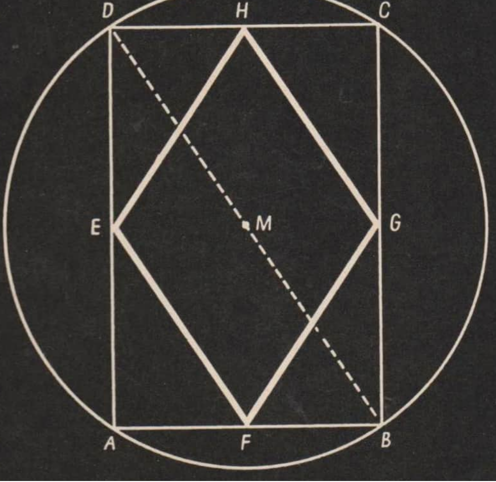
Aufgaben

für mathematische Schülerwettstreite

$EH = MD = r$



P. J. GERMANOWITSCH

Aufgaben für mathematische Schülerwettstreite

Eine Sammlung von Aufgaben für den Mathematikunterricht
in der sechsten bis zwölften Klasse,
für mathematische Arbeitsgemeinschaften
und zur Durchführung mathematischer Schülerolympiaden

Zweite, durchgesehene Auflage

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1963

Titel der Originalausgabe:
П. Ю. Германович, Математические викторины
Die Übersetzung besorgte Siegrid Adam
Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin

Umschlag: Werner Fahr

ES 10C · Bestell-Nr. 00 042-2 · 1,25 DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/63 (DN)
Gesamtherstellung: Betriebsberufsschule Otto Grotewohl, Leipzig (III-18-3)

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Die ständig zunehmende Bedeutung der Mathematik auf allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens wurde auch in der Deutschen Demokratischen Republik zum Anlaß dafür, daß sich immer weitere Kreise der Bevölkerung mit mathematischen Problemen beschäftigen. Jedoch ist es allein mit Kursen an der Volkshochschule und im Fernsehfunk sowie mit Anleitungen und Konsultationen im Fernstudium nicht möglich, die Mathematik zu einer wahren Volkswissenschaft werden zu lassen. Es muß gelingen, möglichst viele Menschen so für die Mathematik zu begeistern, daß sie sich auch außerhalb ihrer Arbeit und ihres Studiums mit mathematischen Fragen befassen. Vor allem gilt es, die Jugend dadurch schon möglichst frühzeitig an die Mathematik heranzuführen, daß ihr in vielfältiger Form Gelegenheit gegeben wird, sich zusätzlich zum Mathematikunterricht der Schule in der Freizeit und zum Vergnügen mit interessanten, reizvollen und zugleich belehrenden mathematischen Fragestellungen aktiv auseinanderzusetzen. Zur Erreichung dieser Ziele ist es notwendig, eine wissenschaftlich einwandfreie Unterhaltungsliteratur zu schaffen, die dem mathematisch nicht besonders vorgebildeten Leser genügend Anregungen bietet, sein mathematisches Wissen und Können zu bereichern.

Die vorliegende Sammlung von 227 Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der elementaren Mathematik zeichnet sich dadurch aus, daß die darin enthaltenen Aufgaben fast durchweg nicht von der Art sind, wie sie im Mathematikunterricht der verschiedenen Schulformen ständig geübt werden. Die Aufgaben vermitteln dem Leser interessante Ausblicke, eröffnen neue Gesichtspunkte innerhalb des bekannten Schulstoffes, regen zum Nachdenken und Knobeln an, zeigen Besonderheiten und Eigenarten bestimmter Zahlen oder Figuren, erhellen verborgene Gesetzmäßigkeiten, decken Beziehungen zwischen verschiedenen Bereichen der elementaren Mathematik auf, erziehen vor allem zum logischen Denken, zum mathematischen Experimentieren, Suchen und Überlegen. Die Aufgaben dieses kleinen Bändchens sind daher hervorragend geeignet zur Weckung und zur Stärkung des Interesses an der Mathematik. Da zu allen Aufgaben die Lösung angegeben und zu den meisten Aufgaben auch der Gang der Lösung skizziert ist, besteht für den Leser die Möglichkeit der Kontrolle seiner Überlegungen. Bis auf wenige Ausnahmen sind die Aufgaben mit Hilfe der im Mathematikunterricht der zehnklassigen allgemeinbildenden poly-

technischen Oberschule der Deutschen Demokratischen Republik vermittelten Kenntnisse lösbar, zu einem beträchtlichen Teil sogar bereits mit den Kenntnissen, die etwa zwölf- bis dreizehnjährige Schüler besitzen.
Die Aufgabensammlung läßt sich sowohl in außerunterrichtlichen Kursen und Arbeitsgemeinschaften der Schule, der Pionierorganisation und der FDJ als auch für die private Beschäftigung mit der Mathematik nutzen. Sie kann dem Lehrer für die Belebung verschiedener Gebiete des lehrplanmäßig gebundenen Mathematikunterrichts dienen. Vor allem ist sie von ganz besonderem Wert für die Durchführung von mathematischen Wissensstraßen und anderen Formen mathematischer Schülerwettstreite sowie für die Vorbereitung auf die Teilnahme an mathematischen Schülerolympiaden. Bekanntlich hat in den letzten Jahren die Bewegung zur Durchführung mathematischer Schülerolympiaden auch in der Deutschen Demokratischen Republik viele Anhänger gefunden. Die Erfolge, die Schüler unserer sozialistischen Oberschulen bei den alljährlich stattfindenden internationalen mathematischen Schülerolympiaden bisher erzielten, sind nicht zuletzt darauf zurückzuführen, daß unsere Schüler von Jahr zu Jahr besser auf diese bedeutsame Form friedlichen Wettkampfes vorbereitet werden konnten. Es fehlt aber noch immer an geeignetem Übungsmaterial, um die Schüler aller Klassenstufen das ganze Jahr hindurch auf ihre Teilnahme an einer mathematischen Schülerolympiade planmäßig vorzubereiten. In Auswertung der sowjetischen Erfahrungen auf diesem Gebiet wird nunmehr allen Ratsuchenden in der Deutschen Demokratischen Republik durch die Veröffentlichung der vorliegenden Übersetzung wertvolle Hilfe zuteil.
Durch die thematische Anordnung nach neun Stoffkomplexen wird es dem Leser, insbesondere dem Leiter von Arbeitsgemeinschaften und dem Mathematiklehrer, erleichtert, geeignete Aufgaben aufzufinden. Die kniffligen Aufgaben und Scherzaufgaben sind nicht an ein bestimmtes Stoffgebiet gebunden; sie erfordern zur Lösung nur „gesunden Menschenverstand“ und sichere Beherrschung der vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen und Brüchen. Auch die Aufgaben zu den vier Grundrechenarten und zur Bruchrechnung stellen keine hohen Anforderungen an das mathematische Wissen. Sie sind aber hervorragend geeignet, dem Leser die Beziehungen zwischen den Zahlen sichtbar zu machen. Wer diese Aufgaben wirklich selbständig gelöst oder zumindest die angegebenen Lösungen durchdacht hat, der wird sicher nicht mehr gedankenlos rechnen und vorgelegte Ergebnisse unkritisch hinnehmen. Die im Abschnitt über lineare Gleichungen, Proportionen und Prozentrechnung enthaltenen Beispiele können als wertvolle Ergänzung des im Schulunterricht üblichen Übungsmaterials angesehen werden. In den Aufgaben über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ist es gelungen, tatsächlich mathematisch Bedeutendes und für den Leser Reizvolles zusammenzustellen; die Denkanforderungen sind hier bei

einigen Aufgaben recht hoch. Im Abschnitt über verschiedene Gleichungen höheren Grades, transzendente Gleichungen und Abschätzungen wird dem Leser ein Eindruck vermittelt von der Vielzahl der Gleichungsarten und der entsprechenden Lösungsverfahren. Der besonders umfangreiche Abschnitt über die Eigenschaften von Zahlen ist ein außerordentlich wertvoller Teil der Sammlung, da hier der interessierte Laie an das Sehen bestimmter mathematischer Leerformen — z. B. versteckt enthaltener binomischer Formeln — und an das Umstrukturieren vorgelegten mathematischen Materials gewöhnt wird. Die Anforderungen in den geometrischen Aufgaben sind im allgemeinen höher, als wir es bei deutschen Aufgabensammlungen zur Geometrie gewohnt sind. Da aber die mathematischen Voraussetzungen, die für das erfolgreiche Lösen der Aufgaben aus der Planimetrie, der systematischen Stereometrie und der darstellenden Geometrie erforderlich sind, nicht umfangreich sind, stellen gerade diese Aufgaben einen für deutsche Leser besonders wichtigen Teil der gesamten Aufgabensammlung dar. Vor allem ist hier, genau wie bei den Untersuchungen der besonderen Eigenschaften von Zahlen, eine reiche Fülle von Material für die systematische Schulung im Beweisen und Herleiten mathematischer Aussagen zusammengestellt. In den Aufgaben zur Trigonometrie überwiegen goniometrische Betrachtungen, so daß die mathematisch bedeutsamen Winkelfunktionen hier außerhalb von Dreieckberechnungen auftreten. Die wenigen Aufgaben über komplexe Zahlen wurden belassen, obwohl der Lehrplan nicht die Behandlung dieses Stoffgebietes vorsieht.
Dem Leser sei nunmehr empfohlen, jede Aufgabe Wort für Wort zu lesen, zu durchdenken und sich den Text dadurch zu erschließen, daß er schon vor Beginn der Lösung den Versuch unternimmt, Wesentliches vom Unwesentlichen zu trennen und Klarheit über die Bedeutung jeder einzelnen Angabe zu erlangen: dann wird der Erfolg nicht ausbleiben und das Lösen mathematischer Probleme Freude machen.

Berlin, Oktober 1961

Dr. Fritz Neigenfind
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut

Inhaltsverzeichnis

I. Kniffline Fragen und Scherzaufgaben

1. Welches Zeichen muß man zwischen die Zahlen 4 und 5 setzen, um eine Zahl zu erhalten, die größer als 4 aber kleiner als 5 ist?

   Komma (4,5)

2. In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie?

   6 Kinder

3. Zwei Zahlen sollen multipliziert das Produkt 24 ergeben. Dividiert man die größere Zahl durch die kleinere, so erhält man ebenfalls 24. Wie heißen die beiden Zahlen?

   24 und 1

4. Ein Wagen, vor den 3 Pferde gespannt sind, fahre in einer Stunde 15 km. Mit welcher Geschwindigkeit läuft jedes Pferd?

   $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

5. Sieben gleiche Semmeln sollen zu gleichen Teilen unter 12 Personen verteilt werden. Wie geschieht dies, ohne daß eine einzige Semmel in 12 Teile geteilt werden muß?

   Drei Semmeln werden in vier gleiche Teile geteilt $3 \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$. Die übrigen vier Semmeln werden in drei gleiche Teile geteilt $\left(4 \cdot \frac{3}{3} = \frac{12}{3}\right)$. So werden 12 gleiche Portionen zu $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ Semmeln gebildet.

6. Von drei Ringen, die äußerlich gleich aussehen, möge ein Ring etwas schwerer sein als die beiden anderen. Wie findet man diesen mit Hilfe einer einzigen Wägung auf einer gewöhnlichen doppelschaligen Waage?

   Man nimmt zwei beliebige Ringe und legt auf jede Schale einen Ring. Wenn Gleichgewicht eintritt, ist der dritte Ring der gesuchte.

7. Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte. Wie lang war der Balken?

   2 m (Nach 3 Schnitten ist der Balken in 4 Teile zersägt.)

8. Wie macht man aus drei Streichhölzern vier, ohne sie zu zerbrechen?

IV

9. Es werden nacheinander alle Zahlen von 1 bis 99 aufgeschrieben. Wie oft wird die Ziffer 5 geschrieben?

20mal

(Im Zehner 50 bis 59 erscheint die Ziffer 5 elfmal, in den übrigen 9 Zehnern je einmal.)

10. Aus einem Paket mit 1100 g Tee sollen 1000 g entnommen werden. Zur Verfügung stehen eine Balkenwaage ohne Wägestücke und zwei Päckchen zu 300 g bzw. 650 g. Wie kann man sich helfen?

Zunächst legt man auf die Waagschalen die Päckchen zu 300 g bzw. 650 g und bringt die Waage durch Zuschütten von Tee aus dem großen Paket ins Gleichgewicht. Auf diese Weise werden dem Paket 350 g entnommen. Dann entnimmt man in einer zweiten Wägung dem Paket noch einmal 650 g mit Hilfe des Päckchens zu 650 g.

11. Aus zwei Zweien und einem Zeichen soll eine Zahl gebildet werden, die gleich $\frac{11}{5}$ ist.

2,2

II. Die vier Grundrechenarten und die Bruchrechnung

1. Ein Bibliothekar stößt beim Sortieren alter Schriften auf ein Rechenheft. Einige Zahlen in den Aufgaben sind unleserlich geworden. Wie heißen die Aufgaben in dem verblichenen Heft?

a)
$$\begin{array}{r} *0** \\ -3*06 \\ \hline 3124 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} **** \\ -*** \\ \hline 1 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} 7030 \\ -3906 \\ \hline 3124 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 1000 \\ -999 \\ \hline 1 \end{array}$$

2. Aus einer unleserlichen, unvollendeten Aufgabe gehe hervor, daß 52 mit einer zweistelligen Zahl multipliziert wurde. Wie heißt diese Zahl?

$$\begin{array}{l} 52 \cdot ** \\ \hline \;\; ** \\ ** \\ \hline \end{array}$$

Die Zahl heißt 11; denn beide Teilprodukte sind zweistellige Zahlen.

3. Aus vier Fünfen und mathematischen Zeichen ist ein Ausdruck zu bilden, der gleich 100 ist.

1. Lösung: $(5 + 5) \cdot (5 + 5)$
2. Lösung: $(5 \cdot 5 - 5) \cdot 5$

4. Es sollen 30 Äpfel auf 3 Kinder so verteilt werden, daß die Zahl der Äpfel für jedes Kind ungerade ist.

Diese Teilung ist nicht möglich; denn die Summe von drei beliebigen ungeraden Zahlen ist stets ungerade. Die Zahl 30 ist jedoch eine gerade Zahl.

