Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395
Friedrich Verlag
Velber

3

Herausgeber und Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Tel.: (05 11) 4 00 04–53

Anschrift der Redaktion:
Redaktion „alpha“
PSF 129, O-7010 Leipzig

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau

Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich
alpha ist zu beziehen durch alle Buchhandlungen und Postämter oder direkt vom Verlag.

Liebe Leser! Ab Heft 4/91 erscheint *alpha* mit neuem Outfit, d. h. 32 Seiten Umfang und besserer Ausstattung.
Diese Veränderungen sind aber mit dem bisherigen Preis nicht machbar! Deshalb muß dieser ab Heft 4/91 generell auf 2,– DM pro Heft angehoben werden. Dazu kommen pro Heft –,50 DM Portokosten. Das macht also 15,– DM im Jahresabonnement.
Soviel können wir aber versichern: Es gibt weiterhin viel Inhalt und das zu einem Preis, an dem sich der Friedrich Verlag keine „goldene Nase“ verdient!

Fotos: Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 54); M. Spindler, Berlin (S. 56); Dr. L. Flade, Halle (S. 62)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelblattvignette, S. 56, Alphonsvignetten); Dr. St. Koch (S. 58)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: H. Tracksdorf, Leipzig, nach einer Vorlage von L. Otto, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck:
INTERDRUCK Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. April 1991
Auslieferungstermin: 14. Juni 1991

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

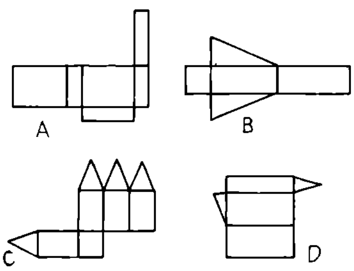
Inhalt

49 Einige Aufgaben, die Du „im Kopf“ lösen sollst
A. Tonn, Inst. für Didaktik der Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
50 Eine Regel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern
Dr. C. P. Helmholz, Fachbereich Mathematik der Universität Leipzig/Ing. A. Körner, Leipzig
51 Sprachecke
R. Bergmann (†), Döbeln/P. Hofmann, Dr. G. Liebau, beide Leipzig
52 Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß – na und?
Prof. Dr. W. Jungk, Ratke-Inst. der Pädag. Hochschule Köthen
54 A. A. Fraenkel – der Lobatschewski der Mengenlehre
Dr. P. Schreiber, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
55 Alphons logische Abenteuer
Prof. Dr. L. Kreiser, Inst. für allg. Logik der Universität Leipzig
56 Schachecke
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin, stud. phys. M. Spindler, Berlin
57 Vom Wortwürfel zum Zahlenwürfel
H. Oehl, München
58 Alphons Traum
Dr. St. Koch, Leipzig
60 XXX. Olympiade Junger Mathematiker
Aufgaben der 3. Stufe
62 Gemixtes aus: Wer übt, kommt weiter
Dr. L. Flade, Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle
63 Buchtips
64 Mathematik und Geographie
O. Kappler, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
66 Wie symmetrisch ist ein Vieleck?
Dr. E. Quaisser, Fachbereich Mathematik der Brandenburgischen Landeshochschule Potsdam
67 Schiebepuzzle „Minerva“
W. Träger, Döbeln
68 Lösungen
III. U.-Seite: Kurz nachgedacht!
OStR J. Kreusch, Landsratsamt Löbau
IV. U.-Seite: Magisches ALPHA-Alphabet
Dr. R. Mildner, Fachbereich Mathematik der Universität Leipzig

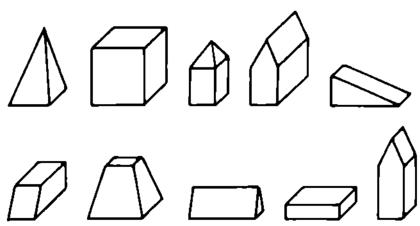
Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin.
Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Einige Aufgaben, die Du „im Kopf“ lösen sollst

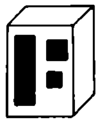
Marcel räumt sein Zimmer auf. In der untersten Schublade seines Schreibtisches entdeckt er diese Bastelbögen aus Pappe:



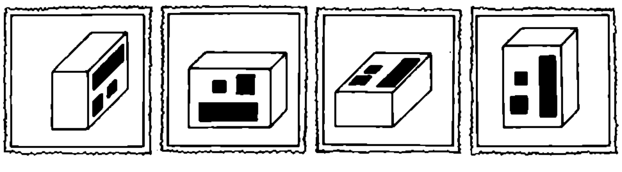
Marcel überlegt: „Soll ich die Bastelbögen wegwerfen?“ Wenn er wüßte, was man aus den Bastelbögen herstellen könnte, würde ihm die Entscheidung leichter fallen. Kannst Du ihm helfen?
Welche der unten abgebildeten Körper können aus den Bastelbögen hergestellt werden? Schreibe jeweils den Buchstaben des Bastelbogens unter den entsprechenden Körper!



Marcel räumt weiter auf. Auf dem Boden einer Truhe findet er eine Schachtel. Eine Fläche der Schachtel ist mit verschiedenen Rechtecken bedruckt. Alle anderen Flächen sind weiß. Hier siehst Du eine Abbildung dieser Schachtel:

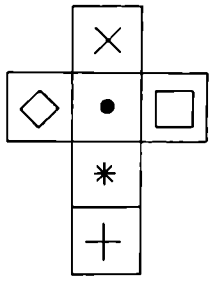


Als Marcel die Schachtel aus der Truhe nimmt, sieht er darunter diese Fotos:



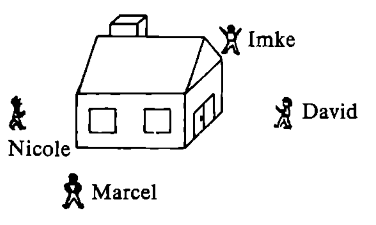
Sind das Fotos von Marcels Schachtel oder zeigen die Fotos nur eine Schachtel, die Marcels Schachtel sehr ähnlich sieht? Kreuze die Fotos an, von denen Du meinst, daß sie Marcels Schachtel abbilden.

Marcels Freund David kommt zu Besuch. Er bringt zwei Würfel mit, die er zu Hause aus Pappe gebastelt hat. Beide Würfel sind aus solch einem Bastelbogen hergestellt:

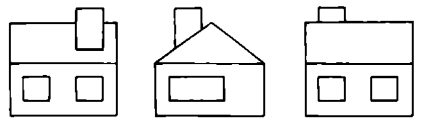


Die Rückseite des Bastelbogens ist weiß. Leider hat der Regen bei jedem Würfel ein Zeichen verwischt:

Weißt Du, welches Zeichen verwischt wurde?
Nach dieser, wie ich finde, recht schwierigen Aufgabe zum Schluß noch eine etwas leichtere:
Marcel und David gehen nach draußen. Vor Marcels Haus treffen sie ihre Schulfreundinnen Imke und Nicole. Zu viert spielen sie „Fangen“.



Welches Kind sieht das Haus gerade so?
Schreibe den Namen darunter!



Nun, konntest Du alle Aufgaben lösen?
Vielleicht hättest Du bei der ersten Aufgabe gerne die Bastelbögen in der Hand gehabt und sie gefaltet, um zu sehen, welcher Körper daraus entsteht; und die Lösung der zweiten Aufgabe wäre Dir bestimmt noch leichter gefallen, hättest Du die Schachtel in der Hand drehen und dann mit den Fotos vergleichen können. Aber Du mußtest alle hier formulierten Aufgaben „im Kopf“, also in Deiner Vorstellung lösen.
Die Fähigkeit, solche und ähnliche Aufgaben im Kopf zu lösen, nennt man räumliches Vorstellungsvermögen.
Räumliches Vorstellungsvermögen ist keine Eigenschaft, die man hat oder nicht hat, wie etwa blaue Augen oder eine krumme Nase. Räumliches Vorstellungsvermögen kann man trainieren, indem man z. B. Modelle aus Pappe bastelt, mit Legosteinen oder Klötzen baut oder auch, indem man versucht, die Aufgaben dieses Artikels zu lösen.

A. Tonn

Eine Regel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

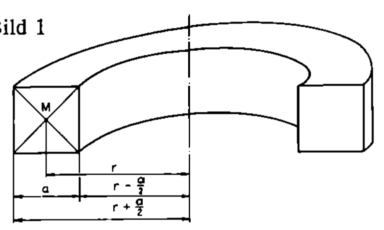
Der Konstrukteur einer Dampf- oder Gasturbine muß noch während der Entwurfsarbeiten die Masse der Laufräder bestimmen, um sich ein Bild von der zu erwartenden „kritischen Drehzahl“ der Turbine machen zu können. Er steht dabei vor der Aufgabe, von einem geometrisch verhältnismäßig komplizierten Rotationskörper das Volumen zu bestimmen. Derartige Anforderungen treten in der Technik des öfteren auf.

Bevor wir uns an eine etwas anspruchsvollere Aufgabe heranwagen, beschäftigen wir uns mit einigen einfacheren Rotationskörpern.

▲1▲ Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$ cm rotiert im Raum um eine Achse, die mit dem Quadrat in einer Ebene liegt, parallel zu einer Quadratseite verläuft und vom Mittelpunkt M des Quadrats einen Abstand von $r = 10$ cm hat. Berechne das Volumen des entstehenden Körpers!

Das Volumen V dieses Hohlzylinders läßt sich relativ leicht als Differenz aus dem Volumen des „äußeren“ Zylinders mit dem Radius $r_a = r + \frac{a}{2}$ und dem Volumen des „inneren“ Zylinders mit dem Radius $r_i = r - \frac{a}{2}$ berechnen:

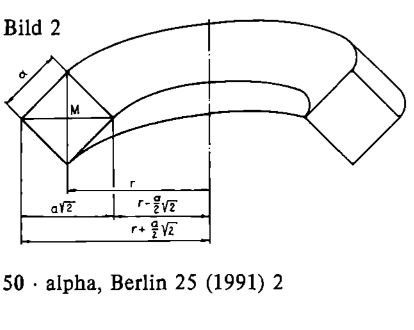
Bild 1



$$V = V_a - V_i = \pi r_a^2 a - \pi r_i^2 a = \pi a(r_a^2 - r_i^2)$$
$$= \pi a\left(\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{a}{2}\right)^2\right)$$
$$V = 2\pi ra^2 = 720\pi \text{ cm}^3 \approx 2\,262 \text{ cm}^3.$$

Lassen wir nun dasselbe Quadrat um eine Achse rotieren, die ebenfalls mit dem Quadrat in einer Ebene liegt und von dessen Mittelpunkt den Abstand $r = 10$ cm hat, aber parallel zu einer *Diagonalen* des Quadrats verläuft (Bild 2), so ist für den entstehenden Rotationskörper die Volumenberechnung nicht mehr ganz so einfach. Man kann dazu Summen bzw. Differenzen der Volumina geeigneter Kegel verwenden.

Bild 2



▲2▲ Berechne das Volumen des im Bild 2 skizzierten Körpers!

Erstaunt stellen wir fest, daß dieser Körper ebenfalls das Volumen
$V = 2\pi ra^2 = 720\pi \text{ cm}^3$ hat, obwohl er zu dem Körper aus Aufgabe 1 offensichtlich nicht kongruent ist.

Sehen wir uns die Formel $V = 2\pi ra^2$ genauer an, so bemerken wir: Der Flächeninhalt a^2 des rotierenden Quadrats wird mit dem Faktor $2\pi r$ multipliziert. $2\pi r$ ist aber der Umfang des Kreises, den der Mittelpunkt M des Quadrates bei der jeweiligen Rotation beschreibt.

Um dem sich andeutenden Zusammenhang noch mehr auf die Spur zu kommen, lösen wir die folgende Aufgabe:

▲3▲ Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 1{,}5$ dm und $b = 3{,}6$ dm dreht sich um seine Hypotenuse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers!

Lösung:

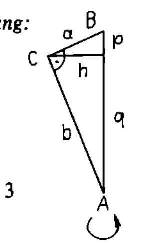


Bild 3

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} h^2 p + \frac{\pi}{3} h^2 q$$
$$= \frac{\pi}{3} h^2 (p + q) = \frac{1}{3}\pi h^2 c \qquad (*)$$

(Rechne selbst weiter! Verwende Höhen- und Kathetensatz!)

Für unsere Zwecke untersuchen wir den letzten Term in (*) und schreiben
$V = \frac{1}{3}\pi h^2 c = \frac{ch}{2} \cdot 2\pi \frac{h}{3}$.

Das Volumen V ergibt sich also als Produkt aus dem Flächeninhalt $\frac{ch}{2}$ des rotierenden Dreiecks und dem Umfang $2\pi \frac{h}{3}$ eines Kreises mit dem Radius $\frac{h}{3}$.

Gibt es in unserem Dreieck evtl. einen besonderen Punkt, der von der Hypotenuse den Abstand $\frac{h}{3}$ hat? Wir erinnern uns, daß der *Schwerpunkt* (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2 teilt, wobei die kürzere Teilstrecke jeweils zur entsprechenden Seite hin liegt. Bild 4 zeigt, daß eine Parallele zur Seite c durch den Schwerpunkt S die Höhe h_c ebenfalls im Verhältnis 1:2 teilt. Der Abstand des Punktes S zur Seite c beträgt demnach $\frac{1}{3} h_c$.

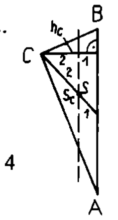


Bild 4

Bis zur Gleichung (*) wurde von der Rechtwinkligkeit des Dreiecks kein Gebrauch gemacht, so daß wir allgemein formulieren können:

Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation eines Dreiecks um eine seiner Seiten entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt dieses Dreiecks und dem Umfang des Kreises, auf dem sich der Schwerpunkt des Dreiecks bei der Rotation bewegt.

Spätestens jetzt wird es Zeit, in einem Nachschlagewerk (z. B. Kleine Enzyklopädie Mathematik, BI Leipzig) nachzusehen, ob es auch für das Volumen eines beliebigen Rotationskörpers einen entsprechenden Satz gibt. Wir finden unter dem Stichwort „Rotationskörper“ die Guldinsche Regel für die Volumenberechnung: *Rotiert ein ebenes Flächenstück A um eine in der gleichen Ebene liegende Gerade g, die höchstens Randpunkte mit A gemeinsam hat, so ist das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers größengleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt von A und der Länge des Weges des Schwerpunktes von A bei einer Umdrehung.*

Damit haben wir eine Regel gefunden, die Berechnungen an Rotationskörpern erleichtert. Sie wurde nach dem Jesuit und Lehrer Paul *Guldin* (1577–1643) benannt, der sie 1635 in einem seiner Werke erläuterte. Die Regel selbst wurde aber bereits von dem griechischen Mathematiker *Pappos* von Alexandria (3. Jh. u. Z.) ohne Beweis mitgeteilt.

Auch wir können den Beweis hier nicht führen, da dies Mittel der Integralrechnung erfordern würde. Wir wollen im folgenden noch etwas mit der *Guldin*schen Regel arbeiten. Zuvor sei noch bemerkt, daß der mathematische Begriff „Schwerpunkt einer geometrischen Fläche“ dem physikalischen Begriff „Schwerpunkt eines Körpers“ entspricht, wenn man sich die Fläche durch einen realen Körper mit überall gleicher Dicke und Dichte (z. B. Blechstück) ersetzt denkt.

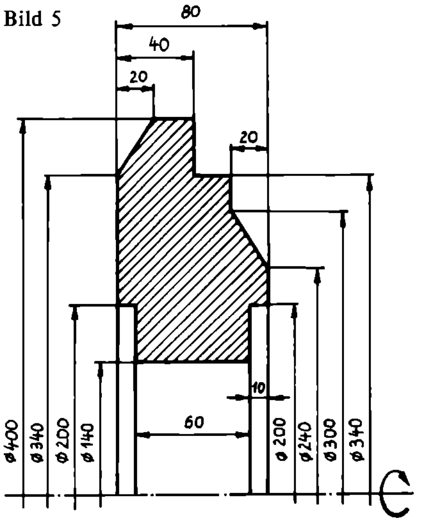
▲4▲ Ein (nicht gleichschenkliges) rechtwinkliges Dreieck rotiert a) um seine kürzere und b) um seine längere Kathete. Vergleiche die Volumina der jeweils entstehenden Rotationskörper!

▲5▲ Stelle eine Formel für die Berechnung des Volumens eines Torus auf! (Ein Torus ist ein ringförmiger Körper, der durch die Rotation einer Kreisfläche K um eine außerhalb von K verlaufende Achse, die in der Ebene von K liegt, entsteht.)

▲6▲ Bestimme die Lage des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche!
(Hinweis: Bei dieser Aufgabe muß man vom bekannten Volumen des Rotationskörpers auf den Abstand des Schwerpunktes der rotierenden Fläche von der Rotationsachse schließen.)

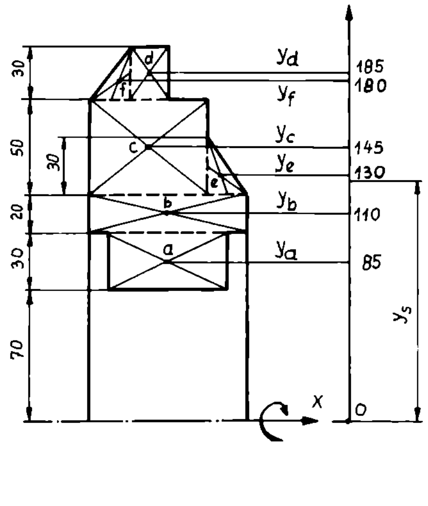
▲7▲ Berechne das Volumen des Rotationskörpers, von dem im Bild 5 die rotierende Fläche und die Rotationsachse dargestellt sind (alle Maße in mm)!

Bild 5



Lösungsüberlegung: Um diese Aufgabe mit Hilfe der *Guldin*schen Regel zu lösen, benötigen wir den Flächeninhalt der rotierenden Fläche sowie den Abstand ihres Schwerpunktes von der Rotationsachse. Der Flächeninhalt läßt sich relativ leicht berechnen, wenn man die Gesamtfläche in geeignete Teilflächen zerlegt. Bild 6 zeigt eine Zerlegung in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke. Diese Teilflächen sind hier mit den Buchstaben a bis f bezeichnet. Außerdem ist ein Koordinatensystem mit der Rotationsachse als x-Achse und darauf senkrecht stehender y-Achse eingezeichnet.

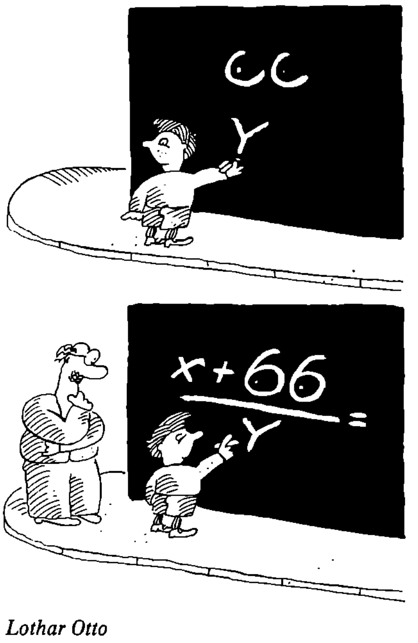
Bild 6



Der Abstand y_s des Schwerpunktes der rotierenden Fläche von der Rotationsachse läßt sich aus den entsprechenden Abständen der Schwerpunkte der Teilflächen gewinnen, wenn man sich wieder der bereits erwähnten physikalischen Vorstellung (Blechstück mit überall gleicher Dicke und Dichte) bedient. Wir denken uns sowohl die Masse des gesamten Stücks als auch die Massen der Teilstücke in ihren jeweiligen Schwerpunkten konzentriert. Stellen wir uns dann das gesamte Blechstück parallel zur Erdoberfläche liegend vor, so wirken in den Schwerpunkten jeweils den Massen entsprechende Gewichtskräfte $F_a, F_b, \ldots, F_f$ bzw. F_{ges}, die rechtwinklig an einem einseitigen Hebel mit Drehpunkt auf der Rotationsachse angreifen. (Die Abszissen der Schwerpunkte sind für unser Problem ohne Bedeutung.) Die Längen der entsprechenden Kraftarme sind $y_a, y_b, \ldots, y_f$ bzw. y_s.
Nach dem Hebelgesetz ist dann
$F_a \cdot F_b \cdot y_b + \ldots + F_f \cdot y_f = F_{ges} \cdot y_s$.
Da die auftretenden Kräfte proportional zu den jeweiligen Massen und damit auch zu den jeweiligen Flächeninhalten sind, können wir auch schreiben
$A_a \cdot y_a + A_b \cdot y_b + \ldots + A_f \cdot y_f = A_{ges} \cdot y_s$.
Daraus ist y_s schnell berechnet, und der Anwendung der *Guldin*schen Regel steht nichts mehr im Wege.

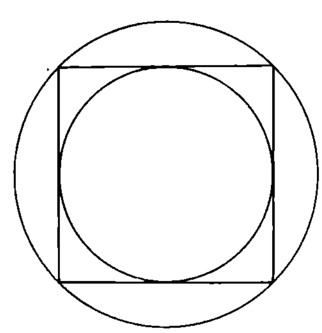
▲8▲ Beim Nachschlagen seid ihr sicher auch auf die Guldinsche Regel für die Flächenberechnung gestoßen. Berechnet mit Hilfe dieser Regel die Oberflächeninhalte der Körper aus den Aufgaben 1, 2, 3 und 5, und vergleicht – wo dies möglich ist – mit den auf „herkömmliche" Art gewonnen Ergebnissen!

C. P. Helmholz/A. Körner



Lothar Otto

▲1▲ Un objet d'art
Un objet d'art est constitué d'une sphère en verre. A l'intérieur se trouve un cube dont les 8 sommets touchent exactement l'extérieur de la sphère. A l'intérieur du cube se trouve une sphère de couleur qui effleure chacune des 6 faces extérieures du cube. Quel est le rapport du volume de la grande sphère a celui de la petite?



aus: Tangente, Paris

▲2▲ Seems difficult but is quite easy
Simplify the following fraction and give its value as one number in the numerator and one in the denominator:

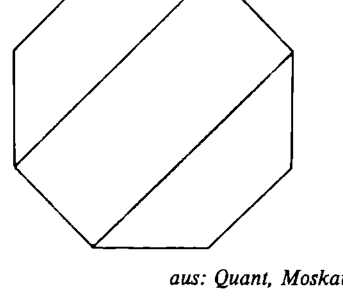
$$\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 12 + \ldots + 7\cdot 14\cdot 28}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + 3\cdot 9\cdot 27 + \ldots + 7\cdot 21\cdot 63}$$

aus: Fun with mathematics, Toronto

Maths is like Ophelia in Hamlet – charming and a bit mad.

