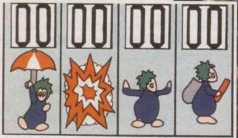
H 11328 F

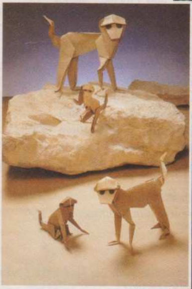
Heft 1
Februar 1992
26. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift



Lemmings



Origami

Nepersche Rechenstäbchen

Sommerschule Junger Mathematiker

Wilhelm Weber zu Gauß:

„Carl-Friedrich, jetzt haste lange genug gesessen, hier haste ´nen Zehner, ich bin dran!"

So oder ähnlich könnte das Gespräch der beiden Göttinger Wissenschaftler verlaufen sein, wenn man dem Bild Glauben schenken würde. Echt ist nur der neue 10,– DM Schein, der mit dem Konterfei des Carl-Friedrich Gauß (1777 – 1855) versehen ist. Eine Ehrung, die der Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker sicher verdient hat, sind doch rund 50 mathematische Gesetze, Lehrsätze, Formeln und Methoden nach ihm benannt. Das Gauß-Weber Denkmal steht übrigens am Göttinger Wall, unweit von dem mathematischen Institut und der Sternwarte, dessen erster Direktor Gauß war.

Text und Foto:
B. Beuermann, Göttingen

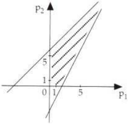
alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), StD Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

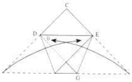
Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34007-5

Inhaltsverzeichnis



Was kann Fabrikant Hoffmann, Hersteller grüner Gummifrösche, tun, wenn er höhere Gewinne als sein Konkurrent Köhler mit dessen gelben Gummibärchen erzielen will? Diese und andere Fragen rund um die Unternehmensstrategien klären ***Ralf Baumgart*** und ***Dr. Bernd Luderer***.

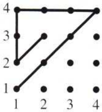


Fingerspitzengefühl ist wieder gefragt, wenn ***Dr. Christian Werge*** die Konstruktion eines zweiten Platonischen Körpers vorstellt.

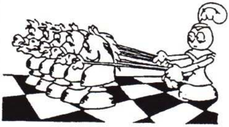
Zeitungen mit der *mathematischen Brille* betrachtet.

Der Nieselregen während einer Klassenfahrt stört Klaus, Hans, Eberhard und ihren Lehrer wenig, denn es gilt ein mathematisches Problem am Billardtisch zu knacken. Von ***Dr. Reinhard Hofmann***.

Eine Zusammenstellung aktueller historischer Ereignisse von ***Hans-Joachim Ilgauds.***

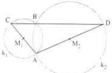


Ernst wird mit dieser Drohung zwar nicht gemacht, aber man muß schon pfiffig sein bei dem hier von ***Claudia Erdmann*** vorgestellten Zweipersonenspiel.

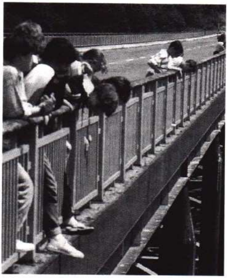


Mit ausnahmsweise einmal 9 Damen auf dem Brett und dem Bericht über einen bundesweiten Wettbewerb durften ***Harald Rüdiger*** und ***Markus Spindler*** wieder einmal Interessantes über Schach bieten.

Jetzt heißt es wieder, die kleinen grauen Zellen zu aktivieren, die zweite Etappe steht an.



Die Aufgaben stellten ***OStR Theodor Scholl***, Berlin, ***Dr. Wolfgang Fregin*** und ***Dr. Werner Riehl***, beide Leipzig, zusammen.



Daß Mathematik und Ferien ein ideales Paar sind, vorausgesetzt man faßt es richtig an, zeigt ***Dr. Christian Werge***.

Jeder fängt einmal klein an, auch Rechenmaschinen. Einen Vorfahren unserer ausgeklügelten Taschenrechner stellen ***Dr. Reinhard Buchheim*** und ***Prof. Karl Manteuffel*** vor.

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt.

Der Druckfehlerteufel schlug zu in Heft 6/91. Wir bitten folgende Korrekturen zu beachten:
S. 30, 1. Spalte, 3. Zeile v. u.:
statt „5" lies „s",
S. 31, 2. Spalte, 8. Zeile v. u.:
statt „=" lies „≈".

Richtigstellung
Bedauerlicherweise enthielt das uns zugesandte Material zur 4. Stufe der XXX. OJM (alpha Heft 5/91, Seite 29) einen Fehler. Der Preisträger *Marco Schlichting* besuchte zu diesem Zeitpunkt nicht, wie abgedruckt, die C.-F.-Gauß-Schule in Frankfurt/O., sondern die *Weinbergschule in Kleinmachnow*.

Die Konkurrenz der Gummibärchen

Eine Plauderei über Unternehmensstrategien

Wir wollen gemeinsam den Einstieg in einige mathematisch gut beschreibbare Zusammenhänge der Marktwirtschaft versuchen. Dazu ist es wie in vielen Fällen zunächst günstig, die aus der Praxis kommenden Aufgaben so zu vereinfachen, daß die Zusammenhänge klar und übersichtlich werden. Aus diesem Grund wollen wir hier einen Markt untersuchen, welcher lediglich zwei Produzenten umfaßt und von außen unbeeinflußt ist.

Genau diese Situation liegt in dem kleinen Städtchen Ökonohausen vor, wo die beiden Süßwarenfabrikanten Köhler und Hoffmann miteinander konkurrieren. Außer den gelben Köhlerschen Gummibären und den Hoffmannschen grünen Gummifröschen gibt es nichts Vergleichbares in den Läden zu kaufen, und beide Artikel sind auch sehr beliebt bei der jüngeren Bevölkerung.

Da das Taschengeld aber immer knapp ist, hängt die gekaufte Menge, d. h. die Nachfrage nach Gummitierchen, sehr vom Preis ab, zu dem die Süßigkeiten angeboten werden. Im Ergebnis von Testkäufen zu unterschiedlichen Preisen sowie von Befragungen zum eventuellen Kaufverhalten gelang es den zwei Produzenten, diesen Zusammenhang durch die Gleichungen

$x_1=4-2p_1+p_2$ und (1)
$x_2=6+p_1-p_2$ (2)

zu beschreiben. Dabei bezeichnen x_1 und x_2 die pro Monat in Ökonohausen gekauften Mengen, p_1 und p_2 die Preise (je Tüte) der Gummibärchen bzw. -frösche. Die durch die Gleichungen gegebenen Funktionen $x_i=f(p_1,p_2)$ heißen Nachfragefunktionen, denn für gegebene Preise kann die Nachfrage (gekaufte Menge) direkt ermittelt werden. Der beschriebene Sachverhalt ist dabei ganz natürlich, denn: Sinkt der Preis des eigenen Produkts, wächst die Nachfrage nach diesem, sinkt der Preis des Konkurrenzprodukts, verringert sich die Nachfrage und umgekehrt.

Wir setzen dabei voraus, daß in Ökonohausen obige Nachfragefunktionen exakt gelten. Dies ist eine weitere Vereinfachung der Problematik, denn in der Realität besitzen Nachfragefunktionen kompliziertere Strukturen, deren exakte Ermittlung oft nicht möglich ist. Die erforderliche Verwendung von Näherungen hat dann zur Folge, daß die in der Praxis erzielten Ergebnisse ebenfalls "nur" Näherungscharakter tragen.

Auf die Angabe von Maßeinheiten verzichten wir der Kürze wegen, doch wer will, kann z. B. "DM" für p_i und "1000 Stck." für x_i verwenden. Die Koeffizienten hätten demzufolge die Einheit "1000 Stck./DM".

Außerdem seien die bei der Produktion der Gummitierchen entstehenden Kosten als Funktionen der nachgefragten Mengen bekannt (Kostenfunktionen):

$K_1=1+2x_1$ (bei Fabrikant Köhler), (3)
$K_2=2+x_2$ (bei Fabrikant Hoffmann). (4)

Fabrikant Köhler (im weiteren F_1 genannt) kann nur den Preis p_1 beeinflussen, während Unternehmer Hoffmann (F_2) nur p_2 festlegen kann. Die Festlegung des jeweiligen Preises geschieht dabei in Abhängigkeit vom Preis des Konkurrenzproduktes oder auch nach eigenem Gutdünken (aktive Preispolitik).

Wir wollen untersuchen, wie die Preisfestlegung (z. B. bei F_2) erfolgen muß, damit der eigene Gewinn so groß wie möglich wird, wie beide Konkurrenten durch illegale Preisabsprachen ihren Gewinn vergrößern können und welcher Gewinn bei einer Verschmelzung beider Firmen (Monopol) entstände.

Welche mathematischen Kenntnisse werden benötigt?

Erstens müssen wir in der Lage sein, eine Gerade in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, z. B. die Gerade $p_2=2p_1-4$ in ein p_1,p_2-Koordinatensystem (Abb. 1).

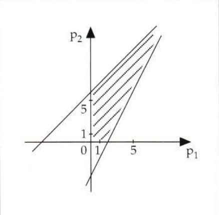


Abb. 1

Für alle Preispaare (p_1,p_2) die auf dieser Geraden liegen, gilt nämlich aufgrund der dazugehörenden Nachfragefunktion $x_1 = 0$.

Zweitens benötigen wir die Menge der "sinnvollen" Punkte in der p_1,p_2-Ebene. In bezug auf x_1 sind dies alle Preispaare, für die $x_1 \geq 0$, d. h. $4-2p_1+p_2 \geq 0$ gilt. Da das Paar $(p_1,p_2) = (0,0)$ diese Beziehung offensichtlich erfüllt, erfüllen alle Punkte der durch die Gerade $p_2=2p_1-4$ erzeugten Halbebene, in der (0,0) liegt, die betrachtete Ungleichung (vgl. den Artikel von B. Luderer in alpha 5/90).

In Abb. 1 ist die Menge der "sinnvollen" Punkte, d. h. die Menge derjenigen Preispaare hervorgehoben, für die gilt:
$x_1=4-2p_1+p_2 \geq 0, x_2=6+p_1-p_2 \geq 0, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$. Drittens schließlich müssen wir den größten Wert (Maximum) einer quadratischen Funktion $f(x)=-ax^2-bx-c$ $(a>0)$ bestimmen können, welcher jedoch im Scheitel $S=\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a}-c\right)$ angenommen wird.

Welche ökonomischen Kenntnisse werden benötigt?

Wir benötigen, nachdem die Nachfrage- und Kostenfunktionen bereits eingeführt sind, außerdem noch beide Umsatzfunktionen und beide Gewinnfunktionen. Dabei gilt generell:
Umsatz = verkaufte Menge · Preis,
Gewinn = Umsatz – Kosten.
Konkret bedeutet das also:
$U_1=x_1p_1$, $G_1 = U_1-K_1$ für Unternehmer F_1 und
$U_2=x_2p_2$, $G_2 = U_2-K_2$ für F_2.
Zu bemerken wäre, daß je nach Betrachtungsweise bestimmte Größen (z. B. p_1) als fixiert gelten, so daß z. B. x_2 sowohl eine Funktion von p_1 und p_2, als auch eine Funktion von nur p_2 sein kann. Nunmehr sind wir gerüstet, verschiedene marktwirtschaftliche Strategien anhand der Betrachtung des Ökonohausener Gummitierchenmarktes genauer zu diskutieren.

Gewinnmaximierung

Die Maximierung seines Gewinns ist für jeden Unternehmer eines seiner natürlichen Ziele. Wir unterstellen beiden Fabrikanten eine solche Verhaltensweise und versetzen uns in die Lage von F_2. Angenommen, F_1 hat seine Preisentscheidung p_1 bereits getroffen. Dann ist für F_2 der Preis p_1 eine gegebene Größe, die er nicht beeinflussen kann. Er wird deshalb den Preis p_2 so festlegen, daß dieser Lösung der Extremwertaufgabe

$G_2(p_2) \to \max, p_2 \geq 0$

ist. (Die Beziehung $G_2(p_2)$ beschreibt hier den Gewinn von F_2 als Funktion des Preises p_2)
Unter Verwendung von (2) und (4) erhält man

$$\begin{aligned}G_2(p_2)&=U_2(p_2)-K_2(p_2)=x_2(p_2)p_2-K_2(p_2)\\&=6p_2-p_2^2+p_1p_2-(2+6-p_2+p_1)\\&=-p_2^2-(-p_1-7)p_2-(p_1+8).\end{aligned}$$

Der maximale Wert von $G_2(p_2)$ wird für

$$(p_2)_{max}=\frac{1}{2}(p_1+7) \qquad (6)$$

angenommen. Die Größe $(p_2)_{max}$ ist positiv, da $p_1 \geq 0$ gilt. Auf analoge Weise nutzt F_1, sofern

F_2 seinen Preis p_2 festgelegt hat, die Aufgabe
$G_1(p_1) \to \max,\ p_1 \geq 0$
zur Ermittlung seines gewinnoptimalen Preises p_1, wobei nach (1) und (3)

$$G_1(p_1) = -2p_1^2 - (-p_2 - 8)p_1 - (2p_2 + 9) \qquad (7)$$

$$(p_1)_{\max} = \frac{1}{4}(p_2 + 8) \qquad (8)$$

gilt. Die Beziehungen (6) und (8) bzw. ihre geometrischen Darstellungen (Abb. 2)

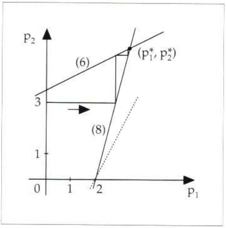


Abb. 2

werden Preisreaktionsgeraden genannt. Sie beschreiben die optimale Wahl des eigenen Preises bei vorgegebenem Preis des Konkurrenzproduktes. Hat also F_1 eine Wahl p_1 getroffen, so muß F_2, um seinen Gewinn zu maximieren, seinen Preis p_2 so festlegen, daß (p_1, p_2) auf der Geraden (6) liegt.
Beide Preisreaktionsgeraden schneiden sich im Punkt

$$\left(p_1^*, p_2^*\right) = \left(\frac{23}{7}, \frac{36}{7}\right).$$

Überprüft dies! Überprüft auch, daß sich für (p_1^*, p_2^*) gemäß (5) und (7) die Gewinne $G_1 = 2{,}31$ und $G_2 = 15{,}16$ ergeben.
Im Punkt (p_1^*, p_2^*) liegt ein Marktgleichgewicht vor, denn beide Konkurrenten haben in diesem Punkt kein Interesse an Preiserhöhungen und Preissenkungen (Strategie der Gewinnmaximierung vorausgesetzt). Außerdem wirken die betrachteten marktwirtschaftlichen Zusammenhänge in solcher Weise auf die Konkurrenten, daß sich die aktuellen Preise mit fortschreitender Zeit den Gleichgewichtspreisen nähern.
Wie das geschieht, zeigt folgendes Beispiel: Wählt F_2 einen anderen Preis, etwa $p_2 = 3$, für seine grünen Gummifrösche, so verkauft F_1 entsprechend (8) zum Preis $p_1 = 2{,}75$. Die Gewinne betragen hier $G_1 = 0{,}125$ und $G_2 = 9{,}5$ und sind somit beide niedriger als im Gleichgewichtspunkt. F_2 wird deshalb schnell auf seine Gerade (6) zurückkehren, was zu $p_2 = 4{,}88$ $(p_1 = 2{,}75)$ führt.
Nun wählt F_1 entsprechend (8) $p_1 = 3{,}22$, F_2 nimmt $p_2 = 5{,}11$ usw. In Abb. 2 erkennen wir, daß sich diese Punktfolge immer mehr dem Punkt (p_1^*, p_2^*) nähert oder, wie man sagt, gegen (p_1^*, p_2^*) konvergiert.

Preisabsprache

Können die Konkurrenten Köhler und Hoffmann ihre Gewinne erhöhen, wenn sie, was allerdings verboten ist, (geheime) Preisabsprachen treffen?
Wir nehmen an, F_2 wählt einen von p_2^* verschiedenen Wert p_2 und unterstellen weiterhin, daß F_1 seinen Gewinn zu maximieren sucht. Dazu betrachten wir zwei Beispiele:
$p_2 = 7$ liefert gemäß (8) $p_1 = 3{,}75$. Die Gewinne ergeben sich zu $G_1 = 5{,}13$ und $G_2 = 14$, also ein deutlicher Zuwachs für F_1, jedoch ein Verlust für F_2.
$\hat{p}_2 = 6$ hingegen zieht $\hat{p}_1 = 3{,}5$ nach sich, was zu den Gewinnen $G_1 = 3{,}5$ und $G_2 = 15{,}5$ führt, wodurch beide Konkurrenten einen Gewinnzuwachs gegenüber dem Gleichgewichtspunkt erzielen könnten.
Sprechen sich also die Konkurrenten Köhler und Hoffmann ab, einen derartigen Punkt zu wählen, können sie beide ihre Gewinnlage gegenüber (p_1^*, p_2^*) verbessern. Speziell im Punkt $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ hat es F_2 auch in der Hand, durch "Genügsamkeit" in $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ zu verbleiben, vorausgesetzt, F_1 bleibt bei seiner Strategie der Gewinnmaximierung.
Ist F_2 jedoch wieder bestrebt, den momentan bestmöglichen Gewinn zu erzielen, wird er feststellen müssen, daß sich dieser im Laufe der Zeit auf das Gleichgewichtsniveau verschlechtert. Die entsprechende Punktfolge (3,5; 6), (3,5; 5,25), (3,31; 5,25), (3,31; 5,16), ..., die durch abwechselnde Wahl von p_1 und p_2 gemäß (6) und (8) entsteht (und sich (p_1^*, p_2^*) nähert), ist in Abb. 3 dargestellt.

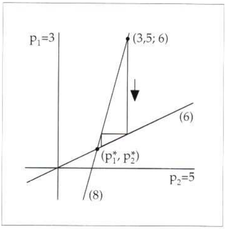


Abb. 3

Natürlich werden auch noch ganz andere Verhaltensweisen im Konkurrenzkampf beobachtet, als das die Strategie der Gewinnmaximierung darstellt. Es wäre z. B. gut denkbar, daß F_2 im Rahmen seiner finanziellen Belastbarkeit eigene Gewinnverluste in Kauf nimmt, um den Gewinn von F_1 so klein wie möglich zu halten, mit dem Ziel, ihn aus dem Markt zu drängen. Denn dann wäre ja F_2 alleiniger Anbieter von Gummitierchen, wozu man auch sagt, F_2 besitze das Monopol auf dem entsprechenden Markt.