5. Eine Zahl, die gleich zwei Zehnern ist, werde mit einer Zahl, die gleich drei Zehnern ist, multipliziert. Wieviel Zehner erhält man im Produkt?

60 Zehner

6. Wieviel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

50, denn $\frac{1{,}5}{3} \cdot 100 = 0{,}5 \cdot 100 = 50$.

Eine weitere Erklärung ist:

Ein Drittel von 100 $(33\frac{1}{3})$ + ein halbes Drittel von 100 $(16\frac{2}{3})$ ergibt 50.

7. Jemand gibt als Ergebnis für die Multiplikation $564 \cdot 232$ das Produkt 131848 an. Kann dieses Produkt richtig sein?

Das Produkt ist falsch.

Die Zahl 564 ist durch 3 teilbar. Folglich müßte auch das Produkt 131848 durch 3 teilbar sein. Das ist jedoch nicht der Fall; denn die Quersumme ergibt 25.

8. Die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 sollen unter Verwendung mathematischer Zeichen ohne Veränderung der Reihenfolge so zusammengestellt werden, daß sich 100 ergibt.

1. Lösung: $(1 + 23 - 4) \cdot 5$
2. Lösung: $1\,(2 + 3) \cdot 4 \cdot 5$

9. Drei Schüler trugen ein Schachturnier aus, wobei insgesamt 6 Spiele durchgeführt wurden. Wieviel Partien spielte jeder einzelne?

4 Partien

10. Wie heißen die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in der folgenden Multiplikationsaufgabe?

```
*** · *2
--------
    *08
   *6*
--------
   **128
```

$$\begin{array}{r} 254 \cdot 32 \\ \hline 508 \\ 762 \\ \hline 8128 \end{array}$$

Für die Hunderterstelle im ersten Teilprodukt kommt nur 5 in Frage ($5 + 6 = 11$). Durch die Division $508:2$ erhält man dann den ersten Faktor: 254. Für die Einerstelle im zweiten Teilprodukt geht eindeutig die 2 hervor. Für die Zehnerstelle des zweiten Faktors müßte man 3 ($3 \cdot 4 = 12$) und 8 ($8 \cdot 4 = 32$) in Betracht ziehen. Die 8 scheidet aus, weil $254 \cdot 8$ ein vierstelliges Teilprodukt ergäbe.

11. Einer von 2 Faktoren ist gleich 45. Wie verändert sich das Produkt, wenn der andere Faktor um 8 vergrößert oder verkleinert wird?

Das Produkt verändert sich um $45 \cdot 8 = 360$.

12. Es ist mit Hilfe eines Rechenvorteils im Kopf das Produkt $7 \cdot 64 \cdot 125$ zu berechnen.

$7 \cdot 64 \cdot 125 = (7 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 125) = 56 \cdot 1000 = 56000$

13. Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

$\frac{7}{8}$

14. Für die Multiplikation von $78 \cdot 87$ gibt jemand das Produkt 6846 an. Kann diese Multiplikation richtig sein?

Nein. Jede der Zahlen 78 und 87 ist durch 3 teilbar, deshalb muß das Produkt durch 9 teilbar sein. Die Quersumme der Zahl 6846 ist jedoch nicht durch 9 teilbar.

15. Welcher von den beiden Brüchen $\frac{14}{23}$ und $\frac{56}{93}$ ist größer?

Der Bruch $\frac{14}{23}$ ist der größere von beiden, denn es ist $\frac{14}{23} = \frac{56}{92}$, und es gilt die Beziehung $\frac{56}{92} > \frac{56}{93}$.

16. Es ist der Ausdruck

$8 \cdot 9 \cdot 14 + 6 \cdot 12 \cdot 17 + 4 \cdot 18 \cdot 19$ zu berechnen:

Ergebnis: 3600.

Man kann das Distributivgesetz anwenden und erhält:

$8 \cdot 9 \cdot 14 + 6 \cdot 12 \cdot 17 + 4 \cdot 18 \cdot 19$

$= 72 \cdot 14 + 72 \cdot 17 + 72 \cdot 19 = 72\,(14 + 17 + 19) = 72 \cdot 50$

17. Wie heißen die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in den folgenden Multiplikationsaufgaben?

a) $*8 \cdot * = 8**$

$98 \cdot 9 = 882$

Wäre eine fehlende Ziffer der beiden Faktoren niedriger als 9, so ergäbe sich ein Produkt unter 800.

$98 \cdot 8 = 784$; $88 \cdot 9 = 792$

b) $\underline{6* \cdot ***}$

$$\begin{array}{r} ** \\ ** \\ ** \\ \hline ***6 \end{array}$$

Da alle drei Teilprodukte zweistellige Zahlen sind, muß der Multiplikator 111 sein. Die Einerstelle im ersten Teilprodukt muß eine 6 werden. Daraus geht hervor, daß der Multiplikand 66 ist. Als Produkt ergibt sich 7326.

c) $\underline{** \cdot 9*}$

$***$

$11 \cdot 90 = 990$. Durch die Anordnung der Faktoren ist es offensichtlich, daß der Multiplikator 90 ist. Der Multiplikand ist eine zweistellige Zahl, die bei Multiplikation mit 9 ein zweistelliges Produkt ergibt.

Solche zweistelligen Zahlen gibt es nur zwei: 10 und 11. Wenn der Multiplikand 10 wäre, so hätte man eine andere Schreibweise vorgezogen.

18. Die Zahlen 100 und 90 wurden durch ein und dieselbe Zahl geteilt. Im ersten Fall erhielt man den Rest 4 und im zweiten den Rest 18. Durch welche Zahl wurde geteilt?

Durch den gesuchten Divisor ist teilbar:

$100 - 4 = 96$ und

$90 - 18 = 72$. Das bedeutet, daß dieser Divisor ein gemeinsamer Teiler der Zahlen 96 und 72 ist. Er ist größer als 18 (weil der Rest 18 notwendig kleiner als der Divisor sein muß). Der gesuchte Divisor ist gleich 24.

19. Der Umfang eines Vorderrades eines Wagens mißt 1,60 m, der eines Hinterrades 2,25 m. Zu bestimmen ist die kürzeste Strecke, die der Wagen zurücklegt bis beide Räderpaare eine ganzzahlige Anzahl Umdrehungen ausgeführt haben.

Die Anzahl der Umläufe der Vorder- und Hinterräder kann ermittelt werden, indem man die Strecke (x m) durch die jeweiligen Kreisumfänge dividiert.

$(1{,}60\,\mathrm{m} = \frac{8}{5}\,\mathrm{m};\ 2{,}25\,\mathrm{m} = \frac{225}{100}\,\mathrm{m} = \frac{9}{4}\,\mathrm{m})$:

$x\,\mathrm{m} : \frac{8}{5}\,\mathrm{m} = \frac{5x}{8};\ x\,\mathrm{m} : \frac{9}{4}\,\mathrm{m} = \frac{4x}{9}$

Die Nenner dieser Brüche müssen Teiler der gemeinsamen Entfernung sein, deshalb ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 8 und 9 die gesuchte Entfernung ($x = 72$).

20. Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe?

$$**** - *** = 1$$

1000 – 999

21. Welcher Bruch ist größer: $\frac{37}{67}$ oder $\frac{377}{677}$?

Der Bruch $\frac{377}{677}$ ist größer. Diesem Bruch fehlen an 1 nur $\frac{300}{677}$, während dem ersten Bruch $\frac{30}{67} = \frac{300}{670}$ fehlen. Es ist aber $\frac{300}{670} > \frac{300}{677}$.

22. In einem Bruch stimme die Anzahl der Stellen im Zähler und Nenner überein. Im Zähler soll nun die Stellenzahl verdoppelt werden, indem man die vorhandenen Ziffern nochmals niederschreibt. In gleicher Weise verfahre man im Nenner. Wie verändert sich der Wert des gegebenen Bruches?

Der gegebene und der erhaltene Bruch sind gleich, z. B.:

$\frac{23}{55}$ stimmt überein mit $\frac{2323}{5555} = \frac{23}{55} \cdot \frac{101}{101} = \frac{23}{55}$.

23. Bei der Division einer Zahl durch 60 ergab sich der Rest 55. Wie verändern sich der Quotient und der Rest, wenn man die Zahl durch 15 dividiert?

Der Quotient vergrößert sich auf das Vierfache zuzüglich 3 Einer. Der neue Rest ist 10.

III. Lineare Gleichungen, Proportionen, Prozentrechnung

1. Ein quaderförmiger Holzblock wiege 5000 g. Wieviel wiegt ein zweiter Block aus dem gleichen Material, wenn sämtliche Kanten dieses Blockes nur $\frac{1}{5}$ der Kantenlängen des ersten Blockes betragen?

Bezeichnen wir die Kanten des ersten Blockes mit a; b und c, so beträgt das Volumen $V_1 = abc$. Die Kanten des zweiten Blockes betragen dann $\frac{1}{5}a$, $\frac{1}{5}b$ und $\frac{1}{5}c$ und das Volumen

$$V_2 = \frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{5}b \cdot \frac{1}{5}c = \frac{1}{125}\,abc\,.$$

Da sich die Massen der Blöcke wie ihre Volumina verhalten, ergibt sich als Resultat: 5000 g : 125 = 40 g.

2. Eine Summe bestehe aus zwei Summanden. Der erste Summand bildet den 0,6fachen Teil der Summe. Welchen Teil des ersten Summanden bildet der zweite Summand?

$0{,}6\,s + x = s;\ x = 0{,}4\,s \quad \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}.$

3. Vertauscht man in einer bestimmten zweistelligen Zahl die Ziffern, so wird diese um 18 vergrößert. Die Quersumme dieser Zahl beträgt 16. Wie lautet diese Zahl?

79.

Es sei ab die gegebene zweistellige Zahl. Die Vertauschung der Ziffern ergibt dann die Zahl ba. Unter Berücksichtigung der angegebenen Quersumme ergibt die Summe beider 176.

$$\begin{array}{r} ab \\ +\,ba \\ \hline 176 \end{array}$$

Man subtrahiert nun die Differenz 18 und halbiert.

4. Die Summe zweier Zahlen ist 27. Wenn der erste Summand auf das 5fache und der zweite Summand auf das 3fache vergrößert wird, so ergibt sich als neue Summe 111. Wie heißen diese Zahlen?

Sie heißen 15 und 12.

Wenn beide Summanden verdreifacht würden, so ergäbe sich als Summe 81. Die Differenz $111 - 81 = 30$ bildet also den verdoppelten ersten Summanden.

5. In der 6. Stunde sah ich auf die Uhr: Der große Zeiger war 3 Minutenteilstriche hinter dem Stundenzeiger. Wie spät war es?

Um 5.00 Uhr befindet sich der große Zeiger 25 Minutenteilstriche hinter dem kleinen Zeiger. Zum gegebenen Zeitpunkt befindet sich der große Zeiger nur noch 3 Minutenteilstriche zurück. 22 Teilstriche wurden also aufgeholt. In einer Minute durchläuft der große Zeiger 1 Teilstrich und der kleine Zeiger $\frac{1}{12}$ des Teilstrichs. Jede Minute holt der Minutenzeiger also um $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ Teilstriche auf. Für das Einholen von 22 Teilstrichen benötigt er also $22 : \frac{11}{12} = 24$ Minuten, so daß es 5.24 Uhr war.

6. Der Subtrahend bildet $\frac{5}{8}$ des Minuenden. Wieviel Prozent des Subtrahenden bildet die Differenz?

60%

$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8}$ sind 60% von $\frac{5}{8}$.

7. Die Zahl 80 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine Teil 60% des anderen bildet.

30 und 50.

80 bildet 160% des 2. Teiles: $80 : 1{,}6 = 50$.

8. Wieviel sind 22,5% von 168?

37,8

$22{,}5\% = 12{,}5\% + 10\% = \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$

$21 + 16{,}8 = 37{,}8$

9. Nachdem ein Dampfer die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, vergrößerte er seine Geschwindigkeit um 25%, so daß er eine halbe Stunde früher als vorgesehen am Endpunkt ankam. In wieviel Stunden durchfuhr der Dampfer den ganzen Weg?

Für die zweite Hälfte des Weges wendete der Dampfer $\frac{100}{125} = \frac{4}{5}$ der Zeit auf, die er für die erste Hälfte des Weges benötigte. Die Zeitdifferenz aus den Fahrzeiten der ersten und zweiten Hälfte beträgt $\frac{1}{5}$ und entspricht gemäß der Aufgabenstellung einer halben Stunde. Das bedeutet, daß die erste Hälfte des Weges in $\frac{1}{2}$ Std. $\cdot\, 5 = 2\frac{1}{2}$ Stunden und der ganze Weg in $2\frac{1}{2}$ Std. + 2 Std. = $4\frac{1}{2}$ Stunden zurückgelegt wurde.

10 ·Ein Dampfer soll eine bestimmte Flußstrecke bei gleichbleibender Maschinenleistung stromab in 3 Stunden und stromauf in $4\frac{1}{2}$ Stunden zurücklegen. In wieviel Stunden durchschwimmt ein nur von der Strömung getragenes leeres Fäßchen diese Entfernung?

Stromab legt der Dampfer in einer Stunde $\frac{1}{3}$ der Entfernung zurück, stromauf dagegen nur $\frac{2}{9}$. Die Differenz $\left(\frac{1}{9}\right)$ entspricht der doppelten Strömungsgeschwindigkeit. Je Stunde legt das Fäßchen also $\frac{1}{18}$ des Weges zurück und die gesamte Strecke in 18 Stunden.

11. Fünf Kisten enthalten je die gleiche Anzahl Äpfel. Wenn man jeder Kiste 60 Äpfel entnimmt, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig wie vorher in zwei Kisten waren. Wieviel Äpfel waren anfangs in jeder Kiste?