John H. C. Whitehead (1904–1960)

▲3▲ В правильном восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (см. рисунок). Докажите, что площадь получившегося прямоугольника вдвое меньше площади восьмиугольника.



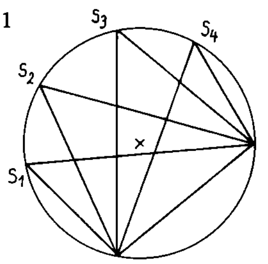
aus: Quant, Moskau

Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß – na und?

Was läßt sich mit diesem Satz aus der Lehre von den Winkeln am Kreis anfangen? Nun, die Kenntnis des Peripheriewinkelsatzes kann aus ganz unterschiedlichen Gründen nützlich sein, sogar aus recht praktischen.

Fußballtrainer stellen beim Üben des Torschusses ihre Spieler auf einer Kreislinie auf. Für jeden ist dann das Tor – es bildet eine Sehne des Kreises – gleich groß. Jeder der Spieler hat die gleiche Chance.

Bild 1



Ein Tourist möchte von einem Parkweg aus die Vorderseite des Goethe-Gartenhauses fotografieren. Der Bildwinkel seiner Kamera beträgt 54°. Wie könnte er auf einem Lageplan wohl die Stelle(n) ermitteln, von wo aus er die gesamte Vorderfront fotografieren kann, ohne die Grünanlagen zu betreten? Wie muß er seinen Standort verändern, wenn er ein Objektiv mit dem Bildwinkel 47° benutzt?

Bild 2

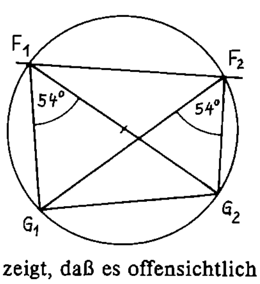


Bild 2 zeigt, daß es offensichtlich zwei solcher Stellen auf dem Parkweg gibt, von denen aus die Gebäudefront unter einem Bildwinkel von 54° erscheint. Wird das Objektiv mit dem Bildwinkel von 47° benutzt, dann muß ein anderer Standort auf dem Weg gefunden werden, einer, der auf einem Kreis mit größerem Radius liegt.

Wie könnte man aber die Mittelpunkte solcher Kreise finden, von deren Punkten aus man eine Sehne gegebener Länge unter einem gegebenen Winkel sieht? Beim Lösen dieser Konstruktionsaufgabe wird uns bewußt, daß hierzu die Kenntnis weiterer Sätze über Winkel am Kreis notwendig ist.

Am bekanntesten sind Konstruktionen, die sich auf den Zentri-Peripheriewinkelsatz stützen oder auch auf den Satz über Sehnentangentenwinkel. Der Winkel zwischen der Sehne und der Tangente an den Kreis in einem Endpunkt der Sehne ist nämlich ebenso groß wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne. Nun könnte man die Konstruktion der für unsere Aufgaben nötigen Kreise ausführen. Probiert es!

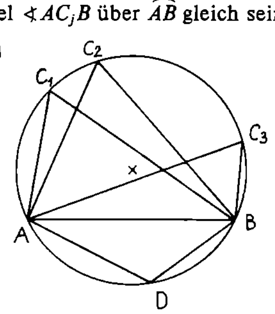
Der Peripheriewinkelsatz hat nicht nur für die angeführten praktischen Fragen eine Bedeutung. Er ist auch ein wichtiges Mittel zum Beweisen weiterer geometrischer Sätze.

Nehmen wir einmal an, wir hätten diesen Satz abgeleitet aus dem Satz über die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck.

Er sagt, daß diese Summe 180° beträgt.

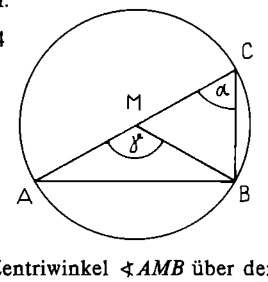
Bei festem Winkel $\sphericalangle ADB$ müssen alle Winkel $\sphericalangle AC_jB$ über $\overset{\frown}{AB}$ gleich sein.

Bild 3



Wenn nun zwischen der Größe des Zentriwinkels zum Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und einem Peripheriewinkel über demselben Bogen ein Zusammenhang entdeckt werden soll, so kann man sich zunächst auf einen einfachen Spezialfall beschränken. Es könnte z. B. M auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegen.

Bild 4



Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ ist als Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck ΔMBC ebenso groß wie die Summe der beiden nichtanliegenden gleichgroßen Basiswinkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle MBC$. Da wir andererseits wissen, daß alle Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$ gleich groß sind, gilt für diese Winkel auch, daß sie alle halb so groß sind wie der Zentriwinkel über diesem Bogen.

Es könnte aber auch sein, daß man zunächst den Zusammenhang von Zentri- und Peripheriewinkel entdecken möchte. Dann genügen die Beweisüberlegungen zum Bild 4 nicht mehr, denn mit ihnen wäre die Gültigkeit der Aussage nur für einen Spezialfall bewiesen.

Man muß entsprechende Überlegungen für die beiden anderen möglichen Fälle der Lage des Kreismittelpunktes anstellen, wie es die Bilder 5 und 6 zeigen.

Bild 5

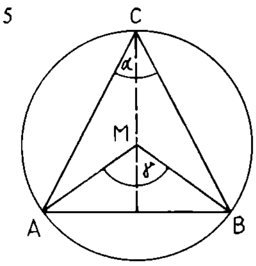
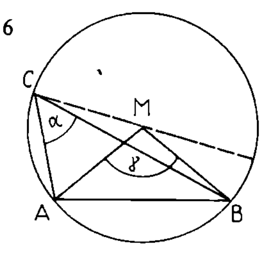


Bild 6



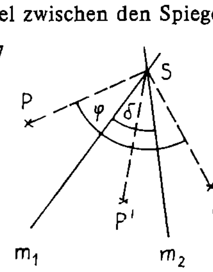
Versucht selbst zu beweisen, daß auch jetzt gilt $\gamma = 2\alpha$!

Da die Lage des Scheitelpunktes des Peripheriewinkels offensichtlich ohne Einfluß auf seine Beziehung zum Zentriwinkel ist, kann man nun auch sagen: Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich groß.

Sehr einfach ist der Zusammenhang zwischen Zentri- und Peripheriewinkel zu entdecken, wenn man dabei geometrische Abbildungen verwendet, speziell Spiegelungen und Drehungen.

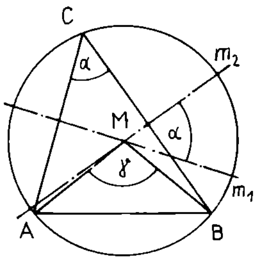
Wer die Eigenschaften der Spiegelung an einer Geraden noch gut kennt, der wird auch leicht erkennen, daß man die Nacheinanderausführung von zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden durch eine Drehung um den Schnittpunkt dieser Geraden ersetzen kann. Dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der Winkel zwischen den Spiegelachsen.

Bild 7



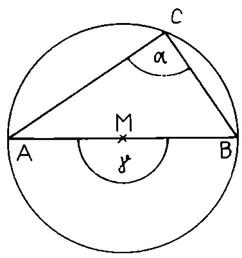
Diesen ganz einfachen Zusammenhang zwischen zwei Winkeln kann man in der Figur wiederfinden, die uns den Zusammenhang von Zentri- und Peripheriewinkel zeigt.

Bild 8



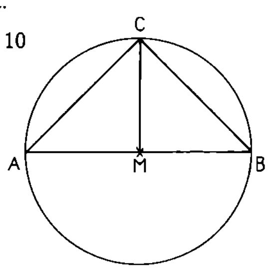
Die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ bildet A auf C ab; die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ bildet C auf B ab. Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten m_1 und m_2 ist M. Durch die Drehung um M mit dem Drehwinkel
$\gamma = \sphericalangle AMB = 2\sphericalangle(m_1, m_2) = 2\alpha$
wird also A auf B abgebildet.
Was hat das aber mit dem Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$ zu tun? Die entsprechenden Schenkel von $\sphericalangle ACB$ und von $\sphericalangle(m_1, m_2)$ stehen aufeinander senkrecht, die Winkel sind dann gleich groß. (Wer könnte diesen Satz beweisen?)
Es ist also
$\gamma = 2\sphericalangle(m_1, m_2) = 2\sphericalangle ACB = 2\alpha.$
Sehr nützlich ist der Peripheriewinkelsatz auch, wenn man einen anderen wichtigen Satz beweisen will, nämlich den Thalessatz.
Kennt man bereits den Zentri-Peripheriewinkelsatz, dann ist der Thalessatz nur ein spezieller Fall von ihm: Der Zentriwinkel ist 180° groß und der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist dann ein Rechter.

Bild 9



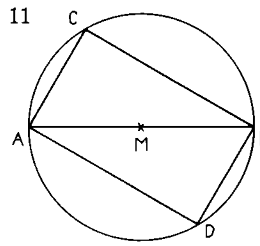
Kennt man jedoch nur den Peripheriewinkelsatz, dann genügt es, zunächst einen Spezialfall zu betrachten, so wie es Bild 10 zeigt.

Bild 10



Es sei $MC \perp AB$. Dann gilt:
$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ und
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 2 \cdot 45° = 90°.$
Da nun alle Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ gleich groß sind, gilt für sie, daß in diesem Fall jeder von ihnen ein rechter Winkel ist.
Man könnte auch folgendermaßen überlegen: Durch eine beliebige Sehne AB erhält man stets zwei verschiedene Kreisbögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{BA}$ Die entsprechenden Peripheriewinkel sind spitze Winkel bzw. stumpfe Winkel. Bei einem Durchmesser AB sind diese Kreisbögen jedoch kongruent, die jeweiligen Peripheriewinkel also gleich groß, also weder stumpfe noch spitze Winkel sondern rechte Winkel.
Wen diese Argumentation nicht überzeugt, der kann auch noch den Satz über die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck heranziehen.

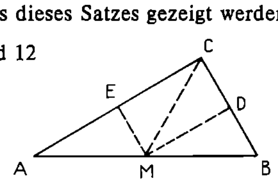
Bild 11



$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (Peripheriewinkelsatz)
$\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180°$ (Sehnenviereck)
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$

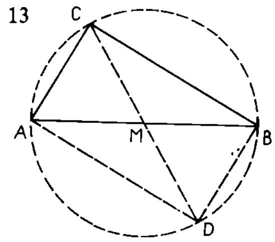
Nicht nur der Thalessatz hat in der Geometrie Bedeutung, auch seine Umkehrung wird häufig benötigt. Sie besagt, daß der Scheitel des rechten Winkels in allen rechtwinkligen Dreiecken, die man zu einer gegebenen Hypotenuse zeichnen kann, immer auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Hypotenuse durch ihre Endpunkte liegt.
Dieser Satz könnte uns auch in der folgenden Form gegenübertreten: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse halb so groß wie diese. Wer kann nachweisen, daß beide Sätze das gleiche aussagen?
Es sollen drei Möglichkeiten für den Beweis dieses Satzes gezeigt werden.

Bild 12



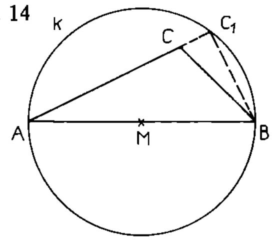
Vorauss.: $\sphericalangle ACB = 90°$
$\overline{AM} = \overline{MB}$
Beh. $\overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MB}$
Die Parallelen zu den Katheten $\overline{BC}$ *bzw.* $\overline{AC}$ durch M schneiden die Katheten in den Punkten D und E. Die Dreiecke $\triangle AME$ und $\triangle MBD$ sind kongruent wegen wsw. Es ist also $\overline{ME} = \overline{BD}$. Außerdem ist $\overline{ME} = \overline{DC}$, denn das Viereck $MDCE$ ist ein Rechteck. Es ist also $\overline{BD} = \overline{DC}$, d. h. $\overline{MD}$ ist Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck $\triangle MBC$. Demnach ist $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MA}$, d. h. C liegt auf dem Kreis um M durch A und B.
Den etwas umständlichen Nachweis, daß D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, hätte man mit dem Hinweis umgehen können, daß die Parallele zu $\overline{AC}$ durch M das Teilverhältnis von $\overline{AB}$ auf $\overline{BC}$ überträgt. Der hier angegebenen Beweis jedoch vermeidet bewußt diesen Begriff.
Ein anderer Beweis der Umkehrung des Thalessatzes stützt sich auf die für solche Beweisaufgaben nützliche Empfehlung: Versuche die Figur so zu ergänzen, daß eine dir bekanntere entsteht!

Bild 13

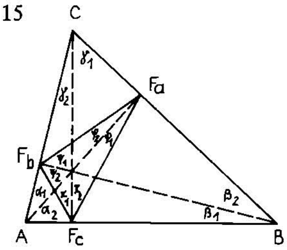


Vorauss.: $\sphericalangle ACB = 90°$
$\overline{AM} = \overline{MB}$
Beh. $\overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MB}$
Man verlängert $\overline{CM}$ über M hinaus um $\overline{CM}$ und erhält D. Das so entstandene Viereck $ADBC$ besitzt nach Konstruktion zwei einander halbierende Diagonalen und einen rechten Winkel bei C. Es ist also ein Rechteck. (Wie könnte man das beweisen?) Im Rechteck sind die Diagonalen jedoch gleich lang. Der Scheitel des rechten Winkels liegt also auf dem Umkreis dieses Rechtecks.
Die Gültigkeit der Umkehrung des Thalessatzes kann man auch leicht durch einen indirekten Beweis zeigen. Man nimmt an, daß z. B. der Scheitelpunkt C des rechten Winkels über der Hypotenuse $\overline{AB}$ nicht auf dem Kreis k durch A und B liegt, sondern innerhalb dieses Kreises.

Bild 14



Der Schnittpunkt von AC mit k sei C_1. Der Peripheriewinkel $\sphericalangle AC_1B$ über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist nach dem Thalessatz ein Rechter.
Dies führt jedoch zu einem Widerspruch zum Winkelsummensatz im Dreieck $\triangle CC_1B$, es hätte nach unserer Annahme zwei Innenwinkel von 90°. Unser Annahme über die Lage von C war also falsch.
Die gleiche Situation tritt ein, wenn angenommen wird, daß C außerhalb von k liegt. (Zeigt das einmal!)
Es erweist sich, daß nur die Annahme: „C liegt auf k" nicht zu Widersprüchen mit bekannten Sätzen führt. Die Umkehrung des Thalessatzes ist also eine wahre Aussage.
Dieser Satz und der Peripheriewinkelsatz sind z. B. beim Beweis einer interessanten Eigenschaft von Dreieckstransversalen hilfreich, für welche es allerdings auch viele andere Beweismöglichkeiten gibt. Diese Eigenschaft besagt, daß die Höhen eines Dreiecks zugleich die Winkelhalbierenden des aus den Fußpunkten der Höhen gebildeten Dreiecks sind.
Im Dreieck $\triangle ABC$ seien $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ die Innenwinkel und F_a, F_b, F_c die Höhenfußpunkte.
Die Innenwinkel des aus ihnen gebildeten Dreiecks seien
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\chi = \chi_1 + \chi_2$

Bild 15


Zu beweisen ist, daß gilt:
$\varphi_1 = \varphi_2, \ \psi_1 = \psi_2, \ \chi_1 = \chi_2$
Die Seiten des Dreiecks ΔABC sind Durchmesser von Thaleskreisen k_1, k_2, k_3 durch A, B, F_a, F_b bzw. B, C, F_b, F_c bzw. C, A, F_c, F_a. Und nun kann man eine ganze Anzahl von Peripheriewinkeln über jeweils dem gleichen Bogen erkennen. Es ist nämlich

$$\beta_1 = \varphi_2, \ \alpha_2 = \psi_1, \ \beta_2 = \chi_1,$$
$$\gamma_1 = \psi_2, \ \gamma_2 = \varphi_1, \ \alpha_1 = \chi_2 \qquad (1)$$

außderdem ist

$$\alpha_1 = \beta_2, \ \beta_1 = \gamma_2, \ \gamma_1 = \alpha_2. \qquad (2)$$

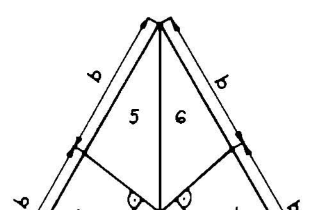
Findet selbst heraus, für welche Bögen welcher Kreise das gilt!
Aus (1) und (2) folgt dann die angegebenen Eigenschaft unmittelbar. Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß – Gut, daß wir diesen Satz kennen!

W. Jungk

Quadratur des gleichseitigen Dreiecks

Gemäß der Abbildung und der angegebenen Formeln ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = 10$ cm mit den eingezeichneten Strecken auf Papier zu zeichnen. (Für $s = 10$ cm ergibt sich mit Taschenrechner

$$c = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right) \approx 2{,}1911\ldots \text{ cm.})$$



$$a = \frac{s}{4}$$
$$b = \frac{s}{2}$$
$$c = \frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}\right)$$

Anschließend ist dieses Dreieck auszuschneiden und längs der eingezeichneten Linien in 6 Teilflächen zu zerschneiden. Die 6 Teilflächen sind dann zu einer Quadratfläche aneinander zulegen.

W. Träger, Döbeln

Lösung auf Seite 71!

A. A. Fraenkel – der Lobatschewski der Mengenlehre

Vor 100 Jahren, am 17.2.1891, wurde Abraham Adolf Fraenkel in einer strenggläubigen jüdischen Familie in München geboren. Er wirkte als Dozent bzw. Professor der Mathematik an den Universitäten Marburg, Kiel und (ab 1933) Jerusalem. Dort starb er am 15.10.1965. Sein Name ist für immer mit der Entwicklung der Mengenlehre verbunden, zu der er viele bedeutende Beiträge leistete. Das erste, 1908 von Ernst Zermelo (1871–1953) vorgeschlagene Axiomensystem der Mengenlehre wurde von Fraenkel wesentlich verbessert und trägt seitdem die Bezeichnung Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem. Wir wollen hier anläßlich des 100. Geburtstages von Fraenkel einer seiner Leistungen gedenken, die im Strom folgender, ähnlicher Resultate überflutet wurde und daher heute nicht mehr so allgemein bekannt ist. Unsere Geschichte beginnt aber rund 2200 Jahre früher im antiken Alexandria.

Abraham A. Fraenkel

Seitdem Euklid um 300 v. u. Z. in seinem Werk „Elemente" große Teile der damals bekannten Geometrie deduktiv aufgebaut, d. h. aus gewissen Grundannahmen (Axiomen und Postulaten) durch logische Schlußfolgerungen abgeleitet hatte, galt diese Art, „more geometrico" (d. h. auf geometrische Weise) Mathematik und vielleicht sogar Mechanik und andere Wissenschaften zu betreiben, als methodisch vorbildlich. Freilich konnte dieses Vorbild auf Grund vieler begrifflicher Schwierigkeiten bis ins 19. Jh. hinein nicht einmal in anderen mathematischen Disziplinen (wie z. B. Algebra, Zahlentheorie, Differentialrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung) geschweige denn in den Naturwissenschaften erreicht werden. Genau genommen war es aus heutiger Sicht auch um die angebliche logische Strenge der euklidischen Geometrie nicht allzu gut bestellt.

Was es eigentlich bedeutet, aus gegebenen Voraussetzungen eine Behauptung durch logische Schlußfolgerung zu beweisen (statt sich z. B. durch Erfahrung und Experimente von ihrer Gültigkeit zu überzeugen, hätte noch um 1800 niemand zu erklären vermocht, und das fiel nur darum nicht so unangenehm auf, weil in jedem konkreten Fall eines mathematischen Beweises kein Zweifel an seiner Stichhaltigkeit aufkam. Es ist übrigens eine ganz allgemeine Erscheinung in den Wissenschaften, daß man Dinge tut (z. B. Beweisen, Konstruieren, Widerlegen), ohne sich darüber den Kopf zu zerbrechen, solange sie sich tun lassen. Erst wenn man vor der Aufgabe steht nachzuweisen, daß etwas prinzipiell unmöglich ist, erfordert dies ein tiefes Eindringen in das Wesen dessen, was da getan werden soll. So war es auch mit den mathematischen Beweisen: Die Frage, was ein mathematischer Beweis ist, entstand im Umfeld der sich über mehr als 2000 Jahre erstreckenden Bemühungen, ein gewisses der von Euklid vorausgesetzten geometrischen Postulate (das Parallelenpostulat) als logische Folgerung aus den übrigen nachzuweisen. Heute wissen wir, daß dieses Postulat nicht aus den anderen folgt. Um dies einzusehen, muß man jedoch einen wahrhaft umwälzenden Schritt gehen. Man muß die Begriffe der Geometrie von ihrer allgemein anerkannten scheinbar feststehenden Bedeutung abtrennen und ihnen eine solche abweichende Deutung unterschieben, bei der die übrigen Axiome und Postulate Euklids ebenfalls alle erfüllt werden, das Parallelenpostulat jedoch nicht. Dies wurde in den Dreißigerjahren des 19. Jh. durch den Russen N. I. Lobatschewski (1792–1856) und den Ungarn J. von Bolyai eingeleitet und erst um 1870 durch E. Beltrami (1835–1900) und F. Klein (1849–1925) vollendet. Als Verallgemeinerung ergibt sich: Die Aussage A folgt nicht aus den Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn es eine Deutung der Sprache gibt, in der $A, A_1, A_2, \ldots$ formuliert sind, bei der $A_1, A_2, \ldots$ erfüllt werden (wahr sind), A jedoch nicht. A heißt in diesem Fall unabhängig von $A_1, A_2, \ldots$ (was gleichbedeutend mit unbeweisbar aus $A_1, A_2, \ldots$ ist). Die betreffende Deutung der Sprache (d. h. der in ihr vorkommenden Begriffe) nennt man ein Modell für die Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn alle diese Aussagen bei dieser Deutung erfüllt werden. Durch bloße Umformulierung aus der Definition des „Nichtfolgens“ erhalten wir: Die Aussage A folgt aus den Aussagen $A_1, A_2, \ldots$, wenn jedes Modell für $A_1, A_2, \ldots$ auch ein Modell für A ist. Der Preis, den die Mathematiker für diese kostbare Erkenntnis zahlen mußten, war hoch: Man mußte den naiven, quasi naturwissenschaftlichen Standpunkt gegenüber den mathematischen Objektiven aufgeben, der – vereinfacht gesagt – darin besteht, daß alle Begriffe eine einfürallemal gegebene „Standardbedeutung“ besitzen. Im Laufe der rund 50 Jahre zwischen 1870 und 1920 lernte die Mathematik, sich selbst auf neue Weise zu verstehen, und sie bekam zusätzliche neue Inhalte und Aufgaben, indem eine große Vielfalt von Modellen für Begriffssysteme entdeckt und erforscht wurde. Derartige Modelle können in der Regel nicht aus der materiellen Sphäre bezogen werden, weil sie meist aus unendlich vielen Objekten bestehen müssen, um den mathematischen Axiomen zu genügen. Man denke z.B. an die Zahlbereiche!

