

H 113228

Heft 3

Juni 1992

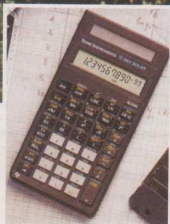
26. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

*Mathematische
Schülerzeitschrift*

**Wege und Irrwege:
Die Tücken der Labyrinth**



**Experimente und
Spielereien mit dem
Taschenrechner**



**Vorhersage des Stabhochsprung-
weltrekordes für das Jahr 1995**



**Computerprogramm:
Castle of Dr. Brain**

Leserbriefe

– Im neuesten alpha-Heft 2/1992 S. 15 erwähnen Sie, daß 51 und 69 noch nicht darstellbar sind durch die Ziffern von 1992.

Da ich auf diesem Gebiet eine gewisse Routine habe, kann ich zumindest eine Lücke schließen: $51 = -1 + 9 \cdot 2$, die 74 läßt sich etwas einfacher schreiben: $74 = (-1 + 9) \cdot 9 + 2$. Mit freundlichen Grüßen *H. Siegler, Eschau*

– Nach 5 Minuten hatte ein Schüler die Lösung $69 = 1 + 9^2 - 9 - 2^2$. Alpha gefällt mir sehr gut. Lassen Sie sie ja in ml!

Mit freundlichen Grüßen *D. Pfeifle, Pfinztal*

– Zunächst möchte ich Ihnen mitteilen, daß mir als langjährigem alpha-Leser die neue Gestaltung der Hefte gut gefällt, wenn auch (meiner Meinung nach) die Übersichtlichkeit geringer geworden ist.

Beim Lösen der Aufgaben in Heft 6/91 fiel mir auf, daß in zwei Fällen Lösungen vergessen worden sind. Dies betrifft „Ohne Fleiß kein Preis!“ (S. 5). Hier existieren außer den angegebenen noch folgende Möglichkeiten:

1395 = 15 · 93
1435 = 35 · 41
6880 = 80 · 86
1827 = 21 · 87
2187 = 27 · 81

(Besonders interessant sind die beiden letzten Möglichkeiten mit den gleichen Ziffern.)

Bei „Ausblick auf Olympia“ (S. 29) fehlt noch die folgende Variante:

5	2	7
9	6	3
4	1	8

Mit freundlichem Gruß *A. Hempler*

Red.: An der Gestaltung wird noch gefeilt, damit es bei allem Abwechslungsreichtum trotzdem übersichtlich bleibt.



Alphonsvignetten:
Lothar Otto
(Leipzig)

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:

Dr. Gabriele Liebaw, Tel. (Leipzig) 58 18 54,

Einsendungen an:

Erhard Friedrich Verlag, Herrn J. Ricke,

Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Redaktionskollegium:

Sir F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), Sir H.-J. Kerber (Neustrelitz), OSir J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), Sir H. Pätzold (Waren/Müritzt), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OSir G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Druckfehlerberichtigung

In den Lösungen zur Olympiade-Ecke in Heft 2/92 S. 33 muß es jeweils richtig heißen

• Olympiade-Ecke (statt Olympiadecke)

• 5. Jahrgangsstufe. In Zeile 8: Die Addition von b) und c) ergibt: (Statt ... a) und b) ...)

• 9. Jahrgangsstufe. Es fehlt ein Einschub.

Die Antwort lautet: Nein. Die Idee besteht

Liebe Leserin und lieber Leser,

an dieser Stelle in alpha möchten wir in Zukunft gern Eure Leserpost veröffentlichen. Deshalb schreibt uns, wenn Ihr alte alpha-Hefte sucht, Ergänzungen zu vorgestellten Beiträgen mitteilen möchtet, allgemein interessierende mathematische Fragen stellen oder Eure Meinung zu alpha kundtun wollt.

Wir freuen uns auf Eure Post.

Erhard Friedrich Verlag

Jürgen Ricke

Redaktion alpha

Postfach 10 01 50

W – 3016 Seelze 6

Herzlichen Glückwunsch!

An der Verlosung von 10 Jahresabonnements der Zeitschrift „alpha“ haben zahlreiche Leser teilgenommen; hier die Gewinner: A. Burow, Berlin; M. Blücher, Kusterdingen; S. Ogunka, Bielefeld; I. Kasten, Plettenberg; C. Rieß, Dillingen; P. Jastrow, Bremerhaven; E. Hoffmann, Aachen; G. Els, Pratz (Luxemburg).

Wir gratulieren und schicken Ihnen „alpha“ ein Jahr lang kostenlos zu. Mögen die Beiträge Ihnen Unterhaltung, Kniffliges und Wissenswertes bringen.

Beste Grüße aus Velber

Erhard Friedrich Verlag, Werbeabteilung

darin, eine Größe zu finden, die bei jedem Schritt invariant (= unverändert) bleibt. Die Quadratsumme der Koordinaten leistet dies.

• 9. – 10. Jahrgangsstufe. In Zeile 9 muß es heißen: $(a+3) \cdot 10^3 + (b+3) \cdot 10^2 + (c+3) \cdot 10 + (d+3) = m^2$
(statt $(a+3) \cdot 10^3 + (b+3) \cdot 10 + (d+3) = m^2$)

Paul Jainta

Anzeigenleitung: Bernd Schrader

Anzeigenabwicklung:

Telefon (05 11) 4 00 04-23

Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990

Vertrieb und Abonnement:

Telefon (05 11) 4 00 04-50

Verlag:

Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,

Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Telefon (05 11) 4 00 04-00

Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.

Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden. Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: Pädagogika Zentrale

Titel: Jens Hinzmann

Druck: Druckerei Schröder, Seelze
ISBN 3-617-34009-1

Inhaltsverzeichnis

Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?4

Sergej Bubka hat den Rekord zentimeterweise verbessert – wo er 1995 stehen wird, sagt **Dr. Bernd Luderer** mit mathematischen Methoden recht genau vorher.

Experimente mit dem SR 16

Tips und Tricks von **Uta Schmidt** und **Dr. Werner Schmidt**, um den Taschenrechner optimal zu nutzen.

Zeitungsschnipsel8

Zeitungen mit der mathematischen Brille betrachtet.



Spielereien mit dem Taschenrechner9

„Zwei – Drei“ und „Zielschießen“ sind Spiele zu zweit – mitgeteilt von **Claudia Erdmann** und **Dr. Werner Schmidt**.

alpha-historisch: Rechnen mit dem Rechenmeister Adam Ries ...10

Informationen zum Leben und zu den Rechenbüchern des wohl bedeutendsten Rechenmeisters des 16. Jahrhunderts – zusammengestellt von **Dr. Harry Beyrich**.

Geometrie auf dem Schachbrett11

Aufgaben, in denen geometrisch längste Züge auszuführen sind, von **Harald Rüdiger**.

Die Adam-Ries-Städte12

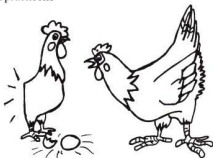
Manfred Weidauer wandelte in Staffelstein, Erfurt und Annaberg-Buchholz auf den Spuren des Rechenmeisters.

Dem „...gemeinen man zu nutze...“13

schrrieb Adam Ries seine Rechenbücher im damaligen Deutsch. „Euch zunutze“ übertrugen **OSIR Johannes Lehmann** und **StR Theodor Scholl** 18 Aufgaben in unser heutiges Deutsch.

Komisches, Kniffliges und Knackiges14

– Regula de tri, Alphons logische Abenteuer, Sprachecke



Das Geheimnis des Zebrastreifens16

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 1/9216

Herr Paddel und das Dualsystem24

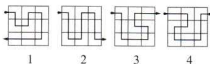
Was Ruderboote und Computer verbindet, erfahrt Ihr von **StD Helmut Wirths**.

Komisches, Kniffliges und Knackiges26

Johannes Lehmann zauberte aus seinem schier unerschöpflichen Reservoir wieder Erstaunliches hervor.

Labyrinth28

Den Weg durchs Labyrinth fand und beschrieb **OSr Gerhard Schulte**.



Der Irrgarten von Altjeßnitz bei Wolfen29

wurde von **Walter Träger** besucht.

Olympiade-Ecke: Der Essener Mathematikwettbewerb30

Auch der 7. Essener Mathematikwettbewerb brachte zahlreiche Schüler wieder zur freiwilligen Beschäftigung mit Mathematik – beschrieben und mit Aufgaben angereichert von **Paul Jainta**.

Die Marktecke32

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Lösungen34

Titelfotonaehweis:

Das Foto auf dem Titel stammt aus dem sehr empfehlenswerten Buch von Nigel Pennik „Das Geheimnis der Labyrinth“ erschienen im Goldmann-Verlag 1990.

Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

Niemand vermag heute darauf eine gültige Antwort zu geben; man kann nur raten, schätzen oder Wetten abschließen. Wie mathematische Methoden helfen können, möglichst genaue Schätzungen zu erzielen, soll nachfolgend dargestellt werden.



Der frühere erfolgreiche Zehnkämpfer Sigi Wentz beim Stabhochsprung

Foto: adidas

Als begeisterter Sportfan blättert Anna für ihr Leben gern in Sportstatistiken. So fällt ihr eines Tages das "Track & Field Annual" in die Hände, welches alle Leichtathletikrekorde verzeichnet. Unter der Rubrik Stabhochsprung findet Anna unter anderem die folgenden fünf Freiluft-Weltrekorde:

1968	5,41m	R. Seagren (USA)
1973	5,63m	R. Seagren
1978	5,70m	D. Roberts (USA)
1983	5,83m	T. Vigneron (Frankreich)
1988	6,06m	S. Bubka (USSR)

Nun stellt sie sich die Frage, bei welcher Höhe wohl der Weltrekord im Jahre 1993 oder 1995 liegen könnte.

Zunächst einmal stellt sie die fünf Werte graphisch dar (s. Abb. 1).

Sie bemerkt, daß die eingezeichneten Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen und schlußfolgert: "Wenn ich eine Gerade durch die 'Punktwolke' lege, die die Punkte möglichst gut annähert, und dann auf dieser Geraden ablese, welcher Wert sich für 1993 (bzw. 1995) ergibt, erhalte ich zumindest eine relativ gute

Schätzung für den künftigen Weltrekord." Das ist sicherlich richtig, solange man nicht allzuweit in die Zukunft "vorausschaut" (extrapoliert), denn die Weiterentwicklung des Stabmaterials und der Trainingsbedingungen einerseits sowie die sicher nicht unbegrenzte menschliche Leistungsfähigkeit andererseits lassen sich über große Zeiträume hinweg in ihrem Einfluß nur schlecht bewerten.

Was aber bedeutet eine "möglichst gute Annäherung"? Darauf hat der große Mathematiker C. F. Gauß im Rahmen der Ausgleichsrechnung bereits vor etwa 200 Jahren eine (aber nicht die einzig mögliche!) Antwort gegeben: Man lege die gesuchte Gerade in solch einer Weise durch die Punktwolke, daß die Summe der Quadrate aller Abstände von den gegebenen Punkten zu denjenigen Punkten auf der Geraden, die jeweils dieselbe Abszisse t haben, so klein wie möglich wird (s. Abb. 2).

Unter Verwendung des Summenzeichens

$$\sum_{i=1}^n c_i = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

und der Symbolik $f(y) \rightarrow \min$, die heißen soll: "Minimiere die Funktion f , d. h., suche denjenigen Wert y , für den $f(y)$ kleinstmöglich

wird!" läßt sich das so formulieren:

$$\sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

Hier bedeutet N die Anzahl der gegebenen Punkte (statistische Daten oder Meßdaten). Die Differenzen $z_i - y_i$ wurden quadriert, damit sich nicht positive und negative Abweichungen von der Geraden gegenseitig "auslöschen". Die Gerade selbst, die die Bedingung (1) erfüllt, kennt Anna noch nicht, sie weiß aber, daß sich jede Gerade (die nicht senkrecht zur t -Achse verläuft) in der Form

$$y = f(t) = a + bt \quad (2)$$

darstellen läßt, wobei a und b zunächst unbekannt sind. Nun beachtet Anna noch, daß die Punkte (t_i, z_i) auf der (gesuchten) Geraden liegen, d. h., es gilt $z_i = a + bt_i$.

Damit läßt sich die Quadratsumme in (1) als Funktion der beiden Unbekannten a und b wie folgt ausdrücken:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^N (a + bt_i - y_i)^2 = (a + bt_1 - y_1)^2 + \dots + (a + bt_N - y_N)^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Man beachte, daß hier a und b variabel sind, während y_i und t_i bekannte Größen darstellen. Für welche Werte a und b wird das Minimum in (3) angenommen? Die Antwort darauf läßt sich relativ leicht durch Umformung der Quadratsumme finden. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \sum_{i=1}^N (a + bt_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (a^2 + b^2 t_i^2 + y_i^2 + 2abt_i - 2ay_i - 2bt_i y_i) \\ &= Na^2 + b^2 \sum_{i=1}^N t_i^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^N t_i - 2a \sum_{i=1}^N y_i - 2b \sum_{i=1}^N t_i y_i \\ &= Na^2 + Ab^2 + B + 2abC - 2aD - 2bE, \end{aligned} \quad (4)$$

wenn wir

$$A = \sum_{i=1}^N t_i^2, B = \sum_{i=1}^N y_i^2, C = \sum_{i=1}^N t_i, D = \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$E = \sum_{i=1}^N t_i y_i$$

setzen. Die weitere Umformung sieht komplizierter aus als sie ist; genutzt wird lediglich die quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} F(a, b) &= N \left[\left(a + \frac{Cb - D}{N} \right)^2 - \left(\frac{Cb - D}{N} \right)^2 \right] + \\ &\quad + Ab^2 - 2Eb + B \\ &= N \left(a + \frac{Cb - D}{N} \right)^2 - \frac{C^2 b^2}{N} + \frac{2CDB}{N} - \\ &\quad - \frac{D^2}{N} + Ab^2 - 2Eb + B \end{aligned}$$

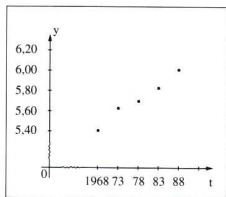


Abb. 1

$$= N \left(a + \frac{Cb - D}{N} \right)^2 + \left(A - \frac{C^2}{N} \right) \left[\left(b + \frac{CD/N - E}{A - C^2/N} \right)^2 - \left(\frac{CD/N - E}{A - C^2/N} \right)^2 \right] + B - D^2/N$$

$$= N \left(a + \frac{Cb - D}{N} \right)^2 + \left(A - \frac{C^2}{N} \right) \left(b + \frac{CD - NE}{NA - C^2} \right)^2 + \left[B - \frac{D^2}{N} - \frac{(CD/N - E)^2}{A - C^2/N} \right]$$

Damit ist $F(a,b)$ eine Summe aus zwei quadratischen Ausdrücken, in denen die Variablen a und b vorkommen, und einer Konstanten (in der letzten eckigen Klammer). Ihren kleinsten Wert nimmt die Funktion F genau dann an, wenn beide Quadrate Null werden, wozu man

$$b = \frac{NE - CD}{NA - C^2}$$

und

$$a = \frac{D - Cb}{N} = \frac{1}{N} \left(D - C \frac{NE - CD}{NA - C^2} \right) = \frac{AD - CE}{NA - C^2}$$

wählen muß. Demzufolge lauten a und b ausführlich geschrieben

$$a = \frac{1}{Z} \left[\sum_{i=1}^N t_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N t_i y_i \right] \quad (5)$$

$$b = \frac{1}{Z} \left[N \sum_{i=1}^N t_i y_i - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N y_i \right] \quad (6)$$

wobei

$$Z = \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2 \text{ ist.}$$

Um nun die konkreten Zahlenwerte für a und b zu ermitteln, stellt Anna folgende Tabelle auf (offensichtlich gilt $N=5$):

i	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
1	68	41	4624	2788
2	73	63	5329	4599
3	78	70	6084	5460
4	83	83	6889	6889
5	88	106	7744	9328
$\sum_{i=1}^5$	390	363	30670	29064

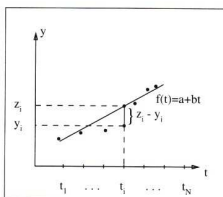


Abb. 2

Hierbei hat sie für die y -Werte nur die Zentimeter über 5 m und für t nur die beiden letzten Ziffern der Jahreszahl eingesetzt, was sich durch Verschiebung der Koordinatenachsen (Variablentransformation) rechtfertigen läßt. Setzt man die so ermittelten Summen in die Ausdrücke (5) und (6) ein, ergibt sich $a = -161,4$ und $b = 3$. Damit hat Anna die Gerade $y = f(t) = -161,4 + 3t$ (7) als diejenige Gerade gefunden, die – im Sinne von Gauß – die bisherigen Weltrekordwerte am besten annähert (approximiert).

Fragt man nun nach der Schätzung für 1993, hat man in (7) den Wert $t=93$ einzusetzen (1900 wurde ja weggelassen), so daß sich $y=117,6$ ergibt, was 6,18 m entspricht (117,60 cm über 5 m). Für 1995 erhält man auf gleiche Weise $y=123,6$, also etwa 6,24 m. Ob diese Werte realistisch sind, muß die Zukunft zeigen; Anna jedenfalls befriedigen sie nicht so recht: sie kommen ihr doch etwas zu groß vor (denn als sportbegeistertes Mädchen weiß sie natürlich, daß Ende 1991 der von Sergej Bubka gehaltene Freiluft-Weltrekord bei 6,10 m stand und Anfang Juni 1992 auf 6,12 m verbessert wurde). „Vielleicht stellt die näherungsweise Beschreibung der Punktwolke durch eine Gerade nicht die günstigste Möglichkeit dar“, grübelt sie. Denn dann würde sich ja im Jahre 2100 ein Wert von etwa 9,40 m ergeben, was schwerlich eintreten dürfte. Sicherlich gibt es eine „Schallmauer“ für die menschliche Leistungsfähigkeit, der sich der Mensch nur langsam nähert. Doch wie groß könnte diese sein: 7 m, 8 m oder ...? Unter der Annahme, daß eine solche absolute Leistungs-

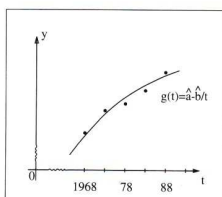


Abb. 3

grenze existiert, könnte man versuchen, die statistischen Daten durch eine Funktion der Art

$$y = g(t) = \hat{a} - \hat{b}/t \quad (8)$$

zu beschreiben, denn für sehr großes t ($t \rightarrow \infty$) nähern sich hier die Funktionswerte y dem Wert $\hat{a}$. Ferner wird mit wachsendem t auch y immer größer, d. h., die Funktion (8) ist (für positives $\hat{b}$) monoton wachsend, eine Eigenschaft, die für Weltrekorde per Definition erfüllt sein muß (s. Abb. 3).

Was ändert sich in den Berechnungen, verwendet man anstelle der linearen Ansatzfunktion (2) die neue Funktion (8)? Nicht viel, denn eine genaue Analyse aller oben durchgeführten Umformungen zeigt, daß lediglich in (3) das Glied bt durch $\hat{b}(-1/t)$ zu ersetzen ist, so daß die Größen A , C , E in (4) jetzt die Bedeutung

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i^2}, \quad C = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i}, \quad E = - \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{t_i}$$

haben, während B und D unverändert bleiben. Für die aus dem Ansatz (8) zu bestimmenden Parameter $\hat{a}$ und $\hat{b}$ erhält man damit

$$\hat{a} = \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i^2} \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{t_i} \right] / \hat{Z} \quad (9)$$

$$\hat{b} = \left[-N \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{t_i} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \sum_{i=1}^N y_i \right] / \hat{Z} \quad (10)$$

$$\hat{Z} = N \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \right)^2$$

i	t_i	y_i	$1/t_i$	$1/t_i^2$	y_i/t_i
1	68	41	0,014706	0,000216	0,602941
2	73	63	0,013699	0,000188	0,863014
3	78	70	0,012821	0,000164	0,897436
4	83	83	0,012048	0,000145	1,000000
5	88	106	0,011364	0,000129	1,204546
$\sum_{i=1}^5$	390	363	0,06463	0,000842	4,567937
$\sum_{i=1}^5$ exakt	390	363	0,064636855	0,000842572	4,5679362

Experimente mit dem SR1

Den Taschenrechner SR 1 optimal nutzen zu können, spart eine Menge Zeit. Einige Tips gibt der folgende Beitrag, der ohne weiteres auf andere Rechnertypen übertragen werden kann.

Nun stellt Anna wieder eine Tabelle auf (s. vorige Seite). In der vorletzten Zeile stehen die Zahlenwerte, die sich bei Rundung der Zwischenergebnisse auf jeweils 6 Stellen ergeben, während die letzte Zeile die Werte zeigt, die Anna erhält, wenn sie die Genauigkeit ihres Taschenrechners voll ausnutzt (ohne zwischendurch zu runden).

Anna hat nämlich beim Rechnen festgestellt, daß es hier – aufgrund der sehr kleinen Zahlen – auf höchste Genauigkeit ankommt, da die durchzuführenden Rechenoperationen sehr "empfindlich" gegenüber Rundungsfehlern sind.

Mit den Werten der letzten Zeile, eingesetzt in (9) und (10), erhält man $\hat{a}=303,3$ und $\hat{b}=17846,3$. Mit anderen Worten, unter allen Funktionen der Gestalt (8), wie eine in Abb. 3 dargestellt ist, beschreibt die Funktion

$$y=g(t)=303,3-17846,3/t \quad (11)$$

die bisherige Weltrekordentwicklung am besten.

Nun ist Anna gespannt, welche Schätzungen sich für 1993 und 1995 mit Hilfe des zweiten Ansatzes ergeben. Sie setzt 93 bzw. 95 in die Beziehung (11) ein und ermittelt

$$y_{1993} = 111,4 \pm 6,11 \text{ m}, \\ y_{1995} = 115,4 \pm 6,15 \text{ m}.$$

Diese Voraussagen erscheinen ihr ziemlich realistisch, so daß sie mit ihrer Rechnung zufrieden ist. Abschließend überlegt sie sich noch, daß sich bei Verwendung der Ansatzfunktion (8) wegen $\hat{a}=303,3$ eine "Schallmauer" von 8,03 m ergibt.

Solltet Ihr Lust bekommen haben, ähnliche Untersuchungen für anderes Datenmaterial oder in anderen Sportarten selbst durchzuführen, könnt Ihr Euch z. B. dadurch üben, daß Ihr als Ausgangspunkt Eurer Prognose nur die vier Weltrekorde von 1968-1983 nehmt. Es müßte sich dann für 1993 beim linearen Ansatz 6,11 m und beim Ansatz (8) 6,08 m als Schätzung ergeben.