Aus den 5 Kisten wurden $5 \cdot 60$ Äpfel = 300 Äpfel herausgenommen. Diese Menge Äpfel entspricht dem Inhalt von 3 Kisten, da zahlenmäßig 2 volle Kisten übrigbleiben. Folglich waren in jeder Kiste 100 Äpfel.

12. Ein Fahrgast erblickt aus der fahrenden Straßenbahn seinen Freund, der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung die Straße entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen. Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn. Nach insgesamt wieviel Minuten holt er den Freund ein?

Die Entfernung, die der spazierengehende Freund in einer Minute zurücklegt, sei eine Einheit. Dann entspricht die Entfernung, die der Fahrgast in einer Minute zurücklegt, 2 Einheiten. Die Entfernung, die die Straßenbahn in einer Minute zurücklegt, entspricht 8 Einheiten. Als der Fahrgast aussteigt, besteht eine Entfernung von $8 + 1 = 9$ Einheiten. Die Entfernung verkürzt sich dann je Minute um $2 - 1 = 1$ Einheit. Folglich holt er den Freund in 9 Minuten ein.

13. Auf drei Regalen stehen Bücher. Auf dem ersten Regal stehen halb soviel Bücher wie auf den beiden übrigen zusammen. Auf dem zweiten Regal stehen nur ein Drittel der Bücher, die auf den anderen beiden zusammen stehen. Auf dem dritten Regal stehen 30 Bücher. Wieviel Bücher sind es insgesamt?

Wenn man die Anzahl der Bücher auf dem ersten Regal gleich einer Einheit setzt, so ist die Summe der Bücher auf dem zweiten und dritten Regal zusammen gleich zwei Einheiten und die gemeinsame Anzahl der Bücher in allen drei Regalen ist 3 Einheiten. Folglich bildet die Anzahl der Bücher auf dem ersten Regal $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl.

Analog finden wir, daß sich in dem zweiten Regal $\frac{1}{4}$ aller Bücher befinden.

Dann sind auf dem ersten und zweiten Regal zusammen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ aller Bücher und folglich sind die 30 Bücher des dritten Regals gleich $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ aller Bücher. Die Anzahl der Bücher in allen drei Regalen ist $30 : \frac{5}{12} = 72$.

14. Eine Genossenschaftsbäuerin brachte 5 Körbe mit zwei verschiedenen Sorten Äpfeln auf den Markt. Die einzelnen Körbe enthielten 20, 25, 30, 35 und 40 Äpfel, wobei jeder Korb jeweils nur Äpfel einer Sorte enthielt. Nachdem sie einen Korb verkauft hatte, waren von der ersten Sorte nur noch halb soviel vorhanden wie von der zweiten. Wieviel Äpfel der zweiten Sorte waren noch nicht verkauft?

Die Bäuerin brachte insgesamt 150 Äpfel auf den Markt. Nachdem ein Korb verkauft war, verteilte sich der Rest zu $\frac{2}{3}$ auf Sorte 1 und zu $\frac{1}{3}$ auf Sorte 2. Das heißt, daß die Zahl der verbliebenen Äpfel ein Vielfaches von 3 war. Die ursprüngliche Anzahl (150) war auch ein Vielfaches von 3, was somit auch für die verkauften Äpfel gelten muß. Der einzige Korb mit einer durch 3 teilbaren Anzahl Äpfel war der Korb mit 30 Äpfeln; dieser Korb wurde verkauft. Es waren also 120 Äpfel noch nicht verkauft und zwar 40 Äpfel von der zweiten Sorte.

15. Eine Verkaufsstelle für Wirtschaftsartikel erhält eine Lieferung von 50 Kochtöpfen in zwei verschiedenen Größen; die kleineren kosten 3,00 DM und die größeren 5,00 DM. Bei der nächsten Inventur sind noch 19 Töpfe übrig, und zwar die Hälfte der kleinen und ein Drittel der großen Töpfe. Für wieviel DM wurden Töpfe aus dieser Lieferung verkauft?

Wenn von jeder Sorte doppelt soviel Töpfe übriggeblieben wären, so ergäbe sich noch ein Rest von 38 Töpfen. Das wären dann alle Töpfe zu 3,00 DM und $\frac{2}{3}$ der Töpfe zu 5,00 DM.

Das heißt, die verbleibenden 12 Töpfe würden $\frac{1}{3}$ der Lieferung an Töpfen zu 5,00 DM ausmachen. Insgesamt wurden also 36 Töpfe zu 5,00 DM und 14 Töpfe zu 3,00 DM geliefert.

Verkauft wurden demnach 7 kleine Töpfe zu 3,00 DM und 24 große Töpfe zu 5,00 DM mit einem Gesamtwert von 141,00 DM.

16. Gesucht ist eine Divisionsaufgabe.
Teilt man in dieser Aufgabe den Dividenden durch den doppelten Divisor, so erhält man 6. Teilt man den Dividenden durch den dreifachen Quotienten, so erhält man ebenfalls 6. Bestimme den Dividenden und den Divisor!

Nach der ersten Voraussetzung ist der erste Quotient gleich $6 \cdot 2 = 12$. Das bedeutet, daß der dreifache Quotient gleich 36 ist. Nach der zweiten Voraussetzung ist der Dividend gleich $36 \cdot 6 = 216$.
Der Dividend ist also 216 und der Divisor 18.

17. Aus einem Korb nahm man 3 Äpfel, dann ein Drittel des Restes und noch 3 Äpfel. Danach verblieb noch die Hälfte der ursprünglichen Menge an Äpfeln im Korb. Wieviel Äpfel waren insgesamt im Korb?

Ein Drittel des Restes - das bedeutet $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Menge weniger ein Apfel. Insgesamt wurden also aus dem Korb genommen: 3 Äpfel, $\frac{1}{3}$ der gesamten Menge weniger 1 Apfel und noch einmal 3 Äpfel. Das ergibt $\frac{1}{3}$ der Gesamtmenge und 5 Äpfel und entspricht der Hälfte aller Äpfel. Die Differenz von 5 Äpfeln ist also $\frac{1}{6}$ der Gesamtmenge, und somit waren ursprünglich 30 Äpfel im Korb.

18. Addiert man zur Quersumme einer zweistelligen Zahl die Differenz aus den Ziffern im Zehner und Einer, so erhält man 10. Setzt man zwischen die beiden Ziffern eine 9, so ergibt sich eine elfmal so große Zahl. Wie heißt die Zahl?

Die Ziffer der Zehner ist gleich 5, weil 10 die verdoppelte Ziffer der Zehner ist. Die dreistellige Zahl 59* ist Vielfaches von 11. Indem man 59* durch 11 teilt, erhält man als ersten Rest 4. Daraus folgt, daß * nur 4 sein kann. Die Zahl ist also 594.

19. Löse das folgende Gleichungssystem!

$$ax + by = a$$
$$bx + ay = b$$

$x = 1;\ y = 0$

20. Gegeben sei der Bruch $\frac{461}{539}$. Vermindert man den Zähler um eine gewisse Zahl und vermehrt den Nenner um die gleiche Zahl, so ergibt der neue Bruch nach dem Kürzen $\frac{1}{4}$. Wie heißt diese Zahl?

Die Summe aus Zähler und Nenner ist $461 + 539 = 1000$. Im neuen Bruch ist die Summe aus Zähler und Nenner auch 1000, aber ihr Quotient ergibt gekürzt $\frac{1}{4}$. Man erhält den Zähler, indem man die Summe 1000 durch 5 dividiert: $1000 : 5 = 200$. Die gesuchte Zahl lautet also 261.

21. In welchen Quadranten befinden sich keine Punkte der Geraden $y = 5x + 10$?

Im IV. Quadranten.
Für beliebige Punkte des IV. Quadranten gilt: Die Ordinate ist negativ, die Abszisse ist positiv. Es müßte also $y < 0$ für $x > 0$ gelten.
Für $x > 0$ ist aber $5x + 10 > 0$.

22. In einem Kreis sollen der Flächeninhalt und der Umfang, in cm^2 bzw. cm ausgedrückt, in den Maßzahlen übereinstimmen. Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, das in diesen Kreis einbeschrieben wird?

Wenn man den Radius mit r cm bezeichnet, gilt nach Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung $\pi r^2 = 2\pi r$, woraus sich $r = 2$ ergibt.
Für das Quadrat erhält man dann $a = 2\sqrt{2}$, und die Quadratfläche beträgt 8 cm^2.

23. Wie lang ist die räumliche Diagonale eines Würfels, dessen Oberfläche in Quadratzentimetern gemessen zahlenmäßig übereinstimmt mit dem Rauminhalt in Kubikzentimetern?

Wenn man die Würfelkante mit a cm bezeichnet, gilt nach der Voraussetzung die Gleichung $6a^2 = a^3$, woraus sich $a = 6$ ergibt.
Für die Raumdiagonale gilt dann $d = 6\sqrt{3}$.

IV. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

1. Kann man aus 36 Streichhölzern, ohne sie zu zerbrechen, ein rechtwinkliges Dreieck legen?

Man kann es.
Jedes Dreieck, in dem sich die Seiten wie $3n:4n:5n$ verhalten, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$ ist. Der Umfang eines solchen rechtwinkligen Dreiecks beträgt $12n$ Einheiten. Für $n = 3$ ist der Umfang gleich 36 Einheiten; die Seiten sind 9, 12 und 15 Einheiten. (In dieser Aufgabe wird die Länge eines der gegebenen Streichhölzer als Einheit aufgefaßt.)

2. Gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, in dem alle drei Maßzahlen der Seiten ganzzahlig und darüber hinaus ungerade sind?

Nein.
Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist wieder eine ungerade Zahl; die Summe zweier ungerader Zahlen ergibt wieder eine gerade Zahl. Die Wurzel aus einer geraden Zahl ist aber stets auch eine gerade Zahl.

3. Bilden die Zahlen 5^{7^6} und 5^{6^7} echte Quadrate?

In der ersten Zahl ist der Exponent 7^6 eine ungerade Zahl: 5^{7^6} ist kein echtes Quadrat.
Die Zahl 6^7 ist gerade: 5^{6^7} ist also ein echtes Quadrat.

4. Wie kann man das Produkt $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{0{,}5} \cdot \sqrt[3]{12{,}5} \cdot \sqrt[3]{16}$ leicht im Kopf berechnen?

$$\left(\sqrt[3]{12{,}5} \cdot \sqrt[3]{10}\right)\left(\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\right) = 5 \cdot 2 = 10$$

5. Der Ausdruck $\sqrt{42^2 + 56^2}$ ist im Kopf zu berechnen:

$$\sqrt{42^2 + 56^2} = \sqrt{14^2\,(3^2 + 4^2)} = 14 \cdot 5 = 70$$

6. Mit Hilfe von drei Dreien wurden die folgenden drei Zahlen gebildet: 3^{3^3}, 3^{33} und $(3^3)^3$. Es ist der Quotient aus der größten und der kleinsten Zahl zu bestimmen.

$3^{3^3} = 3^{27}$; $(3^3)^3 = 3^9$

$3^{33} : 3^9 = 3^{24}$

7. Der Ausdruck $\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 4{,}9}{0{,}02}}$ ist im Kopf zu berechnen:

$$\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 4{,}9}{0{,}02}}=\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 6\cdot 49}{1}}=\sqrt{0{,}04\cdot 6\cdot 6\cdot 49}$$
$$=\sqrt{0{,}04\cdot 36\cdot 49}=8{,}4$$

8. Der Ausdruck $\sqrt[6]{(a-b)^2}$ ist zu vereinfachen:

Die Vereinfachung $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{a-b}$ ist richtig für den Fall $a \geqq b$. Wenn gilt $a<b$, steht auf der linken Seite der Gleichung eine positive, auf der rechten Seite eine negative Zahl. Für diesen Fall ergibt die Vereinfachung: $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{b-a}$.

9. Der Ausdruck $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ ist zu berechnen.

Man berechnet zuerst das Quadrat dieses Ausdruckes:
$(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})-2\sqrt{81-80}=18-2=16.$
Der gegebene Ausdruck selbst ist gleich $\sqrt{16}=4$.

10. Der Ausdruck $(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}}$ ist zu berechnen.

$$\sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}=5^{0,2};\qquad \frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}=\frac{5^{0,2}}{5^{-0,8}}=5^{0,2}\cdot 5^{0,8}=5^1=5$$

$$\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}=\sqrt[-4]{11+5}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}}=(\sqrt{2})^{1,5+0,5}=(\sqrt{2})^2=2$$

11. Zu berechnen ist: $4-\lg 8-3\lg 5$.

$$4-3(\lg 2+\lg 5)=4-3\lg 10=1$$

12. Zu berechnen ist: $\lg 1\frac{1}{2}+\lg 0{,}1-\lg 150$.

$$\lg 1{,}5-\lg 150+\lg 0{,}1=-2-1=-3$$

13. Es ist der Ausdruck $\left(2^{\frac{3}{\log_3 8}}-\sqrt[5]{\lg 0{,}1}\right)^{-\frac{1}{2}}$ zu berechnen:

$$\left(2^{\frac{3}{\log_3 8}}-\sqrt[5]{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{3\log_2 3}{\log_2 8}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{\log_2 3}+1\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(3+1)^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}$$

14. Welcher Ausdruck ist größer: $20^{\log_5 30}$ oder $30^{\log_5 20}$?

$$\log_5 (20^{\log_5 30}) = \log_5 30 \cdot \log_5 20;$$
$$\log_5 (30^{\log_5 20}) = \log_5 20 \cdot \log_5 30.$$

Also sind die Logarithmen der gegebenen Zahlen gleich. Das heißt, auch die Zahlen sind gleich.

15. Der Ausdruck $\sqrt[3]{***9}$ ist eine ganze Zahl. Wie heißt diese Zahl? (Die Sternchen stellen unleserliche Ziffern dar.)

Es ist die Zahl 19.

Die dritte Wurzel aus einer vierstelligen Zahl ist eine zweistellige Zahl. Die Wurzel endet auf die Ziffer neun nur dann, wenn die Zahl selbst auf 9 endet. Leicht stellt man fest, daß $29^3 > 10000$.