Gerade zur rechten Zeit entstand also um 1870 die Mengenlehre.

In Gestalt der Mengen, Mengen von Mengen, Mengen von Mengen von Mengen, ... lieferte sie das „Baumaterial“ für unübersehbar viele Modelle mathematischer Theorien und damit Pseudoantworten auf Fragen wie: Als was kann man sich natürliche, rationale, reelle Zahlen vorstellen? Wo gibt es einen Bereich von Dingen, der den Axiomen der Geometrie in aller Strenge (unabhängig von den schwer erforschbaren Eigenschaften des „wahren physikalischen Raumes“) genügt? Pseudoantworten, weil sie die Existenz von Mengen in einer der Existenz materieller Objekte vergleichbaren Weise voraussetzen, während doch zugleich diese Mengen, sofern sie unendlich sind, nicht als materielle Objekte vorstellbar sind. Tatsächlich beruhten die großen Erfolge der neuen Mathematik zumindest psychologisch darauf, daß die Mathematiker nun gegenüber den Mengen einen analogen naiven Standpunkt einnahmen wie vorher gegenüber den Begriffen der Geometrie. Diese von Georg Cantor (1845–1918), dem Begründer der Mengenlehre, vorgedachte „Philosophie“, der Glaube an die Existenz eines immateriellen „Reiches aller Mengen“, ist eine moderne Form des auf den antiken Philosophen Platon (427–348 v. u. Z.) zurückgehenden objektiven Idealismus. Daß dieser Standpunkt in der Mengenlehre unhaltbar ist, ergab sich eigentlich bereits aus einem 1915 von L. Löwenheim (1878–1957) und 1920 von T. Skolem (1887–1963) erhaltenen allgemeinen Resultat, wonach jedes Axiomensystem, sofern es überhaupt ein unendliches Modell besitzt, auch ein solches besitzt, das nur aus abzählbar vielen Objekten besteht, d.h. daß man diese Objekte durchnumerieren bzw. den natürlichen Zahlen eineindeutig zuordnen kann, während andererseits ein bekannter Satz der Mengenlehre besagt, daß eine solche Zuordnung für die Menge aller Teilmengen von natürlichen Zahlen nicht existiert. Gegenüber diesem „Skolemschen Paradoxon“ konnten sich die Anhänger Cantors jedoch noch auf den Standpunkt stellen, daß sich das immaterielle Reich der Mengen nicht vollständig durch ein Axiomensystem beschreiben läßt und daher der Satz von Löwenheim und Skolem hier nicht anwendbar sei. Da fand Fraenkel 1922, daß man durch eine in ganz anschaulicher Weise beschreibbare Ausdünnung des vorgestellten Reiches aller Mengen, d. h. durch Weglassen vieler dieser Mengen nach einem bestimmten Gesetz, ein anderes Mengen-Universum erhalten kann, in dem alle Axiome des Zermelo-Fraenkel'schen Axiomensystems mit einer Ausnahme (dem sogenannten Auswahlaxiom) gültig bleiben. Das bedeutet, das sich dieses Auswahlaxiom zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre analog verhält wie das Parallelenpostulat zu den übrigen Axiomen der Geometrie: Es folgt nicht aus ihnen, ist nicht aus ihnen beweisbar. Es gibt also auch ebenso wenig ein ausgezeichnetes „Standardmodell“ der Mengenlehre, wie es kein ausgezeichnetes Modell der Geometrie gibt.

In den folgenden Jahrzehnten wurden viele Methoden zur „Konstruktion“ von Nichtstandardmodellen der Mengenlehre aus vorausgesetzten Modellen entwickelt, und mittels solcher Modelle wurde eine beeindruckende Fülle von Resultaten über die logischen Beziehungen zwischen wichtigen mengentheoretischen Aussagen erzielt. (In analoger Weise verfügen wir heute über ein ungeheures Arsenal von Modellen für geometrische Aussagen, mit denen wir bis in alle Feinheiten klären können, welche Voraussetzungen welche Folgerungen nach sich ziehen bzw. welche Sätze von welchen anderen Sätzen unabhängig sind.) Zugleich ist der Seelenfrieden zumindest derjenigen Mathematiker, die bei ihrer Arbeit unendliche Mengen von hoher Mächtigkeit wesentlich benutzen, erheblich gestört, denn es gibt keinen allgemein anerkannten Standardbereich von Objekten, auf die sich ihre Resultate beziehen. Kann man also einerseits mit einem gewissen Recht sagen: „Wir Mathematiker wissen heute nicht, womit wir uns beschäftigen,“ so wissen wir andererseits genauer als je zuvor, was wir tun (d.h. wir haben das Wesen des deduktiven Schließens vollständig begriffen), und es gibt wohl keinen Mathematiker, der sich in die „paradiesischen“ Zeiten vor Lobatschewski und vor Fraenkel zurückwünscht.

P. Schreiber

Alphons logische Abenteuer (5)

„Es gibt nichts“, schimpfte Alphons Schwester, „nein wirklich, es gibt einfach nicht, was ich suche.“ Alphons wollte wissen, weshalb sie sich denn so aufrege. „Es geht um meine gewünschten Zeichenstifte“, antwortete sie. „Seit drei Wochen rennen ich und Mutti durch die Geschäfte, die Zeichenartikel führenden Geschäfte unseres Ortes“ korrigierte sie sich, um der Verbesserung, zu der Alphons schon ansetzte, zuvorzukommen, „aber es ist nichts zu machen, es gibt sie nicht.“ Weil es diese Zeichenstifte nicht zu kaufen gibt, könne man aber nicht sagen, es gäbe überhaupt nichts zu kaufen, versuchte Alphons seine Schwester zu trösten. Dieser feine Unterschied, wenn es überhaupt einer ist, sei ihr egal, worauf Alphons zu bedenken gab, daß wenn es gar nichts zu kaufen gäbe, sie sich das Herumlaufen nach käuflichen Zeichenstiften ersparen könne. Bei so einem überschlauen Bruder könne man sich weder herzlich freuen noch richtig aufregen, murrte seine Schwester.

Alphons Erklärungsbereitschaft war durch den nicht akzeptierten Unterschied angestachelt worden. Er wolle sie ja nicht zusätzlich ärgern, aber es sei nun einmal so, daß sie zwei verschiedene Aussagen gemacht habe. „Es gibt nichts zu kaufen“, was sie wohl mit „es gibt nichts“ meine, besage mit nur anderen Worten, daß alles, was es gibt, nicht käuflich ist. Er wolle allerdings nicht darauf eingehen, wie seine Schwester „käuflich“ verstehe, z. B. als nicht durch sie oder als Eigenschaft dessen, was es gibt. Hingegen meine mit nur anderen Worten „es gibt nicht zu kaufen, was ich suche“ dasselbe wie die Aussage: „Alles, was ich suche, ist nicht käuflich“. Da seine Schwester, die mit dem „ich“ gemeint sei, sicherlich nicht alles, was es gibt, auch suche, lasse sie mit dieser Aussage mehr an Käuflichem zu, als mit der ersten Aussage.

Alphons, so recht in Fahrt gekommen, versuchte seiner etwas hilflos dreinschauenden Schwester „mit nur anderen Worten“ das an sich richtig Gesagte deutlicher zu machen, statt sie selber nachdenken zu lassen. Da mischte sich seine Mutter ein: „Alphons, suche, und zwar ein Geschäft, in dem es Butter zu kaufen gibt.

Mit nur anderen Worten, gehe das einkaufen, was ich heute vergaß zu besorgen.“ Alphons bemerkte zwar noch, daß es sich hier nicht um gleichbedeutende Aussagen handle, machte sich aber als Zeichen seiner Friedfertigkeit sofort auf den Weg.

L. Kreiser

Die Sprache ist ein unerbittlicher Richter, und wir können ihrem Urteilsspruch nicht entgehen, wenn wir uns ihrer schlecht bedienen.

Johannes R. Becher

Deutscher Schulschachpokal 1991

„Autoritäten auf den Gebieten der angewandten Mathematik und des Schachs haben errechnet, daß es eine größere Anzahl möglicher Schachstellungen und erst recht dynamisch entwickelter Abfolgen derselben gibt als Atome im ganzen Weltall. Schon nach 12 Halbzügen sind mehr Stellungen möglich, als die mutmaßliche Zahl der Sekunden seit geschätztem Anfang des physischen Universums."

Prof. Dr. Josef Seifert
„Schachphilosophie"

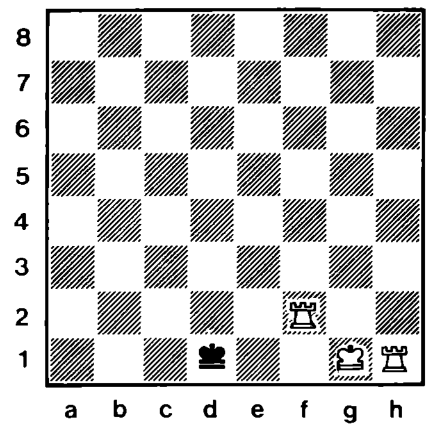
Diese Vielfalt des Schachs zieht immer wieder nicht nur begeisterte Profis, sondern auch Millionen Amateure in ihren Bann. Dem trug in diesem Jahr die deutsche Coca-Cola Organisation Rechnung, als sie sich entschloß, als Sponsor für einen gesamtdeutschen Schulschachpokal in allen 16 Bundesländern aufzutreten. Zur Auftaktveranstaltung dieses Großereignisses waren alle Schulschachreferenten der Länder nach Verden an der Aller (Niedersachsen) eingeladen, wo am 9. März 1991 der erste Landesausscheid stattfand. Hier konnten wir uns persönlich von dem Anklang überzeugen, den das Turnier bei Kindern der ersten bis 13. Klasse fand.
Der Austragungsmodus ist einfach: In jedem Bundesland wird ein für alle Schulen offenes Turnier für Vierermannschaften ausgetragen. Man spielt sieben Runden nach Schweizer System (jeweils gleichstarke Gegner werden gegeneinander gesetzt). Der Sieger qualifiziert sich für das Bundesfinale, welches unter Schirmherrschaft des Bundesrates am 30. November in Berlin stattfinden wird. Dieser wird zwar immer aus den höheren Jahrgängen kommen, doch sollten die Kleinen nicht traurig sein: auch die besten Mannschaften jüngerer Altersklassen erhalten einen Preis. Coca-Cola ließ es sich nicht nehmen, außer Sachpreisen auch attraktive Pokale für jedes Land zu stiften. Der Siegermannschaft des Bundesfinales schließlich winkt eine Reise in die USA.
In Verden wurde hart darum gekämpft. Die Stimmung war super, der Kampfgeist stand dem bei einer Deutschen Meisterschaft der Profis in nichts nach. Im Gegenteil; Remis war ein seltenes Ergebnis. Durch belegte Brötchen und Getränke des Sponsors wurden die unermüdlichen Kämpfer jederzeit wieder fit gemacht, ein neues Computerprogramm sorgte für eine sekundenschnelle Auslosung und den sofortigen Tabellenausdruck nach jeder Runde.
Für den Organisator, Herrn Erich Scholvin, Schulschachreferent der Deutschen Schachjugend, war es ein leichtes Hantieren dank seiner hervorragenden Vorbereitung. Als schließlich auch noch der Kultusminister ankam, der (wie in vielen Landesverbänden) die Schirmherrschaft übernommen hatte, da begann der Kampf härter denn je. Sich unter die über 200 Teilnehmer mischend, erfuhr Herr Professor Wernstedt sicher so manche Neuigkeit.
Nach sieben Stunden stand der Sieger auf dem verdienten Podest: die KGS Stuhr-Brinkus lag mit 13:1 Mannschaftspunkten unangefochten vorn. Ob sie es auch im November schafft?!

Die nächsten Termine sind dicht belegt. Am 27.4. findet die Veranstaltung in Sachsen und in Sachsen-Anhalt statt. Das zweite Bundesland hat dafür einen traditionsbewußten Austragungsort gefunden – das alte Schachdorf Ströbeck lädt ein. Bereits eine Woche später geht es weiter. Brandenburg und Berlin z. B. haben sich zusammen für eine Großveranstaltung in den Festsälen der Trabrennbahn Mariendorf entschieden. Alle anderen Bundesländer folgen bis Oktober nach.
Ich denke, daß diese bemerkenswerte Aktivität, die nicht nur von der Schachjugend, sondern auch noch von einem freigebigen Sponsor und den Kultusministerien bzw. dem Bundesrat unterstützt wird, Anlaß zu weiteren Aktivitäten sein sollte, besonders in den Schulen, die bisher noch keine Schachgruppe haben. Vielleicht werden gerade sie dann im nächsten Jahr erster?!

M. Spindler

Die Rochade als Mattzug

Eine Besonderheit beim Schachspiel ist die Rochade. Nur einmal im Verlauf einer Schachpartie ist es Weiß und Schwarz erlaubt, einen Doppelzug auszuführen: Die Rochade, eine gleichzeitige Bewegung von König und Turm. Bei der Ausführung der Rochade zieht der König in derselben Reihe auf das jeweils übernächste Feld gleicher Farbe. Sodann geht derjenige Turm, zu dem sich der König hinbewegt hat, über den König hinweg auf dasjenige Feld, daß der König soeben überschritten hatte.
Die Rochade ist nur dann durchführbar, wenn
1. der König und der Rochadeturm im Spielverlauf noch nicht gezogen haben,
2. zwischen dem König und dem Rochadeturm keine anderen Figuren stehen,
3. der König vor und nach der Rochade keinem Schachgebot ausgesetzt ist und der Rochadeturm nach Ausführung der Rochade durch keine gegnerische Figur angegriffen wird.
In der Diagrammstellung kann Weiß durch 1. Kg2 und 1. Kh2 auf zwei verschiedene Arten Schwarz in einem Zug mattsetzen.



Die Aufstellung der Schachfiguren ist so zu verändern, daß es für Weiß vier verschiedene Möglichkeiten gibt, Schwarz in einem Zug mattzusetzen. Dabei ist auch die Rochade als eine Lösungsmöglichkeit in Betracht zu ziehen.

H. Rüdiger

Neulich, bei der Vorbereitung des Titelblattes dieses Heftes gerieten wir in arge Schwierigkeiten. Um das mir von Lothar Otto zugedachte „Ferienlächeln" eindrucksvoll auf's Titelblatt bannen zu können, mußte die Vorlage mit einer Breite von 7,8 cm auf eine Breite von 18,5 cm umkopiert werden. Wie jeder sofort nachrechnet, mußte die Zeichnung damit um mehr als das Doppelte vergrößert werden. Zu dumm, daß unser Kopierer nur um maximal 200 % vergrößern kann. Wie wir das Problem gelöst haben? Na, das dürftet Ihr wohl selbst herausbekommen!

Vom Wortwürfel zum Zahlenwürfel

Das nachstehende Bild (Bild 1) zeigt einen „Wortwürfel".

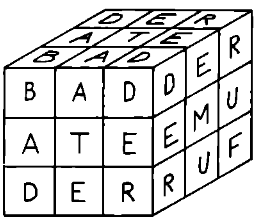


Bild 1
Der $3 \times 3 \times 3$-Wortwürfel

Er besteht aus 27 kleinen Würfeln. Jeder dieser kleinen Würfel trägt auf jeder seiner 6 Seiten den gleichen Buchstaben. Es sind 3 Zerlegungen in einen $3 \times 3 \times 1$-Quader möglich (Bild 2).

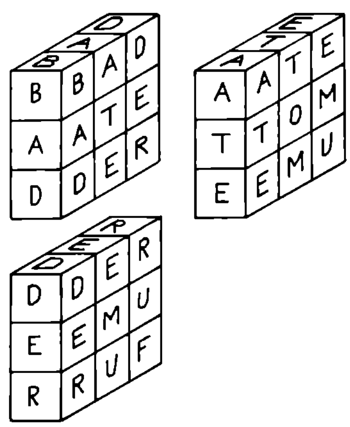


Bild 2
Eine der 3 möglichen Zerlegungen in der $3 \times 3 - 1$-Quader

In jeder dieser Zerlegung kann man 3mal die Worte BAD, TOM und RUF und 6mal die Worte ATE, DER und EMU lesen (in der natürlichen Lesart von links nach rechts bzw. von oben nach unten).
Die in diesem Würfel vorkommenden 10 Buchstaben sind durch die Zahlen, 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen und zwar verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern so, daß die sich ergebenden sechs dreistelligen Zahlen alle dieselbe Quersumme haben. Dabei soll der Buchstabe O in der Mitte des Würfels durch die Zahl Null ersetzt werden.
Es gibt 2 Lösungen! Die sich daraus ergebenden Zahlenwürfel sind halbmagisch, d. h. die Summe der Zahlen von je 3 kleinen Würfeln in Richtung der Würfelkanten ist gleich, nicht die von diagonal angeordneten Würfeln. Es gibt genau 27 derartiger „Dreierquader"! Wie lauten die 6 dreistelligen Zahlen?

Erst selbst lösen! Dann weiterlesen!

Lösung

I. Die magische Summe S und die Ziffer E

Da die Summe der zehn Ziffern gleich 45 ist, gilt die Gleichung:
(1) $A + B + D + E + F + M + O + R + T + U = 45$
Andererseits soll aber auch sein:
(2) $(B + A + D) + (T + O + M) + (R + U + F) = 3S$
Durch Subtraktion (1) – (2) erhalten wir
(3) $E = 45 - 3S$.
Diese Gleichung zeigt, daß E durch 3 teilbar sein muß; das bedeutet aber, daß E nur die Werte 0, oder 3 oder 6 oder 9 haben kann.
Ferner gilt:
(4) $(A + T + E) + (D + E + R) + (E + M + U) = 3S$
Durch Subtraktion (4) – (2) ergibt sich
(5) $3E = B + O + F$
Nun ist die Summe dreier verschiedener Ziffern mindestens gleich $3 (= 0 + 1 + 2)$ und höchstens gleich $24 (= 9 + 8 + 7)$, so daß also die Werte $E = 0$ und 9 nicht möglich sind (ganz abgesehen davon, daß 0 schon vergeben ist). Es sind daher nur die Möglichkeiten $E = 3$, $S = 14$ und $E = 6$, $S = 13$ in Erwägung zu ziehen.

II. Die Ziffern B, O und F

Wir untersuchen zuerst den Fall $E = 6$, $S = 13$. Zunächst ist
(6) $(A + T + E) = (D + E + F) = (E + M + U) = S$.
also hier
(7) $(A + T) = (D + R) = (M + U) = 7$.
Daher kommen für die Klammerausdrücke nur die Zahlen (ohne die 6) (0 + 7) bzw. (2 + 5) bzw. (3 + 4) in Frage. Somit bleiben für B, O und F nur die Werte 1, 8 und 9. Da aber der Buchstabe O gleich 0 sein soll, ist dieser Fall nicht möglich.
Für $E = 3$, $S = 14$ erhalten wir aus (6)
(8) $(A + T) = (D + R) = (M + U) = 11$.
Dies ist aber nur realisierbar (ohne die 3!) durch (2 + 9) bzw. (4 + 7) bzw. (5 + 6). Hier bleiben für B, O, F die Werte 0, 1 und 8. Daraus kann man schließen: Es muß notwendig sein $E = 3$, $S = 14$, und B entweder 1 oder 8 und dann entsprechend F entweder 8 oder 1. (2 Möglichkeiten!)

III. Die Ziffern T, M und A

Da $T + O + M = 14$, also $T + M = 14$ und die Ziffer 8 nach Abschnitt II schon vergeben ist, kommen für diese beiden Buchstaben nur die Ziffern 5 und 9 in Betracht. Wir haben daher im nachfolgenden die folgenden vier Möglichkeiten zu untersuchen:
($A = 11 - T$, nach Gleichung (8)).

Fall a): $B = 1$ $(F = 8)$, $T = 9$ $(M = 5)$, $A = 2$;
Fall b): $B = 1$ $(F = 8)$, $T = 5$ $(M = 9)$, $A = 6$;
Fall c): $B = 8$ $(F = 1)$, $T = 9$ $(M = 5)$, $A = 2$;
Fall d): $B = 8$ $(F = 1)$, $T = 5$ $(M = 9)$, $A = 6$.

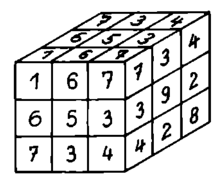
IV. Die Ziffern D, R und U

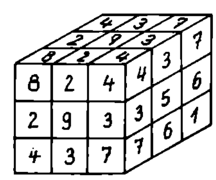
Da $B + A + D = S = 14$, also $D = 14 - A - B$ erhalten wir im
Fall a): $D = 14 - 2 - 1 = 11$;
dies ist aber ausgeschlossen.
Fall b): $D = 14 - 6 - 1 = 7$;
Fall c): $D = 14 - 2 - 8 = 4$;
Fall d): $D = 14 - 6 - 8 = 0$;
Null ist aber schon vergeben.
Daher kann es eine Lösung nur für den Fall b) und c) geben.
Aus $D + E + R = 14$ oder $R = 11 - D$ und $E + M + U = 14$ oder $U = 11 - M$ erhalten wir schließlich für a):
$R = 7$, $U = 2$ bzw. für b) $R = 4$, $U = 6$.
Somit gibt es *zwei Lösungen* unseres Problems:

$BAD = 167$; $ATE = 653$; $DER = 734$; $TOM = 509$; $EMU = 392$; $RUF = 428$.

$BAD = 824$; $ATE = 293$; $DER = 437$; $TOM = 905$; $EMU = 356$; $RUF = 761$.

Die nachstehenden Bilder zeigen die zwei gefundenen Lösungen.





Man erkennt, daß die zweite Lösung das an der Würfelmitte gespiegelte Bild der ersten Lösung ist.

