# Aufgabensammlung

# "Abituraufgaben"

# 306 Aufgaben und Lösungen der schriftlichen Reifeprüfung Mathematik der Erweiterten Oberschulen der DDR

Zusammenstellung, Lösungen und Zeichnungen: Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2018-2022

# Vorwort

Mit der Gründung der Sowjetischen Besatzungszone und der Verwaltung durch die Sowjetische Militäradministration Deutschland (SMAD) ab Juni 1945 kam es zur Umsetzung der Grundsätze der Potsdamer Konferenz. Dazu gehörte eine vollständige Änderung des Bildungssystem.

Nach der Gründung der Deutschen Zentralverwaltung für Volksbildung (DVV) am 27. Juni 1945, welche "die Tätigkeit der Schulverwaltungen in den Ländern und Provinzen zusammenfassen, koordinieren, anleiten und kontrollieren" soll, wird am 25. August 1945 der SMAD-Befehl Nr. 40 "Über die Vorbereitung der Schulen zum Schulbetrieb" erlassen, der dazu führt, dass am 01. Oktober 1945 die allgemeinbildenden Schulen mit neuen vorläufigen Stundentafeln ihren Dienst wieder aufnehmen können. In dieser Zeit kommt es zur Ausbildung vieler Neulehrer, um die fehlenden Lehrkräfte ersetzen zu können.

Mit dem "Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule" wird zwischen dem 22. Mai und dem 2. Juni 1946 einer der zentralsten Beschlüsse für die nachfolgende Zeit getroffen.
Dadurch wird die demokratische Einheitsschule geschaffen, welche die Dreigliedrigkeit des Schulsystems aufhebt, und auch die Koedukation (geschlechtsunabhängige Klassenbildung) umsetzt. Als eine weitere Folge werden die einklassigen Landschulen im Laufe der Zeit abgeschafft.

Mit der Gründung der DDR geht die DVV im Ministerium für Volksbildung (MfV) auf.
Die Bildungsstruktur der achtklassigen Einheitsschule bleibt grundsätzlich erhalten und wird 1951 auf eine Zehnjahresschule erweitert. Mit Einführung der Polytechnik geht diese im Schuljahr 1958/59 nahtlos in die polytechnische Oberschule (POS) über.

Die Erweiterte Oberschule (EOS) löste mit dem "Gesetz über die sozialistische Entwicklung des Schulwesens in der DDR" vom 2. Dezember 1959 die bisherige Oberschule ab.
Die EOS umfasste vier Klassenstufen (9 bis 12), ab 1981 die Klassen 11 und 12, und war in der DDR die Bildungseinrichtung, an der die Hochschulreife (Abitur) erworben werden konnte.
Daneben gab es weitere Möglichkeiten, etwa die Berufsausbildung mit Abitur, die Arbeiter-und-Bauern-Fakultät, die Volkshochschulen oder Spezialschulen und -klassen verschiedener Richtungen.

Ein erster Mathematiklehrplan wird durch die DVV am 01. Juli 1946 herausgegeben. Dieser wird am 15. März 1948 überarbeitet und mit weiteren Details versehen. Die Lehrpläne selbst sind reine Stoffpläne, in denen vereinzelt fachdidaktische Kommentare enthalten sind.

Ab 1945 werden in der achtklassigen Volksschule in den Klasse 1 bis 6 jeweils 4 bis 5 Wochenstunden Rechnen, in der Klassenstufe 7 und 8 je 2 Stunden Rechnen, Algebra und Geometrie unterrichtet, an den Oberschulen, getrennt für Jungen oder Mädchen, je Klasse 1 bis 9 jeweils 4 Mathematikstunden je Woche.

Ab 1946 werden an den Oberschulen wieder die Klassenstufen 9 bis 12 unterrichtet.
Bis zum Abiturjahrgang 1965 gab es dabei drei Spezialisierungsrichtungen (Zweige) mit unterschiedlichen Stundentafeln. Es waren dies: A neusprachliches, B mathematisch-naturwissenschaftliches und C altsprachliches Profil.
Die Mathematiklehrpläne der Zweige unterschieden sich vor allem im Anforderungsniveau.
Im A- und C-Zweig wurden in jeder Jahrgangsstufe 3 Wochenstunden Mathematik unterrichtet, im B-Zweig 5 bzw. 6 Stunden von Klasse 9 bis 12.

1951 bringt das Ministerium für Volksbildung den Lehrplan für die Zehnjahresschule heraus, welcher 1955/56 durch vorläufige Lehrpläne überarbeitet wurde und im Lehrplan zur Polytechnischen Oberschule 1959 mündet.

Ein wichtige Änderung des Mathematikunterrichts erfolgte am 17. Dezember 1962 mit dem sogenannten Mathematikbeschluss – "Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR".[1]
Der Mathematikunterricht erhielt einen wesentlich höheren Stellenwert.
Es war ein in der Geschichte des Mathematikunterrichts einmaliges Ereignis, da zu keinem anderen Unterrichtsfach jemals etwas Ähnliches beschlossen wurde, was die Wertschätzung und auch Anerkennung der Schwierigkeiten dieses Faches zum Ausdruck bringt.

U.a. wurde die Ausbildung von Lehrern für Mathematik und Naturwissenschaften stark erhöht, die Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ ins Leben gerufen, ein Institut für Schulmathematik an der Humboldt-

[1]Download: https://mathematikalpha.de/?smd_process_download=1&download_id=19079

Universität Berlin gegründet und eine „Zentrale Staatliche Kommission für Mathematik“ (ZSKM) berufen.
Die außerschulische Bildung mathematisch Begabter wurde wesentlich gefördert, eine landesweite Mathematikolympiade durchgeführt, Spezialklassen für Mathematik gebildet und vieles mehr.
Interessant ist, dass die Kinder- und Jugendmedien beauftragt wurden, regelmäßig Beiträge und Aufgaben zur Mathematik zu veröffentlichen und so das Interesse der Schüler zu wecken.
Ab 1967 wurde die erste deutsche mathematische Schülerzeitschrift "alpha" veröffentlicht.

Mit einer Übergangsstundentafel für die erweiterte zwölfklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule 1959 endete die Ära der Oberschule. Ab 1961 galt die Stundentafel für die erweiterte Oberschule. Im A- und C-Zweig wurden in jeder Jahrgangsstufe 3 Wochenstunden Mathematik unterrichtet, im B-Zweig 5 Stunden von Klasse 9 bis 11 und 4 Stunden in der Klassenstufe 12.
Ab 1966 gab es keine speziellen Profile mehr.

Nach der Abschaffung der unterschiedlichen Zweige wurden in der Klassenstufe 11 und 12 jeweils 5 Wochenstunden Mathematik gegeben.

Am Ende der 12. Klasse wurde von allen Schülern die zentrale Reifeprüfung abgelegt.
Zur schriftlichen Prüfung wurden vier Arbeiten unter Klausur geschrieben: Deutsch (5 Stunden), Mathematik (5 Stunden), Russisch (1,5 Stunden) und Naturwissenschaft (Physik oder Chemie oder Biologie, 5 Stunden).
Zusätzlich waren zwei bis fünf mündliche Prüfungen sowie eine Sportprüfung verpflichtend.

Die schriftliche Mathematik-Abiturprüfung musste von allen Schülern absolviert werden.
Als Hilfsmittel waren i.A. eine Formelsammlung, Zeichengeräte und ein Rechenstab zugelassen. Ab 1988 wurde der Taschenrechner SR 1 ("Schulrechner 1") eingesetzt.

Die Inhalte des Mathematikunterrichts waren eindeutig vorgeschrieben. Ebenso der zeitliche Rahmen für die Stoffgebiete.
Die Lehrpläne und -bücher wurden von führenden Mathematikdidaktikern erarbeitet. Diese landesweit einheitlichen Lehrbücher waren im Aufbau und Inhalt fächerübergreifend angepasst.
Nicht vorgeschrieben war, wie der Unterrichtsstoff zu vermitteln sei. Damit kam der methodischen Arbeit des Lehrers große Bedeutung zu. Aus diesem Grund beinhaltete die Lehrerausbildung in hohem Umfang Pädagogik, Psychologie, Didaktik und Methodik der Mathematik.

Die schriftliche Abiturprüfung wurden mit einer Note 1 bis 5 bewertet. Die Gesamtabiturnote ergab sich als arithmetisches Mittel der Jahresnote der Klasse 12 und dem Prüfungsergebnis.
Gegebenenfalls wurde eine zusätzliche mündliche Prüfung durchgeführt.

Im Nachfolgenden werden die schriftlichen Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen einzelner Jahrgänge aufgeführt.
Vielen Dank an Dieter Barth für die Hilfe bei der Bereitstellung der Originalaufgaben.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons “Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland” Lizenz.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Aufgaben und Lösungen

## 1.1 Abituraufgaben 1953 A

**Aufgabe 1**
Ein Flugzeug fliegt von Moskau ($\varphi_1 = 55°46'N; \lambda_1 = 37°34'O$) nach Wladiwostok ($\varphi_2 = 43°06'N; \lambda_2 = 131°36'O$).
Zu berechnen sind:

a) die Entfernung Moskau-Wladiwostok auf dem Großkreis,

b) der Kurswinkel bei dem Abflug von Moskau,

c) die geographische Breite des nördlichsten Punktes der Strecke Moskau-Wladiwostok!

a) im Kugeldreieck Moskau-Wladiwostok-Nordpol wird für (Moskau-Nordpol) $= a = 34{,}23°$, (Wladiwostok-Nordpol) $= b = 46{,}9°$ und der Polwinkel $\gamma = 94{,}03°$
Grundaufgabe SWS im sphärischen Dreieck:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \to c = 57{,}59°$$

d.h. die Entfernung Moskau-Wladiwostok (Erdradius 6378 km) ist $d =$ 6410 km

b) Abflugwinkel: $\sin \alpha = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin c} \to \alpha \approx 59{,}63°$

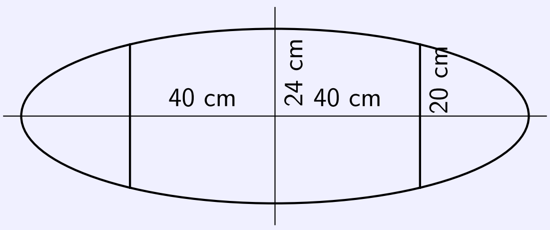
c) die geografische Breite $\varphi_N$ des nordpolnächsten Punktes $P(\lambda_N, \varphi_N)$ einer Orthodrome mit dem Kurswinkel $\alpha$ durch den Startpunkt $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ergibt sich nach der Neperschen Regel mit

$$\varphi_N = \arccos\left(\sin|\alpha| \cos \varphi_A\right) \approx 60{,}95°$$

**Aufgabe 2**
Untenstehende Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Fasses, das durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die große Achse in den eingezeichneten Grenzen entstehen soll.




a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Stücken die noch unbekannte große Halbachse a!

b) Berechnen sie das Volumen des Fasses in Litern! (Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)

a) kleine Halbachse = 24 cm, Ansatz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{24^2} = 1$
Einsetzen des Punkte $P(40{,}24)$ ergibt für $a^2 = \frac{57600}{11} \approx 5236{,}36 \to a = 72{,}36$ cm

b) Rotationskörper für $y^2 = \frac{57600-11x^2}{100}$ in den Grenzen -40 bis 40

$$V = \pi \int_{-40}^{40} y^2 dx = \pi \left[\frac{172800x - 11x^3}{300}\right]_{40}^{40} \approx 130000 = 130\ l$$

**Aufgabe 3**
Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven:

$$x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28$$

a) Lösung durch Rechnung!

b) Lösung durch Zeichnung!

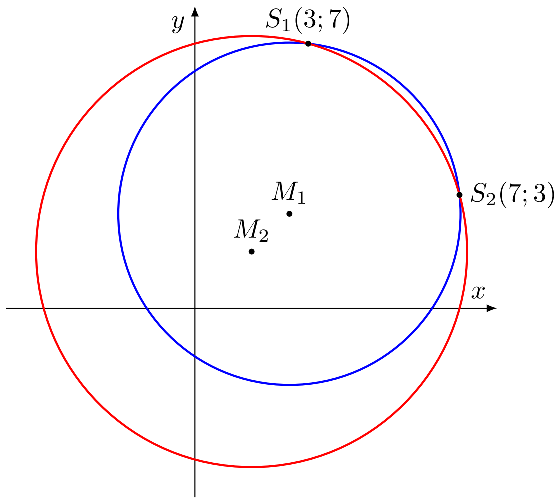
a) Kurven sind Kreise

$$x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \to (x - 2{,}5)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 20{,}5 \to M(2{,}5; 2{,}5), r = \sqrt{20{,}5}$$

$$x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28 \to (x - 1{,}5)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 32{,}5 \to M(1{,}5; 1{,}5), r = \sqrt{32{,}5}$$

Polare $2(x + y) = 20$ in 1.Kurve einsetzen, ergibt $x^2 - 10x + 21 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 3; x_2 = 7$
Schnittpunkte $S_1(3; 7), S_2(7; 3)$, Schnittwinkel $8{,}9°$

b)



## 1.2 Abituraufgaben 1954 A

**Aufgabe 1**
Ein sowjetischer Eisbrecher verlegte seinen Standort aus der Gegend südlich Spitzbergens ($\varphi_1 = 77°N; \lambda_1 = 18{,}33°O$) auf dem kürzesten Wege in die Gegend nördlich der Insel Nowaja Semlja ($\varphi_2 = \varphi_1; \lambda_2 = 68{,}73°O$).

a) Wieviel Kilometer ist die Fahrtstrecke auf dem Hauptkreisbogen kürzer als die auf dem 77.Breitenkreis?

b) Wieviel Seemeilen ist der nördlichste Punkt des Großkreisbogens vom 77.Breitenkreis entfernt? (Eine Planskizze wird gefordert.)

a) im Kugeldreieck Spitzbergen($A$)-Nowaja Semlja($B$)-Nordpol($N$) wird für $(AN)$ und $(BN) = a = b = 13°$ und der Polwinkel $\gamma = 50{,}4°$
Grundaufgabe SWS im sphärischen Dreieck:

$$\cos c = \cos^2 a + \sin^2 a \cos\gamma \to c = 10{,}99°$$

d.h. die Entfernung Spitzbergen-Nowaja Semlja ist auf dem Großkreis (Erdradius 6378 km) ist $d = 1220$ km
Entfernung längs des 77.Breitenkreises: $d = 2\pi r \cdot \cos 77° \cdot \frac{50{,}4°}{360°} = 1262$ km
der Großkreisweg ist um 42 km kürzer
Abflugwinkel: $\sin\alpha = \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin c} \to \alpha \approx 65{,}39°$

b) die geografische Breite $\varphi_N$ des nordpolnächsten Punktes $P(\lambda_N, \varphi_N)$ einer Orthodrome mit dem Kurswinkel $\alpha$ durch den Startpunkt $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ergibt sich nach der Neperschen Regel mit

$$\varphi_N = \arccos\left(\sin|\alpha| \cos\varphi_A\right) \approx 78{,}2°$$

Entfernung zum 77.Breitenkreises: $d = 2\pi r \cdot \frac{(78{,}2° - 77°)}{360°} = 134$ km

**Aufgabe 2**
Die Kurve der Funktion

$$y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{x}(4-x)$$

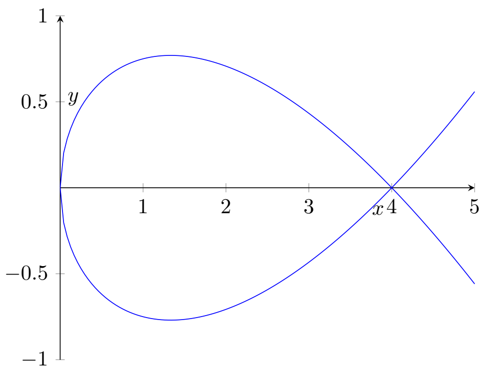
bildet eine Schleife.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und zeichnen Sie das Bild der Funktion im Bereich $x = 0$ bis $x = 5$!

b) Berechnen Sie die Fläche innerhalb der Schleife!

c) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Schleife um die x-Achse entsteht!

a) Nullstellen: $0 = \frac{1}{4}\sqrt{x}(4-x) \to x_1 = 0, x_2 = 4$




b)
$$A = 2\int_0^4 \frac{1}{4}\sqrt{x}(4-x)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{10}\sqrt{x^5}\right]_0^4 = \frac{64}{15}5 = 4{,}27 \text{ FE}$$

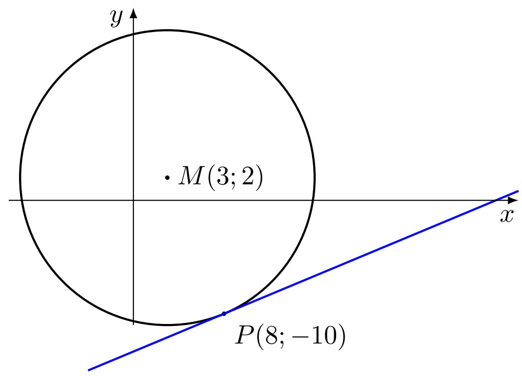
c) $$V = \pi \int\limits_0^4 \frac{1}{16} x(4-x)^2 dx = \left[\frac{(x-4)^3(3x+4)}{192}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\pi = 4{,}19 \text{ VE}$$

**Aufgabe 3**
Durch den Punkt $P_1(8;-10)$ des Kreises $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 156 = 0$ ist die Tangente gezeichnet.

a) Zeichnen Sie den Kreis und die Tangente mit der Koordinateneinheit 0,5 cm!

b) Berechnen Sie, wo und unter welchem Winkel die Tangente die x-Achse schneidet!

a) Kreisgleichung wird zu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 169$, d.h. $M(3;2), r = 13$
Tangente an einen Kreis bei Mittelpunkt $M(c;d)$:
$(x-c)(x_0-c) + (y-d)(y_0-_d) = r^2 \to 5x - 12y = 178 \to y = \frac{5}{12}x - \frac{40}{3}$




b) Nullstelle der Tangente $x = 32$; Schnittwinkel $m_T = \frac{5}{12} = \tan\alpha \to \alpha = 22{,}6°$

## 1.3 Abituraufgaben 1954 B

**Aufgabe 1**
An einem Vormittag, Ende April dieses Jahres, warf in Potsdam ($\varphi = 52{,}4°N; \lambda = 13{,}1°O$) ein senkrechter Stab von 1 m Länge einen waagerechten Schatten von 1,50 m in Richtung WNW.
(Zeitgleichung: -2,5 min)

a) In welcher Höhe stand die Sonne?

b) Wie groß war die Deklination? (Planskizze verlangt)

c) Um wieviel Uhr mitteleuropäischer Zeit erfolgte die Beobachtung?

a) Höhe der Sonne $\tan h = \frac{1\text{ m}}{1{,}50\text{ m}} = 0{,}667 \to h = 33{,}69°$

b) Umwandlung von Horizontkoordinaten in Äquatorkoordinaten
Schatten in Richtung WNW ($112{,}5°$) bedeutet, das Azimut $a = 292{,}5°$ ist.

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos a$$

Deklination $\delta = 14{,}19°$

c) Datum nach Zeitgleichung: 28.April; Mit

$$\cos h\sin a = \cos\delta\sin\tau \qquad , \qquad \sin\tau = \frac{\cos 33{,}69°\sin 292{,}5°}{\cos 13{,}95°}$$

ergibt sich für den Stundenwinkel $\tau_1 = -52{,}46°$ und $\tau_2 = 127{,}54°$, wobei der zweiter Wert entfällt, da bei einem Schatten in Richtung WNW die Beobachtung vormittags erfolgen muss.

Mit $\tau = -52{,}77°$ ergibt sich, dass die Sonne noch $-52{,}77°$ vor dem Meridian steht, also in $\frac{52{,}38}{360} \cdot 24 = 3{,}497$ h = 3 h29,8 min kulminiert. Abzüglich der 2,5 min Zeitgleichung also in 3 h 27 Minuten.

Damit ist die Beobachtungszeit 8:33 Uhr.

Anmerkung: Die Abweichung von der offiziellen Lösung 8:35 Uhr entsteht durch die Verwendung von Näherungswerten.

**Aufgabe 2**
Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 34 dm Umfang.
Wie lang sind die Rechteckseiten, wenn der Zylinder ein Volumen von 440 dm$^3$ hat und seine Höhe kleiner als sein Durchmesser ist?
(Berechnen Sie diese Rechteckseiten in Dezimeter auf zwei Dezimalstellen genau durch Näherungslösung!)

Ansatz $u + 2d + 2h = 34 \to h = 17 - d$
Zielfunktion

$$V = \pi\frac{d^2}{4}h = 440 \to -\frac{1}{4}(\pi d^3 - 17\pi d^2 + 1760) = 0$$

Test von Abszissen $x = 0{,}3{,}6{,}...$ ergibt für Funktion $y = d^3 - 17d^2 + \frac{1760}{\pi}$ Stellen mit Vorzeichenwechsel zwischen 6 und 9 bzw. 12 und 15. Nach Bedingung muss $d > h$ sein, d.h. der gesuchte Durchmesser liegt zwischen 12 und 15.
Regula falsi zur Nullstellenberechnung

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $x_2$ | $f(x_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 15 | 125,49 | -86,57 | 13,775 | 40,6 |
| 13,775 | 15 | 40,6 | -86,57 | 14,166 | 6,659 |
| 14,166 | 15 | 6,659 | -86,57 | 14,226 | 0,964 |
| 14,226 | 15 | 0,964 | -86,57 | 14,235 | 0,142 |
| 14,235 | 15 | 0,142 | -86,57 | 14,236 | |

Durchmesser $d = 14{,}24$ dm; $h = 2.76$ dm

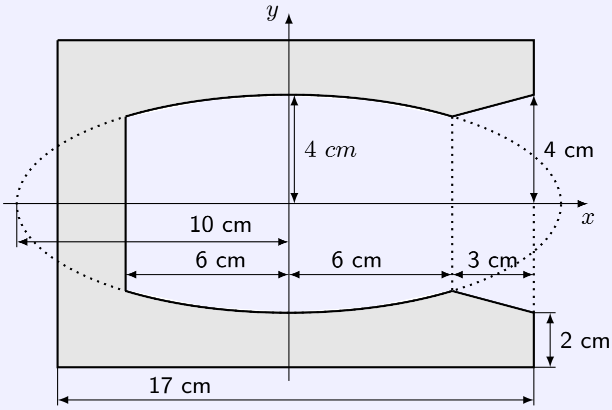
**Aufgabe 3**
Eine Gipsgussform ist ein Zylinder. Die Skizze zeigt den Achsenschnitt der Gipsform mit dem Hohlraum.

a) Stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf!

b) Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums, der durch Rotation der Ellipse um die x-Achse in den angegebenen Grenzen entsteht!

c) Wie groß ist das Gesamtvolumen des Hohlraums?
(Kegelstumpf elementar berechnen.)

d) Wie groß ist das Volumen des Gipskörpers?




a) Halbachsen $a = 10; b = 4$ ... Gleichung $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) oberer Funktionsstrang $y = \frac{2}{5}\sqrt{100 - x^2}$

$$V = \pi \int\limits_{-6}^{6} (\frac{2}{5}\sqrt{100 - x^2})^2 dx = \pi \left[\frac{4}{75}x(300 - x^2)\right]_{-6}^{6} = \frac{4224}{25}\pi \approx 530{,}8 \text{ cm}^3$$

c) Radius der linken Deckfläche des Kegelstumpfs $r = 3{,}2$, weiterhin $R = 4; h = 3$
Kegelstumpfvolumen $V_K = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r \cdot R + r^2) = \frac{956}{25}\pi$
Hohlraumvolumen $V_H = \frac{1036}{5}\pi \approx 650{,}9 \text{ cm}^3$

d) Volumen der Gipsform $V = \pi \cdot 6^2 \cdot 17 - V_H = \frac{2024}{5}\pi \approx 1272 \text{ cm}^3$

## 1.4 Abituraufgaben 1955 B

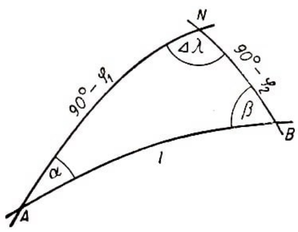
**Aufgabe 1**
Ein Frachtdampfer fährt von Auckland - Neuseeland - ($\varphi_1 = 36{,}8°$ S, $\lambda_1 = 174{,}8°$ O) nach Punta Arenas - Kostarika - ($\varphi_2 = 9{,}9°$ N, $\lambda_2 = 84{,}6°$ W).

a) Fertigen Sie eine Überlegungsskizze an.

b) Berechnen Sie den orthodromen Weg Dampfers in Seemeilen.

c) Berechnen Sie den Anfangskurs.

d) Bei welcher geographischen Länge und unter welchem Winkel wird der Äquator geschnitten?




a) Skizze:
A ... Auckland, B ... Punta Arenas, N ... Nordpol, $l$ ... Länge der Orthodrome

b) Seite $AN = 90° + |\varphi_1| = 126{,}8°$, Seite $NB = 90° - \varphi_2 = 80{,}1°$, Winkel $\Delta\lambda = (180° - \lambda_2) + \lambda_1 = 100{,}6°$
Mit dem Seitenkosinussatz wird für $AB = l$

$$\cos l = \cos AN \cos BN + \sin AN \sin BN \cdot \cos \Delta\lambda$$

$l = 104{,}36°$, d.h. $AB = l \approx 6262$ Seemeilen. (wenn man 60 Seemeilen je Grad ansetzt)

c) Den Anfangskurs liefert

$$\sin \alpha = \frac{\sin BN \cdot \sin \Delta\lambda}{\sin l}$$

was eine Himmelsrichtung von A nach B von $88{,}24°$ gegen Nord ergibt. Analog wird $\beta = 53{,}2°$.

d) Die Differenz der Längengrade $\Delta\lambda_2$ zwischen dem Schnittpunkt $Q$ mit dem Äquator und dem Zielpunkt $B$ kann mittels

$$\tan \Delta\lambda_2 = \sin |\varphi_2| \cdot \tan \beta$$

berechnet werden.
Damit wird $\Delta\lambda_2 = -13{,}5°$. Folglich hat der Schnittpunkt mit dem Äquator die geographische Länge $\lambda_Q = \lambda_2 - \Delta\lambda_2 = 98{,}1°$ W.
Die Länge der Orthodrome von $Q$ bis $B$ ist

$$\cos QB = \cos 90° \cos BN + \sin 90° \sin BN \cdot \cos \Delta\lambda_2 = \sin BN \cdot \cos |\Delta\lambda_2| = 0{,}9579; \qquad QB = 16{,}69°$$

Der Schnittwinkel wird wie bei c) berechnet:

$$\sin \alpha_Q = \frac{\sin BN \cdot \sin \Delta\lambda_2}{\sin QB} = 0{,}8007$$

und ein Winkel von $53{,}2°$ gegen Nord. Damit wird der Äquator unter dem Winkel $\varphi = 90° - 53{,}2° = 38{,}2°$ geschnitten.

**Aufgabe 2**
Aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Durchmesser $d$ soll ein Balken größter Tragfähigkeit hergestellte werden. Für die Tragfähigkeit gilt die Formel

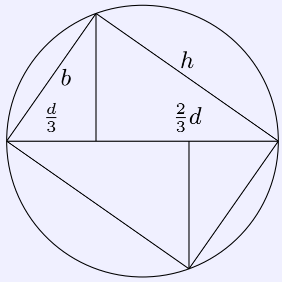
$$T = c \cdot b \cdot h^2$$

($c$ ist eine Materialkonstante, $b$ die Breite, $h$ die Höhe des rechteckigen Balkenquerschnittes).

a) Wie groß müssen $b$ und $h$ gewählt werden?

b) In welchem Verhältnis stehen $b$ und $h$ zueinander?

c) In der Praxis konstruiert man den Querschnitt des Balkens nach Abb. 55/B/2.




Der Durchmesser ist in drei gleiche Teile geteilt. Berechnen Sie nach der Konstruktionsfigur aus dem Durchmesser $d$ Breite und Höhe.
Vergleichen Sie die hier gewonnenen Ergebnisse mit denen der Aufgabe a).

a,b) Für die Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Beziehung $d = \sqrt{b^2 + h^2}$, d.h. $h = \sqrt{d^2 - b^2}$.
Einsetzen in Zielfunktion ergibt: $T = bc(d^2 - b^2)$.
1. Ableitung nach $b$: $T' = c(d^2 - 3b^2)$; 2. Ableitung $T'' = -6bc < 0$ für alle Werte $b$.

Nullsetzen der 1.Ableitung liefert: $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ und entsprechend $\frac{\sqrt{6}}{3}d$. Damit ergibt sich ein Verhältnis von $b : h = \sqrt{2} : 2$.

c) Nach der Abbildung gelten sowohl $b^2 + h^2 = d^2$ als auch $b^2 - \frac{d^2}{9} = h^2 - \frac{4d^2}{9}$.
Das Gleichungssystem liefert $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ und $h = \frac{\sqrt{6}}{3}d$ und damit genau die gleichen Werte der Aufgabe a).

**Aufgabe 3**
Von einem ebenen Dreieck sind folgende Stücke gegeben:

$$\gamma = 38°; \qquad \alpha = 112{,}5°; \qquad c = 12{,}2 \text{ cm}$$

a) Berechnen Sie die Länge der Seite $a$.

b) Welchen Einfluss haben die Winkelfehler $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \pm 0{,}2°$ auf das Ergebnis (absoluter und relativer Fehler)?

a) Nach Sinussatz ist $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, d.h. $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$.
Es ergibt sich $a = 18{,}31$ cm.

b) Der Wert von $a$ wird klein, wenn in $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$ der Wert von $\sin\alpha$ klein und $\sin\gamma$ groß ist.

Für die untere Grenze der Seitenlänge $a$ wird mit $\gamma = 38° + 0{,}2°$ und $\alpha = 112{,}5° - 0{,}2°$ damit $a_{\min} = 18{,}20$ cm. Für die obere Grenze wird analog $a_{\max} = 18{,}42$ cm.
Der maximale absolute Fehler ist somit $0{,}11$ cm. Der relative Fehler ist dann 0,006.

## 1.5 Abituraufgaben 1956 B

**Aufgabe 1**
Der Polarforscher Fridtjof Nansen ließ sich 1893-1896 in seinem Schiff "Fram" mit dem Eis des Polarmeeres nordwärts treiben.
Seiner Fahrt lag folgende Beobachtung zugrunde:
Aus der Gegend der Neusibirischen Inseln $P_1(\varphi_1 = 77°N; \lambda_1 = 140°O)$ geht eine Meeresströmung mit der mittleren Geschwindigkeit $v = 2\frac{\text{sm}}{\text{Tag}}$ über die Polargegend, die an der Ostküste Grönlands $P_2(\varphi_2 = 80°N; \lambda_2 = 10°W)$ das offene Meer wieder erreicht.

a) Welche Fahrtdauer ergibt sich daraus, wenn die Fahrt auf der Orthodrome planmäßig verläuft?

b) In welchem Abstand sollte die "Fram" unter diesen Voraussetzungen am Pol vorbeitreiben?

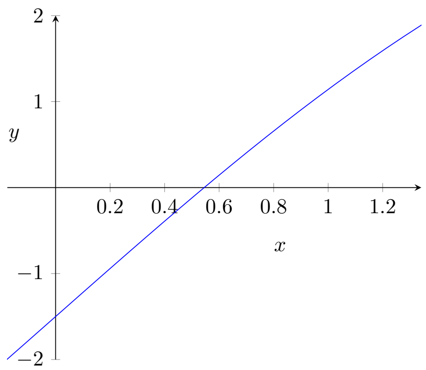
a) mit dem Polwinkel $\gamma = 150°$ und den Seiten $a = 23°$ und $b = 10°$ wird für den Abstand vom Start- zum Zielpunkt: $c = 32{,}03° = 3565$ km $= 1925$ sm sowie $\alpha = 21{,}62°$
Reisedauer 962 Tage

b) der nordpolnächste Punkt folgt aus $\varphi_N = \arccos(\sin|\alpha| \cos\varphi_A)$
Richtungswinkel $\alpha = 21{,}62°$ und $\varphi_A = 77°$ ergeben $\varphi_N = 85{,}25° = 529$ km

**Aufgabe 2**
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens die Lösung der Gleichung

$$\sin x + 1{,}8x - 1{,}5 = 0$$

im Bogenmaß auf drei Dezimalen genau!




Lösung mittels Newton-Verfahren,
1.Ableitung $f'(x) = \cos x + \frac{9}{5}$, d.h.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x + 1{,}8x - 1{,}5}{\cos x + 1{,}8}$$

mit $x_0 = 0$ werden die $x_i = 0{,}5357; 0{,}5452; 0{,}5452$, d.h. Lösung $x \approx 0{,}5452$.

**Aufgabe 3**
Die beigegebene, nicht maßstäbliche Skizze gibt den Achsenschnitt eines Kessels an.
Das Kurvenstück ist eine Parabel mit der Gleichung

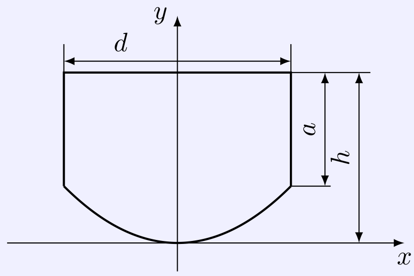
$$y = \frac{2h}{d^2}x^2$$

Berechnen Sie

a) die Fläche des Achsenschnittes,

b) die Größe $a$,

c) den Rauminhalt des Kessels, wenn die y-Achse die Rotationsachse dieses Drehkörpers ist!
Zahlenbeispiel: $h = 0{,}6$ m; $d = 1{,}0$ m.



a) $A = A_{\text{Rechteck}} - A_{\text{Fläche unter Parabel}}$, wobei das Rechteck die Maße d und h hat.

$$A = d \cdot h - 2\int\limits_0^{\frac{d}{2}} \frac{2h}{d^2}x^2 dx = dh - 2\left[\frac{2h}{3d^2}x^3\right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{5}{6}dh$$

b) Ansatz $a = h - f(\frac{d}{2}) = h - \frac{2h}{d^2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{h}{2}$

c) Rotation um y-Achse: Funktion wird $y = 1{,}2x^2$
Volumen des unteren Paraboloids

$$V_P = \pi\int\limits_{x_0}^{x_1} x^2 f'(x)dx = \pi = \int\limits_0^{0{,}5}(x^2 \cdot 2{,}4x)dx = \frac{3}{80}\pi$$

Volumen des oberen Zylinders $V_Z = \pi\frac{d^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \pi\frac{6}{80}$
Gesamtvolumen des Kessels $V = \frac{9}{80}\pi$ m$^3$

## 1.6 Abituraufgaben 1957 B

**Aufgabe 1**
Im März 1956 flog ein Düsenpassagierflugzeug TU-104 von Moskau ($\varphi_1 = 55{,}8°N$; $\lambda_1 = 37{,}4°$ O) über Berlin ($\varphi_2 = 52{,}4°N$; $\lambda_2 = 13{,}5°O$) nach London ($\varphi_3 = 51{,}3°N$; $\lambda_3 = 0{,}1°W$).
Die Flugzeit betrug $3\frac{1}{2}$ Stunden.

a) Wie groß ist der Flugweg, wenn orthodrome Kurse geflogen werden? (Skizze) ?

b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich für den berechneten Flug?

c) Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeuges betrug auf dem wirklichen Kurs 800 km/h.
Um wieviel km und wieviel Prozent war der tatsächlich geflogene Kurs länger als der von Ihnen unter a) berechnete Wert?

d) Berechnen Sie nun mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks die kürzeste Entfernung Berlin-London mit dem von den wahren Werten nur unbedeutend abweichenden Mittelwert $\varphi$ Berlin $= \varphi$ London $= 51{,}8°N$.
Um wie viel km weicht das Resultat von dem entsprechenden unter a) berechneten Wert ab? (Skizze)

a) Für die Länge einer orthodromen Flugbahn gilt

$$d = r \arccos(\cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2) + \sin\delta_1 \sin\delta_2)$$

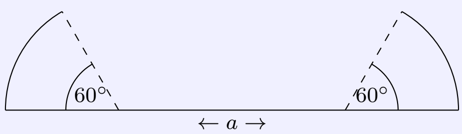
Mit einem Erdradius $r = 6378$ km ergeben sich als Flugstrecken
Moskau-Berlin: $d_1 = 1607$ km, Berlin-London: $d_2 = 918$ km, so dass der gesamte Flugweg 2525 km beträgt.

b) Mit einer Flugzeit $t = 3{,}5$ h erhält man $v = \frac{2525}{3{,}5} = 721{,}43 \approx 720$ km/h als Durchschnittsgeschwindigkeit.

c) Mit $v = 800$ km/h legt man in 3,5 Stunden 2800 km zurück. Der geflogene Kurs war folglich 275 km länger, d.h. 10,9 % länger.

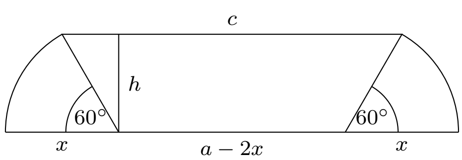
d) Die näherungsweise Entfernung Berlin-London ist 921 km, also 3 km mehr.

**Aufgabe 2**
Aus einem $a = 90$ cm breiten rechteckigen Blech soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden. Dazu biegt man an den Längsseiten gleichbreite Ränder um 60° hoch. (Siehe Skizze).




Wie breit müssen die Randstreifen gemacht werden, wenn der Querschnitt der Rinne möglichst groß werden soll? (Überlegungsfigur erforderlich).

Der Querschnitt der Rinne ist ein Trapez. Werden links und rechts Strecken der Länge $x$ hochgebogen, so hat das Trapez die Maße $a - 2x$, $c$ und $h$ (siehe Skizze).



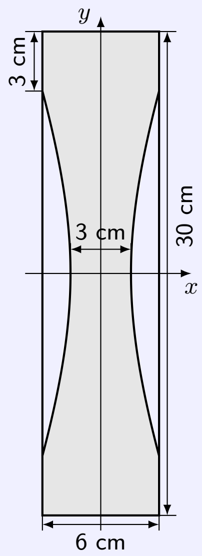

Es gilt $h = \sin 60° \cdot x$ und $c = a - 2x + 2\sin 30° x$. Für den Querschnitt der Rinne wird somit

$$A = \frac{a - 2x + c}{2} h = \frac{a - 2x + a - 2x + 2\sin 30° x}{2} \sin 60° x = \frac{\sqrt{3}}{4} x(2a - 3x)$$

1. Ableitung: $A' = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$, 2. Ableitung: $A'' = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Setzt man die 1.Ableitung gleich 0, so ergibt sich die extremwertverdächtige Stelle $x_E = \frac{a}{3}$.
Da die 2.Ableitung stets kleiner 0 ist, liegt an $x_E$ ein lokales Maximum für $A$ vor.

Mit $a = 90$ cm wird $x = 30$ cm. Links und rechts müssen jeweils 30 cm hochgebogen werden. Die Rinne hat einen Querschnitt von $\approx 1169$ cm$^3$.




**Aufgabe 3**
Es soll das Gewicht einer eisernen Schwungscheibe ($\gamma = 7{,}8$ p/cm$^3$) aus den Maßangaben des nebenstehenden Achsenschnittes berechnet werden.
Sie wird aus einer zylindrischen Scheibe (Durchmesser $d = 30$ cm, Dicke $h = 6$ cm) durch Ausdrehen der Vertiefungen hergestellt; die gezeichneten Bögen sind Teile einer Hyperbel.

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Wieviel verliert die Scheibe durch das Ausdrehen an Gewicht?

c) Wie schwer ist die fertige Schwungscheibe?

a) Auf Grund des Durchmessers $d = 3$ ist die Halbachse $a = 1{,}5$. Damit wird die Hyperbelgleichung bei Mittelpunktslage

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \to \qquad \frac{x^2}{1{,}5^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für $x = 3$ (halbe Dicke der Scheibe) wird $y = 12$. Einsetzen des Punktes $P(3;12)$ in die Gleichung und Umstellen ergibt $b = 4$ und für die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{2{,}25} - \frac{y^2}{48} = 1$$

b) Das Hyperboloid wird mittels Umkehrfunktion $\overline{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{x^2 + 48}$ in den Grenze $x_1 = -12$ bis $x_2 = 12$ berechnet. Volumen des Körpers:

$$V = \pi \int_{-12}^{12} \left[\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{x^2 + 48}\right]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{64}x(x^2 + 144)\right]_{-12}^{12} = 108\pi \approx 339{,}3 \text{ cm}^3$$

Der Zylinder hätte ein Volumen $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 24 \approx 678{,}6$ cm$^3$. Mit der gegebenen Wichte $\gamma$ wird Material von 339,3 cm$^3$ mit einem Gewicht von $G = 339{,}6 \cdot 7{,}8 \approx 2646{,}5$ p entfernt.

c) Der Scheibe ist die Summe zweier Zylinder ($r = 3$ cm, $h = 3$ cm) und des Rotationshyperboloids:

$$V_{\text{Scheibe}} = 2\pi r^2 h + V_{\text{Hyperboloid}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + 108\pi = 172\pi \approx 540{,}35 \text{ cm}^3$$

mit dem Gesamtgewicht $G = 540{,}35 \cdot 7{,}8 \approx 4215$ p $\approx 4{,}21$ kp.

## 1.7 Abituraufgaben 1958 B

**Aufgabe 1**
Die Bahn des Sputnik 1 lag in einer Ebene. welche die Erdoberfläche in einem Großkreis schneidet.
In einem bestimmten Zeitpunkt lagen Berlin ($B$) und ein Ort $P$ auf diesem Großkreis.
$B$ ($\varphi_1 = 52{,}5°N$; $\lambda_1 = 13{,}4°O$)
$P$ ($\varphi_2 = 34{,}4°N$; $\lambda_2 = 137{,}4°O$)

a) Wie viel Grad misst der Großkreisbogen von $B$ bis $P$?

b) In wie viel Minuten würde dieser Großkreisbogen durchlaufen, wenn für den ganzen Großkreis 96 Minuten benötigt werden?

c) Welche geographische Breite hat der nördlichste Punkt des unter a) errechneten Großkreisbogens?

a) Nach dem Seitenkosinussatz ergibt sich der Winkel $l$ des Großkreisbogens $BP$ zu

$$\cos l = -\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Delta\lambda = -0{,}702397$$

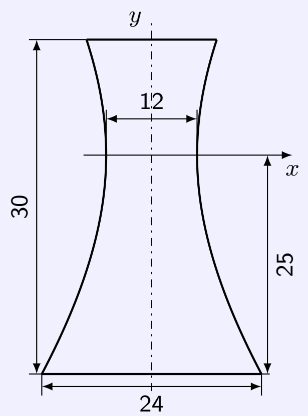
mit $l = 2{,}3496 = 134{,}62°$.

b) Der Großkreis hat einen Umfang von $360°$, womit für die Flugzeit $\frac{134{,}62}{360} \cdot 96 \approx 35{,}9$ min folgt.

c) Der nördlichste Punkt auf einem Großkreis ergibt sich für 2 Punkte $(\varphi_1, \lambda_1)$ und $(\varphi_2, \lambda_2)$ aus

$$\tan\lambda_N = -\frac{\cos\lambda_1 \cdot \tan\varphi_2 - \cos\lambda_2 \cdot \tan\varphi_1}{\sin\lambda_1 \cdot \tan\varphi_2 - \tan\varphi_1 \cdot \sin\lambda_2} \qquad \text{und} \qquad \tan\varphi_N = \frac{\tan\varphi_1}{\cos(\lambda_1 - \lambda_N)}$$

Einsetzen ergibt $\lambda_N = 1{,}15203$ und $\varphi_N = 1{,}13472$, oder im Gradmaß, $\lambda_N = 66{,}0°O$, $\varphi_N = 65{,}01°N$.




**Aufgabe 2**
Ein Kühlturm hat die Gestalt eines Rotationshyperboloids.
Nebenstehende Skizze stellt den Achsenschnitt seines Innenraumes dar.
Seine schmalste Stelle liegt in einer Höhe von 25 m.

a) Berechnen Sie das Volumen des Innenraumes!

b) Berechnen Sie den Durchmesser der oberen Öffnung!

(Maßangaben in m)

a) Auf Grund des Durchmessers $d = 12$ ist die Halbachse $a = 6$. Die Hyperbelgleichung ist bei Mittelpunktslage

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \to \qquad \frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für $x = 12$ (halbe Dicke der Grundfläche) wird $y = -25$. Einsetzen des Punktes $P(12; -25)$ in die Gleichung und Umstellen ergibt $b = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ und für die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{36} - \frac{3y^2}{625} = 1$$

Zur Volumenberechnung wird die Umkehrkurve betrachtet, d.h. die Kurve um 90° gedreht. Das Rotationshyperboloid entsteht dann durch Rotation um die $x$-Achse der Funktion

$$y = \frac{6\sqrt{3x^2 + 625}}{25}$$

in den Grenzen $x_1 = -25$, $x_2 = 5$.

$$V = \pi \int\limits_{-25}^{5} \left[\frac{6\sqrt{3x^2+625}}{25}\right]^2 dx = \pi \left[\frac{36x(x^2+625)}{625}\right]_{-25}^{5} = 2028{,}44\pi \approx 6370 \text{ m}^3$$

Der Innenraum hat ein Volumen von 6370 m$^3$.

b) Einsetzen von $y = 5$ in

$$\frac{x^2}{36} - \frac{3y^2}{625} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^2}{36} - \frac{3}{25} = 1$$

ergibt $x_{1,2} = \pm\frac{12\sqrt{7}}{5} \approx \pm 6{,}35$ m. Damit ist der Durchmesser der oberen Öffnung 12,70 m.

**Aufgabe 3**
Von der Kurve

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$$

sind zu bestimmen: die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte, Wendepunkte und Pole.
Ferner ist das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$ zu untersuchen.
Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und zu einer Skizze des Kurvenverlaufs zu verwenden.

Schnittpunkte mit der $x$-Achse: $f(x) = 0 = x^3 - 3x + 2$, durch systematisches Probieren erkennt man, dass $x_1 = -2$ Lösung der Gleichung ist. Polynomdivision ergibt

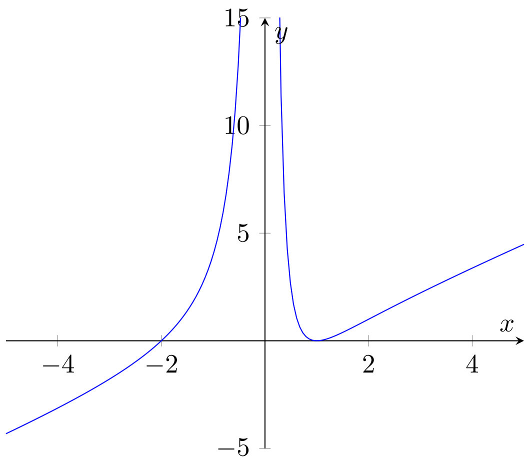
$$(x^3 - 3x + 2) : (x + 2) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Das Restpolynom $x^2 - 2x + 1 = 0$ liefert die doppelte Nullstellen $x_2 = 1$, also die Schnittpunkte $S_1(-2; 0)$ und $S_2(1; 0)$.

1. Ableitung: $y' = \frac{x^3+3x-4}{x^3}$, 2. Ableitung: $y'' = \frac{6(2-x)}{x^4}$, 3. Ableitung: $y''' = \frac{6(3x-8)}{x^5}$
Die 1.Ableitung gibt mit $x^3+3x-4 = 0$ genau eine extremwertverdächtige Stelle $x_E = 1$, da das Restpolynom nach einer Polynomdivision $0 = x^2 + x + 4$ keine reelle Lösung hat.
Es ist $f''(x_E) = f''(1) = 6 > 0$. Der Punkt $E(1; 0)$ ist somit lokales Minimum.

Die 2.Ableitung gibt mit $6(2 - x) = 0$ die Wendestelle $x_W = 2$. $f''(2) = -\frac{3}{8} \neq 0$ ist $W(2; 1)$ Wendepunkt.
Eine Polstelle liegt bei $x = 0$ vor, da der Nenner von $f(x)$ für $x = 0$ Null wird.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{-3x+2}{x^3}\right) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{-3x+2}{x^3}\right) = -\infty$$




Graph

## 1.8 Abituraufgaben 1959 B

**Aufgabe 1**
Zur Leipziger Frühjahrsmesse 1959 wurde für Messegäste aus Übersee durch die Eröffnung der Interflug-Route Leipzig-Kopenhagen erstmalig der Anschluss an die Nordpolroute der Skandinavischen Luftfahrtgesellschaft hergestellt.
Messegäste aus Tokio ($\varphi_1 = 35{,}7°N$; $\lambda_1 = 139{,}2°O$) fliegen zunächst nach Nome in Alaska ($\varphi_2 = 65{,}2°N$; $\lambda_2 = 167{,}5°$ W). Von dort wird der Flug auf dem Meridian von Nome über den Nordpol und ständig auf dem gleichen Großkreis über Kopenhagen nach dem Messeflugplatz Leipzig ($\varphi_3 = 51{,}3°N$; $\lambda_3 = 12{,}5°O$) fortgesetzt.

Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass orthodrome Kurse eingehalten werden, die Flugwege in km

a) Tokio-Nome (Skizze!),

b) Nome(-Kopenhagen)-Leipzig,

c) Berechnen Sie den Abflugkurs in Tokio!

a,b) Für die Länge einer orthodromen Flugbahn gilt

$$d = r \arccos(\cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2) + \sin\delta_1 \sin\delta_2)$$

Mit einem Erdradius $r = 6378$ km ergeben sich als Flugstrecken
Tokio-Nome: $d_1 = 4750$ km, Nome-(Kopenhagen)-Leipzig: $d_2 = 7060$ km. Die Gesamtflugstrecke ist 11810 km.

c) Mit den zwei Seiten $a = 90° - \varphi_1$, $b = 90° - \varphi_2$ sowie des eingeschlossenen Winkels $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$ im sphärischen Dreieck $P_1P_2N$ mit den geografischen Koordinaten $P_1(\lambda_1, \varphi_1)$, $P_2(\lambda_2, \varphi_2)$ folgt die dritte Seite $c$ mit Hilfe des Kosinussatzes

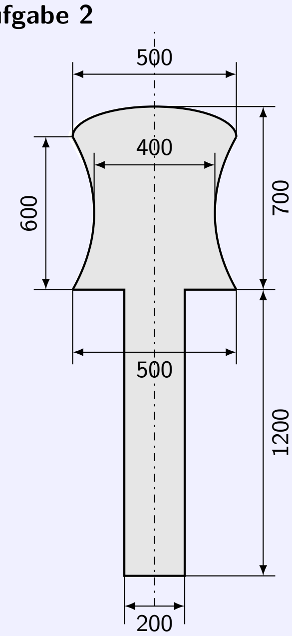
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

und der Kurswinkel an der Abflugstelle

$$\delta_1 = 360° - \arccos\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

Einsetzen der Werte für Tokio und Nome ergibt $\delta_1 = -81°$.

**Aufgabe 2**




Die Zeichnung zeigt den Achsenschnitt eines Pollers, an dem beim Anlegen eines Schiffes die Haltetaue befestigt werden.
Die seitlichen Bögen des Achsenschnittes sind Hyperbeläste. Den oberen Abschluss des Achsenschnittes bildet eine halbe Ellipse. Der untere zylindrische Teil wird in die Hafenmauer eingelassen.

Die Form des Pollers ergibt sich durch Rotation des Achsenschnittes um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen

a) des Rotationshyperboloids.

b) des halben Rotationsellipsoids unter Benutzung eines zweiten hierfür besonders geeigneten Koordinatensystems,

c) des Zylinders!

d) Wie groß ist das Gesamtgewicht des gusseisernen Pollers ($\gamma = 7{,}1$ kp/dm$^3$)?

(Anleitung: Für die Rechnung ist es zweckmäßig, die Maßangaben in dm umzuwandeln.)

a) Hyperbelgleichung: Legt man die x-Achse durch die schmalste Stelle des Hyperboloids und die y-Achse auf die Symmetrieachse so gehören die Punkte $(2; 0)$ (alles in dm) und $(2{,}5; 3)$ zur Hyperbel. Einsetzen ergibt

$$\frac{2{,}0^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \qquad , \qquad \frac{2{,}5^2}{a^2} - \frac{3{,}0^2}{b^2} = 1$$

mit $a = 2$ und $b = 4$. Die Hyperbelgleichung wird zu

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Für das Volumen des Rotationshyperboloids rotiert die Umkehrkurve $\overline{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$ in den Grenzen $x_1 = -3$ bis $x_2 = 3$ um die x-Achse

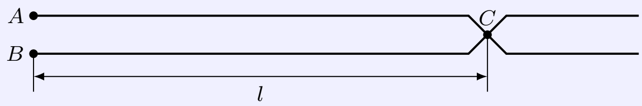
$$V = \pi \int\limits_{-3}^{3} \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}\right]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12}x(x^2 + 48)\right]_{-3}^{3} = \frac{57}{2}\pi \approx 89{,}5 \text{ dm}^3$$

b) Das Ellipsoid hat die Halbachsen $a = b = 2$ und $c = 1$. Für das Volumen des Halbellipsoids wird $V = \frac{4}{6}\pi abc = \frac{8}{3}\pi \approx 8{,}4$ dm$^3$.

c) Der untere Zylinder ($r = 1$, $h = 12$) hat das Volumen $V = \pi r^2 h \approx 37{,}7$ dm$^3$.

d) Das Gesamtvolumen wird 135,6 dm$^3$, womit ein Gewicht von 963 kp folgt.

**Aufgabe 3**
Zwei Adern eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels aus Kupferdraht mit einem Durchmesser von $d = (0{,}9 \pm 0{,}01)$ mm zeigen am Punkt $C$ Kurzschluss gegeneinander (siehe Skizze).




Zur Bestimmung der Schadenstelle $C$ ermittelt man durch mehrere Messungen einen Widerstand von $R = (13 \pm 0{,}2)\Omega$ in den Leitungsstrecken $\overline{ACB}$.
Der spezifische Widerstand beträgt $\rho = 0{,}0178\Omega$ mm$^2$/m. In diesem Fall gilt für den Widerstand $R$ die Beziehung

$$R = \frac{\rho \cdot 2l}{q}$$

($2l$ wegen der Hin- und Rückleitung), wobei $q$ den Querschnitt des Leiters in mm$^2$ und $l$ seine Länge in m bedeuten.

a) In welcher Entfernung von $A$ müsste die Schadenstelle $C$ liegen, wenn man die angegebenen Fehler zunächst unberücksichtigt lässt?

b) Innerhalb welcher Grenzen müsste im ungünstigsten Falle bei der Suche nach der Schadenstelle aufgegraben werden, wenn man die angegebenen Fehler berücksichtigt?

a) Mit den gegebenen Werten wird für die Leitung

$$2l = \frac{r \cdot q}{\rho} \qquad , \qquad l = \frac{R \cdot \pi r^2}{2\rho} = 464{,}620 \approx 465 \text{ m}$$

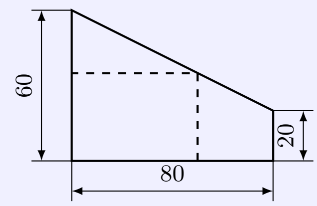
Die Fehlerstelle ist 465 m von $A$ aus entfernt.

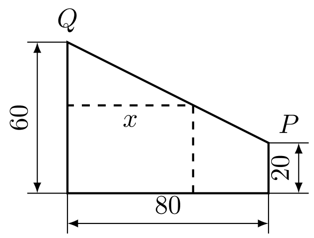
b) Setzt man die unteren bzw. oberen Grenzwerte für $R$ und $d$ ein, erhält man $l = 447{,}4$ m und $l = 483{,}3$ m. Die Schadenstelle kann im Bereich 447 m bis 484 m liegen.

## 1.9 Abituraufgaben 1960 A

**Aufgabe 1**

Aus trapezförmigen Blechabfällen sollen Rechtecke größter Fläche (siehe Skizze) zur weiteren Verarbeitung herausgeschnitten werden.
Berechnen Sie die Seiten des geforderten Rechteckes! (Rechteck in der Skizze nicht maßstäblich!)




im Koordinatensystem mit Ursprung links unten hat die lineare Funktion durch die Punkte $P(80;20)$ und $Q(0;60)$ die Gleichung $y = mx + n \rightarrow m = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 60$
Zielfunktion für Rechteckfläche $A = x \cdot y = x(-\frac{1}{2}x + 60) = -\frac{1}{2}x^2 + 60x$
1.Ableitung $A' = -x + 60$ mit extremwertverdächtiger Stelle $x_0 = 60$
2.Ableitung $A'' = -1$ ist stets kleiner 0, so dass Maximum für $x_0 = 60; y_0 = 30$ vorliegt
maximale Fläche $A = 1800$ FE.

**Aufgabe 2**
Der Kesselteil eines Hochdruckdampf-Speichers hat ein Fassungsvermögen von $V = 10$ m$^3$.
Er besteht aus einem Zylinder von $l = 4{,}0$ m Länge mit beiderseits angesetzten Halbkugeln.
Berechnen Sie durch Näherungsverfahren den für Zylinder und Halbkugeln gemeinsamen Radius auf cm genau!

Volumen $V = V_{\text{Zylinder}} + 2 \cdot V_{\text{Halbkugel}}$, mit Radius r d.h.

$$V = 10\ m^3 = \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + 4\pi \cdot r^2$$

1.Ableitung $V' = 4\pi r^2 + 8\pi r$
Näherung über Newton-Verfahren

$$r_{n+1} = r_n - \frac{\frac{4}{3}\pi r_n^3 + 4\pi r_n^2 - 10}{4\pi r_n^2 + 8\pi r_n}$$

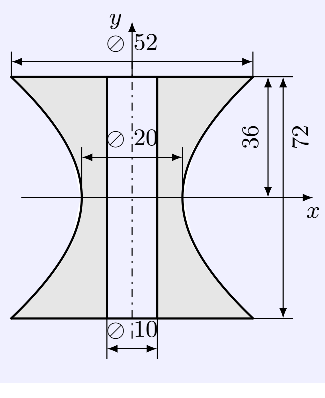
mit $r = 1$ ergeben sich die Näherungen $0{,}821; 0{,}794; 0{,}793$ und die Lösung $r = 0{,}79$ m $= 79$ cm.

**Aufgabe 3**

Maßangaben in cm
Eine Seiltrommel entsteht durch Rotation einer Hyperbel um die y-Achse (siehe Skizze).
Sie besteht aus Eisen ($\gamma = 7{,}3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$).

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Berechnen Sie das Gewicht der Seiltrommel, wobei die für die Achse vorgesehene zylindrische Bohrung zu berücksichtigen ist!




a) Scheitelpunkte der Hyperbel sind $S_1(-10;0)$ und $S_2(10;0)$, die Halbachse $a = 10$
Ansatz für Hyperbel und Einsetzen des Punktes $P(26;36)$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{26^2}{100} - \frac{36^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 225 \rightarrow b = 15$$

Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{225} = 1$$

b) Rotationshyperboloid um y-Achse
Umkehrfunktion der begrenzenden Funktion ist $g^2(x) = y^2 = 100\left(\frac{x^2}{225} + 1\right)$
Volumen des Hyperboloids

$$V_H = \pi \int\limits_{-36}^{36} g^2(x)dx = \pi \int\limits_{-36}^{36} \left(\frac{100}{225}x^2 + 100\right)dx = \pi \left[\frac{4x(x^2+675)}{27}\right]_{-36}^{36} = 21024\pi$$

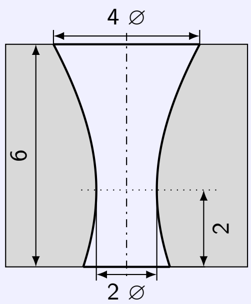
Volumen des Lochs (Zylinder) $V_Z = \pi r^2 h = 1800\pi$
Gesamtvolumen der Seiltrommel $V = V_H - V_Z = 19224\pi \approx 60390$ cm$^3$
Gewicht der Seiltrommel $G = 441$ kp

## 1.10 Abituraufgaben 1960 B

**Aufgabe 1**
Für den Verkauf von Ölfarbe verwendet man zylindrische Blechdosen mit einem Fassungsvermögen von $V = 250$ cm$^3$. Sie haben eine kreisförmige Öffnung, die durch einen Kunststoffdeckel verschlossen wird. Der Durchmesser dieser Öffnung steht zu dem des Zylinders im Verhältnis 4 : 5.
Wie groß müssten Durchmesser und Höhe der Dosen gewählt werden, damit für die Herstellung möglichst wenige Blech verbraucht wird?

Lösung: $d \approx 7{,}76$ cm; $h \approx 5{,}29$ cm; Blechbedarf $\approx 193$ cm$^2$

**Aufgabe 2**




Drähte werden mit Hilfe von Ziehsteinen gezogen (d.h. gestreckt). Für weiches Ziehmaterial und stärkere Drähte verwendet man Ziehsteine aus hochwertigem Hartmetall.
Aus dem Ziehstein wird die Ziehdüse in Form eines Hyperboloids herausgearbeitet. Die engste Stelle der Ziehdüse hat einen Durchmesser von $d = 2$ mm.

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf.
b) Berechnen Sie das aus dem Ziehstein herausgearbeitete Volumen!

c) Berechnen Sie ferner dieses Volumen näherungsweise als Zylinder, dessen Höhe mit der des Hyperboloids und dessen Durchmesser mit dem des Düsenausganges übereinstimmt!
d) Ein Draht von 2,8 mm Durchmesser wird durch die Düse gezogen. Infolge elastischer Nachwirkung nimmt der Draht nach dem Durchgang durch die engste Stelle den Durchmesser des Düsenausgangs an. Auf welche Länge wird ein ursprünglich 1 m langes Drahtstück durch das Durchziehen gestreckt? (Abb. 60/B/2)

Lösung: a) $x^2 - \dfrac{3}{16}y^2 = 1$
b) herausgearbeites Volumen $\approx 33$ cm$^3$
c) näherungsweises Volumen $V_2 \approx \frac{21}{2}\pi$ cm$^3$ $\approx 32{,}99$ cm$^3$
d) Draht wird 1,12 m lang

**Aufgabe 3**
Nach der Wettkampfordnung für Leichtathletik (Kugelstoßen für Männer) müssen die Kugeln ein Gewicht von mindestens 7,25 kp haben. Sie werden aus Eisen ($\gamma = 7{,}8$ p/cm$^3$) hergestellt.

a) Berechnen Sie den Radius der Kugeln.
b) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler des Gewichtes, wenn der Radius um ± 0,25 mm vom berechneten Wert abweicht!
c) Um welchen Betrag darf der Radius größer sein, damit das Mindestgewicht um nicht mehr als 2 % überschritten wird?

Lösung: a) $r \approx 6{,}5$ cm
b) 1,14 %, $(7{,}25 \pm 0{,}09)$ kp
c) maximale Abweichung 0,04 cm

## 1.11 Abituraufgaben 1961 A

**Aufgabe 1**
Ein Wasserbehälter soll die Form eines Zylinders mit unten angesetzten Kegel haben.
Die Höhe des Zylinders soll 2 m, die Mantellinie des Kegels 6 m betragen.

a) Welche Abmessungen muss der Behälter bei größtem Fassungsvermögen haben?

b) Wie groß ist das Maximalvolumen?

a) Ansatz für Volumen $V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$, mit Zylinderhöhe $h = 2$ m und Kegelmantellinie $s = 6$ m und der Substitution $x = r^2$ des Radius r, d.h.

$$V = \pi x \cdot h + \frac{\pi}{3} x \cdot h_{\text{Kegel}} = \pi x \cdot h + \frac{\pi}{3} x \cdot \sqrt{s^2 - x} = 2\pi x + \frac{\pi}{3} x \sqrt{36 - x}$$

1.Ableitung gleich 0 setzen

$$V' = \frac{\pi}{2\sqrt{36 - x}} \cdot (4\sqrt{36 - x} - x + 24) \to 0 = 4\sqrt{36 - x} - x + 24$$

Lösung $4\sqrt{36 - x} - x + 24 = 0$ wird zu $x^2 - 32x = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 32$ 2.Ableitung zur Kontrolle

$$V'' = \frac{\pi(x - 48)}{4(36 - x)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Zähler der 2.Ableitung wird mit $x_2 = 32$ negativ, der Nenner positiv, d.h. $V''(x_2) < 0$, d.h. für $x_2 = r_2^2$ liegt ein Maximum vor und somit $r_2 = \sqrt{32}$

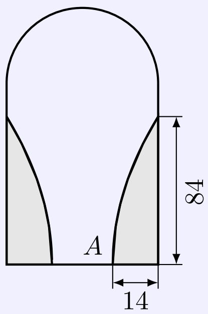
b) Volumen $V = \frac{256}{3}\pi \approx 268{,}1$ m$^3$

Anmerkung: Der Ansatz für das Volumen $V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$, mit Zylinderhöhe $h = 2$ m und Kegelmantellinie $s = 6$ m und Radius r, d.h.

$$V = \pi r^2 \cdot h + \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h_{\text{Kegel}} = \pi r^2 \cdot h + \frac{\pi}{3} r^2 \cdot \sqrt{s^2 - r^2} = 2\pi r^2 + \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{36 - r^2}$$

führt zu wesentlich anspruchsvolleren Ableitungen, deren Lösung ohne Hilfsmittel schwieriger ist.

**Aufgabe 2**
Nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer sogenannten Sparbadewanne.
Nichtmaßstäbliche Skizze! Maße in cm!
Zweckes Einsparung von Wasser und Energie sind am Fußende links und rechts zwei gleiche Backen eingebaut, deren waagerechte Grund- und Deckflächen gleiche Parabelsegmente sind und deren Höhe bis zum normalen Wasserstand 38 cm beträgt.
Die Seitenwände der Backen verlaufen senkrecht zum ebenen Wannenboden. (Geringfügige Rundungen am Boden der Wanne werden vernachlässigt.
Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $A$.




a) Wieviel Liter Wasser werden bei einem Bad durch diese Vorrichtungen eingespart?

b) Wieviel Prozent beträgt die Einsparung von Wasser und Energie, wenn für ein Band in einer gleichgroßen Wanne ohne diese Sparvorrichtungen 175 Liter Wasser nötig sind?

a) Mit einem Koordinatenursprung in $A$ wird für die Funktion des rechten Backens

$$y = p\sqrt{x} \to 84 = p\sqrt{14} \to p = \frac{84}{\sqrt{14}}$$

Für die Fläche eines Backens wird somit

$$A = \int\limits_0^{14} \left( \frac{84}{\sqrt{14}} \sqrt{x} \right) dx = \left[ 4\sqrt{14} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{14} = 784$$

Beide Backen haben haben eine Fläche von 1568 cm$^2$ und mit dem Wasserstand h = 38 cm ein Volumen von 59,6 Liter, die eingespart werden.

b) Einsparung $= 34\%$

**Aufgabe 3**

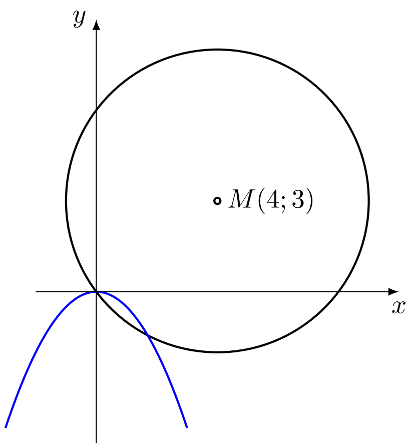
a) Zeichnen Sie den Kreis

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

und die Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ (Koordinateneinheit 1 cm)!

b) Berechnen Sie die Abszissenwerte der Schnittpunkte der beiden Kurven!
Diese Werte sind durch Näherungsverfahren auf drei Dezimalstellen genau zu bestimmen!

a) Mittelpunkt des Kreises $M(4;3)$ mit Radius $r = 5$




b) Einsetzen der Parabelgleichung in die Kreisgleichung

$$(x-4)^2 + \left( -\frac{1}{2}x^2 - 3 \right)^2 = 25 \rightarrow \frac{x}{4}(x^3 + 16x - 32) = 0$$

erste Lösung $x_1 = 0$
Näherungsweise Lösung mittels Newton-Verfahren und 1.Ableitung $y' = 3x^2 + 16$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^3 + 16 - 32}{3x^2 + 16}$$

mit dem Startwert $x = 0$ ergeben sich die Näherungen $2; 1{,}714; 1{,}695; 1{,}695$
Abszisse des zweiten Schnittpunktes $x_2 \approx 1{,}695$

## 1.12 Abituraufgaben 1961 B

**Aufgabe 1**

a) Wie hoch stehen 500 Liter Flüssigkeit in einem kugelförmigen Behälter, dessen innerer Radius $r = 1$ m beträgt?
Die Höhe ist durch Näherung auf cm genau zu bestimmen.

b) Leiten Sie die zur Berechnung eines Kugelabschnitts gebräuchliche Formel

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

mit Hilfe der Integralrechnung her!

a) Unter Verwendung der Gleichung aus Aufgabe b) wird

$$V = 0{,}5 = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \rightarrow 0 = 3\pi h^2 - \pi h^3 - 1{,}5$$

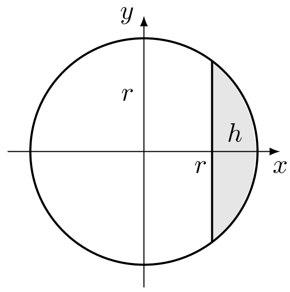
Näherungslösung mittels Newton-Verfahren und der 1.Ableitung $f'(h) = 3\pi h(2 - h)$

$$h_{n+1} = h_n - \frac{3\pi h^2 - \pi h^3 - 1{,}5}{3\pi h(2 - h)}$$

Mit dem Startwert $h_1 = 1$ ergeben sich die Näherungen $0{,}493; 0{,}434; 0{,}431; 0{,}431$ und die Lösung $h \approx 43$ cm.

b) Kugelabschnitt (farbig in der Skizze) mit Radius r, der Höhe der Kappe h und der Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ als Rotationskörper

$$V = \pi \int\limits_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \left[ xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{r-h}^{r} = \pi \frac{h^2}{3}(3r - h)$$



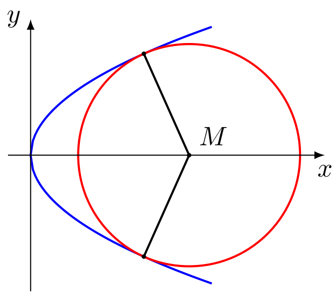

**Aufgabe 2**

a) Konstruieren Sie die Parabel $y^2 = 4x$!

b) Berechnen Sie unter Verwendung des Parabelanstiegs die Gleichung des Kreises, der die Parabel in den beiden Punkten mit der Abszisse $x = 5$ (von innen) berührt!

