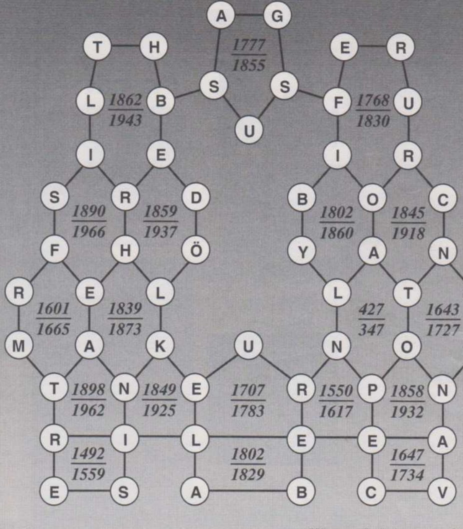
H 11328 F

Heft 4
August 1991
25. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

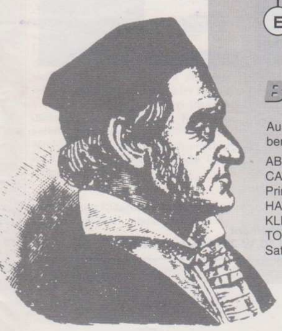


Wann lebte wer?

Bedeutende Mathematiker

Aus den Buchstaben in den Umrandungs-Polygonen kann man die den Lebensdaten zugeordneten Mathematikernamen bilden.

ABELsche Gruppe • ARTINsches Reziprozitätsgesetz • BOLYAI-Geometrie CANTORsches Diagonalverfahren • EULERsche Funktion • FERMATsche Primzahl • FISHERsche Verteilung • FOURIERreihe • GAUSS-Algorithmus HANKEL-Transformation • HILBERTraum • HÖLDERsche Ungleichung KLEINsche Vierergruppe • nach Adam RIES • NEPERsche Regel • NEWTON-Interpolation • PEANOsches Axiomensystem • PLATONischer Körper Satz von CEVA



alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung:
Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist zu beziehen durch den Buch- und Zeitschriftenhandel oder direkt vom Verlag. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze

ISBN 3-617-34004-0

Inhalt

1. Teil

Von der Ähnlichkeit zur Selbstähnlichkeit

In den letzten zehn Jahren erlangte der Begriff des Fraktals in der Mathematik und der Physik eine immer größere Bedeutung. Das liegt unter anderem wesentlich an der stürmischen Entwicklung der Computertechnik. Wir wollen Euch in diesem Artikel mit einer speziellen Klasse von Fraktalen, den "Selbstähnlichen Mengen", bekannt machen. Gleichzeitig geben wir im zweiten Teil ein einfaches Basic-Programm für den KC 85/3 an, mit welchem Ihr selbständig solche Mengen erzeugen könnt.

In den Greifswalder Schulen wird jährlich in den Klassenstufen 3 bis 6 ein Wettstreit im Fach Mathematik um den "Pokal des Rektors der Ernst-Moritz-Arndt-Universität" ausgetragen. Eine Aufgabe für die Klasse 6 war 1988 die folgende:

Die Figur A aus **Abbildung 1** ist in vier kongruente Teile zu zerlegen.

Abbildung 2 zeigt die Lösung.

Die Figur A erhalten wir also als Zusammenfassung (Vereinigung) der Figuren A_1, A_2, A_3, A_4. Wir schreiben dafür $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Die Figuren A_i, i=1,2,3,4, sind dabei untereinander und auch zur großen Figur ähnlich, d. h. je zwei solcher Figuren lassen sich durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander überführen.

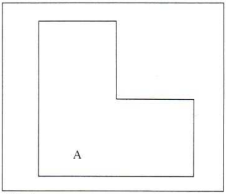


Abb. 1

Wir erinnern daran, daß Ähnlichkeitsabbildungen Nacheinanderausführungen von Bewegungen und zentrischen Streckungen sind und fragen uns nun, welche Ähnlichkeitsabbildungen f_1, f_2, f_3, f_4 die Figur A in A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 überführen. Dazu legen wir die Figur A geeignet in ein Koordinatensystem (**Abbildung 3**).

Die zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $P_0(0;0)$ und dem Streckungsfaktor k=0,5 überführt A in A_1. Im folgenden wollen wir bei zentrischen Streckungen, deren Streckungsfaktor k echt kleiner als 1 ist, von zentrischen Stauchungen sprechen. A wird durch die zentrische Stauchung mit dem Zentrum $P_1(0,5;0,5)$ und dem gleichen Faktor k=0,5 auf A_2 abgebildet. Wir erhalten als Ähnlichkeitsabbildungen f_1 und f_2 die beiden zentrischen Stauchungen:

	Zentrum	**Faktor**
$\mathbf{f_1}$	P_0 (0;0)	0,5
$\mathbf{f_2}$	P_1 (0,5;0,5)	0,5

Die beiden Ähnlichkeitsabbildungen f_3 und f_4, die A in A_3 bzw. A_4 überführen, bekommen wir als Zusammensetzung von f_1 und einer Spiegelung an einer Geraden. Genauer: Um A auf A_3 abzubilden, führen wir erst die zentrische Streckung f_1 aus und danach eine Spiegelung an der Geraden, die parallel zur Abszissenachse durch den Punkt (0;0,5) verläuft. Diese Nacheinanderausführung ist unsere gesuchte Ähnlichkeitsabbildung f_3. Analog zu f_3 wird f_4 durch Nacheinanderausführung von f_1 und der Spiegelung an der Parallelen zur Ordinatenachse durch den Punkt (0,5;0) erhalten. Es ist dann $f_i(A)=A_i$ für i=1, ..., 4 und wir können die Gleichung

$A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

auch in der Form

$A=f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A) \cup f_4(A)$

schreiben.

1. Aufgabe:

Ermittelt die Koordinaten des Zentrums der Ähnlichkeitsabbildungen f_3 und f_4.

A läßt sich also als Vereinigung von Teilen $f_i(A)=A_i$, i=1, ..., 4, darstellen, die alle wieder zu A ähnlich sind. Figuren, für die dies möglich ist, nennt man selbstähnlich. Für eine

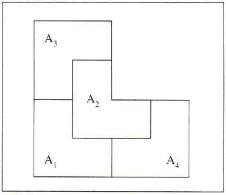


Abb. 2

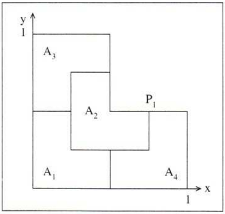


Abb. 3

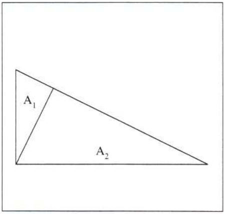


Abb. 4

exakte mathematische Definition einer selbstähnlichen Menge benötigen wir noch zwei Eigenschaften ebener Mengen. Wir nennen eine ebene Menge A beschränkt, wenn man um diese einen Kreis zeichnen kann, der die Menge ganz enthält. So ist z. B. ein Strahl im Gegensatz zu einer Strecke oder einem Quadrat nicht beschränkt. Eine ebene Menge A heißt abgeschlossene ebene Menge, wenn zu A auch der Rand von A gehört. Die Menge

$A_1 = \{(x;y) \mid \ 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1\}$

ist nicht abgeschlossen, wohingegen die Menge

$A_2 = \{(x;y) \mid \ 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le 1\}$

abgeschlossen ist.
Wir können nun den Begriff der selbstähnlichen Menge exakt definieren:
Definition: (selbstähnliche Menge)
Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge A der Ebene heißt selbstähnliche Menge, wenn n,n $\in$ N, Ähnlichkeitsabbildungen f_1, ..., f_n deren Streckungsfaktoren alle kleiner als 1 sind derart existieren, daß $A = f_1(A) \cup ... \cup f_n(A)$ ist.
Ein weiteres Beispiel für eine selbstähnliche Figur ist jedes rechtwinklige Dreieck (**Abbildung 4**).

2. Aufgabe:

Sucht weitere Beispiele für selbstähnliche Figuren. Wie sehen dabei die zur jeweiligen Figur ähnlichen Teile A_i und die Ähnlichkeitsabbildungen f_i aus?

Die Bilder 5 und 6 zeigen zwei selbstähnliche Mengen, die mit Hilfe des Kleincomputers KC 85/3 erzeugt wurden.
Sie zeigen die reizvolle Struktur selbstähnlicher Mengen. Zu jedem dieser beiden Beispiele gehören drei Ähnlichkeitsabbildungen f_1, f_2 und f_3, die sich als Nacheinanderausführung einer Drehung und einer zentrischen Stauchung ergeben. Dabei sind jeweils das Drehzentrum und das Stauchungszentrum gleich. In der Angabe

f_i : k ; w ; x ; y ;

sind k der Stauchungsfaktor,
w der Drehwinkel, $-360° \le w \le 360°$,
x die Abszisse des Stauchungszentrums,
y die Ordinate des Stauchungszentrums.

Im 2. Teil werden wir ein einfaches Basic-Programm für den KC 85/3 angeben, mit dem Ihr Euch eine Vielzahl solcher selbstähnlicher Figuren erzeugen könnt (**Abbildung 5**).

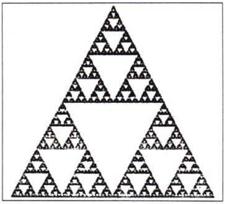


Abb. 5

f_1 : 0,5 ; 0° ; 0,0 ; 0,0
f_2 : 0,5 ; 0° ; 1,0 ; 0,0
f_3 : 0,5 ; 0° ; 0,5 ; 0,866
Grenzen: -0,5 ; 1,5 ; -0,25 ; 1,25

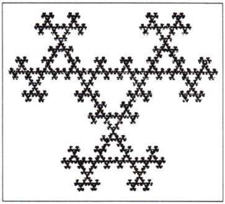


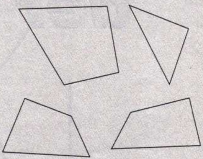
Abb. 6

f_1 : 0,5 ; 300° ; 1,0 ; 0,0
f_2 : 0,5 ; 300° ; -0,5 ; 0,87
f_3 : 0,5 ; 300° ; -0,5 ; -0,87
Grenzen: -2,0 ; 2,0 ; -1,5 ; 1,5

Dr. Uwe Feiste, stud. math. E. Krause
Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Cutting Polygons

1 The German mathematician David Hilbert proved a very interesting theorem: Any polygon can be changed into any other polygon of the same area by cutting the first polygon into a finite number of pieces which can then be arranged to form the second polygon.
Using Hilbert's approach, however, the number of pieces can be very large. To achieve the same results with a small number of pieces may be quite a challenge. The English inventor Henry Dudney has developed a beautiful way to cut an equilateral triangle into four pieces which can be put together to create a square. The drawing gives you the four pieces. Make a copy, cut them out, and put them together to form a square. Then rearrange the pieces to form an equilateral triangle.



aus: Fun with mathematics, Toronto

Les dix chiffres

2 Pour écrire en système décimal deux nombres A et B, leur somme S, et leur différence D, on a utilisé une fois et une seule chacun des chiffres de 0 à 9.
Trouver A et B, sachant que A est plus grand que B.

aus: Tangente, Paris

3 Судно "Альфа" пришвартовалось к причалу раньше, чем судно "Квант". Сможет ли оно и отплыть раньше, если при этом не снимать с тумбы швартовочный канат "Кванта" (см. рисунок)?

aus: Quant, Moskau

Die Symmetrie der Sechsecke

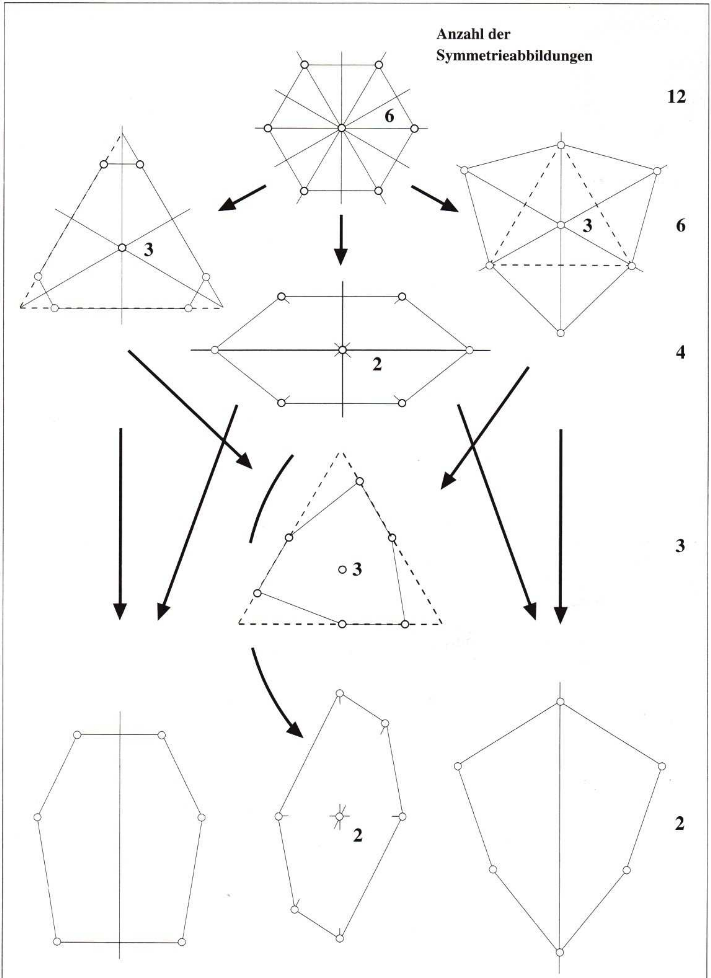
Dieser kleine Beitrag steht im Zusammenhang mit dem Artikel „Wie symmetrisch ist ein Vieleck?" in dieser Zeitschrift (Heft 3/91). Doch ist er auch für sich selbst verständlich.