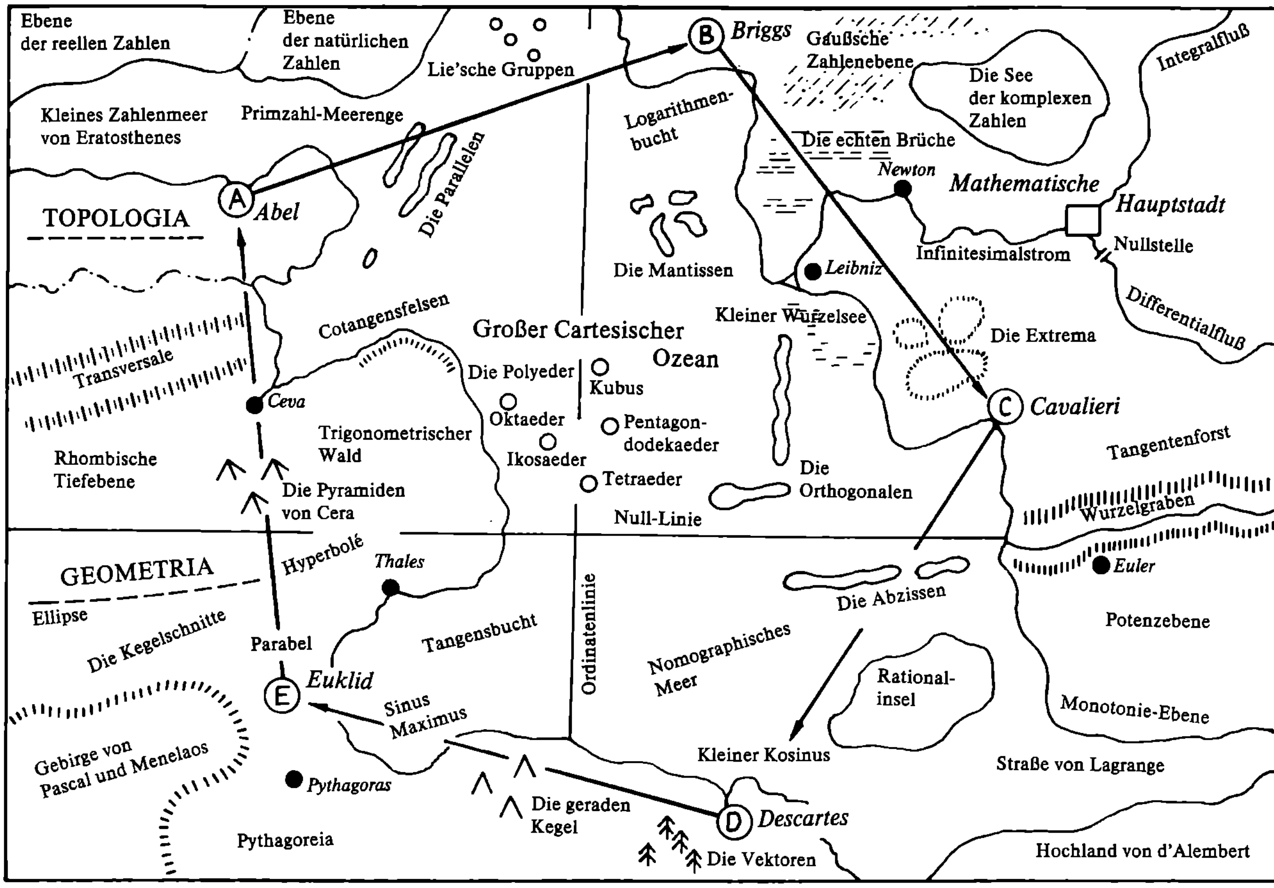
H. Oehl

Eine Anekdote

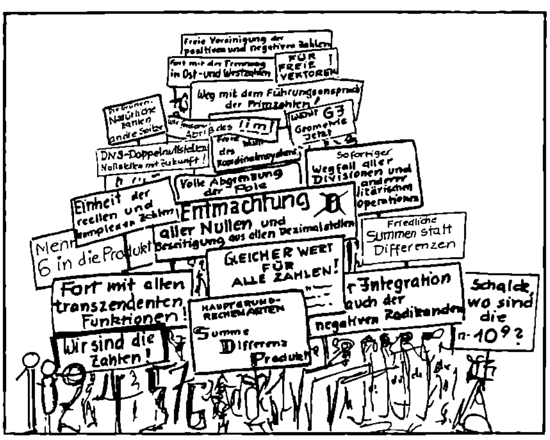
G. B. Shaw und die Mathematik

Der große irische Dramatiker
George Bernard Shaw
(geb. 1856 in Dublin,
gest. 1950 in Ayot St. Lawrence)
wurde einmal von neugierigen Reportern gefragt, was er eigentlich von der Mathematik halte. Sie erwarteten (natürlich) eine vernichtende Antwort. G. B. S. aber sagte: „Also eigentlich ist die Mathematik doch etwas sehr Schönes, man kann sich schon dafür begeistern ... Vielleicht wäre ich selbst ein guter Mathematiker geworden ... Mein einziger Fehler war nur der, daß bei uns die Mathematik schon auf der Schule gelehrt wurde!"

Alphons Traum



Alphons zieht – gleichsam im Traum –
schwebend durch den weiten Raum
und durchstreift dabei behende
mathematisches Gelände.
Erster Schritt: Von A nach B[1]).
Dort gibt's ein kräftiges Diner
nach abgedrucktem Speiseplan,
und da geht Alphons tüchtig ran.
Weiterflug zum nächsten Ort. (C)
Viel Demonstranten gibt es dort.
Alphons bestaunt die Transparente.
Die Parolen sprechen Bände.
Schmunzelnd zieht's ihn froh und heiter
alsbald zum nächsten Punkte (D) weiter.



Restaurant zur Silbernen Quadratwurzel

(Inh. X. Minimax)

Speisenkarte

Vorspeisen

- *Suppe à l'Hospital (franz. Spezialität)*
- *Bürgerliche Rekursionsformeln „Graph de la function"*

Hauptgerichte

- *Skalierte Koordinatenachserln mit Faktorenröllchen und Pyramidenspitzen nach Art des Hauses, Wurzelsalat*
- *Orthonormierte Kegelschnitte mit pikanten Sehnen und Asymptotensalat*
- *Transzendente Wurzeln mit natürlichen Vektorprodukten (Diät-Speise)*
- *Analytisches Kegelschnitzel mit böhmischen Quadern*

Dessert

- *Skalares Leckerli à la Descartes*
- *Halbdifferenziertes mit Pi-Eierchen*

Dazu empfehlen wir

- *Term Goniometric (orthogonal) (Wein aus der Republik Algebra)*
- *Geo-Sekt (extra dry)*

Die Geister haben dort mit Goethe
und seinem „Faust“ so ein'ge Nöte.
Zur Zeit bemüh'n sie sich mit Streiten,
das Hexenkücheneinmaleins[2]) zu deuten.
Nachdem sie außer Rand und Band,
erläutert ihr Boß kurzerhand,
wie das, was scheinbar Zahlenspielerei,
am besten zu verstehen sei:

Hexenkücheneinmaleins

im Faust:	Deutung:
Du mußt versteh'n:	*Aus 1 wird 10 gemacht, d. h. es*
Aus Eins mach Zehn,	*werden 9 hinzugezählt.*
und Zwei laß geh'n,	*Davon ab 2 ergibt 7.*
und Drei mach gleich,	*Vergleicht man diese 7 mit 3,*
so bist du reich.	*so fehlen 4, die zum Ausgleich*
Verlier die Vier!	*‚verloren' werden.*
Aus Fünf und Sechs,	*Vergleicht man 5 und 6 mit*
so sagt die Hex',	*7 + 8 (also = 15),*
mach' Sieben und Acht,	
so ist's vollbracht:	
Und Neun ist Eins,	*6 + 9 ist ‚eins' mit 15.*
und Zehn ist keins.	*Desgleichen bleibt 0 (keins)*
	bei 5 + 10 zur 15

Das ist das Hexeneinmaleins.

Zweifelnd sagt Alphons Adé
und wandert weiter zum Ort E.
Hier will man was Besond'res lehren,
auf völlig neue Art erklären,
wie man könnt' multiplizieren
nur durch Verdoppeln und Halbieren.
Alphons denkt darüber nach.
Ob wohl was dran ist an der Sach'?

Ein eigenartiges Multiplikationsschema

Bei dieser Multiplikationsart wird nur halbiert (Reste bleiben unberücksichtigt) und verdoppelt und addiert.

z. B.	19	mal	75	
(links fortgesetzt	9		150	(rechtsseitig
halbieren,	4		300	fortgesetzt verdoppeln)
Reste entfallen)	2		600	
	1		1200	

Alle Zahlen, wo links eine gerade Zahl steht, streichen, sonst rechts addieren. Es bleiben:

$$\begin{array}{r} 75 \\ 150 \\ \underline{1200} \\ 1425 \end{array}$$

Am End' fragt Alphons – halb benommen –:
Wie mag ich wohl nach Hause kommen?
Ihm hilft ein Geist, der ihm erklärt,
wie er wohl am besten fährt.
Doch dafür, sagt das Fabelwesen,
müßt' er noch ein Problemchen lösen.
Und nun hört er die Geschicht'
von der Familienreise als Gedicht:

Familienreise

Auf Reisen geht Familie Radikand –
200 km quer durchs Land –
Im Auto Platz bequem für vier;
wenn man vom Motorrad noch zwei addier',
so reicht der Platz genau für alle.
Doch zu beachten ist in jedem Falle,
daß Opa wegen seinem Bein
soll vorn neben dem Fahrer sein.
Vater, Mutter können beide
den neuen Wagen lenkend fahren;
beide Söhne fahr'n Motorrad
(und das schon seit ein paar Jahren).
Außerdem ist mit von der Partie
auch die Kusine Ros'marie.
Wie oft muß nun die Familie
wechseln auf der langen Reise,
daß die Vor- und Sitznachteile
sich ausgleichen auf die Weise?

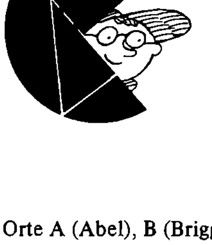
Kaum hat Antwort er gegeben,
konnte Alphons heimwärts schweben
und ist nach der durchträumten Nacht
ganz plötzlich wieder aufgewacht.
Er rekonstruiert auch gleich die Route
und überlegt mit frohem Mute,
was müßt', bei rechtem Licht beseh'n,
wohl anders als im Traum gescheh'n?
Besonders reizt ihn schon die Frage,
ob bei der vorgegeb'nen Lage
der Weg bei seiner Träumerei
auch anders noch zu nehmen sei.
Wer hilft Alphons wohl dabei?
So, nun seid Ihr an der Reih'!

Problem

a) Wieviel verschiedene Wege von A aus über alle Punkte B, C, D und E nach A zurück gibt es, wenn jeder Punkt nur einmal aufgesucht wird und die Wege in umgekehrter Richtung nicht gesondert gezählt werden sollen?
b) Ist der eingeschlagene Weg A – B – C – D – E – A der kürzeste?

Alphons denkt jedenfalls noch lang zurück
an sein durchlebtes Traumgeschick.

St. Koch



[1]) Die Orte A (Abel), B (Briggs), C (Cavalieri), D (Descartes) und E (Euklid) bilden auf beigefügter Karte ein regelmäßiges Fünfeck.

[2]) „Hexeneinmaleins“ von J. W. Goethe, Faust I

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

3. Stufe

Februar 1991

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Olympiadeklasse 7

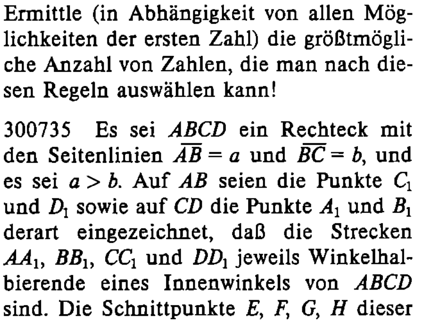
300731 In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:
Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück wie der Fuchs mit 7 Sprüngen. Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?
Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß der Hund der Spur des Fuchses folgt und daß beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

300732 200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, daß B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muß!

300733 Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:
Es gilt $\overline{BD} = h_b$. (1)
Es gilt $\overline{AD} = p_b$. (2)
Der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe β. (3)
a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;
b) beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2), (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

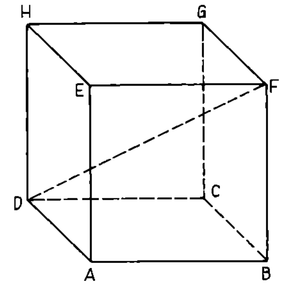
300734 Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:
Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird.
Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, daß folgendes gilt: Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

300735 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien die Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, daß die Strecken AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind. Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in unten stehenden Bild bezeichnet.



Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

300736 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel (vgl. Bild). Beweise, daß die Abstände der Punkte A, B, C, D, E, G und H von der Raumdiagonale DF sämtlich einander gleich sind!



Olympiadeklasse 8

300831 Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

300832 Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:
Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,
Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,
Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.
Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, daß ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

300833 Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm; $s_a = 6$ cm; $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden.
Dabei wird gefordert:
Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$. (1)
Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$. (2)
Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$. (3)
a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!
b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

300834 Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

300835
a) Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.
b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

300836 Im Raum seien zwölf Punkte derart gegeben, daß keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!
Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die

Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

Olympiadeklasse 9

300931 Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung. Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt?

300932 Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

300933 Man beweise, daß es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

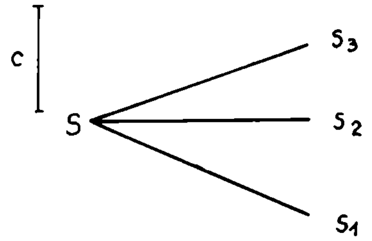
300934 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche „Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis: Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Mißverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendigen Ziffern 0, 1, ..., 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

300935 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$

gilt!

300936 Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s_1, s_2, s_3. Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\sphericalangle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\sphericalangle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Bild). Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.
a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\sphericalangle(s_1, s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!
b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!



c) Beweisen Sie, daß das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und daß seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen!
Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

Olympiadeklasse 10

301031 Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, daß es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z. B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

301032 Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z,\ a_2 = z + d,\quad a_3 = z + 2d, \ldots,\quad a_n = z + (n-1)d \tag{1}$$

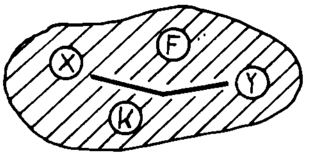
($n \geqq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen)
eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geqq 1$, $d \geqq 1$ sind und für die $n \geqq 3$ sowie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1991 \tag{2}$$

gilt!

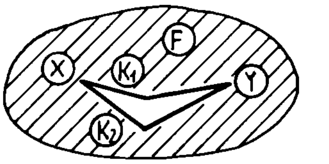
301033 Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.
Die Bilder a und b verdeutlichen den Vorgang des „Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$": Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2. Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d. h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so läßt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, daß die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen. Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.

a)



b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so läßt sich F ebenfalls so verbiegen, daß die Randkurven zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.

b)



Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

301034 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2|<1. \tag{1}$$

301035 Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

301036 Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, daß c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und daß der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.
a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden;
b) beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Olympiadeklasse 11/12

301231
a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets

$$\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leqq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \text{ gilt.}$$

b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \text{ gilt.}$$

301232 Im Raum seien n Punkte ($n \geqq 3$) so gelegen, daß sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muß, so daß jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.

Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Von den nachfolgenden Aufgaben 301233 A und 301233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

301233 A Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Es gilt $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_{17}$.

(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{17}$ gilt $s = p$.

Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einer-, x_{16} die Zehnerziffer usw.

301233 B Es seien $D_1, \ldots, D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, \ldots, d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ \ldots,\ d_n = n + 1$$

gelte. Weiter seien $G_1, \ldots, G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, \ldots, g_n$

$$g_1 = 1,\ g_2 = 2,\ \ldots,\ g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, daß jeweils gilt:

Genau dann, wenn $g_i \leqq d_j$ ist, paßt G_i in D_j.

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt!

Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

301234 Man beweise: In jedem n-Eck ($n \geqq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

301235 Man untersuche, ob die durch

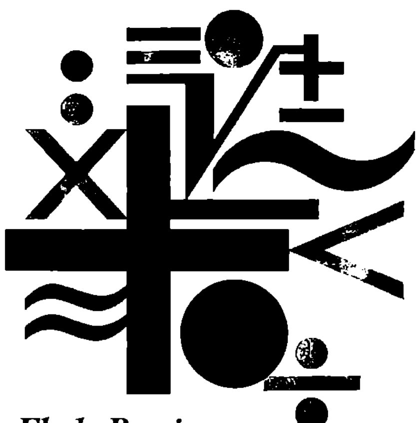
$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

301236 Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

Die Lösungen könnt Ihr von uns erhalten, bei Einsendung eines frankierten und adressierten Rückumschlages.

Gemixtes aus: *Wer übt, kommt weiter*



Flade·Pruzina

Wer übt, kommt weiter ist nicht nur eine alte Weisheit, sondern auch der Titel eines mathematischen Übungsbuches, das im Sommer dieses Jahres im Volk und Wissen Verlag GmbH Berlin erscheint.

Dieses Buch enthält eine Fülle von Aufgaben zum Mathe-Training; es bietet vielfältige Übungsmöglichkeiten vor allem für das in den Klassenstufen 6 bis 8 anzueignende Wissen und Können. Ihr findet in ihm sowohl ein umfangreiches Angebot von Übungen zur Festigung von elementaren Grundlagen als auch in jedem Abschnitt Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad.

Zu den Aufgabenserien des Abschnittes

Kontrolliere dich selbst

gehören auch Lösungen und eine Anleitung zur selbständigen Einschätzung der erbrachten Leistungen.

Euch *alpha*-Lesern sind besonders die Aufgaben aus den Abschnitten

Extras für Pfiffige

und *Denken macht Spaß*

zu empfehlen, in denen Knobel-, Logik- und Beweisaufgaben zusammengestellt sind.

Im folgenden haben wir für Euch einige „Kostproben" aus *Wer übt, kommt weiter* ausgewählt, zu deren Lösung wenig mathematische „Theorie" (höchstens Wissen aus dem Mathematikunterricht bis zur Klasse 7) benötigt wird. Ein heller Kopf kann jedoch nicht schaden.

Übrigens: Zu *Wer übt, kommt weiter* erscheint zeitgleich ein Lösungsheft.

Na dann – viel Spaß!

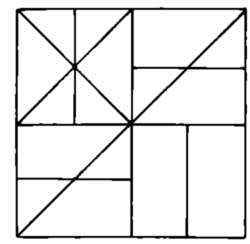
1. Setze für ∗ Ziffern ein, so daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht!

```
∗ ∗ ∗ · ∗ ∗ ∗
-------------
    ∗ 0 ∗
      ∗ ∗ 1
        ∗ ∗ ∗
-------------
  ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗
```

2. Stelle jede der Zahlen 1; 2; 3; …; 10 mit Hilfe von genau vier Ziffern 4 unter Verwendung von Operationszeichen und Klammern dar!

Beispiel: $4:4+4:4=2$

3. Wie viele Quadrate, Rechtecke bzw. Dreiecke erkennst du im Bild?



4. Gib die Größe des kleineren der beiden Winkel an, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um

a) 18.30 Uhr

b) 21.10 Uhr

miteinander bilden!

5. Ein Quader mit den Maßen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm ist außen grün gefärbt. Der Quader wird in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt (parallele Schnitte zu jeweils einer Seitenfläche). Wieviel Würfel haben keine grüne Fläche?

6. Das Produkt dreier aufeinanderfolgender Vielfacher von 3 sei 648. Ermittle diese drei Zahlen!

7. Bestimme die Summe aller unkürzbaren Brüche der Form $\frac{n}{2}$, wobei $n \in N$ und $1 \leqq n \leqq 50$ ist!

8. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

a) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a + b > a$

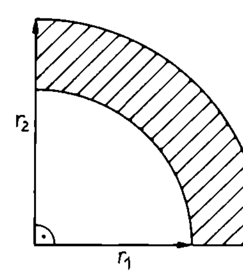
b) Es gibt natürliche Zahlen, so daß gilt: $a^b = b^a$

c) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b > a$

d) Es gibt eine natürliche Zahl a, so daß für alle natürlichen Zahlen b gilt: $a \cdot b = 0$

e) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n^2 > \sqrt{n}$

9. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des schraffierten Flächenstücks!



$r_1 = 5{,}3$ cm
$r_2 = 4{,}1$ cm

10. Bernd, Christine und Klaus zeichneten eine Reihe von Vierecken. Eva betrachtete die Zeichnungen und erstellte folgende Übersicht:

Übersicht:	Bernd	Christine	Klaus
Trapeze	6	2	5
Rechtecke	2	2	4
Quadrate	3	2	1

a) Wieviel Vierecke hat Christine gezeichnet?
b) Welche Spalte ist von Eva ganz sicher falsch ausgefüllt worden?

11. Gegeben ist eine Gleichung
$n \cdot x + 6 = 66$ $(n, x \in N;\ n \neq 0)$.
a) Für welche Werte von n wird die Lösung der Gleichung eine gerade Zahl?
b) Für welche Werte von n wird die Lösung der Gleichung eine ungerade Zahl?
c) Für welche Werte von n ist die Lösungsmenge leer?

12. Rainer hat ein Aquarium mit den Abmessungen
$l = 70{,}0$ cm; $b = 40{,}0$ cm und $h = 30{,}0$ cm.
Das Aquarium wird aus einer Wasserleitung mit Hilfe eines Schlauches gefüllt. Wie ist der Wasserstand nach 12 Minuten, wenn pro Minute 5,0 l Wasser einfließen?

13. Nach wieviel Jahren ist ein Guthaben von 8 000 DM auf mindestens 15 000 DM angewachsen, wenn kein Geld abgehoben wird und der Zinssatz in den ersten 5 Jahren 5 %, danach 6 % beträgt?

14. Verneine alle falschen Aussagen!
Gib die Verneinungen in zwei verschiedenen sprachlichen Formulierungen an!
a) Alle Parallelogramme sind Rechtecke.
b) Jede natürliche Zahl ist ungerade.
c) Alle ungeraden Zahlen sind durch 5 teilbar.
d) Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß $2x = 1$ ist.
e) Es gibt natürliche Zahlen, deren Quadrat kleiner als die Zahl selbst ist.
f) Es gibt durch 10 teilbare natürliche Zahlen, die ungerade sind.

15. Auf wieviel verschiedene Weisen kann man den Betrag von 0,50 DM zusammenstellen, wenn ausreichend viele Geldstücke zu 1 Pf, 2 Pf, 5 Pf, 10 Pf zur Verfügung stehen?