Koordinaten der Berührungspunkte $y^2 = 4x \rightarrow y^2 = 4 \cdot 5 \rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{20}$
$B_1(5; \sqrt{20})$ und $B_2(5; -\sqrt{20})$
Anstieg der Parabel in den Berührungspunkten

$$y = \sqrt{4x} \rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{4x}} \rightarrow y'(5) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



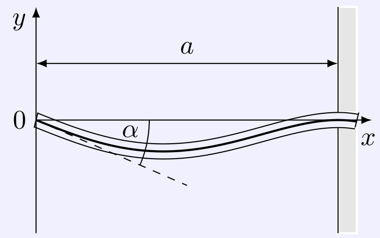

Normale im Berührungspunkt $B_1$ an die Parabel

$$y = mx + n \rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}x + n \rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}x + 7\sqrt{5}$$

Normale schneidet x-Achse im Kreismittelpunkt $x_M = 7 \rightarrow M(7; 0)$
Radius r des Kreises mittels Einsetzen des Punktes $B_1$ in die Kreisgleichung

$$(x - 7)^2 + y^2 = r^2 \rightarrow K : (x - 7)^2 + y^2 = 24 \rightarrow r = \sqrt{24}$$

**Aufgabe 3**
Ein Träger ist an einem Ende fest eingespannt und liegt an seinem anderen Ende fest auf.
Infolge seines Eigengewichts biegt sich der Träger nach unten durch (siehe Skizze!).




Nichtmaßstäbliche Skizze!
Die Lage der neutralen Faser des Balkens wird für das angenommene Koordinatensystem durch die Gleichung

$$y = f(x) = -k\left(x - \frac{3x^3}{a^2} + \frac{2x^4}{a^3}\right)$$

gegeben.
Dabei sind $a$ und $x$ in Metern gemessen; $k$ ist eine positive dimensionslose Konstante.

a) An welcher Stelle hängt der Träger am weitesten durch, wenn $a = 8$ m ist?

b) An welcher Stelle zwischen Wand und Auflage befindet sich ein Wendepunkt?

c) Wie groß ist $k$, wenn der Winkel zwischen der Kurventangente im Auflagepunkt und der Horizontalen $1°$ beträgt?

a) Suche nach der Minimalstelle der Funktion

$$y' = -k\left(1 - \frac{9x^2}{a^2} + \frac{8x^3}{a^3}\right) = -k\frac{x^3 - 9x^2 + 64}{64}$$

eine Nullstelle ist beim Auflagepunkt $x = 8$;
nach Polynomdivision $(x^3 - 9x^2 + 64) : (x - 8) = x^2 - x - 8$ ergeben sich die extremwertverdächtigen Stellen bei $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$
$x_2$ entfällt, $x_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \approx 3{,}37$
Kontrolle über 2.Ableitung $y'' = \frac{3kx(6-x)}{64}$ ergibt $y''(x_1) \approx 0.415k > 0$ und somit ein Minimum
Der Träger hängt bei $x_1 \approx 3{,}37$ am stärksten durch.

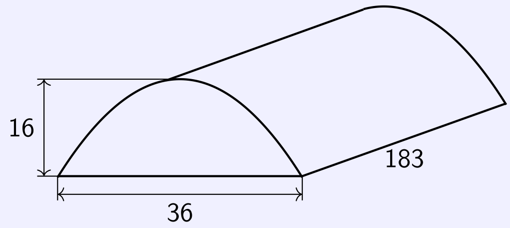
b) Wendepunkt bei $y'' = \frac{6kx(3a-4x)}{a^3} = 0 \rightarrow x_W = \frac{3}{4}a \rightarrow W\left(\frac{3}{4}a; -\frac{15a}{128}k\right)$
für a = 8 m wird $W(6; \frac{15}{16}k)$

c) 1.Ableitung wird im Ursprung: $y'(0) = -k$
Winkel $\alpha = 1° \rightarrow k = \tan 1° \rightarrow k \approx 0.0175$

## 1.13 Abituraufgaben 1962 A

**Aufgabe 1**

In der Tschechoslowakischen Sozialistischen Republik wurden erstmalig beim Bau großer Speicher parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton verwendet. Ein solcher Speicher ist innen 16 m hoch, 36 m breit und 183 m lang (siehe Skizze).
Maßangaben in m




a) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche des Querschnitts!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Speichers!

c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

a) Zur Bestimmung der Parabelgleichung wird die y-Achse gleich der Parabelachse und die x-Achse längs der Grundlinie des Parabelabschnittes gelegt.
In den Ansatz $y = -ax^2 + b$ werden die Punkte $P(18;0)$ und $Q(0;16)$ der Parabel eingesetzt. Es wird

$$0 = -a \cdot 18^2 + b \qquad , \qquad 16 = -a \cdot 0^2 + b = b$$

Die Parameter sind $b = 16$ und $a = \frac{4}{81}$, die Parabelgleichung $y = -\frac{4}{81}x^2 + 16$.
Flächeninhalt unter der Parabel:

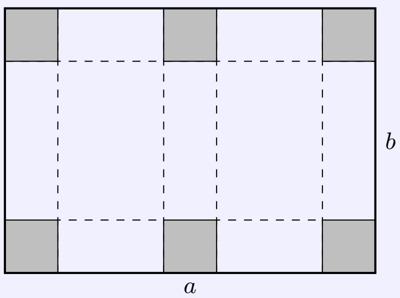
$$\int\limits_{-18}^{18} \left(-\frac{4}{81}x^2 + 16\right) dx = \left[16x - \frac{4}{243}x^3\right]_{-18}^{18} = 384 \text{ m}^2$$

b) Das Volumen des Speichers ist $V = 384 \cdot 183 = 70272$ m$^3$.

c) Eine Rechteck mit den Kantenlängen 36 m und 16 m Höhe hat den Flächeninhalt 576 m$^3$. Das Verhältnis der Flächeninhalte des Querschnitts zum Flächeninhalt des Rechtecks ist $384 : 576 = 2 : 3$.

**Aufgabe 2**

Aus rechteckigem Kartonpapier von der Länge $a = 27$ cm und der Breite $b = 18$ cm soll eine quaderförmige geschlossene Faltschachtel hergestellt werden, deren Deckel an drei Seiten übergreift. Nachstehende Skizze zeigt das Netz der Schachtel.

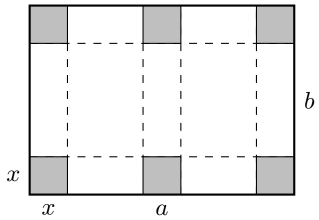



a) Wie groß muss die Seitenlänge der auszustanzenden Quadrate sein, wenn das Volumen der Schachtel möglichst groß werden soll?

b) Berechnen Sie dieses Volumen!

c) Wie viel Prozent des ursprünglichen Materials beträgt der Abfall, der durch das Ausstanzen der Quadrate entsteht?

a) Die Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrate sei $x$ (siehe Skizze).
Die Längen der drei Kanten der Schachtel sind dann $a - 3x$, $b - 2x$ und $x$ (als Höhe).




Zielfunktion für das Volumen:
$V = (a - 3x) \cdot (b - 2x) \cdot x = (27 - 3x)(18 - 2x)x.$
1.Ableitung: $y' = 18(x - 3(x - 9)$, 2. Ableitung $y'' = 36(x - 6)$

Setzt man die 1.Ableitung gleich 0, ergeben sich $x_1 = 3$ und $x_2 = 9$ als extremwertverdächtige Stellen. $x_2$ entfällt, da dann keine Schachtel entstehen würde.

Da $f''(x_1) = f''(3) = -108$ ist, liegt für $x_1 = 3$ ein lokales Maximum des Schachtelvolumens vor. Für ein maximales Volumen müssen Quadrate mit der Seitenlänge 3 cm ausgeschnitten werden.

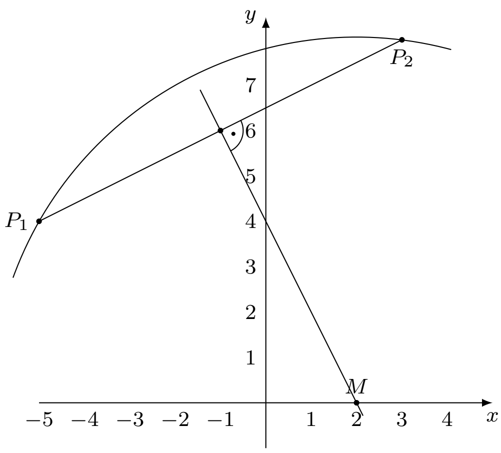
b) $V = (27 - 3x)(18 - 2x)x = 648$ cm$^3$. Die Schachtel hat ein Volumen von 648 cm$^3$.

c) Es werden 6 Quadrate des Flächeninhalts 9 cm$^2$ ausgestanzt. Das Kartonpapier hat den Flächeninhalt 486 cm$^2$. Der Abfall beträgt $\frac{54}{486} \approx 11{,}1\%$.

**Aufgabe 3**
3. Gegeben sind die Punkte $P_1(-5; +4)$ und $P_2(+3; +8)$.

a) Konstruieren Sie den Kreis, der durch diese beiden Punkte geht und dessen Mittelpunkt auf der $x$-Achse liegt.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Methoden der analytischen Geometrie die Gleichung dieses Kreises auf!




a) Konstruktionsbeschreibung:
Im Mittelpunkt der Strecke $P_1P_2$ wird eine Senkrechte errichtet. Diese schneidet die x-Achse im Mittelpunkt des gesuchten Kreises.
Der Kreismittelpunkt ist $M(2; 0)$.

b) Anstieg der Geraden durch $P_1$ und $P_2$:
$m_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
Anstieg der Mittelsenkrechten $m = -2$;
Mittelpunkt $M(-1; 6)$

Gleichung der Senkrechten $y = -2x + 4$. Deren Nullstelle ist der gesuchte Mittelpunkt $M(2; 0)$.

## 1.14 Abituraufgaben 1962 B

**Aufgabe 1**
a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2}$$

Prüfen Sie das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$.

b) Fertigen Sie eine Skizze des Kurvenverlaufes an!

c) An welcher Stelle hat die Funktionskurve den Anstieg $m = +2$?

a) Nullstellen: $x^2 + 4x + 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$, die Nullstellen der Funktion sind.
Eine Polstelle liegt bei $x_0 = 0$ vor (Nenner wird für $x_0 = 0$ gleich Null)

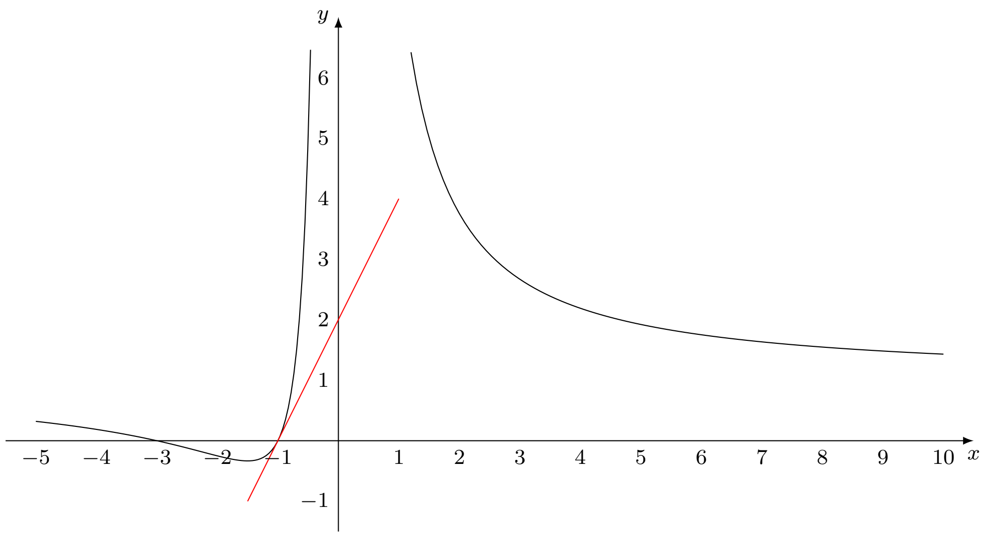
1. Ableitung $y' = -\frac{2(2x+3)}{x^3}$;
2. Ableitung $y'' = \frac{2(4x+9)}{x^4}$;
3. Ableitung $y''' = -\frac{24(x+3)}{x^5}$

Extremwertverdächtiger Punkt ergibt sich aus $2(2x + 3) = 0$ zu $x_E = -1{,}5$.
$f''(-1{,}5) = \frac{32}{27} > 0$ und somit liegt bei $x_E$ ein lokales Minimum: $E\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.

Wendepunkt: $2(4x + 9) = 0$ liefert $x_W = -\frac{9}{4}$.
Da $f'''\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{2048}{6561} \neq 0$ ist, liegt bei $W\left(-\frac{9}{4}; -\frac{5}{27}\right)$ ein Wendepunkt.

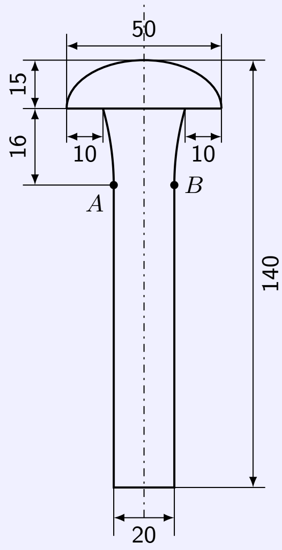
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1}\right) = 1.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1}\right) = 1.$

b)




c) 1. Ableitung $y' = -\frac{2(2x+3)}{x^3}$;
Mit $y' = 2$ wird $-\dfrac{2(2x+3)}{x^3} = 2$ und da $x \neq 0$ und $x^3 + 2x + 3 = 0$.
Diese Gleichung hat die reelle Lösung $x_0 = -1$.
Das Restpolynom $2x^2 - 2x + 6 = 0$ bei der Polynomdivision $(x^3 + 2x + 3)/(x + 1)$ hat keine reellen Lösungen.

An der Stelle $x = -1$ hat die Funktion einen Anstieg von 2. (siehe Skizze b)




**Aufgabe 2**
Niete werden aus Rundstahl durch Pressen in eine Form (Gesenk) hergestellt.
Nebenstehende Skizze zeigt die Ansicht eines solchen Nietes. Die Maße sind der Skizze zu entnehmen.

Der zylindrische Teil des Niets hat den gleichen Querschnitt wie der verwendete Rohling und verbreitert sich hyperbolisch ($A$ und $B$ sind die Scheitel der Hyperbel), während der Setzkopf die Form eines halben Ellipsoids hat.

a) Wie lang muss der Rohling sein, aus dem dieser Niet hergestellt wird?

b) Wie viele Rohlinge können aus 3 m langem Rundstahl hergestellt werden? Wieviel Prozent Abfall entsteht dabei?

Skizze nicht maßstäblich!

a) Der Niet setzt sich aus drei Teilkörpern zusammen, einem Halbellipsoid, einem Rotationshyperboloid und einem Zylinder.

Halbellipsoid: Die Halbachsen sind $a = b = 2{,}5$ cm und $c = 1{,}5$ cm.
$V = \frac{4}{6}\pi \cdot abc = \frac{4}{6}\pi \cdot 2{,}5^2$ cm$^2 \cdot 1{,}5$ cm $= \frac{25}{4}\pi$ cm$^3 \approx 19{,}6$ cm$^3$.

Zylinder: Radius $r = 1$ cm, Höhe $h = 10{,}9$ cm. $V = \pi r^2 h = \pi 1^2$ cm$^2 \cdot 10{,}9$ cm $= 10{,}9\pi$ cm$^3 \approx 34{,}2$ cm$^3$.

Das Hyperboloid hat die Randhyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den Punkten (in cm) $B(1,0)$ und $C(1{,}5, 1{,}6)$. Die Halbachsen sind damit $a = 1$ und $b = \frac{16}{25}\sqrt{5}$. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$x^2 - \frac{125y^2}{256} = 1$$

Das Volumen des Hyperboloids ergibt sich mittels Umkehrkurve $\overline{y} = \frac{1}{16}\sqrt{125x^2 + 256}$ in den Grenze $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}6$:

$$V = \pi \int_0^{1,6} \left[\frac{1}{16}\sqrt{125x^2 + 256}\right]^2 dx = \pi \left[\frac{y(125y^2 + 768)}{768}\right]_0^{1,6} = \frac{34}{15}\pi \text{ cm}^3 \approx 7{,}1 \text{ cm}^3$$

Das Gesamtvolumen des Niets beträgt damit $V = (\frac{25}{4}$ cm$^3 + 10{,}9$ cm$^3 + \frac{34}{15}$ cm$^3)\pi = \frac{233}{12}\pi$ cm$^3 \approx 61{,}0$ cm$^3$.

Der Rohling hat einen Radius $r = 1$ cm. Damit dieser das gleiche Volumen, wie der Niet, besitzt, muss er eine Länge von

$$l = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\frac{233}{12}\pi}{\pi} \text{ cm} = \frac{233}{12} \text{ cm} \approx 19{,}41 \text{ cm}$$

haben.

b) Aus 3 m Rohstall können 15 Niete hergestellt werden. Als Abfall verbleibt ein 8,75 cm hoher Zylinder, d.h. $\approx 2{,}9\%$.

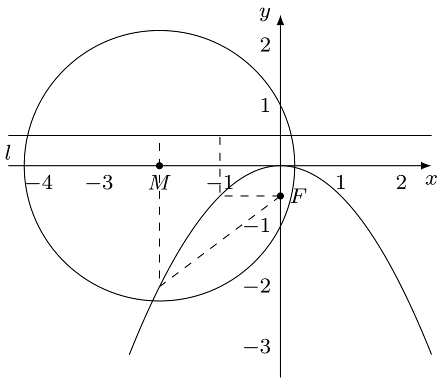
**Aufgabe 3**
a) Zeichnen Sie den Kreis

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$$

in ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit 2 cm)!
Konstruieren Sie die Parabel $x^2 = -2y$ mit Hilfe des Brennpunktes und der Leitlinie!

b) Einer der Schnittpunkte hat einen positiven $x$-Wert. Ermitteln Sie diesen $x$-Wert auf zwei Dezimalstellen genau.

c) Berechnen Sie den zugehörigen $y$-Wert.




a) Die Kreisgleichung wird zu $(x+2)^2 + y^2 = 5$, womit der Kreismittelpunkt $M(-2;0)$ und der Radius $r = \sqrt{5}$ wird.

Der Brennpunkt der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ liegt bei $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Die Leitlinie hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}$.

b) Einsetzen ergibt

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + 4x - 1 = \frac{x^4}{4} + x^2 + 4x - 1 = 0$$

Nach dem Graphen ist $x_0 = 0{,}5$ ein verwendbarer Näherungswert. Mit der Ableitung $y' = x^3 + 2x + 4$ erhält man als Gleichung für das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{x^4}{4} + x^2 + 4x - 1}{x^3 + 2x + 4}$$

Einsetzen des Anfangswertes $x_0$ und der sich ergebenden Näherungen liefert die Folge

$$0{,}5; \quad \frac{83}{328} \approx 0{,}2530; \quad 0{,}2360; \quad 0{,}2359$$

Der gesuchte positive x-Wert ist $x = 0{,}24$.

Der zugehörige y-Wert ist $y = -\frac{1}{2}x^2 = -0{,}028$.

## 1.15 Abituraufgaben 1963 A

**Aufgabe 1** Bestimmen Sie von der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{12}x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$$

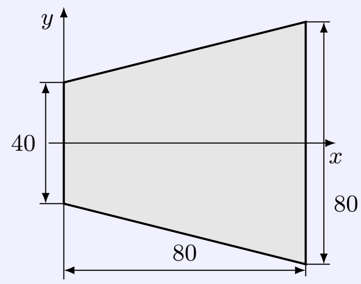
a) die Abszissen der Wendepunkte,

b) den Anstieg der Kurve in den Wendepunkten!

a) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 16)$; 2.Ableitung $y'' = x^2 - 6x + 8$
2.Ableitung Null setzen $0 = x^2 - 6x + 8 \to x_{W1} = 2; x_{W2} = 4$

b) Anstieg über 1.Ableitung: $m_{W1} = f'(2) = \frac{4}{3}; m_{W2} = f'(4) = 0$

**Aufgabe 2**
Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Abmessungen der Abbildung zu entnehmen sind, soll um seine Symmetrieachse rotieren.




(Abmessungen in mm)
Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!
Wie groß ist die Masse eines solchen Körpers, wenn er aus Aluminium besteht?
(Dichte des Aluminiums: $\rho = 2{,}7$ g $\cdot$ cm$^{-3}$

durch die Punkte $P(0; 20)$ und $Q(80; 40)$ verläuft die lineare Funktion $y = \frac{1}{4}x + 20$
Volumen des Rotationskörpers

$$V = \pi \int_0^{80} \left(\frac{1}{4}x + 20\right)^2 = \pi \left[\frac{(x+80)^3}{48}\right]_0^{80} \approx 74670\pi = 234570$$

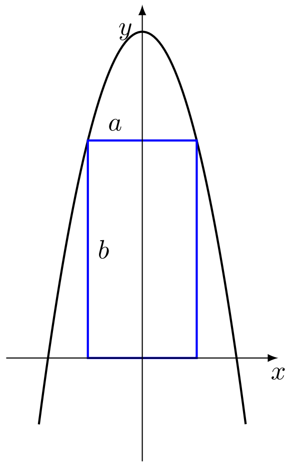
Volumen $V = 234{,}7$ cm$^3$ und Masse $m \approx 633$ g.

**Aufgabe 3**
Stellen Sie die Funktion

$$y = f(x) = -x^2 + 12$$

im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ grafisch dar!
Die x-Achse und die Kurve schließen eine Fläche ein.
Ihr soll ein Rechteck, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt, von möglichst großem Inhalt einbeschrieben werden.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks!

eingeschriebenes Rechteck habe die Seiten $a = 2x$ und $b = f(x)$, Zielfunktion $A = 2x(-x^2 + 12)$
1.Ableitung $y' = -6x^2 + 24$; 2.Ableitung $y'' = -12x$
1.Ableitung Null setzen, ergibt extremwertverdächtige Stellen $x_1 = -2; x_2 = 2$, $x_1$ entfällt, da Rechteckseite positiv sein muss
Kontrolle über 2.Ableitung: $f''(2) = -24 < 0$, d.h. Maximum
Rechteckfläche $A = 32$ FE




**Aufgabe 4**
Eine Ellipse ist durch folgenden Gleichung gegeben:

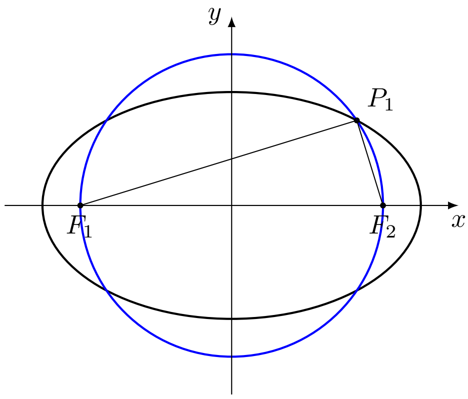
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Diese Ellipse wird von einem Kreis geschnitten, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt. Im ersten Quadranten hat der Schnittpunkt $P_1$ von Kreis und Ellipse die Ordinate $y_t = \frac{9}{4}$.

a) Konstruieren Sie die Ellipse!

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung des Kreises!

c) Verbinden Sie die beiden Brennpunkte der Ellipse mit $P_1$!
Begründen Sie, weshalb diese beiden Strecken einen rechten Winkel einschließen!




a) Hauptachsen der Ellipse $a = 5; b = 3$, Kreismittelpunkt $M(0; 0)$
Kreis schneidet Ellipse bei $y_t = \frac{9}{4}$, d.h.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(\frac{9}{4})^2}{9} = 1 \rightarrow x^2 = \frac{175}{16} \rightarrow x = \frac{5}{4}\sqrt{7}$$

b) Kreisradius $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \frac{175}{16} + (\frac{9}{4})^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 16$, d.h.
Kreisradius $r = 4$ ; Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 16$

c) lineare Exzentrizität $e^2 = a^2 - b^2 \rightarrow e = 4$; Brennpunkte $F_1(-4; 0), F_2(-4; 0)$
Vektoren

$$\overrightarrow{F_1P_1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{7} + 4 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}; \overrightarrow{F_2P_1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{7} - 4 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

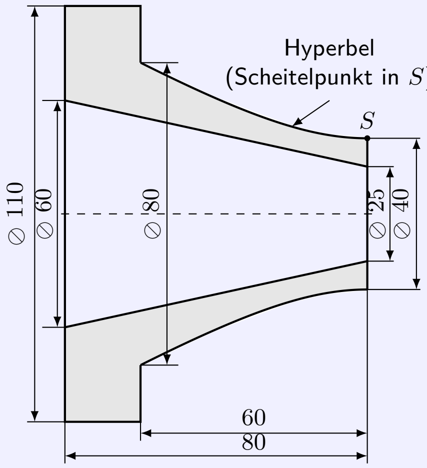
Skalarprodukt der Vektoren ist

$$\overrightarrow{F_1P_1} \bullet \overrightarrow{F_2P_1} = \left(\frac{5}{4}\sqrt{7} + 4\right)\left(\frac{5}{4}\sqrt{7} - 4\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{175}{16} - 16 + \frac{81}{16} = 0$$

womit die Vektoren und die Strecken von den Brennpunkten zu $P_1$ zueinander senkrecht sind

## 1.16 Abituraufgaben 1963 B

**Aufgabe 1**
Untenstehende Skizze zeigt den Achsenschnitt einer Düse.

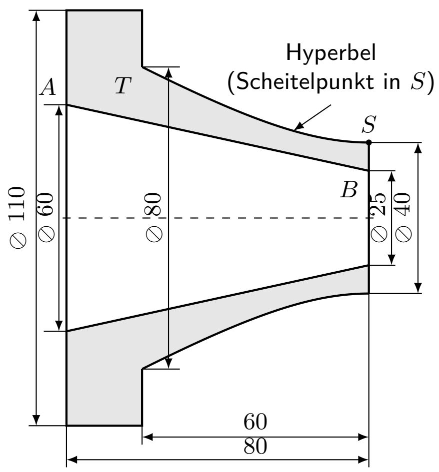



Düse: Werkstoff Messing ; Dichte $\rho = 8{,}5$ kg $\cdot$ dm$^{-3}$

a) Berechnen Sie die Masse der Düse!

b) Bei Einzelfertigung wird die Düse aus einem zylindrischen Rohling mit 110 mm Durchmesser und 80 mm Länge gedreht. Bei Serienanfertigung stellt man sie durch Gießen her.
Wie viel Material spart man dadurch pro Düse ein?
(Hinweis: Rechenstabgenauigkeit genügt; Kegelstumpf kann elementar berechnet werden!)

a)




Volumen der Düse ergibt sich zu

$$V = V_{\text{Hyperboloid}} + V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegelstumpf}}$$

Volumen des Zylinders mit Höhe $h = 20$ und Radius $r = 55$

$$V_Z = \pi r^2 h = 60500\pi$$

Hyperbelgleichung durch Punkte $S$ und $T(-60; 40)$ mit Halbachse $b = 20$ und dem

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{40^2}{400} - \frac{60^2}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 1200$$

$$\frac{y^2}{400} - \frac{x^2}{1200} = 1 \rightarrow y = \sqrt{400 + \frac{x^2}{3}}$$

Volumen des Rotationshyperboloids

$$V_H = \pi \int\limits_{-60}^{0} \left(400 + \frac{x^2}{3}\right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{9} + 400x\right]_{-60}^{0} = 48000\pi$$

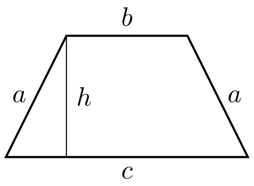
Begrenzungsstrecke (Kegelstumpf) zwischen A und B wird $y = \frac{7}{32}x + 12{,}5$
Volumen des Kegelstumpfs

$$V_K = \pi \int\limits_{-80}^{0} \left(\frac{7}{32}x + 12{,}5\right)^2 dx = \pi \left[\frac{(7x + 400)^3}{21504}\right]_{-80}^{0} \approx 3167\pi$$

Gesamtvolumen $V = 105333\pi \approx 331$ cm$^3$
Masse der Düse $m = 2812$ g $= 2{,}81$ kg

b) Rohling in Form eines Zylinders mit r = 55 mm und h = 80 mm
$V_R = \pi r^2 h = 224000\pi$
Materialeinsparung ist rund $53\%$

**Aufgabe 2**
Ein gleichschenkliges Trapez hat einen Flächeninhalt von 9 m$^2$. Seine Höhe beträgt 1,5 m.
Wie lang muss ein Schenkel sein, wenn die Summe aus den beiden Schenkeln und der kürzeren der beiden parallelen Seiten ein Minimum sein soll?



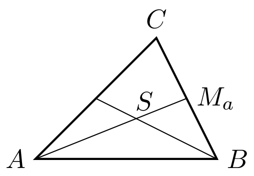

Zielfunktion $s = a + a + b$ soll Minimum werden, bei $A = 9$ m$^2$ und $h = 1{,}5$ m
1.Nebenbedingung Fläche: $A = 9 = \frac{b+c}{2}h \rightarrow c = 12 - b$
2.Nebenbedingung für Höhe: $a^2 = h^2 + (\frac{(c-b)^2}{2})^2$

$$a^2 = 2{,}25 + \left(\frac{12 - b - b}{2}\right)^2 \rightarrow b = 6 - \sqrt{a^2 - 2{,}25}$$

$$s = 2a + b = 2a + 6 - \sqrt{a^2 - 2{,}25}$$

1.Ableitung $s' = \frac{2(\sqrt{4a^2-9}-a)}{\sqrt{4a^2-9}}$
Ableitung gleich Null setzen, ergibt $a = \sqrt{3}$
die 2.Ableitung $s'' = \frac{18}{(4a^2-9)^{\frac{3}{2}}}$ wird größer als Null, da $4a^2 - 9 > 0$ ist, d.h. ein Minimum liegt vor und der Schenkel ist $a = \sqrt{3}$.

**Aufgabe 3**
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander im Verhältnis 2:1.
Berechnen Sie vektoriell die Koordinaten des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden der Dreiecks $ABC$ mit: $A(2;-1), B(8;2)$ und $C(5;8)$!




Der Mittelpunkt $M_a$ von $\overline{BC}$ ist $M_a(6{,}5;5)$, der Richtungsvektor
$\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$
Für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunktes S wird dann

$$\vec{s} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt hat die Koordinaten $S(5;1)$.

**Aufgabe 4**
Eine Ellipse ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie die Ellipse!

b) Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Koordinaten der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen!

Ellipsengleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ergibt die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$ und somit als lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

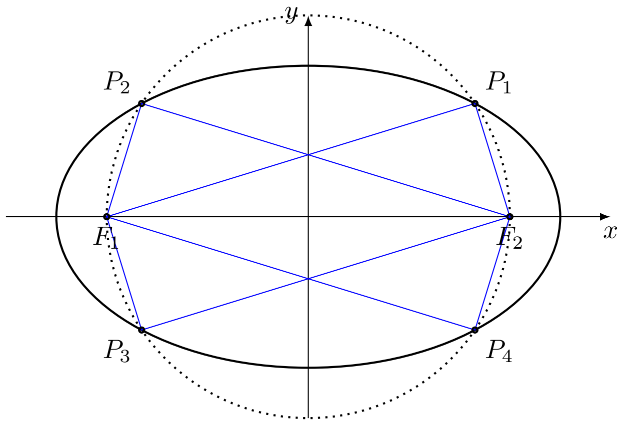
Koordinaten der Brennpunkte: $F_1(-4;0), F_2(4;0)$
Punkte $P$ der Ellipse haben die Koordinaten $P\left(x;\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}\right)$
Die Vektoren von den Brennpunkten zu einem Punkt $P$ sind dann

$$\overrightarrow{F_1P}=\begin{pmatrix} x+4 \\ \sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}\end{pmatrix}, \overrightarrow{F_2P}=\begin{pmatrix} x-4 \\ \sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}\end{pmatrix}$$

Für ein Skalarprodukt gleich Null der zwei Vektoren (eingeschlossener Winkel ist $90°$) wird

$$\overrightarrow{F_1P}\bullet\overrightarrow{F_2P}=x^2-16+9-\frac{9}{25}x^2=0\rightarrow 16x^2-175=0\rightarrow x=\pm\frac{5}{4}\sqrt{7}$$

Die Koordinaten der gesuchten Punkte sind $P_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{7};\pm\frac{9}{4}\right)$




Konstruktion der Punkte: Diesen liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{F_1F_2}$. In diesem Fall sind die Peripheriewinkel über $\overline{F_1F_2}$ rechte Winkel. Die Schnittpunkte des Thaleskreises mit der Ellipse sind die Punkte $P_{1,2,3,4}$.

**Aufgabe 5**

a) Das Bild der Funktion $y=f(x)=x^2$, die x-Achse und die Ordinaten dieser Funktion an den Stellen $x_1$ und $x_2$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

b) Mit Hilfe der Formel

$$F=\frac{x_2-x_1}{6}(y_1+y_2+4y_m) \text{ [Simpsonsche Regel]}$$

erhalten Sie den gleichen Flächeninhalt.
Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!
Hinweis: Unter $y_m$ versteht man die im Mittelpunkt des Integrationsintervalls errichtete Ordinate.

a) gesuchte Fläche

$$A=\int\limits_{x_1}^{x_2}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$$

b) Einsetzen des Funktionsterms $y=x^2$ und Umformen ergibt

$$F=\frac{1}{6}(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2+4\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{6}(x_2-x_1)(2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2)=$$

$$=\frac{1}{3}(x_1^2x_2+x_2^3+x_1x_2^2-x_1^3-x_1x_2^2-x_1^2x_2)=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$$

Was zu zeigen war

## 1.17 Abituraufgaben 1964 A

**Aufgabe 1**

a) Unter welchem Winkel schneidet das Bild von

$$y = f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$$

den positiven Teil der x-Achse?

b) Ermitteln Sie diejenigen Punkte des Bildes von

$$y = f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$$

in denen der Anstiegswinkel $45°$ beträgt!

a) positive Nullstelle der Funktion ist $x_0 = 2$, weitere Nullstellen $x_1 = 0; x_2 = -2$
1.Ableitung der Funktion $y' = \frac{3}{4}x^2 - 1$ ergibt den Anstieg $m = f'(2) = 2$
Winkel: $\tan\alpha = m = 2 \to \alpha = 63{,}4°$

b) Anstieg $45°$ entspricht $m = \tan 45° = 1$

$$y' = 1 = \frac{3}{4}x^2 - 1 \to x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{6}, x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

gesuchte Punkte $P_1(\frac{2}{3}\sqrt{6}; -\frac{2}{9}\sqrt{6}), P_2(-\frac{2}{3}\sqrt{6}; \frac{2}{9}\sqrt{6})$

**Aufgabe 2**
Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportkäfigs soll aus 36 m Winkeleisen hergestellt werden. Bei welchen Abmessungen für Länge, Breite und Höhe erhält man das größte Volumen des Käfigs, wenn dessen Höhe halb so groß wie die Länge sein soll?

Quader mit den Kanten $a$, $b$ und $c$. Zielfunktion $V = a \cdot b \cdot c$
Nebenbedingungen $4a + 4b + 4c = 36; 2c = b$ ergeben $a = 9 - 3c$ und somit $V = (9 - 3c) \cdot 2c \cdot c$
1.Ableitung Null setzen und Kontrolle in der 2.Ableitung

$$V' = 36c - 18c^2 = 0; \quad V'' = 36 - 36c \to c = 2; \quad V''(2) = -36 < 0$$

Für $c = 2$ liegt Maximum vor. Die anderen Kanten sind $a = 3$ und $b = 4$.

**Aufgabe 3**
Gegeben ist der Mittelpunkt $M(3; 4)$ des Kreises, der durch $P_1(7; 7)$ geht.

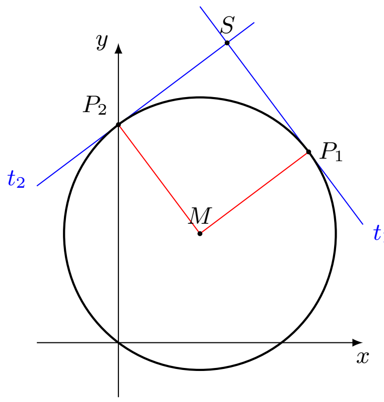
a) Bestimmen Sie durch Zeichnung und Rechnung den Schnittpunkt $P_2$ (mit $y_2 > 0$) dieses Kreises mit der y-Achse!

b) Zeichnen Sie die Geraden durch $P_1$ und $P_2$, die auf den Radien $\overline{MP_1}$ bzw. $\overline{MP_2}$ senkrecht stehen! Stellen Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung auf!

c) Wie groß ist die von diesen beiden Geraden und $\widehat{P_1P_2}$ (dem kleineren der beiden Kreisbögen) eingeschlossene Fläche?

d) Begründen Sie ausführlich den Ansatz zur Lösung der Teilaufgabe c!

a) Radius des Kreises ist Abstand von $M$ zu $P_1$: $r = \sqrt{(7-3)^2 + (7-4)^2} = 5$
Kreisgleichung $K : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Schnitt mit y-Achse für $x = 0$: $(0 - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \to y = 8$, d.h. $P_2(0; 8)$




b) 1. der Anstieg der Strecke $\overline{MP_1}$ ist $m_1 = \frac{3}{4}$
die Tangente in $P_1$ hat somit Anstieg $-\frac{4}{3}$, d.h. $t_1 : y = -\frac{4}{3}x + \frac{49}{3}$
2. der Anstieg der Strecke $\overline{MP_2}$ ist $m_2 = -\frac{4}{3}$
die Tangente in $P_2$ hat somit Anstieg $\frac{3}{4}$, d.h. $t_2 : y = \frac{3}{4}x + 8$
der Schnittpunkt $S$ beider Tangenten, die auf Grund ihrer Anstiege senkrecht aufeinander stehen, wird zu $S(4; 11)$.

c) Die Radien und die beiden Tangenten bilden ein Rechteck, da die Tangenten senkrecht zueinander sind und ein Radius auf der zugehörigen Tangente senkrecht steht.
Da außerdem $|\overline{MP_1}| = |\overline{SP_1}| = 5$ ist, wird das Rechteck sogar ein Quadrat. Die gesuchte Fläche ergibt sich damit aus der Differenz der Quadratfläche und der Fläche des Viertelkreises von $P_1$ nach $P_2$.

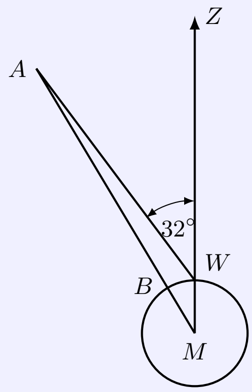
$$A = A_Q - A_{VK} = 5 \cdot 5 - \frac{\pi}{4} 5^2 = 25 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 5{,}37$$

**Aufgabe 4**

Bei einem Sportwettkampf wird aus einem Kreis mit dem Durchmesser von 2,135 m (lt. Wettkampfbestimmung) vom Punkte $W$ aus eine Kugel gestoßen, die 11,65 m von $W$ entfernt in $A$ auftrifft (vgl. Skizze!).

Die Stoßrichtung $\overrightarrow{WA}$ weicht von der Zielrichtung $\overrightarrow{WZ}$ um einen Winkel von $32°$ ab.

Laut Wettkampfordnung wird aber die Strecke $\overline{AB}$ gemessen und bewertet.
Wie viel cm werden bei diesem Stoß "verschenkt"?




Skizze (nicht maßstäblich)

Aus Kreisdurchmesser $d = 2{,}135$ m und Strecke $|\overline{WA}| = 11{,}65$ m wird

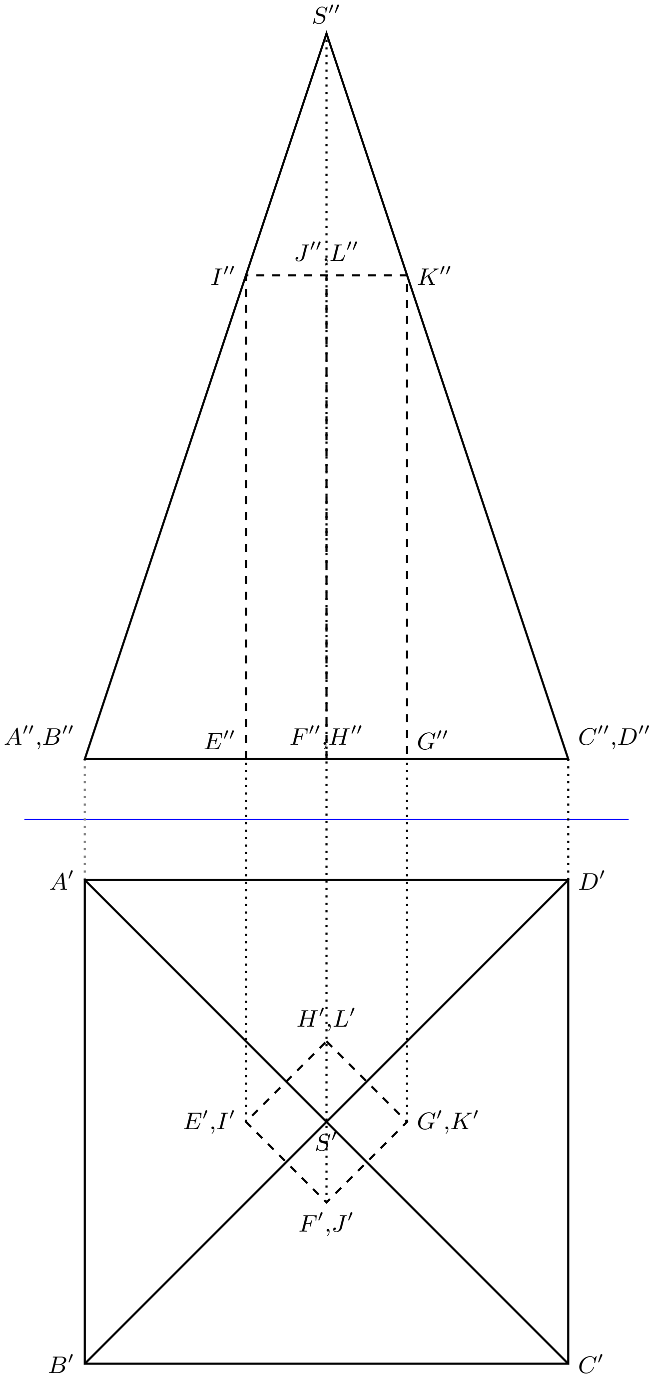
$$|\overline{WH}| = |\overline{WA}| \cdot \cos 32° \approx 9{,}880 \; ; \; |\overline{AH}| = |\overline{WA}| \cdot \sin 32° \approx 6{,}174$$

und mittels Satz des Pythagoras

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{AH}|^2 + |\overline{MH}|^2 = |\overline{AH}|^2 + \left(|\overline{WH}| + \frac{2.135}{2}\right)^2 \approx 12{,}568$$

Die Differenz $|\overline{AW}| - |\overline{AB}| = 11{,}65 - (|\overline{AM}| - \frac{2{,}135}{2}) \approx 0{,}15$ ergibt, dass 15 cm verschenkt wurden.

**Aufgabe 5**
Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat eine Grundkantenlänge von 8 cm und eine Körperhöhe von 12 cm.
Ihr ist ein 8 cm hohes gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche so einbeschrieben, dass die Eckpunkte seiner Deckfläche auf den Höhen der Seitenflächen der Pyramiden liegen.
Fertigen Sie davon eine Zeichnung in senkrechter Zweitafelprojektion an (Benennung aller Eckpunkte)!



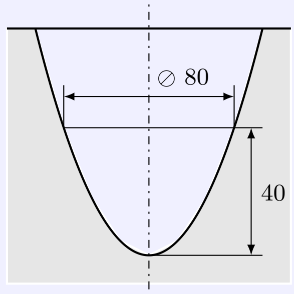
## 1.18 Abituraufgaben 1964 B

**Aufgabe 1**

Der Innenraum eines Gefäßes hat die Gestalt eines Rotationsparaboloids (siehe Skizze!)

a) Das Gefäß ist bis zur Höhe $h_1 = 40$ (Maßangaben in Millimetern) mit einer Flüssigkeit gefüllt.
Berechnen Sie das Volumen $V_1$ der Flüssigkeit!

b) Bis zu welcher Höhe $h_2$ ist das Gefäß gefüllt, wenn die Flüssigkeitsmenge verdoppelt worden ist?




Skizze (nicht maßstäblich)

a) Mit einem Koordinatenursprung im Scheitelpunkt der Parabel wird für die Funktion $y = ax^2$ mit dem Punkt $P(40; 40)$ für den Parameter $a = \frac{1}{40}$, d.h. $y = \frac{1}{40}x^2$
1.Ableitung $y' = \frac{1}{20}x$
Volumen $V_1$ der Flüssigkeit ergibt sich durch Rotation um die y-Achse

$$V_1 = \pi \int\limits_0^{40} (x^2 f'(x) dx = \pi \int\limits_0^{40} \frac{1}{20} x^3 dx = \pi \left[ \frac{1}{80} x^4 \right]_0^{40} = 32000\pi \approx 100500$$

Das Volumen der Flüssigkeit ist $100{,}5$ cm$^3$

b) Höhe der Flüssigkeit

$$64000\pi = \pi \frac{1}{80} h_2^4 \rightarrow h_2 = 40\sqrt[4]{2} \approx 47{,}57 \text{ mm}$$

**Aufgabe 2**
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie diese Hyperbel!

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die im Punkte $P_1(5; y_1 > 0)$ die Hyperbel berührt!

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Tangente den Winkel $\measuredangle(F_1P_1F_2)$ halbiert ($F_1$ und $F_2$ bezeichnen die Brennpunkte der Hyperbel)!

a) Halbachsen der Hyperbel $a = 4$ und $b = 3$
Brennpunkte der Hyperbel: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, d.h. $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$

b) y-Koordinate des Punktes $P_1$ mit $x = 5$: $\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = \frac{9}{4}$
mit $P_1(5; \frac{9}{4})$ und der allgemeinen Tangentengleichung einer Hyperbel wird

$$t : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}y = 1 \rightarrow t : y = \frac{5}{4}x - 4$$

Die Nullstelle der Tangente liegt bei $x_t = 3{,}2$

c) für die Vektoren $\overrightarrow{F_1P_1}, \overrightarrow{N_tP_1}, \overrightarrow{F_2P_1}$ wird

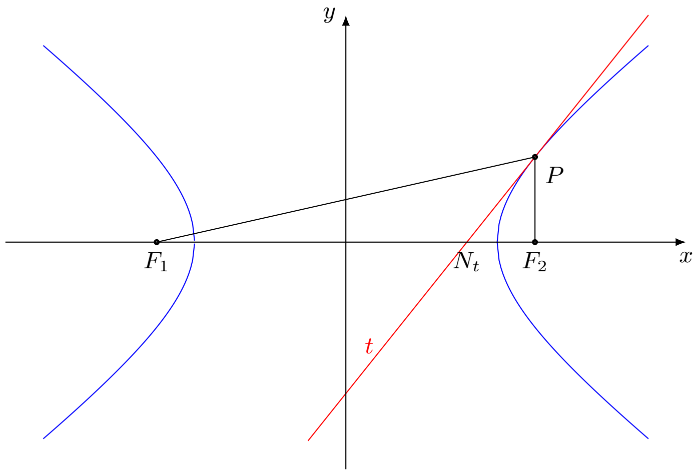
$$\overrightarrow{F_1P_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \overrightarrow{N_tP_1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \overrightarrow{F_2P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

und für die eingeschlossenen Teilwinkel

$$\cos\left(\angle(F_1P_1N_t)\right) = \frac{\overrightarrow{F_1P_1} \bullet \overrightarrow{N_tP_1}}{|\overrightarrow{F_1P_1}||\overrightarrow{N_tP_1}|} = \frac{\frac{369}{16}}{\frac{41}{4} \cdot \frac{9\sqrt{41}}{20}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\cos\angle(N_tP_1F_2)) = \frac{\overrightarrow{N_tP_1} \bullet \overrightarrow{F_2P_1}}{|\overrightarrow{N_tP_1}||\overrightarrow{F_2P_1}|} = \frac{\frac{81}{16}}{\frac{9\sqrt{41}}{20}\cdot\frac{9}{4}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

Da die Kosinuswerte beider Winkel gleich groß sind, sind die Teilwinkel gleich groß, d.h. die Tangente halbiert den Winkel $\angle(F_1P_1F_2)$. Was zu zeigen war.




**Aufgabe 3**
Einer geraden Pyramide ist ein gerades Prisma einbeschrieben. Beide Körper haben quadratische Grundflächen.
Die Seiten der Grundflächen verlaufen parallel zueinander.
Die Pyramide ist 12 cm hoch, ihre Grundkante ist 8 cm lang.

a) Die Höhe des Prismas sei 8 cm lang. Fertigen Sie eine Zeichnung in Grund- und Aufriss an (alle Eckpunkte benennen)!

b) Welche Maße müssen Höhe und Grundkante des Prismas erhalten, wenn dessen Volumen möglichst groß sein soll?

a) Lösung nach Aufgabe 5

b) Zielfunktion $V = a^2 \cdot h$, wobei $a$ die Grundkante und $h$ die Höhe des Prismas sind
Nebenbedingung: nach dem Strahlensatz gilt $\frac{12}{4} = \frac{12-h}{\frac{a}{2}} \to h = 12 - \frac{3}{2}a$
Zielfunktion $V = a^2\left(12 - \frac{3}{2}a\right)$; 1.Ableitung gleich Null setzen

$$V' = 24a - \frac{9}{2}a^2 = 0 \to a_1 = 0; a_2 = \frac{16}{3}$$

Kontrolle über 2.Ableitung $V'' = 24 - 9a \to V''(\frac{16}{3}) = -24 < 0$, d.h. Maximum
Abmessungen des Prismas in cm: $a = \frac{16}{3}; h = 4$

**Aufgabe 4**
Ein Ortsvektor $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt, bildet mit der x-Achse und der z-Achse Winkel von $60°$.
Der Winkel zwischen $\vec{x}$ und der y-Achse ist stumpf.
Der absolute Betrag des Vektors $\vec{x}$ ist $|\vec{x}| = 4\cdot\sqrt{2}$. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$!

Für die Winkel zur x-Achse oder z-Achse wird für den Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\cos 60° = 0{,}5 = \frac{\vec{x}\bullet\vec{i}}{|4\sqrt{2}||1|} = \frac{x}{4\sqrt{2}} \to x = \frac{2}{\sqrt{2}}, \text{ ebenso } z = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Dann wird über den Betrag von $|\vec{x}| = 4\sqrt{2} = \sqrt{8+y^2+8} \to y = \pm 4$.

Da der Winkel zur y-Achse stumpf sein soll, wird $y = -4$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -4 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 5**
Auf einem Lagerplatz sind Rohre in folgender Weise gestapelt:
In der untersten Schicht liegen 12 Rohre; in der nächsten liegen die Rohre in den Lücken der darunterliegenden Schicht; in jeder folgenden Schicht liegen die Rohre wiederum auf Lücke zur darunterliegenden. In der obersten Schicht liegt nur noch 1 Rohr.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Rohre dieses Stapels!

b) Mit Hilfe welcher Formel kann die entsprechende Aufgabe gelöst werden, wenn in der untersten Schicht $n$ Rohre liegen ($n$ ist eine beliebige natürliche Zahl)?

c) Beweisen Sie die Gültigkeit der beim Lösen des Teiles b) gewonnenen Summenformel mit Hilfe vollständiger Induktion!
(Anmerkung; in den Klassen Berufsausbildung mit Abitur kann bei der Teilaufgabe 5c auch ein anderes Beweisverfahren benutzt werden.)

a) Summenformel $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ und mit $n = 12$ sind es 78 Rohre

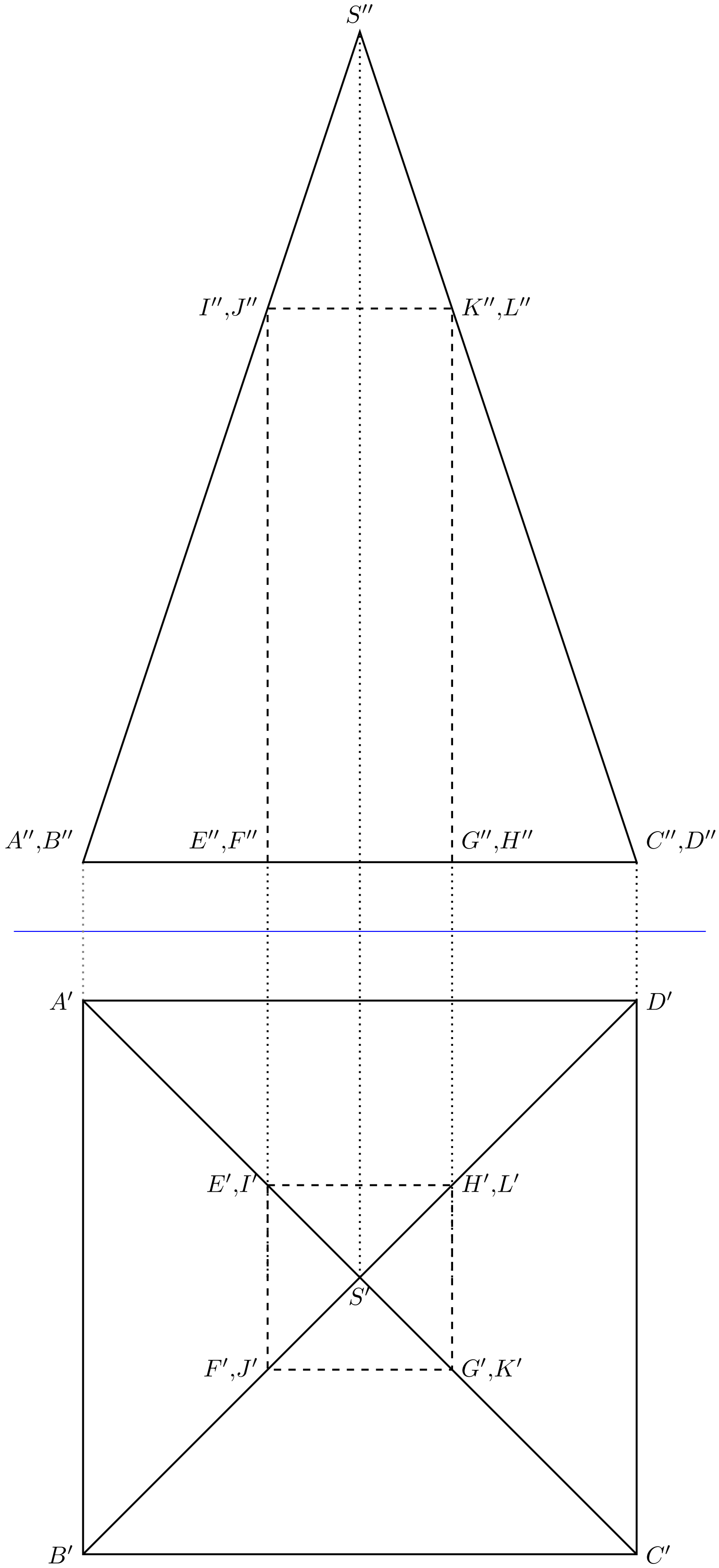
b) Summenformel $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

c) Induktionsanfang: $a_1 = 1 = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + a_k = \frac{k(k+1)}{2} = s_k$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $a_1 + ... + a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = s_{k+1}$
Induktionsbeweis

$$a_1 + ... + a_k + a_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1)+2k+2}{2} =$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1(k+2)}{2} = s_{k+1}$$

Lösung: Aufgabe 3 a)



## 1.19 Abituraufgaben 1965 A

**Pflichtaufgaben**

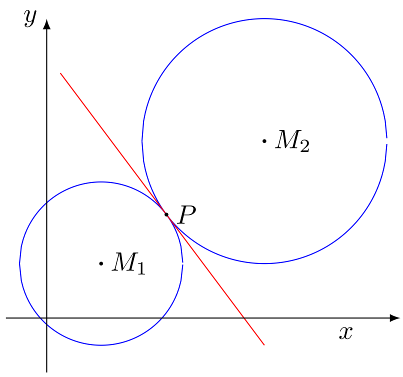
**Aufgabe 1**
Zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1(2;2)$ und $M_2(8;6{,}5)$ berühren sich von außen. Für ihre Radien $r_1$ und $r_2$ gilt die Proportion $r_1 : r_2 = 2 : 3$.

a) Berechnen Sie die Länge der Radien, stellen Sie die Kreisgleichungen auf und zeichnen Sie die Kreise!

b) Berechnen Sie den Anstieg der Tangente im Berührungspunkt beider Kreise!

a) Abstand der zwei Mittelpunkte $M_1M_2 = \sqrt{(8-2)^2 + (6{,}5-2)^2} = \frac{15}{2}$.
Radien: $r_1 = \frac{2}{5}|M_1M_2| = 3$, $r_2 = \frac{3}{5}|M_1M_2| = 4{,}5$.
Kreisgleichungen

$$K_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 3^2 = 9 \qquad ; \qquad K_2 : (x-8)^2 + (y-6{,}5)^2 = 4{,}5^2 = \frac{81}{4}$$

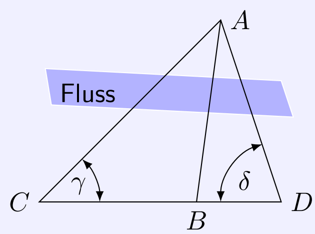



b) der Berührungspunkt $P$ liegt auf der Strecke $M_1M_2$ im Abstand $\frac{2}{5}|M_1M_2|$ von $M_1$ entfernt:

$$x_P = 2 + \frac{2}{5} \cdot 6 = 4{,}4 \qquad ; \qquad y_P = 2 + \frac{2}{5} \cdot 4{,}5 = 3{,}8$$

Berührungspunkt $P(4{,}4; 3{,}8)$.
Die Strecke $M_1M_2$ hat den Anstieg $m_{M_1M_2} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$. Damit muss die Tangenten in $P$ den Anstieg $m_t = -\frac{4}{3}$ besitzen.
Tangentengleichung: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$

**Aufgabe 2**
Für die Projektierung einer Flussbrücke benötigt man die Entfernung zwischen den Geländepunkten $A$ und $B$ (siehe Skizze).
(Skizze nicht maßstäblich)




Um die Länge der Strecke $AB$ berechnen zu können, wird an dem einen Flussufer eine durch $B$ gehende Gerade abgesteckt. Auf ihr werden die Standlinien $CB$ und $BD$ vermessen.

Außerdem wird von den Punkten $C$ und $D$ aus der jenseits des Flusses liegende Punkt $A$ angepeilt. Durch Messung werden folgende Größen ermittelt:

$$CB = 47{,}4 \text{ m}; \qquad BD = 54{,}6 \text{ m}; \qquad \gamma = 74{,}3°; \qquad \delta = 62{,}5°$$

Berechnen Sie die Länge der Strecke $AB$! Rechenstabgenauigkeit genügt.

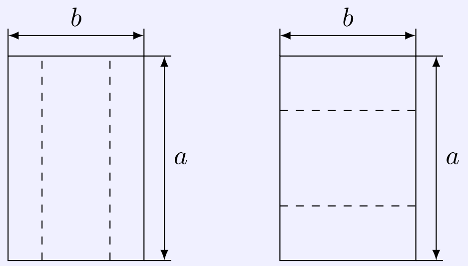
Für den Winkel bei $A$ wird $\alpha = 180° - \gamma - \delta = 43{,}2°$, die Strecke $CB$ ist 102 m lang.
1. Sinussatz für $AC$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} \rightarrow \frac{AC}{102} = \frac{\sin 62{,}5°}{\sin 43{,}2°} \rightarrow AC = 132{,}2 \text{ m}$$

2. Kosinussatz für $AB$

$$AB^2 = CB^2 + AC^2 - 2|CB||AC|\cos\gamma = 47{,}4^2 + 32{,}7^2 - 2 \cdot{}^3\, 2{,}7 \cdot 47{,}4 \cos 74{,}3° \to AB = 128{,}3 \text{ m}$$

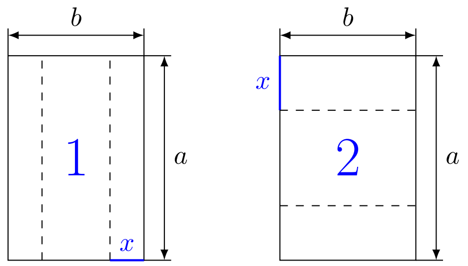
**Aufgabe 3**
Aus rechteckigen Blechen von der Länge $a$ und der Breite $b$ ($a > b$) sollen der Boden und zwei gegenüberliegende Seitenflächen von quaderförmigen Behältern für Kleinmaterial gebogen werden.




Die beiden Skizzen (nicht maßstäblich) zur Aufgabe 3 zeigen zwei verschiedenen Möglichkeiten für die Lage der Biegekanten.

a) Bestimmen Sie für beide Möglichkeiten das jeweilige Maximalvolumen!

b) Welcher von diesen beiden Behältern hat das größere Fassungsvermögen?
Begründen Sie Ihre Antwort!




a) Fall 1 (links): Zielfunktion $V = ax(b-2x) = abx - 2ax^2$.
1.Ableitung $V' = ab - 4ax$ mit der Nullstelle $x = \frac{b}{4}$, da 2.Ableitung $V'' = -4a < 0$ liegt lokales Maximum vor; maximales Volumen im Fall 1: $V_{max1} = \frac{1}{8}ab^2$
Fall 2 (rechts): Zielfunktion $V = bx(a-2x) = abx - 2bx^2$.
1.Ableitung $V' = ab - 4bx$ mit der Nullstelle $x = \frac{a}{4}$, da 2.Ableitung $V'' = -4b < 0$ liegt lokales Maximum vor; maximales Volumen im Fall 2: $V_{max2} = \frac{1}{8}a^2b$

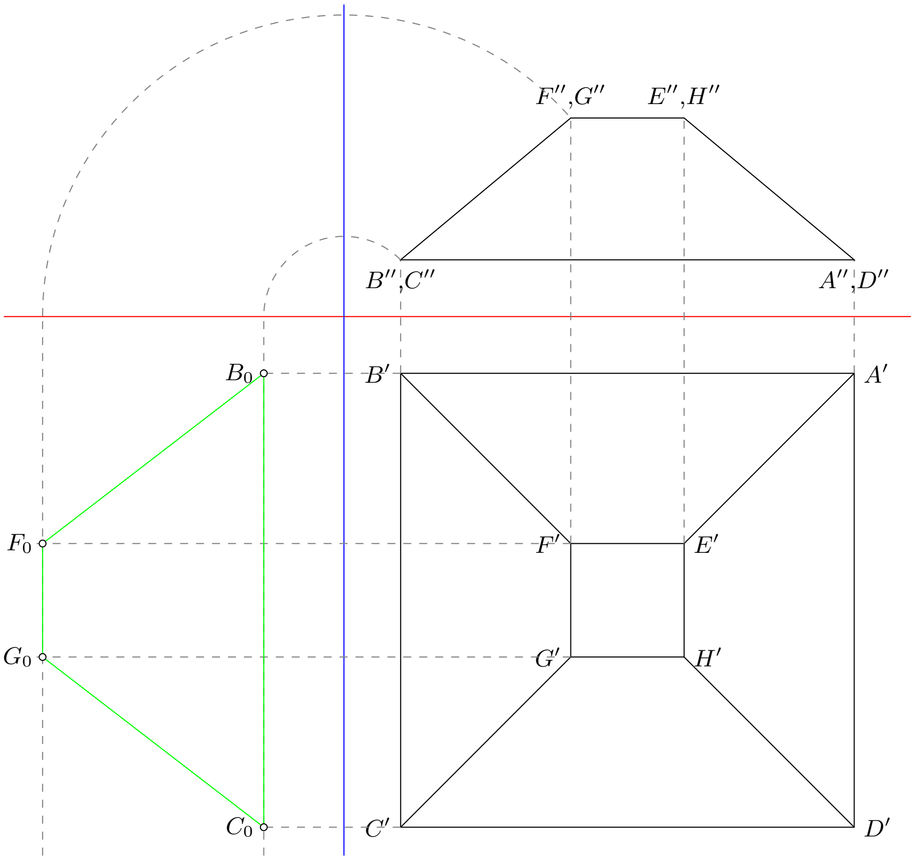
b) das größere Fassungsvermögen liegt im 2.Fall vor, da nach Voraussetzung $a > b$ und somit

$$V_{max2} = \frac{1}{8}a^2b > V_{max1} = \frac{1}{8}ab^2$$

**Aufgabe 4**

a) Stellen Sie folgenden geraden Pyramidenstumpf mit quadratischen Parallelflächen in senkrechter Zweitafelprojektion dar:
Die Seitenlängen der Quadrate betragen 8 cm bzw. 2 cm; der Pyramidenstumpf ist 2,5 cm hoch.

b) Ermitteln Sie zeichnerisch die wahre Größe und Gestalt einer Seitenfläche dieses Pyramidenstumpfes (Benennung aller Punkte).

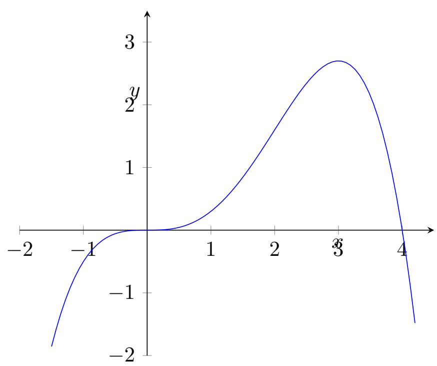



**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

**Aufgabe 5.1.**
Gegeben ist die Funktion mit dem analytischen Ausdruck

$$y = f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^4$$

Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im kartesischen Koordinatensystem nach Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte!

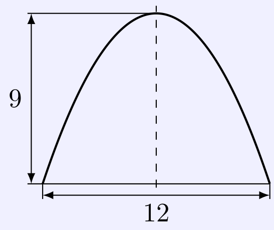



Nullstelle: $0 = x^3(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}x)$ liefert als Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$, d.h. die Schnittpunkte $S_1(0;0), S_2(4{,}0)$.
Extrempunkte:
1.Ableitung $y' = \frac{6}{5}x^2 - \frac{2}{5}x^3$, 2.Ableitung $y'' = \frac{12}{5}x - \frac{6}{5}x^2$, 3.Ableitung $y''' = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}x$
Nullstelle der 1.Ableitung $0 = x^2(\frac{6}{5} - \frac{2}{5}x) \rightarrow x_{E1} = 0; x_{E2} = 3$
Kontrolle in der 2.Ableitung ergibt: $f''(3) = -3{,}6 < 0$, d.h. es liegt ein lokales Maximum $E(3; \frac{27}{10})$ vor

$f''(0) = 0$, d.h., es liegt kein lokales Extremum vor.

Wendepunkte:
$y'' = 0 = x(\frac{12}{5} - \frac{6}{5}x)$ ergibt $x_{W1} = 0$ und $x_{W2} = 2$.
Die Funktionswerte der 3.Ableitung sind $f'''(0) = \frac{12}{5} \neq 0$ und $f'''(2) = -\frac{12}{5} \neq 0$, so dass Wendepunkte vorliegen, für $x_{W1} = 0$ sogar ein Horizontalwendepunkt. Koordinaten $W_1(0;0)$, $W_2(2;\frac{8}{5})$.

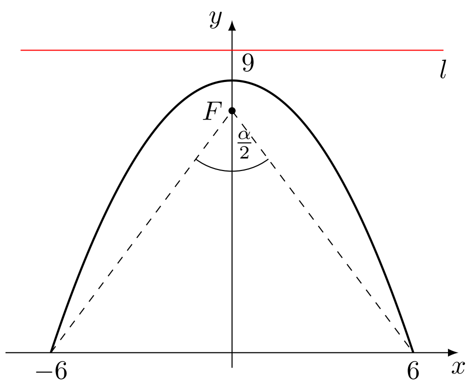
**Aufgabe 5.2.**
Ein Hohlspiegel, dessen Achsenschnitt eine Parabel ist, hat einen Öffnungsdurchmesser von 12 cm und eine Tiefe von 9 cm (siehe Skizze, nicht maßstäblich).




a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel!

b) Geben Sie die Gleichung der Leitlinie der Parabel an und konstruieren Sie diese Parabel!

c) Welchen Winkel bilden im Achsenschnitt die beiden Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt ausgehen und den Rand des Spiegels treffen?




1. Legt man, wie in der Skizze, ein Koordinatensystem fest, so ergibt sich für die Parabel der Ansatz $y = -ax^2 + 9$.
   Mit Einsetzen eines Punktes $P(6;0)$ wird $a = \frac{1}{4}$, d.h. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 9$.
2. Umstellen der Parabelgleichung zu $y^2 + 4x - 36 = 0$ ergibt den Parameter $p = -2$ und damit den Brennpunkt $F(0;8)$ sowie die Leitlinie $l : y = 10$.
3. Die Randpunkte des Spiegels seien $P_1(-6;0)$ und $P_2(6;0)$. Gesucht ist dann der Winkel $\alpha = \measuredangle P_1FP_2$.
   Für das rechtwinklige Dreieck $OFP_2$ ergibt sich
   $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{OP_2}{OF} = \frac{3}{4} \to \frac{\alpha}{2} = 36{,}87°$$
   Der gesuchte Winkel ist $\alpha = 73{,}74°$.

**Aufgabe 5.3.**

a) Gegeben seien die Funktionen mit dem analytischen Ausdruck

$$y = f(x) = x^2 - 6x + k \qquad (k > 9)$$

Weisen Sie nach, dass diese Funktionen keine Nullstellen haben.

b) Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 > x^2$.
Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 = x^2$.
Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 < x^2$.

c) In der allgemeinen Form der Geradengleichung $Ax + By + C = 0$ sollen die Koeffizienten folgenden drei Bedingungen genügen: $A > 0, \qquad B = 1, \qquad C \leq 0.$
Beschreiben Sie die Lagen dieser Geraden im kartesischen Koordinatensystem.

1. Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$y = x^2 - 6x + k = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-k}$$

Nach Voraussetzung ist $k > 9$. Damit ist der Radikand $9 - k$ stets negativ, d.h. die Wurzel kann nicht gezogen werden. Folglich gibt es Nullstellen.

2. 1.Fall $x^3 > x^2$:

$$x^3 - x^2 > 0 \rightarrow x^2(x-1) > 0 \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Da $x^2$ positiv ist und $x^3 > x^2$ die Lösung $x = 0$ ausschließt, kann dividiert werden, d.h. dieser Fall tritt für $x > 1$ ein.
2.Fall $x^3 = x^2$:
Analog folgt $x^2(x-1) = 0$. Das Produkt ist für $x = 0$ und $x = 1$ gleich Null. Lösung ist damit $x = 0$ bzw. $x = 1$.
3.Fall $x^3 < x^2$:
Wie im 1.Fall ergibt sich $x - 1 < 0$, d.h. $x < 1$. Allerdings ist $x = 0$ auszuschließen, da dafür Gleichheit gilt. Lösung $x < 1; x \neq 0$.