Monopol

Nehmen wir nun an, Herrn Hoffmann wäre es gelungen, das Unternehmen Köhler aufzukaufen. Somit würde Herr Hoffmann allein und ohne Konkurrenzkampf die Preise für die gelben Gummibären und die grünen Gummifrösche festlegen können. In diesem Fall wäre wieder die Maximierung des Gesamtgewinns $G = G_1 + G_2$ eine naheliegende Zielstellung, wobei gilt:
$G = -2p_1^2 - p_2^2 + 2p_1p_2 + 7p_1 + 5p_2 - 17$.
D. h., G ist eine quadratische Funktion, die von zwei Variablen abhängt, welche nichtnegativ sind. Zur Bestimmung des Maximums werden i. allg. weiterreichende Kenntnisse nötig sein. Oft gelangt man aber mit Hilfe der quadratischen Ergänzung zum Ziel:

$$G = -\left(p_2 - \frac{2p_1 + 5}{2}\right)^2 - (p_1 - 6)^2 + \frac{101}{4}.$$

Gelingt es uns also, nichtnegative Werte p_1 und p_2 so zu bestimmen, daß beide Quadrate Null werden, so haben wir das Maximum von G gefunden, denn es gilt:
$G \leq \frac{101}{4}$ (da quadratische Ausdrücke nichtnegativ sind).
Somit wird für $p_1 = 6$ und $p_2 = \frac{17}{2}$ ein maximaler Gewinn von $\frac{101}{4} = 25{,}25$ erzielt.
Wir erkennen also, daß das Monopol bei gleichen materiellen Gegebenheiten einen wesentlich höheren Gewinn realisieren kann, als die im Konkurrenzkampf stehenden Unternehmen in ihrer Summe erzielen.

Der Preis ist gleich Wert plus Belohnung für die Gewissensbisse bei seiner Festsetzung.
Julian Tuwim
poln. Satiriker (1894 – 1953)

Ralf Baumgart, Dr. Bernd Luderer
Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Chemnitz

Noch eine Konstruktion im Raum: das Tetraeder

Eine Fortsetzung unserer Faltarbeiten mit Fingerspitzengefühl und mathematischen Hintergrund

Im Heft 5/1991 konstruierten wir – bitte lest über diese Möglichkeit nach – einen Würfel, indem wir ein quadratisches Stück Papier geeignet falteten und schließlich durch Aufblasen die räumliche Figur erhielten. Die Konstruktionsvorschrift lieferte in gleicher Weise exakte Ergebnisse, wie man sie bei den vertrauten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gewöhnt ist. Insbesondere ein "In-etwa-Hinbiegen", d. h. ein Probieren und schrittweises Annähern, soll nicht erlaubt sein.

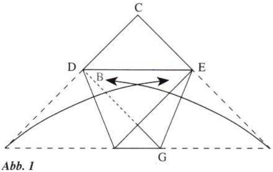


Abb. 1

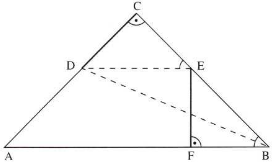


Abb. 2

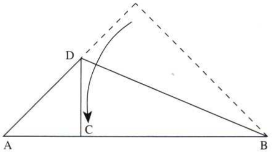


Abb. 3

Den letzten Gedanken wollen wir uns am **Becher** verdeutlichen, einer recht einfachen Faltarbeit, die den meisten bekannt sein dürfte. Dazu falten wir ein quadratisches Stück Papier, generell der Ausgangspunkt bei **Origami**-Faltarbeiten (Origami: die von Japanern entwickelte und bis heute gepflegte Papierfaltkunst), entlang einer der Diagonalen und legen die Arbeit mit dem rechten Winkel nach oben auf die feste, glatte Unterlage vor uns. Nun sind die Enden der Faltkante nach links bzw. rechts oben so zu falten, daß die Spitzen auf den Papierrand treffen und die auf dem Ausgangsdreieck liegenden Papierränder sowohl genau übereinander als auch parallel zur ersten Faltkante verlaufen (**Abb. 1**).

Vollzieht diese wenigen Kniffe nach, und Ihr werdet sehen, daß dies erst durch Probieren, nochmaliges Auffalten usw. in etwa hinkommt. Wir wollen deshalb überlegen, wie man diejenige Stelle bestimmen kann, an die eines der Enden der Faltkante gelegt werden muß. (Damit wäre auch der entsprechende Punkt auf der anderen Papierkante bestimmt.)

Angenommen, wir hätten schon exakt konstruiert. Anhand der Überlegungsfigur (**Abb. 2**) erkennen wir, daß $\overline{EB} = \overline{ED}$ gelten muß (gemäß dem Ziel der Konstruktion).

Wegen der Parallelität von AB und DE sind die Winkel DEC und ABC Stufenwinkel und damit gleichgroß: $\frac{90°}{2} = 45°$.

Fällen wir von E auf AB das Lot, erhalten wir die zwei kongruenten Dreiecke DEC und FBE (nach Ssw).

Wie könnte man nun durch eine einfache Faltung den Punkt D **exakt** bestimmen?

Der Abstand der Faltkante AB von D, der $\overline{EF}$ beträgt, muß ebensogroß sein wie die Länge der Strecke DC (gleichliegende Seiten in kongruenten Dreiecken). Das können wir dadurch erreichen, daß die Papierkante BC (samt dem bei C befindlichen rechten Winkel) auf die Faltkante AB geknickt wird (**Abb. 3**).

An der Kante AC wird D mit einem kleinen Kniff markiert und anschließend spielend leicht der Becher paßgenau fertiggestellt, indem B auf D gefaltet und A entsprechend darüber geschlagen wird. Schließlich müssen die beiden rechtwinkligen Ecken bei C nach vorn bzw. hinten umgelegt werden.

> **1.** Welchen Winkel schließen die Seitenkanten des Bechers mit seiner Bodenkante ein?
> **2.** Welches Fassungsvermögen hat der Becher? (Unlösbar?)

Genug der Vorübungen. Fingerfertigkeit und Verständnis dafür, was unter exakten Papierfaltkonstruktionen zu verstehen ist, sind erworben. Gehen wir also an die in doppeltem Wortsinn knifflige **Tetraederkonstruktion**.

Wie gewöhnlich beginnen wir mit einem quadratischen Stück Papier von ca. 20 cm Kantenlänge und erzeugen durch zwei senkrecht zueinander verlaufende Talfalten vier kongruente Teilquadrate. Nun legen wir die untere linke Ecke straff gehalten um die obere linke Ecke auf die horizontale Falte, drücken diese an und entfalten sie wieder (**Abb. 4**).

> **3.** Weise nach, daß die bei D entstandenen Winkel 30° bzw. 60° groß sind!

Analog verfahren wir mit den anderen drei Ecken B, C und D: B wird um C an die Falte EF gelegt, C um B sowie D um A ebenfalls an EF, so daß ein Zwischenergebnis wie in **Abb. 5** entsteht. Mit zwei Talfalten durch G und H, die parallel zu AB verlaufen, setzen wir fort. Die obere öffnen wir wieder und klappen die linke Hälfte genau über die rechte (**Abb. 6**).

Nun falten wir senkrecht zu GI so, daß die entstehende Falte durch I verläuft. Mit anderen Worten, wir legen die Falte durch G und I genau im Punkt I zusammen, wobei wir sowohl nach vorn (Talfalte) als auch nach hinten (Bergfalte) kniffen. Das erleichtert den vielleicht schwierigsten Kniff: Der gesamte, zuletzt bewegte obere Teil der Faltarbeit wird jetzt in einem sogenannten Gegenbruch **zwischen** Vorder- und Rückseite hineingefaltet (**Abb. 7**). Die beiden übereinanderliegenden stumpfen Winkel von 120° bei K werden entlang der ehemaligen Mittellinie EF nach vorn bzw. hinten gefaltet, ebenso die beiden 60°-Spitzen bei C entlang der benachbarten, schon vorhandenen Faltlinie. Nun wird GI nochmals (nach vorn und hinten) vorgefaltet und anschließend (Das ist knifflig!) der vordere Teil nach vorn und der hintere nach hinten jeweils entlang GI geschlagen (**Abb. 8**).

Die untere rechte rechtwinklige Ecke wird entlang der vorhandenen Kniffe nach innen

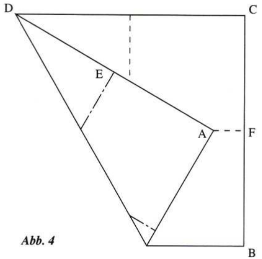


Abb. 4

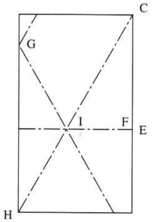


Abb. 6

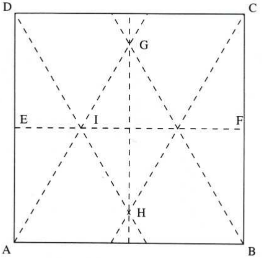


Abb. 5

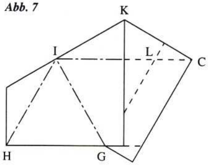


Abb. 7

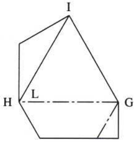


Abb. 8

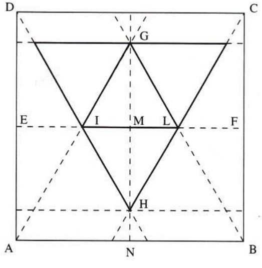


Abb. 9

gebracht (Gegenbruch) und schließlich die trapezförmigen unteren Abschnitte in die Mitte der Faltarbeit fest eingesteckt. Fertig! Fertig? Ein Körper war versprochen! Ein kleiner Puster in die untere Spalte bringt den Körper in aller Regelmäßigkeit zum Vorschein. Bitte verzagt nicht, wenn der erste Versuch noch nicht gelang. Geht die Anleitung nochmal in Ruhe Wort für Wort durch und beachtet dabei, daß sich die Angaben einzelner Punkte oder Faltkanten meist auf alle Faltteile beziehen, die an der betreffenden Stelle übereinander liegen!

Steht das Tetraeder vor Euch, kommt wieder stärker die Geometrie ins Spiel:

Ist das nun ein Tetraeder oder **irgend eine dreiseitige Pyramide**?

Zum Beweis markieren wir mit einem Filzstift alle Kanten des Körpers. Sollten zwei Papierkanten "zusammenfallen", dann kennzeichnen wir beide, und entfalten den Körper vorsichtig. Das Ergebnis zeigt **Abb. 9**.

Aus der Lösung von Aufgabe 1 wissen wir schon, daß die Faltlinien durch die Eckpunkte A, B, C und D tatsächlich im Winkel von exakt

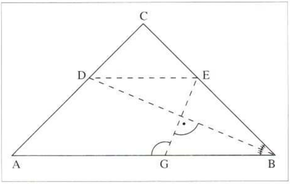


Abb. 10

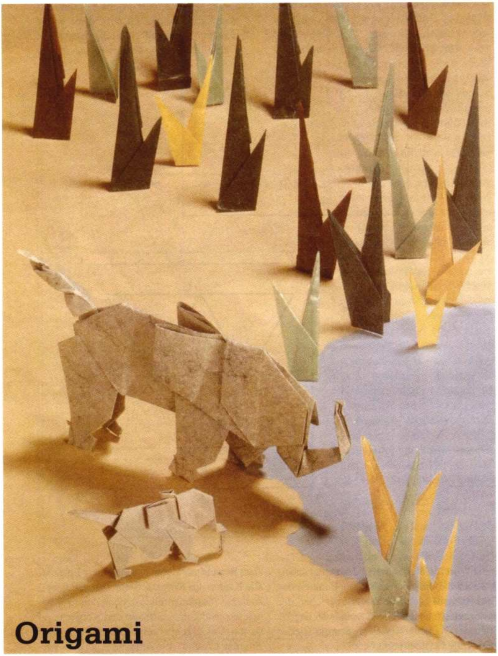
60° zur Horizontalen (z. B. zu AB) verlaufen. Daraus folgt für die eingezeichneten Winkel bei G und H, daß sie alle die Größe 60° haben (Winkelsumme im Dreieck). Die markierten Winkel bei I und L haben dieselbe Eigenschaft (Winkel an geschnittenen Parallelen). Damit sind die vier Dreiecke zumindest ähnlich (Hauptähnlichkeitssatz). Deckungsgleich (kongruent) sind sie darüber hinaus, denn sie haben alle die gleiche Höhe $\overline{GH}/2$.

Die entstandene Figur ist das Netz eines Tetraeders. Da beim Falten entsprechende Kanten aufeinanderfallen, ist bewiesen: Unser Werk aus Papier ist einer der fünf platonischen Körper, das Tetraeder.

4. Wie groß ist das Volumen eines Tetraeders, der aus einem quadratischen Stück Papier von 20 cm Kantenlänge gefaltet wurde?

5. Welche Seitenlänge des Ausgangsquadrates wird für einen doppelt so voluminösen Tetraeder benötigt?

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig



Die japanische Papierfaltkunst **Origami** benötigt als einziges Arbeitsmittel Papier*. Von den verschiedenen Grundformen, aus denen die Figuren entwickelt werden, hat die sogenannte Vogelgrundform die größte Bedeutung. Aus dieser kann auch die wohl berühmteste Origamifigur, der Kranich entwickelt werden. Dieser gilt als Symbol für ein langes Leben und Gesundheit. Der Glaube, daß das Falten von **Tausend Kranichen** zur Gesundung führt, war für viele Kinder, die an den Folgen der Atombombenabwürfe auf Hiroshima und Nagasaki litten, letzte Hoffnung.

Auch heute noch werden **Tausend Kraniche** weltweit zur Erhaltung des Friedens und unserer Umwelt gefaltet.

*Übrigens gibt es speziell für Origamiarbeiten hergestellte und zugeschnittene Papiere.

Ein Buchtip:
Wie Ihr den Kranich und andere Tierfiguren falten könnt, findet Ihr in einem kleinen Bändchen der ***Ravensburger Hobbykurse***.

Zeitungsschnipsel

In den Zeitungen geblättert haben wir dieses Mal unter dem Blickwinkel Bahn und Auto. Ein Thema, das Politiker, Verkehrsplaner und Umweltschützer sowie natürlich die Industrie stark beschäftigt. Wenn Ihr so einen interessanten Schnipsel findet, auch zu anderen Themen, dann schneidet ihn doch aus und sendet ihn an uns! Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

Neues von der Bahn

Die Leipziger Volkszeitung brachte neulich folgende Meldung:

Auf dem Weg zur Deutschen Bahn

Im Vorfeld der geplanten Zusammenlegung von Deutscher Reichsbahn und Bundesbahn wird das Nummernschema der DB jetzt für beide deutschen Bahnverwaltungen angewandt. Für die Reichsbahn-Loks läuft die Umnumerierung auf vollen Touren, wie hier im Bahnbetriebswerk Leipzig Hbf. West. Thomas Schön und Jörg Hauptvogel sind daran beteiligt, den dort beheimateten 120 E-Loks ihre neuen "Visitenkarten" zu geben, die fortan eine 1 am Beginn der Baureihenbezeichnung tragen.

LVZ-Foto:Pullwitt

Bis zum 31.12.91 sollen die alten RB-Nummern noch gelten, ab 1.1.92 treten dann die einen dicken Wälzer umfassenden DB-Nummern in Kraft. Das Prinzip der beiden Nummernsysteme ist gleich, nur tragen eben zum Beispiel die E-Loks zukünftig statt der "2" eine "1" an erster Stelle. Damit haben wir das Geheimnis der ersten Zahl gelüftet, was bedeuten aber die anderen 6 Ziffern?

1 55 053 - 2

- 053: Herstellungsnummer der Lok (53. Lok der Baureihe 155)
- 55: Baureihe
- 1: Antriebsart (Dampf-, E- oder Diesellok)

Und die letzte Ziffer? Die Leser des Beitrages "Geheimschrift EAN?" aus Heft 6/91 werden es schon ahnen! Es handelt sich um eine Prüfziffer, welche nach folgendem Verfahren ermittelt wird:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 5 & 0 & 5 & 3 \\ \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 & \downarrow\cdot 1 & \downarrow\cdot 2 \end{array}$$

$$1 + (1 + 0) + 5 + 0 + 5 + 6 = 18 + \mathbf{2} = 20$$

Die Prüfziffer ergänzt also die Quersumme der neuen Ziffern auf die nächste durch 10 teilbare Zahl.

- Die Prüfziffer der zweiten Loknummer ist etwas verdeckt, ermittle sie selbst.
- Überlege, ob mittels dieses Prüfverfahrens die Änderung einer Ziffer, das Vertauschen zweier benachbarter Ziffern oder zweier beliebiger Ziffern bemerkt wird.

Schon gewußt?

Im Jahr 1920 gab es noch ebenso viele Personenwagen bei der Bahn wie PKW auf der Straße. Die Bahn war damals der Hauptträger des Güterverkehrs. Im Jahr 1985 besaß die DB 13531 Personenwagen, in der Bundesrepublik rollten 26 Millionen Pkw. Nur ein Drittel der Güter des Fernverkehrs wurden mit der Bahn transportiert, 1048 Millionen Personen benutzten die Bahn.

Autofahren wird teurer

Das Autofahren wird 1992 wieder teurer. Wie teuer war eine Autofahrt 1991?

Welcher „Fahrpreis" pro Person und pro Kilometer gehörte 1991 zu einem neuwertigen Golf CI 1,3, der 1991 20000 Kilometer zurücklegte und dabei stets mit 3 Personen besetzt war? (Die in der Tabelle angegebenen Monatsausgaben sind weitgehend unabhängig von der Zahl der mitfahrenden Personen)

In den Zeitungen blätterten für Euch: Dr. Gabriele Liebau, Leipzig und Walter Träger, Döbeln.

Mathematik am Billardtisch (2)

Welchen Weg muß eine Billardkugel rollen, um an den Ausgangspunkt zurückzukehren?

Guten Morgen! Draußen haben wir heute diesen so überaus beliebten Nieselregen, der alle Aktivität lähmt und uns an das Haus fesselt. Da ist es nur gut, daß wir – die "Mathematiker" meiner Klasse, Klaus, Hans und Eberhard, Ihr meine lieben LeserInnen und ich selbst – unser gemeinsames Problem haben, welches uns die unwirtliche Welt vor der Haustür vergessen läßt!

"Gibt es auf jedem, irgendwie viereckigen 'Billardtisch' geschlossene Reflexionswege, auf denen eine angestoßene Kugel nacheinander jede Bande berührt und zum Ausgangspunkt zurückkommt?" – wiederholte Hans gerade seine am Vorabend etwas unklarer formulierte Frage.
(Was alles wir über diese Frage bei einem normal rechteckigen Tisch herausgefunden haben, könnt ihr in Heft 6/91 nachlesen.)
Siegesgewiß zeichnete er dabei einen Fall mit unserer Spiegelungsmethode an die Tafel. (Abb. 1)
Klaus bemerkte sofort, daß es offenbar einige Veränderungen gegenüber dem 'Normalbillard' geben kann.
"Man kann aber nicht mehr von jedem Platz auf dem Tisch aus starten, ja, mir kommt es so vor, als könnte man die Winkel des Tisches so wählen, daß gar nichts mehr 'durchkommt'!"
Wohlweislich hatten wir heute Papier und Bleistift mitgebracht, und wir alle begannen eifrig zu skizzieren und dies und das zu probieren.

