\ (0;7)$; (II): $S_1\ (-\frac{2}{3};0)$, $S_2\ (0;2)$

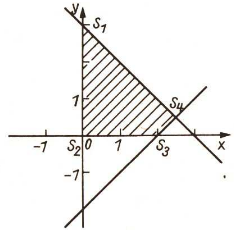
20. a)
b) d)





c) $M = \{(-3;-5)\}$

21. a), b)



c) $S_1(0;3)$; $S_2\ (0;0)$; $S_3(2;0)$; $S_4\ (\frac{5}{2};\frac{1}{2})$
Die größte Zahl z gehört zu S_1 mit $z_1 = 9$.

22. Es besteht keine Proportionalität.

23. $(6x + 3)(4x - 2)$ kann durch Ausmultiplizieren umgeformt werden in $24\,x^2 - 6$.

24. a) 17 % von 85 ist 14,45; 85 % von 17 ist 14,45.
b) Es ist a % von b gleich $\frac{a \cdot b}{100}$ und b % von a gleich $\frac{a \cdot b}{100}$.
a % von b ist also stets gleich b % von a.

25.* a) Voraussetzung: $a < b$; $a, b \in N$; $a \neq 0$
Behauptung: $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$
Beweis:
$$a < b \quad |+ ab$$
$$ab + a < ab + b$$
$$a(b + 1) < b\,(a + 1) \quad |:(b + 1)\cdot b$$
$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

b) (1) Voraussetzung: $0 < r < s$, $r, s \in R$
Behauptung: $r^2 < s^2$
Beweis:
$$r < s \quad |\cdot r \quad |\cdot s$$
$$r^2 < rs$$
$$\underline{rs < s^2}$$
$$r^2 < s^2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(2) Voraussetzung: $r < s < 0$; $r, s \in R$
Behauptung: $r^2 > s^2$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{array}{rcl|l} r & < & s & \cdot(-1) \\ -r & > & -s & \text{mit } -r > 0 \text{ und } -s > 0 \\ (-r)^2 & > & (-s)^2 & \text{nach (1)} \\ r^2 & > & s^2 & (-r)^2 = r^2;\ (-s)^2 = s^2 \end{array}$$

w. z. b. w.

26. $d_1 = 30$ cm; $d_2 = 24$ cm

27. a) 5 % b) 96 l

28. Die mittlere Dichte beträgt 5,54 g · cm^{-3}. [5.537037]

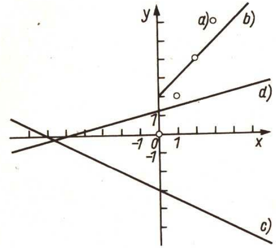
29. a) Die Tagesleistungen der beiden Wasserwerke betragen 1 250 m^3 bzw. 1 750 m^3.
b) Bei eingeschränktem Wasserverbrauch reicht der Wasservorrat statt 12 Tage nun 36 Tage, also 24 Tage länger.

C Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen; Potenzfunktionen

Lerneinheit C 1: Zur Wiederholung

1. a), b), c) und e) sind Funktionen, da Abbildung eindeutig; d) ist keine Funktion, da Abbildung nicht eindeutig.
f) (a) und (c) sind Funktionen, (b) ist keine Funktion.

2.



3. (a) $y = x + 2$ $(x \in R)$ (c) $y = \frac{2}{5}x - 2$ $(x \in R)$
(b) $y = -\frac{1}{2}x$ $(x \in R)$ (d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ $(x \in R)$

4. a) alle reellen Zahlen y, für die gilt: $y \geq 0$
b) alle gebrochenen Zahlen y, für die gilt: $y \geq 2$
c) und d) alle reellen Zahlen

5. $f(3) = 0{,}5$ $f(0) = 1{,}5$ $f(-2{,}6) = 2{,}37$ [2.3666667]
$f(100) = -31{,}8$ [-31.833333]

6. Zur Funktion gehören: (0;4), (-6;13), (0,4;3,4), (-7;14,5).

7. a) $f(7{,}5) = -1$; $f(6) = 0$; $f(3) = 2$; $f(0) = 4$; $f(-144) = 100$
b) $f(2{,}57) = -1$ [2.5714286]; $f(4) = 0$; $f(6{,}86) = 2$ [6.8571429]; $f(9{,}71) = 4$ [9.7142857]; $f(146{,}9) = 100$ [146.85714]

8. a) z. B. $y = -4x + 3$ $(y = 4x + 3)$ b) z. B. $y = 2x - 6$

Lerneinheit C 2: Der Begriff "quadratische Funktion"

● 1 b)

lineare Gleichungen	nichtlineare Gleichungen
$s(t) = v \cdot t$	$A(r) = \pi \cdot r^2$
$h(r) = 2\pi \cdot r$	$V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^2$
$U(R) = J \cdot R$	$A(a) = a^2$
	$V(a) = \frac{1}{3} h \cdot a^2$
	$A_0(r) = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$
	$R(A) = \frac{1}{A}$

● 2

r in cm	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
A in cm^2	0	0,8	3,1	7,1	12,6	19,6	28,3	38,5	50,3	63,6

● 3 a) $A \approx 10{,}2\ cm^2$ b) $r \approx 3{,}7$ cm

● 5 a)

x	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y	6,25	4,00	2,25	1,00	0,25	0	0,25	1,00	2,25	4,00	6,25

c)

x	± 1	± 0,9	± 0,8	± 0,7	± 0,6	± 0,5	± 0,4	± 0,3	± 0,2	± 0,1
y	1,00	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01

● 6 Für alle $x \in R$ gilt $x^2 = (-x)^2$.

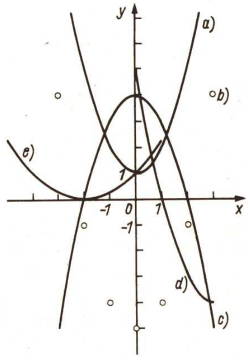
● 7 a) Höchster Punkt des Graphen von $y = -x^2$ ist P (0;0), da für alle $x \in R$ gilt: $-x^2 \leqq 0$ und $-0^2 = 0$.
Höchster Punkt des Graphen von $y = -x^2 + 5$ ist P (0;5), da für alle $x \in R$ gilt: $-x^2 + 5 \leqq 5$ und $-0^2 + 5 = 5$.
b) Tiefster Punkt des Graphen von $y = x^2 - 4$ ist P (0;-4), da für $x \in R$ gilt: $x^2 - 4 \geqq -4$ und $0^2 - 4 = -4$.
Tiefster Punkt des Graphen von $y = x^2 + 2$ ist P (0;2), da für alle $x \in R$ gilt: $x^2 + 2 \geqq 2$ und $0^2 + 2 = 2$

● 8 a) x $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ x $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{f(x)}$
b) 0,5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\times}$ x $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\times}$ x $\boxed{-}$ 2,5 $\boxed{=}$ $\boxed{f(x)}$

1. Die Gleichungen in a), e), f), h), i), k) beschreiben quadratische Funktionen.

3. die Zahlenpaare (0;-3), (17;286), (0,40;-2,84)

4.



5. a) Der Term $x^2 - 6$ nimmt seinen kleinsten Wert -6 für x = 0 an, da $x^2 - 6 > - 6$ für alle $x \neq 0$.
b) Der Term $-x^2 + 3$ nimmt seinen größten Wert 3 für x = 0 an, da $-x^2 + 3 < 3$ für alle $x \neq 0$.

6.

Erhöhe den Wert von x um 0,2 und bezeichne das Ergebnis wieder mit x!

Lerneinheit C 3: Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 + q$

● 10 Der Wertebereich umfaßt alle reellen Zahlen y mit $y \geqq 0$.

● 11 Mit wachsenden x-Werten gilt: Für $x \leqq 0$ werden die Funktionswerte kleiner; für $x \geqq 0$ werden die Funktionswerte größer.

● 12 a) Die Graphen sind parallele Geraden. Der Graph von $g(x) = x + 2$ ist das Bild des Graphen von $f(x) = x$ bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2 in Richtung der positiven y-Achse.

b) Vermutung: Der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 2$ ist Bild des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2 in Richtung der positiven y-Achse.

● 14

$q > 0$	S oberhalb der x-Achse
$q = 0$	S auf der x-Achse
$q < 0$	S unterhalb der x-Achse

● 15 Wertebereich: Menge aller reellen Zahlen y mit $y \geqq q$; kleinster Funktionswert: $f(0) = q$; für $x \leqq 0$ monoton fallend, für $x \geqq 0$ monoton steigend; $S(0;q)$ ist tiefster Kurvenpunkt; y-Achse ist Symmetrieachse; für $q < 0$: zwei Nullstellen, für $q = 0$: eine Nullstelle, für $q > 0$: keine Nullstellen.

1. a) $S(0;-1)$ b) $S(0;-3,5)$ c) $S(0;3)$ d) $S(0;-5,3)$

2. a) $y = x^2 - 3$ b) $y = x^2 + 1,5$ c) $y = x^2 - 1,8$

3.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -1$	$f(0) = -1$	monoton fallend für $x \leqq 0$, monoton steigend für $x \geqq 0$	symmetrisch zur y-Achse	2 Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
b)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -3,5$	$f(0) = -3,5$	wie bei a)	wie bei a)	2 Nullstellen: $x_1 \approx -1,9$ und $x_2 \approx 1,9$
c)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 3$	$f(0) = 3$	wie bei a)	wie bei a)	keine Nullstellen
d)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -5,3$	$f(0) = -5,3$	wie bei a)	wie bei a)	2 Nullstellen: $x_1 \approx -2,3$ und $x_2 \approx 2,3$

4. a) $y = x^2$ b) $y = x^2 - 7$ c) $y = x^2 - 3$ d) $y = x^2 + \sqrt{2}$

5. a) z. B. $y = x^2 + 1$ b) $S(0;1)$ c) $y = x^2 + 3$ und $y = x^2 + 0,001$

Lerneinheit C 4: Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2 + px + q$

● 16 b) Man vermutet, daß die Graphen (1), (2), (3) Bilder des Graphen von $y = x^2$ bei einer Verschiebung sind.

● 17 a) $x^2 + 8x + \underline{16}$ b) $x^2 + 5x + \underline{\frac{25}{4}}$ c) $x^2 + x + \underline{\frac{1}{4}}$

d) $x^2 - 6x + \underline{9}$ e) $x^2 - 0,4x + \underline{0,04}$ f) $x^2 + bx + \underline{(\frac{b}{2})^2}$

● 18 (3) $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$ (4) $x^2+6x-9 = (x+3)^2 - 18$

● 19 (1) $y = (x + 3)^2$; $d = 3$, $e = 0$ (2) $y = (x + 3)^2+2$; $d=3$, $e=2$

(3) $y = (x - 1,3)^2 - 3,59$; $d = -1,3$, $e = -3,59$

● 20 Der Summand 3 bewirkt, daß der Graph von $h(x) = (x + 3)^2$ Bild des Graphen von $f(x) = x^2$ bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 3 in Richtung der negativen x-Achse ist.

● 21 Es ist für alle $x \in R$ $h(x - d) = [(x - d) + d]^2 = x^2 = f(x)$.

● 22

$d > 0$	S links der y-Achse
$d = 0$	S auf der y-Achse
$d < 0$	S rechts der y-Achse

● 23 a) Es ist für alle $x \in R$ $h(x) + 2 = k(x)$.

b) Der Graph von h(x) ist eine Normalparabel. Durch Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2 in Richtung der positiven y-Achse entsteht wiederum eine Normalparabel.

● 24

	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$e > 0$		S auf y-Achse und oberhalb x-Achse	S im I. Quadranten
$e = 0$			S auf x-Achse und rechts von y-Achse
$e < 0$	S im III. Quadranten		

● 25 a) Der Graph von $y = (x + d)^2 + e$ ist Bild des Graphen von $y = x^2$ bei einer Verschiebung.

b) (1) Wertebereich: Menge aller reellen Zahlen y mit $y \geqq -3$; kleinster Funktionswert: $f(2) = -3$; monoton fallend für $x \leqq 2$, monoton steigend für $x \geqq 2$; zwei Nullstellen; Graph ist Normalparabel mit $S(2;-3)$; Symmetrieachse ist $x = 2$.

● 26 $y = (x - 1)^2 - 4$ bzw. $y = x^2 - 2x - 3$
Wertebereich: alle $y \in R$ mit $y \geqq -4$; kleinster Funktionswert: $f(1) = -4$; monoton fallend für $x \leqq 1$, monoton steigend für $x \geqq 1$; Graph ist Normalparabel mit $S\ (1;-4)$; Symmetrieachse ist $x = 1$; zwei Nullstellen

● 27 $y = (x - 2)^2 + 1$; $S\ (2;1)$

● 28 $S\ (-\frac{-4}{2};\ -\left[(\frac{-4}{2})^2 - 5\right])$; $S\ (2;1)$

● 29 a) $-D$ ist die Ordinate des Scheitelpunktes S.

b) $D > 0$
$D = 0$
$D < 0$

1. a) $x^2 + 6x + \underline{3^2} = (x + 3)^2$ b) $x^2 - 3x + \underline{(\frac{3}{2})^2} = (x - \frac{3}{2})^2$
c) $x^2 - x + \underline{(\frac{1}{2})^2} = (x + \frac{1}{2})^2$ d) $x^2 - 1,4x + \underline{0,7^2} = (x - 0,7)^2$
e) $x + 0,1x + \underline{0,05^2} = (x + 0,05)^2$

2. a) $y = (x + 5)^2$ b) $y = (x - 4)^2$ c) $y = (x + 1,5)^2$
d) $y = (x - 2,5)^2$ e) $y = (x + 5)^2 + 2$ f) $y = (x - 4)^2 - 6$
g) $y = (x + 1,5)^2 - 1,25$ h) $y = (x - 2,5)^2 - 7,25$

3. a) $S(0;3)$ b) $S(0;-1,5)$ c) $S(4;0)$ d) $S(-3,5;0)$
e) $S(-4;-3)$ f) $S(1,5;3,5)$ g) $S(-2;4)$ h) $S(1,8;-0,5)$

4. a) $y = x^2 - 3$ b) $y = x^2 + 0,5$ c) $y = (x - 1,5)^2$
d) $y = (x + 2,5)^2$ e) $y = (x + 4)^2 + 1$ f) $y = (x - 6)^2 - 2$
g) $y = (x + 1)^2 - 1$ h) $y = (x - 3,2)^2 + 3,2$

5. a) $S(-2;1)$; $y = (x + 2)^2 + 1$ b) $S(0;-1)$; $y = x^2 - 1$
c) $S(3;0)$; $y = (x - 3)^2$

6.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -4$	$f(0) = -4$	monoton fallend für $x \leqq 0$ monoton steigend für $x \geqq 0$	$x_1 = -2$ $x_2 = 2$	$P_1(-2;0)$ $P_2(0;-4)$ $P_3(2;0)$
b)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 0$	$f(-1,8) = 0$	monoton fallend für $x \leqq -1,8$ monoton steigend für $x \geqq 1$	$x_{1/2} = -1,8$	$P_1(-1,8;0)$ $P_2(0;3,24)$
c)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 1,5$	$f(1) = 1,5$	monoton fallend für $x \leqq 1$ monoton steigend für $x \geqq 1$	keine Nullstellen	$P_1(0;2,5)$

7. a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = (x - 2,5)^2$ c) $y = (x - 1,5)^2 - 4$

8. a) z. B.: $y = (x + 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 100)^2$
b) für alle $d > 0$ c) $y = (x - 2)^2$; $S\ (2;0)$

9. a) z. B.: $y = (x - 1)^2 + 2$; $y = (x + 5)^2 + 2$; $y = (x + 3)^2 + 2$
b) im I. und II. Quadranten
c) $S(-d;2)$ d) alle reellen Zahlen y mit $y \geqq 2$

10. a) z. B.: $y = (x + 1)^2 - 4$; $y = (x + 1)^2 + 3$; $y = (x + 1)^2 - 8$
b) $x = -1$ (Parallele zur y-Achse durch $P(-1;0)$)
c) $S(-1;e)$ d) alle reellen Zahlen y mit $y \geqq e$

11. $y = (x - 2)^2 - 1$ bzw. $y = x^2 - 4x + 3$

12. Die Graphen sind nach oben geöffnete Normalparabeln mit folgenden Scheitelpunkten:
a) $S(-1;0)$ b) $S(4;0)$ c) $S(2;-5)$ d) $S(-4;2)$
e) $S(2,5;-5)$ f) $S(-2,5;-3)$

13.