Wir möchten eine vollständige und systematische Übersicht über die möglichen Symmetrien der Sechsecke geben und erhalten auf diese Weise auch eine gewisse Systematik der Sechsecke.
Zunächst erinnern wir an einige Symmetriebegriffe und -bezeichnungen:
Eine Gerade a ist eine Symmetrieachse einer Figur F, wenn die Spiegelung an a die Figur F auf sich abbildet.
Ein Punkt Z heißt Drehsymmetriezentrum m-ten Grades einer Figur F, wenn es (genau) m Drehungen um Z gibt, die die Figur F auf sich abbilden. (Die identische Abbildung ist dabei stets als mögliche Drehung mit dem Drehwinkel 0° mitzuzählen!) Ein Drehsymmetriezentrum 2. Grades entspricht demnach einfach dem Begriff Symmetriezentrum.
Symmetrien einer Figur werden einfach durch die Deckabbildungen erfaßt, und letztere heißen deshalb Symmetrieabbildungen. Ein Vieleck kann nur Geradenspiegelungen und Drehungen mit gemeinsamen Drehzentrum als Symmetrieabbildungen besitzen. Dabei liegt das Drehzentrum auf den Achsen der Geradenspiegelungen.
Im folgenden setzen wir ein konvexes Sechseck voraus.
a) Ein Sechseck kann höchstens 12 Symmetrieabbildungen besitzen. Es ist dann (und nur dann) regelmäßig und besitzt 6 Symmetrieachsen und ein Drehsymmetriezentrum 6ten Grades.
Jede geringere Anzahl von Symmetrieabbildungen muß ein Teiler von 12 sein.
b) Sechsecke mit genau 6 Symmetrieabbildungen sind die sogenannten halbsymmetrischen Sechsecke. Sie besitzen 3 Symmetrieachsen und ein Drehsymmetriezentrum 3ten Grades. Die Symmetrieachsen sind entweder die Mittelsenkrechten der Seiten oder die Winkelhalbierenden der Innenwinkel.
c) Ein Sechseck mit genau 4 Symmetrieabbildungen muß genau 2 Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum besitzen. Dabei ist eine Symmetrieachse Seitenmittelsenkrechte und die andere Winkelhalbierende.
d) Genau 3 Symmetrieabbildungen bestehen nur bei einem Sechseck mit nur einem Drehsymmetriezentrum 3ten Grades.
e) Genau 2 Symmetrieabbildungen liegen vor, wenn das Sechseck entweder nur eine Symmetrieachse oder nur ein Symmetriezentrum besitzt. Die Symmetrieachse kann entweder Seitenmittelsenkrechte oder Winkelhalbierende sein.
Eine nähere Einsicht über die Symmetriezusammenhänge gibt folgende Eigenschaft: Besitzt eine Figur zwei Symmetrieachsen a und b, die sich in einem Punkt Z schneiden, dann ist die Drehung um Z mit einem Drehwinkel, der doppelt so groß wie der von a und b eingeschlossene Winkel ist, eine Symmetrieabbildung der Figur.
Die nebenstehende grafische Übersicht faßt unsere Ergebnisse zusammen und berücksichtigt insbesondere logische Zusammenhänge:

Dr. Erhard Quaisser, Fachbereich Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Verblüffendes

Man denke sich um den ca. 40000 km langen Erdäquator ein überall fest anliegendes Band gezogen. Nun wird dieses Band um einen Meter verlängert und daraufhin wieder so gestrafft, daß es einen zum Äquator konzentrischen Kreis bildet.
Wie hoch liegt das Band jetzt über der Erde? Kann eine Maus jetzt hindurchkriechen?
Fertig?
Nun führt doch einmal dieses Experiment an einem Fußball aus. Sein „Äquator" ist etwa einen Meter lang.
Wie hoch steht jetzt das wieder um einen Meter verlängerte Band über der Balloberfläche?


Anzahl der Symmetrieabbildungen
12
6
6
3
3
6
3
4
2
3
3
2
2

2. Teil

Gemixtes aus: Wer übt, kommt weiter

Wer übt, kommt weiter ist nicht nur eine alte Weisheit, sondern auch der Titel eines mathematischen Übungsbuches, das im Sommer dieses Jahres erscheint (im Verlag Volk und Wissen GmbH Berlin). Wir hatten es bereits im Heft 3/91 vorgestellt und haben nun für „helle Köpfe" noch weitere Aufgaben herausgesucht. Na dann - viel Spaß!

1. a) Zeige, daß die folgenden Gleichungen wahre Aussagen sind!

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

(2) $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$

b) Gib weitere Beispiele für solch "wahre" Gleichungen an!
c) Unter welchen Voraussetzungen gilt die verwendete Gesetzmäßigkeit?

2. Forme die Gleichung nach x um!

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$$

$(a \neq b;\ a \neq -b;\ x \neq 0)$

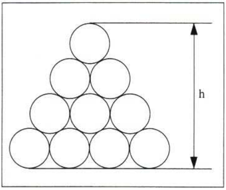


Abbildung 1

3. Berechne die Höhe h, wenn 10 Rohre mit dem Außendurchmesser d = 0,30 dm wie in der **Abbildung 1** gestapelt sind!

4. Vervollständige den Beweis!
Satz: Für alle $a, b, c, d \in Q$ und $b \neq 0,\ d \neq 0$ sowie $a \neq b$ und $c \neq d$ gilt, daß aus

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ die Gleichung

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt.

Voraussetzung: ...
Behauptung: ...
Beweis:

(1) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad |\cdot(a-b)\cdot(c-d)$

(2) ...

( ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ w. z. b. w.

5. a) Zeichne einen Kreis und vier Tangenten so, daß diese sich schneiden und ein Viereck ABDC bilden!
b) Miß die Längen der Seiten dieses "Tangentenvierecks" und bilde die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten. Was vermutest Du?
c) Ist die Vermutung allgemeingültig? (Beweis!)

6. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Rechteckseite wird ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a bzw. b konstruiert. Gib Umfang und Flächeninhalt der so entstandenen Figur in Abhängigkeit von a und b an!

7. Es seien
a der absolute Betrag von -0,5;
b das Reziproke von 0,25;
c die entgegengesetzte Zahl von 2;

d die Quadratwurzel von $(-\frac{2}{3})^2$.

Ermittle $a^2 \cdot \sqrt{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$!

8. Der Punkt T liegt auf einer Strecke $\overline{XY}$ und es gelte $\overline{XT} = k \cdot \overline{XY}$. Vervollständige die Tabelle!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$				m:n	
$\overline{XT}:\overline{TY}$				1:2	2:7	2:3		p:q

9. Ermittle jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!
(siehe **Abbildung 2**
auf der folgenden Seite!)

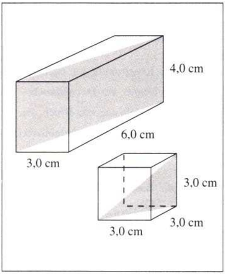


Abbildung 2

10. a) Konstruiere ein Trapez ABCD

$(\overline{AD} \| \overline{BC})$ mit $\overline{AD} = 3,0$ cm, $\overline{BC} = 4,5$ cm,

$\sphericalangle$ CBD = 60°, $\sphericalangle$ BCD = 45°!

b) Konstruiere ein Trapez ABCD

$(\overline{AD} \| \overline{BC})$ mit $\overline{AD} = 3,0$ cm, $\overline{BC} = 4,5$ cm,

$\sphericalangle$ BCA = 45°, $\sphericalangle$ CBD = 60°!

11. Beweise, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks eine natürliche Zahl ist, wenn die drei Seitenlängen des Dreiecks natürliche Zahlen sind!

12. Wenn z eine beliebige zweistellige natürliche Zahl ist, und z' eine Zahl ist, die sich durch Vertauschen der Ziffernfolge von z ergibt (z. B. z = 18; z'=81), dann ist $|z-z'|$ stets durch 9 teilbar.

Beweise diese Behauptung!

13. Ermittle alle natürlichen Zahlen n von 0 bis 100, für die von den folgenden drei Aussagen zwei wahr und eine falsch ist!

(a) n ist eine Primzahl.
(b) n+1 ist eine Zahl, die auf Null endet.
(c) n-1 ist eine Quadratzahl.

14. Gib alle möglichen Anordnungen der vier Buchstaben b; e; o; r an! Dabei sollen genau diese vier Buchstaben ohne Wiederholung auftreten (z. B. rbeo). Schreibe sie in der Reihenfolge auf, wie sie im Wörterbuch stehen würden!

Dr. Lothar Flade, Dr. Manfred Pruzina, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Wie groß ist „alpha"?

Unsere mathematische Schülerzeitschrift erscheint ab jetzt im Friedrich-Verlag (Seelze bei Hannover), formal gilt damit

alpha $\subset$ Friedrich.

Ob die Gleichung

FRIED + RICH = ALPHA

Lösungen (im Sinne eines Kryptogrammes) besitzt, könnt Ihr bitte nachprüfen: Buchstaben sind durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß die Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} \text{FRIED} \\ +\ \ \text{RICH} \\ \hline \text{ALPHA} \end{array}$$

gelöst wird. Die Buchstaben A, F und R sollen nicht Null werden.

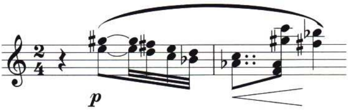
Hier noch ein Tip von Computer-Alphons: Wollt Ihr zur Lösung des Kryptogramms einen Computer benutzen, so braucht Ihr nicht alle Zuordnungen der Ziffern 0,...,9 zu den Variablen A, C, D, E, F, H, I, L, P, R zu betrachten. Mit D und H ist nämlich A und F = A-1 festgelegt. Jeder Wert für E bestimmt C, mit I hat man auch P. Die Wahl von R zieht den Wert von L nach sich. Mögliche Überträge sind dabei zu berücksichtigen (if - then - Anweisungen). Zuordnungen, bei denen verschiedene Variable den gleichen Wert besitzen, sind auszuschließen. Man kommt somit mit fünf for - to - Schleifen für die Variablen D, H, E, I, R aus. Die Rechenzeit ist auch bei kleineren Computern gering.

Dr. Werner Schmidt, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Alphons logische Abenteuer

Nr. 6 „Ach", schwärmte Alphons Schwester, "bei meiner Hochzeit werden alle staunen." Alphons unterbrach sie: "Alle? Auch die Eisbären am Nordpol?" Seine Schwester schaute ihn verdutzt an: "Natürlich meine ich nicht Tiere, sondern Menschen." "Also alle Menschen werden staunen, auch Adam und Eva?" fragte Alphons. Nachdem sich seine Schwester vergewissert hatte, daß auch Alphons die biblischen Wesen meinte, an die sie dachte, sagte sie schon etwas gereizter: "Es können mich dann nur lebende Menschen sehen." Alphons ließ nicht lokker: "Wenn nicht das Fernsehen kommt auch die in Australien?" Da wurde Alphons Schwester wütend: "Alle, die mich sehen!" "Na ja", meinte Alphons freundlich, "das werden aber im Vergleich zu den zu Deiner Hochzeit lebenden Menschen herzlich wenige sein, lohnt sich denn da der Aufwand?" Das könne ihm doch egal sein, und außerdem sei ihr sowieso die Lust am Heiraten vergangen. "Siehst Du, die Wahrheit bewahrt vor Illusionen." "Welche Wahrheit denn?" fragte seine Schwester aufgebracht. "Einfach die, daß bei Aussagen, in denen von allen, einigen, einem oder jeden etwas behauptet wird, der Bereich von Gegenständen angegeben werden muß, über den man dabei behauptet. Wenn Du z. B. behauptest: Für alle Zahlen a, b mit a-b=1 gibt es genau eine Zahl, die zwischen b und a liegt, so ist diese Aussage bezogen auf den Bereich der natürlichen Zahlen wahr, für den Bereich der rationalen oder dem der reellen Zahlen aber ist sie falsch. Ohne Bereichsangabe ist diese Aussage zugleich wahr und falsch, und damit kann sie nicht Prämisse eines logischen Schlusses sein." Alphons wollte das noch seiner Schwester erklären, aber da betrat ihre Mutter die Wohnung.
Seine Schwester hatte schon ganz sehnsüchtig auf sie gewartet, denn die Mutter hatte ihr versprochen, eine bestimmte Art von Zeichenstiften mitzubringen. Die Mutter schüttelte bedauernd den Kopf und sagte. "In allen Geschäften gibt es keine." "Oh, Mutti, sage das nicht so. Unser Alphons wird Dir entgegenhalten: In allen Geschäften, in denen Du nach ihnen gefragt hast, gibt es die von mir gewünschten Zeichenstifte nicht. Du wirst ja nicht in allen Geschäften der Stadt, der Welt oder wo sonst noch gewesen sein." "Kinder", seufzte darauf die Mutter, "da laufe ich mir die Füße wund und ihr verlangt, daß ich gar noch durch die ganze Welt renne! So wichtig sind die Zeichenstifte doch auch nicht." Alphons dachte, daß seine Mutter meint in allen jenen Geschäften der Straße gewesen zu sein, die ihres Wissens nach Zeichenartikel führen, und das wird wohl nicht jedes Geschäft der Straße tun. Immerhin - und er streichelte bewundernd seiner Mutter über die Hände - kommen der Länge der Straße und der Kürze der Zeit nach allerhand Geschäfte in Betracht.

Prof. Dr. Lothar Kreiser, Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig



Was Brüche mit Musik zu tun haben

Für die Betrachtungen zu Schönberg`s Musiktheorie (siehe Seite 11) benötigt Ihr Kenntnisse über Kettenbrüche. Dieser Beitrag ist für diejenigen von Euch gedacht, die auf diesem Gebiet Neulinge sind oder die ganze Sache einfach nochmal auffrischen wollen.

Jeder Leser unserer Zeitschrift weiß, was ein *Doppelbruch* ist - in dessen Zähler und/oder Nenner stehen erneut Brüche wie zum Beispiel

bei $\dfrac{\frac{2}{5}}{3}$, $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{7}{3}}$, $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$.

Wenn man solche Doppelbrüche aufschreibt, sollte man den „Hauptbruchstrich" kennzeichnen, denn natürlich ist z.B.

$$\frac{\;2\;}{\frac{5}{3}} = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5} \text{ verschieden von } \frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{3\cdot 5} = \frac{2}{15}.$$

Nun könntet Ihr einwenden, daß man auf Doppelbrüche überhaupt verzichten kann, denn nach den Regeln für die Division von Brüchen läßt sich jeder solche Doppelbruch in einen "einfachen" Bruch der Gestalt $\frac{a}{b}$ (a,b ganzzahlig) verwandeln.

Jedoch erweisen sich sogar noch kompliziertere Bildungen als Doppelbrüche als außerordentlich nützlich zur Lösung recht unterschiedlicher Probleme, etwa zu Schönbergs Musiktheorie, wie Ihr in einem anderen Artikel dieses Heftes erfahrt.

Auch mit Kettenbrüchen keine Bruchlandung

Zunächst wollen wir uns überlegen, daß man jeden Bruch so umformen kann wie wir es am Beispiel des Bruches $\frac{59}{11}$ vormachen.

Dieser unechte Bruch kann zerlegt werden in einen ganzzahligen Anteil und einen echten Bruch:

$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11}$. Nun können wir $\frac{4}{11}$ als Doppelbruch mit dem Zähler 1 schreiben: $\frac{4}{11} = \dfrac{1}{\frac{11}{4}}$

Da $\frac{4}{11}$ nach Konstruktion ein echter Bruch ist, steht im Nenner des Doppelbruches mit $\frac{11}{4}$ zwangsläufig ein unechter Bruch, den wir erneut in seinen ganzen Anteil und einen echten Bruch verwandeln: $\frac{59}{11} = 5 + \dfrac{1}{\frac{11}{4}} = 5 + \dfrac{1}{2+\frac{3}{4}}$

Wenden wir diese Überlegung nun auf den Bruch $\frac{3}{4}$ an, so erhalten wir weiter:

$$\frac{59}{11} = 5 + \cfrac{1}{2+\frac{3}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}} = 5 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

Beim Versuch, dieses Verfahren fortzusetzen, erhält man nun immer wieder denselben Ausdruck. Damit haben wir den Bruch $\frac{59}{11}$ als „Mehrfachbruch" aus lauter Brüchen mit Zähler 1 „zusammengesetzt".

1. Aufgabe

Forme $\frac{62}{43}$ in dieser Weise in einen „Mehrfachbruch" um!