Plötzlich lag da ein Blatt von Eberhard mitten auf dem Tisch. "Na und?! Da geht nix; und außerdem ist unsere schöne Methode im Eimer. Nach drei Spiegelungen ist [A'B'] *nicht* zu [AB] parallel!" (Abb. 2)
Ratlosigkeit breitete sich aus. Wie sollte man da herauskommen?
Endlich (Lehrer, Lehrer ..!) konnte ich wieder einmal 'grundsätzlich' werden!
"Offensichtlich gibt es sowohl Vierecke, die Lösungen zulassen, als auch solche, bei denen wir keine finden. Wir haben aber bisher auch noch keinen Beweis dafür, daß es außer den mit unserer 'Spiegelungsmethode' gewonnenen Lösungen keine weiteren gibt. Ein solcher Sachverhalt liegt bei Problemen der Mathematik immer wieder einmal vor, und man sucht dann nach sogenannten 'Notwendigen Bedingungen' für eine eventuelle Lösung!"
"Aha" – Eberhard mußte sich wieder ins Spiel bringen, das war er sich einfach schuldig – "wir nehmen also an, daß wir eine Lösung gefunden haben und konstruieren daraus rückwärts den zugehörigen Tisch, also etwa so. (Abb. 3)
Im Δ AEH finden wir
$\widehat{a} + 90° - \alpha + 90° - \beta$, also $\widehat{a} = \alpha + \beta$
und genauso
$\widehat{b} = \beta + \gamma$, (X)
$\widehat{c} = \gamma + \delta$ und
$\widehat{d} = \delta + \alpha$.

Aber weit und breit keine besondere geometrische Eigenschaft des Vierecks ABCD in Sicht ... ."
"Wieso nicht?" – Klaus war weniger Geometer als Algebraiker, und er hatte das sofort gesehen. – "Es ist doch

$\widehat{a} + \widehat{c} = \widehat{b} + \widehat{d} =$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta =$

$\frac{360°}{2} = 180°$,

also kommen nur solche Vierecke für den Tisch in Frage, deren Eckwinkel diese Bedingung erfüllen!"
"Mm, ungewöhnlich. Das gefällt mir noch nicht. Ein geometrisches Problem und eine algebraische Lösungsbedingung ..." – hörte ich Hans vor sich hinmurmeln. Aber plötzlich schlug er sich an die Stirn: "Sehnenviereck! ... Das ist es! 'Ein Viereck ABCD ist dann und nur dann einem Kreis einbeschrieben, wenn die Summe seiner Gegenwinkelpaare jeweils gleich 180° ist'. – Ende des Zitats!"
"Dann haben wir es ja: Auf einem Billardtisch gibt es genau dann geschlossene Reflexionswege, wenn sein Grundriß ein Sehnenviereck ist. Klaro." – Eberhard war wieder obenauf und freute sich sichtlich: "Wir können die Lösung dann auch immer mit unserer Methode bekommen, denn wie Ihr an meiner Skizze erkennen könnt (Abb. 4), ist die Gerade A'B' *immer* zu AB parallel, denn zunächst dreht man AB um den Winkel $-\widehat{b}$ in Richtung BC, dann weiter um $\sphericalangle +\widehat{c}$, $\sphericalangle -\widehat{d}$ und schließlich um $\sphericalangle +\widehat{a}$ in die Richtung von A'B', also gilt tatsächlich

$$\sphericalangle(AB; A'B') = -\widehat{b}+\widehat{c}-\widehat{d}+\widehat{a} = (\widehat{c}+\widehat{a}) - (\widehat{b}+\widehat{d}) = 180° - 180° = 0°$$

So war es auch beim Rechteck!"

Ich war recht froh, daß er das Letzte selbst noch 'nachgeschoben' hatte. Eigentlich hatte ich ihm nämlich schon widersprechen wollen und müssen, als er aus der zuerst bewiesenen notwendigen Bedingung (es gibt ... *nur dann* einen geschlossenen Weg ...) einfach eine notwendige und hinreichende Bedingung (es gibt *genau dann* einen geschlossenen Weg ...) machen wollte!

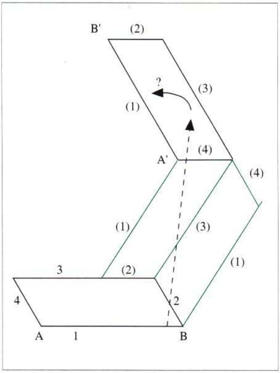


Abb. 2

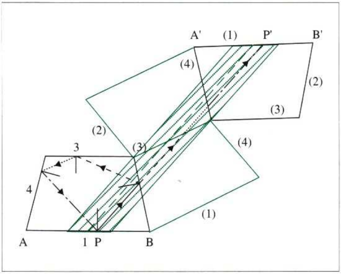


Abb. 1

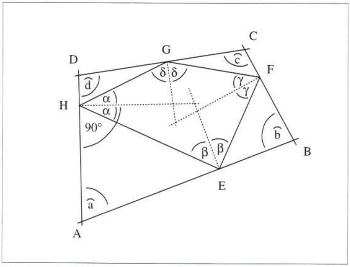


Abb. 3

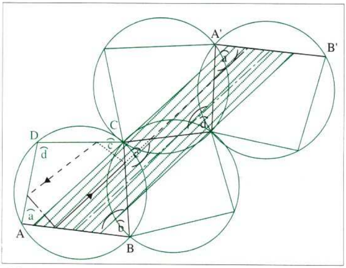


Abb. 4

Jetzt war alles im Lot, denn er hatte selbst noch den konstruktiven Existenzbeweis geliefert, und damit war die Bedingung auch als hinreichend (... es gibt *dann* einen geschlossenen Weg, wenn ...) nachgewiesen. "Wenn ich jetzt keinen solchen Bärenhunger hätte, könnte ich glatt noch die Frage stellen, ob die Sache eigentlich mit einem dreieckigen Tisch genauso funktioniert?" – Das war wieder typisch Hans. Aber auch Klaus ließ sich nicht lumpen, indem er auf 'sein' Gleichungssystem (X) zeigte und meinte: "Ein Viereck mit den Winkeln (2α, 2β, 2γ, 2δ) ist dann und nur dann die Lösung im Viereck ABCD mit den Winkeln ($\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$), wenn (α, β, γ, δ) Lösungsvektor dieses linearen Gleichungssystems ist! So muß sich Eberhards Satz auch beweisen und sogar auf 3-, 5-, 6- und n-Ecke ausdehnen lassen!"

Nun, wir gehen jetzt zum Mittagessen. Führt Ihr doch den Disput weiter. Sicher bekommt Ihr noch viel mehr heraus. Wir werden dann wieder miteinander darüber sprechen!

Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Teilbarkeit

(Kreuzzahlrätsel)

Hans Dieter Drton
Sittichstraße 26
8440 Straubing

Benutze die Teilbarkeitsregeln!
Probiere nicht mehr als unbedingt nötig!

1	2	3	4			■	5	6	7	8
9					■	10				
11				■	12					
13			■	14			■	15		
■	16		17				18	■	19	
20	■	21			■	22		23	■	
24	25	■	26		27				28	■
29		30	■	31			■	32		33
34			35		■	36				
37				■	38					
39			■	40						

waagrecht
1 größte durch 8 teilbare sechsstellige Zahl, die sich allein mit den Ziffern 0 und 6 bilden läßt
5 durch 8 teilbar
9 durch 8 teilbar, hat nur 5 und 6 als Ziffern
10 hat lauter verschiedene gerade Ziffern
11 ist durch 3 teilbar
12 ist die kleinste durch 3 teilbare sechsstellige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern, von denen keine 0 ist
13 ist durch 8 teilbar und hat nur gerade Ziffern
14 ist ein Vielfaches von 8 und 9
15 ist nicht durch 3 teilbar
16 ist die kleinste durch 4 teilbare siebenstellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern, von denen keine 0 ist
19 Primzahl
21 kleinste aus den Ziffern 6, 7 und 8 gebildete und durch 4 teilbare dreistellige Zahl
22 durch 9 teilbar
24 Quadratzahl
26 größte durch 3 teilbare siebenstellige Zahl paarweise verschiedenen Ziffern
29 teilbar durch 3
31 größte aus den Ziffern 4, 6 und 8 gebildete dreistellige Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist
32 hat die Ziffern 3, 4 und 5
34 teilbar durch 3 und 8, hat lauter verschiedene Ziffern
36 durch 8 teilbare unter den Zahlen 9144, 9148, 9244 und 9248
37 teilbar durch 8
38 größte durch 4 teilbare fünfstellige Zahl mit paarweise verschiedenen geraden Ziffern
39 kleinste durch 3, 4 und 5 teilbare vierstellige Zahl
40 teilbar durch 9 und 25

senkrecht
1 durch 2 und 3 teilbare Lösung von $6540 < x < 6550$
2 durch 3 teilbare Zahl, deren Ziffern mit wachsendem Stellenwert ebenfalls größer werden
3 teilbar durch 9
4 je kleiner der Stellenwert einer Ziffer dieser Zahl, desto kleiner die Ziffer
5 kleinste dreistellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern, die nicht durch 3 teilbar ist
6 kleinste vierstellige Zahl mit lauter gleichen Ziffern, die durch 4 teilbar ist
7 durch 3 und 4 teilbar, außerdem gehören zu größeren Stellenwerten größere Ziffern
8 kleinste durch 9 teilbare sechsstellige Zahl, die aus den Ziffern 6 und 9 gebildet werden kann
10 hat nur die Ziffern 2 und 6 und ist durch 3 teilbar
12 Vielfaches von 5 und 9
14 hat nur die Ziffern 4 und 8
17 durch 3 teilbar
18 durch 3 teilbar
20 größte durch 9 teilbare sechsstellige Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern
23 größte durch 4 teilbare sechsstellige Zahl, die nur die Ziffern 1 und 4 besitzt
25 kleinste durch 8 und 125 teilbare Zahl
27 teilbar durch 3 und 4
28 teilbar durch 3
30 von oben nach unten und von unten nach oben gelesen gleich und durch 9 teilbar
33 teilbar durch 3 und 5, nicht aber durch 25
35 Vielfaches von 4 und 25
36 Vielfaches von 2, 3 und 5
38 teilbar durch 2 und 3

Was war los?

Eine Chronologie ausgewählter Ereignisse über Jahrhunderte

408 v. u. Z. (?) Eudoxos von Knidos geboren: Astronom, Mathematiker, Geograph, Philosoph, Politiker

1392 Gründung der Universität Erfurt – in Erfurt wurden Mathematik und Naturwissenschaften besonders gepflegt

1592 Galilei führt in Pisa (1589/92) und Padua (1592/1600) Versuche über die Bewegung auf der schiefen Ebene durch

Eine sehr schöne Biographie über Galilei findet Ihr in Band 19 der Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, von E. Schmutzer und W. Schütz, erschienen in der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

1617 Erfindung der Neperschen Rechenstäbchen (siehe Text)

1642 Galileo Galilei am 8. Januar gestorben

1667 Gregorius a St. Vincentio am 27. Januar gestorben: Geometrie, Analysis, Astronomie

1742 Edmond Halley, Astronom und Mathematiker am 14. Januar gestorben

1767 L. Eulers berühmte „Vollständige Anleitung zur Algebra" verfaßt (gedruckt seit 1768)

1842 Christian Doppler entdeckt den „Dopplereffekt"

1868 das Element Helium wird in der Sonne entdeckt

1892 am 30. März Stefan Banach geboren (siehe Text)

Stefan Banach

Am 30. 3. 1892 wurde in Krakow der bedeutende polnische Mathematiker Stefan Banach geboren. Er stammte aus einfachsten Verhältnissen und wurde von Pflegeeltern aufgezogen. Banach studierte Ingenieurwissenschaften in Lwów, wobei er sich seinen Lebensunterhalt durch Privatunterricht verdienen mußte. In Lwów wurde der bekannte Mathematiker H. Steinhaus (1887 - 1972) auf Banach aufmerksam und förderte ihn tatkräftig. 1929 wurde Banach Professor in Lwów. Er gehörte zu den Mitbegründern der abstrakten (linearen) Funktionalanalysis und zeigte die Anwendbarkeit der Funktionalanalysis in vielen anderen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Theorie der reellen Funktionen. Daneben bewiesen Banachs Lehrbücher, z. B. über Differential- und Integralrechnung (1929), über Mechanik (1938), über reelle Funktionen (1951) sein großes Geschick in der Darstellung schwierigster mathematischer Sachverhalte. Mit anderen bedeutenden polnischen Mathematikern zusammen verfaßte Banach auch mathematische Lehrbücher für den Schulunterricht. Banach starb am 31. 8. 1945 in Lwów. Seit 1946 verleiht die Polnische Mathematische Gesellschaft für herausragende mathematische Leistungen einen Stefan-Banach-Preis, seit 1972 trägt ein internationales mathematisches Zentrum der polnischen Akademie der Wissenschaften den Namen Banachs.

Nepersche Rechenstäbchen

Hans-Joachim Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Im Jahre 1617 veröffentlichte der schottische Edelmann John Neper (1550 - 1617) eine Schrift mit dem Titel "Rhabdologia..." ("Lehre vom Stab ..."). In diesem Werk beschrieb Neper die von ihm erfundenen vierkantigen Rechenstäbchen (Abb. 1). Diese Rechenstäbchen konnten zum Multiplizieren und, allerdings mit großen Schwierigkeiten, auch zum Dividieren ganzer Zahlen verwendet werden. Auf den Stäbchen ist das kleine Einmaleins verzeichnet (Abb. 2). Für eine einfache Multiplikationsaufgabe mit zwei Faktoren wurden mindestens zwei Stäbchen benötigt.

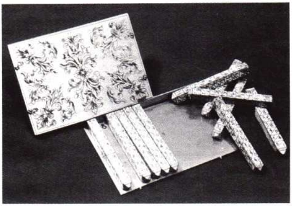


Abb. 1

Für die Rechenaufgabe 49375 · 32 mußte eine Zerlegung des zweiten Faktors in 30 + 2 vorgenommen werden, weil mechanisch nur 49375 · 2 und 49375 · 3 gerechnet werden konnten. Die zusätzliche Multiplikation von 49375 · 3 mit 10 mußte "im Kopf" vorgenommen werden. Das Verfahren lief auf eine mechanische Vervielfachung des ersten Faktors hinaus. Die Produkte ergeben sich in einer "Zickzacklinie":

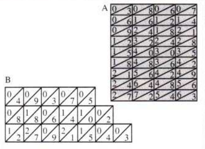


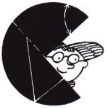
Abb. 2

49375 · 2 = (0)(8+1)(8+0)(6+1)(4+1)(0) = 98750

49375 · 3 = (1) (2+2) (7+0) (9+2) (1+1) (5) (Abb.).

Es ist noch die Schwierigkeit zu berücksichtigen, daß (9+2) nicht als eine Ziffer im Dezimalsystem schreibbar ist.

Die Folge (1)(2+2)(7+0)(9+2)(1+1)(5) ist also in (1)(2+2)(7+1)(1)(1+1)(5) = 148125 umzuschreiben. Die beiden Teilergebnisse waren nun, unter Berücksichtigung des oben erwähnten Faktors 10, auf die übliche Art zu addieren. Diese umständliche Rechenmethode fand bei den Zeitgenossen Lob. Neper hat seinen Rechenstäbchen weniger Bedeutung zugemessen; er lieferte selbst grundsätzliche Beiträge zur Entwicklung der Logarithmen (1614, 1619 aus dem Nachlaß).



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Meinte der Mathelehrer: "Mich interessiert nur eins: was hinten rauskommt."

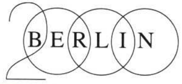
Lehrer: "Vier mal vier ist sechzehn, sechs mal sechs ist sechunddreißig, aber was kommt bei dreizehn mal dreizehn heraus?"
Alphons: "Na das hab ich gern! Die leichten Fragen selbst beantworten, und mit den schweren Fragen kommen Sie dann zu mir!"

Wäßrige Melonen

Großhändler Hinterbichler hat am Morgen 100 Zentner Wassermelonen gekauft, die 99 % Wasser enthalten. Diese große Menge muß er im Freien lagern, obwohl es tagsüber sehr heiß ist. Dadurch nimmt der Wassergehalt der Früchte um 1 % ab. Am Abend will er sie an Einzelhändler verkaufen.
Welche Menge Wassermelonen kann Großhändler Hinterbichler an die Einzelhändler verkaufen?

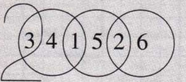
aus.: H.-D. Hornschuh, Mehr Mathe mit Köpfchen, Manz Verlag München

Olympia 2000 in Berlin?

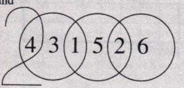


Gemäß der im Heft 6/91 gestellten Aufgabe sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 anstelle der Buchstaben B, E, R, L, I und N so einzusetzen, daß
$B+E+R = R+L+I = I+N = s$ gilt.
Wegen
$B+E+R+L+I+N = 1+2+3+4+5+6 = 21$ gilt
$3s = B+E+2R+L+2I+N = 21+R+I$,
$24 = 21+1+2 \leq 3s \leq 21+5+6 = 32$ und damit
wegen $s \in N \quad 8 \leq s \leq 10$.

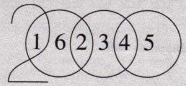
1. Möglichkeit: $s = 8$
Wegen $s = I+N = 8$ muß die Menge $\{I,N\}$ entweder gleich $\{3,5\}$ oder $\{2,6\}$ sein.
$\{I,N\} = \{3,5\}$ scheidet aus: Denn dann müßte $\{B,E,R,L\} = \{1,2,4,6\}$ gelten und $B+E+R = 8$ wäre nicht realisierbar.
Zu $\{I,N\} = \{2,6\}$ gehören zwei Lösungen: Aus $\{B,E,R,L\} = \{1,3,4,5\}$ und $B+E+R = 8$ folgt $L = 5$. Weiterhin ergibt sich aus $L = 5$, $R \in \{1,3,4\}$, $I \in \{2,6\}$ und $R+L+I = 8$ $R = 1$, $I = 2$ und $N = 6$. Zu $s = 8$ gehören die Lösungen

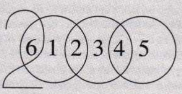


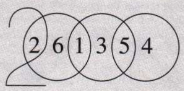
und

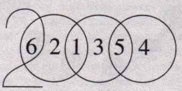


2. Möglichkeit: $s = 9$
Jetzt ist $\{I,N\}$ entweder gleich $\{3,6\}$ oder $\{4,5\}$.
$\{I,N\} = \{3,6\}$ scheidet aus:
Wegen $\{B,E,R,L\} = \{1,2,4,5\}$ könnte dann nicht $B+E+R = 9$ gelten.
Zu $\{I,N\} = \{4,5\}$ gehören Lösungen: Aus $\{B,E,R,L\} = \{1,2,3,6\}$ und $B+E+R = 9$ folgt $L = 3$. Wegen $L = 3$, $I \in \{4,5\}$, $R \in \{1,2,6\}$ und $R+L+I = 9$ muß entweder $I = 4$, $R = 2$ und $N = 5$ oder $I = 5$, $R = 1$ und $N = 4$ gelten. Damit sind vier weitere Lösungen ermittelt:

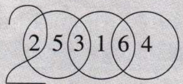


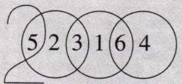


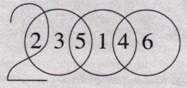


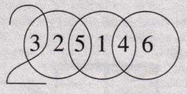


3. und letzte Möglichkeit: $s = 10$
Aus $\{I,N\} = \{4,6\}$, $\{B,E,R,L\} = \{1,2,3,5\}$ und $B+E+R = 10$ folgt $L = 1$. Wegen $L = 1$, $R+L+I = 10$, $R \in \{2,3,5\}$ und $I \in \{4,6\}$ muß entweder $R = 3$, $I = 6$ und $N = 4$ oder $R = 5$, $I = 4$ und $N = 6$ gelten. Zu $s = 10$ gehören 4 Lösungen:









Die gestellte Aufgabe hat also insgesamt 10 Lösungen.