16. Welche der Potenzen ist größer: 100^{20} oder 9850^{10}?

$$9850^{10} < 10000^{10} = (100^2)^{10} = 100^{20}$$

V. Gleichungen höheren Grades, Ungleichungen

1. In einem Rechteck sollen die Maßzahlen der Seiten, in Zentimeter ausgedrückt, ganzzahlig sein. Der halbe Umfang soll zahlenmäßig mit dem Flächeninhalt übereinstimmen. Kann in dieses Rechteck ein Kreis einbeschrieben werden?

Wenn die Seiten des Rechtecks mit x cm und y cm (wobei x und y ganzzahlig sind) bezeichnet werden, so gilt nach Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung: $x + y = xy$. Die einzige ganzzahlige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2$; $y = 2$. (Für $x = 0$; $y = 0$ hat die Aufgabe keinen Sinn.) Das heißt, daß das Rechteck ein Quadrat ist und ihm folglich auch ein Kreis einbeschrieben werden kann.

2. Zu lösen ist die Gleichung:

$$\sqrt{3-x} = 7 - \sqrt{x-5};$$

Die Gleichung ist nicht lösbar, weil der zulässige Wertevorrat „leer" ist. Es sei $3 - x \geqq 0$ bzw. $x \leqq 3$, dann kann aber nicht gleichzeitig $x - 5 \geqq 0$ bzw. $x \geqq 5$ sein.

3. Die Gleichung $x + \frac{1}{x} = 5{,}2$ ist zu lösen:

Gibt man der Gleichung die Form

$$x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{5};$$

kann man die Lösungen unmittelbar ablesen:

$$x_1 = 5; \; x_2 = \frac{1}{5};$$

4. Es ist b aus der quadratischen Gleichung $3x^2 + bx + 15 = 0$ zu bestimmen, wenn bekannt ist, daß alle Wurzeln der Gleichung ganze Zahlen sind.

$b_{1,2} = \pm 18.$
Das Produkt der Wurzeln ist gleich 5.
Dieses Produkt 5 kann sich aus zwei ganzzahligen Faktoren nur ergeben, wenn die Faktoren
1) 5 und 1 oder 2) -5 und -1
vorliegen.
Folglich ist nach dem Wurzelsatz von VIETA $-\frac{b}{3} = 6$ oder $-\frac{b}{3} = -6$.

5. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 20 cm. Für die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhalts von der Länge der Grundlinie des Rechtecks ist ein analytischer Ausdruck aufzustellen. Welcher Definitionsbereich gilt für die unabhängige Veränderliche?

Bezeichnet man den Flächeninhalt mit y, die Grundlinie mit x und die Höhe mit $(10 - x)$, dann gilt der analytische Ausdruck $y = x(10 - x)$ mit dem Definitionsbereich $0 < x < 10$.

6. Wie kann man auf einfache Art beweisen, daß die Gleichung $x^2 + 46x - 54 = 0$ keine ganzen Wurzeln hat?

Ohne die Diskriminante zu berechnen, kann man leicht einsehen, daß sie auf die Ziffer 3 endet $(\cdot\cdot 9 + \cdot 4)$. Es gibt jedoch keine ganze Zahl, deren Quadrat auf 3 endet.

7. Es ist die Ungleichung $|x| > 2x$ zu lösen.

Alle negativen Zahlen sind Lösungen dieser Ungleichung.

8. In einem spitzwinkligen Dreieck seien die Maßzahlen aller Seiten ungerade, wobei $b = 5$ cm und $c = 11$ cm betragen. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

Nach der Voraussetzung der Aufgabe ist das Dreieck ABC spitzwinklig. Es gilt also $b^2 + c^2 > a^2$. Aus diesem Grunde ist $a < 13$ cm; denn $5^2 + 11^2 < 13^2$.
Es muß aber auch gelten $a > 5$ cm, weil für die Größen 1 cm, 3 cm und 5 cm die Bedingung $a + b > c$ nicht erfüllt wird. Ferner erweisen sich die Größen 7 cm und 9 cm als unzutreffend, weil sie die für das spitzwinklige Dreieck geltende Bedingung $a^2 + b^2 > c^2$ nicht erfüllen, denn $7^2 + 5^2 < 11^2$ und $9^2 + 5^2 < 11^2$.
Die Voraussetzung der Aufgabe ist nur für $a = 11$ cm erfüllt, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig und der Umfang beträgt 27 cm.

9. Welche Lösungen hat die Gleichung
$\frac{1}{4^{-x}} = -16$?

Die Gleichung hat keine Wurzel, weil $4^{-x} > 0$ bei beliebigen Werten von x.

10. Die Gleichung $\lg x^2 = 2 \lg 3$ wurde folgendermaßen gelöst:

$$2 \lg x = 2 \lg 3$$
$$\lg x = \lg 3$$
$$x = 3$$

Wurde die Gleichung richtig gelöst?

Sie wurde nicht richtig gelöst.
In der Gleichung $\lg x^2 = 2 \lg 3$ umfaßt der zulässige Definitionsbereich der Unbekannten alle reellen Zahlen, außer Null.
Nach Umformung der Gleichung in die Form $2 \lg x = 2 \lg 3$ ist der zulässige Definitionsbereich kleiner, weil $2 \lg x$ jetzt nur für positive Werte von x Sinn hat. In der vorgelegten Lösung wurde nicht beachtet, daß auch $x = -3$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.
Man kann den Weg zur Lösung ähnlich gehen, aber die Lösung sieht dann folgendermaßen aus:

$$\lg x^2 = 2 \lg 3$$
$$2 \lg |x| = 2 \lg 3$$
$$\lg |x| = \lg 3$$
$$|x| = 3.$$

Hieraus folgt $x_1 = 3$
und $x_2 = -3$.

11. Sind die Bilder der Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = a^{-\log_a x}$ verschieden?

Sie sind verschieden.
Der Definitionsbereich der Funktion $y = \frac{1}{x}$ umfaßt alle reellen Zahlen außer Null. Das Bild der Funktion ist eine Hyperbel, deren Äste im I. und III. Quadranten liegen. Zum Definitionsbereich der Funktion $y = a^{-\log_a x}$ gehören alle positiven reellen Zahlen. Deshalb besteht das Bild der Funktion $y = a^{-\log_a x}$ nur aus dem Ast der Hyperbel, der im I. Quadranten liegt, obwohl
$a^{-\log_a x} = a^{\log_a x^{-1}} = \frac{1}{x}$ ist.

12. Die Gleichung $3^{\log_3 \log_4 x} = 1$ ist zu lösen.

$\log_3 \log_4 x = 0$; $\log_4 x = 1$
$x = 4$

13. Kann die Gleichung $\lg(2-x) - \lg(x-3) = 3$ gelöst werden?

Nein, die Gleichung ist nicht lösbar.
Der mögliche Wertebereich für x ist durch die Ungleichungen bestimmt:
$2 - x > 0$, also $x < 2$, und $x - 3 > 0$, also $x > 3$.
Beide Ungleichungen können nicht gleichzeitig erfüllt werden.

14. Es ist die Ungleichung $x^5 + x^4 + x + 1 < 0$ zu lösen.

$x^5 + x^4 + x + 1 = (x^4 + 1)(x + 1)$
Es gilt für alle x

$x^4 + 1 > 0$.

Das Ergebnis lautet $x < -1$.

15. Zu lösen ist die Ungleichung
$|\tan x| + |\cot x| < 2$.

Die Ungleichung hat keine Lösung, weil die Summe zweier zueinander reziproker positiver Zahlen $\geqq 2$ ist.

16. Es ist zu beweisen, daß die Gleichung $x^2 = 2|x| - 4$ tatsächlich keine Wurzeln hat.

Es ist stets $x^2 = |x|^2$.
Die Gleichung kann also in der Form $|x|^2 - 2|x| + 4 = 0$ geschrieben werden.
Die Diskriminante ist kleiner als Null.

17. Welche Lösungen hat die Gleichung $|1 - x| + |x - 1| = x$?

$$|1 - x| + |x - 1| = \begin{cases} 2(1 - x), & \text{wenn } x < 1 \\ 2(x - 1), & \text{wenn } x > 1. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen $2(1 - x) = x$ und $2(x - 1) = x$ führen auf die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{2}{3}$.

18. Zu lösen ist die Ungleichung $|\sin x| + |\cos x| < 1$.

Eine positive Zahl ist:
$|\sin x| + |\cos x| = \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2} = \sqrt{1 + 2|\sin x| \cdot |\cos x|}$.
Weil $|\sin x| \cdot |\cos x| \geqq 0$, ist $1 + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \geqq 1$.
Welchen Wert man auch für x wählt,
immer ist $\sqrt{1 + 2|\sin x| \cdot |\cos x|} = |\sin x| + |\cos x| \geqq 1$.
Folglich hat die Ungleichung $|\sin x| + |\cos x| < 1$ keine Lösung.

19. Es ist zu beweisen, daß bei natürlichem $n > 1$ gilt:
$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} < 1$.

Die linke Seite der Ungleichung enthält insgesamt $n - 1$ Summanden. Wenn alle Nenner durch eine Zahl, die kleiner als $n + 2$ ist, ersetzt werden, so erhält man die neue Ungleichung:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Es gilt aber: $\frac{n-1}{n+1} < 1$

20. Wie heißen die Lösungen des Systems

(I) $\left| x + y \right| = 1$

(II) $|x| + |y| = 2,$

wenn bekannt ist, daß $x > y$?

Die Zahlen x und y müssen ungleiche Vorzeichen haben, weil entsprechend der Aufgabe gilt: $|x + y| \neq |x| + |y|$.
Außerdem ist bekannt, daß $x > y$, was zur Folge hat:
$x > 0$ und $y < 0$.
Für den Fall $|x| > |y|$ erhält man dann das System:

(I) $x + y = 1$

(II) $x - y = 2$

mit der Lösung: $x = \frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$.
Für den Fall $|x| < |y|$ erhält man das System:

(I) $x + y = -1$

(II) $x - y = 2$

mit der Lösung $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{3}{2}$.

VI. Eigenschaften der Zahlen

1. Welche Ziffer steht in der Einerstelle des Produktes aus den folgenden 10 Faktoren?

$11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29$

Wenn unter ungeraden Faktoren mindestens eine Zahl ist, deren letzte Ziffer eine 5 ist, so steht auch im Produkt dieser Faktoren als letzte Ziffer eine 5.

2. Gegeben sind zwei Zahlen, bei denen die Division der größeren durch die kleinere Zahl 4 ergibt. Wievielmal so groß ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen im Vergleich zu ihrem größten gemeinsamen Teiler?

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist viermal so groß wie der größte gemeinsame Teiler. Wenn eine Zahl durch eine andere teilbar ist, so ist jeweils die größere Zahl das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und die kleinere Zahl der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen.

3. Was ergibt:
$99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 3 - 1$?

Die Summe dieser Reihe ist 50, da

$$(99 - 97) + (95 - 93) + (91 - 89) + \ldots + (7 - 5) + (3 - 1)$$
$$= 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2.$$

Weil im Zahlenbereich von 1-99 insgesamt 50 ungerade Zahlen vorhanden sind, lassen sich 25 Differenzen bilden: $25 \cdot 2 = 50$.

4. Kann die Summe von 4 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Primzahl sein?

Nein.
Von den 4 Summanden sind zwei Zahlen gerade (ihre Summe ist eine gerade Zahl) und zwei Zahlen ungerade (ihre Summe ist ebenfalls gerade). Deshalb ist die Summe aller vier Zahlen eine gerade Zahl (größer als 2).

5. Um wieviel wird der Betrag eines Bruches vergrößert, wenn zum Zähler der 10. Teil des Nenners addiert wird?

Um 0,1.

6. Die Differenz zweier Zahlen sei durch 8 teilbar. Außerdem ergebe sich bei der Division des Subtrahenden durch 8 der Rest 3. Welchen Rest ergibt in diesem Fall die Division des Minuenden durch 8?

3

7. Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe
$11^6 + 14^6 + 16^6$?

Die Ziffer 3.
14^{2n} endet auf die Ziffer 6, 11^n auf die Ziffer 1 und 16^n stets auf 6.

8. Der Zahl 10 soll rechts und links je eine Ziffer beigegeben werden, so daß eine vierstellige Zahl entsteht, die durch 72 teilbar ist.

4104.
Es ist $72 = 8 \cdot 9$. Folglich muß die neue Zahl auch durch 8 und durch 9 teilbar sein. Die Teilbarkeit durch 8 fordert als letzte Ziffer eine 4, die Teilbarkeit durch 9 als erste Ziffer eine 4.

9. Wenn die Summe aus vier natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.
Ist diese Behauptung richtig?

Wenn alle 4 Zahlen ungerade wären, so wäre die Summe eine gerade Zahl. Das bedeutet, daß unter diesen Zahlen mindestens eine gerade Zahl sein muß; dann aber ist das Produkt dieser Zahlen eine gerade Zahl, d. h. die Behauptung stimmt.

10. Es ist zu zeigen, daß die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender ungerader Zahlen durch 4 teilbar ist.

$(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$.
Die Summe ist durch 4 teilbar.

11. Gibt es natürliche Zahlen x, für die der Ausdruck $5x^3+4x^2+3x+2$ eine ungerade Zahl ergibt?

Nein.
Wenn x gerade ist, so sind alle Summanden gerade. Wenn x ungerade ist, so ist $5x^3+3x$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl und $4x^2+2$ ist die Summe zweier gerader Zahlen.

12. Berechne $x^2-36x+63$ für $x=37$!

$$\begin{aligned}&37^2-36\cdot 37+63\\&\quad=37(37-36)+63\\&\quad=37+63=100\end{aligned}$$

13. Es seien a, b und c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar sind. Zu bestimmen sind das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a, b und c.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist a und der größte gemeinsame Teiler ist c.