3. Einsetzen von $B$ und Umstellen ergibt $y = -Ax - C$.
Da $A > 0$ ist der Anstieg der Geraden negativ, d.h. monoton fallend. Da $C \leq 0$ ist, ergibt sich für das Absolutglied $n \geq 0$. Die Geraden verlaufen damit im Koordinatensystem monoton fallend und durchlaufen den III.Quadranten nicht.

## 1.20 Abituraufgaben 1965 B

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Das Bild der Funktion

$$y = f(x) = 6 - \frac{6}{\sqrt{x}}$$

die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 4$ und $x = 9$ begrenzen eine Fläche.

a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Zeigen Sie, dass die Nullstelle der Funktion nicht innerhalb des Integrationsintervalls liegt!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht! (Rechenstabgenauigkeit ist ausreichend!)

a) Nullstellen der Funktion $0 = y = 6 - \frac{6}{\sqrt{x}} \to x = 1$, d.h. sie liegt nicht im Intervall $[4; 9]$
Inhalt der eingeschlossenen Fläche

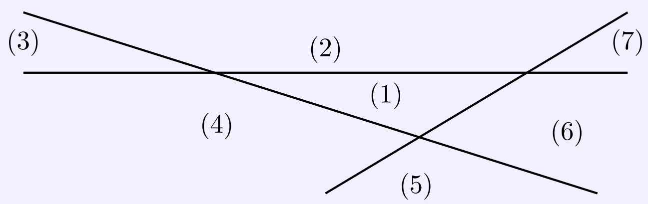
$$A = \int_4^9 \left(6 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[6x - 12\sqrt{x}\right]_4^9 = 18FE$$

b) Volumen des Rotationskörpers

$$V = \pi \int_4^9 \left(6 - \frac{6}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_4^9 \left(36 - \frac{72}{\sqrt{x}} + \frac{36}{x}\right) dx = 36\pi \left[x - 4\sqrt{x} + \ln x\right]_4^9 =$$

$$= 36\pi \left(1 + \ln \frac{9}{4}\right) \approx 204 \text{ RE}$$

**Aufgabe 2**
Zeichnet man in einer Ebene $n$ Geraden, so wird die Ebene dadurch in eine Anzahl von Teilen zerlegt.




Von den Geraden soll keine zu einer anderen parallel sein, und durch keinen Punkt der Ebene sollen mehr als 2 der Geraden verlaufen. Der Fall $n = 3$ ist in einer Skizze dargestellt.

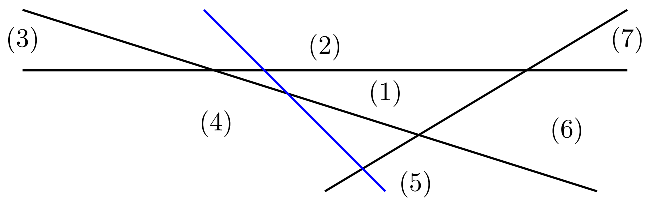
a) Nimmt man zu $n - 1$ Geraden eine weitere Gerade hinzu, so erhöht sich die Anzahl der Ebenenteile um $n$.
Überprüfen Sie das an Hand einer Skizze für den Fall n=4!

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $n$ Geraden die Ebene in insgesamt

$$S_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} \;;\; (n = 1{,}2{,}3, \dots)$$

Teile zerlegen!

In der Skizze wurde zu $n - 1 = 3$ eine zusätzliche Gerade $n = 4$ (blau) eingezeichnet. Dabei werden die Bereiche (2), (1), (4) und (5) jeweils in zwei Teilbereiche zerlegt, d.h. die Anzahl der Ebenenteile erhöht sich um $n = 4$.




a)

b) $S_n$ ist die Anzahl der Ebenenteile. Nach Aufgabenstellung gilt dann $S_n = S_{n-1} + n$
Induktionsanfang für $n = 1$:
eine Gerade erzeugt zwei Ebenenteile, d.h. $n = 1 \to S_1 = \frac{1^2+1+2}{2} = 1$

Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt:
$k$ Geraden erzeugen $S_k = \frac{k^2+k+2}{2}$ Ebenenteile

Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt:
$(k + 1)$ Geraden erzeugen $S_{k+1} = \frac{(k+1)^2+k+3}{2}$ Ebenenteile
Induktionsbeweis: $(k + 1)$ Geraden erzeugen Ebenenteile

$$S_k + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2 + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 4}{2} =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 3}{2} = \frac{(k + 1)^2 + k + 3}{2}$$

**Aufgabe 3**
Eine durch den Vektor $\overrightarrow{F_1} = 6{,}3\vec{i} + 2{,}5\vec{j} + 6{,}0\vec{k}$ dargestellte Kraft bewegt einen Körper geradlinig von $P_1(1{,}7; 6{,}5; -9{,}3)$ nach $P_2(3{,}2; -1{,}6; -2{,}5)$.
(Die Einheiten der Beträge der Kraft bzw. des Weges sind Kilopond bzw. Meter.)

a) Berechnen Sie den Betrag von $\overrightarrow{F_1}$!

b) Berechnen Sie die Arbeit, die bei dieser Bewegung verrichtet wird!

c) Welchen Wert muss die dritte Koordinate eines Kraftvektors

$$\overrightarrow{F_2} = 6{,}3\vec{i} + 2{,}5\vec{j} + z_2\vec{k}$$

haben, wenn auf dem gleichen Weg eine Arbeit von 36 kpm verrichtet werden soll?

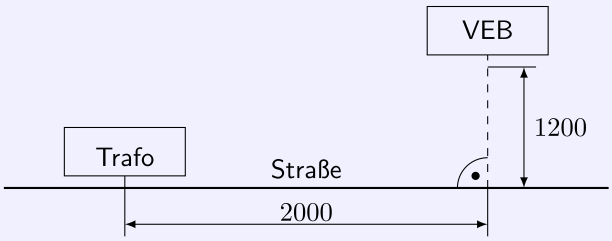
a) Kraftvektor $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 6{,}3 \\ 2{,}5 \\ 6{,}0 \end{pmatrix}$ mit dem Betrag $|\vec{F_1}| = \sqrt{6{,}3^2 + 2{,}5^3 + 6{,}0^2} = \sqrt{81.94} \approx 9{,}05$

b) Weg $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -8{,}1 \\ 6{,}8 \end{pmatrix}$ mit $|P_1\vec{P_2}| = \sqrt{114{,}1}$
Verrichtete Arbeit $W = \vec{F}\vec{s} \cdot \cos(\angle(F,s) = \vec{F_1} \bullet \overrightarrow{P_1P_2} = 30$ kpm

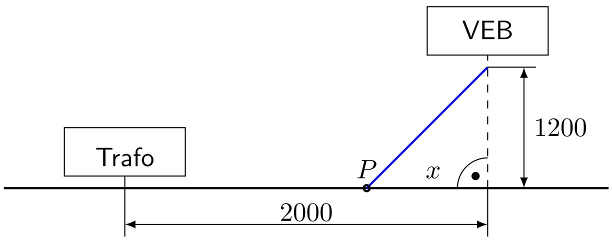
c) Kraftvektor $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 6{,}3 \\ 2{,}5 \\ z \end{pmatrix}$, somit

$$36 \text{ kpm} = \vec{F_2} \bullet \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6{,}3 \\ 2{,}5 \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -8{,}1 \\ 6{,}8 \end{pmatrix} \to -10{,}8 + 6{,}8z = 36 \to z = 6{,}9$$

**Aufgabe 4**
Die Skizze zeigt die Lage eines volkseigenen Betriebes und einer Transformatorstation.




(Maßangabe in m)
Der Betrieb soll durch ein Erdkabel an die Transformatorstation angeschlossen werden.
Die Kosten für das Verlegen längs der Straße betragen 15 MDN pro Meter und im unwegsamen Gelände 25 MDN pro Meter. Die Kosten für das Verlegen des Gesamtkabels sollen möglichst gering gehalten werden. Wegen der unterschiedlichen Kosten für die Verlegung muss deshalb das Kabel zum Teil längs der Straße und dann geradlinig im Gelände verlegt werden.
In welchem Abstand von der Transformatorstation muss die Verlegung des Kabels im Gelände beginnen?




Das Kabel wird ab dem Punkt $P$ durch das Gelände verlegt. Mit der Variablen $x$ (Skizze) wird dann für die Zielfunktion der Kosten

$$K = 15(2000 - x) + 25\sqrt{1200^2 + x^2}$$

Ableitungen $K' = -15 + \frac{25x}{\sqrt{1200^2+x^2}}$; $K'' = \frac{36000000}{(\sqrt{1200^2+x^2})^3}$
1.Ableitung Null setzen ergibt im Definitionsbereich von $x$

$$15\sqrt{1200^2 + x^2} = 25x \rightarrow 324000000 + 225x^2 = 625x^2 \rightarrow x^2 = 810000 \rightarrow x = 900$$

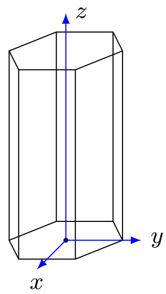
Die zweite Ableitung wird für positive $x$ stets größer Null, d.h. ein Minimum liegt vor.
Das Kabel muss in $2000 - 900 = 1100$ m Entfernung von der Trafostation durch das Gelände gezogen werden.
Die Gesamtkosten sind 54000 MDN.

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden vier Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

**Aufgabe 5.1.**
a) Konstruieren Sie das Grund-Aufriss-Bild eines geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas. Das Prisma soll so auf der Grundrisstafel stehen, dass ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen parallel zur Aufrisstafel verläuft.
Die Grundkante des Prismas sei 30 mm lang, seine Höhe 100 mm lang.

b) Das Prisma wird von einer Ebene geschnitten, die senkrecht zur Aufrisstafel verläuft und unter $45°$ zur Grundrisstafel geneigt ist.
Die Ebene soll weder Grund- noch Deckfläche des Prismas schneiden.
Ermitteln Sie durch Konstruktion die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur.
Anmerkung zu a) und b): Alle Punkte sind zu bezeichnen.

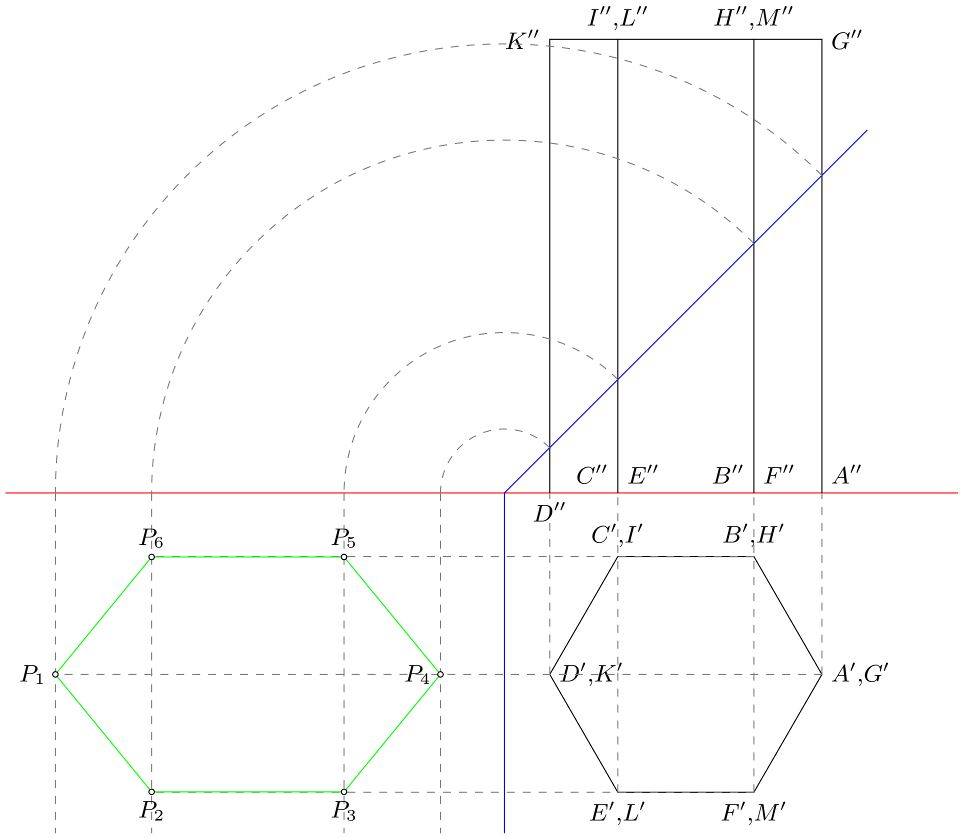
c) Überprüfen Sie das durch Zeichnung ermittelte Ergebnis für die Seitenlängen der Schnittfigur durch Rechnung!




Legt man in das sechsseitige Prisma ein Koordinatensystem, wie in der Skizze, so kann man im Grundriss senkrecht die x-Koordinate und waagerecht die y-Koordinate ablesen, im Aufriss senkrecht die z-Koordinate der Schnittpunkte.
Für die Strecke $P_4P_3$, $P_4$ liegt auf der Kante $DM$, $P_3$ auf $EL$, wird, wenn die Schnittebene 1 cm von der Grundfläche des Prismas entfernt die Grundrissebene schneidet

$$x_4 = 0; \quad y_4 = -3; \quad z_4 = 1 \quad \text{und}$$

$$x_3 = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}; \quad y_3 = -1.5; \quad z_3 = 2.5$$




Für die Strecke $P_4P_3$ wird damit

$$|P_4P_3| = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2} \approx 3{,}35$$

Aus Symmetriegründen haben die Strecken $P_4P_5$, $P_1P_2$ und $P_1P_6$ die gleiche Länge. Analog ergibt sich mit den Koordinaten für $P_2$:

$$x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{5}; \quad y_2 = 1{,}5; \quad z_2 = \frac{11}{2}$$

$|P_2P_3| \approx 4{,}24 = |P_5P_6|$.

**Aufgabe 5.2.**
Bestimmen Sie die Nullstellen und die Abszissen der Extrema der Funktion

$$y = f(x) = \cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4}$$

im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

Nullstellen:

$$0 = \cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} \rightarrow 0 = 1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4}$$
$$0 = \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4}$$

Substitution $u = \sin x$

$$0 = u^2 - u - \frac{3}{4} \rightarrow u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$
$$u_1 = -\frac{1}{2}; \qquad u_2 = \frac{3}{2}$$

$u_2$ entfällt, da Rücksubstitution keine Lösung ergibt. Somit ist im Untersuchungsintervall

$$\sin x = u_1 = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{7}{6}\pi; \qquad x_2 = \frac{11}{6}\pi$$

Die Ableitungen der Funktion sind

$$y' = \cos x(1 - 2\sin x); \qquad y'' = -4\cos^2 x - \sin x + 2$$

Extremstellen:

$$0 = \cos x(1 - 2\sin x) \rightarrow 0 = \cos x \vee 0 = 1 - 2\sin x$$

Auflösen beider Gleichungen ergibt 4 extremwertverdächtige Stellen

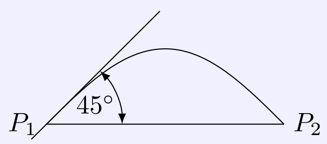
$$x_{E1} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x_{E2} = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad x_{E3} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad x_{E4} = \frac{5\pi}{6}$$

Kontrolle in der zweiten Ableitung

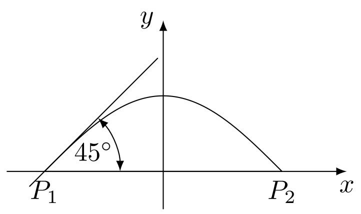
$$f''(x_{E1}) = 1 > 0 \quad ; \quad f''(x_{E2}) = 3 > 0 \quad ; \quad f''(x_{E3}) = -\frac{3}{2} < 0 \quad ; \quad f''(x_{E4}) = -\frac{3}{2} < 0$$

Ergebnisse: lokale Minima bei $E_1(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4})$ ; $E_2(\frac{3\pi}{2}; -\frac{4}{4})$, lokale Maxima bei $E_3(\frac{\pi}{6}; 1)$ ; $E_4(\frac{5\pi}{6}; 1)$

**Aufgabe 5.3.**




Die senkrecht zur Parabelachse verlaufende Sehne des Parabelsegments $P_1P_2$ sei 10 cm lang.
Die im Punkt $P_1$ an die Parabel gelegte Tangente bilde mit der Sehne einen Winkel von $45°$.
Berechnen Sie die Fläche dieses Parabelsegments mit Hilfe der Integralrechnung!




Legt man ein Koordinatensystem, wie in der Skizze, zugrunde, so haben die Punkte die Koordinaten $P_1(-5; 0)$ und $P_2(5; 0)$. Für die Parabel wird dann $y = ax^2 + b$ ($y' = 2ax$) mit folgenden Eigenschaften:
1.) $P_2(5; 0)$ einsetzen: $0 = 25a + b$
2.) Anstieg 1 bei $P_1$ in die 1.Ableitung einsetzen: $1 = -10a$
Die Gleichungen ergeben $a = -\frac{1}{10}$, $b = 2{,}5$ und die Parabelgleichung $y = -\frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$.
Flächeninhalt des Parabelsegments:

$$A = \left| \int_{-5}^{5} \left( -\frac{1}{10}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx \right| = \left[ \frac{5}{2}x - \frac{1}{30}x^3 \right]_{-5}^{5} = \frac{50}{3} \text{ cm}^2$$

**Aufgabe 5.4.** Die Punkte $A(3;-2;4)$, $B(7;-4;8)$ und $C(3;-3;2)$ seien Eckpunkte eines Dreiecks. Berechnen Sie vektoriell:

a) den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$,

b) den Winkel $CAB$ dieses Dreiecks!

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ spannen das Dreieck auf. Der Flächeninhalt ist die Hälfte des Betrages des Vektorprodukts beider Vektoren:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ FE}$$

Innenwinkel $CAB$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{36}\sqrt{5}} = \frac{-6}{\sqrt{36}\sqrt{5}} \approx -0{,}4472 \rightarrow \alpha = 116{,}57^\circ$$

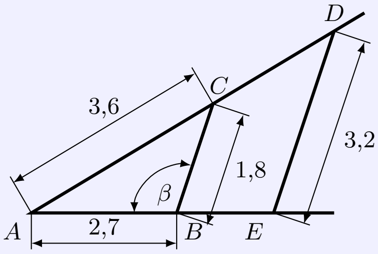
## 1.21 Abituraufgaben 1966 A

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**

a) Berechnen Sie den Winkel $\beta$, den die Straße von $A$ nach $B$ mit der Abzweigung von $B$ nach $C$ bildet (siehe Skizze!)

b) Der Straßenabschnitt von $B$ nach $E$ ist gesperrt. Die Umleitung erfolgt von $B$ über $C$ und über $D$ nach $E$.
Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{ED}$ sind parallel.
Berechnen Sie die Differenz aus der Länge der Umleitung und der Sperrstrecke!
(Rechenstabgenauigkeit genügt)




Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in km

a) Kosinussatz ergibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \to \cos\beta = \frac{|\overline{AC}|^2 - |\overline{AB}|^2 - |\overline{BC}|^2}{-2|\overline{AB}||\overline{BC}|} \to \beta = 100°$$

b) mittels Strahlensatz gewinnt man $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$

$$\frac{2{,}7}{|\overline{BE}| + 2{,}7} = \frac{1{,}8}{3{,}2} \to |\overline{BE}| = 2{,}1; \frac{2{,}7}{4{,}8} = \frac{3{,}6}{3{,}6 + |\overline{CD}|} \to |\overline{CD}| = 2{,}8$$

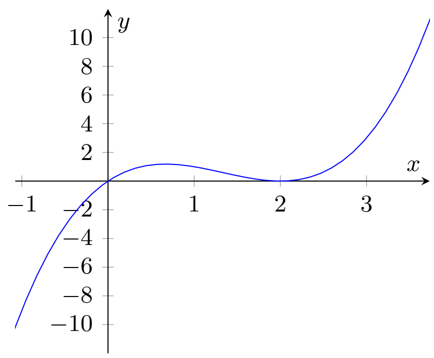
Sperrstrecke = 2,1 km, Umleitung = 7,8 km, Differenz beider Strecken 5,7 km

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

a) Untersuchen Sie, ob das Bild dieser Funktion Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte besitzt und ermitteln Sie deren Koordinaten!

b) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion unter Verwendung der errechneten Koordinaten!



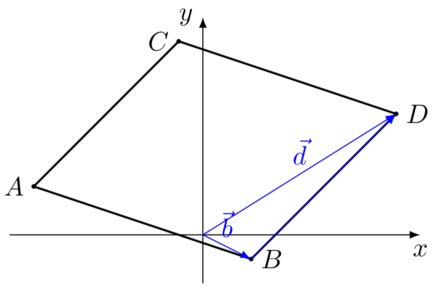

a) Nullstellen $0 = y = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2 \to x_1 = 0; x_2 = 2$
1.Ableitung $y' = 3x^2 - 8x + 4$ , 2.Ableitung $y'' = 6x - 8$
Ableitung gleich Null setzen $0 = 3x^2 - 8x + 4 \to x_{E1} = 2; x_{E2} = \frac{2}{3}$
Kontrolle mittels 2.Ableitung: $f''(x_{E1}) = 4 > 0$ Minimum , $f''(x_{E2}) = -4 < 0$ Maximum
lokale Extremstellen $P_{Min}(2;0), P_{Max}(\frac{2}{3}; \frac{32}{27})$
2.Ableitung gleich Null setzen $0 = 6x - 8 \to x_W = \frac{4}{3} \to W(\frac{4}{3}; \frac{16}{27})$

**Aufgabe 3**
Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte $A(-7;2), B(2;-1), C(-1;8)$ in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des im ersten Quadranten liegenden vierten Eckpunktes $D$ zeichnerisch und bestimmen Sie mit Hilfe der analytischen Geometrie die Koordinaten von $D$ rechnerisch!

b) Weisen Sie nach, dass dieses Parallelogramm kein Rechteck ist!

a) Punkt $D$ ergibt sich mit $\vec{d} = \vec{b} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow D(8;5)$




b) Es liegt kein Rechteck vor, wenn wenigstens ein Innenwinkel nicht $90°$ ist

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 36 \neq 0$$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht senkrecht zueinander und der Innenwinkel bei $A$ kein Rechter. Es ist kein Rechteck.

**Aufgabe 4**

a) Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch seine Schenkel $a$ und den von diesen eingeschlossenen Winkel $\gamma$ bestimmt.
Leiten Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts gleichschenkliger Dreiecke her, in der keine weiteren als die Bestimmungsstück a und $\gamma$ enthalten sind!
Gehen Sie dabei von der Formel

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

aus (in dieser Formel bedeute c die Basis, $h_c$ die zugehörige Höhe des gleichschenkligen Dreiecks)!

b) In einem gleichschenkligen Dreieck lässt sich der Winkel $\gamma$ wie folgt berechnen:

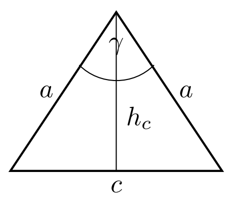
$$\cos\gamma = \frac{2a^2 - c^2}{2a^2}$$

Dabei können folgende drei Fälle auftreten:

$$2a^2 > c^2 \ ; \ 2a^2 = c^2 \ ; \ 2a^2 < c^2$$

Was lässt sich jeweils über die Größe des Winkels aussagen? Begründen Sie Ihre Aussagen!

a)




Im Dreieck gilt $h_c = a\cos\frac{\gamma}{2}$ und $c = a\sin\frac{\gamma}{2}$. Damit wird

$$A = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot a\sin\frac{\gamma}{2} \cdot a\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2}{4}\sin\gamma$$

b) für $2a^2 > c^2$ werden der Nenner der Kosinuswert positiv, womit $\gamma < 90°$, d.h. spitz ist
für $2a^2 = c^2$ wird analog $\gamma = 90°$, für $2a^2 < c^2$ ist $\gamma > 90°$, d.h. stumpf

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

**Aufgabe 5.1.**
Von allen geraden Kreiskegel, deren Mantellinien $s = 12$ cm lang sind, ist derjenige mit dem größten Volumen gesucht.
Berechnen Sie für diesen Kegel die Höhe und den Grundkreisradius!
(Rechenstabgenauigkeit genügt!)

Für den Kreiskegel mit dem Radius $r$, der Höhe $h$ und der Mantellinie $s = 12$ cm gilt $r^2 = s^2 - h^2 = 144 - h^2$
Zielfunktion $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$ wird zu

$$V = \frac{\pi}{3}(144h - h^3); \quad V' = \pi(48 - h^2); \quad V'' = -\pi \cdot h$$

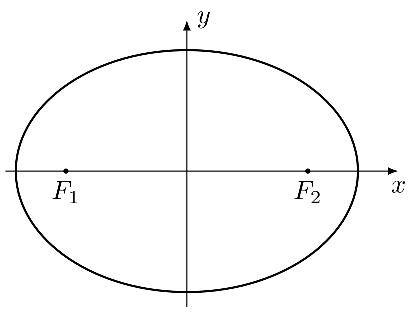
1.Ableitung Null setzen, ergibt $h = 4\sqrt{3}$ cm, $r = 4\sqrt{6}$ cm. Da für ein positives $h$ die Ableitung kleine Null wird, liegt ein lokales Maximum vor.

**Aufgabe 5.2.**
Die Gleichung einer Ellipse lautet $x^2 + 2y^2 = 32$.

a) Konstruieren Sie diese Ellipse!

b) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf, die folgende Bedingungen erfüllt:
Hyperbel und Ellipse haben dieselben Brennpunkte.
Die Hauptachse der Hyperbel $(2a_H)$ ist halb so lang wie die Hauptachse der Ellipse $(2a_E)$.

a) Aus $x^2 + 2y^2 = 32$ ergeben sich die Halbachsen zu $a = \sqrt{32}, b = 4$
numerische Exzentrizität: $e^2 = a^2 - b^2 \rightarrow e = 4$

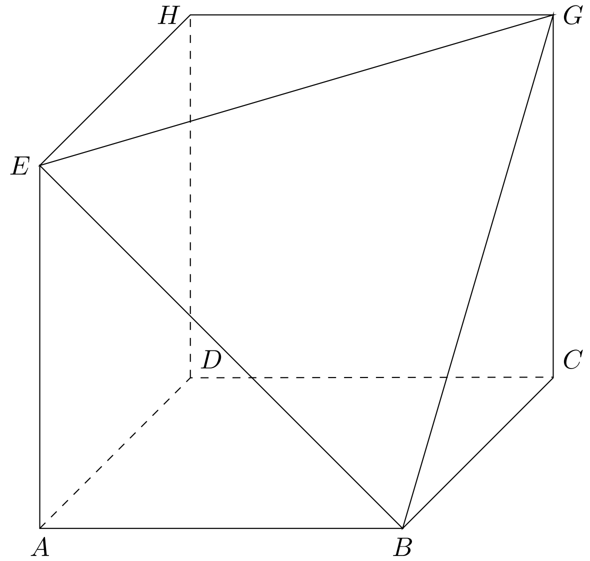


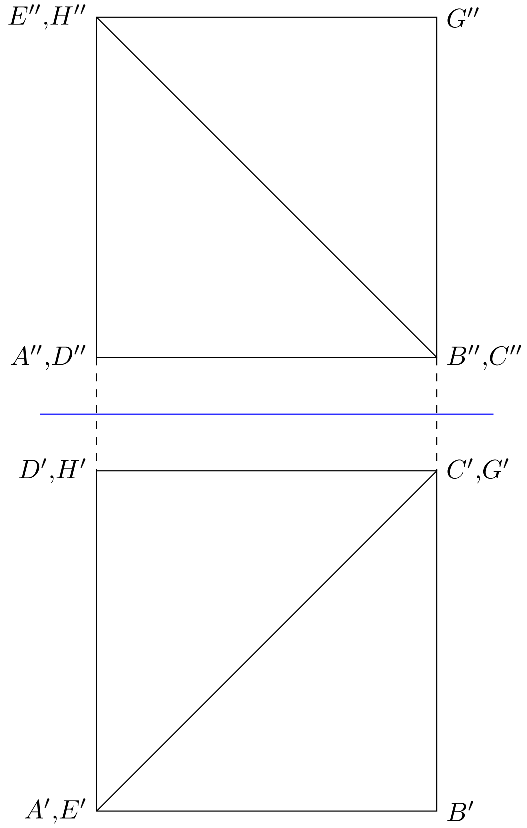

b) für die Hyperbel wird $a_H = \frac{a_E}{2} \rightarrow a_H = \sqrt{8}$
$e^2 = a_H^2 - b_H^2 \rightarrow b = 2\sqrt{2}$, Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

**Aufgabe 5.3.**
Ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt.
Die Schnittebene soll durch eine Diagonale einer Würfelfläche und durch einen und nur einen Eckpunkt der dazu parallelen Würfelfläche gelegt werden.
Stellen Sie den Teilkörper mit dem größeren Volumen

a) in einem selbstgewählten axonometrischen Verfahren und

b) im Grund-Aufriss-Verfahren das (Benennung aller Eckpunkte)!


H
G
E
D
C
A
B


E″,H″
G″
A″,D″
B″,C″
D′,H′
C′,G′
A′,E′
B′

## 1.22 Abituraufgaben 1966 B

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Eine Ellipse wird von einer Parallelen zur Hauptachse geschnitten.
Die Schnittpunkte liegen 36 cm voneinander entfernt. Ein Nebenscheitel und der Mittelpunkt der Ellipse haben von der schneidenden Geraden jeweils einen Abstand von 6 cm.

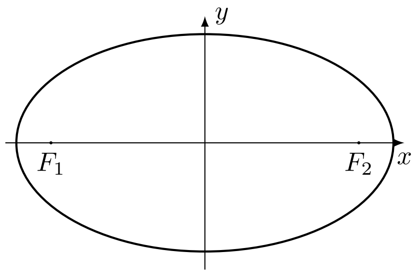
a) Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Ellipse auf! (Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Konstruieren Sie die Ellipse punktweise im Maßstab 1:5!

Die Schnittpunkte haben eine Ordinate $y = 6$ und die Abszissen $x_{1,2} = \pm 18$, d.h. $P(18; 6)$ gehört zur Ellipse. Der Nebenscheitel ist 12 cm von der x-Achse entfernt, d.h. die Halbachse $b = 12$. Einsetzen in die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{18^2}{a^2} + \frac{6^2}{12^2} = 1 \rightarrow a = 12\sqrt{3}$$

Ellipsengleichung $\frac{x^2}{432} + \frac{y^2}{144} = 1$




**Aufgabe 2**
Eine Parabel sei gegeben durch

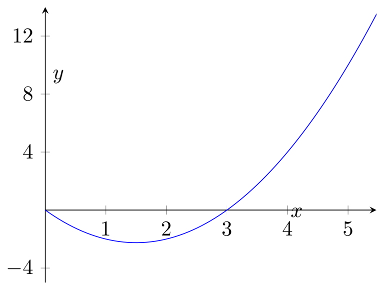
$$y = f(x) = x \cdot (x - 3)$$

a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 5$, berechnen Sie dazu die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel, der Abszissenachse und der Geraden $x = 5$ im Intervall $0 \leq x \leq 5$ eingeschlossen ist!

c) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht!

a) Scheitelpunkt mittels 1.Ableitung: $y = 2x - 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow S(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$




b) Die gesuchte Fläche besteht aus zwei Teilflächen von $x = 0$ bis 3 und von $x = 3$ bis 5.

$$A = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x)dx \right| + \left| \int_3^5 (x^2 - 3x)dx \right| = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| + \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_3^5 \right| = \frac{79}{6}$$

c) Der Körper entsteht durch Rotation der zwei Teilflächen aus Teilprogramm b).

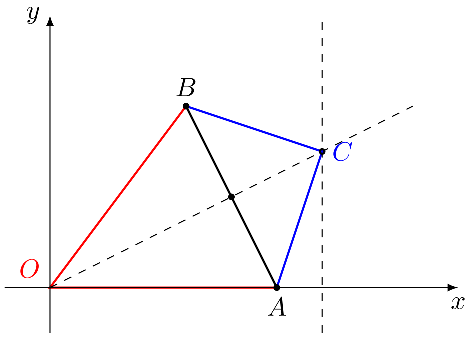
$$V = \pi \left| \int_0^3 (x^2 - 3x)^2 dx \right| + \pi \left| \int_3^5 (x^2 - 3x)^2 dx \right| = \frac{125}{2}\pi \approx 196 \text{ VE}$$

**Aufgabe 3** Von einem Dreieck $ABC$, für das $\overline{AB} = \overline{CB}$ ist, sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(5;0), C(3;4)$ und $B(6;y_B)$.

a) Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$ im Koordinatensystem und lesen Sie die Ordinaten $y_B$ des Punktes $B$ ab!

b) Berechnen Sie $y_B$!

c) Verbinden Sie die Punkte $A$ und $C$ mit dem Koordinatenursprung $O$ und beweisen Sie, dass in dem Viereck $OABC$ die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen!




Ordinate des Punktes $B$: $y_B = 3$

b) Mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ und $x_B = 6$ wird

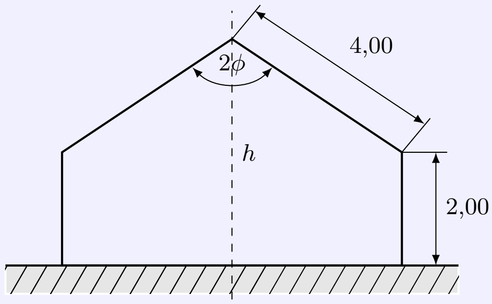
$$\sqrt{(6-5)^2 + (y_B - 0)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (y_B - 4)^2}$$

$$\rightarrow 1 + y_B^2 = 9 + (y_B - 4)^2 \rightarrow y_B = 3$$

c) das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist gleich 0, d.h. die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

**Aufgabe 4**

Die Skizze zeigt die Giebelwand eines zu errichtenden Schuppens.
Es ist Material vorhanden, welches erlaubt, den Schuppen mit Seitenwänden von 2,00 m Höhe und mit Dachbalken von 4,00 m Länge zu bauen.
Um das maximale Fassungsvermögen eines Schuppens zu erreichen, muss der Flächeninhalt der Giebelwand möglichst groß werden.
Wie groß ist der von den Dachbalken eingeschlossene Winkel $2\phi$ zu wählen, damit diese Forderung erfüllt wird?




Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in m

Hinweis: Es ist vorteilhaft, den Winkel als unabhängige Variable zu wählen.

Zielfunktion $A = (2+h)b$ wird mit $h = 2 + 4\cos\varphi$ und $b = 4\sin\varphi$ zu

$$A = 16\sin\varphi + 8\sin 2\varphi; \quad A' = 16\cos\varphi + 16\cos 2\varphi; \quad A'' = -32\sin 2\varphi - 16\sin\varphi$$

1.Ableitung Null setzen, ergibt

$$0 = 16\cos\varphi + 16\cos 2\varphi \rightarrow 0 = \cos\varphi + 2\cos\varphi^2 - 1$$

und mit der Substitution $z = \cos\varphi$

$$0 = z^2 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2}$$

im Definitionsbereich von $\varphi$ entfällt $z_1 = -1$. Aus $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ wird $\varphi = 60°$.
Kontrolle in der 2.Ableitung: $A''(\frac{\pi}{3}) = -24\sqrt{3} < 0$, d.h. lokales Maximum liegt vor.
Der gesuchte Winkel wird $2\varphi = 120°$.

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.)

**Aufgabe 5.1.**
Gegeben sind zwei Funktionen durch

$$y = f(x) = \sin^2 x \text{ und } y = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$$

Ihre Bilder schneiden einander im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zweimal.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte!

b) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen im angegebenen Intervall!

c) Berechnen Sie die Fläche, die im vorgegebenen Intervall von den beiden Kurven allseitig begrenzt wird!

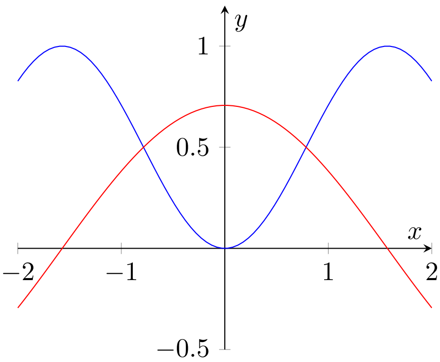
a) Schnittpunkte: Terme gleichsetzen

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x \to 0 = \cos^2 x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$$

Substitution $u = \cos x$

$$0 = u^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}u - 1 \to u_1 = -\sqrt{2}; u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$u_1$ entfällt, da keine Lösung im Definitionsbereich. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt als Schnittstellen $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} = \pm 45°$.
Schnittpunkte $S_1(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}), S_2(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$




c) Ermittlung der Stammfunktion von $y = \sin^2 x$ mittels partieller Integration durch Substitution $u(x) = v(x) = \sin x$

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 dx$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} + C$$

Berechnung der eingeschlossenen Fläche

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \sin^2 x\right) dx = 2\left[\frac{\sin x \cdot \cos x - x + \sqrt{2}\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{8} \approx 0{,}715 \text{ FE}$$

**Aufgabe 5.2.**
Gegeben ist eine Funktion durch $y = f(x) = x \cdot e^x$.

a) Ihr Bild besitzt einen (lokalen) Extrempunkt. Bestimmen Sie seine Art und seine Koordinaten!

b) Bilden Sie von der gegebenen Funktion auch die dritte und vierte Ableitung!
Welche Vermutung ergibt sich hieraus für die $n$-te Ableitung?
Bestätigen Sie die Richtigkeit Ihrer Vermutung durch vollständige Induktion!

a) Ableitungen $y' = e^x(x + 1); y'' = e^x(x + 2)$
Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt $0 = e^x(x + 1) \to x = -1$, Kontrolle in der 1.Ableitung $f''(-1) = \frac{1}{e} < 0$, d.h. lokales Maximum bei $P(-1; -\frac{1}{e})$

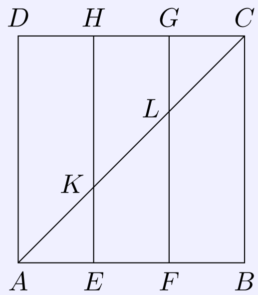
b) 3.Ableitung $y''' = e^x(x+3)$, 4.Ableitung $y^{(IV)} = e^x(x+4)$
Vermutung für die $n$-te Ableitung: $y^{(n)} = e^x(x+n)$
Induktionsanfang für $n=1$: $y' = e^x(x+1)$
Induktionsvoraussetzung für $n=k$ gilt: $y^{(k)} = e^x(x+k)$
Induktionsbehauptung für $n=k+1$ gilt dann: $y^{(k+1)} = e^x(x+k+1)$
Induktionsbeweis mittels Produktregel

$$(e^x(x+k))' = e^x(x+k) + e^x \cdot 1 = e^x(x+k+1) = y^{(k+1)}$$

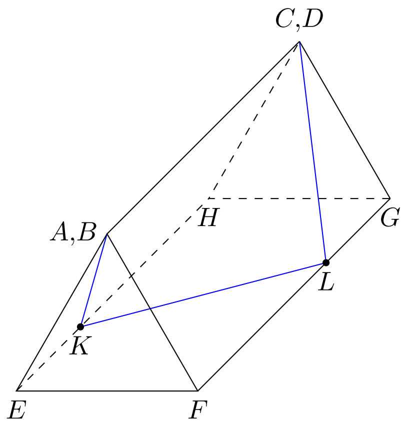
**Aufgabe 5.3.**
Eine Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 90 mm ist durch die Strecken $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ in drei kongruente Rechtecke zerlegt (siehe Skizze!). Die Rechtecke $AEHD$ und $FBCG$ werden um die Strecken $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ so umgeklappt, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ zusammenfallen.
Dadurch entsteht ein oben und unten offener Körper.

a) Stellen Sie den Körper in schräger Parallelprojektion oder in dimetrischer oder in isometrischer Abbildung dar, und zeichnen Sie den Streckenzug $\overline{AKLC}$ ein, der aus der Flächendiagonalen $\overline{AC}$ entsteht (Benennung aller Punkte)!

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel, den zwei benachbarte Teile des Streckenzuges $\overline{AKLC}$ in dem durch Klappung entstandenen Körper miteinander einschließen!




a)




b) in einem Koordinatensystem mit Ursprung in $E$, x-Achse in Richtung $\overrightarrow{EF}$, y-Achse in Richtung $\overrightarrow{EH}$ und einer dazu senkrechten z-Achse wird im gleichseitigen Dreieck $\Delta EFA$ wird für die Höhe $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, die z-Koordinate der Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$
Punktkoordinaten

$$A\left(1{,}5; 0; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right), C\left(1{,}5; 9; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right), K\,(0; 3; 0)\,, L\,(3; 6; 0)$$

Vektoren $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Beträgen $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{18}, |\overrightarrow{KL}| = \sqrt{18}$
für den eingeschlossenen Winkel wird somit

$$\cos\angle(AK,KL) = \frac{\overrightarrow{AK} \bullet \overrightarrow{KL}}{|\overrightarrow{AK}||\overrightarrow{KL}|} = \frac{4{,}5}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}} = \frac{1}{4} \to \angle(AK,KL) \approx 75{,}5^\circ$$

## 1.23 Abituraufgaben 1967 A

**Pflichtaufgaben**

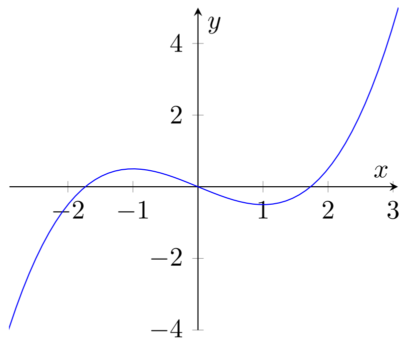
**Aufgabe 1**
Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x$$

a) Bilden Sie die erste und zweite Ableitung!

b) Berechnen Sie die lokale Minimumstelle $x_T$ dieser Funktion!

1.Ableitung $y' = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}$, 2.Ableitung $y'' = \frac{3}{2}x$
1.Ableitung = Null setzen: $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \to x_1 = 1, x_2 = -1$
Kontrolle in 2.Ableitung: $f''(1) = \frac{3}{2} > 0$, d.h. die Minimumstelle liegt bei $x = 1$




**Aufgabe 2**
Gegeben sind in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ eines Vierecks durch $P_1(9; -3), P_2(11; 3); P_3(-2; 8); P_4(-3; 1)$.

a) Stellen Sie die Gleichungen der Diagonalen dieses Vierecks auf, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes $S$!

b) Ein Kreis hat $S$ als Mittelpunkt und geht durch $P_1$.
Wie lautet die Gleichung dieses Kreises?

c) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte $P_2, P_3$ und $P_4$ Punkte dieses Kreises sind!

a) die Punkte $P_1, P_3$ und $P_2, P_4$ bilden die Diagonalen

$$\overline{P_1P_3} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix}, \overline{P_2P_4} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

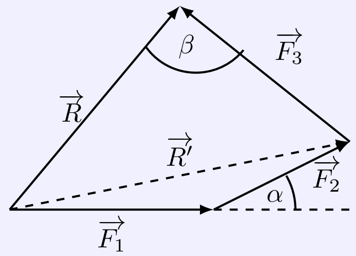
$$9 - 11s = 11 - 14t$$
$$-3 + 11s = 3 - 2t$$

liefert die Lösung $t = \frac{1}{2}$. Damit wird für den Schnittpunkt $S(4; 2)$

b) Abstand von $S$ zu $P_1$ ist Radius. $r = \sqrt{(4-9)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{50}$
Kreisgleichung $K : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 50$

c) Kontrolle der Punkte $P_2, P_3, P_4$ bezüglich Lage auf Kreis
$P_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \to P_2$ liegt auf dem Kreis
$P_3 : 6^2 + 6^2 = 72 \neq 50 \to P_3$ liegt nicht auf dem Kreis
$P_4 : 7^2 + 1^2 = 50 \to P_4$ liegt auf dem Kreis.

**Aufgabe 3**
Die Skizze zeigt die Resultierende $\overrightarrow{R}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ mit den Beträgen $F_1, F_2, F_3$.




Gegeben sind $F_1 = 15{,}4$ kp; $F_2 = 12{,}5$ kp; $F_3 = 16{,}5$ kp; $\alpha = 19{,}5°$ und $\beta = 90°$ (siehe Skizze!) Skizze nicht maßstäblich.

a) Berechnen Sie den Betrag der Resultierenden $\overrightarrow{R'}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$!

b) Berechnen Sie den Betrag der Resultierenden $\overrightarrow{R}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ und $\overrightarrow{F_3}$!

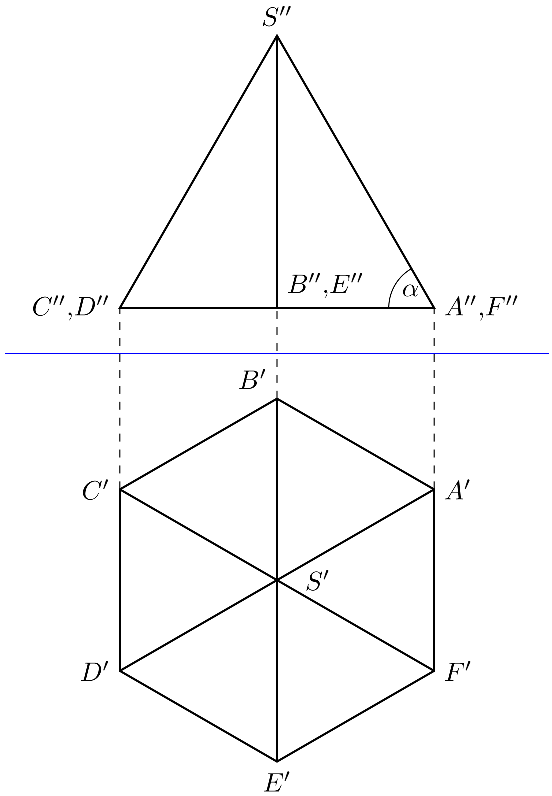
a) mit dem Kosinussatz wird $R'^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos(180° - \alpha) = 27{,}5$ kp

b) mit dem rechten Winkel $\beta$ ergibt der Satz des Pythagoras $R'^2 = R^2 + F_3^2 \rightarrow R = 22{,}0$ kp

**Aufgabe 4**
Gegeben ist eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist.
Die Länge der Sechseckseite soll 4 cm, die der Höhe der Pyramide 6 cm betragen.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar (Benennung aller Eckpunkte!)

b) Bestimmen Sie mit den Mitteln der darstellenden Geometrie die Größe des Neigungswinkels einer Seitenfläche gegen die Grundfläche, und messen Sie die Größe des Winkels!




gemessener Neigungswinkel der Seitenfläche $\alpha = 60°$.

**Aufgabe 5**
Es sollen zylindrische Behälter hergestellt werden.
Die Höhe und der Durchmesser eines Behälters sollen zusammen 100 cm lang sein.

a) Berechnen Sie die Länge des Durchmessers und die der Höhe des Behälters mit dem maximalen Volumen!

b) Geben Sie das maximale Volumen in Litern an!

a) mit der Nebenbedingung $h + d = 100$ wird die Zielfunktion zu

$$V = \frac{\pi}{4}d^2h = \frac{\pi}{4}d^2(100 - d) = \frac{\pi}{4}(100d^2 - d^3)$$

1.Ableitung $y' = \frac{\pi}{4}(200d - 3d^2)$ hat als Nullstellen $x_1 = \frac{200}{3}, x_2 = 0$
in der 2.Ableitung $y'' = \frac{\pi}{2}(100 - 3d)$ wird $f''(x_2) = -50\pi < 0$, d.h. für $x_2$ liegt eine lokale Maximumstelle vor
Höhe des Behälters $h = 100/3$ cm, Durchmesser $d = \frac{200}{3}$ cm

b) Volumen des Behälters $V = \frac{\pi}{4}d^2h \approx 116000 \approx 116$ dm$^3 = 116$ l

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

**Aufgabe 6.1.**
Gegeben: $y = f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$
Hierbei seien $a$ ein ganze Zahl und $b$ eine rationale Zahl.

a) Berechnen Sie die Wendepunktkoordinaten!

b) Begründen Sie, dass die Abszissen der Extrempunkte ganze Zahlen sind!

c) Geben Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte für $a = 2$ und $b = -\frac{1}{2}$ an!

a) 1.Ableitung $y' = 3x^2 - 6ax$, 2.Ableitung $y'' = 6x - 6a \rightarrow x_W = a$
der Wendepunkte liegt somit bei $W(a; -2a^3 + b)$

b) 1.Ableitung Null setzen, ergibt

$$y' = 3x^2 - 6ax = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2a$$

$x_1 = 0$ ist ganzzahlig. Da $a$ nach Voraussetzung eine ganze Zahl ist, wird die Abszisse $x_2 = 2a$ des zweiten Extrempunktes ebenfalls ganzzahlig.

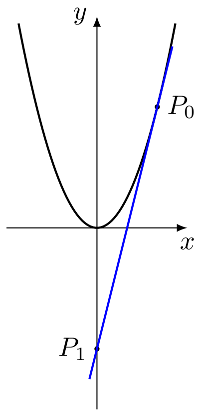
c) Kontrolle der Extrempunkte: $f''(0) = -12 > 0$, d.h. lokales Minimum und $f''(4) = 12 < 0$, d.h. ein lokales Maximum
Extrempunkte $E_{Min}(0; -\frac{1}{2}), E_{Max}(4; -\frac{65}{2})$

**Aufgabe 6.2.**
Auf der Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ ist ein Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit $x_0 > 0$ gegeben.
Ein Punkt auf der y-Achse wird durch $P_1(0; -y_0)$ festgelegt.
Durch die Punkte $P_0$ und $P_1$ ist eine Gerade bestimmt.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Zeichnung dar!

b) Weisen Sie nach, dass eine so festgelegte Gerade die Parabel berührt!

c) Berechnen Sie die Abszisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit der x-Achse!

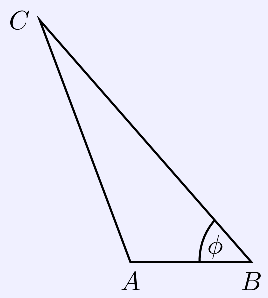



a)

b) 1.Anstieg der Geraden durch $P_0$ und $P_1$ wird $m = \frac{2x_0^2}{x_0}$ Gerade: $y = \frac{2x_0^2}{x_0}x - x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$ 2. erste Ableitung $y' = 2x$ ergibt für $P_0$ den Anstieg $m = 2x_0$
Einsetzen von $P_0(x_0,x_0^2)$ in $t: y = 2x_0x + n$ ergibt $n = -x_0^2$
Tangente: $y = 2x_0x - x_0^2$
Geraden- und Tangentengleichung sind identisch

c) Nullstelle der Tangente ist $x_N = \frac{x_0}{2}$

**Aufgabe 6.3.**




Skizze (nicht maßstäblich)

Die drei Punkte $A$, $B$ und $C$ stellen Geländepunkte dar, die in gleicher Höhe über N.N. liegen (siehe Skizze).
Wenn $\phi = 60°, \overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = 2a$ sind, kann die Entfernung $x$ der Punkte $B$ und $C$ mit Hilfe der Gleichung $4a^2 = a^2 + x^2 - ax$ berechnet werden.

a) Bestimmen Sie die Entfernung $\overline{BC} = x$ unter Verwendung dieser Gleichung!

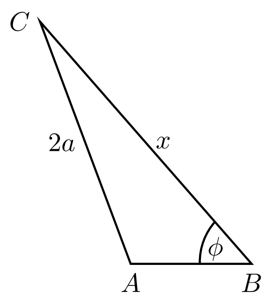
b) Weisen Sie die Gültigkeit der obigen Gleichung für die angegebenen Bedingungen nach!

c) Wie groß ist in einer Karte im Maßstab 1:25000 die Horizontalentfernung der Punkte $B$ und $C$ in Millimetern für $a = 320$ m?

a) Lösung parameterhaltig

$$x = |\overline{BC}|; 4a^2 = a^2 + x^2 - ax \rightarrow x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{13}a}{2}$$

wobei $x_2 < 0$ und entfällt




b) nach dem Kosinussatz und $\cos 60° = \frac{1}{2}$ wird

$$(2a)^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos 60° \rightarrow 4a^2 = a^2 + x^2 - ax$$

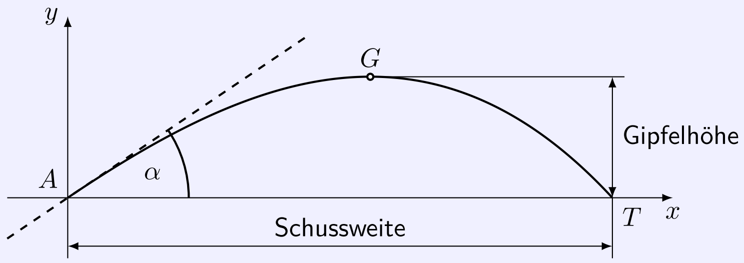
c) für $a = 320$ m wird $x = 736{,}9$ m. Auf einer Karten 1:25000 ist die Strecke 0,0295 m = 29,5 mm lang.

## 1.24 Abituraufgaben 1967 B

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Die Flugbahn eines Geschosses kann bei vereinfachten Bedingungen durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$y = f(x) = k(135x - 6x^2 - x^3)$$




Dabei geben $x$ die horizontale Entfernung vom Abschusspunkt $A$ und $y$ die zugeordnete Geschosshöhe über der Horizontalebene an.
Die Koordinateneinheit entspricht für beide Achsen einem Kilometer.
Abschusspunkt $A$ und Auftreffpunkt $T$ liegen in derselben Horizontalebene. (siehe Skizze!)

a) Berechnen Sie die Schussweite $\overline{ST}$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes $G$ der Geschossbahn, wenn $k = \frac{1}{200}$ ist.

c) Bestimmen Sie den Abschusswinkel $\alpha$ für $k = \frac{1}{200}$!

d) Wie groß muss $k$ sein, damit die Gipfelhöhe 1,5 km beträgt?

a)
$$0 = x(135 - 6x - x^2) \to x_0 = 0; x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{144} \to x_1 = 9, x_2 = -15$$
$x_0, x_2$ entfallen. Die Schussweite beträgt 9 km.

b) Der Gipfelpunkt ist das lokale Maximum von $f(x)$ im Definitionsbereich.
1.Ableitung $y' = k(135 - 12x - 3x^2)$ gleich Null setzen, ergibt
$$0 = x^2 + 4x - 45 \to x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{49} \to x_1 = -9; x_2 = 5$$
$x_1$ entfällt. Für $x_2$ ergibt sich in der 2.Ableitung $y'' = k(-12 - 6x)$ ein negativer Wert, d.h. ein Maximum liegt vor.
Mit $k = \frac{1}{200}$ wird als Gipfelpunkt $G(5; 2)$, d.h. die Gipfelhöhe ist 2 km.

c) mit $k = \frac{1}{200}$ wird $f'(0) = 135k = 0{,}675$ und $\tan\alpha = 0{,}675 \to \alpha = 34°$

d) die Gipfelhöhe liegt bei $x = 5$. Somit
$$1{,}5 = k(135 \cdot 5 - 6 \cdot 5^2 - 5^3) \to k = \frac{3}{800}$$

**Aufgabe 2**
Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist gegeben durch

$$a_n = 3n(n-1) + 1 \text{ ; } (n = 1{,}2{,}3{,}...)$$

a) Berechnen Sie die Glieder $a_1, a_2, a_3, a_4$ und $a_5$!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen $s_1, s_2, s_3, s_4$ und $s_5$ der gegebenen Zahlenfolge!

c) Formulieren Sie eine Vermutung für $s_n$, das $n$-te Glied in der Folge der Partialsummen!

d) Überprüfen Sie durch vollständige Induktion, ob Ihre Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ richtig ist!

a) $a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 19, a_4 = 37, a_5 = 61$

b) $s_1 = 1, s_2 = 8, s_3 = 27, s_4 = 64, s_5 = 125$

c) $s_n = n^3$

d) Induktionsanfang für $n = 1$: $a_1 = 1 \doteq 1 = 1^3 = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + 3k(k-1) + 1 = k^3 = s_k$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $a_1 + ... + 3k(k-1) + 1 + 3(k+1)k + 1 = (k+1)^3 = s_{k+1}$
Induktionsbeweis

$$a_1 + ... + 3k(k-1) + 1 + 3(k+1)k + 1 = k^3 + 3(k+1)k + 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 =$$

und mit der binomischen Formel

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 = s_{k+1}$$

**Aufgabe 3**
Von einem Dreieck $ABC$ sind die Koordinaten der Eckpunkte gegeben:

$$A(6;1;3), B(9;13;-1), C(2;5;1)$$

a) Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ in Komponentendarstellung an, und bestimmen Sie die Längen der Dreiecksseiten $\overline{AC} = b$ und $\overline{AB} = c$!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \measuredangle(BAC)$!
(Rechenstabgenauigkeit genügt!)

c) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Geraden (Parameterdarstellung), die durch die Punkte $A$ und $B$ geht!
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes $D(x_D; y_D; z_D)$, der auf dieser Geraden liegt und für den $z_D = 0$ ist!

$$a) \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}; |\overrightarrow{AB}| = 13$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}; |\overrightarrow{AC}| = 6$$

Länge der Dreiecksseiten: $b = 6$ und $c = 13$

$$b) \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{44}{78} \to \alpha = 55{,}7^\circ$$

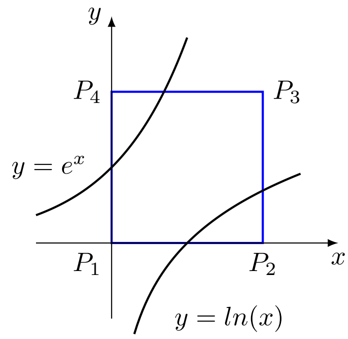
c) Gerade durch die Punkte $A$ und $B$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

für den Punkt $D(x_D{,}y_D{,}0)$ ergibt sich die Gleichung $3 - 4t = 0 \to t = \frac{3}{4}$ und damit die Koordinaten $D(\frac{33}{4}; 10; 0)$

**Aufgabe 4**
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei ein Quadrat durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_1(0;0), P_2(2;0), P_3(2;2)$ und $P_4(0;2)$ gegeben.
Durch die Bilder der Funktionen $y = e^x$ und $y = \ln x$ werden von der Fläche des Quadrates Flächenstücke abgetrennt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Restfläche!
(Runden Sie das Ergebnis auf eine Stelle nach dem Komma!)




a)

b) partielle Integration der Funktion $y = \ln x$ mit $u'(x) = 1; u = x$ und $v(x) = \ln x; v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

gesuchter Flächeninhalt ergibt sich als Differenz der Quadratfläche und der doppelten Fläche unter der Funktion $\ln x$ von 1 bis 2, da aus Symmetriegründen die von $y = e^x$ abgeschnittene Teilfläche gleich groß ist

$$A = 4 - 2 \int_1^2 \ln x dx = 4 - 2 \left[x \cdot \ln x - x\right]_1^2 = 7 - 4 \cdot \ln 2$$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.)

**Aufgabe 5.1.**
Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{c}{x} \text{ ; } (c > 0, \text{ konstant; } x > 0)$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an das Bild dieser Funktion in $P_1(1; c)$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangenten mit den Koordinatenachsen!

c) Tangente und Koordinatenachsen begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

d) Weisen Sie nach, dass der Inhalt dieser Dreiecksfläche von der Wahl des Berührungspunktes $P_i(x_i; y_i)$ unabhängig ist!

a) 1.Ableitung $y' = -\frac{c}{x^2}$ ergibt den Anstieg $f'(1) = -c$
Einsetzen des Punktes $P(1,c)$ liefert $n = 2c$ und die Tangentengleichung $t : y = -cx + 2c$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
1. $0 = -cx + 2c \rightarrow x = 2 \rightarrow S_x(2; 0)$
2. $y = -c \cdot x + 2c \rightarrow S_y(0; 2c)$

c) das rechtwinklige Dreieck hat die Katheten $a = 2$ und $b = 2c$, d.h. $A_\Delta = \frac{ab}{2} = 2c$

d) für einen allgemeinen Punkt $P_i(x_i; \frac{c}{x_i})$ wird $y'(x_i) = -\frac{c}{x_i^2}$
Ansatz für Tangente: $y = -\frac{c}{x_i^2} \cdot x + n$ und Einsetzen des Punktes $P_i$ ergibt $n = \frac{2c}{x_i}$
Tangentengleichung $t : y = -\frac{c}{x_i^2} \cdot x + \frac{2c}{x_i}$ Schnittpunkte der Tangente mit den Achsen: $S_x(-2x_i; 0), S_y(0; \frac{2c}{x_i}$
für den Flächeninhalt des Dreiecks wird dann

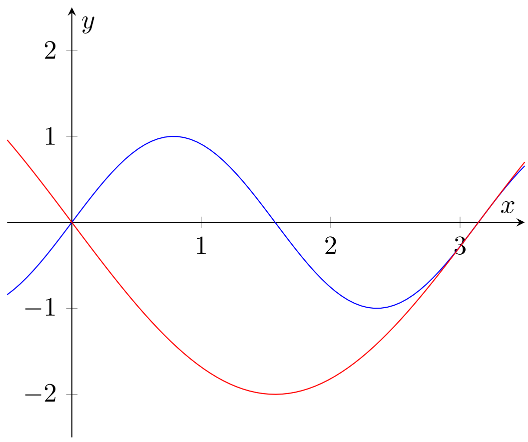
$$A = \frac{ab}{2} = \frac{\frac{2c}{x_i} \cdot 2x_i}{2} = 2c$$

**Aufgabe 5.2.**
Gegeben seien im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ zwei Funktionen durch die Gleichungen
$y = \sin(2x)$ und $y = -2\sin x$.

a) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem!

b) Die Bilder der Funktionen sollen von einer Parallelen zur y-Achse so in zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ geschnitten werden, dass die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ein Maximum wird.
Bestimmen Sie die Abszisse der Schnittpunkte $P_1$ und $P_2$!

a) grafische Darstellung




b) der Abstand der zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ ergibt sich aus der Differenz der Funktionswerte $d = \sin(2x) + 2\sin x$.
1.Ableitung $y' = 2\cos(2x) + 2\cos x$, 2.Ableitung $y'' = -4\sin(2x) - 2\sin x$ 1.Ableitung gleich Null setzen

$$0 = 2\cos(2x) + 2\cos x = 4\cos^2 x - 2 + 2\cos x$$

Substitution $u = \cos x$ ergibt

$$0 = 4u^2 + 2u - 2 \rightarrow 0 = u^2 + \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2}$$

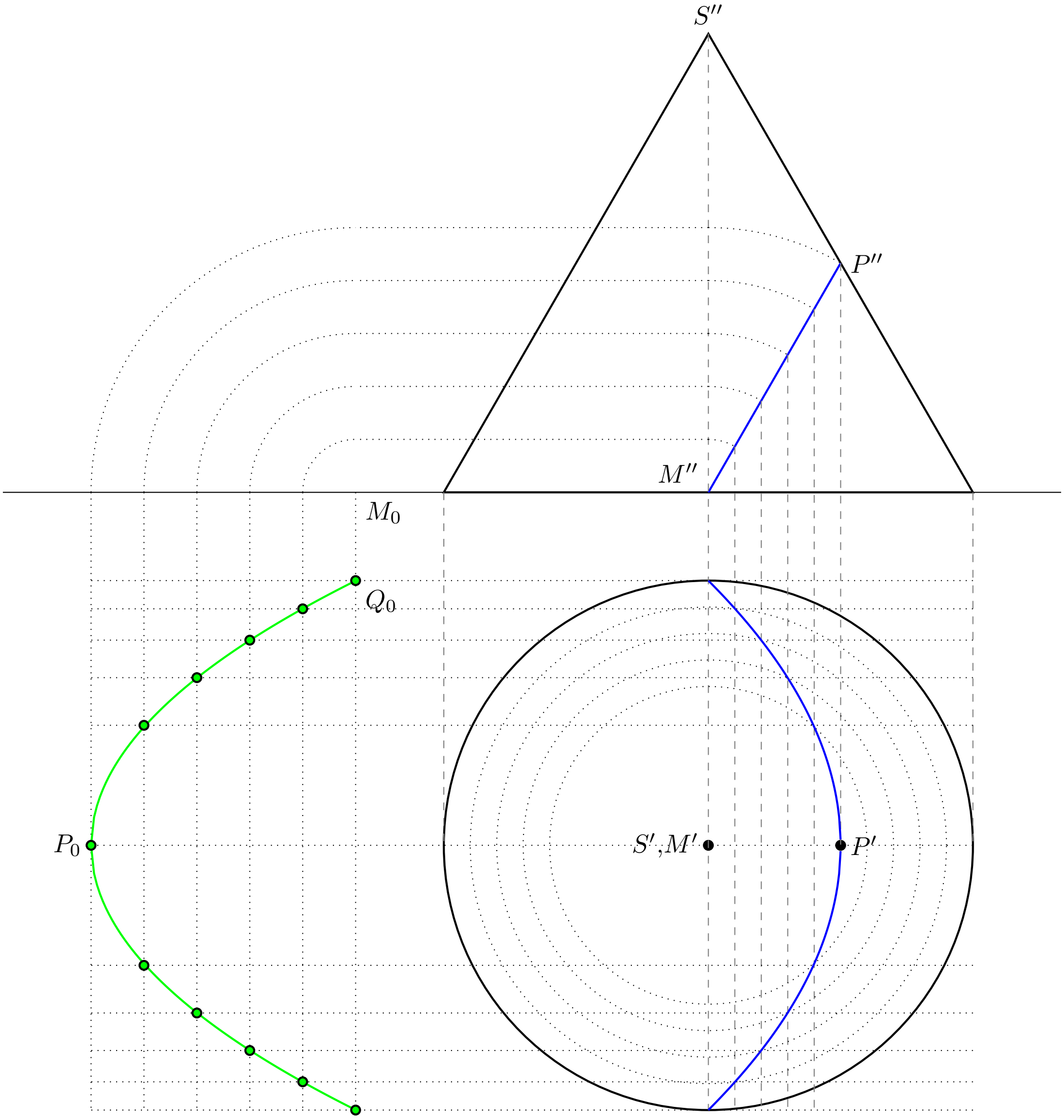
$\cos x = -1$ liefert im Definitionsbereich mit $x_1 = \pi$ das Minimum des Abstandes.
$\cos x = \frac{1}{2}$ ergibt $x_2 = \frac{\pi}{3}$
und in der 2.Ableitung $f''(\frac{\pi}{3}) = -3\sqrt{3} > 0$, also ein lokales Maximum
die Punkte $P_1$ und $P_2$ haben die Abszisse $x = \frac{\pi}{3}$

**Aufgabe 5.3.**
Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Grundkreisdurchmesser 6,0 cm und dessen Mantellinie 6,0 cm lang sind.

a) Stellen Sie diesen Kegel im Grund-Aufriss-Verfahren im Maßstab 1:1 dar!
(Der Kegel soll mit der Grundfläche auf der Grundrissebene stehen.)

b) Legen Sie eine Ebene senkrecht zur Aufrissebene so durch den Mittelpunkt des Grundkreises des Kegels, dass als Schnittfigur ein Parabelsegment entsteht!
Konstruieren Sie sowohl den Grundriss als auch die wahre Größe des Parabelbogens (jeweils mindestens 5 Punkte)!

c) Legen Sie für den in wahrer Größe konstruierten Parabelbogen ein geeignetes Koordinatensystem fest!
Stellen Sie die Gleichung dieses Parabelbogens auf!




Für ein Koordinatensystem mit $P_0$ als Koordinatenursprung und der x-Achse waagerecht nach rechts sowie der y-Achse senkrecht dazu gilt $P_0(0; 0)$
Der Punkt $Q_0$ hat dann die x-Koordinate 3 und die y-Koordinate 3.
Damit wird mit dem Ansatz $y = a\sqrt{x}$ für die Parabel $a = \sqrt{3}$,
d.h. als Parabelgleichung $y^2 = 3x$

## 1.25 Abituraufgaben 1968 A

**Pflichtaufgaben**

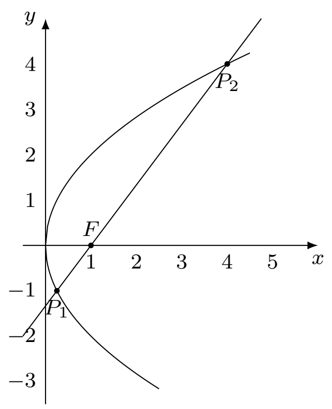
**Aufgabe 1**
Gegeben ist eine Parabel mit der Scheitelgleichung $y^2 = 4x$.

a) $P_1\left(+\frac{1}{4}; y_1 < 0\right)$ und $P_2(x_2; +4)$ sind Punkte dieser Parabel. Berechnen Sie die Ordinate $y_1$ und die Abszisse $x_2$.

b) Konstruieren Sie die Parabel, und zeichnen Sie diejenige Gerade, die durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ geht!

c) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Geraden, und geben Sie ihre Steigung an.

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Brennpunkt der Parabel ein Punkt dieser Geraden ist!




a) Die x-Koordinate von $P_1$ in die Gleichung einsetzen, ergibt $y^2 = 1$ und, da kleiner 0, $y_1 = -1$. Mit der y-Koordinate von $P_2$ wird analog $4^2 = 4x$ und $x_2 = 4$.
$P_1\left(\frac{1}{4}; -1\right)$, $P_2(4{,}4)$.

b) Gerade durch $P_1$ und $P_2$: Anstieg $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{4-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.
Ansatz $y = \frac{4}{3}x + n$ und Einsetzen der Koordinaten von $P_2$ liefert $n = -\frac{4}{3}$.
Gleichung der Geraden: $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

c) Der Brennpunkt $F(1; 0)$ gehört zu der Geraden durch $P_1P_2$. (in Geradengleichung einsetzen)

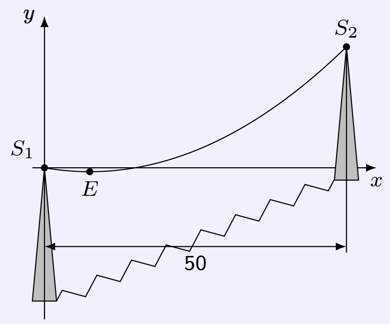
**Aufgabe 2**

Der durchhängende Draht einer Hochspannungsleitung beschreibt eine Kurve, die angenähert eine Parabel ist (siehe Skizze!). (Maßangaben in m)

Die Gleichung dieser Parabel lautet in dem angegebenen Koordinatensystem

$$y = -\frac{3}{35}x + \frac{1}{175}x^2 \qquad (0 \leq x \leq 50)$$

(Koordinateneinheit: 1 m)




Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes $E$, und weisen Sie die Art dieses Extremums nach!

b) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen den beiden Mastspitzen $S_1$ und $S_2$.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die im Punkt $S_2$ an die Kurve gelegte Tangente mit der $x$-Achse bildet!

a) Ableitung der Funktion: $y' = \frac{2x}{175} - \frac{3}{35}$, 2. Ableitung: $y'' = \frac{2}{175}$

Durch Lösen der Gleichung $\frac{2x}{175} - \frac{3}{35} = 0$ ergibt sich eine extremwertverdächtige Stelle $x_E = \frac{15}{2}$.
Da die 2.Ableitung stets kleiner Null ist, liegt ein lokales Maximum vor: $E\left(\frac{15}{2}; -\frac{9}{28}\right)$.