	(1)	(2)	(3)	
			monoton fallend	monoton steigend
a)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 0$	$f(-1) = 0$	für $x \leqq -1$	für $x \geqq -1$
b)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 0$	$f(4) = 0$	für $x \leqq 4$	für $x \geqq 4$
c)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -5$	$f(2) = -5$	für $x \leqq 2$	für $x \geqq 2$
d)	alle $y \in R$ mit $y \geqq 2$	$f(-4) = 2$	für $x \leqq -4$	für $x \geqq -4$
e)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -5$	$f(2{,}5) = -5$	für $x \leqq 2{,}5$	für $x \geqq 2{,}5$
f)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -3$	$f(-2{,}5) = -3$	für $x \leqq -2{,}5$	für $x \geqq -2{,}5$
g)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -2{,}25$	$f(3{,}5) = -2{,}25$	für $x \leqq 3{,}5$	für $x \geqq 3{,}5$
h)	alle $y \in R$ mit $y \geqq -2{,}25$	$f(-1{,}5) = -2{,}25$	für $x \leqq -1{,}5$	für $x \geqq -1{,}5$

14. (I) $3 = 4 + 2p + q$ | $p = -8$ | $y = x^2 - 8x + 15$
(II) $0 = 25 + 5p + q$ | $q = 15$ |

15.*

	kleinster Funktionswert	größter Funktionswert
a)	$f(3) = -2$	$f(7) = 22$
b)	$f(1) = -4$	$f(-5) = 32$
c)	$f(-1) = 1$	$f(-6) = 26$
d)	$f(1) = 4$	$f(-1) = f(3) = 8$

16.* b) und c): Es gibt zwei Funktionen: $y = x^2 - 4x$ und $y = x^2 + 4x$.

Lerneinheit C 5: Existenz von Nullstellen quadratischer Funktionen

● 31 a) (1) zwei Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$
(2) keine Nullstellen (3) eine Nullstelle: $x_0 = 0$
b) $y = |x| + b$ ($b \in R$) hat zwei Nullstellen, wenn $b < 0$, eine Nullstelle, wenn $b = 0$, keine Nullstellen, wenn $b > 0$.

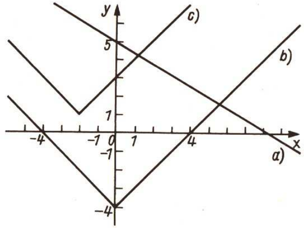
● 32 z. B. $y = x^2 - 5$, $y = x^2$, $y = x^2 + 1$

● 33 a) (1) eine Nullstelle: $x_0 = 3$, denn $0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9$ (wahr)
(2) zwei Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$,
denn $0 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8$ (wahr)
und $0 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8$ (wahr)
(3) keine Nullstellen

● 34 a) (1) S (1;-2); zwei Nullstellen
(2) S (-1;0); eine Nullstelle
(3) S (2;2); keine Nullstellen
b) Es kommt auf die Ordinate von S an.

● 35 a) zwei Nullstellen: $x_1 \approx 0{,}7$; $x_2 \approx 4{,}3$
$0{,}7^2 - 5 \cdot 0{,}7 + 3 = 0$; $-0{,}01 \approx 0$
$4{,}3^2 - 5 \cdot 4{,}3 + 3 = 0$; $-0{,}01 \approx 0$
b) eine Nullstelle: $x = 2{,}5$; $2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 + 6{,}25 = 0$; $0 = 0$ (wahr)
c) keine Nullstellen

1. a) $0 = -\frac{3}{5}x + 5$;
$x_0 = \frac{25}{3}$; $x_0 \approx 8{,}3$
b) $0 = |x| - 4$;
$x_1 = -4$; $x_2 = 4$
c) keine Nullstellen, da $|x + 2| = -1$ keine Lösungen hat



2. a) $x_1 \approx -2{,}2$; $x_2 \approx 2{,}2$
b) $x_1 \approx 0{,}2$; $x_2 \approx -4{,}2$
c) $x_1 \approx -1{,}9$; $x_2 \approx -5{,}1$
d) $x_0 = -5$
e) keine Nullstellen
f) $x_1 = 3{,}2$; $x_2 = 6{,}8$

3. a) $D = \frac{1}{4}$; $D > 0$: zwei Nullstellen
b) $D = 0$: eine Nullstelle
c) $D = -\frac{11}{4}$; $D < 0$: keine Nullstellen
d) S (6;0), $e = 0$: eine Nullstelle
e) $D = \frac{153}{16}$; $D > 0$: zwei Nullstellen
f) S (-7;1), $e > 0$: keine Nullstellen

4. $D = (\frac{p}{2})^2 - 9$; Nullstellen für $|p| \geq 6$

z. B.: $y = x^2 + 7x + 9$, $y = x^2 - 6,3x + 9$

5. $D = (\frac{6}{2})^2 - q$; keine Nullstellen für $q > 9$

z. B.: $y = x^2 + 6x + 10$ und $y = x^2 + 6x + 20$

6. z. B.: $y = (x + 3)^2 - 4$ $(y = (x + 3)^2;\ y = (x + 3)^2 + 1)$

Für e = 0 hat die Funktion genau eine Nullstelle $x_0 = -3$.

7. a) Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 0 = 4 - 2p + q \\ \text{(II)} & \underline{-6 = q} \end{array}$$

ergibt sich $q = -6$ und $p = -1$. Die Funktionsgleichung lautet $y = x^2 - x - 6$.

b) Die zweite Nullstelle ist $x_2 = 3$, da die Parabel symmetrisch bezüglich $x = \frac{1}{2}$ ist $(S\ (\frac{1}{2};\ -\frac{25}{4}))$.

8. a) Die Symmetrieachse der Parabel halbiert die Strecke zwischen den Nullstellen, also ist $x_S = 1$.

b) $S\ (1;\ -16)$ c) $y = (x - 1)^2 - 16$ bzw. $y = x^2 - 2x - 15$

d) $x = 1$

9. a) $1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + q$; $q = 5$; $y = x^2 - 4x + 5$

b) $D = (\frac{-4}{2})^2 - 5 = -1$; $D < 0$; keine Nullstellen c) $S\ (2;1)$

10. a) $D = 0$, d. h. $(\frac{p}{2})^2 - 4 = 0$; $p^2 = 16$; $p_1 = -4$; $p_2 = 4$;

$y = x^2 + 4x + 4$ und $y = x^2 - 4x + 4$

b) $D > 0$; $p^2 > 16$; $|p| > 4$

11. $0 = (-5)^2 + p \cdot (-5) + q$; $q = 5p - 25$

z. B.: $p = 1$, $q = -20$, $y = x^2 + x - 20$; $p = 3$, $q = -10$;

$y = x^2 + 3x - 10$

12.* a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $f(x) < 0$ für $-1 < x < 3$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 10$; $g(x) > 0$ für $x < -5$ und für $x > 2$

c) $h(x) = x^2 - 7x + 12$; $h(x) > 0$ für $x < 3$ und für $x > 4$

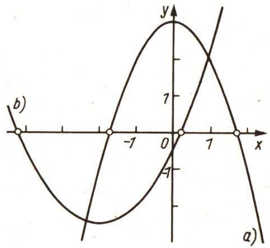
d) $k(x) = x^2 - 4x + 3$; $k(x) < 0$ für $1 < x < 3$

13.* a) Für angenähert die Argumente $0,8 < x < 5,2$ sind die zugehörigen Funktionswerte kleiner als 0.

b) Für angenähert die Argumente $-0,8 < x < 1,8$ sind die zugehörigen Funktionswerte kleiner als 0.

14.* a) $x_1 \approx 1,7$; $x_2 \approx -1,7$

b) $x_1 \approx 0,2$; $x_2 \approx -4,2$



Lerneinheit C 6: Zur Wiederholung

1. a) $x_0 = \frac{3}{2}$ b) $x_0 = -\frac{3}{2}$ c) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

2. a) $L = \{-15;15\}$ b) $L = \{-0,9;0,9\}$ c) $L = \{-1;1\}$

d) $L = \{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\}$ e) $L = \{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$ f) $L = \{0\}$

g) $L = \emptyset$ h) $L = \{-0,6;0,6\}$

3. a) äquivalent b) äquivalent c) äquivalent d) nicht äquivalent

4. a) z. B. $x \in N$ b) z. B. $x \in Q_-$ (Bereich der negativen rationalen Zahlen)

5. a) $L = \{0;2\}$ b) $L = \{1;8\}$ c) $L = \{6\}$

d) $(x - 2)^2 = 0$; $L = \{2\}$ e) $L = \{0;\ -3\}$ f) $L = \{-3,6;\ 4,5\}$

6. a) $L_4 = \{2\}$ b) $L_5 = \emptyset$ c) $L_1 = \{-2;\ 2\}$

d) $L_3 = \{(-2;\ 2)\}$ e) $L_1 = \{-2;\ 2\}$

7. a) $x^2 + 8x + \underline{16}$ b) $x^2 - 100x + \underline{2500}$

c) $x^2 - 5x + \underline{\frac{25}{4}}$ d) $x^2 + px + \underline{(\frac{p}{2})^2}$

8. a) 8 b) 78 c) nicht definiert

d) 0,05 e) 6,082 762 5 f) 3

g) $\frac{5}{8}$ h) $|a|$ i) $|u + 2|$ k) $\left|\frac{a}{b}\right|$

9.

$-\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2})^2$	$(\frac{a}{2})^2 - b$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{4}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	9,85
$-13{,}65$	186,322 5	221,722 5
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0

Lerneinheit C 7: Der Begriff "quadratische Gleichung"

● 36 Beide Funktionen haben dieselben Nullstellen:
$x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

1.

	$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c	$x^2 + px + q = 0$	p	q
a)	$3x^2 - 6x - 18 = 0$	3	-6	-18	$x^2 - 2x - 6 = 0$	-2	-6
b)	$25x^2 + 0x - 100 = 0$	25	0	-100	$x^2 - 4 = 0$	0	-4
c)	$-7x^2 + 28x + 0 = 0$	-7	28	0	$x^2 - 4x = 0$	-4	0
d)	$-x^2 - 4x - 40 = 0$	-1	-4	-40	$x^2 + 4x + 40 = 0$	4	40
e)	$2x^2 + 0x - 1 = 0$	2	0	-1	$x^2 - 0{,}5 = 0$	0	-0,5
f)	$4x^2 - 4x + 3 = 0$	4	-4	3	$x^2 - x + 0{,}75 = 0$	-1	0,75

2. a) $3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 0$ (wahr); $5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 0$ (wahr)
$L = \{3;5\}$ wurde richtig angegeben.
b) z. B. $2x^2 - 16x + 30 = 0$; $-x^2 + 8x - 15 = 0$

Lerneinheit C 8: Die Gleichungen $x^2 = r$

● 37 a) $a = 25$ cm b) $r = 5$ cm [5.0146267] c) $a = 18$ cm

● 38 a) Für alle $x \in R$ ist $x^2 \geqq 0$.
b) z. B.: $x^2 = -8$; $x^2 = -0{,}01$; $x^2 = -100$; ...
c) Nur die Gleichung $x^2 = 0$ hat **genau eine Lösung: $x = 0$.**

1. a) $L = \{-16;16\}$ b) $L = \{-5{,}7;5{,}7\}$ c) $L = \{-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\}$
d) $L = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$ e) $L = \{-2{,}03;2{,}03\}$ [2.0297783] f) $L = \{-8; 8\}$
g) $L = \emptyset$ h) $L = \{-57;57\}$ i) $L = \{-27;27\}$

2. a) z. B.: $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$ c) z. B.: $x^2 + 1 = 0$

3. z. B.: $x^2 - 36 = 0$ und $2x^2 = 72$

4. a) $x_1 = -\sqrt{5} \approx -2{,}2$; $x_2 = \sqrt{5} \approx 2{,}2$ [2.236068]
b) $x_1 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$; $x_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ [1.7320508]

5. (I) $0 = 6{,}25 - 2{,}5p + q$ | $p = 0$ |
(II) $\underline{0 = 6{,}25 + 2{,}5p + q}$ | $q = -6{,}25$ | $y = x^2 - 6{,}25$

Lerneinheit C 9: Die Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

● 39 a) $x - 1 = 3$ oder $x - 1 = -3$; Lösungen: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$
b) $x + 2 = 4$ oder $x + 2 = -4$; Lösungen: $x_1 = 2$; $x_2 = -6$
c) $x - 10 = 0$; Lösung: $x = 10$
d) keine Lösungen

● 40 a) $x^2 - 4x + \underline{4} = 12 + \underline{4}$; $(x - 2)^2 = 16$;
b) $x - 2 = 4$ oder $x - 2 = -4$; Lösungen: $x_1 = 6$; $x_2 = -2$

● 41 a) z. B.: $(x - 4)^2 = 25$; $(x - 4)^2 = 0$; $(x - 4)^2 = -1$
b) $x^2 - 8x - 9 = 0$; $x^2 - 8x + 16 = 0$; $x^2 - 8x + 17 = 0$

● 42 Nullstellen (1) $x_1 = 1$; $x_2 = 5$
(2) $x_{1/2} = 3$
(3) keine Nullstellen
Die Lösungen der Gleichungen stimmen mit den Nullstellen der entsprechenden Funktionen überein.