14. Ein Schüler kaufte 15 Bleistifte zu 16 Pf, 7 zu 28 Pf und 8 Zeichenstifte. Obwohl der Schüler den Einzelpreis für die Zeichenstifte vergessen hatte, stellte er fest, daß der Preis von 7,50 DM nicht stimmte. Wie überlegte er?

Der Gesamtpreis von 7,50 DM stellt die Summe dreier Produkte aus ganzen Zahlen dar. In jedem Produkt ist ein Faktor durch 4 teilbar (16, 28 und 8). Folglich ist auch die Summe ein Vielfaches von 4. Aber 750 Pf sind nicht durch 4 teilbar, d. h., die Berechnung stimmt nicht.

15. Kann die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen eine Primzahl sein?

Nein.
$(a-1)+a+(a+1)=3a$, wobei $a>1$ ist.

16. Eine Zahl sei ein Vielfaches von 45. Teilt man diese Zahl durch 45, addiert dann zum Quotienten den Dividenden und subtrahiert schließlich von dieser Summe den Divisor, so erhält man 875. Wie heißt die Zahl?

Die gesuchte Zahl ist der Dividend, der Divisor ist 45, der Quotient sei q. Die gesuchte Zahl ist dann $45q$. Nach Voraussetzung ist:

$$45q + q - 45 = 875$$
$$q = 20$$
$$45q = 900.$$

17. Der folgende Satz ist zu beweisen:
Wenn der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ unkürzbar ist, so ist auch der Bruch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Wenn die Zahlen a und b den gemeinsamen Teiler d hätten, so hätten entgegen der Voraussetzung auch $a - b$ und $a + b$ den gemeinsamen Teiler d, d. h. der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ wäre durch d kürzbar.

18. Der folgende Satz ist zu beweisen:
Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar.

Die kleinere gerade Zahl sei $2n$. Dann ist die Summe der genannten Zahlen $2n + (2n + 2) = 4n + 2$.
Der erste Summand $4n$ ist durch 4 teilbar, aber der zweite Summand ist nicht durch 4 teilbar. Folglich ist die Summe $4n + 2$ nicht durch 4 teilbar.

19. Gesucht ist ein gemeiner Bruch mit dem Wert 0,4. Addiert man in diesem Bruch den Zähler und den Nenner, so erhält man eine zweistellige Quadratzahl.

Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, entspricht der Form $\frac{2n}{5n}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Die Summe $2n + 5n = 7n$ kann nur für $n = 7$ eine zweistellige Quadratzahl sein.
Der Bruch heißt also $\frac{14}{35}$.

20. Gibt es eine ganze Zahl, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das aus den gleichen Ziffern wie die Ausgangszahl, nur in umgekehrter Reihenfolge, besteht?

Die erste Ziffer des Multiplikanden kann nur 1 sein. Andernfalls hätte das Produkt eine höhere Stellenzahl als der Multiplikand.
Das Produkt aus einer ganzen Zahl und der Zahl 6 ist eine gerade Zahl, aber das gerade ganzzahlige Produkt kann nicht auf 1 enden.

21. Kann das Quadrat einer geraden Zahl eine fünfstellige Zahl, bestehend aus den Ziffern 1, 4, 5, 9, 9, sein?

Nein.
Die letzte Ziffer des Quadrates einer geraden Zahl kann hier nur 4 sein, folglich wird die vorletzte Ziffer 1, 5 oder 9 sein. Die Zahlen 14, 54 und 94 sind aber nicht durch 4 teilbar, während das Quadrat einer geraden Zahl durch 4 teilbar ist.

22. Kann man bestätigen, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch ihren größten gemeinsamen Teiler teilbar ist?

Ja.
Bei Bildung des k.g.V. faßt man alle Primfaktoren der Zahlen in ihrer jeweils höchsten Potenz zu einer Zahl zusammen. Das heißt, daß in das k.g.V. auch die gemeinsamen Faktoren, die den g.g.T. bilden, eingehen.

23. Zu entziffern ist: $a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$. (Die Buchstaben stellen Ziffern dar.)

$a \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}:c = 111.$
Die Zahl 111 kann als Produkt aus einer einstelligen Zahl mit einer zweistelligen Zahl, jedoch nur als $3 \cdot 37$ gebildet werden. Das heißt: Es gilt $a = 3$ und $c = 7$, und die vorgegebene Gleichung hat die Gestalt: $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

24. Das Produkt zweier zweistelliger Zahlen bestehe nur aus Vieren. Wie heißen die Faktoren?

$4444 = 44 \cdot 101$ kann nicht das Produkt zweier zweistelliger Zahlen sein, weil 101 eine dreistellige Primzahl ist. Das heißt, das Produkt ist gleich $444 = 3 \cdot 4 \cdot 37$, und die einzig mögliche Kombination der zweistelligen Faktoren ist 12 und 37.

25. Um wieviel ist das Viertel der dritten Potenz einer Zahl größer als die dritte Potenz ihres Viertels?

Um $\frac{15}{64}$ der dritten Potenz dieser Zahl.

26. Kann die vierte Potenz einer ganzen Zahl auf die Ziffer 4 enden?

Nein.
Die Quadrate ganzer Zahlen enden auf die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9; die Quadrate dieser Quadrate müssen also auf die Ziffern 0, 1, 5 und 6 enden.

27. Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Die Summe $a + b$ endet auf Null. Das Produkt $(a + b)\ (a - b)$ endet deshalb auch auf Null. Dann muß aber wegen $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$ auch die Differenz $a^2 - b^2$ auf Null enden. Dies ist nur möglich für den Fall, daß a^2 und b^2 auf die gleiche Ziffer enden.

28. Für welches x nimmt der Ausdruck $3 - (5 + x)^2$ seinen größtmöglichen Wert an?

Je kleiner der Subtrahend wird, desto größer wird die Differenz. Der Subtrahend $(5 + x)^2$ wird bei beliebigem x niemals negativ. Sein kleinster Wert ist daher gleich Null (bei $x = -5$)$: 3 - (5 - 5)^2 = 3$. Das gesuchte x ist also $x = -5$.

29. Nenne alle Primteiler der Zahl 101101!

$$\begin{aligned} 101101 &= 101 \cdot 1001 \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \end{aligned}$$

30. Ist $a^2 - c^2 + b\ (2a + b)$ durch $a + b - c$ teilbar?

Es ist teilbar.

$$\begin{aligned} &a^2 - c^2 + b\ (2a + b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 \\ &= (a + b + c)\ (a + b - c) \end{aligned}$$

31. Kann der größte gemeinsame Teiler zweier ungleicher natürlicher Zahlen größer als ihre Differenz sein?

Es sei d der größte gemeinsame Teiler der natürlichen Zahlen a und b. Weil $d|a$ (lies: d teilt a) und $d|b$, so ist auch $a - b$ durch d teilbar (angenommen es sei $a > b$). Die natürliche Zahl $a - b$ kann aber nur in dem Fall durch d teilbar sein, wenn $a - b \geqq d$ gilt. Das heißt aber, daß der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen nicht größer als ihre Differenz sein kann.

32. Die Summe zweier ungerader Zahlen sei durch 5 teilbar. Auf welche Ziffer endet die Summe der dritten Potenzen dieser Zahlen?

Da a und b ungerade Zahlen sind, ist $a + b$ eine gerade Zahl. Wenn eine gerade Zahl durch 5 teilbar ist, muß sie auf Null enden.
Die Summe der dritten Potenzen der Zahlen a und b kann folgendermaßen zerlegt werden:
$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$.
Folglich muß auch die Summe $a^3 + b^3$ auf Null enden.

33. Entziffere $(\overline{ac})^2 = \overline{acc}$!
(Die Buchstaben stellen Ziffern dar.)

Aus der Aufgabe ergibt sich:

$\overline{acc} : \overline{ac} = \overline{ac}$.

Führen wir diese Rechnung noch einmal schriftlich durch.

$$\begin{array}{l} \overline{acc} : \overline{ac} = \overline{ac} \\ \underline{\overline{ac}} \\ \quad c \end{array}$$

Weil sich $\overline{acc}$ in dieser Weise durch $\overline{ac}$ dividieren läßt, ist der Rest c notwendigerweise gleich Null. Die Ziffer a muß 1 sein, denn nur dann gilt $\overline{ac}^2 = \overline{acc}$. $10^2 = 100$.

34. Ein Quadrat ist gegeben. Werden in ihm die Mitten der Seiten verbunden, so erhält man wieder ein Quadrat. Auf die gleiche Weise läßt sich ein drittes konstruieren. Sind die Seiten des dritten Quadrates und die des gegebenen kommensurabel?

Sie sind kommensurabel.
Die Diagonalen des zweiten Quadrates sind gleich den Seiten des gegebenen Quadrats, und die Seiten des dritten Quadrates sind gleich der halben Diagonale des zweiten Quadrats.

35. Von zwei beliebigen natürlichen Zahlen sind ihre Differenz, ihre Summe und ihr Produkt zu bilden. Nun soll nachgewiesen werden, daß sich unter diesen drei so gebildeten Zahlen wenigstens eine befindet, die ein Vielfaches von 3 ist.

Wenn eine der gegebenen natürlichen Zahlen ein Vielfaches von 3 ist, so ist auch das Produkt ein Vielfaches von 3.
Wenn keine der gegebenen natürlichen Zahlen ein Vielfaches von 3 ist, so haben sie die Form: $3n + 1$ oder $3n + 2$.
Wenn beide Zahlen die Form $3n + 1$ oder $3n + 2$ haben, so ist ihre Differenz ein Vielfaches von 3.
Wenn eine Zahl die Form $3n + 1$ und die andere die Form $3n + 2$ hat, so ist ihre Summe ein Vielfaches von 3.

36. Es ist zu beweisen, daß die Differenz der Quadrate zweier beliebiger gerader Zahlen durch 4 teilbar ist.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Wenn a und b gerade Zahlen sind, so sind auch $a + b$ und $a - b$ gerade Zahlen, und folglich ist $a^2 - b^2$ als Produkt zweier gerader Zahlen durch 4 teilbar.

37. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Quadrate zweier beliebiger ungerader Zahlen nicht durch 4 teilbar ist.

$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2$
$= (4a^2 + 4a + 4b^2 + 4b) + 2 = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2.$
Der erste Summand ist durch 4 teilbar, aber der zweite nicht, d. h.; auch die Summe ist nicht durch 4 teilbar.

38. Es ist zu beweisen, daß der Ausdruck $(x - 4)(x - 6) + 3$ für jeden beliebigen Wert x eine positive Zahl ist.

$(x - 4)(x - 6) + 3$
$= x^2 - 10x + 27$
$= (x - 5)^2 + 2.$
Bei beliebigen Werten für x ist stets $(x - 5)^2 \geqq 0$.

39. Wieviel ganze Teiler hat die Zahl $3^6 \cdot 5^4$?

$6 + 4 + 6 \cdot 4 + 1 = 35.$

40. Zu entziffern ist: $\overline{aa} + b = \overline{bcc}$.

$99 + 1 = 100.$

Zu einer zweistelligen Zahl $\overline{aa}$ wird eine einstellige Zahl b addiert. Die dreistellige Summe $\overline{bcc}$ kann nur mit der Ziffer 1 anfangen. Wenn nun $b = 1$ ist, kann $\overline{aa}$ nur 99 sein.

41. Eine arithmetische Zahlenfolge enthalte die Glieder $a_{37} = 83$ und $a_{83} = 37$. Welche Differenz liegt dieser Folge zugrunde?

$d = \frac{83 - 37}{37 - 83} = -1$

42. Die Summe $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ ist zu berechnen.

Man formt die Summe um in
$(1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + \ldots + (99 - 100)(99 + 100)$
$= -(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100)$
$= -\frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = -5050.$

43. Gesucht ist der unkürzbare Bruch, der sich durch die Addition des Nenners zu seinem Zähler um seinen doppelten Wert vergrößert.

Bei Addition des Nenners zum Zähler vergrößert sich jeder Bruch um eine Einheit. Nach Voraussetzung der Aufgabe ist diese Einheit gleich dem doppelten Wert des gesuchten Bruches.
Folglich ist der gesuchte Bruch $\frac{1}{2}$.

44. Es ist $\overline{ab} - \overline{ba} = a$ zu entziffern.

$98 - 89 = 9$.

Die Differenz $\overline{ab} - \overline{ba}$ ist ein Vielfaches von 9 und einstellig. Folglich ist $a = 9$.
b kann nur 8 sein, weil bei $b < 8$ die Differenz $\overline{ab} - \overline{ba}$ eine zweistellige Zahl ist.

45. Kann die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ein vollständiges Quadrat sein?

$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) = 4a + 6 = 2\,(2a + 3)$.
Die Summe aus einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl. Das heißt, $(2a + 3)$ ist eine ungerade Zahl. Das Produkt $2\,(2a + 3)$ enthält den Primfaktor 2 in einer ungeraden Potenz. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen kann also kein vollständiges Quadrat sein.

46. Die Zahl 90 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß 40% des einen Teiles um 15 größer sind als 30% des zweiten Teiles.

Die Teile sind 60 und 30.
Wenn man 40% des ersten Teiles und 40% des zweiten Teiles addiert, so erhält man $90 \cdot 0{,}4 = 36$; und wenn von 40% des ersten Teiles 30% des zweiten Teiles subtrahiert werden, so erhält man 15. Folglich bilden 70% des zweiten Teiles $36 - 15 = 21$, und der ganze zweite Teil ist gleich 30.

47. Warum ist die Gleichung $\sqrt[4]{234\,254} = 22$ offensichtlich falsch?

Die 4. Wurzel aus einer ganzen Zahl kann nur auf die Ziffern 0, 1, 5 oder 6 enden.

48. Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist gleich 32. Wie kann man nachweisen, daß diese Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben?

Nach Voraussetzung ist $a - b = 32$. Wir nehmen an, daß d irgend ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, der verschieden von 1 ist. Dann ist die Differenz $a - b$, das ist 32, auch durch d teilbar. Wenn d die Zahl 32 teilt, muß d eine der Zahlen 2, 4, 8, 16, 32 sein. In jedem dieser Fälle müßten jedoch a und b gerade Zahlen sein, was im Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe steht. Das heißt, die Annahme, daß a und b einen gemeinsamen von eins verschiedenen Teiler haben, ist falsch.