L. Flade/M. Pruzina

Fortsetzung in Heft 4/91

Dr. A. Hilbert
Mathematik

Nachschlagebücher für Grundlagenfächer
Fachbuchverlag, 2. Auflage 1989,
Best.-Nr. 546 928 3

An Nachschlagebücher werden heute recht hohe Anforderungen gestellt, besonders wenn sie ein so weitverzweigtes und umfangreiches Sachgebiet wie die Mathematik betreffen. Bei o. a. Titel ist es zweifellos gelungen, dem weitgehend Rechnung zu tragen. Das Buch vermittelt einen Gesamtüberblick über Inhalt, Aufbau, Formeln, Gesetze, Verfahren und Anwendungen mathematischer Teilgebiete.
Bezeichnungsweise und Darstellung folgen den gegenwärtig üblichen Normen, vereinzelt findet man auch Hinweise auf eine andere oder frühere Symbolik (z. B. bei der Zahlenbereichsnomenklatur S. 20).
Dem Kompendium sind zwei große Kapitel über Logik und Mengenlehre vorangestellt, die in annehmbarer Konzentration das Wichtigste aus beiden Teilgebieten enthalten. Die Abschnitte 8 (Matrizenrechnung), 9 (Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung/beschreibende Statistik) und 13 (Aus der Informatik) gehen über den derzeitigen Abiturstoff hinaus, ordnen sich aber sinnvoll in das Gesamtkonzept des Buches ein und spannen einen Bogen zur zweckmäßigen Anwendung in der Praxis. Es entspricht offenbar der Intension des Verfassers, mit dem Nachschlagebuch auch angehende Studierende naturwissenschaftlicher und anderer Fachrichtungen zu unterstützen und ihnen ergänzende Informationen über in der Schule nicht oder selten behandelte Gebiete zu vermitteln. Das trifft auch auf die erweiterten Abschnitte zu Ungleichungssystemen, dem Hornerschen Schema, Arcusfunktionen, Kugelflächengeometrie, Kegelschnitten und Anwendungen des bestimmten Integrals zu. Gerade diese Teile des Titels werden daher vom Leser allgemein geschätzt und machen das Buch wertvoll. Für ein erstes Erlernen des Mathematikstoffes ist das Nachschlagewerk nicht gedacht und wenig geeignet; es sieht seine Aufgabe vielmehr darin, verlorengegangenes Wissen zu reaktivieren und sich schnell, sachgerecht und zweckentsprechend über „mathematisches Handwerkszeug" zu informieren.
Dem dienen auch die sinnvoll eingestreuten und aussagekräftigen Bilder, Übersichten und Tabellen sowie die den Teilabschnitten zugeordneten Beispiele, die das Verstehen der Gesetzmäßigkeiten fördern und das Reaktivieren beschleunigen.
In der Literatur zur mathematischen Ausbildung gibt es zwangsläufig eine gewisse Normierung der Darstellung in den Verfahren, Formeln und Gesetzmäßigkeiten, in seiner methodischen Struktur weist aber das Buch trotzdem eine große Eigenständigkeit auf, die es zu einem wertvollen Helfer der Lernenden macht, gerade auch in der Phase der Angleichung des Niveaus mathematischen Grundwissens in Ost und West.

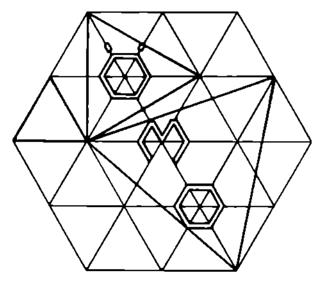
Dr. St. Koch, Leipzig

G. Baron/E. Windischbacher
Österreichische Mathematik Olympiaden 1970–1989

ISBN 3-7030-0227-1, Preis: 40,– DM
Universitätsverlag Wagner GmbH,
Innsbruck

Liebhaber insbesondere der Mathematik in Aufgaben kommen bei dieser Sammlung von 283 Aufgaben voll auf ihre Kosten. Diese sind übersichtlich nach Landes-, Gebiets- und Bundeswettbewerben gegliedert und thematisch aufgeschlüsselt nach Folgen und Reihen – Funktionen, Funktionalgleichungen und Polynome – Geometrie in der Ebene und im Raum – Gleichungen – Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme – Kombinatorik und kombinatorische Geometrie – Ungleichungen – Zahlentheorie.
Dem 34seitigem Aufgabenteil schließen sich 244 Seiten Lösungen an. Diese umfassende Beispielsammlung eignet sich hervorragend zum Üben, zur Vorbereitung auf die Olympiade, zur Überprüfung des mathematischen Wissens und für alle, die gern an kniffligen Aufgaben tüfteln.

Auf dem Titel obigen Buches ist das Erkennungszeichen der Mathematikolympiaden von Österreich zu finden:



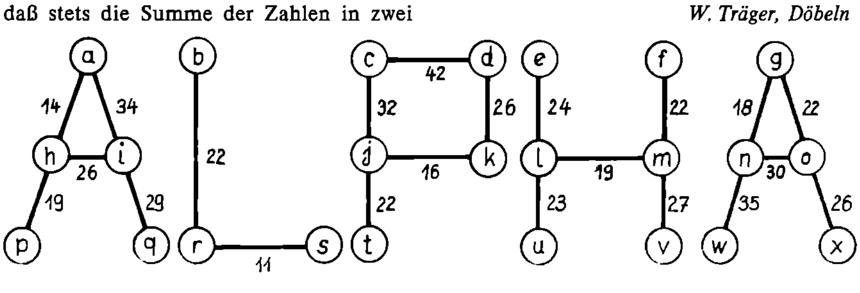
Diese Zeichnung enthält zugleich eine Aufgabe.
Im Sechseck liegen 19 „Gitterpunkte". Drei gleichseitige Dreiecke mit den Ecken in den Gitterpunkten sind schon eingezeichnet. Wieviele solche Dreiecke gibt es in diesem Sechseck?

mitgeteilt von Dr. H. Vohla, Wien

ALPHA-Tüftelei

Anstelle der Buchstaben ist in jeden Kreis des Schriftbildes „ALPHA" eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 24 so einzusetzen, daß stets die Summe der Zahlen in zwei durch eine „Strecke" verbundenen Kreisen gleich der an der verbindenden „Strecke" stehenden Zahl ist.

W. Träger, Döbeln



Mathematik und Geographie – Eine zweitausendjährige Partnerschaft (2)

Die geophysikalische Stufe

Wenden wir uns nun kurz der zweiten Entwicklungsetappe zu. Sie begann im islamischen Mittelalter und reicht bis zur Gegenwart. Die geographischen Erscheinungen, die hier die Mathematik inspirierten, wären z. B.

- die Sonneneinstrahlung
- die Tages- und Jahreszeiten
- die Witterung und das Klima
- der Wind und die Gezeiten
- der Erdmagnetismus

und die Geotektonik.

Heute gehört die Untersuchung dieser Erscheinungen z. T. in Wissenschaften, die sich um die Jahrhundertwende von der Geographie getrennt und verselbständigt haben, wie z. B. die Geophysik oder die Meteorologie. Erste Ansätze zu einer physischen Geographie finden wir bei Ibn Sina (Avicenna/980–1037) und Al-Biruni (973–1048). Ibn Sina untersuchte bereits die Art und Weise der Entstehung von Wettererscheinungen, wie Gewitter, Wolken, Wind, Regenbögen und interessierte sich für die Beschaffenheit von Gebirgen. Al-Biruni befaßte sich u. a. mit hydrologischen und geologischen Fragestellungen, aber auch mit Problemen der geometrischen Stufe, wie z. B. Erdumfangsbestimmungen. Auch ist er der Schöpfer einer ziemlich umfangreichen Länderkunde Indiens, die aber wenig mit seinen geophysikalischen und mathematischen Arbeiten zu tun hat. (vgl. Al-Biruni „In den Gärten der Wissenschaft", reclam 1228, Leipzig 1988) In diesem Buch befinden sich auch Auszüge des Briefwechsels beider Gelehrter, z. T. geophysikalischen Inhalts, z. B. über die Natur der Sonnenstrahlen (S. 56) und die Ursachen von Klimaunterschieden (S. 62). Ein weiterer bedeutender Wissenschaftler, der sich mit Problemen dieser Stufe beschäftigte, war S. Stevin (1548–1620). Von ihm stammt das erste wissenschaftlich begründete, auf Berechnungen basierende Projekt, die Zuidersee (Niederlande) trockenzulegen, um Land zu gewinnen. Auch untersuchte er die Erosion und Akkumulation durch fließendes Wasser und berücksichtigte die erhaltenen Ergebnisse bei Schleusenkonstruktionen und bei Projekten zur Freihaltung von Schifffahrtswegen. Diese, seine geographischen, Arbeiten haben auf den ersten Blick mit seinen rein mathematischen, wie z. B. seiner Arbeit zu den Dezimalzahlen, wenig gemein, jedoch zeichnen auch erstere sich besonders durch eine mathematische Herangehensweise aus. E. Halley (1656–1742), dem berühmten Mathematiker und Astronomen, verdanken wir auch viele geophysikalische Erkenntnisse. So befaßte er sich mit dem Erdmagnetismus und erstellte 1701 die erste Karte der ortsabhängigen Abweichungen von der Nordrichtung (Mißweisung), auf der die Orte gleicher Abweichungen übersichtlich durch Kurven verbunden waren. Er deutete auch als erster das Nordlicht als erdmagnetisches Phänomen. Andere Untersuchungen widmete er dem Salzgehalt der Meere. (vgl. P. Schreiber in alpha 6/86, S. 140f.) Die Erkenntnis, daß der Erdmagnetismus nur als gerichtete Größe (Vektor) begreifbar ist und seine dreidimensionale Definition geht auf Christopher Hansteen (1784–1873) zurück, der mit C. F. Gauß in Verbindung trat und ihn zu dessen theoretischen Untersuchungen über Vektorfelder inspirierte. (vgl. den Artikel von P. Schreiber in alpha 1/87, S. 13)

Weiterhin gehören in diese Stufe z. B. die Analyse von Erdbebenwellen mit statischen und dynamischen Untersuchungsmethoden und daraus zu schließende Modelle für den inneren Erdaufbau sowie Probleme der Meteorologie, damit u. a. auch der Wettervorhersage.

Die statistische Stufe

Diese dritte Entwicklungsetappe der Beziehungen zwischen Mathematik und Geographie begann im 17. Jahrhundert, jedoch auch in der Gegenwart werden wir fast täglich mit Ergebnissen statistischer Erhebungen konfrontiert, deren Gegenstände häufig geographischer und deren Methoden oft mathematischer Art sind. Man denke hierbei nur an Bevölkerungs- oder Wirtschaftsstatistiken von Ländern oder Erdteilen.

Der Name „Statistik" könnte möglicherweise vom lateinischen Wort "status", was soviel wie „Zustand" oder auch „Staat" bedeuten kann, abstammen. Früher wurde die Statistik auch als eine Art Staatskunde, die sich nach Möglichkeit der Zahlen oder kartographischer Darstellungen bedient, aufgefaßt. Von einigen Gelehrten wurde aber schon in der Anfangsphase mehr die Methode in den Vordergrund gerückt, so daß sie unter Statistik ziffernmäßige Verzeichnisse über irgendetwas z. B. Geburten, Banken usw. verstanden. Bereits im 17. Jahrhundert wurden statistische Untersuchungen durchgeführt, so ermittelte z. B. der Engländer W. Petty 1683 mit Methoden der sogenannten politischen Arithmetik, woraus sich später die mathematische Statistik entwickelte, das Wachstum der City von London. Die Institutionalisierung der Statistik, d. h. die Gründung statistischer Büros fand in den meisten europäischen Ländern im 18. und 19. Jahrhundert statt, so z. B. in Schweden 1756, in Frankreich 1796 (zuvor bereits schon 1609 für kurze Zeit) und in Preußen 1805.

Ab 1660 gab es auch bereits erste Universitätsvorlesungen über Statistik z. B. von H. Conring (1606–1681) in Helmstedt (Dort war die damalige Braunschweiger Universität.) oder im 18. Jahrhundert, von M. Schmeitzel (1679–1747) von 1723 bis 1731 in Jena sowie danach in Halle. Diese beiden und Schmeitzels Schüler G. Achenwall (1719–1772) waren Vertreter des mehr staatswissenschaftlichen Zweiges der Statistik, d. h. der Vergleich der Staaten mittels Zahlen stand bei ihnen im Vordergrund. A. F. Büsching (1724–1793) gilt als ein Begründer der beschreibenden bzw. vergleichenden Statistik, welche den Stoff nach Gegenständen und nicht nach Ländern ordnete. Er faßte die Statistik als Teilgebiet der Geographie auf, welches dem zahlenmäßigen Vergleich geographischer Objekte diente. Darunter sind die häufig tabellarisch aufgeführten Zahlenangaben zu verschiedenen Sachgebieten, z. B. in den Statistischen Jahrbüchern oder auch in Euren Geographielehrbüchern, zu verstehen, mit deren Hilfe sich u. a. geographische Objekte wie Kontinente, Länder oder Städte gut miteinander vergleichen lassen. Neben dieser beschreibenden Statistik gab es aber auch schon relativ früh Versuche, Gesetzmäßigkeiten zwischen den Daten (Zahlenangaben) zu finden. So wurde schon im 17. Jahrhundert in England versucht, Sterberaten und Lebenserwartungen aus den über die Kirchenbücher ermittelten Zahlen zu errechnen. Die Royal Society (englische Akademie der Wissenschaften) besaß damals schon ein Konzept, durch mathematische Verfahren, Untersuchungen über die Lebensdauer der Menschen an verschiedenen Orten und über die Einwohnerzahl von Städten anzustellen, was heute der Bevölkerungsgeographie zugeordnet werden würde. Die erste sogenannte Sterbetafel stammte übrigens von E. Halley. Der Holländer W. Kersseboom (1691–1771) berechnete aus solchen Daten die Einwohnerzahl Hollands und Westfrieslands. Geeignete mathematische Modelle zur allgemeinen Lösung solcher und natürlich auch wesentlich komplizierterer statistischer Probleme konnten erst mit der Anwendung der Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik geliefert werden. Erstmals soll ein Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik von J. Bernoulli (1654–1705) mit seiner Fassung des sogenannnten Gesetzes der Großen Zahlen hergestellt worden sein. Durch viele weitere bekannte Mathematiker wie u. a. L. Euler (1707–1783), A. de Moivre (1667–1754), P. S. de Laplace (1749–1827), C. F. Gauß (1777–1855) oder auch L. A. J. Quetelét (1796–1874) wurde das entscheidend weiterentwickelt. Letzterer gilt übrigens als ein Begründer der mathematischen Statistik. Diese wurde bis heute stark vervollkommnet, so daß eine moderne Wissenschaft, die Daten irgendwelcher Art erhebt, ohne Methoden der mathematischen Statistik undenkbar wäre. Die Geographie ging nach den vorher genannten, engen Zusammenhängen mit den Vorläufern der mathematischen Statistik in der Anfangsperiode viele Jahrzehnte auf Distanz zu ihr, in welchen lediglich die beschreibende Statistik als „geographisch" angesehen wurde. Erst ab der Mitte dieses Jahrhunderts wurde dieser Zustand auf Grund objektiver Notwendigkeiten, aber auch wegen des wesentlich höheren Entwicklungsstandes der mathematischen Statistik, überwunden.

Die Stufe des komplexen Eindringens der Mathematik in die Geographie

Den Prozeß, um den es in dieser jüngsten Etappe der Beziehungen zwischen beiden Wissenschaften geht, könnte man auch als „Mathematisierungsprozeß der Geographie" bezeichnen. Er begann etwa in der Mitte dieses Jahrhunderts und ist heute noch nicht abgeschlossen.

Bei der Verselbständigung einiger Teilgebiete der Geographie etwa an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert spalteten sich vornehmlich die Wissensgebiete ab, die der Mathematik zu dem damaligen Zeitpunkt am nächsten standen, weswegen eigentlich nur der mehr beschreibende Teil der Geographie übrigblieb, z. B. die Länderkunde oder Teile der physischen und ökonomischen Geographie, die bisher nicht oder nur sehr ungenügend mit mathematischen oder physikalischen Methoden bearbeitet werden konnten.

Führende Geographen, wie z. B. A. Hettner (1859–1941), vertraten in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts Auffassungen etwa derart, daß der Gegenstand der Geographie das konkrete geographische Individuum sei und man deshalb immer nach dem Spezifischen, dem Besonderen suchen müsse. Es käme also nicht darauf an, Gesetzmäßigkeiten zu finden. Diese Wissenschaftsauffassung erschwerte natürlich die Zusammenarbeit mit der Mathematik sehr. Ein weiteres Problem bestand vor allem darin, daß für die mathematische Behandlung der Gegenstände der damaligen Geographie, sehr entscheidende Voraussetzungen vor allem innermathematischer Art fehlten. Erst in den 30er und 40er Jahren wurde in den USA und in der Sowjetunion das mathematische Fundament für das komplexere Eindringen der Mathematik in die Geographie gelegt.

N. Wiener (1894–1964) begründete 1948 die Kybernetik. J. v. Neumann (1903–1957) und O. Morgenstern schrieben 1944 ihr Werk „Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten", womit eine exakte mathematische Beschreibung bestimmter ökonomischer Prozesse möglich wurde. Auch Arbeiten von sowjetischen Mathematikern wie z. B. von L. V. Kantorovič (geb. 1912) und A. J. Chinčin (1894–1959) über lineare Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören dazu. Diese Theorien wurden auch von Geographen der jeweiligen Länder begeistert aufgenommen und führten zu einem regelrechten Boom der Anwendung mathematischer Methoden in der Geographie in den 50er Jahren, der sogenannten „Quantitativen Revolution". Die objektiven Bedingungen waren in diesen beiden Ländern dafür relativ günstig. In beiden Ländern war die Geographie keine rein akademische Wissenschaft, sondern stark auf die Anwendung z. B. in der Raumplanung oder der Ressourcenforschung orientiert. Deshalb war man natürlich auch an neuartigen Erkenntnissen interessiert und war gezwungen, große Datenmengen zu erfassen und mit ihnen umzugehen. In den 60er Jahren entstand als ein Ergebnis der „Quantitativen Revolution" die „Theoretische Geographie", ein Teilgebiet, das aus der Anwendung der mathematischen Verfahren in der Geographie, Schlußfolgerungen für eine Umgestaltung der geographischen Wissenschaft selbst zog, so z. B. für deren Mathematisierung. Vertreter der „Quantitativen Revolution" bzw. der „Theoretischen Geographie" wären z. B. P. Haggett, R. Chorley, W. Bunge, D. Harvey und J. G. Sauschin. Von den USA kamen diese Ideen über Großbritannien nach Westeuropa und von der UdSSR nach Osteuropa. In beide Teilen Deutschlands kamen sie etwa Anfang der 70er Jahre und erlebten im westlichen Teil anfangs einen gewissen Boom. Aber die zu hochgesteckten Erwartungen ließen sich aus verschiedenen Gründen zum großen Teil nicht erfüllen, z. B. wegen des Standes der Rechentechnik, der einfach eine sofortige Umsetzung der Kenntnisse noch nicht ermöglichte oder auch wegen der subjektiven und objektiven Verständigungsprobleme zwischen Mathematikern und Geographen, weswegen nur bestimmte Teile der Mathematik den Geographen zugänglich blieben. Man wendete dabei in der Geographie vorwiegend statistische Verfahren zur Bearbeitung von Datenmengen mittels Computer an. Auf geographischem Gebiet erstrecken sich die Anwendungen eigentlich auf alle Teilbereiche, die irgendwelche Meßdaten oder andere Zahlenangaben verwenden bzw. sich mit der territorialen Ausdehnung irgendwelcher Objekte befassen. Als problematisch erweist sich hierbei aber der mitunter logisch nicht einwandfreie, uneinheitliche Begriffsapparat der Geographie sowie die manchmal kritiklose Übernahme anscheinend ähnlicher mathematischer Verfahren aus anderen Wissenschaften wie z. B. aus der Biologie. Die nicht zuletzt auch daraus resultierenden, leider z. T. noch unbefriedigenden Ergebnisse der „Quantitativen Geographie" bzw. die im vorherigen Sinne auch noch nicht ausreichende „Theoretische Geographie" konnten vielleicht aber gerade deshalb viele Geographen noch nicht von den Vorteilen dieser Methoden bzw. Denkweisen überzeugen.

Wie könnte die Zukunft dieser Partnerschaft aussehen?

Die Geographie steht gerade vor dem Hintergrund der gesamten Umweltproblematik vor der Aufgabe, von einer mehr beschreibenden zu einer mehr konstruktiven Wissenschaft zu werden. Betrachtet man nämlich die Einflußgrößen auf unsere Umwelt, so ist die Geographie gerade die verknüpfende Wissenschaft, die diese zum Untersuchungsgegenstand hat. Um aber notwendige objektive und möglichst genaue Prognosen zu ermöglichen, oder auch nur die anfallenden, sehr großen Datenmengen zu beherrschen, müssen mathematische Modelle geschaffen werden, die in Form von Algorithmen für die Computer realisiert werden können. Dabei müßte der geographische Sachverhalt möglichst gut in ein solches Verfahren „übersetzt" werden können. Daraus ergeben sich bestimmte Anforderungen bzgl. der Theorien, des Begriffsapparates und der Strukturen an die Geographie. Sie seien hier nur mit den Stichworten „Formalisierbarkeit in Teilbereichen" und „Axiomatisierung" sehr unscharf umrissen. Die Mathematik muß ihrerseits auf diese Anforderungen reagieren, sei es durch Verfahren, Modelle oder Theorien, aber auch nur durch die Hilfe für die Geographie. Das alles ist aber nur durch eine stark verbesserte Kommunikation zwischen beiden Wissenschaften möglich, die auf längere Sicht durch eine solide Ausbildung von Geographen im mathematischen Denken, aber auch durch eine Zweitfachausbildung von Mathematikern in Geographie realisiert werden könnte. Wenn von beiden Seiten die Bereitschaft zur interdisziplinären Zusammenarbeit vorhanden ist, können viele dieser Probleme sicher bewältigt werden. Dann ließe sich diese Partnerschaft entsprechend den Anforderungen unserer Zeit auf ein neues Niveau heben, und sicher würden sich für beide Wissenschaften ungeahnte Impulse ergeben, wie schon so oft in den mehr als 2000 Jahren ihrer gemeinsamen Geschichte.

O. Kappler

Zweiter mathematischer Unfall

Ein hoffnungsvoller junger Kreis
lief Schlittschuh auf dem blanken Eis.
Sich rühmend, daß er kerngesund
und außerdem – natürlich rund –
woll't er besonders hoch hinaus
und führte tolle Sprünge aus.
Der ungestüme Übermut
bekam ihm aber gar nicht gut.
Am Sturz, den er sodann gebaut,
hat er sein Leben lang gekaut.
Der Mittelpunkt war ihm verrückt,
sein Radius in zwei zerstückt.
Als Kreis war's nun mit ihm vorbei,
er glich jetzt eher einem Ei
und hieß Ellipse als Figur,
die niemals mehr auf Schlittschuh'n fuhr.

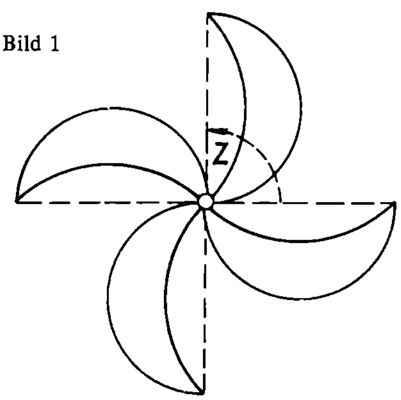
Ehrenfried Winkler
aus: H.-D. Hornschuh, Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag, München

Wie symmetrisch ist ein Vieleck?