Offenbar können wir bei jedem Bruch $\frac{a}{b}$ so vorgehen, man braucht dazu nur fortlaufend die *Division mit Rest* anzuwenden (siehe **Tabelle 1**).

Wir erkennen:

1. Das Verfahren ist beendet, wenn erstmalig der Rest Null entsteht. Dies aber tritt stets nach endlich vielen Schritten ein, denn $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ist eine echt abnehmende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, d.h., für ein gewisses n muß schließlich $r_{n+1} = 0$ sein. In obigem Zahlenbeispiel ist $n = 3$, also $r_4 = 0$.
2. Mit q_0 erhält man den ganzen Anteil des Bruches $\frac{a}{b}$, und die folgenden Werte q_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ ergeben fortlaufend die *Teilnenner* des „Mehrfachbruches". Formen wir nämlich alle obenstehenden Gleichungen so um wie hier für die erste von ihnen vorgemacht: $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \dfrac{1}{\frac{b}{r_1}}$

und setzen dies ineinander ein, so erhalten wir:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Ein derartiger "Mehrfachbruch" heißt *Kettenbruch*, genauer *regelmäßiger Kettenbruch*, wenn man besonders betonen will, daß seine *Teilzähler* sämtlich gleich 1 sind. Jede rationale Zahl läßt sich demnach eindeutig als regelmäßiger Kettenbruch darstellen. Da die Teil-

allgemein	für a = 59, b = 11
$a = q_0 b + r_1$ mit $0 < r_1 < b$	$59 = 5 \cdot 11 + 4$
$b = q_1 r_1 + r_2$ mit $0 < r_2 < r_1$	$11 = 2 \cdot 4 + 3$
$r_1 = q_2 r_2 + r_3$ mit $0 < r_3 < r_2$	$4 = 1 \cdot 3 + 1$
$r_2 = q_3 r_3 + r_4$ mit $0 < r_4 < r_3$	$3 = 3 \cdot 1 + 0$
...	
$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$ mit $0 < r_n < r_{n-1}$	
$r_{n-1} = q_n r_n + 0$	

Tabelle 1

zähler alle gleich 1 sind, genügt es, den ganzen Anteil q_0 und die Folge (q_i) der *Teilnenner* anzugeben, und man schreibt dies kurz so: $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots q_n]$; im Zahlenbeispiel $\frac{59}{11} = [5; 2, 1, 3]$.

Da offenbar stets $[q_0; q_1, \ldots q_{n-1}, q_n, 1] = [q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n + 1]$ (im Beispiel $[5; 2, 1, 2, 1] = [5; 2, 1, 3]$) ist, fordern wir der Eindeutigkeit der Darstellung zuliebe noch, daß der letzte Teilnenner eines Kettenbruches stets größer als 1 sein soll.

Umgekehrt entspricht jedem derartigen Kettenbruch eine rationale Zahl; wir brauchen dazu lediglich den Kettenbruch nach den Regeln der Bruchrechnung unter Beachtung der „Rangfolge der Bruchstriche" umzuformen.

2. Aufgabe

Welcher gemeine Bruch wird durch den Kettenbruch [0; 1, 3, 5, 5, 4] dargestellt?

Huygens baut ein Planetenmodell

Der holländische Mathematiker und Physiker Christian Huygens (1629-1695) wollte ein möglichst genau gehendes mechanisches Modell unseres Sonnensystems bauen: Eine Kurbel oder ein Uhrwerk bewegt die auf konzentrischen Kreisen um die Sonne als Mittelpunkt angeordneten Planeten. Damit dieses Zahnradmodell "möglichst genau" geht, muß das Übersetzungsverhältnis von ineinandergreifenden Zahnrädern dem Verhältnis der Sonnenumlaufzeiten der durch sie bewegten Planeten entsprechen. Jedoch ist es technisch unmöglich, relativ kleine Zahnräder mit beispielsweise 500 oder mehr Zähnen zu versehen. So entsteht das Problem, einen gegebenen Bruch, dessen Zähler und Nenner "große" Zahlen sind, durch einen Bruch mit möglichst kleinem Zähler und kleinem Nenner möglichst genau anzunähern.

Nehmen wir beispielsweise das Verhältnis $\frac{115}{151}$. Vor die Aufgabe gestellt, Näherungswerte für diesen Bruch anzugeben, wird man bei naivem Vorgehen zur Dezimalbruchdarstellung 0,761589... übergehen und diese nach der – sagen wir – zweiten Dezimalstelle abbrechen: $0{,}76 = \frac{76}{100}$. Obwohl der Nenner mit 100 wohl noch immer zu groß sein wird, muß man bereits einen Fehler von etwa 0,0016 in Kauf nehmen. Erstaunlicherweise liefert ein Bruch mit viel kleinerem Nenner, nämlich $\frac{16}{21}$, sogar eine bessere Näherung, denn $\frac{16}{21} = 0{,}7619\ldots$ Bricht man den obigen Dezimalbruch bereits nach der ersten Stelle ab, nimmt also $0{,}7 = \frac{7}{10}$, so ist der Fehler etwa 0,062, und auch hier findet man in $\frac{3}{4} = 0{,}75$ einen besseren Konkurrenten mit noch kleinerem Nenner. Wie aber findet man diese vorzüglichen Näherungsbrüche?

Dazu entwickeln wir $\frac{115}{151}$ in seinen Kettenbruch [0; 1,3,5,7], was der Leser überprüfen möge. Genau wie bei der Dezimalbruchdarstellung spricht man von einem *Näherungsbruch* (oder *Teilbruch*) des obigen Kettenbruchs, wenn man ihn nach einer gewissen Stellenanzahl vorzeitig abbricht, etwa [0; 1,3,5] oder [0;1,3]. Die nächste Aufgabe liefert nun des Rätsels Lösung.

3. Aufgabe

Welche rationalen Zahlen gehören zu obigen Näherungsbrüchen?

Ist allgemein $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots q_n]$; so nennt man den nach k Stellen abgebrochenen Kettenbruch $[q_0; q_1, \ldots q_k] = \frac{s_k}{t_k}$ den *Näherungsbruch der Ordnung k* von $[q_0; q_1, \ldots, q_n]$. Man kann zeigen:

1. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k}}{t_{2k}}$ gerader Ordnung sind sämtlich kleiner als $\frac{a}{b}$ und nehmen mit wachsenden k zu.

2. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}$ ungerader Ordnung sind sämtlich größer als $\frac{a}{b}$ und nehmen mit wachsenden k ab.

3. Sieht man z.B. $\frac{s_k}{t_k}$ als Näherungswert von $\frac{a}{b}$ an, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{t_k \cdot t_{k+1}}$ und unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer ist als t_k, stellt keiner eine bessere Näherung für $\frac{a}{b}$ dar.

4. Aufgabe

Gib den besten Näherungswert von $\frac{725}{318}$ an, dessen Nenner kleiner als 26 ist.

Archimedes' Treffsicherheit:

Ob wir wohl mit dieser Methode auch Näherungswerte für irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{15}$ oder π finden können? Freilich müßten wir dazu jene Zahlen erst einmal in Kettenbrüche entwickeln, und diese können gewiß nicht endlich sein, denn jeder solche stellt bekanntlich eine rationale Zahl dar.

Wir spalten von $\sqrt{15}$ zunächst – wie bei den Brüchen – den „ganzen Anteil" ab: Wegen $3^2 < 15 < 4^2$ ist $\sqrt{15} = 3 + r_1$ mit $0 < r_1 < 1$ oder $\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{\rho_1}$ mit $\rho_1 < 1$, mithin

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{\left(\sqrt{15}-3\right)\left(\sqrt{15}+3\right)} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$

Wegen $1 < \rho_1 < 2$ machen wir nun den Ansatz

$\frac{\sqrt{15}+3}{6} = \rho_1 = 1 + \frac{1}{\rho_2}$ woraus sich

$\rho_2 = \frac{6}{\sqrt{15}-3} = \frac{6\left(\sqrt{15}+3\right)}{6} = \sqrt{15}+3$ ergibt.

Im nächsten Schritt folgt aus $6 < \rho_2 < 7$ und dem Ansatz $\rho_2 = 6 + \frac{1}{\rho_3}$: $\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \rho_1$

Wegen $\rho_3 = \rho_1$ ergibt sich für $\sqrt{15}$ ein *periodischer* Kettenbruch:
$\sqrt{15} = [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, \ldots] = [3; \overline{1, 6}]$

Bisher haben wir freilich nur formal gerechnet und uns um die Beantwortung der Frage gedrückt, ob ein „unendlicher Kettenbruch" überhaupt ein sinnvolles mathematisches Objekt ist, ob er eine reelle Zahl repräsentiert.

Um sich von diesen Zweifeln zu befreien, betrachtet man die Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruches (deren Anzahl ist unendlich, aber jeder von ihnen ist ein endlicher Kettenbruch!). Für diese Näherungsbrüche gilt ähnlich wie oben:

1. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k}}{t_{2k}}$ gerader Ordnung nehmen mit wachsendem k zu und sind sämtlich kleiner als $\frac{s_1}{t_1}$.

2. Die Näherungsbrüche $\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}$ ungerader Ordnung nehmen mit wachsendem k ab und sind sämtlich größer als $\frac{s_2}{t_2}$.

3. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche ist:

$$\frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}} - \frac{s_{2k}}{t_{2k}} = \frac{1}{t_{2k+1}t_{2k}}$$

Bilden wir nun die Folge der Intervalle $\left(\frac{s_{2k}}{t_{2k}}, \frac{s_{2k+1}}{t_{2k+1}}\right)$, so ist wegen **1.** bis **3.** jedes dieser Intervalle im vorangegangenen enthalten, und überdies wird die Intervall-Länge wegen **3.** schließlich „beliebig klein". Mithin liegt hier eine sog. *Intervallschachtelung* vor, die auf der Zahlengeraden genau eine reelle Zahl erfaßt.

Dieses Ergebnis macht uns kühn, und der Leser entwickelt die berühmte Kreiszahl π, ausgehend von den ersten Stellen ihrer Dezimalbruchdarstellung $\pi = 3{,}14159265$ ..., nach obiger Methode leicht in einen Kettenbruch, von dem wir allerdings nur einige Stellen angeben können: $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, ...]$. Berechnet man davon den Näherungsbruch erster Ordnung [3; 7], so erhält man den wohlbekannten, von Archimedes gefundenen Näherungswert $\frac{22}{7}$ für π. Die Theorie der Kettenbrüche lehrt außerdem, daß es unter den Brüchen mit einem 7 nicht übersteigenden Nenner keinen gibt, der einen besseren Näherungswert für π liefert als $\frac{22}{7}$. Archimedes hat also – ohne die Theorie der Kettenbrüche zu kennen – ins Schwarze getroffen!

Nachschlag für Neugierige

Die Eigenschaften **1.** bis **3.** für Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruches $[a_0; a_1, a_2, ...]$ haben wir oben "aus dem Ärmel gezogen". Hier nun einige Tips für jene Leser, die diese Eigenschaften beweisen wollen:

a) Die beiden ersten Näherungsbrüche kann man unmittelbar ausrechnen und erhält für ihre Zähler $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0a_1 + 1$, für die Nenner $t_0 = 1$, $t_1 = a_1$. Sodann kann man mit Hilfe der *vollständigen Induktion* für Zähler s_k und Nenner t_k des k-ten Näherungsbruches ($k \geq 2$) *ein rekursives Bildungsgesetz* beweisen:

$$s_k = a_k s_{k-1} + s_{k-2} \qquad t_k = a_k t_{k-1} + t_{k-2}$$

b) Daraus folgt leicht für alle $k \geq 1$:

$$\Delta_k = s_k t_{k-1} - t_k s_{k-1} = (-1)^k$$

c) Aus b) entnimmt man unmittelbar, daß

$$\frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} - \frac{s_k}{t_k} = \frac{(-1)^k}{t_{k+1}t_k}$$

(woraus sofort Eigenschaft 3 folgt)

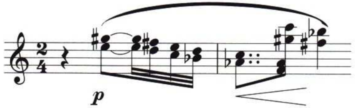
$$\frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} - \frac{s_k}{t_k} = \left(\frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} - \frac{s_{k+1}}{t_{k+1}}\right) + \left(\frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} - \frac{s_k}{t_k}\right) = \frac{(-1)^k a_{k+2}}{t_{k+2}t_k}$$

woraus man durch spezielle Wahl von k die Eigenschaften 1 und 2 folgert.

Überdies spiegelt die Kettenbruch-Darstellung einer reellen Zahl deren „Natur" viel besser als ihre Dezimalbruchdarstellung. In der Schule lernen wir: "Einem endlichen Dezimalbruch entspricht eine rationale Zahl, *aber nicht umgekehrt* (vgl. z.B. $\frac{2}{3} = 0{,}66\bar{6}...$)." Für die Kettenbruch-Darstellung aber gilt: Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn ihre Kettenbruch-Darstellung endlich ist. Periodische Kettenbruch-Darstellungen ergeben sich genau dann, wenn es sich um eine sog. *quadratische Irrationalität* handelt, also um eine Zahl, die mit Hilfe der vier Grundrechenarten aus rationalen Zahlen und Quadratwurzeln zusammengesetzt ist.

Mit Hilfe der Kettenbruch-Darstellung lassen sich sogar Eigenschaften angeben, die nur den transzendenten Zahlen (wie z.B. π oder e), nicht aber den algebraischen Zahlen zukommen. Leider gestattet dies jedoch nicht, im Einzelfall zu entscheiden, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist.

Herbert Kästner, Sektion Mathematik der Universität Leipzig



Aus mathematischer Sicht betrachtet:

Zu Schönberg`s Musiktheorie

Der Versuch, den Unterschied zwischen natürlicher und Tastaturstimmung geringer zu halten als dies durch das wohltemperierte Klavier erreicht werden kann, ist im Jahre 1911 von Arnold Schönberg in seiner „Harmonielehre" in Form der 53-Tonmusik unternommen worden. Wir wollen hier den dort nur verbal vorgenommenen Begründungen eine mathematische Herleitung unterlegen. [1]

Auch ein musikalischer Laie hat ein Gefühl dafür, ob Musik harmonisch ist: sie wirkt einfach angenehmer, beruhigender. Physikalisch läßt sich ein Ton neben der Lautstärke (die hier nicht diskutiert werden soll) durch seine Höhe beschreiben, und ein Klang (Akkord) durch die Höhen der dabei zusammenklingenden Töne. Die Tonhöhe hängt mit der Frequenz der zugehörigen Schallwelle wie folgt zusammen: Je höher der Ton, desto höher die Frequenz. Und ein harmonisch klingender Akkord stellt eine Resonanz der darin klingenden Töne dar. Diese Resonanz ist besonders dann ausgeprägt, wenn die Verhältnisse der Frequenzen der Töne zueinander kleine natürliche Zahlen oder zumindest rationale Zahlen mit kleinem natürlichen Zähler und Nenner sind. Je näher die Frequenzverhältnisse an diesen Resonanzverhältnissen liegen, desto harmonischer klingt der Akkord.