49. Kann die Differenz der Quadrate zweier Zahlen gleich 6666 sein?

Das ist nicht möglich.
Nach Voraussetzung ist $a^2 - b^2 = 6666$. Die Zahlen a und b sind entweder beide gerade oder beide ungerade. In dem einen wie in dem anderen Fall ist jede der Zahlen $a + b$ und $a - b$, deren Produkt $a^2 - b^2$ ergibt, eine gerade Zahl, und folglich ist das Produkt $a^2 - b^2$ durch 4 teilbar. Aber 6666 ist nicht durch 4 teilbar, d. h., die Differenz der Quadrate zweier Zahlen kann nicht gleich 6666 sein.

50. Für die Summe
$1! + 2! + 3! + \ldots + 8! + 9!$
ist die letzte Ziffer zu ermitteln.

Die Summe endet auf die Ziffer 3.
5! 6! usw. sind Zahlen, die auf die Ziffer Null enden.
$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33.$

51. Es ist nachzuweisen, daß bei beliebigem positivem n die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

$6^{2n} - 1 = 36^n - 1 = (36 - 1) \cdot (36^{n-1} + 36^{n-2} + \ldots + 36 + 1).$
Aber $36 - 1 = 35$ ist durch 7 teilbar.

52. Kann man von der Zahl 25! behaupten, daß sie kein vollständiges Quadrat darstellt, ohne es auszurechnen?

In dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 25$ treten Primzahlfaktoren (z. B. 23) mit ungeraden Exponenten auf; folglich kann 25! kein vollständiges Quadrat bilden.

53. Wieviel Glieder bleiben beim Ausmultiplizieren und anschließenden Vereinfachen des Ausdrucks $(a + b)^{2k} + (a - b)^{2k}$ übrig?

Beim Ausmultiplizieren von $(a + b)^{2k}$ und von $(a - b)^{2k}$ werden jeweils $2k + 1$ Glieder gebildet, wobei bezüglich der Reihenfolge $k + 1$ Glieder auf ungeradzahligen Stellen und k Glieder auf geradzahligen Stellen stehen. Die Vorzeichen der Glieder von $(a + b)^{2k}$ und $(a - b)^{2k}$ stimmen in den $k + 1$ Gliedern auf den ungeradzahligen Stellen überein. Somit lassen sich die Glieder zusammenfassen. Dagegen stimmen die Vorzeichen der k Glieder auf geradzahligen Stellen nicht überein. Beim Zusammenfassen dieser Glieder ergibt sich infolgedessen 0.
Die Gesamtzahl der Glieder beträgt also nach dem Zusammenfassen $k + 1$.

54. Zu beweisen ist, daß die Zahl $11^{10} - 1$ durch 100 teilbar ist.

$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1)$.
In der zweiten Klammer steht eine Summe von 10 Summanden. Jeder Summand endet auf die Ziffer 1, folglich endet die Summe auf die Ziffer 0. Da auch der erste Faktor gleich 10 ist, muß das Produkt ein Vielfaches von 100 sein.

55. Wie groß ist die Summe aller Koeffizienten der Glieder, die beim Ausmultiplizieren des Ausdrucks $(7x^2 - 6y)^6$ gebildet werden?

Wenn man in der identischen Gleichung
$(7x^2 - 6y)^6 \equiv (7x^2)^6 - 6(7x^2)^5 6y + \ldots + (6y)^6$ für $x = y = 1$
setzt, steht auf der rechten Seite die uns interessierende Summe aller Koeffizienten, die gleich $(7 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1)^6 = 1^6 = 1$ ist.

56. Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar?

Sie ist durch 45 teilbar.
$3|21$, folglich $9|21^2$ und erst recht $9|21^{39}$
$3|39$, folglich $9|39^2$ und erst recht $9|39^{21}$
Das bedeutet, daß die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 9 teilbar ist.
21^{39} endet auf die Ziffer 1 und 39^{21} endet auf die Ziffer 9. Das bedeutet, daß die Summe $21^{39} + 39^{21}$ auf die Ziffer Null endet und daher durch 5 teilbar ist. Jede durch 9 und durch 5 teilbare Zahl ist durch 45 teilbar.

57. Zu entziffern ist $\overline{ac} \cdot 1{,}2 = \overline{ca}$.

$45 \cdot 1{,}2 = 54$.
Wenn $\overline{ac}$ mit $\frac{6}{5}$ multipliziert eine ganze Zahl ergibt, so ist $\overline{ac}$ teilbar durch 5. Da aber $c \neq 0$ sein muß, so bedeutet das, daß $c = 5$ ist.
Außerdem ist $\frac{\overline{ac}}{5} \cdot 6$ gleich der ganzen Zahl $\overline{ca}$, d. h., $\overline{ca}$ ist teilbar durch 6. Aber unter den Zahlen 51, 52, ..., 59 ist nur 54 durch 6 teilbar.

58. Zu beweisen ist:

Wenn bei zwei ganzen Zahlen (a und b) die m letzten Ziffern gleich sind, so sind auch bei den Zahlen a^n und b^n die m letzten Ziffern gleich.

Nach Voraussetzung endet die Zahl $a - b$ auf m Nullen. Es ist $a^n - b^n = (a - b)A$, wobei A eine ganze Zahl ist. Das Produkt $A(a - b)$ hat als letzte Ziffern m (oder mehr) Nullen. Aber bei der Subtraktion der Potenz b^n von der Potenz a^n wird die Differenz nur dann auf m Nullen enden, wenn die m letzten Ziffern von a^n und b^n gleich sind.

VII. Geometrie

1. In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis doppelt so groß wie die Höhe. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

   45°, 45° und 90°.
   Durch die Höhe erhält man zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke.

2. Der Umfang eines Dreiecks sei eine ganze Zahl mit der Maßeinheit Dezimeter. Die Seite a betrage 3 dm und die Seite b 1 dm. Welche Länge haben die Seite c und der Umfang u?

   $$\begin{array}{ll} & \quad\; a \qquad\quad b \qquad\quad c \\ c \neq 1\text{ dm}, & \text{denn } 3\text{ dm} > 1\text{ dm} + 1\text{ dm} \\ c \neq 2\text{ dm}, & \text{denn } 3\text{ dm} = 1\text{ dm} + 2\text{ dm} \\ c = 3\text{ dm}, & \text{denn } 3\text{ dm} < 1\text{ dm} + 3\text{ dm} \\ c \neq 4\text{ dm}, & \text{denn } 3\text{ dm} + 1\text{ dm} = 4\text{ dm} \\ c \neq 5\text{ dm}, & \text{denn } 3\text{ dm} + 1\text{ dm} < 5\text{ dm} \end{array}$$

   Ergebnis: $c = 3$ dm, $u = 7$ dm

3. Die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen Vieleck ist selbstverständlich ganzzahlig. Trotzdem hat die Formel zur Ermittlung dieser Anzahl die Form eines Bruches: $\frac{n\,(n-3)}{2}$. Wie ist das zu erklären?

   Wenn n eine gerade Zahl ist, so kann man den Bruch mit 2 kürzen, erhält also eine ganze Zahl. Wenn nun n eine ungerade Zahl ist, so ist $n - 3$ eine gerade Zahl, und der Bruch kann wieder mit 2 gekürzt werden.

4. Die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Ecks verhalte sich zur Summe der Außenwinkel wie 2:1. Bestimme n!

   Die Summe der Außenwinkel eines n-Ecks beträgt $360° = 4\,\text{R}$. Folglich hat das vorliegende n-Eck die Innenwinkelsumme $8\,\text{R}$. Unter Verwendung der Formel für die Innenwinkelsumme ergibt sich also: $2\,\text{R}\,(n-2) = 8\,\text{R}$; $n = 6$.

5. Ist es möglich, ein ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen?

   Nein.
   Die Teilungslinie muß durch eine Spitze verlaufen. Bildet sie die Höhe im Ausgangsdreieck, so entstehen zwei Dreiecke mit ungleichen Hypotenusen. Wenn die Teilungslinie aber zur Basis geneigt ist, so wird in einem der Dreiecke ein stumpfer Winkel gebildet, der nicht gleich einem der Winkel des anderen Dreiecks sein kann.

6. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks sei 14 cm. Eine der Seiten sei dreimal so groß wie die andere. Welche Länge haben die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks?

Es kann nur der Schenkel (a) dreimal so groß sein wie die Basis (c), denn im umgekehrten Falle wäre die Summe der Schenkel kleiner als die Basis. Folglich ist das Verhältnis der Seiten 1:3:3.
2 cm, 6 cm, 6 cm.

7. In einem konvexen n-Eck sollen alle Außenwinkel stumpfe Winkel sein. Bestimme n!

$n = 3$.
Wenn man annimmt, daß $n > 3$ ist, so würde die Summe der Außenwinkel größer als 4 R werden, was aber unmöglich ist.

8. Wie kann man quadratisch kariertes Papier zum Zeichnen eines Rhombus ausnutzen?

Indem man längs einer waagerechten Linie eine Strecke über $2n$ Karos zieht, erhält man die erste Diagonale. Die zweite Diagonale errichtet man im Halbierungspunkt längs der senkrechten Linie, jeweils n Karos in beiden Richtungen. Schließlich verbindet man die Endpunkte.

9. Man hat ein rechteckiges Brett. An einem Ende soll das Brett unter einem Winkel von 45° abgeschnitten werden. Wie kann man vorgehen?

Von der einen Ecke (A) trägt man in Längsrichtung die Breite ($\overline{AD}$) ab und verbindet den so erhaltenen Punkt D_1 mit D (Abb. 1).

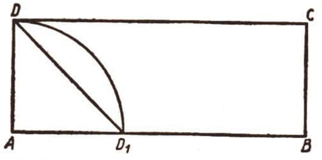


Abb. 1

10. Ein gleichseitiges Dreieck soll so in 3 Teile geteilt werden, daß ein Rhombus und zwei kongruente Dreiecke entstehen. Die beiden Dreiecke zusammen sollen flächengleich dem Rhombus sein.

Man halbiert die Seiten des gleichseitigen Dreiecks und verbindet einen Halbierungspunkt mit den beiden anderen. Durch diese beiden Schnittlinien entstehen ein Rhombus und zwei kongruente Dreiecke.

Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem gleich großen Rhombus zusammenfügen.

11. Aus einem Stück Furnier soll ein Quadrat herausgesägt werden. Wie kann man nachprüfen, ob das ausgeschnittene Viereck tatsächlich ein Quadrat ist.

Man dreht das ausgeschnittene Viereck um 90° und stellt fest, ob es auch so in das ausgesägte Furnier paßt.

12. In einem konvexen 12-Eck seien drei Innenwinkel rechte Winkel. Wieviel der übrigen 9 Winkel können spitze Winkel sein?

Es kann nicht ein einziger Winkel spitz sein. Den drei rechten Innenwinkeln entsprechen drei rechte Außenwinkel. Wenn ein Innenwinkel spitz wäre, so würde die Summe der Außenwinkel größer als 4 R sein.

13. Existieren Dreiecke, bei denen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden liegen?

Alle rechtwinkligen Dreiecke.

14. Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander in ihrem Schnittpunkt halbieren?

Die Lote vom Kreismittelpunkt auf die Sehnen schneiden diese in ihren Mitten. Aber in der Mitte der einen und der anderen Sehne soll nach der Voraussetzung der Aufgabe der Schnittpunkt der Sehnen liegen. Demnach müßten ein und derselbe Abschnitt der Lote zu zwei einander schneidenden Geraden gehören, was unmöglich ist, d. h. zwei Sehnen, die nicht Durchmesser sind, können einander nicht halbieren.

15. Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises, wenn man nur ein Zeichendreieck und einen Bleistift zur Verfügung hat?

Man legt das Zeichendreieck so auf den Kreis, daß der Scheitel des rechten Winkels auf einem beliebigen Punkt der Kreislinie zu liegen kommt und bezeichnet diesen Punkt mit C. Die beiden Schnittpunkte der Schenkel des rechten Winkels mit der Kreislinie ergeben die Punkte A und B. Indem man A und B verbindet, erhält man einen Durchmesser des Kreises. Nun wird dasselbe von einem anderen Punkt der Kreislinie aus wiederholt. Man erhält im Schnittpunkt der beiden so konstruierten Durchmesser den Mittelpunkt des Kreises.

16. Es ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise zu bestimmen, die einen gegebenen Kreis in einem festgelegten Punkt auf dem Kreisumfang berühren.

Es ist die Gerade, die durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht.

17. In einem Kreis mit dem Radius r ist ein Rechteck $ABCD$ eingezeichnet. Indem man die Seitenmitten verbindet, erhält man ein Viereck $EFGH$ (Abb. 2). Wie groß ist der Umfang dieses Vierecks?

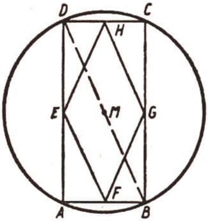


Abb. 2

Das Viereck $EFGH$ ist ein Rhombus, denn die gegenüberliegenden Seiten sind paarweise parallel und jede Seite ist gleich der Hälfte einer Diagonalen im Rechteck. Letzteres wird aus einer Teilfigur, z. B. aus dem Rechteck $EMHD$, ersichtlich. An diesem Rechteck ist nämlich sofort klar, daß $EH = MD = r$ ist. Der gesuchte Umfang beträgt also $4r$.

18. Gibt es eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreiecks so schneidet, daß das abgeschnittene Dreieck dem vorgegebenen ähnlich ist, ohne daß die schneidende Gerade parallel zur dritten Seite verläuft?

Es gibt eine derartige Gerade.
Die Gerade kann hierzu die Seiten AB und BC so schneiden, daß sie im Schnittpunkt mit AB einen Winkel bildet, der gleich dem Winkel ACB ist.