Vielecke mit maximaler Symmetrie

Du hast, lieber Leser, sicherlich sofort eine Antwort parat, wenn Du nach einem Vieleck mit möglichst großer Symmetrie gefragt wirst. Es sind die *regelmäßigen* Vielecke! Und als Begründung wird angeführt, daß bei diesen Vielecken sowohl die Seiten als auch die Innenwinkel jeweils kongruent (d. h. gleich groß) sind.

Bild 1



Das Bild 1 zeigt eine Figur, die kein Vieleck ist, die wir aber auch als recht symmetrisch werten möchten. Wir erkennen, daß sie durch vier Drehungen (um den Punkt Z mit den Drehwinkeln 90°, 180°, 270° und 0°) zur Deckung gebracht werden kann.
Läßt sich auf diese Weise auch die große Symmetrie bei den regelmäßigen Vielecken verstehen? Du erkennst anhand des regelmäßigen Vierecks (also Quadrats, Bild 2a), daß es durch vier Geradenspiegelungen und vier Drehungen um sein Zentrum Z (mit den Drehwinkeln 90°, $2\cdot 90° = 180°$, $3\cdot 90° = 270°$ und $0° = 0\cdot 90°$) zur Deckung gebracht werden kann.
Es besitzt also 8 Deckabbildungen.
Und mehr als 8 Deckabbildungen kann kein Viereck besitzen. Dies kann wie folgt

Bild 2a

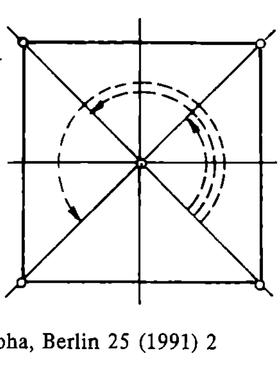
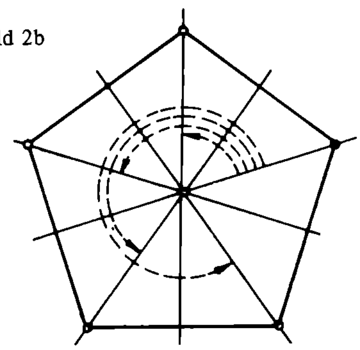


Bild 2b



näher begründet werden. Die Deckabbildungen eines Vielecks können nur Drehungen und Geradenspiegelungen sein, wobei die Drehungen ein gemeinsames Drehzentrum besitzen und dieses auf den Achsen der Geradenspiegelungen liegt. (Andere Bewegungen als Deckabbildungen würden zu einer echten Verschiebung als Deckabbildung führen. Auf eine nähere Begründung wird hier verzichtet.) Nun können bei n Ecken nur maximal n Drehungen und n Geradenspiegelungen als Deckabbildungen auftreten.
Wir erkennen also gleich allgemein:
(1) *Ein n-Eck besitzt höchstens 2n Deckabbildungen.*
Außerdem erkennt man leicht
(2) *Die regelmäßigen n-Ecke besitzen diese maximale Zahl von Deckabbildungen,* nämlich n Geradenspiegelungen und n Drehungen

$$\left(\text{mit den Drehwinkeln } 0\cdot\frac{360°}{n},\ 1\cdot\frac{360°}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{360°}{n}\right).$$

Das Bild 2b verdeutlicht das für ein regelmäßiges 5Eck.
Umgekehrt gilt:
(3) *Ein Vieleck mit der größten Anzahl möglicher Deckabbildungen ist regelmäßig.*
Denn dann müssen nach den Darlegungen, die zu der Einsicht (1) führten, je zwei Ecken und je zwei Seiten jeweils durch eine Deckabbildung aufeinander abgebildet werden können, d. h. Innenwinkel und Seiten sind jeweils gleich groß.

Vielecke mit geringerer Symmetrie

Nach der Aussage (3) hat ein n-Eck, das nicht regelmäßig ist, weniger als $2n$ Deckabbildungen. Sind dann nur bestimmte Anzahlen m möglich?

Wir betrachten zunächst einige Beispiele.
• Wie viele Deckabbildungen besitzt
a) ein echtes Rechteck,
b) ein echter Rhombus (gleichseitiges Viereck),
c) ein echtes Parallelogramm (d. h. ein Parallelogramm, das weder Rechteck noch Rhombus ist),
d) ein gleichschenkliges Dreieck, das nicht gleichseitig ist?
Eine Antwort ist anhand der Figuren selbst leicht ersichtlich:
a) 4 (2 Geradenspiegelungen und neben der identischen Abbildung als Drehung noch eine Drehung um 180°), Bild 3a),
b) 4 (wie bei a), Bild 3b),
c) 2 (Bild 3c),
d) 2 (1 Geradenspiegelung und die identische Abbildung als Drehung, Bild 3d).

Bild 3a

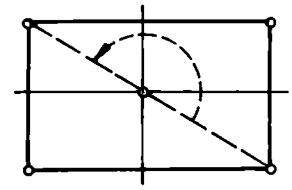


Bild 3b

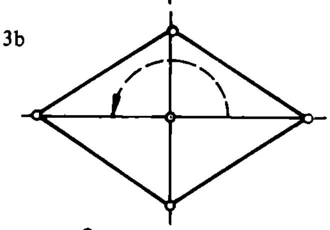


Bild 3c

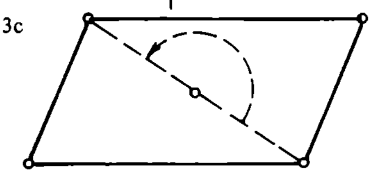
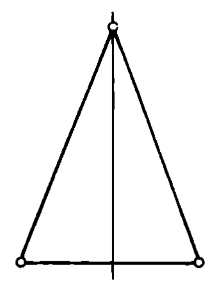


Bild 3d



• Gibt es neben dem echten Parallelogramm weitere Vierecke mit genau zwei Deckabbildungen?
Natürlich, das (echte) gleichschenklige Trapez (Bild 4a) und das (echte) Drachenviereck (Bild 4b).

Bild 4a

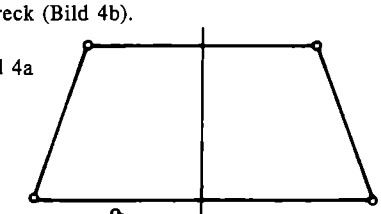
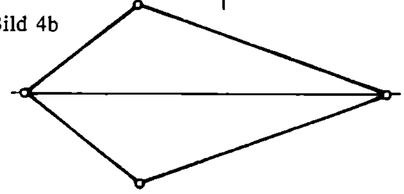


Bild 4b

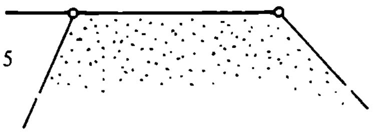


• Gibt es ein Dreieck mit genau 3 oder 4 oder 5 Deckabbildungen?

Nein, aber eine einfache Begründung läßt sich nicht ohne weiteres geben. Sie ergibt sich aus den folgenden allgemeineren Überlegungen.

Wir betrachten einen Strahl p, der von einer Ecke eines Vielecks V ausgeht und eine benachbarte Ecke von V enthält (Bild 5).

Bild 5



Einen derartigen Strahl nennen wir einfach *Strahl des Vielecks V.* Besitzt das Vieleck V genau m Deckabbildungen (die identische Abbildung wird dabei immer mitgezählt!), dann hat der Strahl p bei diesen Abbildungen m Bilder, neben p sind das $m-1$ weitere Strahlen $p_1, \ldots, p_{m-1}$ des Vielecks V. Und jeder dieser m Strahlen wird bei den Deckabbildungen von V wieder nur auf einen von ihnen abgebildet. Denn ein solcher Strahl p_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ ist das Bild von p bei einer Deckabbildung α, und wird auf p_i eine Deckabbildung β angewendet, so ist das damit gleich, daß auf p nacheinander die Deckabbildungen α und β angewendet werden. Die Nacheinanderausführung von zwei Deckabbildungen von V ist aber offenbar wieder eine Deckabbildung von V. Die Menge der $2n$ Strahlen des Vielecks V zerfällt also in Teilmengen von jeweils m Strahlen, die aufeinander durch Deckabbildungen von V abgebildet werden können.

Also gilt:

(4) *m ist ein Teiler von 2n.*

Daraus folgt, daß ein Dreieck nicht genau 4 oder 5 Deckabbildungen besitzen kann. Ein n-Eck, bei dem n eine Primzahl ist, kann höchstens genau eine, zwei, n oder $2n$ Deckabbildungen besitzen. Im folgenden wird sich noch zeigen, daß hier n selbst nicht möglich ist.

Halbsymmetrische Vielecke

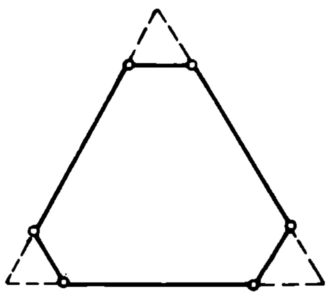
Die Bezeichnung ist wörtlich zu nehmen. Ein n-Eck heißt *halbsymmetrisch,* wenn es genau $\frac{2n}{2} = n$ Deckabbildungen besitzt.

Nach den bisherigen Betrachtungen spezieller Vielecke sind ein echtes Rechteck und ein echter Rhombus halbsymmetrische Vierecke.

• Zeichne ein halbsymmetrisches Sechseck!

Ein Beispiel zeigt Bild 6.

Bild 6



• Gibt es halbsymmetrische Dreiecke oder Fünfecke?

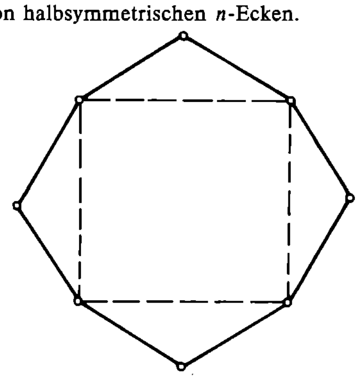
Wir haben schon bemerkt, daß die Deckabbildungen eines Vielecks nur Drehungen oder Geradenspiegelungen sein können. Bei n Deckabbildungen (auf Grund der Halbsymmetrie) sind es nicht nur Drehungen, sonst wäre das n-Eck regelmäßig. Dann müssen es (wie man eingehender zeigen kann) gleichviel Drehungen und Geradenspiegelungen sein, also jeweils $\frac{n}{2}$.

Damit ergibt sich:

(5) *Ist ein n-Eck halbsymmetrisch, dann ist n eine gerade Zahl.*

Zu jeder geraden Zahl n $(n \geqq 6)$ können leicht zwei Arten von halbsymmetrischen n-Ecken konstruiert werden. Man wählt ein beliebiges regelmäßiges $\frac{n}{2}$-Eck. Die eine Art erhält man durch Abschneiden der Ecken derart, daß die abgetrennten Dreiecke gleichschenklig und kongruent sind und das entstandene n-Eck selbst nicht regelmäßig wird. (Abb. 6 zeigt ein Beispiel für $n = 6$.) Setzt man den Seiten des regelmäßigen $\frac{n}{2}$-Ecks gleichschenklige und kongruente Dreiecke so auf, daß ein nicht regelmäßiges aber konvexes n-Eck entsteht (Bild 7), so erhält man eine zweite Art von halbsymmetrischen n-Ecken.

Bild 7



Bemerkenswert ist, daß zusammen mit den echten Rechtecken und echten Rhomben auf diese Weise bereits eine vollständige Übersicht über alle möglichen halbsymmetrischen n-Ecke gegeben ist. (Bei all unseren Betrachtungen haben wir nur konvexe Vielecke einbezogen!)

Symmetrie der Sechsecke

Die Zahl $n = 6$ ist unter den ersten natürlichen Zahlen $n \geqq 3$ die erste, die relativ viele Teiler besitzt. Nach den notwendigen Bedingungen (4) und (5) stellt sich die Aufgabe Sechsecke zu finden, die genau 12 oder 6 oder 4 oder 3 oder 2 Deckabbildungen besitzen. Für 12 und 6 ist die Frage schon vollständig beantwortet.

Die Suche nach den restlichen Arten von Symmetrien überlassen wir Dir, lieber Leser. Auch Probieren führt zum Ziel. Die Ergebnisse lassen sich systematisch ordnen.

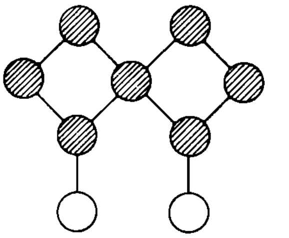
Eine Antwort findest Du in dem im nächsten Heft folgenden kleinen Beitrag „Die Symmetrien der Sechsecke“.

E. Quaisser

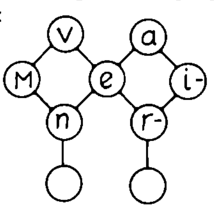
Wer wird Champion?

Schiebepuzzle „Minerva“

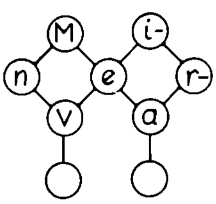
Zunächst fertige man 7 wie aufgezeichnet beschriftete Pappscheiben an und zeichne das abgebildete Spielfeld mit 9 Feldern auf ein Blatt Papier.



Zu Spielbeginn wird auf jedes schraffierte Feld des Spielfeldes je eine der 7 beschrifteten Pappscheiben gelegt. So kann zum Beispiel die folgende Ausgangsstellung entstehen:



Die beiden nicht schraffierten Felder werden beim Ziehen als Ausweichfelder benutzt. Ein Zug besteht im Verschieben einer Pappscheibe von einem Feld auf ein mit diesem durch eine Strecke verbundenes unbesetztes Feld. Durch mehrere Züge ist zu erreichen, daß die auf den beschrifteten Pappscheiben stehenden Buchstaben das Wort *Minerva* (Minerva – römische Göttin der Künste) darstellen, wobei in jeder Zeile eine Silbe dieses Wortes steht:



Da von jeder Ausgangsstellung aus die Endstellung herzustellen ist, kann dieses Spiel nach kurzer Übungszeit im Freundeskreis gespielt werden, wobei im Wechsel ein Partner die Pappscheiben auflegt und ein anderer entweder mit möglichst wenig Zügen oder in möglichst kurzer Zeit die Endstellung herstellt. Sieger wird dann der sein, der dieses kleine „Kunststück“ am besten beherrscht.

Lösung: Eine mögliche Zugfolge zur angegebenen Ausgangsstellung ist die folgende. Dabei wird bei jedem Zug der Stein angegeben, der verschoben wird. Falls zwei Zugmöglichkeiten bestehen, wird zusätzlich die Zugrichtung durch einen Pfeil angegeben.

r; e; v; M; n$\nwarrow$; v; v$\downarrow$; e; e$\swarrow$; r; a; i; r$\nearrow$; a; e; v

W. Träger, Döbeln

Lösungen

Teilnehmer am alpha-Wettbewerb – Achtung!

Damit keine Mißverständnisse entstehen, eine Bemerkung zur Wettbewerbsbedingung 6. Ihr habe dann am Wettbewerb erfolgreich teilgenommen, wenn Ihr mindestens 8 Aufgaben gelöst, d.h. eine **„1“ oder „2“ für mindestens 8 Aufgaben** bekommen habt. Die Registrierung der „sehr gut“ gelösten Aufgaben dient uns zur Ermittlung der ersten fünf Preisträger jeder Klassenstufe. Denn das sind die Schüler mit den meisten „sehr gut“ gelösten Aufgaben.
Aus dem übrigen Kreis der erfolgreichen Teilnehmer werden fünf weitere Preisträger ausgelost.
Und – wir haben eine neue Postanschrift:

Redaktion alpha
PSF 129
O-7010 Leipzig

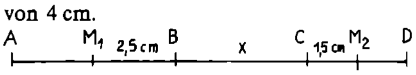
Alphons

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/91

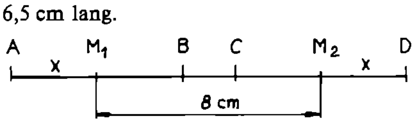
5/8 Da Ingo genau über Jürgen, Hans aber tiefer als Jürgen wohnt, muß Ingo im dritten Stockwerk wohnen und zwar rechts; denn links neben ihm wohnt Maria. Im ersten Stockwerk wohnt links Hans, rechts von ihm Luise. Da Jürgen genau unter Ingo wohnt, muß links von ihm Klaus Gerber wohnen.

5/9 Von den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 erfüllen nur
$4 + 16 + 36 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$
die gestellten Bedingungen. Es gibt genau eine Lösung, nämlich $z = 246$.

5/10 a) Wegen $2{,}5 + x + 1{,}5 = 8$, also $x = 4$, hat die Strecke $\overline{BC}$ eine Länge von 4 cm.



b) Wegen $x + 8 + x = 14{,}5$,
also $2 \cdot x = 6{,}5$ und $8 - 6{,}5 = 1{,}5$
ist die Strecke $\overline{BC}$ 1,5 cm lang. Jede der beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist somit 6,5 cm lang.



5/11 Es sind folgende Zahlen näher zu untersuchen: 119, 227, 335, 443, 551.
Nun gilt $191 - 119 = 72$, $272 - 227 = 45$, $353 - 335 = 18$, $434 - 443$ nicht lösbar, $515 - 551$ nicht lösbar. Von den Differenzen erfüllt nur die dritte die gestellten Bedingungen. Es handelt sich um die Zahl 335.

5/12 Wir geben die Lösung in einer Tabelle an.
Anzahl der Münzen zu

1 Pf	5 Pf	10 Pf	20 Pf
30	–	–	–
25	1	–	–
20	2	–	–
20	–	1	–
15	3	–	–
15	1	1	–
10	4	–	–
10	2	1	–
10	–	2	–
10	–	–	1
5	5	–	–
5	3	1	–
5	1	2	–
5	1	–	1
–	6	–	–
–	4	1	–
–	2	2	–
–	2	–	1
–	–	1	1

Dies sind insgesamt 19 Möglichkeiten.

5/13 Wir kennzeichnen die neun kleineren Quadrate, wie aus dem Bild ersichtlich, durch Zahlen.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Die Felder (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) ergeben neun Rechtecke. Die Felder (1, 2), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (7, 8), (8, 9), (1, 4), (4, 7), (2, 5), (5, 8), (3, 6), (6, 9) ergeben zwölf Rechtecke. Die Felder (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9) ergeben sechs Rechtecke. Die Felder (1, 2, 4, 5), (2, 3, 5, 6), (4, 5, 7, 8), (5, 6, 8, 9), ergeben vier Rechtecke (1, 2, 3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 4, 7, 2, 5, 8), (2, 5, 8, 3, 6, 9) ergeben vier Rechtecke. Alle neun Felder zusammen ergeben ein Rechteck. Das sind insgesamt 36 Rechtecke.

5/14 Der Vater ist $(31 - 8)$ Jahre $= 23$ Jahre älter als Lars. Wegen $2 \cdot 23 = 46$ und $23 - 8 = 15$ wird Lars nach 15 Jahren $(8 + 15)$ Jahre, sein Vater doppelt so alt wie Lars, nämlich $(31 + 15)$ Jahre $= 46$ Jahre alt sein.

6/8

erreichte ganzzahlige Literzahlen	eine Möglichkeit der Füllstände der Gefäße für 10 l	4 l	3 l
1	9	1	0
2	5	2	3
3	6	1	3
4	6	4	0
5	5	4	1
6	6	4	0
7	7	0	3
8	8	2	0
9	9	1	0

6/9 Jeder Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks *ABC* hat die Größe $(180° - 80°) : 2 = 50°$. Jeder Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks *FEA* hat somit die Größe
$(180° - 50°) : 2 = 65°$. Das gleiche gilt für das gleichschenklige Dreieck *DFB*. Deshalb hat der Winkel $\sphericalangle DFE$ die Größe $180° - 2 \cdot 65° = 50°$.

6/10 Von den Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 erfüllen nur
$4 + 9 + 36 = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49$ und
$49 + 0 + 0 = 7^2 + 0^2 + 0^2 = 49$ die gestellten Bedingungen. Deshalb existieren sieben solche Zahlen, sie lauten 236, 263, 326, 362, 623, 632, 700.

6/11
a) $6 \cdot 25\ \text{cm}^2 - 2 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 148\ \text{cm}^2$
b) $150\ \text{cm}^2 - 8 \cdot 3\ \text{cm}^2 + 8 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$
c) $6 \cdot 9\ \text{cm}^2 + 6 \cdot 12\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2 + 72\ \text{cm}^2 = 126\ \text{cm}^2$

6/12 Wegen $\overline{AS} \cong \overline{AB}$ hat der Winkel $\sphericalangle ABS$ die Größe α und somit der Außenwinkel $\sphericalangle CAB$ des Dreiecks *SBA* die Größe 2α. Im gleichschenkligen Dreieck *CAB* hat der Winkel $\sphericalangle ACB$ ebenfalls die Größe 2α. Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks *SBC* hat die Größe $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$, der Winkel *CDB* also auch die Größe 3α. Im n-ten gleichschenkligen Dreieck dieser Art hat jeder der beiden Basiswinkel die Größe $n \cdot \alpha$; deshalb gilt
$\alpha + n \cdot \alpha = 90°$, $15° + n \cdot 15° = 90°$,
$n \cdot 15° = 75°$, $n = 5$.
Es lassen sich fünf solcher gleichschenkligen Dreiecke konstruieren.

6/13 Aus (1) und (3) folgt: Der Berliner ist Schüler einer 6. Klasse. Aus (2) und (4) folgt: Der Berliner hat den Familiennamen Neumann. Aus (6) und (3) folgt: Der Rostocker ist Schüler einer 5. Klasse. Folglich ist der Schweriner Schüler einer 7. Klasse. Aus (6) folgt: Weder der Schweriner noch der Rostocker haben den Vornamen Jan. Folglich hat der Berliner den Vornamen Jan. Aus (1) folgt: Der Rostocker hat den Vornamen Horst, also hat der Schweriner den Vornamen Gerd. Aus (5) folgt: Der Schüler Schulz hat den Vornamen Horst, also hat der Schüler Meier den Vornamen Gerd.
Lösungen: Jan Neumann, 6. Klasse, Berlin; Horst Schulz, 5. Klasse, Rostock; Gerd Meier, 7. Klasse, Schwerin.

6/14 Die Masse der Stahlkugel beträgt
$15\ \text{cm}^3 \cdot 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 117\ \text{g}$.
$1\ \text{cm}^3$ Aluminium hat eine Masse von 2,7 g, da die Dichte des Aluminiums
$\varrho_{Al} = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt. Damit ein Körper aus Aluminium eine Masse von 117 g hat, muß demzufolge sein Volumen $\frac{117}{2{,}7}\ \text{cm}^3$ betragen. Das sind rund $43\ \text{cm}^3$.