1. Stimmung

Wir stellen uns ein Tasteninstrument vor, und jeder Taste soll ein bestimmter Ton einer bestimmten Frequenz zugeordnet werden. Wenn alle Frequenzen mit einer bestimmten festen Zahl multipliziert werden, ändert sich an den harmonischen Verhältnissen überhaupt nichts; deshalb werden wir keine absoluten Frequenzen, sondern nur Frequenzverhältnisse zu betrachten haben. Genauer: Wir bezeichnen eine beliebige Taste als Grundton, und jeder Taste ordnen wir dann die Zahl F zu, die das Frequenzverhältnis zwischen dieser Taste und dem Grundton ist.
Der Grundton soll hier stets der tiefste Ton eines Akkords sein, so daß stets $F \geq 1$ gilt. Das menschliche Ohr ist für Frequenzen von 16 Hz bis 32000 Hz empfindlich, also ist es sinnvoll, sich gleich auf den Bereich $F \geq 2000$ zu beschränken.

1. 1. Die natürliche Stimmung

Für die natürliche Stimmung werden die natürlichen Zahlen $F \geq 1$ verwendet. $F = 1$ ist definitionsgemäß der Grundton, für $F > 1$ ist F der (F-1)-te Oberton. Speziell liegt der 1. Oberton genau eine Oktave über dem Grundton, hat also doppelte Frequenz; der 2. Oberton liegt eine Duodezime über dem Grundton, also ein Quinte über dem 1. Oberton und hat die dreifache Frequenz. Mit f bezeichnen wir das Frequenzverhältnis zweier Töne, es stimmt mit dem Verhältnis der zugehörigen F-Werte überein. Durch Vergleich des ersten und zweiten Obertons erkennt man, daß die Quinte dem Wert $f = 3/2$ zugeordnet ist.

1. 2. Die wohltemperierte Stimmung

Für die wohltemperierte Stimmung (also sauberes Spiel in allen Tonarten möglich), müssen die Abstände aufeinanderfolgender Töne, d. h., deren Frequenzverhältnisse, einander gleich sein: Die den einzelnen Tasten zugehörigen Zahlen F sind also alles Glieder einer geometrischen Folge. Aus der Forderung, daß die Oktave rein sein soll, folgt, daß die Zahl 2 in dieser geometrischen Folge vorkommen muß. Es besteht jetzt nur noch die Freiheit in der Wahl der charakteristischen Zahl n, die angibt, in wieviele Teile die Oktave zerteilt wird; beim Klavier ist $n = 12$, das ist die klassische 12-Ton-Musik. Wir wollen jetzt der Bemerkung Schönbergs nachgehen, daß die 53-Ton-Musik eine wesentlich reinere Quinte hat als das wohltemperierte Klavier.

2. Die Reinheit der Quinte

Da die Oktave definitionsgemäß rein ist, ist die Quinte als Intervall vom ersten zum zweiten Oberton der erste Fall, bei dem die natürliche Stimmung von der wohltemperierten Tastaturstimmung abweicht. Es ist deshalb eine sinnvolle Forderung an ein zu entwickelndes System von Stimmungen, daß die Quinte möglichst rein sein soll. Und genau nach diesem Kriterium teilt Schönberg die Stimmungen ein.

2. 1. Die n-Ton-Musik

Bei der n-Ton-Musik entspricht ein Tonschritt einem Frequenzverhältnis von $f = \sqrt[n]{2}$, da n Tonschritte dann gerade die geforderte Frequenzverdoppelung ergeben. m Tonschritte in der n-Ton-Musik entsprechen dann einem Wert

$$f = 2^{\frac{m}{n}} \qquad (1)$$

Bei welchen Werten m und n ist nun eine gute Quinte erreicht? Wir schreiben dazu die Quinte als

$$\frac{3}{2} = 2^x \qquad (2)$$

daraus ergibt sich nach Logarithmieren und einfachen Umformungen [2)]

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 = 0{,}5849625...$$

Nun ist x keine rationale Zahl [3], also gibt es, wie ein Vergleich von Formel (1) und (2) zeigt, überhaupt keine ganz reine Quinte. Es kommt nun darauf an, solche Werte m und n zu finden, daß $\frac{m}{n}$ eine gute Näherung für x darstellt. Man könnte natürlich n sehr groß wählen und dann m passend dazu, daß es recht genau wird. Es soll aber ein nicht allzu unübersichtliches Tastenfeld geben; speziell sollen also diejenigen möglichst kleinen Werte n gefunden werden, für die ein m existiert, so daß $\frac{m}{n} \approx x$ recht genau gilt.

2.2. Die Kettenbruchentwicklung

Das hier vorliegende Problem, nämlich zu einer irrationalen Zahl Näherungsbrüche zu finden, bei denen der Nenner nicht allzu groß wird, wird durch die Kettenbruchentwicklung der Zahl x gelöst. Sie lautet

$$x = [1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, \ldots] \qquad (3)$$

Das entspricht den einzelnen Teilbrüchen

$$x(1) = 1,\ x(2) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ x(3) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

$$x(4) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}, \quad x(5) = \frac{24}{41}$$

$$x(6) = \frac{31}{53}, \quad x(7) = \frac{179}{306}, \ldots$$

Zur Bewertung der jeweiligen Genauigkeit seien die Fehler der Quinte angeben (siehe **Tabelle 1**)

x(1) und x(2) kann man noch nicht als Näherung ansehen: Oktave bzw. Tritonus [4] haben nichts mit einer Quinte zu tun. Mit x(3) ist die Quinte als 3-Ton-Abstand einer 5-Ton-Musik nur 2,6 % verkehrt $\left(\frac{x(3)-x}{x}\right)$, und mit x(4) ist die Quinte als 7 Tonschritte der klassischen 12-Ton-Musik nur 0,27 % verkehrt. x(5) wird sicher keine Rolle spielen, da der nur unwesentlich kompliziertere Bruch x(6) eine erheblich genauere Quinte aufweist. x(7) und weiter erfordern eine Einteilung der Oktave in mehr als 300 Teiltöne, was praktisch kaum Bedeutung haben wird. Damit bleibt $x(6) = \frac{31}{53}$ die einzig akzeptable Alternative zur 12-Ton-Musik; 31 Tonschritte in der 53-Ton-Musik sind also genau die von Schönberg angegebene sehr genaue Quinte.

2.3. Ergebnisse

Aus der Theorie der Kettenbrüche folgt, daß eine Erhöhung der Tonzahl n nur dann eine Verbesserung in der Quinte bringt, wenn man mindestens bis zum nächsten Kettenbruchnenner erhöht, speziell folgt also: Unter allen

i	1	2	3	4	5	6	7
x(i)-x	0,41	- 0,085	0,015	- 0,0016	0,0004	- 0,00006	0,000005

Tabelle 1

Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 300 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 53-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte. Unter allen Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 40 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 12-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte; "genaueste" heißt "es gibt keine genauere", natürlich hat die 36-Ton-Musik, wo in der 12-Ton-Musik jedes Intervall noch einmal dreigeteilt wird, eine ebenso gute Quinte. Der Fehler der Quinte in der 12-Ton-Musik ist etwa 30 mal so groß wie der Fehler in der 53-Ton-Musik.

3. Die nächsten Obertöne

Betrachten wir die nächsten Obertöne. Die üblichen Intervallbezeichnungen behalten wir bei und beziehen sie auf die natürliche Stimmung: f = 2 ist die Oktave; $f = \frac{3}{2}$ die Quinte, deren Ergänzung zur Oktave die Quarte mit $f = \frac{4}{3}$ ist. Die große Terz ist $f = \frac{5}{4}$ und deren Ergänzung zur Quinte ist die kleine Terz mit

$$f = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5}.$$

Schließlich erwähnen wir noch die große Sekunde, die als "2 Quinten minus 1 Oktave" definiert werden kann, also $f = \frac{9}{8}$ entspricht. Wir sehen: Wenn wir jetzt noch die Reinheit der großen Terz gewährleisten können, sind alle wesentlichen Tonabstände gesichert.

3.1. Die große Terz

Wir berechnen jetzt analog zu Formel (1) und (2) die große Terz. Wir setzen also

$$\frac{5}{4} = 2^y \text{ mit } y = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 2 = 0{,}3219281\ldots$$

was wiederum eine irrationale Zahl darstellt. Die Kettenbruchentwicklung lautet diesmal:

$$y = [3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 17, \ldots]$$

$$\text{mit } y(1) = \frac{1}{3},\ y(2) = \frac{1}{3+\frac{1}{9}} = \frac{9}{28};\ y(3) = \frac{19}{59}$$

$$\text{und } y(4) = \frac{47}{146}$$

Die weiteren Nenner sind dann wieder größer als 300. Erwartungsgemäß treten hier ganz andere Nenner auf. Die entsprechende Fehlertabelle lautet

i	1	2	3	4
y(i)-y	0,0114	-0,0005	0,0001	-0,00001

$y(1) = \frac{4}{12}$ ist die große Terz der 12-Ton-Musik und hat einen Fehler von 3,4 %, ist also erheblich weniger genau als die Quinte der 12-Ton-Musik. Den m-Wert für die große Terz der 53-Ton-Musik erhält man durch Rundung von 53 y auf die nächste ganze Zahl: 53 y = 17,062... ≈ 17, und $\frac{17}{53} - y = -0{,}0012$. Da der Nenner 53 nicht in der Kettenbruchentwicklung von y auftritt, ist klar, daß der Fehler nicht kleiner sein kann als bei y (2); der Fehler der großen Terz in de r 53-Ton-Musik ist nur $\frac{1}{10}$ des entsprechenden Fehlers der 12-Ton-Musik.

3.2. Intervalle der 53-Ton-Musik

Aus dem oben Erwähnten ergibt sich folgendes Intervallschema in der 53-Ton-Musik: Oktave = 53 Tonschritte, Quinte = 31, Quarte = 53 - 31 = 22, große Terz = 17, kleine Terz = 31 - 17 = 14, große Sekunde = 2 mal 31 - 53 = 9. Natürlich ist die große Sekunde auch als Differenz zwischen Quinte und Quarte bestimmbar: 31 - 22 = 9. Die weiteren Unterteilungen ("Halbtonschritte") werden allerdings situationsabhängig: definiert man die kleine Sekunde als Ergänzung von großer Terz zur Quarte, erhält man 5 Tonschritte, definiert man sie dagegen als Ergänzung von kleiner zu großer Terz, erhält man nur 3 Tonschritte. Hier beginnt die wesentliche Abweichung von der 12-Ton-Musik und deutet sich die zunehmende Reichhaltigkeit der möglichen harmonischen Klänge an. Sowohl diese Reichhaltigkeit der Klänge als auch die große Reinheit der Grundintervalle lassen die 53-Ton-Musik als vielversprechender erscheinen als etwa die ebenfalls verschiedentlich diskutierte Variante einer 36- oder 48-Ton-Musik, bei der die Halbtonschritte der 12-Ton-Musik einfach in 3 bzw. 4 gleiche Teile zerteilt werden.

Anmerkungen

[1] Für weitergehende Rechnungen zu diesem Thema sei der Artikel von W. Thirring Annalen der Physik (Leipzig) 47 (1990), S. 245, empfohlen.

[2] Die Gleichheit der Werte x in Formel (2) beweisen wir wie folgt: Wir wenden ln auf beide Seiten der ersten Formel für x an, erhalten also $\ln(3/2) = \ln(2^x)$; nach den Logarithmengesetzen ist das $\ln 3 - \ln 2 = x \ln 2$, und nach Division durch ln2 entsteht die angegebene zweite Formel.

[3] Daß x nicht rational sein kann, beweisen wir indirekt: angenommen, x=p/q, p, q natürlich, $q \geq 1$. Dann ist Formel (2) als $3/2 = 2^{p/q}$ schreibbar. Wir multiplizieren mit 2 und heben in die q-te Potenz; es entsteht $3^q = 2^{p+q}$. Links steht eine ungerade, rechts eine gerade natürliche Zahl. Widerspruch.

[4] Es ist $2^{x(2)} = \sqrt{2}$, und dies Frequenzverhä..nis entspricht drei Ganztonschritten, z. B. von C bis Fis, daher die Bezeichnung Tritonus.

Dr. Hans-Jürgen Schmidt,
Institut für Astrophysik Potsdam

Keyboard Domino

Spielregeln:

Die Steine werden wie beim herkömmlichen Domino zu Ketten aneinandergelegt. Dabei ist allerdings darauf zu achten, daß

1.
die Farbpunkte analog der Klaviertastatur abwechselnd in 2er- und 3er - Gruppen aufeinanderfolgen

und

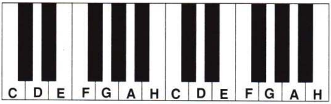
2.
aneinanderstoßende Punkthälften die gleiche Farbe haben müssen.

Werner Miller, Wien

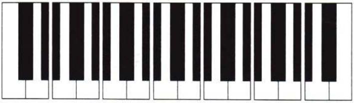
Ein Anlegespiel für vier Personen nach dem Prinzip der Klaviertastatur

Grundidee:

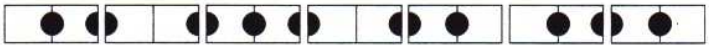
Klaviertastatur



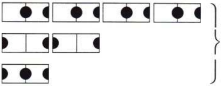
nach jeder zweiten weißen Taste „auseinandergeschnitten"



und zu Dominosteinen abstrahiert:



Spielmaterial: 28 Dominosteine



je einmal

viermal,
- mit roten Punkten,
- mit gelben Punkten,
- mit grünen Punkten,
- mit blauen Punkten

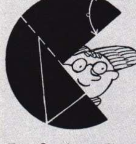
Spielvarianten:

Variante 1 (leichter):

Jeder der vier Spieler erhält zu Beginn 5 Steine. Es wird nach den üblichen Regeln des Dominospiels gespielt, bis ein Spieler alle seine Steine angelegt hat; dieser Spieler ist der Gewinner.

Variante 2 (anspruchsvoller):

Jedem der 4 Spieler wird vor Beginn des Spiels eine der 4 Farben Rot, Gelb, Grün, Blau zugeordnet. Dann werden alle Spielsteine verdeckt gemischt und auf alle Mitspieler gleichmäßig aufgeteilt. (Jeder erhält also 7 Steine in zufälliger Farbverteilung.)
Mit diesen Steinen wird nun nach den üblichen Domino-Regeln so lange gespielt, bis alle 28 Steine angelegt sind.
Ermittlung des Siegers: Jeder Spieler stellt fest, wieviele Punkte die 7 Spielsteine seiner Farbe in der ausgelegten Kette wert sind. Dabei zählen die Tasten bzw. Töne wie folgt: C und D je 2 Punkte, E, F, G und A je 1 Punkt, H null Punkte. Der Spieler mit der höchsten Punktezahl gewinnt.



In freien Stunden:

alpha – heiter

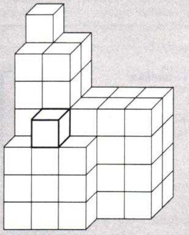
1 *Wahre Aussage gesucht*

Nach einem richtigen System gelesen, ergibt sich eine wahre Aussage.