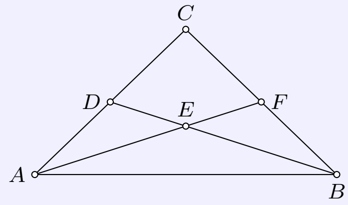
b) Die Punkte $S_1$ und $S_2$ habe die Koordinaten $S_1(0; 0)$ und $S_2(50; 10)$. Ihr Höhenunterschied beträgt 40 m.

c) Der Anstieg im Punkt $S_2$ ist $f'(50) = \frac{17}{35} = m$.
Mit der Anstiegs-Winkelbeziehung $\tan\alpha = m$ ergibt sich ein Anstiegswinkel der Tangente von $\alpha = 88{,}36°$.

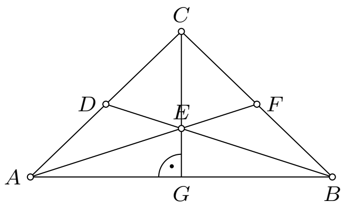
**Aufgabe 3**
Die Skizze stellt einen Dachbinder dar. Die Balken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleichlang. Die Balken $\overline{BD}$ und $\overline{AF}$ greifen in der Mitte der Balken $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ an.

Die Spannweite $\overline{AB}$ des Dachbinders soll 9,90 m, die Größe des Winkels $ABC$ soll 40,0° betragen. Berechnen Sie

a) die Länge des Balkens $\overline{AC}$,
b) die Länge des Balkens $\overline{BD}$,
c) die Größe des Winkels $ABD$!



Skizze (nicht maßstäblich)




a) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel $\angle BAC = 40°$ und $\angle ACB = 100°$. $AG$ ist dann gleich $\frac{1}{2}AB$, also 4,95 m. Im rechtwinkligen Dreiecke $AGC$ wird $\cos\angle ABC = \frac{AG}{AC}$ und somit $AC = 7{,}70$ m.

b) Im Dreieck $ABD$ sind $AB = 9{,}90$ m, $\angle ABC = 40°$ und $AD = \frac{1}{2}AC = 3{,}85$ m. Mit dem Kosinussatz folgt

$$BC = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle ABC} \approx 7{,}38 \text{ cm}$$

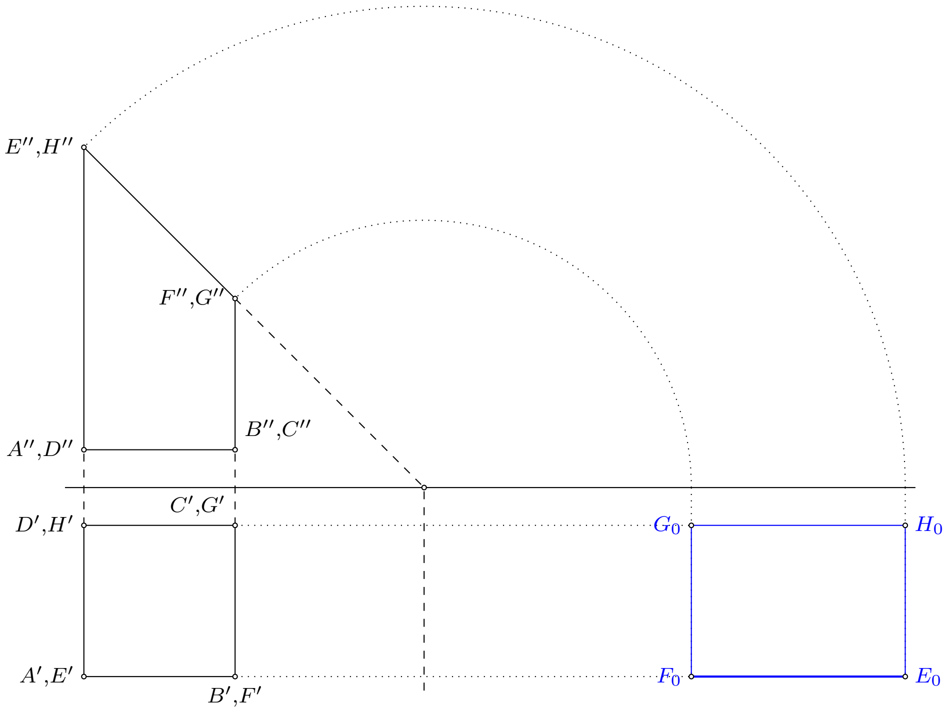
c) Der Winkel $\angle ABD$ folgt aus dem Sinussatz im Dreieck $ABD$: $\angle ABD = 19{,}6°$.

**Aufgabe 4**
Gegeben ist ein gerades Prisma mit der Körperhöhe 8 cm. Die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm.
Durch einen ebenen Schnitt wird das Prisma abgeschrägt. Dieser Schnitt geht durch zwei benachbarte Eckpunkte der Deckfläche und durch die Mitten der gegenüberliegenden 8 cm langen Seitenkanten des Prismas.

a) Stellen Sie den Restkörper mit dem größeren Volumen im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Benennen Sie alle Eckpunkte!

b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in ihrer wahren Größe und Gestalt!

c) Berechnen Sie das Volumen des unter a) dargestellten Restkörpers!



a,b)

c) Der Restkörper ist ein Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche. Das Trapez mit den parallelen Seiten $BF = 4\text{cm}$ , $AE = 8$ cm und einer Höhe $AB = 4$ cm hat einen Flächeninhalt $A = 24$ cm$^2$.

Die Höhe des Prismas ist $AD = 4$ cm, so dass der Restkörper ein Volumen von $V = 96$ cm$^3$ besitzt.

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

**Aufgabe 5.1**
Die Kurven einer Kurvenschar sind durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x + c \qquad (c \text{ ganzzahlig})$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Abszissen der Extrempunkte, und geben Sie die Art der Extrema an!

b) Zeigen Sie, dass die Kurven je einen Wendepunkt haben! Bestimmen Sie dessen Abszisse!

c) Bestimmen Sie die Variable $c$ so, dass sich eine Kurve ergibt, die die x-Achse im Punkt $P_0(3; 0)$ schneidet!

a) 1.Ableitung: $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$;  2. Ableitung; $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$;  3.Ableitung $y''' = -\frac{8}{3}$.

Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt die extremwertverdächtigen Punkte $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$. Es gilt $f''(2) = -\frac{4}{3} < 0$ und $f''(6) = \frac{4}{3} > 0$.
Damit ist $E_1\left(2; \frac{32}{9} + c\right)$ ein lokales Maximum, $E_2(6; c)$ ein lokales Minimum.

b) Nullsetzen der 2.Ableitung ergibt $x_W = 4$. Die dritte Ableitung ist immer verschieden Null, so dass $W\left(4; \frac{16}{9} + c\right)$ ein Wendepunkt ist.

c) Einsetzen des Punktes $P_0(3; 0)$ führt auf $0 = c + 3$, womit $c = -3$ ist.

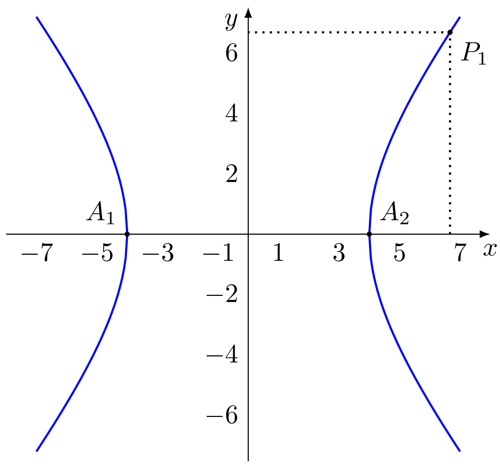
**Aufgabe 5.2**
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

a) Konstruieren Sie diese Hyperbel!

b) Im ersten Quadranten liegt ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf der Hyperbel so, dass die Parallelen durch $P_1$ zu den Koordinatenachsen und die Koordinatenachsen selbst ein Quadrat begrenzen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_1$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrates!




b) Damit die Lote von $P_1$ auf die Achsen und die Achsen selbst ein Quadrat bilden, müssen die x-Koordinate und die y-Koordinate von $P_1$ gleich groß sein, d.h. $25x^2 - 16x^2 = 400$.
Auflösen ergibt $x_1 = \frac{20}{3}$. Der Punkt hat die Koordinaten $P_1\left(\frac{20}{3}; \frac{20}{3}\right)$.

c) Der Flächeninhalt des Quadrates ist

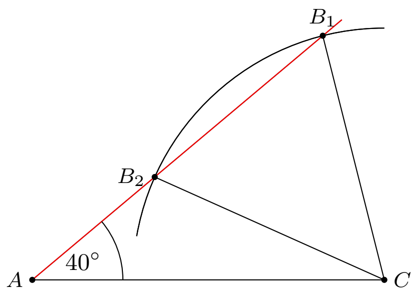
$$A = \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} = \frac{400}{9} \text{ FE}$$

**Aufgabe 5.3**
a) Von einem Dreieck $ABC$ sind bekannt: $\overline{BC} = a = 5$ cm; $\overline{AC} = b = 7$ cm; $\angle CAB = \alpha = 40°$.
Berechnen Sie alle fehlenden Dreieckswinkel! Wieviel verschiedene Dreiecke gibt es? Konstruieren Sie diese Dreiecke!

b) Die Seiten $a$ und $b$ und der Winkel $\alpha$ eines Dreiecks sind gegeben. Für den Winkel $\beta$ gilt dann nach dem Sinussatz

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen für den Winkel $\beta$.
wenn $\frac{b}{a}\sin\alpha = 1$
wenn $\frac{b}{a}\sin\alpha > 1$!
Begründen Sie Ihre Ergebnisse!




a) Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichnen der Strecke $AC$ mit 7 cm Länge.
2. Antragen des Winkels $40°$ an $AC$ im Punkt $A$.
3. Zeichnen eines Kreisbogens um $C$ mit dem Radius 5 cm. Die zwei Schnittpunkte des Kreisbogens mit dem freien Schenkel des Winkels bei $A$ sind die zwei möglichen Punkte $B_1$ und $B_2$.

Mit den gegebenen Stücken ist das Dreieck $ABC$ nicht bis auf Kongruenz eindeutig festgelegt. Es entstehen zwei Dreiecke.

Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle ABC} \quad , \quad \sin\angle ABC = \frac{AC \cdot \sin\angle CAB}{BC} = \frac{7\sin 40°}{5} \approx 0{,}8999$$

$\sin\beta = 0{,}8999$ besitzt im Intervall $[0°, 180°]$ zwei Lösungen. $\beta_1 = 64{,}1°$ und $\beta_2 = 115{,}9°$. Die entsprechenden Winkel bei $C$ sind $\gamma_1 = 75{,}9°$ und $\gamma_2 = 24{,}1°$.

b) Ist $\frac{b}{a}\sin\alpha = 1$, so existiert genau ein Winkel $\beta = 90°$, da im möglichen Intervall $[0°, 180°]$ nur ein x-Wert existiert, für den die Sinusfunktion $y = \sin x$ den Funktionswert 1 annimmt.

Ist $\frac{b}{a}\sin\alpha > 1$ existiert keine Lösung für $\beta$, da die Sinusfunktion einen Wertebereich von $[-1; 1]$ besitzt.

## 1.26 Abituraufgaben 1968 B

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = 2\sqrt{x} - x \ (x \geq 0).$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

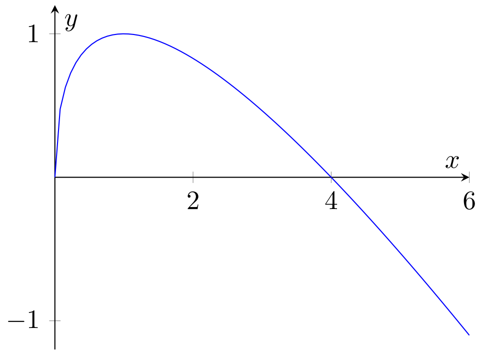
b) Das Bild der Funktion hat keinen Wendepunkt, jedoch einen lokalen Extrempunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten und Art dieses Extrempunktes!

c) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 6$.

a) $0 = 2\sqrt{x} - x \rightarrow x = 2\sqrt{(x)} \rightarrow x^2 = 4x$, äquivalente Umformung, da $x \geq 0$
Lösungen der Gleichung und Nullstellen $x_1 = 0; x_2 = 4$

b) 1.Ableitung: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$
2.Ableitung: $y'' = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$
x-Koordinate des Extrempunktes: $0 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$
y-Koordinate des Extrempunktes: $y = 1$
da die 2.Ableitung für alle $x = 1$ einen negativen Funktionswert besitzt, liegt ein Maximum vor: $P_{\max}(1; 1)$

c) grafische Darstellung

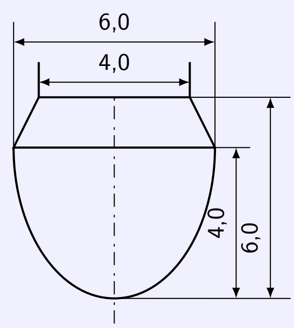



**Aufgabe 2**

Die Skizze stellt den Achsenschnitt der Trommel eines Rührwerkes dar. Sie besteht aus einem Rotationsparaboloid mit aufgesetztem Kegelstumpf (Innenmaße siehe Skizze!).

Berechnen Sie das Volumen der Trommel in Litern!
(Wird die Formel für das Volumen eines Rotationsparaboloids benutzt, so ist diese mit Hilfe der Integralrechnung herzuleiten.)

Skizze (nicht maßstäblich), (Maßangaben in dm)




Der Körper setzt sich aus einem Kegelstumpf und einem Rotationsparaboloid zusammen.
Volumen des Kegelstumpfs: Radien $r = 2$ dm und $R = 3$ dm, Höhe $h = 2$ dm

$$V_K = \frac{\pi}{3} h(r^2 + R^2 + r \cdot R) = \frac{38\pi}{3} \approx 39{,}7935 \text{ dm}^3 = 39{,}7935 \text{ l}$$

Das Rotationsparaboloid wird als Differenz eines Zylinders (Höhe $h_z$=4 cm) und des Körpers, der durch Rotation der Parabel $y = ax^2$ um die x-Achse entsteht, ermittelt. Der Ursprung wird in den Scheitelpunkt der Parabel gelegt, die x-Achse waagerecht.

$$V_P = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Koerper}} = \pi R^2 h_z - 2 \int_0^3 ax^2 dx$$

Der Parameter $a$ ergibt sich aus dem Punkt $P(3; 4)$, der auf der Parabel liegt

$$y = ax^2 \rightarrow 4 = a \cdot 3^2 \rightarrow a = \frac{4}{9}$$

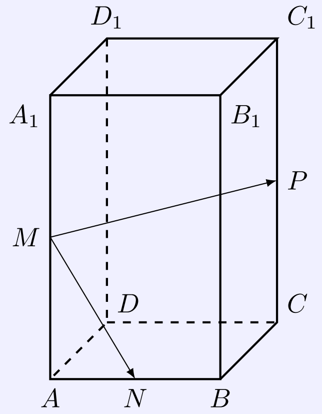
$$V_P = \pi R^2 h_z - 2\int\limits_0^3 \frac{4}{9}x^2 dx$$

$$V_P = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - 2\int\limits_0^3 \frac{4}{9}x^2 dx = 36\pi - 2\left[\frac{4}{27}x^3\right]_0^3$$

$$V_P = 36\pi - 2\cdot 4 \approx 105{,}097 \text{ dm}^3$$

Für das Volumen des Gesamtkörpers wird dann $V = 144{,}89$ l

**Aufgabe 3**



Skizze (nicht maßstäblich)

Ein gerades Prisma (siehe Skizze!) hat die quadratische Grundfläche $ABCD$.
Eine Seite des Quadrates ist 3 cm, die Höhe des Prismas 6 cm lang. $N$, $M$ und $P$ sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AA_1}$ bzw. $\overline{CC_1}$.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ in Komponentendarstellung an!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, der von den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ eingeschlossen wird!

c) Bestimmen Sie einen Punkt $Q$ auf der Kante $\overline{CC_1}$ so, dass der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\vec{MQ}$ $90°$ beträgt!
Welchen Abstand hat der Punkt $Q$ vom Punkt $C$?

a) Als Koordinatensystem wird gewählt: $A$ ist der Koordinatenursprung, die x-Achse verläuft in Richtung $B$, die y-Achse in Richtung $D$ und die z-Achse in Richtung $A_1$
Koordinaten für $M$: $(0|0|3)$
Koordinaten für $N$: $(1.5|0|0)$
Koordinaten für $P$: $(2|2|3)$
Für die Vektoren ergibt sich dann:

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 1{,}5\vec{i} - 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

b) Winkelberechnung über Skalarprodukt

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{MN} \bullet \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}|}$$

Beträge $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1.5^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{11{,}25}$ und $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$
Skalarprodukt $\overrightarrow{MN} \bullet \overrightarrow{MP} = 1.5 \cdot 2 + 0 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 3$
Winkel $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{90}}$ und $\alpha = 71{,}56°$

c) Punkt $Q$ liegt auf der Kante $CC_1$, d.h. auf der Geraden $g$ durch $C$ und $C_1$.

Koordinaten $C$: $(3|3|0)$, Richtungsvektor $\overrightarrow{CC}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punkt $Q$ hat damit die Darstellung

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6r-3 \end{pmatrix}$

Wird das Skalarprodukt von $\overrightarrow{MQ}$ und $\overrightarrow{MN}$ gleich 0, so ist der Winkel $90°$.

Skalarprodukt $\overrightarrow{MN} \bullet \overrightarrow{MQ} = 1{,}5 \cdot 3 + 0 \cdot 3 - 3 \cdot (6r-3) = 4{,}5 - 18r + 9 = 13{,}5 - 18r = 0$

$r = \frac{3}{4}$ und somit

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4{,}5\vec{k}$$

Der Abstand zu $C$ ist dann $d = \sqrt{(3-3)^2 + (3-3)^2 + (0-4.5)^2} = 4{,}5$

**Aufgabe 4**

Die Glieder einer endlichen Zahlenfolge sind

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}; a_2 = \frac{1}{3 \cdot 4}; a_3 = \frac{1}{4 \cdot 5}; a_4 = \frac{1}{5 \cdot 6}; a_5 = \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

a) Geben Sie das Bildungsgesetz für die Glieder dieser Zahlenfolge an!

b) Berechnen Sie die Partialsummen $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ dieser Zahlenfolge!

c) Das unter a) gefundene Bildungsgesetz sei das Bildungsgesetz für eine unendliche Zahlenfolge. Untersuchen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, ob für die Partialsummen $s_n$ dieser unendlichen Zahlenfolge gilt:

$$s_n = \frac{n}{2(n+2)} \; (n \geq 1, n \in N)$$

d) Berechnen Sie $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$!

a) Bildungsgesetz $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

b) Partialsummen $s_1 = \frac{1}{6}; s_2 = \frac{1}{4}; s_3 = \frac{3}{10}; s_4 = \frac{1}{3}; s_5 = \frac{5}{14}$

c) Induktionsanfang für $k = 1$ ist erfüllt

$$s_1 = \frac{1}{6} = \frac{k}{2(k+2)} = \frac{1}{6}$$

Induktionsvoraussetzung: Für $n = k$ gilt

$$s_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{2(k+2)}$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt für $n = k+1$

$$s_{k+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k+1}{2(k+3)}$$

Induktionsschritt mit Einsetzen der Voraussetzung in die Behauptung:

$$s_{k+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} =$$

Gleiche Nenner erzeugen und addieren

$$= \frac{k(k+3)}{2(k+2)(k+3)} + \frac{2}{2(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)+2}{2(k+2)(k+3)} = \frac{k^2+3k+2}{2(k+2)(k+3)} =$$

Es ist $k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$, also

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(k+2)(k+3)} = \frac{k+1}{2(k+3)} = s_{k+1}$$

Mit dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt ist der Beweis erbracht.

d) $s = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden vier Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

**Aufgabe 5.1**
Die Gleichung der Parabel lautet $y^2 = 6x$.

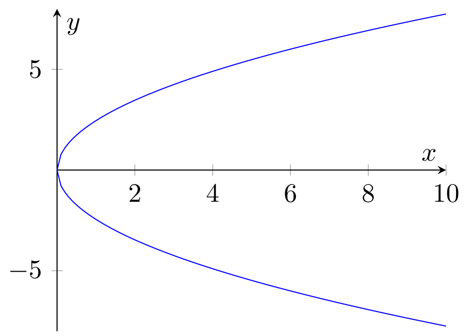
a) Konstruieren Sie mindestens 8 Punkte dieser Parabel, und zeichnen Sie die Parabel!
(Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung der Anstieg der Tangente an die Parabel im Punkt $P_0(6; y_0 > 0)$!
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

c) Legt man in einem Punkt $P_1(x_1; y_1 > 0)$ der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ die Tangente an diese Parabel, so schneidet diese Tangente die x-Achse in dem Punkt $N$. Der Brennpunkt der Parabel sei $F$.
Weisen Sie nach, dass das Dreieck $NFP_1$ gleichschenklig ist!

b) Funktion $y = \sqrt{6x}$, da $y > 0$ gesucht ist
1.Ableitung $y' = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$
Anstieg in $P(6; y_0 > 0)$: m $= \frac{1}{2}$
Funktionswert $y_0 = 6$
Ansatz für Tangente: $y = \frac{1}{2}x + n$
Einsetzen des Punktes $P$ zur Berechnung von $n$: $n = 3$;
Tangentengleichung: $y = \frac{1}{2}x + 3$

a) grafische Darstellung



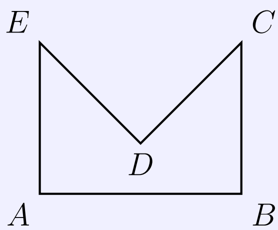

c) aus der Formelsammlung die allgemeine Tangentengleichung entnehmen:

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1) \quad , \quad y = \frac{p}{y_1}x + \frac{x_1}{y_1}$$

Die Tangente schneidet die x-Achse in ihrer Nullstelle
$N(-x_1; 0)$
Koordinaten von $P_1(x_1; \sqrt{2p \cdot x_1})$
Brennpunkt $F(\frac{p}{2}; 0)$
Die Dreiecksseiten $\overline{NF}$ und $\overline{P_1F}$ sind gleichlang:

$$|\overline{NF}| = \sqrt{\left(-x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = x_1 + \frac{p}{2}$$
$$|\overline{P_1F}| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \sqrt{2p \cdot x_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + \frac{p}{2}^2 - x_1 \cdot p + 2p \cdot x_1} = x_1 + \frac{p}{2}$$

**Aufgabe 5.2**
Eine ebene Fläche $ABCDE$ hat die skizzierte Form. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt 20,0 cm.




Skizze (nicht maßstäblich)
Ferner gilt: $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = x$ und $\overline{EA} \perp \overline{AB}$ und $\overline{CB} \perp \overline{AB}$.
Berechnen Sie $x$ so, dass der Inhalt der angegebenen Fläche minimal wird!
(Das Ergebnis ist auf Millimeter genau anzugeben.)

Der Flächeninhalt ergibt sich aus dem Rechteck $ABCE$ vermindert um zwei Dreiecke mit einer Kathete $\frac{\overline{AB}}{2}$ und der Hypotenuse $x = \overline{CD}$ bzw. $x = \overline{ED}$.
Fläche eines der rechtwinkligen Dreiecke:

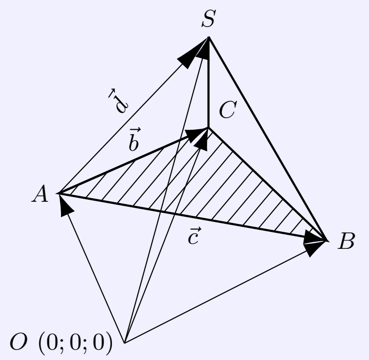
$$A_D = \frac{1}{2}\frac{\overline{AB}}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = 5 \cdot \sqrt{x^2 - 100}$$

Für die Gesamtfläche wird damit

$$A = 20 \cdot x - 10 \cdot \sqrt{x^2 - 100} = 10 \cdot (2x - \sqrt{x^2 - 100})$$

1.Ableitung: $y' = \frac{10(2\sqrt{x^2-100}-x)}{\sqrt{x^2-100}}$
Nullsetzen ergibt die Gleichung $2\sqrt{x^2 - 100} - x = 0 \rightarrow x^2 = \frac{400}{3}$
Extremwertverdächtige Stelle $x = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}55$ cm
Da die 2.Ableitung $y'' = \frac{1000}{(x^2-100)^{\frac{3}{2}}}$ stets positiv ist, liegt ein lokales Minimum vor.
Die gesuchte Länge $x$ ist damit näherungsweise 115 mm. Für den Flächeninhalt wird dann mit Rechenstabgenauigkeit $A \approx 173{,}2$ cm$^2$.

**Aufgabe 5.3**




Gegeben ist ein dreiseitige schiefe Pyramide durch die Koordinaten ihrer Eckpunkte:
$A(3;4;2); B(7;6;2); C(11;9;5), S(9;3;11)$ (siehe Skizze, Skizze nicht maßstäblich) Bestimmen Sie

a) die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ in Komponentendarstellung;

b) den Inhalt der Grundfläche $ABC$;

c) den Abstand des Punktes $S$ von der durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ festgelegten Ebene;

d) das Volumen der Pyramide!

a) $\vec{b} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 8\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{i} - 1\vec{j} + 9\vec{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) Grundfläche $ABC$ ist die Hälfte des Betrages des Vektorprodukts von $\vec{c}$ und $\vec{b}$.

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 7 \text{ FE}$$

c) Ebenengleichung in Parameterform:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor (siehe oben): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ansatz Hessesche Normalform der Ebene: $\frac{6x-12y+4z+d}{\sqrt{6^2+12^2+4^2}} = 0$ Berechnung von d mittels Einsetzen eines Punktes, z.B. $A$: $d = 22$

$$E : \frac{6x - 12y + 4z + 22}{14} = 0$$

Einsetzen des Punktes $S$ ergibt den Abstand $d = 6$ LE.

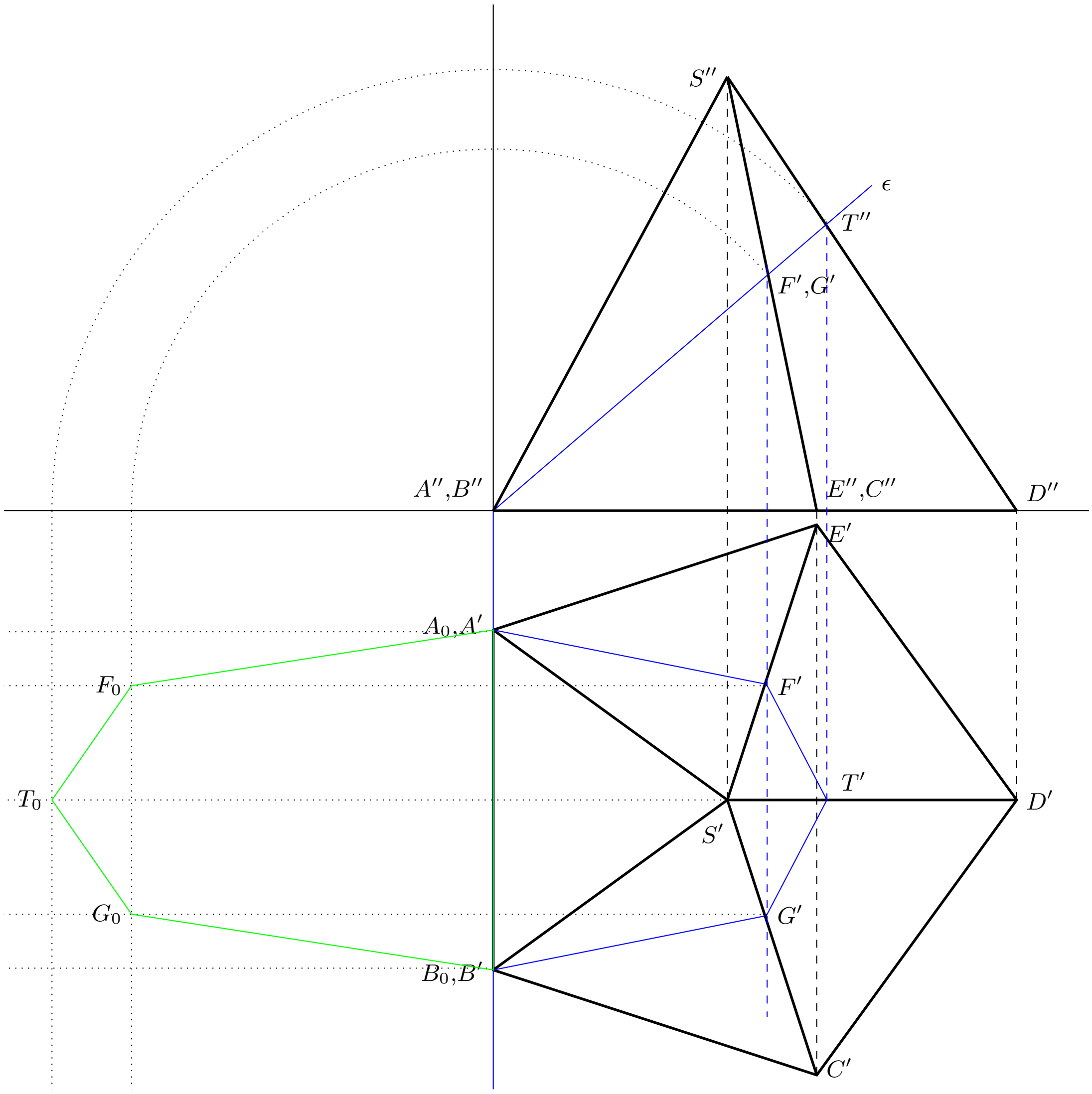
d) Pyramidenvolumen: $V = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}7 \cdot 6 = 14$ RE

**Aufgabe 5.4**
Die Grundfläche $ABCDE$ einer geraden Pyramide mit der Spitze $S$ ist ein regelmäßiges Fünfeck und liegt in der Grundrisstafel. Jede Grundkante ist 40 mm, jede Seitenkante 60 mm lang. Die Grundkante $\overline{AB}$ verläuft senkrecht zur Aufrisstafel.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar.
(Bei dieser Aufgabe dürfen die zur Zeichnung benötigten Winkel oder Strecken berechnet werden.)

b) Diese Pyramide wird von einer zur Aufrisstafel senkrechten Ebene geschnitten. Diese Ebene geht durch die Grundkante $\overline{AB}$ und den Punkt $T$ auf der Seitenkante $\overline{DS}$ mit $\overline{ST} = 20$ mm.
Zeichnen Sie die Spurgeraden dieser Ebene!

c) Konstruieren Sie die Schnittfigur in ihren wahren Größe und Gestalt!
Alle Eckpunkte sind zu benennen.



## 1.27 Abituraufgaben 1969 A

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist eine Funktion durch $y = x(3-x)^2$ ($x$ reell).

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

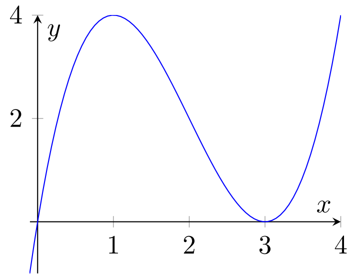
b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und des Wendepunktes des Funktionsbildes!

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 4{,}0$.

a) $0 = x(3-x)^2$ gilt, wenn einer der beiden Faktoren Null wird, d.h. $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind die gesuchten Nullstellen.

b) 1. Ableitung: $y' = 3(x-1)(x-3)$; 2.Ableitung: $y'' = 6(x-2)$; 3.Ableitung: $y''' = 6$.
Extremwertverdächtiges Stellen sind nach $0 = 3(x-1)(x-3)$ bei $x_{E_1} = 1$ und $x_{E2} = 3$.

Da $f''(1) = -6 < 0$ und $f''(3) = 6 > 0$ gilt, ist $E_1(1;4)$ ein lokales Maximum und $E_2(3;0$ ein lokales Minimum.
Der Wendepunkt liegt bei $x_W = 2$ ($f'''(2) \neq 0$) und hat die Koordinaten $W(2;2)$.



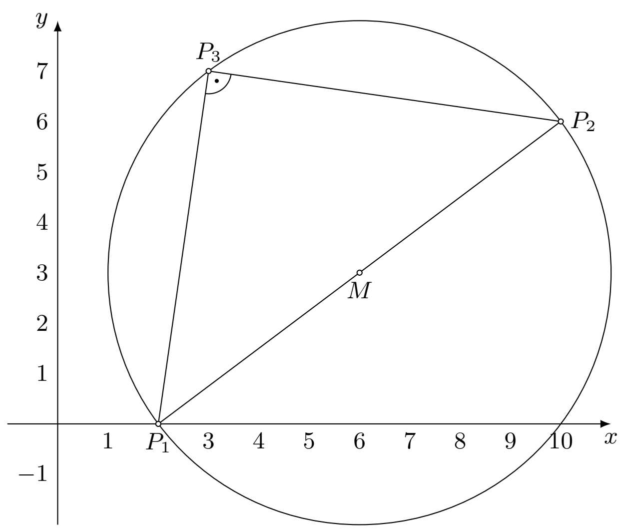

**Aufgabe 2**
Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M(6;3)$ und geht durch den Punkt $P_1(2;0)$.

a) Zeichnen Sie den Kreis und stellen Sie die Gleichung des Kreises auf!

b) Auf dem Kreis liegt ein Punkt $P_2(10; y_2 > 0)$. Berechnen Sie $y_2$!

c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P_3(3;7)$ auf dem Kreis liegt!

d) Weisen Sie nach, dass das Dreieck $P_1P_2P_3$ rechtwinklig ist!




a) siehe Abbildung
Der Radius des Kreises entspricht der Strecke $MP_1$.

$$r = |MP_1| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-0)^2} = 5 \text{ LE}$$

Kreisgleichung $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) $(10-6)^2 + (y_2-3)^2 = 25$ hat als Lösungen $y_1 = 0$ und $y_2 = 6$. Der gesuchte Punkt ist $P_2(10{,}6)$.

c) Einsetzen der Koordinaten von $P_3$ ergibt
$(3-6)^2 + (7-3)^2 = 9 + 16 = 25$.
$P_3$ liegt auf dem Kreis.

d) Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig, da $P_1P_2$ Durchmesser des Kreises ist und $P_3$ auf der Kreisperipherie liegt.

2.Lösungsmöglichkeit:
Die Strecken sind $P_1P_2 = \sqrt{100}$, $P_1P_3 = \sqrt{50}$ und $P_2P_3 = \sqrt{50}$ lang. Nach dem Satz des Pythagoras muss für ein rechtwinkliges Dreieck $(P_1P_3)^2 + (P_2P_3)^2 = (P_1P_2)^2$ gelten, was erfüllt ist.

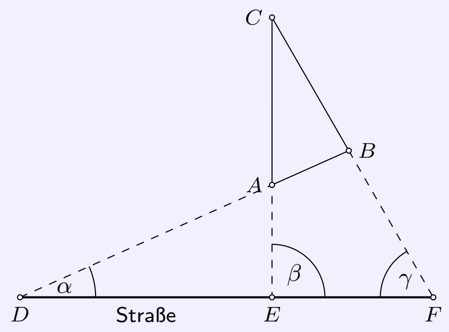
**Aufgabe 3**

In einem ebenen Gelände verläuft eine geradlinige Straße (siehe Skizze).

Bei einer vormilitärischen Übung erhält eine Gruppe der GST den Auftrag, die Entfernungen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ von der Straße aus zu ermitteln. Die Gruppe legt zu diesem Zweck auf der Straße die Punkte $D$, $E$ und $F$ fest und misst:

$$\overline{DE} = 2{,}5 \text{ km}, \quad \overline{EF} = 1{,}6 \text{ km}$$

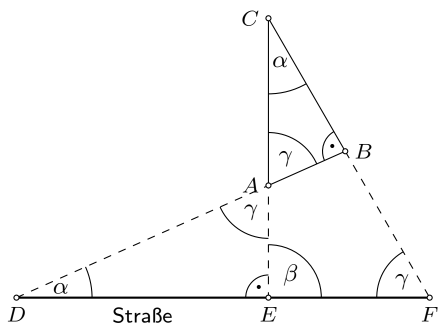
$$\alpha = 24°, \quad \beta = 90°, \quad \gamma = 60°$$



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BC}$! (Rechenstabgenauigkeit genügt.)



Skizze (nicht maßstäblich)

In der linken Abbildung sind alle Winkel gekennzeichnet, die durch Überlegungen mittels Innenwinkelsumme gewonnen werden können.

Im rechtwinkligen Dreieck $DEA$ wird $AE = DE \tan\alpha = 2{,}5 \tan 24° = 1{,}8113$ km und $AD = \frac{DE}{\cos\alpha} = 2{,}737$ km.

Im rechtwinkligen Dreieck $DBF$ wird $BF = DF \sin\alpha = 4{,}1 \sin 24° = 1{,}667$ km und $BD = DF \cos\alpha = 4{,}1 \cos 24° = 3{,}745$ km.
Damit ist $AB = BD - AD = 1{,}008$ km.

Da die Dreiecke $DBF$, $DAE$ und $ABC$ zueinander ähnlich sind, folgt nach dem Ähnlichkeitssatz ss:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{BD}$$

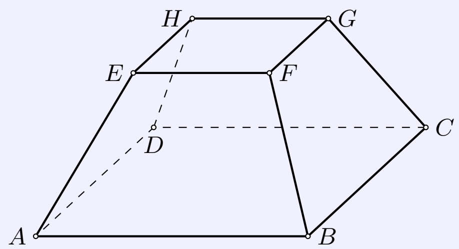
Umstellen und Einsetzen der bekannten Werte ergibt

$$AC = \frac{AB \cdot DF}{BF} = 2{,}48 \text{ km} \qquad , \qquad BC = \frac{AB \cdot BD}{BF} = 2{,}26 \text{ km}$$

**Aufgabe 4**

Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche (siehe Skizze!) hat folgende Maße:

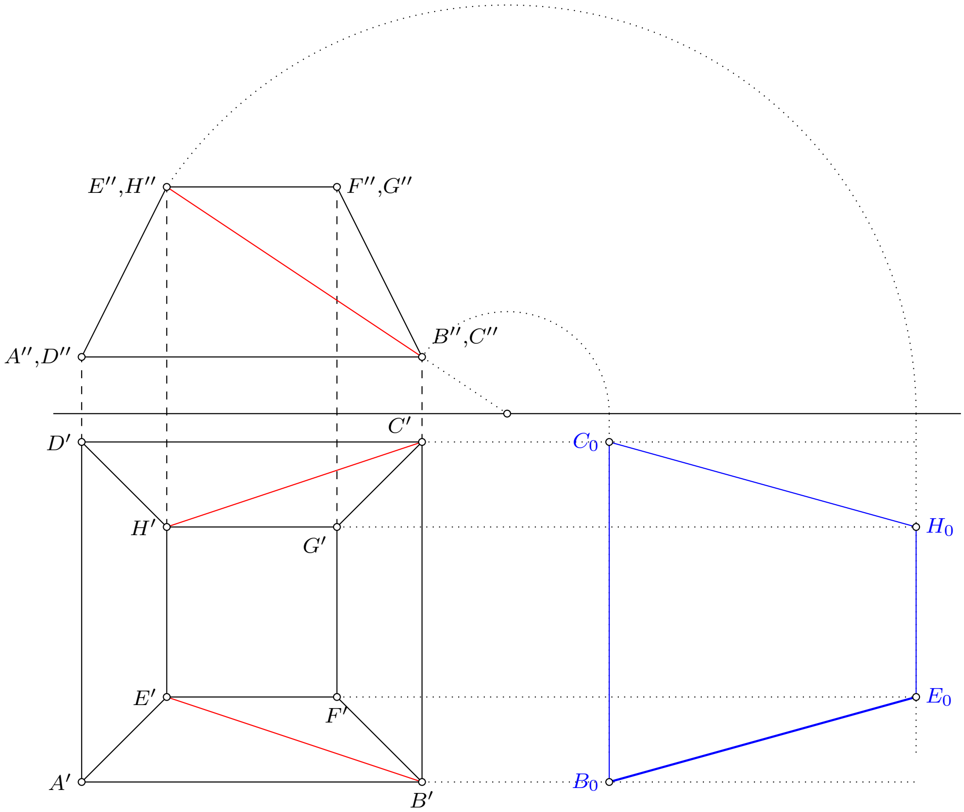
Länge der Grundkante: 6 cm; Länge der Deckkante: 3 cm;
Länge der Körperhöhe: 3 cm
Skizze (nicht maßstäblich)



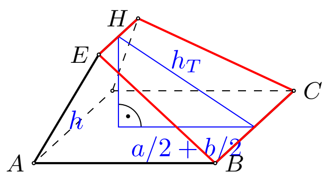

a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Legen Sie zweckmäßigerweise die Grundkante $\overline{AB}$ parallel zur Rissachse!

b) Durch die Punkte $B$, $C$, $H$ und $E$ des Pyramidenstumpfes wird eine Schnittebene gelegt. Stellen Sie die Schnittfläche $BCHE$ im Grund- und Aufriss dar!
Konstruieren Sie die wahre Größe dieser Schnittfläche!

c) Die Schnittfläche $BCHE$ hat die Gestalt eines Trapezes.
Berechnen Sie die Länge der Trapezhöhe. Benennen Sie alle Eckpunkte!




a,b)




c)

Die gesuchte Trapezhöhe $h_T$ ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck (siehe linke Skizze) mit den Katheten Pyramidenstumpfhöhe $h$ und der Kathete aus der halben Grundkante und der halben Deckkante $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

$$h_T = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + (3 + 1.5)^2} = 5{,}41 \text{ cm}$$

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

**Aufgabe 5.1.**
Von einer Ellipse sind folgende charakteristischen Punkte bekannt:
Hauptscheitelpunkte $A_1\left(-\frac{15}{2};0\right)$ und $A_2\left(\frac{15}{2};0\right)$
Brennpunkte $F_1(-6;0)$ und $F_2(6;0)$.

a) Konstruieren Sie die Ellipse in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)
Anmerkung: Außer den Scheitelpunkten sind in jedem Quadranten mindestens drei Punkte zu konstruieren.

b) Geben Sie die Koordinaten der Nebenscheitelpunkte an, und stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf!

c) Durch den Mittelpunkt $M(0;0)$ und den Radius $r = \frac{15}{2}$ cm ist ein Kreis festgelegt. Durch den Punkt $P_1(6;y_1 > 0)$ dieses Kreises verlaufe eine Parallele zur x-Achse.
Begründen Sie, dass diese Parallele gleichzeitig durch einen Nebenscheitelpunkt der Ellipse geht!

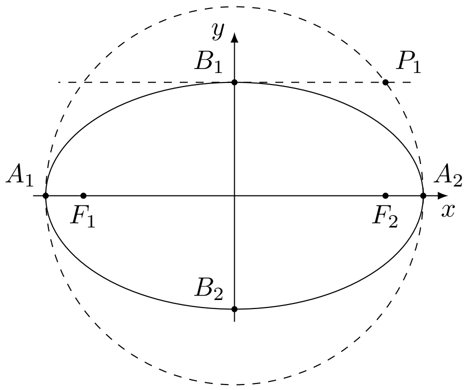
a) Abbildung nächste Seite

b) Die Halbachse ist $a = 7{,}5$ und die Brennweite $e = 6$. Daraus ergibt sich die zweite Halbachse zu $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 4{,}5$.
Die Gleichung der Ellipse ist damit

$$\frac{4x^2}{225} + \frac{4y^2}{81} = 1$$

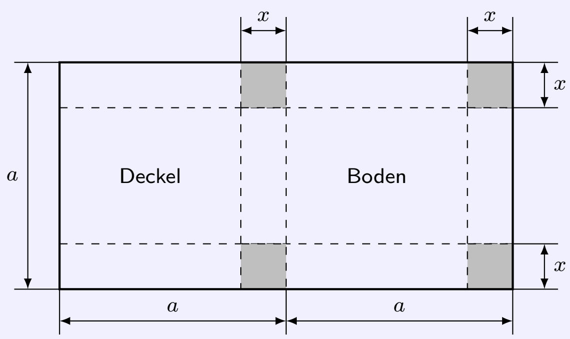
c) Nebenscheitelpunkte sind die Punkte $B_1(0;4{,}5)$ und $B_2(0;-4{,}5)$. Die Kreisgleichung lautet $x^2+y^2=\frac{225}{4}$ und der Punkt $P_1$ hat somit die Koordinaten $P_1\left(6;\frac{9}{2}\right)$.

Eine Parallele durch $P_1$ zu x-Achse durchläuft alle Punkte $P$ mit den Koordinaten $P\left(x;\frac{9}{2}\right)$, also auch den Nebenscheitelpunkt $B_1$.




a)

**Aufgabe 5.2.**
Eine quaderförmige Faltschachtel mit anhängendem, nach beiden Längsseiten übergreifendem Deckel wird folgendermaßen hergestellt:




Skizze (nicht maßstäblich)
Aus einer rechteckigen Pappe mit den Seitenlängen $a$ und $2a$ werden vier gleichgroße quadratische Stücke ausgeschnitten (in der Skizze farbig).
Die in der Skizze unterbrochen gezeichneten Linien werden zu Kanten der entstehenden Schachtel. Das Volumen der Schachtel soll möglichst groß werden.

Berechnen Sie für diesen Fall die Länge $x$ (siehe Skizze)!

Die Schachtel hat nach dem Falten die Seitenlängen $a-x$, $a-2x$ und $x$. Für das Volumen wird dann

$$V=x(a-x)(a-2x)$$

1.Ableitung: $V'=6x^2-6ax+a^2$; 2.Ableitung: $V''=12x-6a$
Extremwertverdächtige Stellen sind als Lösungen von $V'=6x^2-6ax+a^2=0$

$$x_{1;2}=a\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$V''(x_1)=2\sqrt{3}a>0$ wird lokales Minimum, $V''(x_2)=-2\sqrt{3}a<0$ lokales Maximum des Volumens. Für ein maximales Volumen müssen Quadrate der Kantenlänge $xa\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)$ ausgeschnitten werden.

**Aufgabe 5.3.**
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y=-x^3+9x^2 \qquad (0\le x\le 6)$$

Das Bild dieser Funktion besitzt einen Wendepunkt.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!

b) Welche Steigung hat die Tangente, die im Wendepunkt an das Bild der Funktion gelegt wird?

c) Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf!

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse!

e) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen, die durch

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 \qquad (a \neq 0, b \neq 0, a,b,x \text{ reell})$$

gegeben sind, die Extremstelle $x_E = 0$ besitzen!

a) 1.Ableitung: $y' = 18x - 3x^2$, 2.Ableitung: $y'' = 18 - 6x$, 3.Ableitung: $y = -6 \neq 0$
Die zweite Ableitung Null setzen, liefert $x_w = 3$. Da die dritte Ableitung stets verschieden Null ist, ergibt sich der Wendepunkt $W(3; 54)$.

b) An der Stelle $x_W = 3$ hat die Tangente den Anstieg $m = f'(3) = 27$.

c) Die Tangente $t$ läuft durch den Punkt $W$, d.h. mit dem Ansatz $y = 27x + n$ und Einsetzen der Koordinaten von $W$ erhält man $n = -54$. Die Tangentengleichung lautet $t: y = 27x - 54$.

d) Die Nullstelle der Tangentengleichung ist $x = 2$ und der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse folglich $S(2; 0)$.

e) 1.Ableitung $y' = 3ax^2 + 2bx$, 2.Ableitung $y'' = 6ax + 2b$
Aus der 1.Ableitung ergeben sich die extremwertverdächtigen Stellen zu $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{2b}{3a}$.
$f''(0) = 2b$. Da nach Aufgabenstellung $b \neq 0$ ist, existiert das lokale Extremum $E(0; 0)$ bei Null immer, was zu zeigen war.

## 1.28 Abituraufgaben 1969 B

**Pflichtaufgaben**

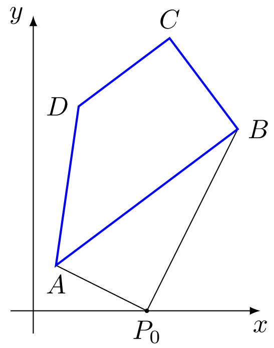
**Aufgabe 1**
Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;2), B(9;8), C(6;12), D(2;9)$.

a) Zeichnen Sie dieses Viereck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
(Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel sind!

c) Berechnen Sie das Maß des Winkels $\alpha = \measuredangle(BAD)$!

d) Auf der x-Achse gibt es genau einen Punkt $P_0$, so dass gilt: $\overline{P_0B} \perp \overline{P_0A}$.
Berechnen Sie die Abszisse des Punktes $P_0$!




b) Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig mit dem Faktor 2, und somit parallel zueinander

c) Vektor $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; Beträge der Vektoren $|\overrightarrow{AB}| = 10, |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{50}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet |\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{50}{10\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45^\circ$$

d) Ansatz für Punkt $P_0(x;0)$, Vektoren: $\overrightarrow{P_0A} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_0B} = \begin{pmatrix} 9-x \\ 8 \end{pmatrix}$
für deren Skalarprodukt wird

$$\overrightarrow{P_0A} \bullet \overrightarrow{P_0B} = x^2 - 10x + 25 \to x_1 = 5$$

Die Koordinaten des Punktes sind $P_0(5;0)$.

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ; } (a > 0, b > 0; \text{ a,b reell})$$

a) Konstruieren Sie die Ellipse für den Fall $a = 5$ und $b = 4$ punktweise!
Anmerkung: Außer den Scheitelpunkten sind in jedem Quadranten mindestens drei Punkte zu konstruieren.

b) Von jeder Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ; } (a > 0, b > 0; \text{ a,b beliebig reell})$$

wird eine Fläche eingeschlossen.
Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen $V_x$. Rotiert diese Fläche um die y-Achse, so entsteht ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen $V_y$. Berechnen Sie $V_x$ und $V_y$ mit Hilfe der Integralrechnung!

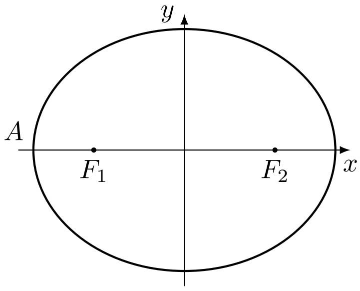
c) Zeigen Sie, dass für die beiden Rotationskörper stets gilt: $V_x : V_y = b : a$!

Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, x = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Rotation um die x-Achse in den Grenzen -a bis a

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2})\right) dx = \pi \left[ b^2 (x - \frac{x^3}{3a^2}) \right]_{-a}^{a} = b^2 \cdot \frac{4}{3} a$$




Rotation um die y-Achse in den Grenzen -b bis b

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} (a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2})\right) dy = \pi \left[ a^2 (y - \frac{y^3}{3b^2}) \right]_{-b}^{b} = a^2 \cdot \frac{4}{3} b$$

Verhältnis der Volumina

$$V_x : V_y = \frac{b^2 \cdot \frac{4}{3} a}{a^2 \cdot \frac{4}{3} b} = \frac{b}{a}$$

**Aufgabe 3**
In der Regelungstechnik kann die Übergangsfunktion $f(t)$ eines Regelkreisgliedes durch

$$y = f(t) = -t^3 + 9t^2 \ ; \ (0 \leq t \leq 6)$$

dargestellt werden.
Das Bild der Funktion besitzt im Definitionsbereich einen Wendepunkt.
Zur Ermittlung von charakteristischen Kennwerten interessiert der Schnittpunkt der Tangente im Wendepunkt mit der t-Achse.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente, die im Wendepunkt an das Bild der Funktion gelegt wird.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Tangente mit der t-Achse!

d) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen, die durch

$$y = f(t) = ax^3 + bx^2 \ ; \ (a \neq 0; b \neq 0; a, b, x \text{ reell})$$

gegeben sind, die Extremstelle $x_E = 0$ besitzen!

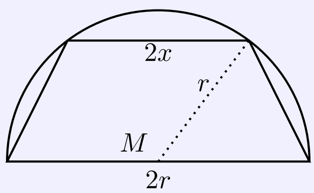
a) 1.Ableitung $y' = -3t^2 + 18t$, 2.Ableitung $y'' = -6t + 18 \to 0 = -6t + 18 \to W(3; 54)$

b) Anstieg im Wendepunkt: $f'(3) = 27$, Einsetzen des Punktes $W$ in $y = 27x + n$ ergibt $n = -27$
Tangentengleichung $t : y = 27t - 27$

c) Schnittpunkt mit x-Achse: $0 = 27t - 27 \to t = 1 \to S(1; 0)$

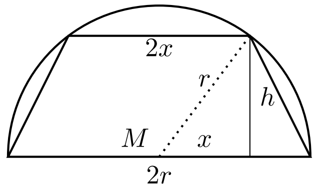
d) 1.Ableitung $y' = 3ax^2 + 2bx$, 2.Ableitung $y'' = 6ax + 2b$
Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt $0 = x(3ax^2 + 2b) \to x_E = 0$
Kontrolle in der 2.Ableitung $f''(0) = 2b \neq 0$, d.h. es liegt eine Extremstelle vor

**Aufgabe 4**
Aus einer halbkreisförmigen Blechplatte ($r = 4$ dm) soll das gleichseitige Trapez mit größtem Flächeninhalt herausgeschnitten werden (siehe Skizze!)




a) Stellen Sie den Flächeninhalt $A$ des Trapezes als Funktion einer geeigneten Veränderlichen dar!

b) Bestimmen Sie den Wert dieser Veränderlichen für den Fall, dass der Flächeninhalt maximal wird! (Auf einen Nachweis des Extremums - 2.Ableitung - wird verzichtet.)




a)

Trapezfläche $A = \frac{a+c}{2}h = \frac{2r+2x}{2}h$, Nebenbedingung $h^2 = r^2 - x^2$
$A = (r+x)\sqrt{r^2 - x^2}$

b) 1.Ableitung gleich Null setzen

$$A' = \sqrt{r^2 - x^2} + (r+x)\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \rightarrow 0 = r^2 - x^2 - (r+x)x = x^2 + \frac{r}{2}x - \frac{r^2}{2}$$

die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = \frac{r}{2}; x_2 = -r$, wobei $x_2$ entfällt.
Die veränderliche Größe ist $x = \frac{r}{2} = 2$ dm.

**Wahlaufgaben**
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

**Aufgabe 5.1.**
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Geben Sie die Koordinaten der Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ sowie der Scheitelpunkte $A_1$ und $A_2$ der Hyperbel an!

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte $P_1(5; \frac{9}{4})$ und $P_2(5; -\frac{9}{4})$ auf dieser Hyperbel liegen!

c) Skizzieren Sie diese Hyperbel!

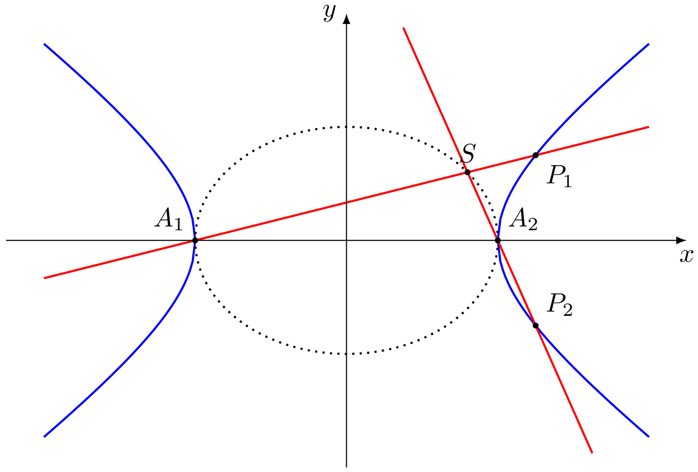
d) Durch $A_1$ und $P_1$ verläuft die Gerade $g_1$, durch $A_2$ und $P_2$ die Gerade $g_2$.
Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden $g_1$ und $g_2$!
Berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes S!

e) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $S$ auf der Ellipse liegt, die den gleichen Mittelpunkt und die gleichen Halbachsen $a$ und $b$ wie die gegebene Hyperbel hat!

a) Halbachsen $a = 4$, $b = 3$. lineare Exzentrizität $e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow e = 5$
Brennpunkte $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$, Hauptscheitel $A_1(-4; 0), SA_2(4; 0)$

b) Einsetzen der Punktes $P_1$ in die Hyperbelgleichung; analog für Punkt $P_2$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \frac{5^2}{16} - \frac{(\frac{9}{4})^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{81}{16 \cdot 9} = 1$$




c)

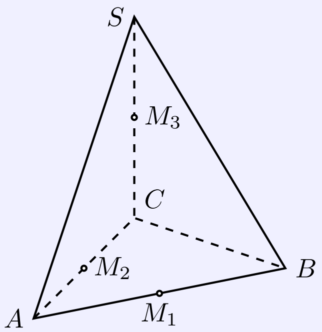
d) Ansatz $y = mx + n$, Anstieg für $\overline{A_1P_1}$ ist $m_1 = \frac{1}{4}$ und für $\overline{A_2P_2}$ ist $m_2 = -\frac{9}{4}$
Punkte $A_1$ und $A_2$ einsetzen, ergibt $n_1 = 1$ und $n_2 = 9$
Geradengleichungen $g_1 : y = \frac{1}{4}x+1; g_2 : y = -\frac{9}{4}x+$ Geradengleichungen gleich setzen, ergibt Schnittpunkt $S(\frac{16}{5}; \frac{9}{5})$

e) Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ Einsetzen des Punktes $S$

$$\frac{(\frac{16}{5})^2}{16} + \frac{(\frac{9}{5})^2}{9} = \frac{16^2}{16 \cdot 5^2} + \frac{9^2}{9 \cdot 5^2} = 1$$

Punkt $S$ liegt auf der Ellipse.

**Aufgabe 5.2.**
Die Grundfläche $ABC$ einer Pyramide mit der Spitze $S$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{CA} = 4$ cm und $\overline{CB} = 6$ cm.
Die Kante $\overline{CS}$ steht senkrecht auf der Grundfläche $ABC$ und ist 8 cm lang (siehe Skizze!)




Skizze (nicht maßstäblich)

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an!

b) $M_1, M_2, M_3$ seien die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}, \overline{AC}$ und $\overline{CS}$ (siehe Skizze!).
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte!

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $g$ durch die Punkte $M_1$ und $M_3$!
Berechnen Sie das Maß des Winkels, den die Gerade $g$ mit der Kante $\overline{CS}$ einschließt! (Rechenstabgenauigkeit genügt.)

d) Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die durch die Gerade $g$ und den Punkt $M_2$ bestimmt ist!

a) Mit einem Koordinatensystem (Ursprung $C$, in Richtung $A$ x-Achse, $B$ y-Achse, $C$ z-Achse) wird für die Punktkoordinaten
$A(4; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 0), S(0; 0; 8)$

b) Mittelpunkte $M_1(2; 3; 0), M_2(2; 0; 0), M_3(0; 0; 4)$

c) Vektoren $\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit den Beträgen $|\overrightarrow{CS}| = 4; |\overrightarrow{M_1M_3}| = \sqrt{29}$ Gerade
$g(M_1M_3) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Eingeschlossener Winkel zwischen $\overrightarrow{M_1M_3}$ und $\overrightarrow{CS}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{M_1M_3} \bullet \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{M_1M_3}||\overrightarrow{CS}|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \rightarrow \alpha \approx 42^\circ$$

d) Ebenengleichung $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
Umwandlung in Normalform ergibt $E : 2x + z = 4$

**Aufgabe 5.3.**
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

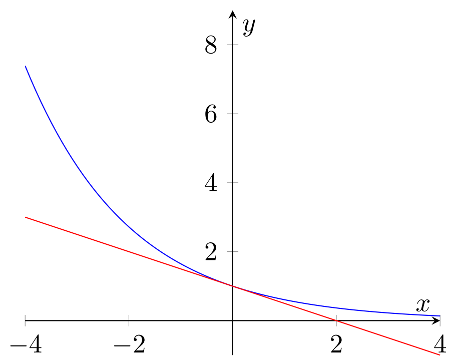
a) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion!
Bestimmen Sie hierzu die Koordinaten von mindestens drei Punkten!

b) Im Schnittpunkt mit der y-Achse sei die Tangente an das Bild der Funktion gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

c) Auf dem Bild der Funktion liegt ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ mit $x_1 > 0$.
Die Parallele zur y-Achse durch $P_1$, die x-Achse, die y-Achse und das Bild der Funktion begrenzen ein Flächenstück.
Zeigen Sie, dass für den Inhalt $A$ dieses Flächenstücks gilt: $A = 2(1 - y_1)$!

a) drei Punkte der Funktion $P(0; 1), Q(1; 0{,}606), R(-1; 1{,}649)$, grafische Darstellung siehe weiter unten

b) Schnittpunkt mit der y-Achse ist $P(0; 1)$.
1.Ableitung $y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$. Anstieg in $P_1$ ist $m = -\frac{1}{2}$ Tangentengleichung $y = -\frac{1}{2}x + 1$




c) für den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ wird

$$A = \int\limits_0^{x_1} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{x_1} = -2e^{-\frac{1}{2}x_1} + 2 = -2y_1 + 2 = 2(1 - y_1)$$

was zu zeigen war

## 1.29 Abituraufgaben 1970 A

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist eine Funktion durch $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 16$ (x reell).
Das Funktionsbild hat zwei lokale Extrempunkte und einen Wendepunkt.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte!

b) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Geraden auf, die durch die Extrempunkte geht!
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes, und untersuchen Sie, ob der Wendepunkt auf der unter b) bestimmten Geraden liegt!

a) 1.Ableitung $y' = 6x^2 - 18x$, 2.Ableitung $y'' = 12x - 18$
Nullsetzen der 1.Ableitung: $0 = 6x^2 - 18x \to x_1 = 0, x_2 = 3$
Kontrolle in der 2.Ableitung: $f''(x_1) = -18 < 0$ Maximum, $f''(x_2) = 18 > 0$ Minimum
lokale Extrempunkte $P_{\min}(3; -11), P_{\max}(0; 16)$

b) Anstieg der Geraden $\overline{P_1P_2}$ ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-27}{3} = -9$
Punkt $P_1$ einsetzen in $y = -9x + n$, ergibt Geradengleichung $y = -9x + 16$
Schnittpunkte mit den Achsen: $S_x(\frac{16}{9}; 0), S_y(0; 16)$

c) Wendepunkt $y'' = 0 = 12x - 18 \to x_W = \frac{3}{2} \to W(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$
Einsetzen von W in die Geradengleichung ergibt $9 \cdot \frac{3}{2} + 16 = \frac{5}{2}$, d.h. der Wendepunkt liegt auf der Geraden durch die lokalen Extrempunkte.

**Aufgabe 2**
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks $A(4; 0), B(3; 7)$ und $C(0; 3)$.

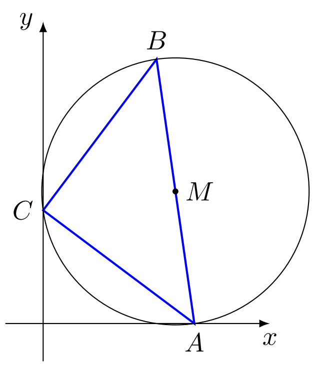
a) Zeichnen Sie das Dreieck!

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist!

c) Begründen Sie, dass der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $ABC$ und die Strecke $\overline{AB}$ halbiert, und zeichnen Sie diesen Umkreis!

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes und die Länge des Radius!
Stellen Sie die Gleichung des Umkreises auf!

a)




b) gleichschenkliges Dreieck, da
$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = \sqrt{3^2 + (7-3)^2} = |\overline{BC}|$
rechtwinkliges Dreieck, da die Vektoren $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Skalarprodukt $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$ ergeben und senkrecht aufeinander stehen.

c) $\overline{AB}$ ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, der Winkel bei $C$ ist $90°$. Damit liegt $C$ auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ mit $M_{AB}$ als Mittelpunkt, d.h. $M_{AB}$ halbiert die Strecke $\overline{AB}$.

d) Umkreismittelpunkt $M_{AB}(3{,}5; 3{,}5)$
Umkreisradius

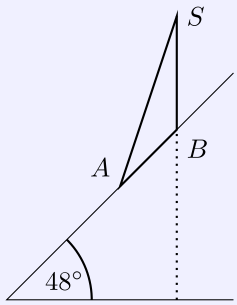
$$r = \frac{1}{2}|\overline{AB}| = \frac{1}{2}\sqrt{(4-3)^2 + (0-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{50} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

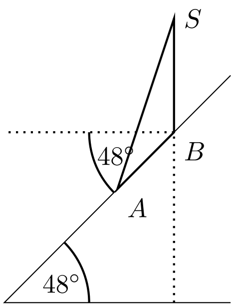
Kreisgleichung $(x - 3{,}5)^2 + (y - 3{,}5)^2 = \frac{25}{2}$

**Aufgabe 3**
Für eine Bergseilbahn wird ein lotrechter Mast von der Länge $\overline{BS} = 8{,}0$ m als Seilträger verwendet.
Der Berghang hat einen Steigungswinkel von $48°$.
Zur Erhöhung der Stabilität wird eine Stütze $\overline{AS}$ angebracht, deren Fußpunkt $A$ vom Fußpunkt $B$ des Seilträgers 4,5 m entfernt ist. (Siehe Skizze!) Skizze nicht maßstäblich.

a) Berechnen Sie die Länge von $\overline{AS}$!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\measuredangle(BAS)$!




a) Der Winkel bei $B$ ist ebenfalls $48°$, da er Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist.
Der Winkel $\angle(SBA)$ ist dann $138°$ groß.
Kosinussatz:

$$|\overline{AS}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BS}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{BS}|\cos 138° \approx 11{,}74 \text{ m}$$

b) Sinussatz $\frac{\sin\measuredangle(BAS)}{\sin 138°} = \frac{8}{11{,}74} \rightarrow \measuredangle(BAS) = 62{,}9°$

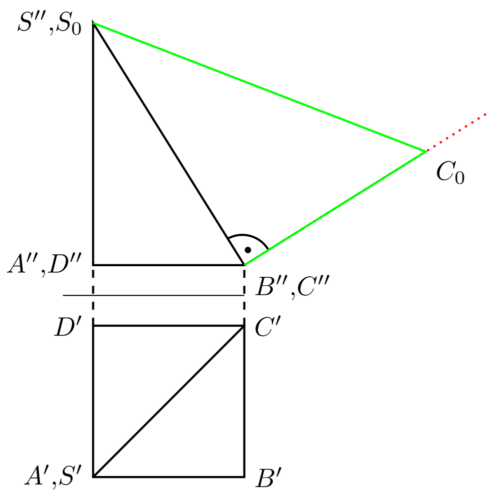
**Aufgabe 4**
Die Grundfläche einer schiefen Pyramide ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5,0 cm.
Die Spitze der Pyramide befindet sich senkrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche. Die Körperhöhe ist 8,0 cm lang.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar!
Benennen Sie alle Eckpunkte!

b) Ermitteln Sie durch Konstruktion die wahre Länge der längsten Seitenkante, und geben Sie diese Länge in Millimetern an!

c) Berechnen Sie die Länge der längsten Seitenkante!

a)




b) Länge der Seitenkante $\overline{CS}$ ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten die Pyramidenhöhe und die Grundflächendiagonale sind.
$|\overline{CS}| = \sqrt{8^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{114} \approx 107$ mm

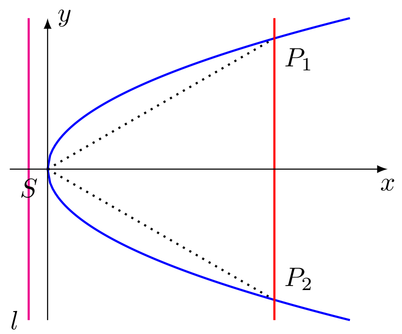
**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 5.1**
Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2x$.

a) Konstruieren Sie die Parabel für $0 \leq x \leq 8$!
(Koordinateneinheit: 1 cm)
Außer dem Scheitelpunkt $S$ sind mindestens sechs weitere Parabelpunkte zu konstruieren.

b) Eine Parallele zur Leitlinie im Abstand von 6,5 cm schneidet die Parabel in den Punkten $P_1$ und $P_2$. Zeichnen Sie diese Parallele ein, und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $P_1$ und $P_2$!

c) Untersuchen Sie, ob das Dreieck $SP_1P_2$ gleichseitig ist.




b) die Leitlinie hat den Abstand von 0,5 zum Scheitelpunkt. Damit sind die Abszissen von $P_1$ und $P_2$ gleich 6.
$y^2 = 2x \rightarrow y^2 = 12 \rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3{,}464 \rightarrow P_{1,2}(6, \pm\sqrt{12})$

c) Das Dreieck $SP_1P_2$ ist aus Symmetriegründen gleichseitig, wenn $|\overline{P_1P_2}| = 2\sqrt{12} = |\overline{SP_1}|$ ist.

$$|\overline{SP_1}| = \sqrt{6^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{48} = 2\sqrt{12} = |\overline{P_1P_2}|$$

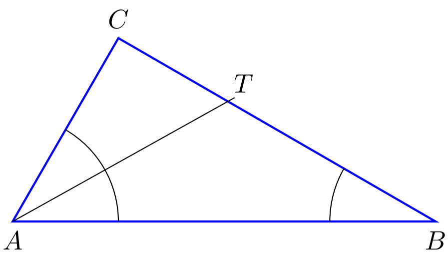
**Aufgabe 5.2**
a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit

$$\measuredangle(BAC) = \alpha = 60° \text{ ; } \measuredangle(CBA) = \beta = 30°$$

und mit beliebiger Seitenlänge!
Zeichnen Sie die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle(BAC)$ ein!
Ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{BC}$ sei $T$.

b) Die Länge der Strecke $\overline{AT}$ sei $w$.
Geben Sie die Längen von $\overline{CT}$ und $\overline{AC}$ unter Verwendung der Streckenlänge $w$ an!

c) Zeigen Sie, dass die Quotienten $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ und $\dfrac{\overline{CT}}{\overline{BT}}$ einander gleich sind!

a) 


Das Dreieck $\Delta ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.

b) Das Dreieck $\Delta ATC$ ist ebenfalls rechtwinklig mit dem Winkel $\measuredangle(TAC) = \beta = 30°$ und somit

$$\frac{|\overline{CT}|}{|\overline{AT}|} = \sin 30° \rightarrow |\overline{CT}| = \frac{1}{2}w; \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AT}|} = \cos 30° \rightarrow |\overline{AC}| = \frac{1}{3}\sqrt{3}w$$

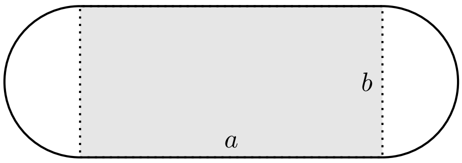
c) Es gilt, durch den Winkel $\beta = 30°$, für das Verhältnis $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$
Das Dreieck $\Delta ABT$ ist gleichschenklig, da die 2 Innenwinkel an $\overline{AB}$ gleich $30°$ sind. Damit ist $|\overline{AT}| = |\overline{BT}| = w$.
Für das Verhältnis $\frac{\overline{CT}}{\overline{BT}} = \frac{\frac{1}{2}w}{w} = \frac{1}{2}$, d.h. beide Verhältnisse sind gleich groß.