Walter Träger, Döbeln

Komisches, Kniffliges und Knackiges

André Marie Ampère, der sich unvergängliche Verdienste auf dem Gebiet der Elektrizitätslehre erwarb, war während seines ganzen Lebens sehr zerstreut.
Eines Tages nahm er die Einladung eines Freundes zum Mittagessen an. Da sich das Mahl etwas verzögerte, nutzte Ampère die Zeit, um in seinem Notizbuch eine Formel nachzurechnen. Noch ganz in Gedanken hörte er, daß das Essen aufgetragen wurde, aß einige Bissen und rief dann, indem er glaubte, zu Hause zu speisen: "Das Essen ist ja wieder einmal nicht zu genießen! Wann wird meine Schwester endlich einsehen, daß jede Köchin – ehe man sie einstellt – erst eine Kostprobe ablegen muß!"

nach: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig

Vorschrift zum Färben

In der Abbildung sollen einige Felder gefärbt werden. Die Zahlen in jedem Feld geben an, wieviel ganzseitig benachbarte Felder einschließlich dem eigenen zu färben sind. (So könnte z. B. im Innern höchstens die Zahl 5 auftreten; nämlich, wenn alle benachbarten Felder und das eigene zu färben sind. In den Ecken könnte höchstens die Zahl 3 stehen) ... Wichtig ist, das richtige Ausgangsfeld zu finden, dann wird auch bald die richtige Färbung gefunden sein.

2	**1**	**3**	**2**	**2**
2	**4**	**3**	**4**	**3**
3	**3**	**4**	**4**	**3**
2	**2**	**4**	**3**	**3**
1	**2**	**2**	**2**	**1**

a	b	c	d	e	
					1
					2
					3
					4
					5

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Hölzchentricks

Lege die Hölzchen so, daß drei gleichgroße Quadrate entstehen.

Von X nach Y

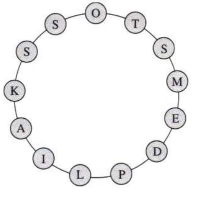
Du sollst von X über 13 Felder nach Y gelangen und zwar nur über solche, die Primzahlen enthalten. Jedes Feld darf dabei nur einmal benutzt werden. Beim Vorwärtsschreiten sind darüber hinaus nur vertikale und horizontale Wege erlaubt.
Zur Erinnerung: Eine Primzahl ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

31	13	11	X	41	53	11
43	15	57	17	75	47	13
59	21	39	19	93	45	31
67	73	19	17	23	61	73
29	49	37	87	97	69	53
37	29	27	91	89	63	83
47	79	71	Y	83	43	97

aus: Maximath, Paris

Wie heißt die Pflanze?

Die 13 Buchstaben des gesuchten Pflanzennamens sind im Bilde auf einem Kreis angeordnet. Der Anfangsbuchstabe des gesuchten Wortes ist durch Raten oder Probieren zu finden. Ebenso ist eine bestimmte natürliche Zahl m zu ermitteln. Für zwei im gesuchten Pflanzennamen aufeinanderfolgende Buchstaben (Vorgänger – Nachfolger) gilt nämlich: Im abgebildeten Buchstabenkreis ist der Nachfolger stets der m-te Buchstabe im Uhrzeigersinn nach seinem Vorgänger.



W. Träger, Döbeln

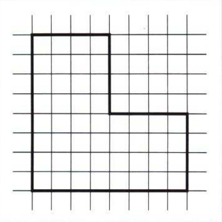
Durcheinander

Beim Schreiben sind die Buchstaben durcheinander geraten. Ordne sie zu sinnvollen mathematischen Begriffen!

Mumse, Chrub, Sinum, Derage, Tenoquit, Sulp, Ketmamitha.

Flächenverwandlung

Zwei zur abgebildeten Figur kongruente Flächen sind auf Papier zu zeichnen und auszuschneiden. Danach ist jedes von beiden in 3 Teilflächen zu zerschneiden und die 6 Teile sind zu einem zum abgebildeten ähnlichen Flächenstück aneinander zu legen.



W. Träger, Döbeln

Fix nachgedacht

	x		x		= 8
x	■	+	■	x	■
	+	9	–		= 8
+	■	–	■	+	■
	+		–		= 8
= 6	■	= 6	■	= 5	■

	+		–		= 1
:	■	:	■	x	■
	x	3	+		= 8
+	■	+	■	–	■
	–		:		= 2
= 7	■	= 1	■	= 5	■

	x		+		= 8
–	■	+	■	+	■
	+	9	–		= 3
+	■	:	■	–	■
	+		–		= 2
= 4	■	= 2	■	= 1	■

Nummernsalat

Wenn man die beiden Buchstaben und den Bindestrich in meiner Autonummer wegläßt, so lautete sie wie folgt: die 2. Ziffer war das Doppelte und gleichzeitig das Quadrat der 1. Ziffer, ergo war die 1. Ziffer die Hälfte bzw. die Quadratwurzel der 2. Ziffer. Die 3. Ziffer war das Doppelte + 1 der 2. Ziffer, bzw. das Vierfache + 1 der 1. Ziffer. Die 4. Ziffer war gleich der 2. Ziffer, bzw. das Doppelte bzw. Quadrat der 1. Ziffer, bzw. die Hälfte – 0,5 der 3. Ziffer bzw. ein Viertel minus 0,25 der 1. Ziffer. Welche Autonummer hatte Herr Knabe?

K. H. Knabe, Falken/Werra

Begriffe gesucht

In der folgenden Figur sind 10 mathematische Begriffe versteckt.
Schülerin Daniela Simon, Braunsdorf

E	T	P	O	P	A	S	U	M	M	E	F
S	E	P	S	R	T	A	O	I	K	T	D
F	A	K	T	O	R	M	S	N	R	D	I
M	R	S	K	D	E	I	M	U	S	I	F
O	T	E	E	U	M	A	U	E	E	V	F
S	O	I	S	K	A	N	T	N	I	I	E
U	S	O	A	T	S	K	A	D	M	D	R
S	U	S	U	M	M	A	N	D	T	E	E
D	I	V	I	S	O	R	V	I	R	N	N
I	K	Q	U	O	T	I	E	N	T	D	Z
S	U	B	T	R	A	H	E	N	D	E	F

Alphons logische Abenteuer (9)

Alphons Freund Berti fand dauernd etwas "logisch". Was er denn unter "logisch" verstehe, fragte Alphons. Wenn das, was gesagt wird, so klar sei, daß selbst er, Berti, es sofort verstehe, bekam er zur Antwort. Da Alphons davon nicht überzeugt schien, fügte er hinzu, logisch sei, was so und nicht anders sein könne. Wenn man Durst hat, dann sucht man etwas zum Trinken, das sei doch ebenso logisch wie der Umstand, daß sich Alphons nochmals die Finger verbrenne, wenn er wieder einen glühenden Ofen berühre.

Auf dem Heimweg kamen Alphons doch Zweifel an dieser Erklärung. Sicher, er würde sich erneut die Finger an einem glühenden Ofen verbrennen, berührte er ihn. Glühender Ofen und seine Berührung, das sind zusammen die Ursache für verbrannte Finger als Wirkung. Untersucht die Logik die Ursache-Wirkung-Beziehung? Berti fand die Aussage eines Mitschülers: "Wenn ich Hunger habe, dann habe ich Hunger", auch logisch. Ist Hunger die Ursache für Hunger? Außerdem, so erinnerte sich Alphons, fand Berti anfangs überhaupt nicht klar, daß das Produkt zweier negativer ganzer Zahlen eine positive ganze Zahl ist. Heute findet er das logisch. Dafür leuchtet ihm heute nicht ein, was im antiken Griechenland schon "logisch" war, nämlich daß die Zahl 2 keine rationale Zahl als Wurzel hat.

Vor der Haustür traf Alphons Nachbars Georg, der an der hiesigen Universität studiert. Alphons fragte, ob er sagen könne, was "logisch" bedeute. "Nimm an, eine Aussage ist aus zwei Aussagen als ihren Teilaussagen zusammengesetzt und die zusammengesetzte Aussage ist wahr genau dann, wenn mindestens eine ihrer Teilaussagen wahr ist. Ist nun die zusammengesetzte Aussage und eine Teilaussage wahr, was kann man dann über die Wahrheit bzw. Falschheit der anderen Teilaussage sagen?" Alphons dachte kurz nach, dann sagte er: "Sie kann wahr, aber auch falsch sein, ohne daß sich daraus ein Widerspruch mit den Voraussetzungen ergibt. Hättest Du aber gesagt, die zusammengesetzte Aussage ist wahr, eine Teilaussage ist jedoch falsch, dann freilich muß die andere Teilaussage wahr sein." Georg klopft Alphons anerkennend auf die Schulter: "Siehst du, dieses "muß" ist eben das, was "logisch" auch meint. In der deutschen Sprache wird die als Beispiel betrachtete zusammengesetzte Aussage eine Oder-Aussage genannt. Du kannst Dir ja einmal überlegen, welcher Wahrheitsbedingung eine Entweder-Oder-Aussage unterliegt und was gelten muß, wenn eine Teilaussage wahr ist." Das zu tun versprach Alphons.

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Den letzten beißen die Hunde

Ein pfiffiges Spiel mit Bleistift und Papier

Sicher hat so mancher von Euch in den Pausen schon einmal Schiffeversenken oder Fünf-in-einer-Reihe gespielt. Solche Spiele sind in der Schule sehr beliebt, weil man zum Spielen nur ein Blatt Papier und zwei verschiedene Stifte benötigt.

Ich möchte Euch ein Spiel vorstellen, wozu man auch nur ein Blatt kariertes Papier und zwei verschiedenfarbige Stifte braucht. Dieses Spiel ist für zwei Personen gedacht und heißt "Den letzten beißen die Hunde".

Als Spielplan dient ein 4 x 4 Feld (Abb. 1)

Fortgeschrittene Spieler können auch auf größeren Spielfeldern spielen. Da werden Euch keine Grenzen gesetzt.

Abwechselnd zieht Ihr und Euer Gegner gerade Linien, die waagerecht, senkrecht oder diagonal zwei, drei oder vier Punkte miteinander verbinden. Die Züge werden immer am Endpunkt der zuletzt gezeichneten Linie fortgesetzt. Jeder Punkt darf nur einmal benutzt werden und Linien dürfen sich nicht kreuzen. Derjenige, der die letzte Linie zeichnet, hat verloren.

Die Punkte werden wie die Felder eines Schachbrettes bezeichnet, nur der Einfachheit halber wurden für beide Achsen Zahlen benutzt.

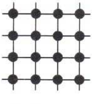


Abb. 1

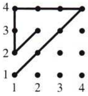


Abb. 2

Das Anfangsfeld heißt z. B. (11).

Die Spielaufzeichnung erfolgt ähnlich wie beim Schach. Dazu ein Beispiel:

A -(32) heißt, daß Spieler A vom letzten Endpunkt zum Punkt (32) eine Linie zeichnet. Zum besseren Verständnis möchte ich ein Beispiel erläutern. Die "Endstellung" seht Ihr in Abb. 2. Die Zugfolge sieht wie folgt aus:

1. A -(44) B -(14)
2. A -(12) B -(23)

Spieler B machte den letzten Zug und hat verloren.

Damit man das Spiel theoretisch etwas erläutern kann, sind noch einige Begriffe erforderlich. Wir nennen jeden Punkt, der noch durch eine Linie erreichbar ist "frei". So hatte Spieler B im obigen Beispiel nur noch einen freien Punkt, bevor er den letzten Zug machte. Da Ihr auch noch etwas knobeln sollt, gehe ich nur auf Zugvarianten ein, wo Spieler A seinen ersten Zug im Punkt (11) beginnt.

Der Zug von Spieler A ist -(44). Spieler B hat 12 freie Punkte. Da unser Feld symmetrisch ist, betrachten wir nun die 6 freien Felder der oberen Bretthälfte. Nach -(14) zu ziehen, ist für Spieler B ungünstig, denn Spieler A hat 3 freie Punkte und hat die Möglichkeit so zu ziehen, daß Spieler B verliert. Für den Gewinn schreiben wir kurz + und für den Verlust -. D. h. unser Beispiel sieht jetzt so aus:

A -(44); B -(14); A -(12); B -(23); A +.

Spieler B könnte andere Züge machen, um nicht zu verlieren. Er könnte Spieler A 4 freie Felder lassen, z. B. B -(24). Spieler A hat 4 freie Felder ((23), (12), (13), (14)). Es erfolgt

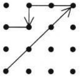


Abb. 3a

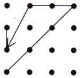


Abb.3b

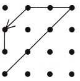


Abb. 3c

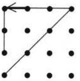


Abb. 3d

a) A -(23); B -(13); A -
b) A -(12); B -(13); A -
c) A -(13); B -(23/12); A -
d) A -(14); B -(12); A -

D. h. A verliert, wenn er 4 freie Felder hat. Man könnte sagen, daß der Spieler gewinnt, welcher dem Gegner 4 freie Felder läßt.

Wenn Spieler B nach A -(44) dem Gegner 5 freie Felder läßt, kann Spieler A gewinnen, indem er Spieler B 4 freie Felder läßt.

Aufgabe 1:

Wie muß Spieler A nach folgenden Zügen ziehen, um zu gewinnen?

a) A -(44); B -(34)
b) A -(44); B -(23)
c) A -(44); B -(12)
d) A -(44); B -(13)

Spieler A kann 9 verschiedene Züge machen, wobei die Symmetrie unseres Spielfeldes jetzt beachtet wurde.

A -(22), A -(33), A -(44), A -(12), A -(13), A -(14), A -(23), A -(24), A -(34)

Wie Spieler B jetzt spielen sollte, um zu gewinnen, müßt Ihr probieren. Eine Theorie dazu anzugeben, wäre genauso sinnlos, wie der Versuch, eine Theorie für den sicheren Gewinn einer Schachpartie zu finden.

Zum Schluß möchte ich noch einen Spezialfall genauer erläutern. Folgende Züge wurden durchgeführt (Abb. 4).

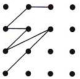


Abb. 4

A -(33); B -(12);
A -(23); B -(13); A -(24); B -(34); ...

Spieler A hat 4 freie Felder und wird deshalb verlieren. Die folgenden Zugfolgen zeigen, wie Spieler B zieht, um zu gewinnen (Abb. 5a – d)

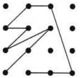


Abb. 5a

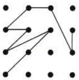


Abb.5b

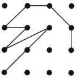


Abb. 5c

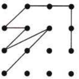


Abb. 5d

a) ... A -(41); B -(21); A -
b) ... A -(42); B -(43); A -
c) ... A -(43); B -(42); A -
d) ... A -(44); B -(42); A -

Aufgabe 2:

Gebt die vollständige Zugfolge von Fall c) und d) an!

Alle weiteren Gewinnmöglichkeiten solltet Ihr selbst ausprobieren. Dazu wünsche ich Euch viel Spaß!

Claudia Erdmann

Claudia Erdmann ist Mathematikstudentin an der Universität Leipzig und wird Euch auch in den nächsten Heften Spiele vorstellen.

Erste Gesamtdeutsche Kinderschach-meisterschaft U 11

in Schwarzburg (Thüringen)

Im Gegensatz zu manch anderen Bereichen verlief der Zusammenschluß der beiden Schachverbände in Ost und West sehr demokratisch und sachbezogen. Auch im Kinder- und Jugendbereich wurde aufeinander zugegangen. Beispiel dafür ist die erste gesamtdeutsche Meisterschaft der Jungen und Mädchen im Schach, die nach dem 1.1.1980 geboren sind (U 11). Das gab es vorher nur in der DDR. Entsprechend gespannt sahen Befürworter und Skeptiker auf den kleinen Ort Schwarzburg bei Rudolstadt, den sich die Ausrichter von Borussia Friedrichsfelde Berlin wegen seiner zentralen Lage und den günstigen gebotenen Bedingungen ausgesucht hatten. Auch das ein Novum in der bisherigen Meisterschaftsgeschichte, daß ein Ausrichter in einem anderen Bundesland austrug. Zum Lohn hatten die Organisatoren mit bürokratischen Hürden zu kämpfen, weil sich kein Land zuständig fühlte. Aber mit dem nötigen Elan und dem festen Willen, etwas ganz Besonderes zu leisten, wurde gemeinsam mit der deutschen Schachjugend an die Arbeit gegangen.

Nach Wochen harter Vorbereitung war es dann soweit: vom 27. Juli bis 4. August bevölkerten über 100 Kinder und ungefähr 55 Betreuer die Hotels, Pensionen, Jugendherberge und Privatquartiere an der malerischen Schwarza, in der auch Gold gewaschen werden kann. Die kämpferisch gestimmte Schachjugend aller Bundesländer strebte nach anderem Gold. So ging es von Anfang an heiß her im großen Kultursaal des Hotels Schwarzburger Hof. Für ein entsprechendes Äußeres hatte der Hauptsponsor, die Volksbank Rudolstadt, mit Spruchbändern und Fahnen gesorgt. 11 Runden im Schweizer System waren angesagt – eine harte Arbeit, die jedoch durch ein vielfältiges Freizeitangebot von Tischtennis bis Blitz gegen die Betreuer und einer Wanderung zur steilsten Bergbahn Europas aufgelockert wurde.

Von den knapp 100 Teilnehmern waren rund ein Drittel Mädchen, viele von ihnen machten den Jungen ernsthaft Konkurrenz. Schon nach wenigen Runden setzte sich Wilko Stubbe aus Halle an die Spitze des Turnieres und hielt diese lange Zeit unangefochten, bis er in der 9. Runde durch Matthias Pflug aus Bayern gestoppt wurde. Nun stieg die Spannung kurz vor Schluß nochmals auf den Höhepunkt, denn rund 20 Spielerinnen und Spieler hatten zwei Runden vor Schluß noch die Chance, erster gesamtdeutscher Meister zu werden.

Schließlich setzte sich aber doch Wilko Stubbe durch; mit 9,5 Punkten belegte er nach Wertung den ersten Platz vor Matthias (ebenfalls 9,5) und Ronald Starke aus Leipzig. Henry Barth vom Ausrichterverein wurde Vierter. Gesamtdeutsche Mädchenmeisterin in dieser Altersklasse wurde mit 7,5 Punkten auf Platz 10 der Gesamtwertung Gloria Ballhause aus Thüringen.