E	*A*	*E*	*R*		*D*	*K*	*I*	*A*
D			*R*	*J*	*N*			*C*
T	*C*						*U*	*E*
	E						*E*	
	I	*H*	*S*	*S*	*T*	*Q*	*T*	

H.-Joachim Kerber, Neustrelitz

3 *Wieviel Würfel sind das?*



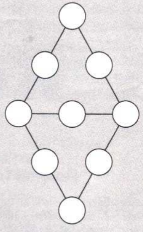
2 *Puzzle*

Welche Teile vervollständigen die zerbrochene Platte?

aus: Füles, Budapest

4 *Das Mittel im Mittelpunkt*

In jeden Kreis der abgebildeten Figur ist eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzusetzen, daß für die Zahlen in drei auf einer eingezeichneten Strecke liegenden Kreise gilt: Die im mittleren Kreis stehende Zahl ist das arithmetische Mittel der Zahlen in den beiden Randkreisen.



Walter Träger, Döbeln

In der Mathematikstunde schreibt der Lehrer 4:4 an die Tafel und fragt nach dem Ergebnis. „Ganz einfach: unentschieden.", ruft der Torwart der Klasse.

5 *Geometrisch-kombinatorisches Mathematik-Lexikon*

Zerlegt die Figur derart in 10 deckungsgleiche Teile, daß sich aus den in jedem solchen Segment befindlichen Buchstaben ein mathematischer Begriff bilden läßt.
Um welche 10 Begriffe handelt es sich?

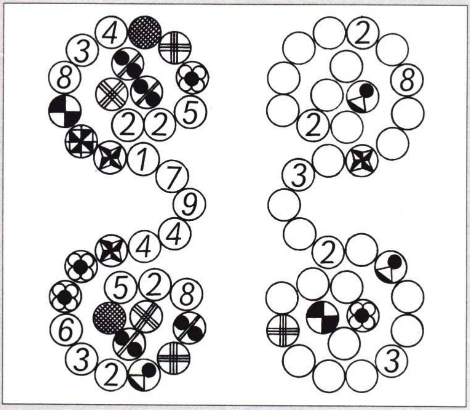
	F	*I*	*N*	*D*	*E*	*D*	*A*	*S*	
				I	*M*				
M	*E*	*E*	*R*	*N*	*U*	*B*	*A*	*L*	*D*
R	*E*	*I*	*T*	*O*	*T*	*Y*	*L*	*S*	*O*
W	*E*	*T*	*T*	*E*	*K*	*L*	*A*	*R*	*A*
T	*E*	*X*	*T*	*M*	*S*	*P*	*I*	*R*	*O*
R	*E*	*I*	*S*	*L*	*T*	*R*	*A*	*T*	*E*
K	*W*	*I*	*R*	*T*	*E*	*S*	*S*	*E*	*N*
K	*O*	*S*	*T*	*E*	*S*	*U*	*L*	*T*	*O*
E	*G*	*E*	*L*	*Y*	*L*	*D*	*I*	*K*	*O*
				N	*N*				
	H	*U*	*P*	*E*	*E*	*L*	*L*	*E*	

Dr. Roland Mildner, Leipzig

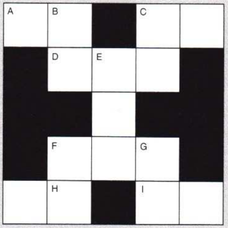
6 *Visuelle Logik*

Zwischen den Zahlen und Zeichen der 35 Kreisfelder der linken Seite besteht ein logischer Zusammenhang. Welche Zahlen und Zeichen müssen in die freien Kreisfelder der rechten Seite eingetragen werden, damit dieser Zusammenhang erhalten bleibt?

Wilhelm Neugebauer, Berlin



10 *Aller Anfang ist (nicht) schwer!*



Es sind zwei- und dreistellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:

Waagerecht

A_w: Die Hälfte von B_s
C_w: Primzahl kleiner als C_s
D_w: Eine durch 7 teilbare Zahl
F_w: Aus gleichen Ziffern bestehende Zahl
H_w: = a - b - c, wobei a, b, c drei Zahlen aus Waagerecht bedeuten sollen
I_w: Größte Primzahl des Rätsels

Senkrecht

B_s: Teiler von F_w
C_s: Primzahl kleiner als A_w
E_s: Das Achtfache von A_w
F_s: Teiler von G_s
G_s: Aus zwei verschiedenen Ziffern von E_s bestehende Zahl

Schüler Stefan Kerber, Saal

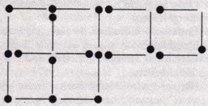
7 *Logische Zahlenfolge*

Mein Lehrer auf die 10
Mir trat, weil ich 9x-
Klug nicht 8 gab
Und durch eigenes Ver7
In der 6. Stunde
Eine 5 baute.
Zu Hause am Kla4
Setzte ich mich auf den 3fuß
Und war mit mir ohne 2fel
Wieder mal nicht 1.

Rainer Gundelach

8 *Hölzchentricks*

Entferne 4 Streichhölzer so, daß 3 Quadrate übrigbleiben.



9 *Bildungsgesetz gesucht*

Abgesehen von der Zahl 1 in der obersten Zeile sind die Zahlen dieses Dreiecks nach einer Vorschrift gebildet worden. Welche Zahlen müssen in die Kreise der folgenden Zeile eingesetzt werden, wenn diese Gesetzmäßigkeit beibehalten wird?

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Walter Träger, Döbeln

Die Knobelecke der Felix-Mauersberger-Oberschule Netzschkau stellt sich vor

Wie wird`s bei uns gemacht?

Unsere Schule ist zwei- bis dreizügig und damit eine der größten in der Umgebung. Ein gutes mathematisch-naturwissenschaftliches Klima herrscht schon seit vielen Jahren, so daß immer wieder die talentiertesten Schüler ihren Platz im Kreisförderzirkel Reichenbach (Vogtland) finden und im Laufe der Zeit nicht wenige von ihnen auf Kreis- oder auch Bezirksolympiaden Junger Mathematiker Medaillen erkämpfen konnten. Somit besteht das Ziel der Knobelecke darin, Schüler aus möglichst allen Leistungsstufen an das Lösen kniffliger Aufgaben heranzuführen und ihnen dabei die Überzeugung zu vermitteln, daß Knobeln und Denken Vergnügen bereiten.

Es ist klar, daß das nur funktioniert, wenn wie in Netzschkau alle Mathematiklehrer der Schule gern bereit sind, die Arbeit mitzutragen.

An unserer Knobelecke sollen die Schüler von Klasse 4 bis Klasse 10 teilnehmen. Es gibt vier Serien von Aufgaben, die etwa gleichmäßig über das Schuljahr verteilt werden. Für die 1. Serie verwendeten wir bisher (außer in Klasse 4) die Aufgaben der Stufe I der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. In dieser Serie werden nur Lösungen zu Aufgaben der eigene Klassenstufe entgegengenommen, denn es stehen ja mehrere Aufgaben zur Auswahl.

Für jede Klassenstufe wird jährlich ein verantwortlicher Mathematiklehrer benannt, der die Lösungen zu den Aufgaben dieser Klassenstufe korrigiert. Dieser "Klassenstufenverantwortliche" sucht für die Serien 2 bis 4 drei für seine Klassenstufe geeignete Aufgaben heraus. Ein "Koordinator", dem später auch die Gesamtauswertung obliegt, stellt daraus die weiteren Aufgabenserien zusammen.

Eine "Serie" enthält somit für die Klassenstufen von 4 bis 10 je eine Aufgabe. Sie wird zur geeigneten Zeit an der Knobelwandzeitung ausgehängt, außerdem bekommt jede Klasse etwa drei Abzüge.

Jeder Schüler darf jede Aufgabe lösen, also nicht nur die der eigenen Klassenstufe.

Pro Lösung gibt es maximal 8 Punkte. Die volle Punktzahl wird aber nur erteilt, wenn der Lösungsweg gut erkennbar ist.

Löst ein Schüler Aufgaben einer niedrigeren Klassenstufe, so vermindert sich die erreichbare Gesamtpunktzahl pro Klassenstufe um einen Punkt.

Aus den Serienergebnislisten der Klassenstufenverantwortlichen ermittelt der Koordinator manuell die Seriengesamtpunktzahlen der Schüler. Der Computer druckt dann eine geordnete Serienliste, eine Gesamtwertung und einen Klassenvergleich aus, so daß an der Wandzeitung neben mustergültigen Schülerlösungen die vollständigen Ergebnisse ausgehängt werden können.

Die besten drei jeder Serie erhalten Urkunden und kleine Preise. Vor allem aber dürfen die 18 besten Teilnehmer des Schuljahres im Juni an einer Exkursion mit wissenschaftlichem oder technischem Inhalt teilnehmen, bekommen sozusagen einen zusätzlichen Wandertag. Als Anreiz für die schwächeren Schüler losen wir aus dem Feld der weiteren Teilnehmer mit mehr als 8 Punkten zwei weitere Berechtigte für diese Exkursion öffentlich aus.

Hat die Knobelecke nach all den Wandlungen in Schule und Gesellschaft eine Zukunft? Es liegt nahe, optimistisch zu sein. Freude am Denken wird sich bei Schülern im jedem Schulsystem wecken lassen, und das Interesse an der Förderung von Talenten dürfte unter marktwirtschaftlichen Bedingungen nicht geringer werden.

Dr. Heinz Trochold, Felix-Mauersberger-OS, Netzschkau

Hier ist ein Beispiel einer Serie unserer Aufgaben:

Klassenstufe 4: In einem Abteil eines D-Zuges an die Ostsee sitzen Herr Müller, Herr Schulze und Herr Lehmann. Einer von ihnen ist aus Zwickau, einer aus Plauen, einer aus Reichenbach. Einer fährt nach Rostock, einer nach Stralsund, einer nach Wismar. Wir wissen außerdem:

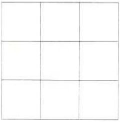
(1) Herr Müller wohnt in Reichenbach.
(2) Herr Schulze fährt nach Wismar.
(3) Herr Lehmann fährt nicht nach Stralsund.
(4) Herr Lehmann wohnt nicht in Zwickau.

Gib die Wohnorte und die Reiseziele von allen drei Reisenden an! Erkläre, was Du dabei überlegen mußt!

Klassenstufe 5: Aus Hölzchen der Länge 1 cm wird die auf S. 21 folgende Figur gelegt.

a) Wieviele Hölzchen brauchst Du dazu insgesamt?
b) Wieviele Quadrate enthält die Figur? Dabei sollen auch die Quadrate mitgezählt werden, deren Seitenlänge größer als 1 cm ist.
c) Entferne 4 Hölzchen, so daß 6 Quadrate übrigbleiben!
d) Entferne 4 Hölzchen, so daß 5 Quadrate übrigbleiben!
e) Entferne 6 Hölzchen, so daß 3 Quadrate übrigbleiben!
(Bei c) bis e) dürfen keine "Einzelhölzchen" liegenbleiben, die nicht wenigstens

zu einem der übriggebliebenen Quadrate gehören!)



Klassenstufe 6: a, b, c und so weiter seien natürliche Zahlen, wobei gelten soll
$a \geq b \geq c \geq d \geq \ldots$

a) Welche natürlichen Zahlen erfüllen die Gleichung $a + b + c = a \cdot b \cdot c$?
Gib alle Lösungen an und zeige, daß es keine weiteren gibt!
b) Löse ebenso die Gleichungen
$a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$
$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ usw. !

Klassenstufe 7: Vor den derzeitigen Fahrpreisveränderungen bekam man in Dresden für 1 DM sechs Straßenbahnfahrscheine, in Plauen sieben. Um wieviel Prozent war ein Straßenbahnfahrschein in Dresden teurer als in Plauen?

Klassenstufe 8: Zeichne ein Parallelogramm mit beiden Diagonalen! Die Diagonalen teilen es in vier Dreiecke.

a) Beweise, daß diese vier Dreiecke flächengleich sind!
b) Zeige, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt! Dazu genügt ein Gegenbeispiel. Das heißt: Zeichne ein Viereck, das aus vier flächengleichen Dreiecken zusammengesetzt ist, das aber kein Parallelogramm ist!

Klassenstufe 9: Aus dem Fahrplan der "Weißen Flotte" kann man entnehmen: Von Dresden bis Pirna sind es auf der Elbe 20 km. Ein Schiff fährt 8.45 Uhr in Dresden ab und erreicht ohne Zwischenhalt 11.20 Uhr Pirna. Die Rückfahrt von Pirna nach Dresden (ebenfalls ohne Zwischenhalt) dauert von 15.30 Uhr bis 17.00 Uhr. Ermittle daraus die ungefähre Fließgeschwindigkeit der Elbe!
Nenne Idealisierungen oder vereinfachende Annahmen, die Du bei der Lösung der Aufgabe verwenden mußt!

Klassenstufe 10: Für Schüler, die gern mit dem Taschenrechner experimentieren: Löse die Gleichung $x^2=1{,}5^x$ im Bereich der reellen Zahlen! Hinweis: es gibt drei Lösungen, sie sind alle irrational. Anzugeben sind möglichst genaue Näherungswerte ... und natürlich die Vorgehensweise bei der Suche nach diesen Näherungswerten.

Eine kleine Übung zur Falluntersuchung

Gerade und Viereck

Eine Aufgabe verlangt, zu untersuchen, wie viele gemeinsame Punkte eine Gerade g und ein Quadrat Q (Eckpunkte A, B, C und D) miteinander, je nach gegenseitiger Lage, haben können.
Dabei sei vorausgesetzt, daß g und Q in einer Ebene liegen.
Bild 1 zeigt eine Lösung: g und Q haben keinen Punkt gemeinsam.

Ferner sind möglich:
Ein gemeinsamer Punkt (siehe **Bild 2**)
Zwei gemeinsame Punkte (siehe **Bild 3**)

1 Sind das alle möglichen Lösungen? Gehe systematisch vor! Zeichne!
Bild 3 führt uns zu weiteren Überlegungen. Man könnte untersuchen, in welche Arten von Figuren die Gerade g das Quadrat Q zerlegt.
Bei **Bild 3** sind es zwei Vierecke (Trapeze). Möglich wären noch ein Dreieck und ein Fünfeck (siehe **Bild 4**) und zwei Dreiecke (siehe **Bild 5**).

Dagegen wäre das in **Bild 6** gezeigte Beispiel keine prinzipiell neue Möglichkeit (vergleiche mit **Bild 3**), denn es handelt sich wiederum um zwei Vierecke, wenn auch spezielle, nämlich Rechtecke. Man müßte dann allerdings auch noch hinzufügen, daß g parallel zu einer Quadratseite verläuft.

2 Eine weitere Möglichkeit wurde vergessen. Finde sie! Zeichne!

Überprüft nun selbst, ob ihr das Anliegen dieses kleinen Beitrages verstanden habt!

3 Wie viele gemeinsame Punkte können zwei verschiedene Quadrate (verschiedene Seitenlängen) Q1 und Q2 miteinander haben? Gehe wieder systematisch vor! Zeichne!