7/8 Es sei $10a + b$ das Alter der Großmutter, wobei a und b natürliche Zahlen sind und $a \neq 0$ gilt. Die Großmutter rechnet zunächst $10a + b - (a + b) = 63$;

daraus folgt $a = 7$. Die Großmutter rechnet danach
$10b + a - (a + b) = 18$; daraus folgt
$b = 2$. Die Großmutter ist 72 Jahre alt.

7/9 Aus $a = \frac{36 \cdot 25}{100}$ cm $= 9$ cm und
$b = \frac{48 \cdot 25}{100}$ cm $= 12$ cm und $u = 25$ cm folgt
$c = 4$ cm. Zugleich gilt $a + c > b$;
somit existiert ein solches Dreieck.

7/10 Es gilt $100a + 10b + c + 297 = 100c + 10b + a$ mit $1 \leqq a \leqq 6$,
$0 \leqq b \leqq 9$ und $1 \leqq c \leqq 9$. Daraus folgt
$99c = 99a + 297$, $c = a + 3$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten 104, 114, ..., 194, 205, ..., 295, ..., 609, ..., 689, 699. Deshalb existieren $6 \cdot 10 = 60$ solcher Zahlen.

7/11 Aus $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$
folgt $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Wegen $a > b$ gilt somit $h_b > h_a$. Wir erhalten durch Addition $a + h_b > b + h_a$.

7/12 An einem Tag schafft der erste Bagger allein $\frac{1}{20}$, der zweite Bagger allein $\frac{1}{x}$, beide zusammen $\frac{1}{12}$ der durchzuführenden Arbeit; deshalb gilt
$\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$, $3x + 60 = 5x$, $2x = 60$,
$x = 30$. Der zweite Bagger würde diese Arbeit allein in 30 Tagen ausführen können.

7/13 a) $\overline{\sphericalangle EDC} = 90°$ (Thales);
b) $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle BDC$ (laut Voraussetzung), $(\gamma = 25°)$;
c) $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle ADC} = 25°$ (laut Voraussetzung); also
d) $\overline{\sphericalangle ABC} = 130°$ (Innenwinkelsumme im $\triangle ABC$!)

7/14 Die Gesamtmasse des gefüllten Becherglases beträgt 105 g. Da auf einen Körper mit der Masse von 100 g auf der Erdoberfläche eine Gewichtskraft von (etwa) 1 N wirkt, beträgt die Gewichtskraft des gefüllten Becherglases 1,05 N. Damit das gefüllte Becherglas schwimmt, muß seine Gewichtskraft gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers sein. Bei einer Grundfläche des Becherglases $A = 19{,}6\ \text{cm}^2$ (Zahlentafel), der Dichte des Wassers
$\varrho_{H_2O} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und einer Eintauchtiefe x cm beträgt die Masse des verdrängten Wassers $1 \cdot x \cdot 19{,}6$ g, seine Gewichtskraft $x \cdot 0{,}196$ N. Aus der Schwimmbedingung ergibt sich $x \cdot 0{,}196\ \text{N} = 1{,}05\ \text{N}$.
Die Eintauchtiefe beträgt 5,4 cm.

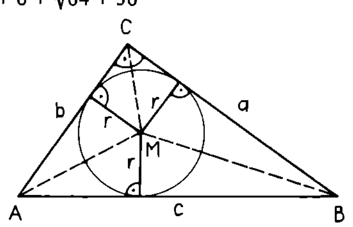
8/8 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann soll gelten
$a \cdot b \cdot c = 5 \cdot (a + b + c)$. Wegen $c \neq 0$ und da $a \cdot b \cdot c$ Vielfaches von fünf ist, muß $c = 5$ sein. Daraus folgt
$5ab = 5 \cdot (a + b + 5)$, $a \cdot b = a + b + 5$,
$ab - b = a + 5$, $b \cdot (a - 1) = a + 5$,
$b = \frac{a + 5}{a - 1}$, $b = 1 + \frac{6}{a - 1}$.
Daraus ergibt sich wegen der einschränkenden Bedingungen folgende Lösung:

a	b	c
2	7	5
3	4	5
4	3	5
7	2	5

8/9 Es gelten die Beziehungen
$v_k = \frac{s_k}{t_k}$ und $v_g = \frac{s_g}{t_g}$
(v: Geschwindigkeit; s: Weg; t: Zeit; k: kleiner Zeiger; g: großer Zeiger)
$v_k = \frac{2\pi r}{12\ \text{h}} = \frac{2\pi \cdot 7{,}5\ \text{cm}}{720\ \text{min}} \approx 0{,}07\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$
$v_g = \frac{2\pi r}{1\ \text{h}} = \frac{2\pi \cdot 10\ \text{cm}}{60\ \text{min}} \approx 1{,}05\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$
Der große Zeiger legt in jeder Minute etwa 1,05 cm, der kleine Zeiger etwa 0,07 cm zurück.

8/10 a) $x = 1{,}4a$ b) $U = 4{,}7a$
c) $A = \frac{2{,}3a \cdot a}{2} = 1{,}15a^2$

8/11 Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt
$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$,
$a \cdot b = r \cdot (a + b + c)$, $r = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$,
$r = \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$,
$r = \frac{8 \cdot 6}{8 + 6 + \sqrt{64 + 36}}$ cm $= 2$ cm.



8/12 a) Fritz bildet von der genannten Zahl die Quersumme und ergänzt diese zum nächsten Vielfachen von 9. Diese Ergänzung ist die gestrichene Zahl.
b) Aus $(1000a + 100b + 10c + d)$
$+ 8(a + b + c + d)$ folgt
$1008a + 108b + 18c + 9d$.
Somit ist die Quersumme ein Vielfaches von 9. Die gestrichene Zahl ist daher die Ergänzung zu diesem Vielfachen. Sie ist eindeutig, da die Streichung einer Null ausgeschlossen wurde, was die Angabe „0 oder 9" zur Folge gehabt hätte.

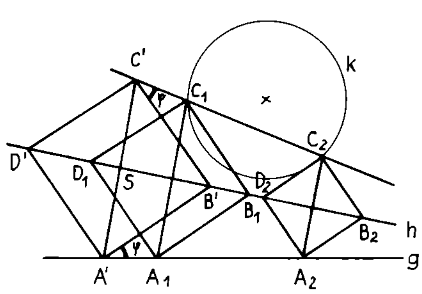
8/13 Der Stab wird als Hebel verwendet. Wenn an einem zweiseitigen Hebel mehrere Kräfte (im vorliegenden Fall Gewichtskräfte von 1 N) wirken, dann herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der Produkte aus Kraft · Hebellänge für beide Seiten gleich ist. Denkt man sich einen Drehpunkt zwischen dem 2. und 3. Körper im Abstand x vom linken Ende, so gilt:
$x \cdot 1\ \text{N} + (x - 6\ \text{cm}) \cdot 1\ \text{N}$
$= (10\ \text{cm} - x) \cdot 1\ \text{N} + (20\ \text{cm} - x) \cdot 1\ \text{N}$
Ergebnis: $x = 9$ cm. Der Stab muß im Abstand von 9 cm vom linken Ende unterstützt werden, damit er sich im Gleichgewicht befindet.

8/14 Da der Schwerdruck $(p = \varrho \cdot g \cdot h)$ an der Trennfläche gleich groß ist, verhalten sich die Längen der Flüssigkeitssäulen umgekehrt wie die Dichten der Flüssigkeiten. Im vorliegenden Fall beträgt die Länge der Wassersäule 13,6 cm (bei einer Länge der Quecksilbersäule von 1 cm). Der Abstand zwischen beiden Menisken beträgt demnach 12,6 cm.

9/8 Man formt beide Terme in Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in N$ und $a \neq 0$ um:
Aus $x = 0{,}\overline{75}$ folgt $100x = 75{,}\overline{75}$ und
$99x = 75$, also $x = \frac{75}{99}$. Man zerlegt
$y = 0{,}7\overline{57}$ in $y = 0{,}7 + 0{,}0\overline{57}$. Aus
$z = 0{,}0\overline{57}$ folgt $1000z = 57{,}\overline{57}$ und
$10z = 0{,}\overline{57}$, also $990z = 57$. Nun ist
$y = \frac{7}{10} + \frac{57}{990} = \frac{693 + 57}{990} = \frac{750}{990} = \frac{75}{99}$.
Somit gilt das Gleichheitszeichen.

9/9 Die erste Zahl sei x, dann ist die zweite Zahl $19 - x$, und es gilt weiter nach Aufgabenstellung
$x^2 + (19 - x)^2 = 205$. Die quadratische Gleichung $x^2 + (19 - x)^2 = 205$ bzw.
$x^2 - 19x + 78 = 0$ hat die Lösungen
$x_1 = 13$ und $x_2 = 6$. Wenn $x = 13$,
so ist $19 - x = 6$ und wenn $x = 6$,
so ist $19 - x = 13$. Es handelt sich um die Zahlen 13 und 6.
Probe: $13 + 6 = 19$ und $13^2 + 6^2 = 205$.

9/10 In einem beliebigen Punkt S der Geraden h zeichnen wir die Senkrechte zu h; sie schneide die Gerade g in A'. Der Kreis um S mit $\overline{SA'}$ als Radius schneide h in B' und D' und die Gerade $A'S$ in C'. Nach Konstruktion ist das Viereck $A'B'C'D'$ ein Quadrat.



Der Winkel, der A' zum Scheitel und $A'B'$ und die Gerade g als Schenkel hat, habe die Größe φ. Wir tragen in C' an $C'B'$ einen Winkel der Größe φ an; der freie Schenkel schneide k in C_1 und C_2. Die Parallele zu $A'C'$ durch C_1 bzw. C_2 schneide g in A_1 bzw. A_2. Die beiden Quadrate $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$, die $\overline{A_1C_1}$ bzw. $\overline{A_2C_2}$ zur Diagonale haben, erfüllen auf Grund der vorgenommenen Ähnlichkeitsabbildung die geforderten Bedingungen.

9/11 $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$; $385 + 1 = 386$ und 386 ist keine Primzahl; $2 \cdot 385 + 1 = 771$, und 771 ist keine Primzahl, denn 3/771;
$3 \cdot 385 + 1 = 1156$, und 1156 ist keine Primzahl, denn 2/1156;
$4 \cdot 385 + 1 = 1541$, und 1541 ist keine Primzahl, denn 23/1541;
$5 \cdot 385 + 1 = 1926$, und 1926 ist keine Primzahl, denn 2/1926;

$6 \cdot 385 + 1 = 2311$, und 2311 ist Primzahl.
Die Zahl 2311 ist die kleinste Primzahl mit den geforderten Eigenschaften.

9/12 Wenn wir jeden Faktor im Zähler und im Nenner mit $16 = 2^4$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdot\ldots\cdot(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdot\ldots\cdot(24^4+4)}.$$

Unter Beachtung der in der Aufgabe genannten Identität erhalten wir daraus

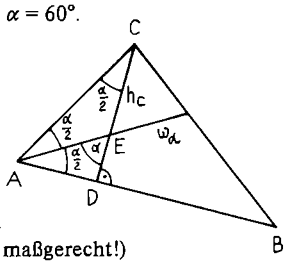
$$\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdot\ldots\cdot(21^2+1)(23^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdot\ldots\cdot(23^2+1)(25^2+1)} = \frac{2}{626} = \frac{1}{313}.$$

9/13 Kraft auf das Elektron in Richtung der positiv geladenen Platte F = Feldstärke E · Elektronenladung e. Nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt: Kraft F = Elektronenmasse m_e · Beschleunigung a, d.h.
$a = E \cdot \frac{e}{m_e}$. Mit $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,A \cdot s$,
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
ergibt sich $a = 1{,}8 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Mit $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$ erhält man
$v = 2{,}65 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

9/14 Aus dem Tafelwerk entnimmt man $\varrho_{Al} = 0{,}028\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{2}$. Der Widerstand R kann aus $R = \frac{2 \cdot l \cdot \varrho_{Al}}{A}$ berechnet werden. $R = 0{,}224\,\Omega$. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der Spannungsabfall $U = I \cdot R$. Der Spannungsabfall beträgt $U = 18$ V.

10/8 Angenommen, es gibt solche Primzahlen, dann gilt $p_2 = a \cdot 1000 + p_1$
und $p_1^2 + 1 = 2(a \cdot 1000 + p_1)$,
$p_1^2 + 1 = 2a \cdot 1000 + 2p_1$,
$p_1^2 - 2p_1 + 1 = 20 \cdot a \cdot 100$,
$(p-1)^2 = 20 \cdot a \cdot 100$. Daraus folgt
$a = 5$ und $p_1 - 1 = 100$ bzw. $p_1 = 101$
und damit $p_2 = 5101$. Tatsächlich sind p_1, p_2 Primzahlen und erfüllen die Bedingungen. Ein anderes Primzahlenpaar mit gleichen Eigenschaften gibt es nicht.

10/9 Nach Voraussetzung ($\overline{AE} \cong \overline{CE}$) gilt $\sphericalangle CAE \cong \sphericalangle ACE \cong \sphericalangle EAD = \frac{\alpha}{2}$.
Im Dreieck AEC gilt nach dem Außenwinkelsatz $\sphericalangle AED = \alpha$. Nach dem Innenwinkelsatz gilt im Dreieck ADE
$\frac{\alpha}{2} + \alpha = 90°$, also $30° + 60° = 90°$.
Es gilt $\alpha = 60°$.



Skizze
(nicht maßgerecht!)

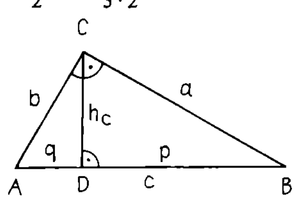
10/10 Aus der gegebenen Ungleichung folgt schrittweise durch Umformen

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 < 6 + \frac{36}{113},$$
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < \left(3 + \frac{36}{113}\right)^2,$$
$$2 + 2\sqrt{6} + 3 < 9 + \frac{216}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2,$$
$$2\sqrt{6} < 5 + \frac{103}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2,$$
$$24 < 25 < \left[5 + \frac{103}{113} + \left(\frac{36}{113}\right)^2\right]^2.$$

Die gegebene Ungleichung stellt eine wahre Aussage dar.

10/11 Aus (2) folgt $(ad)^2 = acb$, und daraus folgt $a = 1$. Mit $a = 1$ ergeben sich für acb zwei Möglichkeiten, nämlich 169 oder 196. Aus (3) geht hervor, daß $acb = 169$ sein muß, denn vor den Sternen steht kein negatives Vorzeichen. Nun ist $c = 6$, $b = 9$ und $d = 3$. Wegen $196 - 169 = 27$ ergeben sich für die beiden Sterne in (3) $2 = e$ und $7 = f$. Aus (1) $196 : *^2 = **$ kommt wegen $196 = 2^2 \cdot 7^2$ für den ersten Stern nur 2 in Frage, denn $196 : 2^2 = 49$; $4 = g$. Ersetzt man die Sterne durch Buchstaben, so folgt
(1) $abc : e^2 = gb$; (2) $acb : ad = ad$;
(3) $abc - acb = ef$.
Die Lösung des Systems lautet
(1) $196 : 2^2 = 49$; (2) $169 : 13 = 13$;
(3) $196 - 169 = 27$.

10/12 Im Dreieck ADC gilt nach dem Satz des Pythagoras
$q^2 = b^2 - h_c^2$; $q^2 = 100\text{ cm}^2 - 64\text{ cm}^2$;
$q^2 = 36\text{ cm}^2$; $q = 6$ cm.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und BCD folgt $\frac{a}{h_c} = \frac{b}{q}$,
$a = \frac{b \cdot h_c}{q} = \frac{10 \cdot 8}{6}\text{ cm} = \frac{40}{3}\text{ cm}$.
Deshalb gilt
$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{40 \cdot 10}{3 \cdot 2}\text{ cm}^2 = 66{,}6\text{ cm}^2$.

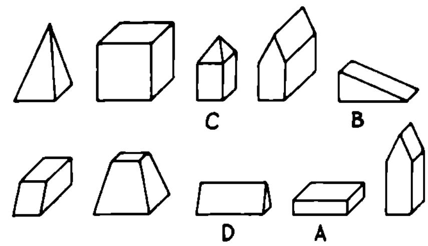


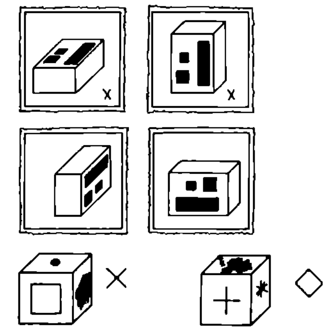
Skizze (nicht maßgerecht!)

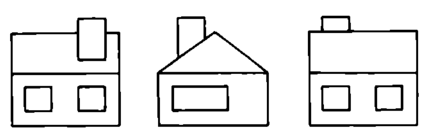
10/13 Die Eigenfrequenz verdoppelt sich, da sich die Kapazität des Kondensators $\left(\text{wegen } c \sim \frac{A}{d}\right)$ und die Induktivität der Spule $\left(\text{wegen } L \sim N^2 \cdot \frac{A}{l}\right)$ halbieren bei Berücksichtigung von $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$.

10/14 Die Haftreibungszahl μ ist definiert als Quotient aus der Reibungskraft zu Beginn des Gleitens F_R und der Normalkraft F_N auf die Unterlage. Bei Beginn des Gleitens ist die Hangabtriebskraft gleich der Reibungskraft. Ist G die Gewichtskraft des Körpers und α der Neigungswinkel, so ergibt sich aus dem Parallelogramm der Kräfte
$F_R = G \cdot \sin\alpha$ und $F_N = G \cdot \cos\alpha$.
Also $\mu = \tan\alpha$.
Die Haftreibungszahl beträgt 0,65.

Lösungen zu: Aufgaben, die Du „im Kopf" lösen sollst







Imke Nicole Marcel

Lösungen zu: Eine Regel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

▲2▲ Bild 1 (Achsenschnitt) zeigt, wie man das Volumen aus den Volumina geeigneter Kegel gewinnen kann:
$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4$

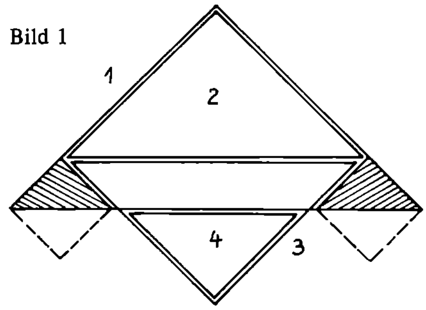
$r_1 = r + \frac{a}{2}\sqrt{2}$ $\quad r_2 = r_3 = r$ $\quad r_4 = r - \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$h_i = r_i$ $\quad V_i = \frac{\pi}{3} r_i^2 h_i = \frac{\pi}{3} r_i^3$ $(i = 1, \ldots, 4)$

$$\frac{V}{2} = \frac{\pi}{3}\left(\left(r + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 - r^3 - r^3 + \left(r - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3\right) = \ldots = \pi r a^2$$

$V = 2\pi r a^2 = 720\,\pi\text{cm}^3$

Bild 1



▲3▲ $V = \frac{1}{3}\pi h^2 c$

$V = \frac{1}{3}\pi p \cdot q \cdot c$ (Höhensatz)

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{c} \frac{b^2}{c} \cdot c$ (Kathetensatz)

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{c}$

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

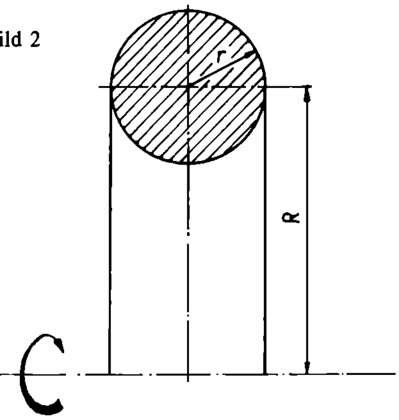
$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{1{,}5^2\,\mathrm{dm}^2\cdot 3{,}6^2\,\mathrm{dm}^2}{\sqrt{1{,}5^2+3{,}6^2}\,\mathrm{dm}}$$

$$\approx 7{,}8\ \mathrm{dm}^3$$

▲4▲ Das jeweilige Volumen (V_a im Fall a), V_b im Fall b) hängt ab vom Inhalt der rotierenden Fläche (in beiden Fällen derselbe!) und vom Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Rotationsachse. Letzterer ist im Fall a) größer als im Fall b).
Es ist also $V_a > V_b$.

▲5▲ Mit den Bezeichnungen von Bild 2 gilt $V=r^2\pi\cdot 2\pi R=2\pi^2Rr^2$.

Bild 2



▲6▲ Rotiert ein Halbkreis mit dem Radius r um seinen Durchmesser (Bild 3), so entsteht eine Kugel. Deren Volumen ist bekannt $\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3\right)$, läßt sich aber auch nach der GULDINschen Regel berechnen:

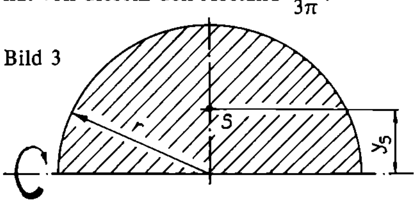
$$V=\frac{1}{2}r^2\pi\cdot 2\pi y_s=\pi^2r^2\cdot y_s.$$

Dabei ist y_s der Abstand des gesuchten Schwerpunktes S vom Durchmesser. Durch Gleichsetzen erhält man

$$y_s=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi^2r^2}=\frac{4}{3}\ \frac{r}{\pi}.$$

Aus Symmetriegründen liegt S auf der Mittelsenkrechten des Durchmessers und hat von diesem den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$.

Bild 3



▲7▲

$$\begin{array}{ll} A_a = 1800\ \mathrm{mm}^2 & y_a = 85\ \mathrm{mm}\\ A_b = 1600\ \mathrm{mm}^2 & y_b = 110\ \mathrm{mm}\\ A_c = 3000\ \mathrm{mm}^2 & y_c = 145\ \mathrm{mm}\\ A_d = 600\ \mathrm{mm}^2 & y_d = 185\ \mathrm{mm}\\ A_e = 300\ \mathrm{mm}^2 & y_e = 130\ \mathrm{mm}\\ \underline{A_f = 300\ \mathrm{mm}^2} & y_f = 180\ \mathrm{mm}\\ A_{ges} = 7600\ \mathrm{mm}^2 & \end{array}$$

$$A_ay_a+\ldots+A_fy_f=968\,000\ \mathrm{mm}^3$$
$$968\,000\ \mathrm{mm}^3=7600\ \mathrm{mm}^2\cdot y_s$$
$$y_s=127{,}4\ \mathrm{mm}$$
$$V=A_{ges}\cdot 2\pi y_s=6\,083\,631\ \mathrm{mm}^3$$
$$\approx 61\,000\ \mathrm{cm}^3$$

(Es fällt auf, daß zunächst durch A_{ges} dividiert wurde, um dann wieder damit zu multiplizieren. Man kann deshalb kürzer und weniger fehleranfällig rechnen
$V=2\pi(A_ay_a+\ldots+A_fy_f)$
$=2\pi\cdot 986\,000\ \mathrm{mm}^3\approx 61\,000\ \mathrm{cm}^3$.)

▲8▲ 1: $A_o=8\pi ar$ 2: $A_o=8\pi ar$
3: $A_o=\pi h(a+b)$
(Der Schwerpunkt der rotierenden *Kurve* hat von der Rotationsachse den Abstand $\frac{h}{2}$.) 5: $A_o=4\pi^2rR$

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ **Ein Kunstgegenstand**
Ein Kunstgegenstand hat die Form einer Glaskugel. In ihrem Inneren befindet sich ein Würfel, dessen 8 Eckpunkte diese Kugel berühren. Im Inneren des Würfels befindet sich eine zweite farbige Kugel, die die 6 Seitenflächen des Würfels berührt. In welchem Verhältnis stehen die beiden Kugelvolumen zueinander?
Lösung:

Volumen der großen Kugel: $V_1=\frac{\pi}{6}d_1^3$

Der Durchmesser d_1 der großen Kugel ist die Raumdiagonale des Würfels. Daraus errechnet sich die Kantenlänge a des Würfels, die ihrerseits gleich dem Durchmesser d_2 der kleinen Kugel ist.

$$d_1^2=3a^2\rightarrow a=\frac{d_1^2}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,d_1=d_2$$

Das Volumen der kleinen Kugel ist demnach: $V_2=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,d_1\right)^3$

Das Verhältnis der Kugelvolumen:

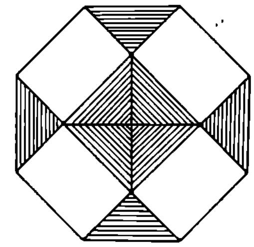
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\pi}{6}d_1^3}{\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{27}3\sqrt{3}\,d_1^3}=\frac{1}{\frac{1}{9}\sqrt{3}}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{3}}=9\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Die beiden Kugelvolumen stehen im Verhältnis $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\sqrt{3}}{1}$.

▲2▲ **Scheinbar schwer, doch ganz einfach**
Vereinfache folgenden Ausdruck und gib seinen Wert als eine Zahl im Zähler und eine im Nenner an.
Lösung: Der Faktor $(1\cdot 2\cdot 4)$ ist in jedem Summanden des Zählers enthalten, der Faktor $(1\cdot 3\cdot 9)$ in jedem Summanden des Nenners. Also gilt:

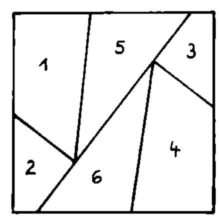
$$\frac{(1\cdot 2\cdot 4)\cdot(1+8+\ldots+343)}{(1\cdot 3\cdot 9)\cdot(1+8+\ldots+343)}=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 9}=\frac{8}{27}.$$

▲3▲ In einem regelmäßigen Achteck werden zwei parallele Diagonalen gezeichnet (siehe Bild). Beweist, daß der Flächeninhalt des so erhaltenen Rechtecks halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Achtecks!
Lösung: Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des regelmäßigen Achtecks kann dieses in 8 zueinander kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke und vier zueinander kongruente Rechtecke zerlegt werden (vgl. Figur). Da das in der Aufgabe dunkel gezeichnete Rechteck sich aus 4 solchen Teildreiecken und 2 solchen Teilrechtecken zusammensetzt, folgt die Behauptung der Aufgabe.



Lösung zu: Die Quadratur des gleichseitigen Dreiecks

Die Seite des Quadrates ist $\frac{5}{2}\sqrt[4]{3}$.



Lösung zur Schachecke

Weiß: Ke1, Tc2, Th1 – Schwarz: Ka1.
1. Kd2, 1. Ke2, 1. Kf2, 1. 0-0
(Rochade: König zieht von e1 nach g1 und der Turm von h1 nach f1).

Bemerkungen und Lösungen zu: Alphons' Traum

Ein eigenartiges Multiplikationsschema
Das eigenartige, uneingeschränkt anwendbare Multiplikationsverfahren beruht auf der Darstellung der Zahlen im Dualsystem. Wenn die (natürlichen) Zahlen Z und K zu multiplizieren sind, geht man von der Darstellung von Z mit Zweierpotenzen aus:

$$Z=c_o2^0+c_12^1+\ldots+c_{n-1}2^{n-1}+c_n2^n \qquad c_i\in\{0;1\};\ c_n=1$$
$$=c_o\ +c_12\ +\ldots+c_{n-1}2^{n-1}+2^n,$$

Für die Multiplikation wird zunächst der erste Term abgespalten
$Z\cdot K=c_oK+Z_1K$
Wenn $c_o=0$, ist Z gerade, der Wert rechts wird – wegen Geradzahligkeit links – nicht in die Addition einbezogen.
Bei $c_o=1$ bleibt rechts K; bei der nachfolgenden Division durch 2 („Halbierung") entfällt dann der entstehende Rest, weil bereits in $1\cdot K$ berücksichtigt.
Addition auf der rechten Seite: c_oK
$Z_1\cdot K$
$=2K(c_1+c_22+\ldots+c_{n-1}2^{n-1}+2^{n-1})$
wieder wird der erste Term abgespalten
$=c_12K+2KZ_2$
Addition auf der rechten Seite: c_12K
$Z_2\cdot 2K=c_22^2K+2^2KZ_3$
Addition auf der rechten Seite: c_22^2K
Das Verfahren wird fortgesetzt (Halbierung, Abspalten) bis
$Z_n2^{n-1}K=c_n2^nK=2^nK$

Addition auf der rechten Seite: 2^nK
Die abgespaltenen Glieder rechts werden addiert, wobei bei $c_i = 0$ (gerade linke Seite) der Summand rechts entfällt. Es ergibt sich $Z \cdot K$.

Familienreise

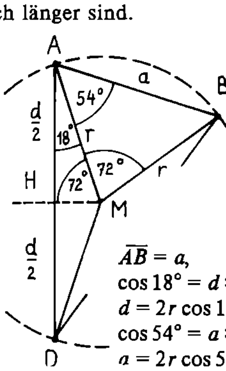
Für den Fahrer des Wagens gibt es zwei Möglichkeiten (Vater, Mutter), für den Fahrer des Motorrads ebenfalls 2 (Sohn 1, Sohn 2). Der Platz rechts vom Fahrer ist durch den Opa festgelegt. Für das eine Elternteil, den anderen Sohn und die Kusine bleiben die beiden Rücksitze im Wagen und der Soziussitz auf dem Krad. (Permutation $3! = 6$)
Gesamtzahl der Möglichkeiten:
$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$, also 23 Wechsel sind erforderlich.

Problem

a) Von A aus gibt es 4 Möglichkeiten zu den Orten B, C, D, E. Vom 2. Punkt der Reise noch Verbindungen zu den restlichen 3 Punkten und von dort aus noch 2 Varianten. In den $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten sind aber alle doppelt gezählt (nämlich in einer und in der umgekehrten Richtung). Es bleiben 12 ,Traum'wege.
b) Der eingeschlagene Weg auf den Seiten des Fünfecks ist (abgesehen von der umgekehrten Aufeinanderfolge) der kürzeste und ist 5 $\overline{AB}$ lang. In jedem anderen Falle sind mindestens 2 Diagonalen zu durchlaufen, die je mit

$\frac{\overline{AB}}{2}(\sqrt{5}+1)$ oder $1{,}618\ \overline{AB}$

deutlich länger sind.



$\overline{AB} = a$,
$\cos 18° = d : 2r$
$d = 2r \cos 18° = 1{,}9021r$
$\cos 54° = a : 2r$
$a = 2r \cos 54° = 1{,}1756r$

$d : a = 1{,}9021 : 1{,}1756 = 1{,}618$
(Der $\cos 72°$ läßt sich nach dem Goldenen Schnitt beim Teildreieck des reg. Zehnecks bestimmen zu $0{,}25\,(\sqrt{5}-1)$
es folgt $d = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$,

$a = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ und $\frac{d}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Lösung zur ALPHA-Tüftelei

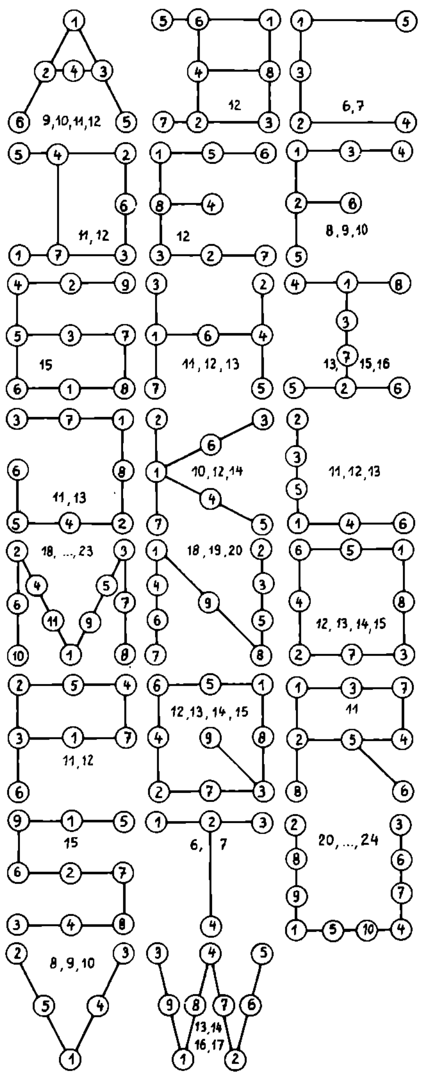
$a = 11$, $b = 21$, $c = 18$, $d = 24$, $e = 20$,
$f = 7$, $g = 5$, $h = 3$, $i = 23$, $j = 14$,
$k = 2$, $l = 4$, $m = 15$, $n = 13$, $o = 17$,
$p = 16$, $q = 6$, $r = 1$, $s = 10$, $t = 8$,
$u = 19$, $v = 12$, $w = 22$, $x = 9$

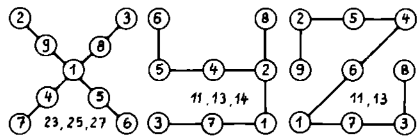
Lösungen zu: Kurz nachgedacht

1. Wegen $4\alpha = 180°$ gilt
$2\alpha = 90°$
2. Wegen $\alpha = \beta$ und $6 \cdot \beta = 180°$ gilt
$\alpha = 30°$
3. Wegen $4 \cdot \beta = 180°$ gilt $\beta = 45°$.
Aus der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel gilt $b \parallel c$.
4. Wegen $6\alpha = 180°$ gilt $3\alpha = 90°$,
also $\sphericalangle ACB = 90°$.
5. Lot von C auf AB, Fußpunkt E.
Wegen der allgemeinen Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke gilt
$2 \cdot \overline{CE} = \overline{BC} = a$.
Damit $\overline{CE} = \frac{a}{2}$. Wegen $AD \parallel CE$ ist die Aussage begründet.
6. $\overline{AB} = 3a$.
7. Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BCD$.
a) $\sphericalangle DBC = 15°$;
Umkehrung des Wechselwinkelsatzes.
b) $1:4$.
8. Siehe Lösung zu 5.! $\overline{AC} = 2c$.
Damit: $u = 8c$

Lösungen zu:
Magisches ALPHA-Alphabet

Man könnte jede Buchstaben-Figur auf die Gesamtheit aller Eintragungsmöglichkeiten hin untersuchen, das aber würde hier zu weit führen und zu umfangreich sein. Wir haben deshalb je Figur nur eine mögliche Eintragung angegeben, und zwar diejenige mit der kleinstmöglichen charakteristischen Summe.





Leserpost zur Leserpost

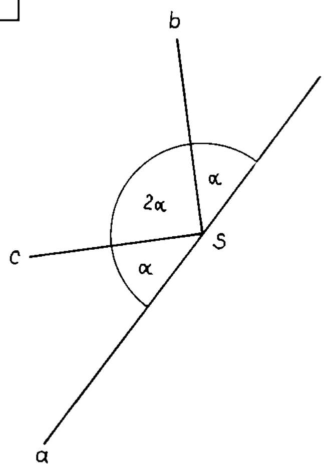
Kritik gab es seitens unserer Leser Hans-Dietrich Schwabe (Sondershausen), Rolf Kamieth (Leipzig) und Sven Peyer (Weimar) an der Leserpostaufgabe 5 in *alpha* Heft 6/90, Seite 139.
Stellvertretend sei aus der Einsendung von Hans-Dietrich Schwabe zitiert:
Um „alle positiven Wurzeln x und z" zu ermitteln, reichen weder die besten Mathematiker noch die aufwendigsten Computer aus, denn für x kann **jede** positive Zahl gewählt werden und zu dieser läßt sich eindeutig ein passendes z bestimmen. Gemeint ist wahrscheinlich die Bestimmung „der Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen". Dann gingen dem Aufgabensteller jedoch 70 % der Lösungen durch die Lappen.

Die Gleichung $x^2 + 84^2 = z^2$
wird umgeformt:
$$z^2 - x^2 = 84^2$$
$(z-x)(z+x) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$
$(z-x) \mid 84^2$, $(z+x) \mid 84^2$, $(z-x) < (z+x)$,
$(z-x) < 84$.
Sei $(z-x)$ ungerade, so ist von x und z genau eine Zahl ungerade, daher ist auch $(z+x)$ ungerade und auch das Produkt $(z-x)(z+x)$.
Das steht im Widerspruch zu 84^2.
Sei $16 \mid (z-x)$. Dann ist $(z+x)$ ungerade und daher genau einer der Summanden ungerade und somit auch $(z-x)$, was im Widerspruch zur gemachten Voraussetzung steht.
$(z-x)$ enthält deshalb einen der Teiler 2, 4, 8.
Nunmehr können alle Zahlen, die für $(z-x)$ in Frage kommen, notiert werden und dazu kann dann das zugehörige $(z+x)$ bestimmt werden. Aus beiden kann dann durch Differenzbildung auf x und dann auf z geschlossen werden.

$(z-x)$	$(z+x)$
= 2, 4, 8	= 3528, 1764, 882
= 6, 12, 24	= 1176, 588, 294
= 18, 36, 72	= 392, 196, 98
= 14, 28, 56	= 504, 252, 126
= 42	= 168

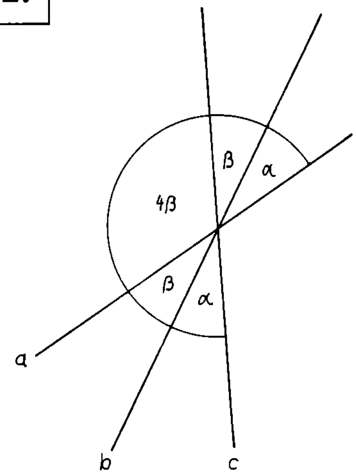
(In allen anderen Fällen würde $(z-x)$ nicht kleiner als 84.)
$(z+x) - (z-x)$
$= 2x = 3526, 1760, 874$
$= 1170, 576, 270$
$= 374, 160, 26$
$= 490, 224, 70$
$= 126.$
$x = 1763, 880, 437, 585, 288, 135, 187,$
$80, 13, 245, 112, 35, 63$
$z = 1765, 884, 445, 591, 300, 159, 205,$
$116, 85, 259, 140, 91, 105.$
Mit den jeweils untereinanderstehenden Zahlen sind damit alle 13 Paare bestimmt.

1.



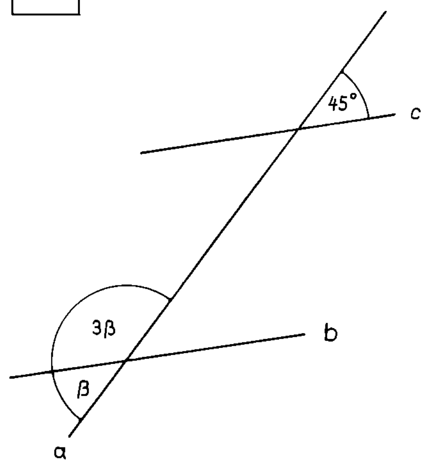
Begründe, daß $c \perp b$!

2.



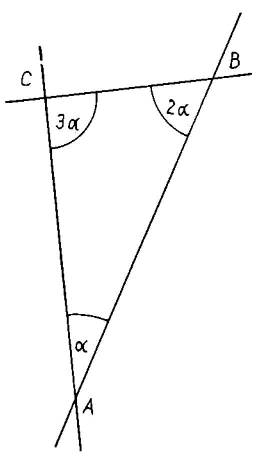
Wie groß ist α?

3.



Begründe, daß $b \parallel c$!

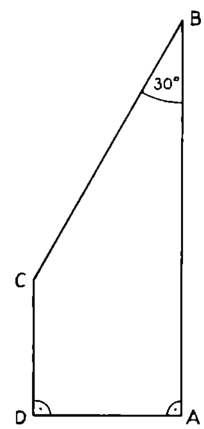
4.



Begründe, daß $AC \perp BC$!

Kurz nachgedacht

5.

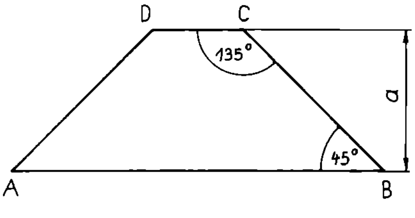


Begründe, daß $\overline{AD} = \overline{CD}$!

$\overline{BC} = a$

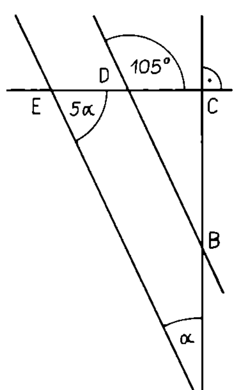
$\overline{CD} = \frac{a}{2}$

6.



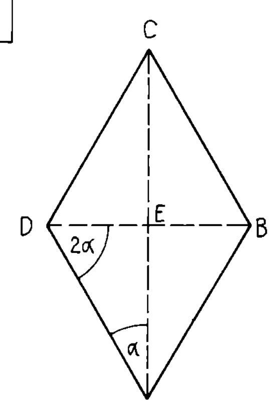
Wie lang ist $\overline{AB}$?
$\overline{CD} = a$

7.

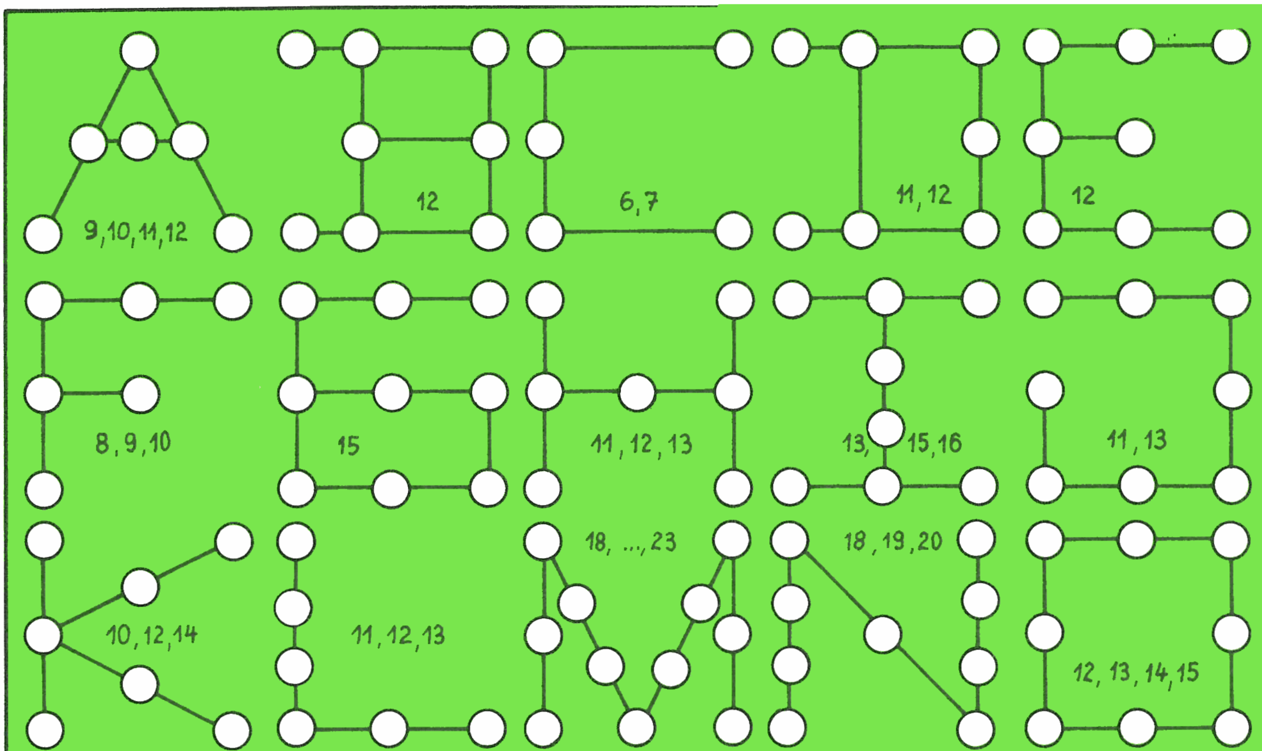


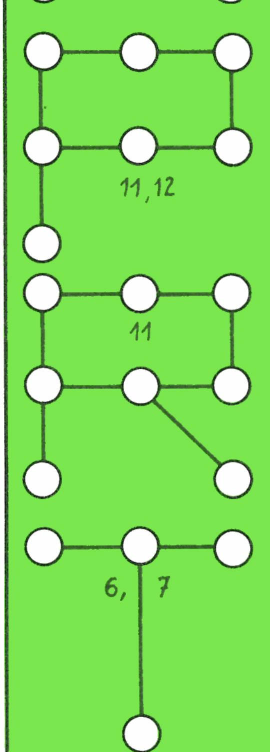
a) Begründe,
daß $\triangle BCD \sim \triangle ACE$
b) $\overline{CD} = \overline{DE}$
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle ACE$ zueinander?

8.



ABCD sei ein Rhombus.
$\overline{DE} = c$
Gib den Umfang des Rhombus *ABCD* als Funktion von c an!





Magisches ALPHA-Alphabet

Tragt in jede Buchstabenfigur die natürlichen Zahlen von 1 bis n (n = Anzahl der Kreisfelder in der Figur) so ein, daß die Zahlensummen auf jedem geradlinigen Buchstabenabschnitt den gleichen Wert (charakteristische Summe) besitzen!
In der Abbildung sind die möglichen charakteristischen Summen einer jeden Figur eingetragen.
Darüber hinaus wäre es mathematisch interessant, jede einzelne Figur auf die Gesamtheit aller Eintragungsmöglichkeiten hin zu untersuchen.

Viel Spaß dabei wünscht Euch
R. Mildner