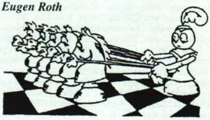
Zur Siegerehrung erschienen nicht nur Vertreter des Hauptsponsors und des Bürgermeisteramtes, sondern auch der 2. Vorsitzende der Deutschen Schachjugend, Norbert Schätzke. Dank unserer Sponsoren wie der Mitteldeutschen Fahrradfabrik Sangerhausen, der Pfander-Sport-GmbH Hamburg, Coca-Cola, dem Karl-May Verlag Bamberg, der Porzellanmanufaktur Sitzendorf, der Puppenfabrik Königsee (A. Riedeler) und dem Kinderbuchverlag Berlin konnten alle Kinder mit einem tollen Preis nach Hause fahren. Im nächsten Jahr wollen alle wiederkommen, wie uns von vielen Seiten versichert wurde. Vielleicht nimmt der eine oder andere dann Revanche für eine verlorene Partie. Wie wird der nächste Meister unter den Jüngsten heißen?

Markus Spindler
Student der Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin

Die Meister

Ein Mensch sitzt da, ein schläfrig trüber,
Ein anderer döst ihm gegenüber.
Sie reden nichts, sie stieren stumm.
Mein Gott, denkst du, sind die zwei dumm!
Der eine brummt, wie nebenbei,
Ganz langsam: Tc6-c2.
Der andre wird allmählich wach
Und knurrt: Da3-g3, Schach!
Der erste weiter nicht erregt,
Starrt vor sich hin und überlegt.
Dann plötzlich, vor Erstaunen platt,
seufzt er ein einzig Wörtchen: matt!
Und die du hielst für niedre Geister
Erkennst du jetzt als hohe Meister.

Eugen Roth

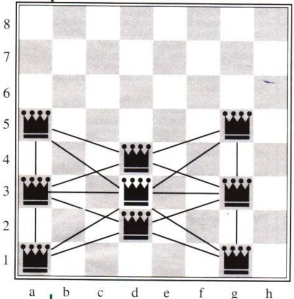


Damen im Verbund

Häufig werden zur Illustration verschiedener mathematischer Begriffe und Aufgabenstellungen das Schachbrett, die Figuren und das Spiel selbst benutzt. In der Literatur über Logik, Numerische Mathematik, Kombinatorik, Graphen-, Zahlen- und Spieltheorie findet man oftmals Beispiele und Begriffe aus dem Schachspiel. Einen bedeutenden Platz nimmt das Schach bei der Entwicklung moderner Methoden der Computerprogrammierung ein.

Auch in der mathematischen Disziplin, der Topologie, lassen sich Eigenschaften von ebenen Punktmengen mit schachlichem Bezug darstellen.

In dem folgenden Diagramm sind 9 schwarze Damen auf dem Schachbrett so aufgestellt, daß jeweils drei davon 10 gerade Linien bilden. Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, diese 9 Damen auf dem Schachbrett unter dieser Bedingung zu postieren?



Harald Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik, Berlin

alpha-Wettbewerb

Wer löst mit?

Einsendeschluß: 22. April 1992

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1991/92 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/91 und 1/92.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
Mathematische Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig
Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte **Antwortkarte** beizulegen, welche Ihr **im Innenteil unserer Zeitschrift** findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen).
Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Teilnehmer ab Klassenstufe 10 lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.
4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.
5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.
6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost. Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4).
Diesen Glücklichen winken attraktive Preise (siehe Seite 26).

Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Klassenstufe 5

5/8
Hans fordert seinen Freund Martin auf: "Denk dir eine beliebige natürliche Zahl. Verdoppele diese Zahl! Addiere 4! Nimm vom Ergebnis die Hälfte! Addiere 5! Multipliziere das Ergebnis mit 4! Subtrahiere 8! Dividiere das Ergebnis durch 2! Subtrahiere 9! Nenne mir dein Endergebnis!" Martin nannte die Zahl 27. Nach dem kurzen Auswerten einiger Notizen nannte Hans diejenige Zahl, die Martin sich gedacht hatte. Wie ist das möglich?
Sch.

5/9
In dem Schema

```
   W I N T E R
 + W I N T E R
 + W I N T E R
 S C H N E E
```

sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern zu setzen.
Sch.

5/10
Die Anzahl der Zehner einer zweistelligen natürlichen Zahl ist dreimal so groß wie die Anzahl der Einer. Wenn man die beiden Ziffern dieser Zahl vertauscht, so erhält man eine Zahl, die um 36 kleiner ist als die gesuchte Zahl. Ermittle diese Zahl!
Sch.

5/11
Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ist 28 cm lang. Seine Basis ist um 2 cm kürzer als ein Schenkel. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?
Sch.

5/12
Fünf Schüler, die eine Turnriege bilden, haben sich der Größe nach aufgestellt. Von ihnen wissen wir:

(1) Richard ist kleiner als Herbert.
(2) Klaus ist kleiner als Richard.
(3) Lutz ist größer als Richard.
(4) Klaus ist größer als Paul.
(5) Herbert ist der Größte.
In welcher Reihenfolge stehen diese fünf Schüler in der Riege?
Sch.

5/13
In diesem Zahlenquadrat mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 25 sind sechs Zahlen so zu vertauschen, daß man in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten jeweils die gleiche Summe erhält.

7 ~~6~~	5	23	16	14
21	19	12	10 ~~11~~	3
15 ~~20~~	8	1	24	17
4	22	20 ~~15~~	13	6 ~~7~~
18	11 ~~10~~	9	2	25

Sch.

5/14
Die vier Schülerinnen Katharina, Franziska, Tanja und Claudia haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Spitzbart, Schwanbeck, Rosenhain und König. Von ihnen ist folgendes bekannt:

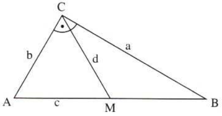
(1) Franziska hat nicht den Familiennamen Spitzbart.
(2) Tanja hat den Familiennamen Schwanbeck.
(3) Die Schülerin mit dem Familiennamen König ist mit Claudia eng befreundet.
(4) Claudia und die Schülerin mit dem Familiennamen Spitzbart haben beide die Schülerzeitschrift "ALPHA" abonniert.

Wie heißen die übrigen drei Schülerinnen (außer Tanja) mit vollem Namen?
Schülerin Astrid Neidhardt, Brotterode

Klassenstufe 6

6/8
Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die kleiner als 500 sind und die folgende Eigenschaften besitzen:
a) Eine solche Zahl läßt bei Division durch 2, 3, 4, 5 bzw. 6 jeweils den Rest 1.
b) Eine solche Zahl ist ein Vielfaches von 7.
Sch.

6/9
Die Abbildung stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ dar. Der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ wurde mit dem Punkt C verbunden. Es seien a, b, c, d die Längen der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ und $\overline{CM}$. Weise nach, daß $d < \frac{1}{2} \cdot (a+b)$ gilt!



Sch.

6/10
Die fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 sind unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge durch Operationszeichen der vier Grundrechenarten so zu verknüpfen, daß man als Ergebnis die Zahlen von 2 bis 10 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden und es dürfen zwei Ziffern ohne Operationszeichen verknüpft werden. Beispiele: $12 - 3 - 4 - 5 = 0$, $(12 - 3) : (4 + 5) = 1$.
Sch.

6/11
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleich der dritten Potenz ihrer Quersumme sind.
Sch.

6/12
Schreibe Dein vierstelliges Geburtsjahr zweimal nebeneinander. Dividiere nun die so erhaltene achtstellige Zahl zunächst durch 73, das Ergebnis dann noch durch 137. Begründe das ermittelte Endergebnis für jedes beliebige (vierstellige) Geburtsjahr!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/13
Von drei Personen mit den Familiennamen Arndt, Brandt und Conrad besitzt jede ein Auto, und zwar vom Typ Skoda, Wartburg und Trabant. Diese Autos, die in Neubrandenburg, Rostock bzw. Schwerin gekauft wurden, haben die Farbe blau, gelb bzw. rot. Gib für jede Person den Autotyp, die Farbe und den Ort des Einkaufs an, wenn folgendes gilt:
(1) Herr Arndt hat ein gelbes Auto.
(2) Herr Conrad hat einen Wartburg.
(3) Der Skoda wurde in Rostock gekauft.
(4) Das rote Auto wurde nicht in Schwerin gekauft.
(5) Das blaue Auto wurde in Neubrandenburg gekauft.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/14
Vorhanden sind 2 gleiche Gefäße (Grundfläche $10\ cm^2$, Höhe 10 cm, Masse 50 g) und eine Balkenwaage. Das eine Gefäß wird mit Wasser, das andere mit Quecksilber gefüllt.
a) Beide Gefäße werden gemeinsam auf eine der beiden Waagschalen gestellt.
b) Ein Gefäß wird auf die eine, das andere auf die andere Waagschale gestellt.
Welche Masse ist durch Auflegen von Wägestücken notwendig, damit sich die Waage in beiden Fällen im Gleichgewicht befindet?
R.

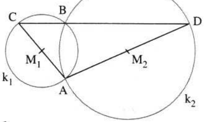
Klassenstufe 7

7/8
Von vier Freunden mit den Vornamen Erwin, Fritz, Hans und Klaus und den Nachnamen (in anderer Reihenfolge) Müller, Meier, Schulz und Schmidt ist folgendes bekannt:
(1) Der Schüler mit dem Nachnamen Müller und der mit dem Vornamen Klaus spielen jeden Montag zusammen Schach.
(2) Die vier Schüler Müller, Schmidt, Erwin und Fritz betreiben aktiv Sport.
(3) Die Schüler Meier und Fritz sammlen oft zusammen Pilze.
Es sind die vollständigen Namen dieser vier Schüler zu ermitteln!
Schüler Sven Reinald, Zerbst

7/9
Es sei $p = \overline{aba}$ eine in dekadischer Schreibweise dargestellte Primzahl, deren Quersumme 19 beträgt.
Wieviele derartige Primzahlen gibt es, und wie lauten sie?
Sch.

7/10
Es sind alle durch 9 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die bei Addition von 594 jeweils eine dreistellige natürliche Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge ergeben!
Sch.

7/11
Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 mit $r_2 > r_1$. Die Kreise schneiden einander in den Punkten A und B. Von A aus wurden die Durchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Punkte C, B und D auf einer Geraden liegen.



Sch.

7/12
Kürze den Bruch $\frac{171717}{191919}$, ohne Zähler und Nenner in Primfaktoren zu zerlegen!
Sch.

7/13
Franz und Frieda haben gleiche Masse und stehen auf Rollschuhen. Sie ziehen gleichzeitig an einem Seil und bewegen sich dadurch aufeinander zu. Wo treffen sie sich? Beim 2. Versuch wird das Seil am Gürtel von Franz befestigt, nur Frieda zieht. Wo treffen sich in diesem Fall beide?
R.

7/14
Ein Sack Kartoffeln hat auf der Erde eine Gewichtskraft von 500 N. Welche Masse und welche Gewichtskraft hat er auf dem Mond? (Ortsfaktoren: Erde $9{,}81\ N \cdot kg^{-1}$, Mond $1{,}6\ N \cdot kg^{-1}$).
R.

Klassenstufe 8

8/8
Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Schnittpunkt der drei Höhen sei mit H bezeichnet. A_1, B_1 und C_1 seien die Mittelpunkte der Höhenabschnitte $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$. D, E und F seien die Mittelpunkte der Dreieckseiten $\overline{CB}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$.
Es ist zu beweisen, daß die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und DEF kongruent sind.
Waltraut Jagusch

8/9
Es sind alle Primzahlen zu ermitteln, die bei Division durch 2, 3 und 5 jeweils den Rest 1 lassen und größer als 320, aber kleiner als 500 sind.
Sch.

8/10
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ sei die Höhe h_c 6 cm lang, der Flächeninhalt des Dreiecks betrage $48\ cm^2$.
Es ist die Länge des Umfangs u dieses Dreiecks zu berechnen!
Wolfgang Schneider, Radeberg

8/11
Die achtfache Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen drei Zahlen.
Für welche Zahlen trifft dies zu?
Thomas Saller, Bad Langensalza

8/12
Gegeben sei ein Trapez ABCD mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$. $\overline{AB}$ sei länger als $\overline{CD}$. Die Parallele zu $\overline{BC}$ durch den Eckpunkt D des Trapezes schneide die Diagonale $\overline{AC}$ in E und die Seite $\overline{AB}$ in F. Es ist zu zeigen, daß die Dreiecke CEB und CFB den gleichen Flächeninhalt haben.
OStR J. Kreusch. Löbau

8/13
Eine Fahrradbeleuchtung eines 26er Rades besteht aus einer Scheinwerferlampe (6 V, 0,5 A) und einer Rücklichtlampe (6 V, 0,1 A). Welche zusätzliche Kraft muß der Radfahrer beim Einschalten der Beleuchtung aufbringen, wenn er mit einer Geschwindigkeit $v = 10{,}8$ km/h fährt?
R.

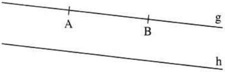
8/14
Bei einem Luftdruck von 1000 hPa wird eine mit Luft gefüllte Flasche mit der Öffnung nach unten in einem See versenkt. Auf welchen Bruchteil des Volumens wird die Luft in 30 m Tiefe zusammengedrückt? ***R.***

Klassenstufe 9

9/8

Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden g und h. Auf g liegt die Strecke $\overline{AB}$, wie die Abbildung zeigt. Es ist unter alleiniger Verwendung des Lineals und ohne Benutzen der Meßskala der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ zu konstruieren.

Die Gültigkeit der Konstruktion ist zu beweisen.



Christian Sevenheck, Berlin

9/9

Es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

(1) $y = x + 1$

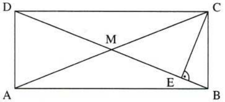
(2) $x^2 + y^2 = 481$

Glenn Hoffmann, Hohenstein-Ernsttal

9/10

In dem abgebildeten Rechteck ist die Strecke $\overline{EB}$ 2 cm und die Strecke $\overline{EC}$ 5 cm lang. Der Winkel $\sphericalangle CEB$ ist ein Rechter.

Es sind die Längen der Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zu berechnen.



Roland Schmugler, Neuhaus

9/11

Gegeben ist die Funktionsgleichung

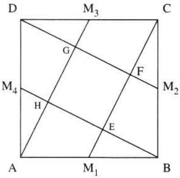
$y = mx$ ($m \geq 0$; $x \geq 0$; m und x seien reelle Zahlen).

Es ist eine Funktionsgleichung $A = f(m)$ zu bilden, in der A den Flächeninhalt des Steigungsdreiecks bedeuten soll. Diese Funktion ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch darzustellen!

Peter Brill, Schwerin

9/12

Die Mittelpunkte der Seiten des abgebildeten Quadrats ABCD wurden jeweils mit einem Eckpunkt verbunden.



Es ist durch eine geeignete Zerlegung nachzuweisen, daß die Figur EFGH ein Quadrat ist. Ferner ist das Verhältnis der Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH zu berechnen bzw. zu bestimmen.

Dr. E. Umlauft, Hümpfershausen

9/13

Ein Faden darf maximal mit einer Zugkraft von 10 N belastet werden. Es wird zum Bau eines Flaschenzuges mit 6 Rollen verwendet. Welche Last kann maximal mit diesem Flaschenzug gehoben werden? (Gewichtskraft der Flaschen wird nicht berücksichtigt).

R.

9/14

Ein elektrisches Meßwerk hat einen Innerwiderstand von 50 Ω und zeigt bei 2mA Vollausschlag. Es soll als Spannungsmesser für einen Meßbereich von 10 V und als Strommesser für einen Meßbereich von 1 A verwendet werden. Wie müssen Widerstände eingeschaltet werden? Welche Größe haben sie?

R.

Klassenstufe 10

10/8

In einem beliebigen Drachenviereck teilen die Diagonalen die Innenwinkel, so daß acht Teilwinkel entstehen, die wir mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, bezeichnen wollen.

Es ist zu beweisen, daß dann in jedem Drachenviereck gilt:

$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 + \sin^2\delta_1 + \sin^2\delta_2 = 4.$

Gunnar Jeschke, Schwarzheide

10/9

Auf einem Kreis k liegen sechs verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F.

a) Wieviele Dreiecke, die von jeweils drei dieser sechs Punkte bestimmt werden, könnte man zeichnen?
b) Ermittle die Anzahl der Sehnenvierecke, die jeweils vier der sechs Punkte als Eckpunkte haben!
c) Wieviele verschiedene Fünfecke gibt es, die k als Umkreis haben?

Bernd Trappe, Berlin

10/10

Es seien p_1 und p_2 Primzahlzwillinge mit $p_1 < p_2$. (Primzahlzwillinge sind Primzahlpaare p,q mit $q = p + 2$.)

Es sind die folgenden Aussagen zu beweisen:

(1) Die Summe der beiden Primzahlen eines solchen Paares $(p_1; p_2)$ ist immer dann durch 6 teilbar, wenn $p_1 > 3$ ist.
(2) Für alle p_1; p_2 gilt : $12 | p_2^2 - p_1^2$, falls $p_1 > 3$.
(3) Wenn p_1 größer als 3 ist, dann ist die Summe der Kuben der Primzahl p_1 und p_2 stets durch 18 teilbar.

OStR Jochen Kreusch, Löbau

10/11

Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen $a = 5$ cm und $b = 10$ cm. Der Oberflächeninhalt des Quaders beträgt 550 cm².

Wie lang ist die Raumdiagonale e des Quaders?

René Pratsch, Dresden

10/12

Gegeben sei ein Kreis k mit einem Radius der Länge $r = 10$ cm.

a) Zu berechnen ist die Länge der Sehne s, die zu einem Zentriwinkel $\varphi = 37°$ gehört.
b) Zu berechnen ist der Abstand a dieser Sehne vom Kreismittelpunkt M.

Thomas Kuschel, Prenzlau

10/13

Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird auf einer Kreisbahn in einer vertikalen Ebene herumgeschleudert. Wie schnell muß der Eimer bei einer Armlänge von 1,0 m bewegt werden, damit kein Wasser ausfließt?

R.

10/14

Ein Flugzeug fliegt einen Vollkreis in 3 min. mit einer Geschwindigkeit von 250 $km \cdot h^{-1}$. Welchen Durchmesser hat der Kreis?

R.

Aufgaben ab Klassenstufe 11

E/8

In unserer Aufgabe wollen wir uns einmal mit dem Wort „Knobelei" beschäftigen.

In diesem Wort steckt – wie man unmittelbar ablesen kann – das Wort „Nobel" oder auch das Wort „Ei". Zu weiteren Wörtern kommt man, wenn man eine bestimmte Buchstabenauswahl vornimmt (zwei, drei, vier, ... Buchstaben) und die Reihenfolge der Buchstaben verändert, z. B. NEBEL, LEBEN oder NOBEL, LOBEN usw. Es lassen sich nun auf sehr verschiedene Weise z. B. vier Buchstaben auswählen und damit Wörter (also sinnvolle Buchstabenfolgen) bilden, etwa: KEIL, KIEL, BLEI, KLEE, ELKE, EILE, BEIL, BEIN, KNIE, LEIB, ... usw.