Buchtip

Übrigens wurde das beschriebene Problem unter Verwendung viel umfangreicherer Daten auch im Buch Sadovskij L. E., Sadovskij A. L.: Mathematik und Sport, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991, untersucht.

Dr. Bernd Luderer
Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Chemnitz

Ist das Produkt von unendlich vielen Faktoren

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

eine endliche Zahl? Und wenn ja, wie groß ist diese Zahl?

Oder anders formuliert:

Man gehe von den zwei Zahlen $x_0=0$ und $P_0=1$ aus und berechne

$$x_1 = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}}, P_1 = P_0 \cdot x_1, \text{ also } x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Wenn x_i und P_i bereits berechnet sind, so bilde man

$$x_{i+1} = \sqrt{\frac{1+x_i}{2}} \text{ und } P_{i+1} = P_i \cdot x_{i+1}, \quad i=1,2,\dots$$

Man ermittle $x_1, \dots, x_{10}$ und $P_1, \dots, P_{10}$ sowie $\frac{2}{P_1}, \dots, \frac{2}{P_{10}}$ mit dem SR1, dazu stelle man einen

Programmablaufplan auf! Kann aus den mit dem SR1 berechneten Werten eine Vermutung geäußert werden, welcher Zahl sich die

Größen P_i bzw. $\frac{2}{P_i}$ annähern? (Lösung siehe unten)

Man erhält die Zahlenwerte

i	x	P	$\frac{1}{P}$
0	0	1	1
1	0,70710	0,70710	1,4142136
2	0,92387	0,65327	1,5307484
3	0,98078	0,6407176	1,56075
4	0,99518	0,63763	1,5683018
5	0,99879	0,63686	1,570199
6	0,99969	0,63666	1,5706769
7	0,9999247	0,63661	1,5708154
8	0,99998	0,63659	1,57085
9	0,99999	0,636587	1,5708772
10	0,99999	0,63658	1,5708791

Für $i=7$ stimmt der Wert $\frac{1}{P_7}$ gut mit der Zahl $\frac{\pi}{2}$ überein, die der SR1 ($\pi \div 2$) als 1,5707963

anzeigt. In der Tat kann bewiesen werden, daß die Zahlen P_i gegen $\frac{\pi}{2}$ und die Zahlen $\frac{1}{P_i}$ gegen $\frac{\pi}{2}$ "streben" (konvergieren).

Die für $i>7$ in der Tabelle erkennbaren Abweichungen sind auf Rundungsfehler des Schulrechners zurückzuführen. Man erhält also mit einem Taschenrechner keine genaueren Näherungswerte, wenn man immer mehr Faktoren des Produkts berücksichtigt! $\frac{2}{P_i}$ streben, wurde von dem französischen Mathematiker und Juristen **François Vieta** (1540 – 1603) bewiesen. Dieses Resultat ist aber erst nach seinem Tode veröffentlicht worden. Über F. Vieta, dessen Name den meisten Lesern im Zusammenhang mit einem Satz über die Nullstellen von Polynomen (Vietscher Wurzelsatz) bekannt sein dürfte, kann man Interessantes in [1] erfahren.

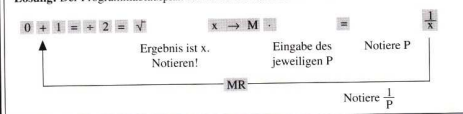
Bei unserem Vorgehen müssen Zwischenwerte aufgeschrieben werden. Verzichtet man darauf, sich die Werte x und $\frac{1}{P}$ zu merken, so ist dennoch bei jedem Durchlaufen des Ablaufplanes der Wert P zu notieren und auch wieder in den SR1 einzutasten. Das braucht man bei Rechnern, die mehr als einen Speicher besitzen, nicht! Schematisch könnte dann so vorgegangen werden:

Man teilt dem Rechner die Anfangswerte $x_{\text{alt}}=0$, $P_{\text{alt}}=1$ und $\frac{1}{P_{\text{alt}}}=1$ mit. Anschließend berechne man

$x_{\text{neu}} = \sqrt{\frac{1+x_{\text{alt}}}{2}}$,
 $P_{\text{neu}} = x_{\text{neu}} \cdot P_{\text{alt}}$ sowie $\frac{1}{P_{\text{neu}}} = \frac{1}{P_{\text{alt}}} + 1$.

Da die "alten" Zahlenwerte nun nicht mehr benötigt werden und ein Rechner die Rechen-

Lösung: Der Programmablaufplan für den SR 1 kann so aussehen:

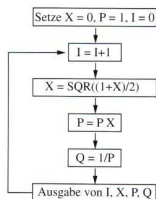


operationen im **Rechenwerk** ausführt, kann das Ergebnis an den gleichen Stellen des **Speichers** abgespeichert werden, an denen die entsprechenden "alten" (jetzt für die Rechnung nicht mehr benötigten) Werte stehen. Das führt zu der (anfangs ungewohnten) Schreibweise

$$x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad P = x \cdot P, \quad i = i + 1.$$

(Lies: Das neue x ergibt sich als Quadratwurzel aus der halben Summe von 1 und dem alten x . Das neue P erhält man als Produkt des alten P mit dem (jetzigen, aktuellen) x -Wert. Der neue i -Wert ergibt sich aus dem alten i durch Addition von 1.)

Dieses Vorgehen kann in einem **Flußdiagramm** dargestellt werden. Hier soll als Divisionszeichen und $\text{SQR}(Y)$ für $\sqrt{Y}$ (square root) geschrieben werden:



Aufgabe: Stelle ein Flußdiagramm auf, mit dem die Werte $P_1, \dots, P_N$ berechnet werden! Modifiziere anschließend das Diagramm so, daß nur bei jedem 3. Durchlauf die Näherungswerte P und Q (also P_3, Q_3, P_6, Q_6 usw.) ausgegeben werden!

Das betrachtete Produkt kann man auch in anderer Form notieren. Bekanntlich ist

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{für alle } \alpha.$$

Daher gilt auch

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{2^n} \cdot \dots$$

Man kann sogar zeigen, daß die Produkte

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n}$$

mit wachsendem n sich dem Wert $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ "nähern".

Gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt auch das folgende unendliche Produkt:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{15} \cdot \dots$$

Dies wurde 1656 von dem englischen Philosophen und Mathematiker **John Wallis** (1616–1703) veröffentlicht.

Mit einem Computer können wir leicht Näherungswerte berechnen:

1. Setze $i=0$ und $P=1$.
2. $i=i+1$
3. Wenn i eine ungerade Zahl ist, setze $P = P \cdot \frac{i+1}{i}$.
4. Wenn i eine gerade Zahl ist, setze $P = P \cdot \frac{i}{i+1}$.
5. Notiere i und P .
6. Gehe zu 2.

Für jedes i ist entweder bei Anweisung 3 oder bei Anweisung 4 der Wert von P zu ändern. Faßt man benachbarte Faktoren zusammen, so erhält man die Formel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{65} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-1} \cdot \dots$$

Näherungswerte erhält man nach dem Schema

1. Setze $i=0$ und $P=1$.
2. $i=i+1$

$$3. P = P \cdot \frac{4 \cdot i \cdot i}{4 \cdot i \cdot i - 1}$$

4. Notiere i und P .
5. Gehe zu 2.

Die Folge der P -Werte ist **echt monoton wachsend**.

Mit dem SR1 erhält man im ersten Fall die

"Näherungen"
2 1,33 1,77 1,422 1,7066 1,463
1,672 1,486

bzw. im zweiten Fall

1,33 1,422 1,463 1,486 1,501 1,512.

Man erkennt, daß die Näherungen nur langsam

gegen $\frac{\pi}{2}$ "streben". Die Formeln sind deshalb für die Berechnung von π ungeeignet.



Eryk Lipinski
aus: Eulenspiegel, Berlin; 28/88

Teilnehmer unserer Arbeitsgemeinschaft "Kleinrechner-technik" haben diese und andere Formeln in BASIC-Programme für den Kleincomputer KC 85/3 aus Mühlhausen und für den Commodore C 64 umgesetzt, um das Konvergenzverhalten zu untersuchen. **Für programmierbare Rechner ist es leicht, gleiche Rechenwege mit immer neuen Zahlen**, so wie es in den geschilderten Ablaufplänen und Flußdiagrammen der Fall ist, **zu durchlaufen**. Wegen der begrenzten Zahldarstellung treten jedoch laufend Rundungsfehler auf. Deshalb muß man auch für programmierbare Rechner nach effektiven Algorithmen suchen!

1. Schon Leibniz (1646–1716) wußte, daß die Summen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

gegen $\frac{\pi}{2}$ streben, allerdings sehr langsam! Gib einen Programmablaufplan für den Schulrechner SR1 an, benutze dabei den Speicher des Rechners! Bestätige, daß man nach Aufsummieren von 51

Gliedern (also bis $\dots - \frac{1}{101}$) lediglich die Abschätzung $3,121 < \pi < 3,162$ erhält.

2. Überlege, wie man mit dem SR1 die Teilsummen der Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots$$

berechnen kann! Gib dafür einen Ablaufplan an! Wie könnte man diesen Programmablaufplan für einen Rechner mit zwei oder drei Speicherplätzen modifizieren?

Bestätige, daß man folgende Teilergebnisse (Anzeige mit 5 Stellen) erhält:

0,33333 0,29630 0,30370 0,30194

0,30239 0,30227 0,30230 0,30229

Man kann beweisen, daß die Teilsummen **alternierend** (von oben und unten) gegen $\frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$ streben. Aus den obigen Ergebnissen folgt dann:
 $3,14153 < \pi < 3,14163$.

Literaturhinweise

/1/ H. Wußing, W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen. Berlin 1983

/2/ Schmidt/Wenzel: Chancen für Denkaufgaben? Taschenrechner und/oder Mathematik. alpha Heft 2, 1985

Uta Schmidt, Dr. Werner Schmidt
E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Wenn ihr einen solchen Schnipsel

findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!

Vergesst aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

Superlative

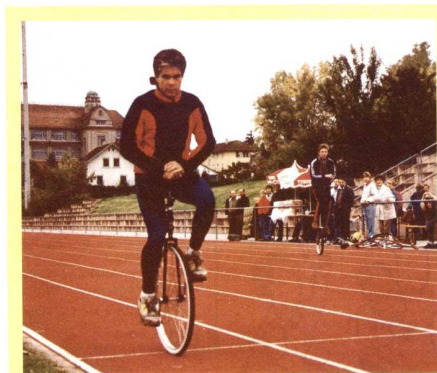
Das schnellste Auto, für das wohl eher die Bezeichnung "Rakete auf Rädern" angebracht wäre, steuerte der Brite Richard Noble über eine extra für den Rekord präparierte Strecke in einer Wüste in Nevada. Die Regeln für solche Rekordversuche schreiben vor, daß eine Strecke von einer Meile in beiden Richtungen (um den Windeinfluß auszuschalten) durchfahren werden muß. Für beide Fahrten werden die erzielten Zeiten gemessen. Als offizielle Rekordgeschwindigkeit wird dann die Durchschnittsgeschwindigkeit

über die Gesamtstrecke (von zwei Meilen) gewertet.

Richard Noble erreichte mit seinem von einer Flugzeugturbine angetriebenen Wagen "Thrust 2" während der ersten Fahrt eine Geschwindigkeit von $v_1 = 1004,403 \text{ km/h}$ und während der zweiten Fahrt eine Geschwindigkeit von $v_2 = 1034,540 \text{ km/h}$.

Wie hoch war die offizielle Rekordgeschwindigkeit v_R ?

Auf der Jagd nach Superlativen war für Euch stud. math. und Weltrekordhalter Ralf Laue, Leipzig.



Der Schweizer Stefan Gauler erzielte im vergangenen Oktober einen neuen Weltrekord im **24-Stunden-Einradfahren**. Nur von kurzen Pausen unterbrochen, radelte er auf einem Sportplatz in Kreuzlingen in 24 Stunden 279,274 km weit. Sein Einrad hatte – den Regeln für solche Rekordversuche entsprechend – einen Raddurchmesser von 26 Zoll und eine Übersetzung von 1:1.

Wieviele Pedaltritte waren für den Rekord nötig?

(Hinweis: 1 Zoll = 2,54 cm)

Die „Rainbow Bridge“

Eines der beeindruckendsten Naturwunder in den USA ist der größte Natursteinbogen der Welt, der mit 88 m Höhe und 84 m Breite das Tal des Flußchens Colorado überbrückt. Der Colorado, der im Sommer oft austrocknet, hat in Millionen Jahren die weichen Gesteinsschichten weggespült und ließ von einem massiven Felsen nur die "Regenbogenbrücke" stehen. Vor wenigen Jahrzehnten wurde ein Staudamm errichtet und der Colorado mit seinen Nebenflüssen auf einer Länge von 300 km zum "Lake Powell" angestaut.



Foto:
A. Strick, Köln

• Wieviel Stockwerke besitzt mindestens ein Wohnhochhaus mit den angegebenen Maßen, dessen Höhe h größer als die Höhe 88 m der "Rainbow Bridge" ist?



Abb. 1

Das von der "Regenbogenbrücke" und ihrem Spiegelbild im "Lake Powell" umrandete Oval ähnelt einer Ellipse mit den Halbachsen $a = 88 \text{ m}$ und $b = 42 \text{ m}$. Eine Ellipse ist eine ebene geschlossene Kurve mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieachsen, für deren Punkte X gilt: Die Summe der Abstände eines Kurvenpunktes X von zwei geeignet fest gewählten Punkten F_1 und F_2 , den Brennpunkten, ist für alle Kurvenpunkte eine konstante Größe k .

$$K = XF_1 + XF_2$$



• Für das als Ellipse aufgefaßte Oval der "Rainbow Bridge" und ihres Spiegelbildes ist der Abstand $F_1 + F_2$ ihrer Brennpunkte F_1 und F_2 zu berechnen. (Üblicherweise wird $F_1 + F_2$ mit $2a$ bezeichnet.)

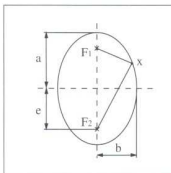


Abb. 2

Um ein ellipsenförmiges Gartenbeet anzulegen, schlägt der Gärtner an zwei Stellen, den Brennpunkten, Pfähle in die Erde und bindet die Enden eines Strickes an beide Pfähle. Ein angespitzter dritter Pfahl ritzt mit seiner Spitze die Ellipse in die ebene Gartenfläche, wenn dieser so bewegt wird, daß der um ihn gelegte Strick stets straff gespannt ist.

• Das als Ellipse aufgefaßte Oval der "Regenbogenbrücke" und ihres Spiegelbildes ist mittels "Gärtnerkonstruktion" im Maßstab 1:3000 zu zeichnen.

Spiellereien mit dem Taschenrechner

Zwei-Drei

Ein Spiel zu zweit mit einem Taschenrechner

Am Anfang steht 1 auf der Anzeige. A darf wählen, ob er mal 2 (01) oder mal 3 (02) nehmen will. Dann wählt B zwischen 01 und 02, nachfolgend A usw. Gewonnen hat, wer als erster über 1000 kommt.

Zum Beispiel:

Operation	A:01	B:02	A:02	B:02	A:01
Anzeige	1	2	6	18	54

B:01	A:01	B:02
216	432	1296

B hat gewonnen.

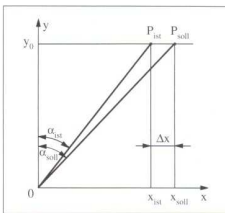
Bei diesem Spiel gibt es nur 11 mögliche Endergebnisse. Wer Lust hat, sollte diese ermitteln!

Das Spiel stammt von Texas Instruments und wurde mitgeteilt von Claudia Erdmann, Leipzig.

Zielschießen

Ein Spiel zu zweit

zur Förderung des Augenmaßes



Der Schütze befinde sich im Koordinatennullpunkt 0 (siehe Abb.) und ein Ziel befinde sich im Punkt P_{soll} , der auf der Geraden $y=y_0$ (Zielpunkt-Gerade) liegt. Die Koordinaten y_0 und x_{soll} seien bekannt. Für das Spiel kann man ein Koordinatennetz auf Millimeterpapier anordnen.

Der Spieler bestimmt nach Augenmaß den Zielwinkel. Gibt der Spieler einen Winkel α_{ist} (in Bezug auf die y-Achse) an, dann wird ein Punkt P_{ist} auf der Zielpunkt-Geraden getroffen, der in einem Abstand Δx von P_{soll} liegt. Überschreitet dieser Schußfehler einen vorgegebenen Wert nicht, dann ist das Ziel als getroffen anzusehen, und umgekehrt. Es gewinnt der, der mehr Ziele trifft.

Die vom Schiedsrichter mit dem Taschenrechner auszuführenden Rechnungen sind relativ einfach:

1. Die Abszisse x_{ist} des getroffenen Punktes P_{ist} nach der Formel $x_{ist}=y_{ist} \tan \alpha_{ist}$ berechnen.
2. Den Schußfehler $\Delta x=x_{ist}-x_{soll}$ berechnen. (Dieser Schritt kann oft im Kopf gemacht werden.)

Man vergleiche dann Δx mit dem vorgegebenen höchst zulässigen Fehler Δx , um zu entscheiden, ob das Ziel getroffen ist.

Zahlenbeispiel: Gegeben sind: $\Delta x=0,5$; $y_0=20$; $x_{soll}=30$.

Der Spieler schätzt den Zielwinkel auf $\alpha_{ist}=55^\circ$.

Berechnungen:

$$\tan \alpha_{ist} = \tan 55^\circ = 1,428148$$

$$x_{ist} = y_{ist} \tan \alpha_{ist} = 20 \cdot 1,428148 = 28,56296$$

$$\Delta x = x_{ist} - x_{soll} = 28,56296 - 30 = -1,43704$$

$$|-1,43704| > 0,5 \rightarrow \text{Fehlschuß}$$

Bei einem zweiten Versuch wurde der Zielwinkel auf $\alpha_{ist}=56^\circ$ geschätzt. Damit ergibt sich:

$$\tan 56^\circ = 1,4282561$$

$$20 \cdot 1,4282561 = 29,65122$$

$$29,65122 - 30 = -0,34878$$

$$0,34878 < 0,5 \rightarrow \text{Ziel getroffen.}$$

Programmablauf für den SR1:

Eingabe α_{ist} $\tan x$ Eingabe y_0 = Eingabe x_{soll} =

Die Spielbedingungen können beliebig festgelegt werden. Etwa:

- a) Die Anzahl der festgelegten Zielpunkte ist n.
- b) Jeder Schütze hat bei jedem Zug k Schüsse frei.
- c) Jedes getroffene Ziel wird entfernt.
- d) Am Spiel können mehrere Schützen teilnehmen, und dgl. mehr.

Bei gewisser Erfahrung kann ohne Papier gespielt werden.

Hinweis: Ihr könnt das "Zielschießen" zu einem Computerspiel ausbauen. Dazu laßt ihr euch vom Zufallszahlengenerator Zahlen x_{soll} und y_{soll} im Rechner erzeugen. Diese Zahlen sind den Spielern nicht bekannt! Auf dem Bildschirm wird der zugehörige Punkt P_{soll} in einem x-y-Koordinatensystem angezeigt. Nach der Eingabe des Schätzwertes für α_{ist} wird auch P_{ist} in die Grafik eingetragen. Es ist nun auch möglich, den Fehler Δx und eine Information über Treffer bzw. Fehlschuß auszugeben.

Ein Spiel von Leonid und Iwan Kryshanowskij, für alpha bearbeitet von Dr. W. Schmidt

Rechnen bei dem Rechenmeister Adam Ries (1492 – 1559)

Bis zur Wende vom 15. zum 16. Jahrhundert hatten sich in Europa verbreitet frühkapitalistische Wirtschaftsformen herausgebildet. Gewerbliche Produktion, Handel und Geldumlauf erreichten einen noch nicht gekannten Umfang. Rechenmeister, die in den Städten bei Waren- und Finanzgeschäften für die Bürger und die kommunalen Verwaltungen die Rechenarbeiten ausführten, vermittelten in Rechenschulen und durch Rechenbücher die notwendigen Rechenkenntnisse.

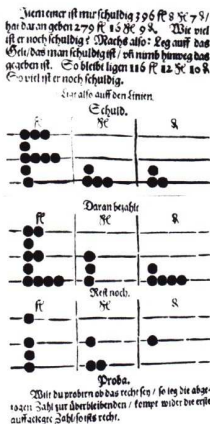


Abb. 1: Subtraktionsaufgabe auf den Linien, Rechenbuch von 1522, Auflage Nürnberg 1629

Vollkreise = Rechenpfennige. Lage auf den Linien und in den Zwischenräumen von unten Einer, Fünfer, Zehner, Fünfziger, Hunderter. 5 Einer bündelt man zu 1 Fünfer, 2 Fünfer bündelt man zu 1 Zehner, ebenso umgekehrt. 1 fl (Gulden) = 21 g (Groschen), 1 g = 12 $\frac{1}{2}$ (Pfennige).

Von den deutschen Rechenmeistern erlangte der aus Staffelstein in Franken stammende Adam Ries besondere Volkstümlichkeit. Noch heute erinnert die sprichwörtliche Redensart "Das macht nach Adam Ries..." an ihn, mit der die Richtigkeit eines Rechengenergebnisses unterstrichen werden soll. Er schrieb hervorragende Rechenbücher mit systematischem

Aufbau und klarer, verständlicher Darstellung des Inhalts in deutscher Sprache. Das Oktavbändchen von 1522 "Rechnung auff der linien vnd federn" bezeichnete der Mathematiker Michael Stifel 1545 als "das aller gebrechlichst (allergebräuchlichste)". Es erschien bis 1656 an Druckorten zwischen Zürich und Stettin (heute Szczecin, Polen) in mindestens 108 Auflagen und übertraf damit die anderen Rechenbücher jener Zeit um ein Vielfaches.