1. a) $x^2 - 16x + \boxed{64} = (x - 8)^2$ b) $x^2 + 3x + \boxed{\frac{9}{4}} = (x + \frac{3}{2})^2$
c) $x^2 - \frac{1}{2}x + \boxed{\frac{1}{16}} = (x - \frac{1}{4})^2$ d) $x^2 + ax + \boxed{(\frac{a}{2})^2} = (x + \frac{a}{2})^2$

2. a) $(x - 1)^2 = 4$ b) $(x + 9)^2 = 1$ c) $(x - 12)^2 = 0$
d) $(x + 5)^2 = -3$ e) $(x + 3)^2 = 9$ f) $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$

3. a) $(x + 4)^2 = 36$; $x_1 = 2$; $x_2 = -10$
b) $(x - 2)^2 = 9$; $x_1 = 5$; $x_2 = -1$
c) $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{49}{4}$; $x_1 = -5$; $x_2 = 2$
d) $(x - 6)^2 = 0$; $x_{1/2} = 6$
e) $(x + \frac{3}{2})^2 = 0$; $x_{1/2} = -\frac{3}{2}$
f) $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

g) $(x + 4)^2 = 16;\ x_1 = -8;\ x_2 = 0$

h) $(x - 5)^2 = 25;\ x_1 = 10;\ x_2 = 0$

4. z. B.: a) $(x - 4)^2 = 0$ b) $(x - 4)^2 = 25$ c) $(x - 4)^2 = -2$

5. z. B.: $x \in N;\ L = \{5\}$

Lerneinheit C 10: Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

● 43 a) $x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2;\ (x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$

b) Diskriminante $D = (\frac{p}{2})^2 - q$

● 44 a) z. B.: $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0;\ x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4}} = -\frac{p}{2}$

● 45 $(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D})^2 + p(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}) + q = 0$

$\frac{p^2}{4} \mp \cancel{p\sqrt{D}} + D - \frac{p^2}{2} \pm \cancel{p\sqrt{D}} + q = 0;\ \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q = 0$

(wahr)

● 46 $x^2 - 6x + 5 = 0;\ x_{1/2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{(\frac{-6}{2})^2 - 5};\ x_{1/2} = 3 \pm 2;\ L = \{1;5\}$

$x^2 - 6x + 9 = 0;\ x_{1/2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{(\frac{-6}{2})^2 - 9};\ x_{1/2} = 3;\ L = \{3\}$

$x^2 - 6x + 12 = 0;\ x_{1/2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{(\frac{-6}{2})^2 - 12};\ D < 0;\ L = \emptyset$

● 47 $x_{1/2} = 384 \pm 147;\ L = \{237;\ 531\}$

768 $\boxed{\pm}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 125847 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{x \to M}$ 768 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_1]$

768 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_2]$

● 48 a) z. B.: p $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{x \to M}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ q $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_1]$

$\boxed{MR}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ q $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\pm}$ $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_2]$

b) Der zu a) angegebene Ablaufplan kommt mit 22 Schritten aus. Gegenüber dem Plan im Lehrbuch, der 24 Schritte benötigt, werden 2 Schritte eingespart.

● 49 Für D = 0 erscheint nach der 2. Betätigung der Taste $\boxed{=}$ die Anzeige $\boxed{\ 0.}$, und der Ablaufplan reduziert sich auf p $\boxed{\pm}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $[x_{1/2}]$.

● 50 Nach der 2. Betätigung der Taste $\boxed{=}$ erscheint eine negative Zahl [-115.75] , aus der man nicht die Wurzel ziehen kann. Nach Betätigung der Wurzeltaste zeigt der Rechner $\boxed{E \quad 0.}$ an.

● 51 p $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ q $\boxed{=}$

$(\frac{p}{2})^2 - q = 0$: p $\boxed{\pm}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $[x_{1/2}]$

$(\frac{p}{2})^2 - q < 0$: keine reellen Lösungen

$(\frac{p}{2})^2 - q > 0$: $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{x \to M}$ p $\boxed{\pm}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_1]$

p $\boxed{\pm}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_2]$

● 52 a) $x_1 = 0;\ x_2 = 7$ b) $x_1 = 0;\ x_2 = -17$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = 3$ d) $x_1 = 0;\ x_2 = -8$

● 53 $x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{0 - 0} = 0;\ x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{0 - q} = \pm\sqrt{-q}$;

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - 0} = -\frac{p}{2} \pm \frac{|p|}{2}$;

$x_1 = 0,\ x_2 = -p$ oder $x_1 = -p,\ x_2 = 0$

1. a) $D = (\frac{5}{2})^2 + 24 = 30{,}25;\ D > 0$: zwei Lösungen

b) $D = (\frac{12}{2})^2 - 11 = 25;\ D > 0$: zwei Lösungen

c) $D = (\frac{1}{5})^2 - \frac{1}{15} = -0{,}0266;\ D < 0$: keine Lösungen

d) $D = (\frac{-0{,}7}{2})^2 - 0{,}1 = 0{,}0225;\ D > 0$: zwei Lösungen

e) $D = (\frac{-8}{2})^2 - 16 = 0;\ D = 0$: eine Lösung

f) $D = (\frac{74}{2})^2 - 1\,368 = 1;\ D > 0$: zwei Lösungen

g) $D = (\frac{-26}{2})^2 - 169 = 0;\ D = 0$: eine Lösung

h) $D = (\frac{-5}{2})^2 - 6{,}5 = -0{,}25;\ D < 0$: keine Lösungen

2. a) $L = \{-6;-4\}$ b) $L = \{-8;14\}$ c) $L = \{-6;4\}$

d) $L = \{19\}$ e) $L = \emptyset$ f) $L = \{4;5\}$

g) $L = \{-8;-7\}$ h) $L = \{-3;4\}$

3. a) $L = \{-1;1{,}5\}$ b) $L = \{-2{,}7;-0{,}3\}$ c) $L =$ 0,2;1,8

d) $L = \{-3{,}5;2{,}5\}$ e) $L = \{571;-56\}$ f) $L =$ 22;1 104

g) $L = \{-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\}$ h) $L = \{-\frac{3}{7};1\}$

4. a) $L = \{0;4\}$ b) $L = \{-7;0\}$ c) $L = \{0;-\sqrt{2}\}$

d) $L = \{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\}$ [1.316074] e) $L = \{-\sqrt{\pi};\sqrt{\pi}\}$ [1.7724538] f) $L = \{-0{,}08;0{,}08\}$

5. a) $L = \{0{,}224\ 684\ 4;\ -160{,}224\ 69\}$
b) $L = \{343{,}185\ 5;\ -18{,}185\ 5\}$
c) $L = \{17{,}586\ 397;\ -170{,}586\ 4\}$
d) $L = \{8{,}287\ 953\ 2;\ 0{,}082\ 046\ 8\}$
(Die genannten Lösungen sind die Anzeigen des Taschenrechners.)

6. a) $L = \{50\}$ b) $L = \{-32\}$ c) $L = \{0{,}06\}$ d) $L = \{-0{,}004\}$

7. a) $L = \emptyset$ b) $L = \emptyset$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \emptyset$ e) $L = \emptyset$ f) $L = \emptyset$

8. a) $L = \{4\}$; b) $L = \emptyset$; c) $L = \{1\}$
d) $L = \{-3\}$; e) $L = \left\{\frac{1}{7}\right\}$; f) $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

9. a) $x_1 \approx 4{,}7$ [4.7320508] ; $x_2 \approx 1{,}3$ [1.2679492]
b) $x_{1/2} = 3{,}6$
c) keine Nullstellen

10. z. B.: a) $x^2 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $x^2 - 4 = 0$ d) $x^2 + 1 = 0$

Lerneinheit C 11: Zusammenhänge zwischen p und q und den Lösungen

● 54

	$x_1 + x_2$	p	$x_1 \cdot x_2$	q
a)	$5 + 3 = 8$	-8	$5 \cdot 3 = 15$	15
b)	$1 - 2 = -1$	1	$1 \cdot (-2) = -2$	-2
c)	$-2-4 = -6$	6	$(-2) \cdot (-4) = 8$	8
d)	$8 - 5 = 3$	-3	$8 \cdot (-5) = -40$	-40

Vermutung:
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

● 55 (I) $0 = 3^2 + p \cdot 3 + q$
(II) $\underline{0 = 4^2 + p \cdot 4 + q}$ $p = -7;\ q = 12$
bzw. $3 + 4 = 7;\ p = -7;\ 3 \cdot 4 = 12;\ q = 12$

● 56 $-4 \cdot x_2 = 44$ Probe: $-4 - 11 = -15;\ p = 15$
$x_2 = -11$ $(-4) \cdot (-11) = 44;\ q = 44$

1.

	$x_1 + x_2$	p	$x_1 \cdot x_2$	q	L richtig/falsch
a)	$-7 + 12 = 5$	-5	$(-7) \cdot 12 = -84$	-84	L richtig
b)	$9 + 16 = 25$	25	$9 \cdot 16 = 144$	144	L falsch; $L = \{-16;\ -9\}$ richtig
c)	$-101 + 1 = -100$	100	$(-101) \cdot 1 = -101$	-101	L richtig
d)	$5 + 5 = 10$	-10	$5 \cdot 5 = 25$	25	L richtig
e)	$-7-2 = -9$	-9	$(-7) \cdot (-2) = 14$	14	L falsch; $L = \{2;7\}$ richtig
f)	$-25+1 = -24$	24	$(-25) \cdot 1 = -25$	-25	L richtig

2. a) $x^2 + 6x - 135 = 0$ b) $x^2 + 3x = 0$ c) $x^2 - 64 = 0$
d) $x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{7}{2} = 0$ e) $x^2 = 0$ f) $x^2 - 8x + 16 = 0$

3. a) $x_1 = 1;\ x_2 = 14$ b) $x_1 = -4;\ x_2 = -5$ c) $x_1 = 1;\ x_2 = 10$
d) $x_1 = 7;\ x_2 = -2$ e) $x_{1/2} = 6$ f) $x_1 = -3;\ x_2 = 2$

4. z. B. $x^2 + x - 12 = 0$; $x^2 - 13x + 30 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$

5.* $-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$
$\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = q,$
w. z. b. w.

6. Die Gleichung $(x - 5)(x + 7) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -7$. Die Gleichungen $x^2 + 2x - 35 = 0$ und $(x - 5)(x + 7) = 0$ sind äquivalent.

7.* Nach dem Satz von Vieta gilt $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$.
Ferner gilt $(x-x_1(x-x_2) = x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2$.
Damit gilt $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

8.* Nach dem Satz von Vieta gilt: $x^2 - (p + q) \cdot x + p \cdot q = 0$.
Vergleich mit $x^2 + px + q = 0$: (I) $-(p + q) = p$
(II) $\underline{p \cdot q = q}$

<u>Fallunterscheidung:</u>
1. Fall: Für $q \neq 0$ erhält man $p = 1,\ q = -2$;
d. h. $x^2 + x - 2 = 0$ mit $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.
2. Fall: Für $q = 0$ erhält man $p = 0$; d. h. $x^2 = 0$.
Es gibt zwei Gleichungen mit der geforderten Bedingung:
$x^2 + x - 2 = 0$ und $x^2 = 0$.

Lerneinheit C 12: Lösen von Gleichungen, die auf eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ zurückgeführt werden können

● 57 a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

● 58 b) $x_1 = 1;\ x_2 = 5$
Die drei Gleichungen sind einander äquivalent.

● 59 $x^2 + 90x - 8\,100 = 0;\ x_{1/2} = -45 \pm 100$ $\boxed{100.62306}$
Die Mitte des Turmeinganges ist etwa 55 Meter vom rechten Rand des Rathauses entfernt.