OStR J. Kreusch, Staatliches Seminar Löbau

Bild 1

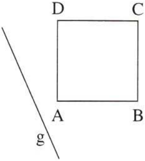


Bild 2

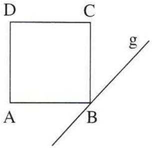


Bild 3

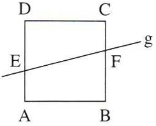


Bild 4

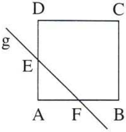


Bild 5

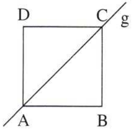
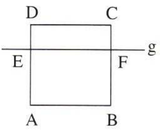
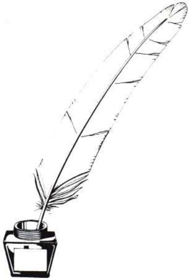


Bild 6





Mathematiker als Memoirenschreiber

Schon seit Jahrhunderten haben sich Mathematiker gelegentlich mit autobiographischen Aufzeichnungen an die Öffentlichkeit gewandt.
(Mit dieser Formulierung sind Lebensläufe, wie sie jeder im Zusammenhang mit Bewerbungen u. ä. verfassen muß, aus unseren weiteren Betrachtungen ausgeschlossen, da diese sich ja nicht an die Öffentlichkeit richten.)

Während aus früheren Jahrhunderten nur Einzelfälle von gedruckten Mathematikermemoiren bekannt sind, hat die Tendenz der Mathematiker, Memoiren zu schreiben, in den vergangenen Jahrzehnten rapide zugenommen. Dabei muß man natürlich die Zunahme der Literatur insgesamt und darin eingeschlossen die große Schwemme von Memoirenliteratur (u. a. von Politikern, Künstlern, Sportlern) berücksichtigen. Da andererseits das Interesse der Öffentlichkeit an Mathematik und Mathematikern gering, vielleicht sogar rückläufig ist, muß ein Mathematiker, der eine Autobiographie schreibt, wohl sich selbst oder das was er erlebt hat, für recht bedeutend halten, wenn er mit einem Lesepublikum für sein Werk rechnet.
Den Mathematikhistorikern sind die Autobiographien natürlich eine wichtige und wohlvertraute Quelle, und sie haben es bedauert, daß es nicht mehr davon gibt, da derartige Literatur in der Regel Aufschlüsse über die Lebens- und Arbeitsbedingungen, über die Entstehungsgeschichte mathematischer Ideen, über persönliche Beziehungen zwischen Wissenschaftlern und über den "Geist einer Epoche" zu geben vermag, die durch andere Quellen (wie z. B. Briefe und Akten) nicht zu ersetzen sind. So kann man als sicher annehmen, daß auch die in unserem Jahrhundert so reichlich sprudelnde Memoirenliteratur späteren Historikergenerationen hochwillkommen sein wird. Freilich darf man solche Memoiren nicht völlig unkritisch verwenden. Wie leicht kann man sich an einem Widersacher bis weit über den Tod hinaus rächen, indem man - mitunter sehr geschickt verhüllt - Boshaftes über ihn berichtet, was sich später kaum noch überprüfen läßt!
Die älteste mir bekannte eigentliche Autobiographie eines Mathematikers ist die von Girolamo Cardano (1501-1576) 1542 und in erweiterter Fassung 1576 publizierte. Von Spezialisten der Renaissance wird sie als kulturgeschichtliche Quelle neben die berühmte, von Goethe ins Deutsche übersetzte Autobiographie des Goldschmieds und Bildhauers Benvenuto Cellini (1500-1571) gestellt. Eine Autobiographie im modernen Sinne, d. h. ein im wesentlichen chronologischer Lebensbericht, ist das Werk Cardanos freilich nicht, eher eine Selbstdarstellung und Selbstrechtfertigung, wie man schon an Kapitelüberschriften wie "Von meiner Gesundheit", "Meine geistigen Vorzüge, Standhaftigkeit und Charakterfestigkeit", "Von meinen Feinden und Neidern" usw. erkennt. Wer aus diesem Buch weitergehende Aufschlüsse über den berühmten Streit zwischen Cardano und Tartaglia um die Veröffentlichung der Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades erwartet, wird enttäuscht. Es heißt dort lediglich. "Von Tartaglia hatte ich verschiedenes in das erste Kapitel meines Werkes übernommen; er aber wollte mich lieber zum Rivalen, und zwar zum überlegenen Rivalen, als zum Freund und Dankverschuldeten haben." Von Mathematik ist in Cardanos Lebensbeschreibung auch sonst nur an wenigen Stellen beiläufig die Rede. Dennoch vermittelt das Buch ein eindrucksvolles Bild vom Innenleben eines typischen Renaissancegelehrten, welches für ein tieferes Verständnis der Rahmenbedingungen damaliger Wissenschaft unverzichtbar ist.
Noch etwas älter als die Lebensbeschreibung Cardanos, aber keine eigentliche Autobiographie ist die kurze "Familienchronik" Albrecht Dürers (1471-1528), der aus heutiger Sicht zu den bedeutendsten Geometern seiner Zeit zählt.
Wir machen einen großen Sprung und erwähnen aus dem 19. Jahrhundert die Autobiographien von Bernard Bolzano (1781-1848), Charles Babbage (1792-1871) und Sonja Kowalewskaja (1850-1891). Letztere, die auch anderweitig literarisch tätig war, erregte mit ihren "Erinnerungen an meine Kindheit" auch bei Literaturwissenschaftlern und Literaturkritikern wohlwollende Aufmerksamkeit. Recht berühmt wurde bei den Mathematikern jene Passage ihres Buches, in der sie humorvoll ihr späteres leichtes Eindringen in die höhere Mathematik damit begründete, daß sie als Kind die Formeln der Analysis ständig vor Augen hatte, weil die Wände ihres Kinderzimmers mit den mathematischen Vorlesungsmitschriften eines Onkels tapeziert waren. (Dies war als Untergrund für eine geplante eigentliche Tapezierung gedacht, die jedoch nie erfolgte, weil die dafür bestellte Tapete das abgelegene Landgut der Eltern nicht erreichte.)
Ergiebige und von den Mathematikhistorikern gern genutzte Quellen für die Mathematik zwischen etwa 1870 und 1945 sind die Lebenserinnerungen von Leo Koenigsberger (1837-1921), Lothar Heffter (1862-1962) und Gerhard Kowalewski (1876-1950). Letzterer

scheint sich des Quellenwertes seiner Aufzeichnungen besonders bewußt gewesen zu sein, denn er gab ihnen den Untertitel "Meine Lebenserinnerungen. Zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik". Hieraus ein paar Kostproben: "Felix Klein [1] war damals in der Mathematik der Königsmacher. Ohne ihn konnte niemand ein mathematisches Ordinariat erlangen, mit seiner Hilfe auch mancher ganz Unbedeutende, z. B. Gutzner [2] das Ordinariat in Halle. Study [3] hatte es nicht fertiggebracht, sich mit Felix Klein gut zu stellen. Er war ein Feind alles Bonzentums und jeder Art von Kriecherei. Klein wußte es nur zu gut, daß Study sich nicht vor ihm beugte, und mochte ihn deshalb nicht." Besonders unterhaltend, vielleicht sogar anregend, sind für jüngere (und ältere) Leser auch solche Stellen, in denen die Verfasser sich an ihre Schulzeit und die damals verübten Streiche erinnern. So beschreibt Kowalewski, wie die Klasse einen neuen Lehrer von innen am Öffnen der Tür des Klassenraums hinderte, wie aber die Tür, als dieser den Rektor zu Hilfe holte, ganz leicht aufging, der Rektor daraufhin den jungen Kollegen darüber belehrte, daß man in solchen alten Gemäuern die Türklinken recht energisch anfassen müsse, die Tür sich dann aber, als der Rektor weg war, wunderbarerweise trotz heftigsten Rüttelns wieder nicht öffnen ließ und der junge Lehrer den Rest der Unterrichtsstunde verzagt auf dem Flur zubrachte.

Auch Heffter weiß Lustiges aus seiner Schulzeit zu berichten, z. B. vom Elementarlehrer Steinbrenner, dessen unverfälschter Pfälzer Dialekt bei den norddeutschen Schülern oft Heiterkeit erregte. "Von den Katheten im rechtwinkligen Dreieck erklärte er z. B.: 'Der eine Kadett steht senkrecht auf dem andren Kadett'. Das veranlaßte einen Mitschüler zu einer Zeichnung dieser Situation, was ihm eine Ohrfeige eintrug." An anderer Stelle beschreibt Heffter, wie die Klasse sich verabredete, an einem bestimmten Tag tadellos vorbereitet zu sein und sich musterhaft zu benehmen. Dem Lehrer kam dies so ungewohnt und unheimlich vor, daß er schließlich schrie: "Ich lasse mir das nicht länger gefallen. Das ist wieder ein Komplott!"

Über das Mathematikstudium berichtet Kowalewski von dem Leipziger Professor Adolph Mayer: "Mayer war immer ausgezeichnet vorbereitet und hatte eine wunderbare Beredsamkeit. Er ging so schnell vor, daß in jeder Stunde eine große Menge Stoff behandelt wurde. Nie versprach er sich trotz des raschen Tempos und nie verrechnete er sich. Wenn er eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder eine unendliche Reihe $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ ausschrieb, so wurden die Punkte, die das Fortlaufen ins Unendliche andeuten, derart rasch und kräftig gesetzt, daß es klang wie das Hacken eines Spechts. Es waren auch nicht drei, sondern mindestens sechs Punkte." Heffter berichtet aus seiner Berliner Studentenzeit: "Eines Tages war ich mit einigen anderen Studenten von ihm (Prof. L. I. Fuchs) zur Hilfeleistung bei der Revision der Seminarbibliothek bestellt. Einen Zweck schien uns dieses Unternehmen eigentlich nicht zu haben; denn die Bücher standen in wunderschönen Einbänden in ebensolchen Glasschränken verschlossen, und ich erinnere mich nicht, daß je ein Buch daraus entliehen wurde. Der Student holte sich das Nötige aus der Universitätsbibliothek, aus der Königlichen Bibliothek, aus dem mathematischen Verein oder aus der Technischen Hochschule. Aber die Revision war befohlen, und wir waren pünktlich zur Stelle, nicht jedoch Fuchs, der mit halbstündiger Verspätung eintraf und klagend sagte: "Da bin ich endlich; leider habe ich aber die Schrankschlüssel zu Hause liegen lassen !""

Mir scheint besonders das letzte Zitat ein schönes Beispiel dafür zu sein, wie in den Memoiren manchmal ein einziger Satz Lesevergnügen mit wertvollen Details zur Biographie eines Wissenschaftlers (sein Wesen bzw. seinen Charakter betreffend) und zur Geschichte wissenschaftlicher Einrichtungen in sich vereinen kann. Die Seminarbibliotheken, die an den Universitäten um die Mitte des vorigen Jahrhunderts gegründet wurden, waren nämlich die Keime der heutigen umfangreichen Instituts- und Fachbibliotheken an den Universitäten und Hochschulen, die in ihrer Bedeutung für den Alltag der Hochschullehrer und Studenten den zentralen Universitätsbibliotheken längst den Rang abgelaufen haben. Die beiden autobiographischen Bücher Norbert Wieners (1894-1964), in deutscher Übersetzung unter dem gemeinsamen Titel "Mathematik mein Leben", regen besonders dazu an, über das Verhältnis vorliegender Autobiographien zu Biographien nachzudenken, die von anderen Autoren nachträglich über dieselbe Person geschrieben werden. Sind letztere dann nicht überflüssig oder nur "billige Abschreiberei"? Beides scheint mir nicht der Fall zu sein. Der Außenstehende kann unbefangener das wissenschaftliche Werk eines Gelehrten würdigen als dieser selbst und obendrein, bei genügendem zeitlichen Abstand, die sich hieraus ergebenden weiteren Entwicklungen darstellen, Einschätzungen der Bedeutung liefern, die eventuell zu Lebzeiten des Gelehrten objektiv noch nicht möglich waren. Er kann ferner Erinnerungen Dritter an den Betreffenden einbeziehen sowie Akten über ihn, die der Betroffene vielleicht nie zu Gesicht bekommen hat.

Fußnoten

[1] Zu Felix Klein (1849-1925) vergleiche man seine Biographie von R. Tobies und F. König in der Biographienreihe des Teubner-Verlages, Leipzig 1981. Seine gemeinsam mit dem preußischen Ministerialbeamten Friedrich Althoff (1839-1908) betriebene autoritäre Personalpolitik wird dort in all ihren positiven und negativen Aspekten ausführlich dargestellt, das hier gegebene Zitat jedoch nicht ausdrücklich benutzt.

[2] August Gutzmer (1860-1924), Prof. in Jena und Halle, war durchaus nicht so bedeutungslos, wie Kowalewski es hier darstellt. Es ist dies ein solcher Fall von nachträglichem Rufmord aus persönlicher Feindschaft, wie er oben von mir als allgemeine Gefahr in der Memoirenliteratur angesprochen wurde. Interessant wäre es zu wissen, ob bei der Namensschreibung wirklich ein Druck- bzw. Schreibfehler vorliegt oder ob Kowalewski dadurch seine Nichtachtung unterstreichen wollte.

[3] Eduard Study (1862-1930) war trotz seiner hier behaupteten Unterdrückung durch Klein ab 1894 Professor an den preußischen Universitäten Bonn, Greifswald und wieder Bonn. Er gehört aus heutiger Sicht zu den vielseitigsten und originellsten Geometern seiner Zeit.

Für Leselustige

Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übertragen und eingeleitet von H. Hefele. Jena: Verlag Eugen Diederichs (1914).

Albrecht Dürer: Familienchronik, in: Schriften und Briefe. Reclams Universalbibliothek, Bd. 26.
Bernard Bolzano: Selbstbiographie, in: Ausgewählte Schriften, herausgegeben u. eingeleitet von E. Winter. Berlin: Union-Verlag 1976.
Charles Babbage: Passages from the life of a philosopher (Engl.) Reprint New York 1969 (Erstausgabe London 1864).
Sonja Kowalewskaja: Erinnerungen an meine Kindheit. Weimar: Kiepenheuer-Verlag 1960.
Leo Koenigsberger: Mein Leben. Heidelberg 1919.
Lothar Heffter: Beglückte Rückschau auf neun Jahrzehnte. Freiburg i. Breisgau: Schulz-Verlag 1952.
Gerhard Kowalewski: Bestand und Wandel. München: Oldenbourg-Verlag 1950.
Norbert Wiener: Mathematik mein Leben. Düsseldorf-Wien: Econ-Verlag 1962.

Weitere, im Text nicht erwähnte Memoiren:

Oskar Bolza: Aus meinem Leben. München 1936.
Abraham A. Fraenkel: Lebenskreise. Stuttgart 1967.
Walter Lietzmann: Aus meinem Lebenserinnerungen. Göttingen 1960.
Helene Braun: Eine Frau und die Mathematik 1933-1940. Berlin usw. (Springer) 1990.

In englischer bzw. amerikan. Sprache gibt es u. a. Memoiren von P. R. Halmos (New-York usw. 1985), G. H. Hardy (Cambridge-London 1967), M. Kac (Berkeley usw. 1987), S. M. Ulam (New-York 1976).

In russ. Sprache gibt es eine in vielen Auflagen erschienene Autobiographie Moi Bospominania (Meine Erinnerungen) des angewandten Mathematikers und Schiffstheoretikers A. N. Krylow.