Wenn man systematisch untersuchen wollte, wieviele und welche Wörter (evtl. auch fremder Sprachen) es gibt, die ausschließlich aus den Buchstaben (alle acht oder sieben, sechs, ..., zwei) des Wortes „Knobelei" bestehen, müßte man alle möglichen Buchstabenfolgen, die auf die eben beschriebene Weise entstehen können, aufschreiben und so ihren Sinngehalt feststellen.

Es ist nun zu berechnen, wieviele derartige Buchstabenfolgen existieren!

Um diese recht komplexe und auch etwas schwierige Aufgabe lösen zu können, wollen wir zum „Warmmachen" und Trainieren vorher vier ähnliche, aber nicht so komplexe

Aufgaben lösen, deren Schwierigkeitsgrad von Aufgabe zu Aufgabe steigt.

E/9
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen (Aneinanderreihungen) lassen sich mit dem Wort „Winkel" bilden?
Die Buchstaben sollen nur in ihrer Reihenfolge verändert werden; es dürfen weder Buchstaben weggelassen, noch hinzugefügt werden!
F.

E/10
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen lassen sich mit dem Wort „Gleichung" bilden?
Es gelten die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe 1!
F.

E/11
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen, je aus 5 Buchstaben bestehend, lassen sich aus den Buchstaben des Wortes „Winkel" bilden?

E/12
Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen, die jeweils aus vier Buchstaben bestehen, lassen sich aus dem Wort „Tangens" bilden?

Und nun viel Freude und Erfolg beim Lösen der Aufgabe mit dem Wort „Knobelei"!

E/13
Auf einer Säule der Höhe h = 5m liegt eine Kugel mit der Masse m = 200 g. Die Kugel wird angestoßen und fällt im Abstand s = 20 m auf den Erdboden. Welche Geschwindigkeit hatte die Kugel nach dem Stoß und in welcher Zeit erreicht sie den Boden? ($g = 10 \cdot m \cdot s^{-2}$)
R.

E/14
Es stehen ein Gleitwiderstand mit R = 24 Ω, der als einstellbarer Spannungsteiler verwendet werden soll, und eine Spannungsquelle mit einem sehr geringen Innenwiderstand mit U = 12 V zur Verfügung.

Um eine Dynamolampe (6 V, 3 W) zu betreiben, wird der Schleifkontakt zunächst so eingestellt, daß zwischen ihm und einem Pol der Spannungsquelle die Spannung U = 6 V liegt. Bei Anschließen der Lampe sinkt diese Spannung. Damit die Lampe mit ihrer Nennspannung betrieben wird, muß der Schleifkontakt verstellt werden.

a) Wo steht der Schleifkontakt vor dem Anschalten der Lampe? (Setzen Sie das Verhältnis Teilwiderstand (R') / Gesamtwiderstand (R) = x!)
b) Auf welche Spannung U' sinkt die Spannung an der Lampe beim Anschalten?
c) An welche Stelle muß der Schleifkontakt gestellt werden, damit die Lampe mit ihrer Nennspannung betrieben wird?
d) Welche Stromstärke muß die Spannungsquelle im Fall a, b und c liefern?
e) Geben Sie eine allgemeine Gliederung $U' = f(x, R_L, R, U)$ an.

1. Internationale Physikolympiade, Polen

Die Preise:

• Ein ***Vegas Computer CE 0808 mit 20 MB Festplatte, Tastatur und Bildschirm***, Hantarex Deutschland Vertriebsges. mbH., W-5230 Altenkirchen
• Vier ***Software-Programme*** des CoMet Verlages für Unterrichtssoftware, 4100 Duisburg:
Cabri Geomètre, Derive 2.0, Treffer!, Graphix
Erforderliche Hardware: jeweils PC mit MS-DOS ab unterschiedlichen Versionen 2,11; 3,2; 3,3; 512 bzw. 648 KB Hauptspeicher und Graphikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA)
• Ein ***Graphik-Rechner FX-7700 G*** von Casio Computer Co. GmbH, 2000 Hamburg
• Zehn ***Electronic-Rechner*** unterschiedlicher Ausstattung von Texas Instruments Deutschland GmbH, 8050 Freising
• Zehnmal die ***Bände I-III "Internationale Mathematik-Olympiade"*** für die Oberstufe vom Manz Verlag, 8000 München
• Fünf ***Electronic Translators mit Währungsrechner und sechs Weltsprachen im Griff*** von Conrad Electronic, 8452 Hirschau
• Zwei Bände ***Schülerduden, Mathematik I und II*** vom Bibliographischen Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
• Fünfzehn ***Spiele*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg
• Ein ***Schülerduden "Die Informatik"***. Bibliographisches Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
• Jeweils fünf ***Arbeitshefte und Lösungsbände der "Aufgabensammlung für mathematisch interessierte Schüler"***: 5. - 7. Jahrgangsstufe, 8. - 10. Jahrgangsstufe und 11. - 13. Jahrgangsstufe. Insgesamt 15 Preise! Sponsor: Manz Verlag, 8000 München
• Fünfzehn ***Bücher*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg.

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
Die Verlosung erfolgt unter den erfolgreichen Einsendern (Bedingung 5). Der Vegas Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

Sprachecke

В выпуклом четырехугольнике площадью S проведены отрезки, соединяюшие середины противоположных сторон. Найдите наименьшее возможное значение произведения длин тих отрезков.

aus: Quant, Moskau

It shouldn't take you long
How much is one-half of two-thirds of three-quarters of four-fifths of 150?

aus: Fun with mathematics, Toronto

Opérations difficiles

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{9}\boxed{9}\boxed{9} & - & \square & = & \square\square\square \\ : & & + & & - \\ \square\square & \cdot & \boxed{3}\square & = & \square\boxed{1}\square \\ \hline \square\square & + & \square\square & = & \square\boxed{6} \end{array}$$

Complétez pour que toutes les opérations soient justes!

aus: Tangente, Paris

Найдите наибольшее возможное значение частного от деления трехзначного гисла на сумму его цифр.

aus: Quant, Moskau

Übersetzt von R. Bergmann (†), Döbeln, Dr. G. Liebau und P. Hofmann, Leipzig

Sommerschule Junger Mathematiker 1991 – Impressionen

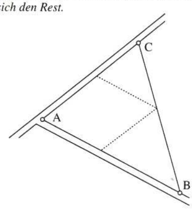
Mathematik* und *Ferien? Wie das funktioniert, zeigt Euch dieser Beitrag.

Für 60 Schülerinnen und Schüler aus dem Regierungsbezirk Leipzig begannen die Sommerferien, wie seit fast dreißig Jahren für ihre Vorgänger, mit einem "mathematischen" Ferienaufenthalt.

Erstmals im Ausland hatten Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Universität Leipzig die Sommerschule organisiert. Die Reise ging in die Nähe von Zatec (Saaz) im Böhmischen. Vom mathematischen Anteil dieser Reise, der in den Ferien natürlich nicht 100 Prozent ausmacht, und von ein paar besonderen Erlebnissen handelt dieser Beitrag.

An sechs Vor- oder Nachmittagen beschäftigten sich die einzelnen Altersgruppen gemeinsam unter Anleitung von Studenten und Assistenten der Universität bzw. der TH Leipzig intensiv mit einzelnen Knobelaufgaben oder auch mit Bestandteilen einer mathematischen Theorie, die nicht Gegenstand der Schule sind. Daraus entnahm der Autor die folgenden Beispiele und erläutert sie so, daß sich auch Schüler zurechtfinden, die jünger als die betreffenden Teilnehmer sind.

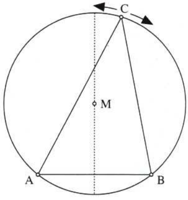
• *Ein Grundstück im spitzen Winkel zweier Straßen hat den angegebenen Grundriß (Abb. 1). Es soll unter drei Personen aufgeteilt werden. Die erste erhält ein Teilstück, das an die beiden Straßen stößt und außerdem zu diesen parallele Begrenzungslinien hat, die an der dritten Seite zusammentreffen. Dieses Teilstück soll, so steht es im Vertrag, möglichst groß sein. Die beiden übrigen Personen teilen sich den Rest.*



Welche Anordnungen der drei Teilflächen genügen den Forderungen des Vertrages?

Diese und einige andere sogenannte Extremwertaufgaben waren Gegenstand des Zirkels für die 10- bis 12jährigen, der von Dr. Hunecke geleitet wurde. Dabei sollte natürlich kein allgemeingültiges mathematisches Verfahren erläutert werden, wie es in den Klassen der Sekundarstufe II gelehrt wird. Insbesondere durch funktionale Überlegungen kann man sich trotzdem der Lösung sehr weit nähern oder sie gar sofort bestimmen. An einem einfacheren Beispiel soll das zunächst verdeutlicht werden.

• *Bestimme das flächengrößte Dreieck, dessen eine Seite Sehne eines Kreises ist und dessen dritter Eckpunkt auf diesem Kreis liegt.*



Betrachten wir gemeinsam Abb. 2 und denken uns den Punkt C auf k beweglich. Nähert sich C dem Punkt A, entsteht ein Dreieck mit immer geringerem Flächeninhalt. Das ist auch für Punkt B der Fall. In der Nähe der Mittelsenkrechten m von AB vermutet man das flächengrößte Dreieck. Wenn wir nun in unsere Überlegungen die Formel für die Dreiecksfläche $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{s \cdot h}{2}$ einbeziehen, folgt mit der konstanten Länge s der Sehne AB, daß bei maximaler Höhe h auch der Flächeninhalt A maximal wird. Diese größte Höhe liegt aber genau dann vor, wenn C auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt.

1) Stellt zum erstgenannten Problem eine Vermutung auf und beweist diese, indem Ihr die Restfläche geschickt zu einem Flächenstück zusammenfaßt!

• *Durch die Spalten vieler Zeitungen ging im Jahre 1986 folgende Meldung:*

"Der jugoslawische Geographieprofessor Vladimir Zubic vermag im Kopfrechnen die 37. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl in nur 2 min 17 s zu ermitteln. Der Hobbymathematiker übt sich täglich mehrere Stunden. Er ist überzeugt, daß er derzeit den absoluten Weltrekord hält."

Könnte man seinen Rekord einstellen oder ihn gar kräftig überbieten?

Ralf Laue, Student der Mathematik an der Universität Leipzig, selbst Rekordhalter im Guiness-Buch der Rekorde (alpha berichtete im Heft 6/91 darüber), stellte diese Aufgabe seinen Schülern der zehnten Klasse. Man kommt aber schon in jüngeren Jahren in rekordverdächtige Gefilde, wenn man verstanden hat, wie *logarithmisches Rechnen* funktioniert.

Dazu nehmen wir ein einfaches Beispiel.

Wir berechnen $8 \cdot 16$. Das kann jeder im Kopf: 128. Wir wissen auch, daß 8 als Produkt von drei Faktoren 2 und 16 gar von 4 Faktoren 2 geschrieben werden kann. Abgekürzt schreibt man dies mit Hochzahlen (Exponenten) als Potenz:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

Bildet man nun das Produkt $8 \cdot 16$, so enthält es 7 Faktoren 2, also

$128 = 8 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$.

Das ist alles sehr leicht, auch folgender Fakt: Wenn man die Hochzahlen zu einer bestimmten Basis (hier 2) kennt, kann man *multiplizieren*, indem man die Hochzahlen *addiert* und schließlich die Basis mit dieser Summe potenziert.

Hier heißt das für die Basis 2:

$8 \longrightarrow 3$ und $16 \longrightarrow 4$, $3+4=7$, $7 \longrightarrow 2^7 = 128$

Da man mit diesen Exponenten bei der Basis 10 besonders gut rechnen kann, stehen auf dem Taschenrechner (auch in der Zahlentafel) diese sogenannten *Logarithmen*, ein anderes Wort für Exponent oder Hochzahl, zur Verfügung. Tippt zum Probieren solche Zahlen ein, deren Logarithmus zur Basis 10 Ihr schon wißt, z. B. $100=10^2$, oder $1\,000\,000 = 10^6$. Benutzt die Taste **lg**, "lg" ist die Abkürzung von "$\log_{10}$".

Bei Zahlen, die keine Zehnerpotenzen sind, gibt der Taschenrechner einen Näherungswert aus.

Bestimmen wir noch einige Logarithmen: $\log_{10}20 \approx 1{,}301$.

Wie groß ist $\log_{10}5$?

Bitte erst überlegen und nicht gleich zum Rechner greifen!

$5 \cdot 20 = 100$, also ist die Summe der Logarithmen (Exponenten) zur Basis 10 von 5 und 20 gleich 2, denn $10^2 = 100$. Der Zehnerlogarithmus von 5 ist also etwa

$2 - 1{,}301 = 0{,}699$.

Inzwischen habt Ihr auch bemerkt, daß einstellige natürliche Zahlen Zehnerlogarithmen zwischen 0 und 1, zweistellige zwischen 1 und 2, ... damit 100stellige zwischen 99 und 100 haben. Teilen wir $99 < a < 100$ durch 37, erhalten wir die Zehnerlogarithmen der 37. Wurzel aus hundertstelligen Zahlen. Die zugehörigen Zahlen werden mit der zur **lg**-Taste entgegengesetzten Taste **10^x** bestimmt: $2{,}67.. < \lg z < 2{,}70.. \longrightarrow 473{,}88.. < z < 504{,}31..$ Es kommen damit nur die natürlichen Zahlen 474 bis 504 als Lösungen in Frage, ganze 31 Stück, deren 37. Potenzen man spielend in "mehreren Stunden", und zwar an einem Tag, zu unterscheiden lernen kann! Doch es kommt noch einfacher. Bildet man das Quadrat (die zweite Potenz) einer Zahl, die auf Ziffer 9 endet, so endet die Potenz auf 1, die dritte Potenz endet wieder auf 9 usw.

Beispiel: $1\mathbf{9}$, $19^2 = 36\mathbf{1}$, $19^3 = 685\mathbf{9}$,
$19^4 = 13032\mathbf{1}$

Die Zahl 37 ist nun sehr gut ausgesucht, denn alle zehn Endziffern 0, 1, ..., 9 kehren in der 37. Potenz stets als Endziffer wieder. Nehmen wir gleich ein Beispiel, das auf eine hundertstellige Zahl führt. Ohne jede Rechnung weiß der Geographieprofessor, daß die 37. Potenz von 503 auf 3 endet. Darüber hinaus weiß er: Weil 504^{37} die größte hundertstellige Zahl liefert, kann die hundertstellige Zahl, die *mit 9 beginnt und mit 3 endet*, als 37. Wurzel nur die Zahl 503 haben.

2) Fertigt eine Übersicht an, die zu jeder in Frage kommenden Zahl einen Näherungswert für ihre 37. Potenz angibt!

Wer diese mit Überlegung auswendig gelernt hat, kann die 37. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl innerhalb einer Sekunde ziehen, denn ein Blick auf deren erste und ein zweiter auf deren letzte Stelle genügen.

Bestimmt im Kopf die 37. Wurzel aus der folgenden hundertstelligen Zahl!

1 873 874 126 983 103 425 520 145 277 956 535 720 721 472 397 998 816 864 036 679 277 736 626 954 078 448 170 640 276 188 699 820 032

Zwei Tagesausflüge standen auf dem Programm der Sommerschule. Der erste führte in die Hauptstadt Prag, der zweite zum sogenannten Heiligen Berg (Svatá Hora), einem eindrucksvollen katholischen Wallfahrtsort, und zur Talsperre Orlik. Eine 460m lange Staumauer speichert etwa 750 Mill. Kubikmeter Wasser. Dort konnten wir nicht nur die Zdakovsky-Brücke, mit 50m Höhe und einer Spannweite von 330m eine der größten Europas, genauer in Augenschein nehmen, sondern auch das gleichnamige Märchenschloß der Schwarzenbergs (einer der Nachfahren ist ein enger Berater V. Havels, des Präsidenten der CSFR) besichtigen, das ehemals 60m über dem Wasserspiegel der Moldau gelegen, heute direkt am Ufer des Stausees steht.

Ein traditioneller Höhepunkt ist allsommerlich die Mathematikolympiade, an der sich alle Schüler beteiligen. Die folgende Aufgabe zeigt, welche Nuß diejenigen aus der Achten knacken mußten.

3) An einem Küstenabschnitt von Phantasien, an dem es erfahrungsgemäß von Untiefen nur so wimmelt, muß Kapitän Bastian Balthasar Bux durch Peilung den genauen Standort seines Schiffes bestimmen. Er hat auf der Brücke Seekarten gefunden, die den vor ihm liegenden Leuchtturm L, einen spitz aufragenden Felsen F und einen Rauch ausströmenden Vulkankegel V verzeichnen (Abb. 3). Sein getreuer Erster Offizier ermittelt die Winkel
$\sphericalangle VSL = 16°$ und $\sphericalangle FSL = 25°$.
Kapitän BBB konstruiert im Handumdrehen seine Position.

Auf der Zdakovsky-Brücke

Zahlreiche komplizierte Dreieckskonstruktionen hatte Torsten Angermann, Lehrerstudent an der Sektion Mathematik der Universität, in seinen Zirkeln erläutert, doch nun das. Hoffentlich würde aus der Lösung keine *Unendliche Geschichte* werden!

Wo, ist zu fragen, liegen die Scheitelpunkte aller Winkel von 16°, deren Schenkel durch V bzw. L gehen? Natürlich auf einem Kreisbogen durch V und L, das ist doch der Peripheriewinkelsatz. Viel mehr soll nicht verraten werden, außer, daß der Mittelpunkt eines solchen Kreises in einem der behandelten Sätze eine wichtige Rolle spielt ...

Mit einer Weltneuheit, einem *mathematischen Vortrag am Lagerfeuer*, begannen die letzten Stunden der gemeinsamen Ferien. Drei der Schüler waren Teilnehmer der diesjährigen Deutschlandolympiade, die im Juni in Erfurt ausgetragen worden war.

Einer der Preisträger, Jens Meiler, sprach unter etwas ungewöhnlichen äußeren Bedingungen über die aufregenden Tage. Das Lagerfeuer war gerade entzündet worden, zu früh, um schon Schwein und Hammel darüber zu braten. Eine Tafel wurde provisorisch aufgestellt, so daß auch der mathematische Teil des Berichts für alle verständlich werden konnte.

Jens rechnet eine Aufgabe der Deutschlandolympiade, deren Lösung ihm nicht leicht gefallen war.

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Historische mathematische Instrumente

Die Rechenmaschine von Johann Philipp Gruson

Halt! Vor dem Lesen solltet Ihr Euch die Rechenscheibe basteln. Aufkleben auf eine feste Pappe empfiehlt sich!