1. a) $L = \{-7;9\}$ b) $L = \{-11;25\}$ c) $L = \{-6;\frac{1}{3}\}$
d) $L = \{-2;2,5\}$ e) $L = \{-0,25;0,6\}$ f) $L = \{-0,25;0,5\}$

2. a) $L = \emptyset$ b) $L = \{17\}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \emptyset$

3. a) $L = \{-2;-0,5\}$ b) $L = \{0,5;2\}$ c) $L = \{0,6;3\}$
d) $L = \{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$ bzw. $L = \{0,267\,949\,2;\ 3,732\,050\,8\}$
e) $L = \{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5};\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\}$ bzw. $L = \{-1,618\,034;\ 0,618\,034\}$
f) $L = \{1,683\,965\,6;\ -0,978\,083\,4\}$

4. a) $L = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ b) $L = \{-1;\ 1\}$ c) $L = \{-2,2;2,2\}$
d) $L = \{0;2\}$ e) $L = \{-7;0\}$ f) $L = \{-2;0\}$

5. a) $x^2 + 2x - 3 = 0;\ L = \{-3;1\}$ b) $x^2 - 8x + 15 = 0;\ L = \{3;5\}$
c) $x^2 - 9x - 52 = 0;\ L = \{-4;13\}$ d) $x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{91}{3} = 0;\ L = \{-\frac{13}{3};7\}$

6. a) $x^2 - 25 = 0;\ L = \{-5;5\}$ b) $x^2 - 3 = 0;\ L = \{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$
c) $x^2 + 12x = 0;\ L = \{-12;-0\}$ d) $x^2 - \frac{4}{3}x = 0;\ L = \{0;\frac{4}{3}\}$

7. a) $x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{15}{4} = 0;\ L = \emptyset$ b) $x^2 + 6 = 0;\ L = \emptyset$
c) $x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{1}{3} = 0;\ L = \{-0,103\,19;\ -3,230\,138\,6\}$
d) $x^2 - x - 2 = 0;\quad L = \emptyset$

8. a) $x^2 + 32x - 38 = 0;\ L = \{-33,15;1,15\}$ auf 2 Stellen gerundet bzw. $L = \{-33,146\,428;\ 1,146\,428\}$
b) $x^2 + \frac{25}{6}x + \frac{25}{6} = 0;\ L = \{-2,50;\ -1,67\}$ auf 2 Stellen gerundet bzw. $L = \{-2,499\,999\,9;\ -1,666\,666\,7\}$
c) $x \neq 0;\ x^2 - 8x + 15;\ L = \{3;5\}$

d) $x \neq 0;\ x^2 - 8 = 0;\ L = \{-\sqrt{8};\sqrt{8}\}$
e) $x \neq 2,\ x \neq 7;\ x^2 - 10x + 25 = 0;\ L = \{5\}$
f) $|x| \neq 2;\ x^2 - 2 = 0;\ L = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

9. a) $x \neq 0;\ x \neq 2;\ x \neq 4;\ x^2 - 7x + 6 = 0;\ L = \{1;6\}$
b) $x \neq 2;\ x \neq 4;\ x^2 - 6x + 8 = 0;\ L = \emptyset$
c) $x \neq 2;\ x \neq 4;\ x^2 - 5x + 6 = 0;\ L = \{3\}$
d) $|x| \neq 1;\ x^2 - 4x - 21 = 0;\ L = \{-3;7\}$
e) $|x| \neq 1;\ x^2 - 4x = 0;\ L = \{0;4\}$
f) $|x| \neq 5;\ 5x^2 - 18x = 0;\ L = \{0;3,6\}$

10. a) $12 = x^2 - 6x + 5;\ x_1 = 7;\ x_2 = -1$
b) $12 = x^2 + 2x - 3;\ x_1 = 3;\ x_2 = -5$

11. Ermittelt man rechnerisch die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = 4x - 3$, so hat man die quadratische Gleichung $x^2 = 4x - 3$ bzw. $x^2 - 4x + 3 = 0$ zu lösen.
Das Verfahren ist also gerechtfertigt.

12.* Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Die Gleichung $x^3 + 2x^2 - 24x = 0$ hat die Lösungsmenge $L = \{-6;0;4\}$.
Weitere Beispiele für solche Gleichungen:
$x^3 - 4x^2 + 3x = 0,\ x^3 - x^2 - 42x = 0,\ \ldots$

13.* Die quadratische Gleichung mit der Variablen z kann 2, 1 oder 0 Lösungen haben. Jede dieser Lösungen führt zu einer quadratischen Gleichung in x, die ihrerseits wiederum 2, 1 oder 0 Lösungen haben kann. Es können für die Ausgangsgleichung also auch weniger als 4 Lösungen auftreten.

14.* (II ') $y = \frac{32}{x}$
(I ') $x^2 - 20x + 64 = 0$
$x_1 = 4;\ x_2 = 16;\ y_1 = 8;\ y_2 = 2;\ L = \{(4;8);(16;2)\}$

Lerneinheit C 13: Lösen quadratischer Gleichungen, die Fallunterscheidungen erfordern

● 60 a) $b > a : L = \{b - a\}$
$b = 0 : L = \{0\}$
$b < a : L = \emptyset$

b) $a \neq 0$: $L = \left\{\frac{b}{a}\right\}$

$a = 0$ — $b = 0$: $0 \cdot x = 0$; $L = R$

$a = 0$ — $b \neq 0$: $0 \cdot x = b$; $L = \emptyset$

c) $c > 0$: $L = \{-c; c\}$

$c = 0$: $L = \{0\}$

$c < 0$: $L = \emptyset$

● 61 1. Fall: z. B.: $k = 1$; $x^2 + 4x + 1 = 0$; $L = \{-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$

2. Fall: $k = 4$; $x^2 + 4x + 4 = 0$; $L = \{-2\}$

3. Fall: z. B.: $k = 8$; $x^2 + 4x + 8 = 0$; $L = \emptyset$

● 62 a) 1. Fall: z. B.: $a = 4$; $x^2 + 8x + 9 = 0$; $L = \{-4 + \sqrt{7}; -4 - \sqrt{7}\}$

2. Fall: $a = 3$; $x^2 + 6x + 9 = 0$; $L = \{-3\}$

$a = -3$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $L = \{3\}$

3. Fall: z. B.: $a = 2$; $x^2 + 4x + 9 = 0$; $L = \emptyset$

b) Für jede Gleichung $x^2 + 2ax + 9 = 0$ mit $|a| \geqq 3$ kann man mittels $x_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$ die Lösungen sofort berechnen.

● 63 a) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

1. Variante:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Für $b^2 - 4ac \geqq 0$ gilt:

$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

oder

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

2. Variante

Anwenden der Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$

$\left(p = \frac{b}{a};\ q = \frac{c}{a}\right)$:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$\underline{a = 1}$: $\left.\begin{array}{l} x^2 + bx + c = 0 \\ x_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \end{array}\right\}$ $b' = p$; $c = q$

b) b $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ a $\boxed{\times}$ c $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{\div}$ a $\boxed{x^2}$

$\boxed{=}$ $\xrightarrow{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geqq 0}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x \rightarrow M}$ b $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\div}$ a $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_1]$

b $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\div}$ a $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $[x_2]$

$\downarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$

keine reellen Lösungen

1. a) Für $a^2 > b$ ist $L = \{-a + \sqrt{a^2 - b};\ -a - \sqrt{a^2 - b}\}$;

für $a^2 = b$ ist $L = \{-a\}$;

für $a^2 < b$ ist $L = \emptyset$.

b) $a \neq b$: $x^2 = a + b$: Für $a > -b$ ist $L = \{-\sqrt{a+b}; \sqrt{a+b}\}$;

für $a = -b$ ist $L = \{0\}$;

für $a < -b$ ist $L = \emptyset$.

$a = b$: $0 \cdot x^2 = 0$: $L = R$

c) Für $b^2 > a^2$ ist $L = \{-\sqrt{b^2 - a^2};\ \sqrt{b^2 - a^2}\}$;

für $b^2 = a^2$ ist $L = \{0\}$;

für $b^2 < a^2$ ist $L = \emptyset$.

2. a) $x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \frac{5}{12}|a|$; $L = \left\{-\frac{a}{3}; \frac{a}{2}\right\}$

b) $6x^2 + x - 1 = 0$; $(a = -1)$

3. a) $L = \{0; 2a\}$

b) z. B.: $a = 6$; $x^2 - 12x = 0$; $a = -3$; $x^2 + 6x = 0$

c) Für $a = -3$ entsteht $x^2 + 6x = 0$ mit $L = \{0; -6\}$.

4. a) Für $r > -1$ ist $L = \{-1 + \sqrt{1+r};\ -1 - \sqrt{1+r}\}$;

für $r = -1$ ist $L = \{-1\}$;

für $r < -1$ ist $L = \emptyset$.

b) z. B.: $x^2 + 2x - 3 = 0$; $L = \{-3; 1\}$

$x^2 + 2x - 8 = 0$; $L = \{-4; 2\}$

5. a) Für $v < 9$ ist $L = \{3 + \sqrt{9 - v}\ ;\ 3 - \sqrt{9 - v}\}$;

für $v = 9$ ist $L = \{3\}$;

für $v > 9$ ist $L = \emptyset$.

b) z. B.: $v = 8$: $x^2 - 6x + 8 = 0$; $L = \{4;2\}$
$v = 9$: $x^2 - 6x + 9 = 0$; $L = \{3\}$
$v = 10$: $x^2 - 6x + 10 = 0$; $L = \emptyset$

6. a) Für $|r| > 5$ ist $L = \{-2r + \sqrt{4r^2-100};\ -2r - \sqrt{4r^2-100}\}$;
für $|r| = 5$ ist $L = \{-2r\}$;
für $|r| < 5$ ist $L = \emptyset$.
b) z. B.: $r = 6$: $x^2+24x+100 = 0$; $L = \{-12+\sqrt{44};-12-\sqrt{44}\}$
$r = 5$: $x^2+20x+100 = 0$; $L = \{-10\}$
$r = 2$: $x^2+8x+100 = 0$; $L = \emptyset$.

7. Für $a = 0$ ist $L = \{-2;0\}$;
für $|a| = 1$ ist $L = \{-1\}$.
Für andere Werte von a sind die Lösungen nicht ganzzahlig.

8. Für $q = 0$ ist $L = \{0;8\}$; für $q = 12$ ist $L = \{2;6\}$.

9. a) Für $p = 0$ hat die Gleichung $x^2 - 25 = 0$ zwei entgegengesetzte Zahlen als Lösungen.
b) Nein, denn es muß gelten $(x - a)(x + a) = 0$,
d. h. $x^2 - a^2 = 0$, also $p = 0$.

10.* Wenn $q < 0$, dann $(\frac{p}{2})^2 - q$ stets größer als 0, also $D > 0$.

11.* Wenn a und c verschiedene Vorzeichen haben, dann ist
$\frac{c}{a} < 0$, also $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ stets größer als 0, also $D > 0$.
(Oder: $D = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; wenn a und c verschiedene Vorzeichen haben, dann ist $4ac < 0$ und somit $b^2 - 4ac > 0$, d. h. $D > 0$.)

12.* $D = (\frac{p}{2})^2 - 2$; $D > 0$ genau dann, wenn $\frac{p^2}{4} - 2 > 0$, d. h.
$\left|\frac{p}{2}\right| > \sqrt{2}$.

Lerneinheit C 14: Sach- und Anwendungsaufgaben

● 64 Seitenlängen des Rechtecks: $a = x$ cm ($x \in R$, $x > 0$)
$b = (x + 4)$ cm
$x(x + 4) = 1\,152$; $x^2 + 4x - 1\,152 = 0$; $(x_1 = -36)$; $x_2 = 32$
Die Seitenlängen des Rechtecks sind $a = 32$ cm und $b = 36$ cm.

● 65 a) $\frac{s}{2} < r$ und $a < r$; r ist Hypotenuse im Dreieck MAC.
b) $a = \bar{a}$ cm; $\bar{a}^2 + \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = x^2$; $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1 + 4\bar{a}^2}{3} = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1 + 4\bar{a}^2}{3}} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{1 + 3\bar{a}^2}$; $1 + 3\bar{a}^2 > 0$
Es kommt nur der Wert $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + 3\bar{a}^2}$ als Lösung in Frage, da $\frac{2}{3}\sqrt{1 + 3\bar{a}^2} > \frac{1}{3}$ ist. Somit gibt es für jedes a genau eine Lösung.

1. vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen:
$x, x + 1, x + 2, x + 3$ ($x \in Z$)
$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = 630$
$x^2 + 3x - 154 = 0$; $x_1 = 11$; $x_2 = 14$
Die gesuchten Zahlen sind entweder 11, 12, 13, 14 oder -14, -13, -12, -11.

2. 1. Summand: x ($x \in R$); 2. Summand: $(28 - x)$
$x(28 - x) = 192$; $x^2 - 28x + 192 = 0$; $x_1 = 16$; $x_2 = 12$
Die Summanden sind 12 und 16.

3. Zähler: x ($x \in N$); Nenner: $x + 2$
$\frac{x + 7}{x - 4} = 6 \cdot \frac{x}{x + 2}$; $x^2 - \frac{33}{5}x - \frac{14}{5} = 0$; $(x_1 = -0{,}4)$; $x_2 = 7$
Der ursprüngliche Bruch war $\frac{7}{9}$.

4. natürliche Zahl: x ($x \in N$)
$x^2 + (x + 1)^2 = 613$; $x^2 + x - 306 = 0$; $(x_1 = -18)$; $x_2 = 17$
Die gegebene natürliche Zahl ist 17.

5. Schülerzahl: x ($x \in N$, $x \neq 0$)
$\frac{x(x - 1)}{2} = 66$; $x^2 - x - 132 = 0$; $(x_1 = -11)$; $x_2 = 12$
Am Wettkampf nahmen 12 Schüler teil.

6.* Anzahl der Diagonalen in einem konvexen n-Eck:
$\frac{n(n - 3)}{2}$ ($n \in N$, $n \neq 0$)
$\frac{n(n - 3)}{2} = 14$; $n^2 - 3n - 28 = 0$; $(n_1 = -4)$; $n_2 = 7$
Das Vieleck ist ein 7-Eck und hat 7 Seiten.

7. kürzere Kathete: x cm ($x \in R$, $x > 0$)
$x^2 + (x + 5)^2 = 25^2$; $x^2 + 5x - 300 = 0$; $(x_1 = -20)$; $x_2 = 15$
Die Katheten sind 15 cm und 20 cm lang.

8. Hypotenusenabschnitte: x mm und (78 - x) mm ($x \in R$, $x > 0$)
$x(78 - x) = 36^2$; $x^2 - 78x + 1\,296 = 0$; $x_1 = 24$; $x_2 = 54$
Der Höhenfußpunkt teilt die Hypotenuse im Verhältnis 4 : 9 bzw. 9 : 4.

9. Quadratseite: x cm ($x \in R$, $x > 0$)
$(x + 1)(x - 2) = 54$; $x^2 - x - 56 = 0$; $x_1 = 8$; ($x_2 = -7$)
Das gegebene Quadrat hat einen Flächeninhalt von 64 cm^2.

10. Rechteckseiten: a = x cm ($x \in R$, $x > 0$);
$b = \frac{1\,170\ cm^2}{x\ cm} = \frac{1\,170}{x}$ cm
$142 = 2x + 2 \cdot \frac{1\,170}{x}$; $x^2 - 71x + 1\,170 = 0$; $x_1 = 45$; $x_2 = 26$
Die Rechteckseiten sind 26 cm und 45 cm lang.

11. kürzere Kathete: x cm ($x \in R$, $x > 0$); Hypotenuse: (x + 6) cm
$(x + 6)^2 = x^2 + (24 - 2x)^2$; $x^2 - 27x + 135 = 0$;
($x_1 = 20{,}373\,864$ entfällt wegen u); $x_2 = 6{,}626\,136\,5$ (SR1)
Die Dreieckseiten sind (gerundet auf 1 Stelle nach dem Komma) a = 6,6 cm; b = 10,8 cm; c = 12,6 cm.