19. Die entsprechenden Seiten zweier ähnlicher Dreiecke sollen addiert und zur Konstruktion eines neuen Dreiecks verwendet werden. Ist das neue Dreieck den gegebenen Dreiecken ähnlich?

Ja. Bezeichnet man die Seiten der gegebenen ähnlichen Dreiecke mit a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2, so sind die Seiten des neuen Dreiecks $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$.
Nach Voraussetzung der Aufgabe ist

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, woraus folgt:

$$\frac{a_1}{a_2} + 1 = \frac{b_1}{b_2} + 1 = \frac{c_1}{c_2} + 1$$

oder $\frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_2} = \frac{c_1 + c_2}{c_2}$.

20. Ein Quadrat und ein nicht quadratischer Rhombus haben den gleichen Umfang. Welche Figur hat einen größeren Flächeninhalt?

Der Flächeninhalt des Quadrates ist größer als der vom Rhombus bei gleicher Seitenlänge. Der Flächeninhalt des Quadrates ist a^2. Der Flächeninhalt des Rhombus ist $a \cdot h$, wobei h die Höhe im Rhombus ist. Sie ist gleich einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse a, also gilt $h < a$ und somit $ah < a^2$.

21. Es ist nachzuweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalabschnitten und den nicht parallelen Seiten gebildet werden, gleich sind (Abb. 3).

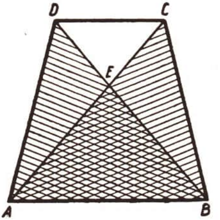


Abb. 3

$\triangle ABD = \triangle ABC$ (Die Höhen sind gleich, da $a \parallel c$; die Grundlinie $\overline{AB}$ ist bei beiden Dreiecken gemeinsam.)

$\triangle ABD = \triangle ABE + \triangle AED$

$\underline{\triangle ABC = \triangle ABE + \triangle BCE}$

Folglich gilt: $\triangle AED = \triangle BCE$.

22. Ein Rhomboid und ein Rechteck haben gleiche Grundseiten und gleichen Umfang. Welche Figur hat einen größeren Flächeninhalt?

Bezeichnen wir die Seiten des Rechtecks mit a und b, so beträgt der Flächeninhalt $F = a \cdot b$. Die Seiten des Parallelogramms sind auch a und b, aber der Flächeninhalt beträgt $F = a \cdot h$, wobei h die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse b ist ($h < b$). Folglich gilt auch: $ah < ab$.

23. Sind bei einem nicht quadratischen Bilderrahmen, der aus vier gleich breiten Leisten besteht, das äußere und das innere Rechteck ähnlich?

Nein.

Wenn die Breite des Rahmens k cm ist und die Seiten des inneren Rechteckes a cm und b cm betragen, so sind die Seiten des äußeren entsprechend $(a + 2k)$ cm und $(b + 2k)$ cm. Es ist aber $\frac{a}{b} \neq \frac{a+2k}{b+2k}$, denn bei der Addition ein und derselben Zahl im Zähler und Nenner wird der Wert des Bruches verändert.

24. Vom Scheitelpunkt des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks werden Höhe und Winkelhalbierende gezogen. Die Winkelhalbierende teilt die Hypotenuse im Verhältnis 3:5. In welchem Verhältnis teilt die Höhe die Hypotenuse?

Die Katheten verhalten sich wie 3:5.

Die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse verhalten sich wie die Quadrate der Katheten, d. h. wie 9:25.

25. Kann man in einen Kreis zwei ungleiche ähnliche Dreiecke einbeschreiben?

Es ist unmöglich; weil jedes Paar gleicher Winkel der beiden Dreiecke gleichen Bögen entspricht. Folglich sind die diesen Bögen zugeordneten Sehnen gleich. Diese Sehnen aber sind die Seiten der Dreiecke.

26. Wieviel Strahlen können von einem Punkt im Raum ausgehen, wenn sie paarweise stumpfe Winkel bilden sollen?

Weil die Summe der Winkel an der Spitze eines Polyeders kleiner als 360° ist, sind nur 3 Strahlen möglich.

27. Kann man durch einen Würfel einen ebenen Schnitt so führen, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht?

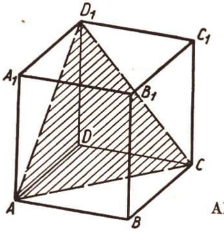


Abb. 4

Man kann es. Wenn die Ebene zum Beispiel so gelegt wird, daß sie durch die Ecken D_1, A und C geht (Abb. 4), so begrenzen die Strecken AC, CD_1 und AD_1 ein gleichseitiges Dreieck, da sie als Diagonalen gleicher Quadrate gleich sind.

28. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes soll eine Gerade gezogen werden, die zwei gegebene parallele Geraden schneidet. Ist dies immer möglich?

Die Konstruktion ist nur in dem Fall möglich, wenn der Punkt in der Ebene liegt, die durch die beiden parallelen Geraden bestimmt wird.

29. Zu beweisen ist: Wenn 4 Punkte nicht in einer Ebene liegen, so liegen auch nicht drei von diesen auf einer Geraden.

Wenn man annimmt, daß irgend 3 Punkte der gegebenen 4 Punkte auf einer Geraden liegen, so können wir eine Ebene finden, die von der Geraden und dem 4. Punkt bestimmt wird. Es würden dann alle 4 Punkte, entgegen der Voraussetzung der Aufgabe, in einer Ebene liegen.

30. Welches ist der geometrische Ort für alle Punkte, die von den vier Seiten eines Rhombus gleich weit entfernt sind?

Das Lot auf die Ebene des Rhombus, das durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus geht.

31. Ist es möglich, eine sechsseitige Pyramide zu konstruieren, deren Kanten alle gleich lang sind?

Nein.
Die Summe der ebenen Winkel an der Spitze wäre $60° \cdot 6 = 360°$, was unmöglich ist.

32. Gegeben sei eine Pyramide. Es ist der geometrische Ort der Spitzen aller Pyramiden zu bestimmen, die den gleichen Rauminhalt und die gleiche Grundfläche wie die gegebene Pyramide haben.

Eine Ebene, die parallel ist zur Ebene der gegebenen Grundfläche und die durch die Spitze der gegebenen Pyramide geht.

33. Die Grundfläche einer Pyramide mit gleichen Seitenkanten ist ein rechtwinkliges Dreieck. In welchen Punkt der Ebene der Grundfläche wird die Spitze der Pyramide projiziert?

Die Projektion der Spitze ist die Mitte der Hypotenuse. Aus der Gleichheit der Seitenkanten folgt, daß die Spitze der Pyramide in das Zentrum des die Grundfläche umschließenden Kreises fällt. Aber das Zentrum des Kreises, der ein rechtwinkliges Dreieck umschließt, liegt auf der Mitte der Hypotenuse.

34. Zwischen den Strecken a, b und c existiert die Beziehung $a + b > c$. Ist das Vorhandensein dieser Ungleichung nur notwendige, nur hinreichende oder notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus den Strecken a, b und c?

Wenn die Ungleichung $a + b > c$ nicht erfüllt ist, so kann aus den Strecken a, b und c kein Dreieck konstruiert werden. Das heißt: Die Erfüllung dieser Ungleichung ist eine notwendige Voraussetzung für die Konstruktion eines Dreiecks.

Aber sie ist nicht hinreichend. Es sei zum Beispiel $a = 10$ cm und $b = 6$ cm und $c = 3$ cm. Aus diesen Strecken kann man kein Dreieck konstruieren, obwohl $a + b > c$ ist.

35. Existieren solche Pyramiden, deren Seitenkanten und Seitenflächen zur Ebene der Grundfläche gleich geneigt sind, wenn die Grundfläche der Pyramide ein Trapez ist?

Wenn die Seitenkanten der Pyramide die Ebene der Grundfläche unter gleichen Winkeln treffen, so ist die Grundfläche ein Vieleck, dem ein Kreis umbeschrieben werden kann. Wenn die Seitenflächen die Ebene der Grundfläche in gleichem Winkel treffen, so ist die Grundfläche ein Vieleck, dem ein Kreis einbeschrieben werden kann. Die Spitze der Pyramide wird in diesem Fall in das Zentrum dieses und des anderen Kreises projiziert. Das heißt, beide Zentren fallen in einem Punkt zusammen. Obwohl man in einem gleichschenkligen Trapez, bei dem die Summe der Grundseiten gleich ist der Summe der seitlichen Seiten, einen Kreis einbeschreiben kann und auch einen Kreis umbeschreiben kann, so sind doch die Zentren dieser beiden Kreise zwei verschiedene Punkte. Folglich existiert keine Pyramide, die die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt.

36. Welche kleinste Anzahl von Ebenen kann einen Teil des Raumes abgrenzen?

Vier Ebenen bilden eine dreiseitige Pyramide.

37. Aus einem Würfel wurde die größtmögliche Kugel herausgedreht. Was wiegt mehr: die Kugel oder der Abfall?

Die Würfelkante sei a. Dann ist das Würfelvolumen a^3 und das größte Kugelvolumen $\frac{1}{6}\pi a^3$. Aus $\pi > 3$ und $\frac{1}{6}\pi > \frac{1}{2}$ geht hervor, daß das Kugelvolumen mehr als die Hälfte des Würfelvolumens ausmacht.

Die Kugel wiegt mehr als der Abfall.

38. Der Umfang eines Dreiecks sei 1 mm. Kann es sich herausstellen, daß der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1 km ist?

Wenn in einem Dreieck; wie klein auch seine Seiten seien, ein stumpfer Winkel ist, dessen Größe hinreichend nahe bei 180° liegt, so sind die Mittelsenkrechten auf den Seiten des Dreiecks, die den stumpfen Winkel bilden, fast parallel.

Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten bildet das Zentrum des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Der Kreismittelpunkt kann also von der Spitze des stumpfen Winkels jede endliche Entfernung annehmen.
Folglich kann der Radius des Kreises, der dem Dreieck umbeschrieben ist, auch sehr groß sein (z. B. 1 Million Kilometer).

39. Kann man einen Würfel durch einen ebenen Schnitt so zerlegen, daß die Schnittfläche ein regelmäßiges 5-Eck ist?

Das ist nicht möglich. Damit die ebene Schnittfläche ein regelmäßiges Fünfeck wird, müßte die Schnittebene durch fünf Kanten des Würfels gehen. Von fünf Würfelkanten sind aber stets einige zueinander parallel. Im regelmäßigen 5-Eck sind jedoch keine Seiten parallel.

40. In einer vierseitigen Pyramide $S\ ABCD$ bilden die Seitenkanten mit der Grundfläche gleiche Winkel. Für die Winkel der Grundfläche soll gelten:
$\alpha:\beta:\gamma = 2:3:4$.
Es ist der vierte Winkel der Grundfläche, δ, zu bestimmen.

Wenn die Seitenkanten mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden, so sind die Projektionen der Seitenkanten auf die Ebene der Grundfläche gleich lang. Das heißt, dem Viereck $ABCD$ kann ein Kreis umbeschrieben werden. Aber dann ist
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4\,\mathrm{R}$.
Nach der Voraussetzung der Aufgabe bildet die Summe
$\alpha + \gamma$ 6 Teile und β drei solche Teile.
Folglich ist $\delta = \beta = 90°$.

41. Gibt es ein Polyeder mit einer ungeraden Anzahl von Flächen, wobei jede Fläche ein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Seiten ist?

Wenn man annimmt, daß ein derartiges Polyeder existiert, könnte man die Anzahl seiner Kanten folgendermaßen bestimmen:
Jede Seitenfläche ist ein Vieleck mit einer ungeraden Seitenzahl, etwa $2m + 1$. Hierzu addiert man die Seitenzahl eines anderen Vielecks mit $2n + 1$ Seiten. Diese Addition führt man fort, bis alle Seitenflächen erfaßt sind.
Auf diese Weise erhält man die doppelte Anzahl der Kanten des Polyeders, weil jede Seite eines beliebigen Vielecks Schnittgerade zweier Vieleckebenen ist. So hat man jede Polyederkante zweimal gezählt. Aus diesem Grunde muß die berechnete Zahl der Kanten geradzahlig sein. Aber andererseits ist die Zahl selbst, nach Voraussetzung, die Summe ungerader Zahlen, deren jede sich aus ungeraden Zahlen zusammensetzt. Eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen liefert jedoch in jedem Falle eine ungeradzahlige Summe.

Damit ist erwiesen, daß kein Polyeder existiert, das die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt.

42. Wenn man vom Nordpol über einen Meridian nach Süden fliegt (z. B. 100 km), dann nach Westen abbiegt und auf einem Breitenkreis weitere 100 km fliegt, dann nach Norden abbiegt und auf dem Meridian wieder 100 km fliegt, so landet man wieder auf dem Nordpol. Gibt es auf der südlichen Halbkugel auch einen derartigen Ausgangspunkt, der bei einem analogen Flug (Süden–Westen–Norden) über jeweils 100 km die Rückkehr zum Ausgangspunkt der Reise ermöglicht?

Für diese Aufgabe soll die Erde als Kugel angenommen werden. Ein Breitenkreis bestimmt eine Ebene, die parallel zur Äquatorebene liegt. Der Umfang des Breitenkreises hat bei entsprechender Wahl von φ (der geographischen Breite des Ortes) eine von vornherein gegebene Länge. Die Aufgabe fordert nun das Durchfliegen einer 100 km langen Strecke auf einem Breitenkreis in Ost-West-Richtung, dem ein 100 km langer Flug nach Süden von einem 100 km nördlicheren Punkt vorausgegangen ist. Beim sich anschließenden 100 km langen Flug nach Norden soll der Ausgangspunkt wieder erreicht werden.

Für die Ost-West-Bewegung wählt man den Breitenkreis der südlichen Halbkugel aus, der gerade den Umfang von 100 km besitzt. Als Startpunkt für den Flug kommt dann ein beliebiger Punkt auf dem Breitenkreis in Frage, der 100 km (etwa 1°) nördlich vom Breitenkreis mit dem Umfang 100 km liegt.