Vor 200 Jahren gelang dem in Magdeburg geborenen Mathematiker Johann Philipp Gruson (2.2.1768 – 16.11.1857) die Erfindung einer mechanischen Rechenmaschine, die im Vergleich zu ihren Vorgängern analoge Leistungsparameter aufwies, aber völlig ohne "Räderwerk" auskam und damit leicht herzustellen war. Nach Einschätzung des Heidelberger Mathematikhistorikers Moritz Cantor scheint die Grusonsche Erfindung "Beifall gefunden zu haben".

Johann Philipp Gruson

Lobende Worte findet auch der Zeitzeuge Edmund Brunow: "Je einfacher eine Maschine ist, je weniger Räder oder andere mechanische Hilfsmittel sie hat, desto besser. Sie ist alsdenn wohlfeiler und dauerhafter; Mängel entdeken und verbessern sich leichter. In dieser Rüksicht macht die Grusonsche Rechenmaschine gewiß allen ihren Schwestern den Rang streitig. Sie ist eine einfache Scheibe, und leistet dennoch zum mechanischen Rechnen die Dienste einer zusammengesetzten Maschine". Der junge Gruson baute diese Rechenmaschine während seiner ersten Anstellung als Königlich Preußischer Baubeamter an der Kriegs- und Domänenkammer in Magdeburg. Die dort anfallenden umfangreichen und zeitaufwendigen Berechnungen wollte er schnell, exakt und fehlerfrei lösen. In seinen Publikationen ist nachvollziehbar, wie intensiv sich Gruson mit mechanischen Rechenmaschinen beschäftigte. In seinen Veröffentlichungen sind – in historische Reihenfolge gesetzt – folgende Erfinder mit ihren Rechenmaschinen genannt (siehe nebenstehende Tabelle). Gruson konstruierte seine Rechenmaschine zur mechanischen Ausführung der vier Grundrechenarten in Form einer kreisrunden Scheibe (Durchmesser: 0,7 rhein. Fuß = 22 cm) um deren Mittelpunkt sich ein Weiser drehte. Die Scheibenmitte umschloß ein Kreis (Durchmesser: 0,27 rhein. Fuß = 8,5 cm), darin stand: "Rechenmaschine, erfunden von Johann Philip Gruson. Magdeburg, den 2. Febr. 1790". Von den neun Kreissektoren sind ein Sektor (A/S) für die Addition und Subtraktion und acht Sektoren (2, 3, ..., 9) für die Multiplikation und Division zu verwenden. Die Sektoren sind in Spalten untergliedert, die am äußeren Rand der Scheibe gekennzeichnet sind. Für den Sektor A/S sind das neun Spalten und für die anderen acht Sektoren ist die Anzahl der Spalten gleich der Nummer des jeweiligen Sektors.

Der Sektor A/S, einschließlich des Weisers, stellt eine pythagoräische Tafel dar. Solche Tafeln, wie sie hier Gruson für die Addition nutzt, waren zu jener Zeit üblich. In einem Zahlentableau wird zwei frei wählbaren Zahlen (Summanden) genau eine Zahl (Summe) zugeordnet.

Die **Addition** a + b = c wird im Sektor A/S wie folgt ausgeführt:
– Summand a, Weiser auf a-te Spalte stellen
– Summand b entspricht Zahl auf Weiser
– Summe c, links von (Weiser) in a-ter Spalte, d. h. in gleicher Zeile bzw. gleichem Kreisbogen ablesen.

Die **Subtraktion** a – b = c verläuft in umgekehrter Reihenfolge:
– Subtrahend b, Weiser auf b-te Spalte einstellen
– in b-ter Spalte Minuend aufsuchen und Differenz in gleicher Zeile bzw. gleichem Kreisbogen auf Weiser ablesen.

Für die acht Sektoren 2 bis 9 definierte Gruson folgende Begriffe (unterstrichen gekennzeichnet):

Faktorentafel i (i=2, 3, ..., 9)

i-1	...	...	j[3]	...	1[3]	0[2]	
							9
			T_{kj}[5]				k[4]
							1
			i[1]				Weiser

1) Tafelzahl / Abteilung / Sektor i
wobei i Multiplikator bzw. Divisor ist
2) Colonne oder Spalte o mit ihren Reihenzahlen
$\{a_k\}$ mit $a_k = i \cdot k$ $(k = 1, 2, ..., 9)$
3) Colonne oder Spalte j mit ihren Reihenzahlen, d. h.
$\{b_k\}$ mit $b_k = a_k + j = i \cdot k + j$
$(i = 2, 3, ...9; k = 1, 2, ..., 9; j = 1, 2, ..., i\text{-}1)$
4) Reihenzahl $(k = 1, 2, ..., 9)$
5) Fach T_{kj} (Anzahl : $9 \cdot i$ mit $i = 2, 3, ...9$)

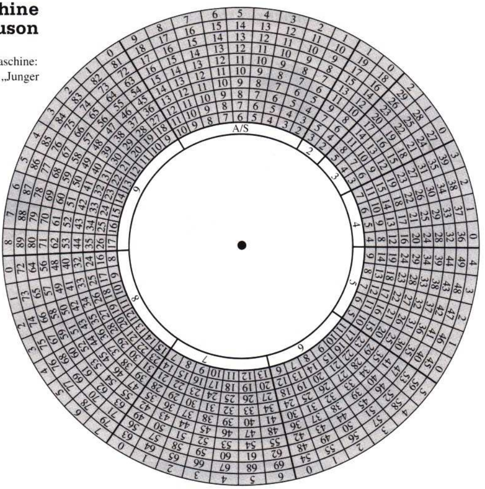
Die **Multiplikation** und **Division** wird mit Hilfe der Faktorentafeln wie folgt ausgeführt:

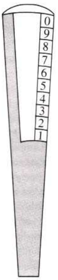
Aufgabe (1): $456 \cdot 7$
– Multiplikator ist 7, Faktorentafel 7 verwenden
– 1. Teilaufgabe $6 \cdot 7$
Weiser auf 0-te Spalte drehen, in 6ter Reihe 42 ablesen, Einerstelle 2 notieren, Zehnerstelle 4 entspricht Übertrag und Weiser auf 4te Spalte stellen
– 2. Teilaufgabe $5 \cdot 7$
in 5ter Reihe 39 ablesen, Einerstelle 9 notieren, Zehnerstelle 3 entspricht Übertrag und Weiser auf 3te Spalte stellen

Jahr	Erfinder	Angaben von Gruson zu den Rechenmaschinen
1617	*Neper*	Nepersche Rechenstäbe
1642	*Pascal*	Pascaline / Addier- und Subtrahierwerk (galt bis 1957 als erste mechanische Rechenmaschine)
1666	*Morland*	Addiermaschine mit Neperscher Produktanzeige
1673	*Leibniz*	Vierspezies-Staffelwalzenmaschine
1700	*Poloni*	Sprossenrad-Rechenmaschine
1700	*Perrault*	Rhabdologisches (stäbchenförmiges) Rechenbrett
1735	*Gersten*	Rechenmaschine nach Art Zahnstangenaddiatoren
1770	*Hahn*	Vierspezies-Staffelwalzenmaschine
1786	*Müller*	Maschina arithmetica portalis (Nepersche Rechenstäbe auf beweglichen konzentrischen Kreisen)
1789	*Schott*	Schott's Rechenkasten (mehrere Nepersche Rechenstäbe auf beweglichen geraden Zylindern)

Die Rechenmaschine von Gruson

(Techn. Herstellung der Rechenmaschine: U. Ostendorf, Magdeburg, Station „Junger Naturforscher und Techniker)





– 3. Teilaufgabe 4 · 7
in 4ter Reihe 31 ablesen und notieren
– Ergebnis (die von rechts nach links notierten Ziffern ergeben das Produkt) : 3192

Aufgabe (2): 456 · 73
– Multiplikatoren sind 7 und 3, zuerst wird die Zehnerstelle 7, dann die Einerstelle 3 des Multiplikators entsprechend den Sektoren 7 und 3 abgearbeitet und wie folgt notiert:

456 · 73	
3192	unter Zuhilfenahme des
1368	Sektors A/S
33288	Ergebnis

Aufgabe (3): 456 : 7
– Divisor ist 7, Faktorentafel 7 verwenden
– 1. Teilaufgabe 45 : 7
im Sektor 7 steht die 45 in der 6ten Reihe und der 3ten Spalte, d. h. die 45 ist 6mal durch 7 mit Rest 3 teilbar, notiere 6, verbleibt als Dividend 36
– 2. Teilaufgabe 36 : 7
die 36 steht in der 5ten Reihe und ersten Spalte, d. h. die 36 ist 5mal durch 7 mit Rest 1 teilbar, notiere 5, verbleibt als Dividend 10
– 3. Teilaufgabe 10 : 7
10 ist einmal durch 7 mit Rest 3 teilbar, notiere 1
– 4. Teilaufgabe 30 : 7
30 ist 4mal durch 7 mit Rest 2 teilbar, notiere 4
– Quotient: 456 : 7 = 65,14...

Die ersten Exemplare der Rechenmaschine von Gruson wurden ab November 1790 für 1 Thaler und 2 Groschen in Magdeburg verkauft.
Die technische Fertigung erfolgte mit Unterstützung von Prof. Klügel aus Halle, der die Herstellung des Kupferstiches besorgte. Obwohl Prof. Kästner aus Göttingen den jungen Gruson bei der Anfertigung der Gebrauchsanleitung für die Rechenscheibe unterstützte, gab es Kritik, weil "die Anweisung nicht verständlich" war. Selbstkritisch konstatiert Gruson: "zu bekannt mit den eigenen Operationen – habe ich – (Einfügung d. A.) mich in meiner Nachricht über vieles zu dürftig ausgedrückt". So folgte der Versuch von Edmund Brunow, eine weitergehende Gebrauchsanleitung zu geben. Zum Wert der Grusonschen Rechenscheibe hob er hervor: "sie giebt nur von den einfachen Zahlen ihre Summen und Produkte, ... Aber sie kann ja auf zusammengesetzte Zahlen ... ausgedehnt werden. – Ihre Anordnung und Zusammensetzung ist sinnreich, und dieses Verdienst bleibt dem Erfinder immer."
Zwischen dem Schicksal der Grusonschen Rechenscheibe und der Schickardschen Rechenmaschine, die erst 1957 durch Dr. Franz Hammer im "Pulkower Nachlaß" mit dem Auffinden eines Briefes von Schickard an Kepler vom 20. September 1623 wiederentdeckt wurde, gibt es gewisse Bezüge. 200 Jahre nach der Grusonschen Erfindung ist unklar, ob ein Originalexemplar oder eine Originalabbildung heute noch existiert. Eine intensive Suche blieb bisher ergebnislos. Somit ist nur der prinzipielle Aufbau und die Funktionsweise der Rechenscheibe von Gruson, nicht aber ihre genaue Gestalt bekannt.

Dr. Reinhard Buchheim
Prof. em. Dr. Karl Manteuffel
Fakultät für Mathematik der Technischen Universität "Otto von Guericke" Magdeburg

Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Lemmings


Sieh mal, was ich kann!


Klettern


Fallschirmspringen


Blocker hochjagen

Lemminge könnten ideales Studienobjekt für Psychologen werden, denn bei Lemmigen herrscht Gruppendenken vor. Zum Lemmings-Gruppendenken gehört schon ein gerütteltes Maß an Dusseligkeit. Computerspieler kennen Lemminge. Lemminge sind auf dem Bildschirm weniger als 1 cm groß, einfältig und reagieren auf das, was man ihnen vorgibt. Sie tun das, was ihnen mittels Maus oder Tastatur befohlen wird: Brücken bauen, Tunnel graben, über Hindernisse klettern, mit dem Fallschirm zu springen, sich selbst in die Luft zu sprengen. Stößt so ein Lemming an ein Hindernis, dreht er um und marschiert stur in die entgegengesetzte Richtung. Beim Kontakt mit Fallen, Schluchten, Gebläsen und Flüssen ist ihr Schicksal besiegelt.

Was hat dabei die Mathematik bei Lemmings zu leisten? Eine ganze Menge! Freundlicherweise informiert das Programm vor jedem Level, wieviele Pelztiere erscheinen werden. Als Zielangabe erhält man noch den Hinweis, mindestens einen bestimmten Prozentsatz dieser sturen Wanderer retten zu müssen. Zuerst ist Kopfrechnen angesagt, um herauszufinden, wieviel denn nun 66 % von 100 Tieren sind. Einfach, oder? Wie ist es aber bei 75 % von 80 Tieren, oder bei 91 % von70? Die zu errechnende Zahl braucht man aber, um im Spiel auf der Informationsleiste rasch nachzurechnen, wieviele dieser netten grünhaarigen Artgenossen noch das Ziel erreichen sollen. Es ist einfach sinnlos, den verbleibenden Lemmings einen Weg zu bahnen, wenn die Anzahl derer, die das offene Tor erreicht haben werden, weit unter der geforderten Punktzahl liegen wird.

Gedankenlos läuft die Lemmings-Herde auf eine Schlucht zu. Was fehlt, ist eine Brücke. Es ist aber möglich, Lemminge als Brückenbauer einzusetzen. Zwölf Bausteine hat so ein Brückenbauer in seinem Rucksack, die er in einem etwa 30°-Winkel aufeinandersetzt. Wieviel Brücken muß ich aneinandersetzen, um über die Schlucht zu kommen, wenn deren Breite auf dem Bildschirm etwa 2 cm beträgt? Gab es da nicht bestimmte Sätze der Geometrie zu beachten? Noch wichtiger wird die Rechenkunst, wenn man eine Brücke planen muß, die einen Mittelpfeiler von gut 10 cm haben soll. In welcher Entfernung muß der Brücken-Leming mit seinen ersten 12 Stufen beginnen? Setzt man einen Blocker auf die oberste Brückenstufe, kann man von einem anderen Lemming verlangen, daß er an einer bestimmten Stelle der Brücke in einem weiteren 30°-Winkel in entgegengesetzter Richtung die Brücke verlängert. Winkelbetrachtungen verlangen die Lemmings auch beim Schrägbuddeln. Ein Winkel von etwa 30° zwingt auch hier vor dem Einsatz der Lemmings zu mathematischen Betrachtungen.

Das Zusammenspiel von Zeit und Wegstrecke wartet in derselben Art und Weise mit knackigen Rechnungen auf. Ein Lemming darf als selbstzündende Bombe deklariert werden. Vom Aktivieren bis zur Explosion vergehen exakt fünf Einheiten, die über dem Lemming als Ziffer angezeigt werden. Sich bewegende Lemminge legen in diesem Zeitraum eine

bestimmte Wegstrecke zurück. Lemmings erwartet hier genaue Rechnung, denn leicht ist ein Lemming falsch programmiert; zu spät oder zu früh gezündet verpufft das arme Tierchen an einer nutzlosen Stelle.
Wie verändern sich die Planungen, wenn man nur eine vorgegebene Anzahl von Lemmings als Brückenbauer einsetzen kann? Der Ansatzpunkt jeder Brücke ist enorm wichtig. Bevor man die Tierchen den abenteuerlichen Gang durch die Levels starten läßt, sollte man deswegen die Stop-Taste aktivieren, um sich bei einem ausführlichen Stop Überblick verschaffen zu können, denn sonst läuft die Zeit unweigerlich davon. Acht Minuten können bei Lemmings verdammt kurz sein.
Als Spieler hat man alle Hände voll zu tun, mit Hilfe der Brückenbauer-, Buddler-, Fallschirmspringer-, Kletterer- oder Spreng-Lemminge die Horde, die zwischen 1 und 100 Tieren schwankt, zusammenzuhalten.
Lemmings läßt sich mit mathematischen Überlegungen inkl. einer geballten Ladung logischen Denkens lösen. Zugegeben: der 28. Level MAYHEM hat sehr starken Glücksspiel-Charakter, und der eine oder andere Level sorgt für graue Haare.
Lemmings ist grafisch erste Sahne, musikalisch hat es bei zu nutzender Soundkarte eine Menge zu bieten, die vier Schwierigkeitsgrade sorgen für anhaltende Motivation und die erspielten Paßwörter erlauben den direkten Zugriff auf alle Levels. Lemmings ist eine neue Spielidee. Da ist kein Monster zu morden, kein Rennwagen zu steuern, kein Flug zu simulieren. Bei Lemmings muß man immer nur einen Schritt schneller sein, einen Schritt vorausgedacht haben, denn ohne Denken, ohne Knobeln, ja ohne Mathematik können Lemmings nur jene schaffen, die über ein absollutes Auge und eine schnelle Hand verfügen.

H. Seitz /-se

Lemmings, Psygnosis 1991, taktisches Denkspiel, Distributor: United Software

Hardware: XT 12 MHz, 512 KB RAM
Grafik: CGA/EGA/VGA,
Sound: Karte und intern,
Bedienung: Maus, Joystick, Tastatur,
Handbuch mehrsprachig

Das Glastropfenspiel

Reihenweise Logik

Auch allein spielen kann Spaß machen. Und wer sich erst einmal in das neue Ravensburger Glastropfenspiel vertieft hat, braucht nichts dringender als volle Konzentration. Eine logische Legetüftelei für einen Spieler ab 10 Jahren von Dieter Matthes und Silvia Heinz.
Ein Spielbrett mit 72 Löchern und ebenso vielen verschiedenfarbigen Perlen fordern zum geistigen Abenteuer auf.
Die Glastropfen - man ahnt es - sollen in die Löcher wandern; den Auftakt bestimmen die Startperlen, um die alle anderen gruppiert werden müssen. Allerdings nicht irgendwie: Fünf eiserne Regeln sorgen für reichliches Kopfzerbrechen.
Wer die erste Aufgabe gelöst hat und noch nicht bunt sieht, kann sofort weitermachen.

60 weitere Aufgabenstellungen werden dem Tüftler geboten.

Foto: Ravensburger

Mathematische Schülerbücherei (MSB)

Interessenten der Mathematischen Schülerbücherei (MSB) sollten in ihrer Buchhandlung nach folgenden Titeln des ***Teubner Verlages Leipzig*** fragen:

Herbert Kästner/Peter Göthner
Algebra – aller Anfang ist leicht
ISBN 3-322-00382-5, MSB 107
Interessante Analogien und überraschende Zusammenhänge zwischen scheinbar weit auseinanderliegenden Gebieten der Mathematik ermöglichen dem Leser, mathematische Gebiete zu ordnen und zu systematisieren, führen in die strukturelle Denkweise ein und wecken Appetit auf die weiterführende Beschäftigung mit algebraischen Strukturen. Aufgaben kommen dabei nicht zu kurz.

Eberhard Schröder
Mathematik im Reich der Töne
ISBN 3-322-00476-7, MSB 106
Der Band gibt einen Überblick über den mathematischen Aufbau der Tonleitern nach dem pytharoreischen, dem diatonischen und dem temperierten Stimmungsprinzip; sie werden in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung betrachtet.

Eberhard Schröder
Kartenentwürfe der Erde
ISBN 3-322-00479-1, MSB 128
Daß die informative Weltkarte der Gegenwart das Endprodukt eines über Jahrtausende währenden Forschungs- und Erkenntnisprozesses ist und die Mathematik in der Kartografie eine wichtige Anwendung findet, wird hier dargestellt.