Der Rechenmeister und seine Rechenweisen

Adam Ries ließ sich 1518 in Erfurt nieder. Im gleichen Jahr verfaßte oder vollendete er sein erstes Rechenbuch "Rechnung auff der linien". Er behandelte das Rechnen mit den Rechenpfennigen, die durch ihre Anzahl und Lage auf den Linien eines Rechentisches, -brettes oder -tuches die Zahlen darstellen und beim Rechenvorgang hinzugelegt oder weggenommen werden (s. Abb. 1). Diese Rechenweise war durch den bisher üblich gewesenen Gebrauch der Zahlen mit römischen Ziffern entstanden, die zum Rechnen ungeeignet sind. Am Ende seines Buches kündigte Ries an, daß eine Arbeit über das schriftliche Rechnen ("auff der federn") mit den indisch-arabischen Zahlzeichen nachfolge. Er erkannte die Zweckmäßigkeit und Gewandtheit der aufkommenden Rechenart, die zuerst in den Kontoren der Kaufleute das Rechnen auf den Linien verdrängte. Man konnte mit den Zahlen auch rechnen und die Rechnungen in einem Zuge mit den Schreivarbeiten durchführen.

Zugleich nahmen die Gedanken von Adam Ries Gestalt an, das Rechnen auf den Linien und das schriftliche Rechnen in Aufeinanderfolge als Einheit zu lehren. Es entstand 1522 in Erfurt das zweite Rechenbuch "Rechnung auff der linien vnd federn", das wohl gerade auch wegen der methodischen Verbindung der beiden Rechenweisen eine so gute Aufnahme fand (s. o.) und mit dem Adam Ries einen sehr wesentlichen Anteil an der Verbreitung des schriftlichen Rechnens mit den indisch-arabischen Ziffern hatte. Später teilte der Rechenmeister in dem dritten, dem großen Rechenbuch "Rechnung nach der lengte auff den Linien vnd Feder" von 1550 seine Erfahrungen und Ansichten mit: "Ich habe befunden in vnder weisung der Jugent das alle weg / die so auff den linien anheben des Rechens fertiger vnd laufftiger werden / den so sie mit den ziffern die Feder genant anfan / In den Linien ... schöpfen sie einen bessern grund / Mügen als denn mit geringer mühe auff den ziffern ire Rechnung volbringen."

Ries gelang es in dem Rechenbuch von 1522, den Inhalt übersichtlich nach den Rechenver-

fahren und den Anwendungsgebieten und konsequent nach zunehmender Komplexität und Schwierigkeit der Aufgaben anzuordnen. Auf Beispiele zur Regula de tri (Dreisatz), die den breitesten Raum einnehmen, folgen Kapitel zur Regula falsi (doppelter falscher Ansatz) und zur Regula Cecis oder Virginum (Zechenaufgaben, im allgemeinen unbestimmt). "Regula De tri. Ist ein Regel vonn dreien dingen / setz hinden das du wissen wilt / würdt die frag geheysen / Das ihm vnder den andern zweyen am namen gleich ist setz form / vñ das ein and ding bedeut mitten / Darnach multiplicir das hinden vñnd mitten steht durcheinander / das darauß kompt theyle ab mit dem fordern / so hastu wie thewer (teuer, bei der Frage nach dem Warenpreis, wie in dem anschließenden Exempel) das dritt kompt / vñnd das selbig ist am namen gleich dem mitteln. Item 32 eln (Ellen) tuch für 28 fl (Gulden) / wie komien 6 eln? facit 5 fl / 5 groschen / 3 (Pfennige) / setz also. Eln. fl. eln 32 28 6 (1 fl = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 $\frac{1}{2}$, es ist

Adam Ries. Von Gesellschaften.



Item ihr drey machen ein Gesellschaft also / Der erste legt 123. fl. Der ander 336. Vnd der drit 141. haben gewonnen 130. fl. wie viel gebürt jechlichem? Facit dem ersten vom gewinn 19. fl. 19. g. 9. hte. Dem andern 87. fl. 2. g. Vnd dem dritten 22. fl. 18. g. 3. hte. Wunders also / So hinden wieviel ein jeder in sonderheit geklagt hat / summir solches / vnd was da kompt schreib form / ist dem theiler / vnd den gewinn jechlichem also:

$$\begin{array}{r} 800 \quad 130. \text{ fl.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 133 \\ 336 \\ 141 \end{array} \right. \\ \hline \text{Rechen einen nach dem andern so kompt es aus jeden sein facit wie oben bestimpt.} \end{array}$$

Abb. 2: Aufgabe der Gesellschaftsrechnung, Rechenbuch von 1522, Auflage Frankfurt am Main 1574

1 fl (Gulden) = 20 $\frac{1}{2}$ (Schillinge), 1 $\frac{1}{2}$ = 12 hl (Heller).

$$\begin{array}{r} \text{Es ist zu rechnen:} \\ \hline 123 \cdot 130 \quad \text{fl.} \quad 536 \cdot 130 \quad \text{fl.} \quad \text{und} \quad 141 \cdot 130 \quad \text{fl.} \\ \hline 800 \quad \quad \quad 800 \quad \quad \quad 800 \quad \quad \quad \text{fl.} \end{array}$$

zu rechnen $\frac{6 \cdot 28}{32}$ fl). Nach der Vorschrift des Dreisatzes lassen sich auch die Aufgaben aus der Gesellschaftsrechnung und aus der Münzberechnung auf S. 14 lösen (s. auch Abb. 2).

Das "Machs also" forderte auf, den vorgegebenen Weg zu beschreiben; eine theoretische Begründung war nicht üblich. Durch die Probe konnte man sich von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugen.

Wichtige Stationen im Leben von Adam Ries

Der Aufenthalt von Adam Ries in Erfurt war für seine wissenschaftliche Bildung ganz entscheidend. Der Gelehrte Georg Stortz regte ihn zu mathematischen Studien an und legte ihm die Herausgabe seiner Arbeiten über die Rechenkunst und die Algebra nahe. In der Bibliothek seines Förderers las der Rechenmeister die Rechenbücher von Johannes Widmann (s. alpha 4/1989, S. 86 – 87), Jakob Köbel und Heinrich Schreiber (Grammateus) und zwei Quellenschriften Widmanns, den heutigen Handschriftensammelband C 80 Dresdensis mit Algebratexten und ein von Ries nicht genauer bezeichnetes Werk, vielleicht die Regensburger Practica des Friderici Gerhart. Die ursprüngliche Absicht, das schriftliche Rechnen "mit sampt den regeln Algebre" zu behandeln, gab er auf. Ries hatte festgestellt, daß er die wenig erfahrenen Leser seiner Rechenbücher nicht mit den noch ungeübten Denkweisen, Lösungsansätzen und Symbolen der Algebra, der man nach der gesuchten Unbekannten, dem Ding oder der Sache (ital. cosa), den Namen Coß gab, überfordern dürfte. Er schrieb eine getrennte Arbeit zur Algebra, seine Coß, aus der er schon 1523 nach seiner Übersiedlung nach Annaberg unterrichtete und deren erste Fassung er 1524 in Annaberg vollendete (Beispiel S. 14). Da er sie aber niemals zum Druck bringen konnte, blieb ihr eine größere Verbreitung versagt, obwohl der Inhalt wie bei den Rechenbüchern gut erfaßt und dargestellt war. (1992 wird die Coß mit ihren beiden Fassungen erstmals vollständig veröffentlicht.) Die Rechenbücher und die Coß von Ries enthalten Aufgaben, die auf die in Erfurt eingeübten Werke zurückgehen.

Bereits auf früheren Reisen hatte Adam Ries den Silberreichtum des Erzgebirges kennengelernt. Die Betriebsamkeit der Bergstädte und der Bergvergiebung zog ihn in ihren Bann und ließ befriedigende Arbeit für ihn erwarten. In Annaberg, das er wahrscheinlich Anfang 1523 zu seinem Wohnsitz nahm, kam er beim Rat und bei den Bürgern zu Ansehen. 1525 erwarb er das Haus in der Johannisgasse, in dem er seine Rechenschule einrichtete. (Heute befindet sich dort das Adam-Ries-Museum.) Auf Veranlassung des Rates der Stadt schuf Ries

Rechenbuch nach der Länge / auff den Lüncken und Feder.

Darzu fortsetzt und befehliget durch die Proportionen Practica genant. Der gründlichste unterrichte des vnters.

Durch Adam Ries.
im 1550. Jar.



Abb. 3: Titelblatt des Rechenbuches von 1550

eine Reihe von Tabellen zur Brotrechnung, die 1536 zusammen mit anderen Übersichten von Maßen, Gewichten und Preisen in dem "Gerechent Büchlein" erschienen (s. alpha 2/1988, S. 26 – 28).

Bald nach der Ankunft in Annaberg begann Adam Ries eine Tätigkeit im Bergrechnungswesen als Rezeßschreiber des Bergamtes. 1532 wurde er Gegenschreiber, und von 1533 bis 1539 erhielt er zusätzlich für das Bergvergiebung Geyer als Zehntner die oberste Leitung und Aufsicht der Verarbeitung der Silbererze zum Münzsilber, der Zehntabgabe und des Geldverkehrs. Aufgaben zur "Silberrechnung", zur "Schickung des Tigels" und zum "Münzschlag" (s. Aufgabe der Münzberechnung S. 14) hatte der Rechenmeister schon in sein Rechenbuch von 1522 aufgenommen. Nach der Bergordnung seines Landesherren Herzog Georg von 1509 mußte Ries als Bergbeamter die schriftlichen Belege mit den römischen Zahlzeichen anfertigen, während er doch in seinen Rechenbüchern von Anfang an die indisch-arabischen Ziffern verwendete. In der Mitte des 16. Jahrhunderts setzte sich die neue Zahlenschrift im Bergrechnungswesen durch. Das Manuskript von Ries über die "Bergrechnung", das 1554 oder wenig später entstand, enthält sie ebenfalls. 1539 war der Rechenmeister mit dem Titel eines Hofarithmeticus geehrt worden.

Die Herausgabe des dritten Rechenbuches gelang ihm erst 1550 mit dem von Kurfürst Moritz von Sachsen für die Druckkosten geborgenen Geld. Auf dem Titelblatt befinden sich das einzige überlieferte Porträt von Adam Ries und das Wappen mit dem Probenkreuz der Neunerprobe (Abb. 3).

Man sagte über das Buch: "Wer Riesens Exempla solviret (löst), der soll für einen Meister in der Rechenkunst gelten."

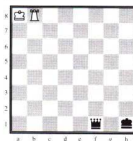
Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Geometrie auf dem Schachbrett



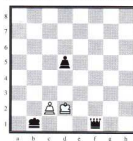
In einem Längstzüger muß Schwarz immer seinen längsten Zug ausführen, d. h., der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Ausgangsfeldes und des Zielfeldes muß so groß wie möglich sein. Bei mehreren gleich langen Zügen steht die Auswahl natürlich frei. Die Länge eines Feldes wird mit 1 definiert. Der kürzere Schrägzug hat die Länge von rund 1,41, resultierend aus $\sqrt{1^2+1^2}$. So ist z. B. der Zug vom Feld f1 nach a6 mit der geometrischen Länge von rund 7,07 ($\sqrt{5^2+5^2}$) länger als der Zug vom Feld a8 nach h8 mit 7. Ein Springerzug wird mit der Länge von rund 2,24 ($\sqrt{1^2+2^2}$) bewertet. Die Pflicht von Schwarz in einer Längstzüger-Aufgabe immer den geometrisch längsten Zug auszuführen, wird besonders im Selbstmatt ausgenutzt. Beim Selbstmatt zieht Weiß an und zwingt Schwarz, Weiß nach n Zügen matt zu setzen. Das Selbstmatt stellt somit eine Umkehrung des normalen Spielgeschehens dar, so wie etwa die Nullspiele im Skat.

In dem Viersteiner (Diagramm 1) von Manfred Zucker („Die Schwalbe“ 1972) verläuft die Lösung wie folgt: 1. Tb7 Da6+ (längerer Zug als ... Df8+), 2. Ta7 Df1, 3. Th7+ Dh3 (länger als ... Kg2), 4. Ta7 Dc8 matt.



Selbstmatt in vier Zügen Längstzüger

Die Aufgabe von J. Sunyer („Chess Amateur“ 1927) im Diagramm 2 sollte zum Lösen probiert werden. Zeichnet man hierbei den Lösungsverlauf auf dem Schachbrettdiagramm nach, dann ergibt sich durch die Züge der schwarzen Dame ein achtzackiger Stern. Weiß beginnt mit 1. c4.



Selbstmatt in acht Zügen Längstzüger

Harald Rüdiger,
Werk für Fernsehelektronik Berlin



Erfurt

Foto: Christine Riesterer



Annaberg-Buchholz

Foto: Hoffmann

Die Adam-Ries-Städte

Viele Schüler wissen aus dem Mathematikunterricht, Adam Ries lebte lange Zeit in Annaberg im Erzgebirge. In welcher Stadt wurde Ries geboren?

Meist nannte uns der Rechenmeister in den Titeln seiner Bücher die Geburtsstadt. So liest man auf dem Rechenbuch von 1525, "Rechnung auff der linihen gemacht durch Adam Riesen vonn Staffelsteyn ...".

Staffelstein

Wer mit Auto oder Eisenbahn von Coburg nach Bamberg fährt, wird auf die oberfränkische Kleinstadt Staffelstein aufmerksam. Einen Aufenthalt in der Stadt mit etwas mehr als 10000 Einwohnern kann man nur empfehlen. Die wunderbaren Häuser rund um das Rathaus (s. Foto unten) versetzen den Betrachter beinahe ins Mittelalter. Links neben dem Eingang befindet sich ein lebensgroßes Sandsteinrelief. Dieses Ries-Denkmal wurde 1959 zu den Feiern anlässlich des 400. Todestag des Rechenmeisters eingeweiht. Im Heimatmuseum gibt es eine

Ausstellung über den berühmtesten Sohn der Stadt. Es ist eine Kuriosität, daß der Annaberger Ries-Forscher Berlet vor etwa 150 Jahren die Staffelsteiner erinnern mußte, Adam Ries sei in ihrer Stadt geboren. Wer den Besuch in der Ries-Geburtsstadt plant, sollte das einzigartige Altstadtfest am letzten Sonntag im Juli und das herrliche Thermalbad einbeziehen. Bereits im frühen Mittelalter führten die Nord-Süd-Handelsstraßen von Nürnberg über Staffelstein nach Erfurt und Leipzig zur Nordsee. Staffelstein muß bereits ein bedeutender Handelsplatz gewesen sein, denn der Ort erhielt 1130 Markt-, Bann- und Zollgerechtigkeit.

Erfurt

Mit den nach Norden ziehenden Händlern könnte Ries nach Erfurt gelangt sein. Es gilt als sicher, daß Ries 1518 in Erfurt wohnte und bald eine Rechenschule eröffnete. Im gleichen Jahr wurde das erste Rechenbuch "Rechnen auf den Liniën" fertig. Das zweite Rechenbuch ließ Ries 1522 mit dem "alten" und neuen Rechnen (Rechnen mit der Feder) in

wohnen. Zu den bekannten Bauwerken gehören Dom und Severikirche auf dem Petersberg, das Andreasviertel und der Fischmarkt mit dem Rathaus sowie ganz in dessen Nähe die Krämerbrücke (s. Foto oben links).

Sie war zur Zeit von Adam Ries der Schnittpunkt der wichtigen Handelsstraßen von Nord nach Süd und von Ost nach West. In diesem Jahr feiert man auch noch die erste urkundliche Erwähnung vor 1250 Jahren und das 600. Gründungsjahr der ehemaligen Universität.

Annaberg

Warum Adam Ries Erfurt verließ, weiß niemand. Vielleicht hat der Universitätsgelehrte Storz, der aus einer bedeutenden Annaberger Familie stammte, seinem Freund Ries geraten, in diese Stadt zu gehen. Nach umfangreichen Silbererzfunden wurde 1496 Annaberg gegründet. Der rasch zunehmende Bergbau ließ den Ort schnell wachsen. Man brauchte Leute, die die Abrechnung der Erzförderung der vielen Bergwerke durchführten. Ries wurde anerkannter Bergbeamter, 1539 ernannte ihn der sächsische Fürst zum "Hofarithmetikus". In der heutigen Kreisstadt Annaberg-Buchholz leben etwa 27000 Einwohner. 1991 erhielt eine Sandsteinbüste mit dem Ries-Porträt wieder einen würdigen Standort, nachdem 1943 die Bronzebüste eingeschmolzen worden war. Die Annenkirche ist noch immer das alles überragende Wahrzeichen, und im Wohnhaus des Rechenmeisters befindet sich das Adam-Ries-Museum (s. Foto oben rechts). Alle drei Städte konnten durch die politischen Veränderungen in Deutschland die Jubiläumsfeierlichkeiten gemeinsam vorbereiten.

Manfred Weidauer, Erfurt



Staffelstein

Foto: Sabine Vogler

Dem „... gemeinen man zu nutze ...“

schrieb Adam Ries seine Rechenbücher im damaligen Deutsch.

Item so das Korn 14 groschen gilt / begibt man ein pfennig brodt wigt 34 lot/wie schwer sol man es bagen so es auff schlecht / vnd 17 groschen gilt / facit 25 lot / machs durch verkerung 17.
17 34 lot 14 Item

Euch zunutze übertrugen OStR Johannes Lehmann und StR Theodor Scholl 18 Aufgaben in unser heutiges Deutsch. Obige Aufgabe findet Ihr (mit veränderten Zahlenwerten) in Aufgabe 9 der Klassenstufe 7 wieder. Viel Spaß beim Lösen!

Klassenstufe 5

1) Ein Vater und sein Sohn wollen den Sankt-Peter-Dom in Rom besuchen. Der Sohn geht jeden Tag 9 Meilen, der Vater jeden Tag nur 6 Meilen. Weil der Vater früher aufgebrochen ist als sein Sohn, hat er ihm gegenüber 100 Meilen Vorsprung. In wieviel Tagen holt der Sohn den Vater ein?

2) Ein Hofmeister verleiht 12 Pferde für die Dauer eines Jahres an einen Wirt mit der Bedingung, daß dieser jedem Pferd pro Woche einen Scheffel Hafer, 40 Bund Heu und 10 Bund Stroh verabreicht. Welche Kosten entstehen dem Wirt, wenn ein Scheffel Hafer 4 Groschen, 40 Bund Heu 3 Groschen und 10 Bund Stroh 2 Groschen kosten? (1 Jahr = 52 Wochen)

3) Jemand beschäftigt 13 Arbeiter 17 Tage lang und zahlt jedem pro Tag 15 Pfennige. Wieviel Lohn muß er insgesamt zahlen?

Klassenstufe 6

4) Ein Vater liegt auf dem Totenbett und hinterläßt seine Frau, einen Sohn und zwei Töchter. Entsprechend seinem letzten Willen soll von dem vorhandenen Vermögen in Höhe von 3600 Gulden der Sohn zweimal soviel wie die Mutter und diese zweimal soviel wie jede Tochter erhalten. Wieviel Gulden erbt jede dieser vier Personen?

5) Jemand beschäftigt einen Arbeiter 30 Tage lang zu folgender Bedingung: Für fleißige Arbeit erhält er täglich 7 Pfennige, für Faulenzen (Feiern) werden ihm täglich 6 Pfennige abgezogen. Nachdem die 30 Tage vergangen waren ist keiner von beiden dem anderen etwas

schuldig geblieben. Wieviel Tage hat der Arbeiter fleißig gearbeitet?

6) Drei Gesellen haben Geld gewonnen. Der erste nimmt davon den siebenten, der zweite den vierten Teil, der dritte die restlichen 17 Gulden. Wieviel Gulden haben sie gewonnen?

Klassenstufe 7

7) Drei Personen betreiben gemeinsam ein finanzielles Geschäft, an dem die erste Person mit 123 Gulden, die zweite mit 536 Gulden und die dritte mit 141 Gulden beteiligt ist. Wieviel Gulden müßte jede dieser drei Personen anteilig vom Gewinn, der 130 Gulden beträgt, erhalten?

8) Ein Vater hat vier Söhne. Er vermacht dem ersten Sohn $\frac{1}{4}$, dem zweiten $\frac{1}{5}$, dem dritten $\frac{1}{6}$ seines Vermögens und dem vierten Sohn die danach noch verbleibenden 92 Gulden. Wie groß war das Vermögen?

9) Bei einem Weizenpreis von 42 Groschen je Scheffel soll eine Doppelsammel 12 Lot wiegen. Wieviel Lot müßte eine Doppelsammel bei einem Weizenpreis von 64 Groschen je Scheffel wiegen? (12 Lot = 48 Quinten)

Klassenstufe 8

10) Landsknechte und Bauern, zusammen 1200 Personen, haben sich geeinigt, gemeinsam einen Beutezug zu machen. Addiert man zum vierten Teil der Anzahl der Bauern den halben Teil der Anzahl der Landsknechte, so erhält man die Anzahl der Landsknechte. Wie viele Bauern bzw. Landsknechte waren es?

11) Insgesamt 21 Personen, Männer und Frauen, haben in einem Wirtshaus eine Zeche von 81 Pfennigen gemacht. Wie viele Männer bzw. Frauen sind es gewesen, wenn jeder Mann 5 Pfennige, jede Frau 3 Pfennige bezahlen soll?

12) Jemand hat Äpfel gekauft. Er begegnet drei Mädchen und gibt dem ersten Mädchen von den Äpfeln die Hälfte und zwei Äpfel dazu. Von den restlichen Äpfeln gibt er dem zweiten Mädchen die Hälfte und zwei dazu. Ebenso gibt er dem dritten Mädchen von den noch verbliebenen Äpfeln die Hälfte und noch zwei dazu. Danach ist ihm genau ein Apfel verblieben. Wie viele Äpfel hatte er gekauft?

Klassenstufe 9

13) 7 Pfund in Padua entsprechen 5 Pfund in Venedig; 10 Pfund in Venedig entsprechen 6 Nürnberger Pfund; 100 Nürnberger Pfund entsprechen 73 Pfund in Köln.

Wieviel Kölner Pfund entsprechen dann 1000 Pfund in Padua?

14) Zerlege die Zahl 32 so in vier Summanden a, b, c, d, daß ein Siebel von b und c, b ein Fünftel von c und d, c die Hälfte von a und d beträgt. Wie lauten diese vier Summanden?

15) Jemand legt sein Geld gewinnbringend an, wodurch es sich verdoppelt. Nachdem er einen Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld wieder an, wodurch es sich abermals verdoppelt. Nachdem er zwei Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld abermals an, wodurch es sich erneut verdoppelt. Nachdem er drei Gulden ausgegeben hat, verbleiben ihm 10 Gulden. Wie viele Gulden hatte er anfangs?