**Aufgabe 5.3**
Das Spielfeld eines Sportplatzes soll von einer Aschenbahn umschlossen werden, deren innerer Rand 440 m lang ist.
Dieser Rand besteht aus den beiden langen Seiten eines Fußballfeldes und zwei sich daran anschließenden Halbkreise (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)

a) Das rechteckige Fußballfeld soll einen möglichst großen Flächeninhalt erhalten.
Wie sind seine Abmessungen zu wählen?

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der beiden Halbkreisflächen unter Verwendung des in Aufgabe a) ermittelten Ergebnisses!




a) Zielfunktion $A = a \cdot b$ mit Nebenbedingung $u = 440 = 2a + \pi \cdot b$

$$A = \frac{1}{\pi}(440a - 2a^2); A' = \frac{1}{\pi}(440 - 4a); A'' = -\frac{4}{\pi}$$

Nullstelle der 1.Ableitung ist $a = 110$. Da die 2.Ableitung stets negativ ist, liegt ein lokales Maximum vor.
Die Abmessungen sind $a = 110$ m und $b = \frac{220}{\pi} \approx 70$ m.

b) Flächeninhalt eines Halkreises $A_{HK} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}b^2 = \frac{6050}{\pi} \approx 1925$ m$^2$, Fläche beider Halbkreise ist 3950 m$^2$.

## 1.30 Abituraufgaben 1970 B

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben sind eine Parabel und eine Gerade durch die Gleichungen

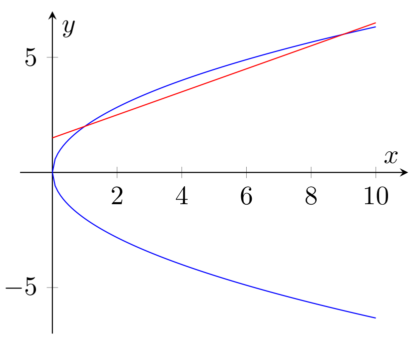
$$y^2 = 4x \text{ bzw. } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte der Parabel, und zeichnen Sie diese Parabel im Intervall $0 \leq x \leq 10$!
Zeichnen Sie die Gerade in dasselbe Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade!

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Parabel und die Gerade begrenzt wird!

a)




b) Schnittpunkte der Parabel und Funktion

$$4x = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow 0 = x^2 - 10x + 9 \rightarrow x_1 = 1; x_2 = 9$$

Schnittpunkte $S_1(1;2), S_2(9;6)$

c) Flächeninhalt zwischen den Kurven von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 9$

$$A = \int_1^9 (\sqrt{4x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})dx = \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3x}{2}\right]_1^9 = \frac{8}{3} \text{ FE}$$

**Aufgabe 2**
In einem x-y-z-Koordinatensystem ist eine Gerade $g$ durch die Punkte $P_1(10,7;1)$ und $P_2(4;1;-2)$ festgelegt.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden $g$ auf!

b) Untersuchen Sie, ob der Punkte $P_3(14;10;3)$ auf der Geraden $g$ liegt!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$, in dem die Gerade $g$ die x-y-Ebene durchstößt!

a) Gleichung der Geraden $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Einsetzen des Punktes $P_3$ in die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ergibt für die x-Koordinate $14 = 10 - 6t$ als Parameter $t = -\frac{2}{3}$. Dagegen ergibt die y-Koordinate den Parameter $t = -\frac{1}{2}$ im Widerspruch. $P_3$ liegt nicht auf der Geraden.

c) Im Durchstoßpunkt der x-y-Ebene ist $z = 0$. Ansatz für Punkt $P_0(x;y,0)$:
Gleichsetzen des Ortsvektors von $P_0$ mit der Geraden $g$ ergibt für die z-Koordinate den Parameter $t = \frac{1}{3}$ und somit die Koordinaten $P_0(8;5;0)$.

**Aufgabe 3**
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = f(x) = \ln(2x); (x \text{ reell}; x > 0)$$

a) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetafel!

| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | -0,51 | | 0,69 | | |

Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $0{,}1 \leq x \leq 4{,}0$!

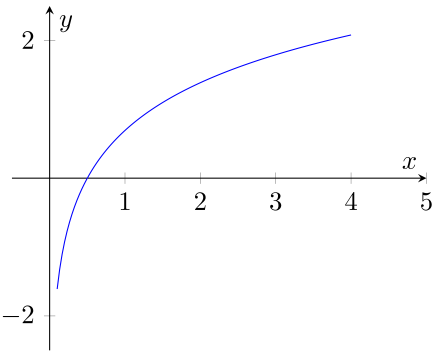
b) Das Bild dieser Funktion schneidet die x-Achse in $P_0$.
Berechnen Sie den Anstieg der Tangente in $P_0$ an die Kurve.

c) Das Bild jeder Funktion

$$y = g(x) = \ln(ax)\ ;\ (x > 0; a > 0)$$

schneidet die x-Achse in $Q(\frac{1}{a}; 0)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente in $Q$ an das Funktionsbild!
Begründen Sie, dass für jedes $a > 0$ diese Tangente die y-Achse im Punkt $R_0(0; -1)$ schneidet!

| x | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -1,61 | -0,51 | 0 | 0,69 | 1,39 | 2,08 |



a)

b) Nullstelle der Funktion bei $0 = \ln(2x) \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x_N = \frac{1}{2} \rightarrow P_0(\frac{1}{2}; 0)$

c) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{x}$ ergibt den Tangentenanstieg $m_t = y'(\frac{1}{a}) = a$
Einsetzen des Punktes $Q$ in $y = ax + n$ liefert $n = -1$ und als Tangentengleichung $t : y = ax - 1$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die y-Koordinaten $y = a \cdot -1 = -1$ und entspricht dem Punkt $R_0$.

**Aufgabe 4**
In den Glühofen eines Presswerkes werden Rohlinge eingesetzt, die die Form von geraden Kreiszylindern haben.
Jeder Rohling hat eine Masse von $m = 15$ kg.
Um die Abbrandverluste möglichst gering zu halten, muss unter anderem die Oberfläche dieser Rohlinge möglichst klein sein.
Berechnen Sie Radius und Höhe für den Fall, dass die Oberfläche minimal wird!
Dichte des glühenden Stabes: $\rho = 7{,}5$ kg · dm$^{-3}$
(Rechenstabgenauigkeit genügt.)

Zielfunktion $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit Radius $r$ und Höhe $h$ des Zylinders.
Aus der Masse und der Dichte ergibt sich für die Nebenbedingung $V = 2 = \pi r^2 h$ und als Zielfunktion $A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$

$$A' = 4\pi r - \frac{4}{r^2} \rightarrow 0 = 4\pi r - \frac{4}{r^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

Die zweite Ableitung $A'' = 4\pi + \frac{8}{r^3}$ wird für alle positiven $r$ größer 0, d.h. es liegt ein lokales Minimum vor.
Abmessungen des Zylinders $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0{,}68$ dm und $h = 2\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 1{,}37$ dm.

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 5.1**
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Polstellen und auf Nullstellen!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Funktionsbild die y-Achse schneidet!

b) Weisen Sie nach, dass diese Funktion keine lokalen Extremstellen hat!
Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Bereich von $x_1 = -4$ bis $x_2 = +4$!

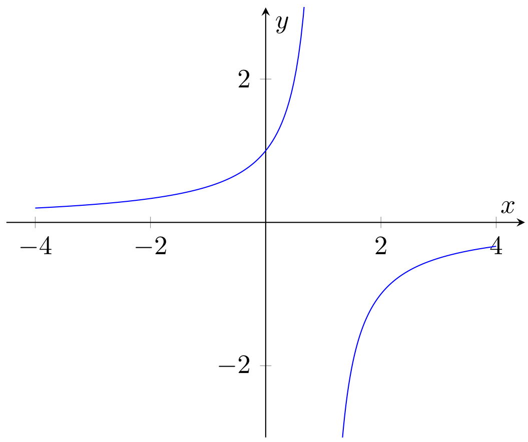
c) Das Bild dieser Funktion, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 0$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht!

a) keine Nullstelle, da Zähler nicht 0 werden kann; die Polstelle liegt bei $x_1$, da dort die Funktion nicht definiert ist
Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0;1)$

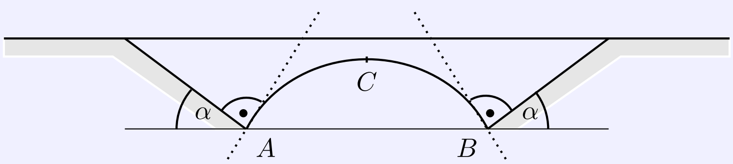
b) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{(1+x)^2}$ besitzt keine Nullstelle (Zähler!). Damit existieren keine lokalen Extrema.

c) Volumen des Rotationskörpers

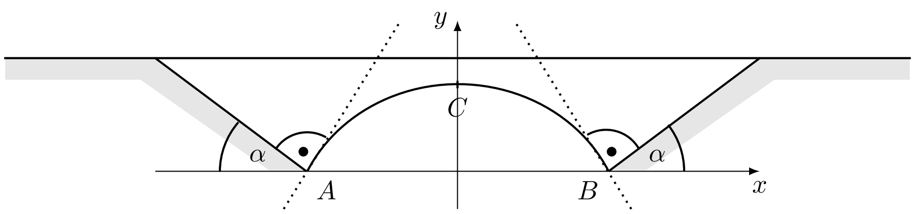
$$V = \pi \int_{-4}^{0} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{1-x}\right]_{-4}^{0} = \frac{4}{5}\pi \text{ VE}$$




**Aufgabe 5.2**
Die Skizze zeigt einen parabelförmigen Brückenbogen, der beide Böschungen in den Punkten $A$ und $B$ senkrecht trifft.




Skizze (nicht maßstäblich)
Die Böschungen bilden mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = 30°$. Die Entfernung der Punkte $A$ und $B$ beträgt $\overline{AB} = 12{,}0$ m.
Berechnen Sie die Höhe des Scheitelpunktes $C$ des Brückenbogens über der Strecke $\overline{AB}$!
(Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!)




Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die x-Achse durch die Punkte $A$ und $B$, die y-Achse durch $C$ verläuft. Dann sind die Punkte $A(-6;0)$ und $B(6;0)$.

Gesucht ist damit der Scheitelpunkt $C$ einer Funktion $y = -ax^2 + b$.
Die in der Skizze gestrichelt gezeichnete Tangente in $B$ hat den Anstiegswinkel $\beta = \alpha + 90° = 120°$, d.h. der Tangentenanstiegswinkel in $A$ ist $60°$ und es wird für den Anstieg im Punkt $A$: $y'(-6) = m_t = \tan 60° = \sqrt{3}$.
Mit der 1.Ableitung $y' = -2ax$ ergibt sich durch Einsetzen das Gleichungssystem

$$0 = -36a + b \quad \sqrt{3} = 12a$$

mit der Lösung $a = \frac{1}{12}\sqrt{3}, b = 3\sqrt{3}$.
Die Höhe des Scheitelpunktes $C$ des Brückenbogens über der Strecke $\overline{AB}$ ist $h = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ m.

**Aufgabe 5.3**
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks $A(0;0), B(6;0)$ und $C(0;4)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck!
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M$ der Seite $\overline{BC}$, und tragen Sie die Strecke $\overline{AM}$ in die Zeichnung ein!

b) Auf der Seite $\overline{AB}$ liegt der Punkt $D(2;0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $E$ der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{CD}$!

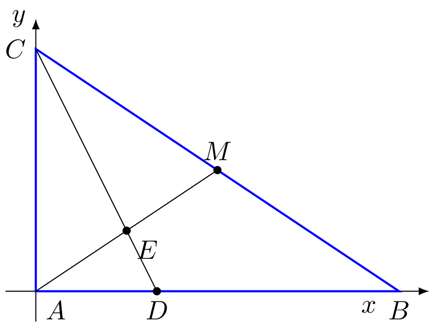
c) Berechnen Sie das Verhältnis, in dem $E$ die Strecke $\overline{AM}$ teilt!

d) Auf der Seite $\overline{AB}$ liegt ein Punkt $P(k;0)$ mit $0 < k < 6$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $F$ der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{PC}$!
(Hinweis: Das Ergebnis ist in möglichst einfacher Form anzugeben.)

a) Koordinaten des Mittelpunktes $M$ der Seite $\overline{BC}$ ist $M_{BC}(3;2)$.

b) Ermittlung der Geradengleichungen über Anstieg und Einsetzen eines Punktes:
Gerade durch $A$ und $M$: $g : y = \frac{2}{3}x$, Gerade durch $C$ und $D$: $h : y = -2x + 4$ Gleichsetzen der Geradengleichungen

$$\frac{2}{3}x = -2x + 4 \to x = \frac{3}{2}; y = 1 \to E(\frac{3}{2}; 1)$$




c) Längen der Strecken ermitteln
$|\overline{AE}| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ und $|\overline{EM}| = \sqrt{(3 - \frac{3}{2})^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$
Da beide Strecken gleich lang sind, teilt $E$ die Strecke $\overline{AM}$ im Verhältnis 1:1.

d) Anstieg der Geraden $\overline{PC}$ ist $m = -\frac{4}{k}$
Einsetzen des Punktes $P$ in $y = -\frac{4}{k}x + n$ ergibt $n = 4$. Der Schnittpunkt $F$ ist Lösung des Gleichungssystems

$$y = \frac{2}{3}x$$
$$y = -\frac{4}{k}x + 4$$

Lösung: $x = \frac{6k}{k+6}, y = \frac{4k}{k+6}$, Koordinaten des Schnittpunktes $F(\frac{6k}{k+6}; \frac{4k}{k+6})$

## 1.31 Abituraufgaben 1971

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Bei einem gemeinsamen Manöver der Streitkräfte der Warschauer Vertragsstaaten wird ein Ziel (Flugzeug) nacheinander in den Punkten $P_1(19;-12;5)$ und $P_2(22;-9;5)$ geortet.
Das Ziel bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn.
Eine Abwehrrakete wird von einem Punkt $P_3(8;2;0)$ aus abgeschossen.
Die Bahn dieser Rakete wird ebenfalls als geradlinig angenommen; ihre Richtung ist durch den Vektor $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ bestimmt.

a) Stellen Sie die Gleichungen dieser beiden geradlinigen Bahnen in Parameterform auf!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P_0(28;-3;5)$ der Schnittpunkt der beiden Flugbahnen ist!

c) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die beiden Bahnen einander schneiden!

a) Richtungsvektoren der 2 Geraden: $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, womit die Geradengleichungen sind

$$g(P_1P_2): \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; h(P_3): \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) für Berechnung des Schnittpunkts Geradengleichungen gleich setzen und Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$19 + 3t = 8 + 4s \quad (I) \qquad ; \qquad -12 + 3t = 2 - s \quad (II) \qquad ; \qquad 5 = s \quad (III)$$

Aus Gleichung III folgt $s = 5$ und mit Gleichung II $t = 3$.
Kontrolle in der 1.Gleichung bestätigt das Ergebnis. Einsetzen von $t$ oder $s$ in die Geradengleichungen ergibt den Schnittpunkt $P_0(28;-3;5)$

c) Beträge der Richtungsvektoren der Geraden sind $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18}$ und $\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18}$

Eingeschlossener Winkel

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Der Winkel $\alpha$ ist damit gleich $60°$.

**Aufgabe 2**
Durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 + q}{x^2 + 1} \text{ ; } (x, q \text{ reell}; q \neq 1)$$

sind rationale Funktionen gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob die Funktionen für $q > 0$ bzw. für $q < 0$ Nullstellen besitzen!
Begründen Sie Ihre Aussagen!

b) Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$!

c) Jede derartige Funktion hat genau eine lokale Extremstelle.
Berechnen Sie diese Extremstelle und den zugehörigen Funktionswert!
(Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung kann auf Grund der Aufgabenstellung verzichtet werden.)

a) Nullstellen sind nur für $x^2 + q \geq 0 \rightarrow x^2 \geq -q$ möglich, d.h. für $q < 0$ existieren zwei Nullstellen, $q > 0$ keine Nullstelle.

b)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+q}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{q}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{q}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

c) 1.Ableitung $y' = \frac{2x(1-q)}{(x^2+1)^2}$, Nullsetzen des Zählers ergibt $x_E = 0$
lokaler Extrempunkt $P(0; q)$

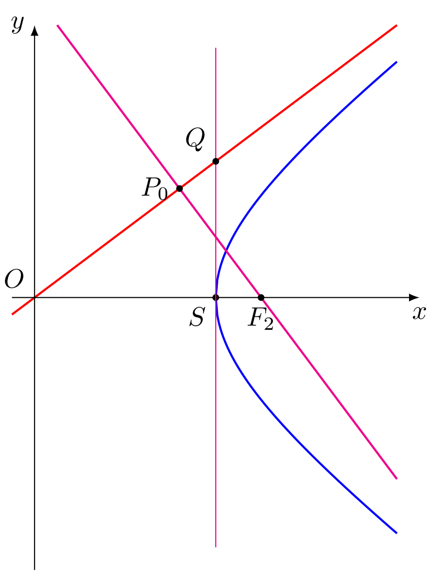
**Aufgabe 3**
Gegeben ist eine Hyperbel mit der Gleichung
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie mindestens vier Punkte des Hyperbelastes, der im I. und IV.Quadranten liegt!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $4 \leq x \leq 8$!

b) Geben Sie die Gleichung derjenigen Asymptote an, die positiven Anstieg hat! Zeichnen Sie diese Asymptote ein!
Zeichnen Sie die Gerade $g$, die durch $F_2(e; 0)$ geht und senkrecht auf dieser Asymptote steht!
Die Gerade $g$ schneidet dieser Asymptote in $P_0(x_0; y_0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $P_0$!

c) Zeichnen Sie die Parallele zur y-Achse durch den Scheitelpunkt $S(4; 0)$!
Sie schneidet die Asymptote im Punkt $Q$. Weisen Sie nach, dass die Dreiecke $OSQ$ und $OF_2P_0$ kongruent sind (O ist der Ursprung des Koordinatensystems)!

d) Weisen Sie nach, dass auch für beliebige Hyperbeln
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
die entsprechend gelegenen Dreiecke kongruent sind!




a)

b) Halbachsen der Hyperbel $a = 4, b = 3$, lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
Asymptote $y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x$
Anstieg der Geraden g ist $m = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$,
Brennpunkt $F_2(5, 0)$ einsetzen, ergibt Geradengleichung $g : y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$
Gerade $g$ und Asymptote schneiden sich in

$$\frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \rightarrow x = \frac{16}{5} \rightarrow P_0(\frac{16}{5}; \frac{12}{5})$$

c) mit $\frac{3}{4}x = 4$ wird für den Schnittpunkt $Q(4, 3)$

d) im Dreieck $OSQ$ liegt bei $S$ ein rechter Winkel. Seite $\overline{OQ} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
im Dreieck $OF_2P_0$ liegt bei $P_O$ ein rechter Winkel. Seite $\overline{OF_2} = e = 5$.
Beide Dreiecke habe im Ursprung einen gemeinsamen Winkel und damit auch den 3.Winkel gleich.
Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke zueinander kongruent.

e) für eine Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergeben sich: $S(a; 0), F_2(e; 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ und weiter mit der Asymptote $y = \frac{b}{a} \cdot a = b$ für den Punkt $Q(a; b)$.
Die Aussagen in Teilaufgabe d) über die Winkel in den Dreiecken $OSQ$ und $OF_2P_0$ gelten analog. Für die Dreicksseiten wird $\overline{OQ} = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ und $\overline{OF_2} = e$.
Nach dem Kongruenzsatz WSW sind beide Dreiecke zueinander kongruent.

**Aufgabe 4**
Die Bilder der Funktionen

$$f_1(x) = \sin{(2x)} \text{ und } f_2(x) = \sin x$$

schneiden einander im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ in drei Punkten.

a) Berechnen Sie die Abszissen dieser Schnittpunkte!

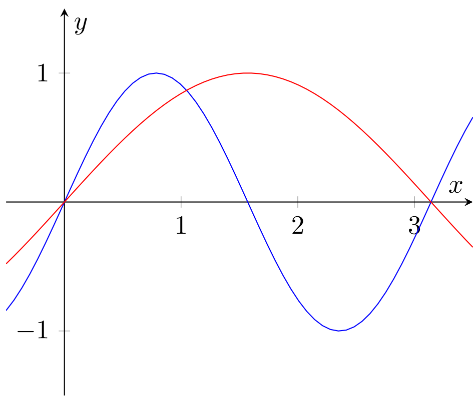
b) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im angegebenen Intervall!

c) Die Bilder der Funktionen schließen in diesem Intervall zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Inhalt des kleineren Flächenstückes!

a) Schnittpunkte beider Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq \pi$

$$0 = \sin{(2x)} - \sin x = 2\cos x \sin x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi, \cos x = \frac{1}{2}$$

Der zweite Faktor ergibt $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x_3 = \frac{\pi}{3} = 60°$



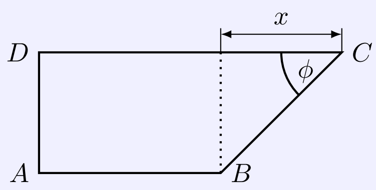

b)

c)

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin{(2x)} - \sin x)dx = \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \quad FE$$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 5.1.**
Der Querschnitt eines Kanals muss auf Grund örtlicher Gegebenheiten die skizzierte Form erhalten.




Skizze (nicht maßstäblich)
Es gilt: $\overline{AB} = 2{,}0$ m ; $\overline{BC} = 4{,}0$ m ; $\overline{AD} \perp \overline{AB}; \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

a) Geben Sie den Flächeninhalt des Kanalquerschnitts in Abhängigkeit entweder von $\phi$ oder $x$ an!

b) Berechnen Sie entweder $\phi$ oder $x$ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird! (Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

a) mit $\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - x^2$ wird für den Flächeninhalt

$$A = \overline{AB}\,\overline{AD} + \frac{x}{2}\overline{AD} = \frac{4+x}{2}\sqrt{16-x^2}$$

b) Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt

$$A' = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{x^2+4x}{2\sqrt{16-x^2}} = 0 \to 0 = -2x^2 - 4x + 16 \to 0 = x^2 + 2x - 8$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ (entfällt).

**Aufgabe 5.2.**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ sei gegeben durch die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 3 \; ; \; a_{k+1} = a_k + (4k+3) \; ; \; (k > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder $a_2, a_3$ und $a_4$ dieser Folge an!

b) Dieselbe Folge kann durch die explizite Bildungsvorschrift

$$b_n = 2n^2 + n \; ; \; (n > 0)$$

gegeben werden.
Beweisen Sie diese Behauptung mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion!

c) Bestimmen Sie $k$ so, dass $b_k = 820$ gilt!

d) Beweisen Sie, dass die Folge $(b_n)$ eine monoton wachsende Zahlenfolge ist, d.h., dass für alle $n$ gilt: $b_{n+1} > b_n$!

a) $a_2 = 10, a_3 = 21, a_4 = 36$

b) Induktionsanfang für $k = 1$: $a_1 = 3 = 2 \cdot 1^2 + 1 = b_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_k = 2k^2 + k$
Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt dann: $a_{k+1} = a_k + 4k + 3 = 2(k+1)^2 + k + 1 = b_{k+1}$
Induktionsbeweis

$$a_{k+1} = a_k + 4k + 3 = 2k^2 + k + 4k + 3 = 2(k^2 + 2k + 1) + k + 1 = 2(k+1)^2 + k + 1 = b_{k+1}$$

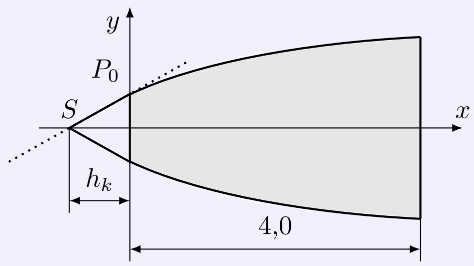
c)
$$820 = 2k^2 + k \to 0 = k^2 + \frac{1}{2}k - 410 \to k_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{81}{4}$$

Die natürliche Lösung ist $k = 20$

d)
$$b_{n+1} - b_n = 2(k+1)^2 + k + 1 - (2k + k) = 4k + 3 > 0$$

Da die Differenz für alle $n > 1$ positiv ist, ist die Zahlenfolge monoton wachsend.

**Aufgabe 5.3.**




Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in Meter
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Raumflugkörpers, der aus einem Rumpf (in der Skizze grau) und einem kegelförmigen Kopf mit der Spitze $S$ besteht.
Der Rumpf kann als Paraboloid aufgefasst werden, das durch Rotation der Parabel mit der Gleichung

$$y^2 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})$$

um die x-Achse in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 4$ entsteht.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Rumpfes!

b) Welchen Radius hat der Grundkreis des Kegels?

c) Die Gerade durch die Punkte $S$ und $P_0$ ist Tangente an das Bild der gegebenen Parabel im Punkt $P_0(x_0; y_0)$.
Bestimmen Sie die Höhe $h_k$ des Kegels!

a) Volumen des Rotationskörpers von $x = 0$ bis $x = 4$

$$V = \pi \int_0^4 (\frac{x}{2} + \frac{1}{4})dx = \left[\frac{x^2 + x}{4}\right]_0^4 = 5 \text{ m}^3$$

b) für $x = 0$ wird $y^2 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \to y = \pm\frac{1}{2}$
Der Radius des Grundkreises des Kegels ist 0,5 m groß.

c) Koordinaten des Punktes $P_0(0; \frac{1}{2})$
in die 1.Ableitung der Parabelfunktion $x = 0$ einsetzen

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \to y'(0) = \frac{1}{2}$$

Tangentengleichung durch $P_0$: $t : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
Die Tangente hat die Nullstelle $x_N = -1$, so dass die Höhe $h_k$ des Kegels gleich 1 m ist.

## 1.32 Abituraufgaben 1972

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch $a_n = 3n(n-1)$ ; $(n \geq 1)$.

a) Berechnen Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Zahlenfolge!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen $s_1, s_2$ und $s_3$ der gegebenen Zahlenfolge!

c) Das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen kann in der Form

$$s_n = n^3 + r \cdot n \ ; \ (r \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$$

dargestellt werden.
Bestimmen Sie den Wert der Variablen $r$ unter Verwendung der im Teil b) berechneten Partialsummen!

d) Setzen Sie den von Ihnen ermittelten Wert der Variablen $r$ in die in c) angeführte Gleichung ein! Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass der so erhaltene Ausdruck das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen ist!

a) $a_1 = 0, a_2 = 6, a_3 = 18$

b) $s_1 = 0, s_2 = 6, s_3 = 24$

c) Einsetzen von $s_3$ ergibt $s_3 = 24 = 3^3 + r \cdot 3 \rightarrow r = -1$

d) Induktionsanfang für $n = 1$: $a_1 = 0 = 1^3 - 1 = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + 3k(k-1) = k^3 - k$
Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt dann: $a_1 + ... + 3k(k-1) + 3(k+1)k = (k+1)^3 - k - 1$
Induktionsbeweis

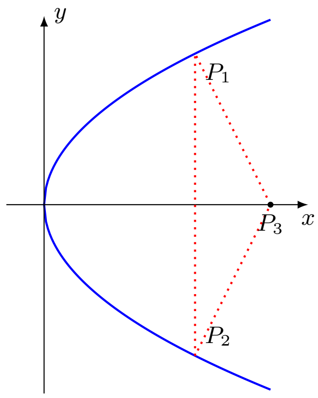
$$a_1 + ... + 3k(k-1) + 3(k+1)k = k^3 - k + 3(k+1)k = k^3 + 3k^2 + 2k =$$
$$= k^3 + 3k^2 + 2k + k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k+1)^3 - k - 1$$

**Aufgabe 2**
Durch die Gleichung $y^2 = 4x$ ist eine Parabel gegeben.

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte dieser Parabel, und zeichnen Sie die Kurve im Intervall $0 \leq x \leq 6$!

b) Eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 8$) schneidet die Parabel in den Punkten $P_1$ und $P_2$.
Ermitteln Sie die Koordinaten von $P_1$ und $P_2$ in Abhängigkeit von $t$!

c) Der Punkte $P_3(6; 0)$ bestimmt mit diesen Punkten ein gleichschenkliges Dreieck $P_1P_2P_3$. Bestimmen Sie $t$ so, dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat!

a) 

b) für $x = t$ wird $y^2 = 4t \rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{4t}$
Punktkoordinaten $P_1(t, \sqrt{4t}), P_2(t, -\sqrt{4t})$

c) Dreieck $\Delta P_1P_2P_3$ hat die Grundseite $\overline{P_1P_2}$ und die Höhe $h = 6 - t$.
Ansatz für Flächeninhalt: $A = 2(6 - t) \cdot 2\sqrt{4t} = (6 - t)\sqrt{4t}$
1.Ableitung $y' = \frac{3(2-t)}{\sqrt{t}}$, 2.Ableitung $y'' = \frac{-3(t+2)}{2\sqrt{t^3}}$
1.Ableitung Null setzen ergibt

$$0 = \frac{3(2-t)}{\sqrt{t}} \rightarrow t = 2; f''(2) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

Für $t = 2$ hat das Dreieck maximalen Flächeninhalt mit $A = 8\sqrt{2}$ FE.

**Aufgabe 3**
Bei einer Übung der GST im Fallschirmspringen bildet der Beobachtungspunkt $O$ den Ursprung eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems.
Ein geöffneter Fallschirm, dessen Bewegung als geradlinig angesehen werden kann, wird nacheinander in den Punkten $P_1(0; 0; 600)$ und $P_2(120; 90; 450)$ beobachtet. (Koordinateneinheit: 1 m)

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade durch $P_1$ und $P_2$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des voraussichtlichen Landepunktes $P_0$ des Fallschirms in der xy-Ebene!

c) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{OP_0}$!

d) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle\left(\overrightarrow{OP_0}, \vec{j}\right)$!

e) Berechnen Sie den Betrag der durchschnittlichen Bahngeschwindigkeit des Fallschirmes in ms$^{-1}$, wenn er die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in 60 s zurücklegt.

a) Geradengleichung durch $P_1, P_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ -150 \end{pmatrix}$

b) für den Landepunkt $P_0$ wird $z = 0$ und somit $0 = 600 - 150t \rightarrow t = 4$
Landepunkt $P_0(480; 360; 0)$.

c) Entfernung $|\overline{OP_0}| = \sqrt{480^2 + 360^2 + 0^2} = 600$ m

d)

$$\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{OP_0}, \vec{j}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 480 \\ 360 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{600 \cdot 1} = \frac{360}{600} = 0{,}6 \rightarrow \measuredangle\left(\overrightarrow{OP_0}, \vec{j}\right) = 53{,}1^\circ$$

e) Länge der Strecke $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{120^2 + 90^2 + 150^2} \approx 212$ m und somit für die Geschwindigkeit $v = \frac{212 \text{ m}}{60 \text{ s}} \approx 3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**Aufgabe 4**
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = f(x) = \sqrt{16 - 2x} - 2 \;;\; (x \in \mathbb{R}; x \leq 8)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

b) Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle dieser Funktion!

| $x$ | -4,5 | 0 | | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 1 | |

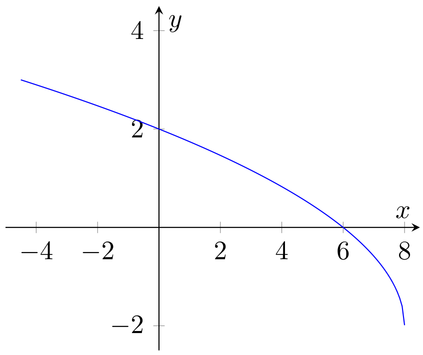
c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-4{,}5 \leq x \leq 8$!

d) Die Koordinatenachsen und das Bild der Funktion begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Flächeninhalt!

a) Nullstelle $0 = \sqrt{16-2x} - 2 \rightarrow 16 - 2x = 4 \rightarrow x = 6$

b)

| $x$ | -4,5 | 0 | 3,5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 1 | -2 |

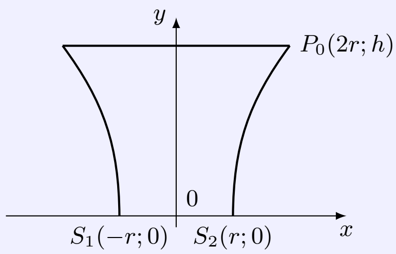
c) 


d)

$$A = \int_0^6 (\sqrt{16-2x} - 2)dx = \left[ -\frac{2\sqrt{2}}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}} - 2x \right]_0^6 = \frac{20}{3} \quad FE$$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 5.1.**




$(r > 0; h > 0)$ , Skizze (nicht maßstäblich)
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Rotationshyperboloids.
Die Rotation erfolgt um die y-Achse. $S_1$ und $S_2$ sind die Scheitelpunkte der den Achsenschnitt begrenzenden Hyperbel.

a) Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der durch die Punkte $S_1, S_2$ und $P_0$ gegebenen Hyperbel auf!

b) Berechnen Sie das Volumen des Hyperboloids durch Integration!

c) Ein weiterer Punkt der Hyperbel ist $P_M(x_M; \frac{h}{2})$ $(x_M > 0)$
Berechnen Sie $x_M$!

d) In der Praxis berechnet man das Volumen V eines Hyperboloids mit Hilfe der Formel

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4A_M)$$

Hierbei bedeuten:
$A_1$ ... Inhalt der Grundfläche
$A_2$ ... Inhalt der Deckfläche
$A_M$ ... Inhalt der parallel zur Grundfläche liegenden Schnittfläche in der Höhe $\frac{h}{2}$
Weisen Sie nach, dass man durch Anwendung dieser Formel dasselbe Ergebnis wie im Teil b) dieser Aufgabe erhält!

a) Hyperbelgleichung mit Scheitel $S(r;0)$ und Punkt $P_0(2r;h)$, Halbachse ist $a=r$

$$\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{4r^2}{r^2}-\frac{h^2}{b^2}=1\rightarrow b^2=\frac{h^2}{3}$$

Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{r^2}-\frac{3y^2}{h^2}=1$

b) Das Hyperboloid entsteht durch Rotation der Hyperbel um die y-Achse.
Umkehrfunktion $g^2(y)=x^2=r^2\left(1+\frac{3y^2}{h^2}\right)$

$$V=\pi\int_0^h g^2(y)dy=\pi\int_0^h (r^2\left(1+\frac{3y^2}{h^2}\right)dy=\pi\left[\frac{r^2y^3+r^2h^2}{h^2}\right]_0^h=2\pi\cdot hr^2$$

c) Punkt $P_M(x_M;\frac{h}{2})$ einsetzen

$$\frac{x^2}{r^2}-\frac{3(\frac{h}{2})^2}{h^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{r^2}=\frac{7}{4}\rightarrow x=\pm\frac{r}{2}\sqrt{7}$$

d) Radien der Kreise $A_1...r$, $A_2...2r$ und $A_M...\frac{r}{2}\sqrt{7}$ (siehe Teilaufgabe c)

$$V=\frac{h}{6}\left(\pi r^2+\pi(2r)^2+4\cdot 2\pi(\frac{r}{2}\sqrt{7})^2\right)=\pi\cdot r^2\frac{h}{6}(1+4+7)=2\pi\cdot r^2h$$

Die gegebene Formel kann angewendet werden.

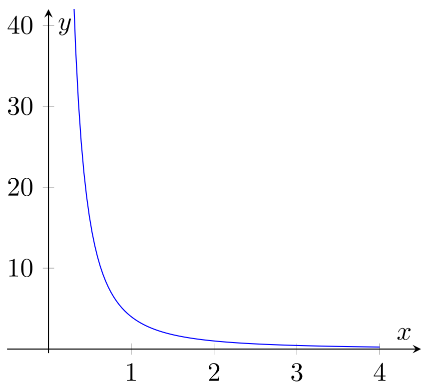
**Aufgabe 5.2.**
Gegeben sind Funktionen mit Gleichungen der Form

$$y=f(x)=\frac{a}{x^2}\ ;\ (x\in\mathbb{R};x>0;a\in\mathbb{R};a>0)$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y=\frac{a}{x^2}$ für $a=4$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem im Intervall $0<x\leq 4$!

b) Durch das Bild jeder Funktion $y=f(x)=\frac{a}{x^2}$, die x-Achse und die Geraden $x=2$ und $x=3$ wird eine Fläche begrenzt!
Berechnen Sie den Inhalt $A$ dieser Fläche in Abhängigkeit vom Parameter $a$!

c) An das Bild einer beliebigen Funktion $y=f(x)=\frac{a}{x^2}$ wird im Punkte $P_0(1;a)$ die Tangente gelegt.
Zeigen Sie, dass die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse von $a$ unabhängig ist!




a)

b)

$$A=\int_2^3\left(\frac{a}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{a}{x}\right]_2^3=\frac{a}{6}\quad FE$$

c) 1.Ableitung $y'=-\frac{2a}{x^3}$ ergibt für Punkt $P_0(1;a)$ den Anstieg $m=-2a$
Einsetzen von $P_0$ in $y=-2ax+n$ ergibt $n=3a$ und die Tangentengleichung $t:y=-2ax+3a$
Nullstelle der Tangente ist $x_N=\frac{3}{2}$ und unabhängig vom Parameter a.

**Aufgabe 5.3.**
Ein Druckbehälter für eine chemische Reaktion besteht aus einem Zylinder, der beiderseits durch angesetzte Halbkugeln abgeschlossen ist.
Der zylindrische Teil soll ein Volumen von $V_z$ m$^3$ erhalten.
Um Wärmeverluste während der Reaktion gering zu halten, soll die gesamte Oberfläche möglichst klein sein. (Die Wandstärke des Behälters ist bei der Rechnung nicht zu berücksichtigen.)

a) Bestimmen Sie den Radius $r$ des Zylinders in Abhängigkeit von $V_z$ für den Fall, dass der gesamte Oberflächeninhalt des Druckbehälters minimal wird!

b) Weisen Sie nach, dass bei minimalem Oberflächeninhalt des Druckbehälters das Verhältnis von Radius $r$ und Höhe $h$ des Zylinders $1 : 4$ beträgt!

a) Oberfläche des Druckbehälters besteht aus dem Zylindermantel und zwei Halbkugeln. Mit dem Radius $r$ und der Zylinderhöhe $h$ wird

$$A = A_Z + 2A_{HK} = 2\pi \cdot rh + 4\pi \cdot r^2$$

Die Nebenbedingung für das Zylindervolumen $V = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$ einsetzen

$$A = 2\pi \cdot r\frac{V}{\pi r^2} + 4\pi \cdot r^2 = \frac{2V}{r} + 4\pi \cdot r^2$$

1.Ableitung bilden und gleich Null setzen

$$A' = 8\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

Die 2.Ableitung $A'' = \frac{4V}{r^3} + 8\pi$ wird für alle positiven $r$ größer als Null, so dass ein lokales Minimum vorliegt.

b) Aus der Volumengleichung und dem gefundenen $r^3$ wird

$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{V}{\pi r^2}}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi \frac{V}{4\pi}} = 4$$

d.h. die Höhe $h$ ist vier Mal so groß wie der Radius $r$.

## 1.33 Abituraufgaben 1973

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Bei einer gemeinsamen Übung der Luft- und Seestreitkräfte unserer NVA ortet eine Radarstation der Küstenüberwachung ein Schiff nacheinander in den Punkten $P_1(30;12;0)$ und $P_2(22;8;0)$.
Der Kurs des Schiffes verlaufe geradlinig.
Zur Bekämpfung des Schiffes wird von einem Flugzeug aus im Punkt $P_3(10;7;3)$ eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen. Die Flugbahn der Rakete wird als geradlinig angenommen.
Richtungsvektor dieser Flugbahn ist $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (Koordinatenangaben in km)

a) Ermitteln Sie je eine Parametergleichung für den Schiffskurs und für die Flugbahn der Rakete!

b) Das Schiff wird von der Rakete im Punkt $S$ getroffen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bahn der Rakete und dem Kurs des Schiffes!

d) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihre Flugzeit vom Abschusspunkt bis zum Treffpunkt 7 Sekunden beträgt?

a) Richtungsvektoren der 2 Geraden: $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, womit die Geradengleichungen sind

$$g(P_1P_2) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} ; h(P_3) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) für Berechnung des Schnittpunkts Geradengleichungen gleich setzen und Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$30 - 8t = 10 + 6s; \qquad 12 - 4t = 7 - 2s; \qquad 0 = 3 - 3s$$

Aus Gleichung III folgt $s = 1$ und mit Gleichung II $t = \frac{7}{4}$.
Kontrolle in der 1.Gleichung bestätigt das Ergebnis. Einsetzen von $t$ oder $s$ in die Geradengleichungen ergibt den Schnittpunkt $S(16;5;0)$

c) Beträge der Richtungsvektoren der Geraden sind $\left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{80}$ und $\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 7$

Eingeschlossener Winkel

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{7\sqrt{80}} = \frac{-40}{7\sqrt{80}} = -\frac{2\sqrt{5}}{7}$$

Der Winkel $\alpha$ ist damit gleich $129{,}7°$.

d) Entfernung Abschusspunkt zum Treffpunkt $|\overline{P_3S}| = \sqrt{(16-10)^2 + (5-7)^2 + (0-3)^2} = 7$ km.
Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t} = 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

**Aufgabe 2**
Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

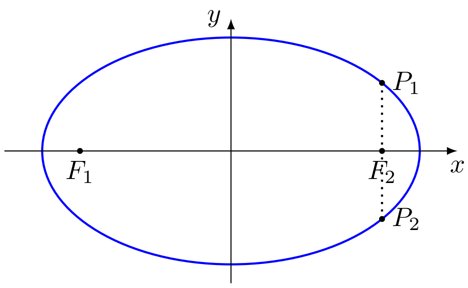
a) Konstruieren Sie außer den Scheitelpunkten mindestens acht Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie die Ellipse!

b) Berechnen Sie die Länge der Sehne, die in einem Brennpunkt dieser Ellipse auf der x-Achse senkrecht steht!

c) Die Brennpunkte der Ellipse seien Scheitelpunkte einer Hyperbel.
Eine Asymptote dieser Hyperbel hat den Anstieg $m = \sqrt{3}$. Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel an!

a) Halbachsen $a = 5, b = 3$, lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

b) Schnittpunkte der Sehne senkrecht zu einem Brennpunkt haben Abszisse $x = 4$.
$\frac{16}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \to y_1 = \frac{9}{5}, y_2 = -\frac{9}{5}$
Die Schnittpunkte sind $P_1(4; \frac{9}{5}), P_2(4; -\frac{9}{5})$ und die Sehne hat die Länge $\frac{18}{5} = 3{,}6$.




c) Halbachse der Hyperbel ist $a = 4$. Die allgemeine Asymptotengleichung ist $y = \pm\frac{b}{a}x$.
$m = \sqrt{3} = \frac{b}{a} \to b = 4\sqrt{3}$
Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

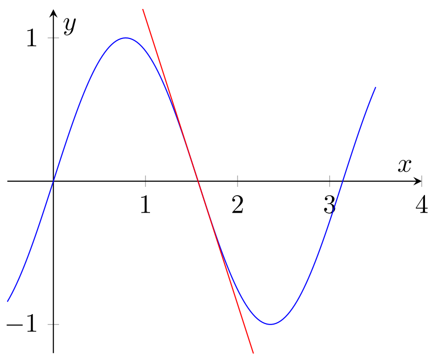
**Aufgabe 3**
Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$y = f(x) = \sin 2x \; ; \; (x \in \mathbb{R})$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1\left(\frac{\pi}{2}; y_1\right)$!

c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.




b,c) Für $P_1$ (Nullstelle) werden die Koordinaten $P_1(\frac{\pi}{2}; 0)$
1.Ableitung $y' = 2\cos(2x)$ ergibt in $P_1$ den Anstieg
$y'(\frac{\pi}{2}) = m = -2$
Einsetzen von $P_1$ in $y = -2x + n$ ergibt $n = \pi$ und die Tangentengleichung $t : y = -2x + \pi$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$

**Aufgabe 4**
Durch die Gleichung

$$y = f(x) = e^x \cdot (x^2 - a)\ ;\ (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R})$$

sind nichtrationale Funktionen gegeben.

a) Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung!

b) Für $a = 3$ hat das Funktionsbild zwei lokale Extrempunkte.
Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktionen für $a < -1$ keine Extrema haben!

a) 1.Ableitung $y' = e^x(x^2 + 2x - a)$, 2.Ableitung $y'' = e^x(x^2 + 4x - a + 2)$

b) Ableitungen für $a = 3$: 1.Ableitung $y' = e^x(x^2 + 2x - 3)$, 2.Ableitung $y'' = e^x(x^2 + 4x - 1)$
1.Ableitung Null setzen, ergibt

$$0 = e^x(x^2 + 2x - 3) \rightarrow 0 = x^2 + 2x - 3 \rightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$$

2.Ableitung von $x_1$ ist $f''(x_1)4e > 0$, d.h. die gesuchte Minimumstelle
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes $P_{\min}(1, 4e)$!

c) für ein Extremum muss $y' = e^x(x^2 + 2x - a)$ eine Nullstelle besitzen, d.h. $0 = x^2 + 2x - a$ eine Lösung besitzen

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + a}$$

hat aber nur eine Lösung, wenn die Diskriminante $1+a \geq 0$ ist. Für $a < -1$ existieren damit keine Extrema.

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 5.1.**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1\ ;\ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad y = g(x) = \ln\frac{x}{2}\ ;\ (x \in \mathbb{R}; x > 0)$$

a) Ergänzen Sie die vorgegebene Wertetafel für $y = g(x)$!

| $x$ | 4 | 2 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | -0,69 | |

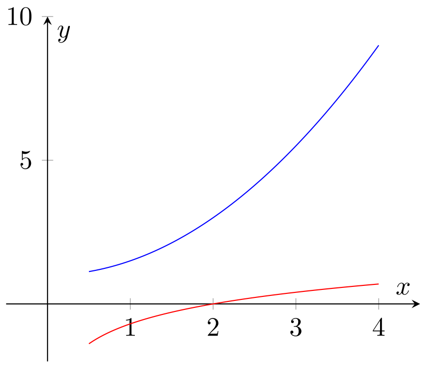
b) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im Intervall $0{,}5 \leq x \leq 4{,}0$ in einem Koordinatensystem!

c) Schneidet eine Parallele zur y-Achse die Bilder der Funktionen $f$ und $g$ in je einem Punkt, so stellt $h(x) = f(x) - g(x)$ den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie diejenige Abszisse $x_E$, für die dieser Abstand minimal wird!
Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

a)

| $x$ | 4 | 2 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,69 | 0 | -0,69 | -1.39 |

b)



c) $d = \frac{x^2}{2} + 1 - \ln\frac{x}{2}$ hat die Ableitungen $d' = x - \frac{1}{x}$ und $d'' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ (Minima!)
Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt $0 = x - \frac{1}{x}$ im Definitionsbereich $x_E = 1$
Der minimale Abstand ist $d = \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 2{,}19$ für die Stelle $x_E = 1$.

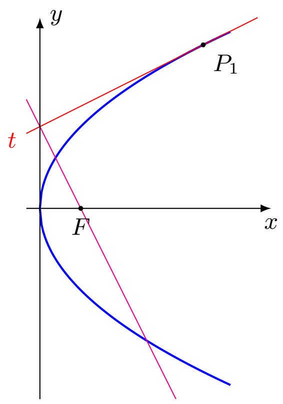
**Aufgabe 5.2.**
Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 6x$.

a) Konstruieren Sie mindestens sechs Punkte dieser Parabel!

b) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an diese Parabel im Punkt $P_1(6;6)$ auf!

c) Durch den Brennpunkt $F$ dieser Parabel verläuft eine Gerade, die senkrecht auf der unter b) bestimmten Tangente steht.
Stellen Sie die Gleichung dieser Geraden auf!

d) Für jede Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ gilt:
Die Tangente an die Parabel in einem beliebigen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit $x_0 \neq 0$ schneidet die y-Achse im Punkt $A(0; \frac{y_0}{2})$.
Weisen sie nach, dass die Gerade durch $A$ und $F$ auf dieser Tangente senkrecht steht!




a)

b) 1.Ableitung $y' = \frac{3}{\sqrt{6x}}$ ergibt im Punkt $P_1$ den Anstieg $f'(6) = \frac{1}{2}$.
Einsetzen der Koordinaten von $P_1$ in $y = \frac{1}{2}x + n$ ergibt für $n = 3$.
Tangentengleichung $t: y = \frac{1}{2}x + 3$

c) Gerade senkrecht zur Tangente hat Anstieg $m = -2$, durch Brennpunkt $F(1{,}5; 0)$ wird für die Geradengleichung $g: y = -2x + 3$

d) 1.Ableitung $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ ergibt im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ den Tangentenanstieg

$$m_t = f'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$$

Für die Gerade $g$ durch $A(0; \frac{y_0}{2})$ und $F(\frac{p}{2}; 0)$ ergibt sich der Anstieg

$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{y_0}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{-y_0}{p}$$

Da $m_t \cdot m_g = -1$ ist, sind die Gerade von $F$ nach $A$ und die Tangente senkrecht zueinander.

**Aufgabe 5.3.**
Gegeben ist eine Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x} \;;\; (x \in \mathbb{R}; x \neq 1)$$

a) Berechnen Sie die Stellen $x_1$ und $x_2$, an denen die erste Ableitung dieser Funktion den Wert 1 hat!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f$ an der Stelle $x_0 = \frac{3}{2}$ lokal monoton wachsend ist!

c) Bilden Sie die 2., die 3. und die 4.Ableitung der Funktion!
Geben Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ an!
(Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Fakultätsschreibweise zu verwenden.)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ richtig ist!

a) 1.Ableitung $y = \frac{1}{(1-x)^2}$, die erste Ableitung wird gleich 1 für

$$1 = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow (1-x)^2 = 1 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$$

b) Eine Funktion f ist an einer Stelle lokal monoton wachsend, wenn die 1.Ableitung größer als Null ist.
$f'(x_0) = f'(\frac{3}{2}) = 4 > 0$, d.h. die Funktion ist lokal monoton wachsend.

c) Ableitungen $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$, $y''' = \frac{3!}{(1-x)^4}$, $y^{IV} = \frac{4!}{(1-x)^5}$
Vermutung für die $n$-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Induktionsanfang für $n = 1$: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$
Induktionsanfang für $n = k$ gilt: $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$
Induktionsanfang für $n = k+1$ gilt dann: $f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$
Induktionsbeweis

$$(f^{(k)}(x))' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' = k! \cdot \frac{-(k+1)\cdot(-1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

## 1.34 Abituraufgaben 1974

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad , \quad y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ihre Bilder schneiden einander in den Punkten $P_1$ und $P_2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $P_1$ und $P_2$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes für das Bild der Funktion $g$.

c) Die Bilder der gegebenen Funktionen begrenzen eine Fläche vollständig. Fertigen Sie eine Skizze an! Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

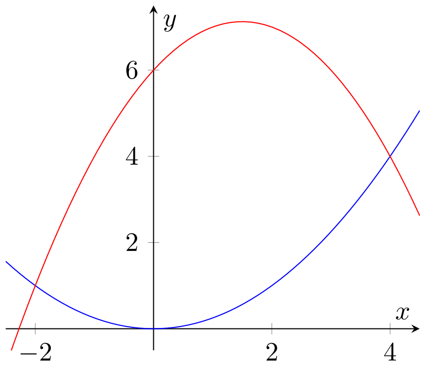
a) Funktionsterme gleichsetzen und Gleichung lösen:

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \rightarrow 0 = x^2 - 2x - 8$$

$\rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$. Schnittpunkte der Funktionen $P_1(-2; 1)$, $P_2(4; 4)$

b) 1.Ableitung $g'(x) = -x + \frac{3}{2}$, 2.Ableitung $g''(x) = \frac{3}{2}$ Nullstelle der 1.Ableitung $x_E = \frac{3}{2}$, da 2.Ableitung stets größer Null ist, liegt ein lokales Minimum vor. $\rightarrow$ Minimum $P_{Min}(\frac{3}{2}; \frac{57}{8})$

$$\left| \int_{-2}^{4} f(x) - g(x)dx \right| = \left[ -\frac{3}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 6x \right]_{-2}^{4} = 27 \text{ FE}$$

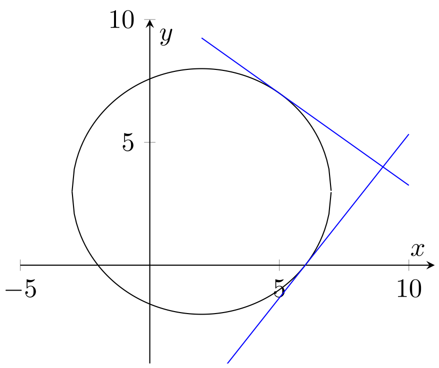
c) 


**Aufgabe 2**
In der x-y-Ebene ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2; 3)$ gegeben, der durch den Punkt $P_1(5; 7)$ geht.

a) Berechnen Sie den Radius, und stellen sie die Gleichung des Kreises auf!

b) Der Kreis schneidet den positiven Teil der x-Achse im Punkt $P_0(x_0; y_0)$. Berechnen Sie $x_0$.

c) Weisen Sie nach, dass die in $P_0$ und $P_1$ an den Kreis gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen!

a) 


Abstand Mittelpunkt-Kreispunkt $d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 5$.
Der Radius des Kreises ist $r = 5$.
Kreisgleichung: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

b) $y = 0$ in Kreisgleichung einsetzen, ergibt

$$(x-2)^2 + 9 = 25 \rightarrow (x-2)^2 = 16 \rightarrow x_1 = -2; x_2 = 6$$

Der Schnittpunkt des Kreises mit der positiven x-Achse ist $P_2(6; 0)$.

c) Der Anstieg der Geraden (Radius) $MP_1$ ist $\frac{4}{3}$. Damit hat die Tangente in $P_1$ den Anstieg $m_1 = -\frac{3}{4}$. Gleichung der Tangenten: $y = -\frac{3}{4}x + 10{,}75$.
Anstieg der Geraden (Radius) $MP_2$ ist $-\frac{3}{4}$. Tangentenanstieg in $P_2$ den Anstieg $m_2 = \frac{4}{3}$. Gleichung der Tangenten: $y = \frac{4}{3}x - 8$.
Da $m_1 \cdot m_2 = 1$ gilt, sind beide Tangenten zueinander senkrecht.

**Aufgabe 3**
In einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind die Punkte $A(-2; 8; 2)$ und $B(-4; 10; 10)$ gegeben.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte A und B geht!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $C(-2; 2; 8)$ nicht auf der Geraden g liegt!

c) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle AOC$! (Dabei ist O der Ursprung des Koordinatensystems.)

d) Weisen Sie nach, dass das Viereck $OABC$ ein Parallelogramm ist! Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Parallelogramms!

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Einsetzen des Punktes C in die Geradengleichung ergibt die 3 Gleichung

$$\begin{aligned} -2 &= -2 - 2t \to t = 0 \\ 2 &= 8 + 2t \to t = -3 \\ 8 &= 2 + 8t \to t = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Da die drei Lösungen für den Parameter t verschieden sind, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B.

c)

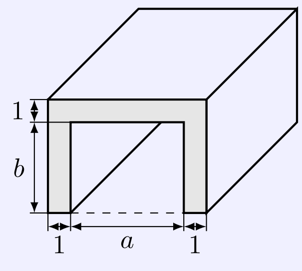
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{72}\sqrt{216}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \alpha = 30^\circ$$

d) sind je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, d.h. ihre Vektoren identisch, ist das Viereck $OABC$ ein Parallelogramm vor:

$$\vec{OA} = \vec{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{OC} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4**

Zum Schutz gegen mechanische Beschädigungen werden unterirdisch verlegte Kabel mit Formstücken aus Beton so abgeschirmt, dass die Kabel in einem Hohlraum liegen. (siehe Skizze)
Der Hohlraum muss eine rechteckige Querschnittsfläche von 18 $dm^2$ Inhalt haben. Wand- und Deckenstärke betragen jeweils 1 dm.
Für die Herstellung der Formstücke soll möglichst wenig Beton verbraucht werden, d.h., der Inhalt der in der Skizze gefärbten Fläche soll minimal werden.




(Skizze nicht maßstäblich, Maßangabe in Dezimeter)

Berechnen Sie für diesen Fall die Abmessungen $a$ und $b$ der Querschnittsfläche des Hohlraums!

Ansatz für die Querschnittsfläche: $A = (a+2)(b+1) - ab$
Mit der Nebenbedingung $ab = 18$ dm$^2$ wird $A = a + 2 + \frac{36}{a}$
1.Ableitung: $A' = 1 - \frac{36}{a^2}$ hat die Nullstellen $a = \pm 6$, wobei die negative Lösung entfällt.
Da für die 2.Ableitung $A'' = \frac{72}{a^3} > 0$ ist, liegt ein lokales Minimum vor.
Die Querschnittsfläche hat die Maße $a = 6$ dm und $b = 3$ dm.

**Aufgabe 5**

a) Lösen Sie die Gleichung
$$\sqrt{2x+1} = 1 - x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

b) Gegeben ist eine Funktion f durch
$$y = f(x) = e^{3x} \cdot \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
Bilden Sie die erste Ableitung!

c) Gegeben ist eine Funktion g durch
$$y = g(x) = 1 - \ln x \qquad (x \in \mathbb{R}; x > 0)$$
Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

a)
$$\sqrt{2x+1} = 1 - x \qquad \rightarrow \qquad 2x + 1 = 1 - 2x + x^2$$
$$0 = x(x-4) \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0; x_2 = 4$$
$x_2$ entfällt, da es eine Scheinlösung ist. Die Lösung der Gleichung ist $x = 0$.

b)
$$\left(e^{3x}\sin x\right)' = 3e^{3x}\sin x + e^{3x}\cos x = e^{3x}(3\sin x + \cos x)$$

c) $0 = 1 - \ln x \rightarrow e^{\ln x} = e^1 \rightarrow x = e$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Gegeben ist die Funktion f durch
$$y = f(x) = \frac{1}{2} + \cos(2x) \;;\; (x \in \mathbb{R}) \;;\; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

b) Ermitteln Sie die Funktionswerte $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$!

c) Das Bild der Funktion $f$ hat genau einen lokalen Maximumpunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten!

d) Skizzieren Sie unter Verwendung der berechneten Werte das Bild der Funktion!

e) Das Bild der Funktion $f$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche allseitig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

a) Nullstellen im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$$0 = \frac{1}{2} + \cos(2x) \rightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \rightarrow 2x_1 = 120° + 360°k; 2x_2 = 240° + 360°k$$

$$x_1 = 60° + 180°k; x_2 = 120° + 180°k \to x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}; x_2 = -60° = -\frac{\pi}{3}$$

b)

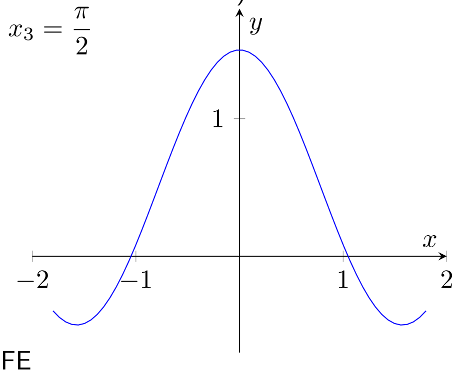
$$f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \cos\left(2 \cdot (-\frac{\pi}{4})\right) = \frac{1}{2} \qquad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \cos\pi = -\frac{1}{2}$$

c) 1.Ableitung $y' = -2\sin(2x)$, 2.Ableitung $y'' = -4\cos(2x)$
Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt

$$-2\sin(2x) = 0 \to 2x = k\pi \to x = k\frac{\pi}{2} \to x_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{\pi}{2}$$

Kontrolle in der 2.Ableitung ergibt nur für $x_2$ einen Wert kleiner Null ($y''(0) = -4 < 0$), so dass dort das lokale Maximum $E(0; \frac{3}{2})$ liegt.

d)




e) die Koordinatenachsen und die Funktion schließen im Untersuchungsintervall zwei gleich große Flächen ein. Für die rechte Fläche wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos(2x)\right) dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}957 \text{ FE}$$

**Aufgabe 6.2.**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ hat die Folge der Partialsummen $(s_n)$. Eine Bildungsvorschrift für $(s_n)$ sei gegeben durch

$$s_n = \frac{2n}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder $s_1$, $s_2$ und $s_3$ der Folge $(s_n)$ an. Weisen Sie nach, dass die Folge $(s_n)$ monoton wachsend ist.

b) Geben Sie den Grenzwert g der Folge $(s_n)$ an!

c) Wie viele Glieder der Folge $(s_n)$ sind kleiner als 1,94?

d) Berechnen Sie die Glieder $a_1$, $a_2$ und $a_3$ und das allgemeine Glied $a_n$ der Zahlenfolge $(a_n)$!

a) $s_1 = 2$, $s_2 = \frac{4}{3}$, $s_3 = \frac{3}{2}$
Monotonieuntersuchung

$$s_n - s_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2n^2 - (2n-2)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$$

da Nenner und Zähler stets positiv sind, ist die Differenz der Partialsummenglieder größer 0, d.h. die Partialsummenfolge ist monoton wachsend.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2}{n \cdot (1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = 2$$

c)

$$s_n < 1{,}94 \to \frac{2n}{n+1} < 1{,}94 \to 0{,}06n < 1{,}94 \to n < \frac{97}{3} \approx 32{,}3...$$

Die ersten 32 Glieder der Partialsummenfolge $s_n$ sind kleiner als 1,94.

d) aus der Monotonieuntersuchung von a) ergibt sich

$$s_n - s_{n-1} = a_n \to a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$ und $a_3 = \frac{1}{6}$

**Aufgabe 6.3.**
Gegeben ist eine Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte dieser Hyperbel!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

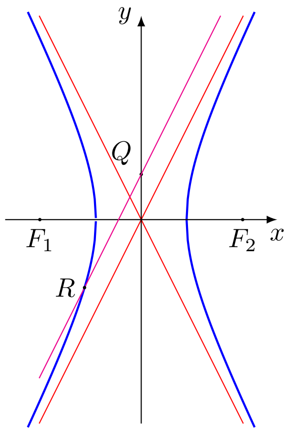
b) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an, und zeichnen Sei die Asymptoten ein!

c) Die Parallele zu der Asymptote mit positivem Anstieg durch den Punkt $Q(0;2)$ schneidet die Hyperbel im Punkt $R$. Berechnen Sie die Koordinaten von $R$.

d) Beweisen Sie, dass für jede Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gilt: Jede nicht durch den Ursprung gehende Parallele zur Asymptote mit positivem Anstieg schneidet die Hyperbel in genau einem Punkt.




a) Halbachsen: $a = 2; b = 4$, lineare Exzentrizität $e = \sqrt{20} \approx 4{,}472$.

b) allgemeine Asymptotengleichung ergibt $y = \pm 2x$

c) Gerade durch Q: $y = 2x + 2$. Einsetzen in der Hyperbelgleichung liefert

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(2x+2)^2}{16} = 1 \rightarrow 4x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 16 \rightarrow -8x - 4 = 16 \rightarrow x_R = -\frac{5}{2}; y_R = -3$$

der Schnittpunkt der Geraden durch Q und der Hyperbel ist $R(-\frac{5}{2}; -3)$.

d) allgemeine Asymptotengleichung $y = \pm\frac{b}{a}x$, für eine parallele Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft, wird $y = \frac{b}{a}x + c$, wobei c reell und verschieden Null ist.
Einsetzen in die Hyperbelgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\frac{b}{a}x + c)^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{bc}{a}x + c^2}{b^2} &= 1 \\
b^2x^2 - a^2(\frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{bc}{a}x + c^2) &= a^2b^2 \\
-2abcx &= a^2b^2 + a^2c^2 \\
x &= -\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2abc}
\end{aligned}$$

Da nur eine Lösung existiert, schneidet die Gerade die Hyperbel in genau einem Punkt. w.z.z.w.

## 1.35 Abituraufgaben 1975

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
In einem Koordinatensystem $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ist ein Dreieck durch die Eckpunkte $O(0;0;0), A(2;2;1)$ und $B(1;4;-1)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Seiten $\overline{OA}$ und $\overline{AB}$ gleiche Länge haben!

b) Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

d) Durch die Punkte $A$ und $B$ geht die Gerade $g$. Geben Sie eine Gleichung für $g$ an!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$, in dem diese Gerade die y-z-Ebene durchstößt!

a) Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
Längengleichheit der Seiten $|\overline{OA}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3 = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = |\overline{AB}|$

b) $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind senkrecht zueinander, da das Skalarprodukt $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$ ist. Der rechte Winkel liegt bei $O$.

c) mit den Katheten $\overline{OA}$ und $\overline{AB}$ wird für die Fläche $A = \frac{1}{2}|\overline{OA}||\overline{AB}| = 4{,}5$ FE

d) Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
Im Durchstoßpunkt der y-z-Ebene ist $x = 0$. Ansatz für Punkt $S_{xy}(0;y,z)$:
Gleichsetzen des Ortsvektors von $S_{xy}$ mit der Geraden $g$ ergibt für die x-Koordinate den Parameter $t = 2$ und somit die Koordinaten $S_{xy}(0;6;-3)$.

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{4}{x^2} + 1 \; ; \; (x \in \mathbb{R}; x \neq 0)$$

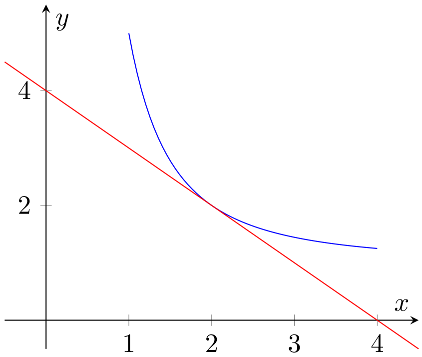
a) Berechnen Sie die Ordinaten der Punkte $P_1(1;y_1)$ und $P_2(4;y_2)$!
Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $1 \leq x \leq 4$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion $f$, von der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ eingeschlossen wird!

c) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $f$!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$, in dem das Bild der Funktion $f$ den Anstieg $m = -1$ hat!

d) Stellen Sie die Gleichung der im Punkte $P_0$ an das Bild der Funktion gelegten Tangente auf!

a) für die Punkte $P_1(1;y_1)$ und $P_2(4;y_2)$ ergibt sich $y = f(x) = \frac{4}{x^2} + 1$:
$y_1 = 5; y_2 = 2 \rightarrow P_1(1;5); P_2(4{,}2)$




$$A = \int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 1\right)dx = \left[4 - \frac{x}{4}\right]_1^4 = 6 \text{ FE}$$

c) 1.Ableitung $y' = -\frac{8}{x^3}$ gesucht ist $P_0$ mit m =-1, d.h.
$-1 = -\frac{8}{x^3} \to x = 2 \to P_0(2;2)$

d) Abstieg der Tangente in $P_0$ ist -1, Einsetzen des Punktes in $y = -x + n$ ergibt n = 4.
Tangentengleichung $t : y = -x + 4$

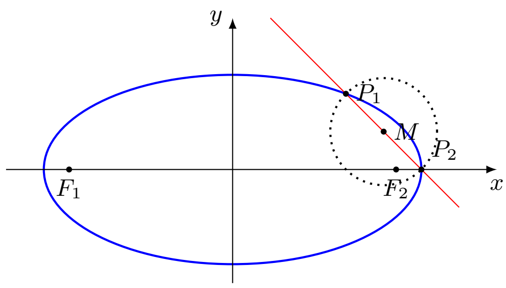
**Aufgabe 3**
Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 25$.

a) Ermitteln Sie die Halbachsen $a$ und $b$ sowie die lineare Exzentrizität $e$ der Ellipse!

b) Konstruieren Sie außer den Scheitelpunkten mindestens 12 Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie diese Ellipse!

c) Die Gerade mit der Gleichung $x+y-5 = 0$ schneidet die gegebene Ellipse in den Punkten $P_1$ und $P_2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $P_1$ und $P_2$!

d) Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist Durchmesser eines Kreises.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M$ dieses Kreises!
Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf!




a) Ellipsengleichung $x^2 + 4y^2 = 25 \to \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$
Halbachsen $a = 5, b = \frac{5}{2}$.
Lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4{,}33$

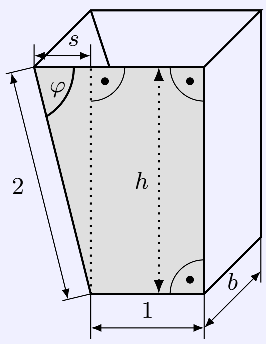
c) Geradengleichung $y = -x + 5$ in Ellipsengleichung einsetzen

$x^2+4(-x+5)^2 = 25 \to x^2-8x+15 = 0 \to x_1 = 3, x_2 = 5$

Die Schnittpunkte sind $P_1(3;2)$ und $P_2(5{,}0)$

d) Mittelpunkte des Kreises ist Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$, d.h. $M(4;1)$
Radius des Kreises $r = \sqrt{(4-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$
Kreisgleichung $(x-4)^2 + (y-1)^2)2$

**Aufgabe 4**
Ein Abfallcontainer hat die in der Skizze dargestellte Form.
Damit er bei konstanter Breite $b$ ein möglichst großes Fassungsvermögen erhält, muss der Inhalt der in der Skizze hervorgehobenen Seitenfläche maximal werden.
Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in Meter




a) Geben Sie die Höhe $h$ und die Strecke $s$ in Abhängigkeit vom Winkel $\varphi$ an!

b) Stellen Sie den Inhalt $A$ der hervorgehobenen Seitenfläche als Funktion des Winkel $\varphi$ dar!

c) Bestimmen Sei den Winkel $\varphi$ so, dass der Inhalt dieser Seitenfläche maximal wird!
Hinweis: Auf den Nachweis des Maximums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

a) Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 2 wird $h = 2\sin\varphi; s = 2\cos\varphi$

b) Fläche setzt sich aus Rechteck und rechtwinkligem Dreieck zusammen

$$A = 1 \cdot h + \frac{s \cdot h}{2} = 2\sin\varphi + \sin\varphi\sqrt{4 - 4\sin^2\varphi} = 2\sin\varphi + \sin 2\varphi$$

c) 1.Ableitung $A' = 4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 2$, Nullsetzen mit Substitution $u = \cos\varphi$ ergibt

$$0 = 4u^2 + 2u - 2 = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \to u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2}$$

$u_1$ entfällt, da Rücksubstitution $\varphi = 90°$ ergibt.
Für $u_2$ wird $u_2 = \frac{1}{2} = \cos\varphi \to \varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$.
Für einen Winkel $\varphi$ von $60°$ wird die Fläche maximal.

**Aufgabe 5**

a) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{o}; \vec{b} \neq \vec{o}$) schließen einen spitzen Winkel $\phi$ ein.
Ermitteln Sie $\phi$ für den Fall, dass

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$$

gilt!

b) Gegeben ist eine Funktion $f$ durch $y = f(x) = x \cdot \ln x$ ; $(x \in R; x > 0)$
Bilden Sie erste Ableitung $f'(x)$! Berechnen Sie $f'(1)$!

c) Geben sie alle reellen Zahlen $x$ an, für die der Term $\sqrt{0{,}1 - 2x}$ definiert ist!

d) Ermitteln Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{4n^3 - 7}$$

a) Nach Definition ist $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$.
Damit ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ und da der Winkel spitz sein soll $\alpha = 30°$.

b) Mit der Produktregel wird

$$y' = f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1; f'(1) = 1$$

c) Term ist definiert wenn $0{,}1 - 2x \geq 0$, d.h für alle reellen Zahlen $x \leq 0{,}05$

d) Grenzwert ist 0, da im Nenner die 3.Potenz von $n$ auftritt, im Zähler nur die zweite

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \text{ ; } (x \in \mathbb{R})$$

a) Bilden Sie die ersten drei Ableitung $f'(x), f''(x), f'''(x)$!

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Ableitungen der Funktion f gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

c) Berechnen Sie $f'(0), f''(0), f'''(0)$ und $f^{(n)}(0)$!
Diese Werte bilden eine Zahlenfolge $(a_n)$ mit

$$a_1 = f'(0); a_2 = f''(0); a_3 = f'''(0); ...; a_n = f^{(n)}(0); ...$$

Zeigen Sie für die Folge $(a_n)$, dass der Quotient aufeinanderfolgender Glieder $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstant ist!

d) Aus den Gliedern dieser Zahlenfolge $(a_n)$ lässt sich die unendliche geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bilden.
Berechnen Sie deren Summe $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$!

a) $y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}, y'' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}, y''' = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}x}$

b) Induktionsanfang für $n = 1$: $y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2^1} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $y^{(k)}) = \frac{1}{2^k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt dann: $y^{(k+1)} = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
Induktionsbeweis
$$(y^{(k)})' = \left(\frac{1}{2^k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)' = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = y^{(k+1)}$$

c) $f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = \frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{1}{8}$ und $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}$
mit den Gliedern $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}, a_n = \frac{1}{2^n}$ wird
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = \text{ konstant}$$

d) nach Teilaufgabe b) ist der Quotient der geometrischen Folge $q = \frac{1}{2}$, d.h.
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

**Aufgabe 6.2.**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch
$$y = f(x) = \cos\frac{x}{2} \ ; 0 \leq x \leq 2\pi \ (x \in \mathbb{R})$$

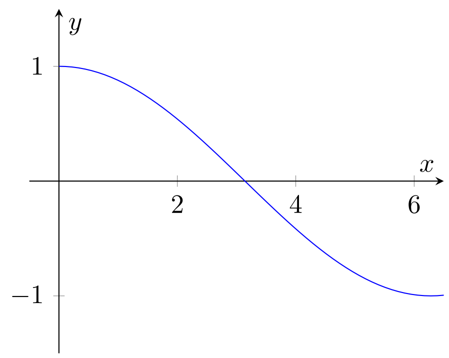
a) Berechnen Sie die Nullstelle $x_0$ der Funktion $f$! Skizzieren Sie das Bild von $f$!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P_0(x_0; 0)$ Wendepunkt ist!

c) Eine Fläche wird von den Koordinatenachsen und dem Bild von $f$ allseitig begrenzt.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

d) Eine Teilfläche wird von den Koordinatenachsen, dem Bild von $f$ und einer Parallelen zur y-Achse im Abstand $d$ $(0 < d < \pi)$ allseitig begrenzt.
Berechnen Sie $d$ so, dass der Inhalt dieser Teilfläche den Wert 1 hat!

a) Nullstelle $0 = \cos\frac{x}{2} \to \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to x = \pi \to P_0(\pi; 0)$, weitere Nullstellen sind nicht im Definitionsbereich



b) 1.Ableitung $y' = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, 2.Ableitung $y'' = -\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$, 3.Ableitung $y''' = \frac{1}{8}\sin\frac{x}{2}$
Einsetzen von $x_0 = \pi$ in die Ableitungen ergibt $f''(\pi) = 0, f'''(\pi) = \frac{1}{8} \neq 0$, womit $P_0$ Wendepunkt ist

c)

$$A = \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx = \left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 2 \quad FE$$

d)

$$A = 1 = \int_0^{d} \cos\frac{x}{2}dx = \left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{d} = 2\sin\frac{x}{d} \to \sin\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \to d = \frac{\pi}{3}$$

**Aufgabe 6.3.**
Eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ geht durch den Punkt $P_1(12; 12)$.

a) Geben Sie den Halbparameter $p$ dieser Parabel an!
Berechnen Sie den Anstieg $m_1$ der Tangente im Punkt $P_1$ an diese Parabel!

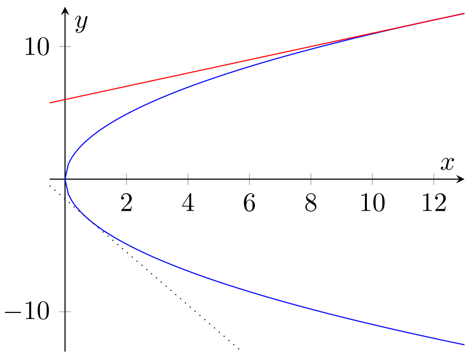
b) Skizzieren Sie diese Parabel und die in $P_1$ an die Parabel gelegte Tangente!

c) Es gibt genau eine Tangente an diese Parabel mit dem Anstieg $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes $P_2$, in dem diese Tangente die Parabel berührt!

d) Beweisen Sie, dass für jede Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ gilt:
Für die Ordinaten der Berührungspunkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ eines jeden Paares aufeinander senkrecht stehender Tangenten ist

$$y_1 \cdot y_2 = -p^2$$

a) Ansatz $y^2 = 2px$ und mit $P_1$ wird $12^2 = 2p \cdot 12 \to p = 6$
Parabelgleichung $y^2 = 12x$, Halbparameter $p = 6$. Anstieg über 1.Ableitung $y' = \frac{6}{\sqrt{12x}} \to y'(12) = \frac{1}{2} = m_1$
Tangentengleichung $t : y = \frac{1}{2}x + 6$



b)

c) Anstieg $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$ auf dem unteren Parabelast
$y' = -2 = -\frac{6}{\sqrt{12x}} \to x = \frac{2}{3} \to P_2(\frac{2}{3}; -2\sqrt{2})$
Tangentengleichung $y = -2x + \frac{4}{3} - 2\sqrt{2}$

d) 1.Ableitung $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$
an der Stelle $x_1$ gilt für den Anstieg $m_{x1} = \frac{p}{\sqrt{2px_1}}$
an der Stelle $x_2$ wird $m_{x2} = \frac{p}{\sqrt{2px_2}}$
da die Tangenten senkrecht aufeinander stehen, gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$ und

$$y_1 = \sqrt{2px_1} = \frac{p}{m_1}, y_2 = \sqrt{2px_2} = \frac{p}{m_2} \to y_1 \cdot y_2 = \frac{p \cdot p}{m_1 m_2} = -p^2$$

was zu zeigen war

## 1.36 Abituraufgaben 1976

**Pflichtaufgaben**

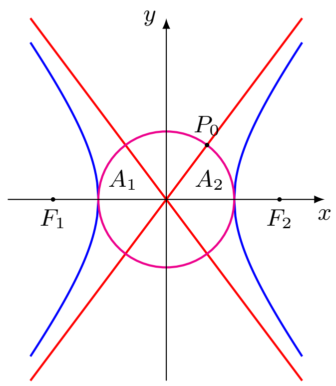
**Aufgabe 1**
Eine Hyperbel sei gegeben durch die Koordinaten ihrer Scheitelpunkte $A_1(-3;0)$ und $A_2(3;0)$ und ihrer Brennpunkte $F_1(-5;0)$ und $F_2(5;0)$.

a) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Hyperbel!
Zeichen Sie diese Hyperbel im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!

b) Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel und ihrer beiden Asymptoten an!

c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, geht durch die Scheitelpunkte der Hyperbel.
Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf!
Zeichnen Sie die Asymptoten und den Kreis in dasselbe Koordinatensystem wie die Hyperbel ein!

d) Dieser Kreis schneidet eine der Asymptoten im ersten Quadranten im Punkt $P_1$. Berechnen Sie die Koordinaten von $P_1$!

a) 


b) Halbachse $a = 3$ und lineare Exzentrizität $e = 5$ ergeben $b = \sqrt{e^2 - a^2} = 4$
Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Asymptotengleichungen: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$

c) Kreismittelpunkt $M(0;0)$. Radius des Kreises ist $r = |\overline{MA_2}| = 3$
Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = 9$

d) Schnittpunkt Kreis-Asymptote durch Einsetzen der Asymptotengleichung ermitteln

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{5} \rightarrow P_1\left(\frac{9}{5}; \frac{36}{15}\right)$$

**Aufgabe 2**
Gegeben ist eine Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = x - 2\sqrt{x} \qquad (x \in \mathbb{R}; x \geq 0)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f$!

b) Das Bild der Funktion $f$ hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Skizzieren Sie das Bild von $f$ im Intervall $0 \leq x \leq 9$!

d) Das Bild der Funktion $f$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

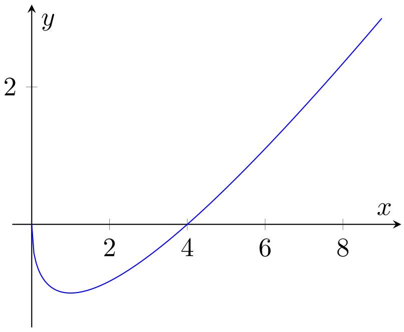
a) Nullstellen:

$$x - 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow x^2 - 4x = x(x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4$$

b) 1.Ableitung $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 2.Ableitung $y'' = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
1.Ableitung Null setzen und Kontrolle in der 2.Ableitung

$$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x_E = 1 \rightarrow f''(1) = \frac{1}{2} > 0$$

Da die 2.Ableitung größer Null wird, ist das Extremum $P_{\min}(1;-1)$ ein lokales Minimum.

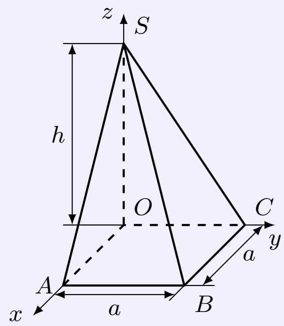
c) 


d) Eingeschlossene Fläche

$$A = \left| \int_0^4 (x - 2\sqrt{x})dx \right| = \left| \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^4 \right| = \frac{8}{3} \text{ FE}$$

**Aufgabe 3**

Die Skizze zeigt eine schiefe Pyramide, deren quadratische Grundfläche $OABC$ in der xy-Ebene eines Koordinatensystems $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ liegt. Die Spitze $S$ befindet sich auf der z-Achse. Die Länge der Seite der quadratischen Grundfläche beträgt 8 cm; die Höhe der Pyramide beträgt $h = 6$ cm.




Skizze nicht maßstäblich!

a) Geben Sie die Koordinaten der fünf Eckpunkte der Pyramide an!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M$ der Seitenkante $\overline{AS}$! Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$ in Komponentendarstellung an!

c) Berechnen Sie $\measuredangle BMC$!

d) Auf der Grundkante $\overline{OC}$ der Pyramide existiert ein Punkt $P_0$ derart, dass $\overrightarrow{MP_0} \perp \overrightarrow{MB}$ gilt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$!

a) Punktkoordinaten: $O(0;0;0), A(8;0;0), B(8;8;0), C(0;8;0)$ und $S(0;0;6)$

b) Mittelpunkt $M$ der Seitenkante $\overline{AS}$: $M(4;0;3)$

Vektoren: $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$ und $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$

c)

$$\cos(\measuredangle BMC) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{89}\sqrt{89}} = \frac{57}{89} \rightarrow \measuredangle BMC = 50{,}2^\circ$$

d) Ansatz für Punkt $P_0(0; y_P; 0)$, somit $\overrightarrow{MP_0} = \begin{pmatrix} -4 \\ y_P \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Vektoren $\overrightarrow{MP_0}$ und $\overrightarrow{MB}$ sind zueinander senkrecht, wenn das Skalarprodukt Null ist.

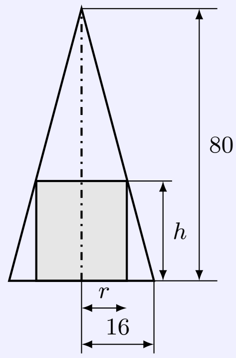
$$\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MP_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ y_P \\ -3 \end{pmatrix} = -7 + 8y_P = 0 \rightarrow y_P = \frac{7}{8}$$

Punkt $P_0(0; \frac{7}{8}; 0)$

**Aufgabe 4**

Ein Raketenkopf hat die Form eines geraden Kreiskegels (Grundkreisradius 16 cm, Höhe 80 cm). Er soll einen zylindrischen Behälter für einen Messgerätesatz aufnehmen (siehe Figur).

Aus technischen Gründen soll die Oberfläche des Zylinders (Grund-, Deck- und Mantelfläche) maximalen Flächeninhalt erhalten. Berechnen Sie den Radius $r$ und die Höhe $h$ des Zylinders für diesen Fall!



Skizze nicht maßstäblich!

Zielfunktion für Zylinderoberfläche $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
Nebenbedingung über Strahlensatz ergibt

$$\frac{80-h}{r} = \frac{80}{16} \rightarrow h = 80 - 5r$$

Nebenbedingung einsetzen ergibt

$$A = 8\pi r(20-r); A' = 16\pi(10-r); A'' = -16\pi$$

Nullsetzen und Lösen der 1.Ableitung ergibt $r_E = 10$ und, da 2.Ableitung kleiner Null ist, ein lokales Maximum.
Abmessungen des Zylinders: Radius $r = 10$ cm, Höhe $h = 30$ cm.

**Aufgabe 5**

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ und $\vec{b} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
Ermitteln Sie $\vec{w} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ und das Vektorprodukt $\vec{w} \times \vec{i}$!

b) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $\quad y = f(x) = e^x \cdot 2x \quad (x \in \mathbb{R})$
und berechnen Sie $f'(0)$!

c) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{2x+1} \qquad (x \in \mathbb{R}; x \geq 0)$

a) $\vec{w} = \vec{k}$ und somit $\vec{w} \times \vec{i} = \vec{j}$

b) mittels Produktregel wird $\quad y' = (e^x \cdot 2x)' = 2xe^x + 2e^x = e^x(2x+2) \rightarrow f'(0) = 2$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch $\quad a_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} \qquad (n \geq 1)$

a) Geben Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Folge an!
Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge!
Für die Glieder der Partialsummenfolge gilt

$$s_n = \frac{n}{3(n+c)} \qquad (n = 1; 2; 3)$$

Ermitteln Sie den Wert der Konstanten $c$!

b) Setzen Sie den ermittelten Wert für $c$ ein, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass der so erhaltene Ausdruck für $s_n$ allgemeines Glied der Partialsummenfolge $(s_n)$ ist!

c) Ermitteln Sie den Grenzwert $g$ der Partialsummenfolge $(s_n)$!

d) Von welchem $n = n_0$ ab liegen die Glieder der Partialsummenfolge $(s_n)$ in der $\epsilon$-Umgebung des Grenzwertes $g$, wenn $\epsilon = 10^{-2}$ ist?

a) $a_1 = \frac{1}{12}, a_2 = \frac{1}{20}, a_3 = \frac{1}{30}$ ; $s_1 = \frac{1}{12}, s_2 = \frac{2}{15}, s_3 = \frac{1}{6}$

$$s_3 = \frac{1}{6} = \frac{n}{3(n+c)} \to 3(n+c) = 6n \to 3(3+c) = 18 \to c = 3$$

Kontrolle für $n$ =1 und 2 bestätigt den Wert der Konstante.

b) Induktionsanfang siehe Teilaufgabe a)
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k}{3k+9}$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $a_1 + ... + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{k+1}{3k+12}$
Induktionsbeweis

$$a_1 + ... + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{k}{3k+9} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} =$$

$$= \frac{k}{3(k+3)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{k(k+4)+3}{3(k+3)(k+4)} = \frac{k^2+4k+3}{3(k+3)(k+4)} = \frac{(k+1)(k+3)}{3(k+3)(k+4)} = \frac{k+1}{3k+12}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(3+\frac{9}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{9}{n}} = \frac{1}{3}$$

d)

$$\frac{1}{3} - \frac{n}{3n+9} = \frac{1}{n+3} \leq 0{,}01 \to n_0 = 97$$

**Aufgabe 6.2.**

a) Berechnen Sie die lokale Extremstelle, den zugehörigen Funktionswert und die Art des Extremums der Funktion

$$y = f_1(x) = e^{2x} - 4x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion

$$y = f(x) = e^{ax} - a^2x \qquad (a \in \mathbb{R}; a > 0; x \in \mathbb{R})$$

genau eine lokale Extremstelle $x_E$ hat! Ermitteln Sie die Art des Extremums!

c) Berechnen Sie $f(x_E)$ und ermitteln Sie die reelle Zahl $a$, für die $f(x_E) = 0$ gilt!

a) 1.Ableitung $y' = 2e^{2x} - 4$, 2.Ableitung $y'' = 4e^{2x}$
die Nullstelle der 1.Ableitung ist $x_N = \frac{1}{2}\ln 2$ mit $f''(x_E) = 8$, d.h. es liegt ein lokales Minimum bei $P_{\min}(\frac{1}{2}\ln 2; 2 - 2\ln 2)$ vor.

b) 1.Ableitung $y' = ae^{ax} - a^2$, 2.Ableitung $y'' = a^2e^{ax}$
Nullsetzen der 1.Ableitung und Kontrolle mittels 2.Ableitung

$$ae^{ax} - a^2 = 0 \to e^{ax} = a^2 \to ax = \ln a \to x_E = \frac{\ln a}{a}$$

$f''(\frac{\ln a}{a}) = a^3 > 0$, womit ein Minimum vorliegt. $P_{\min}(\frac{\ln a}{a}; a - a\ln a)$

c)

$$f(x_E) = a - a\ln a = 0 \to a = e$$

**Aufgabe 6.3.**

a) Eine Gerade $g_1$ geht durch die Punkte $P_1(2;2;3)$ und $P_2(0;2;1)$.
Stellen Sie die Parametergleichung für $g_1$ auf! Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$, in dem diese Gerade die xy-Ebene durchstößt!

b) Eine zweite Gerade $g_2$ geht durch $P_3(4;6;9)$; ihr Richtungsvektor ist $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
Stellen Sie eine Parametergleichung für $g_2$ auf! Weisen Sie nach, dass $g_1$ und $g_2$
- nicht parallel sind,
- keinen Schnittpunkt haben!

c) Die Gerade $g_1$ wird von einer Geraden $g_3$ im Punkt $S$ geschnitten.
Die Gerade $g_3$ geht ebenfalls durch den Punkt $P_3$ und hat den Richtungsvektor $\vec{b} = 3\vec{i}+\vec{j}+c\vec{k}$ $(c \in \mathbb{R})$.
Berechnen Sie die Koordinate $c$ dieses Vektors!
Geben Sie die Koordinaten des Punktes $S$ an!

a) Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, Gerade $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
für $P_0$ ist $z = 0$, d.h $0 = 3 - 2t \to t = 1{,}5$ und für $P_0(-1;2;0)$

b) $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Für einen Schnittpunkt muss das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 - 2t &= 4 + 3s \\ 2 &= 6 + s \\ 3 - 2t &= 9 + 2s \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung haben.
Subtraktion der 1. und 3.Gleichung ergibt $-1 = -5 + s \to s = 4$. Nach Gleichung 2 muss $s$ aber -4 sein.
Ein Widerspruch liegt vor. Es gibt keinen Schnittpunkt.

c) $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ Für den Schnittpunkt $S$ muss das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 - 2t &= 4 + 3s \\ 2 &= 6 + s \\ 3 - 2t &= 9 + c \cdot s \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung haben.
Aus Gleichung (2) wird $s = -4$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 2 - 2t &= -8 \\ 3 - 2t &= 9 - 4c \end{aligned}$$

Subtraktion beider Gleichungen ergibt $1 = 17 - 4c \to c = 4$
Koordinaten des Punktes $S(-8;2;-7)$

## 1.37 Abituraufgaben 1977

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung

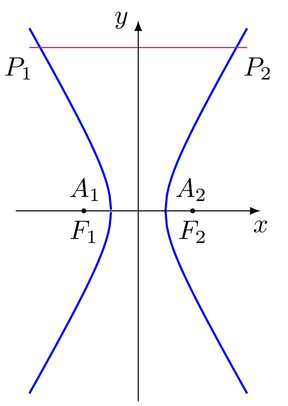
$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte $A_1$ und $A_2$ und der Brennpunkte $F_1$ und $F_2$!

b) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Hyperbel!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $-4 \leq x \leq 4$!

c) Die Gerade $y = 6$ schneidet diese Hyperbel in den Punkten $P_1$ und $P_2$.
Die Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ und die Hyperbel begrenzen eine Fläche, die den Achsenschnitt des Innenraumes einer Düse von 6,0 cm Höhe darstellt.
Berechnen Sie den oberen Durchmesser $P_1P_2$ dieser Düse!
(Koordinateneinheit 1 cm)

d) Der obere Durchmesser der Düse soll auf 8,0 cm vergrößert werden, die Höhe und der untere Durchmesser $A_1A_2$ bleiben unverändert.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Gleichung der Hyperbel!



b)

a) Halbachsen $a = 1; b = \sqrt{3}$ ergeben die Scheitelpunkte $A_1(-1;0), A_2(1;0)$
lineare Exzentrizität $e^2 = b^2 + a^2 \to e^2 = 4 \to e = 2$ mit den Brennpunkten $F_1(0;-2), F_2(0;2)$ der Scheitelpunkte $A_1$ und $A_2$ und der Brennpunkte $F_1$ und $F_2$!

c) Die Gerade $y = 6$ schneidet $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

$$x^2 - \frac{6^2}{3} - 1 = 0 \to x_1 = -\sqrt{13}, x_2 = \sqrt{13}$$

Der obere Durchmesser ist $d = |\overline{P_1P_2}| = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm.

d) $|\overline{P_1P_2}| = 8$ bedeutet, dass der Punkt $P_2(4;6)$ auf der Hyperbel liegt.
Einsetzen in $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt $b^2 = \frac{12}{5}$ und die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{1} - \frac{5y^2}{12} = 1$

**Aufgabe 2**
In einem räumlichen Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind die Punkte $P_1(2;2;4), P_2(10;2;8)$ und $P_3(4;1;4)$ gegeben.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade $g_1$ auf, die durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ geht!

b) Eine Gerade $g_2$ geht durch den Punkt $P_3$ und hat die Richtung des Vektors $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Stellen Sie für die Gerade $g_2$ eine Gleichung auf!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden $g_1$ und $g_2$!

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g_1$ und $g_2$!

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$!

a,b) Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, Gerade $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; Gerade $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Aus der Gleichung für die y-Koordinate $2 = 1 + s$ wird $s = 1$. Die Gleichung $2 + 8t = 4 + 2s$ liefert $t = \frac{1}{2}$.

Einsetzen in der 3.Gleichung bestätigt die Parameter. Schnittpunkt $S(6;2;6)$

d) Beträge der Richtungsvektoren von $g_1$ und $g_2$ sind $\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{80}; \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{3\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{80}} \rightarrow \alpha \approx 26{,}6^\circ$$

e) Der Betrag des Vektorprodukts der zwei Vektoren $\overrightarrow{P_2P_1} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und Vektor $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms. Das Dreieck hat den halben Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{2} = 6 \text{ FE}$$

**Aufgabe 3**
Es soll ein allseitig geschlossener quaderförmiger Container gebaut werden, der folgende Bedingungen erfüllt:
Das Volumen beträgt 9,0 m$^3$,
die Länge ist doppelt so groß wie die Breite,
der Inhalt der Oberfläche soll minimal sein.
Berechnen Sie die Abmessungen dieses Containers!

mit den Quaderkanten $a$, $b$, $c$ ist die Zielfunktion $A = 2ab + 2ac + 2bc$
Nebenbindungen $a = 2b$ und $V = 9 = a \cdot b \cdot c$ einsetzen, ergibt

$$A = 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + 3ac = a^2 + \frac{54}{a}, \qquad A' = 2a - \frac{54}{a^2}$$

extremwertverdächtige Stelle $x_E = 3$ ergibt in der 2.Ableitung $y'' = 2 + \frac{108}{a}$ einen positiven Wert, d.h. die Fläche wird minimal
Abmessungen des Containers: $a = 3$ m, $b = 1{,}5$ m und $c = 2$ m.

**Aufgabe 4**
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+3}\ ;\ (x \in \mathbb{R})$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion keine Pole hat!

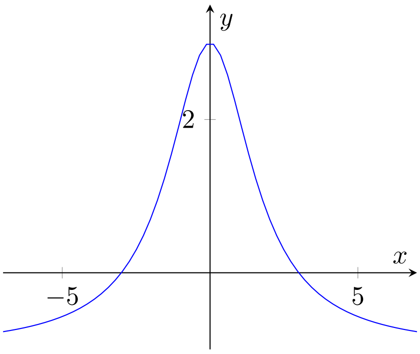
c) Ermitteln Sie Anzahl, Art und Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion!

d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen!

e) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-7 \le x \le 7$!

a) Nullstelle ist Nullstelle des Zählers: $0 = 9 - x^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm 3$, d.h. zwei Nullstellen

b) für eine Polstelle muss der Nenner Null werden $0 = x^2 + 3$. Die Gleichung hat keine reellen Lösungen, d.h. es existieren keine Polstellen




c) 1.Ableitung $y' = \frac{-24x}{(x^2+3)^2}$, 2.Ableitung $y'' = \frac{72x^2-72}{(x^2+3)^3}$
Nullsetzen der 1.Ableitung ergibt nur eine Lösung $x_E = 0$ mit der 2.Ableitung $f''(0) = -\frac{8}{3} < 0$.
Damit liegt mit $P_{\max}(0;16)$ ein lokales Maximum vor. Weitere Extrempunkte gibt es nicht.

d)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(\frac{9}{x^2}-1)}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{9}{x^2}-1}{1+\frac{3}{x^2}} = -1$$

**Aufgabe 5**

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion $y = f(x) = e^x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ an!

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx$.

c) Berechnen Sie die Summe $\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$!

a) $x = 0$

b) $\int\limits_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx = [-2\cos\frac{x}{2}]_0^\pi = 2$

c) $\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k} = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

**Wahlaufgaben**

(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**

Gegeben sind die Funktion $g$ und $h$ durch

$$y = g(x) = 3 + \cos x \;;\; (0 \leq x \leq 2\pi; x \in \mathbb{R})$$

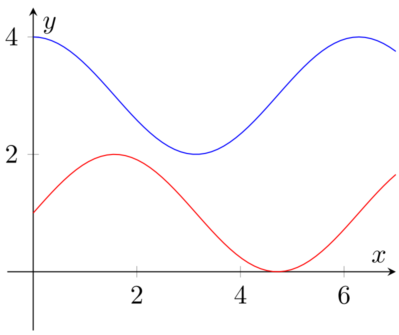
$$y = h(x) = 1 + \sin x \;;\; (0 \leq x \leq 2\pi; x \in \mathbb{R})$$

a) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen $g$ und $h$ in ein und demselben Koordinatensystem!

b) Die Bilder der Funktionen $g$ und $h$ sollen von einer Parallelen zur y-Achse so in zwei Punkten $P$ und $Q$ geschnitten werden, dass die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ minimal wird.
Berechnen Sie die Abszisse der Punkte $P$ und $Q$!

c) Die y-Achse, die Bilder der Funktionen $g$ und $h$ und die Gerade $x = 2\pi$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

a)



b) Differenz der Funktionswerte beider Funktionen $d = |\overline{PQ}| = 2 + \cos x - \sin x$
1.Ableitung $y' = -\sin x - \cos x$, 2.Ableitung $y'' = \sin x - \cos x$

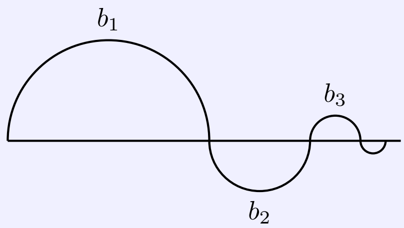
$$0 = -\sin x - \cos x \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3}{4}\pi = 135°$$

$f''(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2} > 0$, d.h. ein lokales Minimum liegt vor.
Die Abszissen der Punkte $P$ und $Q$ sind $x = \frac{3}{4}\pi$.

c) eingeschlossene Fläche

$$A = \int_0^{2\pi} (2 + \cos x - \sin x)dx = [\cos x + \sin x + 2x]_0^{2\pi} = 4\pi \text{ FE}$$

**Aufgabe 6.2.**
In der Skizze sind Halbkreise dargestellt. Der erste Halbkreis mit der Bogenlänge $b_1$ hat den Radius $r$. Der Radius jedes weiteren Halbkreises ist halb so groß wie der Radius seines unmittelbaren Vorgängers.




a) Die Längen $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ der Halbkreisbögen bilden eine unendliche Folge $(b_n)$.
Geben Sie die Glieder $b_1, b_2, b_3$ und das allgemeine Glied $b_n$ dieser Folge in Abhängigkeit von $r$ an!

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summen der ersten $n$ Glieder der Folge $(b_n)$ gilt:

$$s_n = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \; ; (n \geq 1)$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(s_n)$!

a) $b_1 = \pi r, b_2 = \frac{\pi r}{2}, b_3 = \frac{\pi r}{4}$
das allgemeine Glied der Zahlenfolge $(b_n)$ ist $b_n = \frac{\pi r}{2^{n-1}}$

b) Induktionsanfang für $n$ =1: $b_1 = \pi r = 2\pi r(1 - \frac{1}{2}) = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $\pi r + ... + \frac{\pi r}{2^{k+1}} = 2\pi r(1 - \frac{1}{2^k})$
Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt dann: $\pi r + ... + \frac{\pi r}{2^k} = 2\pi r(1 - \frac{1}{2^{k+1}})$
Induktionsbeweis

$$\pi r + ... + \frac{\pi r}{2^{k-1}} + \frac{\pi r}{2^k} = 2\pi r\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{\pi r}{2^k} = \pi r(2 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k}) = \pi r(2 - \frac{2}{2^{k+1}}) = 2\pi r(1 - \frac{1}{2^{k+1}})$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\pi r(1 - \frac{1}{2^n})\right) = 2\pi r$

**Aufgabe 6.3.**
Gegeben ist die Funktion $f_1$ durch

$$y = f_1(x) = 2\sqrt{x-4} \; ; (4 \leq x \leq 13); x \in \mathbb{R})$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f_1$!

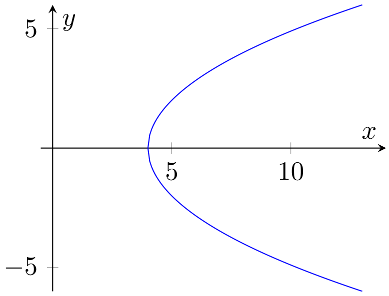
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion $f_1$, von der x-Achse und der Geraden $x = 13$ eingeschlossen wird!

c) Im Punkt $B(8; y_B)$ wird an das Bild von $f_1$ die Tangenten gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

d) Das Bild jeder der Funktionen

$$y = f(x) = c\sqrt{x - c^2}\ ;\ (c \in R; c > 0)$$

hat eine Tangente mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$.
Berechnen Sie die Abszisse des jeweiligen Berührungspunktes (in Abhängigkeit von c)!




b) Fläche von der Nullstelle $x = 4$ bis $x = 13$

$$A = \int_4^{13} (2\sqrt{x-4})dx = \left[\frac{4}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^{13} = 36 \text{ FE}$$

c) der Punkt $B$ hat die Koordinaten $B(8; 4)$.
1.Ableitung $y' = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ und $f'(8) = \frac{1}{2}$
Ansatz für die Tangente $y = \frac{1}{2}x + n$ und Einsetzen des Punktes $B$ ergibt die
Tangentengleichung $t: y = \frac{1}{2}x$

d) 1.Ableitung der Funktion gleich $\frac{1}{2}$ setzen und auflösen

$$y' = \frac{c}{2\sqrt{x-c^2}} \to \frac{c}{2\sqrt{x-c^2}} = \frac{1}{2} \to 4c^2 = 4(x - c^2) \to x = 2c^2$$

Der Berührungspunkt der Tangente hat die Abszisse $x = 2c^2$.

## 1.38 Abituraufgaben 1978

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

$$y = f(x) = x^2 + 1 \;;\; (x \in \mathbb{R}) \text{ und } y = g(x) = 2x + 4 \;;\; (x \in \mathbb{R})$$

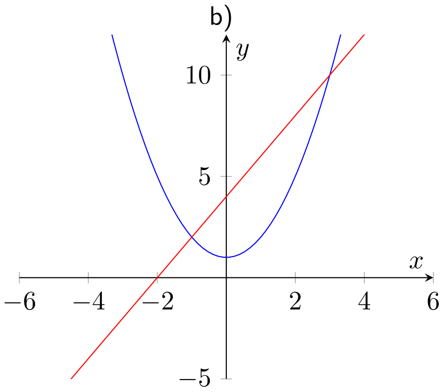
Die Bilder von $f$ und $g$ schneiden einander in den Punkten $P_1$ und $P_2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von $P_1$ und $P_2$!

b) Die Bilder der gegebenen Funktionen begrenzen eine Fläche vollständig.
Fertigen Sie eine Skizze an! Berechnen Sie den Inhalt der Fläche!

c) Es gibt genau eine Tangente an das Bild von $f$, die parallel zum Bild von $g$ ist.
Berechnen Sie die Abszisse $x_0$ des Berührungspunktes!

b)

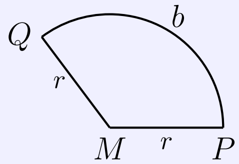



a) Funktionsterme gleichsetzen $x^2 + 1 = 2x + 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1; x_2 = 3$
Schnittpunkte $S_1(-1; 2); S_2(3; 10)$

$$A = \int_1^3 2x + 4 - x^2 - 1dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_1^3 = \frac{32}{3} \text{ FE}$$

c) im Berührungspunkt muss Anstieg $m = 2$ sein
1.Ableitung $f'(x) = 2x \rightarrow 2 = 2x \rightarrow x_B = 1$ mit Funktionswert $y_B = 2$
Berührungspunkt $B(2; 2)$

**Aufgabe 2**
Ein Kreisausschnitt $PQM$ (siehe Skizze!) hat den Flächeninhalt $A = \frac{b \cdot r}{2} = 100$ cm$^2$.




Skizze (nicht maßstäblich)
Der Umfang des Kreisausschnittes, der sich aus den Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ und dem Kreisbogen $\widehat{PQ}$ zusammensetzt, soll minimal werden. Berechnen Sie für diesen Fall

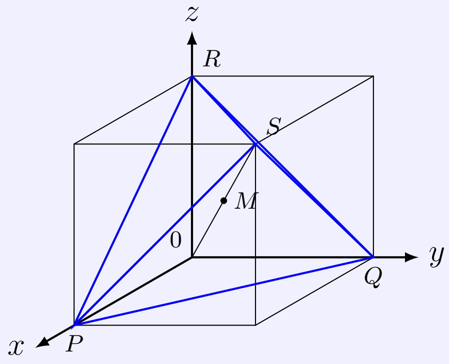
a) die Längen des Radius $r$ und des Bogens $b$;

b) die Größe des Winkels $\measuredangle PMQ$ (in Grad)!

a) Zielfunktion $u = 2r + b$ mit Nebenbedingung $b = \frac{2A}{r} = \frac{200}{r}$
Zielfunktion $u = 2r + \frac{200}{r}$
1.Ableitung $u'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}$ ; 2.Ableitung $u''(r) = \frac{400}{r^3} > 0$, d.h. Minimum
Nullstelle der 1.Ableitung $0 = 2 - \frac{200}{r^2} \rightarrow r_E = 10$ , 2.Lösung entfällt da negativ
Lösung: $r = 10$ cm; $b = 20$ cm

b) $b : u_{\text{Kreis}} = \alpha : 360° \rightarrow$ Winkel $\measuredangle PMQ = 114{,}6°$

**Aufgabe 3**




Skizze (nicht maßstäblich)

Das Modell des Methanmoleküls hat die Form eines Tetraeders. Für Berechnungen ist es zweckmäßig, dieses einem Würfel mit der Kantenlänge 1 Längeneinheit einzubeschreiben.
Die Skizze zeigt die Lage dieses Würfels in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$.
Die Punkte $P$, $Q$, $R$ und $S$ kennzeichnen die Lage der Wasserstoffatomkerne.
Die Lage des Kohlenstoffatomkerns wird durch den Mittelpunkt $M$ der Raumdiagonalen $\overline{OS}$ angegeben.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte $P$, $Q$, $R$, $S$ und $M$!

b) Berechnen Sie den Abstand eines Wasserstoffatomkerns vom Kohlenstoffatomkern für dieses Modell!

c) Berechnen Sie die Größe des Bindungswinkels $\phi = \measuredangle PMQ$!

a) Punktkoordinaten $P(1;0;0), Q(0;1;0); R(0;0;1); S(1;1;1); M(0{,}5;0{,}5;0{,}5)$

b) Abstand von $M$ zu $S$

$$d = |\overline{MS}| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0{,}87\ LE$$

c) Vektoren $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{MQ}|} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-0.25}{0.75} \to \phi = 109{,}47°$

**Aufgabe 4**

Gegeben ist eine Funktion $f$ durch $y = f(x) = 10\frac{\ln x}{x}$; $\quad (x \in \mathbb{R}; 0{,}6 \leq x \leq 6)$

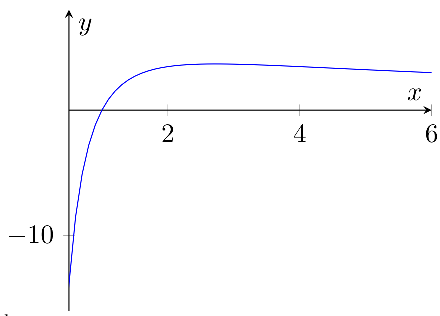
a) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetafel!

| $x$ | 0,6 | 0,8 | | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | -2,8 | 0 | 3,5 | |

b) Das Bild der Funktion $f$ hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

a)

| $x$ | 0,6 | 0,8 | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -8,5 | -2,8 | 0 | 3,5 | 3,0 |




b) 1.Ableitung $y' = \frac{10-10\ln x}{x^2}$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{-30+20\ln x}{x^3}$
Nullstelle der 1.Ableitung $0 = \frac{10-10\ln x}{x^2} \to x_0 = e$ ; Kontrolle $f''(e) = -10e^{-3} < 0 \to$ Maximum
lokaler Extrempunkt $E_{\max}(e; 10e^{-1})$

**Aufgabe 5**
a) Eine Zahlenfolge ist gegeben durch die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 3 \text{ und } a_{k+1} = a_k + 2^{k+2} \ (k \in \mathbb{N}; k \geq 1)$$

Berechnen Sie das Glied $a_2$ dieser Folge!

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x_0+h)^2 - 2x_0^2}{h}$ an der Stelle $x_0 = 3$!

c) Gegeben ist

$$\int\limits_0^t \cos x dx = \frac{1}{2} \ (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

Berechnen Sie $t$!

a) $a_2 = a_1 + 2^{1+2} = 11$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x_0+h)^2 - 2x_0^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 2x_0^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x_0+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$

c) $\displaystyle\int_0^t \cos(x)dx = [\sin x]_0^t = \sin t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = 1 + \sin(2x); \quad (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Abszissen und Ordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes dieser Funktion! Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f$!

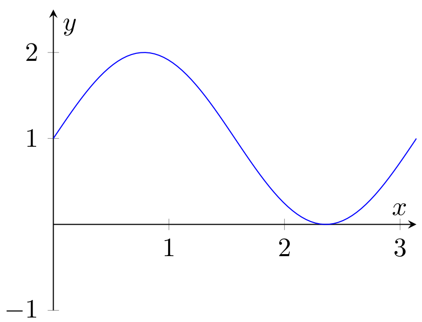
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion $f$ und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird!

d) Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = 1 + \sin(bx); \quad (x \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; b > 0)$$

$P_1(0;1)$ und $P_2(\frac{\pi}{b};1)$ sind Punkte der Bilder dieser Funktionen.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters $b$ für den Fall, dass die Tangenten in $P_1$ und $P_2$ an das Bild der entsprechenden Funktion aufeinander senkrecht stehen!

a) 1.Ableitung $y' = 2\cos(2x)$ ;
2.Ableitung $y'' = -4\sin(2x))$
Nullstellen der 1.Ableitung $0 = \cos(2x) \rightarrow x_1 \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}$
Kontrolle in der 2.Ableitung $f''(\frac{\pi}{4}) = -4 < 0$ ... Maximum
$f''(\frac{3\pi}{4}) = 4 > 0$ ... Minimum
lokale Extrempunkte $E_{\max}(\frac{\pi}{4};2); E_{\min}(\frac{3\pi}{4};0)$

b)


c)

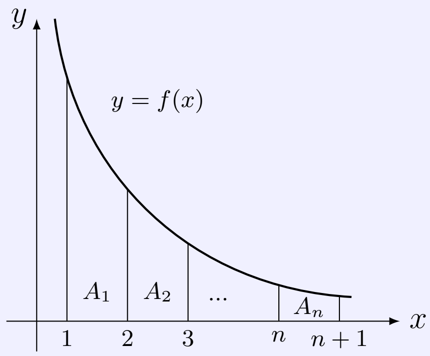
$$A = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin(2x)dx = \left[ x - \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \text{ FE}$$

d) 1.Ableitung $y' = b\cos(bx)$ ; Anstieg in $P_1(0;1)$ ist $m_1 = b$, im Punkt $P_2(\frac{\pi}{b};1) \rightarrow m_2 = -b$
Tangenten sind senkrecht, wenn $m_1 m_2 = -1$ ist, d.h. $-b \cdot b = -1 \rightarrow b_1 = 1; b_2 = -1$
Lösung unter der Bedingung $b > 0$: $b = 1$

**Aufgabe 6.2.**
Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \ ; \ (x \in \mathbb{R}; x > 0)$$

Das Bild von f, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzen die Fläche $A_1$ vollständig.
Die n-te Fläche $A_n$ wird durch das Bild der Funktion f, die x-Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n+1$ vollständig begrenzt $(n = 1; 2; 3; ...)$ (siehe Skizze!).




Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Inhalte der Flächen $A_1, A_2, A_3$ und $A_n$!

b) Die Inhalte der Flächen $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge $A(n)$!
Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

c) Geben Sie eine Vermutung für das $n$-te Glied $s_n$ dieser Partialsummenfolge an!
Beweisen Sie diese Vermutung!

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

a)

$$A_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Einzelflächen $A_1 = \frac{1}{2}; A_2 = \frac{1}{6}; A_3 = \frac{1}{12}$

b) $s_1 = \frac{1}{2}; s_2 = \frac{2}{3}; s_3 = \frac{3}{4}$

c) Vermutung $s_n = \frac{n}{n+1}$
Induktionsanfang für $n = 1$: $a_1 = \frac{1}{2} \doteq \frac{1}{1+1} = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} = s_k$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $a_1 + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = s_{k+1}$
Beweis

$$a_1 + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = s_{k+1}$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

**Aufgabe 6.3.**
Durch die Gleichung $y^2 = 4{,}8x$ ist eine Parabel gegeben.

a) Die Gerade $g_1$ mit der Gleichung $y = x$ schneidet die Parabel in den Punkten $P_1$ und $P_2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $P_1$ und $P_2$.
Berechnen Sie die Koordinaten $x_M$ und $y_M$ des Mittelpunktes $M_1$ der Strecke $\overline{P_1P_2}$!

b) Die zu $g_1$ parallele Gerade $g_2$ mit der Gleichung $y = x + 0{,}9$ schneidet die obige Parabel $y^2 = 4{,}8x$ in $P_3$ und $P_4$.
Weisen Sie nach, dass die Ordinate des Mittelpunktes $M_2$ der Strecke $\overline{P_3P_4}$ gleich der Ordinate von $M_1$ ist!

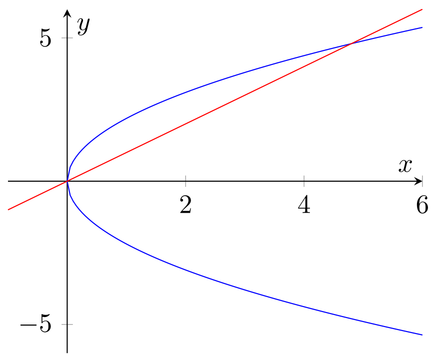
c) Weisen Sie nach, dass für jede Parabel $y^2 = 2px$ gilt:
Schneidet eine Gerade $y = x + n$ diese Parabel in den Punkten $Q_1$ und $Q_2$, so ergibt sich für die Ordinate $y_H$ des Mittelpunktes H der Strecke $\overline{Q_1Q_2}$: $y_H = p$.

d) Geben Sie an, welche Bedingung für n (in Abhängigkeit von p) erfüllt sein muss, damit die Gerade $y = x + n$ die Parabel $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ in zwei Punkten schneidet.

a) Schnittpunkte Parabel-Gerade: Geradengleichung einsetzen

$$y^2 = 4{,}8y \to y_1 = 0; y_2 = 4{,}8 \to P_1(0;0); P_2(4{,}8;4{,}8)$$

Mittelpunkt $M_1 : x_{M_1} = \frac{x_1+x_2}{2} = 2{,}4$ ; $y_{M_1} = \frac{y_1+y_2}{2} = 2{,}4 \to M_1(2{,}4;2{,}4)$




b)
$$y^2 = 4{,}8(y - 0{,}9) \to y_3 = \frac{6}{5}; y_4 = \frac{18}{5}$$

Ordinate des Mittelpunktes $M_2 : y_M = \frac{y_3+y_4}{2} = \frac{24}{10} = 2{,}4 = y_{M_1}$

c)
$$y^2 = 2px \to y^2 = 2p(y - n) \to y^2 - 2py + 2pn = 0 \to$$
$$\to y_{Q_1} = p + \sqrt{p^2 - 2np} \ ; \ y_{Q_2} = p - \sqrt{p^2 - 2np} \to$$

Die Ordinate des Mittelpunktes H ist $\frac{y_{Q_1}+y_{Q_2}}{2} = p$, was zu zeigen war

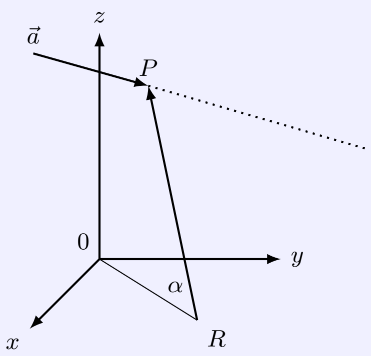
d) Für zwei Schnittpunkte muss der Radikand aus Aufgabe c) größer Null sein
$p^2 - 2np > 0 \to n < \frac{p}{2}$

## 1.39 Abituraufgaben 1979

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**

Bei einer Übung der Nationalen Volksarmee wird von einer Bodenkontrollstelle ein Flugkörper geortet. Dieser Flugkörper bewegt sich auf geradliniger Bahn mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ auf den Punkt $P(0;0;13)$ zu. (siehe Skizze!). Vom Raketenstützpunkt $R(8;6;0)$ wird eine Abwehrrakete gestartet, die den Flugkörper im Punkt $P$ treffen soll. Die Bahn dieser Rakete wird ebenfalls als geradlinig angenommen. (Koordinateneinheit: 1 km)



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Bahn der Abwehrrakete auf!

b) Berechnen Sie für diese Rakete den Abschusswinkel $\measuredangle ORP = \alpha$!

c) Weisen Sie nach, dass Raketen- und Flugkörperbahn senkrecht zueinander verlaufen!

d) Berechnen Sie die Zeit $t$, welche die Abwehrrakete für die Strecke $\overline{RB}$ bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $1{,}64$ km$\cdot$ s$^{-1}$ benötigt!

a) Bahn der Abwehrrakete $\vec{x} = \overrightarrow{OR} + t \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) Abschusswinkel

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{RO} \bullet \overrightarrow{RP}}{\left|\overrightarrow{RO}\right| \left|\overrightarrow{RP}\right|} = \frac{100}{\sqrt{100}\sqrt{269}} \to \alpha = 52{,}43^\circ$$

c) Skalarprodukt der Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Null, d.h. die Bahnen sind senkrecht zueinander

d) Flugstrecke $d = \left|\overrightarrow{RP}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{269}$ km ; Flugzeit $t = \frac{s}{v} = \frac{\sqrt{269}}{1{,}64} = 10$ s

**Aufgabe 2**

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

a) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie die Ellipse!

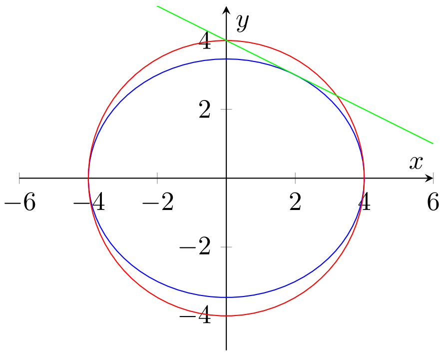
b) Zeichnen Sie den Kreis $k$ ein, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt und der durch die Hauptscheitel der Ellipse geht!
Geben Sie die Gleichung des Kreises $k$ an!

c) $P_0(2;3)$ ist ein Punkt der Ellipse. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in $P_0$ an die Ellipse!

d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Tangenten mit dem Kreis $k$!

a) große Halbachse a = 4, kleine Halbachse $b = \sqrt{12}$
Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 16$

b)




c) Ellipsentangente in $P_0$ : $\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{12} = 1 \rightarrow \frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \rightarrow y = -\frac{x}{2} + 4$

d) Tangentengleichung in Kreisgleichung einsetzen

$$x^2 + \left(-\frac{x}{2} + 4\right)^2 = 16 \rightarrow \frac{5}{4}x^2 - 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{16}{5}$$

Schnittpunkte $S_1(0; 4); S_2(\frac{16}{5}; \frac{12}{5})$

**Aufgabe 3**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\ (n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Folge an!

b) Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $s_n = \frac{n}{4n+1}$!

d) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$!

a) $a_1 = \frac{1}{5}; a_2 = \frac{1}{45}; a_3 = \frac{1}{117}$

b) $s_1 = \frac{1}{5}; s_2 = \frac{2}{9}; s_3 = \frac{3}{13}$

c) Induktionsanfang für $n = 1$ gilt: $a_1 = \frac{1}{5} \doteq \frac{1}{4\cdot 1+1} = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + \ldots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1} = s_k$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann $a_1 + \ldots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} = s_{k+1}$
Induktionsbeweis

$$a_1 + \ldots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} =$$

$$= \frac{k(4k+5)}{(4k+1)(4k+5)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} =$$

$$= \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} = s_{k+1}$$

d) Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4}$

**Aufgabe 4**
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 3 - x + 2\sqrt{x}\ ;\ (x \in \mathbb{R}; x \geq 0)$$

a) Die Funktion $f$ hat genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle!

b) Das Bild der Funktion $f$ hat genau einen lokalen Extrempunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

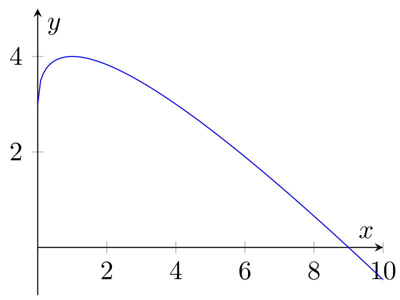
c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f$ im Intervall $0 \leq x \leq 10$!

d) Das Bild der Funktion $f$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

a) Nullstelle $3 - x + 2\sqrt{x} = 0 \to 2\sqrt{x} = x - 3 \to 4x = (x-3)^2 \to 0 = x^2 - 10x + 4$
die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1; x_2 = 9$, wobei $x_1$ Scheinlösung der Ausgangsgleichung ist, d.h. Nullstelle $x_0 = 9$

b) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ ; 2.Ableitung $y'' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
Nullstelle der 1.Ableitung $x_E = 1$, Kontrolle in 2.Ableitung $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, d.h. Maximum
lokaler Extrempunkt $E_{\max}(1;4)$

c)




d)

$$A = \int_0^9 (3 - x + 2\sqrt{x})dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{4\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^9 = \frac{45}{2} \text{ FE}$$

**Aufgabe 5**
a) Berechnen Sie $\int e^{2x}dx$!

b) Berechnen Sie die durch $\sum\limits_{k=0}^{4} 10^k$ gegebene Zahl!

c) Für welche x aus dem Intervall von 0 bis $2\pi$ gilt $\sin x = \cos x$?

a) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

b) $\sum\limits_{k=0}^{4} 10^k = 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$

c) $\sin x = \cos x \to \tan x = 1 \to x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{5\pi}{4}$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Gegeben sind Funktionen durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{a}{1+x^2} \ ; \ (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a > 0)$$

a) Jede dieser Funktionen hat genau ein lokales Maximum. Berechnen Sie seine Koordinaten!
(Der Nachweis der Art des Extremums ist hier nicht erforderlich.)

b) Untersuchen Sie das Verhalten dieser Funktionen im Unendlichen!

c) Untersuchen Sie, ob diese Funktionen Polstellen haben!

d) Skizzieren Sie die Bilder dieser Funktionen für $a = 1$ und $a = 4$!

e) Jeder der Funktionen

$$y = f(x) = \frac{a}{1+x^2} \ ; \ (x \in R; a \in R; a > 0)$$

hat zwei Wendepunkte.
Weisen Sie nach, dass für deren Abszissen $x_{W_1}$ und $x_{W_2}$ gilt:

$$x_{W_1} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}; x_{W_2} = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

a) 1.Ableitung $y' = -\frac{2ax}{(x^2+1)^2}$ hat die Nullstelle bei $x = 0$
lokale Extremstelle $E_{\max}(0;a)$

b) da $a$ konstant ist und im Nenner $x^2$ auftritt:

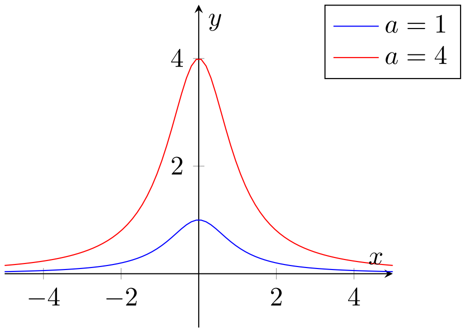
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$$

c) Polstelle wäre nur für $0 = 1 + x^2$ möglich. Da die Gleichung keine reelle Lösung besitzt, gibt es keine Polstellen.

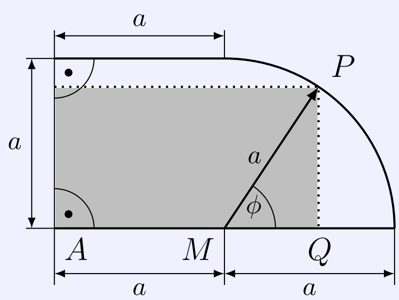
d) der Zähler der 2.Ableitung $y'' = \frac{2a(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ muss bei Einsetzen von $x_{W_1}; x_{W_2}$ gleich 0 werden

$$2a\left(3\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 1\right) = 2a\left(3\cdot\frac{3}{9} - 1\right) = 0$$

analog für die Wendestelle $x_{W_2}$




**Aufgabe 6.2.**
Bleche haben die in der Skizze dargestellte Form (Quadrat- und angesetzter Viertelkreisfläche). Daraus sollen rechteckige Bleche geschnitten werden. Skizze (nicht maßstäblich)




a) Geben Sie die Längen der Rechteckseiten $\overline{QP}$ und $\overline{AQ}$ bei gegebener Länge $a$ in Abhängigkeit vom Winkel $\phi$ an!

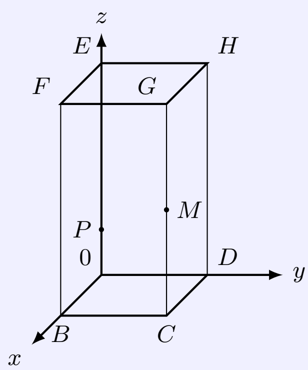
b) Berechnen Sie den Winkel $\phi$ für den Fall, dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird!

a) Rechteckseiten $\overline{AQ} = a + a\cos\phi$ ; $\overline{QP} = a\sin\phi$

b) Ansatz für Flächeninhalt $A = (a + a\cos\phi)\cdot a\sin\phi = a^2(\sin x + \sin x\cos x$
1.Ableitung $y' = 2a^2\cos^2 x + a^2\cos x - a^2$
Substitution $z = \cos x$ ergibt $0 = 2a^2z^2 + a^2z - a^2$ mit den Lösungen $z_1 = -1; z_2 = \frac{1}{2}$
Rücksubstitution:
$\phi_1 = 180°; \phi_2 = 60°; \phi_3 = 150°$
und für den Bereich $0° \le \phi \le 90°$ als einzige Lösung $\phi = 60°$
Kontrolle in der 2.Ableitung
$y'' = -4a\sin x\cos x - a^2\sin x \rightarrow f''(60°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 < 0$, d.h. ein Maximum

**Aufgabe 6.3.**

Die Skizze zeigt ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche $OBCD$ in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$.
M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$. $\overline{BC} = 3$ cm; $\overline{CG} = 13$ cm, Skizze (nicht maßstäblich)




a) Auf der Kante $\overline{OE}$ liegt der Punkt $P$ mit $\overline{OP} = 2$ cm. Geben Sie die Koordinaten der Punkte $B$, $P$ und $M$ an!
Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{PM}$ zueinander orthogonal sind!

b) Durch die Punkte $P$ und $M$ geht die Gerade $g_1$, durch $B$ und $H$ geht die Gerade $g_2$.
Stellen Sie für die Geraden $g_1$ und $g_2$ je eine Gleichung auf!
Weisen Sie nach, dass $g_1$ und $g_2$ einander nicht schneiden!

c) Auf der Kante $\overline{DH}$ existiert ein Punkt $Q$ derart, dass die Gerade $g_3$, die durch $B$ und $Q$ geht, von der Geraden $g_1$ geschnitten wird.
Berechnen Sie die z-Koordinate des Punktes $Q$!

a) Koordinaten $B(3;0;0), P(0;0;2), M(3;3;6{,}5), H(0;3;13)$
Vektoren $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$
Vektoren sind zueinander senkrecht, wenn Skalarprodukt Null ist: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = 0$

b) Geradengleichungen

$$g1 : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$$

$$g2 : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt ermitteln: für jede Koordinate eine Gleichung

$$x : 3t = 3 - 3s \text{ (I)}; y : 3t = 3s \text{ (II)}; z : 2 + 4{,}5t = 13s \text{ (III)}$$

Aus (I) und (II) wird $s = t = \frac{1}{2}$, die Gleichung (III) nicht erfüllen, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt

c) Ansatz Punkt $Q(0;3;z_Q)$, Gerade $g_3$ durch $B$ und $Q$

$$g3 : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ z_Q \end{pmatrix}$$

In Analogie zur Teilaufgabe b) wird aus

$$g1 = g3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ z_Q \end{pmatrix}$$

für die Parameter $r = t = \frac{1}{2}$ und $2 + 4{,}5t = z_Q \cdot r \rightarrow z_Q = \frac{17}{2}$

## 1.40 Abituraufgaben 1980

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;1;1), B(2;5;2), C(1;4;-2)$ und $D(0;0;-3)$ gegeben.

a) Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ in Komponenten- oder Koordinatendarstellung an!
Weisen Sie nach, dass diese Vektoren parallel zueinander sind!

b) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle BAD$!

c) Durch die Punkte $A$ und $C$ geht die Gerade $g_1$, durch $B$ und $D$ die Gerade $g_2$. Stellen Sie für die Geraden $g_1$ und $g_2$ je eine Gleichung auf!
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der Geraden $g_1$ und $g_2$!

d) Die Gerade $g_1$ durchstößt die xy-Ebene im Punkt $P_0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_0$!

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = -\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; also $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, d.h. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

b) $\cos\measuredangle BAD = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \measuredangle BAD = 120^\circ$

c) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Geraden gleichsetzen ergibt $t_1 = \frac{1}{2}$ mit dem Schnittpunkt $S(1;2{,}5;-0{,}5)$.

d) für den Durchstoßpunkt mit der xy-Ebene wird $z = 0$, d.h.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $t_1 = \frac{1}{3}$ ergibt sich der Punkt $P_0(1;2;0)$.

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-3)^2; \;\; (x \in \mathbb{R})$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Bildes der Funktion $f$!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f$ im Intervall $-1 \leq x \leq 6$!

d) Im Koordinatenursprung ist die Tangente $t$ an das Bild der Funktion $f$ gelegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

e) Die Tangente $t$ und das Bild der Funktion $f$ haben außer dem Berührungspunkt nur den Punkt $P_1(6; y_1)$ gemeinsam.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion $f$ und der Tangente vollständig begrenzt wird.

a) Das Produkt wird Null, wenn einer der Faktoren Null ist

$$\frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-3)^2 = 0$$

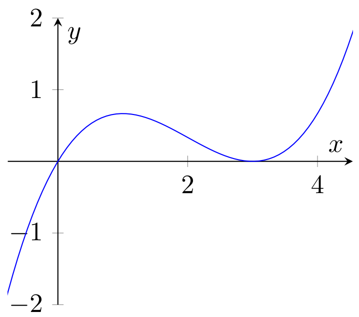
und somit $x_0 = 0; x_1 = 3$

b) 1.Ableitung: $y' = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$ ; 2.Ableitung: $y'' = x - 2$
die erste Ableitung gleich 0 setzen, ergibt zwei extremwertverdächtige Stellen $x_1 = 1; x_2 = 3$
mit der 2.Ableitung ergibt sich für $x_1$ ein lokales Maximum und für $x_2$ ein lokales Maximum
$\rightarrow E_{\min}(3; 0); E_{\max}(1; \frac{2}{3})$

c) Anstieg der Tangente im Koordinatenursprung: $f'(0) = \frac{3}{2}$
da die Tangente durch den Ursprung verläuft, wird $t : y = 1{,}5x$:

d) der 2.Schnittpunkt der Funktion mit der Tangente ist $P_1(6; 9)$.

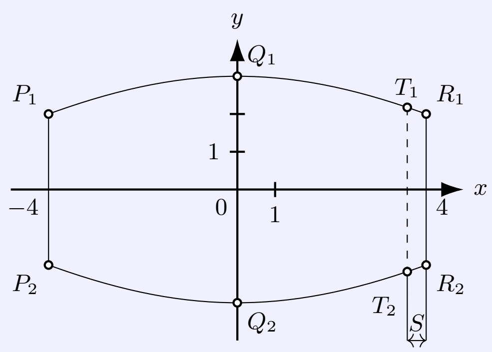
$$A = \left| \int_0^6 (t(x) - g(x))dx \right| = \left[ \frac{x^3(x-8)}{24} \right]_0^6 = \frac{432}{24} = 18 \text{ FE}$$




**Aufgabe 3**
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Fasses. Die Bögen $P_1Q_1R_1$ bzw. $P_2Q_2R_2$ werden durch die Parabeln

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 3 \text{ bzw. } y = \frac{1}{16}x^2 - 3$$

im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ beschrieben.
(Koordinateneinheit: 1 dm)




a) Berechnen Sie den Durchmesser des Fassbodens!

b) In welchem Abstand $s$ vom Fassboden beträgt der Durchmesser $T_1T_2$ des Fasses 5,0 dm?

c) Die Bögen des Achsenschnittes lassen sich durch Bögen der Ellipse annähern, die durch die Punkte $P_1, Q_1$ und $R_1$ geht und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung $O$ liegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Ellipse auf!

a) die Punkte $R_1, R_2$ haben die Funktionswerte 2 und -2, d.h. $R_1R_2 = 4\ dm$

b) die Funktion $y = -\frac{1}{16}x^2 + 3$ muss bei $T_1$ den Funktionswert 2,5 haben
$-\frac{1}{16}x^2 + 3 = 2{,}5$ hat die Lösungen $x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}$
Für den Abstand ergibt sich $s = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17$ dm

c) Ansatz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $b = 9$
Einsetzen des Punktes $R_1$ ergibt $a^2 = \frac{144}{5}$, d.h. für die Ellipsengleichung

$$\frac{5x^2}{144} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**Aufgabe 4**
Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einem Flächeninhalt von 450 m$^2$ angelegt werden. Dazu ist der Platz an drei Seiten mit einem Zaun zu umgeben, an der vierten Seite wird er durch einen Teil der Werkhalle vollständig begrenzt.
Die Abmessungen des Platzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird. Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge des Zaunes!

rechteckiger Platz mit Fläche $A = a \cdot b = 450\ m^2$
da eine Seite von der Werkhalle gebildet wird, ist die Zielfunktion $u = a + 2b$
$a = \frac{450}{b}$ ergibt

$$u = \frac{450}{b} + 2b$$

1.Ableitung $u' = 2 - \frac{450}{b^2}$ hat die Nullstelle $b = 15$ ($b = -15$ entfällt)
somit $a = 30$ und für die Gesamtlänge = 60 m

**Kurzaufgaben 5**

a) Berechnen Sie $\vec{k} \times \vec{j}$ und $(\vec{k} \times \vec{j}) \bullet \vec{i}$ !

b) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)$ mit $a_n = \frac{n}{n-1}, n > 1$, eine monoton fallende Folge ist!

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $y = f(x) = \ln(x + 2)$ an!

a) $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$; Produkt von Einheitsvektoren und Rechte-Hand-Regel
$(\vec{k} \times \vec{j}) \bullet \vec{i} = -\vec{i} \bullet \vec{i} = -1$

b)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$a_n$ ist monoton fallend

c) aus $x + 2 > 0$ wird $x > -2$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben sind Funktionen durch

$$y = f(x) = xe^{ax}(x, a \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0)$$

a) Das Bild jeder dieser Funktionen hat genau eine lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Ermitteln Sie die Art des Extremums.

b) Bilden Sie die dritte Ableitung der Funktion $f(x)$!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die $n$-te Ableitung dieser Funktion gilt:

$$f^{(n)}(x) = a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (n + ax)$$

a) 1.Ableitung $y' = (ax+1)e^{ax}$ ; 2.Ableitung $y'' = a(ax+2)e^{ax}$
$(ax+1)e^{ax} = 0$ ergibt $x = -\frac{1}{a}$ ; $f''(-\frac{1}{a}) = \frac{a}{e} > 0$
Funktionswert $f(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{ae}$, d.h. $E(-\frac{1}{a}; -\frac{1}{ae})$ ist lokaler Minimumpunkt

b) $f'''(x) = a^2 e^{ax}(3 + ax)$

c) Induktionsanfang gegeben
Induktionsvoraussetzung für $n = k$: $f^{(k)}(x) = a^{k-1}e^{ax}(k + ax)$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$: $f^{(k+1)}(x) = a^k e^{ax}(k + 1 + ax)$
Induktionsbeweis (mit Produktregel):

$$(f^{(k)}(x))' = (a^{k-1}e^{ax}(k + ax))' =$$
$$= a^{k-1}(ae^{ax}(k + ax) + e^{ax}a) = a^{k-1} \cdot a(e^{ax}(k + ax) + e^{ax}) = a^k e^{ax}(k + 1 + ax) = f^{(k+1)}(x)$$

**Aufgabe 7**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \sin(2x) + 2 \cdot \cos x; (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $f$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes der Funktion $f$!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Berechnen Sie $f(0)$ und $f(\pi)$. Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f$!

d) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral:

$$\int (\sin(2x) + 2 \cdot \cos x)dx$$

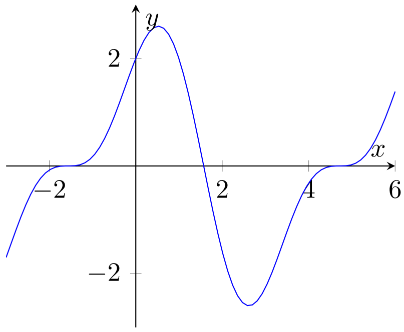
a) $0 = \sin 2x + 2\cos x = 2\sin x \cos x + 2\cos x = 2\cos x \cdot (\sin x + 1)$
$\cos x = 0$ ergibt $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ; $\sin x + 1 = 0$ hat im Intervall keine Lösung

b) 1.Ableitung: $y' = 2\cos 2x - 2\sin x$ ; 2.Ableitung: $y'' = -4\sin 2x - 2\cos x$

$$0 = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x = 2 - 4\sin^2 x - 2\sin x$$

Substitution mit $u = \sin x$ ergibt

$$0 = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}$$




Lösungen: $u_1 = -1; u_2 = \frac{1}{2}$
Rücksubstitution ergibt im Lösungsintervall $x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}$
Prüfung mit 2.Ableitung
$f''(\frac{\pi}{6}) = -3\sqrt{3} < 0; f''(\frac{5\pi}{6}) = 3\sqrt{3} > 0$
Ergebnis: $E_{\max}(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{2}\sqrt{3}); E_{\min}(\frac{5\pi}{6}; -\frac{3}{2}\sqrt{3})$

c) $f(0) = 2; f(\pi) = -2$

d) $\int \sin(2x) + 2\cos x dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + 2\sin x + c$

**Aufgabe 8**
Die Gleichung einer monoton fallenden Funktion sei

$$y = f(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}}$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $f$ an!

b) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetabelle:

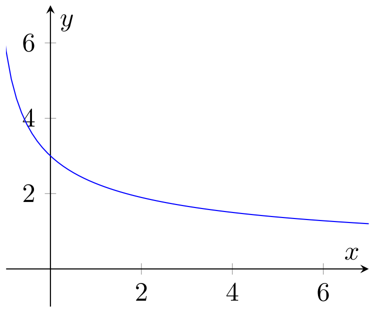
| $x$ | -1 | 0 | | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 1,5 | |

Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f$ im Intervall $-1 \leq x \leq 7$!

c) Das Bild der Funktion $f$, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = 7$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt $A_1$ dieser Fläche!

d) Das Bild der Funktion $f$, die Koordinatenachsen und eine Gerade $x = b; (b > 0)$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie b für den Fall, dass der Inhalt $A_2$ dieser Fläche 8 FE beträgt!

e) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle $x_0 = 0$!




a) $x$ reell und $x > -\frac{4}{3}$

b)

| $x$ | -1 | 0 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 3 | 1,5 | 1,2 |

c)

$$A_1 = \int\limits_0^7 \frac{6}{\sqrt{3x+4}} dx = \left[4\sqrt{3x+4}\right]_0^7 = 20 - 8 = 12FE$$

d)

$$A_2 = \int\limits_0^b \frac{6}{\sqrt{3x+4}} dx = \left[4\sqrt{3x+4}\right]_0^b = 4\sqrt{3b+4} - 8 = 8FE$$

Lösung: $b = 4$

e)

$$f'(x) = \frac{-9}{\sqrt{(3x+4)^3}}; f'(0) = -1{,}125$$

## 1.41 Abituraufgaben 1981

**Pflichtaufgaben**

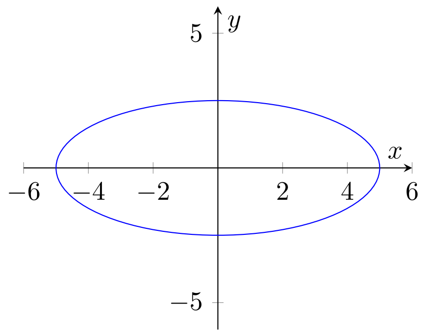
**Aufgabe 1**
Gegeben ist die Ellipse mit den Scheitelpunkten $A_1(5;0), A_2(-5;0), B_1(0;\frac{5}{2})$ und $B_2(0;-\frac{5}{2})$

a) Geben Sie die Gleichung diese Ellipse an!
Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Ellipse, und zeichnen Sie die Ellipse!

b) Im Punkt $P_0(3;2)$ dieser Ellipse sei die Tangente t an die Ellipse gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, die durch $P_0$ geht und senkrecht auf der Tangente t steht!
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden g mit der x-Achse!

a) große Halbachse a = 5, kleine Halbachse $b = \frac{5}{2}$




Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$$

b) aus Formelsammlung allgemeine Tangentengleichung für Ellipse in Mittelpunktslage

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$P_0$ einsetzen $\rightarrow \frac{3x}{25} + \frac{8y}{25} = 1$ und umstellen ergibt

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{25}{8}$$

c) Normale durch $P_0 \rightarrow$ Ansatz $y = m_{Normale}x + n$
$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = \frac{8}{3}$
Normalengleichung: $g : y = \frac{8}{3}x + n$ ; Punkt $P_0$ einsetzen, ergibt n = -6
Normalengleichung: $g : y = \frac{8}{3}x - 6$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $Q(\frac{18}{8};0)$

**Aufgabe 2**
Bei einer Übung der NVA soll vom Stab einer Einheit im Punkt $S(0;0;1)$ eine Verbindung zum Raketenstützpunkt $P(10;50;0)$ durch Richtfunk hergestellt werden.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{SP}$ vom Stab der Einheit zum Raketenstützpunkt!

b) Im Punkt $R_1(0;10;1)$ wird eine Richtfunkstation eingerichtet.
Berechnen Sie den Winkel $\alpha$ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{R_1S}$ und $\overrightarrow{R_1P}$!

c) Zur Verbesserung der Empfangsqualität wird im Punkt $R_2(5;30;0{,}5)$ eine Richtfunkstation zwischengeschaltet.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte $R_1$ und $R_2$ geht!
Weisen Sie nach, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

a) $d = |\overline{SP}| = \sqrt{(0-10)^2 + (0-50)^2 + (1-0)^2} = 51\ km$

b) $R_1(0;10;1)$ ergibt für die Vektoren $\overrightarrow{R_1S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{R_1P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ -1 \end{pmatrix}$

mit $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{R_1S} \bullet \overrightarrow{R_1P}}{|\overrightarrow{R_1S}||\overrightarrow{R_1P}|}$ wird $\alpha = 165{,}9°$

c)

$$g(R_1R_2) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von P ergibt t = 2, d.h. P erfüllt g und liegt auf der Geraden g.