Die gedankliche Durchführung des Fluges beginnt also auf irgendeinem Punkt (A) des nördlichen Breitenkreises und führt nach einem 100 km weiten Flug bis zum südlicheren Breitenkreis (B). Das Flugzeug wendet sich dann nach Westen und hat nach einem Flug von 100 km den gesamten Breitenkreis abgeflogen und ist damit wieder an demselben Punkt (B) dieses Breitenkreises angelangt. Nun schließt sich noch der Flug über 100 km nach Norden an, womit der Ausgangspunkt (A) wieder erreicht wird.

Darüber hinaus würden sich auch Breitenkreise mit kürzerem Umfang eignen. Auf dem Breitenkreis mit einem Umfang von 50 km könnte man zum Beispiel zwei Umkreisungen in ost-westlicher Richtung ausführen und würde so ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe genügen. Auf diese Weise erhöht sich die Zahl der Lösungen beträchtlich.

43. Drei aufeinanderfolgende Seiten der Grundfläche einer vierseitigen Pyramide seien a, b und c. Die Seitenkanten bilden mit der Grundfläche der Pyramide gleiche Winkel. Welche Größe hat die vierte Seite der Grundfläche?

Aus der Gleichheit der Winkel folgt: die Grundfläche der Pyramide ist ein Viereck, in das ein Kreis einbeschrieben werden kann. Aber in einem derartigen Viereck ist die Summe gegenüberliegender Seiten gleich. Bezeichnet man die vierte Seite mit d, dann ist

$$d + b = a + c$$
$$d = a + c - b.$$

44. Es ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Kugeln zu bestimmen, die eine gegebene Kugel in einem gegebenen Punkt berühren.

Der gesuchte geometrische Ort ist die Gerade, die durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt der gegebenen Kugel geht.

45. Wie sind die Punkte in der Ebene angeordnet, deren Koordinaten der Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ genügen?

Der Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ genügen alle und nur solche Paare von Zahlen, deren absolute Werte gleich sind. Diese Paare von Zahlen bilden mit ihren Koordinaten die Punkte zweier Geraden:

1) die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten und
2) die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten.

46. Wie sind in der Ebene die Punkte angeordnet, deren Koordinaten der Gleichung $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 0$ genügen?

Die Summe zweier nichtnegativer Zahlen ist dann und nur dann gleich Null, wenn jeder Summand gleich Null ist: $x - 3 = 0$ und $y + 5 = 0$. Daraus geht hervor, daß der einzige Punkt, dessen Koordinaten die gegebene Gleichung erfüllen, ein Punkt im IV. Quadranten mit den Koordinaten $(+3; -5)$ ist.

47. Zu bestimmen sind:

a) die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel $y = 5x^2 + 10x + 7$ mit den Achsen des Koordinatensystems,

b) die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel.

a) Ein Schnittpunkt mit der x-Achse existiert nicht. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0; 7)$.

b) Der Scheitelpunkt der Parabel ist $(-1; 2)$.

Der Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse existiert deshalb nicht, weil die quadratische Gleichung $5x^2 + 10x + 7 = 0$ keine reellen Wurzeln hat. Die Abszisse des Schnittpunktes der Parabel mit der y-Achse ist gleich Null; daher ist $y_0 = 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 7 = 7$. Die Ordinate des Scheitelpunktes der Parabel ist der kleinste y-Wert. Man kann diesen kleinsten Wert ermitteln, indem man bildet

$$y = 5x^2 + 10x + 7 = 5\,(x + 1)^2 + 2.$$

Als kleinster y-Wert ergibt sich dann bei $x + 1 = 0$ der Wert 2.

48. Ist die Behauptung richtig, daß der Winkel zwischen den Erzeugenden eines Kegels gleich dem Winkel im Achsenschnitt ist?

Die Behauptung ist richtig.

Der Grundkreis eines Kegels wird durch einen Achsenschnitt im Durchmesser geschnitten, von einem beliebigen anderen vertikalen Schnitt in einer Sehne.

Wenn nun zwei Seiten eines Dreiecks mit zwei Seiten eines anderen Dreiecks (wie es die Mantellinien bilden) übereinstimmen, und die dritten Seiten beider Dreiecke sind ungleich, so liegt natürlich der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

VIII. Goniometrie

1. In einem Dreieck ABC sei $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$. Zu berechnen ist das Produkt $\cot\alpha \cdot \cot\beta$.

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta = \cot\alpha \cdot \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1.$$

2. Zu berechnen ist ${}^{\pi}\log \cot 0{,}25\,\pi$.

Das Resultat ist 0, da $\cot\frac{\pi}{4} = 1$.

3. Zu vereinfachen ist $\cos(n\pi + \alpha)$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

$(-1)^n \cos\alpha$.

4. Für welche Werte von x ist die Gleichung $\sin\frac{\pi}{1+x^2} = 0$ erfüllt?

Wenn $\sin\alpha = 0$, so ist $\alpha = n\pi$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Aber $\frac{1}{1+x^2}$ ist nur in einem einzigen Fall eine ganze Zahl, für $1 + x^2 = 1$. Das bedeutet, daß $x = 0$ ist.

5. Es ist der größte Wert des Produktes $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ zu bestimmen, wobei α und β spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqq \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

6. Zu vereinfachen ist $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

$$\cos\alpha = \sin(90° + \alpha) = 2\sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} = 2\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right).$$

7. Indem die „Methode des indirekten Beweises“ angewendet wird, ist zu beweisen, daß die Summe $\sin\alpha + \cos\alpha$ bei keinem α gleich 1,5 sein kann.

Wenn man annimmt, daß $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}5$ ist, so ist
$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2{,}25$ oder $1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2{,}25$.
Hieraus würde folgen, daß $\sin 2\alpha = 1{,}25$, was unmöglich ist.

8. Zu berechnen ist die Summe
$\sin 110° + \sin 130° + \ldots + \sin 230° + \sin 250° + \sin 270°$;

Die Summe ergibt -1.
$\sin 110° = \sin(180° - 70°) = \sin 70°$
$\sin 250° = \sin(180° + 70°) = -\sin 70°$
Analog ergibt sich:
$\sin 130° = -\sin 230°$ usw.
Es verbleibt somit nur:
$\sin 270° = -1$.

9. Der Ausdruck $\sin(n\pi + \alpha) + \sin(n\pi - \alpha)$, in dem n eine beliebige ganze Zahl ist, soll vereinfacht werden.

Die Summe ergibt 0.
Wenn n eine ungerade Zahl ist, ergibt sich: $(-\sin\alpha) + \sin\alpha = 0$.
Wenn n eine gerade Zahl ist, ergibt sich: $\sin\alpha + (-\sin\alpha) = 0$.

10. In einem Dreieck bestehe zwischen den drei Winkeln die Beziehung $\alpha:\beta:\gamma = 1:5:6$.
Was ergibt dann $\cos\alpha \cdot \cos\beta$?

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos 15° \cdot \cos 75° = \cos 15° \cdot \sin 15°$$
$$= \frac{1}{2}\sin 30° = 0{,}25.$$

11. Ist die Gleichung $\tan x + \cot x = 1{,}5$ möglich?

Aus einer zulässigen Umformung der Gleichung folgt:
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 1{,}5; \quad \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 1{,}5; \quad \sin 2x = \frac{4}{3},$$
was unmöglich ist. Folglich ist auch die vorgegebene Gleichung nicht möglich.

12. Es ist $\sin 7{,}5° \cdot \sin 37{,}5°$ zu berechnen.

$$\sin 7{,}5° \cdot \sin 37{,}5° = \frac{1}{2}(\cos 30° - \cos 45°) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4};$$

13. Welches ist der Wertebereich, der für x in dem Ausdruck $\sqrt{\lg \sin x}$ möglich ist?

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Es ist notwendig, daß gilt $\lg \sin x \geqq 0$.

Wenn $\sin x \leqq 0$, verliert der Ausdruck $\lg \sin x$ seinen Sinn.
Wenn $0 < \sin x < 1$, gilt $\lg \sin x < 0$, und es wird die Forderung $\lg \sin x \geqq 0$ verletzt. Es bleibt der letzte Fall zu untersuchen: $\sin x = 1$, welcher für $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ gilt, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.
In diesem Fall ist $\lg \sin x = \lg 1 = 0$, was mit der Hauptforderung $\lg \sin x \geqq 0$ übereinstimmt.

14. Welches Vorzeichen hat die Zahl $\sin(\cos \pi)$?

Das Vorzeichen für $\sin(\cos \pi)$ ist negativ.
Es ist $\cos \pi = -1$; und der Sinus ist im IV. Quadranten kleiner als Null.

15. Was ist größer: $-\lg \tan 0{,}75°$ oder $-\lg \cot 0{,}75°$?

Der Tangens von $0{,}75°$ ist kleiner als 1, aber $\cot 0{,}75° > 1$.
Folglich ist $\lg \tan 0{,}75° < \lg \cot 0{,}75°$
und $-\lg \tan 0{,}75° > -\lg \cot 0{,}75°$.

16. Zu berechnen ist $\sin^4 105° - \cos^4 75°$.

$$\begin{aligned}
&\sin^4 105° - \cos^4 75° \\
&= \cos^4 15° - \sin^4 15° = (\cos^2 15° - \sin^2 15°)(\cos^2 15° + \sin^2 15°) \\
&= \cos^2 15° - \sin^2 15° = 1 - \sin^2 15° - \sin^2 15° = 1 - 2\sin^2 15° \\
&= \cos 30° \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

17. Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn $\sin \gamma = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ ist.

Aus
$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) \tag{1}$$
folgt
$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \tag{2}$$
Mit Hilfe der gegebenen Gleichung wird $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ in (2) eliminiert, so daß sich ergibt:
$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}$$
$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$
Folglich ist $\frac{\alpha + \beta}{2} = 45°$ und $\alpha + \beta = 90°$.
Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergibt sich $\gamma = 90°$.

18. Es ist die Gleichung $\sin x \cos x = \sin 40°$ zu lösen.

Die Gleichung ist unlösbar.

Es ist $\sin 40° > \sin 30° = \frac{1}{2}$

und $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Daraus folgt

$$\sin 2x = 2 \sin 40°,$$

das heißt

$$\sin 2x > 1.$$

19. Zu berechnen ist $\frac{\cot(\arcsin 0{,}1)}{\cos(\arcsin 0{,}1)}$.

$$\frac{1}{\sin(\arcsin 0{,}1)} = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

20. Ein Schüler sagte:

„Ist $\cot \alpha = b$ gegeben, so bedeutet das, daß $\alpha = \operatorname{arc} \cot b$ ist.“ Ist die Schlußfolgerung des Schülers richtig?

Die Schlußfolgerung ist nur gültig für den Fall, daß $0 < \alpha < \pi$ ist.

21. Es ist nachzuweisen, daß die größten Werte der Funktionen

$y = (\log_2 3)^{\sin x}$ und $y = (\log_3 2)^{\cos x}$ gleich sind.

Bei $a > 1$ wächst die Exponentialfunktion $y = a^x$, bei $a < 1$ fällt sie. $\log_2 3 > 1$, aber $\log_3 2 < 1$. Folglich nimmt die wachsende Funktion $y = (\log_2 3)^{\sin x}$ den größten Wert an, wenn $\sin x$ seinen größten Wert erreicht, was bei $\sin x = 1$ geschieht. Auf diese Weise ist der größte Wert dieser Funktion gleich $\log_2 3$. Die Funktion $y = (\log_3 2)^{\cos x}$ ist fallend und folglich nimmt sie ihren größten Wert an, wenn $\cos x$ seinen kleinsten Wert annimmt, was bei $\cos x = -1$ der Fall ist. Der größte Wert dieser Funktion ist gleich $(\log_3 2)^{-1}$.

Aber $(\log_3 2)^{-1} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$, was zu beweisen war.

22. Im Dreieck ABC sei der Winkel γ ein stumpfer Winkel. Es ist zu beweisen, daß dann gilt: $\tan \alpha \cdot \tan \beta < 1$.

Wenn der Winkel γ stumpf ist, so sind die Winkel α, β und $\alpha + \beta$ spitze Winkel und $\tan \alpha$, $\tan \beta$ und $\tan(\alpha + \beta)$ sind positive Zahlen. Es ist ferner $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$. Weil gilt: $\tan(\alpha + \beta) > 0$ und $\tan \alpha + \tan \beta > 0$, muß auch sein $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta > 0$ oder $\tan \alpha \cdot \tan \beta < 1$.

23. Versuche solche trigonometrischen Gleichungen zu bilden, die ganzen und nur ganzen Zahlen genügen!

Man kann viele solcher Gleichungen aufstellen, z. B.

$\tan \pi x = 0$

$\cos\left[(2x+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$ usw.

IX. Komplexe Zahlen

1. Zu berechnen ist das Produkt:

$$(1+i)\left(1+\sqrt{i}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{i}\right)\left(1-\sqrt[4]{i}\right).$$

$$\begin{aligned}&(1+i)\left(1+\sqrt{i}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{i}\right)\left(1-\sqrt[4]{i}\right)\\ &=(1+i)\left(1+\sqrt{i}\right)\cdot\left(1-\sqrt{i}\right)\\ &=(1+i)\cdot(1-i)=2.\end{aligned}$$

2. Zu berechnen ist:

$$\frac{7\sqrt{3}+5i\sqrt{21}}{\sqrt{7}+5i}$$

$\sqrt{21}$

(Man zieht $\sqrt{21}$ vor die Klammer.)

3. Die Gleichung $x+y+ixy=i$ ist zu lösen, wenn man für x und y nur reelle Zahlen zuläßt.

Die Gleichung ist unlösbar. Bildet man nämlich das System

$$x+y=0;\; x\cdot y=1,$$

so kann man feststellen, daß das System keine reellen Lösungen hat. Da $x\cdot y=1$, können weder x noch y gleich Null werden. Außerdem stellen sie Zahlen mit gleichen Vorzeichen dar. Eine Summe zweier positiver bzw. negativer reeller Zahlen kann wiederum nicht Null ergeben, wie es die Gleichung $x+y=0$ fordert.

00042-2