Klassenstufe 10

16) Jemand hat 100 Gulden und will dafür 100 Stück Vieh kaufen, nämlich Ochsen, Schweine, Kälber und Ziegen. Wenn nun ein Ochse 4 Gulden, ein Schwein $\frac{1}{2}$ Gulden, ein Kalb $\frac{1}{2}$ Gulden und eine Ziege $\frac{1}{4}$ Gulden kostet, wie viele dieser Tiere kann er dann für seine 100 Gulden kaufen?

17) Drei Mühlen mahlen gleichzeitig. So der Wind geht, werden in 8 Stunden auf der ersten Mühle 20 Scheffel Getreide, auf der zweiten 17 Scheffel, auf der dritten 15 Scheffel gemahlen.

In wieviel Stunden werden 24 Scheffel Getreide von den drei Windmühlen zusammen gemahlen?

18) Drei Gesellen zählen ihr Geld. Sagt der erste zu den beiden anderen: "Hätte ich noch 7 Gulden dazu, dann hätte ich viermal soviel Gulden wie ihr beide zusammen." Sagt der zweite zu den beiden anderen: "Hätte ich noch 9 Gulden dazu, dann hätte ich fünfmal soviel Gulden wie ihr beide zusammen." Sagt der dritte zu den beiden anderen: "Hätte ich noch 11 Gulden dazu, dann hätte ich sechsmal soviel Gulden wie ihr beide zusammen." Wieviel Gulden hatte jeder von ihnen?



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Das macht nach Adam Ries(e) ...

Adam Ries hob sich von den Rechenmeistern seiner Zeit durch die lebhafteste Sprache, sein Darstellungsvermögen und pädagogisches Geschick hervor. Versetzt Euch doch einmal in seine Zeit und versucht, die beiden folgenden Beispiele nachzuvollziehen.

Münzberechnung

Die Aufgabe und ihre Lösung beinhalten folgendes: 21 Groschen einer Münzlegierung haben den Wert von 1 Gulden (flor.). 6 Groschen wiegen 1 Lot (Silber- bzw. Münzgewicht 1 Mark = 233,856 Gramm = 16 Lot), also haben 96 Groschen das Gewicht von 1 Mark. 1 Mark der Legierung enthält 9 Lot Silber (Feingehalt) und hat einen Wert von 96 Groschen bzw. $\frac{96}{21}$ Gulden.

1 Mark reines Silber (Feinsilber, Feingehalt 16 Lot) hat demnach einen Wert von $\frac{96 \cdot 16}{9}$ Groschen = $170 \frac{2}{3}$ Groschen = 8 Gulden $2 \frac{2}{3}$ Groschen.

Coß

Item Eyner komet Zwertzlichen Jungkfrawenn sprechende, gut grus euch all 84. Antwort eyne vnder in vnser ist nicht souil. So aber vnser noch souil und halb souil wern, so wern vnser vber bemelte Zal sam itzt darunder. Nun frage ich, wiul der Jungkfrawenn gewessen sein. Machs, also setz ir sein gewessen 1 $\frac{1}{2}$ Der ist nun wenig Dann 84, Hirumb Nim 1 $\frac{1}{2}$ von 84 bleiben 84 - 1 $\frac{1}{2}$. Nun spricht die ein Jungkfraw, Wen vnser noch souil und halb souil, sumir 1 $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$ vnd $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ werd 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$. Das ist nun vber 84 souil sam vor darunder. Nim 84 vonn 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ bleiben 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ - 84 ϕ gleich 84 ϕ - 1 $\frac{1}{2}$. Volfure es, komen dir 48, souil seint der Jungfrawen gewesen.

(Nach Berlet, Bruno: Adam Ries. Leipzig und Frankfurt am Main 1892).

ϕ -Coß, Ding, ϕ -Dragma, Zahl.

Nach heutiger Schreibweise ist die Gleichung $2 \frac{1}{2} x - 84 = 84 - x$ zu lösen.

Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Rechenbüchlein Vom Münzschlag.



Item man münzt 21. groschen für ein flor. 16. auff ein loth / vnd heiz die marc fein 9. loth wie hoch weide ein marc fein gerechnet? Facit für 8. fl. 2. groschen / vnd 1. Machs also: Rechen wie viel groschen auff ein marc geben / Sprich / ein loth gibt 6. groschen was geben 16. loth? Facit 96. groschen / die halten 9. loth fein / Sprich verhalten fort / 9. loth fein geben 96. groschen was geben 16. loth fein? Reimspicir vnd dauir / kommen groschen die mach in fl. mit 21. so formpst das facit was oben.

Item man münzt 7. groschen für ein fl. vnd 7. auff 1. loth / heiz ein marc fein 14. loth wie hoch weide ein marc fein auff? Facit für 9. fl. vnd

Aufgabe zur Münzrechnung, Rechenbuch von 1572, Auflage Frankfurt am Main 1574

Adam Ries wettete einst mit einem Landmesser, wer in einer bestimmten Zeit die meisten rechten Winkel zeichne. Sein Gegenüber war hochmütig und trug einen silbernen Zirkel an seinem Hut. Der Rechenmeister hatte aber, während jener die Konstruktion erst richtig begann, schon längst einen Kreis mit einem Durchmesser aufs Papier gebracht und ... Wie fuhr er wohl fort? Welchen Lehrsatz nutzte Adam Ries? So war er der weitaus Schnellere und gab dem eingebildeten Landmesser das Nachsehen.

Dr. Harry Beyrich, Chemnitz

Verflixte regula de tri

Die kennt Ihr nicht?!

Na klar! Oder habt Ihr noch nie vor dem Problem gestanden, wieviel Gramm Bonbons Ihr für Eure 3 DM kaufen könnt, wenn 100 g der begehrten Leckerei 2 DM kosten?

Gerechnet wird, obwohl es hier einfach im Kopf ginge:

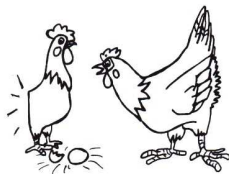
$$\frac{2 \text{ DM}}{100 \text{ g}} = \frac{3 \text{ DM}}{x}, \quad x = \frac{3 \text{ DM} \cdot 100 \text{ g}}{2 \text{ DM}}, \quad x = 150 \text{ g}$$

Dieses so gut deutsch auch als Dreisatzrechnung bezeichnete Rechenverfahren nahm nicht nur in Adam Ries' zweitem Rechenbuch breitesten Raum ein. Im Rechenunterricht vergangener Zeiten galt sie als "... das Hauptziel ..., zugleich Mittel zur Ausbildung und Prüfung der Intelligenz." (E. Fink, 1921).

Na, dann wollen wir mal!

In einem alten Scherzbuch heißt es:

Ein Bauer hatte dem Schulmeister eine hinter die Ohren gegeben. Nun stand der Täter vor dem Gericht. "Weshalb taten sie das?", fragte der Richter. "Er machte meinen Jungen und mich mit einer Aufgabe halb verrückt. Er wollte nämlich wissen, wie viele Eier 9 4/9 Hühner in 12 15/16 Tagen legen, wenn 4 3/4 Hühner in 6 1/9 Tagen 7 8/17 Eier legen." Da murmelte der Richter verständnisvoll: "Dem hätte ich auch eine gelangt!" Und sprach den Bauern frei.



Na, habt Ihr's raus?

Mittels zweifacher Anwendung der Regel detri kommen die 9 4/9 Hühner auf 30 2/3 Eier. Gleich noch so ein starkes Stück aus einem Büchlein von Lietzmann:

"Mein Sohn hatte eine Regel detri-Aufgabe von der Schule heimgebracht: Wenn 10 Maurer bei 10stündiger Arbeitszeit in 150 Tagen ein Haus bauen, wieviele Maurer bauen dasselbe Haus bei 1stündiger Arbeitszeit in 30 Tagen? Mein Sohn setzte sich hin und rechnete nach Vorschritt:

$$\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500.$$

"Vater, ich hab's", rief mein Sohn, "500 Maurer können das Haus in 30 Tagen bauen."

"Hm", sagte ich zweifelnd, "es käme auf einen Versuch an."

Mein Sohn berichtete diesen Zweifel selbstverständlich seinem Lehrer. Und dieser läßt auf gleichem Wege wieder sagen, ich möchte doch gefälligst sagen, was ich an dem Beispiel auszusetzen hätte.

"Nichts, Herr Lehrer", schreibe ich in einem Briefe, "ich wollte nur bemerken, daß alsdann an 15000 Maurer dieses Haus in einem Tage bauen, vorausgesetzt, daß sie sich nicht gegenseitig auf ihre Hühneraugen treten. Und wissen Sie, Herr Lehrer, wenn ein Lehrer einen Jungen 7 Jahre unterrichtet, um einen tüchtigen Menschen aus ihm zu machen,

wieviele Lehrer diese Arbeit in einem Tage vollbringen können? Nun, etwa 2100 Lehrer, Herr Lehrer ..."

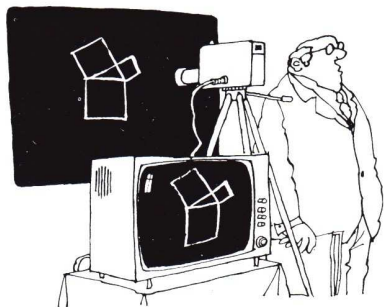
Was geschieht? Der Lehrer will mich wegen Beleidigung verklagen. Und ich kann doch gar nichts dafür, sondern die Regeldetri.

Ihr Fritz Müller"

Und zum Schluß noch eine kleine Übung:
Zwei Schüler gehen von Barby nach Schönebeck in 4 Stunden. Wie lange brauchen 3 Schüler?

mitgeteilt von Dieter Bauke, Gera

In einem Zug



„Hat noch jemand Fragen?“

aus: Pythagoras, Groningen



Sprachecke

cemmf

Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбраны те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Найдите сумму этих чисел.

aus: Quant, Moskau

Mathematics and Poetry are the utterance of the same power of imagination, only that in the one case it is addressed to the head, and in the other to the heart.

Hill

Les cartes en forme de L

A l'aide de 21 cartes en forme de L (figure), pouvez-vous paver les 63 cases non hachurées de cet échiquier 8x8?

s. Abb. 1

Si oui, représentez une solution.

s. Abb. 2



Abb. 1

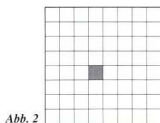


Abb. 2

aus: Tangente, Paris

Alphons logische Abenteuer (10)

"Alphons, ich habe eine sensationelle Entdeckung gemacht!", rief Berti seinem Freund zu, als sie sich auf dem Weg zur Schule trafen. Alphons fragte neugierig, was er denn entdeckt habe. "Stelle Dir vor, entgegen dem Augenschein hat eine Katze nicht vier, sondern mehr Beine. Denn: Eine Katze ist mehr als keine Katze. Keine Katze hat zehn Beine. Also hat eine Katze mehr als zehn Beine – da staunst Du!" Alphons staunte zunächst wirklich. Er blieb sogar stehen. Dann sagte er zu Berti, der auch stehen blieb: "Nun ja, ein Berti ist mehr als kein Berti, vor allem wenn der eine Berti Du bist. Kein Berti ist dumm, das wirst Du unbedingt für wahr halten. Wie aber steht es mit Deiner Schlußfolgerung: Ein Berti ist mehr als dumm?" Wenn es nun einmal kraft Logik so sei, müsse man sich eben auch in ein trauriges Schicksal fügen, moralisierte Berti heroisch. "Da ich mir schon gedacht habe, Du wirst Probleme mit meinem Beweis haben, denn die beiden Prämissen: Eine Katze ist mehr als keine Katze. Keine Katze hat mehr als zehn Beine, sind wahr, habe ich mir noch ein Beispiel überlegt: 3 ist größer als 2, 2 ist die kleinste Primzahl, also ist 3 größer als die kleinste Primzahl." Alphons fand dieses Beispiel nicht überzeugend. "Du hast Dich doch schon selber widerlegt. Ein Beweis setzt nicht nur wahre Prämissen, sondern auch die Anwendung gültiger Schlußregeln voraus. Du schließt mit Hilfe einer Schlußregel, die nicht gültig ist. Das, was Du für eine gültige Schlußregel ansiehst, besagt folgendes: Stehen zwei Gegenstände x und y in dieser Reihenfolge in einer Beziehung und hat y eine Eigenschaft, dann hat auch x diese Eigenschaft. Dein Zahlenbeispiel und Dein Katzenbeweis zeigen doch, daß es so sein kann, aber nicht so sein muß. Eine Schlußregel ist jedoch nur dann gültig, wenn in jedem Fall wahrer Prämissen auch die Konklusion, die Schlußfolgerung, wahr ist. Ich ändere Dein Zahlenbeispiel: 3 ist größer als 2, 2 ist eine natürliche Zahl, also ist 3 größer als eine natürliche Zahl. Da hast Du wieder zwei wahre Prämissen Deiner Schlußregel, aber die Konklusion ist falsch." Berti wandte ein: "Aber bei der Identität gilt doch meine Schlußregel!" Alphons schüttelte mit dem Kopf: "Das hilft Dir auch nicht. Die Identität ist ein Fall, bei der Deine Schlußregel für jede Eigenschaft von y zutrifft, die Größere-Relation ist ein Fall, bei der sie nicht für jede Eigenschaft von y zutrifft. Da ein Gegenbeispiel widerlegt, mußt Du akzeptieren, daß Deine Schlußregel nicht gültig ist. Doch nun Schluß damit, wir müssen uns beeilen, sonst kommen wir zu spät zum Unterricht."

Prof. Dr. Lothar Kreiser
Institut für allgemeine Logik
der Universität Leipzig

Das Geheimnis des Zebrastreifens

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 1/92

Im Heft 6/91 wurde die Europäische Artikel-Nummer (EAN) erläutert, in den Heften 1 und 2/92 schoben wir die ISBN- und Lokomotivnummer ein, nun soll es endlich geknackt werden – das Geheimnis des Strichcodes oberhalb der EAN.



Die Strich-Codierung erfolgt in zwei Blöcken: Der linke Block enthält die Stellen 2 bis 7, der rechte Block die Stellen 8 bis 13 der EAN. (Die erste Stelle wird durch ein besonderes Verfahren "versteckt", das wir weiter unten beschreiben.) Je zwei schmale, nach unten etwas längere Striche dienen links und rechts als Randzeichen (101) sowie als Trennzeichen (01010) in der Mitte. Zum Codieren jeder Ziffer werden drei verschiedene Codetabellen verwendet (siehe **Tabelle 1**). Dabei bedeuten 1 bzw. 0 ein einfacher Strich bzw. eine einfache Lücke, 11 bzw. 00 ein doppelt breiter Strich bzw. eine doppelt breite Lücke usw. Für die rechte Hälfte der EAN wird ausschließlich der Code C verwendet. Bei der linken Hälfte geht es nicht ganz so einfach, denn dort wird zusätzlich die erste EAN-Ziffer "versteckt": In Abhängigkeit von der ersten Ziffer der EAN wird im linken Block (Ziffer 2 bis 7 der EAN) nach einem bestimmten Muster zw-

Tabelle 2

1. Ziffer	Code-Muster für die linke Seite
0	AAAAAA
1	AABABB
2	ABBAB
3	ABBBBA
4	ABAABB
5	ABBAAB
6	ABBBAA
7	ABABAB
8	ABABBA
9	ABABAA

schen den beiden Codes A und B gewechselt (siehe **Tabelle 2**).

Die Streifenfolgen von A und B sind alle von einander verschieden – deshalb läßt sich umgekehrt aus den Streifen auch das verwendete Code-Muster und damit nach **Tabelle 2** die erste Ziffer der EAN ermitteln.

Die umständliche Codierung der ersten EAN-Ziffer war erforderlich, damit EAN-Strichcode-Leser auch die in den USA verwendeten UPC-Strichcodes verarbeiten können: Diese erste Ziffer ist nämlich dem UPC-System hinzugefügt worden. Die (nur 12stelligen) UPC-Nummern verwenden in der linken Hälfte ausschließlich den Code A und erhalten daher im EAN-System automatisch als (zusätzliche) erste Ziffer die Null.

Der **Tabelle 1** können wir entnehmen:

- Jede Ziffer wird durch sieben Dualziffern so codiert, daß zwei dunkle und zwei helle Streifen unterschiedlicher Breite entstehen.
- Der Code A ergibt sich aus Code C, indem man jeweils 0 durch 1 ersetzt und umgekehrt.
- Der Code B entsteht aus Code C, indem man die Reihenfolge der 0-1-Ziffern genau umkehrt.
- Dabei beginnen Code A und Code B mit einem hellen Streifen (0) und enden mit einem dunklen Streifen (1), bei Code C ist es genau umgekehrt.

Die Codes sind bewußt so gewählt, daß der Computer auch erkennen kann, ob die Streifen mit dem Lesegerät von rechts nach links oder umgekehrt gelesen werden – unterschiedliche Leserichtungen können also nicht zu Verwechslungen führen!

Nach Wilfried Herget: "Prüfziffern und Strichcode – ComputerMathematik" auch ohne Computer", gekürzt aus "mathematik lehren" Heft 33/1989

Tabelle 1: Codierung der Ziffern

Ziffer	Code A	Code B	Code C
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

5/8

Vom Endergebnis 27 ausgehend sind rückwärtsschreitend jeweils die Umkehroperationen anzuwenden. Mit Hilfe von Notizen rechnete Hans wie folgt: $27+9=36$; $36-2=72$; $72+8=80$; $80+4=20$; $20-5=15$; $15-2=30$; $30-4=26$; $26-2=13$. Martin hatte die Zahl 13 gedachtet.

5/9

$126548+126548+126548=379644$
 $236548+236548+236548=709644$

5/10

Es sind nur die drei Zahlen 31, 62 und 93 zu untersuchen. Wegen $31-13=18$, $62-26=36$, $93-39=54$ existiert genau eine solche Zahl, nämlich die 62.

5/11

Wäre das Dreieck gleichseitig, die Basis also um 2 cm länger, dann würde sein Umfang $28\text{cm}+2\text{cm}=30\text{cm}$, jede Seite also $30\text{cm}:3=10\text{cm}$ lang sein. Deshalb ist jeder der beiden Schenkel 10cm, die Basis 8cm lang.

5/12

Es seien h, k, l, p bzw. r die Körpergrößen von Herbert, Klaus, Lutz, Paul bzw. Richard; dann gilt $h > r$, $r > k$, $l > r$, $k > p$. Wegen (5) folgt daraus $h > l > r > k > p$. Die fünf Schüler stehen, mit dem größten beginnend, in folgender Reihenfolge: Herbert, Lutz, Richard, Klaus, Paul.

5/13

$1+2+3+\dots+24+25$
 $= (1+24)+(2+23)+\dots+(12+13)+25$
 $= 13 \cdot 25 = 325$ und $325:5=65$. In jeder Zeile, Spalte und in den beiden Diagonalen muß also die Summe der fünf Zahlen 65 betragen. Deshalb sind folgende Zahlen zu vertauschen: 6 mit 7, 10 mit 11, 15 mit 20.

5/14

Aus (3) folgt: Claus hat nicht den Familiennamen König.
 Aus (4) folgt: Claudia hat nicht den Familiennamen Spitzbart.
 Deshalb heißt sie Claudia Rosenhain.
 Aus (1) folgt: Franziska hat den Familiennamen König.
 Deshalb hat Katharina den Familiennamen Spitzbart.

6/8

Das k.g.V. von 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Von den Zahlen 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481 ist nur die Zahl 301 ein Vielfaches von 7; denn es gilt $43 \cdot 7 = 301$.

6/9

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse zugleich Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

Deshalb gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$; also hat die Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge 2 d. Aus der Dreiecksungleichung folgt $2 \cdot d < a+b$, also auch

$$d < \frac{1}{2}(a+b).$$

6/10

Mögliche Lösungen sind

- (1+2+3+4):5=2,
- 12:3+4=5=3,
- 12:3+4=5=4,
- 1+2+3+4+5=5,
- 12:3+4=5=6
- 1+2+3+4+5=7,
- 12:3+4=5=8,
- 1+2+3+4+5=9,
- 12:3+4=5=10.

6/11

Wegen $4^3 = 64 < 100$ und $10^3 = 1000 > 999$ gilt für die Quersumme

$q = a + b + c$ dieser Zahlen $5 \leq q \leq 9$. Wir erhalten somit

$$5^3 = 125 \text{ (entfällt, da } q=8),$$

$$6^3 = 216 \text{ (entfällt, da } q=9),$$

$$7^3 = 343 \text{ (entfällt, da } q=10),$$

$$8^3 = 512 \text{ mit } q=8,$$

$$9^3 = 729 \text{ (entfällt, da } q=18).$$

Es existiert genau eine solche Zahl, nämlich $512 = (5+1+2)^3 = 8^3$.

6/12

Es gilt $73 \cdot 137 = 10001$. Es sei a das vierstellige Geburtsjahr; dann lautet die achtstellige Zahl $10000 + a + 1 = 10001 + a = 73 \cdot 137 + a$. Nach den beiden Divisionen erhält man also stets wieder das Geburtsjahr a.

6/13

Aus (4) und (5) folgt: Das rote Auto wurde in Rostock, das gelbe in Schwerin gekauft.

Aus (3) folgt weiter: Der Skoda hat eine rote Farbe.

Aus (1) folgt weiter: Herr Arndt hat ein gelbes Auto in Schwerin gekauft.

Aus (2) weiter: Herr Conrad hat einen blauen Wartburg in Neubrandenburg gekauft. Deshalb besitzt Herr Arndt einen Trabant, Herr Brandt einen Skoda.

Name	Autotyp	Farbe	Einkaufsort
Arndt	Trabant	gelb	Schwerin
Brandt	Skoda	rot	Rostock
Conrad	Wartburg	blau	Neubrandenburg

6/14

Das Volumen der Gefäße beträgt 100 cm^3 . Die Dichte von Wasser beträgt $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$, die von Quecksilber $\rho_2 = 13,6 \text{ g/cm}^3$. Unter Berücksichtigung von $m = \rho \cdot V$ erhält man die Masse des Wassers $m_1 = 100 \text{ g}$ und die Masse des Quecksilbers $m_2 = 1360 \text{ g}$. Die Masse des Gefäßes beträgt $m_3 = 50 \text{ g}$.

a) Es sind $m_1 + m_2 + m_3 = 1560 \text{ g}$ notwendig, um Gleichgewicht herzustellen.

b) Auf die Seite des mit Wasser gefüllten Gefäßes sind $m_2 + m_3 - (m_1 + m_3) = m_2 - m_1$, d. h. 1260 g aufzulegen, um Gleichgewicht herzustellen.

7/8

Aus (1) folgt: Klaus heißt nicht Müller.

Aus (2) folgt: Weder Erwin noch Fritz heißen Müller. Deshalb heißt ein Schüler Hans Müller.

Aus (3) folgt: Fritz heißt nicht Meier.

Aus (2) folgt: Fritz heißt nicht Schmidt.

Deshalb heißt er Fritz Schulz.

Aus (2) folgt: Erwin heißt nicht Schmidt.

Deshalb heißt er Erwin Meier. Somit heißt der vierte Schüler Klaus Schmidt.

7/9

Die zu ermittelnden Primzahlen lassen sich darstellen durch $p = 100a + 10b + a = 101a + 10b$. Für deren Quersumme gilt $q = a + b + a = 2a + b = 19$, d. h. $b = 19 - 2a$. Daraus folgt durch Einsetzen $p = 101a + 10(19 - 2a)$, also $p = 81a + 190$. Ist a eine gerade Zahl, so sind auch $81a + 190$ gerade Zahlen und somit p keine Primzahlen. Deshalb kann a gleich 1, 3, 5, 7 oder 9 sein.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

(1) Es sei $a = 1$, also $p = 271$. Wegen $q = 10 \neq 19$ entfällt diese Möglichkeit.

(2) Es sei $a = 3$, also $p = 433$. Wegen $q = 10 \neq 19$ entfällt diese Möglichkeit.

(3) Es sei $a = 5$; dann endet die dreistellige Zahl auf 5, ist also durch 5 teilbar und deshalb keine Primzahl.

(4) Es sei $a = 7$, also $p = 757$ und $q = 19$. Dies stellt eine Lösung dar.

(5) Es sei $a = 9$, also $p = 919$ und $q = 19$. Dies ist eine weitere Lösung.

Es gibt genau zwei derartige Primzahlen; sie lauten 757 und 919.

7/10

Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 100a + 10b + c$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$. Nun gilt $100a + 10b + c + 594 = 100c + 10b + a$, $99c - 99a = 594$,

$$c - a = 6, \text{ also } c = a + 6.$$

Wegen der einschränkenden Bedingungen kann $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, also $c = 7$, $c = 8$, $c = 9$ gelten. Die Quersumme der gesuchten Zahlen kann nur 9 oder 18 sein. Daraus folgt weiter $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 6$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten 117, 288 und 369.

7/11

Nach dem Satz des Thales gilt $\angle ABC = 90^\circ$ und $\angle ABC = 90^\circ$; daraus folgt $\angle CBD = 180^\circ$, das heißt, die Punkte C, B und D liegen auf einer Geraden.

7/12

$$\frac{171717}{191919} = \frac{10000 \cdot 17 + 100 \cdot 17 + 1 \cdot 17}{10000 \cdot 19 + 100 \cdot 19 + 1 \cdot 19} = \frac{10101 \cdot 17}{10101 \cdot 19} = \frac{17}{19}$$

7/13

In beiden Fällen treffen sie sich in der Mitte.

7/14

Auf dem Mond beträgt die Masse des Sackes Kartoffeln 50,1 kg, die Gewichtskraft 81,5 N.

8/8

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{BF} : \overline{BA} = \overline{BD} : \overline{BC} = 1 : 2.$$

Nach einem bekannten Satz ("Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel zur dritten Seite, und der von ihr erzeugte Abschnitt ist halb so groß wie die dritte Seite") ist dann $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$, und es ist $\overline{DF} : \overline{AC} = 1 : 2$. Es folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF.

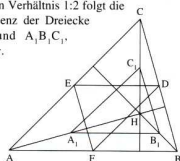
Analog gilt auch

$$\overline{HA_1} : \overline{HA} = \overline{HB_1} : \overline{HB} = \overline{HC_1} : \overline{HC} = 1 : 2.$$

Aus $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ und $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ und dem gleichen Verhältnis 1:2 folgt die Kongruenz der Dreiecke

$$\triangle EFD \text{ und } \triangle A_1B_1C_1,$$

w. z. b. w.



8/9

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 2, 3 und 5 ist 30. Somit gilt $320 < 30k + 1 < 500$, wobei k eine natürliche Zahl ist.

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt weiter} \quad & 319 < 30k < 499, \\ & 330 < 30k \leq 480, \\ & 11 \leq k \leq 16. \end{aligned}$$

Von den Zahlen 331, 361, 391, 421, 451, 481 sind nur die Zahlen 331 und 421 Primzahlen; denn $361 = 19 \cdot 19$, $391 = 17 \cdot 23$, $451 = 11 \cdot 41$, $481 = 13 \cdot 37$.

8/10

Mit Hilfe der Flächeninhaltsformel $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ ermitteln wir c. Es ist $48 \text{ cm}^2 = \frac{c \cdot 6 \text{ cm}}{2}$

damit $c = 16 \text{ cm}$. Nun wenden wir den Satz des Pythagoras an und erhalten $a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$;

$a^2 = 36 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2$; $a^2 = 100 \text{ cm}^2$; $a = 10 \text{ cm}$. (a sei die Bezeichnung für die Länge der Seite $\overline{BC}$). In die Formel für den Umfang des Dreiecks setzen wir nun die entsprechenden Zahlen ein und erhalten $u = 16 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 10 \text{ cm}$; $u = 36 \text{ cm}$. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 36 cm.

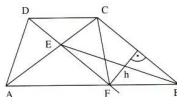
8/11

Es seien $a-1$, a , $a+1$ ($a \geq 1$) drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, ihre Summe beträgt 3a, ihr Produkt $a(a-1)$. Nun soll gelten $a(a-1) = 24a$, wegen $a \neq 0$ also $a^2 - 1 = 24$, $a^2 = 25$, $a = 5$. Die Aussage trifft für die Zahlen 4, 5 und 6 zu. Es gilt $4 \cdot 5 \cdot 6 = 8(4+5+6)$.

8/12

Wir können $\overline{CB}$ als gemeinsame Grundseite der Dreiecke CEB und CFB auffassen. Das Lot von F auf die Seite $\overline{CB}$ ist Höhe beider Dreiecke ($\overline{EF} \perp \overline{CB}$).

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächengleich, w.z.b.w.



8/13 Die Umfangsgeschwindigkeit des Rades beträgt $3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (unabhängig vom Raddurchmesser). Es muß eine Leistung von $3,6\text{ W}$ aufgebracht werden. Aus $P=F\cdot v$ folgt $F=P\cdot v^{-1}$.

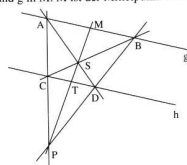
$$F = \frac{3,6\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} \quad F = 1,2\text{ N}.$$

8/14

Beim Eintauchen steht die Luft in der Flasche (Volumen V_1) unter dem Luftdruck ($p_1 = 1000\text{ hPa}$). In 30 m Tiefe wirkt zusätzlich der Schweredruck des Wassers (3000 hPa), d. h. ein Gesamtdruck $p_2 = 4000\text{ hPa}$. Nach dem Gesetz $p_1\cdot V_1 = p_2\cdot V_2$ ergibt sich, daß die Luft auf $1/4$ des ursprünglichen Volumens V_1 zusammengedrückt wird.

9/8

Wir legen einen beliebigen Punkt P fest, der nicht zwischen g und h liegt und verbinden P mit A und B . Die Verbindungsgeraden schneiden h in C und D . Nun verbinden wir C mit B und D mit A , so daß der Schnittpunkt S entsteht. Die Gerade durch P und S schneidet h in T und g in M . M ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.



Beweis der Konstruktion:

- (1) Die Dreiecke CTS und SBM sind ähnlich; denn
 $\angle SCT \cong \angle SBM$ und $\angle TSC \cong \angle MSB$
 (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen bzw. Scheitelwinkel)

- (2) Die Dreiecke TDS und SMA sind ähnlich; denn
 $\angle TDS \cong \angle MAS$ und $\angle DST \cong \angle ASM$
 (Wechselw., a.g.P. bzw. Scheitelwinkel)

Da in ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten gleich sind, gilt

$$(3) \overline{TC}:\overline{TS} = \overline{MB}:\overline{MS}, \text{ u. } (4) \overline{TD}:\overline{TS} = \overline{MA}:\overline{MS}.$$

$$(3) \overline{TC} = \frac{\overline{MB} \cdot \overline{TS}}{\overline{MS}} \quad (4) \overline{TD} = \frac{\overline{TS} \cdot \overline{MA}}{\overline{MS}}$$

Außerdem gilt nach dem Strahlensatz

$$(5) \overline{TC}:\overline{MA} = \overline{TD}:\overline{MB}.$$

Setzt man nun (3) und (4) in (5) ein, so erhält man

$$(6) \frac{\overline{MB} \cdot \overline{TS} \cdot \overline{MB}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{TS} \cdot \overline{MA}}{\overline{MS}}$$

Es folgt

$$(7) \overline{MB} = \overline{MA}$$

Das bedeutet: M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$, w.z.b.w.

9/9

Wir lösen die Gleichung (2) nach y^2 auf und erhalten

$$y^2 = 481 - x^2. \text{ Wir quadrieren die Gleichung (1) und erhalten } y^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Daraus folgt nun durch Gleichsetzen

$$481 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \text{ bzw.}$$

$$0 = 2x^2 + 2x - 480,$$

$$0 = x^2 + x - 240.$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir nun auf und erhalten

$$x_1 = 15 \text{ und } y_1 = 16 \text{ bzw.}$$

$$x_2 = -16 \text{ und } y_2 = -15.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist demnach

$$L = \{(15; 16); (-16; -15)\}.$$

Die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösungsmenge.

9/10

Wir führen die folgenden Bezeichnungen für die Streckenlängen ein:

Strecke	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{EB}$	$\overline{EC}$	$\overline{DC}$	$\overline{DA}$	$\overline{DE}$
Länge	a	b	c	d	a	b	e

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck EBC : $b^2 = c^2 + d^2$, $b^2 = 2^2 + 5^2$, $b^2 = 29$, $b = 5,39\text{ cm}$.

Im rechtwinkligen Dreieck DBC gilt nach dem Höhensatz:

$$d^2 = e \cdot c, \quad e = \frac{d^2}{c} = \frac{5^2}{2}, \quad e = 12,5\text{ cm}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck DEC gilt nach dem Satz des Pythagoras: $a^2 = e^2 + d^2$, $a^2 = 12,5^2 + 5^2$, $a^2 = 181,25$, $a = 13,46\text{ cm}$.

Die Rechteckseiten sind etwa $13,46\text{ cm}$ bzw. $5,39\text{ cm}$ lang.

9/11

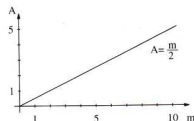
Die Funktionsgleichung $y = mx$ mit den genannten Bedingungen bezeichnet eine unendliche Schar aller derjenigen Geraden im rechtwinkligen Koordinatensystem, die durch den Ursprung gehen ($n=0$) und im 1. und 3. Quadranten liegen ($m \geq 0$; $x \geq 0$!).

In einem rechtwinkligen Steigungsdreieck ist eine Kathete gleich der Einheit 1, die andere ist

gleich m (m ist der Tangens des Winkels, den die Gerade – das Bild der Funktion – mit der x -Achse bildet).

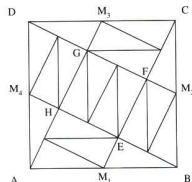
Der Flächeninhalt eines solchen Steigungsdreiecks ist $A = \frac{1}{2} \cdot m$. Die Funktion heißt $A = \frac{m}{2}$.

Graphische Darstellung:



9/12

Die Abbildung zeigt eine mögliche Zerlegung der Fläche des Quadrats $ABCD$ in 20 kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die Kongruenz der Dreiecke, die sich leicht durch Verschiebung und über die Nutzung von Diagonalen in Rechtecken und Parallelogrammen erbringen läßt, überlassen wir dem Leser. Es verhalten sich die Flächen von $ABCD$ zu $EFGH$ wie 5:1.



9/13

Dieser Flaschenzug hat 6 tragende Seile, d. h. die Last darf maximal 60 N betragen.

9/14

Spannungsmesser: Es muß ein Vorwiderstand R_v eingeschaltet werden. Nach dem Ohmschen Gesetz zeigt das Meßwerk Vollausschlag bei einer Spannung von $0,002A \cdot 50\ \Omega = 0,1\text{ V}$. Am Vorwiderstand müssen demzufolge $9,9\text{ V}$ abfallen. Da sich die Spannungen wie die Widerstände verhalten, ergibt sich

$$R_v = \frac{9,9\text{ V} \cdot 50\ \Omega}{0,1\text{ V}} \quad R_v = 4950\ \Omega.$$

Strommesser: Es ist ein Nebenwiderstand (Shunt) R_p erforderlich. Durch den Shunt müssen 998 mA fließen. Da sich bei parallelgeschalteten Widerständen die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten,

$$\text{ergibt sich } R_p = \frac{50\ \Omega \cdot 2\text{ mA}}{998\text{ mA}} \quad R_p = 0,1\ \Omega.$$

10/8

Weil ABCD ein Drachenviereck ist, entstehen durch die Diagonalen vier rechtwinklige Dreiecke.

Nun gilt im Dreieck BEA $\alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ$ bzw. $\beta_1 = 90^\circ - \alpha_2$.

Es ist also $\sin \beta_1 = \cos \alpha_2$. Es ist demnach $\sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \beta_1 = \sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = 1$.

Analog gelten im Dreieck EBC:

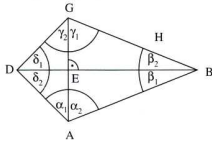
$$\sin^2 \beta_2 + \sin^2 \gamma_1 = 1,$$

im Dreieck CDE: $\sin^2 \gamma_2 + \sin^2 \delta_2 = 1$ und

im Dreieck DAE: $\sin^2 \delta_1 + \sin^2 \alpha_1 = 1$.

Es folgt die Behauptung

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2 + \sin^2 \delta_1 + \sin^2 \delta_2 = 4, \text{ w.z.b.w.}$$



10/9

Man kann die Anzahl durch systematisches Erfassen aller Fälle ermitteln:

- Es sind also 20 Dreiecke
- 15 Sehnenvierecke
- 6 Fünfecke

Bemerkung:

Die Aufgabe ist ein Problem aus der Kombinatorik, und zwar ist es jedesmal ein Auswahlprogramm, bei dem es auf die Reihenfolge der Punkte nicht ankommt (ABC und ACB ist ein und dasselbe Dreieck). Die Aufgaben lassen sich auch wie folgt lösen:

- $\binom{6}{3}$ (lies: 6 über 3) = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$,
- $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$,
- $\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$.

10/10

(1) p_1 läßt bei Division durch 3 stets den Rest 2 (Rest 1 ist nicht möglich, da dann p_1 durch 3 teilbar und damit keine Primzahl wäre. Es lassen sich p_1 und p_2 wie folgt darstellen:

$$p_1 = 3k + 2 \quad (k \geq 1; k \in \mathbb{N})$$

$$p_2 = 3k + 4 \quad (k \geq 1; k \in \mathbb{N})$$

Es ist dann $p_1 + p_2 = 6k + 6$.

Es gilt stets $6|6k+6$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$(2) \quad p_2 - p_1^2 = (3k+4)^2 - (3k+2)^2 = 9k^2 + 24k + 16 - 9k^2 - 12k - 4 = 12k + 12.$$

Es gilt stets $12|12k+12$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$(3) \quad p_1^4 + p_2^3 = 54k^4 + 162k^3 + 180k^2 + 72 = 18(3k^4 + 9k^3 + 10k^2 + 4)$$

Wenn ein Faktor eines Produktes aus natürlichen Zahlen durch 18 teilbar ist, so ist das Produkt durch 18 teilbar.

Nun folgt $18|p_1^4 + p_2^3$.

Damit sind alle drei Aussagen bewiesen.

10/11

Für den Oberflächeninhalt des Quaders gilt $A_0 = 2(ab+ac+bc)$, $A_0 = 2[ab+c(a+b)]$.

$$\frac{A_0}{2} = ab + c(a+b), \quad c = \frac{\frac{A_0}{2} - ab}{a+b}.$$

$$c = \frac{\frac{500\text{cm}^2}{2} - 5\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{5\text{cm} + 10\text{cm}}; \quad c = 15\text{cm}.$$

Die Länge der Raumdiagonalen e berechnet man nach der Formel

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{und erhält} \\ e = \sqrt{25\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2 + 225\text{cm}^2}, \\ e = \sqrt{350\text{cm}^2}, \quad e = 18,7\text{cm}.$$

Die Raumdiagonale des Quaders ist etwa 18,7 cm lang.

10/12

a) Im rechtwinkligen Dreieck ACM gilt

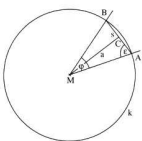
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r}, \quad s = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}, \quad s = 6,35\text{ cm}.$$

Die Sehne ist etwa 6,35 cm lang.

b) Im rechtwinkligen Dreieck ACM gilt

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad a = r \cdot \sin \varepsilon, \quad a = 9,5\text{ cm}$$

Der Abstand dieser Sehne vom Kreismittelpunkt beträgt etwa 9,5 cm.



10/13

Im höchsten Punkt der Bahn müssen Gewichtskraft und Radialkraft gleich groß sein.

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \quad \text{d.h.} \quad v = \sqrt{g \cdot r}$$

Mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und $r = 1,0 \text{ m}$ ergibt sich $v = 3,1 \text{ m/s}$.

10/14

$$\text{Aus } v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \text{ erhält man } r = \frac{v \cdot T}{2\pi}.$$

$v = 250 \text{ km/h} = 69,4 \text{ m/s}$ und $T = 3 \text{ min}$ ergibt sich $r = 1,989 \text{ km}$, d. h. der Durchmesser beträgt 4 km.

E/8

$$1. \quad 8 \text{ Buchstaben: } \frac{8!}{2!} = 20 \cdot 160$$

2. Die Werte für 7 bis 2 Buchstaben ergeben sich entsprechend E12 zu 20 160 (7), 10 440 (6), 3 720 (5), 840 (4), 228 (3) und 43 (2). Damit ergeben sich insgesamt 55 771 Möglichkeiten.

E/9

Permutation ohne Wiederholung von 6 Elementen: $6! = 720$ verschiedene Buchstabenfolgen.

E/10

Permutationen ohne Wiederholung von 9 Elementen, ein Element kommt zweimal vor:

$$\frac{9!}{2!} = 181\,440 \text{ verschiedene Buchstabenfolgen.}$$

E/11

Variationen von 6 Elementen zur 5. Klasse:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{1!} = 720$$

E/12

Folgen mit „NN“ $\binom{5}{2} = 10$, Anzahl der Permutationen: $10 \cdot \frac{4!}{2!} = 120$

Folgen ohne „NN“ $\frac{6}{4} = 15$, Anzahl der Permutationen: $15 \cdot 4! = 360$

Insgesamt: 480 verschiedene Folgen mit je 4 Buchstaben.

E/13

Die Kugel führt zwei Bewegungen aus: Eine gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung und eine gleichförmige in waagerechter Richtung. Die Fallzeit t ergibt sich aus der Fallhöhe: $t = \sqrt{2h/g}$. Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = s/t$. $t = 1\text{ s}$, $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

E/14

Die Lampe hat einen Widerstand von $R_L = 12 \Omega$. Es fließt bei einer Spannung U von 6 V ein Strom von 0,5 A.

- Der Schleifkontakt steht in der Mitte: $x = 0,5$.
- Der Gesamtwiderstand R_{ges} setzt sich aus einer Parallelschaltung (Lampenwiderstand (R_L) und Teilwiderstand ($R_x = x \cdot R$)) und dem anderen Teilwiderstand ($(1-x) \cdot R$) zusammen. $R_{\text{ges}} = 18 \Omega$. Die Spannung U sinkt: $U' = 4 \text{ V}$.
- Es muß gelten: $(1-x) \cdot R = x \cdot R \parallel R_L$

$$\frac{x \cdot R \cdot R_L}{x \cdot R + R_L} = (1-x) \cdot R; \quad x = 0,707$$

Der Kontakt steht an der Stelle $x = 0,707$

$$\text{d. Fall a: } I_{\text{ges}} = 12 \text{ V} / 24 \Omega \quad I_{\text{ges}} = 0,5 \text{ A}$$

$$\text{b: } I_{\text{ges}} = 12 \text{ V} / 18 \Omega \quad I_{\text{ges}} = 0,67 \text{ A}$$

$$\text{c: } I_{\text{ges}} = 12 \text{ V} / (20,707^2 \cdot 24 \Omega) \quad I_{\text{ges}} = 0,85 \text{ A}$$

e. Nach Spannungsteilerregel:

$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{x \cdot R \cdot R_L}{x \cdot R + R_L}}{(1-x) \cdot R + \frac{x \cdot R \cdot R_L}{x \cdot R + R_L}}$$

Durch Umformen:

$$U' = U \cdot \frac{x \cdot R_L}{x \cdot R + R_L - x^2 \cdot R}$$

Herr Paddel und das Dualsystem

Diese Geschichte soll Euch etwas über Zahlensysteme verraten. Versucht, alle Aufgaben in der angegebenen Reihenfolge zu lösen. Bei einigen ist das leicht, bei anderen werdet Ihr etwas hartnäckiger sein müssen. Wenn Ihr verstehen wollt, wie Computer Daten verarbeiten, dann müßt Ihr neben dem Euch bekannten Zehnersystem auch andere Zahlensysteme kennen.

Von Einern, Zweiern, Vierern und Achtern

Der Ruderclub von 1893 bietet an jedem Dienstagmittag für Schüler der Albert-Schweitzer-Schule eine Arbeitsgemeinschaft im Rudern an. Zu dieser Veranstaltung darf kommen, wer Lust hat und rudern kann. Mal sind 3 Schüler da, ein anderes Mal wollen 14 Schüler rudern. Herr Paddel betreut die Boote im Vereinshaus. Er sagt immer: "In einen Achter gehören acht Ruderer, sonst wird das Boot nicht ausgeliehen." Und so handelt er nicht nur beim Achter, sondern bei allen Booten. Er verteilt die Boote nach ganz bestimmten Regeln, von den Schülern liebevoll "Paddel-Regeln" genannt. An seinem Arbeitsplatz im Vereinshaus kann jeder folgendes lesen:

Bootsausleihe der Ruder AG der Albert-Schweitzer-Schule

Regel 1: In jedem Boot, das an die Ruder-AG ausgeliehen wird, muß jeder Platz besetzt werden.

Regel 2: Von jeder Bootsgattung erhält die Boots-AG nur ein einziges Boot.

Regel 3: Boote mit Steuermann werden nicht ausgegeben.

Die Schüler freuen sich auf den Dienstagmittag. Weil sie vorher nie wissen, wieviel rudern wollen, und daher auch nicht, welche Boote ausgeliehen werden, gibt es immer Abwechslung. Und das macht Spaß. Der Ruder-AG stehen ein Einer (E), ein Zweier (Z), ein Vierer (V) und ein Achter (A) zur Verfügung.

Aufgabe 1: Herr Paddel notiert folgende Teilnehmerzahlen (Z):

Tag 7.5. 14.5. 21.5. 28.5. 4.6. 11.6. 18.6.
Z 12 3 10 9 7 11 15

Verteile sie nach den "Paddel-Regeln" auf die Boote!

Aufgabe 2: Wie kann man möglichst schnell festlegen, welche Boote nach den "Paddel-Regeln" besetzt werden? Versuche für die Schülerzahlen von Aufgabe 1 und dann allgemein ein Verfahren zu entwickeln!

Aufgabe 3: Wie viele Schüler können am Dienstagmittag höchstens zur Ruder-AG kommen, wenn alle einen Platz in einem der Boote bekommen sollen?

Ist bei allen kleineren Anzahlen eine Verteilung der Boote nach den "Paddel-Regeln" möglich?

Aufgabe 4: Herr Paddel notiert, welche Boote ausgeliehen sind:

Datum 3.9. 10.9. 17.9. 24.9. 1.10.
Boote A,V,E V,E V,Z A,V,Z A,V,Z,E
Wie viele Schüler rudern an den einzelnen Tagen?

Aufgabe 5: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei (drei) Boote auszuleihen?

Aufgabe 6: Die Schüler wollen alle Kombinationen, Boote nach den "Paddel-Regeln" auszuleihen, ausprobieren. Stelle in einer Tabelle alle Kombinationen zusammen und schreibe zu jeder Kombination, wie viele Schüler rudern. Wie viele Wochen dauert es, wenn sie alle Kombinationen nacheinander ausführen sollen?

Aufgabe 7: Der Vierer wird repariert und kann wochenlang nicht benutzt werden. Bei welchen Schülerzahlen ist nun eine Verteilung der Boote nach den "Paddel-Regeln" nicht mehr möglich?

Der Leiter der Albert-Schweitzer-Schule, Herr Schulmeister, kommt am Bootshaus vorbei. Er möchte wissen, wie viele Schüler heute an der Ruder-AG teilnehmen. Auf dem See kann er die Ruderboote nicht entdecken. "Kein Problem, es sind 10 Schüler", sagt Herr Paddel und zeigt auf eine Tafel. Dort hat er mit Kreide in einer Tabelle notiert, welche Boote ausgeliehen sind. Heute kann man folgendes auf der Tafel lesen:

Achter	Vierer	Zweier	Einer
1	0	1	0

Du hast sicher entdeckt, daß Herr Paddel eine besondere Art hat, den Bootsverleih zu notieren.

Aufgabe 8: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 4 solche Tabellen aus!

Aufgabe 9: Formuliere eine Regel, wie aus dem Tafelanschrieb die Anzahl der rudern- den Schüler berechnet werden kann!

Aufgabe 10: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 1 solche Tabellen aus und mache die Probe!

Herr Schulmeister möchte von jeder Bootsgattung ein zweites Boot anschaffen, damit mehr Schüler gleichzeitig rudern können. Herr Paddel ist damit nicht einverstanden. "Dann gibt es Streit, weil nicht immer eindeutig ist, welche Boote ausgeliehen werden", sagt er. Ihm kommt es vor allem darauf an, daß die Schüler immer nur auf eine Art auf die Boote verteilt werden können, die Verteilung also eindeutig ist.

Aufgabe 11: Es sollen zwei Vierer (Zweier) ausgeliehen werden können. Bei welchen Schülerzahlen kann man die Schüler auf verschiedene Weisen auf die Boote verteilen? Gib mehrere Beispiele an!

Aufgabe 12: Für Herrn Schulmeister ist es wichtig, schnell ausrechnen zu können, wie viele Schüler rudern, wenn man die ausgeliehenen Boote kennt.

Ist das noch möglich, wenn von jeder Bootsgattung zwei Boote vorhanden sind?

Aufgabe 13: Formuliere mit Deinen Worten, die Vorteile
a. in den "Paddel-Regeln",
b. im Vorschlag von Herrn Schulmeister.
Gibt es auch Nachteile?

Herr Paddel lacht: "Schaffen wir doch einen Sechzehner an! Es macht Spaß, ein solches Boot zu rudern, wir können mehr Schüler unterbringen. Außerdem gibt es dann keinen Streit, welche Boote ausgeliehen werden sollen." Die Schule schafft ein Boot mit 16 Plätzen, einen Sechzehner, an.

Aufgabe 14: Herr Paddel notiert folgende Teilnehmerzahlen (Z):

Tag 7.5. 14.5. 21.5. 28.5. 4.6. 11.6. 18.6.
Z 21 6 27 18 29 31 13

Verteile sie nach den "Paddel-Regeln" auf die Boote.

Aufgabe 15: Wie viele Schüler können nun am Dienstagmittag höchstens zur Ruder-AG kommen, wenn alle einen Platz in einem der Boote bekommen sollen?

Einmal notiert Herr Paddel die Ausleihe der Boote statt auf der Tafel folgendermaßen auf einem Zettel: 10010. Er liest Herrn Schulmeister vor: "Kein Einer, ein Zweier, kein Vierer, kein Achter und ein Sechzehner".

Aufgabe 16: Herr Paddel notiert:

Datum 3.9. 10.9. 17.9. 24.9. 1.10.
Ausleihe 1001 11000 10110 10110 10011

Welche Boote sind unterwegs und wie viele Schüler rudern an den einzelnen Tagen?

Herr Schulmeister überlegt, statt eines Sechzehners einen Vierzehner oder einen Achtehner anzuschaffen.

Aufgabe 17: Es soll ein Vierzehner anstelle eines Sechzehners vorhanden sein. Wie groß muß die Anzahl der ruderwilligen Schüler sein, bei der eine Verteilung auf die Boote nach den "Paddel-Regeln" auf unterschiedlichen Arten möglich ist? Gib mehrere Lösungen an!

Aufgabe 18: Es soll ein Achtehner anstelle eines Sechzehners vorhanden sein. Wie groß muß die Anzahl der ruderwilligen Schüler sein, bei der eine Verteilung auf die Boote nach den "Paddel-Regeln" gar nicht mehr möglich ist? Gib alle Beispiele an!

Die Ruder-Arbeitsgemeinschaft hat nie einen Vierzehner oder einen Achtehner angeschafft, auch der Sechzehner ist nicht mehr einsatzfähig. Aber heute noch werden die Boote nach Herrn Paddels Regeln ausgeliehen. Diese Regeln müssen wohl etwas Besonders sein.

Die "Ruderbootzahlen"

Wir wollen uns einige von den mathematischen Inhalten anschauen, die in unserer Geschichte enthalten sind.

Herr Paddel kann aus seiner Schreibweise erkennen, welche Boote entliehen sind. Beim Tafelanschrieb 1001 sind es der Achte und der Einer, während der Vierer und der Zweier nicht gerudert werden. Herr Paddel benötigt nur die beiden Zeichen 0 und 1 als Ziffern seiner "Ruderbootzahlen". Dann kann er alle Informationen geben, die er beim Verleih der Boote und für Auskünfte an Herrn Schulmeister benötigt. Bei den "Ruderbootzahlen" hat jede Stelle für Herrn Paddel einen bestimmten Wert. Er redet von der Stelle für die Einer, den Zweier, den Vierer oder den Achte und liest dabei die Ziffern seiner Zahlen von rechts nach links. Wenn er weitere Boote benötigen würde, dann lautet für ihn die logische Fortsetzung Sechzehner, Zweiunddreißiger, Vierundsechziger, usw. In den Aufgaben 17 und 18 könntet Ihr lernen, warum eine andere Fortsetzung (Vierzehner oder Achtehner statt eines Sechzehners) nicht sinnvoll ist.

Ihr habt sicher schon entdeckt, daß sich bis auf die Einerstelle alle Stellenwerte auf die Zahl 2 zurückführen lassen.

Stelle	Sechzehner	Achter	Vierer	Zweier	Einer
Wert	16	8	4	2	1
andere Schreibweise	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$	$2 \cdot 2 = 2^2$		



Vierer ohne Steuermann

Foto: adidas

Nun könnt Ihr sicher nach größeren "Ruderbootzahlen" hin fortsetzen und einsehen, daß gilt: $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$, $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$, usw. Wenn Ihr die letzte Zeile der Tabelle von links nach rechts lest, könnt Ihr folgende Fortsetzung vermuten: $2^1 = 2$ und $2^0 = 1$. In Klasse 9 oder 10 werdet Ihr lernen, warum diese Fortsetzung sinnvoll ist.

Im Dualsystem

Der Tafelanschrieb 1001 für "Ruderbootzahlen" ist eine Schreibweise für Zahlen in einem Zahlensystem, das die Mathematiker Zweiersystem oder auch Dualsystem nennen. Wir benötigen nur die beiden Ziffern 0 und 1 und können dann alle Zahlen des Zweiersystems darstellen. In Aufgabe 11 könntet Ihr lernen, warum die Benutzung von weniger als 2 Ziffern zu Schwierigkeiten führt.

Herr Paddel kann auch ausrechnen, wie viele Schüler rudern. Nach den "Paddel-Regeln" müssen alle entliehenen Boote voll besetzt sein. Daher rudern beim Tafelanschrieb 1001 insgesamt 9 Schüler, 8 im Achte und 1 im Einer. Herr Paddel rechnet wie folgt:

$$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9.$$

Aus der "Ruderbootzahl" oder Dualzahl 1001 können wir also die Zahl 9, die Anzahl der rudern Schüler, ausrechnen.

Dualzahlen und Dezimalzahlen

Diese Schüleranzahl wird in dem Euch bereits bekannten Zahlensystem, den Zehner- oder Dezimalsystem, angegeben. Dem Zusammenhang zwischen der Dualzahl 1001 und der Dezimalzahl 9 machen wir durch folgende Redeweisen deutlich: "Zur Dualzahl 1001 gehört die Dezimalzahl 9," oder "Der Dualzahl 1001 wird die Dezimalzahl 9 zugeordnet." In Aufgabe 2 solltet Ihr ein Verfahren entwickeln, mit dem Ihr die Boote, die besetzt werden dürfen, finden könnt. 14 Kinder werden auf 1 Achte, 1 Vierer und 1 Zweier verteilt. Zur "Bootszahl" oder Zweierzahl 1110 gehört also die Dezimalzahl 14. Die nächsten drei Anwendungen beschreiben solch ein Verfahren:

- (1) Besetze das größte Boot, von dem alle Plätze besetzt werden.
- (2) Berechne die Anzahl der dann noch wartenden Schüler.
- (3) Wiederhole die beiden Schritte (1) und (2) mit den nach (2) noch wartenden Schülern solange, bis alle Schüler in einem Boot sitzen. Probiert dies Verfahren einmal aus!

Im nächsten Heft schauen wir einmal bei Herrn Rundlauf, einem Vetter von Herrn Paddel, vorbei.

*StD Helmut Wirths,
Fachlehrer für Mathematik und Physik an
der Cäcilien Schule Oldenburg*



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Zusammenstellung und Gestaltung:
OSIR Johannes Lehmann, Leipzig



Erst staunen, dann wundern,
dann mitmachen

$$U+S+T=21$$

$$L:U=1$$

$$S:T=42$$

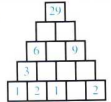
$$T=60:10$$

$$I+T=70:S$$

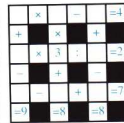
$$L+U+S+T+I+G=60$$

Spiel mit Zahlen

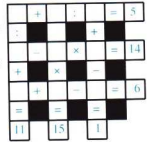
- Die Summe aus zwei benachbarten Zahlen einer Zeile ergibt die Zahl darüber. Welche Zahlen müssen in die leeren Quadrate eingesetzt werden?



- In diese beiden Figuren sind einstellige Zahlen so einzutragen, daß waagerecht und senkrecht richtig gelöste Aufgaben entstehen.



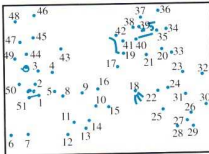
a) b)



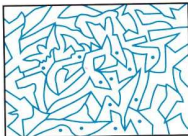
- Wieviel Meter ist dieser seltsame Vogel bisher geschwommen?



Geduldsspiel



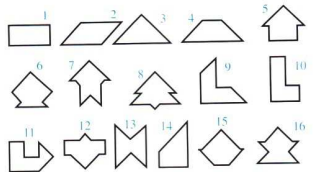
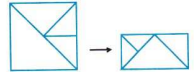
- Die Punkte 1 bis 51 sind zu verbinden!



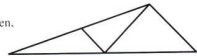
- Die mit einem Punkt versehenen Flächen schwarz ausmalen!

Zwei Geduldsspiele

- Das abgebildete Quadrat ist abzupausen, auszuschneiden und entsprechend den eingetragenen Strecken in vier Dreiecke zu zerlegen. Aus diesen vier Teilfiguren sind die Figuren (1 – 16) unterschiedlicher Form zusammenzusetzen.



- Abpausen, ausschneiden, zu einem Quadrat zusammensetzen!



Denksport



b)



c)



1. Zeichne drei weitere Quadrate d, e und f und trage, wie aus den vorgegebenen Quadraten ersichtlich, Kreuze ein! Wieviel Kreuze muß f enthalten?

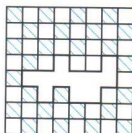
2. Welche der drei Figuren gehört folgerichtig in das Schachbrett?



b)



c)



Nachgedacht – mitgemacht

1. Um die Hausnummer des dritten Hauses zu finden, müßt ihr untersuchen, welche Beziehungen zwischen den beiden Zahlen in den Fenstern und der Tür bestehen.



2. Fünf Freunde wohnen in diesen Häusern der Parkstraße, in jedem Haus einer. Peter und Christel haben jeder nur einen Nachbarn. Heidi ist zwischen Rainer und Thomas zu Hause, dagegen wohnen Thomas und Peter nicht nebeneinander. Rainers Hausnummer ist niedriger als Christels. Wer wohnt in welchem Haus?



jugend forscht '92

Forschungsabenteuer für alle bis 21 in 7 spannenden Fachgebieten:
 Biologie Chemie Geo- und Raumwissenschaften Physik
 Mathematik/Informatik Technik Arbeitswelt

Anmeldeschluß ist
 bis 30. September



■ Ein eigenes Forschungsprojekt entwickeln und realisieren, erlerntes (Schul)wissen umsetzen und anwenden, anerkannt und ernstgenommen werden, neue Freunde finden, Kontakte knüpfen, ... all das ist

jugend forscht

Jedes Jahr entdecken mehr als 3600 Mädchen und Jungen ihren Spaß am selbständigen Experimentieren und Forschen.

Der große naturwissenschaftlich-technische Nachwuchswettbewerb ist ein spannendes Forum für pfiffige Schülerinnen und Schüler zwischen 7 und 21 Jahren. Ein Thema wählt sich jeder selbst aus den sieben Fachgebieten: Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaften, Mathematik/Informatik, Physik, Technik und Arbeitswelt.

■ Engagierte Lehrerinnen und Lehrer sind die wichtigsten Partner von **Jugend forscht**!

Betreuungslehrer und Wettbewerbsleiter informieren in den Schulen über Jugend forscht, geben Anregungen und Hilfestellungen.

■ Interessiert? Bitte rufen Sie uns an:

Stiftung Jugend forscht e.V.
 Beim Schlump 58
 W-2000 Hamburg 13
 Tel. 040/410 6005

Labyrinth

Das Wort „Labyrinth“ hat viele Bedeutungen: 1. Irrgarten; 2. bauliche Anlage mit verwirrend ineinandergehenden Gängen und Räumen; 3. aus beschnittenen Hecken angelegte Irrgänge im Barockgarten; 4. komplizierte geometr. Figur als Verzierung auf Fuß-

böden; 5. knöchernes u. häutiges Innenohr; 6. zusätzl. Atmungsorgan des Labyrinthfisches; 7. enge Doppelkehre innerhalb einer Rennrodelbahn

aus: Großes Fremdwörterbuch
Bibliograph. Inst. Leipzig

Es sind spezielle Labyrinththe, die wir untersuchen wollen. In der nebenstehenden Figur haben wir ein Labyrinth mit neun Feldern, die quadratisch angeordnet sind (Abb. 1).



Abb. 1

Dieses Labyrinth soll nach folgender Vorschrift durchlaufen werden:

- 1) Beginne bei A und gehe dann vertikal oder horizontal, aber nie diagonal von Feld zu Feld.
- 2) Der Weg muß genau einmal durch jedes Feld gehen.

Aufgabe: Wieviel Möglichkeiten gibt es, das Labyrinth mit dieser Vorschrift zu durchlaufen?

Um alle Möglichkeiten zu erhalten und keine zu vergessen, ist es ratsam, systematisch vorzugehen.

Lars findet bei dieser Untersuchung folgende sechs Wege (Abb. 2).

Nach welchem Ordnungsprinzip ist er vorgegangen? Er hat mit einer Verzweigung in der ersten Spalte begonnen und die Fälle 1, 2 und 3 gefunden. Für die Verzweigung in der mittleren Spalte gab es nur einen Fall und schließlich für die dritte Spalte noch zwei.

Karin hat die sechs Möglichkeiten in der folgenden Reihenfolge gewonnen (Abb. 3). Welches Ordnungsprinzip hat sie gewählt? Ist es zufällig, daß die Ausgänge in allen sechs Fällen sich in den Eckfeldern befinden? Warum gibt es keinen Ausgang in den Mittelfeldern? An dieser Stelle wollen wir hierzu eine Untersuchung durchführen, die sich als grundsätzlich erweisen wird.

Dazu denken wir uns das Labyrinth schachbrettartig gefärbt (Abb. 4).

Die Vorschrift, daß man nur vertikal oder horizontal vorgehen kann, bedeutet, daß sich bei einem möglichen Wege immer schwarze und weiße Felder abwechseln müssen. Bei neun Feldern ist nur folgende Reihung möglich swswswsws.

Der Weg muß also in einem schwarzen Feld beginnen und in einem schwarzen Feld enden. Das sind aber gerade die Eckfelder. Es kann auch nicht in einem weißen Feld begonnen werden. Warum?

Diese Erkenntnis kann man verallgemeinern. Wenn die Anzahl der Felder ungerade ist, gilt diese Feststellung. Ist die Anzahl der Felder aber gerade, so muß beim Weg immer folgen-

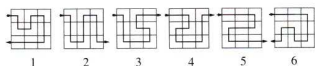


Abb. 2

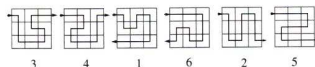


Abb. 3



Abb. 4



Abb. 5



Abb. 7

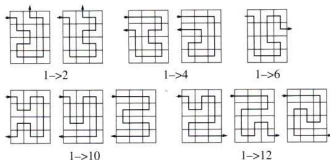


Abb. 6

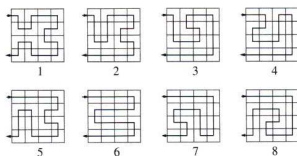


Abb. 8

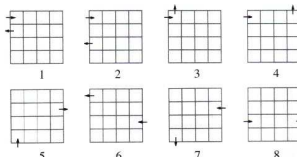


Abb. 9

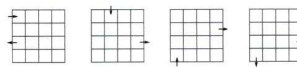


Abb. 10

de Reihung gewählt werden: swsw ... sw oder wegen der Umkehrbarkeit der Wege swsw ... ws.

Nun wollen wir alle Möglichkeiten für das Durchlaufen eines 3x4-Rechtecks ermitteln. Hierzu einige Anleitungen.

Es ist ratsam, in dem 3x4-Rechteck die Felder zu nummerieren, um eine systematische und vollständige Untersuchung abzuschließen (Abb. 5). Die Symbolik 1 → 2 soll bedeuten: Der Eingang befindet sich im Feld 1, der Ausgang im Feld 2. Folgende Fälle müssen dann untersucht werden:

- | | | |
|-----------|------------|-------------|
| 1) 1 → 2 | 9) 3 → 10 | 17) 9 → 4 |
| 2) 1 → 4 | 10) 3 → 12 | 18) 9 → 6 |
| 3) 1 → 6 | 11) 7 → 2 | 19) 9 → 10 |
| 4) 1 → 10 | 12) 7 → 4 | 20) 9 → 12 |
| 5) 1 → 12 | 13) 7 → 6 | 21) 11 → 2 |
| 6) 3 → 2 | 14) 7 → 10 | 22) 11 → 4 |
| 7) 3 → 4 | 15) 7 → 12 | 23) 11 → 6 |
| 8) 3 → 6 | 16) 9 → 2 | 24) 11 → 10 |
| | | 25) 11 → 12 |

Nun müssen Lösungen für diese 25 Fälle ermittelt werden, wobei in den einzelnen Fällen auch mehrere Lösungen auftreten können. Für die ersten fünf Fälle sind sie angegeben (Abb. 6).

Wir stellen fest, daß mit einer geringen Vergrößerung des Labyrinthes von 3x3 auf 3x4 die Anzahl der Möglichkeiten, das Labyrinth zu durchlaufen, sich wesentlich vermehrt. Es wird deshalb empfohlen, für das 3x4-Labyrinth keine vollständige Lösung zu suchen, sondern noch die Aufgaben mit einem zweiten Eingang zu untersuchen oder einzelne bestimmte Fälle herauszusuchen und zu bearbeiten.

Um beim 4x4-Labyrinth die Anzahl der Möglichkeiten von vornherein einzuschränken, ist es ratsam, für die Untersuchung je ein Eingangs- und Ausgangsfeld auszuwählen, so wie es die Abb. 7 zeigt.

Im 4x4-Labyrinth gibt es für diesen Fall acht Möglichkeiten, die in der Abb. 8 dargestellt sind.

Nun gilt es, bei vorgegebenem Eingang und Ausgang, wie es die Abb. 9 zeigt, die Lösungen zu ermitteln.

Gibt es noch andere Möglichkeiten? Warum ist es nicht möglich, die folgenden Labyrinth mit den angegebenen Ein- und Ausgängen zu durchlaufen (Abb. 10)?

Wegen der Umkehrbarkeit der Wege können die Labyrinth der Abb. 8 und 9 auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

OSR Gerhard Schulze, Herzberg,
Mitglied des Redaktionskollegiums der
alpha

Der Irrgarten von Altjeßnitz bei Wolfen



„Bild Leipzig“ berichtete am 12.10.91 über diesen Irrgarten: „... Bis zu 8000 Besucher sind mitunter auf einmal im Irrgarten. ... Immer abends steigt er (der den Irrgarten betreuende Gärtner) auf die 3 Meter hohe Plattform (Ziel) im Mittelpunkt des Wirrwarrs, hält Ausschau nach Verirrten. ... Ein junges Paar wettete: Wer kommt zuerst 'raus'? Klaus Rößler (der Gärtner) und der junge Ehemann holten die weinende Braut bei tiefster Dunkelheit von der Bank der Verzweifelten. ...“

Nach dem Erwerb einer Eintrittskarte kann man diesen auf einem quadratischen Flächenstück mit der Seitenlänge 50 m angelegten Irrgarten täglich von 10 bis 19 Uhr vom Eingang A aus betreten.

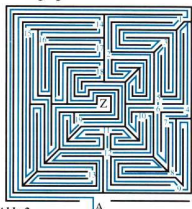


Abb. 2

Der Besucher soll versuchen, das Ziel Z zu erreichen und soll sich auch wieder aus dem Labyrinth herausfinden. Ein Markieren des eingeschlagenen Weges z. B. durch Auslegen eines „Ariadnefadens“ ist nicht erwünscht. Auch wenn man den auf der Eintrittskarte abgedruckten Plan des Jeßnitzer Gartens zur Verfügung hat, ist ein Zurecht-

finden im Garten ohne eine gründliche Analyse nicht leicht. Im hier abgedruckten Plan (Abb. 2) ist zusätzlich ein Multigraph¹ farbig markiert eingezeichnet. Die Kanten dieses Multigraphen verlaufen in der Mitte der einzelnen Wegstücke. Die Knoten sind neben A und Z die hier mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 19 kotierten Verzweigungspunkte der Wegemitten. Dieser Multigraph wird nun ein zweites Mal auf ein Blatt Papier gezeichnet:

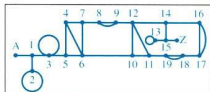


Abb. 3

Bei dieser zweiten Darstellung dieses Multigraphen sind die Kanten Strecken oder Kreisbögen. Weiterhin folgen in beiden Darstellungen dieses Multigraphen an jedem Knoten i ($i=1, 2, \dots, 19$) die einmündenden Kanten bei Wahl des gleichen Umlaufsinn in der gleichen Anordnung aufeinander:



Abb. 4

Die in Abb. 3 angegebene Darstellung des Wegenetzes durch einen Multigraph ist zwar nicht maßstabgerecht, doch mit ihr ist ein Zurechtfinden im Irrgarten problemlos möglich.

1. Aufgabe: Wieviele doppelpunktfreie Wege führen im dem Jeßnitzer Irrgarten zugeordneten Multigraph von A nach Z? (Ein Weg heißt doppelpunktfrei, wenn er durch jede Kante und auch durch jeden Knoten des Multigraphen höchstens einmal führt.)

2. Aufgabe: Ein Besucher will im Jeßnitzer Garten den von A nach Z führenden Weg benutzen, der aus der kleinstmöglichen Zahl von Kanten (Wegstücken) besteht. Als einzige Orientierungshilfe hat er sich für jeden der von ihm zu überschreitenden Knoten eine natürliche Zahl eingepreßt oder diese auf einen Zettel geschrieben:

2;1;1;1;2;2;1;2

Wie legte der Besucher diese Zahlenfolge fest? Kann er sich mit dieser Zahlenfolge auch wieder von Z nach A zurückfinden?

Anmerkung:
¹ Während bei einem Graph stets zwei Knoten höchstens durch eine Kante verbunden sind, sind bei einem Multigraph mindestens zwei Knoten durch mindestens zwei Kanten verbunden.

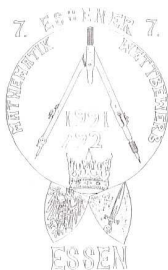
Walter Träger, Döbeln

Olympiade-Ecke

Der Essener Mathematikwettbewerb



"Mathe macht Spaß!" Dies meinen jedenfalls (mindestens) sechs Mathematiklehrer aus verschiedenen Schulen der Ruhrgebietsmetropole, die nun schon zum siebten Male den Essener Mathematikwettbewerb (EMW) durchgeführt haben. Davon scheinen sie auch immer mehr Schüler überzeugen zu können. Warum sonst sollten diese an einem schulfreien Samstag freiwillig für mehrere Stunden in Klausur gehen, um über kniffligen Mathe-Problemen zu brüten?



Nicht einmal Klassen- und Studienfahrten stellen dann für ältere Schüler ein Hindernis dar, um auch die zweite (Klausur) – Runde des EMW erfolgreich meistern zu können. So durften jedenfalls zwei Schüler, während einer Studienfahrt nach Nizza, dieselben Aufgaben zugleich mit den übrigen Teilnehmern der Klausur des EMW '87 schreiben.

Wie steigert man nun die Lust an Mathematik, wo doch bei der Stofffülle des täglichen Unterrichts gerade der Spaß am Knobeln meist viel zu kurz kommt? Michael Rüsing, der von Anfang an dabei ist und als "Kopf" des Wettbewerbes gilt, nennt einige Beweggründe, die speziell zu dem Essener Modell geführt haben. Es sind möglicherweise die gleichen Motive, die auch den einen oder anderen von Euch vielleicht dazu bewogen haben, sich selbst einmal an einem Mathewettstreit der eigenen Schule zu versuchen: "Eine lokale Veranstaltung spricht eben eher an als eine regionale oder gar bundesweite, weil sie überschaubarer ist". In Gesprächen mit den Essenern Veranstalter äußern sich fast alle Befragten übereinstimmend, daß ein konkreter Wettkampf zwischen Schulen am selben Ort als Konkurrenzsituation erlebt wird. Nach Beobachtungen von Herrn Rüsing, und auch meiner Erfahrung nach, bildet sportlicher Ehrgeiz die entscheidende Triebfeder für die Teilnahme an einem Mathewettstreit. Mithin gewinnt eine derartige Veranstaltung eine kämpferische oder spielerische Note – wer mißt seine (Geistes-)Kräfte nicht gern mit Gleichaltrigen aus bekannten Schulen seiner Heimatstadt?

Um ein solch mathematisches Kräftemessen wurde der Essener Wettbewerb behutsam herumgebaut. "Unsere lokale Aktion soll auch die Scheu vor hohen Hürden, wie etwa dem Bundeswettbewerb Mathematik, langsam abbauen helfen," läßt Michael Rüsing nebenbei durchblicken. Die Schwelle ist aber bewußt niedriger angesetzt als bei einer Mathematik-Olympiade, macht er zögernden Interessenten Mut. Seit Beginn des Essener Wettbewerbes bemühen sich die Wettbewerbsmacher um einen ständigen Kontakt zur Essener Lokal-

presse, eingedenk der Tatsache, daß zu einem guten Gelingen eines Unternehmens stets die öffentliche Aufmerksamkeit gehört. Die Öffentlichkeit sollte nämlich bemerken, daß es Schülerinnen und Schüler mit besonderen Fähigkeiten gibt, die keineswegs zu einer hochsnäseligen Elite zählen; denen man viel eher mit kniffligen Fragen eine große Freude bereiten kann. Stolz verweist M. Rüsing an dieser Stelle auf den hohen Anteil von Mädchen (40%) am Essener Wettbewerb. "Eine vergleichbare Mädchenquote gibt es unserer Kenntnis nach bei keinem der bestehenden inländischen Mathematikwettbewerbe".

Die mathematische Talentförderung hat in Essen schon lange Tradition. Seit mehreren Jahren werden an einigen Essener Gymnasien regelmäßig neben dem Unterricht Mathematikprobleme zur freien Bearbeitung angeboten (z. B. die Aufgabe des Monats). Anfang 1985 vereinbarten drei Lehrer ein gemeinsames Vorgehen als Versuch auf Stadtebene. Unter dem Namen "Essener Mathematikwettbewerb" wurde besagter Schülerwettbewerb ins Leben gerufen. In den Anfangsjahren richtete sich dieser Wettbewerb nur an Schüler der Sekundarstufe II. Nachdem in den folgenden Jahren die Zahl der Organisatoren zugenommen und sich der Wettbewerb an den Schulen etabliert hatte, wurde eine Ausweitung auch auf die Sekundarstufe I beschlossen. Dies geschah im Jahre 1988.

Nach einigen Verbesserungen in den letzten fünf Jahren hat sich mittlerweile ein fester Ablauf für den Essener Mathematikwettbewerb bewährt. Der jährliche Wettbewerb setzt sich aus zwei Runden zusammen. Zur ersten Runde im Herbst (kurz nach Beginn des Schuljahres) werden an alle Essener Schulen Aufgaben verschickt. Interessierte Schülerinnen und Schüler können diese dann in einem festen Zeitraum von etwa einem Monat bearbeiten. Die zurückgesandten Lösungen werden von den Organisatoren des Wettbewerbes korrigiert. Dabei soll ein möglicher Lösungsweg von allen Altersstufen gefunden werden können. "Kein leichtes Unterfangen übrigens", betont Michael Rüsing.

Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit guten Leistungen in der ersten Runde, werden zur zweiten Runde eingeladen. Sie findet als Klausur an einem schulfreien Samstag im Frühjahr des jeweils folgenden Jahres statt. Nach den Ergebnissen der Klausurrunde werden die Preisträger ausgewählt. Im Rahmen einer Feierstunde im Essener Rathaus erfahren die Punktbesten am Ende des Schuljahres eine Auszeichnung. Als Belohnung winken Urkunden und wertvolle Buchgutscheine, für die verschiedenen Essener Firmen gestiftet haben.

Ein kleiner Wermutstropfen trübt dennoch die sonst makellose Erfolgsbilanz der Wettbewerbsmacher aus der Ruhrgebietsmetropole. So hat M. Rüsing einräumen müssen, daß von anderen Schularten weniger Resonanz auf den Wettbewerb komme. Zur 5. Doppelrunde dieser Art etwa sind "leider nur Lösungen von Schülern aus Gymnasien eingegangen". Dabei werden die Aufgaben der jeweiligen Runden wirklich nicht für ausgesprochene Mathematiker ausgeteilt.

Das Lehrerteam hat jedes Jahr die vertrackte Aufgabe, Probleme für jeden Geschmack auszufüttern. Daß ihm diese schwierige Balance bei der Aufgabenfindung noch jedes Mal gelungen ist, dafür spricht wohl eine typische Teilnehmerantwort: "Beim einfacheren ersten Durchgang wird weniger Rechnen als Denken verlangt."

Damit Ihr Euch selbst eine Vorstellung von Umfang und Anspruchsniveau der Probleme des EMW machen könnt, folgen Aufgaben des 7. Essener Mathematikwettbewerbes.

Wenn Ihr noch mehr über den Essener Wettbewerb erfahren wollt, dann bitte schreibt an GEMW Gesellschaft Essener Mathematikwettbewerb e. V., Herrn Michael Rüsing, B.M.V.-Schule, Bardelebenstraße 9 in W-4300 Essen 1.

Herr Rüsing wird sich über jede Zuschrift freuen.

Paul Jainta, Schwabach
Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

7. Essener Mathematikwettbewerb

Sekundarstufe I / Erste Runde

Aufgabe:

Betrachte die folgenden numerierten Gleichungen:

- 1) $3^2+4^2=5^2$
- 2) $5^2+12^2=13^2$
- 3) $7^2+24^2=25^2$
- 4) $9^2+40^2=41^2$

...

n) $(2 \cdot n + 1)^2 + \dots = \dots$

- a) Wie lauten die Gleichungen 5), 6) und 7)?
- b) Ergänze die fehlenden Ausdrücke in Gleichung n).
- c) Beweise die Richtigkeit der ergänzten Gleichung n).

Lösung:

- a) $11^2+60^2=61^2$
 $6) 13^2+84^2=85^2$
 $7) 15^2+112^2=113^2$

b) n) $(2 \cdot n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$

(2 · n + 1)² + (2n² + 2n)² = (2n² + 2n + 1)²
 /Klammern ausrechnen <=>
 $4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = 4n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + 1 + 2n + 1$ /Zusf.
 <=> $4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$
 q. e. d.

Aufgabe:

Durch die folgenden Gleichungen wird eine Gesetzmäßigkeit vorgegeben:

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

a) Prüfe, ob sich die Gesetzmäßigkeit in den nächsten vier Gleichungen fortsetzt.

b) Formuliere die Gesetzmäßigkeit und beweise sie.

Lösung:

a)

$$55556^2 - 44445^2 = 1111111111$$

$$555556^2 - 444445^2 = 11111111111$$

$$5555556^2 - 4444445^2 = 111111111111$$

$$55555556^2 - 44444445^2 = 1111111111111$$

Die Gesetzmäßigkeit setzt sich fort.

b)

$$\left(\frac{5}{9} \cdot 10^n + \frac{4}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{81} \cdot 10^{2n} + 2 \cdot \frac{20}{81} \cdot 10^n + \frac{16}{81}$$

$$- \left(\frac{16}{81} \cdot 10^{2n} + 2 \cdot \frac{20}{81} \cdot 10^n + \frac{25}{81}\right) = \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{81} \cdot 10^{2n} - \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9}$$

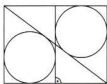
q. e. d.

Offene Runde

Zweite Runde

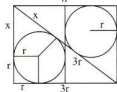
Aufgabe:

Zwei Kreise mit gleichem Radius r werden wie unten dargestellt in ein Rechteck gezeichnet. Geben Sie die Seitenlängen des Rechtecks in Abhängigkeit von r an.



Lösung:

In die Zeichnung sind einige Hilfslinien eingetragen.



Da die Kreise die senkrechte Linie im Rechteck berühren, sieht man sofort, daß die längere Rechteckseite die Länge $4r$ hat.

Betrachtet wird der linke Kreis. Die Diagonale und die Rechteckseiten sind Tangenten an den Kreis. Die Entfernungen von den Schnittpunkten zu den Berührungspunkten sind daher – wie in der Zeichnung dargestellt – gleich. Der Satz des Pythagoras liefert:

$$(x+r)^2 + (4r)^2 = (x+3r)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xr + 17r^2 = x^2 + 6xr + 9r^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2r$$

Also hat die kürzere Seite die Länge $r+x=3r$.

Aufgabe:

Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Die Summe aus der betreffenden Zahl selbst, ihrer Quersumme und der zwei einstelligen Zahlen, die durch die erste und die letzte Ziffer dargestellt werden, beträgt 5900.

Lösung:

Seien a, b, c, d die Ziffern der gesuchten Zahl. Die Bedingung der Aufgabe lautet dann $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d + a + b + c + d + a + d = 5900$
 $\Leftrightarrow 1002 \cdot a + 101 \cdot b + 11 \cdot c + 3 \cdot d = 5900$

Es folgt, daß a höchstens den Wert 5 hat. Angenommen, $a=4$. Dann ist $101 \cdot b + 11 \cdot c + 3 \cdot d = 1892$. Das ist aber nicht möglich, selbst wenn $b=c=d=9$, a kann damit erst recht nicht kleiner als 4 sein. Also $a=5$.

Damit gilt:

$$101 \cdot b + 11 \cdot c + 3 \cdot d = 890$$

Es folgt nun, daß b höchstens den Wert 8 haben kann. Wie oben sieht man, daß b auch nicht kleiner als 8 sein kann, da $11 \cdot c + 3 \cdot d$ nicht mehr den Rest ausmachen kann. Damit gilt: $11 \cdot c + 3 \cdot d = 82$

c kann höchstens den Wert 7 haben. Dann wäre $3 \cdot d = 5$, also $d \in \mathbb{N}$.

Wenn $c=6$, dann wäre $3 \cdot d = 16$, also $d \in \mathbb{N}$.

Wenn $c=5$, dann wäre $3 \cdot d = 27$, also $d=9$.

c kann aber nicht kleiner als 5 sein, da sonst $d > 9$.

Es gibt nur eine Zahl, die die Bedingung erfüllt, nämlich 5859.

Aufgabe:

Zeige, daß $\left\lceil n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rceil$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Quadratzahlen durchläuft.

Hinweis:

[...] ist dabei die Gauss-Klammer. $\{x\}$ ist die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Beispiele: $\{3.56\}=3$; $\{5.24\}=5$; $\{7\}=7$.

Lösung:

Es ist $\left\lceil n + \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil = n + \left\lceil \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil$.

Betrachtet wird die folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\left\lceil \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil$	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5
$n + \left\lceil \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil$	2	3	5	6	8	9	10	11	12	14	15	17	18

Die Folgenglieder in der zweiten Zeile wachsen bei $n=2, 6, 12$ um 1. Das sind Zahlen, die sich in der Form $k(k+1)$ schreiben lassen. Es wird bewiesen, daß das stets der Fall ist.

Behauptung: Es ist $k+1 > \sqrt{k(k+1)} + 0.5 > k$

Beweis: $k+1 > \sqrt{k(k+1)} + 0.5$

$$\Leftrightarrow k+0.5 > \sqrt{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k + 0.25 > k^2 + k$$

$$\Leftrightarrow 0.25 > 0$$

bzw. $\sqrt{k(k+1)} + 0.5 > k$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} > k - 0.5$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k > k^2 - k + 0.25$$

$$\Leftrightarrow 2k > 0.25$$

Nun folgt aus der Behauptung, daß

$$\left\lceil \sqrt{k(k+1)} + 0.5 \right\rceil = k.$$

Genauso zeigt man, daß

$$\left\lceil \sqrt{k(k+1)} + 0.5 \right\rceil = k+1.$$

Damit wachsen die Werte in der zweiten Zeile der Tabelle gerade um 1, wenn n von $k(k+1)$ auf $k(k+1)+1$ wächst. Die Werte in der 3. Zeile unterscheiden sich an diesen Stellen um 2, es wird also genau eine Zahl beim Durchlaufen ausgelassen.

Es wird nun untersucht, welche Zahlen ausgelassen werden.

$$\text{Für } n = k(k+1) \text{ ist } \left\lceil n + \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil = k(k+1) + k = k^2 + 2k = (k+1)^2 - 1$$

$$\text{für } n = k(k+1) + 1 \text{ ist } \left\lceil n + \sqrt{n} + 0.5 \right\rceil = k(k+1) + 1 + k + 1 = k^2 + 2k + 2$$

$$= (k+1)^2 + 1$$

Es entsteht also eine Zahl, die um 1 kleiner als eine Quadratzahl, bzw. um 1 größer als eine Quadratzahl ist, d. h. die Quadratzahl wird gerade ausgelassen.

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Bildmappen zu Leben und Werk von Adam Ries

Die drei Adam Ries-Bildmappen von Dr. Harry Beyrich, die 1984 zum 425. Todestag des Rechenmeisters erschienen waren, werden im Verlag H. C. Schmiedicke, Leipzig, wieder aufgelegt. Sie behandeln das Leben und das Wirken als Rechenmeister und Bergbeamter im erzgebirgischen Annaberg, stellen die Rechenbücher mit ihren Titelholzschnitten vor und bringen Rechenaufgaben aus dem verbreitetsten Rechenbuch, der "Rechnung auff der linihen vnd federn" von 1522, meist mit den Lösungswegen von Adam Ries und den Ergebnissen ("facit"). Die Mappen enthalten erläuternde Texte zur Einführung. Der Vertrieb erfolgt durch die Büros Adam-Ries-Jubiläum in den Adam-Ries-Städten Annaberg-Buchholz, Erfurt und Staffelstein und durch die Jütte Druck GmbH Leipzig, Kreuzstr. 20, Das 2. Rechenbuch von Adam Ries, in der Wissenschaftlichen Allgemeinbibliothek Erfurt als 10. Auflage von 1532 bei Mathes Maler in Erfurt vorhanden, wurde vom Büro Erfurt 2000 als fotomechanischer Nachdruck, versehen mit einem Nachwort, herausgegeben.



Friedrich Wille:
Eine mathematische Reise in Cantors Paradies, Zenos Hölle und andere Erholungsgebiete

**Kleine Vandenhoock-Reihe 1505
Vandenhoock & Ruprecht 1984**

Das Ehepaar war im Cantor-Land angekommen. In Bad-Omega gingen sie zum Hilbertschen Hotel. Dieses Hotel hat unendlich viele Zimmer, die mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... durchnummeriert sind. Aus Gründen rationaler Verwaltung gibt es nur Einzelzimmer. Zum Glück bekamen sie zwei nebeneinander liegende Einzelzimmer, die letzten, dann war das Hotel ausgebucht. Das heißt, an diesem Abend wurden noch ein weiterer sehr erschöpfter Reisender sowie eine vierzigköpfige Reisegesellschaft untergebracht. Die Ankunft eines Busses mit abzählbar unendlich vielen Insassen brachte zwar wieder Unruhe im Hilbertschen Hotel, dieses aber nicht zum Überlaufen. Wie das möglich ist und eine weitere Menge interessanter Erlebnisse im Cantor-Land, Friedrich Wille in dem Bändchen "Eine mathematische Reise" erzählt es. Der Auszug möge Appetit machen auf die Reise zu einem perfekten Fleckchen Erde mit abzählbar vielen Bergen, wohlgeordneten Städten und realen Preisen. Ein Beispiel dafür, daß man Mathematik erzählen kann!

Es ist über das **Fremdenverkehrsamt, Krämerbrücke 3, 0-5020 Erfurt**, für 9,50 DM im Einzelpreis, bei Versand plus Portokosten, zu erwerben.

Georges Ifrah: Universalgeschichte der Zahlen

(Aus dem Französischen von A. von Platen) 1989, 2. Auflage 1991.
Campus Verlag Frankfurt/New York,
ISBN 3-593-34192-1, 600 Seiten, DM 48,-

Dieses Buch liefert ein Beispiel dafür, welche positiven Folgen gute Fragen von Schülern an ihren Mathematiklehrer haben können. Der Verfasser, selbst einst Mathematiklehrer, wurde, wie er in der Einführung berichtet, durch die Frage eines Schülers dazu angeregt, sich in jahrelangen Studien zu einem international bekannten Fachmann für die Geschichte der Zahlen und der Zahlbezeichnungssysteme zu entwickeln und schließlich die vorliegende „Universalgeschichte“ zu schreiben, die auch schon ins Englische übersetzt wurde. Es geht nur um die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... und so ist es schon erstaunlich, wieviel es darüber zu wissen gibt: Von den instinktiven Zählfähigkeiten mancher Tierarten über die Methoden unserer frühen Vorfahren, mittels Fingern, Gebärden, gekerbter Knochen und anderer Hilfsmittel zu zählen und zu rechnen bis zu den Zahlsschriften der Sumerer, Ägypter, Griechen, Chinesen, Inkas, ... und schließlich den im 9. – 10. Jahrhundert von Indien über islamische Länder nach Europa gelangten heutigen „arabischen“ Dezimal-

Georges Ifrah Universal- geschichte der Zahlen



Campus

zahlen. Von Büchern ähnlicher Thematik (wie z. B. K. Menningers schon klassischem Buch „Zahlwort und Ziffer“) unterscheidet sich Ifrah nicht nur durch die überwältigende Fülle der Details sondern auch durch die Einbeziehung entlegener kulturhistorischer Quellen und Gesichtspunkte. So gibt es ein Kapitel über die Rolle von Zahl und Ziffer im Bereich von Magie und Mystik. Als kurioses Beispiel sei ein Algorithmus angeführt, den der islamische

Historiker Ibn Chaldun im 14. Jahrhundert angab, um aus den zuvor in Zahlenwerte übersetzten Namen zweier Könige oder Feldherren zu errechnen, welcher von beiden in einem Krieg bzw. einer Schlacht siegen wird:

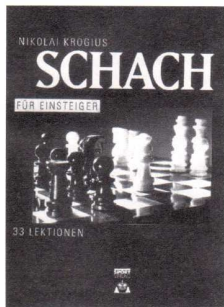
„Man addiert die Zahlenwerte der Buchstaben, aus denen der Name des jeweiligen Königs besteht... Nach dieser Addition zieht man von jeder Summe so oft neun ab, bis der Rest kleiner als neun ist. Man vergleicht diese Restsummen miteinander; sind beide zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen, so wird der König, dessen Name die kleinere Restsumme aufweist, siegreich sein. Ist eine der Restsummen eine gerade, die andere eine ungerade Zahl, so wird der König mit der höheren Zahl gewinnen. Sind beide Summen gleich und gerade Zahlen, wird der König, der angegriffen worden ist, den Sieg davontragen; sind die Restsummen einander gleich und ungerade, wird der König siegen, der angegriffen hat.“

Aus heutiger Sicht ist es ganz leicht, diese Anweisung in ein Computerprogramm zu übersetzen. Man beachte jedoch, daß Ibn Chaldun hier eine trotz mehrfacher Verzweigung vollständige Fallunterscheidung bewältigt hat, was selbst berühmten Mathematikern im 19. Jahrhundert gelegentlich noch schwerfiel.

Dr. Peter Schreiber, Greifswald

Nikolai Krogius:
Schach für Einsteiger – 33 Lektionen

ca. 256 Seiten, ca. 250 Diagramme,
19,5 x 22,0 cm, gebunden; DM 34,80
ISBN 3-328-00432-7



In den ersten 13 Lektionen erfährt der Schacheinsteiger alles über die Spielregeln. Auf diesem Grundkurs aufbauend, vermittelt Krogius, konsequent nach Erkenntnissen über optimales Lernen vorgehend, vielseitiges, strategisches und taktisches Grundwissen.

Castle of Dr. Brain

Kreative Person für Labor gesucht, die die Zusammenhänge von Raum, Zeit und Realität in Zusammenarbeit erforschen will! Grundvoraussetzung für Bewerber: Wissensdurst, Humor und Pizza essen. Wer sich für diesen Job fit wähnt, sollte sich sofort persönlich bei Dr. Brain bewerben. Wer den Schließmechanismus des Haupttores überlistet und so Einlaß in das Spiel findet, wird in vielen Aufgaben auf die Probe gestellt. Mit etwas Überlegung, sicherem Auge oder gutem Gehör ist dieses Hindernis bald genommen. Was folgt? Mathematische Problemstellungen, 3D-Labyrinth, Schaltpläne, programmierbare Computer, Sternkarten, Logikrätsel, diverse Worträtsel – und Entschlüsselungstechniken, mit deren Hilfe Anleitungen zu lesen sind, mit deren Hilfe Aufgaben zu lösen sind. Der Schwierigkeitsgrad ist dem Niveau der Bewerber in drei unterschiedlichen Stufen anpaßbar. Schon der Level Novize verlangt genügend Geist, um die Aufgabenstellungen zwischen 3D-Animation, handgemalten digitalisierten Grafiken und Soundtrack zügig zu lösen.

Die unterhaltsamen mathematischen Knocheleien, jeweils mit ausführlichen Lösungen versehen, sind verschieden schwierig. Eins haben sie alle gemeinsam: Der richtige Kniff führt ohne viel Rechenaufwand zur Lösung. Obwohl die verschiedenen Gebiete der Mathematik durchstreift werden, reichen meistens die Grundkenntnisse der Mathematik zur Lösung aus.

Alle Aufgaben und Lösungen enthalten ausführliche Quellenangaben. Vor einem will der Autor die voreiligen Knobler auf jeden Fall warnen: Bei Aufgaben, die keine Lösungen haben, kann man auf der Lösungssuche graue Haare bekommen. Ratsam ist also in jedem Fall, zunächst zu überprüfen, ob es überhaupt eine Lösung geben kann! Und wie kommt es nun zu diesem Titel? Ganz einfach! Die Kollegen des Autors während seiner Tätigkeit an der Universität Osnabrück mußten während des Frühstücks Denksportaufgaben lösen.

Eine Kostprobe:

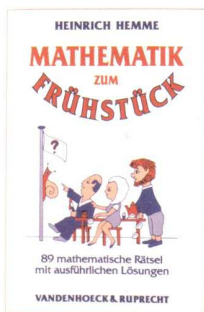
Die Händedrucke Jeder Mensch, der jemals auf der Welt lebte, hat in seinem Leben eine bestimmte Zahl Händedrucke gewechselt. Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Zahl Hände gedrückt haben, ist gerade. Warum?

Wer Dr. Brain erforschen will und ein herkömmliches Grafik- oder Text-Adventure aus dem Hause Sierra erwartet, wird sich wundern. Das Spiel gehört in das weite Feld amerikanischer Lernspiele, ist mit deutschen Lernspielen in keiner Weise vergleichbar.

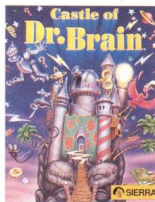
Das erfolgreiche Sierra-Team Ken Williams/ Corey Cole entwickelte ein Computerprogramm, daß mit etwas Schulenglisch unter Zuhilfenahme eines Wörterbuches Spaß machen kann. Zu bedenken ist jedoch: Sierra hat mit Dr. Brain ein Lernprogramm für amerikanische Kids produziert, trifft deren Mentalität, deren Neugierde. Sollte in einer Schule fremdsprachlicher Frühunterricht bereits so weit eine Rolle spielen, daß man mit diesem relativ leicht verständlichen Englisch mit beratender Unterstützung arbeiten kann, dann gehört dieses Spiel zum Pflichtprogramm, wenn die User wegen der Aufgabenstellungen mindestens 12 Jahre alt sind.

Andere sollten sich an der Hintergrundstory orientieren, um vielleicht eines Tages einmal ein ähnliches Programm für deutschsprachige Schüler zu programmieren, ein Programm, das gut verpackt, fernab aller Monster, fernab aller Run'n'Jump-Geschicklichkeit kindgerecht, Können, Geschick und Wissen verlangt.

Mathematik zum Frühstück?



Der deutsche Distributor sollte dieses Programm für hiesige Verhältnisse nur dann ein-deutschen, wenn das Ergebnis der Englisch-Deutschen Umsetzung der Spiele von Monkey Island entspricht.



H. Seitz / -se

Castle of Dr. Brain, Sierra 1991,
Vertrieb: Bomico
Typ: amerikanisches Lernspiel
Handbuch: E – Game-Manual, trotz Kartonaufdruck war kein deutsches Handbuch zu finden, Beilagen: TB Fantastic Book of Logic Puzzles
Hardware: PC AT8 MHz, 640 KB RAM, Maus, Festplatte, EGA, VGA; SOUND-karten, zwei 3.5"-Disketten
Preis: 139,50 DM

Lösungen

•Experimente mit dem SR 1 (Seiten 6/7)

1. Ein möglicher Programmablaufplan ist



Im Speicher des SR1 werden die jeweils benötigten Nenner (die Zahlen $1+k \cdot 2$) berechnet. Aufpassen muß man beim Eintippen des richtigen Operationszeichens (+ bzw. -). Um Irrtümer zu vermeiden und die Abarbeitung weiter zu formalisieren, könnte man die beiden

Möglichkeiten $\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$ untereinander schreiben und vereinbaren, mit einem kleinen Pappkärtchen jeweils ein Feld, zuerst $+$, zuzudecken. Beim Befehl «Vorzeichenwechsel» verschiebe man das Kärtchen, beim ersten Mal also nach oben. Dann ist $-$ verdeckt und $+$ sichtbar. Kommt man beim nächsten Durchlauf zu diesem Befehl, wird $+$ zugedeckt usw. Daher hat man:



Man findet mit dem SR1

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{99} = 0,78039 \quad \text{und} \\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{101} = 0,79029$$

und daher $0,78034 < \pi < 0,79034$, hieraus folgt die angegebene Abschätzung.

2. 1. Variante

Wir merken uns die Teilsummen im Speicher des SR1, einige Zwischenrechnungen sind aber außerhalb des Rechners (etwa im Kopf) auszuführen. Mit MR lassen wir uns die Teilsummen als Zwischenenergie anzeigen:

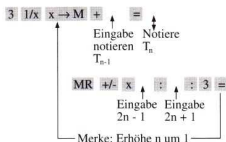
Eingabe	Tastensequenz
1 x 3 =	1/x x→M
3 x 9 =	1/x +/- MR+ MR
5 x 27 =	1/x MR+ MR
7 x 81 =	1/x +/- MR+ MR
usw.	

2. Variante

Es bezeichne $s_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)3^k}$, dann ist die n-te Teilsumme $T_n = s_1 + \dots + s_n$. Wir notieren uns jeweils T_n und berechnen die Summanden s_n mit dem SR1. Das fortwährende Aufschreiben und erneute Eintippen von T_n bedeutet natürlich einen Genauigkeitsverlust!

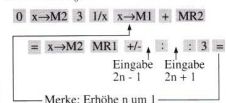
$$\text{Beachte } s_{k+1} = -\frac{2k-1}{2k+1} s_k, \quad s_1 = \frac{1}{3}.$$

Dann kann man so vorgehen:
Merke $n=1$, $T_0=0$

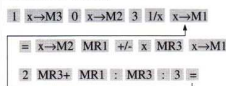


Jetzt wollen wir uns einen Taschenrechner vorstellen, der Speicher M1 und M2 besitzt und über Tasten $x \rightarrow M1$, $x \rightarrow M2$, MR1, MR2, M1+ und M2+ in Analogie zum SR1 verfügt. Auf M1 können dann die Summanden s_n und auf M2 die Teilsummen T_n gespeichert werden:

Merke $n=1$, $T_0=0$



Schließlich soll noch ein dritter Speicher und entsprechende Tasten $x \rightarrow M3$, MR3, M3+ vorhanden sein, auf denen die Zahlen $(2n-1)$ festgehalten werden:



•Zeitungsschnipsel (Seiten 8/9)

•Das schnellste Auto

Bezeichnen wir mit t_1 und t_2 die für die erste bzw. zweite Fahrt benötigten Zeiten. Dann gilt:

$$v_1 = 1 \text{ Meile} : t_1, \quad v_2 = 1 \text{ Meile} : t_2, \\ v_0 = 2 \text{ Meilen} : (t_1 + t_2)$$

Stellen wir die ersten beiden Gleichungen nach t_1 bzw. t_2 um und setzen das Ergebnis in die dritte Gleichung ein, so bekommen wir:

$$v_0 = \frac{2 \text{ Meilen}}{\frac{1 \text{ Meile}}{v_1} + \frac{1 \text{ Meile}}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \\ = \frac{2}{\frac{1}{1004,403 \text{ km/h}} + \frac{1}{1034,540 \text{ km/h}}} \\ = 1019,25 \text{ km/h}.$$

Zusatzfrage: Warum ist v_0 etwas kleiner als das arithmetische Mittel von v_1 und v_2 ?

•24-Stunden-Einradfahren

Mit jedem Pedaltritt legt der Einradfahrer die Strecke zurück, die gleich dem Umfang seines Rades ist. Für ein Rad mit 26 Zoll Raddurchmesser sind das $\pi \cdot 26 \cdot 2,54 \text{ cm} = 207,5 \text{ cm}$.

Um eine Strecke von 279.274 km = 27927400 cm zu fahren, sind also 27927400 cm : 207,5 cm = 134600 Tritte erforderlich.

•Die «Rainbow Bridge»

1. Aus $b=a+(n+2)b$ folgt mit $b \geq 88 \text{ m}$, $a=0,5 \text{ m}$ und $b=c=d=2,80 \text{ m}$ $m \geq \frac{88m-a}{b} - 2 = 29,25$.

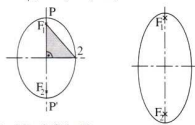
Das Hochhaus hat mindestens 30 Stockwerke. Das höchste Hochhaus der Welt, ein Verwaltungshochhaus ist der rund 443 m hohe «Sears Tower» in Chicago/USA.

2. Zum Berechnen werden auf den Symmetrieachsen liegende Punkte P, P' und Q der Ellipse benutzt.

$$\text{Aus } \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = k \text{ folgt mit } \overline{PP_1} = \overline{P'P_2} \\ k = \overline{P'P_2} + \overline{PP_2} = \overline{P'P} = 2a = 2 \cdot 88 \text{ m}.$$

Wegen $\overline{F_1Q} = \overline{F_2Q}$ folgt aus $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = k$, $\overline{QF_1} = \frac{k}{2} = a$. Aus der Pythagoreischen Gleichung $c^2 + b^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ ergibt sich

$$\overline{F_1F_2} = 2c = \sqrt{k^2 - (2b)^2} \\ = \sqrt{(176\text{m})^2 - (84\text{m})^2} \approx 155 \text{ m}.$$



•Zwei-Drei (Seite 9)

Die Endergebnisse lauten: 2187, 1458, 2916, 1944, 1296, 2592, 1728, 1152, 2304, 1536 und 1024.

•Geometrie auf dem Schachbrett (Seite 11)

1. c4 Df8, 2. c:d5 Da3, 3. d6 Dh3, 4. Ke2 Dc8, 5. d7 Dc1, 6. d8T Dh6, 7. Td2 Da6+, 8. Kd1 Df1 matt.

•Dem «...gemeinen man zu nutze...» (Seite 13)

- Der Sohn nähert sich dem Vater je Tag um $9-6=3$ Meilen. Wegen $100=33 \cdot 3+1$ holt der Sohn den Vater im Verlaufe des 34. Tages ein.
- Die Kosten für den Wirt betragen $52 \cdot 12(4+3+2)$ Groschen = 5616 Groschen.
- Der Lohn beträgt insgesamt $13 \cdot 17 \cdot 15$ Pfennige = 3315 Pfennige.
- Jede Tochter erbt x , die Mutter also $2x$, der Sohn $4x$; das sind zusammen $x+x+2x+4x=8x$ (Gulden). Nun gilt $8x=3600$, $x=450$. Jede Tochter erbt 450 Gulden, die Mutter 900 Gulden, der Sohn 1800 Gulden.
- Für 30 Tage fleißige Arbeit würde man 30·7 Pfennig = 210 Pfennig erhalten. Für jeden gefeierten Tag vermindern sich diese 210 Pfennig um $7+6=13$ Pfennig. Nun gilt $13 \cdot x = 210$, also $x = 16 \frac{2}{13}$. Folglich hat der Arbeiter an 16 Tagen gefeiert und nur an 14 Tagen gearbeitet.

6) Wir rechnen $1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = \frac{17}{28}$; wegen

$\frac{17}{28} \cdot x = 17$ gilt $x=28$. Die drei Gesellen haben 28 Gulden gewonnen.

7) Wegen $123+536+141=800$ erhalten diese drei Personen vom Gewinn

$\frac{123}{800} \cdot 130 \text{ Gulden} = 19 \frac{79}{80} \text{ Gulden}$,

$\frac{536}{800} \cdot 130 \text{ Gulden} = 87 \frac{1}{10} \text{ Gulden}$

bzw. $\frac{141}{800} \cdot 130 \text{ Gulden} = 22 \frac{73}{80} \text{ Gulden}$.

8) Das Vermögen des Vaters betrage x Gulden; dann gilt $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 92 = x$, also $x = 240$. Das Vermögen betrug 240 Gulden.

9) $x:12 = 42:64$, $x = 7 \frac{7}{8}$. Eine Doppelsammel muß dann $7 \frac{7}{8}$ Lot wiegen; das sind 7 Lot und $3 \frac{1}{2}$ Quent.

10) Angenommen, es waren x Landsknechte, also $(1200-x)$ Bauern; dann gilt

$$\frac{1}{4} \cdot (1200-x) + \frac{1}{2} \cdot x = x,$$

also $x=400$. Somit waren es 400 Landsknechte und 800 Bauern.

11) Angenommen, es waren m Männer, also $(21-m)$ Frauen; dann gilt $5m + 3(21-m) = 81$, also $m=9$. Es waren 9 Männer und 12 Frauen.

12) Rückwärtsschreitend ergibt sich folgendes: Vom Rest 1 ausgehend erhält man schrittweise $(1+2):2=6$, $(6+2):2=16$, $(16+2):2=36$. Es wurden 36 Äpfel gekauft. ...

13) Es gilt $x = \frac{5 \cdot 6 \cdot 73 \cdot 1000}{7 \cdot 10 \cdot 100} = \frac{2190}{7} = 312 \frac{6}{7}$

1000 Pfund in Padua entsprechen $312 \frac{6}{7}$ Pfund zu Köln.

14) Für die vier Summanden a , b , c , d gilt

$$a+b+c+d=32 \text{ und } a=\frac{b+c}{7} \text{ und } b=\frac{c+d}{5} \text{ und } c=\frac{a+d}{2}.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a=2$, $b=5$, $c=9$, $d=16$.

15) Angenommen, diese Person hatte anfangs x Gulden; dann gilt $((2x-1)-2)-2-3=19$, also

$$x = 2 \frac{5}{8}. \text{ Anfangs hatte diese Person } 2 \frac{5}{8} \text{ Gulden.}$$

16) Angenommen, es wurden a Ochsen, b Schweine, c Kälber und d Ziegen gekauft; dann gilt $4a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}d = 100$

und $a+b+c+d = 100$. Daraus folgt durch entsprechende Umformungen $b = 3 \cdot (20-a) - \frac{c}{5}$.

Es muß also c ein Vielfaches von 5 sein. Dieses diophantische Gleichungssystem hat endlich viele Lösungen; davon seien vier angegeben:

a	b	c	d
1	56	5	38
2	53	5	40
5	43	10	42
10	25	25	40

17) In einer Stunde werden auf den drei Mühlen $\frac{20}{8} \cdot \frac{17}{8}$ bzw. $\frac{15}{8}$ Scheffel Getreide gemahlen. Für x Stunden gilt somit

$$\frac{20}{8} \cdot x + \frac{17}{8} \cdot x + \frac{15}{8} \cdot x = 24.$$

$$20x + 17x + 15x = 192, 52x = 192, \text{ also}$$

Folglich werden 20 Scheffel Getreide von den drei Mühlen zusammen in $\frac{192}{52}$ Stunden gemahlen.

18) Es seien a , b bzw. c die einzelnen Geldbeträge; dann gilt $a+7=4(b+c)$ und $b+9=5(a+c)$ und $c+11=6(a+b)$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a=b=c=1$. Jeder dieser drei Gesellen hatte also einen Gulden.

•Komisches, Kniffliges und Knackiges (Seite 14)

•Adam Ries

Er zeichnete nach dem Satz des Thales viele rechte Winkel als Peripheriewinkel über dem Durchmesser des Kreises.

•Sprachecke (Seite 15)

Summe

Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 99 wählte man die, welche nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbar sind. Findet die Summe dieser Zahlen!

Lösung:

Aufgrund der Aufgabenstellung sind die ausgewählten Zahlen sämtlich ungerade. Die Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 99 ist

Von diesen ungeraden natürlichen Zahlen sind 3, 9, 15, ..., 93, 99 durch 3 teilbar, und ihre Summe ist

$$t = \frac{(3+99) \cdot 17}{2} = 867.$$

Somit ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 99, welche nicht durch zwei und nicht durch drei teilbar sind, gleich $2500-867=1633$. Mathematik und Poesie sind Äußerungen derselben starken Vorstellungskraft, nur daß sie in dem einen Fall an den Kopf, im anderen Fall an das Herz adressiert ist.

•Karten in L-Form

Kann man mit Hilfe von 21 Kärtchen in L-Form (siehe Abbildung) die 63 nicht schraffierten Felder eines 8×8 Schachbretts belegen? Wenn ja, dann gib eine Lösung an!

Lösung:



•Komisches, Kniffliges und Knackiges (Seiten 26/27)

•Erst staunen, ...

$$T=6; S=7; U=8; I=4; L=32; G=3$$

•Spiel mit Zahlen

1. 1,2,1,3,2; 3,3,4,5; 6,7,9; 13,16; 29

2a) $9-1-5=4$; $6-3-9=2$; $6-5+6=7$ (waagr.)

2b) $(6+4):2=5$; $(3-1)-7=14$; $9+5-8=6$ (waagr.)

3. $(1+8+2+3+6+7) \cdot m = 27m$

•Geduldsspiel

1.



Abb. 1

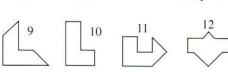
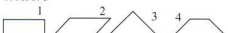
2.



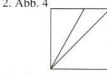
Abb. 2

•Zwei Geduldsspiele

1. Abb. 3



2. Abb. 4



•Denksport

$$1. 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 11 = 61 \text{ (Kreuze)}$$

2. Figur a)

•Nachgedacht – mitgemacht

$$1. 8 - 4 + 6 = 10; 18 - 10 + 7 = 15; 23 - 8 + 9 = 24 \text{ (Haus)}$$

2. Nr. 1: Peter; Nr. 2: Rainer; Nr. 3: Heidi; Nr. 4: Thomas; Nr. 5: Christel