Dr. Peter Schreiber, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

31. Olympiade Junger Mathematiker

1. Stufe

Die Aufgaben dieser 1. Stufe sind vorgesehen, zu Hause gelöst zu werden. Erklärung der Nummern: Die zwei Ziffern nach 31 nennen die Klasse (05 bis 10 und für Klasse 11 - 13: 12), danach kommt die 1 für Stufe 1, dann die Aufgabennummer 1-4.
Jeder Schüler kann sich beteiligen (wer will, auch mit Aufgaben einer höheren Klasse) und seiner Lösung einem Lehrer oder Arbeitsgemeinschaftsleiter zeigen. Er hat damit eine Möglichkeit mehr, sein Interesse z. B. auch an seiner Teilnahme an Stufe 2 zu erkennen zu geben.
Die Lösungen veröffentlichen wir nicht.
Bei Problemen wendet Euch bitte an Euren Mathematiklehrer.

310511

a) In die neun Felder eines 3 x 3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.
b) In die Felder eines 4 x 4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingunen wie bei a) erfüllt sein.

Gib je eine geforderte Eintragung an! Stelle bei a) und b) fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

310512

Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull, und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

a) Zeige, daß für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!
b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

310513

Die **Abbildung A 310513** zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4. Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''. Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen mußt, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

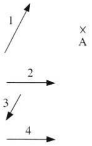


Abbildung A 310513

310514

Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.

a) Sebastain vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: "Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden." Stimmt das? Begründe Deine Antwort!
b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, daß es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen! Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!! Ein Begründung wird nicht verlangt.

310611

Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen läßt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck. Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

310612

a) Begründe, daß jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muß!

b) Die **Abbildung A 310612** zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und A'B'. Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild A'B' hat! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

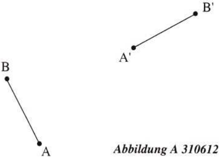


Abbildung A 310612

310613

Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:
(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.
(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.
(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können! Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

310614

An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:
(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.
(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.
(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wieviele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

310711

Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle,
zwei Drittel der blauen Bälle und
drei Viertel der grünen Bälle.
Es stellte sich heraus, daß danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,
a) wieviele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren,
b) wieviele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

310712

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!
(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.
(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

310713

Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in **Abbildung A 310713** bezeichnet.
a) Zeichne eine solche Figur mit $\overline{AB} = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\sphericalangle$BSD auf!
b) Beweise diese Vermutung!

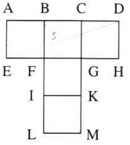


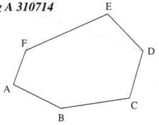
Abbildung A 310713

310714

a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verläßt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!
b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck ABCDEF, wie **Abbildung A 310714** eines zeigt, einen Punkt E', für den ABCDE' ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck ABCDEF hat!

Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, daß ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!

Abbildung A 310714



310811

Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.
Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne daß die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln läßt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

310812

Rudolf macht folgende Aussage:
„Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."
a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!
b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

310813

Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle$ AMB die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.
a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!
b) Beweise, daß Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

310814

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k. Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingung erfüllen:
(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.
(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.
(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.
a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, daß zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

310911

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Wenn man an die Ecken eines Tetraeders ABCD in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.
b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfole zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

310912

Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen – unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems – gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.
Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

a) JACKE	b) MANN	c) MIR
+ HOSE	+ FRAU	+ EMIR
= ANZUG	= PAAR	= REIM

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

310913

Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

310914

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, daß während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4 % ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7 % ihres Anfangswertes abgenommen habe. Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?
b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0 % bzw. 7,0 % ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.
Sind hiernach die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0 % und 7,0 % führen!

311011

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung gilt:
$x + y < 1991$.

311012

Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm³, der Oberflächeninhalt 17454 cm² und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.
Inge sagt, daß sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und daß die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.
Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.
Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

311013

Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat) heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_1 = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1\, f(x_1) + q_2\, f(x_2).$$

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die

Ungleichung $f(u) + f(v) < 2 \cdot f(\frac{u+v}{2})$, (1)

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$f(a) + f(a + 2b) < 2 \cdot f(a+b) \qquad (2)$$
$$f(a) + f(1+3b) < f(a+b) + f(a + 2b). \qquad (3)$$

311014

Zur **Abbildung A 311014** wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriß und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.
(A'B'C'D' ist ein Quadrat, E' = F' sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrekken geteilt.)
Weisen Sie nach, daß die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

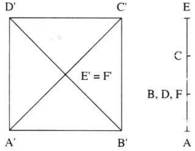


Abbildung A 311014

311211

Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km. Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

311212

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:
(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.
(2) Es gilt $97ab = (a+n)\,(b+n)$.

311213

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels BAC. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, daß DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen
a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates DPQR auf AC liegt,
b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates DPQR
c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,
d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

311214

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit $x \leqq y \leqq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$x + y + z = 5$, (1)
$x^2 + y^2 + z^2 = 15$, (2)
$xyz = -3$. (3)

Schachwettbewerb

... mit vielen neuen Schachfreunden

Der 8. alpha-Schachwettbewerb erregte bei vielen neuen alpha-Lesern vergnügliches Interesse. So war gegenüber den Vorjahren ein deutlicher Beteiligungsanstieg aus den alten Bundesländern zu verzeichnen, ebenso von Zuschriften aus Österreich, Luxemburg, Niederlande, Rumänien, Sowjetunion ... „Die vielfältigen Beziehungen zwischen Mathematik und Schach liegen auf der Hand und kommen auch in den Problemen des Wettbewerbs zum Ausdruck" (Dr. H. Büchel, Zella-Mehlis)

Fürwahr bilden Schachprobleme eine Hohe Schule des Denksports und sind ein sprudelnder Quell der Selbstbestätigung und der Freude und Entspannung beim Lösungserlebnis.

Lösungen

1. 1. Kc 3 — Kal/K:c1
2. Kc2/Dg1 matt.
Diese Aufgabe von O. Blumenthal („Schweizerische Schachzeitung", 1907) wurde von fast allen Einsendern richtig gelöst.

2. 1. Da8 — b2/c3/d4
2. Kb4/K:b3/Dh1 matt.
Auch dieser Zweizüger von E. Boswell („Svenska Dagbladet", 1929) bereitete den alpha-Lesern wenig Mühe.

3. 1.Tc8 — K:g3
2. Dc7 matt.
Auf Grund der Pattstellung des schwarzen Königs muß der Turm den Weg für die Dame in der Aufgabe von Dr. A. Kraemer („Bochumer Anzeiger", 1926) frei bahnen.

4. 1.Dd6 — c:d6/c6/b5
2. Tc1/Db8/Da6 matt.
1. ... — T beliebig
2. D:d7 matt.
Hier zeigt uns der Ex-Schachweltmeister Prof. Dr. Max Euwe (1901-1981) in einem reizenden Achtsteiner, daß er auch mit leichter Hand Schachprobleme komponieren konnte.

5. 1.L:e4 (droht 2. s:c4 matt)
1. ... — s:d6+/S:e3+/Se5+
2. Ld3/Sb5/Td3 matt.
1. ... — Ke5
2. S:c4, Sf7 matt.
Das preisgekrönte Problem stammt von C. Mansfield („Good Companion", 1917). Dieser Zweizüger zählt zweifellos zu den besten Kreuzschach-Problemen. Was ist ein Kreuzschach? In unserer Aufgabe kann Schwarz sich damit verteidigen, daß er durch einen Zug des Sc4 dem weißen König Schach bietet. Dieses Schach nun beantwortet Weiß jeweils mit dem zweiten Zug, der das Schachgebot der schwarzen Figur aufhebt und gleichzeitig selbst ein Schach bietet, daß das Matt bedeutet.

6. 1. c8S — Ka3
2. Sb6 — a:b6
3. a:b6 matt.
Ein pointiertes Lösungsabspiel. Verfasser dieser und einer Reihe anderer Schachaufgaben ist das Oberhaupt der Römisch-Katholischen Kirche, Papst Johannes Paul II.!

7. 1. Kh3 — Th8+
2. Th7 — T:b8/T:h7/Tc8
3. T:b8/T:h7/Tbc7 matt.
1. ... — Tf8
2. Tc8 — Tf3+/T:c8
3. Lg3/Tc7 matt.
Ein phantastischer Schlüsselzug in der Aufgabe von P. Heuäcker („Deutsch-Österreichische Tageszeitung", 1926). Der weiße König muß zuerst gegen alle möglichen Angriffe des schwarzen Turms geschützt werden, ehe die weiße Figurenübermacht zur Wirkung kommt.

8. 1. Tbd7 (droht 2. Sb6 matt)
1. ... — Sd2+/Sh2+
2. Kg3/Kg3 — Se4+, Sc4/Sf1+
3. Kh4, K:h3/K:h3, Kh4 — beliebig
4. Sb6 matt.
1. ... — Sg1+/Sg5+
2. Kf2/Ke2, Kf2 — Sh3+/Sg3+, Se4+
3. Ke1, K:f1/Kd1, Ke1 — beliebig
4. Sb6 matt.
Bei der scheinbaren Diagonal-Symmetrie-Aufgabe von M. Zucker („Deutscher Schachverband", 1977 , 1. Preis) scheitert die thematische Verführung 1. Tdb7 mit der Mattdrohung 2. Sc7 an 1. ... Sg5+ nebst 2. ... Se6 und das Drohmattfeld c7 ist gedeckt.

Unter den Einsendern, die alle acht Aufgaben korrekt gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt: *Silvio Baier (Dresden), Kersten Harborth (Sonderhausen), Lutz Häselbarth (Weimar), Kristina Schneider (Cottbus) und Robert Zyska (Ravensburg).*
Desweiteren wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten: *Kathleen Holz (Rotenmoor), Ingo Kliemann (Darmstadt), Dietlind Kloß (Alsleben), Sveto Samardzic (Berlin 44) und Michael Wolf (Zeulenroda).*

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch !

H. Rüdiger,
Werk für Fernsehelektronik Berlin

Ein indisches Rechenverfahren

Die Inder benutzten bereits vor einigen Jahrhunderten ein besonderes Verfahren zur Multiplikation natürlicher Zahlen, welches auch von den Griechen und Arabern übernommen wurde. Anfang des 20. Jahrhunderts griff der Mathematiker F. Ferrol dieses Verfahren erneut auf und bearbeitete es für einen breiteren Kreis von Interessenten.

Wir wollen dieses Verfahren in vereinfachter Weise unseren jungen alpha-Freunden vorstellen; seine Anwendung und Nutzung fördert das Training im Kopfrechnen. Am Beispiel der Multiplikation zweier zweistelliger natürlicher Zahlen soll dieses Verfahren erläutert werden.

Beispiel: 39 · 72

Es seien Z_1 die Zehner, E_1 die Einer des ersten Faktors, Z_2 die Zehner und E_2 die Einer des zweiten Faktors; dann gilt

$(Z_1 + E_1) \cdot (Z_2 + E_2) =$
$= Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot Z_2 + E_1 \cdot E_2.$

Daraus ergibt sich das folgende Rechenschema:

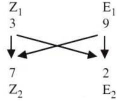


Abb. 1

Es ist, entsprechend dem Schema, wie folgt zu rechnen:
$E_1 \cdot E_2 = 9 \cdot 2 = \mathbf{18}$ (Übertrag 1),
$1 + E_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot E_2 = 1 + 9 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = \mathbf{70}$ (Übertrag 7),
$7 + Z_1 \cdot Z_2 = 7 + 3 \cdot 7 = \mathbf{28}.$

Diese auszuführenden Rechenoperationen lassen sich durch Kopfrechnen leicht bewältigen. Notiert werden nur (von rechts nach links) die unterstrichenen Ziffern; sie ergeben das Ergebnis 2808.
Diese Verfahren wollen wir nun für die Multiplikation zweier dreistelliger natürlicher Zahlen erläutern.

Beispiel: 326 · 273

$(H_1 + Z_1 + E_1) . (H_2 + Z_2 + E_2)$
$= H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot Z_2 + H_1 \cdot E_2 + Z_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 +$
$+ Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot H_2 + E_1 \cdot Z_2 + E_1 \cdot E_2.$

Daraus ergibt sich das folgende Rechenschema:

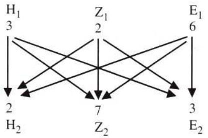


Abb. 2

Diesmal rechnen wir wie folgt:
$E_1 \cdot E_2 = 6 \cdot 3 = \mathbf{18}$ (Übertrag 1),
$1 + Z_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot Z_2 = 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 7 = \mathbf{49}$ (Übertrag 4),

$4 + H_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = \mathbf{39}$ (Übertrag 3),

$3 + H_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot H_2 = 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = \mathbf{28}$ (Übertrag 2),

$2 + H_1 \cdot H_2 = 2 + 3 \cdot 2 = \mathbf{8}.$
Ergebnis: 88998.

Abschließend wollen wir ein weiteres Beispiel in Kurzform gemeinsam durchrechnen.

617	
· 229	
3	Einer, Übertrag 6;
9	Zehner ($6 + 1 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = \mathbf{29}$, Übertrag 2),
2	Hunderter ($2 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = \mathbf{72}$, Übertrag 7),
1	Tausender ($7 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = \mathbf{21}$, Übertrag 2),
14	Zehntausender ($2 + 6 \cdot 2 = \mathbf{14}$).
141293	

Dieses Verfahren läßt sich auch auf vier- und mehrstellige Zahlen übertragen; es wird dann aber für ungeübte junge Rechenmeister schwerer überschaubar. Der interessierte Leser möge sich nun selbst ähnliche Multiplikationsaufgaben stellen und nach diesem Verfahren lösen.

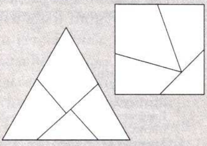
OStR J. Lehmann, Leipzig und
OStR Th. Scholl, Berlin

Lösungen

• *Sprachecke*

zu 1: Zerschnittene Vielecke
Der deutsche Mathematiker David Hilbert bewies ein sehr wichtiges Theorem: Jedes Vieleck kann in ein beliebiges anderes Vieleck derselben Fläche umgewandelt werden. Dazu zerschneidet man das erste Polygon in eine endliche Zahl von Teilen, welche dann zu einem zweiten Vieleck zusammengelegt werden können. Hilberts Vorgehen nutzend kann aber die Zahl der Teile sehr groß sein. Dasselbe Resultat mit einer kleinen Zahl von Teilen zu erreichen, ist eine große Herausforderung. Der englische Erfinder Henry Dudney entwickelte einen schönen Weg, ein gleichseitiges Dreieck so in vier Teile zu zerlegen, daß es zu einem Quadrat zusammengesetzt werden kann. Die Zeichnung gibt Dir die vier Teile vor. Kopiere sie und lege daraus ein Quadrat. Dann lege die Teile zu einem gleichseitigen Dreieck um.

Lösung:



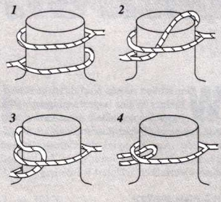
zu 2: Die zehn Ziffern
Um zwei Zahlen A und B, ihre Summe S und Differenz D im Dezimalsystem schreiben zu können, benötigt man jede der Ziffern von 0 bis 9 genau einmal. Findet die Zahlen A und B und berücksichtigt dabei, daß A größer als B ist!