**Aufgabe 3**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\ ;\ (n > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Folge an!
Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

b) Für das n-te Glied der Partialsummenfolge $(s_n)$ gilt:

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Beweisen Sie diese Behauptung durch vollständige Induktion!

c) Geben Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge $(s_n)$ an!

a) $a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{4}; s_1 = 1; s_2 = \frac{3}{2}; s_3 = \frac{7}{4}$

b) Induktionsanfang für n = 1: $a_1 = 1 \equiv 1 = 2 - \frac{1}{2^{1-1}} = s_1$
Induktionsvoraussetzung für n = k gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

Induktionsbehauptung für n = k+1 gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} = \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{(k+1)-1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1-1}} = 2 - \frac{1}{2^k}$$

Induktionsschritt: in Behauptung Voraussetzung einsetzen

$$2 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{(k+1)-1}} = 2 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k} = s_{k+1}$$

c) $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = 2$

**Aufgabe 4**
Gegeben ist eine Funktion f durch:

$$y = f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}; (x \in R; x \neq 0)$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion f, und untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstellen hat!

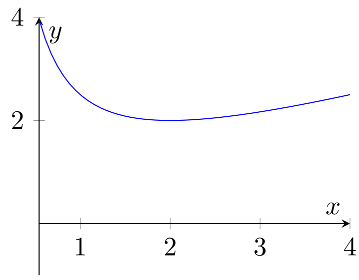
c) Berechnen Sie f(1) und f(4), und skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $1 \leq x \leq 4$!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = 4 vollständig begrenzt wird!

a) 1.Ableitung: $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$ ; 2.Ableitung: $y'' = \frac{4}{x^3}$
Nullstellen der 1.Ableitung: $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$
Einsetzen in 2.Ableitung: $f''(2) = \frac{1}{2}; f''(-2) = -\frac{1}{2}$
lokale Extrempunkte $E_{max}(-2; -2); E_{min}(2; 2)$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0 \rightarrow x^2 = -4$$

keine reelle Lösung, d.h. f(x) hat keine reellen Nullstellen

b) 


c) Funktionswerte $f(1) = \frac{5}{2}; f(4) = \frac{5}{2}$

d)

$$A = \left| \int_1^4 (\frac{2}{x} + \frac{x}{2}) dx \right| = \left[ \frac{x^2}{4} + 2 \ln x \right]_1^4 = 4 \ln 2 + \frac{15}{4} \approx 6{,}523 \; FE$$

**Kurzaufgaben 5**

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$ für $\vec{a} = \vec{i} + \vec{i}$ und $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$!

b) Ermitteln Sie $\int \sqrt{3x - 6} dx$ ; $(x \in R; x \geq 2)$!

c) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = e^x \sin 2x$ ; $(x \in R)$!
Berechnen Sie f'(0)!

a) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

b) $\int \sqrt{3x - 6} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(x-2)^3} + c$

c)

$$f'(x) = e^x (2 \cdot \cos 2x + \sin 2x); f'(0) = 2$$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Ein Kondensator wird über einen Widerstand entladen. Die Maßzahl U der Kondensatorspannung lässt sich als Funktion der Maßzahl t der Zeit beschreiben durch

$$U = f(t) = U_0 \cdot e^{-0{,}5t} \text{ ; } (t \in R; t \geq 0)$$

Dabei sind die Spannung in Volt und die Zeit in Sekunden gemessen.
$U_0$ ist die Maßzahl der Spannung für t = 0. Es sei $U_0 = 800$.

a) Berechnen Sie $U_2 = f(2)$ und $U_4 = f(4)$!

b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $0 \leq t \leq 4$!

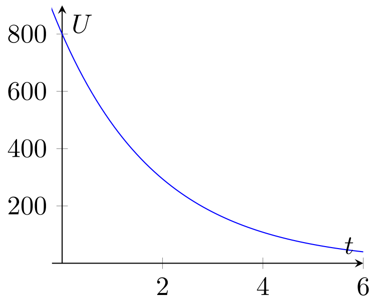
c) Nach welcher Zeit beträgt die Spannung des Kondensators 20 Volt?

d) Für den Mittelwert $U_M$ der Maßzahl der Spannung im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ gilt:

$$U_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Berechnen Sie $U_M$ für das Intervall $0 \leq t \leq 4$!

a) $U_2 = 294{,}3\ V; U_4 = 108{,}27\ V$; b)

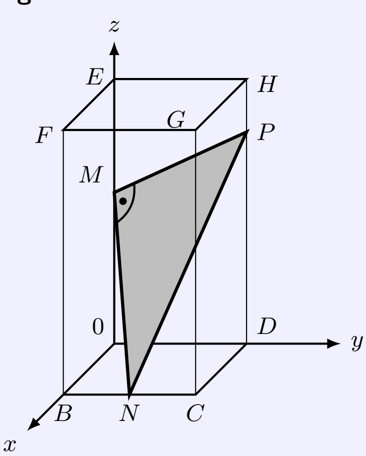



c) $20V = 800 \cdot e^{-0.5t} \rightarrow t = 2\ln 40 \approx 7{,}4\ s$

d)

$$U_M = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t)dt = \left[-1600e^{-0.5x}\right]_0^4 \approx 345{,}9\ V$$

**Aufgabe 7**




Die Skizze zeigt ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $OBCD$ in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Es gilt: $\overline{OB} = a$ Längeneinheiten, $\overline{OE} = 2a$ Längeneinheiten. Skizze (nicht maßstäblich).
$M$ sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{OE}$, $N$ der Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte $M$ und $N$ an!

b) Auf der Kante $\overline{DH}$ liegt ein Punkt $P$ derart, dass $\overline{MP} \perp \overline{MN}$ gilt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P$.

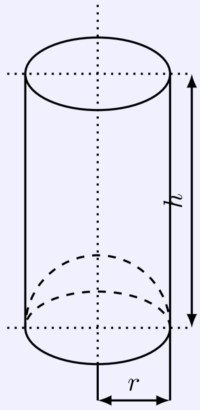
c) Berechnen Sie $a$ für den Fall, dass das rechtwinklige Dreieck $MNP$ den Flächeninhalt
$A = 6\sqrt{5}$ Flächeneinheiten hat!

a) $M(0;0;a); N(a;\frac{a}{2};0)$

b) $\overrightarrow{MP}$ ist senkrecht zu $\overrightarrow{MN}$ g.d.w.
Skalarprodukt $\overrightarrow{MP} \bullet \overrightarrow{MN} = 0$
Ansatz für $P(0;a;z)$ auf Kante $\overline{DH}$
$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z-a \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ -a \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\frac{a^2}{2} - a(z-a) = 0 \to z = \frac{3}{2}a \to P(0;a;1{,}5a)$

c) Ansatz für Flächeninhalt
$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{MN}| = 6\sqrt{5}$
$\frac{1}{2}|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}a^2}\sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3a}{2} =$
$= \frac{3a^2}{8}\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \to a = 4\ LE$

**Aufgabe 8**




Ein oben offener zylindrischer Behälter hat als Boden eine nach innen gewölbte Halbkugel (siehe Skizze!). Der Behälter hat den Oberflächeninhalt $A$ ($A$ konstant).
(Die Oberfläche besteht aus Zylindermantel und Oberfläche der Halbkugel.)

Berechnen Sie den Radius $r$ der Halbkugel in Abhängigkeit von $A$ für den Fall, dass das Fassungsvermögen des Behälters maximal wird! (Die Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)
Skizze nicht maßstäblich.

Die Oberfläche besteht aus Zylindermantel und Halbkugelfläche $A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \to h = \frac{A-2\pi r^2}{2\pi r}$
Zielfunktion Zylindervolumen - Halbkugelvolumen: $V(r) = \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3$
Einsetzen von $h$ in $V(r)$ ergibt

$$V(r) = \frac{Ar}{2} - \frac{5}{3}\pi r^3$$

1.Ableitung $V' = \frac{A}{2} - 5\pi r^2$ ; 2.Ableitung $V'' = -10\pi r$
da 2.Ableitung im Definitionsbereich stets negativ: maximales Volumen bei $r = \sqrt{\frac{A}{10\pi}}$

## 1.42 Abituraufgaben 1982

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist der Kreis $k$ gegeben. Sein Mittelpunkt liegt im Koordinatenursprung, sein Radius beträgt $2\sqrt{5}$ Längeneinheiten.

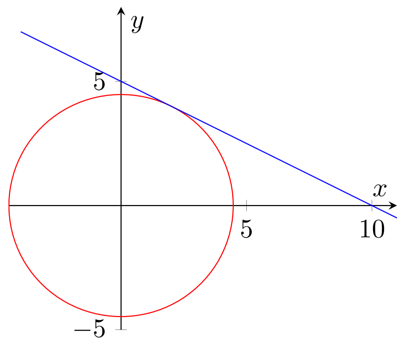
a) Zeichnen Sie den Kreis $k$. Geben Sie eine Gleichung des Kreises $k$ an!

b) $A(x_1; 4)$ und $B(x_1; -4)$, $x_1 > 0$, sind Punkte des Kreises $k$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der im Punkt $A$ an den Kreis $k$ gelegten Tangente $t$!
Zeichnen Sie die Tangente $t$ ein!

c) Zeichnen Sie durch den Punkt $B$ die Parallele $g$ zur Tangente $t$!
Geben Sie eine Gleichung der Geraden $g$ an!

d) Die Gerade $g$ schneidet den Kreis $k$ in den Punkten $B$ und $C$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $C$!

a) Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = 20$




b) $y$-Wert 4 einsetzen und $x$ ermitteln
$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$
Punkte $A(2; 4); B(2; -4)$
Allgemeine Tangentengleichung $xx_1 + yy_1 = r^2$
Punkt $A$ einsetzen, ergibt $2x + 4y = 20 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$

c) Gerade $y = -\frac{1}{2}x + n$ verläuft durch Punkt $B$
Punkt einsetzen, ergibt n = -3, d.h. $y = -\frac{1}{2}x - 3$

d) Gerade $y = -\frac{1}{2}x - 3$ in Kreisgleichung einsetzen

$$x^2 + (-\frac{1}{2}x - 3)^2 = 20$$

quadratische Gleichung $5x^2 + 12x - 44 = 0$ hat als 2.Lösung $x_2 = -\frac{22}{5}$
mit Funktionswert wird $C(-4{,}4; -0{,}8)$

**Aufgabe 2**
Die Gleichung einer Funktion $f$ sei

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

a) Ermitteln Sie Nullstellen und Polstelle der Funktion $f$!

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f$ im Unendlichen!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f$ keine lokalen Extrema hat!

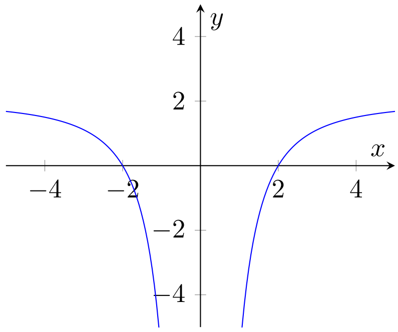
d) Skizzieren Sie das Bild (den Graph) der Funktion $f$ im Intervall $-5 \leq x \leq +5$!

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild (Graph) der Funktion $f$, von der x-Achse und den Geraden $x = 4$ und $x = 5$ vollständig begrenzt wird!

a) Nullstelle: Funktion gleich 0 setzen: $\frac{2x^2-8}{x^2} = 0$
aus $2x^2 - 8 = 0$ wird $x_0 = -2; x_1 = 2$ für die Nullstellen ; Polstelle $x_3 = 0$

b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2-\frac{8}{x^2})}{x^2} = \lim_{x\to\infty} (2 - \frac{8}{x^2}) = 2$$
durch das Quadrat im Nenner ist auch der Grenzwert gegen "minus-Unendlich"gleich 2.

c) die 1.Ableitung $y' = \frac{16}{x^3}$ kann auf Grund des Zählers keine Nullstellen haben.




d)

e)
$$A = \left| \int_4^5 \frac{2x^2-8}{x^2} dx \right| = \left[ \frac{2}{x}(x^2+4) \right]_4^5 = \frac{8}{5}\ FE$$

**Aufgabe 3**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch
$$a_n = \frac{1}{2n(n+1)} \ ; (n > 0)$$
a) Berechnen Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Zahlenfolge!
b) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)$ monoton fallend ist!
c) Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!
d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:
$$s_n = \frac{n}{2(n+1)}$$

a) $a_1 = \frac{1}{4}; a_2 = \frac{1}{12}; a_3 = \frac{1}{24}$

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{n-(n+2)}{2n(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{2n(n+1)n+2)} < 0$
die Zahlenfolge ist monoton fallend

c) $s_1 = \frac{1}{4}; s_2 = \frac{1}{3}; s_3 = \frac{3}{8}$

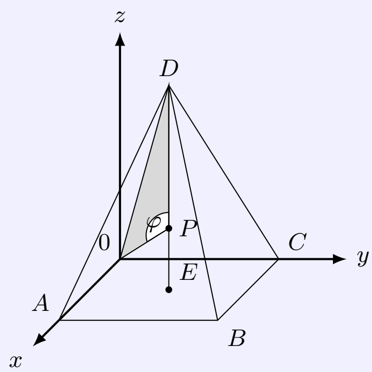
d) Induktionsanfang für n=1: $a_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2(1+1)} = s_1$
Induktionsvoraussetzung für n=k gilt: $a_1 + a_2 + ... + \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} = s_n$
Induktionsbehauptung für n=k+1 gilt dann: $a_1 + a_2 + ... + a_n + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)} = s_{n+1}$

Induktionsbeweis (Voraussetzung in Behauptung einsetzen)

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)} = s_{n+1}$$

**Aufgabe 4**

Bei einer Untersuchung von Molekülstrukturen werden Punktmodelle betrachtet. Ein solches Punktmodell sei durch die Eckpunkte $O$, $A$, $B$, $C$, $D$ einer geraden Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $OABC$ und der Spitze $D$ gegeben (siehe Skizze!).
Pyramidenhöhe und jede Seite der quadratischen Grundfläche haben die gleiche Länge von je 4 Längeneinheiten. Skizze nicht maßstäblich!




a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ an!

b) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{OD}$!

c) Auf der Pyramidenhöhe $\overline{ED}$ existiert ein Punkt $P(2;2;z_p)$, für den gilt: $\overline{PO} = \overline{PD}$.
Berechnen Sie $z_p$!

d) Berechnen Sie den Winkel $\phi = \measuredangle OPD$!

a) Koordinaten $A(4;0;0); B(4;4;0); C(0;4;0); D(2;2;4)$

b) $|\overline{OD}| = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6}\ LE$

c) Ansatz $P(2;2;z_p)$: $|\overline{PO}| = |\overline{PD}|$, d.h. $\sqrt{2^2+2^2+z_p^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-2)^2+(z_p-4)^2}$
d.h. $8+z_p^2 = z_p^2 - 8z_p + 16 \to z_p = 1$

d)

$$\cos\measuredangle OPD = \frac{\overrightarrow{PO} \bullet \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = -\frac{1}{3} \to \phi = 109{,}5^\circ$$

**Kurzaufgaben 5**

a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$!

b) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(\sin x)$ ; $(x \in \mathbb{R}; 0 < x < \pi)$.
Berechnen Sie $f'(\frac{\pi}{2})$!

c) Berechnen Sie $\int \cos 3x\ dx$!

a) $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120$

b) 1.Ableitung: $f'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} = \cot x; f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $\displaystyle\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \cos 2x - 8 \sin x - 1 \ ; \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Bildes (Graphen) der Funktion $f$! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

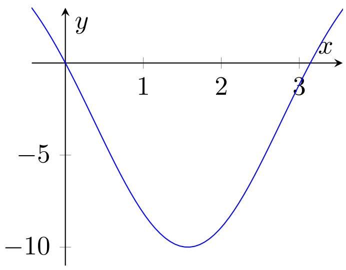
c) Berechnen Sie $f(\frac{\pi}{4})$ und $f(\frac{3\pi}{4})$!
Skizzieren Sie das Bild (den Graph) der Funktion f!

d) Gegeben seien Funktionen $g$ durch

$$y = g(x) = a \cdot (\cos 2x - 8 \sin x - 1) \ ; \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi; a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

Berechnen Sie den Wert des Parameters $a$ für den Fall, dass die im Punkt $P_0(\frac{\pi}{6}; y_0)$ an das Bild (den Graph) der Funktion $g$ gelegte Tangente den Anstieg $m = \sqrt{3}$ hat!

a) $0 = \cos 2x - 8 \sin x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x - 8 \sin x - 1 = - \sin x(\sin x + 8)$
Lösungen im Intervall $x_0 = 0; x_1 = \pi;$




b) 1.Ableitung $y' = -2 \sin 2x - 8 \cos x$ ; 2.Ableitung $y'' = -4 \cos 2x + 8 \sin x$

$$0 = -2 \sin 2x - 8 \cos x = 4 \sin x \cos x - 8 \cos x = 4 \cos x(\sin x - 8)$$

extremwertverdächtige Stelle im Intervall $x_1 = \frac{\pi}{2}$
Funktionswert der 2.Ableitung $f''(\frac{\pi}{2}) = 8 \to E_{\min}(\frac{\pi}{2}; -10)$

c) $f(\frac{\pi}{4}) = -(4\sqrt{2} + 1); f(\frac{3\pi}{4} = -(4\sqrt{22} + 1)$

d) 1.Ableitung: $g'(x) = y' = -2a \sin 2x - 8a \cos x;$
$g'(\frac{\pi}{6}) = -5\sqrt{3}a = m_t = \sqrt{3}; a = -1/5$

**Aufgabe 7**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

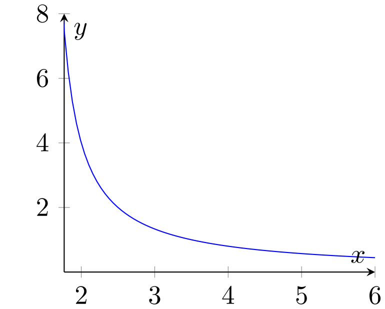
$$y = f(x) = \frac{4}{2x - 3} \ ; \ (x \in \mathbb{R}; x > 1{,}5)$$

a) Zeichnen Sie das Bild (den Graph) der Funktion $f$ im Intervall $2 \leq x \leq 6$!

b) Ermitteln Sie alle $x$, für die $f(x) < 1$ ist!

c) Die Tangente im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ an das Bild (den Graph) von $f$ hat den Anstieg $m = -2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $P_0$!
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an!

d) Das Bild (der Graph) der Funktion $f$, die x-Achse sowie die Geraden $x = 2$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Durch eine Gerade $x = a$ $(a \in \mathbb{R}; 2 < a < 6)$ wird diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Berechnen Sie $a$!




a) grafische Darstellung

b) Ansatz $\frac{4}{2x-3} < 1$ mit Fallunterscheidung
da nach Definitionsbereich $x > 1{,}5$ wird
$4 < 2x - 3 \rightarrow x > 3{,}5$
die Funktionswerte sind für $x > 3{,}5$ kleiner 1

c) 1.Ableitung $y' = \frac{-8}{(2x-3)^2}$; Ansatz $\frac{-8}{(2x_0-3)^2} = -2$
Lösung $x_{01} = \frac{5}{2}; x_{02} = \frac{1}{2}$, $x_{02}$ entfällt, da nicht im DB
$x_0 = \frac{5}{2}; y_0 = 2$; Einsetzen in $y = -2x + n$ ergibt n = 7
Tangente $t : y = -2x + 7$

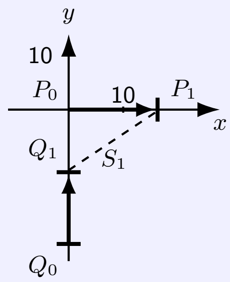
d)

$$A = \left| \int_2^6 \frac{4}{2x-3} dx \right| = [2 \ln (2x-3)]_2^6 = 4 \ln 3$$

Ansatz allgemein für a

$$\left| \int_2^a \frac{4}{2x-3} dx \right| = [2 \ln (2x-3)]_2^a = 2 \ln (2a-3) - 0 = \frac{A}{2} = 2 \ln 3 \rightarrow a = 3$$

**Aufgabe 8**




In der Skizze sind die Bewegungen zweier Schiffe $P$ und $Q$ bezogen auf ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit: 1 km) dargestellt. Die Schiffe $P$ und $Q$ befinden sich anfangs $(t_0 = 0)$ in den Punkten $P_0(0; 0)$ bzw. $Q_0(0; -50)$ (siehe Skizze).

Das Schiff $P$ fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Richtung Osten, das Schiff $Q$ mit der konstanten Geschwindigkeit 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Richtung Norden.
Nach $t$ Stunden befinden sich folglich das Schiff $P$ im Punkt $P(15t; 0)$ und das Schiff $Q$ im Punkt $Q(0; 30t - 50)$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte $P_1$ und $Q_1$ an, in denen sich die Schiffe nach einer Stunden $(t_1 = 1)$ befinden! Ihre Entfernung voneinander beträgt dann $s_1$ Kilometer.
Berechnen Sie $s_1 = \overline{P_1Q_1}$!

b) Wie groß ist die Entfernung der Schiffe voneinander, wenn sich das Schiff $Q$ im Punkt $P_0(0; 0)$ befindet?

c) Nach $t$ Stunden sind die Schiffe $s$ Kilometer voneinander entfernt.
Geben Sie $s = \overline{P_tQ_t}$ als Funktion von $t$ an!

d) Für welches $t$ haben die Schiffe $P$ und $Q$ die kürzeste Entfernung voneinander?
Berechnen Sie diese minimale Entfernung in km!
(Hinweis auf den Nachweis des Minimums wird in dieser Aufgabe verzichtet.)

a) $P_1(15; 0); Q_1(0, -20)$; Abstand $\overline{P_1Q_1} = \sqrt{15^2 + (-20)^2} = 25$ km

b) Schiff Q ist in $P_0$, wenn $30t - 50 = 0$, d.h. $t = \frac{5}{3}\ h$
Schiff P ist dann im Punkt $P(15 \cdot \frac{5}{3}; 0) = P(25; 0)$; Abstand beider Schiffe 25 km

c) $s(t) = \sqrt{(15t)^2 + (30t - 50)^2} = \sqrt{1125t^2 - 3000t + 2500)}$

d) 1.Ableitung für Radikand: $g'(x) = 2250t - 3000$
Nullstelle für $t_{\min} = \frac{4}{3}$ h; Abstand der Schiffe $s_{\min} = 22{,}361$ km

## 1.43 Abituraufgaben 1983

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Bei einer Übung der NVA wird von einer im Koordinatenursprung $0(0;0;0)$ befindlichen Radarstation ein Flugzeug nacheinander in den Punkten $P_1(-5;50;4)$ und $P_2(15;30;3)$ geortet. Die Bahn des Flugzeuges verläuft geradlinig.
Zur Bekämpfung eines Erdziels wird vom Flugzeug aus im Punkt $P_2$ eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen, die sich auf einer geradlinigen Bahn mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bewegt. (Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Flugzeuges und die Bahn der Rakete auf!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen diesen beiden Bahnen!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_3(x_3;y_3;0)$, in dem die Rakete das Erdziel erreicht!

d) Die Rakete fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $1{,}5\frac{\text{km}}{\text{s}}$.
Berechnen Sie die Flugdauer für die Strecke $P_2P_3$!

a) Flugzeug: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 50 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$; Rakete: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b)
$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{801}\sqrt{36}} = \frac{162}{6\sqrt{801}} \approx 0{,}9540 \to \alpha = 17{,}4^\circ$$

c) z-Koordinate der Raketenbahn ist 0: $t_2 = \frac{3}{2} \to P_3(21;24;0)$

d) Entfernung $|\overline{P_2P_3}| = \sqrt{(21-15)^2 + (24-30)^2 + (-3)^2} = 9 \to t = 6\ s$

**Aufgabe 2**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch

$$a_n = \frac{12}{(n+3)(n+4)}\ ;\ (n > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Folge an!

b) Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$s_n = \frac{3n}{n+4}$$

d) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge $(s_n)$!

a) $a_1 = \frac{3}{5}; a_2 = \frac{2}{5}; a_3 = \frac{2}{7}$

b) $s_1 = \frac{3}{5}; s_2 = 1; s_3 = \frac{9}{7}$

c) Induktionsanfang für n = 1: $\frac{3}{5} = s_1 = \frac{3\cdot 1}{1+4}$
Induktionsvoraussetzung für n = k gilt: $a_1 + ... + \frac{12}{(k+3)(k+4)} = \frac{3k}{k+4}$
Induktionsbehauptung für n = k+1 gilt dann: $a_1 + ... + \frac{12}{(k+3)(k+4)} + \frac{12}{(k+4)(k+5)} = \frac{3k+3}{k+5}$

Induktionsbeweis (Einsetzen der Voraussetzung in Behauptung)

$$\frac{3k}{k+4}+\frac{12}{(k+4)(k+5)}=\frac{3k(k+5)}{(k+4)(k+5)}+\frac{12}{(k+4)(k+5)}=\frac{3k^2+15k+12}{(k+4)(k+5)}$$

im Zähler (k+4) ausklammern

$$=\frac{(k+4)(3k+3)}{(k+4)(k+5)}=\frac{3k+3}{k+5}=s_{k+1}$$

**Aufgabe 3**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

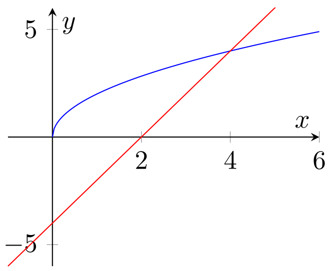
$$y=f(x)=2\sqrt{x}\ ;\ (x\in\mathbb{R}; x\geq 0)\text{ und } y=g(x)=2x-4\ ;\ (x\in\mathbb{R})$$

a) Die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ schneiden einander in genau einem Punkt $S$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $S$!

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ im Intervall $0 \leq x \leq 5$!

c) Die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie denn Inhalt dieser Fläche!

d) Es gibt eine Tangente $t$ an den Graph der Funktion $f$, die parallel zum Graph der Funktion $g$ verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes $P_0$ dieser Tangente $t$!

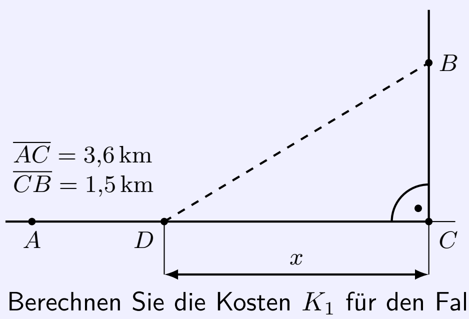



a) Funktionen gleich setzen: $2\sqrt{x}=2x-4$; Quadrieren ergibt
$0=x^2-5x+4 \rightarrow S(4;4)$; $x=1$ ist Scheinlösung c)

$$\int_0^4 2\sqrt{x}-(2x-4)dx=\left[-x^2+4x+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4\approx 10{,}67\ FE$$

d) Ansatz Tangente: $y=2x+n$
1.Ableitung $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ hat Wert $=2$ bei $x=\frac{1}{4}$
gesuchter Punkt $P_0(\frac{1}{4};1)$
Tangentengleichung $t: y=2x+\frac{1}{2}$

**Aufgabe 4**




Von einem Betrieb $A$ soll nach einem Betriebsteil $B$ eine Versorgungsleitung gelegt werden. $A$ und $B$ liegen an zwei geradlinig verlaufenden Straßen, die einander im Punkt $C$ rechtwinklig schneiden (siehe Skizze!).
Die Kosten für den Bau der Leitung längs der Straßen $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ sind mit 40 TM je Kilometer und im Gelände mit 50 TM je Kilometer zu veranschlagen.
(1 TM = 1000 Mark) Skizze nicht maßstäblich.

a) Berechnen Sie die Kosten $K_1$ für den Fall, dass die Leitung längs der Straßen von $A$ über $C$ nach $B$ verlegt wird!

b) Berechnen Sie die Kosten $K_2$ für den Fall, dass die Leitung im Gelände geradlinig von $A$ nach $B$ verlegt wird!

c) Die Kosten können dadurch gesenkt werden, dass die Versorgungsleitung von $A$ längs der Straße bis zu einem Punkt $D$ und von $D$ im Gelände geradlinig von $B$ verlegt wird.
Berechnen Sie die Länge $x$ der Strecke $\overline{DC}$ für den Fall, dass die Kosten minimal werden!
Wie hoch sind diese Kosten?
(Hinweis: Auf dem Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

a) $|\overline{AC}| + |\overline{CB}| = 3{,}6$ km $+1{,}5$ km $= 5{,}1$ km
Kosten $K_1 = 5{,}1$ km $\cdot\, 40\frac{\text{TM}}{\text{km}} = 204$ TM

b) $|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}5^2} = 3{,}9$ km
Kosten $K_2 = 3{,}9$ km $\cdot\, 50\frac{\text{TM}}{\text{km}} = 195$ TM

c) Ansatz: $d = |\overline{AC} - x| + |\overline{DB}|$ mit $|\overline{DB}| = \sqrt{x^2 + |\overline{CB}|^2}$
Zielfunktion mit Kosten

$$d = 40(3{,}6 - x) + 50\sqrt{x^2 + 1{,}5^2}$$

1.Ableitung

$$d' = \frac{20(5x - 2\sqrt{4x^2+9})}{\sqrt{4x^2+9}}$$

Nullstelle $0 = 5x - 2\sqrt{4x^2+9}$ bei $x = 2 \to$ minimale Kosten von 189 TM

**Kurzaufgaben 5**

a) Ein Kreis ist gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M$ und den Radius $r$ des Kreises!

b) Berechnen Sie die Anzahl aller Permutationen der Elemente $a$, $b$, $c$, $d$, $e$!
Wie viele dieser Permutationen beginnen mit dem Element $b$?

c) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}$!

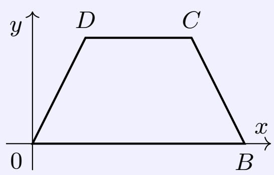
a) Gleichung umwandeln in $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36 \to M(3; -4); r = 6$

b) Permutation von 5 Elementen: 120 Permutationen, davon beginnen 4! = 24 mit $b$.

c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \left[\frac{-1}{4x+2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**




Gegeben sind Trapeze mit den Eckpunkten $0(0;0), B(4a;0), C(3a;a\sqrt{3}), D(a;a\sqrt{3})$ ; $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ (siehe Skizze!). Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Seiten $\overline{OD}$ und $\overline{BC}$!

b) Weisen Sie nach, dass die Diagonale $\overline{OC}$ senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$ steht!

c) Weisen Sie nach, dass die Diagonale $\overline{OC}$ den Winkel $\alpha = \measuredangle BOD$ halbiert!

d) Berechnen Sie den Parameter $a$ für den Fall, dass das Trapez den Flächeninhalt $A = 9\sqrt{3}$ hat!

a) $\overline{OD} = \sqrt{(a-0)^2 + (a\sqrt{3}-0)^2} = 2a = \overline{BC}$

b) Vektoren $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3a-4a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{BC} = -3a^2 + 3a^2 = 0$, d.h. senkrecht

c) Vektoren $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4a \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}$
Winkel $cos\measuredangle BOC = \frac{\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|} = \frac{12a^2}{4a\cdot\sqrt{12}a} = \frac{3}{\sqrt{12}}$
Winkel $cos\measuredangle COD = \frac{\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{6a^2}{\sqrt{12}a\cdot\sqrt{4}a} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$
Da die Kosinuswerte gleich groß sind, sind die Winkel gleich groß, d.h. die Diagonale halbiert den Winkel $\measuredangle BOC$

d) Höhe des Trapezes $h = \sqrt{(2a)^2 - (1a)^2} = \sqrt{3}a$
Trapezfläche

$$9\sqrt{3} = A = \frac{4a+2a}{2} \cdot \sqrt{3}a = 3\sqrt{3}a^2 \rightarrow a = \sqrt{3}$$

**Aufgabe 7**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = 10e^{-x} \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 4)$$

a) Ermitteln Sie die Funktionswerte $f(0)$, $f(2)$ und $f(4)$, und skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$!

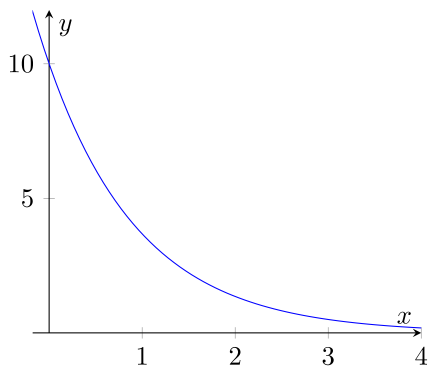
b) $P(x; f(x))$ sei ein Punkt des Graphen von $f$ im Intervall $0 \leq x \leq 4$.
Fällt man von $P$ die Lote auf die Koordinatenachsen, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten $x$ und $f(x)$.
Der Flächeninhalt dieses Rechtecks sei $A$.
Geben Sie $A$ als Funktion von $x$ an! Berechnen Sie $x$ für den Fall, dass $A$ maximal wird!

c) Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = e^{-ax} \ (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a > 0)$$

Die Graphen dieser Funktionen gehen durch den Punkt $P_1(0;1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangenten, die in $P_1$ an die Graphen der Funktionen gelegt werden können!

d) Genau eine dieser Tangenten schneidet die x-Achse im Punkt $P_2(3;0)$.
Berechnen Sie für diese Tangente den Wert des Parameters $a$!




a) $f(0) = 10; f(2) = 10e^{-2}; f(4) = 10e^{-4}$

b) Flächeninhalt des Rechtecks $A(x) = x \cdot 10e^{-x}$
1.Ableitung $y' = 10e^{-x}(1-x)$ ;
2.Ableitung $y'' = 10e^{-x}(x-2)$
Nullstelle der 1.Ableitung ist $x_{\max} = 1$
Maximum da $f''(1) < 0$
Flächeninhalt des Rechtecks $A_{\max} \approx 3{,}7$ FE

c) Ansatz Tangente $y = mx + n = f'(0)x + n$
1.Ableitung $y' = -ae^{-ax}; f'(0) = -a$
Punkt $P_1(0;1)$ in $y = -ax + n$ einsetzen $\rightarrow n = 1$
Tangente: $y = -ax + 1$

d) Punkt $P_2(3;0)$ in Tangentengleichung einsetzen, ergibt $a_2 = \frac{1}{3}$

**Aufgabe 8**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = x(2 - \ln x)\ (x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 8)$$

a) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(8)$!

b) Die Funktion $f$ hat genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle!

c) Der Graph von $f$ hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes! Weisen Sie die Art des Extremums nach!
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$!

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F$ mit

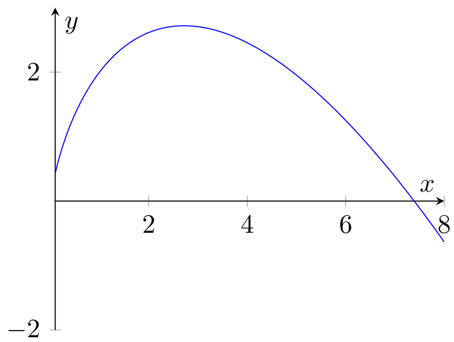
$$y = F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x\ (x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 8)$$

eine Stammfunktion von $f$ ist!

e) Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = x(a - \ln x)\ (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a \neq 0).$$

$P_1(1; a)$ ist ein Punkt der Graphen dieser Funktionen. Ermitteln Sie den Parameter $a$ für den Fall, dass die Tangente in $P_1$ an den Graph der entsprechenden Funktion den Anstieg $m = 1$ hat!




a) $f(1) = 2; f(8) = 16 - 8\ln 8 \approx -0{,}63$

b) Ansatz $0 = x(2 - \ln x)$; Nullstelle $x = 0$ entfällt, da außerhalb des Definitionsbereichs $2 - \ln x = 0 \rightarrow x_0 = e^2 \approx 7{,}39$

c) 1.Ableitung $y' = 1 - \ln x$ ; 2.Ableitung $y'' = -\frac{1}{x}$
Nullstelle der 1.Ableitung $x = e$, da $f''(e) = -\frac{1}{e} < 0 \rightarrow$ lokales Maximum $E_{max}(e; e)$

d) Nachweis über Ableitung

$$F'(x) = \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x\right)' = \frac{5}{2}x - \left(x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\right) = 2x - x \ln x = f(x)$$

e) Punktkoordinaten $P(1; ax)$; 1.Ableitung $y' = -\ln x + a - 1$
Anstieg m = 1 als $f''(x)$ einsetzen
$1 = -\ln 1 + a - 1 \rightarrow a = 2$

## 1.44 Abituraufgaben 1984

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3 \ (x \in \mathbb{R})$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f$!

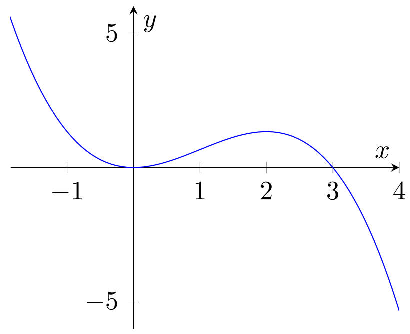
b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von $f$!
Untersuchen Sie die Art dieser Extrema!

c) Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $-2 \leq x \leq 4$!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion $f$ und der x-Achse vollständig begrenzt wird!

a) $0 = x^2 - \frac{1}{3}x^3 = x^2 \cdot (1 - \frac{1}{3}x)$, Nullstelle, wenn einer der Faktoren gleich Null ist: $x_0 = 0; x_1 = 3$

b) 1.Ableitung $y' = 2x - x^2$ ; 2.Ableitung $y'' = 2 - 2x$
Nullstellen der 1.Ableitung: $x_2 = 0; x_3 = 2$
Kontrolle über 2.Ableitung $f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ Minimum ; $f''(2) = -2 < 0 \rightarrow$ Maximum
lokale Extrempunkte $E_{\min}(0;0); E_{\max}(2;\frac{4}{3})$

c) 


d)

$$A = \int_0^3 x^2 - \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \ln(2x - 1) \ (x \in \mathbb{R}; x > 0{,}5)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle $x_0$ von $f$!

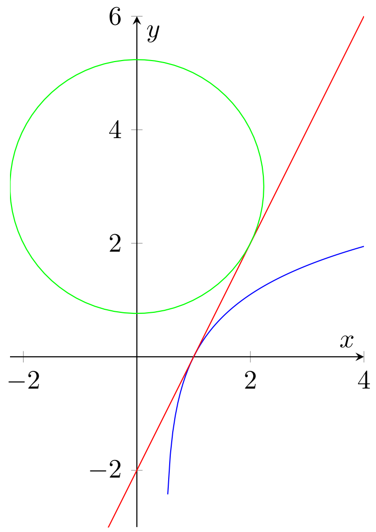
b) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(0{,}6)$, $f(2)$ und $f(4)$!
Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $0{,}6 \leq x \leq 4$!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente $t$ an den Graph der Funktion $f$ im Punkt $P_0(x_0; 0)$!

d) Der Punkt $M(0;3)$ ist Mittelpunkt des Kreises $k$ mit dem Radius $r = \sqrt{5}$.
Zeichnen Sie den Kreis in die Skizze ein! Stellen Sie die Gleichung des Kreises $k$ auf!

a) $0 = \ln(2x - 1) \rightarrow e^0 = 1 = 2x - 1 \rightarrow x_0 = 1$

b) $f(0{,}6) = \ln 0{,}2 \approx -1{,}6$; $f(2) = \ln 3 \approx 1{,}1$; $f(4) = \ln 7 \approx 1{,}95$




c) 1.Ableitung $y' = \frac{2}{2x-1}$; Anstieg der Tangente $f'(1) = 2$
Ansatz $y = 2x + n$; Punkt $P(1; 0)$ einsetzen, ergibt $n = -2$
Tangente $t : y = 2x - 2$

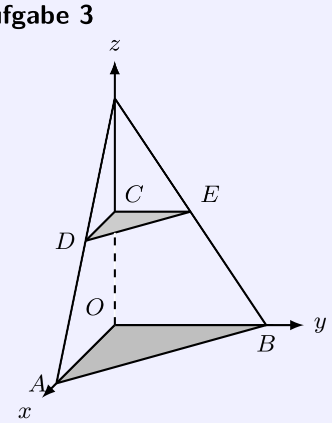
d) Kreis $k : x^2 + (y - 3)^2 = 5$, siehe Darstellung

e) Schnitt von Tangente $t$ mit Kreis: Tangente in Kreisgleichung einsetzen

$$x^2 + (2x - 2 - 3)^2 = 5 = x^2 + (2x - 5)^2 = 5x^2 - 20x + 25$$

quadratische Gleichung $0 = x^2 - 4x + 4$ hat nur Lösung $x_p = 2$
genau ein gemeinsamer Punkt bei $x_p = 2$

**Aufgabe 3**




Skizze (nicht maßstäblich)

Die Punkte $O$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sind Eckpunkte eines Pyramidenstumpfes mit $\overline{OA} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{OB} \parallel \overline{CE}$ (siehe Skizze!).
Es gilt: $\overline{OA} = \overline{OB} = 6{,}0$ cm und $\overline{CD} = \overline{CE} = 3{,}0$ cm ; $\overline{OC} = 3{,}0$ cm

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ an!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der Diagonalen $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$!

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$!

d) Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{OS}$ orthogonal zur Diagonalen $\overline{AE}$ ist!

a) $A(6; 0; 0); B(0; 6; 0); C(0; 0; 3); D(3; 0; 3); E(0; 3; 3)$

b) Geradengleichungen

$$g(AE) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} ; g(BD) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geradengleichungen gleichsetzen. Gleichungssystem ergibt Schnittpunkt $S(2; 2; 2)$

c)

$$\cos \measuredangle(AE,BD) = \frac{\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{27}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = \frac{1}{2} \to \alpha = 60°$$

d) Nachweise von $\overline{OS} \perp \overline{AE}$ mittels Skalarprodukt

$$\overrightarrow{OS} \bullet \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

d.h. die Strecken sind zueinander senkrecht

**Aufgabe 4**
Eine Zentrifuge läuft mit einer Drehzahl von $a_0$ Umdrehungen pro Minute. Nach Abschalten des Stromes verringert sich die Drehzahl und nimmt nach 1 Sekunde den Wert $a_1$ Umdrehungen pro Minute an, nach $k$ Sekunden den Wert $a_k$ Umdrehungen pro Minute.

a) Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, ...$ sind Glieder einer geometrischen Folge.
Berechnen Sie die Glieder $a_2$ und $a_3$ dieser Folge für den Fall, dass $a_0 = 1250$ und $a_1 = 1000$ gilt!

b) Die Drehzahl $y$ Umdrehungen pro Minute nach $t$ Sekunden kann auch beschrieben werden durch eine Exponentialfunktion der Form

$$y = f(t) = 1250 \cdot e^{-ct} \ (t \in \mathbb{R}, t \geq 0; c \in \mathbb{R}, c > 0)$$

Berechnen Sie $c$ für den Fall, dass $f(1) = 1000$ gilt!
Berechnen Sie für diesen Fall $f(3)$

a) Quotient $q$ der geometrischen Zahlenfolge $q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{4}{5}$ d.h. $a_2 = 800; a_3 = 640$

b) Gleichung $1000 = 1250e^{-c\cdot 1}$ auflösen

$$\frac{4}{5} = e^{-c\cdot 1} \to \ln\frac{4}{5} = -c \to c = -\ln\frac{4}{5} \approx 0{,}22$$

Funktionswert $f(3) = 640$

**Kurzaufgaben 5**

a) Gegeben ist die Funktion $f$ durch $y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{e^{3x}}$ $(x \in \mathbb{R})$. Berechnen Sie $f'(0)$!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5}{1+2x-3x^2}$

c) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, in denen die auftretenden Ziffern ungerade und voneinander verschieden sind?

a) Ableitung mittels Quotientenregel ermitteln

$$f'(x) = \frac{-2xe^{3x} - 3(1-x^2)e^{3x}}{(e^{3x})^2} = \frac{3x^2-2x-3}{e^{3x}} \to f'(0) = -3$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{1+2x-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2-\frac{5}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3)} = -\frac{2}{3}$$

c) $n = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 3! = 60$ ; 3 aus 5 auswählen und permutieren

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{10}{1+x} \;(x \in \mathbb{R}; x \geq 1)$$

a) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(1), f(2), f(4)$ und $f(7)$!
Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $1 \leq x \leq 7$!

b) Der Graph von $f$, die x-Achse sowie die Geraden $x = k$ und $x = k+1$ begrenzen die Fläche mit dem Inhalt $A_K$ vollständig $(k = 1, 2, 3, ..., n, ...)$.
Berechnen sie $A_1, A_2, A_3$ und $A_n$!

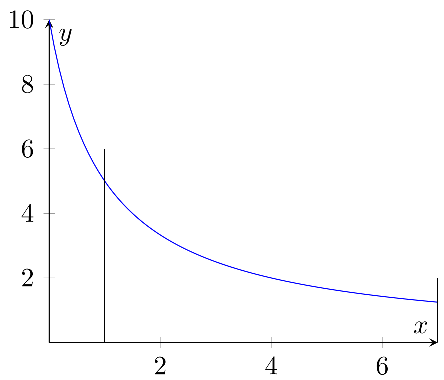
c) $A_1, A_2, A_3, ...$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge $(A_n)$.
Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

d) Weisen Sie nach, dass für das $n$-te Glied $s_n$ der Partialsummenfolge gilt:

$$s_n = 10 \cdot \ln \frac{n+2}{2}$$

a) $f(1) = 5; f(2) = \frac{10}{3}; f(4) = 2; f(7) = \frac{5}{4}$

b) $A = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{10}{1+x} dx = [10 \ln(x+1)]_k^{k+1} = 10 \ln \frac{k+2}{k+1}$
$A_1 = 10 \ln \frac{3}{2}; A_2 = 10 \ln \frac{4}{3}; A_3 = 10 \ln \frac{5}{4}; A_n = 10 \ln \frac{n+2}{n+1}$




c) $s_1 = 10 \ln \frac{3}{2}; s_2 = 10 \ln 2; s_3 = 10 \ln \frac{5}{2}$

d) Induktionsanfang für $n = 1$: $A_1 = 10 \ln \frac{3}{2} = 10 \ln \frac{1+2}{2} = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt:

$$A_1 + A_2 + ... + 10 \ln \frac{k+2}{k+1} = 10 \ln \frac{k+2}{2} = s_k$$

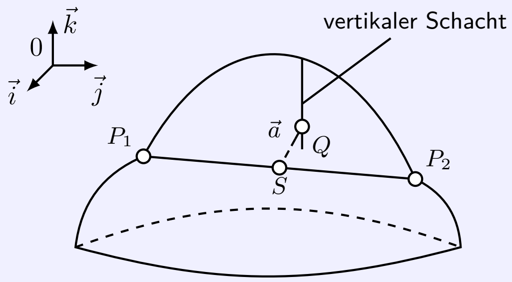
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt:

$$A_1 + A_2 + ... + 10 \ln \frac{k+2}{k+1} + 10 \ln \frac{k+3}{k+2} = 10 \ln \frac{k+3}{2} = s_{k+1}$$

Induktionsbeweis (Voraussetzung in Behauptung einsetzen)

$$10 \ln \frac{k+2}{2} + 10 \ln \frac{k+3}{k+2} = 10 \ln (\frac{k+2}{2} \cdot \frac{k+3}{k+2}) = 10 \ln \frac{k+3}{2} = s_{k+1}$$

**Aufgabe 7**




Skizze (nicht maßstäblich)
(Koordinateneinheit: 1 m)

Durch einen Berg führt die geradlinige Tunnelstrecke $P_1P_2$ mit $P_1(100; 20; 100)$ und $P_2(400; 200; 90)$

a) Berechnen Sie die Länge der Tunnelstrecke $P_1P_2$!
Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ geht!

b) Von einem Punkt $Q(210; 122; z_Q)$ eines vertikal verlaufenden Schachtes aus soll in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ein geradlinig verlaufender Entlüftungsstollen gebaut werden, der den Tunnel im Punkt $S$ trifft.
Berechnen Sie die Koordinaten von S!

c) Berechnen Sie die Höhe von $z_Q$, von der aus der Bau des Entlüftungsstollens begonnen werden muss!

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem vertikal verlaufenden Schacht und dem Entlüftungsstollen!

a) $|\overline{P1P2}| = \sqrt{(400-100)^2 + (200-20)^2 + (90-100)^2} = 350$ m
Gleichung der Geraden

$$g(P_1P_2) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \\ -10 \end{pmatrix}$$

b) Gleichung des Schachts

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 210 \\ 122 \\ z_Q \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

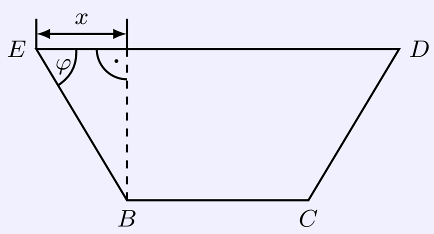
Geradengleichungen $g$ und $h$ gleichsetzen und aus den Gleichungen für die $x$- und $y$-Koordinate die Parameter $t_1, t_2$ ermitteln
Parameter $t_1 = \frac{2}{5}$ ; $t_2 = 5 \rightarrow$ Schnittpunkt $S(220; 92; 96)$

c) $z_Q = 100 - 10t_1 + 3t_2 \rightarrow z_Q = 111$

d) Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und vertikalem Schacht $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{-3}{7 \cdot 1} = -\frac{3}{7} \rightarrow \varphi = 115{,}38°$$

**Aufgabe 8**
Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{BC} = 6{,}8$ dm und $\overline{CD} = \overline{BE} = 4{,}0$ dm (siehe Skizze!)




Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts für den Fall, dass $\overline{DE} = 12{,}8$ dm beträgt!

b) Berechnen Sie $x$ oder $\varphi$ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird! (Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.)

c) Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt!

a) Wenn $\overline{DE} = 12{,}8$ dm ist, so wird für $x$ (gleichschenkliges Trapez): $x = 3$ dm.
Höhe $h$ des Trapezes: $h = \sqrt{|\overline{BE}|^2 - x^2} = \sqrt{7}$ dm
Flächeninhalt: $A = \frac{|\overline{BC}|+|\overline{ED}|}{2} \cdot h \approx 25{,}9$ dm$^3$

b) Allgemeiner Flächeninhalt $A = \frac{|\overline{BC}|+|\overline{ED}|}{2} \cdot h$
Es ist $|\overline{BC}| + 2x = |\overline{ED}|$, d.h.

$$A = \frac{2|\overline{BC}| + 2x}{2} \cdot \sqrt{|\overline{BE}|^2 - x^2} = (6{,}8 + x)\sqrt{16 - x^2}$$

1.Ableitung

$$A' = \frac{-10x^2 - 34x + 80}{5\sqrt{16 - x^2}}$$

Nullstelle bei $x_1 = \frac{8}{5}, x_2 = 5$. $x_2$ entfällt, d.h. $x = 1{,}6$; analog $\varphi \approx 66{,}4°(\cos\varphi = 0{,}4)$

c) Flächeninhalt $A_{\max} = 30{,}8$ dm$^3$

## 1.45 Abituraufgaben 1985

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 2} \; (x \in \mathbb{R})$$

a) Untersuchen Sie die Funktion $f$ auf Nullstellen und Polstellen!

b) Der Graph der Funktion $f$ hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes! Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f$ im Unendlichen!

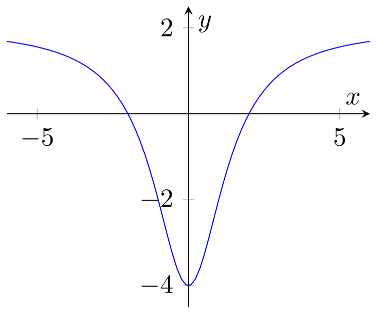
d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$ im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!

a) für Nullstellen den Zähler = 0 setzen: $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x_0 = -2; x_1 = 2$
für Polstellen den Nenner = 0 setzen: $x^2 + 2 = 0$ hat keine reelle Lösung, d.h. $f(x)$ hat keine Polstellen

b) 1.Ableitung $y' = \frac{24x}{(x^2+2)^2}$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{48-72x^2}{(x^2+2)^3}$
Zähler der 1.Ableitung hat Nullstellen $x = 0$ ; $f''(0) = 6 > 0$, d.h. Minimum
lokaler Extrempunkt $E_{\min}(0; -4)$

c)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} = 2$$




**Aufgabe 2**
In einem räumlichen Koordinatensystem $\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ sind die Punkte $A(5; 1; -6), B(1; 3; -2)$ und $C(1; -2; -4)$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Winkel $\alpha = \measuredangle BCA$!

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade $g$ auf, die durch die Punkte $A$ und $B$ geht!

c) In der $yz$-Ebene existiert genau ein Punkt $P$, für den gilt: $\overline{CP} \parallel \overline{AB}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P$!

a) Vektoren $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{11}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{11}{29} \rightarrow \alpha = 67{,}71°$$

b) Gerade durch Punkte $A$ und $B$ $g(AB) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Ansatz für Punkt $P(0; y_p; z_p)$ ; Vektor $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_p + 2 \\ z_p + 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CP}$ muss ein Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{AB}$ sein

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_p + 2 \\ z_p + 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

für die x-Koordinate folgt $\lambda = \frac{1}{4}$, und somit $P(0; -3/2; -3)$

**Aufgabe 3**
Eine Zahlenfolge $(a_n)$ ist gegeben durch

$$a_n = n(3n + 1) \ (n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ dieser Folge an!

b) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)$ keine arithmetische Zahlenfolge ist!

c) Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Partialsummenfolge $(s_n)$!

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $s_n = n(n + 1)^2$.

a) $a_1 = 4; a_2 = 14; a_3 = 30$

b) $a_{n+1} - a_n = 4(n + 1)$ ist nicht konstant, d.h. $(a_n)$ ist keine arithmetische Zahlenfolge

c) $s_1 = 4; s_2 = 18; s_3 = 48$

d) Induktionsanfang für $n = 1$: $a_1 = 4 = 1 \cdot (1 + 1)^2 = s_1$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + a_2 + ... + k(3k + 1) = k(k + 1)^2 = s_k$
Induktionsbehauptung dann gilt für $n = k + 1$

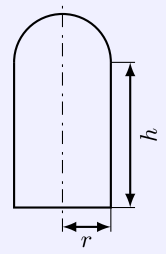
$$a_1 + a_2 + ... + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2 = s_{k+1}$$

Induktionsbeweis durch Einsetzen der Voraussetzung in die Behauptung

$$a_1 + a_2 + ... + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) =$$

$$= (k + 1)(k(k + 1) + 3k + 4) = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2 = s_{k+1}$$

**Aufgabe 4**




Ein Silo soll die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel erhalten (siehe Skizze!).
Skizze (nicht maßstäblich)
Das Fassungsvermögen des zylinderförmigen Teils ist mit $V_z = 55$ m$^3$ festgelegt.
Zur Verbesserung der Nutzungseigenschaften soll die gesamte Innenfläche des Silos (Grundfläche des Zylinders und Mantelfläche des Zylinders und Fläche der Halbkugel) mit Aluminiumblech ausgekleidet werden.
Berechnen Sie den Grundkreisradius $r$ des Zylinders für den Fall, dass möglichst wenig Blech verbraucht wird!

Volumen $V_Z = 55$ m$^3 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{55}{\pi r2}$
Oberfläche des Silos $A(r) = A_{\text{Grundfläche}} + A_{\text{Mantelfläche}} + A_{\text{Halbkugel}}$
Zielfunktion:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r \frac{55}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{110}{r}$$

1.Ableitung $y' = 6\pi r - \frac{110}{r^2}$ ; 2.Ableitung $y'' = 6\pi + \frac{220}{r^3}$
Nullstelle der 1.Ableitung $r_e = \sqrt[3]{\frac{55}{3\pi}} \approx 1{,}8$
da 2.Ableitung stets positiv ist $(r > 0)$, liegt ein lokales Minimum vor.

**Kurzaufgaben 5**

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} c+4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$!
Ermitteln Sie den Parameter $c$ für den Fall, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den gleichen Betrag haben!

b) Berechnen Sie

$$\int\limits_0^{\pi} 2 \cdot \sin \frac{x}{3} dx$$

c) Eine Handballmannschaft besteht aus zehn Feldspielern und zwei Torwarten. Gleichzeitig spielen davon jeweils sechs Feldspieler und ein Torwart - sie bilden eine Formation.
Der Regel entsprechend dürfen die Torwarte nicht als Feldspieler und die Feldspieler nicht als Torwart eingesetzt werden.
Wie viele verschiedene Formationen sind damit möglich? (Die Spielpositionen der Feldspieler werden dabei nicht unterschieden.)

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c+4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = c + 4 - c - 4 = 0$

Beträge der Vektoren $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5 + c^2}; \left| \begin{pmatrix} c+4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(c+4)^2 + 5} = \sqrt{c^2 + 8c + 21}$

Radikanden gleichsetzen: $5 + c^2 = c^2 + 8c + 21 \rightarrow c = -2$

b)

$$\int\limits_0^{\pi} 2 \cdot \sin \frac{x}{3} dx = \left[ -6 \cos \frac{x}{3} \right]_0^{\pi} = -3 + 6 = 3$$

c) $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 = 420$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = 5x \cdot e^{-0,5x} \ (x \in \mathbb{R}; x \geq 0)$$

a) Berechnen Sie die lokale Extremstelle $x_E$ von $f$ und $f(x_E)$!

b) Berechnen Sie $f(0)$ und $f(1)$!
Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $0 \leq x \leq x_E$!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F$ mit

$$F(x) = -10(x+2) \cdot e^{-0,5x} \ (x \in \mathbb{R}; x \geq 0)$$

eine Stammfunktion der Funktion $f$ ist!

d) Berechnen Sie $\int\limits_0^{x_E} f(x)dx$!

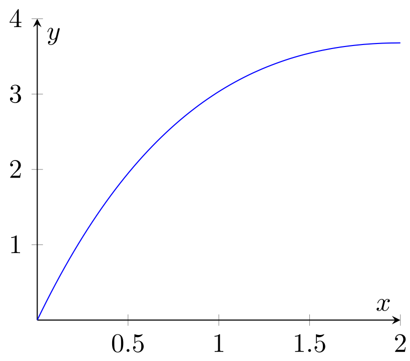
a) 1.Ableitung $y' = \frac{5}{2}(2-x)e^{-0,5x}$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{5}{4}(x-4)e^{-0,5x}$
Nullstelle der 1.Ableitung $y' = \frac{5}{2}(2-x)e^{-0,5x} = 0$, nur $(2-x)$ kann Null werden, d.h. $x = 2$
Kontrolle in 2.Ableitung $f''(2) = -\frac{5}{2e} < 0$, d.h. lokales Maximum $\rightarrow E_{\max}(2; \frac{10}{e})$

b) $f(0) = 0; f(1) = \frac{5}{\sqrt{e}} \approx 3{,}03$

c) Ableitung von $F(x)$ mittels Produktregel

$$F'(x) = \left(-10(x+2)e^{-0{,}5x}\right)' = -10e^{-0{,}5x} + (-10(x+2))\left(-\frac{1}{2}e^{-0{,}5x}\right) =$$

$$= -5e^{-0{,}5x}(2 + 2(x+2)\left(-\frac{1}{2}\right)) = -5e^{-0{,}5x}(2 - x - 2) = 5xe^{-0{,}5x} = f(x)$$




d)

$$\int_0^2 5xe^{-0{,}5x}dx = \left[-10(x+2)e^{-0{,}5x}\right]_0^2 = -\frac{40}{e} + 20 = \approx 5{,}28$$

**Aufgabe 7**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{x+1}{4}} \; (x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{4} \leq x \leq 7)$$

und die Gerade $g$ durch $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

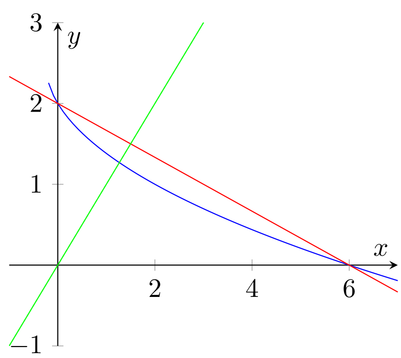
a) Die Gerade $g$ schneidet den Graph von $f$ in den Punkten $S_1$ und $S_2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $S_1$ und $S_2$!

b) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{4})$ und $f(2)$!
Skizzieren Sie den Graph von $f$! Zeichnen Sie die Gerade $g$ ein!

c) Gegeben ist eine zweite Gerade $h$ durch $y = x$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den Geraden $g$ und $h$!

d) Auf der Geraden $y = x$ liegt ein Punkt $Q(x_Q; y_Q)$ mit $x_Q > 0$, für den der Winkel $\measuredangle S_1QS_2 = 90°$ ist.
Berechnen Sie die Koordinaten von $Q$!

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta S_1S_2Q$!




a) $\frac{5}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}x + 2 \rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow$
$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$
Schnittpunkte $S_1(0;2); S_2(6;0)$ b) $f(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{2}; f(2) = 1$

c) Anstieg $\tan\alpha = m_g = -\frac{1}{3} \rightarrow \alpha = -18{,}43°$
$\tan\beta = m_h = 1 \rightarrow \beta = 45°$; Schnittwinkel $\approx 63{,}4°$

d) Ansatz $Q(x;x)$ mit Vektoren
$\overline{QS_1} = \begin{pmatrix} -x \\ 2-x \end{pmatrix}; \overline{QS_2} = \begin{pmatrix} 6-x \\ -x \end{pmatrix}$
Skalarprodukt beider Vektoren $= -8x + 2x^2 = 0$
ergibt $x = 4$ mit dem Punkt $Q(4;4)$

e) $A = \frac{1}{2}|\overline{QS_1}||\overline{QS_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{20}\sqrt{20} = 10$ FE

**Aufgabe 8**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \ ; \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $f$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion $f$! Untersuchen Sie die Art der Extrema!

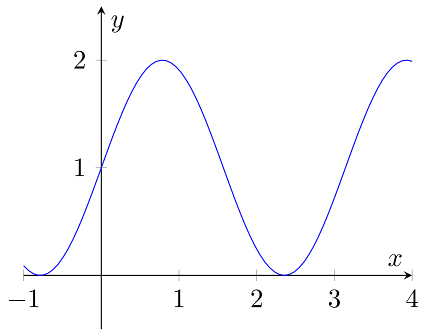
c) Skizzieren Sie Graph der Funktion $f$ im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!

d) Der Graph der Funktion $f$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

e) Es gibt genau zwei Tangenten an den Graph von $f$ mit dem Anstieg $m = -1$. Berechnen Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten!

a)
$$0 = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow -1 = \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \pi + 2k\pi = 2x - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$
Lösung im Definitionsbereich $x_0 = \frac{3}{4}\pi$

b) 1.Ableitung $y' = 2\cos 2x$ ; 2.Ableitung $y'' = -4\sin 2x$
Nullstellen der 1.Ableitung: $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}$
Kontrolle über 2.Ableitung $f''(x_1) = -4 < 0$ ... Maximum; $f''(x_2) = 4 > 0$ ... Minimum
lokale Extrempunkte $E_{\max}(\frac{\pi}{4}; 2); E_{\min}(\frac{3\pi}{4}; 0)$



c)

d)
$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}))dx = \left[x - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 2{,}86 \ FE$$

e) $f'(x) = 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Berührungsstellen $x_3 = \frac{\pi}{3}; x_4 = \frac{2\pi}{3}$

## 1.46 Abituraufgaben 1986

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Die Gerade $g_1$ verläuft durch die Punkte $A(5;2;0)$ und $B(6;2;-5)$, die Gerade $g_2$ geht durch den Punkt $(2;-6;11)$ und hat die Richtung des Vektors $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Geraden $g_1$ und $g_2$ auf!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ und den Schnittwinkel $\phi$ der Geraden $g_1$ und $g_2$!

c) Überprüfen Sie, ob der Punkt $C(5;6;2)$ auf der Geraden $g_2$ liegt!

a)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Geraden gleichsetzen und Gleichungssystem lösen $\to S(4;2;5)$

$$\cos \measuredangle(g1,g2) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{16}{\sqrt{26}\sqrt{26}} \to \measuredangle(g1,g2) \approx 52°$$

c) $C$ in Gerade $g_2$ einsetzen, es wird $s = 3$, d.h. $C$ erfüllt $g_2$, d. $C$ liegt auf $g_2$

**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

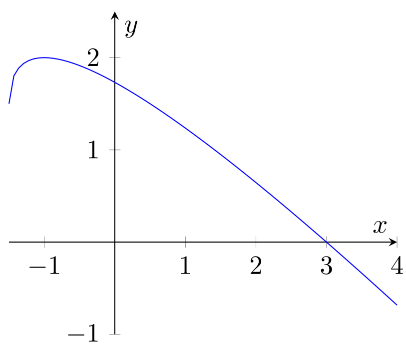
$$y = f(x) = \sqrt{2x+3} - x \ (x \in \mathbb{R}; x \geq -1{,}5)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $f$!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von $f$!
Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$ im Intervall $-1{,}5 \leq x \leq 4$!

d) Der Graph der Funktion $f$ und die Koordinatenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!




a) Ansatz $0 = \sqrt{2x+3} - x \to x^2 = 2x + 3$ mit Lösung $x_0 = 3$

b) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - 1$ ; 2.Ableitung $y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}}$

Nullstelle der 1.Ableitung
$\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2x+3} = 1 \rightarrow 2x+3 = 1 \rightarrow x_E = -1$
2.Ableitung wird stets kleiner 0, d.h. Maximum
$\rightarrow E_{\max}(-1; 2)$

d)

$$A = \left| \int_0^3 (\sqrt{2x+3} - x)dx \right| = \left[ \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2} - \sqrt{3} \approx 2{,}77 \text{ FE}$$

**Aufgabe 3**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

$$y = f(x) = 2 + \cos x \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi) \text{ und } y = g(x) = \sin 2x \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Ergänzen Sie für die Funktion $g$ die folgende Werttabelle!

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | |

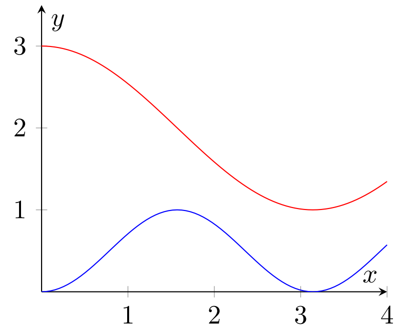
b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ in ein und demselben Koordinatensystem!

c) Für jede Parallele zur $y$-Achse, die die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ in einem Punkt schneidet, stellt $h(x) = f(x) - g(x)$ den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie die Abszisse $x_E$ für den Fall, dass dieser Abstand minimal wird!
Berechnen Sie den minimalen Abstand!

d) Zeigen Sie, dass die Tangente im Punkt $P(\frac{2\pi}{3}; f(\frac{2\pi}{3}))$ an den Graph der Funktion $f$ und die Tangente im Punkt $Q(\frac{2\pi}{3}; g(\frac{2\pi}{3}))$ an den Graph der Funktion $g$ zueinander parallel sind!

a)

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 0,25 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,25 | 0 |




b)

c) $h(x) = 2 + \cos x - \sin^2 x$
1.Ableitung $y' = -\sin x(2\cos x + 1)$
2.Ableitung $y'' = -\cos^2 x - \cos x + 2$
Nullstellen der 1.Ableitung $\sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \pi$ und $2\cos x + 1 = 0 \rightarrow x_3)\frac{2\pi}{3}$
Kontrolle in der 2.Ableitung ergibt $f''(\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2} < 0$, d.h. lokales Minimum für $x_e = \frac{2\pi}{3}$
minimaler Abstand $d = h(x_e) = \frac{3}{4}$ LE

d) Punkte $P(\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}); Q(\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{4})$
Ableitung $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = 2\sin x \cos x$; $f'(x_P) = g'(x_Q) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, d.h. die Tangenten sind zueinander parallel

**Aufgabe 4**
Fünf Bauelemente haben die elektrischen Widerstände $R_1, R_2, R_3, R_4$ und $R_5$.
Ihre Zahlenwerte bilden eine geometrische Folge. Es sei $R_1 = 10$ Ohm und $R_5 = 160$ Ohm.

a) Berechnen Sie den Quotienten $q$ dieser geometrischen Folge!

b) Berechnen Sie den elektrischen Widerstand $R$ für den Fall, dass die 5 Widerstände in Reihe geschaltet sind!

c) Schaltet man zwei verschiedene dieser 5 Widerstände in Reihe, so erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich auf diese Weise herstellen?

d) Auch bei Reihenschaltung von je 3 oder je 4 verschiedenen dieser 5 Widerstände erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich dann insgesamt erzeugen, wenn man alle möglichen Schaltungen von 2 und von 3 und von 4 verschiedenen Widerständen herstellt?

a) $q^4 = \frac{R_5}{R_1} = 16 \rightarrow q = 2$

b) die Widerstände sind $R_1 = 10\Omega; R_2 = 20\Omega; R_3 = 40\Omega; R_4 = 80\Omega; R_5 = 160\Omega$
deren Summe ist gleich $310\ \Omega$

c) Kombination von 2 Elementen aus 5: $\binom{5}{2} = 10$

d) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 10 + 5 = 25$

**Kurzaufgaben 5**
a) Gegeben ist die Funktion $f$ durch $y = f(x) = x \cdot \ln x$ $(x \in \mathbb{R}; x > 0)$
Berechnen Sie $f'(e)$!

b) Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ durch $A(2;1)$, $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 4\vec{j}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $D$ und die Läge der Diagonalen $\overline{BD}$!

c) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen $x$ an, für die der Term $\frac{1}{\sqrt{3x-6}}$ nicht definiert ist!

a) 1.Ableitung $f'(x) = 1 + \ln x \rightarrow f'(e) = 2$

b) $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{i} + 4\vec{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
Punkt $D(3;5)$; Punkt $B$: $\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} \rightarrow B(7;3)$
Länge der Diagonale $|\overline{BD}| = \sqrt{(3-7)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) Term ist nicht definiert für Radikand kleiner 0, Bruch nicht definiert für Nenner = 0, d.h. $3x - 6 \leq 0 \rightarrow x \leq 2$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{3 - ax} \quad (x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{3}{a}; a \in \mathbb{R}; a > 0)$$

a) Weisen Sie nach, dass diese Funktionen keine lokalen Extrema haben!

b) Für $a = 0{,}5$ erhält man die Funktion $f_1$ mit

$$y = f_1(x) = \frac{1}{3 - 0{,}5x} \quad (x \in \mathbb{R}; x \neq 6)$$

Skizzieren Sie den Graph von $f_1$ im Intervall $0 \leq x \leq 5$!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph dieser Funktion, den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ vollständig begrenzt wird!

c) Bilden Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$ für

$$y = f(x) = \frac{1}{3-ax}$$

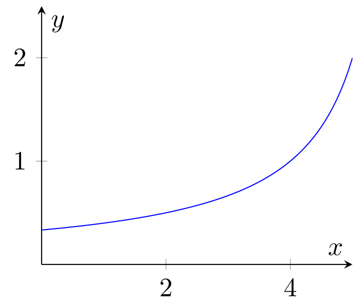
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die $n$-te Ableitung der Funktion $f$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!a^n}{(3-ax)^{n+1}}$$

gilt!

d) Die Graphen aller Funktionen $y = f(x) = \frac{1}{3-ax}$ schneiden die y-Achse in $P_0(0; 1/3)$.
Die Tangente in $P_0$ an genau eines dieser Graphen steht senkrecht auf der Geraden $y = -6x + 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall den Wert des Parameters $a$!

a) 1.Ableitung $y' = \frac{a}{(ax-3)^2}$
$f'(x) = 0$ hat keine Lösung für $a > 0$




b) $A = \int\limits_0^4 \frac{dx}{3-0{,}5x} = [-\ln(x-6)]_0^4 = 2\ln 3$ FE

c) $f''(x) = \frac{2a^2}{(3-ax)^3}$; $f'''(x) = \frac{6a^3}{(3-ax)^4}$
Induktionsanfang für $n = 1$: $f'(x) = \frac{a}{(3-ax)^2} = \frac{1!a^1}{(3-ax)^2}$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $f^{(k)}(x) = \frac{k!a^k}{(3-ax)^{k+1}}$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!a^{k+1}}{(3-ax)^{k+2}}$
Induktionsbeweis durch Ableiten von $f^{(k+1)}(x)$

$$(f^{(k+1)}(x))' = \left(\frac{k!a^k}{(3-ax)^{k+1}}\right)' = k!a^k((3-ax)^{-(k+1)})' =$$

$$= k!a^k(-(k+1))(-a)(3-ax)^{-(k+2)} = (k+1)k! \cdot a \cdot a^k(3-ax)^{-(k+2)} = \frac{(k+1)!a^{k+1}}{(3-ax)^{k+2}}$$

d) Tangentenanstieg $m = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$
1.Ableitung $f'(x) = \frac{a}{(3-ax)^2}$, d.h. für $x_p = 0 \rightarrow \frac{a}{9} = \frac{1}{6} \rightarrow a = \frac{3}{2}$

**Aufgabe 7**
Für einen geladenen Kondensator lässt sich der Zahlenwert $I$ der Entladestromstärke als Funktion des Zahlenwertes $t$ der Zeit beschreiben durch

$$I = f(t) = I_0 e^{-0{,}4t} \ (t \in \mathbb{R}; t \geq 0)$$

(Dabei sind die Stromstärke in Milliampere und die Zeit in Sekunden gemessen)
$I_0$ ist der Zahlenwert der Entladestromstärke für $t = 0$. Es sei $I_0 = 2{,}4$.

a) Berechnen Sie $f(0)$, $f(2)$ und $f(4)$! Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $0 \leq t \leq 4$!

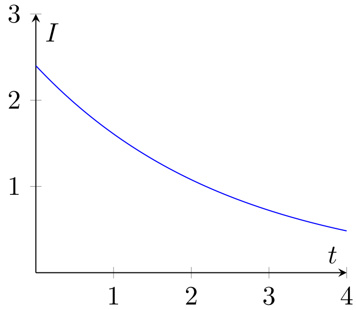
b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Stromstärke 1,8 mA beträgt!

c) Der Zahlenwert $Q$ der vom Kondensator im Intervall $[t_1; t_2]$ abgegebenen Ladung (gemessen in Milliamperesekunden) wird durch

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

ermittelt. Berechnen Sie die Ladung, die der Kondensator in den ersten 3,5 Sekunden des Entladungsvorgangs abgibt!

d) Für $t_1 = 0$ habe der Kondensator eine Ladung, deren Zahlenwert $Q = 6{,}0$ beträgt.
Berechnen Sie $t_2$ für den Fall, dass der Kondensator 60 % dieser Ladung abgegeben hat !




a) $f(0) = 2{,}4; f(2) = 1{,}08; f(4) = 0{,}48$

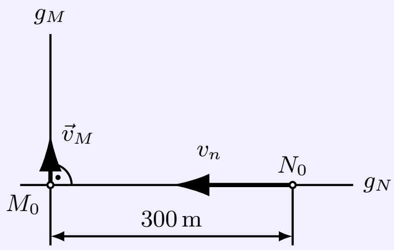
b) Ansatz $2{,}4e^{-0{,}4t} = 1{,}8 \to e^{-0{,}4t} = \frac{3}{4} \to -0{,}4t = \ln 0{,}75 \to t = -2{,}5(\ln 0{,}75) \approx 0{,}72$

c)
$$Q = \int_0^{3{,}5} 2{,}4e^{-0{,}4t}dt = \left[-6e^{-0{,}4t}\right]_0^{3{,}5} \approx = 4{,}52mAs$$

d)
$$6 \cdot 0.6 = 3{,}6 = \int_0^{t_2} 2{,}4e^{-0{,}4t}dt = \left[-6e^{-0{,}4t}\right]_0^{t_2} = -6e^{-0{,}4 \cdot t_2} + 6$$

$$0{,}6 = 1 - e^{-0{,}4 \cdot t_2} \to 0{,}4 = e^{-0{,}4 \cdot t_2} \to t_2 = -2{,}5 \cdot \ln 0{,}4 \approx 2{,}29\ s$$

**Aufgabe 8**




Ein Massepunkt $M$ bewegt sich auf einer Geraden $g_M$ mit der konstanten Geschwindigkeit $2{,}0m \cdot s^{-1}$ und durchläuft zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den Punkt $M_0$ (siehe Skizze!). Skizze (nicht maßstäblich)

Ein zweiter Massepunkt $N$ bewegt sich auf einer zu $g_M$ orthogonalen Geraden $g_N$ mit der konstanten Geschwindigkeit 6,0 ms$^{-1}$ auf den Punkt $M_0$ zu.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durchläuft er den Punkt $N_0$. Die Entfernung $\overline{N_0M_0}$ beträgt 300 m.

a) Berechnen Sie die Entfernung, die die beiden Massepunkte nach 30 Sekunden voneinander haben!

b) Nach $t$ Sekunden sind die beiden Massepunkte $s$ Meter voneinander entfernt.
Geben Sie für diesen Fall $s$ als Funktion von $t$ an!

c) Nach welcher Zeit ist die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander minimal?
Berechnen Sie diese minimale Entfernung!

d) Mit welcher konstanten Geschwindigkeit müsste sich der Massepunkt $M$ unter sonst gleichen Bedingungen bewegen, wenn die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander bereits nach 40 Sekunden minimal sein soll?
Hinweis: Auf den Nachweis des Minimums bei c) wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

a) Ursprung des Koordinatensystems in $M_0$, Achsen wie im Bild
Ort von $M$ zum Zeitpunkt $t$: $M(0; 2t)$ ; Ort von $N(300 - 6t; 0)$
Abstand $d = \sqrt{(2t)^2 + (300 - 6t)^2)}$ mit $t = 30s$ wird $d = 60\sqrt{5} \approx 134{,}16$ m

b)
$$s(t) = \sqrt{(2t)^2 + (300 - 6t)^2} = \sqrt{40t^2 - 3600t + 90000}$$

c)
$$\text{1.Ableitung: } y' = \frac{\sqrt{40}(t - 45)}{\sqrt{t^2 - 90t + 2250}} \text{ , 2.Ableitung: } y'' = \frac{450\sqrt{10}}{\sqrt{(t^2 - 90t + 2250)^3}}$$

Zähler der 1.Ableitung wird Null für $t = 45$ s , die 2.Ableitung ist stets größer 0, d.h. lokales Minimum
minimaler Abstand $d = 30\sqrt{10} \approx 94{,}86$m

d) Ansatz für Abstand mit konstanter Geschwindigkeit $v$
$$s(t) = \sqrt{(vt)^2 + (300 - 6t)^2}$$

1. Ableitung
$$s'(t) = \frac{(v^2 + 36)t - 1800}{\sqrt{t^2(v^2 + 36) - 3600t + 90000}}$$

mit $t = 40$ s ergibt sich Nullstelle (lokales Minimum) für $(v^2 + 36)40 - 1800 = 0 \rightarrow v = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

## 1.47 Abituraufgaben 1987

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
In einem Koordinatensystem $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ist das Dreieck $\Delta$ ABC mit $A(6;-1;3), B(2;3;3)$ und $C(2;-1;7)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Längen der Dreieckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$!

b) Ermitteln Sie den Winkel $\alpha = \measuredangle BAC$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks!

d) Die Punkte A, B, P, C sind die Eckpunkte des Parallelogramms ABPC.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P!

a) Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2+4^2+0^2} = \sqrt{32}; |\overline{AC}| = \sqrt{(-4)^2+0^2+4^2} = \sqrt{32}$

b)

$$\cos\measuredangle BAC = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{32}\sqrt{32}} = \frac{1}{2} \to \gamma = 60^\circ$$

c)

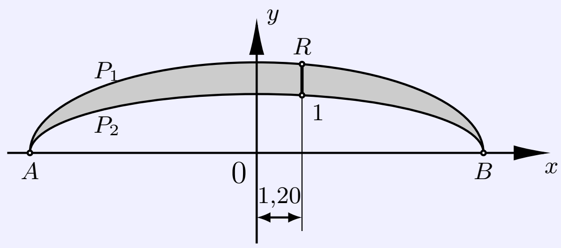
$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{768} = 8\sqrt{3}\ FE$$

bzw. $A = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{32}\sqrt{32}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ FE

d)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \text{Punkt } P(-2;3;7)$$

**Aufgabe 2**




Die Skizze zeigt einen Parabelsichelträger in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Ursprung 0 (Koordinateneinheiten: 1 m).
Die beiden den Träger begrenzenden Parabelbögen $p_1$ und $p_2$ schneiden die x-Achse in den Punkten A und B. Skizze (nicht maßstäblich)

a) Der obere Parabelbogen $p_1$ ist Graph der Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{72}x^2\ (x \in R; x_A \leq x \leq x_B)$$

Berechnen Sie die Spannweite AB!

b) Der untere Parabelbogen $p_2$ ist Graph der Funktion g mit

$$y = g(x) = \frac{3}{2} - ax^2 \ (x \in R; x_A \leq x \leq x_B)$$

Berechnen Sie die Konstante a!

c) Die Strecke $\overline{RT}$ liegt parallel zur y-Achse. Berechnen sie die Länge dieser Strecke!

d) In R sei an Parabel $p_1$ die Tangente t gelegt. Berechnen Sie den Anstieg von t!
Zu t gibt es eine Parallele, die die Parabel $p_2$ berührt. Der Berührungspunkt sei Q.
Berechnen sie die Abszisse des Punktes Q!

a) Spannweite = Abstand der Nullstellen. $0 = \frac{5}{2} - \frac{5}{72}x^2 \rightarrow x^2 = 36$
Nullstellen $A(-6;0); B(6;0)$, d.h. Abstand $\overline{AB} = 12$ m

b) $p_2$ verläuft durch A und B, $1{,}5 - a \cdot 6^2 = 0 \rightarrow a = \frac{3}{72}$

c) Strecke $\overline{RT}$ ist Differenz der Funktionswerte f(x) und g(x)
$f(1{,}20) - g(1{,}20) = \frac{5}{2} - \frac{5}{72} \cdot (\frac{6}{5})^2 - (\frac{3}{2} - \frac{3}{72} \cdot (\frac{6}{5})^2) = \frac{24}{25} \rightarrow$ Strecke $\overline{RT} =$ 0,96 m

d) 1.Ableitung $y' = f'(x) = -\frac{5}{36}x$, Anstieg am Punkt $R(1{,}2; f(1{,}2))$ ist $m_t = -\frac{1}{6}$
1.Ableitung $g'(x) = -\frac{x}{12}$, Anstieg im Punkt Q muss $m_t$ sein, d.h. $-\frac{x_Q}{12} = -\frac{1}{6} \rightarrow x_Q = 2$
Berührungspunkt $Q(2; \frac{4}{3})$

**Aufgabe 3**
Gegeben ist die Partialsummenfolge $(s_n)$ der Zahlenfolge $(a_n)$ durch

$$s_n = \frac{n}{2(n+1)} \ ; \ (n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der Partialsummenfolge $(s_n)$ an!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Folge $(s_n)$!

c) Für welche natürliche Zahlen n gilt, dass die Glieder der Folge $(s_n)$ in der $\epsilon$-Umgebung von g liegen, wenn $\epsilon = 10^{-3}$ ist?

d) Geben sie die Glieder $a_1, a_2$ und $a_3$ der Zahlenfolge $(a_n)$ an!
Ermitteln Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Zahlenfolge $(a_n)$!

a) $s_1 = \frac{1}{4}; s_2 = \frac{1}{3}; s_3 = \frac{3}{8}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(2+\frac{2}{n})} = \frac{1}{2}$

c) $|s_n - g| = \left|\frac{n}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(n+1)} < 10^{-3} \rightarrow 2(n+1) > 1000 \rightarrow n > 499$

d) $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{2(n+1)} - \frac{n-1}{2n} = \frac{n^2-(n+1)(n-1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \rightarrow a_1 = \frac{1}{4}; a_2 = \frac{1}{12}; a_3 = \frac{1}{24}$

**Aufgabe 4**
Gegeben sind die Funktion f durch

$$y = f(x) = x + 2\cos x \ (x \in R; \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi)$$

und die Gerade g durch $y = g(x) = x + 2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Weisen Sie die Art der Extrema nach!

b) Die Gerade g und der Graph von f haben die Punkte $S_1$ und $S_2$ gemeinsam.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $S_1$ und $S_2$!

c) Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie die Gerade g ein!

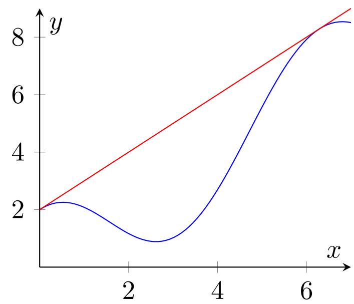
d) Der Graph von f und die Gerade g begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen sie den Inhalt dieser Fläche!

a) 1.Ableitung $y' = f'(x) = 1 - 2\sin x$; 2.Ableitung $y'' = f''(x) = -2\cos x$
Nullstellen der 1.Ableitung

$$0 = 1 - 2\sin(x) \rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Kontrolle in der 2.Ableitung: $f''(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} < 0$ (Maximum), $f''(\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3} > 0$ (Minimum)
lokale Extrempunkte $E_{max}(\frac{\pi}{6}; \pi + \sqrt{3})$; $E_{min}(\frac{5\pi}{6}; \pi - \sqrt{3})$

b) $x + 2\cos x = x + 2 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x_3 = 0; x_4 = 2\pi$
Schnittpunkt $S_1(0; 2); S_2(2\pi; 2\pi + 2)$




c)

d) $A = \int_0^{2\pi} (x + 2 - (x + 2\cos x))dx = [2x - 2\sin x]_0^{2\pi} = 4\pi - 0 - 0 - 0 = 4\pi$ FE

**Kurzaufgaben 5**
a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{e^x} \; (x \in R; x > 0)$$

Berechnen Sie $f'(1)$!

b) Welche Stammfunktion F der Funktion $f(x) = e^{2x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Funktionswert $F(x_0) = 2$?

c) Für welche Zahl n ist die Anzahl der Variationen von n verschiedenen Elementen zur 2.Klasse gleich der Anzahl der Kombinationen dieser n Elemente zur 3.Klasse?

a) Quotientenregel: $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln(x)}{e^x} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{e} = e^{-1}$

b) Stammfunktion: $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$
$\frac{1}{2}e^{2x_0} + C = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + C = 2 \rightarrow C = \frac{3}{2}$
gesuchte Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$

c) Ansatz $n(n-1) = \left( \begin{array}{c} n \\ 3 \end{array} \right) \rightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \rightarrow 6 = n - 2 \rightarrow n = 8$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Trapez ABCD mit $A(0;0), B(20;0), C(5;10)$ und $D(0;10)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Diagonalen!
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen!

b) Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P, der auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt und für den $\overline{PB} = \overline{PS}$ gilt!

c) Die Parallele zur Seite $\overline{AB}$ durch den Punkt S schneidet die Seite $\overline{AD}$ im Punkt T.
Weisen Sie nach, dass diese Parallele den Winkel $\measuredangle BTC$ halbiert!

a) Diagonalen $g(AC) : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$; $h(BD) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}$
Gleichsetzen ergibt $t = s = \frac{4}{5} \to$ Schnittpunkt $S(4;8)$
Schnittwinkel $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{0}{\sqrt{125}\sqrt{500}} = 0 \to \alpha = 90°$

b) Gerade durch A und B $g(AB) : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ansatz $\sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$ und $P(20t;0)$

$$\sqrt{(20t-20)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(20t-4)^2 + (0-8)^2} \to (20t-20)^2 = (20t-4)^2 + 64 \to$$

$$\to 400t^2 - 800t + 400 = 400t^2 - 160t + 80 \to 640t = 320 \to t = \frac{1}{2}$$

Abszisse des Punktes P: $x_p = 10$

c) Parallele zu $\overline{AB}$ durch S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$; Gerade $g(AD) : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$
Schnittpunkt $T(0;8)$
$\cos\measuredangle BTS = \frac{\overrightarrow{TB} \bullet \overrightarrow{TS}}{|\overrightarrow{TB}||\overrightarrow{TS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{464} \cdot 4} = \frac{80}{16\sqrt{29}} = \frac{20}{4\sqrt{29}}$
$\cos\measuredangle CTS = \frac{\overrightarrow{TS} \bullet \overrightarrow{TC}}{|\overrightarrow{TS}||\overrightarrow{TC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}{4\sqrt{29}} = \frac{20}{4\sqrt{29}}$
da die Kosinuswerte gleich groß sind, sind die Winkel $\measuredangle BTS, \measuredangle CTS$ gleich groß und die Parallele halbiert den Winkel $\measuredangle BTC$.

**Aufgabe 7**
Gegeben sind Funktionen f durch

$$y = f(x) = (x+1) \cdot e^{ax} \ (x \in R; a \in R, a > 0)$$

a) Der Graph jeder dieser Funktionen schneidet die y-Achse im Punkt R und die x-Achse im Punkt Q. Ermitteln Sie die Koordinaten von R und Q!

b) Die Graphen der Funktionen haben je eine lokalen Extrempunkt $E(x_E; f(x_E))$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E (in Abhängigkeit vom Parameter a)!
Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f

$$f^{(n)}(x) = a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n)$$

gilt!

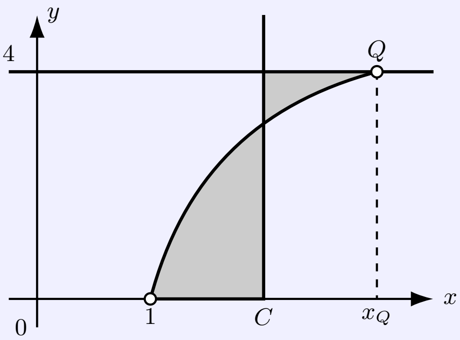
a) Nullstelle: $(x+1)e^{ax} = 0 \to x + 1 = 0 \to x_N = -1$
Schnittpunkt $Q(-1;0)$
Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = (0+1)e^{a0} = 1 \to R(0;1)$

b) 1.Ableitung $y' = (ax + a + 1)e^{ax}$ ; 2.Ableitung $y'' = a(ax + a + 2)e^{ax}$
Nullstelle der 1.Ableitung $ax + a + 1 = 0 \rightarrow x_E = -\frac{a+1}{a}$
Kontrolle mit 2.Ableitung $f''(x_E) = a \cdot e^{-a-1} > 0$, d.h. Minimum
lokaler Extrempunkt $E_{min}(-\frac{a+1}{a}; -\frac{1}{a}e^{-(a+1)})$

c) Induktionsanfang für n=1: $y' = (ax + a + 1)e^{ax} = a^{1-1} \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + 1) = e^{ax} \cdot (ax + a + 1)$
Induktionsvoraussetzung für n=k gilt: $y^{(n)} = a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n)$
Induktionsbehauptung für n=k+1 gilt dann: $y^{(n+1)} = a^n \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n + 1)$
Induktionsbeweis

$$(y^{(n)})' = (a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n))' = a^{n-1} \cdot (a \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n) + e^{ax} \cdot a) =$$
$$= a \cdot a^{n-1} \cdot e^{ax}((ax + a + n) + 1) = a^n \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n + 1) = y^{(n+1)}$$

**Aufgabe 8**




Die Skizze zeigt den Graph der Funktion f mit

$$y = f(x) = 2\sqrt{x-1} \ (x \in R; 1 \leq x \leq x_Q)$$

und die Geraden $y = 4$ und $x = c$, $(c \in R; 1 < c < x_Q)$.
Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Abszisse $x_Q$ des Punktes Q!

b) Berechnen Sie für den Fall c = 3 die Inhalte der beiden gekennzeichneten Flächen!

c) Unter den Geraden $x = c$ gibt es genau eine, für die die Summe der Inhalte der gekennzeichneten Flächen minimal wird.
Berechnen Sie c für diesen Fall! Geben Sie die minimale Summe an!
(Auf den Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

a) $y_Q = 4$ ablesen, $2\sqrt{x-1} = 4 \rightarrow x - 1 = 4 \rightarrow x_Q = 5$

b)
$$A_1 = \int_1^c 2\sqrt{x-1}dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right]_1^c = \frac{4}{3}\sqrt{(c-1)^3}$$
$$A_2 = \int_c^5 4 - 2\sqrt{x-1}dx = \left[4x - \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right]_c^5 = \frac{28}{3} - 4c + \frac{4}{3}\sqrt{(c-1)^3}$$

für $c = 3$ wird $A_1 = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ FE; $A_2 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{2}$ FE

c) minimale Fläche für $A_1 + A_2 \rightarrow$ Minimum
Zielfunktion $A = \frac{4}{3}\sqrt{(c-1)^3} + \frac{28}{3} - 4c + \frac{4}{3}\sqrt{(c-1)^3}$
1.Ableitung $A' = 4\sqrt{c-1} - 4$ ; Nullstelle der 1.Ableitung $4\sqrt{c-1} - 4 = 0 \rightarrow c = 2$
minimale Fläche wird 4 FE

## 1.48 Abituraufgaben 1988

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben sei die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 9x \ (x \in \mathbb{R})$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von $f$!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

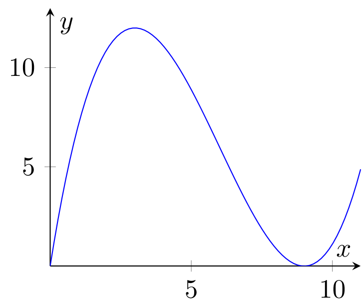
b) Auf dem Graph von $f$ gibt es genau einen Punkt $A(x_A; f(x_A))$ mit $f''(x_A) = 0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $A$!

c) Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $0 \leq x \leq 10$!

d) Der Graph von $f$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

a) 1.Ableitung $y' = \frac{x^2}{3} - 4x + 9$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{2}{3}x - 4$
Nullstelle der Ableitung $0 = x^2 - 12x + 27 \rightarrow x_1 = 3; x_2 = 9$
Kontrolle über 2.Ableitung $f''(3) = -2 < 0$ (Maximum); $f''(9) = 2 > 0$ (Minimum)
lokale Extrempunkte $E_{\text{min}}(9; 0); E_{\text{max}}(3; 12)$

b) Wendepunkt mit $0 = \frac{2}{3}x - 4 \rightarrow x = 6$ Koordinaten $A(6; 6)$




c)

d) Nullstellen von $y = \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 9x$ sind Integrationsgrenzen $x_0 = 0; x_1 = 9$

$$A = \int\limits_0^9 \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 9x dx = \left[\frac{x^4}{36} - \frac{2x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^9 = \frac{243}{4} = 60{,}75 \text{ FE}$$

**Aufgabe 2**
Bei einer Übung der Raketentruppe der NVA wird ein auf geradliniger Bahn $g_1$ mit konstanter Geschwindigkeit fliegendes Objekt im Punkt $P(-6; 9; 7)$ und 20 Sekunden später im Punkt $Q(2; 1; 11)$ geortet.
Im Punkt $A(3{,}5; -8; 0{,}5)$ wird eine Abwehrrakete in Richtung des Vektors $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ gestartet. Die Bahn $g_2$ dieser Rakete sei geradlinig.
(Koordinateneinheit : 1 km)

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der Geraden $g_1$ und $g_2$!

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g_1$ und $g_2$!

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des georteten Objektes!

d) Die Abwehrrakete trifft das Objekt im Punkt $S$:
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete, wenn ihr Start in $A$ zwei Sekunden nach der Ortung des Objektes in $Q$ erfolgte!

a) Gerade $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$; Gerade $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -8 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt $s = \frac{5}{2}; t = \frac{3}{2} \rightarrow$ Schnittpunkt $S(6; -3; 13)$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12}{\sqrt{144}\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \rightarrow \alpha = 79{,}5°$$

c) Flugstrecke des Objekts $|\overline{PQ}| = s = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 4^2} = 12$ km
Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t} = \frac{12 \text{ km}}{20 \text{ s}} = 600\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2160\frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) Zeit des Objektes von $Q$ nach $S$:
Streckenlänge $|\overline{QS}| = s = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6$ km
Flugzeit $t = \frac{s}{v} = \frac{6000 \text{ m}}{600\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10$ s
Flugstrecken der Rakete $|\overline{AS}| = s = \sqrt{2{,}5^2 + 5^2 + 12{,}5^2} = 13{,}69$ km
Geschwindigkeit der Rakete $v = \frac{s}{t} = \frac{13{,}69 \text{ km}}{8 \text{ s}} \approx 1710\frac{\text{m}}{\text{s}} = 6160\frac{\text{km}}{\text{h}}$

**Aufgabe 3**
Es soll ein quaderförmiger Behälter mit einem Volumen von 6 m$^3$ gebaut werden, bei dem die Länge dreimal so groß ist wie die Breite.
Alle 12 Kanten des Behälters sollen durch Winkeleisen verstärkt werden. Der geringste Materialverbrauch an Winkeleisen ergibt sich, wenn die Summe der Längen aller Kanten minimal wird.
Berechnen Sie für diesen Fall Länge, Breite und Höhe des Behälters!

Nebenbedingungen $V = 6$ m$^3 = a \cdot b \cdot c \rightarrow c = \frac{6}{a \cdot b}$ ; Länge $a = 3b$
Zielfunktion

$$l = 4a + 4b + 4c = 4a + 4b + 4\frac{6}{a \cdot b} = 12b + 4b + \frac{24}{3b^2} = 16b + \frac{8}{b^2}$$

1.Ableitung $l' = 16 - \frac{16}{b^3}$ ; 2.Ableitung $l'' = \frac{48}{b^4}$
Nullstelle der 1.Ableitung $b = 1$ ist lokales Minimum, da $l''(x) > 0$
Seitenlängen $a = 3$ m; $b = 1$ m; $c = 2$ m.

**Aufgabe 4**
Bei Laboruntersuchungen werden häufig wässrige Lösungen fester Substanzen benötigt. Die in der Zeit $t$ gelöste Masse wird durch die Gleichung

$$m = m_0(1 - e^{-at})$$

beschrieben.
Hierbei sind $m_0$ die unter bestimmten Normbedingungen in Lösung gehende maximale Masse, Sättigungsmasse genannt, und $a$ eine vom Stoff abhängige Konstante.

a) Für einen Versuch, für den $a_1 = 0{,}20 min^{-1}$ gilt, wird festgestellt, dass 20 g der Substanz in der ersten Minute in Lösung gegangen sind.
Berechnen Sie für diesen Fall die Sättigungsmasse $m_0$!

b) Für die andere Substanz gilt $m_0 = 200$ g und $a_2 = 0{,}17$ min$^{-1}$.
Nach welcher Zeit sind 120 g dieser Substanz in Lösung gegangen?

c) Bei einer weiteren Substanz ist nach 5,0 Minuten die Hälfte der entsprechenden Sättigungsmasse $m_0$ in Lösung gegangen.
Berechnen Sie für diesen Fall die Konstante $a_3$!

a) Einsetzen $20 = m_0(1 - e^{-\frac{0,2}{\text{min}} \cdot 1 \text{ min}}) \rightarrow m_0 = \frac{20}{1 - e^{-0,2}} \approx 110{,}33$ g

b) $m = 120 = 200(1 - e^{-0{,}17t}) \rightarrow e^{-0{,}17t} = 0{,}4 \rightarrow -0{,}17t = \ln 0{,}4 \rightarrow t \approx 5{,}4$ min

c) $\frac{m_0}{2} = m_0(1 - e^{-a\cdot 5}) \rightarrow e^{-5a} = \frac{1}{2} \rightarrow -5a = \ln\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{\ln 2}{5} \approx 0{,}139$

**Aufgabe 5**

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Werte $c$ für den Fall, dass $a$ und $b$ zueinander orthogonal sind!

b) Weisen Sie nach, dass für die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \cos(2x) \; (x \in R; x > -1)$$

gilt: $f(0) = 2 \cdot f'(0)$!

c) Wie viele Funktionen

$$y = f(x) = mx + n \; (x \in R)$$

gibt es, bei denen $m$ und $n$ jeweils voneinander verschiedene Primzahlen sind, von denen jede kleiner als 20 ist?

a) orthogonal, wenn Skalarprodukt gleich Null ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -c \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = -c - 2 + c^2 = 0$$

quadratische Gleichung hat die Lösungen $c_1 = -1; c_2 = 2$

b) 1.Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-0{,}5} \cdot \cos 2x - 2\sqrt{x+1} \cdot \sin x$

$$f(0) = \sqrt{0+1} \cdot \cos 2 \cdot 0 = 1 \doteq 2 \cdot (\frac{1}{2}1^{-0{,}5} \cdot \cos 0 - 2\sqrt{1} \cdot \sin 0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2f'(0)$$

c) 8 Primzahlen sind kleiner als 20 ... $\{1{,}2{,}3{,}5{,}7{,}11{,}13{,}17{,}19\}$ ; $z = 8 \cdot 7 = 56$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**
Gegeben ist eine Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = x(\ln x - a) \; (x \in \mathbb{R}; x > 0; a \in \mathbb{R})$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle $x_N$ der Funktion $f$ in Abhängigkeit von $a$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von $f$ in Abhängigkeit von $a$! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Zeigen Sie, dass $f'(x_N)$ von $a$ unabhängig ist!

d) Beweisen Sie, dass für die $n$-te Abteilung der Funktion $f$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

a) Ansatz $0 = x(\ln x - a) \rightarrow 0 = -\ln x - a \rightarrow x_N = e^a$

b) 1.Ableitung $y' = \ln x - a + 1$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{1}{x}$
Nullstelle der 1.Ableitung $x_E = e^{a-1}$ , Kontrolle in 2.Ableitung $f''(x_E) > 0$, d.h. Minimum lokaler Extrempunkt $E_{\min}(e^{a-1}; -e^{a-1})$

c) 1.Ableitung $y' = \ln x - a + 1$ ; Nullstelle $x_N$ einsetzen, $f'(x_N) = \ln e^a - a + 1 = a - a + 1 = 1$

d) Induktionsanfang für $n = 2$: $f''(x) = \frac{1}{x} \doteq (-1)^2 \frac{(2-2)!}{x^{2-1}} = \frac{1}{x}$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{(k-2)!}{x^{k-1}}$
Induktionsbehauptung für $n = k + 1$ gilt dann: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$
Induktionsbeweis

$$(f^{(k)}(x))' = ((-1)^k \cdot \frac{(k-2)!}{x^{k-1}})' = (-1)^k \cdot (k-2)! \cdot \frac{-(k-1)}{x^k} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^k \cdot (k-1)(k-2)! \cdot \frac{1}{x^k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$$

**Aufgabe 7**
Gegeben sind die Funktion $f$ und $g$ durch

$$y = f(x) = 1 - 2\cos x \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$y = g(x) = 1 + \sin(2x) \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f$ und die Nullstellen der Funktion $g$!

b) Die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ schneiden einander in den Punkten $S_1$ und $S_2$. Berechnen Sie die Koordinaten von $S_1$ und $S_2$!

c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ in dasselbe Koordinatensystem!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f$ und $g$ vollständig begrenzt wird!

e) Ermitteln Sie die Menge aller positiven reellen Zahlen $a$, für die die Graphen der Funktion

$$y = h(x) = 1 - a\cos x \ (x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

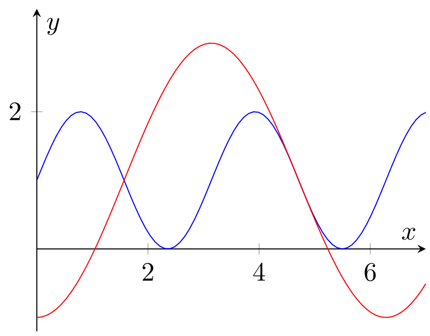
mit dem Graph der Funktion $g$ mehr als zwei gemeinsame Punkte haben!

a) Nullstellen $f(x)$: $0 = 1 - 2\cos x \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}; x_1 = \frac{5\pi}{3}$
Nullstellen $g(x)$: $0 = 1 + \sin 2x \rightarrow \sin 2x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4}; x_3 = \frac{7\pi}{4}$

b) Funktionsterme gleichsetzen

$$1 - 2\cos x = 1 + \sin 2x \rightarrow -2\cos x = 2\sin x \cos x \rightarrow 0 = \cos x(\sin x + 1)$$

Sowohl $0 = \cos 0$, als auch $0 = 1 + \sin x$ haben die Nullstellen $x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}$
Schnittpunkte: $S_1(\frac{\pi}{2}; 1); S_2(\frac{3\pi}{2}; 1)$

c) 


d)

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 2\cos x - (1 + \sin 2x))dx = \left[\frac{1}{2}\cos x - 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}\cos x - 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4 \text{ FE}$$

e) $1+\sin 2x = 1 - a\cos x \rightarrow 2\sin x\cos x = -a\cos x \rightarrow 0 = \cos x(a+2\sin x)$

$0 = \cos x$ hat genau 2 Nullstellen $\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

$0 = a + 2\sin x \rightarrow \sin x = \frac{a}{2}$ hat für a=2 und a=-2 die genannten Nullstellen im Intervall, für $|a| > 2$ keine Nullstelle.

Für $|a| < 2$ ergeben sich weitere von $\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ verschiedene Lösungen und somit insgesamt mehr als 2 Schnittpunkte.

**Aufgabe 8**

Gegeben ist die Funktion $f$ durch $y = f(x) = \dfrac{4x+6}{(x+2)^2}$

a) Geben Sie Nullstelle und Polstelle der Funktion $f$ an!
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f$ im Unendlichen!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von $f$!
Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$ im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

d) Für genau einen Wert von $a$ ist

$$F(x) = \frac{a}{x+2} + 4\ln(x+2) \ (a \in \mathbb{R}; x > -2)$$

eine Stammfunktion von $f$. Ermitteln Sie $a$!

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion $f$ und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!

a) Nullstelle $4x+6=0 \rightarrow x_0 = -\frac{3}{2}$ ; Polstelle $(x+2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2$

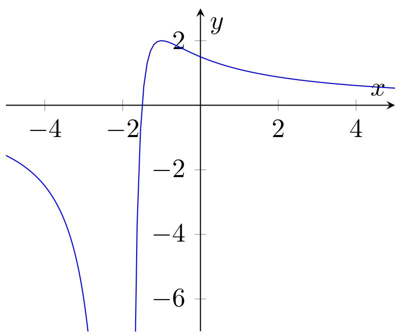
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+6}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})} = \frac{0}{1} = 0$$

b) 1.Ableitung $y' = -\frac{4x+4}{(x+2)^3}$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{8x+4}{(x+2)^4}$

Nullstelle der 1.Ableitung $x_E = -1$

Kontrolle über 2.Ableitung $f''(-1) = -4 < 0$, d.h. Maximum

lokaler Extrempunkt $E_{\max}(-1; 2)$




c)

d) Ableitung von $F(x) = \frac{a}{x+2} + 4\ln(x+2)$ ist $F'(x) = \frac{4x-a+8}{(x+2)^2}$

$4x - a + 8 = 4x + 6 \rightarrow a = 2$

e)

$$A = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{4x+6}{(x+2)^2}dx = \left[\frac{2}{x+2} + 4\ln(x+2)\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} = 8\ln 2 - 3 \approx 2{,}54 \text{ FE}$$

## 1.49 Abituraufgaben 1989

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben ist das Dreieck $ABC$ mit $A(1;5), B(3;-3), C(5;1)$.

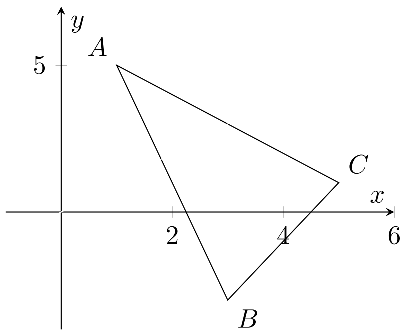
a) Zeichnen Sie das Dreieck $ABC$!

b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden $g_1$ auf, die durch $A$ geht und die Seite $\overline{BC}$ halbiert!

c) Stellen Sie eine Gleichung für die Mittelsenkrechte $g_2$ der Seite $\overline{AB}$ auf!

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der Geraden $g_1$ und $g_2$!

e) Berechnen Sie den Schnittwinkel $\phi$ der Geraden $g_1$ und $g_2$!

a) 


b) Mittelpunkt von $\overline{BC}$: $x_M = 4; y_M = -1$
Ansatz Gerade $y = mx - n$ und Einsetzen der Punkte $A$ und $M$ ergibt Gleichungssystem mit $m = -2; n = 7$
Geradengleichung $g_1 : y = -2x + 7$

c) Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$: $x_{AB} = 2; y_{AB} = 1$
Anstieg der Geraden durch $A$ und $B$: $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{-8}{2} = -4$
Mittelsenkrechte hat Anstieg $-\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ und verläuft durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$
Ansatz $y = \frac{1}{4}x + n$, mit $M_{AB}(2;1)$ wird $n = \frac{1}{2}$
Gleichung des Mittelsenkrechten $g_2 : y = 0{,}25x + 0{,}5$

d) $g_1$ und $g_2$ gleichsetzen $\rightarrow S(\frac{26}{9}; \frac{11}{9})$

e) Anstieg $g_1 : m = -2 = \tan\alpha \rightarrow \alpha = 116{,}57°$ ; Anstieg $g_2 : m = \frac{1}{4} = \tan\beta \rightarrow \beta = 14{,}03°$
Schnittwinkel $= -102{,}53° \doteq 77{,}5°$

**Aufgabe 2**
Gegeben sind die ersten Glieder $a_1 = 4{,}9; a_2 = 14{,}7; a_3 = 24{,}5$ der arithmetischen Zahlenfolge $(a_n)$.

a) Berechnen Sie $a_4$!
Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift dieser Folge $(a_n)$!

b) Berechnen Sie die Glieder $s_1, s_2$ und $s_3$ der zu $(a_n)$ gehörenden Partialsummenfolge $(s_n)$!

c) Weisen Sie durch vollständige Induktion nach, dass für alle n $(n \geq 1)$ gilt: $s_n = 4{,}9n^2$!

a) Differenz der arithmetischen Zahlenfolge $d = a_3 - a_2 = 9{,}8$
$a_4 = a_3 + d = 34{,}3$
Bildungsvorschrift $a_n = 4{,}9 + 9{,}8(n-1) = 9{,}8n - 4{,}9$

b) $s_1 = 4{,}9; s_2 = 19{,}6; s_3 = 44{,}1$

c) Induktionsanfang für $n = 1$: $a_1 = 4{,}9 \doteq 4{,}9 \cdot 1^2$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $a_1 + ... + 9{,}8k - 4{,}9 = 4{,}9 \cdot k^2$

Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $a_1 + ... + 9{,}8k - 4{,}9 + 9{,}8(k+1) - 4{,}9 = 4{,}9 \cdot (k+1)^2$
Induktionsbeweis

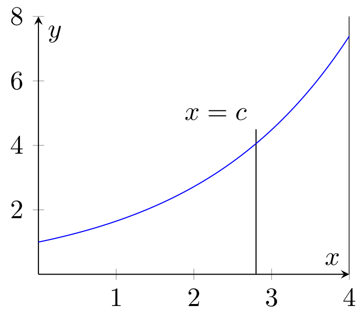
$$a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = 4{,}9 \cdot k^2 + 9{,}8(k+1) - 4{,}9 = 4{,}9k^2 + 9{,}8k + 4{,}9 =$$
$$= 4{,}9(k^2 + 2k + 1) = 4{,}9(k+1)^2 = s_{k+1}$$

**Aufgabe 3**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = e^{0{,}5x} \; (0 \leq x \leq 4)$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f$!

b) Der Graph der Funktion $f$, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Es gibt genau eine Gerade $x = c$ (mit $0 < c < 4$), die diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Berechnen Sie $c$!
Tragen Sie diese Gerade $x = c$ in Ihre Zeichnung ein!




b) Fläche von $x = 0$ bis $x = 4$:

$$A = \int\limits_0^4 e^{0{,}5x} dx = \left[2e^{0{,}5x}\right]_0^4 = 2e^2 - 2 \approx 12{,}78$$

Fläche von $x = 0$ bis $x = c$ ist halb so groß

$$e^2 - 1 = \int\limits_0^c e^{0{,}5x} dx = \left[2e^{0{,}5x}\right]_0^c = 2e^{0{,}5c} - 2 \rightarrow c = 2\ln\frac{e^2+1}{2} \approx 2{,}87$$

**Aufgabe 4**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

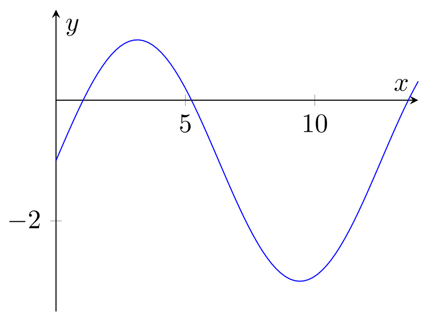
$$y = f(x) = -1 + 2\sin\frac{x}{2}$$

a) Geben Sie die kleinste Periode $p$ und den Wertebereich der Funktion $f$ an!
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f$ im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$ mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!

b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion $f$ im Punkt $P_0(2\pi; f(2\pi))$!

a) kleinste Periode $4\pi$ ; Wertebereich: $\{y : -3 \leq y \leq 1\}$
Nullstellen $0 = -1 + 2\sin\frac{x}{2} \rightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}; x_1 = \frac{5\pi}{3}$

b) Anstieg im Punkt $P_0(2\pi; f(2\pi)) = P_0(2\pi; -1)$
1.Ableitung $y' = \cos\frac{x}{2} \rightarrow$ Anstieg $f'(2\pi) = -1$
Ansatz $y = -x + n$, $P_0(2\pi; -1)$ einsetzen, ergibt $n = 2\pi - 1$
Tangentengleichung $y = -x + (2\pi - 1)$



**Aufgabe 5**

a) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen $x$ an, für die der Term $\sqrt{\ln x}$ definiert ist!

b) Gegeben seien die Geraden $g_1$ und $g_2$ durch

$$g_1 : x + ay = 1 \ (a \neq 0) \ ; \ g_2 : 2x + 3y = 4$$

Berechnen Sie $a$ für den Fall, dass $g_1$ und $g_2$ zueinander parallel sind!
Berechnen Sie $a$ für den Fall, dass $g_1$ und $g_2$ zueinander orthogonal sind!

c) Fünfstellige Kennzeichen sollen folgendermaßen gebildet werden:
Die ersten beiden Stellen werden durch 2 voneinander verschiedene Buchstaben und die letzten drei Stellen durch 3 voneinander verschiedene Ziffern belegt.
Wie viele voneinander verschiedene Kennzeichen kann man bilden, wenn die 26 Buchstaben des Alphabetes und die Ziffern $0; 1; 2; ...; 9$ für die Belegung der Stellen zugrunde gelegt werden?

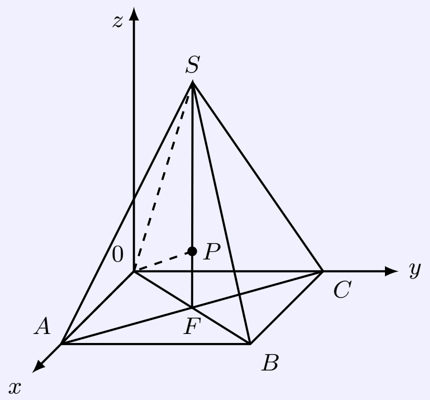
a) Definitionsbereich $x \geq 1$

b) Geradenanstiege $m_1 = -\frac{1}{a}; m_2 = -\frac{2}{3}$
$g_1 \parallel g_2$, wenn die Geradenanstiege gleich sind, d.h. $a = 1{,}5$
$g_1 \perp g_2$, wenn für die Geradenanstiege $m_1 m_2 = -1$ gilt
aus $-\frac{1}{a} \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$ wird $a = -\frac{2}{3}$

c) $z = \begin{pmatrix} 26 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 325 \cdot 120 = 39000$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6**




Die Skizze stellt eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche $OABC$ und der Spitze $S$ dar.
Die Kante $\overline{AB}$ hat die Länge 12 Längeneinheiten, die Höhe $\overline{FS}$ die Länge 18 Längeneinheiten.
Auf $\overline{FS}$ liegt ein Punkt $P$ mit $\overline{FP} = z$ Längeneinheiten. (Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte $F$ und $S$ an!
Ermitteln Sie die Längen der Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{SP}$ in Abhängigkeit von $z$!

b) Auf $\overline{FS}$ existiert ein Punkt $P_1$, der von allen fünf Eckpunkten der Pyramide gleich weit entfernt ist.
Berechnen Sie die Koordinate $z_1$ des Punktes $P_1$!

c) Auf $\overline{FS}$ existiert ein Punkt $P_2$, für den gilt:
Die Summe der Abstände des Punktes $P_2$ von den fünf Eckpunkten der Pyramide ist minimal.
Berechnen Sie die Koordinate $z_2$ des Punktes $P_2$!

a) $F$ ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$: Koordinaten $F(6; 6; 0)$
$S$ befindet sich 18 Einheiten über $F$: Koordinaten $S(6; 6; 18)$
Punkt $P(6; 6; z)$
Streckenlängen $\overline{OP} = \sqrt{(6-0)^2 + (6-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{72 + z^2}$
$\overline{SP} = 18 - z$

b) aus Symmetriegründen genügt $\overline{OP_1} = \overline{SP_1}$ nachzuweisen, d.h.

$$\sqrt{72 + z_1^2} = 18 - z_1 \rightarrow 72 + z_1^2 = 324 - 36z_1 + z_1^2 \rightarrow 36z_1 = 252 \rightarrow z_1 = 7$$

Punkt $P_1(6; 6; 7)$

c) Zielfunktion $d = 4|\overline{OP_2}| + \overline{SP_2} = 4\sqrt{72+z^2} + 18 - z$
1.Ableitung $y' = \frac{4z}{\sqrt{z^2+72}} - 1$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{288}{\sqrt{(z^2+72)^3}}$
Nullstelle der 1.Ableitung (2.Ableitung ist stets $> 0$)

$$0 = \frac{4z}{\sqrt{z^2+72}} - 1 \rightarrow 4z = \sqrt{z^2+72} \rightarrow 15z^2 = 72 \rightarrow z^2 = \frac{24}{5} \rightarrow z \approx 2{,}19$$

**Aufgabe 7**
Ein Motorschiff und ein Hubschrauber bewegen sich geradlinig gleichförmig.
Um 0:00 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt $S_0(1;1;0)$ und der Hubschrauber im Punkt $H_0(19;5;0{,}5)$, und um 0:10 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt $S_{10}(3;2;0)$, der Hubschrauber im Punkt $H_{10}(14;5;0{,}5)$.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Motorschiffes und die Bahn des Hubschraubers auf!

b) Berechnen Sie die Entfernung, die Motorschiff und Hubschrauber um 0:10 Uhr voneinander haben!

c) Um 0:30 Uhr haben das Motorschiff den Punkt $S_{30}$ und der Hubschrauber den Punkt $H_{30}$ erreicht. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte $S_{30}$ und $H_{30}$!
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte!

d) Ermitteln Sie die Uhrzeit für den Fall, dass die Entfernung zwischen Motorschiff und Hubschrauber minimal ist!
(Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

a) Bahn des Motorschiffs $g_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Bahn des Hubschraubers $g_H : \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Abstand Schiff-Hubschrauber: $d = |\overline{H_{10}S_{10}}| = \sqrt{11^2 + 3^2 + 0{,}5^2} = 11{,}41$ km

c) $m = h = \frac{30}{10} = 3$ setzen: $S_{30}(7;4;0); H_{30}(4;5;0{,}5)$
$s = |\overline{H_{30}S_{30}}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0{,}5^2} = 3{,}20$ km

d) Zielfunktion (m=h)

$$d = \sqrt{(x_S - x_H)^2 + (y_S - y_H)^2 + (z_S - z_H)^2} =$$
$$= \sqrt{(1 + 2m - 19 + 5m)^2 + (1 + m - 5)^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{(7m - 18)^2 + (m - 4)^2 + 0{,}5^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{200m^2 - 1040m + 1361}$$

der Abstand wird minimal, wenn der Radikand minimal wird.
1.Ableitung des Radikanden $y' = 400m - 1040$ mit der Nullstelle $m = \frac{13}{5} = 2{,}6$
$m = 2{,}6$ entspricht 26 min, d.h. 00.26 Uhr

**Aufgabe 8**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \sqrt{6x} + \sqrt{16 - 2x}\ (0 \leq x \leq 8)$$

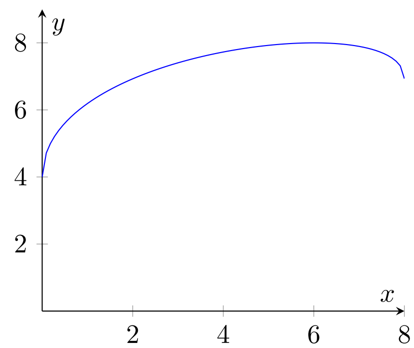
a) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f$ keine Nullstelle hat!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von $f$!
(Auf Nachweis des Extremums von $f$ wird verzichtet.)
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f$!

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graph der Funktion f, den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 8$ vollständig begrenzt wird!

d) Es sind $A(0; f(0))$ und $B(8; f(8))$ zwei Punkte des Graphen von $f$.
$P$ sei ein Punkt auf der x-Achse.
Berechnen Sie die Abszisse des Punktes $P$ für den Fall, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PB}$ minimal ist!

a) die Summe zweier Wurzeln $0 = \sqrt{6x} + \sqrt{16 - 2x}$ kann nur Null werden, wenn beide Wurzeln gleich Null sind.
Die erste Wurzel wird für $x = 0$, die zweite für $x = 8$ Null. D.h. $0 = f(x)$ hat keine Lösung.
Löst man die Gleichung durch Umstellen und Quadrieren entsteht nur eine Scheinlösung $x_0 = 2$.




b)

1.Ableitung $y' = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{8-x}}$

$$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{8-x}} \to 2\sqrt{8-x}\sqrt{6} = 2\sqrt{x}\sqrt{2} \to$$

$$\to 24(8-x) = 8x \to 24 - 3x = x \to x = 6$$

lokaler Extrempunkt $E(6; 8)$

c)

$$A = \int_0^8 (\sqrt{6x} + \sqrt{16-2x})dx = \left[\frac{2}{3}(\sqrt{6x^3} - \sqrt{2(8x-2)^3})\right]_0^8 \approx 58{,}3 \text{ FE}$$

d) Koordinaten des Punktes $P(x_P; 0)$ ; Koordinaten $A(0; 4); B(8; 4\sqrt{3})$
Zielfunktion $z = -x_P \cdot (8 - x_P) + 4 \cdot 4\sqrt{3}$
1.Ableitung $z' = 2x - 8x$ ; 2.Ableitung $y'' = 2 > 0$ (Minimum!)
Nullstelle der 1.Ableitung ist Minimalstelle $x_P = 4$

## 1.50 Abituraufgaben 1990

**Pflichtaufgaben**

**Aufgabe 1**
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch

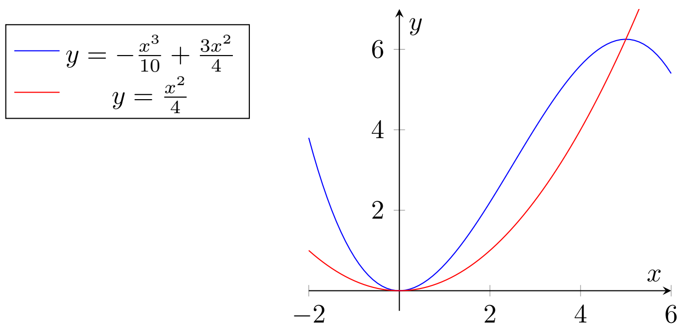
$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = g(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von $g$!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Berechnen sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von $f$ und $g$!
Skizzieren Sie die Graphen im Intervall $-1 \leq x \leq 6$!

c) Die Graphen von $f$ und $g$ begrenzen eine Punktmenge vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

a) 1.Ableitung $y' = \frac{3}{2}x - \frac{3}{10}x^2$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{3}{2} - \frac{3}{5}x$
Nullstellen der 1.Ableitung $0 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{10}x^2 = x(\frac{3}{2} - \frac{3}{10}x) \rightarrow x_{N1} = 0; x_{N2} = 5$
Kontrolle in 2.Ableitung: $f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ Minimum
$f''(5) = -\frac{3}{2} < 0 \rightarrow$ Maximum
lokale Extrempunkte $E_{\min}(0;0); E_{\max}(5;6{,}25)$




b)

Schnittpunkte berechnen

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \rightarrow 0 = x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}x) \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$$

Koordinaten der Schnittpunkte $S_1(0;0); S_2(5;6{,}25)$

c)

$$A = \int_0^5 \left(-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{10}\right]_0^5 = \frac{125}{24} \approx 5{,}21 \text{ FE}$$

**Aufgabe 2**
In einem Koordinatensystem $\{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ gegeben.

$g_1$ geht durch den Punkt $P_0(4;18;-2)$ und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$g_2$ geht durch die Punkte $P_1(1;3;5)$ und $P_2(4;6;2)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden $g_1$ und $g_2$!

b) Eine zur Gerade $g_2$ parallele Gerade $g_3$ habe den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie $a_x$ und $a_y$!

c) Es seien $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren von Geraden, die zur Geraden $g_2$ orthogonal sind.
Weisen Sie nach, dass für jeden dieser Richtungsvektoren gilt: $b_x + b_y = 1$!

a) Gerade $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; Gerade $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
Gleichsetzen ergibt $s = 3; t = -2 \rightarrow$ Schnittpunkt $S(10; 12; -4)$
Schnittwinkel

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-3}{\sqrt{19}\sqrt{27}} = \frac{-1}{\sqrt{57}} \rightarrow \alpha = 82{,}4^\circ$$

b) Richtungsvektoren müssen linear abhängig sein

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \rightarrow a_x = -1; a_y = -1$$

c) Skalarprodukt der Richtungsvektoren muss gleich 0 sein

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix} = 3b_x + 3b_y - 3 = 0 \rightarrow b_x + b_y = 1$$

**Aufgabe 3**
a) Durch die Tabelle ist eine monoton wachsende geometrische Folge $(a_n)$ gegeben.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 6,4 | | 8,1 | |

Berechnen Sie die Glieder $a_2$ und $a_4$ der Folge $(a_n)$!

b) Es gibt eine Funktion $f$ mit

$$y = f(x) = c \cdot e^{kx} \ (x > 0; c \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R})$$

für die $f(1) = 6{,}4$ und $f(3) = 8{,}1$ gilt.
Ermitteln sie $f(2)$ und $f(4)$!

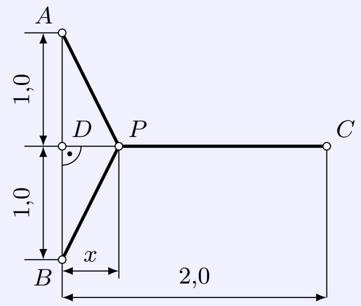
a) Quotient der Folge $a_3 = q^2 a_1 \rightarrow q = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \sqrt{\frac{8{,}1}{6{,}4}} = \frac{9}{8}$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 6,4 | 7,2 | 8,1 | 9,1125 |

b) Gleichungssystem $6{,}4 = ce^k \wedge 8{,}1 = ce^{3k}$
Division der Gleichungen $\frac{8{,}1}{6{,}4} = \frac{e^{3k}}{e^k} = e^{2k} \rightarrow k = \ln\frac{9}{8} \approx 0{,}1178$
$c = \frac{256}{45} \approx 5{,}69$ und $f(2) = 7{,}2; f(4) = 9{,}1125$

**Aufgabe 4**

Für drei Betriebe, deren Lage durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ gegeben ist, soll im Punkt $P$ eine gemeinsame Abwasseraufbereitungsanlage gebaut werden (siehe Skizze!).
Skizze nicht maßstäblich, Maßangaben in km




a) Geben Sie die Gesamtlänge $s = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ der Anschlussleitungen an, wenn die Anlage im Punkt $D$ bzw. wenn die Anlage im Punkt $C$ errichtet würde!

b) Berechnen Sie $x$ für den Fall, dass die Gesamtlänge $s$ minimal wird!
(Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)
Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge der Rohrleitung!

a) Anlage im Punkt D: $s_1 = |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| = 4$ km
Anlage im Punkt C: $s_2 = 2\sqrt{|\overline{DP}|^2 + |\overline{AD}|^2} = 2\sqrt{2^2 + 1^2} \approx 4{,}47$ km

b) Länge der Rohrleitung $s = 2|\overline{AP}| + |\overline{CP}| = 2\sqrt{x^2+1} + (2-x)$
1.Ableitung $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ ; Nullstelle $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}578$
Länge der Rohrleitung $s = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$ km

**Aufgabe 5**

a) Zu einem Schulsportfest soll eine Klasse für eine 4 $\times$ 100 m-Staffel entweder eine Jungen- oder eine Mädchenstaffel stellen.
Es kommen 7 Jungen bzw. 6 Mädchen in Frage.
Ermitteln Sie die theoretisch mögliche Gesamtzahl von Staffelaufstellungen, aus denen die zu meldende Staffel ausgewählt werden kann für folgende Fälle!
1. Es sind die Namen der Staffelteilnehmer und deren Reihenfolge zu melden.
2. Es sind nur die Namen der Staffelteilnehmer zu melden.

b) Es sei $(a_n) = (\frac{c}{n!})$ eine Folge mit $c \in \mathbb{R}; n \in N, n > 0$.
Man ermittle $c$ für den Fall, dass gilt: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2n}{(n+1)!}$

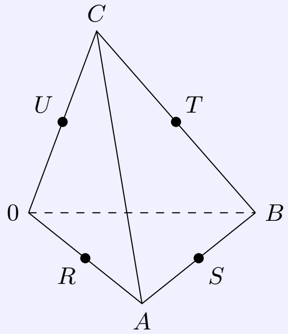
a) Namen und Reihenfolge: $n_{\text{Jungen}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ bzw. $n_{\text{Mädchen}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
Namen ohne Reihenfolge: $n_{\text{Jungen}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 35$ bzw. $n_{\text{Mädchen}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 15$

b) $a_{n+1} = \dfrac{c}{(n+1)!} = \dfrac{c}{n!} + \dfrac{2n}{(n+1)!} = \dfrac{c(n+1)+2n}{(n+1)!}$ aus $c = c(n+1) + 2n$ wird $c = -2$

**Wahlaufgaben**
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

**Aufgabe 6.1.**
Die Punkte $O$, $A$, $B$, $C$ seien Eckpunkte einer Pyramide; $R$, $S$, $T$, $U$ seien die Mittelpunkte der Kanten $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{OC}$ (siehe Skizze!).

a) In einem kartesischen Koordinatensystem $\{0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sind $O$, $A$, $B$, $C$ gegeben durch:
$O(0;0;0), A(6;0;0), B(8;12;0)$ und $C(4;4;10)$.
Weisen Sie nach, dass für diese spezielle Pyramide das Viereck $RSTU$ ein Parallelogramm ist!




b) Die Pyramide $OABC$ sei ein Tetraeder, d.h. alle Kanten haben die gleiche Länge.
Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{UT}, \overrightarrow{RU}, \overrightarrow{ST}$ in Abhängigkeit von $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ an!
Beweisen Sie, dass für jedes Tetraeder das Viereck $RSTU$ ein Quadrat ist!

a) Koordinaten der Mittelpunkte: $R(3;0;0); S(7;6;0); T(6;8;5); U(2;2;5)$
Vektoren $\overrightarrow{UR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sind identisch, d.h. die Seiten sind parallel und gleich lang, es liegt ein Parallelogramm vor

b) Ortsvektoren der Mittelpunkte

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}; \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}); \vec{t} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}); \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

Vektoren

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT} = \frac{1}{2}\vec{b}\ ;\ \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$$

da die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gleich lang sind, sind auch alle Seiten von $RSTU$ gleich lang.
Innenwinkel

$$\overrightarrow{RS} \bullet \overrightarrow{RU} = \frac{1}{4}\vec{b}(\vec{c}-\vec{a}) = \frac{1}{4}(\vec{b}\vec{c}-\vec{b}\vec{a}) = \frac{1}{4}(|\vec{b}||\vec{c}|\cos\measuredangle(\vec{b},\vec{c}) - |\vec{b}||\vec{a}|\cos\measuredangle(\vec{b},\vec{a}))$$

da $|\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{c}|$ und die Winkel zwischen den Vektoren gleich $60°$ sind (gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen des regelmäßigen Tetraeders) wird

$$\overrightarrow{RS} \bullet \overrightarrow{RU} = \frac{1}{4}(|\vec{b}||\vec{c}|\cos\measuredangle(\vec{b},\vec{c}) - |\vec{b}||\vec{a}|\cos\measuredangle(\vec{b},\vec{a})) = 0$$

d.h. $\overrightarrow{RS}$ und $\overrightarrow{RU}$ schließen einen rechten Winkel ein. $RSTU$ ist ein Quadrat.

**Aufgabe 6.2.**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = \sin\frac{x}{3}\ (x \in \mathbb{R})$$

a) Geben Sie die kleinste Periode der Funktion $f$ an!
Skizzieren Sie den Graph von $f$ im Intervall $-2\pi \le x \le 3\pi$!

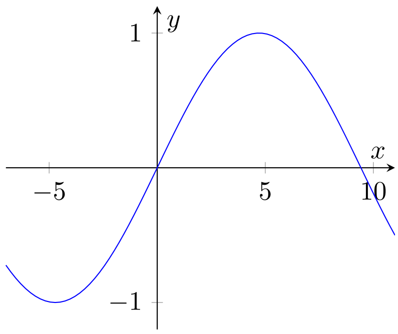
b) Weisen Sie nach, dass es keine Tangente an den Graph von $f$ gibt, die orthogonal zur Tangente im Punkt $O(0;0)$ an den Graph von $f$ ist!

c) Gegeben sind die Funktionen $g$ durch

$$y = g(x) = \sin ax \; (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

Bilden Sie die erste, die dritte und die fünfte Abteilung der Funktion $g$!
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ $(n \geq 0)$ gilt:

$$g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot \cos(ax)$$




a)

kleinste Periode $p = 6\pi$

b) 1.Ableitung $y' = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$, Anstieg in O: $m_O = \frac{1}{3}$
die orthogonale Tangente hätte den Anstieg $m = -3$
$m = -3 = f'(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$ hat auf Grund des Wertebereiches keine Lösung.

c) $g'(x) = a\cos ax; g'''(x) = -a^3\cos ax; g^{(5)} = a^5\cos ax$
Induktionsanfang für $n = 1$: $g'(x) = a\cos ax = (-1)^0 a^{2\cdot 0+1}\cos ax$
Induktionsvoraussetzung für $n = k$ gilt: $g^{(2k+1)}(x) = (-1)^k a^{2k+1}\cos ax$
Induktionsbehauptung für $n = k+1$ gilt dann: $g^{(2k+3)}(x) = (-1)^{k+1}a^{2k+3}\cos ax$
Beweis

$$((g^{(2k+1)}(x))')' = ((-1)^k a^{2k+1}(-a)\sin ax)' = (-1)^k a^{2k+1}(-a)(a)\cos ax =$$
$$= (-1)(-1)^k a^{2k+1}a^2\cos ax = (-1)^{k+1}a^{2k+3}\cos ax = g^{(2k+3)}(x)$$

**Aufgabe 6.3.**
Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$y = f(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln(3x)) \; (0{,}5 \leq x \leq 10)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion!
Der Graph von $f$ hat genau einen lokalen Maximumpunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes! Skizzieren Sie den Graph von $f$!

b) Zeigen Sie, dass

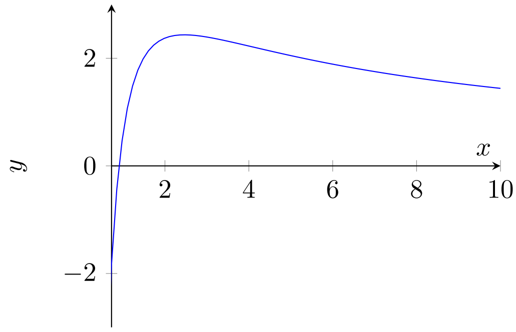
$$F(x) = -3(2 - \ln(3x)) \cdot \ln(3x)$$

eine Stammfunktion von $f$ ist!
Der Graph von $f$, die x-Achse und eine Gerade $x = c(c > 1)$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A$ vollständig. Berechnen Sie $c$ für den Fall, dass $A = 3$ gilt!

c) Gegeben sind Funktionen $g$ durch

$$y = g(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln(ax)) \; (x \in \mathbb{R}, x > 0; a \in \mathbb{R}, a > 0)$$

Der Graph einer dieser Funktionen hat an der Stelle $x = 2$ den Anstieg 1.
Berechnen Sie $a$ für diesen Fall!




a)

Nullstelle $0 = -\frac{6}{x}(1 - \ln(3x)) \rightarrow 1 = \ln(3x) \rightarrow x_0 = \frac{e}{3}$
1.Ableitung $y' = \frac{12-6\ln(3x)}{x^2}$ ; 2.Ableitung $y'' = \frac{12\ln(3x)30}{x^3}$
Nullstelle der 1.Ableitung $x_E = \frac{e^2}{3}$ ; $f''(\frac{e^2}{3}) \approx -0{,}402 < 0 \rightarrow$ Minimum
lokale Extremstelle $E_{\min}(\frac{e^2}{3}; 2{,}43)$

b) Ableitung von $F(x)$

$$F'(x) = (-3(2 - \ln(3x))\ln(3x))' =$$
$$= -3(-\frac{3}{3x}\ln(3x) + (2 - \ln(3x))\frac{3}{3x}) = -\frac{3}{x}(2 - 2\ln(3x)) = -\frac{6}{x}(1 - \ln(3x)) = f(x)$$
$$A = 3 = \int_{\frac{e}{3}}^{c} f(x)dx = [-3(2 - \ln(3x))\ln(3x)]_{\frac{e}{3}}^{c} \approx 3\ln^2 c + 0{,}5917\ln c - 0{,}5306$$

Näherungslösung der quadratischen Gleichung $c \approx 2{,}46 (= \frac{e^2}{3})$

c) 1.Ableitung $y' = \frac{12-6\ln(ax)}{x^2}$ ; $f'(2) = \frac{12-6\ln(2a)}{4} = 1$ ergibt $a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{e^4} \approx 1{,}9$