12. Diagonalenabschnitte der längeren Diagonalen:
x cm ($x \in R$, $x > 0$) und (6 - x) cm
$x(6 - x) = 2{,}4^2$; $x^2 - 6x + 5{,}76 = 0$; $x_1 = 4{,}8$; $x_2 = 1{,}2$
Die Diagonalenabschnitte sind 4,8 cm und 1,2 cm lang.

13. Anzahl der Affen: x ($x \in N$, $x > 0$)
$(\frac{x}{8})^2 + 12 = x$; $x^2 - 64x + 768 = 0$; $x_1 = 48$; $x_2 = 16$
Zur Schar gehören 48 oder 16 Affen.

14.*

	Alter		
	vor 2 Jahren	jetzt	in 12 Jahren
Enkel	(x - 2) Jahre	x Jahre ($x \in R$, $x > 0$)	(x + 12) Jahre
Großvater	10(x-2) Jahre	[10(x-2)+2] Jahre	[10(x-2)+14] Jahre

$\frac{10(x - 2) + 14}{x + 12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10(x - 2) + 2}{x}$;
$x^2 - 11{,}4x + 21{,}6 = 0$; $x_1 = 9$; ($x_2 = 2{,}4$)
Der Großvater ist 72 Jahre alt.

15. 1. Brigade: x h ($x \in R$, $x > 0$); 2. Brigade: (x + 2) h
$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{10}$; $x^2 - 18x - 20 = 0$; $x_1 \approx 19$; ($x_2 \approx 1$)
Die eine Brigade benötigt allein etwa 19 Stunden, die andere etwa 21 Stunden.

16. Früher wurden x Werkstücke pro Stunde hergestellt, jetzt sind es (x + 3) Werkstücke pro Stunde. ($x \in R$, $x > 0$)
$\frac{720}{8(x + 3)} = \frac{720}{8x} - 1$; $x^2 + 3x - 270 = 0$; ($x_1 = -18$); $x_2 = 15$
Früher wurden 15 Werkstücke pro Stunde hergestellt.

17. Zur Klasse gehören x Schüler. ($x \in N$, $x > 0$).
$\frac{880}{x - 2} = \frac{880}{x} + 4$; $x^2 - 2x - 440 = 0$; ($x_1 = -20$); $x_2 = 22$
Es gehören 22 Schüler zur Klasse.

18. ursprüngliches Format: x Seiten ($x \in N$, $x > 0$);
$\frac{20\,000}{x}$ Zeilen pro Seite
neues Format: $(\frac{20\,000}{x} + 10)$ Zeilen pro Seite
$(x - 100) \cdot (\frac{20\,000}{x} + 10) = 20\,000$; $x^2 - 100x - 200\,000 = 0$;
$x_1 = 500$; ($x_2 = -400$)
Das Buch hat jetzt 500 Seiten zu je 40 Zeilen.

19. 1. Widerstand: x Ω ($x \in R$, $x > 0$); 2. Widerstand: (40 - x) Ω
$\frac{1}{x} + \frac{1}{40 - x} = \frac{1}{7{,}5}$; $x^2 - 40x + 300 = 0$; $x_1 = 30$; $x_2 = 10$
Die beiden Widerstände müssen 30 Ω und 10 Ω sein.

20. Eindrucktiefe: h = x mm ($x \in R$, $x > 0$)
$(\frac{D}{2})^2 = (\frac{D}{2} - h)^2 + (\frac{d}{2})^2$; $5^2 = (5-x)^2 + 3^2$; $x^2 - 10x + 9 = 0$;
($x_1 = 9$); $x_2 = 1$
Die Eindrucktiefe beträgt 1 mm.

21.* Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges: $v = x\ km \cdot h^{-1}$
($x \in R$, $x > 0$)
Windgeschwindigkeit: $v_W = 28{,}8\ km \cdot h^{-1}$; $t = \frac{s}{v}$
$\frac{50}{x + 28{,}8} + \frac{50}{x - 28{,}8} = 0{,}158$; $x^2 - 632{,}911\,39x - 829{,}44 = 0$;
$x_1 = 634{,}219\,21$ (SR1); ($x_2 = -1{,}307\,81$)
Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges beträgt ungefähr 630 $km \cdot h^{-1}$.

22.* Geschwindigkeit des Güterzuges: $v_G = x\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ($x \in R$, $x > 0$)
Geschwindigkeit des Schnellzuges: $v_S = (x + 20)\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$\frac{150}{x} - 1 = \frac{150}{x + 20}$; $x^2 + 20x - 3\,000 = 0$;
($x_1 = -65{,}677\,644$); $x_2 = 45{,}677\,644$ (SR1)
Die Züge treffen sich etwa 12.17 Uhr.

23.* Geschwindigkeit des Bootes: $v = x\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ($x \in R$, $x > 0$)
Geschwindigkeit der Strömung: $v_S = 6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$\frac{12}{x + 6} + \frac{12}{x - 6} = 0{,}37$; $x^2 - 64{,}864\,865x - 36 = 0$;
$x_1 = 65{,}415\,197$ (SR1); ($x_2 = -0{,}550\,331$)
Die Geschwindigkeit des Bootes beträgt rund $65\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Lerneinheit C 15: Zur Wiederholung

1. a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{1}{z^3}$ c) $a \cdot b^2$ d) $\frac{1}{v^2}$

2. a) $(\frac{b}{a})^3$ b) $\frac{32a^{10}}{243b^{20}}$ c) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{16a^4}$
 d) $4^3 = 64$ e) $18a^4$ f) $\frac{u}{v}$

3. a) $\sqrt[3]{a^2}$ b) $\sqrt[6]{z^{-5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{z^5}}$ c) $\sqrt[5]{32} = 2$

4. a) $x^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{-\frac{1}{2}}$ c) $a^{\frac{4}{3}}$

5. a) 30 b) 10 c) $\frac{2}{3}$

6.* a) $5 \cdot \sqrt{2}$ b) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $a \cdot \sqrt[5]{a^2}$

7. a) 13.00 Uhr < t < 13.01 Uhr
 13.03 Uhr < t < 13.04 Uhr
 b) 13.07 Uhr < t < 13.08 Uhr
 13.08 Uhr und 30 s < t < 13.09 Uhr
 c) 13.01 Uhr < t < 13.03 Uhr
 13.04 Uhr < t < 13.07 Uhr
 13.08 Uhr < t < 13.08 Uhr und 30 s

8. a) wachsend: $-4 \leqq x \leqq 0$; $1 \leqq x \leqq 3$
 fallend: $-6 \leqq x \leqq -4$; $0 \leqq x \leqq 1$; $3 \leqq x \leqq 5$
 b) $f(x) > 0$ für $-1 < x < 1$ und für $1 < x < 4$
 $f(x) < 0$ für $-6 < x < -1$ und für $4 < x < 5$
 c) $x_1 = -6$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$ d) $-3 \leqq y \leqq 2$

9.

	a)	b)	c)	d)
Wertebereich	$y \geqq 0$	$y \geqq -\frac{17}{4}$	$y \leqq 6{,}25$	$y \geqq 2$
Nullstellen	1,5	$\frac{1}{2}(-3+\sqrt{17})$; $\frac{1}{2}(-3-\sqrt{17})$	3	$\neg$
monoton wachsend	$1{,}5 \leqq x$	$-1{,}5 \leqq x$	$0 < x \leqq \frac{1}{2}$	$x \geqq 0$
monoton fallend	$x \leqq 1{,}5$	$x \leqq -1{,}5$	$\frac{1}{2} \leqq x$	$x \geqq 0$
Quadranten	II, I	II, III, IV, I	I, IV	II, I
Symmetrieachse	$x = 1{,}5$	$x = -1{,}5$	-	$x = 0$

Lerneinheit C 16: Die Funktion $y = x^3$ ($x \in R$); der Begriff "Potenzfunktion"

● 68 Für alle x ist $f(-x) = f(x)$, d. h., zu einander entgegengesetzten Argumenten gehören jeweils dieselben Funktionswerte.

● 69 a) $y = x$ b) $y = x^2 - 1$; $y = |x|$

● 70 c); d); f)

● 71 0^{-1} ist nicht definiert.
(Für $x < 0$ ist $x^{\frac{1}{3}}$ nicht definiert.)

● 72 a) R b) R, $x \neq 0$ c) R, $x \underset{(=)}{>} 0$ d) R, $x \neq 0$

1.

x	-1,8	-1,8	-1,6	-1,3	-1,0	-0,5	0	0,8	1,0	1,3	1,4	1,6
y	-5,8	-5,8	-4,2	-2,2	-1,0	-0,1	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0

2. $f(x) = 4$ für $x \in \{-2;\ 2\}$
 $f(x) > 4$ z. B. für $x = -3;\ -2{,}5;\ 2{,}1;\ 3;\ 4$
 $f(x) > 4$ genau für alle x mit $x < -2$ oder $x > 2$,
 d. h. für alle x mit $|x| > 2$.

3. a) $f(1{,}9) < f(2{,}2)$ b) $f(-2{,}8) > f(-1{,}4)$ c) $f(-3{,}1) > f(2{,}6)$
d) $f(-1{,}7) < f(2{,}4)$ e)* $f(x_1) < f(x_2)$ f)* $f(x_1) < f(x_2)$

4. $0{,}23 > 0{,}23^2$ $1{,}47 < 1{,}47^2$ $0{,}23 > 0{,}23^3$
$1{,}47 < 1{,}47^3$ $0{,}23^2 > 0{,}23^3$ $1{,}47^2 < 1{,}47^3$

5.

Argumente	Funktionswerte a)	b)
x_0	a)	b)
$2x_0$	$\cdot 4$	$\cdot 8$
$3x_0$	$\cdot 9$	$\cdot 27$
$\frac{x_0}{2}$	$:4$	$:8$
$\frac{x_0}{3}$	$:9$	$:27$
$\frac{x_0}{10}$	$:100$	$:1\,000$

Hinweis: Die hier symbolisch dargestellten Änderungen sind im Unterricht sprachlich korrekt zu formulieren.
Muster: Wird das Argument verdoppelt, so vervierfacht sich der zugehörige Funktionswert.

6. $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{243}{125}$ (wahr)
$y = x^3$ ist monoton wachsend.
Für $x > \frac{7}{5}$ ist deshalb $x^3 > \left(\frac{7}{5}\right)^3$, und
für $x < \frac{7}{5}$ ist $x^3 < \left(\frac{7}{5}\right)^3$.

7. a) $1 \leqq y \leqq 9$ b) $0 \leqq y \leqq 4$
c) $0 \leqq y \leqq 4$ d) $0 \leqq y \leqq 9$

8. a) $m = 7$
b) Es erfüllen z. B. die folgenden Intervalle die Bedingungen der Aufgabe: $0 \leqq x \leqq 5$; $-2 \leqq x \leqq 5$; $-5 \leqq x \leqq 0$; $-5 \leqq x < 3$.
Grund: Monotonieverhalten (und Symmetrie)

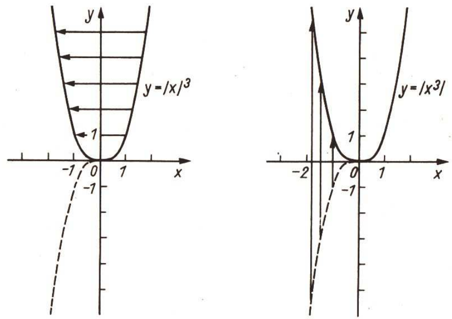
9. $a = -2$; $b = 5$
Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich (streng) monoton wachsend.

10. Hinweis zu a): Mit Blick auf die Teilaufgabe b) sollte hier der Zusammenhang zwischen den Zahlenwerten dargestellt werden. Derselbe Graph läßt sich dann für Größenangaben mit den Einheiten mm/mm^3, cm/cm^3, dm/dm^3 bzw. m/m^3 nutzen.

b)

a	2,2 m	0,7 cm	3,5 dm	1,3 mm	2,8 cm
V	11 m^3	0,3 cm^3	43 dm^3	2,2 mm^3	22 cm^3
V	2 m^3	10 cm^3	25 dm^3	33 mm^3	50 cm^3
a	1,3 m	2,2 cm	2,9 dm	3,2 mm	3,7 cm

11.*



12.* Wegen $|x|^2 = x^2$ sind beide Graphen identisch.

13.* Die Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 1 und verschieden von 0 sind.

14.* a) Intervall $x > 1$
b) Intervall $x \leqq 1$
c) Intervalle $-\sqrt{2} < x < 0$ und $\sqrt{2} < x$
Hinweis: Die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von $y = x^3$ und $y = 2x$ ergeben sich als Lösungen der Gleichung $x^3 = 2x$.

15.* a) $y = f(x)$ ist genau dann eine Potenzfunktion, wenn $f(x) = x^n$ $(n \in Q)$.
Für alle Argumente x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich gilt: $f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2)^n = x_1^n \cdot x_2^n = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

b) Bei β) ist die unter a) bewiesene Eigenschaft von Potenzfunktionen verletzt:
Es ist $2 \cdot 3 = 6$, aber $f(6) \neq f(2) \cdot f(3)$. $(729 \neq 9 \cdot 27)$

Lerneinheit C 17: Die Potenzfunktionen $y = x^{-1}$ und $y = x^{-2}$ $(x \in R,\ x \neq 0)$

● 73 $y = x^{-1}$: x $\boxed{1/x}$

$y = x^{-2}$: x $\boxed{x^2}$ $\boxed{1/x}$ oder x $\boxed{1/x}$ $\boxed{x^2}$

● 74 Für Argumente außerhalb des angegebenen Intervalls nähern sich mit wachsendem Betrag der Abszissen die Ordinaten immer mehr der 0, ohne diese zu erreichen. Die Graphen schmiegen sich jeweils der Abszissenachse an, ohne sie zu berühren.

● 75

Wertebereich	
Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen.	Menge aller positiven reellen Zahlen
Nullstellen	
keine	keine
Graph	
Bild C 25	Bild C 26
Lage des Graphen	
I. und II. Quadrant	I. und II. Quadrant
Monotonieverhalten	
Die Funktion ist fallend im Intervall $x < 0$ und auch im Intervall $x > 0$.	Die Funktion ist wachsend im Intervall $x < 0$, sie ist fallend im Intervall $x > 0$.
Symmetrie des Graphen	
Der Graph ist zentralsymmetrisch bez. des Koordinatenursprungs.	Der Graph ist axialsymmetrisch bez. der y-Achse.

● 76 a) z. B. 1 001; 10 000; 100 000; -10 000; -10^6; -10^9

b) z. B. $\frac{1}{1\,001}$; $\frac{1}{10^4}$; 10^{-5}; -10^{-5}; -10^{-6}; -10^{-9}

● 78 Jeweils gleiches Symmetrieverhalten, gleiche Quadranten; Definitionsbereiche (Wertebereiche) unterscheiden sich jeweils nur um das Element 0.

1.

x	-10^5	-350	-10^{-5}	$-\frac{1}{350}$	-2,75	0	-	0,125	0,25	4	10^7
y	-10^{-5}	$-\frac{1}{350}$	-10^5	-350	$-0,\overline{36}$	-	0	8	4	0,25	10^{-7}

2.

x	-100	-43	-	-0,2 0,2	-3	3	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y	10^{-4}	$5,4 \cdot 10^{-4}$	-25	25	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1,0	0,7	0,5	0,4	0,3

3. a)

x	2	3	-1	-4
f(x)	0,5	0,3	-1,0	-0,25

b)

f(x)	-3	-2	4
x	-0,3	-0,5	0,25

c) Menge aller positiven reellen Zahlen $(x > 0)$
d) $f(1) = 1,0$; $f(1,5) = 0,7$; $f(2) = 0,5$; $f(2,5) = 0,4$
e) $x = 0,3$ f) Intervall $0,3 \leqq y \leqq 1$

4. A ja, B nein, C nein, D nein, E ja, F ja, G ja

5.

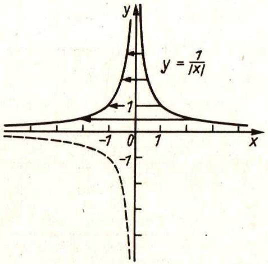
Argument	Funktionswert bei a)	Funktionswert bei b)
verdoppelt	halbiert	geviertelt
verdreifacht	gedrittelt	geneuntelt
halbiert	verdoppelt	vervierfacht

6. a)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	+1	+2	$+\frac{5}{2}$
y	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{25}$

d) P (-1;1); Q(1;1)
e) Axialsymmetrie; Funktionswerte nicht negativ; II. und I. Quadrant

7.*



8.* a); c); d)

Lerneinheit C 18: Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ $(x \in R,\ x \geqq 0)$

● 79

a)

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$x^{\frac{1}{2}}$	0,707 10	1	1,414 213 6	1,732 050 8	2	2,236 068
$x^{\frac{1}{3}}$	0,793 701	1	1,259 92	1,442 25	1,587 4	1,709 98

Hinweis: $x^{\frac{1}{2}}$ wurde mit Hilfe des Ablaufplans x $\boxed{\sqrt{\ }}$ berechnet.

Die Werte für $x^{\frac{1}{3}}$ wurden nach folgendem Ablaufplan (Nutzen der Konstantenautomatik) gewonnen:

1 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ | x $\boxed{=}$ $[x^{\frac{1}{3}}]$

b) Es ist jeweils "<" einzusetzen.

● 80 a) (Siehe Hinweis zu ● 79!)

x	0,2	0,5	0,8	1
$\sqrt{x}$	0,447 213 6	0,707 10	0,894 42	1
$\sqrt[3]{x}$	0,584 804	0,793 701	0,928 318	1

x	1,5	2	5
$\sqrt{x}$	1,224 744 9	1,414 213 6	2,236 068
$\sqrt[3]{x}$	1,144 71	1,259 92	1,709 98

b) Für $0 < x < 1$ ist $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x} > x$.
Für $x = 1$ ist $\sqrt[3]{x} = \sqrt{x} = x$.
Für $x > 1$ ist $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x$.

● 82 Nullstelle: $x = 0$; I. Quadrant

Beide Funktionen sind monoton wachsend.

Gemeinsame Punkte der Graphen: P(0;0); Q(1;1)

Für $0 < x < 1$ verläuft der Graph von $y = x^{\frac{1}{2}}$ "unterhalb" des Graphen von $y = x^{\frac{1}{3}}$, für $x > 1$ "oberhalb".

● 83 Es seien a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(1) P(a;b) gehört zum Graphen von $y = x^{\frac{1}{2}}$.

(2) $b = a^{\frac{1}{2}}$

(3) $b^2 = a$

(4) $a = b^2$

(5) Q(b;a) gehört zum Graphen von $y = x^2$.

1. a) 1,1; 1,7; 2,8 b) 4,8; 0,5; 1,0
c) 1,6; 2,3; 2,9 d) 1,4; 2,9; 6,3

2.

x	1,2	1,4	1,8	2,0	2,5	3,7	4,0	65,3	169
y	1,10	1,18	1,34	1,41	1,58	1,92	2,00	8,08	13,0

3. Punkte A, B, E

4. a) 1,1; 1,4; 2,1 b) 10,6; 2,7; 0,5
   c) 0,8; 1,8; 2,0 d) 0,1; 4,9; 9,3

5. r, f, f, f, r, f, r, r, r, f (r - richtig; f - falsch)

6. Punkte A und C

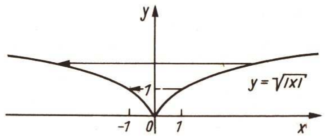
7. a) $\sqrt{72}$ b) 5 c) $\sqrt[3]{0,1}$ d) $\sqrt[3]{127}$ e) $\sqrt{1} = \sqrt[3]{1}$
   Hinweis: Es ist jeweils die Monotonie auszunutzen.

8. a) $x = 4$ b) $0 \leqq x < 4$ c) $x > 4$

9.* a) $L = \{0;1\}$ b) L ist die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.
   c) $L = \{0;4\}$ d) L ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 4 sind.

10.* a) positiv b) negativ c) negativ
   d) positiv e) negativ f) positiv g) negativ

11.*



Definitionsbereich: Menge aller reellen Zahlen;
Wertebereich: Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen;
axialsymmetrisch bez. y-Achse; II. und I. Quadrant;
für $x < 0$ monoton fallend, für $x > 0$ monoton wachsend;
Nullstelle: 0

Lerneinheit C 19: Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$ und $y = a \cdot x^{-1}$

● 85 Der Graph von $y = 1,5\,x^2$ ist eine Parabel, hat mit dem Graphen von $y = x^2$ den Scheitel P(0;0) gemeinsam und verläuft außerhalb dieses gemeinsamen Scheitels "oberhalb" des Graphen von $y = x^2$. Der Graph von $y = -1,5\,x^2$ ist symmetrisch zum Graphen von $y = 1,5\,x^2$ bez. der x-Achse.

● 86 Man wähle einige Punkte des Graphen von $y = x^2$.
Aus diesen Punkten gewinnt man Punkte des gesuchten Graphen, indem man ihre Ordinaten
a) verdoppelt b) mit -2 multipliziert
c) halbiert d) mit $-\frac{1}{2}$ multipliziert
und die Abszissen beibehält.

● 88
$0 < a < 1$ steigende Gerade, "flacher" als Graph von $y = x$
$a = 1$ identisch mit Graphen von $y = x$
$a > 1$ steigende Gerade, "steiler" als Graph von $y = x$
$a < -1$ fallende Gerade, "steiler" als Graph von $y = x$
$a = -1$ fallende Gerade, symmetrisch zum Graphen von $y = x$ bez. x-Achse
-1 a 0 fallende Gerade, "flacher" als Graph von $y = x$

● 89

x		2	4	6	8	10	
y	a)	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	proportional
	b)	4	16	36	64	100	-
	c)	60	30	20	15	12	umgekehrt proportional

● 90 a) $h = 1\,000\ \text{cm}^3 \cdot \frac{1}{A_G}$

b) geeignete Achsenteilung:
Abszissenachse (A_G): 1 cm entspricht $A_G = 20\ \text{cm}^2$.
Ordinatenachse (h): 1 cm entspricht $h = 2$ cm.

c)

A_G	50 cm^2	100 cm^2	150 cm^2	200 cm^2
h	20 cm	10 cm	6,7 cm	5 cm

● 91 a) $R = 0,01\overline{3}\ \frac{\Omega}{\text{m}} \cdot l$
(Dies ergibt sich aus $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ für $\varrho = 0,017\ \frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$ und $A = 1,5\ \text{mm}^2$.)
b) geeignete Achsenteilung:
Abszissenachse (l): 1 cm entspricht $l = 10$ m.
Ordinatenachse (R): 10 cm entspricht $R = 1\,\Omega$.
c) Der Draht darf nicht länger als 44 m sein.

1. $a = \frac{1}{3}$; 1,5; -1; -2

2. a) Für alle a ist $a \cdot 1^2 = a$, d. h. $f(1) = a$.
   b) a = 2,7 bzw. a = -3,92

3. a) III. und I. Quadrant b) III. und IV. Quadrant
   c) III. und I. Quadrant d) II. und IV. Quadrant

4. $x\ cm \cdot y\ cm = 15\ cm^2$; $y = \frac{15}{x}$ bzw. $y = 15 \cdot x^{-1}$

5. a)

	Flugzeit		
Strecke	Typ (a)	Typ (b)	Typ (c)
300 km	0,86 h	0,3 h	0,12 h
1 000 km	2,86 h	1,1 h	0,4 h
1 200 km	3,43 h	1,3 h	0,48 h

b)

	Strecke		
Flugzeit	Typ (a)	Typ (b)	Typ (c)
0,5 h	175 km	450 km	1 250 km
1,25 h	437,5 km	1 125 km	3 125 km
2 h	700 km	1 800 km	5 000 km

c) Typ (a) : $s = 350\ \frac{km}{h} \cdot t$

Typ (b) : $s = 900\ \frac{km}{h} \cdot t$

Typ (c) : $s = 2\ 500\ \frac{km}{h} \cdot t$

<u>Hinweis:</u> Den Diagrammen können nur recht grobe Näherungswerte entnommen werden. Die hier angegeben Werte wurden rechnerisch ermittelt, nachdem zuerst Teilaufgabe c) gelöst wurde.

1.

Nr.	Quadratische Funktion $y=(x+d)^2+e$	Quadratische Funktion $y=x^2+px+q$	Scheitel	Nullstellen	Wertebereich
1.	$y=(x+4)^2-3$	$y=x^2+8x+13$	S(-4;-3)	$x_1 \approx -2,3$ $x_2 \approx -5,7$	alle $y \in R$ mit $y \geqq -3$
2.	$y=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$	$y=x^2-3x+4$	S(1,5;1,75)	keine	alle $y \in R$ mit $y \geqq 1,75$
3.	$y=(x+2)^2-2$	$y=x^2+4x+2$	S(-2;-2)	$x_1 \approx -0,6$ $x_2 \approx -3,4$	alle $y \in R$ mit $y \geqq -2$
4.	$y=(x-1)^2-4$	$y=x^2-2x-3$	S(1;-4)	$x_1 = -1$ $x_2 = 3$	alle $y \in R$ mit $y \geqq -4$
5.	$y=(x-4)^2$	$y=x^2-8x+16$	S(4;0)	$x_{1/2}=4$	alle $y \in R$ mit $y \geqq 0$
6.	$y=(x-1)^2-2$	$y=x^2-2x-1$	S(1;-2)	$x_1 \approx 2,4$ $x_2 \approx -0,4$	alle $y \in R$ mit $y \geqq -2$

2.

Nr.	Gleichung der Funktion	Symmetrieachse des Graphen	Monotonie-Verhalten
1.	$y = (x+3)^2$	$x = -3$	monoton fallend für $x \leqq -3$ monoton steigend für $x \geqq -3$
2.	$y = x^2 - 2x + 1$ $y = (x-1)^2$	$x = 1$	monoton fallend für $x \leqq 1$ monoton steigend für $x \geqq 1$
3.	$y = (x-1)^2 + 2$	$x = 1$	monoton fallend für $x \leqq 1$ monoton steigend für $x \geqq 1$
4.	$y = x^2 - 8x + 19$ $y = (x-4)^2 + 3$	$x = 4$	monoton fallend für $x \leqq 4$ monoton steigend für $x \geqq 4$
5.	$y = x^{-2}$	$x = 0$	monoton fallend für $x > 0$ monoton steigend für $x < 0$
6.	$y = 6x^2$	$x = 0$	monoton fallend für $x \leqq 0$ monoton steigend für $x \geqq 0$

3. a) $x^2 - 4x - 5 = 0$; $P_1\ (5;12)$, $P_2\ (-1;0)$
   b) $x^2 - 4 = 0$; $P_1\ (2;2)$, $P_2\ (-2;2)$
   c) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0$; $P_1\ (1{,}5;-4{,}7)$, $P_2\ (-0{,}9;-1{,}5)$ (auf eine Stelle nach dem Komma gerundet)
   d) $x^2 + 4x = 0$; $P_1\ (0;-4)$, $P_2\ (-4;4)$
   e) $x^2 - 5{,}2x + 4{,}2 = 0$; $P_1\ (4{,}2;1{,}12)$, $P_2\ (1;-4)$
   f) $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = 0$; $P_1\ (1{,}1;\ 2{,}8)$, $P_2\ (-2{,}4;-1{,}9)$ (auf eine Stelle nach dem Komma gerundet)

4. a) Für $x_1 \approx 4{,}2$ [4.1925824] und für $x_2 \approx -1{,}2$ [-1.1925824] ist der Funktionswert -2.
   b) Es gibt keine Argumente, denen der Funktionswert -2 zugeordnet wird.

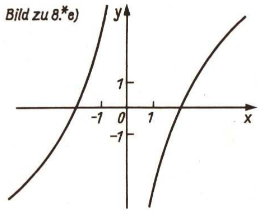
5. $y = x^2 - 2x - 3$

6. (a) $y = (x+1)^2 - 2{,}5$ bzw. $y = x^2 + 2x - 1{,}5$
   (b) $y = -x^2$
   (c) $y = (x-3)^2$ bzw. $y = x^2 - 6x + 9$
   (d) $y = \frac{1}{2}x + 2$
   (e) $y = -x^3$
   (f) $y = \frac{1}{x}$

7. a), b), c) $x_1 = 5 - \sqrt{2} \approx 3{,}6$ [3.5857864]
   $x_2 = 5 + \sqrt{2} \approx 6{,}4$ [6.4142136]

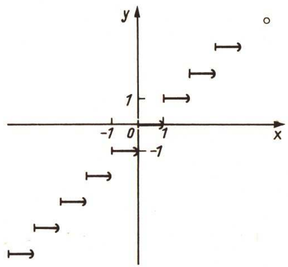
8.* a) $x_1 = 1$;
   $x_2 \approx -2{,}8$ [-2.8284271];
   $x_3 \approx 2{,}8$ [2.8284271]
   b) $x_1 = 0$;
   $x_2 \approx -3{,}6$ [-3.558422];
   $x_3 \approx 5{,}1$ [5.058422]
   c) $x_1 \approx -0{,}9$ (-0,88);
   $x_2 \approx 1{,}4$ (1,35);
   $x_3 \approx 2{,}5$ (2,53)
   d) $x_1 \approx -2{,}4$ (-2,39);
   $x_2 \approx 0{,}8$ (0,81);
   $x_3 \approx 2{,}6$ (2,58)
   e) $x_1 = -2$;
   $x_2 = 2$

*Bild zu 8.*e)*



9.* a) Die Funktion hat genau eine Nullstelle $x_0 \approx 0{,}430$.
   b) Die Funktion hat genau eine Nullstelle $x_0 \approx 1{,}47$.
   c) Die Funktion hat genau eine Nullstelle $x_0 \approx -1{,}70$.

10.* a) $f(0) = 0$; $f(1{,}5) = 1$;
   $f(-2{,}6) = -3$; $f(\pi) = 3$;
   $f(\sqrt{15}) = 3$
   b)



11. $y = -x^2 + 9$ ($x \in R$, $x > 0$)

12. a) $S(0;0)$; $A(-50;-10)$; $y = ax^2$; $-10 = a \cdot (-50)^2$; $a = -0{,}004$;
$y = -0{,}004\ x^2$

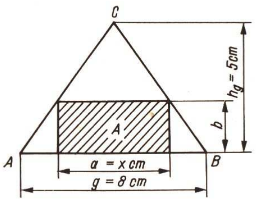
b) Die Abstände der eingezeichneten Streben werden als gleich angenommen.
Die Streben haben folgende Längen: 3,6 m; 6,4 m; 8,4 m; 9,6 m; 10 m; 9,6 m; 8,4 m; 6,4 m; 3,6 m.

13. $y = -0{,}2\ x^2$

14.* $y = -0{,}1\ x^2 + x$
Der Körper trifft nach 10 Metern wieder auf dem Erdboden auf.

15. $a = x$ cm, $b = (6 - x)$ cm; $f(x) = -x^2 + 6x$
Das Rechteck mit $a = b = 3$ cm (Quadrat) hat den größten Flächeninhalt. ($A = 9\ \text{cm}^2$)

16.*



$A = a \cdot b$

Strahlensatz:

$g : a = h_g : (h_g - b)$

$A(a) = -\frac{h_g}{g} a^2 + h_g a$

$f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 5x$

Der größte Funktionswert ist $f(4) = 10$.
Die Rechteckseiten sind $a = 4$ cm und $b = 2{,}5$ cm.

17. $x_1 = 4$; $x_2 = -5$; $x^2 + 2x - 80 = 0$; $x^2 + 3x - 180 = 0$;
$x^2 + 4x - 320 = 0$

18. a) $L = \{64\}$ b) $L = \{13\}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \{-6;6\}$
e) $L = \{8\}$ f) $L = \{6\}$ g) $L = \{-2\}$ h) $L = \{-3\}$
i) $L = \{-8;-2\}$ k) $L = \{0;10\}$ l) $L = \{-3;0;2\}$ m) $L = \{1\}$
n) $L = \{15\ 625\}$ o) $L = \emptyset$ p) $L = R$

19. a) $x^2 (x - 2) = 0$; $L = \{0;2\}$ b) $x (x^2-1) = 0$; $L = \{-1;0;1\}$
c) $x^2 (x^2+3) = 0$; $L = \{0\}$ d) $x(x^2-x-6) = 0$; $L = \{-2;0;3\}$
e) $x^2(x^2+x-6) = 0$; $L = \{-3;0;2\}$ f) $x(x^2+2x-48) = 0$; $L = \{-8;0;6\}$

20. a) $L = \{-4;3\}$ b)* $L = \{-\frac{1}{3}\}$
c)* $L = \{-3;-2;-1;0;1\}$ d)* $L = \{-2;-1;0;1;2\}$

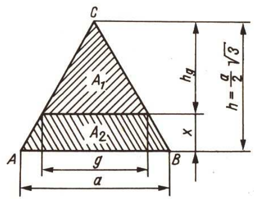
21. (a) Nur $x_1 = 2$ ist Lösung der Ausgangsgleichung; $x_2 = -2$ ist nicht Lösung, da $\sqrt{2\cdot(-2)+5} = -2+1$ eine falsche Aussage ist.
b) (1) $L = \{4\}$ (2) $L = \{9\}$ (3) $L = \{2{,}5\}$
(4) $L = \emptyset$ (5) $L = \{1{,}5\}$

22. Man erhält die Primzahlen 31, 37, 47, 61, 79, 101, 127, 157, 191, 229, 271, 317, 367, 421, 479, 541, 607, 677, 751, 829, 911, 997, 1 087, 1 181, 1 279, 1 381, 1 487, 1 597.

23. erste natürliche Zahl: x ($x \in N$); zweite natürliche Zahl: y ($y \in N$)
(I) $(x^2 + y^2)(y - x) = 313$ | $x^2+x-156=0$; $x_1=12$; $(x_2= -13)$
(II) $y - x = 1$
Die gesuchten natürlichen Zahlen sind 12 und 13.

24. Kaltwasserhahn allein: x min ($x \in R$, $x > 0$)
Warmwasserhahn allein: $(x + 7{,}5)$ min
$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 7{,}5} = \frac{1}{9}$; $x^2 - 10{,}5x - 67{,}5 = 0$; $x_1 = 15$; $(x_2 = -4{,}5)$
Der Kaltwasserhahn allein benötigt 15 Minuten, der Warmwasserhahn allein benötigt 22,5 Minuten, um die Wanne zu füllen.

25.*



$x = h - h_g$; Strahlensatz:

$a : \frac{a}{2}\sqrt{3} = g : h_g$; $h_g = \frac{g}{2}\sqrt{3}$

$A_1 = A_2$:

$\frac{1}{2}\cdot g \cdot \frac{g}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(a+g)(\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{g}{2}\sqrt{3})$;

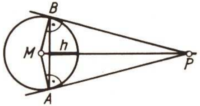
$g = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $h_g = \frac{a}{4}\sqrt{6}$;

$x = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $x \approx 2$ cm
[2.0292237]

Der Schnitt ist im Abstand von ungefähr 2 Zentimetern von der Dreieckseite zu führen.

26. Das Rohr ist 10 m lang. [10.185916]

27.



$\overline{MP} = x$ (x in cm); $\frac{1}{3} O_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 = 192\,\pi\ cm^2$

Kugelkappe: $A = 2\pi \cdot r \cdot h$;
$192\,\pi\ cm^2 = 24\,\pi\ cm \cdot h$;
$h = 8$ cm

Kathetensatz: $r^2 = x \cdot (r-h)$;
$x = 36$ cm

Die Lichtquelle muß sich im Abstand von 36 cm vom Kugelmittelpunkt befinden.

28. a) $t_1 = 2$ h $\quad t_2 = 1{,}1$ h $= 66$ min $\quad t_3 = 0{,}9$ h $= 54$ min
b) mindestens $v = 40\ km \cdot h^{-1}$
c) Die Produkte aus den in a) bzw. b) ermittelten jeweils zusammengehörigen Geschwindigkeiten und Zeiten betragen 40 km; 38,5 km; 40,5 km; 40 km $\quad (s = v \cdot t)$. Die Punkte A und B sind etwa 40 km voneinander entfernt.
d) $t = f(v) = \frac{s}{v} = 40\ km \cdot \frac{1}{v}$

29. a) 0,1 A; 0,05 A
b) Die Produkte aus den in a) ermittelten jeweils zusammengehörigen Stromstärken und Widerständen betragen jeweils 5 V. $(U = I \cdot R)$
Die Spannungsquelle liefert etwa 5 V.
c) Es sind Stromstärken zwischen 0,2 A und 8 A darzustellen. $(I = \frac{U}{R})$
Eine mögliche Achseneinteilung wäre:
Abszissenachse: 1 cm $\triangleq$ 20 Ω,
Ordinatenachse: 1 cm $\triangleq$ 1 A.
d) Kurzschluß: R wird sehr klein. Da U konstant ist, wird gemäß $I = \frac{U}{R}$ die Stromstärke I sehr groß.
Korrosion: R wird immer größer. Da U konstant ist, wird gemäß $I = \frac{U}{R}$ die Stromstärke immer kleiner.

30. a) $x = 3$; $y = -4$
b) $S(3;-4)$; $y = (x-3)^2 - 4$; $y = x^2 - 6x + 5$
c) $P_1(1;0)$; $P_2(5;0)$

d) $x^2 - 6x + 5 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $P_1(1;0)$; $P_2(5;0)$
e) $u = 13$ cm [12.944272]; $A = 8\ cm^2$

31. b) (1) und (2): $x^2 + 4x - 12 = 0$; $P_1(2;2)$
(1) und (3): $x^2 - 4x - 12 = 0$; $P_2(-2;2)$
(2) und (3): $-2x + 6 = 2x + 6$; $P_3(0;6)$
c) $y = 0 \cdot x + 2$, d. h. $y = 2$
d) Bei 1 cm als Einheit auf den Koordinatenachsen hat das Trapez den Flächeninhalt $A = 10\ cm^2$.

32. Die Strecke $\overline{AC}$ ist 4 cm lang.

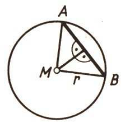
33. a) $\overline{AP_2} = \overline{CP_1} = x$ cm; $A_{Qu} = 225\ cm^2$;
$225\ cm^2 = \frac{15\,(x + 15)}{2}\ cm^2 + 25\ cm^2 + \frac{(15-x)(15+x)}{2}\ cm^2$;
$x^2 - 15x + 50 = 0$; $x_1 = 10$; $x_2 = 5$.
Es gibt zwei Lösungen: $\overline{AP_2} = \overline{CP_1} = 10$ cm und $\overline{AP_2} = \overline{CP_1} = 5$ cm.

b)

	1. Lösung	2. Lösung
A_1	187,5 cm^2	150 cm^2
A_2	25 cm^2	25 cm^2
A_3	12,5 cm^2	50 cm^2

34. a) $7 < x < 9$; z. B.: 7,5; 8,1; 8,999
b) Nein; die natürliche Zahl 0 hat keinen Vorgänger.
c) Vorgänger: $n - 1$; Nachfolger: $n + 1$
d) $(n - 1)(n + 1) = 483$; $n^2 = 484$; $n = 22$
Für die natürliche Zahl 22 ist das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger 483.
e) $300 < (n - 1)(n + 1) < 400$
Die Zahlen $323 = 17 \cdot 19$, $360 = 18 \cdot 20$ und $399 = 19 \cdot 21$ erfüllen die Bedingung.

35.



a) $\overline{AB} = x$ cm $(x \in R)$;
$(x - 2)^2 = (\frac{x}{2})^2 + 8^2$;
$x^2 - \frac{16}{3}x - 80 = 0$; $x_1 = 12$;
$(x_2 = -\frac{20}{3})$
Der Radius des Kreises beträgt 10 cm.
b) $A_{Kreis} = 100\,\pi\ cm^2$ [314.15927]

c) $A_{Dreieck\ ABM} = 48\ cm^2$

d) $u = 20\,\pi$ cm $\boxed{62.831853}$

e) $\sphericalangle$ AMB $\approx 74^\circ$ $\boxed{73.739794}$

f) b $\approx$ 12,9 cm $\boxed{12.915436}$

h) $\frac{48\ cm^2}{108\ cm^2} = \frac{4}{9}$

Die Flächeninhalte von Original und Bild stehen im Verhältnis 4 : 9.

D Körperdarstellung und Körperberechnung

Lerneinheit D 1: Geometrische Körper

● 1

Topf:	Zylinder
Vase:	zusammengesetzt aus zwei "abgeschnittenen" Kegeln (Kegelstümpfen)
Fabrik:	Prisma, Kegelstumpf
Bleistift:	sechsseitiges Prisma, Kegel
Ball:	Kugel
Kelle:	Halbkugel
Briefumschlag:	Prismen
Burg:	Quader und andere Prismen, Zylinder, Kegel, Pyramide, Kugel
Ziegelstein:	Quader
Spielwürfel:	Würfel
Feuerwehrdepot:	Prismen, Pyramide, Zylinder, Teil einer Kugel

● 2 a) Kugel b) n-seitige Pyramide c) Kegel
d) n-seitiges Prisma e) Zylinder

● 4

	Körper	Grundfläche
(a)	Zylinder	Kreis
(b)	dreiseitiges Prisma	Dreieck
(c)	Kegel	Kreis
(d)	vierseitige Pyramide	Viereck
(e)	achtseitiges Prisma	Achteck
(f)	vierseitiges Prisma (Quader)	Viereck (Rechteck)

● 6

Körper	erzeugende Figur	Lage der Rotationsachse
(gerader) Zylinder	Rechteck	Seite des Rechtecks
(gerader) Kegel	rechtwinkliges Dreieck	Kathete des Dreiecks
Kugel	Halbkreis	Durchmesser des Halbkreises

● 7 a) Bei <u>geraden</u> Prismen stehen die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche.

b) Bei <u>geraden</u> Zylindern bzw. Kegeln steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche (und verläuft durch deren Mittelpunkt).

c) Pyramiden heißen <u>gerade</u>, wenn die Grundfläche einen Mittelpunkt (bei regelmäßigen n-Ecken der Umkreismittelpunkt, bei Rechtecken bzw. Rhomben der Diagonalenschnittpunkt) besitzt und das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot die Grundfläche in diesem Mittelpunkt schneidet.

1. (a) vierseitige Pyramide (b) vierseitiges Prisma
(c) dreiseitiges Prisma (d) dreiseitiges Prisma
(e) vierseitige Pyramide (f) dreiseitiges Prisma
(g) vierseitiges Prisma

2. a) und d) nicht geeignet b) und c) geeignet

3. (a) dreiseitiges Prisma (b) vierseitige Pyramide
(c) vierseitiges Prisma (d) (Kreis-)Kegel
(e) dreiseitige Pyramide (regelmäßiges Tetraeder)

4.

	zur Kante	parallel	senkrecht	windschief
a)	$\overline{AB}$	$\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{HG}$, $\overline{EF}$	$\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$	$\overline{EH}$, $\overline{FG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$
	$\overline{CG}$	$\overline{CG}$, $\overline{BF}$, $\overline{AE}$, $\overline{DH}$	$\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$	$\overline{EF}$, $\overline{AB}$, $\overline{EH}$, $\overline{AD}$
b)	$\overline{IK}$	$\overline{IK}$, $\overline{ML}$	$\overline{IM}$, $\overline{KL}$	$\overline{SM}$, $\overline{SL}$
	$\overline{KS}$	$\overline{KS}$	-	$\overline{ML}$, $\overline{IM}$

<u>Hinweis:</u> Zwei Geraden sind windschief, wenn sie nicht in derselben Ebene liegen.

6. (a) Zylinder (Kreis) (b) Kegel (Kreis)
(c) Prisma (Dreieck) (d) Pyramide (Rechteck)

● 8 a) $V = A_G \cdot h = (a \cdot b) \cdot c = \underline{a \cdot b \cdot c}$

b) $V = A_G \cdot h = (r^2 \cdot \pi) \cdot h = \underline{\pi \cdot r^2 \cdot h}$

c) $V = (\frac{2}{3} A_G \cdot h) \cdot 2 = (\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{d}{2}) \cdot 2 = \underline{\frac{1}{6} \pi \cdot d^3}$

d) $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \underline{\frac{1}{3} a^2 \cdot h}$

● 9 $A_O = 2 A_G + A_M$

a) $A_O = 2(a \cdot b) + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

b) $A_O = 2 a^2 + 4 a^2 = 6 a^2$

c) $A_O = 2(r^2 \cdot \pi) + 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot r(r+h)$

1. $V \approx 100 \text{ cm}^3 = 1{,}0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$ [100.368]
$A_O \approx 190 \text{ cm}^2 = 1{,}9 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ [192.46581]

2. $m \approx 24\,000 \text{ g} = 24 \text{ kg}$ [23738.4]

3. $m \approx 44\,000 \text{ g} = 44 \text{ kg}$ [43779.45]

4. $V_{Behälter} \approx 2{,}26 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$ [2261946.7]
$V_{Lauge} = 2{,}4 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$
Der Behälter kann die 3 000 kg Lauge nicht fassen.

5. $r \approx 5 \text{ cm}$ [5.3665631] $A_O \approx 6 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ [604.29339]

6. $V = \frac{a^3}{2\pi} = \frac{b^3}{16\pi}$

7. $m \approx 8{,}6 \cdot 10^2 \text{ g}$ [861.4836]

8.* a) $A_O = 76 \text{ cm}^2$ b) Prisma c) $V_E = 24 \text{ cm}^3$
$V = 40 \text{ cm}^3$

9.* $V_{Würfel} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ m}^3$ $V_{Kugel} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \text{ m}^3$
Aus $6 > \pi$ folgt $\frac{1}{6} < \frac{1}{\pi}$ ($f(x) = \frac{1}{x}$ ist monoton fallend),
daraus folgt $\sqrt{\frac{1}{6}} < \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ ($g(x) = \sqrt{x}$ ist monoton wachsend),
woraus man $\frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{6}} < \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, d. h. $V_{Würfel} < V_{Kugel}$ erhält.

10.* 950 dm^3 [949.74811]
<u>Hinweis:</u> Dasselbe gerundete Ergebnis erhält man auch bei <u>falscher</u> Rechnung: $V = 1\,000 \text{ dm}^3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm}$.

Lerneinheit D 3: Schrägbilder und Zweitafelbilder

● 12 (a) z. B. Quader, "Pult", Zylinder (liegend), dreiseitiges Prisma
(b) Pyramide, "Doppelpyramide", Quader mit "aufgesetzter" Pyramide, "Gewölbe"
(c) Zylinder, "schräg abgeschnittener" Zylinder, Kugel, Halbkugel
- Höhenmaßstab - Koten - Zweitafelbild

● 13 Breitenrichtung: Kanten $\overline{AB}$, $\overline{DC}$
Höhenrichtung: Kanten $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$
Tiefenrichtung: Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$, $\overline{FG}$, $\overline{IK}$

● 14 (a) "Pult" (b) Quader mit "ausgefräster" Pyramide
(c) "halber" Zylinder, liegend
(d) "abgeschnittener" Zylinder
(e) Quader oder liegender Zylinder

1. Grundriß C

2. b) $A_O = 282\ cm^2 \approx 280\ cm^2$

5.* (b) und (c)

Lerneinheit D 4 enthält nur zeichnerisch zu lösende Aufgaben.

Lerneinheit D 5: Bestimmung von Strecken und Flächen an Körpern

● 20 $V = 35\ cm^3$ $A_O = 79\ cm^2$

1. c) $\overline{PS} = \sqrt{58}\ cm \approx 7{,}6\ cm$ [7.6157731]

2. $\overline{AM} \approx 61\ mm$ [61.237244]

3. $A = 378\ mm^2 \approx 380\ mm^2$

4.* $A \approx 320\ mm^2 = 3{,}2 \cdot 10^2\ mm^2$ [320.7803]

5.

	r	h	s
K_1	5,3 cm	17,8 cm	19 cm [18.572291]
K_2	12,7 cm [12.727922]	12,3 cm	17,7 cm
K_3	2,2 cm [2.1503186]	3,8 cm	4,4 cm [4.3662192]
K_4	6,0 cm [5.9769288]	8,0 cm [8.0172516]	10 cm

	A_M	A_O	V
K_1	$3{,}1 \cdot 10^2 cm^2$ [309.23684]	$4{,}0 \cdot 10^2 cm^2$ [397.48417]	$5{,}2 \cdot 10^2 cm^3$ [523.60087]
K_2	$708\ cm^2$ [707.75125]	$1{,}22 \cdot 10^3 cm^2$ [1216.6892]	$2{,}09 \cdot 10^3 cm^3$ [2086.6458]
K_3	$29\ cm^2$ [29.495666]	$44\ cm^2$ [44.021982]	$18{,}4\ cm^3$
K_4	$1{,}9 \cdot 10^2 cm^2$ [187.77076]	$300\ cm^2$	$3{,}0 \cdot 10^2 cm^3$ [299.92336]

Hinweis: Die Taschenrechneranzeigen hängen ab vom jeweils gewählten Lösungsweg.

7.* $V_e : V : V_u = \frac{\pi}{6} : 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \pi : 6 : 3\sqrt{3}\,\pi$

Lerneinheit D 6: Volumenberechnung bei zusammengesetzten Körpern

● 23 $V \approx 94\ cm^3$ [93.734518] $m \approx 740\ g$ [735.81597]

1. (a) und (g), (b) und (h), (c) und (k), (d) und (i), (e) und (m), (f) und (l)

2. $V = 156\ 000\ cm^3$

3. $V \approx 22{,}8\ cm^3$ [22.807963] ; $m \approx 178\ g$ [177.90211]

4. b) $V \approx 89\ cm^3$ [89.204476] c) $h \approx 1{,}5\ cm$ [1.4666667]

5. $m \approx 610\ g = 0{,}610\ kg$ [614.45352]

6. $V = 205\ cm^3 \approx 210\ cm^3$

7. Bild D 45: $A_O = 56\ cm^2$ Bild D 46: $A_O = 57\ cm^2$
   $V = 17\ cm^3$ $V = 13\ cm^3$

8.* $V \approx 7{,}8\ dm^3$ [7.8298155] $A_O \approx 22\ dm^2$ [22.184477]

Lerneinheit D 7: Berechnung und Darstellung von Pyramiden- und Kegelstümpfen

● 24 a) $V_o = 72\ cm^3$ b) $A_S = \frac{1}{4} A_G$ c) $l' = 2\ cm$

● 25 $A'_O = 150\ cm^2$

● 26 Ein Pyramidenstumpf hat 2 in parallelen Ebenen liegende, zueinander ähnliche n-Ecke als Grund- bzw. Deckfläche und n Trapeze als Seitenflächen.

● 28 $V_{St} = 315\ cm^3$

● 29 Höhe: 9 cm Volumen: $108\ cm^3$

● 30 a) $V = 76\ cm^3$

b) $A_D \longrightarrow A_G$: $V = \frac{1}{3} h\,(A_G + A_G + A_G) = A_G h$; <u>Zylinder</u>

$A_D \longrightarrow 0$: $V = \frac{1}{3} h\,(A_G + 0 + 0) = \frac{1}{3} A_G h$; <u>Kegel</u>

c) Gleichungen siehe b); es entsteht ein <u>Prisma</u> bzw. eine <u>Pyramide</u>.

1. Netz 4 paßt.

2. Die Körper (a) und (d) sind aus Pyramiden entstanden.

3. b) $V \approx 980\ m^3 = 9{,}8 \cdot 10^2\ m^3$ [976.5]

4. b) $r = 2{,}0\ cm$ c) $V \approx 40\ cm^3$ [39.793507]

6.* a) $r \approx 6{,}9\ m$ [6.9282032] b) $V \approx 200\ m^3 = 2{,}0 \cdot 10^2\ m^3$ [201.06193]

c) $m \approx 440\ t = 4{,}4 \cdot 10^2 t$ [442.33624] d) $r_1 : r_2 = 1 : 2$
$V_1 : V_2 = 1 : 8$

Lerneinheit D 8: Berechnung und Darstellung weiterer Körper

● 31 $A_O = 480\,\pi\ cm^2 \approx 1\ 500\ cm^2 = 1{,}5 \cdot 10^3\ cm^2$ [1507.9645]

1. a) $A \approx 99{,}0\ m^2$ [98.95599] ; $V \approx 80{,}0\ m^3$ [80.028]

2.*

Inhalte der Dachflächen:	$51{,}1\ m^2$	[51.053109]
	$71{,}5\ m^2$	[71.474353]
	$40{,}8\ m^2$	[40.842488]
	$61{,}3\ m^2$	[61.263731]
	$20{,}4\ m^2$	[20.421244]
Volumen des Dachraumes:	$311\ m^3$	[310.94133]

3. $V \approx 13{,}6\ m^3$ [13.688814] (Der Sachverhalt legt Abrunden nahe.)

4. bei 115 mm [114.738]

5. Es entsteht ein "Doppelkegel", d. h. ein Körper, der aus zwei zueinander kongruenten, an ihren Grundflächen zusammengesetzten Kegeln besteht.
   Für jeden dieser Kegel gilt:
   Grundkreisdurchmesser = Länge der Diagonalen des Quadrats;
   Körperhöhe = Hälfte der Länge der Diagonalen des Quadrats;
   Länge einer Mantellinie = Seitenlänge des Quadrats.

6.* a) $A_S = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$; Abstand: $\frac{a}{3}\sqrt{3}$

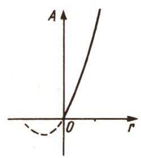
b) $V = \frac{1}{6} a^3$; $V' = \frac{5}{6} a^3$

Lerneinheit D 9: Gegenseitige Abhängigkeit von Volumen, Oberflächeninhalt und anderen Bestimmungsstücken an Körpern

● 32 Das Volumen wird verdoppelt.

● 33 $A_O = 2\,\pi \cdot r^2 + 2\,\pi \cdot r \cdot h$

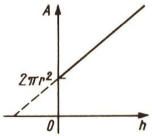
$A(r) = 2\,\pi \cdot r^2 + 2\,\pi \cdot h \cdot \underline{r}$
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
mit $a = 2\,\pi$ und $b = 2\,\pi \cdot h$



$A(h) = 2\pi \cdot r \cdot \underline{h} + 2\pi \cdot r^2$

$f(x) = m \cdot x + n$

mit $m = 2\pi \cdot r$ und $n = 2\pi \cdot r^2$



1. <u>formale Lösung:</u> Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$; $V_2 = (\frac{1}{2})^3 \cdot V_1 = 4\ cm^3$;

$A_{02} = (\frac{1}{2})^2 \cdot A_{01} = \frac{1}{4} A_{01}$.

<u>Lösung durch funktionale Betrachtung:</u> Beim Halbieren des Quaders (in einer Kantenrichtung) wird das Volumen halbiert. Beim Halbieren in einer zweiten Kantenrichtung wird das Restvolumen nochmals halbiert, das Volumen also insgesamt geviertelt. Bei der dritten Halbierung entsteht $\frac{1}{8}$ des ursprünglichen Volumens. Beim beschriebenen Vorgang wird letztendlich jede Seitenfläche geviertelt, also auch die gesamte Oberfläche.

2. z. B. 1. Kante a vervierfachen, b und c unverändert lassen;
   2. Kante b vervierfachen, a und c unverändert lassen;
   3. Kante c vervierfachen, a und b unverändert lassen;
   4. Kanten a und b verdoppeln, Kante c unverändert lassen;
   (5.) Kante a vervierfachen, Kante b verdoppeln, Kante c halbieren;
   (6.) Kanten a und b vervierfachen, Kante c vierteln

3. z. B. alle übrigen Kanten dritteln

4. a) $V = \frac{\pi}{4} a^3$ $\quad A_0 = \frac{3\pi}{2} a^2$

   b) $V = \pi a^3$ $\quad A_0 = 4\pi a^2$

5. a) $\frac{A_0}{V} = \frac{3}{r} = 3 \cdot \frac{1}{r}$ $\quad$ b)* $\frac{A_0}{V} = \frac{2}{r} + \frac{2}{h} = 2 \cdot \frac{1}{r} + \frac{2}{h}$

   c)* $\frac{A_0}{V} = \frac{2}{h} + \frac{2}{r} = 2 \cdot \frac{1}{h} + \frac{2}{r}$

6. $h = \frac{1\,000\ cm^3}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$

r in cm	4	6	8	10	12	14	16
h in cm	20	8,8	5,0	3,2	2,2	1,6	1,2

7. $l = \frac{100\ cm^2}{\pi} \cdot \frac{1}{r}$

r in cm	4	8	12	16	20	24
l in cm	8,0	4,0	2,7	2,0	1,6	1,3

Inhalt

A Arbeiten mit Variablen

B Ungleichungen und Gleichungssysteme

C Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen; Potenzfunktionen

Kurzwort: 002207 LOESUNGSH. MATHE 9
ISBN 3-06-002207-0