Lösung:

A = 146, B = 57, S = 203, D = 89. Die beiden Zahlen sind 146 und 57.

zu 3: Schiff Alpha
Das Schiff "ALPHA" legte am Kai eher an, als das Schiff "QUANT". Kann es auch eher auslaufen, wenn dabei das Haltetau der "QUANT" nicht vom Poller genommen wird? (siehe Bild)

Lösung:



• *Wie groß ist „alpha"?*

Das Kryptogramm hat zehn Lösungen, und zwar

16947	16907	19347	19307
+6905	+6945	+9305	+9347
23852	23852	28652	28652
49062	49072	65139	65149
+9073	+9063	+5148	+5138
58135	58135	70287	70287
76045	76095		
+6093	+6043		
82138	82138		

Da C und E vertauscht werden dürfen, ohne die Summe zu verändern, ergeben sich also fünf mögliche Werte für ALPHA.

• *Was Brüche mit Musik zu tun haben*

zu 1

$$\frac{62}{43}=[1;2,3,1,4]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

zu 2

$$[0;1,3,5,5,4]=\frac{348}{457}$$

zu 3

$$[0;1,3,5,]=\frac{16}{21};\quad [0;1,3]=\frac{3}{4}$$

zu 4

$$\frac{725}{318}=[2;3,1,1,2,1,12].$$

Die Näherungsbrüche sind:

$$\frac{s_1}{t_1}=\frac{7}{3},\ \frac{s_2}{t_2}=\frac{9}{4},\ \frac{s_3}{t_3}=\frac{16}{7},\ \frac{s_4}{t_4}=\frac{41}{18},$$

$$\frac{s_5}{t_5}=\frac{57}{25},\ \frac{s_6}{t_6}=\frac{725}{318}.$$

Also ist unter allen Brüchen, deren Nenner kleiner ist als 26, der Bruch $\frac{57}{25}$ der beste Näherungswert für $\frac{725}{318}$.

• *alpha – heiter*

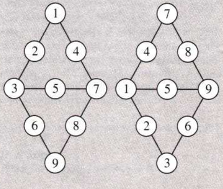
zu 1: Wahre Aussage gesucht
Beginnt man bei J und liest linksherum (indem man jeweils zwei Felder überspringt), so ergibt sich: Jedes Quadrat ist ein Rechteck.

zu 2: Puzzle
Teil 1 ergänzt A, Teil 6 ergänzt B richtig.

zu 3: Wieviel Würfel sind das?
Es sind 59 Würfel.

zu 4: Das Mittel im Mittelpunkt

Lösung:



zu 5: Geometrisch-kombinatorisches Mathematik-Lexikon

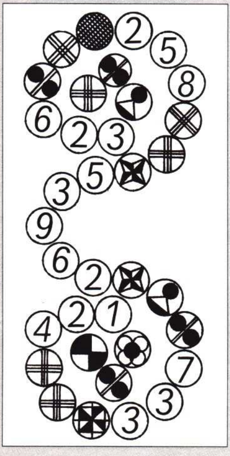
Lösung:

	F	I	N	D	E	D	A	S	
				I	M				
M	E	E	R	N	U	B	A	L	D
R	E	I	T	O	T	Y	L	S	O
W	E	T	T	E	K	L	A	R	A
T	E	X	T	M	S	P	I	R	O
R	E	I	S	L	T	R	A	T	E
K	W	I	R	T	E	S	S	E	N
K	O	S	T	E	S	U	L	T	O
E	G	E	L	Y	L	D	I	K	O
				N	N				
	H	U	P	E	E	L	L	E	

Links von oben nach unten: Definition, Extremwert, Mittelwert, Kreiskegel, Hypotenuse.
Rechts von oben nach unten: Dualsystem, Paraboloid, Restklasse, Koordinate, Nullstelle.

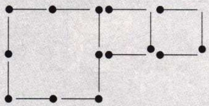
zu 6: Visuelle Logik
Die links dargestellte Figur besteht aus von innen nach außen aneinandergereihten Gruppen von 3 Zahlen und 3 Zeichen. Die den Zahlen folgenden Zeichen entsprechen dekkungsgleich den Zahlen. Gleiche Zeichen entsprechen gleichen Zahlen. Die Differenz der Zahlen einer Gruppe von innen nach außen beträgt immer 1 (siehe nebenstehende Zeichnung).

Lösung:



zu 8: Hölzchentricks

Lösung:



zu 9: Bildungsgesetz gesucht
Jede Zahl aus einer Zeile ist die Summe von 3 Zahlen, nämlich der direkt über ihr stehenden und deren Zeilennachbarn. Dabei hat man sich leere Plätze mit der Zahl 0 besetzt zu denken. Zahlen der 6. Zeile:

1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

zu 10: Aller Anfang ist (nicht) schwer
Wegen A_w und B_s sind für F_w nur die Ziffern 2, 4, 6, 8 möglich. Wegen B_s und E_s jedoch nur 6. Dann ist D_w und C_s eindeutig. G_s kann wegen I_w nur 97 sein, F_s wegen G_s nur 69. H_w mit der Endziffer 9 ergibt sich (nur) aus den drei zweistelligen Zahlen, wobei wegen 97-37-C_w nur C_w = 11 und H_w = 49 sein kann.

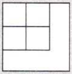
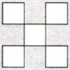
Lösung:

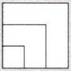
A 3	B 7	■	C 1	1
■	D 4	E 2	7	■
■	■	9	■	■
■	F 6	6	G 6	■
4	H 9	■	I 9	7

• *Wie wirds bei uns gemacht?*

zu: Kl. 4:
Müller - Reichenbach - Stralsund
Schulze - Zwickau - Wismar
Lehmann - Plauen - Rostock

zu: Kl. 5:
a) 24
b) 9+4+1=14

c)  d) 

e) 

zu Kl. 6:
I. Jede der Gleichungen hat die 'triviale' Lösung, bei der alle Variablen 0 sind.

II. $a + b + c = a \cdot b \cdot c$ hat als Lösung (3, 2, 1)
$a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$ hat als Lösung (4, 2, 1, 1)
$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ hat als Lösung (5, 2, 1, 1, 1) und so weiter!

III. Weitere Lösungen bei den Gleichungen bis zu 10 Variablen sind:

bei 5 Variablen: (2, 2, 2, 1, 1) und (3, 3, 1, 1, 1)
bei 7 Variablen: (4, 3, 1, 1, 1, 1, 1)
bei 8 Variablen: (3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)
bei 9 Variablen: (5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Eine weitere oder gar vollständige Untersuchung des Problemes war im Rahmen der Knobelecke nicht vorgesehen.

IV. Der Einzigkeitsnachweis kann durch Betrachten aller Fälle nach geschickter Einengung der Möglichkeiten geführt werden.

zu Kl. 7:
Preis eines Fahrscheines in Dresden:
1/6 DM = x%
Preis eines Fahrscheines in Plauen:
1/7 DM = 100%

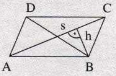
$$\frac{x}{100} = \frac{1/6}{1/7} \qquad x = 116{,}6...$$

Der Dresdner Fahrschein war 16,6% teuerer.

zu KL. 8:
a) Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander. Für die Inhaltsberechnung benachbarter Dreiecke werde jeweils die halbe Diagonale als Grundlinie angesehen. Da diese Dreiecke dann auch die gleiche Höhe haben, sind sie inhaltsgleich. Fortlaufend gilt:

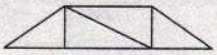
I(ABS) = I(BCS) = I(CDS) = I(DAS) w. z. b. w.

$h_{\Delta ABS} = h_{\Delta BCS}$



b) Gegenbeispiel:

Lösung:



zu Kl. 9:
8.45h - 11.20h = 2:35h = 2,583h
v_{auf}=20km/2,583h = 7,74 km/h

15.30h - 17.00h = 1:30h = 1,5h
v_{ab}=20km/1,5h = 13,33 km/h

$$\left.\begin{array}{l} v_{Schiff}+v_{Elbe} = 13{,}33\text{ km/h} \\ v_{Schiff}-v_{Elbe} = \;\;7{,}74\text{ km/h} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{Elbe} = 2{,}8\text{ km/h}$$

Annahmen:
- Konstante Fließgeschwindigkeit,
- Schiff fährt stromauf und stromab mit gleicher Kraft,
- Zeiten für Ab- und Anlegemanöver sind unberücksichtigt.

Kl. 10:
x_1 = -0,8429170
x_2 = 1,3020995
x_3 = 12,431204

(Angaben mit Taschenrechnergenauigkeit)
Für die Verkürzung der Intervallschachtelung günstige Tabelle:

x	-1	0	1	2	12	13
x^2	1	0	1	4	144	169
$1{,}5^x$	2/3	1	1,5	2,25	129,7	194,6

• *Gerade und Vieleck*

zu 1: Bild a zeigt keine prinzipiell neue Möglichkeit. Es ergibt sich ja ebenfalls ein gemeinsamer Punkt - hier C statt B.

Bild a

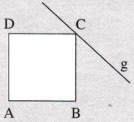
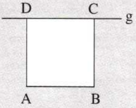


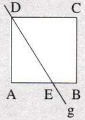
Bild b zeigt einen Fall, der häufig übersehen wird: g und Q haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

Bild b



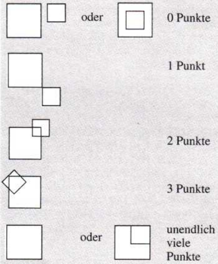
zu 2: Siehe Bild c! (ein Dreieck und ein Fünfeck)

Bild c



zu 3: Siehe Bild d!

Bild d



• *Verblüffendes*

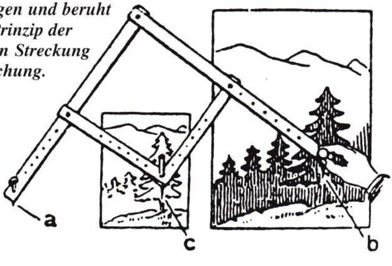
Das überraschende und paradoxe Ergebnis lautet, daß unabhängig von der Kugelgröße das Band immer etwa 16 cm von der Kugeloberfläche entfernt ist.

• *Zum Titel*

Man erhält (v. l. n. r. und v. u. n. o.):
RIES (Adam, um 1492 – 1559), ABEL (Niels Henrik, 1802 – 1829), CEVA (Giovanni, 1647 – 1734), ARTIN (Emil, 1898 – 1962), KLEIN (Felix, 1849 – 1925), EULER (Leonhard, 1707 – 1783), NEPER od. NAPIER (John, 1550 – 1617), PEANO (Guiseppe, 1858 – 1932), FERMAT (Pierre de, 1601 – 1665), HANKEL (Hermann, 1839 – 1873), PLATON (etwa 427 – 347 v. u. Z.), NEWTON (Isaac, 1643 – 1727), FISHER (Ronald Aylmer, 1890 – 1966), HÖLDER (Otto, 1859 – 1937), BOLYAI (János, 1802 –1860), CANTOR (Georg, 1845 – 1918), HILBERT (David, 1862 – 1943), GAUSS (Carl Friedrich, 1777 – 1855) FOURIER (Jean Baptiste Joseph, 1768 – 1830).

Der Storch-schnabel

Der Storchschnabel spielt, wie auch viele andere mechanische Instrumente der praktischen Geometrie, als Folge des wissenschaftlich-technischen Fortschritts heute kaum noch eine Rolle. In älteren Lehrbüchern der angewandten Geometrie, der Vermessungskunde und über mathematische Geräte und Maschinen wurde er fast immer ausführlich behandelt und abgebildet. Er dient zur ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung beliebiger Zeichnungen und beruht auf dem Prinzip der zentrischen Streckung bzw. Stauchung.



Damit der bewegliche Punkt Q, in dem sich ein Zeichenstift befindet, das Bild des ebenfalls beweglichen Punktes P, in dem sich ein Fahrstift befindet, bei der zentrischen Streckung mit dem fixierten Zentrum Z ist, muß man durch einen Gelenkmechanismus dafür sorgen, daß das Streckenverhältnis ZP:ZQ bei variabler Länge der Strecken konstant bleibt. (Durch Vertauschen von Fahr- und Zeichenstift bewirkt man ähnliche Verkleinerung.) Dies wird durch ähnlich bleibende gelenkige Dreiecke ZAP, PBQ erreicht, die bezüglich der Geraden ZPQ auf der gleichen Seite (Typ A) oder auf verschiedenen Seiten (Typ B) liegen können (siehe Abbildung 1).

Die Ähnlichkeit der Dreiecke wird jeweils durch Ergänzung des Mechanismus zu einem Parallelogramm (im Typ A: ADBP, im Typ B: ZDBA) erzwungen. Das gewünschte Verhältnis ZP:ZQ ist beim Typ A z. B. als ZA:ZD einstellbar, indem man auf der über A hinaus verlängerten Schiene DA verschiedene Drehpunkte Z wählen kann. Bei Typ B kann man z. B. auf der über B hinaus verlängerten Schiene DB verschiedene Stellungen des Fahr- bzw. Zeichenstiftes Q wählen. Im einzelnen gibt es mannigfache Ausführungen, die sich auch durch die Art der Unterstützung des Mechanismus durch Fahrrollen oder Aufhängung mit Drähten an einem Ständer unterscheiden. Als Erfinder des Storchschnabels (auch Pantograph, nach altgriech. Wortbestandteilen soviel wie Alleszeichner) gilt der Astronom und Mathematiker Christoph Scheiner (1575-1650), der als Jesuit in verschiedenen Lehrämtern in Freiburg (Breisgau), Ingolstadt und Neiße (heute Nysa/Polen) wirkte und vor allem durch seinen Prioritätsstreit mit Galilei um die Entdeckung der Sonnenflecken und der dadurch erstmals beobachteten Eigenrotation der Sonne bekannt wurde. In seiner lateinischen Abhandlung "Pantographice oder die Kunst, ein beliebiges Ding mit Hilfe eines Parallelogramms zu zeichnen" (Rom 1631) gab Scheiner an, er habe 1603 in Freiburg die Bekanntschaft eines Malers gemacht, der behauptete, ein Gerät zur mechanischen Ausführung von Vergrößerungen zu besitzen, es aber nicht vorzeigen wollte. Daraufhin habe er, Scheiner, das Gerät nach langem Nachdenken nacherfunden und den Maler damit in höchstes Staunen versetzt, da sein Gerät viel einfacher und besser als das des Malers war. Um die Mitte unseres Jahrhunderts wurde das Storchschnabelprinzip auch in der Technik verwendet, um Profile mit hoher Genauigkeit zu fräsen oder zu schleifen. Als Führung diente eine starke Vergrößerung des herzustellenden Profils, die abgetastet und per Storchschnabel-Mechanismus auf das Werkzeug übertragen wurde. Zuletzt konnte man einfache Storchschnäbel aus Holz oder Plaste vor Jahren noch gelegentlich in Spielwarenläden finden. Nun scheinen sie ausgestorben zu sein?

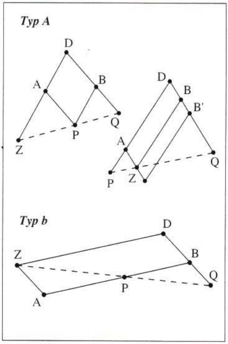


Abbildung 1

Dr. Peter Schreiber, Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald