

H 113228

Heft 5

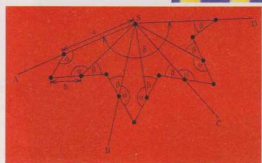
Oktober 1992

26. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

Mathematische
Schülerzeitschrift



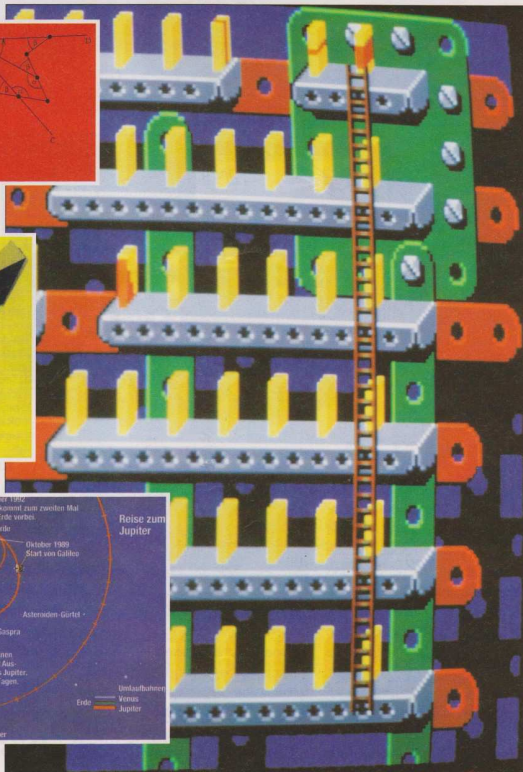
**Streckenteiler
und Winkelteiler**



Olympiade-Ecke



**Kepler und die
Planetenbahnen**

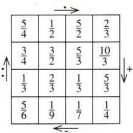


Computer-Spiel: Pushover

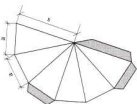
Inhaltsverzeichnis

Komisches, Kniffliges und Knackiges 4

Buchstaben vertreten Ziffern, Sprachecke, Logik in Potenzen, Produkten und Summen, Primzahlversuche, Spiel mit Zahlenlabyrinthen.



Pop-Up-Modelle 6



Eine pfiffige Bastelanleitung für aufklappbare Modelle von Pyramiden, Prismen, Würfeln und Quader von **Thomas Müller**.

Komisches, Kniffliges und Knackiges 8

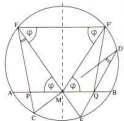
Die Ermittlung von Primzahlen mit Hilfe des Sieb des Eratosthenes und dem Sundaram-Schema ergänzt **Herbert Kästner** mit Einblicken in die Antike.

Das dritte Planetengesetz von Kepler – einmal ganz anders 11

J. Buhrow wandelt auf den Spuren von Kepler und zeigt, daß die Beschäftigung mit Logarithmen auch nach der Einführung des Taschenrechners ihre Bedeutung haben.

Die Olympiade-Ecke 12

Einblicke in den Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg von **Paul Jainta**.



Leserpost 21

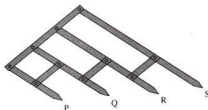
Aufruf zur Suche von Primzahlmehrlingen von **Dr. W. Schöbel** und ein Rückblick auf ein Mathelager von **Gundula Heinen**.

Was geschah vor ... Jahren? 22

Teil IV der Chronologie 1992 mit besonderem Augenmerk auf Laurent Pothénot und John William Strutt (Lord Rayleigh) von **H.-J. Ilgands**.



Streckenteiler und Winkelteiler 23



Mathematische Bonbons aus dem Deutschen Museum in München – aufbereitet von **W. Träger**.

Flächeninhaltsvergleiche 24

Auch komplizierte Aufgaben zum Flächeninhaltsvergleich lassen sich durch geschickte Hilfskonstruktionen überraschend einfach lösen zeigt **F. Bodnar**.



Geometrie ohne Irrationalzahlen 27

Interessante Eigenschaften der rationalen Ebene – dargestellt von **Klaus Ulshöfer**.

Alphons logische Abenteuer 29

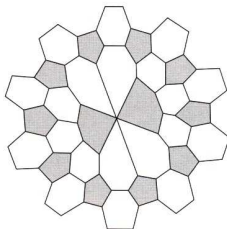
– aufgezeigt von **L. Kreiser**.

Systematische Untersuchung: Zusammensetzung von drei Dominosteinen 29



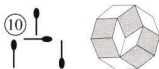
– behandelt von **Hermann Oehl**.

Lösungen zur Olympiade-Ecke in Heft 4/92 30



Marktecke 32

Lösungen 34



Deutsche Schulschachmeisterschaften 1992 36

Ein interessanter Bericht von **Markus Spindler**.





Komisches, Kniffliges und Knackiges

In jeder der folgenden Aufgaben vertritt stets ein Buchstabe eine Ziffer, und die Null darf nie zuvorderst stehen. Bei jeder Addition gibt es genau eine Lösung.

1. Eine Sehne in einem Kreis teilt diesen stets in zwei konvexe Flächen:

```

S E H N E
K R E I S
K O N V E X

```

2. Bei einem Fünfeck gilt für die Berechnung des Umfangs:

```

S E I T E
S E I T E
S E I T E
S E I T E
S E I T E
U M F A N G

```

3. Für Sportler dürfte sicher die folgende Aufgabe Gültigkeit haben:

```

S U R F E N
T E N N I S
F R E U D E

```

4. Ganz einfach auf zwei Arten addieren:

```

Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W E I
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
Z W A N Z I G
N E U N Z I G

```

Die Buchstaben der folgenden Addition können auf zwei Arten zu einer korrekten Addition führen: Entweder man bildet gemäß den Regeln römische Zahlen, oder man ersetzt jeden Buchstaben durch eine Ziffer zwischen 0 und 9. Auf beide Arten entstehen korrekte Additionen.

```

D C X X I
M D X X X V I
M M C L V I I

```

6. Auch Städte lassen sich zu einer Addition vereinen:

```

E S S E N
B E R L I N
S T A E D T E

```

7. Oder auch drei Städte zusammen:

```

B O N N
M A I N Z
W E I M A R

```

Stefan Bondeli, Zürich

Logik in Potenzen, Produkten und Summen

Jeweils drei der unten angeführten Zahlenfolgen sind nach dem gleichen Gesetz gebildet. Wer es erkennt, wird die letzten beiden Glieder der dritten und der sechsten Folge ergänzen können. Und er wird die beiden Bildungsgesetze als zwei Folgen von Termen darzustellen wissen, in denen n für die Anzahl der Glieder steht und die natürlichen Zahlen von 1 bis n verwendet werden. (Es genügt, die ersten drei Glieder einer Folge und das letzte so darzustellen; für die Zwischenglieder setzt man drei Punkte.)

- A) 1 16 27 16 5
 B) 1 32 81 64 25 6
 C) 1 64 243 256 125 x y
 D) 6 24 36 24 10
 E) 7 42 93 76 35 12
 F) 8 76 258 272 140 x₁ y₁

Johanna Heller, Erfurt



Sprachecke

Can you move only two matches to again have a wineglass, but with the dime outside it?
 aus: Fun with mathematics, Toronto



Trois fois rien

Reconstituez cette multiplication, sachant que:
 – Un chiffre est toujours représenté par la même lettre.
 – Une lettre ne peut représenter qu'un chiffre.
 – Il n'y a pas d'autre chiffre 3 que celui déjà écrit.
 – Le chiffre 0 est représenté par la lettre O.
 Et, bien sûr, la multiplication est exacte!

```

R I E N
x      3
-----
C L O U S

```

aus: Tangente, Paris

A dime in the glass

The drawing shows four matches and a dime arranged so that it looks as if there is a wineglass with a dime in it.

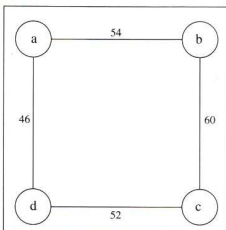


Собираясь в путешествие на автомобиле, я обнаружил неисправность спидометра и заменил его спидометром от другой машины. Когда я отъезжал от дома, на счетчике спидометра было 131313 км. На шоссе у столба с отметкой 100 км он показывал 131460, еще через 70 км – 131558 км. Когда я добрался до места назначения, счетчик показывал 132713 км. Сколько километров я проехал?

aus: Quant, Moskau

Wer findet die Primzahlen?

Anstelle der Buchstaben a, b, c und d ist in jedem Kreis so eine Primzahl einzusetzen, daß



die Summe der beiden Zahlen, die in zwei durch eine Strecke verbundenen Kreisen stehen, gleich der an der verbindenden Strecke stehenden Zahl ist.

W. Träger, Döbeln

Spiel: Zahlenlabyrinth

Den Feldern unserer Labyrinth (vgl. Spiel: „Wir untersuchen Labyrinth“ im Heft 3/1992, S. 28, 29 unserer Zeitschrift „alpha“) ordnen wir Zahlen zu, den Wegerichtungen Rechenoperationen.

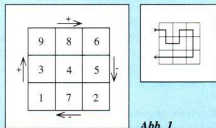


Abb. 1

Wir wollen ein Beispiel vorführen. In dem 3x3-Labyrinth haben wir natürliche Zahlen eingesetzt. Die Zeichen neben dem Rechteck geben die Rechenoperationen für die Richtungen des angegebenen Weges an (Abb. 1). Geht der Weg nach rechts bzw. nach oben, so werden die entsprechenden Zahlen addiert, in den beiden anderen Fällen nach links bzw. nach unten subtrahiert. In unserem Beispiel sind also folgende Additionen bzw. Subtraktionen durchzuführen: $9 - 3 = 6$ nach unten, $6 + 4 = 10$ nach

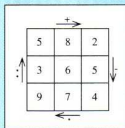


Abb. 2

rechts, $10 + 8 = 18$ nach oben, $18 + 6 = 24$ nach rechts, $24 - 5 = 19$ nach unten, $19 - 2 = 17$ nach unten, $17 - 7 = 10$ nach links und $10 - 1 = 9$ oder zusammenhängend: $9 - 3 + 4 + 8 + 6 - 5 - 2 - 7 - 1 = 9$. Die Lösung, das Ergebnis des Zahlenlabyrinths ist also 9.

Man ermittle das Ergebnis für die nebenstehenden Vorgaben (Abb. 2). Wie zu erkennen ist, verwenden wir jetzt alle vier Grundoperationen.

Welchen Weg muß man in dem Zahlenlabyrinth der Abb. 2 beschreiten, wenn man das Ergebnis erhalten soll? Zeichne diesen Weg. Nachdem wir bisher Aufgaben für das 3x3-Zahlenlabyrinth gelöst haben, wollen wir nun den Schwierigkeitsgrad etwas erhöhen und uns einem 4x4-Zahlenlabyrinth zuwenden. Als Zahlenbereich wollen wir den der gebro-

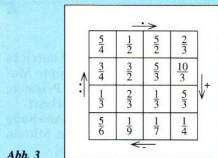


Abb. 3

chenen Zahlen verwenden. Ermittle das Ergebnis für die angegebenen gebrochenen Zahlen und den vorgegebenen Weg (Abb. 3).

Berechne das Zahlenlabyrinth für zwei andere mögliche Wege bei gleichem vorgegebenen Ein- und Ausstieg. Stelle ein weiteres 3x3-Zahlenlabyrinth auf. Verwende wieder alle vier Grundrechenarten.

Da keine negativen Zahlen auftreten sollen, kann man nicht beliebige Zahlen verwenden. Nimm erst natürliche Zahlen, später auch gebrochene Zahlen.

Gerhard Schulze, Herzberg



Auf wieviel verschiedene Arten kann man LÖSUNGSWEG lesen?

(siehe Abbildung)

L
Ö Ö
S S S
U U U U
N N N N N
G G G G G G
S S S S S S S
W W W W W W W W
E E E E E E E E E
G G G G G G G G G

1) Suche für jede Ziffer mindestens ein Wort (die Ziffer soll nicht am Anfang oder Ende stehen wie bei K1a4)!

2) Suche in anderen Sprachen nach solchen Wörtern! (z. B. alone)

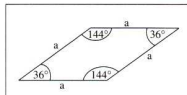
3) Elf mal elf

Wo fehlt in den folgenden elf Wortfragmenten das Wort elf?

Her	Wenkönig
Bast	Grusilm
Nebmont	Dt
Diesahrer	Spargeld
Simpranse	Camiller
Himmahrt	

Heinz Siegler, Eschau

len auf 6 verschiedene Weisen zu einem regelmäßigen Zehneck so aneinander gelegt werden, daß nie zwei solche Parkettierungen durch eine Bewegung aufeinander abgebildet werden können.



Eine Möglichkeit wollen wir hier zeigen.

Das Nummernschild eines Autos ist folgendermaßen aufgebaut:

Abkürzung des Ortes – höchstens 2 Buchstaben – eine Zahl bis 999

Bsp: SÖM-AB 123 oder SÖM-P 6 usw.

Errechne, wieviele Autos ein Ort höchstens haben kann.

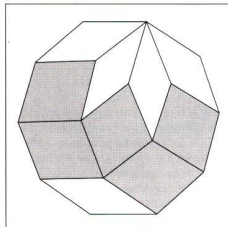
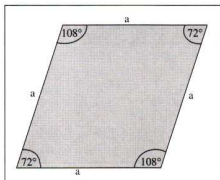
Lutz Kratzsch, Sömmerda

1fälle für 2fellös 1fallsreiche

Die Wörter Weihnachten, Rundreise und Steinschlag enthalten deutsche Zahlwörter, man könnte sie Weihn8en, Run3se und St1chlag schreiben. Mit solchen Wörtern kann man sich einige Spielereien ausdenken (siehe alpha 4/91 S. 19/7)

Ein Legespiel

10 Flächenstücke, von denen 5 zu Figur 1 und die anderen 5 zu Figur 2 kongruent sind, sol-



Walter Träger, Döbeln

Pop-Up-Modelle

Wollt Ihr Eure Mathelehrer durch in Sekundenschnelle aufgeklappte Modelle von Pyramiden oder Prismen, Würfel oder Quader überraschen? Dann müßt Ihr die folgende Anleitung lesen, wie man mit geringen Mitteln reizvolle Modelle bauen kann! (Natürlich dürfen dies auch die Lehrer tun – die Schüler werden überrascht sein...)

In folgenden Zeilen wird beschrieben, wie man diese Modelle herstellen kann, die ohne Probleme – einfach zusammengeklappt – transportiert werden können und wenn man sie braucht, im Nu "aufgeklappt" sind. Es handelt sich um sogenannte Pop-Up-Modelle. Die Anregung dazu fand ich in einem englischen "Bastelheft" [1]. Manche Kindermärchenbücher, die auf ähnliche Weise entsprechende Kulissen beim Aufschlagen der Seiten für die einzelnen Geschichten erzeugen, habt Ihr vielleicht schon einmal gesehen – ebenso wie Glückwunschkarten...

Und das benötigt Ihr zur Herstellung

- Als Grundlage einen **Schuhkarton Format A 4**, in der Mitte einmal falten (ev. in einer Buchbinderei stanzen und gleich knicken lassen, erhöht die Lebensdauer beträchtlich), oder man wählt einen im Vergleich zum Schuhkarton etwas dünneren **Zeichenkarton**.
- Zum Bau der eigentlichen Modelle einen **Zeichenkarton**.
- **Klebstoff**, Klebeband (zur Verstärkung der Faltkanten!).

Die vorliegenden Modelle nehmen nicht mehr Platz ein als ein DIN A 5-Umschlag, aufgeklappt ergeben sie ein auf dem A 4-Karton stehendes Modell von ca. 10 cm Höhe. (**Abbildung 1**) (Für Lehrer: Selbstverständlich kann man bei Demonstrationsmodellen auch eine Basis des Formates A 3 – geknickt dann A 4 – nehmen und die Modelle entsprechend größer ausführen.)

Die Herstellung ist einfach:

- Man überträgt zunächst die Netzvorlagen (**Abbildung 2**) auf den Zeichenkarton in den in der Tabelle vorgeschlagenen Maßen. (Werden z. B. größere Höhen gewählt, dann kann es passieren, daß das gefaltete Modell aus der zugeklappten Basis, die ja als Schutzhülle dient, hervorragt und dadurch leicht beschädigt wird.)
- Danach ritzt man die Knickkanten vorsichtig an und sichert sie am besten mit einem

Stück Klebestreifen auf der späteren Innenseite des Modells.

- Nach dem Ausschneiden klebt man die vorgesehenen Laschen auf die in den "Klebeplänen" (**Abbildung 3**) schraffierten Flächen.
- Vor den ersten Auf- und Zuklappversuchen den Kleber gut antrocknen lassen.

Hinweise zu günstigen Maßen der Modelle:

Die Maße beziehen sich auf die in den Netzen angegebenen Seitenlängen (vgl. **Abbildung 2**):

Zu Klebeplan 1: (Sechseckige Basis)

Regelmäßiges sechseckiges Prisma:
 $a = 4,5 \text{ cm}$, Höhe $h = 8 \text{ cm}$
 Regelmäßige sechseckige Pyramide:
 $a = 4,5 \text{ cm}$, Seitenk. $s = 9 \text{ cm}$
 Prismenstumpf und Pyramidenstumpf:
 Nach Wahl am besten aus projizierendem Schnitt entnehmen (lassen); Modell für Parallelperspektivität, Perspektivität.

Zu Klebeplan 2: (Quadratische Basis)

Würfel $a = 7,5 \text{ cm}$
 Quader mit quadratischer Basis
 $a = 7,5 \text{ cm}$, Höhe $h = 6 \text{ cm}$
 Regelmäßige vierseitige Pyramide
 $a = 7,5 \text{ cm}$, Seitenk. $s = 10 \text{ cm}$
 Würfelschnitte (z. B. nach gleichseitigem Dreieck...).

Zu Klebeplan 3: (Rechteck)

Quader mit rechteckiger Basis
 $a = 10 \text{ cm}$, $b = 4,5 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$
 Pyramide mit rechteckiger Basis
 $a = 10 \text{ cm}$, $b = 4,5 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ cm}$

Achtung: Vor dem Ankleben muß man die Größe des Winkels zwischen Knickkanten

und Rechteckseiten bestimmen; sie beträgt bei den eingegebenen Werten für a , h und s rund 38° für den Winkel zur kurzen Rechteckseite.

Bemerkung:

Auch andere Körper, z. B. regelmäßige Oktaeder, lassen sich in Pop-Up-Bauweise herstellen, lediglich die Basisplatte ist nicht realisierbar. Beim "Normoktaeder" ABCD EF denke man sich dieses zum Beispiel längs der Kanten AE und AF "aufgeschlitzt". Das Oktaeder läßt sich dann (ohne Gewalt) in eine platten Form bringen.

Vorteile gegenüber der herkömmlichen Modellbauweise:

Vorteil 1: Ihr (die Schüler) könnt diese Modelle immer ohne viel Platzaufwand mitnehmen und vor allem ohne fürchten zu müssen, die Modelle beim Transport zu beschädigen oder gar zu zerstören.

Für die Lehrer: Denken Sie daran, wie oft die Schüler der unteren Klassen das in manchen Schulbüchern angebotene Quader- oder Würfelnetz beschädigen und wie lange es bei manchen Schülern dauert, diese Modelle in der Schulstunde zusammenzubauen, wenn sie gebraucht werden.

Vorteil 2: Auch über längere Zeiträume können diese Modelle bequem (im Bücherregal) aufbewahrt werden – ohne zu verstauben. Dieser Vorteil ist vor allem bei Platzmangel zu Hause oder in der Schule gewichtig!

Vorteil 3: (v. a. für Lehrer) Man kann diese Modelle mitnehmen, ohne gleich von vornherein durch die mitgebrachte Modellsammlung die Schüler vor dem festgelegten Zeitpunkt abzulenken. (Praktisch günstig, wenn man noch nicht weiß, ob man in der folgenden Stunde wirklich so weit kommt...)

von **Thomas Müller, Krems/Donau**

Literatur

- [1] Mathematical Curiosities 3 von Gerald Jenkins und Anne Wild.
 Tarquin Publications, Stradbroke, 1990.

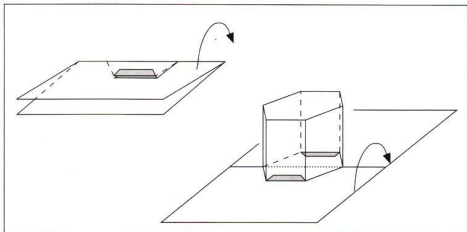


Abb. 1

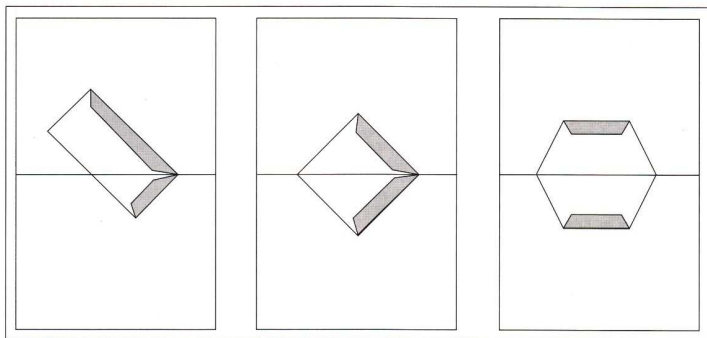


Abb. 2

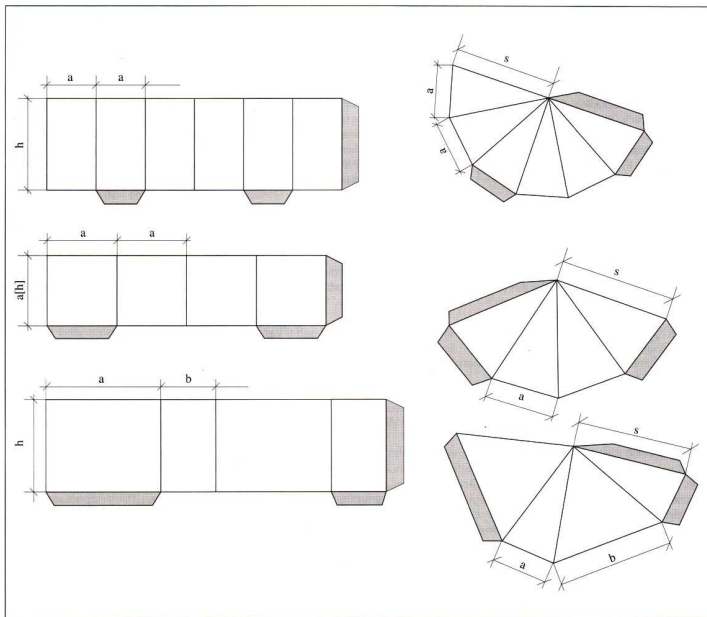


Abb. 3



Komisches, Kniffliges und Knackiges

Nadeln im Heuhaufen

Primzahlen spielen eine grundlegende Rolle bei der Untersuchung der Teilbarkeit natürlicher Zahlen. Bücher bieten zur Ermittlung von Primzahlen häufig das Sieb des Eratosthenes an. Relativ unbekannt, aber bedeutend effektiver ist das hier vorgestellte Sieb des Sundaram.

Teilerarme Zahlen

Die Zahl 12 hat sechs Teiler: 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Beispielsweise ist 4 ein Teiler von 12, denn 12 kann als Produkt aus 4 und einer weiteren natürlichen Zahl (hier: 3) geschrieben werden: $12 = 4 \cdot 3$. Hingegen ist 5 kein Teiler von 12, denn die Gleichung $12 = 5 \cdot x$ hat keine natürliche Zahl x zur Lösung.

Die Aussage "4 ist ein Teiler von 12" schreibt man in der Mathematik kurz so: $4 \mid 12$, und $5 \nmid 12$ (Teilbarkeitszeichen durchgestrichen) bedeutet natürlich "5 ist nicht Teiler von 12". Allgemein kann man also sagen: Die natürliche Zahl a ist ein Teiler der natürlichen Zahl b (in Zeichen $a \mid b$) genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x so gibt, daß $b = a \cdot x$ ist.

Welche Teiler hat die Zahl 1? Welche Zahlen haben 1 als Teiler? Welche Teiler hat die Zahl 0? Welche Zahlen haben 0 als Teiler? Hinweis: Man benutze die oben angegebene Definition der Teilbarkeit.

Jede natürliche Zahl $a > 1$ hat mindestens zwei Teiler, nämlich 1 und a selbst. Zahlen, die außer diesen beiden Teilern keine weiteren Teiler besitzen, heißen **Primzahlen**. Sie sind also gewissermaßen die "teilerärmsten" Zahlen. Die kleinste unter ihnen ist die Zahl 2, weitere Primzahlen sind 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... **Suche noch weitere Primzahlen, vieleicht auch eine, die größer ist als 100 (oder 500 oder 1000).**

Die Primzahlen als Bausteine aller natürlichen Zahlen

Schon die alten Griechen wußten, daß jede natürliche Zahl > 1 entweder eine Primzahl ist oder sich als Produkt von Primzahlen schreiben läßt; die Primzahlen mithin sozusagen die Bausteine sind, aus denen man durch Multiplikation alle natürlichen Zahlen gewinnen kann. Deswegen **nennt man die Nichtprimzahlen auch zusammengesetzte Zahlen**.

Diese Erkenntnis ist freilich nicht sehr tieflegend, weil sofort einzusehen: Ist a keine Primzahl, so hat a mindestens einen (von 1 und a verschiedenen) Teiler t ; also $a = t \cdot s$. Nun sind entweder s und t beides Primzahlen – dann ist die gewünschte Zerlegung von a bereits erreicht –, oder sie sind es nicht. Dann wendet man dieselbe Überlegung auf die einzelnen Faktoren t und/oder s an und erhält etwa $a = t \cdot s = (t_1 \cdot t_2) \cdot (s_1 \cdot s_2)$, usw. Da bei jedem Schritt mindestens ein Faktor in ein Produkt echt kleinerer Faktoren zerfällt (der Faktor 1 tritt nicht auf!), muß das Verfahren nach einer gewissen Anzahl von Schritten zur gewünschten Zerlegung führen.

Zerlege die Zahl 60 auf diese Weise!

Wesentlich interessanter ist nun die Tatsache, daß es zu jeder Zahl a ($a > 1$) nur eine solche Primfaktorzerlegung gibt, auf welchem Wege und über welche "Zwischenschritte" man sie auch immer gewinnen mag. (Die Reihenfolge der Faktoren ist freilich beliebig; man könnte sie z. B. nach der Größe ordnen.) Man kann also sagen: Jede Zahl $a > 1$ ist entweder eine Primzahl oder auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Die Suche nach den Primzahlen

Um die Primfaktorzerlegung etwa von 1386 zu gewinnen, rechnen wir vielleicht so: $1386 = 9 \cdot 154 = (3 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 22) = (3 \cdot 3) \cdot (11 \cdot 7) \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, und damit sind wir fertig, denn nun sind alle Faktoren Primzahlen. Schwieriger ist es schon, zu erkennen, daß $72 \cdot 775 \cdot 727 = 7 \cdot 151 \cdot 10 \cdot 177$ bereits die gewünschte Zerlegung ist, denn $7 \cdot 157$ und $10 \cdot 177$ sind beides Primzahlen. Es ist verständlich, daß Primzahlen beim Durchlaufen der Zahlengeraden immer seltener auftreten (warum?), die Suche nach ihnen schließlich vergleichbar wird mit jener nach der "Nadel im Heuhaufen".

Das wirft die Frage auf: Wie kann man auf möglichst effektive Weise zu einer möglichst weit reichenden Primzahl-Liste kommen?

Das Prüfen jeder Zahl auf ihre Teilbarkeitsseigenschaften, ob nun "von Hand" oder mit dem Computer, ist gewiß wenig effektiv, und bei größeren Zahlen kommt selbst der Computer ins Schwitzen. Die Bücher bieten häufig das sogenannte **Sieb des Eratosthenes** an; es ist zwar sehr leicht zu verstehen, aber doch ziemlich unhandlich [Eratosthenes war ein griechischer Gelehrter, der etwa von 275 v. u. Z. bis 195 v. u. Z. lebte]. Ein wenig bekanntes, aber recht wirkungsvolles Verfahren ist das **Sieb des Sundaram** [indischer Mathematiker]. Es beruht auf folgenden Überlegungen: Außer 2 ist offenbar jede Primzahl ungerade. Warum? Könnte man nun alle ungeraden Nicht-Primzahlen (bis zu einer beliebig vorgegebenen Schranke) aufschreiben, wüßte man: alle nicht notierten ungeraden Zahlen sind Primzahlen. Mit anderen Worten: Sundarams Sieb filtert

Eratosthenes von Kyrene

Eratosthenes von Kyrene war ein Universalgelehrter. Seine Verdienste liegen aber vor allem auf dem Gebiet der mathematischen Geographie, wo er zum Beispiel eine Erdkarte anfertigte.

Dazu teilte er die Erde in Vierecke ein, bestimmte den Erdumfang und nahm Vermessungen der Erdkugel vor.

Mit Archimedes führte Eratosthenes einen brieflichen wissenschaftlichen Meinungs- und Gedankenaustausch.

Etwa um 246 v. u. Z. wurde er an den Königshof von Alexandria gerufen, um dort als Prinzenlehrer und Direktor der Bibliothek zu wirken.

Alexandria war zu dieser Zeit das Zentrum der antiken Wissenschaft.

Noch vor 300 v. u. Z. wurde dort das sogenannte Museum ins Leben gerufen. Dieses erste staatlich begründete und unterhaltene Forschungszentrum besaß Hörsäle, Arbeitszimmer, Speiseräume, eine Art Sternwarte, zoologische und botanische Gärten. Angegliedert war eine riesige Bibliothek. Sie umfaßte etwa 400 000 Papyrusrollen, gesammelt wurden die wissenschaftlichen, philosophischen und schöngeistigen Schriften der Völker des Mittelmeeres und des vorderen Orients. Gewirkt haben am Museum so bedeutende Naturforscher und Mathematiker wie Euklid, Archimedes, Apollonius, Diophantos, Heron von Alexandria und Ptolemaios.

Leider wurde diese Bibliothek durch die Römer vernichtet. Unter anderem beheizten sie mit den wertvollen Schriften ihre Bäder.

Das 7. Weltwunder der Antike – der Leuchtturm auf der Insel Pharos vor Alexandria

Im Jahr 279 v. u. Z. wurde dieser sagenumwobene Turm gebaut. Das zwischen 120 und 140 m hohe Bauwerk wurde zunächst als Landmarke errichtet, später als Leuchtturm umgerüstet.

Er wurde Vorbild für alle später errichteten Leuchttürme. Im 14. Jahrhundert zerstörte ein Erdbeben das Bauwerk. Nun soll er wieder aufgebaut werden. Allerdings nicht genau an der historischen Stelle, denn dort errichteten die Mamluken aus den Kalksteinquadern des zerstörten Turmes eine Seefestung. Gebaut wird anhand einer Zeichnung des deutschen Archäologen und Architekten Friedrich von Thiersch (siehe oben). Das genaue Aussehen konnte nicht rekonstruiert werden.

Kosten soll das lukrative Projekt 35 bis 50 Millionen Mark, genügend Finanziers haben Interesse bekundet.



gende Zahl geht aus der vorangegangenen also durch Addition von 6 hervor. Sodann soll das Schema symmetrisch sein, d. h., mit der ersten Zeile hat man auch die erste Spalte und damit die Startzahlen für die 2., 3., usw. Zeile.

Das Schema des Sundaram

9	15	21	27	33	39	45	...
15	25	35	45	55	65	75	...
21	35	49	63	77	91	105	...
27	45	63	84	99	117	135	...
33	55	77	99	124	143	165	...
39	65	91	117	143	169	195	...
45	75	105	135	165	195	225	...

Auch in diesen Zeilen erhält man jede Zahl aus der vorangegangenen durch Addition ei-

ner festen Größe, die bei der 2. Zeile 10, bei der 3. Zeile 14, bei der 4. Zeile 18 usw. beträgt, allgemein: die konstante Differenz zweier benachbarter Zahlen der i -ten Zeile beträgt $4i + 2$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Dieses Schema kann man nun nach rechts und nach unten so weit fortsetzen (oder vom Computer ausrechnen lassen – wer schreibt ein einfaches Programm?), wie man es für wünschenswert erachtet. Wer Zeit sparen will, nutzt die Symmetrie des Schemas und notiert nur die Zahlen oberhalb bzw. unterhalb der Diagonalen, wie im angegebenen "verkürzten Sundaram-Schema" für die Nichtprimzahlen kleiner als 100 ausgeführt. Wie erhält man dann die "Startzahlen" in der Diagonale?

Nun müssen wir zeigen: a) das Sundaram-Schema enthält nur zusammengesetzte Zahlen; b) jede zusammengesetzte (ungerade) Zahl kommt in diesem Schema vor. Dann sind die Primzahlen ($\neq 2$) genau die im Schema fehlenden (ungeraden) Zahlen.

Zu a) Wir berechnen das in der i -ten Zeile und k -ten Spalte stehende Element a_{ik} : Zu ihm gelangt man, ausgehend vom ersten Element a_{i1} dieser Zeile, in $(k - 1)$ Schritten der konstanten Schrittweite $4i + 2$.

also: $a_{ik} = a_{i1} + (k - 1)(4i + 2)$. Nun ist das erste Element der i -ten Zeile gleichzeitig das i -te Element der 1. Zeile (Symmetrie!), und dieses erhält man aus dem ersten Element "9" der 1. Zeile nach $(i - 1)$ -Schritten der gleichen Schrittweite 6 (für die 1. Zeile);

also $a_{i1} = 9 + (i - 1)6 = 6i + 3$. Insgesamt erhält man damit:

$$a_{ik} = 6i + 3 + (k - 1)(4i + 2)$$

$$= 4ik + 2i + 2k + 1$$

$= (2i + 1)(2k + 1)$. Nun sieht man, daß a_{ik} eine zusammengesetzte Zahl ist!

Zu b) Ist z eine beliebige (ungerade) zusammengesetzte Zahl, so besitzt z (mindestens) zwei (von 1 und z verschiedene) ungerade Teiler, die wir etwa mit $2r + 1$ und $2s + 1$ bezeichnen.

Also ist $z = (2r + 1)(2s + 1)$ und steht nach a in unserem Schema in der r -ten Zeile und s -ten Spalte. Damit ist alles bewiesen.

Herbert Kästner, Sektion Mathematik der Universität Leipzig

genau die ungeraden Nichtprimzahlen heraus! Die erste ungerade Nichtprimzahl (>1) ist 9, die zweite ungerade Nichtprimzahl ist 15. Mit diesen beiden Zahlen beginnt man das entstehende Schema aufzubauen: Die erste Zeile beginnt mit den genannten Zahlen 9 und 15 und wird gleichabständig fortgesetzt; jede fol-

Verkürztes Sundaram-Schema für die ungeraden Nichtprimzahlen < 100

9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
25	35	45	55	65	75	85	95								
49	63	77	91												
81	99														

Das Delische Problem

Auf eine Erfindung des Dichters Eratosthenes geht folgende Geschichte zurück:

Auf der griechischen Insel Delos befand sich ein würfelförmiger Altar des Apollon, Sohn des höchsten griechischen Gottes Zeus. Dort gab eine Priesterin, die Pythia, Weissagungen (Orakel). Als sich die Delier zur Abwendung einer Seuche an das Orakel wandten, erhielten sie die Aufgabe, den Altar Apollons unter Beibehaltung seiner Form zu verdoppeln.

Eratosthenes hat sich sehr ausführlich mit der Würfelverdoppelung beschäftigt und auch ein Instrument (Mesolab) zur mechanischen Lösung gefunden. Da die Rechenverfahren der alten Griechen sehr gering entwickelt waren, versuchten sie alle wesentlichen mathematischen Probleme durch geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu lösen.

Allein mit diesen beiden Hilfsmitteln die Seite eines Würfels zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das Volumen des gegebenen Würfels, ist jedoch unmöglich.

nach: H. Pieper: Heureka, Deutscher Verlag der Wissenschaften, MSB Nr. 135

Die rechnerische Lösung überlassen wir nun Euch!

Das dritte Planetengesetz von Kepler – einmal ganz anders

Jeder Schüler lernt spätestens im Astronomieunterricht die drei Planetengesetze von Kepler. Mit Recht, denn mit ihnen hat Kepler die zu seiner Zeit noch vorhandenen Mängel des kopernikanischen Weltsystems beseitigt. 1609 kam sein berühmtes Buch «Astronomia nova» (Neue Astronomie) zum Druck und begründete seinen Ruhm als Astronom. Darin sind die ersten beiden nach ihm benannten Planetengesetze enthalten:

1. Jeder Planet läuft auf einer Ellipsenbahn um die Sonne, die in einem der beiden Brennpunkte steht.
2. In gleichen Zeitabschnitten überstreicht die Strecke Sonne-Planet gleichgroße Flächenstücke, daher ist die Geschwindigkeit der Planeten in Sonnennähe größer als in Sonnenferne.

Über Jahrzehnte unternommene genaue Messungen der Marsbahn von Tycho de Brahe waren das wissenschaftliche Erbe, das dieser seinem Nachfolger als kaiserlicher Astronom in Prag bei seinem Tod 1601 hinterließ.

Um nun Keplers Leistung bei dieser riesigen Arbeit richtig einzuschätzen, muß der Leser wissen, daß die Planetenbahnen mit wenigen Ausnahmen sich kaum von idealen Kreisbahnen unterscheiden (alpha, Heft 1/88).

Zehn Jahre nach der «Astronomia nova» erschien 1619 Keplers zweites Hauptwerk mit dem Titel «Harmonices mundi» (Die Weltharmonien). Darin ist neben zahlreichen mathematischen Entdeckungen sein drittes Planetengesetz enthalten, es besagt (etwa) folgendes:

3. Die dritten Potenzen der Abstände aller Planeten von der Sonne stehen im gleichen Verhältnis, wie die Quadrate ihrer Umlaufzeiten.

Für die mittleren Abstände ist damit ein genauer Zusammenhang zu den Umlaufzeiten im Sonnensystem erkannt worden, wieder hat Kepler ein gewaltiges Beobachtungsmaterial seiner Vorgänger genial zu einem mathematisch formulierten Gesetz zusammengefaßt. Wir wollen einmal einen ganz anderen Weg einschlagen, um zu seinem dritten Gesetz zu gelangen: Wegen der riesigen Entfernungen der Planeten von der Sonne führten die Astro-

nomen die mittlere Entfernung Sonne-Erde als astronomische Einheit AE = $149,6 \cdot 10^6$ km ein. In Tabelle 1 sind die Abstände in der 1. Spalte also auf die Erde bezogen. In der 4. Spalte sind die Umlaufzeiten in Jahren angegeben.

Aufgaben

- 1 Man berechne das 3. Kepler-Gesetz im doppellogarithmischen Diagramm mit den Entfernungen der 3. Spalte!
- 2 Man berechne den Proportionalitätsfaktor aus dem Achsenabschnitt!
- 3 Man berechne den Mittelwert des Anstiegs für alle Planeten!

Um nun alle Daten der Tabelle in ein Diagramm zu zeichnen, muß die Abszissenachse für die Entfernungen bis 40 und die Ordinatenachse für die Umlaufzeiten sogar bis 250 reichen. Man trägt daher solche Tabellen im logarithmischen Maßstab auf, dazu werden die Entfernungen und die Umlaufzeiten logarithmiert (vgl. Spalte 2 und 5). In Abb. 1 liegen die Wertepaare für alle Planeten, auch für diejenigen, die Kepler noch nicht kannte, sehr gut auf einer geraden Linie. Mit den Achsen $\log U$ und $\log a$ hat der mittlere Anstieg den Zahlenwert 1,5. Die Verbindungsgerade läuft genau durch den Ursprungspunkt, in dem die Erde mit den beiden Koordinaten 1, das heißt $\log 1 = 0$ eingezeichnet werden muß. Soweit das überraschende Ergebnis der graphischen Auswertung für alle Planeten nach Tab. 1.

Die Gleichung für diese Gerade durch den Nullpunkt heißt jetzt:

$\log U = m \cdot \log a$ mit dem Anstieg $m = 1,5$ (1)

multipliziert man auf beiden Seiten mit dem Faktor 2, so folgt

$$2 \cdot \log U = 3 \cdot \log a \text{ oder } \log U^2 = \log a^3. \quad (2)$$

Auf der Erde mit den Koordinaten 1 bezogen erhalten wir entlogarithmiert aus Gleichung (2) das dritte Gesetz von Kepler

$$U^2 : 1 = a^3 : 1. \quad (3)$$

Nicht auf die Erde bezogen gilt dann für die Planeten untereinander

$$U_1^2 : U_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \quad (4)$$

Wenn wir das Planetengesetz nicht als Verhältnisgleichung schreiben wollen, müssen wir einen Proportionalitätsfaktor K einführen

$$U^2 = k \cdot a^3. \quad (5)$$

Wie in Abb. 1 zu sehen ist, erfüllen auch die weit von der Sonne entfernten Planeten Uranus, Neptun und Pluto sehr gut das 3. Gesetz von Kepler, obwohl er diese noch nicht kennen konnte. Mehr noch: In der Neujahrnacht 1801 hat der italienische Astronom Piazzi den ersten Planetoiden Ceres entdeckt. Planetoiden sind sehr kleine Planeten, bis 1810 wurden die vier größten unter ihnen gefunden, es sind Ceres mit 1025 km Durchmesser, Pallas mit 560 km, Vesta mit 525 km und Juno mit 190 km. Für den ersten hat der Mathematiker Carl Friedrich Gauss, er war damals 23 Jahre alt, aus nur wenigen Beobachtungsdaten von Piazzi mit seinen ganz neuen mathematischen Methoden die genaue Ellipsenbahn berechnet. In der Neujahrnacht 1802 fand dann der Arzt und Astronom Olbers Ceres an der vorausgerechneten Stelle wieder. Heute kennen die Astronomen weit über 1000 solcher kleiner Himmelskörper, deren Bahnen fast alle zwischen der des Mars und des Jupiters liegen. Für den Mittelwert aller Abstände von der Sonne hat man 2,9 AE und für die mittlere Umlaufzeit $U = 4,5$ Jahre berechnet. Selbst diese Mittelwerte liegen noch recht gut auf der Geraden in Abb. 1. Obwohl Kepler schon nahe dran war, hat erst Newton das allgemeine

Tabelle 1: Abstand von der Sonne und Umlaufzeiten der Planeten

Planet	Symbol	$\frac{a}{AE}$	$\log a$	$\frac{a}{km \cdot 10^8}$	$\frac{U}{Jahre}$	$\log U$	$\frac{\log U}{\log a}$
Merkur		0,387	-0,41229	0,5791	0,241	-0,61979	1,499
Venus		0,723	-0,14086	1,0821	0,615	-0,21112	1,4988
Erde		1,0	0,	1,496	1,0	0,	—
Mars		1,524	0,18298	2,279	1,881	0,27439	1,4995
Jupiter		5,203	0,71625	7,783	11,862	1,07416	1,4997
Saturn		9,546	0,97982	14,28	29,458	1,46920	1,4995
Uranus		19,18	1,28285	28,72	84,02	1,92438	1,5000
Neptun		30,09	1,47842	44,98	164,78	2,21690	1,4995
Pluto		39,7	1,59879	59,46	247,7	2,39393	1,4973
Planetoiden		2,9	0,46239	4,338	4,5	0,65321	1,413

Gravitationsgesetz gefunden, aus dem die drei Kepler-Gesetze zwangsläufig folgen. Es steht in seinem Hauptwerk «Principia mathematica philosophiae naturalis» (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie), das 1687 in England gedruckt wurde. Demnach ist in K aus Gleichung (5) sowohl die allgemeine Gravitationskonstante als auch die Sonnenmasse enthalten. Bei genauerer Berechnung gehen noch die Planetenmassen ein, aber im Vergleich zur Sonne können diese vernachlässigt werden, damit bleibt Keplers 3. Gesetz eine sehr gute Näherung, wie auch Abb. 1 zeigt. In der wissenschaftlichen Arbeit wird nicht nur der Astronom, sondern jeder Naturforscher doppellogarithmische Diagramme benutzen, wenn er für seine Messungen ein allgemeines Potenzgesetz erwarten kann. Mit dem Ansatz

$$y = K \cdot x^n \tag{5}$$

ergibt sich eine Geradengleichung, wenn man auf beiden Seiten logarithmiert

$$\log y = \log K + n \cdot \log x. \tag{6}$$

Trägt man nun als Ordinate $\log y$ und als Abszisse $\log x$ auf, so kann aus dem Anstieg im Falle eines linearen Verlaufs der gegebenen Wertetabelle der Exponent n aus Gleichung (5) sehr genau ermittelt werden, n muß dabei keineswegs ganzzahlig sein. Aus Physik und

Chemie lassen sich zahlreiche Beispiele solcher Diagramme in doppellogarithmischen Koordinaten angeben. Der Handel hält für diesen Zweck entsprechend vorgedruckte logarithmisch eingeteilte Millimeterpapiere bereit. Wir wollen hierfür ein Beispiel aus der Thermochemie erläutern: 1912 hat der bedeutende niederländische Physiker Peter Debye für den Verlauf der Molwärmen C fester Körper bei sehr tiefen Temperaturen T theoretisch ein T^3 -Gesetz nach der Formel

$$C = K \cdot T^3 \tag{7}$$

vorausgesagt. Später ist dieses Potenzgesetz an zahlreichen einfachen Kristallen nichtmetallischer Art bestätigt worden, nachdem man mit Hilfe des flüssigen Heliums Messungen bei sehr tiefen Temperaturen durchführen konnte. Die Molwärme C eines Stoffes ist dabei diejenige Wärmemenge, die man zur Temperaturerhöhung um ein Grad benötigt, wenn ein Mol gemessen wird. Nach Gleichung (7) muß die Molwärme C steil abfallen, wenn die Temperatur auf sehr kleine Werte erniedrigt wird. **Tabelle 2** enthält eine sehr genaue Messung für Flußspat CaF_2 , die wir logarithmisch auswerten wollen, um Gleichung (7) zu überprüfen.

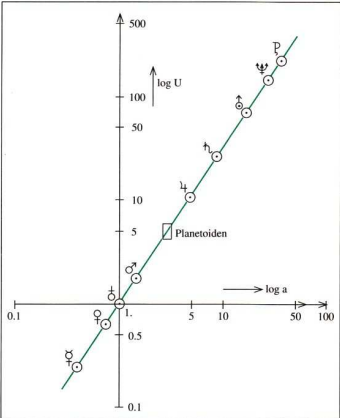


Abb. 1: 3. Planetengesetz

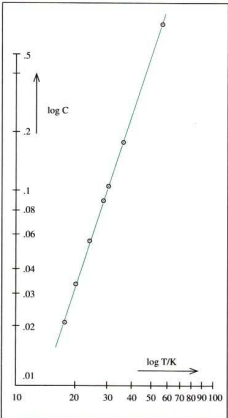


Abb. 2: CaF_2 Flußspat

Aufgaben

- Man zeichne die Molwärme C gegen die Temperatur T als kubischen Graph.
- Man berechne die Anstiegswerte aus dem logarithmischen Diagramm jeweils zwischen den benachbarten Punkten und bilde den Mittelwert für die Steigung.

Abb. 2 gibt den sehr guten linearen Verlauf in doppellogarithmischen Koordinaten an. Die Rechnung liefert einen Anstieg mit dem Wert $m = 2,98$, also aufgerundet 3, wie es Gleichung (7) verlangt. Der Achsenabschnitt berechnet sich zu

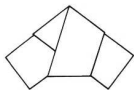
$$\log K = -5,34, \text{ d. h. } K = 4,6 \cdot 10^{-6}. \tag{8}$$

Auch dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit der theoretischen Formel von Debye, die wir hier aber nicht erläutern wollen. Auch nach Erfindung der Taschenrechner lohnt die Beschäftigung mit Logarithmen. Man kann nun mit den Mitteln der höheren Mathematik aus dem Minimum der Fehlerquadratsummen bei jeder Messung nach Gauss noch eine genaue Ausgleichsrechnung für die ermittelten Geraden durchführen. Für die Güte der jeweiligen Messung und Berechnung wird dann ein Korrelationskoeffizient definiert, der im theoretischen Idealfall, d. h. wenn sämtliche Fehler verschwindend klein ausfallen, den Wert eins annimmt. In unserem Beispiel für Flußspat CaF_2 , die wir logarithmisch auswerten wollen, um Gleichung (7) zu überprüfen.

J. Buhrow

Tabelle 2: Molwärme von Flußspat bei sehr tiefen Temperaturen, (Temperaturangaben in Kelvin)

T in Kelvin	lg T	Molwärme C	lg C	lg C _{theor.}	C _{theor.}
17,5	1,2430	0,022	-1,6575	-1,636	0,023
19,9	1,2988	0,034	-1,4685	-1,470	0,034
23,5	1,3711	0,056	-1,2518	-1,255	0,055
27,6	1,4409	0,092	-1,0362	-1,047	0,089
29,15	1,4646	0,110	-0,9586	-0,977	0,104
36,0	1,5563	0,179	-0,7471	-0,745	0,180
55,1	1,7411	0,68	-0,1675	-0,154	0,668



Die Olympiade-Ecke

Der Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Überregionale Mathematikrunden, die sich als eigenständige Fördermaßnahmen für die Jüngeren unter Euch (etwa aus den 8. und 9. Klassen) verstehen, sind in den alten Bundesländern noch sehr spärlich gesät. Soweit mir bekannt ist, gibt es davon nur drei. Der älteste und über lange Zeit auch einzige Wettbewerb dieser Art, ist der Mathematik-Wettbewerb des Landes Hessen, der im Schuljahr 1969/70 zum ersten Mal ausgetragen wurde. Genau 20 Jahre später hat der Landeswettbewerb Rheinland-Pfalz das Laufen gelernt. Gegen diese beiden Konkurrenten konnte sich nur noch ein dritter Vertreter dieser Gattung behaupten: der Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg. Gerade mal zwei Jahre älter als sein rheinischer Vetter, geht nun die baden-württembergische Variante mit Beginn des Schuljahres 1992/93 bereits in die sechste Runde.

Ursprünglich sollte der Wettbewerb im Süd(west)en Deutschlands die bisher vernachlässigte Zielgruppe der Schüler bis einschließlich Klassenstufe 9 ansprechen. Aber schon in seinem zweiten Austragungsjahr wurden auch Schüler der Jahrgangsstufe 10 zugelassen, so daß nun zwei Wettbewerbe sozusagen parallel laufen. Um die unterschiedlichen Vorkenntnisse zu berücksichtigen, können sich alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der ersten Runde bis hinauf zur Klassenstufe 9 vier der sechs gestellten Aufgaben auswählen, während für Schülerinnen und Schüler der 10. Klassen nur die Aufgaben 3 bis 6 gewertet werden können. Einzelheiten darüber kann Euch aber viel genauer StD Franz Amann aus Mannheim erzählen, der uns den nachfolgenden Bericht zugeschickt hat. Franz Amann, der seit vielen Jahren in der Förderung mathematisch Begabter tätig ist, gehört (als geschäftsführendes Mitglied) der Arbeitsgruppe an, die vom baden-württembergischen Ministerium für Kultus und Sport mit der Durchführung des Landeswettbewerbs beauftragt worden ist.

Die Beschäftigung mit Mathematik: Eine Mausefalle für Problemlöser

Das Kultusministerium Baden-Württemberg lädt seit 1987 alle Schülerinnen und Schüler von Realschulen und Gymnasien bis ein-

schließlich Klassenstufe 10 zur Teilnahme am Landeswettbewerb Mathematik ein. Dieser Wettbewerb soll zur Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen und bietet Freunden kniffliger Aufgaben die Möglichkeit, ihre Fähigkeiten zu erproben und weiterzuentwickeln.

Auch die jüngeren Leser von alpha haben sicherlich schon selbst die Herausforderung erlebt, die von einer scheinbar leicht lösbaren Aufgabe gerade dann ausgeht, wenn der erste oder zweite Lösungsversuch gescheitert ist. Der österreichische Schriftsteller Egmont von Colerus hat in einem seiner populär-mathematischen Bücher diese Situation mit einer Mausefalle verglichen, in der man dann gefangen ist. Bei der Auswahl der Aufgaben gehen wir deshalb davon aus, daß die Problemstellungen den Schülern nicht fremdartig und die Lösung – wenn auch unter Schwierigkeiten – erreichbar erscheinen sollen. Auf verfremdende Einkleidungen wird in der Regel bewußt verzichtet. Zu jeder der Aufgaben 1 bis 4 muß es mindestens eine Lösung geben, zu der die erforderlichen Kenntnisse zum Zeitpunkt des Wettbewerbs normalerweise auch bei den Schülern der Klassenstufe 8 vorhanden sind.

In welchem Umfang uns die Realisierung dieser Zielsetzungen bei den Aufgaben des Wettbewerbs 1991 gelungen ist, möchte ich dem Urteil der Leser überlassen.

Aufgabe 1

Bei einem Trapez sind drei Seiten gleich lang; die vierte Seite hat die doppelte Länge.

Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?

Aufgabe 2

Addiert man die Einerziffern aller Teiler von 1991^{1991} , so erhält man ein Vielfaches von 1991.

Welches Vielfache ist es?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Kreis k_1 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in A, der Kreis k_2 geht durch C und berührt die Gerade (AB) in B.

Für welche Dreiecke ABC liegen C und die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 auf einer Geraden?

Aufgabe 4 (Zeichnung)

Ein Quadrat ABCD wird in vier Teilflächen zerlegt (siehe Figur).

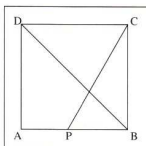


Abb. 1

Kann man den Punkt P auf der Strecke AB so wählen, daß sich die Inhalte der vier Teilflächen wie 1:2:3:4 verhalten?

Aufgabe 5

Zeige: Für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) läßt sich 9^n als Summe von 3^n aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen.

Aufgabe 6

Gegeben sind sechs Punkte. Je drei dieser Punkte bilden ein Dreieck. Die Seiten dieser Dreiecke sollen rot oder grün angemalt werden.

Kann man vermeiden, daß eines dieser Dreiecke nur gleichfarbige Seiten hat?

Die Vorstellung der Rahmenbedingungen möchte ich mit einem kurzen Rückblick auf die vergangenen Jahre verknüpfen.

Bei der Planung, Vorbereitung und Durchführung arbeitet eine Gruppe von etwa zehn Mathematikern zusammen. So können die anfallenden Arbeiten auf mehrere Schultern verteilt und eine vielfältige Palette von Erfahrungen aus der praktischen Arbeit an verschiedenen Schulen genutzt werden.

In den ersten vier Jahren haben bis zu 600 Jugendliche die Herausforderung des Wettbewerbs angenommen. Die jüngsten Teilnehmer kamen bereits aus Klassenstufe 6 - der jüngste erste Preisträger aus Klassenstufe 7. Mit ungefähr 30 % ist der Anteil der Mädchen für einen mathematischen Wettbewerb erfreulich hoch. Die hervorragenden Arbeiten von Teilnehmerinnen in den vier abgeschlossenen Wettbewerben haben das Vorurteil widerlegt, daß Mathematik nichts für Mädchen sei.

In diesem Jahr haben 400 Schüler an der ersten Runde teilgenommen. Bei der Abfassung dieses Berichts lagen die Ergebnisse der Korrektur noch nicht vor.

Die erste Runde des Wettbewerbs beginnt jeweils Ende September. Einsendetermin ist etwa eine Woche nach Ende der Herbstferien. In dieser Zeit sind vier Aufgaben zu Hause selbstständig zu bearbeiten. Um die unterschiedlichen Vorkenntnisse zu berücksichtigen, werden insgesamt sechs Aufgaben von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad gestellt. Jüngere Schüler können aus diesen sechs Aufgaben vier auswählen, während für Teilnehmer der Klassenstufe 10 nur die Aufgaben 3 bis 6 gewertet werden. Für einen ersten Preis ist die Bearbeitung von vier Aufga-

ben notwendig. Die ersten, zweiten und dritten Preisträger erhalten jeweils eine Urkunde und einen Buchpreis. Für die Anzahl der Preisträger gibt es keine obere Grenze. Trotzdem war in den vergangenen Jahren die Anzahl der ersten Preisträger unabhängig von der Teilnehmerzahl mit ca. 90 recht stabil.

Für diese ersten Preisträger der ersten Runde besteht die Möglichkeit, sich durch die Teilnahme an einer zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar zu qualifizieren. Die Aufgaben zu dieser zweiten Runde werden den Jugendlichen Ende Januar persönlich zugesandt.

Die Zielsetzung dieser viertägigen Seminare umfasst drei Bereiche:

- intensive Beschäftigung mit einem mathematischen Thema außerhalb oder am Rande der Schulmathematik
- Schaffung von Kontaktmöglichkeiten zwischen Jugendlichen mit ähnlich gelagerten Interessen
- Anregungen zur Beschäftigung mit außer-mathematischen Fragestellungen durch Besichtigungen und Vorträge auch aus dem Kreis der Teilnehmer

Die mathematischen Themen werden so gewählt, daß die erforderlichen Vorkenntnisse aus der Schulmathematik möglichst gering sind. Wir sind darüber hinaus immer gerüstet, durch zusätzliche Materialien anfängliche Unterschiede rasch aufzufangen.

Neben besonderen Themen aus Zahlentheorie und Geometrie, wie das Rechnen mit Kongruenzen, Eulersche ϕ -Funktion, Randwinkelsatz und Umfeld etc., haben wir uns bereits mit Problemlösestrategien und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.

Das charakteristische Merkmal der Seminarwochen liegt aber nicht in der Themenwahl, sondern in der Arbeitsweise.

Jede Arbeitsphase umfaßt einen Zeitraum von circa drei Zeitstunden. In einer kurzen Einführung von 20 bis 30 Minuten werden die Schüler auf die Problemstellung vorbereitet und ziehen sich dann für etwa 1 1/2 Stunden in Einzel- und Gruppenarbeit zurück. Während dieser Zeit stehen die betreuenden Lehrer und auch zwei ältere Schüler oder Studenten für die Beantwortung von Fragen bereit. Selbstverständlich gehen wir auch zu den einzelnen Gruppen und geben Anregungen, falls dies gewünscht oder erforderlich wird. Nach jeder Arbeitsphase werden die Ergebnisse im Plenum diskutiert. Dadurch wird sichergestellt, daß alle Teilnehmer die erforderlichen Vorkenntnisse für die weitere Arbeit haben.

Begünstigt durch einen großzügigen Zeitrahmen und losgelöst vom 45-Minuten-Takt des Unterrichts, versuchen wir auch, die Schüler selbst schöpferisch tätig werden zu lassen. Dazu geben wir zusätzlich zu den konkreten Übungsaufgaben auch offene Fragestellungen oder Leitfragen vor. Auf dieser Grundlage sollen sich die Teilnehmer in das Thema einar-

beiten. Wir ermuntern sie auch, selbst weitergehende Fragestellungen aufzuspüren, zu formulieren und schließlich zu beantworten. Den Schülern soll damit die Möglichkeit gegeben werden, sich im wissenschaftlichen Arbeiten zu erproben.

Ein Beispiel soll dies abschließend erläutern. Nach einer Einführung zur Kongruenzenrechnung mit anschließenden Grundaufgaben, Beweistübungen und Anwendungen bei Problemen aus der Zahlentheorie lautet ein "Forschungsauftrag" zum Thema Zyklen bei der Multiplikation.

- a) Als Grundlage für das nachfolgende Beispiel dient die Multiplikation mod 7. Stellt man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Punkte dar und deutet durch Pfeile an, in welche Zahl jede dieser Zahlen bei Multiplikation z. B. mit 2 übergeht, so erhalten wir die beiden Zyklen

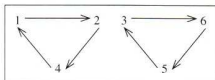


Abb. 2

Bestimme auch für die Multiplikation mit 3, 4, 5 und 6 mod 7 die Zyklen.

- b) Untersuche nun die Zerlegung in Zyklen bei der Multiplikation mod 12. Welche Unterschiede fallen Dir auf?
- c) Führe die Untersuchung auf Zyklen bei der Multiplikation für weitere Primzahlmoduln und Nichtprimzahlmoduln durch. Versuche möglichst viele Eigenschaften der Zerlegungen herauszufinden.

Wie Ihr dem Aufsatz von Herrn Amann habt entnehmen können, erhalten die erfolgreichsten Teilnehmer des baden-württembergischen Wettbewerbs am Ende noch einige seltene Einblicke in ihnen unbekannte Bereiche der Mathematik. Aber auch zu Beginn eines jeden neuen Wettbewerbsjahres versuchen die Veranstalter, mathematisch interessierte Schüler mit ungewöhnlichen Ausschnitten aus dem weiten Feld der Rechenkunst zu ködern. Am liebsten locken die Organisatoren auf ihren Plakaten mit besonders dekorativen Lösungsbeispielen aus früheren Aufgabenrunden. So zeigt etwa das Plakatomotiv zur 1. Runde des Jahres 1990 eine graphische Darstellung der Lösung zu Aufgabe 1 des 1989er Wettbewerbs (siehe Abb. 3):

Schneide aus Papier zwei kongruente, konvexe Vierecke aus. Zerschneide das eine längs der einen, das andere längs der anderen Diagonalen. Kannst Du die vier entstandenen Dreiecke immer zu einem Parallelogramm zusammenlegen? Begründe Deine Antwort! (Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn seine Diagonalen vollständig im Innern verlaufen.)

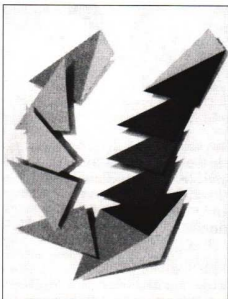


Abb. 3

Der Schmetterlingssatz

Selbst auf dem begleitenden Wettbewerbsprospekt warten die Ausrichter noch mit überraschenden Querverweisen auf. Manchmal machen sie sogar Anleihen aus dem Naturreich, hinter denen wohl nur die wenigsten unter Euch tiefere mathematische Zusammenhänge vermuten. So war auf dem Plakat des 3. Landeswettbewerbs ein westafrikanischer Segelfalter der Spezies *Graphium tynderaeus Fabricius* zu bewundern. Seine ausgebreiteten Flügel dienten der Veranschaulichung einer sonderbaren Eigenschaft von Kreissehnen, die unter dem Namen **Schmetterlingssatz** in die Geometrie eingegangen ist.

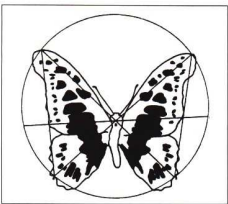


Abb. 4

Sind CD und EF zwei beliebige Kreissehnen, die sich im Mittelpunkt M einer gegebenen Sehne AB schneiden, so sind die Strecken MP und MQ gleich lang. Dabei sind P bzw. Q die Schnittpunkte der Sehne AB mit den Strecken CF bzw. DE.

Der mathematische Kern des Schmetterlingssatzes wird durch Abb. 5 auf der folgenden Seite verdeutlicht. Es gibt eine Reihe von Beweisen dieses Satzes. Der folgende ist zwar nicht der kürzeste, er erfordert dafür aber nur Kenntnisse aus der Mittelstufe.

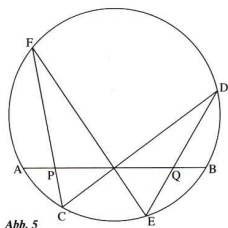


Abb. 5

Beweis

Spiegelt man den Punkt F an der Mittelsenkrechten m der Strecke AB, so entsteht das gleichschenklige Dreieck $FF'M$. Da sowohl AB als auch FF' zu dieser Mittelsenkrechten m orthogonal sind, sind sie zueinander parallel. Aus der Gleichschenkligkeit von FMF' und der Parallelität von AB und FF' ergibt sich

$$\angle MFF' = \angle FF'M = \angle FMP = \angle QMF' = \varphi \quad (1)$$

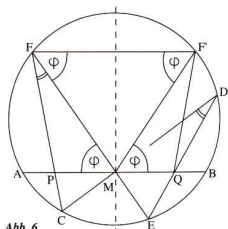


Abb. 6

Es soll nun gezeigt werden, daß die Dreiecke PMF und MQF' kongruent sind.

Da die Strecken FM und F'M gleich lang und die Winkel FMP und QMF' gleich groß sind, genügt dazu der Nachweis, daß in den beiden Dreiecken PMF und MQF' zusätzlich die Winkelmaße bei F und F' übereinstimmen.

In dem Sehnenviereck EDF'F ergänzen sich die Innenwinkel bei F und D zu 180° . Da nach (1) der Winkel QMF' ebenso groß ist wie der Winkel MFF', gilt auch

$$\angle F'DQ + \angle QMF' = 180^\circ.$$

Nach der Umkehrung des Satzes über Sehnenvierecke liegen die Punkte D, F', M und Q auf einem Kreis (siehe Abb. 7).

Als Randwinkel im gleichen Bogen über der Sehne CE gilt (Abb. 6)

$$\angle CFE = \angle CDE \quad (2)$$

Im kleinen Kreis (Abb. 6) gilt als Randwinkel über der Sehne QM entsprechend

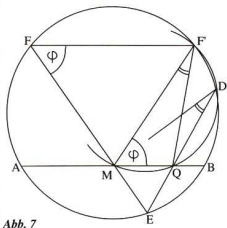


Abb. 7

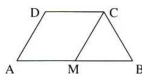
$$\begin{aligned} \angle MFF' &= \angle MDQ & (3) \\ \text{Da der Punkt M auf der Strecke CD und der Punkt Q auf der Strecke ED liegen, folgt} \\ \angle CFE &= \angle CDE \\ &= \angle MDQ = \angle MFF' \end{aligned}$$

Faßt man zusammen, so stimmen in den Dreiecken PMF und MQF' eine Seitenlänge und die Winkelmaße der beiden anliegenden Winkel paarweise überein. Die beiden Dreiecke sind damit kongruent.

Dies bedeutet, daß die Strecken PM und MQ gleich lang sind, womit die Behauptung bewiesen ist.

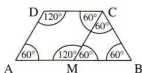
Landeswettbewerb Baden-Württemberg 1991

Lösung zu Aufgabe 1:



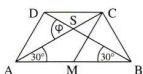
Verbindet man den Mittelpunkt M der Seite AB mit dem Punkt C, so wird das Trapez in ein Dreieck MBC und ein Viereck AMCD zerlegt. Die Seiten AM und CD des Vierecks AMCD sind gleich lang und parallel. Das Viereck AMCD ist deshalb ein Parallelogramm, woraus dann folgt, daß auch die Seiten MC und AD parallel und gleich lang sind. Dies bedeutet aber

$$\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{MC} = x.$$



Das Trapez wird also in ein gleichseitiges Dreieck MBC und eine Raute AMCD zerlegt. Daraus ergeben sich die im obenstehenden Bild eingetragenen Winkelmaße. Zeichnet man in die Raute AMCD die Diagonale AC ein, so entstehen zwei gleichschenklige, kongruente Dreiecke AMC und CDA. Die Diagonale AC ist die Winkelhalbierende in der Raute AMCD. Deshalb gilt $\angle MAC = 30^\circ$.

Aus Symmetriegründen ist dann auch $\angle DBM = 30^\circ$. Der Schnittwinkel der beiden Diagonalen ist Außenwinkel des Dreiecks ABS, und es gilt: $\varphi = 60^\circ$.



Lösung zu Aufgabe 2:

Die Zahl 1991 hat die Primfaktorzerlegung $11 \cdot 181$, deshalb gilt für die Primfaktorzerlegung von 1991^{1990}

$$1991^{1990} = (11 \cdot 181)^{1990} = 11^{1990} \cdot 181^{1990}.$$

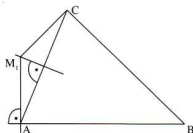
Jeder Teiler von 1991^{1990} hat deshalb die Form $11^a \cdot 181^b$ mit $0 \leq a, b \leq 1990$. Jeder dieser Teiler besitzt die Einerziffer 1. Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist deshalb gleich der Anzahl der Teiler von 1991^{1990} . Um diese Anzahl der Teiler zu bestimmen, überlegt man so:

Man weiß, daß für eine Zahl n mit der Primfaktorzerlegung

$$p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$$

die Anzahl $T(n)$ der Teiler $T(n) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_k + 1)$ beträgt. Durch Vergleich mit $1991^{1990} = 11^{1990} \cdot 181^{1990}$ erhält man dann $r_1 = r_2 = 1990$ und damit $T(1991^{1990}) = 1991 \cdot 1991 = 1991^2$. Die Summe der Einerziffern aller Teiler ist also das 1991-fache von 1991.

Lösung zu Aufgabe 3



Damit der Kreis k , mit dem Mittelpunkt M , die Gerade (AB) im Punkt A berührt, muß die Gerade (AM) orthogonal zu (AB) sein.

Damit der Kreis k , durch die Punkte A und C geht, muß sein Mittelpunkt M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Das Dreieck ACM_1 ist dann gleichschenklig.

Der Mittelpunkt M_1 ist also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Orthogonalen zur Geraden (AB) im Punkt A. Ent-

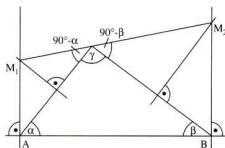
sprechendes gilt für den Mittelpunkt M_2 des Kreises K_2 .

1. Fall ($\alpha, \beta < 90^\circ$)

Aus diesen Vorüberlegungen ergeben sich für die Winkel in den Dreiecken ACM_1 und BM_2C die Eigenschaften

$$\sphericalangle CAM_1 = \sphericalangle M_1CA = 90^\circ - \alpha$$

$$\sphericalangle M_1BC = \sphericalangle BCM_2 = 90^\circ - \beta.$$



Die Punkte M_1 , C und M_2 liegen genau dann auf einer Geraden, wenn der Winkel $\sphericalangle M_1CM_2$ ein gestreckter Winkel ist, d. h. wenn gilt:

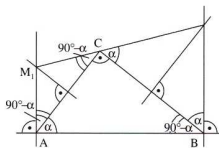
$$90^\circ - \alpha + \gamma + 90^\circ - \beta = 180^\circ$$

Daraus folgt $\gamma = \alpha + \beta$.

Da andererseits wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC auch $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gilt, erhält man $\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Nachweis der Umkehrung

Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegen die Punkte M_1 , M_2 und C auf einer Geraden. In der untenstehenden Figur sind die Dreiecke ACM_1 und BM_2C wieder gleichschenkelig mit den Basen AC bzw. BC .



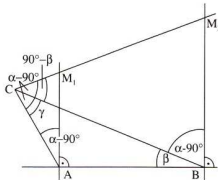
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung rechtwinklig ist, gilt $\beta = 90^\circ - \alpha$. Daraus ergeben sich die in der nebenstehenden Figur eingetragenen Winkelmaße. Die drei Teilwinkel bei C ergänzen sich zu 180° . Die drei Punkte M_1 , M_2 und C liegen also auf einer Geraden. Damit ist gezeigt, daß für $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ die drei Punkte genau dann auf einer Geraden liegen, wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat.

2. Fall ($\alpha = 90^\circ$ oder $\beta = 90^\circ$)

Die Punkte C und M_1 liegen auf der Orthogonalen o_α zu (AB) im Punkt A . Da der Kreis um M_1 durch die Punkte A und C geht, sind die Punkte M_1 und C verschieden. Die Gerade (CM_1) stimmt also mit der Orthogonalen o_α

überein. Der Punkt M_2 liegt auf der Orthogonalen o_β zu (AB) im Punkt B . Diese beiden Orthogonalen sind parallel zueinander und verschieden. Deshalb können M_1 , C und M_2 nicht auf einer Geraden liegen.

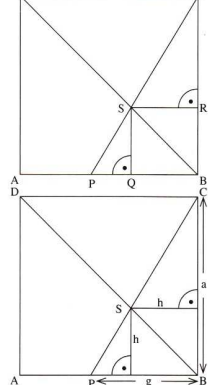
3. Fall ($\alpha > 90^\circ$ oder $\beta > 90^\circ$)



Es sei $\alpha > 90^\circ$. Der Punkt M_1 liegt dann zwischen C und M_2 , wenn $\sphericalangle ACM_1 = \sphericalangle ACM_2$ gilt. Entsprechend der obenstehenden Skizze muß dann die Bedingung $\alpha - 90^\circ = 90^\circ - \beta + \gamma$ $\alpha + \beta - \gamma = 180^\circ$ erfüllt sein. Dies steht aber im Widerspruch zu $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ als Winkelsumme im Dreieck ABC . Entsprechend zeigt man, daß auch $\beta > 90^\circ$ zum Widerspruch führt.

Lösung zu Aufgabe 4:

Beh.: Die Lage des Punktes P kann nicht in der gewünschten Weise festgelegt werden.



Da die Diagonale BD die Winkelhalbierende im Quadrat ist, gilt $\sphericalangle PBS = \sphericalangle SBC = 45^\circ$.

Zeichnet man vom Schnittpunkt S der Strecken PC und BD die Lote auf die Quadratsseiten AB und BC , so entsteht ein Rechteck $SQBR$. Dieses Rechteck ist sogar ein Quadrat, da die Teildreiecke SQB und SBR jeweils gleichschenkelig-rechtwinklig sind. Zunächst wird die Lage des Punktes P so bestimmt, daß der Flächeninhalt des Dreiecks BCS doppelt so groß wie der Inhalt des Dreiecks PBS ist. Es wird nachgewiesen, daß diese Eigenschaft nur dann erfüllt ist, wenn P der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Die Höhen SQ und SR in den Dreiecken PBS und BCS über den Grundseiten PB bzw. BC sind gleich lang, da QBR ein Quadrat ist. Das Dreieck BCS hat den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck PBS , wenn die Seite BC doppelt so lang wie PB ist. Also ist P der Mittelpunkt der Strecke AB . Der Flächeninhalt des Dreiecks PBC ist dann ein Viertel der Quadratfläche. Auf das Teildreieck PBS entfällt ein Drittel dieser Fläche. Der Flächeninhalt des Dreiecks PBS ist damit ein Zwölftel der Quadratfläche. Da das Dreieck PBS und das Viereck $APSD$ zusammen halb so groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrats, bleibt für den Flächeninhalt des Vierecks noch fünf Zwölftel der Quadratfläche. Der Inhalt des Vierecks $APSD$ ist also fünfmal so groß wie der des Dreiecks PBS , im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Man kann den Teilkpunkt P auf der Strecke AB nicht so wählen, daß gleichzeitig das Dreieck SBC doppelt und das Viereck $APSD$ viermal so groß ist wie das Dreieck PBS .

Lösung zu Aufgabe 5

Versucht man einen Nachweis der Behauptung für kleine natürliche Zahlen n , so erhält man gegebenenfalls durch Probieren

$n=1$ $2+3+4=9$

$n=2$ $5+6+7+8+9+10+11+12+13=81$

$n=3$ $14+...+26+27+28+...+40=729$

Aus diesen Beispielen kann man die Idee für die folgende allgemeine Lösung ableiten: Die Zahl 9^n ist stets durch 3^n teilbar, denn es gilt $9^n = 3^{2n}$. Die Zahl 9^n läßt sich also als Summe von 3^n Summanden darstellen, wobei jeder Summand den Wert 3^n hat.

$$3^n + 3^n + 3^n + \dots + 3^n + 3^n + 3^n + 3^n = 9^n$$

3^n Summanden

Da 3^n für alle natürlichen Zahlen n ungerade ist, besteht die Summe aus einer ungeraden Anzahl von Summanden. Geht man von dem gekennzeichneten mittleren Summanden 3^n aus, so kann man die restlichen jeweils zu Paaren zusammenfassen.

Verringert man die Summanden links von 3^n um $1, 2, 3, \dots$ und vermehrt gleichzeitig den Wert der Summanden rechts von 3^n um $1, 2, 3, \dots$, so wird der Wert der Gesamtsumme nicht verändert und man erhält eine Summe von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

$$\dots + (3^n - 3) + (3^n - 2) + (3^n - 1) + 3^n + (3^n + 1) + (3^n + 2) + (3^n + 3) + \dots$$

Die Anzahl der Zahlen kleiner als 3^n und größer als 3^n ist jeweils

$$\frac{1}{2} \cdot (3^n - 1)$$

Der kleinste Summand ist also

$$3^n - \frac{1}{2} \cdot (3^n - 1) = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3^n + 1) > 0$$

Die Zahl $3^n + 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade. Deshalb ist der kleinste Summand eine ganze Zahl größer als Null und alle Summanden sind natürliche Zahlen.

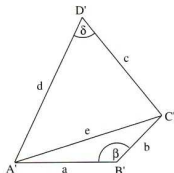
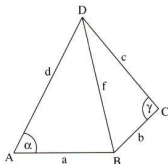
Lösung zu Aufgabe 6

Von jedem der sechs Punkte gehen fünf Verbindungsstrecken zu den übrigen Punkten aus. Greift man sich z. B. den Punkt A heraus, so gibt es mindestens drei Strecken die gleich gefärbt sind. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß dies die Farbe "rot" ist und die anderen Endpunkte dieser rot gefärbten Strecken die Punkte B, C und D sind. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Färbt man eine oder mehrere der Verbindungsstrecken BC, BD und CD rot, so entsteht mindestens ein vollständig rot gefärbtes Dreieck ABC, ABD oder ACD. Färbt man keine dieser Verbindungsstrecken rot sondern alle drei grün, so entsteht das vollständig grün gefärbte Dreieck BCD. Da einer dieser beiden Fälle eintreten muß, läßt es sich nicht vermeiden, daß ein gleich gefärbtes Dreieck entsteht.

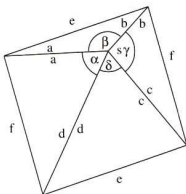
Lösung der Zusatzaufgabe

Behauptung: Es ist immer möglich, aus den vier bei der Zerlegung entstandenen Dreiecken ein Parallelogramm zu legen.

Beweis: Die beiden kongruenten Vierecke werden entsprechend der Aufgabenstellung zerlegt und wie unten angegeben benannt.



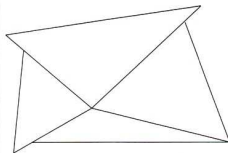
Nun legt man die vier Dreiecke so zusammen, daß die Punkte A, B', C und D' im Punkt S zusammenfallen.



Die neue Figur ist ein Viereck, denn es gelten folgende Eigenschaften:

Die Summe der Winkel bei S beträgt 360° , denn es tritt dort jeder Winkel des ursprünglichen Vierecks genau einmal auf. Die Winkelsumme in jedem Viereck beträgt 360° . Also liegen die Kanten der vier Dreiecke lückenlos und überschneidungsfrei nebeneinander.

Die aneinanderstoßenden Kanten der Teildreiecke sind gleichlang, da sie bei den beiden gegebenen Vierecken einander entsprachen. Beim Zusammenfügen der Teildreiecke kann also nicht die Situation eintreten, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Es bleibt zu zeigen, daß die neue Figur ein Parallelogramm ist.

Die jeweils einander gegenüberliegenden Seiten der neuen Figur entsprechen den Diagonalen der ursprünglichen Vierecke und sind deshalb gleich lang. Ein Viereck aber, bei dem die Längen der gegenüberliegenden Seiten paarweise übereinstimmen, ist ein Parallelogramm.

Schickt mir originelle Aufgaben und Lösungen von mathematischen Wettbewerben, an denen Ihr teilgenommen habt. Schreibt auf, wenn Berichtenswertes in Sachen Mathematik in Eurer Stadt, in Eurem Bezirk oder Bundesland geschehen ist.

Paul Jainta,
Werkvolkstraße 10, 8540 Schwabach

Erhard
Friedrich
Verlag
Velber

Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett

Themenvorschau
Dezember 1992/Januar 1993

PRAXIS DEUTSCH
Briefe (Januar)

DER DEUTSCHUNTERRICHT
Deutsche Sprache – Einheit und Vielfalt
(Dezember)

DER FREMDSPRACHLICHE
UNTERRICHT/ ENGLISCH
New Horizons (Januar)

DIE GRUNDSCHULZEITSCHRIFT
Eigenständigkeit stärken (Dezember)
Schreibkonferenzen II (Januar)

KUNST-UNTERRICHT
Schatten-theater (Dezember)
Wasser (Januar)

MUSIK UND UNTERRICHT
Wirkungen von Musik (Januar)

SPORTPÄDAGOGIK
Kraft (Januar)

ZUSAMMEN
Computer – Neue Chancen?
Neue Benachteiligung? (Dezember)

RELIGION HEUTE
Gewalt in Schule und Gesellschaft
(Dezember)

GESCHICHTE LERNEN
Imperialismus (Januar)

GEOGRAPHIE HEUTE
Religionen prägen Räume (Dezember)
Weltuntergang (Januar)

UNTERRICHT BIOLOGIE
Biologische Meereskunde (Dezember)
Allergie (Januar)

UNTERRICHT CHEMIE
Vermeiden – Entsorgen – Verwerten
(Januar)

UNTERRICHT PHYSIK
Spiegel (Dezember)

MATHEMATIK LEHREN
Goldener Schnitt (Dezember)

ARBEITEN+LERNEN/ TECHNIK
Versorgen – Entsorgen (Januar)

BERUFSBILDUNG
Medien in der beruflichen Bildung
(Dezember)

Bestellkarten finden Sie auf dem Beihefter.

(2.3) (11.13) (17.19) (29.31) (41.43) (59.61)
(71.73) (101.103)

Wanted!

(3.5.7) (3.13.23) (7.13.19) (7.19.31.43)
(41.47.53.59) (43.61.79.97)

Primzahlmehrlinge gesucht!

(47.59.71.83) (5.11.17.23.29)
(7.37.67.97.127.157)

Was Primzahlzwillinge sind, weiß jeder (3,5) oder (29,31). Auch den Primzahltrilling findet man schnell: (3,5,7). Wir verallgemeinern nun den Begriff des Primzahlmehrlings dahingehend, daß jedes n -Tupel $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ von Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ "n-ling" genannt wird genau dann, wenn $p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \dots = p_n - p_{n-1} = p_n - p_1 = d$ ist. Kurz gesagt kann ein "n-ling" als arithmetische Folge mit n Gliedern und der Differenz d aufgefaßt werden, wobei sämtliche Glieder Primzahlen sind.

Hinsichtlich der Differenz d , der Startzahl p_1 und der dafür maximal möglichen Länge $n_{\max}$ gibt es einen interessanten Zusammenhang. Beispielsweise sind für $p_1 = 3$ höchstens "Drillinge" zu erwarten. Denn entweder ist d durch 3 teilbar, dann wäre $p_1 = 3 + d$ keine Primzahl, oder d ist nicht durch 3 teilbar, dann wäre spätestens $p_3 = 3 + 2d$ keine Primzahl. Analog findet man für $p_1 = 5$ den Wert $n_{\max} = 5$. Dabei muß man allerdings voraussetzen, daß hier d durch 3 teilbar sein muß (Warum?).

Es ergeben sich nun folgende Fragestellungen:

a) Für welche Differenzen d kann man mit großen "n-lingen" rechnen? (Ein "n-ling" heißt groß, wenn n groß ist).

b) Wie kann man einen möglichst großen "n-ling" effektiv finden? Eine Frage, die ge-

radezu danach drängt, mit einem Computer bearbeitet zu werden!

c) Wer findet den größten "n-ling"?

Schreibt mir Eure Lösungen!

Einsendungen an: Dr. W. Schöbel,
Fr.-Engels-Str. 11, O-1560 Potsdam

25. Mathe-Lager 2.7.1992

Auch in diesen Sommerferien trafen sich begabte Schüler der Klassenstufen 5 – 8 zum Mathematik-Lager in Strausberg.

Wie im vergangenen Jahr waren wir dort kostenfrei in der Clara-Zetkin-Schule untergebracht. Um der Hitze dieser sonnigen Tage auszuweichen, wurden uns für den Unterricht einige angenehm kühle Räume des Freizeithauses bereitgestellt. Außerdem hatten wir am Nachmittag die Möglichkeit, hier das umfangreiche Angebot an Computer- und Freizeitspielen, Büchern, Schallplatten, Cassetten und Sportgeräten zu nutzen. Ebenso vergnügten wir uns am Bützsee bei einem erfrischenden Bad und beim Fossiliensammeln im Tagebau von Rüdersdorf. Abends wurden in der Turnhalle der Schule Fußball- und Volleyballwettkämpfe oder Tischtennisturniere ausgetragen. Ohne die große Mühe unserer Lehrer, die das Lager organisierten und ihre freie Zeit mit uns teilten, hätten wir diese erlebnisreichen Tage nicht verbringen können. Ein Dankeschön möchte ich auch der Clara-Zetkin-Schule und dem Freizeithaus für ihre freundliche Unterstützung aussprechen. Ich freue mich auf das nächste Mathematiklager und hoffe auf staatliche Finanzierung, damit diese gute Einrichtung auch zukünftig weiterbestehen kann.

Gundula Heinen, Klasse 6

Die rasende Nadel

Geschwindigkeit ist keine Hexerei. Und doch würde es noch unseren Großeltern wie Zauberei vorkommen, würde man ihnen vorführen, mit welchem Tempo heutzutage ein Kleidungsstück fertiggestellt wird. Möglich wurde dies durch die Entwicklung von Hochleistungs-Maschinen, deren "Herzstücke", also Antrieb und Nadel, enormen Anforderungen genügen müssen.

"Normale" Schnellläufer unter den Maschinen zur Herstellung von Anzügen, Kleidern, Hemden etc. nähern etwa 6.000 Stiche pro Minute. Eine dem höchsten Stand der Technik entsprechende Profi-Nähmaschine bringt es auf bis zu 160 Stiche pro Sekunde.



Wieviel Stiche schafft eine Nähmaschine pro Arbeitsstunde; angenommen, sie würde fünf Stunden ohne Unterbrechung laufen? Wieviele Stiche im Jahr (220 Arbeitstage)?

Presse-Information des
Stahl-Informations-Zentrums

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:

Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-22

Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Redaktionsskollegium:

StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pleizhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OL StR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OL StR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader

Anzeigenabwicklung:

Telefon: (05 11) 4 00 04-23

Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990

Vertrieb und Abonnement:

Telefon: (05 11) 4 00 04-50

Verlag:

Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,

Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Telefon: (05 11) 4 00 04-0

Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch OBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage. © Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann

Druck: Druckerei Schröder, Seelze
ISBN 3-617-34011-3

992

1742

1917

837

Was geschah vor...Jahren?

1992 Chronologie Teil IV

1542 in Wittenberg erscheint die "Trigonometrie" des Nicolaus Copernicus (1473-1543). Die Hauptbeiträge zur Entwicklung der Trigonometrie waren die Neuentdeckung des sphärischen Sinussatzes und die Aufstellung der ersten Sekantentafel

1692 der französische Gelehrte Laurent Pothenot gibt eine Darstellung des Rückswärtschneidens nach drei Punkten (siehe Text)

1717 am 17. November Jean Baptiste le Rond d'Alembert in Paris geboren. d'Alembert lieferte fundamentale Beiträge zur Analysis, über den Fundamentalsatz der Algebra, über theoretische Mechanik – er war Mitherausgeber der berühmten "Encyclopédie" [Enzyklopädie oder nach Verunftgründen geordnetes Wörterbuch der Wissenschaften, Künste und Gewerbe].

1842 am 12. November John William Strutt [Lord Rayleigh] geboren (siehe Text)

1942 der deutsche Mathematiker Robert Remak stirbt im Konzentrationslager Auschwitz. Remak war der Verfasser bedeutender algebraischer Arbeiten

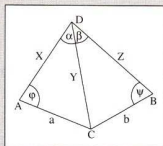
1972 am 5. Oktober starb der bedeutende amerikanische Mathematiker Solomon Lefschetz. Lefschetz arbeitete über algebraische Geometrie, Topologie, über Differentialgleichungen

1992 das Weltraumteleskop "Hubble" liefert die ersten klaren Aufnahmen eines superheißen Sterns im Milchstraßensystem. Der Stern NGC 2440-Nucleus ist 33mal so heiß wie die Sonne und damit der heißeste Stern, der bekannt ist

1992 in New York wird mit Hilfe eines Computers die 32. Mersennsche Primzahl berechnet. Mersennsche Primzahlen (Mp) sind Zahlen der Form $Mp=2^p-1$, wobei p selbst Primzahl ist. Die gefundene Zahl hat 227853 Ziffern.

Die Pothenotsche Aufgabe

Der Franzose Laurent Pothenot war vom 1711 bis zu seinem Tode im Jahre 1732 Professor der Mathematik in Paris. Seit 1682 war er auch Mitglied der dortigen Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1699 wurde er aus ihr wegen oftmaligen Fehlens bei den Sitzungen der Akademie ausgeschlossen. Die sogenannte "Pothenotsche Aufgabe" löste er in einer Akademieberhandlung im Jahre 1692. Die Aufgabe ist einfach zu erläutern (siehe Zeichnung). In der Figur sind a, b, α , β bekannt. Gesucht wird x, y, z. Offenbar hat die Aufgabe praktische Bedeutung. Man stelle sich z. B. vor, daß sich zwischen dem Punkt D und dem Streckenzug ACB ein Sumpfgebiet befindet. Die Strecken x, y, z sind dann möglicherweise direkt überhaupt nicht bestimmbar. Die Aufgabe ist elementar erläutierbar und sie ist sogar elementar lösbar. "Elementar" bedeutet hier und in ähnlichen Fällen aber nicht "einfach". Man benötigt zur Lösung der Aufgabe Kenntnisse der ebenen Trigonometrie und einen "Trick". Der Trick be-



steht darin, daß man einen völlig unanschaulichen Winkel durch $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \cos \eta$ einführt und mit Hilfe dieses Winkels und $\tan \frac{\varphi + \psi}{2}$ den Ausdruck $\tan \frac{\varphi - \psi}{2}$ bestimmt.

Da $\varphi + \psi$ bekannt ist und $\varphi - \psi$ ausrechenbar ist, sind φ und ψ einzeln bestimmbar. Eine ausführliche Lösung findet sich in dem bekannten Buch: Bronstein, J. N., Semendjajew, K. A., Taschenbuch der Mathematik, z. B. Moskau / Leipzig 1979, S. 256-257.

Die Aufgabe ist noch in anderer Hinsicht interessant. Sie ist nämlich völlig unsinnigerweise nach Pothenot benannt. Die Aufgabe und ihre Lösung kannte bereits der Wiener Stadtbaumeister Augustin Hirschvogel (gest. 1560?): Eine eigentliche und gründliche Anweisung in die Geometrie, Nürnberg 1543, und ebenso der Entdecker des Brechungsgesetzes Willebrod van Royen Snell (1580-1620) im Jahre 1617 ("Eratosthenes Batavus")



John William Strutt (Lord Rayleigh)

Am 12.11.1842 wurde in Langford Grove in der Grafschaft Essex im Südosten von England John William Strutt als ältester Sohn des Barons Rayleigh of Terling Place geboren. John William Strutt war seit 1873 selbst (der dritte) Baron Rayleigh. Seit 1861 studierte J. W. Strutt in Cambridge, u. a. bei so berühmten Gelehrten wie E. J. Routh (1831-1907) und G. G. Stokes (1819-1903). Nach dem Studium zog sich Strutt auf das Landgut Terling Place zurück. Hier richtete er sich ein mit den modernsten Hilfsmitteln ausgestattetes Laboratorium ein. Im Jahre 1879 starb unerwartet der berühmte Physiker und Mathematiker James Clerk Maxwell. Nach seinem Tode wurde Rayleigh gebeten, die Nachfolge Maxwells als Leiter des Cavendish-Laboratoriums in Cambridge zu übernehmen. Rayleigh leitete das Laboratorium nur bis 1884, zog sich wieder als Privatgelehrter zurück, lehrte dann jedoch von 1884 bis 1905 an der Royal Institution in London. 1905-1908 war Rayleigh Präsident der Royal Society, der englischen Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1904 erhielt Rayleigh den Nobelpreis für Physik. Er teilte ihn mit William Ramsay (1852-1916). Der Anlaß der Verleihung des Nobelpreises an Ramsay und Rayleigh war die von beiden 1894 gemachte Entdeckung des Edelgases Argon. Rayleigh starb am 30.6.1919 in Terling Place. Rayleigh hat 446 Arbeiten veröffentlicht. Reine Mathematik war nur in den Jahren um 1875 gelegentlich sein Thema, aber angewandte Mathematik war seine Domäne. Aus physikalischer Sicht arbeitete er vorwiegend über Akustik und Optik (1871 klärte er die Frage: warum ist der Himmel blau?), später auch zur Strahlungstheorie. Der große Spielraum seiner Interessen wird aus zwei Arbeiten deutlich: 1877 veröffentlichte Rayleigh eine Untersuchung über den "irregulären Flug eines Tennisballes", 1906 ahnte er auf rechnerischem Wege und durch physikalische Überlegungen das Bohrsche Atommodell (Niels Bohr, 1913) voraus.

Zusammengestellt von H.-J. Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Streckenteiler und Winkelteiler

Im Deutschen Museum ist auf 55000 m² Ausstellungsfläche die Entwicklung von Technik und Naturwissenschaften von den Anfängen bis zum modernsten Stand mit historischen Originalen (erste Automobil, Magdeburger Halbkugeln, erster Dieselmotor), mit Modellen, Experimenten und mit Demonstrationen zum Selbstbestätigen von Hand oder durch Knopfdrücken dargestellt. Das Deutsche Museum ist mit wenigen Ausnahmen täglich von 9 bis 17 Uhr geöffnet. Der Eintrittspreis beträgt für Erwachsene 8,- DM und für Studenten und Schüler 2,50 DM.

Daß zum Verstehen der Wirkungsweise vieler Ausstellungsstücke mathematische Kenntnisse nützlich sind, sollen die beiden folgenden Aufgaben zu zwei ausgestellten Gelenktrieben zeigen.

1. Aufgabe: Beim abgebildeten Streckendreiteiler (Abb. 1) haben 13 mal benachbarte Gelenklöcher eines Stabes bzw. die Spitze vom benachbarten Gelenkloch eines Stabes den gleichen Abstand a . Beim längsten Stab haben die beiden Gelenklöcher voneinander den Abstand $3a$ und die Spitze hat vom benachbarten Gelenkloch den Abstand $2a$. Beim zweitlängsten Stab haben die beiden nicht zur Stabspitze benachbarten Gelenklöcher den Abstand $2a$. Es ist zu zeigen, daß bei jeder Lage dieses

Streckendreiteilers die mit P, Q, R und S bezeichneten Spitzen der Stäbe äquidistante Punkte einer Geraden sind.

2. Aufgabe: Beim abgebildeten Winkeldreiteiler (Abb. 2) haben auf den längsten und den zweitlängsten Stäben die beiden Gelenklöcher voneinander den gleichen Abstand a . Auf den kurzen Stäben haben die beiden Gelenklöcher und auf den zweitkürzesten Stäben haben jeweils benachbarte Gelenklöcher voneinander der gleichen Abstand b . Dabei gilt $b < a$. Es ist zu zeigen, daß bei jeder Einstellung des Winkeldreiteilers $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD$ gilt.

Lösung zur 1. Aufgabe: Durch zusätzliches Einzeichnen von 12 geeigneten rot markierten Strecken der Länge a in den idealisierten Streckendreiteiler (Die Stäbe wurden durch Strecken ersetzt) sind 12 kongruente Rhomben entstanden, von denen je zwei durch eine Verschiebung aufeinander abbildbar sind. Die grün markierten Diagonalen e dieser Rhomben sind gleich lang und zueinander parallel. Da jede der Diagonalen PQ, QR und RS mit einer anderen dieser drei einen Punkt gemeinsam hat, liegen diese 3 Diagonalen auf einer Geraden und die Punkte P, Q, R und S sind äquidistante Punkte.

Lösung zur 2. Aufgabe: Der idealisierte Winkeldreiteiler (Die Stäbe sind durch Strecken ersetzt) enthält 6 Drachenvierecke

mit den Seiten a und b , für deren Winkel α und β laut Nebenwinkelsatz $\beta = 180^\circ - \alpha$ gilt. Einerseits sind das erste, dritte und fünfte und andererseits das zweite, vierte und sechste Sehnviereck zueinander kongruent. Wegen dieser Kongruenzeigenschaften gilt $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD$. Zusätzlich sei vermerkt: Mit dem idealisierten Streckendreiteiler lassen sich theoretisch wegen $0 \leq e \leq 2a$ alle Strecken der Länge l mit $0 \leq l \leq 6a$ dreiteilen. Mit einem realen Streckendreiteiler lassen sich wegen der Stabbreite die Grenzwerte 0 und $6a$ nicht erreichen.

Mit einem idealisierten Winkeldreiteiler lassen sich theoretisch alle Winkel δ dreiteilen, für die $0 \leq \delta \leq 6\gamma$ gilt, wobei γ der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $2b$ und der Höhe a ist. $\delta = 6\gamma$ ist gleichbedeutend mit $\alpha = \beta = 90^\circ$. Da mit einem realen Winkeldreiteiler höchstens Winkel gedreht werden können, die nicht größer als 360° sind, wird zweckmäßig ein realer Winkeldreiteiler für $\gamma = 60^\circ$, also mit $a = b\sqrt{3}$ konzipiert.

Zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$ lassen sich Gelenktriebe konstruieren, die eine gegebene Strecke in n gleich lange Teilstrecken bzw. einen gegebenen Winkel in n gleich große Teilwinkel zerlegen können. Die alten Griechen suchten vergebens nach einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, durch die ein beliebiger Winkel in drei gleich große Teilwinkel zerlegt wird. Sie konnten keine Lösung für dieses Problem finden, weil die Dreiteilung eines Winkels durch Zeichnen von endlich vielen Geraden und Kreisen nur für spezielle Winkel möglich ist.

W. Träger

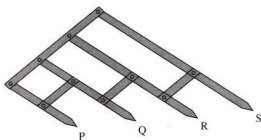
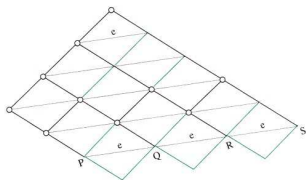


Abb. 1



zu Abb. 1

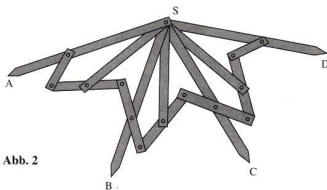
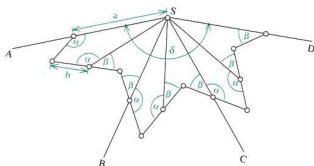


Abb. 2



zu Abb. 2

Flächeninhaltsvergleiche

Das Vergleichen der Flächeninhalte verschiedener geometrischer Figuren erscheint häufig als eine "harte Nuß", zumal wenn die Möglichkeit, diese Flächeninhalte numerisch auszudrücken, nicht besteht. Durch vorteilhafte Hilfskonstruktionen können aber solche Aufgaben manchmal überraschend einfach gelöst werden.

Das Lösen folgender Aufgaben erfordert Grundkenntnisse über Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, Mittellinien im Dreieck bzw. im Trapez, Schwerpunkt eines Dreiecks, wie auch folgende Kenntnisse über Flächeninhalte:

- kongruente Dreiecke haben gleiche Flächeninhalte;
- ist AM Seitenhalbierende im Dreieck ABC, so haben die Dreiecke ABM und ACM gleiche Flächeninhalte (Abb. 1);

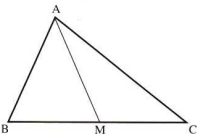


Abb. 1

- das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsfaktors (auch für ähnliche Vielecke gültig).

Einige der folgenden Beispiele zeigen, daß man auf verschiedenen Wegen zu einer Lösung gelangen kann. Vielleicht findet ihr noch einfachere und schönere Lösungsmethoden? Zunächst einige Hilfsaufgaben:

Hilfsaufgabe 1: Ist ABCD ein Parallelogramm, so ist $A_{ABC} = A_{ADC}$, wobei z. B. A_{ABC} den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet.

Hilfsaufgabe 2: Es sei ABCD ein Viereck. Die Schnittpunkte der Parallelen durch A und C bzw. B und D zu den Diagonalen BD bzw. AC seien mit T, X, Y, Z bezeichnet (Abb. 2).

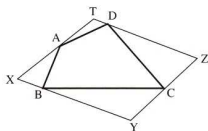


Abb. 2

Zeige, daß $A_{TXYZ} = 2 \cdot A_{ABCD}$.

Anleitung: Das Parallelogramm TXYZ wird von AC und BD in vier Parallelogramme eingeteilt; weiter mit **Hilfsaufgabe 1**.

Hilfsaufgabe 3: Ist G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, dann ist

$$A_{GAB} = A_{GBC} = A_{GCA} = \frac{1}{3} A_{ABC}.$$

Anleitung: Die zur Seite AB im Dreieck GAB gehörende Höhe ist ein Drittel der Höhe, die zur Seite AB im Dreieck CAB gehört.

Hilfsaufgabe 4: Sind M bzw. N die Mitten der Seiten AB bzw. AC im Dreieck ABC, so ist

$$A_{AMN} = \frac{1}{4} A_{ABC} \text{ und } A_{AMN} = \frac{1}{3} A_{MBCN}.$$

Anleitung: Die erste Gleichung ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AMN (Ähnlichkeitsfaktor 2), die zweite Gleichung ist eine Folge der ersten (Flächenaddition!).

In den folgenden Aufgaben werden die vorkommenden Vierecke als konvex vorausgesetzt.

Aufgabe 1: Es sei ABCD ein Viereck und es seien E, F, G, H die Mitten seiner Seiten. Dann ist

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$$

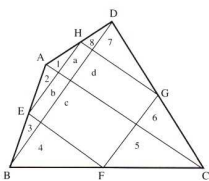


Abb. 3

Lösung 1: Bezeichnet man die Dreiecke und Parallelogramme, die nach dem zusätzlichen Zeichnen der Diagonalen entstehen, so wie Abb. 3 zeigt, erhält man nach **Hilfsaufgabe 4:**

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{3} (A_3 + A_8 + A_4 + A_6)$$

$$A_3 + A_4 = \frac{1}{3} (A_5 + A_2 + A_6 + A_8)$$

$$A_5 + A_6 = \frac{1}{3} (A_7 + A_4 + A_3 + A_1)$$

$$A_7 + A_8 = \frac{1}{3} (A_1 + A_6 + A_4 + A_3)$$

Nach dem Addieren dieser vier Beziehungen und Ordnen des Ergebnisses erhält man:

$$A_3 + A_6 + A_1 + A_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \text{ Also:}$$

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Lösung II: Es sei M die Mitte der Diagonale BD (Abb. 4).

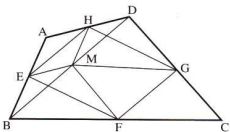


Abb. 4

Zieht man in Betracht, daß HM und EM Mittellinien im Dreieck ABD sind, so kann mit Leichtigkeit die Kongruenz der Dreiecke AEH und MHE festgestellt werden. Kongruent sind auch die Dreieckspaare DHG und MEF; CGF und MFG; BEF und MHG.

Dann ist: $A_{AEH} + A_{DHG} + A_{CGF} + A_{BFE} = A_{MHE} + A_{MEF} + A_{MFG} + A_{MGH} = A_{EFGH}$
Folglich ist

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Lösung III: Baut man als Hilfskonstruktion das Parallelogramm TXYZ aus **Hilfsaufgabe 2** (Abb. 5) und berücksichtigt man, daß die Parallelogramme EFGH und XYZT ähnlich sind, wobei das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{2}$ beträgt, erhält man:

$$A_{EFGH} = \frac{1}{4} A_{TXYZ} = \frac{1}{4} \cdot 2 A_{ABCD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

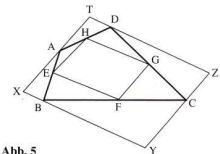


Abb. 5

Eine vierte Lösung kann noch aus folgender Aufgabe erhalten werden:

Aufgabe 2: Es sei ABCD ein Viereck. Man verlängere die Seiten AB, BC, CD bzw. DA auf AT, BX, CY bzw. DZ (Abb. 6) so, daß gleiches Streckungsverhältnis $k > 1$ vorliegt (d. h. $AT:AB = BX:BC = CY:CD = DZ:DA = k$). Drücke A_{TXYZ} mit Hilfe von A_{ABCD} aus.

Lösung I: Verlängert man AC ($k-1$) mal bis F, so sind die Dreiecke ABC und ATF ähnlich und haben

das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{k}$. Also:

$$A_{ATF} = k^2 A_{ABC} \text{ und somit}$$

$$A_{BTFX} = (k^2 - 1) A_{ABC} \quad (1)$$

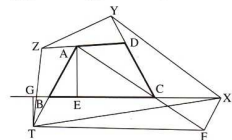


Abb. 6

Die Dreiecke ABC und FXC sind auch ähnlich und ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt

$$\frac{1}{k-1} \text{ denn } \overline{BX} = k \cdot \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CX}, \text{ mithin}$$

$$\overline{CX} = (k-1) \overline{BC}.$$

$$\text{Also ist } A_{FXC} = (k-1)^2 A_{ABC} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$A_{BTFX} = ((k^2 - 1) + (k-1)^2) A_{ABC}.$$

Zieht man noch in Betracht, daß BTFX ein Parallelogramm ist, so folgt:

$$A_{BTX} = \frac{1}{2} A_{BTFX} = k \cdot (k-1) A_{AB} \quad (3)$$

Auf ähnliche Art kann man erhalten:

$$A_{CXY} = k \cdot (k-1) A_{BCD} \quad (4)$$

$$A_{DYZ} = k \cdot (k-1) A_{CDA} \quad (5)$$

$$A_{AZT} = k \cdot (k-1) A_{DAB} \quad (6)$$

Addiert man die Beziehungen (3), (4), (5), (6) und fügt A_{ABCD} hinzu, so erhält man:

$$A_{TXYZ} = (2k^2 - 2k + 1) A_{ABCD}.$$

Lösung II: In den Dreiecken ABC und BTX zeichnet man die Höhen AE bzw. TG (Abb. 6). Man erhält:

$$A_{BTX} = \frac{BX \cdot TG}{2} = \frac{k \cdot BC \cdot (k-1) \cdot AE}{2}$$

$$= k \cdot (k-1) A_{ABC}$$

und weiter geht es wie in **Lösung I**.

Bemerkung: Auf ähnliche Weise kann man den Beweis durchführen, wenn die Seiten des Vierecks nicht verlängert sondern verkürzt werden, also wenn sich die Punkte T, X, Y, Z innerhalb der Vierecksseiten befinden, d. h., wenn $k < 1$ ist.

Aufgabe 3: Es sei ABCD ein Viereck, M bzw. N die Mitten der Seiten AD bzw. BC; P bzw. Q die Schnittpunkte der Strecken AN und BM bzw. CM und DN.

Zeige, daß $A_{PMQN} = A_{ABP} + A_{CDQ}$.

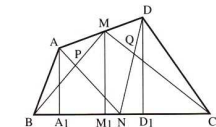


Abb. 7

Lösung: Bezeichnet man mit A_1, M_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von A, M bzw. D auf BC (Abb. 7), so erhält man:

$$MM_1 = \frac{AA_1 + DD_1}{2}$$

$$\text{und somit } A_{BMC} = A_{BAN} + A_{CDN}.$$

Zieht man nun von beiden Seiten dieser Gleichheit $A_{BPN} + A_{CQN}$ ab, so ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 4: Es seien K, L, M, N die Mitten der Seiten des Vierecks ABCD (Abb. 8).

Zeige, daß $A_{BGDH} = \frac{1}{3} A_{ABCD}$ (8)

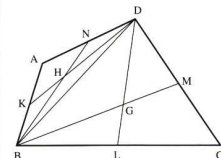


Abb. 8

Lösung: Verbindet man B mit D, so kann man leicht feststellen, daß G bzw. H die Schwerpunkte der Dreiecke BCD bzw. BAD sind.

$$\text{Also ist } A_{BGD} = \frac{1}{3} A_{BCD}$$

$$\text{und } A_{BHD} = \frac{1}{3} A_{BAD}$$

und durch Addition erhält man die Beziehung (8).

Bemerkungen: (1) Der Flächeninhalt des Vierecks BGDH ist gleich der Summe der Flächeninhalte der seinen Seiten anliegenden Dreiecke.

$$(2) A_{BGDH} = A_{AKHN} + A_{CMGL}.$$

Aufgabe 5: Es seien K, L, M, N die Mitten der Seiten des Vierecks ABCD (Abb. 9). Zeige, daß der Flächeninhalt des Vierecks in der Mitte gleich der Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecke ist.

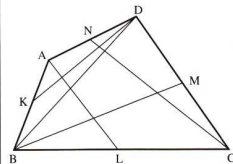


Abb. 9

Lösung: Verbindet man B mit D, so bemerkt man:

$$A_{BDK} = \frac{1}{2} A_{BDA} \text{ und } A_{DBM} = \frac{1}{2} A_{DBC}$$

und durch Addition:

$$A_{DKBM} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Ähnlich erhält man auch

$$A_{ALCN} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$$

$$\text{und somit ist } A_{DKBM} + A_{ALCN} = A_{ABCD}.$$

Aufgabe 6: Liegen die Parallelogramme ABCD und AEFG so, wie Abb. 10 zeigt, so ist $A_{ABCD} = A_{AEFG}$.

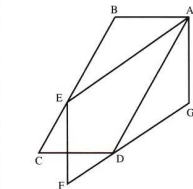


Abb. 10

Anleitung: Zeichnet man durch E eine Parallele zu AB bzw. durch D eine Parallele zu AG, so kann leicht gezeigt werden, daß

$$A_{AED} = \frac{1}{2} A_{ABCD} \text{ und } A_{AED} = \frac{1}{2} A_{AEFG}.$$

Aufgabe 7: Es sei ABCD ein Viereck; M, N bzw. P die Mitten der Strecken BD, AC bzw. MN. Zeige, daß $A_{PBC} + A_{PAD} = A_{PAB} + A_{PCD}$.

Anleitung: Es seien A_1, M_1, P_1, N_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von A, M, P, N bzw. D auf BC (Abb. 11). Dann ist

$$PP_1 = \frac{MM_1 + NN_1}{2} = \frac{AA_1 + DD_1}{4}$$

und somit

$$A_{PBC} = \frac{1}{4} (A_{ABC} + A_{DBC}).$$

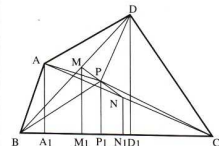


Abb. 11

Ähnlich erhält man auch

$$A_{PAD} = \frac{1}{4} (A_{BAD} + A_{CAD}).$$

Addiert man diese zwei letzten Beziehungen, erhält man

$$A_{PBC} + A_{PAD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Aufgabe 8: Es seien E, F, G bzw. H die Mitten der Seiten AB, BC, CD bzw. DA im Viereck ABCD und es sei P der Schnittpunkt der Strecken EG und FH. Zeige, daß

$$A_{PHAE} + A_{PFCG} = A_{PEBF} + A_{PGDH}$$

Anleitung: Bezeichnet man mit M bzw. N die Mitten der Diagonalen BD bzw. AC (Abb. 12) und zieht man in Betracht, daß EFGH und EMGN Parallelogramme sind, so folgt daraus, daß P auch die Mitte von MN ist.

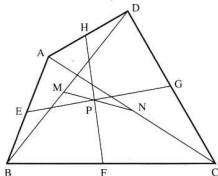


Abb. 12

Aufgabe 9: Durch die Mitte jeder Diagonalen eines Vierecks zeichnet man eine Parallele zur anderen Diagonale. Den Schnittpunkt dieser Parallelen verbindet man mit den Mitten der Seiten des Vierecks. Zeige, daß dadurch das Viereck in vier flächengleiche Teile geteilt wird.

Anleitung: Es seien E, F, G, H die Mitten der Seiten; M und N die Mitten der Diagonalen des Vierecks ABCD. Seien OM bzw. ON parallel zu AC bzw. BD (Abb. 13).

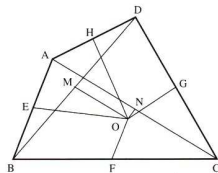


Abb. 13

Dann ist $A_{AND} = A_{CND}$ und $A_{ANB} = A_{CNB}$ und somit

$$A_{ADNB} = A_{CDNB} = \frac{1}{2} A_{ABCD}.$$

Weiterhin ist $A_{DON} = A_{CON}$ und $A_{BON} = A_{CON}$ und somit

$$A_{CGNF} = \frac{1}{4} A_{ABCD}.$$

Aufgabe 10: Im Viereck ABCD sind K, L, M bzw. N die Schwerpunkte der Dreiecke DAB, ABC, BCD bzw. CDA. Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{1}{9} A_{ABCD}.$$

Anleitung: Wenn E, F, G, H die Mitten der Seiten sind (Abb. 14), so bemerkt man leicht,

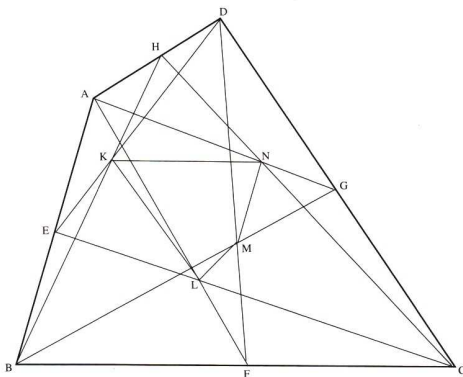


Abb. 14

daß die Vierecke KLMN und ABCD ähnlich sind, und ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 11: Im Viereck ABCD sind K, L, M bzw. N die Schwerpunkte der Dreiecke AOB, BOC, COD bzw. DOA, wobei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD ist. Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{2}{9} A_{ABCD}.$$

Anleitung: Es seien E, F, G, H die Mitten der Strecken OA, OB, OC, OD (Abb. 15).

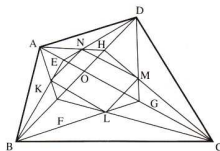


Abb. 15

Man bemerkt leicht, daß KLMN ein Parallelogramm ist, ähnlich dem Parallelogramm TXYZ aus der **Hilfsaufgabe 2**.

Ihr Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 12: Es sei ABCD ein Viereck. Die Punkte K und N bzw. L und M teilen die Seiten AD bzw. BC in drei gleiche Teile (Abb. 16). Zeige, daß

$$A_{KLMN} = \frac{1}{3} A_{ABCD}.$$

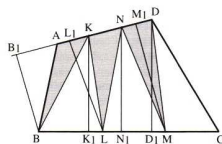


Abb. 16

Anleitung: Es seien K_1, N_1 bzw. D_1 die Fußpunkte der Senkrechten von K, N bzw. D auf BC und es seien B_1, L_1 bzw. M_1 die Fußpunkte der Senkrechten von B, L bzw. M auf AD. Zieht man in Betracht, daß

$$NN_1 = \frac{KK_1 + DD_1}{2} \text{ und } LL_1 = \frac{BB_1 + MM_1}{2},$$

folgt

$$A_{NLM} = \frac{1}{2} \cdot (A_{KLB} + A_{DMC}).$$

$$A_{LKN} = \frac{1}{2} \cdot (A_{BAK} + A_{MND})$$

und somit

$$A_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot (A_{ABLK} + A_{DCMN}).$$

Aufgabe 13: Im Viereck ABCD sei O der Schnittpunkt der Seiten AD und BC und seien M bzw. N die Mitten der Diagonalen AC bzw. BD. Zeige, daß

$$A_{OMN} = \frac{1}{4} A_{ABCD}.$$

Geometrie ohne Irrationalzahlen

Im Mathematikunterricht sollten die Schülerinnen und Schüler zu den bis dahin bekannten rationalen Zahlen auch irrationale Zahlen kennenlernen. $\sqrt{2}$ ist eine solche. Um zu Irrationalzahlen hinzuführen stellen wir fest, daß ein Quadrat über einer Diagonalen eines Quadrates der Seitenlänge 1 den Flächeninhalt 2 hat. Ohne die Zahl $\sqrt{2}$ kann man die Länge einer solchen Diagonalen nicht exakt angeben. Daher muß $\sqrt{2}$ eingeführt werden.

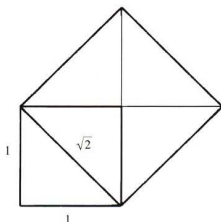


Abb. 1

Hier meldete sich Ralph: "In der Praxis kann man die Länge einer Strecke niemals beliebig genau messen, denn jede Messung hat einen Meßfehler. Beim Messen mit einem Maßstab hat noch kein Mensch jemals $\sqrt{2}$ gemessen. (Im vorliegenden Fall wird man ein Quadrat der Seitenlänge 1 zeichnen und mit großer Sorgfalt für die Länge einer Diagonalen $d \approx 1,41$ cm ermitteln. Das bedeutet, daß 1,405 cm $\leq d < 1,415$ cm erfüllt ist.) Daher kann man in der Geometrie, in der es um das Messen geht, durchaus auf $\sqrt{2}$ verzichten." Gefragt waren überzeugende Argumente, die es zwingender erscheinen lassen, zu den rationalen Zahlen die irrationalen Zahlen dazuzunehmen.

Unsere Vereinbarung

Bekanntlich kann man mit Hilfe eines (kartesischen) Koordinatensystems die Menge der Punkte der Ebene umkehrbar eindeutig auf die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen abbilden. Die Menge der reellen Zahlen zerfällt in die Teilmenge der rationalen Zahlen und die Teilmenge der irrationalen Zahlen. Weil die Irrationalzahlen Schwierigkeiten bereiten (sie haben weder eine abbrechende noch eine periodische Dezimalzahlendarstellung) be-

schränken wir uns möglichst lange auf die Betrachtung rationaler Zahlen. In dieser Absicht treffen wir nun die folgende Vereinbarung: Zugrunde liege eine auf ein (kartesisches) Koordinatensystem bezogene Ebene. Wir betrachten nur solche Punkte $P(x; y)$, für die x und y rationale Zahlen sind. Eine Gerade wird als Menge ihrer Punkte aufgefaßt. Ein Punkt gehört genau dann zu einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Wir betrachten nun nur Geraden $g: y = mx + b$ beziehungsweise Geraden $h: x = c$, bei denen m, b und c rationale Zahlen sind. Insgesamt sagen wir im folgenden kurz: Wir betrachten die **rationale Ebene**.

Einige angenehme Eigenschaften der rationalen Ebene

Sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei verschiedene Punkte, so gibt es zu beiden eine Verbindungsgerade: Ist $x_1 = x_2$, so liegen P_1 und P_2 auf der Geraden $h: x = x_1$; und ist $x_1 \neq x_2$, so liegen P_1 und P_2 auf der Geraden $g:$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Entscheidend ist dabei, daß mit zwei rationalen Zahlen u und v stets auch die Summe $u + v$ und das Produkt uv rationale Zahlen sind und daß zu jeder rationalen Zahl u auch die entgegengesetzte Zahl (die additiv inverse Zahl) $-u$ und für $u \neq 0$ auch die reziproke Zahl

(multiplikativ inverse Zahl) $\frac{1}{u}$ jeweils wieder rationale Zahlen sind. Daher sind mit x_1, y_1, x_2

$$\text{und } y_2 \text{ auch } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \text{ jeweils}$$

rationale Zahlen. So kommt es, daß nicht nur h , sondern auch g tatsächlich eine zugelassene (rationale) Gerade ist.

Zwei Geraden $g_i: y = m_i x + b_i$ und $g_j: y = m_j x + b_j$ haben im Falle $m_i \neq m_j$ den Schnittpunkt

$$T \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}; \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \right),$$

denn mit m, b, m_i und b_i sind auch die Koordinaten von T rationale Zahlen.

Sind g eine Gerade und P ein Punkt, so gibt es zu g durch $P(x; y)$ eine Senkrechte.

(Ist $m = 0$, so handelt es sich um $h: x = x_1$.

Ist $m \neq 0$, so ist mit m auch $-\frac{1}{m}$ rational.)

Diese schneidet g im Punkt $F(x_1; y_1)$. Spiegelt

man den Punkt P an der Geraden g , so ergibt sich der Bildpunkt $\bar{P}(2x_F - x_1; 2y_F - y_1)$. Wir stellen fest: Jede Gerade kann als Achse einer Geradenspiegelung benutzt werden.

Zu den Punkten einer Geraden

Jede Gerade $g: y = mx + b$ enthält unendlich viele Punkte, denn ist z eine ganze Zahl, so ist $P(z; mz + b)$ ein Punkt der Geraden g . Wir betrachten zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$. Der Mittelpunkt

$$M \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right)$$

hat auch rationale Koordinaten. Daher gibt es zu jeder Strecke einen Mittelpunkt. Ist $P(x; y)$ ein Punkt von g , so ist " $y = mx + b$ " (wahr); ist $P(x_1; y_1)$ ein Punkt von g , so ist " $y_1 = mx_1 + b$ " (wahr). Dann ist auch

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(mx_1 + b + mx_2 + b) =$$

$$= m \cdot \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + b$$

wahr. Daher liegt auch der Mittelpunkt M auf der Geraden g .

Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 einer Geraden g gibt es stets mindestens einen weiteren Punkt. Es gibt sogar mehr als endlich viele solche Punkte, denn zur Strecke $[P_1 P_2]$ gibt es den Mittelpunkt M_1 , zu $[P, M_1]$ gibt es den Mittelpunkt M_2 und zu $[M, P_2]$ gibt es den Mittelpunkt M_3 , und so fort ... Alle diese Punkte sind verschieden und sie liegen alle auf der Geraden g zwischen den Punkten P_1 und P_2 . Analoges gilt auch für die zur y -Achse parallelen Geraden. $h: x = a$ ist eine solche Gerade. Die Punkte $P(a; y)$ und $P(a; y_1)$ liegen auf ihr. Da

auch $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ eine rationale Zahl ist, ist

auch der Mittelpunkt $M \left(a; \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right)$ der

Strecke $[P, P_1]$ ein zugelassener Punkt der Geraden h . Zwischen zwei Punkten einer Geraden der rationalen Ebene liegen stets unendlich viele weitere Punkte – die Punkte einer Geraden liegen auf dieser dicht.

Eine Eigenschaft von Kreisen

Wir betrachten den Kreis $k: x^2 + y^2 = 4$ vom Radius 2 mit dem Mittelpunkt $M(0/0)$. Dieser trägt Punkte mit rationalen Koordinaten; als Beispiele seien nun $P(2; 0)$ und $Q(1,2; 1,6)$ genannt. Die erste Winkelhalbierende $w: y = x$ ist eine (zugelassene) Gerade. Uns interessieren die Schnittpunkte der Geraden w mit dem Kreis k . Ein solcher Schnittpunkt $S(x; y)$ muß auf der Geraden w liegen. Dann ist $y = x$ (wahr). Ein solcher Schnittpunkt $S(x; y)$ muß auch auf dem Kreis k liegen. Dann ist

raden mit der Steigung $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gibt, schließt

auch keine Gerade mit einer Parallelen zur y-Achse einen Winkel der Größe 60° ein. Gleichseitige Dreiecke haben Winkel der Größe 60° . Weil es keinen solchen Winkel gibt, stellen wir fest:

In der rationalen Ebene gibt es kein einziges gleichseitiges Dreieck.

Zunächst haben wir ein Quadrat der Seitenlänge 1 betrachtet und festgestellt, daß man seinen Diagonalen keine rationale Zahl als Maßzahl der Länge zuweisen kann. Nun erhebt sich schon gar nicht die Frage, ob ein gleichseitiges Dreieck eine Höhe rationaler Länge hat, denn solche Dreiecke gibt es in der rationalen Ebene nicht.

Aus der Nichtexistenz eines 60° -Winkels lassen sich viele weitere Folgerungen ziehen. Zwei Kreise vom gleichen Radius haben gewiß dann keinen Schnittpunkt, wenn der Mittelpunkt des einen auf dem anderen Kreis liegt. Dann läßt sich auch die jedem bekannte Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks nicht durchführen. Übrigens gibt es in der rationalen Ebene gar kein regelmäßiges Sechseck. Denn ein solches könnte man in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen.

Zusammenfassung

Wenn es nur Punkte mit rationalen Koordinaten gibt, dann existieren auch Durchmessergeraden von Kreisen, welche diese nicht schneiden; dann müssen sich schneidende Geraden keine Winkelhalbierende haben; dann gibt es weder gleichseitige Dreiecke noch regelmäßige Sechsecke. Da dies alles in der Anschauungsebene nicht wahr ist, müssen wir feststellen: Die rationale Ebene beschreibt die Anschauungsebene nicht. Möchte man analytische Geometrie der Anschauungsebene treiben, so muß man auch Punkte zulassen, welche irrationale Koordinaten haben.

Anmerkung

Die rationale Ebene hat viele weitere merkwürdige Eigenschaften. Suchen Sie weitere? Teilen sie uns solche mit – wir werden in einem späteren Heft berichten.

Dr. Klaus Ulshöfer
Stiftsgymnasium Sindelfingen

Alphons logische Abenteuer

Den ganzen Nachmittag schon probierte Berti die "Protagoras-Lösung". Er hatte in dem alten Buch ein weiteres, aus der Antike überliefertes Problem gefunden. Wie er es auch anstellte, die Aufgabe war nicht durch irgendeine Einschränkung lösbar. Er las nochmals den Text: "Eine Ägypterin sah, wie ihr am Nil spielendes Kind von einem Krokodil angegriffen wurde. Die Mutter eilte an das Ufer und bat das Krokodil, das Kind frei zu geben. Das Tier antwortete, daß es das Kind zurückgebe, wenn die Mutter errate, was es tun werde. Die Mutter sagte: Du wirst mir mein Kind nicht zurückgeben. Das Krokodil erwiderte darauf: Du magst wahr oder falsch gesprochen haben, ich brauche dir auf keinen Fall das Kind zurückgeben; dann ist deine Rede wahr, so erhältst du es nicht wieder nach deiner eigenen Aussage, ist sie aber falsch, so gebe ich es nicht zurück kraft unserer Übereinkunft.

Die Mutter widersprach: Ich mag wahr oder falsch gesprochen haben, du mußt mir mein Kind zurückgeben. Denn ist meine Aussage wahr, so mußt du es mir geben laut unserer Übereinkunft; ist sie aber falsch, so ist das Gegenteil wahr: Du wirst mir mein Kind zurückgeben."

Die Lösung wird man wohl nicht auf unbestimmte Zeit vertagt haben können, dachte Berti, und darin wird man ihm recht geben müssen, das folgende aber, was Berti murmelte, als seine subjektive Meinung ansehen: "Muß dieses gefräßige Tier die armen Menschen obendrein noch mit einem solchen Dilemma schachmatt setzen!"

Alphons, den Berti noch am Abend aufsuchte, meinte zu Bertis mitfühlender Äußerung, daß durch das Dilemma auch das Krokodil in seinem Tun betroffen sei. Nach einigem Für und Wider kam Berti auf die Idee, einen analogen Fall zu konstruieren. Er nahm die Schultasche von Alphons und sagte: "Alphons, Du bekommst die Tasche zurück, wenn Du errätst, was ich als nächstens tun werde."

Dieser überlegte und fand, daß damit nicht genau die Problemlage getroffen ist. "Trotzdem kommen wir einen wichtigen Schritt weiter. Du hast Dir – hoffentlich – etwas vorgenommen. Ich soll das in Form einer Aussage erraten. Der Springpunkt ist, ob das, was ich behaupte, gerade das ist, was Du tun willst. Meine Aussage ist wahr, wenn sie mit dem übereinstimmt, was zu tun Du beabsichtigt. Die Wette lautet also: Ist wahr, daß Du das gedacht hast, was ich durch meine Aussage vermutete, nicht aber, ob das, was Du gedacht hast, wenn ich es errate, wahr ist."

Berti bat Alphons, ihm das letztere nochmals zu erklären. "Die Mutter hat zwischen zwei Aussagen zu entscheiden, (a) Ich gebe das Kind zurück, (b) Ich gebe das Kind nicht zurück. Beide Aussagen betreffen ein mögliches Tun des Krokodils, von dem dieses eins sich nach Voraussetzung ausgewählt hat. Das

beabsichtigte Tun hat die Mutter zu erraten, indem sie entweder (a) oder (b) wählt. Die gewählte Aussage ist wahr, wenn sie mit jener übereinstimmt, gemäß der das Krokodil zu handeln beabsichtigt. Der Gegenstand der Wette ist also das Übereinstimmen einer Aussage mit einer Aussage. Ich denke mir eine von zwei bekannten Aussagen und Du hast recht, wenn Du die von mir gedachte Aussage errätst, dabei ist völlig gleichgültig, ob die von mir gedachte Aussage wahr oder falsch ist. Die von mir gedachte Aussage ist wahr, wenn sie mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt. Um ihren Sachverhalt geht es bei der Wette aber gar nicht. Ein logischer Fehler wird begangen, wenn man den Bezug einer Aussage auf eine Aussage mit deren Sachverhalt Bezug auf ihren Sachverhalt vertauscht. Der Gegenstand der Wette ist, ob eine Aussage mit einer Aussage übereinstimmt, nicht aber, ob letztere mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt."

Berti las den Text nochmals laut durch und stellte dann zutreffend fest: "Das Dilemma entsteht somit dadurch, daß sowohl das Krokodil als auch die Mutter denselben logischen Fehler begehen."

Prof. Dr. L. Kreiser

Systematische Untersuchung:

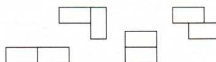
Zusammensetzung von drei Dominosteinen

Ein Rechteck im Format 2×1 sei der Einfachheit halber "Dominostein" genannt; wie ein solcher zerfällt es in zwei Quadrate.

Es ist zu untersuchen, auf wieviele Arten drei kongruente "Dominosteine" zusammengesetzt werden können, wenn jeweils nur die Quadratsseite des einen Steines an die Quadratsseite eines zweiten Steines gelegt werden darf.

Zusammensetzungen, die sich durch Drehung oder Spiegelung unterscheiden, gelten nicht als verschieden, sondern als identisch.

Nachstehend die vier möglichen Zusammensetzungen von 2 solchen Dominosteinen.



Hermann Oehl, München

Lösungen zur Olympiade-Ecke in Heft 4/92

(Der Bundeswettbewerb Mathematik)

Aufgabe 1

Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen. Man zeige, daß hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.

Lösung: Die Primzahlpotenz p^n sei vorgelegt. Da p^n in Dezimalschreibweise 20 Stellen besitzt und es im Zehnersystem genau 10 verschiedene Ziffern gibt, muß jede Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n genau zweimal auftreten. Für die Quersumme q von p^n gilt daher: $q = 2 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 90$. Die Quersumme ist somit Vielfaches von 3, also ist auch p^n durch 3 teilbar, kann somit keine Potenz einer von 3 verschiedenen Primzahl sein. Wenn p eine von 3 verschiedene Primzahl ist, tritt daher mindestens eine Ziffer in der Dezimaldarstellung von p^n mehr als zweimal auf.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw. Kann man auf diese Weise 60 Teile erhalten? Zeige, daß man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, bekommen kann! (1. Runde 1970)

Lösung: Zerschneidet man das Papierstück auf beiderlei Arten kommen stets 7 bzw. 11 Stücke hinzu. Die jeweilige Stückzahl ergibt sich somit aus dem Wertevorrat W der Funktion $(m, n) \rightarrow 1 + 7 \cdot m + 11 \cdot n$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$). Man kann auf diese Weise nicht 60 Stück bekommen. Es müsste gelten: $1 + 7m + 11n = 60 \Leftrightarrow 7m + 11n = 59$ mit $n < 6$, $m < 9 \rightarrow 7m \in \{59, 48, 37, 26, 15, 4\}$, was nicht möglich ist.

Auf ähnliche Weise oder durch Probieren findet man jedoch Darstellungen für die Anzahlen 61, 62, ..., 67: $(7, 1) \rightarrow 61$, $(4, 3) \rightarrow 62$, $(1, 5) \rightarrow 63$, $(9, 0) \rightarrow 64$, $(6, 2) \rightarrow 65$, $(3, 4) \rightarrow 66$ und $(0, 6) \rightarrow 67$.

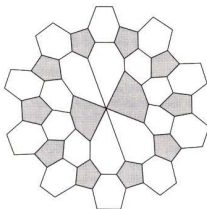
Mit den Zahlen 61 bis 67 gehören auch alle weiteren natürlichen Zahlen zu W ; sie lassen sich durch die weitere Benützung nur der einen Zerschneidungsart (= Zerschneiden in 8 Stücke) erreichen.

Aufgabe 3

Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball

die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke. (1. Runde 1983)

Lösung:



Die oben dargestellte Figur zeigt die "Vorderseite" der zugehörigen Fußballoberfläche. Die "Rückseite" hat dieselbe Struktur wie die Vorderseite. Vorder- und Rückseite können entlang der 40 Anschlußkanten passend aneinandergefügt werden.

Der Fußball besteht aus einer ganzzahligen Anzahl von 5- und 6-Ecken. Da nach Voraussetzung jedes 5-Eck von fünf 6-Ecken und jedes 6-Eck von drei 5-Ecken umgeben ist, besteht der Fußball aus $3n$ Fünfecken und $5n$ Sechsecken ($n \in \mathbb{N}$), insgesamt also aus $8n$ Flächen. Jedes 5-Eck weist nun genau fünf Ecken und Kanten auf, jedes 6-Eck genau sechs. Da jede Ecke im Fußball gleichzeitig drei Flächen angehört, hat dieser genau

$$\frac{3n \cdot 5 + 5n \cdot 6}{3} = 15n \text{ Ecken.}$$

Da jede Kante im Fußball genau zwei Flächen angehört, besitzt er

$$\frac{3n \cdot 5 + 5n \cdot 6}{2} = \frac{45}{2}n \text{ Kanten.}$$

Für jedes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten gilt der EULERSche Polyedersatz: $e + f = K + 2$. Demnach gilt

$$15n + 8n = \frac{45}{2}n + 2 \text{ woraus } n = 4 \text{ folgt.}$$

Der Fußball hat demnach $15 \cdot 4 = 60$ Ecken,

$$\frac{45}{2} \cdot 4 = 90 \text{ Kanten und besteht aus } 8 \cdot 4 = 32$$

Flächen, nämlich aus $3 \cdot 4 = 12$ Fünfecken und $5 \cdot 4 = 20$ Sechsecken. (Dieses Lösungsbeispiel stammt übrigens von einem bayrischen Teilnehmer am 1983er Wettbewerb.)

Aufgabe 4

In einem Quadrat mit der Seite 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, daß es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Innern eines Kreises mit Radius 1 liegen. (2. Runde 1972)

Lösung: Man unterteilt das gegebene Quadrat in 25 Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{7}{5}$.

Die Verteilung der 51 markierten Punkte auf die Teilquadrate (deren Ränder den Quadranten zugerechnet werden sollen), kann nach dem "Schubfachprinzip" nur so sein, daß auf mindestens ein Teilquadrat mehr als 2 Punkte kommen. Die Diagonale eines derartigen Teilquadrates beträgt (nach dem Satz von Pythagoras):

$$d^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2; \quad d = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2};$$

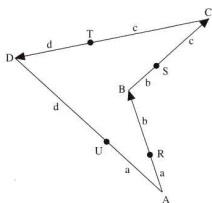
$$d = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2} = 1,98 < 2$$

Also liegt dieses Teilquadrat (zusammen mit den mindestens 3 markierten Punkten) ganz in einem Kreis mit Radius 1 um den Quadratmittelpunkt.

Aufgabe 5

Eine Kugel wird von allen vier Seiten eines räumlichen Vierecks berührt. Man beweise, daß alle vier Berührungspunkte in ein und derselben Ebene liegen. (2. Runde 1984)

Lösung:



Vorbemerkungen zur Bezeichnung.

Die Ecken des räumlichen Vierecks seien A, B, C, D. Die Berührungspunkte der Kugel mit den einzelnen Viereckseiten sind R, S, T und U. Die Länge des Streckenabschnitts zwischen Ecke des Vierecks und entsprechendem Berührungspunkt sind

$$\overline{AU} = \overline{AR} = a, \quad \overline{BR} = \overline{BS} = b, \quad \overline{CS} = \overline{CT} = c,$$

$$\overline{DT} = \overline{DU} = d$$

Es wird eine vektorielle Lösung angegeben.

Ecke A sei der Nullpunkt des dreidimensionalen Punktraumes. AD habe die normierte Länge 1. Betrachte die normierten Vektoren $\vec{x} = \overline{AB}$, $\vec{y} = \overline{BC}$ und $\vec{z} = \overline{CD}$.

Für die Ortsvektoren $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ (zu den Punkten R, S, T) gilt nacheinander:

$$\vec{r} = a \cdot \vec{x}, \vec{s} = \vec{r} + b(\vec{x} + \vec{y}), \vec{t} = \vec{s} + c(\vec{y} + \vec{z})$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= a(\vec{r} + d \cdot \vec{z}) = a(\vec{s} + c(\vec{y} + \vec{z}) + d\vec{z}) = \\ &= a(a\vec{x} + b(\vec{x} + \vec{y}) + c(\vec{y} + \vec{z}) + d\vec{z}) = \\ &= a((a+b)\vec{x} + (b+c)\vec{y} + (c+d)\vec{z})\end{aligned}$$

R, S und T bestimmen eine Ebene (als paarweise verschiedene Punkte einer Kugel können sie nicht alle auf einer Geraden liegen). Als Parameterdarstellung eines Punktes P dieser Ebene erhält man:

$$\vec{P} = \vec{r} + v(\vec{s} - \vec{r}) + w(\vec{t} - \vec{s}) = a\vec{x} + bv(\vec{x} + \vec{y}) + cw(\vec{y} + \vec{z}) = (a+bv)\vec{x} + (bv+cw)\vec{y} + cw\vec{z}.$$

Für die speziellen Parameter

$$v := \frac{ab-ad}{b}, \quad w := \frac{ac-ad}{c}$$

erhält man dann

$$\begin{aligned}\vec{P} &= a((1+b-d)\vec{x} + a(b-d+c+d)\vec{y} + \\ &+ a(c+d)\vec{z}) = a((a+b)\vec{x} + a(b+c)\vec{y} + \\ &+ a(c+d)\vec{z}) = \vec{u}.\end{aligned}$$

U liegt also in der von R, S und T bestimmten Ebene.

Aufgabe 6

Gesucht werden drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 läßt. Man bestimme alle Lösungen. (2. Runde 1990)

Lösung: Alle Zahlen a, b, c seien größer als 1 (da andernfalls mindestens eine der drei betrachteten Divisionen ohne Rest bliebe).

O. B. d. A. gelte: $1 < a < b < c$. Nach Voraussetzung gibt es ganze Zahlen α, β, γ mit $ab - 1 = \gamma \cdot c$, $bc - 1 = \alpha \cdot a$, $ca - 1 = \beta \cdot b$.

Durch Multiplikation ergibt sich hieraus $\alpha\beta\gamma abc = (ab-1)(bc-1)(ca-1) =$

$$= a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c + ab + ac + b \cdot c - 1$$

Subtraktion der ersten vier Summanden der rechten Seite und Ausklammern von abc ergibt: $abc \cdot (\alpha\beta\gamma - abc + a + b + c) = ab + ac + bc - 1$, somit teilt abc die Summe $ab + ac + bc - 1$.

Da diese Summe positiv ist (nach Vorbemerkung), folgt

$$(1) abc \mid ab + bc + ca.$$

Wegen $a < b < c$ folgt aus (1):

$$abc < 3bc, \text{ also } a < 3 \text{ und somit } a = 2$$

Einsetzen von $a = 2$ in (1) liefert:

$$(2) 2bc < 2b + bc + 2c$$

Hieraus folgt $bc < 2b + 2c < 4c$, also $b < 4$ und somit $b = 3$

Einsetzen von $b = 3$ in (2) liefert:

$$(3) 6c < 6 + 3c + 2c$$

Hieraus folgt $c < 6$ und somit $c = 5$ (weil a und c teilerfremd sind).

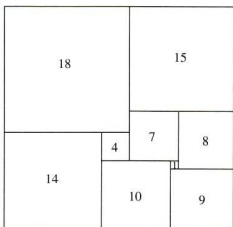
Durch Nachrechnen bestätigt man, daß (2, 3, 5) tatsächlich ein Lösungstriplet ist: $2 \cdot 3 = 1 \cdot 5 + 1$, $3 \cdot 5 = 7 \cdot 2 + 1$, $2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 + 1$.

Als Gesamtheit der Lösungen ergibt sich daher {(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)}.

Aufgabe 7

Man entscheide durch Beweis, ob es möglich ist, neun quadratische Flächenstücke mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 und 18

lückenlos zu einem Rechteck aneinanderzulegen, ohne daß sich Flächenstücke überlappen. (Prüfungsjahrgang 1979)



Lösung:

Das gesuchte Rechteck besitzt die Flächenmaßzahl $A = 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056$. Die kürzere Rechteckseite muß mindestens die Länge 18 haben. Deshalb kommen nur die folgenden Rechteckformen in Betracht: (48; 22), (44; 24), (33; 32). Da $18 + 15 = 33$, scheint eine Pflasterung des Rechtecks mit den Abmessungen 32×33 aussichtsreich. In der Tat führt die Platzierung des größten Quadrats in eine der Ecken des Rechtecks zu einer möglichen Lösungsfigur.

Aufgabe 8

Bestimme das Produkt aller Teiler von 1980^n für $n \in \mathbb{N}$ (a ist Teiler von b, wenn

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{N}. \text{ (Prüfungsjahrgang 1981)})$$

Lösung: Vorbemerkung. Besitzt eine Zahl n die Primfaktorenzerlegung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, \text{ so beträgt die Anzahl } T(n) \text{ seiner Teiler}$$

$$T(n) = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_k + 1)$$

$$\text{Es ist } 1980^n = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)^n = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 11^n.$$

$$\begin{aligned}\text{Die Anzahl der Teiler von } 1980^n \text{ ist somit} \\ T(1980^n) &= (2n+1)(2n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1) \\ &= (2n+1)^2 \cdot (n+1)^2\end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

i) n ist ungerade. Dann ist $T(1980^n)$ gerade, da $n+1$ gerade. Da sich je zwei Komplementärteiler multiplikativ zu 1980^n zusammenfassen lassen, beträgt daher das Produkt

$$\text{aller Teiler } (1980^n)^{\frac{n}{2}}$$

ii) n ist gerade. Jetzt ist $T(1980^n)$ ungerade, da $2n+1$ und $n+1$ ungerade sind. Je zwei

$$\text{Teiler außer } 1980^{\frac{n}{2}} \text{ ergänzen sich wie bei i)}$$

und können daher durch $1980^{\frac{n}{2}} \cdot 1980^{\frac{n}{2}}$ ersetzt werden. Daher beträgt das gesuchte

Produkt wie vorher $(1980^{\frac{n}{2}})^m$. In beiden Fällen ist daher das Produkt aller Teiler von 1980^n gleich $1980^{\frac{nm}{2}}$.

Aufgabe 9

Zeige, daß $n^3 + m^3 + 4$ für n, m $\in \mathbb{N}$ keine Kubikzahl sein kann. (Prüfungsjahrgang 1985)

Lösung: Es gilt folgende Identität:

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2)$. Deshalb liegt eine Betrachtung der verschiedenen Restklassen mod 3 nahe. Jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist eindeutig auf eine der Arten $x = 3k$, $x = 3k-1$ oder $x = 3k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ darstellbar.

$$\text{Für } a = 3k \text{ und } b = 0$$

$$\text{ist } (3k+0)^3 = 27k^3 \equiv 0 \pmod{9}.$$

$$\text{Für } a = 3k \text{ und } b = -1$$

$$\text{gilt } (3k-1)^3 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 \equiv -1 \pmod{9}.$$

$$\text{Für } a = 3k \text{ und } b = 1$$

$$\text{gilt entsprechend } (3k+1)^3 \equiv 1 \pmod{9}.$$

Also kann x^3 für $x \in \mathbb{N}$ nur die Reste -1, 0 oder 1 mod 9 haben. Da nun $n^3 + m^3 + 4$ aus demselben Grund bei der Division durch 9 nur die Reste 2, 3, 4, 5 oder 6 läßt, kann dieser Term keine Kubikzahl darstellen.

Buchbesprechung

Walter Krämer: Statistik verstehen. Eine Gebrauchsanweisung

Reihe Campus Band 1062. 1992. 163 S., mit vielen Abbildungen, Grafiken und Tabellen, DM 19,80; ISBN 3-593-34719-9.

Wer erfahren hat, wie man mit Statistik lügt, will wohl auch wissen, wie man's "ehrlich" macht. Walter Krämer, bekannt für seine flott geschriebene Statistik-Kritik, führt in seinem neuen Buch die Grundbegriffe vor. Aber anders als herkömmliche Statistiklehrbücher hält sich Krämer nicht lange mit Definitionen und mathematischen Ableitungen auf. Er erklärt ohne viele Formeln, wie ein Preisindex entsteht, oder aus welchen Bestandteilen sich das Sozialprodukt zusammensetzt. Bei Krämer erfahren wir, was der Deutsche Aktienindex (DAX) ist, was wir im sogenannten Warenkorb finden und warum wir immer länger leben, aber dafür häufiger an Krebs sterben.

Das Buch ist ein unentbehrlicher Ratgeber für alle, die Zahlen und Ziffern nicht nur lesen, sondern auch verstehen wollen.

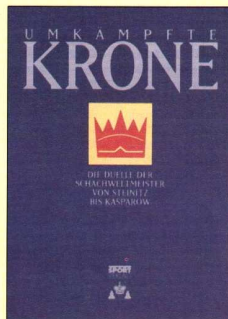
Walter Krämer
Statistik verstehen
Eine Gebrauchsanweisung



Reihe Campus

Raymund Stolze

Umkämpfte Krone



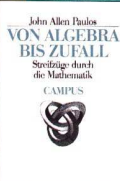
Raymund Stolze:
Umkämpfte Krone,
Sportverlag,
Berlin 1992;
224 Seiten, 220 Diagramme,
300 Fotos, geb., DM 29,80,
ISBN 3-328-00526-9

Der Kampf um die Schachkrone brachte stets Impulse für die weitere Entwicklung dieser Sportart – so Weltmeister Garri Kasparow in seinem Vorwort zu „Umkämpfte Krone“, dem Band, der seinerseits den Impuls auslöste, Schachweltmeisterschaften immer wieder zum Buchthema zu machen.

„Eines der schönsten Bücher der Schachgeschichte“, lautete die anerkennende Einschätzung der in- und ausländischen Fachpresse nach Erscheinen der ersten Auflage 1987. Diesem Urteil läßt sich nichts hinzufügen, denn nie vorher hat es einen solchen Prachtband über die Duelle der Schachweltmeister von Steinitz bis Kasparow von 1886 bis 1990 gegeben. Der ebenso lesens- wie anschauenswerte Band ist für Schachfreunde, die ein Spieldiagramm stundenlang sezieren, genauso interessant wie für die Freunde des königlichen Spiels, die sich beispielsweise unter Caro-Kann nichts vorstellen können.

Der Inhalt spricht für sich:

- 36 Stories – spannend und unterhaltsam – über alle bisherigen Auseinandersetzungen um den WM-Titel.
 - 75 % aller gespielten Gewinnpartien, kommentiert von Welt- und Großmeistern.
 - Das faszinierende Bildmaterial: mehr als 300 Fotos, viele zum erstenmal veröffentlicht.
 - Der lückenlose Statistikteil.
- Ein vorzügliches Werk, ein einzigartiges Geschenck.



Streifzüge durch die Mathematik (Originaltitel: Beyond Numeracy) von John Allen Paulos Aus dem Englischen von Thomas M. Niehaus, 1992. 291 S., geb., DM 48,—, ISBN 3-593-34713-X

„Man kann von Montaigne, Flaubert und Camus etwas lernen, ohne Französisch zu können, und genauso kann man auch etwas von Euler, Gauß und Gödel lernen, ohne Differentialgleichungen lösen zu müssen.“ So lautet die Maxime von John Allen Paulos, der ein breites Spektrum der Mathematik von Algebra bis Zufall bespricht. Dieses Buch ist jedoch kein Nachschlagewerk. Knapp und nicht ohne Witz werden in den Beiträgen Teilbereiche der Mathematik behandelt, Biografisches und Historisches von Gödel, Pythagoras oder die nicht-euklidische Geometrie erzählt. Viele Anekdoten und Beispiele beweisen, daß die Beschäftigung mit Mathematik, mit Ziffern und Zahlen durchaus unterhaltend sein kann. Von Algebra bis Zufall ist eine Einladung zur Mathematik, die auch mit dem Mißverständnis aufräumen will, daß Mathematik eine streng hierarchisch strukturierte Disziplin ist. Paulos' Buch ist deshalb nicht nur für Kenner und Kennerinnen, sondern auch für Ahnungslose.

CABRI-Géomètre – Chancen auf Entdeckungen

Die Situation ist hoffnungslos. Dabei haben wir die Lösungsskizze ganz deutlich auf unserem Konzeptblatt ... Die Rede ist von Aufgaben, die fordern, ein bestimmtes geometrisches Gebilde in eine

vorgegebene Zeichnung gleichsam „einzupassen“, wobei der Zusatz „Konstruiere mit Zirkel und Lineal“ die eigentlichen Schwierigkeiten bereitet.

Neben den schon klassischen Aufgaben wie „Konstruiere die einem Dreieck eingeschriebenen Quadrate!“ oder „Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte je auf einer von drei parallelen (nicht zusammenfallenden) Geraden liegen!“ tauchen unter

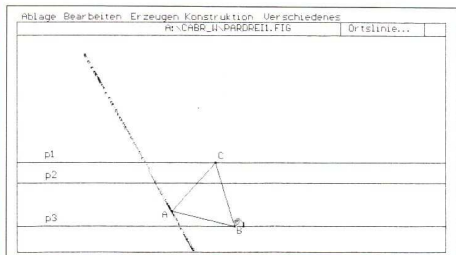


Abb. 1: $\triangle ABC$ ist ein gleichseitiges Dreieck mit $B \in p_3$ und $C \in p_1$, A jedoch erfüllt die geforderte Bedingung $A \in p_2$ nicht. B kann auf p_3 variiert werden, wobei A eine verblüffende (?) Ortslinie beschreibt.

Einführung in die Gruppentheorie

Die Gruppentheorie stellt eine geeignete Möglichkeit für eine Einführung in typisch mathematische Arbeits- und Denkweisen dar. Im Gegensatz zum historisch ersten Beispiel für eine axiomatisierte Disziplin gelangt der Leser hier von nur wenigen Axiomen ausgehend relativ schnell zu einfachen, aber interessanten Sätzen.

Das nun bereits in der 10. Auflage vorliegende Buch Einführung in die Gruppentheorie stellt eine Einführung in die elementare Algebra und Gruppentheorie dar, die in Mathematik und Physik, in Kristallographie, Festkörperphysik und Elementarteilchenphysik breite Anwendung findet. Alle eingeführten Begriffe werden ausführlich an einfachen geometrischen Beispielen erläutert. Die Überlegungen werden stets untermauert und ergänzt durch Erörterungen über spezielle Gruppen, wie z. B. Transformationsgruppen, Bewegungsgruppen, Faktorguppen. Die nun vorliegende, überarbeitete Auflage wurde um einen Anhang von J. P. Solowjew über Bewegungs-

gruppen der Ebene und des Raumes und ihre Untergruppen erweitert.

Das Buch wendet sich an Schüler, Lehramtskandidaten und Fachlehrer für Mathematik. Es ist darüber hinaus bestens geeignet, Studenten der Physik und Ingenieurwissenschaften mit dem fundamentalen Begriff der Gruppe vertraut zu machen.

Aus dem Inhalt:

1. Der Gruppenbegriff
2. Permutationsgruppen
3. Isomorphe Gruppen. (Der Satz von Cayley)
4. Zyklische Gruppen
5. Einfachste Kongruenzgruppen
6. Invariante Untergruppen
7. Homomorphe Abbildungen
8. Klasseneinteilung von Gruppen nach einer gegebenen Untergruppe. Faktorguppen.

Pavel S. Alexandroff. 10., überarbeitete und erweiterte Auflage 1992. 152 Seiten mit 20 Abbildungen. Kartiert. DM 24,-
Johann Ambrosius Barth Leipzig – Berlin – Heidelberg. Edition Deutscher Verlag der Wissenschaften
ISBN 3-335-00320-9

Wettbewerbsaufgaben für Schüler auch neue auf wie "Einem gegebenen Dreieck ABC mit $D \in BC$ und $E \in DC$ ist ein Parallelogramm DEFG einzubeschreiben!

Moderne Geometriesoftware, z. B. der CABRI-Géomètre, bieten für die Lösung solcher Aufgaben bemerkenswerte Mittel an, die Variations- und die Ortslinienfunktion Sie seien am zweiten Beispiel erläutert.

1. Man begnügt sich bei der (vorläufigen) Konstruktion einer Lösung damit, daß nur der größte Teil der geforderten Bedingungen erfüllt ist.

2. Man variiert die Bildschirmfiguren (s. Abb. 1). Die Darstellung, bei der die gegenseitigen Beziehungen der computererzeugten Geraden, Kreise und Schnittpunkte erhalten bleiben, durchläuft dann (alle) möglichen Lagen.

3. Darunter befindet sich bei fehlerfreiem Vorgehen auch die gesuchte, bei der die außer acht gelassenen Bedingungen erfüllt sind. Um bei dieser Variation bessere Übersicht behalten zu können, ist vorgesehen, einzelne Punkte "mit einem Zeichenstift zu versehen", so daß während der Variationen eine Ortslinie gezeichnet wird.

In vielen Fällen führt diese Ortslinie unweigerlich zur konstruktiven Lösung des Problems. In unserem Beispiel kann aus dem Sonderfall $C \in p_1$ und $A \in p_1$ auf die Ei-

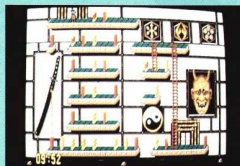
genschaft der Ortslinie (hier Gerade im 60° -Winkel zu den Parallelen) geschlossen werden.

Das Programm CABRI-Géomètre ist die Entwicklung einer Gruppe von Didaktikern und Informatikern der Universität Grenoble (Frankreich) und kostet 228,00 DM, als Schullizenz 598,00 DM. Es ist für IBM-kompatible und Macintosh-Rechner lieferbar.

Durch die übersichtliche Menüsteuerung benötigt man kaum Einarbeitungszeit und wird bald auch solche Möglichkeiten wie das Messen einzelner Objekte (Meßergebnisse werden im Zugmodus, d. h. beim Variieren, stets aktualisiert) oder die Makrokonstruktionen beherrschen. Neben der Beschriftung von Punkten, Kreisen usw. stehen vier Farben zur Gestaltung der Zeichnungen zur Verfügung.

Aufgabe: Man löse die beiden übrigen Probleme durch gedankliches Nachahmen der Ortslinienfunktion, indem mehrere (in beschriebener Weise unvollkommene) Figuren gezeichnet werden und eine Vermutung über die Eigenschaften der herausgelösten Punkte aufgestellt wird.

*Dr. Christian Werge, Abt. Didaktik
des Fachbereichs Math. und Informatik
der Universität Leipzig*



Wer hat nicht schon einmal sein Dominospiel herausgeholt, die Steine hochkant hintereinander aufgebaut, angestoßen und zugehauen, wie sie in einer Kettenreaktion umfielen?

Wenn das zu monoton ist, kann es nun schwieriger haben. Um für das in England bekannte Produkt Quavers zu werben, beschieden sich die Werbefachmänner von Smith Crisp Ltd dieses alten Vergnügens und des Computerspiels PUSH-OVER – oder war es umgekehrt?

Colin Curly, kraftprotziger Hund, hat dummerweise seine Quaverstützen verstopft. Um die verlorenen Tüten aus einem unterirdischen Gängensystem zu holen, muß die G. I. Ant, die stärkste Ameise der Computerwelt, in jedem Level Steine in einer bestimmten Reihenfolge aufstellen, damit am Ende als Folge einer Kettenreaktion der Schlüsselstein umfällt und sich die Tür zum nächsten Level öffnet. Im Computer sind die Steine, anders als in unserer Tischvariante, häufig auf mehreren Ebenen angeordnet, so daß Sondersteine wie der Aufsteiger, Überschalblöcke, Teiler, Stopper, Überbrücke oder Explosionsblöcke in das Spiel eingebaut wurden. Leider hat man innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne nur einen einzigen "Schubs", um alle Steine den Regeln gemäß umzuwerfen. Doch clevere Ameisen lassen sich etwas einfallen. Flink sausen sie über die vorhandenen Treppen zu den verschiedenen Ebenen, um dort aktiv zu werden. G. I. Ant, der Schwarzenegger im Ameisen-Digital-Land, läßt neben den Muskeln verstärkt die grauen Zellen spielen. Der Devise erst Denken, dann handeln, bleiben alle Wege offen.

Damit alles seine Ordnung hat, liefert PUSH-OVER ein Blatt zum Aufschreiben für die Level-codes gleich mit. Da das alles noch in einen flotten Sound verpackt ist und die Zeitspanne wahrhaftig ausreicht, wenn man letztendlich eine der vielen Lösungsmöglichkeiten gefunden hat, hat die Tütensuche einen Stamplatz auf der Festplatte, denn dann kann man so oben "Zwischenschuddle mal" die Suchaktion fortsetzen. PUSH-OVER ist ein Logikrätsel mit Zeitfaktor, bei dem die einzelnen Aufgaben vielfältige Lösungsmöglichkeiten zulassen – und der Spaß kommt wahrlich nicht zu kurz.

Hersteller: Ocean / The Red Rat 1992. **Distributor:** Bomico. **Typ:** taktisches Umbauspiel. **Handbuch:** D-E-F brauchbar. **Hardware:** AT+, 640 KB RAM, 16-F-VGA, Soundkarte, Tastatur, Joystick. **Preis:** DM 89

Berit Seitz



Lösungen

Sprachecke

• Dreimal nichts

Ermittelt werden soll die vorliegende Multiplikation, von der man weiß, daß eine Ziffer immer durch den gleichen Buchstaben ersetzt wird und ein Buchstabe nur für eine bestimmte Ziffer steht. Die Ziffer 3 kommt nicht noch einmal vor. Die Ziffer 0 wird durch den Buchstaben O vertreten.

Die Multiplikation ist eindeutig.

Lösung:

$$5694 \times 3 = 17082$$

• Mich auf eine Autoreise vorbereitend, bemerkte ich die Unmöglichkeit einer Tachometerreparatur und ersetzte ihn durch einen Tachometer eines anderen Autos. Als ich von zu Hause losfuhr, standen 131313 km auf dem Kilometerzähler. Auf der Chaussee zeigte er bei der Säule mit der 100 km Markierung 131460 km und nach 70 km 131558 km. Als ich am Ziel ankam, zeigte der Zähler 132713 km. Wieviel Kilometer fuhr ich?

Lösung

Aufgrund der Aufgabenstellung bildet man die Gleichung

$$\frac{132713 - 131313}{131558 - 131460} = \frac{x}{70 \text{ km}}$$

und errechnet hieraus

$$x = \frac{1400 \cdot 70 \text{ km}}{98}$$

$$x = 1000 \text{ km}$$

Meine Fahrstrecke betrug 1000 km.

• Ein Zehncentstück im Glas

Das Bild zeigt vier Streichhölzer und ein Zehncentstück. Es sieht aus, als ob sich das Zehncentstück im Weinglas befindet. Kannst Du zwei Streichhölzer so umlegen, daß wieder ein Weinglas entsteht, aber ohne das Zehncentstück darin?



Buchstaben und Zahlen

1. Lösung: 95785

12569

108354

2. Lösung: 26956

26956

26956

26956

134780

3. Lösung: 140965

765521

906486

4. Lösung: 5 · 2471

4 · 2439215

9769215

5. Lösung: 81330

9833370

9914700

6. Lösung: 81184

987324

1068508

7. Lösung: 6588

97384

103972

Logik in Potenzen, Produkten und Summen

Die Folgen A, B und C bestehen aus Potenzen, deren Basis von 1 bis n wächst, während sich der Exponent von n bis 1 verringert.

$$1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \dots n^1$$

In der Folge C ist $n = 7$. Die letzten beiden Glieder müssen also lauten:

$$(n-1)^2 = 36 \text{ und } n^1 = 7$$

Die Folgen D, E und F bestehen aus Summen, in denen zu der wie oben gebildeten Potenz jeweils noch das Produkt aus Basis und Exponent addiert wird:

$$1^n + 1n \cdot 2^{n-1} + 2(n-1) \cdot 3^{n-2} + 3(n-2) \dots n^1 + n$$

Also fehlen in der Folge F die Terme bzw. Zahlen

$$(n-1)^2 + (n-1) \cdot 2 = 48 \text{ und}$$

$$n^1 + n-1 = 14$$

Zusammenfassung:

$$x = 36; y = 7; x_1 = 48; y_1 = 14$$

Wer findet die Primzahlen?

Lösung: 46 läßt sich in vierfacher Weise als Summe von 2 Primzahlen darstellen: $46 = 3 + 43 = 5 + 41 = 17 + 29 = 23 + 23$. a kann weder 3, 5 noch 29 sein, weil dann $b = 54 - a$ gleich 51, 49 oder 25 sein müßte und damit keine Primzahl wäre. a kann auch nicht 43 sein, weil dann $c = 60 - b = 60 - (54 - a) = 6 + a = 49$

keine Primzahl ist. Für a gleich 41, 17 und 23 ergibt sich je eine Lösung:

$$1.) a = 41, b = 13, c = 47, d = 5$$

$$2.) a = 17, b = 37, c = 23, d = 29$$

$$3.) a = 23, b = 31, c = 29, d = 23$$

Auf wieviel verschiedene Arten kann man LÖSUNGSWEG lesen?

Lösung: Hierbei kann man das Pascalsche Dreieck zur Hilfe nehmen

1. Man rechnet es mit der Formel 2^9 aus daraus folgt $2^9 = 512$

2. Man zählt es aus mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks und kommt ebenfalls auf 512.

Das Nummernschild eines Autos

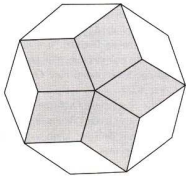
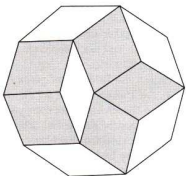
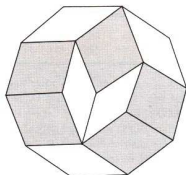
Lösung: Es gibt höchstens $27 \cdot 26 = 702$

Buchstabenkombinationen, die jeweils 999

verschiedene Zahlen besitzen können.

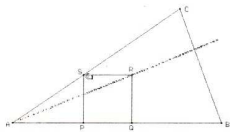
Daraus folgt: Es kann in einem Ort höchstens $999 \cdot 702 = 701298$ Autos geben.

Ein Legespiel

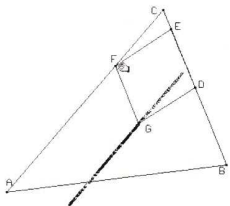


CABRI-Géomètre – Chance auf Entdeckungen

Zeichnet man in das Dreieck ABC ein beliebiges Quadrat $P'Q'R'S$ mit P' und Q' auf AB und S auf AC und variiert diese Figur unter den genannten Bedingungen, erkennt man eine „Ortslinie“ des Punktes R, die eine Gerade durch A ist und BC im gesuchten Punkt R schneidet (Strahlensatz).



Analog wird beim dritten Problem verfahren: Zeichne ein beliebiges Parallelogramm DEF'G. Variiere den Eckpunkt F' auf AC. Auch hier liegen alle Punkte G' auf einer Geraden, die AC im gesuchten Punkt G schneidet.



Geometrie ohne Irrationalzahlen

1. $\sqrt{5}$ ist nicht rational. Dann sind auch

$\frac{4}{5}\sqrt{5}$ und $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ nicht rational. Diese Durchmessergerade schneidet den Kreis nicht.

2. Wäre $\tan 22,5^\circ = q$ rational, so würde in der rationalen Ebene zu den sich schneidenden Geraden a: $y = 0$ und b: $y = x$ die Winkelhalbierende $w: y = qx$ existieren. Da es eine solche Winkelhalbierende aber nicht gibt, kann $q = \tan 22,5^\circ$ nicht rational sein. Es ist $\tan 22,5^\circ$ irrational.

Übrigens ist $\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.

3. Beispielsweise gibt es keine Drehung um $O(0; 0)$, welche die Gerade a: $y = 0$ in b: $y = x$ überführt. Würde eine solche Drehung existieren, so würde der Kreis um $O(0; 0)$ mit dem Radius 2 auf sich abgebildet werden. Insbesondere wäre der Bildpunkt des Punktes $P(2; 0)$ von a der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden b. Da es diesen Schnittpunkt in der rationalen Ebene nicht gibt, kann es auch die Drehung nicht geben.

Zusammensetzung von drei Dominosteinen

Es sind nur folgende, einander ausschließende Fälle möglich:

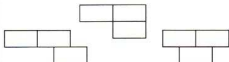
I. Alle drei Steine liegen parallel zu einander

I,1) alle drei Steine liegen in einer Linie



oder

I,2) sie liegen in zwei Linien untereinander



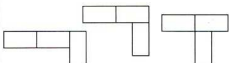
oder

I,3) sie liegen in drei Linien untereinander.



II. Zwei Steine liegen parallel zu einander, der dritte steht auf ihnen senkrecht.

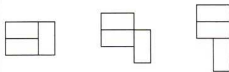
II,1) Die beiden parallel liegenden Steine liegen in einer Linie
a) sich berührend,



b) getrennt,



II,2) sie liegen in zwei Linien untereinander
a) ein Quadrat bildend,

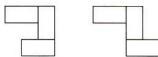


b) versetzt,



II,3) sie liegen in zwei von einander getrennten Linien

a) mit dem Abstand in Länge einer Quadratseite



b) mit dem Abstand in Länge zweier Quadratseiten.



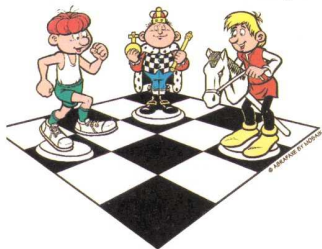
Die systematische Untersuchung (siehe unten) ergibt, daß es 26 verschiedene Zusammensetzungen der verlangten Art gibt.

P. S.: Hätte man anstatt nach den verschiedenen „Zusammensetzungen“ nach verschiedenen „Figuren“ (= Umrisen) gefragt, so wären es nur 23 Stück!

Die gleiche äußere Form (Figur, Umriß) tritt auf bei (3) = (15); (5) = (13) und (6) = (14), weil eine Teilfigur aus einem Quadrat 2×2 besteht, das in gespiegelter (oder um 90° gedrehter) Zusammensetzung verwendet wurde.

Deutsche Schulschachmeisterschaften 1992

Projekte, Pannen, Sensationen



Alljährlich tragen die Schachspieler nicht nur Vereinsmeisterschaften und Einzelwettkämpfe aus, ein beliebtes Turnier ist auch stets die Ermittlung des Deutschen Schulschachmeisters, der besten Schachschule Deutschlands.

Diese Meisterschaft findet in verschiedenen Altersklassen statt: Wk 1 (bis 13. Klasse), Wk 2 (bis 10. Klasse), Wk 3 (bis 8. Klasse), Wk 4 (Mädchen) und in diesem Jahr erstmalig als Pilotprojekt auch eine Wk 5 (bis 6. Klasse). Alle Schulen, an denen Arbeitsgemeinschaften Schach trainieren, bereiten sich lange und intensiv auf diesen Wettkampf vor. In den Länderturnieren werden bis März die Landesmeister ermittelt – nur sie haben das Recht, am Finale der jeweiligen Ak teilzunehmen. In Berlin beteiligten sich 1992 insgesamt rund 100 Schulen an diesen Vorausscheiden, in anderen Bundesländern ist das Echo trotz größerer Entfernungen noch intensiver – so kann insgesamt von einer Teilnahme von über 2000 Schulen in Deutschland ausgegangen werden. In diesem Jahr war es wieder zeitgleich zum Bundeswettbewerb "Jugend trainiert für Olympia" soweit – vom 7. bis 10. Mai fanden die Finalkämpfe statt. Mit der Mannschaft vom 5. Gymnasium Prenzlauer Berg Berlin war ich live in Karlsruhe dabei, weshalb ich hier näher über die Wettkampfkategorie 3 berichten will. Eine kleine Sensation war schon die Teilnahme der Berliner Mannschaft, denn diese bestand komplett aus Jungen der 6. Klasse, die sich unter den um zwei Jahre Älteren den Landesmeistertitel erkämpft hatten. Die zweite Mannschaft des Gymnasiums startete übrigens in der Wk 4 in Leipzig. Traute man in Berlin dem doppelten Landesmeister schon so einiges zu, wurden die Zwerge von so manchem anderem eher belächelt, außerdem hatte Berlin noch nie einen Deutschen Meistertitel ge-

holt, die Hauptstädter blieben so sicher bei den meisten Planungen außen vor.

Fast hätte die Bundesbahn dafür gesorgt, daß es auch so geworden wäre – der Streiktermin war skandalöserweise nicht mit unserem Meisterschaftstermin abgestimmt. Doch nach dreimaligem Umsteigen kamen wir noch relativ gut in Karlsruhe an, auch die anderen Mannschaften blieben nicht auf der Strecke. So konnte die erste Runde der insgesamt 7 Spiele am Freitagmorgen ohne

Störungen beginnen. Die Schulschachmeisterschaften werden im Schnellschach ausgetragen, d. h. pro Spieler stehen nur 60 Minuten Bedenkzeit zur Verfügung. Entsprechend werden alle Spiele zu Nervenschlachten, besonders für die Trainer, die wie gehetzte Rehe von einem Brett zum anderen jagen, um auch ja alles Wichtige mitzubekommen.

Am Abend des ersten Tages stand nach drei Runden Leipzig in Führung, doch viele andere Mannschaften lagen dicht auf, noch war gar nichts entschieden. Der Samstag sollte noch härter werden. Nach einem Sieg von Mainz über Leipzig rutschten die Sachsen vorerst ab, an die Spitze schoben sich völlig unerwartet die Berliner, die mit zwei Unentschieden gegen die Hamburger und Bad Schwartau bisher noch keinen Verlust quittieren mußten.

So sah der Stand auch nach 6 Runden aus – Berlin führte mit einem Mannschaftspunkt Vorsprung. Hart darauf folgten Hamburg und Mainz, beide noch mit Chancen auf den Meister, sowie Leipzig, welches sich durch hohe Siege wieder nach oben geschoben hatte. So hing alles am Sonntagmorgen. Berlin – Leipzig hieß das Schicksalsspiel – bei einem 2,5 – 1,5 für die

Leipziger würde der Meister aus der Messestadt kommen. Nach 2 Stunden jedoch war die Sensation perfekt. Mit einem 2 : 2 wurde mit Berlin eine Mannschaft der 6. Klasse in der 8. Deutscher Schulschachmeister. Das gab es noch nie! Ein toller Erfolg für Thomas Neumann, Roland Bienert, Alexander Heinze und Henry Barth von Borussia Friedrichsfelde (übrigens fast alle auch eifrige alpha-Leser), die sich im komplett neuen Outfit des Sponsors Mosaik (wer kennt nicht die Abrafaxe?) zeigten und sich stolz dem Blitzlichtgewitter stellten.

Natürlich wurde ebenso hart auch in den anderen Ak's gekämpft. In Leipzig wurde der Spielfeld umgedreht, hier ging der Prenzlauer Berg in Führung, konnte aber in der 3. Runde durch die Sportschule Dresden abgefangen werden – Sachsen vor Berlin und Hamburg. Hier waren sich die Trainer einig, dieses Finale für die Jüngeren muß auch im nächsten Jahr ins Programm. Leider waren die von den Veranstaltern gebotenen Bedingungen nicht die günstigsten – gerade für die Kleineren sollte man sich etwas mehr Mühe bei der Vorbereitung geben!

Zum Schluß noch ein Blick auf die anderen Ak's: in Halle kämpften die Mädchen mit nicht weniger Siegeswillen als die Jungen, die ortsansässigen Hallenoren gewannen dabei vor Leipzig und Weimar. In der Wk 2 in Bremerhaven siegte Wittenborn vor Leipzig und Saarlouis (man beachte die stets hervorragenden Plätze der Sachsen!) und bei den Ältesten wurde Altensteig als einzige "Schachschule"



Der Deutsche Meister Wk 3 bei der Partienanalyse (v. l. n. r.: Thomas Neumann, Alexander Heinze, Trainer Markus Spindler, Roland Bienert).

der alten Bundesländer seiner Favoritenrolle voll gerecht (gekämpft wurde in Jena).

In relativ kurzer Zeit haben sich die neuen Bundesländer innerhalb der Schulschachbewegung ganz nach vorn gekämpft, auf die Ergebnisse des nächsten Jahres darf man gespannt sein.

Markus Spindler