Lösungen

• Das Tetraeder

1. BD liegt auf der Symmetrieachse der Kanten BC und BA, ist also Winkelhalbierende des Winkels ABC (Abb. 10). Die Faltkante EG verläuft senkrecht zu BD, also gilt

$$\sphericalangle EGB = 180° - 90° - \frac{45°}{2} = 67{,}5°.$$

Der gefragte Winkel AGE ist Nebenwinkel zu $\sphericalangle$ EGB und damit 112,5° groß.

2. Mit etwas Phantasie modellieren wir den Becher als *Kreiskegel*. Wir wissen aber, daß sich die sogenannten Mantellinien nicht in einem Punkt, sondern in einer Kante schneiden. Unsere mathematische Modellierung wird also etwas zu kleine Werte liefern.

$\overline{DE} \approx 11{,}7$cm —> Umfang des Grundkreises

$U \approx 23{,}4$cm

Grundkreisfläche $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{U}{2\pi}\right)^2 = \frac{U^2}{4\pi}$

Höhe des Körpers: $h = \overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DE} \approx 8{,}3\text{ cm}$

Volumen $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{U^2 h}{12\pi} \approx 120\text{ cm}^3$

Den Vergleich dazu liefert ein *physikalisches* Experiment, bei dem Wasser, das den Becher bis zum Rand füllt, ein Volumen von ca. 150 cm³ einnimmt. Überlegt beim Experimentieren, womit die Abweichung außerdem zu begründen ist!

3. Errichtet man über einer Strecke, nennen wir sie $\overline{AD}$, die Mittelsenkrechte und zeichnet einen Kreisbogen um D mit $r = \overline{AD}$, so wird die Mittelsenkrechte in einem Punkt geschnitten, der gleichweit von A und D entfernt ist. Man erhält so drei Punkte, die paarweise gleichen Abstand haben. Sie bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.
In jedem Dreieck liegen gleichlangen Seiten gleichgroße Winkel gegenüber, also haben im gleichseitigen Dreieck alle Winkel die Größe 60°.
Beim Falten des Punktes A auf die Mittelsenkrechte haben wir genau diese Konstruktion "gekniffen" und somit Winkel von 60° (und von 90°-60°=30°) erhalten.

4. $\overline{NG} = \frac{\overline{AB}}{2}\tan 60° ->$

$\overline{MG} = h = \overline{NG} - \overline{AE} \approx 7{,}3\text{ cm}$

$\overline{GI} = a = \frac{\sqrt{12}}{3}h \approx 8{,}5\text{ cm}$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{2\sqrt{6}}{27}h^3 \approx 71\text{ cm}^3$

Das Volumen des Tetraeders beträgt etwa 71 cm³.

5. Ein Bogen mit doppelt so großer Kantenlänge führt auch zu einer Verdoppelung der Dreieckshöhe h, somit zu einem achtmal so großen Volumen. Man muß einen Bogen von $\sqrt[3]{2} \cdot 20\text{ cm} \approx 25{,}2\text{ cm}$ Kantenlänge wählen.

• Neues von der Bahn

• Die vollständige Loknummer lautet
155 029-2

• Änderung einer Ziffer
Die Ziffer an der 1., 3. oder 5. Stelle würde durch eine Ziffer ersetzt, die sich um mindestens 1, höchstens aber 9 von ihr unterscheidet.
An der 2., 4. oder 6. Stelle muß bei sich infolge der Verdoppelung ergebenden gleichen Einerziffern stets noch die Ziffer 1 der Zehnerstelle addiert werden.
Damit bemerkt das Prüfverfahren in jedem Fall einen Fehler.

• Vertauschung zweier benachbarter Ziffern
Seien a und b zwei beliebige, benachbarte Ziffern der Loknummer ($a, b \in N$) Dann geht zunächst $2 \cdot a + 1 \cdot b$, nach der Vertauschung $2 \cdot b + 1 \cdot a$ in die Quersumme ein. Das Prüfverfahren würde genau dann versagen, wenn gilt: $2 \cdot a + b = 2 \cdot b + a$.
Dies tritt aber nur für den Fall a = b ein, und eine Vertauschung gleicher Ziffern ist unerheblich (analog für $1 \cdot a + 2 \cdot b$).
Auch hier werden stets fehlerhafte Loknummern aufgedeckt.

• Vertauschung zweier beliebiger Ziffern
In die Quersumme können vier Fälle eingehen (a, b beliebig, $a, b \in N$)

1. $1 \cdot a + 2 \cdot b$, nach Vertauschung
$1 \cdot b + 2 \cdot a$ (Verfahren zeigt Fehler an)
2. $2 \cdot a + 1 \cdot b$, nach Vertauschung
$2 \cdot b + 1 \cdot a$ (Verfahren zeigt Fehler an)
3. $1 \cdot a + 1 \cdot b$, nach Vertauschung
$1 \cdot b + 1 \cdot a$ (Da sich gleiche Summen ergeben, versagt das Verfahren.)
4. $2 \cdot a + 2 \cdot b$, nach Vertauschung
$2 \cdot b + 2 \cdot a$ (Verfahren versagt)

Bemerkt werden muß noch, daß das Prüfverfahren nur einen Fehler anzeigt, nicht aber die Fehlerquelle.

• Autofahren wird teurer

$$\frac{603\ DM}{3 \cdot 20000\ km} \approx 0{,}12\ DM\ /\ km$$

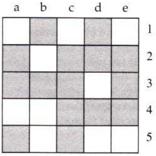
Zum Vergleich: 1991 kostete eine Fahrt mit der Eisenbahn pro Person und pro Kilometer bei der DB 0,22 DM und der DR 0,12 DM.

• Wäßrige Melonen

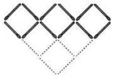
Am Morgen enthalten die Melonen 99 Zentner Wasser und 1 Zentner Substanz.
Am Abend enthalten die Melonen noch 98 Prozent Wasser, das heißt, daß der eine Zentner Substanz 2 % der Gesamtmasse ausmacht. Diese beträgt somit 50 Zentner.
Am Abend kann Großhändler Hinterbichler (nur noch) 50 Zentner Wassermelonen verkaufen (was einen Verlust von 50 Zentnern oder von 50 Prozent bedeutet).

• Vorschrift zum Färben

Beginnt man mit b2 ungefärbt oder mit d3 ungefärbt, so ist das weitere Färben nicht schwer. Beginnt man jedoch mit d2, c3 oder c4 ungefärbt, so führt dies zu einem Widerspruch zu den Vorgaben.



• Hölzchentricks



• Von X nach Y

Die 13 Felder sind:
11 – 13 – 31 – 43 – 59 – 67 – 73 – 19 – 17 – 23 – 97 – 89 – 83

• Wie heißt die Pflanze?

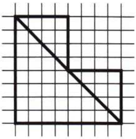
Kompaßdistel (Anfangsbuchstabe: K; m=3)
Bemerkung: Die Kompaßdistel, auch Stachellattich genannt, ist eine spezielle Kompaß- bzw. Meridianpflanze. Bei diesen Pflanzen sind als Anpassung an stark besonnte Standorte die Blätter vertikal aufgerichtet und in Nord-Süd-Richtung gedreht. Durch diese Blattstellung und durch zusätzliche Blattbewegungen

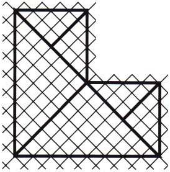
(Photo- bzw. Thermotropismus) wird erreicht, daß die Blattflächen zur Zeit der stärksten Sonnenstrahlung, also mittags, parallel zur Strahlenrichtung sind und die Blattflächen nur von der schwächeren Morgen- und Abendsonne voll getroffen werden.

• Durcheinander

Summe, Bruch, Minus, Gerade, Quotient, Plus, Mathematik

• Flächenverwandlung





• Fix nachgedacht

2	x	2	x	2	=8
x		+		x	
1	+	9	-	2	=8
+		-		+	
4	+	5	-	1	=8
=6		=6		=5	

2	+	3	-	4	=1
:		:		x	
2	x	3	+	2	=8
+		+		-	
6	-	0	:	3	=2
=7		=1		=5	

1	x	5	+	3	=8
-		+		+	
1	+	9	-	7	=3
+		:		-	
4	+	7	-	9	=2
=4		=2		=1	

• Nummernsalat

2494 (Die 2. Ziffer mußte 4 sein, weil es nur eine Zahl gibt, deren Quadrat und das Doppelte gleich sind. Das ist die 2. Daraus ergibt sich alles Übrige rechnerisch.)

• Begriffe gesucht

Produkt, Minuend, Differenz, Dividend, Summand, Divisor, Quotient, Subtrahend, Faktor, Summe

• Den letzten beißen die Hunde

1.

a) ... A -(23); B -, da B 4 freie Plätze hat
b) ... A -(34); B -, siehe a)
c) ... A -(23); B -, siehe a)
d) ... A -(12); B -, siehe a)

2.

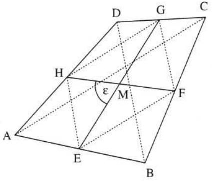
Fall c) A -(33); B -(12); A -(23); B -(13);
A -(24); B -(34); ...
falls A -(41); B -(21); A -(32); B +
A -(31); B -(21); A -(32); B +
A -(21); B -(31); A -(41); B +
A -(32); B -(31); A -(21/41); B +

Fall d) ... A -(44); B -(42);
falls A -(41); B -(21); A -(32); B +
A -(31); B -(21); A -(32); B +
A -(21); B -(31); A -(41); B +
A -(32); B -(31); A -(21/41); B +

• Sprachecke

In einem konvexen Viereck mit dem Flächeninhalt S sind Strecken gezogen, welche die Mitten gegenüberliegender Seiten verbinden. Findet den kleinstmöglichen Wert des Produktes der Längen dieser Strecken.

Lösung: ABCD sei das gegebene konvexe Viereck, und E, F, G und H seien die Seitenmitten der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ bzw. $\overline{DA}$, dann sind $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ Mittellinien der Dreiecke ABC bzw. ACD und $\overline{FG}$ und $\overline{EH}$ sind Mittellinien der Dreiecke BCD bzw. ABD.



Somit ist

$$\overline{EF} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{HG} \text{ und } \overline{FG} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{EH},$$

$$\overline{EF} = \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ und } \overline{FG} = \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$$

Das Viereck EFGH ist deshalb ein Parallelogramm, dessen Seiten halb so lang wie die Diagonalen des Vierecks ABCD sind. Ist S der Flächeninhalt von ABCD und sind h_A und h_C Höhen auf $\overline{BD}$ in den Dreiecken ABD bzw. BCD, so ist

$$S = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot h_A + \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot h_c = \frac{1}{2}\overline{BD}\left(h_A + h_c\right),$$

und der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH ist

$$\frac{1}{2}S = \overline{EH} \cdot \frac{1}{2}\left(h_A + h_c\right) = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \frac{1}{2}\left(h_A + h_D\right).$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH ist aber auch

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\overline{EG} \cdot \overline{FH} \cdot \sin\varepsilon$$

wobei $\sphericalangle$ HME $= \varepsilon$ ist. Hieraus errechnet man

$$\overline{EG} \cdot \overline{FH} = \frac{S}{\sin\varepsilon}.$$

Da $\frac{S}{\sin\varepsilon}$ am kleinsten ist, wenn $\sin\varepsilon$ den höchsten Wert einnimmt, also wenn $\varepsilon = 90°$ ist, folgt das Produkt $\overline{EG} \cdot \overline{FH}$ ist bei konstantem S minimal, wenn $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ist.

Es wird dich nicht lange beschäftigen

Wieviel ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$ von 150?

Lösung: 30

Schwierige Rechenoperation

Füllt die leeren Felder aus und achtet darauf, daß die angegebenen Rechenoperationen alle richtig sind!

Lösung:

999 – 5 = 994
: + -
27 · 34 = 918

37 + 39 = 76

Bestimmt den größtmöglichen Wert des Quotienten bei der Division einer dreistelligen Zahl durch ihre Quersumme!

Lösung: Es sei

$\overline{xyz} = a\left(0 < x \le 9; 0 \le y, z \le 9; x, y, z \in N\right)$ der Dividend, dann ist $x + y + z$ der Divisor und

$$q = \frac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 100 - \frac{90y + 99z}{x + y + z}$$

der zu bildende Quotient.

Wenn $\frac{90y + 99z}{x + y + z} = 0$ gilt, wird q maximal.

Dann gilt $90y + 99z = 0$ und $x + y + z \ne 0$.

Man folgert deshalb $0 < x \le 9$; $y = 0$ und $z = 0$.

Damit ist $q_{max} = 100$.

• Hier gibt´s nur eine Lösung

1)
```
  95 785
+ 12 569
 108 354
```

2)
```
  26 956
+ 26 956
+ 26 956
+ 26 956
+ 26 956
 134 780
```

3)
```
   5 ·    2471
+  2 · 2439215
       9769215
```

• Sommerschule Junger Mathematiker 1991

zu **1)**

Die Vermutung, daß sich der größte Flächeninhalt ergibt, wenn der Punkt D mit dem Mittelpunkt der Seite BC zusammenfällt, kann bewiesen werden, wenn man zeigt, daß für einen anderen Punkt D' eine größere Restfläche entsteht (Abb. 1).

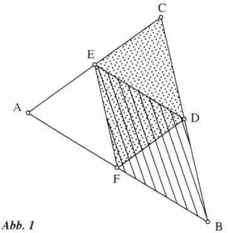


Abb. 1

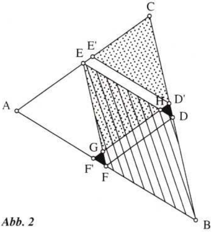


Abb. 2

Betrachten wir den Fall, daß $2 \cdot \overline{BD} = \overline{BC}$ gilt. Die gepunkteten Dreiecke FDE und DCE sind kongruent (Winkel an geschnittenen Parallelen und eine gemeinsame Seite) und damit flächengleich. Das schraffierte Parallelogramm hat damit einen Flächeninhalt, der mit der Restfläche übereinstimmt.

Ebenfalls kongruent sind die gepunkteten Dreiecke GHE und E'D'C in Abb. 2.

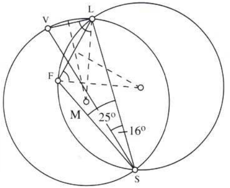
Die hier entstehende Restfläche ist um den Flächeninhalt der schwarz gefärbten Dreiecke F'FG und HDD' größer, damit – um zum Aufgabentext zurückzukehren – das parallelogrammförmige Grundstück flächenkleiner als bei einem Teilpunkt D, der mit dem Mittelpunkt von BC zusammenfällt.

zu **2)**

Logarithmisch berechnete Näherungswerte aller hundertstelligen Zahlen, die 37. Potenzen natürlicher Zahlen sind, gibt die folgende Übersicht an:

474	$1{,}008 \cdot 10^{99}$	490	$3{,}446 \cdot 10^{99}$
475	$1{,}091 \cdot 10^{99}$	491	$3{,}715 \cdot 10^{99}$
476	$1{,}179 \cdot 10^{99}$	492	$4{,}006 \cdot 10^{99}$
477	$1{,}274 \cdot 10^{99}$	493	$4{,}319 \cdot 10^{99}$
478	$1{,}377 \cdot 10^{99}$	494	$4{,}655 \cdot 10^{99}$
479	$1{,}487 \cdot 10^{99}$	495	$5{,}016 \cdot 10^{99}$
480	$1{,}607 \cdot 10^{99}$	496	$5{,}405 \cdot 10^{99}$
481	$1{,}735 \cdot 10^{99}$	497	$5{,}824 \cdot 10^{99}$
482	$1{,}874 \cdot 10^{99}$	498	$6{,}273 \cdot 10^{99}$
483	$2{,}023 \cdot 10^{99}$	499	$6{,}756 \cdot 10^{99}$
484	$2{,}184 \cdot 10^{99}$	500	$7{,}276 \cdot 10^{99}$
485	$2{,}357 \cdot 10^{99}$	501	$7{,}834 \cdot 10^{99}$
486	$2{,}544 \cdot 10^{99}$	502	$8{,}434 \cdot 10^{99}$
487	$2{,}745 \cdot 10^{99}$	503	$9{,}079 \cdot 10^{99}$
488	$2{,}962 \cdot 10^{99}$	504	$9{,}771 \cdot 10^{99}$
489	$3{,}195 \cdot 10^{99}$		

zu **3)**



Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über dem selben Bogen (über der selben Sehne). Für den Winkel VSL soll die Konstruktion des sogenannten Faßkreisbogens erläutert werden. Der Zentriwinkel liegt (zumindest für Peripheriewinkel kleiner als 90°) in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis die betreffende Sehne ist und dessen gleichlange Schenkel Radien sind. Somit kann man die Winkel zwischen Sehne und den Radien leicht konstruieren. Z. B. für $\sphericalangle$ MVL gilt:

$2 \cdot \sphericalangle MVL + \sphericalangle VML = 180°$ (Winkelsumme)

$2 \cdot \sphericalangle MVL + 2 \cdot \sphericalangle VSL = 180°$ (Zentri-Peripheriewinkelsatz)

$\sphericalangle MVL + \sphericalangle VSL = 90°$, also

$\sphericalangle MVL = 90° - \sphericalangle VSL$..

Durch Subtraktion des Peripheriewinkels von einem rechten erhalten wir also die bei V bzw. L an die Sehne anzutragenden Winkel.

Damit ist die Position des Schiffes schon stark eingeschränkt. Das Verfahren für den anderen Winkel FSL wiederholt, liefert den exakten Punkt S, das heißt hier die Position des Schiffes auf der Seekarte.

• Schachecke

Neben der Diagrammstellung, die sich 7x verschieben läßt, gibt es desweiteren folgende Grundmodelle mit den Damen auf den Feldern:

a) a1, a3, a5, c2, c3, c4, e1, e3, e5 (15 Verschiebungen).

b) a1, a3, a5, b2, b3, b4, c1, c3, c5 (23 Verschiebungen).

c) a1, a3, a5, d3, d4, d5, g3, g5, g7 (3 Verschiebungen).

d) a3, a5, a7, d3, d4, d5, g1, g3, g5 (3 Verschiebungen).

e) a3, c1, c3, c4, d4, e3, e5, e7, g5 (3 Verschiebungen).

Diese 60 Möglichkeiten muß man noch verdoppeln, denn jedes Grundmodell kann in jeder Stellung um 90 Grad gedreht werden, so daß es also 120 Möglichkeiten insgesamt gibt.

Hier gibt's nur eine Lösung

1. Eine Sehne in einem Kreis teilt diesen stets in zwei konvexe Flächen:

```
  S E H N E
+ K R E I S
K O N V E X
```

2. Bei einem Fünfeck gilt für die Berechnung des Umfangs:

```
  S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
+ S E I T E
U M F A N G
```

3. Ganz einfach auf zwei Arten addieren:

```
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
        Z W E I
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
N E U N Z I G
```

Dr. Stefan Bondeli, Zürich

ISBN 3-617-34007-5 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM