H 11328 F

Heft 6
Dezember 1992
26. Jahrgang

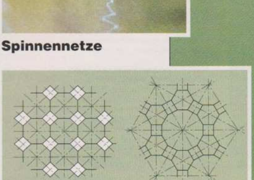
Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Sprachecke

Spinnennetze



Die Sternmosaike zweiter Art

Der Erdglobus

Inhaltsverzeichnis

Wichtiger Hinweis

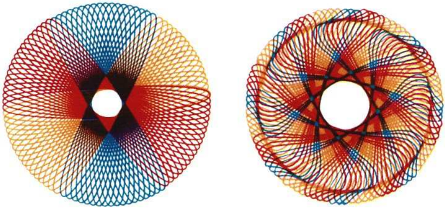
Im nächsten Heft werden die Aufgaben das neuen alpha-Wettbewerbs veröffentlicht und die Preise vorgestellt. Auch die erfolgreichen Teilnehmer des letzten alpha-Wettbewerbs und die Gewinner der zahlreichen Sachpreise befinden sich im Heft 1/1993.

Neue Bezugspreise 1993

Liebe Leserin, lieber Leser, leider sind die Produktionskosten erneut gestiegen. Aus diesem Grund kommen auch wir an einer Preisanpassung nicht vorbei.
Ab 1.1.1993 kosten 6 alpha-Hefte im Abonnement nicht mehr 12,- DM sondern 12,90 DM.
Das Einzelheft kostet 3,00 DM (bisher 2,50 DM).
Die Preise verstehen sich ohne Versandkosten. Wir bitten um Ihr Verständnis.

Mit schönen Bildern kann man rechnen!

Ornamente mit dem Spirographen und Fadengrafiken



Wer gerne schöne Ornamente zeichnet, der findet mit dem Spirographen 1 einen Zeichenkasten, der ihn hierbei tatkräftig unterstützt. – Der Spirograph stellt eine Anzahl von kleinen Zahnrädern zur Verfügung, die innen oder außen an größeren Zahnrädern oder auf Zahnlinealen abgerollt werden. Dabei entstehen Ornamente durch einen Stift, der beim Abrollen in dem kleinen Zahnrad mitgeführt wird.

Aus diesem Grunde heißen diese Kurven auch Rollkurven (Zykloide). Im folgenden geht es um Kurven, die durch Abrollen von kleineren Rädern in größeren Zahnrädern entstehen. Ein großes Zahnrad mit a innenliegenden Zähnen wird auf einer Zeichenfläche befestigt. Ein kleineres Zahnrad mit b äußeren Zähnen wird im Inneren des großen abgerollt.

Das kleinere Zahnrad besitzt nun eine Reihe von Löchern, in die der Zeichenstift eingesetzt werden kann.

Bevor man weiter liest, ist es eigentlich unumgänglich, daß man eigene Erfahrungen beim Zeichnen solcher Kurven macht und dabei nicht nur erfährt, daß man sich stark konzentrieren muß, wenn die Kurven ohne Absetzer und Zeichenfehler entstehen sollen.

Durch Beobachten und etwas Nachdenken lassen sich folgende Aussagen aufstellen und begründen:

- Die Kurve kommt immer zum Anfangspunkt zurück.
- Vor- und Rückwärtsabrollen liefern dieselbe Kurve.
- Spitzen gibt es, wenn der Zeichenstift bei Abrollen dem Rand des großen Rades am nächsten ist.
- Spitzen, die beim Zeichnen nacheinander entstehen, sind b Zähne voneinander entfernt.
- Kurven, mit schärferen Spitzen entstehen durch Löcher nahe am Rande, kleinere mit glatteren Spitzen durch solche, die mehr zum Mittelpunkt hin liegen.
- Der Abstand benachbarter Spitzen (Spitzen, die nebeneinander liegen) ist gleich groß.

Wann schließt sich eine Kurve?

Sie schließt sich, wenn zum ersten Male dieselben Zähne wieder ineinandergreifen. Von einer Spitze bis zur nächsten, die beim Abrollen entsteht, hat sich das kleine Rad um b Zähne weiterbewegt, d. h. die Anzahl der Zähne a des großen Rades wird in Schritten der Länge b ausgemessen. Geht das ganz auf, schließt sich die Kurve schon nach dem ersten Umlauf. Bezeichnet man mit s die Anzahl der Spitzen der Figur, so ist das kleineren Rad $s \cdot b$ viele Zähne weiter und am selben Zahn des großen Rades wieder ausgekommen, also $s \cdot b = a$ bzw. $s \cdot b = u \cdot a$ bei u Umläufen im großen Rad und es stellt sich die Frage:

Wann ist ein Vielfaches von b einem Vielfachen von a gleich? Mathematisch ist das die Frage nach dem kgV (a, b).

Für alle Teiler von a schließt sich die Kurve nach dem ersten Umlauf. Das 24er- (32er-,

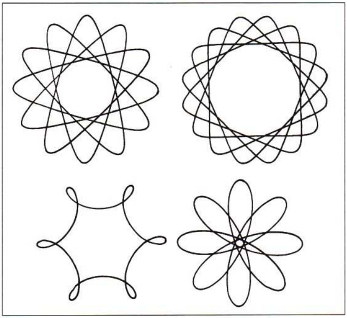


Abb. 1

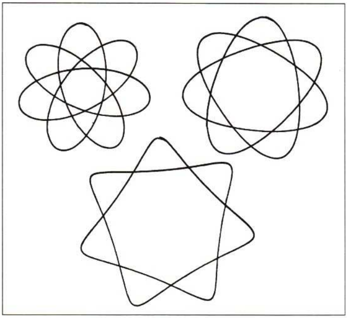


Abb. 2

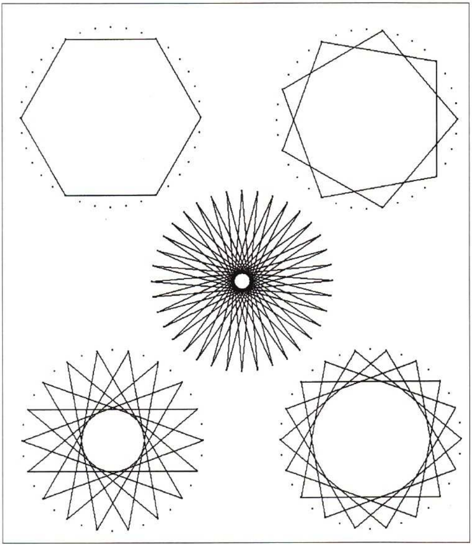


Abb. 3

48er-) Rad, im 96er-Rad abgerollt, ergibt einen "Vierspitz" (Dreispitz, Zweispitz).

Man bestimme die Anzahl der Spitzen und die zugehörigen Umlaufzahlen für a = 96 und b = 30, 40, 60, 80.

In **Abb. 1** ist diese Aufgabe zeichnerisch gelöst und man entscheide, welche Kurve mit welchen Rädern erzeugt wurde.

Jede Gerade durch eine Spitze und den Mittelpunkt einer Kurve ist eine Symmetrieachse, was man sich dadurch klarmacht, daß z. B. von einer Spitze durch Vor- bzw. Rückwärtsabrollen dieselbe Kurve entsteht. Aus dieser Symmetrie kann man auch den gleichen Abstand zwischen den Spitzen begründen.

Welcher Abstand, gemessen in Zähnen, stellt sich nun ein?

Es verteilen sich s Spitzen gleichmäßig über a Zähne, ihr Abstand ist damit a/s.

Einerseits gilt kgV (a, b) = s · b bzw. allg. kgV · ggT = a · b

s · b · ggT(a, b) = a · b oder a/s = ggT(a, b) oder s = a/ggT.

Analog bekommt man u = b(ggT(a, b). Mit diesen Formeln kann man die entstehenden Ornamente schon im Vorhinein beschreiben.

Für das 105er-Rad suche man alle kleinen Zahnräder, die Kurven mit 7 Spitzen entstehen lassen. (siehe Abb. 2)

Für das 96er-Rad entsprechende Räder, für die sich die Kurven nach 7 Umläufen schließen.

Diese Überlegungen an den Rollkurven lassen sich direkt übertragen auf sog. Fadengrafiken, die man sich im Gegensatz zum Spirographen selbst herstellen kann. In ein Holzbrett schlägt man in die Ecken eines regelmäßigen a-Ecks Nägel ein. Von einem Anfangsnagel aus spannt man einen (farbigen) Faden zu jedem b-ten Nagel, bis man wieder zum Anfang zurückkommt. Das a-Eck aus Nägeln entspricht dem äußeren Zahnrad, die Spannregel das sich abrollende, kleine Rad. Es entstehen ansprechende Ornamente (je nach Spannregel), die nicht nur den Klassenraum schmücken können. Zur Simulatin solcher Grafiken läßt sich auch leicht ein kleines Programm schreiben, wie das für die Fadengrafiken in **Abb. 4** gemacht wurde.

Manfred Möller

Akad. Oberrat am Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Dortmund

[1] In der Marktecke von Heft 4 wurde der Spirograph ausführlich vorgestellt.

Nasa gibt Asteroiden-Alarm

Globale Katastrophe denkbar – Genauere Beobachtung nötig

New York (EB) Ein Studienkreis unter NASA-Leitung hat in einem Bericht die US-Regierung von einer möglichen "globalen Katastrophe" durch Asteroideneinschlag gewarnt. Asteroiden sind Gesteinstrümmer im All, die von der Entstehung des Sonnensystems übriggeblieben sind. Die kleinsten von ihnen treffen oft auf die Erde und verglühen in der Atmosphäre als "Sternschnuppen".

Die Sorge der Wissenschaftler wurde vor zwei Jahren laut. Im März 1989 schrammte ein Asteroid von 800 Metern Durchmesser "knapp" an der Erde vorbei – im Abstand von 690 000 Kilometern (fast doppelte Entfernung Erde-Mond). 1991 kam einer der Erde gar auf 170 000 Kilometern nahe, allerdings ein deutlich kleineres Kaliber von 10 Metern. Dessen Aufschlag hätte "nur" die Wirkung des rätselhaften Tunguska-Meteoriten gehabt, der 1908 Dutzende Kilometer in Sibirien verwüstete.

Einen Brocken, der noch zehnmal größer als der von 1989 war, machen viele Forscher dagegen für das Aussterben der Saurier vor 65 Millionen Jahren verantwortlich – er habe soviel Staub aufgewirbelt, daß die Erde für Jahre im "nuklearen Winter" versank. Tatsächlich entspräche die Energie beim Aufprall eines solchen Asteroiden dem der Explosion von einer Millionen Wasserstoffbomben.

Nach den "Begegnungen" der letzten beiden Jahre beriefen Asteroidenforscher im Sommer 1991 einen Kongreß ein, um sich über die Größe der Gefahr einig zu werden. Das Ergebnis: Knapp 5000 Asteroiden sind bekannt, 128 von ihnen kommen der Erde nahe genug für eine Kollision, und 77 haben die richtige Größe (über 1000 Meter) für eine totale Katastrophe. Ihre Bahnen sind allerdings bekannt: keiner von ihnen wird die Erde in absehbarer Zeit rammen. Die Sorge besteht darin, daß wir noch nicht alle Asteroiden kennen könnten. Abhilfe böte also ein aufgestocktes Beobachtungssystem. Genau das schlägt die Forschungskommisssion, die nach dem Kongreß gebildet wurde, jetzt in ihrem Bericht vor: für 80 Millionen Mark (rund 16 Millionen jährlich Unterhalt) sechs weitere Teleskope zur Asteroidenbeobachtung zu installieren. Ein "Killer-Asteroid" könnte nämlich durch atomare Abfangraketen zertrümmert oder abgefangen werden. Aber ein paar Jahre Zeit zur Vorbereitung sollten wir schon haben, meinen die Forscher.

Döbelner Allgemeine Zeitung
Donnerstag, 9. April 1992

Aufgabe: Der 1871 entdeckte Meteorkrater bei Winslow im USA-Bundesstaat Arizona hat eine Tiefe von 180 m und einen Durchmesser von 1300 m. Er hat in guter Näherung die Gestalt eines Kugelsegmentes (Kugelabschnitt). Dieser vor etwa 22000 Jahren durch den Einschlag eines riesigen Meteoriten entstandene Krater ist noch viel zu jung und das Klima im Norden von Arizona viel zu trocken, so daß noch keine bemerkbare Einebnung stattfinden konnte. Wieviel Kubikmeter Gestein wurden beim Entstehen dieses Kraters beiseite geschleudert?

W. Träger, Döbeln

Zeitungs-schnipsel

Eine Sonderprägung der UNITED STATES OF AMERIKA

Medaille "500 Jahre Wiederentdeckung Amerikas und 200 Jahre US-Dollar":

I. Feinsilbermedaille
Material: Feinsilber 999
Durchmesser: 35 mm
Masse: 15 g

II. Feingoldmedaille
Material: Feingold 999,9
Durchmesser: 35 mm
Masse: 22 g

Aufgabe:
Haben die hier vorgestellte Feinsilber- und Feingoldmedaille durchweg gleiche Abmessungen? Die Dichten von Feinsilber und Feingold mit höchstens 0,001 g Verunreinigungen in 1 g Masse sind

$\varphi_{Ag} = 10{,}5 \frac{g}{cm^3}$ und $\varphi_{Au} = 19{,}2 \frac{g}{cm^3}$.

W. Träger, Döbeln

Mehr

"Nach Schätzungen des Bundesumweltministeriums könnte eine Familie von fünf Personen 200 Mark im Jahr einsparen, wenn sie Getränke anstatt in Dosen ausschließlich in Mehrwegflaschen einkauft. Denn die Verpackungskosten liegen bei einer Weißblechdose im Schnitt bei 0,17 DM und bei einer Mehrwegflasche bei 0,03 DM." *(Info-Dienst Umwelt-Tip)*

Der Erdglobus

Laut literarischen Quellen fertigte um 150 v. Chr. der Grieche Krates einen Erdglobus (Kugel – lt.: globus) mit 4 längs des Äquators und des Hauptmeridians voneinander getrennten "Kontinenten".

Der älteste in Deutschland erhalten gebliebene, von Martin Behaim 1492 geschaffene Erdglobus befindet sich im Germanischen Nationalmuseum in Nürnberg. Auf diesem Globus ist Amerika nicht eingezeichnet, denn es wurde erst im gleichen Jahr 1492 von Kolumbus entdeckt. Auf der Weltausstellung 1992 in Sevilla war der in 20jähriger Arbeit von einem Handwerksmeister aus Wernigerode aus 578 rundgeklopften Messingplatten hergestellte Riesenglobus mit einem Durchmesser von 1,27 m ausgestellt.

1. Aufgabe:
Erhebungen und Vertiefungen der Erdoberfläche werden auf geographischen Karten u. a. durch Angeben ihrer Höhe über dem Meeresspiegel (Mittelwasser des Weltmeeres) beschrieben.
So hat der Mount Everest die Höhe 8872 m ü. M. Für die Herstellung eines Reliefglobus wird angenommen: Alle Punkte der Erde mit der Höhe 0 m ü. M. liegen auf einer Kugeloberfläche mit Radius 6370 km, und diese Kugelfläche wird durch eine räumliche Ähnlichkeitsabbildung auf die Kugelfläche des Reliefglobus abgebildet, in der das Bild des Weltmeeres liegt.
Welchen Abstand hätte auf einem Reliefglobus die Spitze des Mount Everest von der das Bild des Weltmeeres tragenden Kugelfläche mit dem Durchmesser 1,27 m, wenn die Höhen ü. M. durch die gleiche Ähnlichkeitsabbildung, die das Weltmeer auf den Reliefglobus abbildet, mit abgebildet werden?

2. Aufgabe:
Der Meeresspiegel des Weltmeeres liegt auf einer abgeplatteten Rotationsfläche (Rotationsellipsoid), deren Achse die Erdachse ist. Diese Rotationsfläche, deren Punkten der Höhe 0 m ü. M. zugeordnet ist, hat den Äquatorialdurchmesser 2 a = 12756 km und den Poldurchmesser 2 c = 12712 km. Welchen Abstand hätte auf einem zu diesem den Meeresspiegel enthaltenden Rotationskörper ähnlichen Modellkörper, dessen Äquatorialdurchmesser 1,27 m beträgt, ein Pol vom Mittelpunkt?

W. Träger, Döbeln

wegflasche statt Dose

Aufgabe:
Wieviele Weißblechflaschen muß ein Fünfpersonenhaushalt im Mittel pro Monat und pro Person beim Einkauf durch Mehrwegflaschen ersetzen, um so im Jahr 200 DM einzusparen?

W. Träger, Döbeln

Knobelecke

	a	b	c	d	e	f	g
1				■			
2		■				■	
3				■			
4				■			
5	■		■		■		■
6		■				■	
7				■			

waagrecht

1a: Quadratzahl

1e: um 7 größer als die kleinste dreistellige Quadratzahl

2c: Vielfaches von 175

3a: Vielfaches von 15

3e: $42 \cdot 362 - (16926 - 2617)$

4a: $25 \cdot 19$

4e: Vielfaches von 31

6a: kleinste natürliche Zahl

6c: $(2835 : 27) \cdot (648 : 72)$

7a: Vielfaches von 64

7e: Lösungszahl der Gleichung $x : 8 = 27$

senkrecht

1a: $251 \cdot (416 - 392)$

1c: Vielfaches von 55

1e: subtrahiert man von dieser Zahl 745, so erhält man 839

1g: $(12316 - 5501) + 8880 : 12$

3b: $(389 - 246) \cdot (544 : 136)$

3f: größte dreistellige Quadratzahl

5d: Lösungszahl der Gleichung $x \cdot 4 = 336$

6a: um 7 kleiner als eine Quadratzahl

6c: $(18240 - 3648) : (19 \cdot 8)$

6e: Vielfaches von 13

6g: $5806 - [(7256 - 5342) \cdot 3 - 12]$

Irina Kehrer, Weiden

Weihnachten als Superlativ

Zusammengestellt von Ralf Laue

☆ **Die größte Weihnachtsfeier** fand 1980 in einem Stadion in Seattle (USA) statt. 103154 Mitarbeiter von Boeing Co. nahmen teil. Im Stadion waren 1000 Weihnachtsbäume aufgestellt.

☆ Seit 1954 beschenkt Raymond Picard aus Kanada als Weihnachtsmann verkleidet die Kinder – Jahr für Jahr im **selben Klubhaus**.

☆ 47 Stunden Arbeitszeit waren 1985 in Frankreich nötig, um einen **Stoff-Weihnachtsmann von 12 Meter Höhe** herzustellen. Dabei verarbeite man 183 m^2 textiles Material.

☆ H. Levaufre aus Metz stellte 1987 den **größten Schokoladen-Weihnachtsmann** her. Er war 410 kg schwer und 2,58 m hoch.

☆ Der **höchste Weihnachtsbaum** war eine 67,36 hohe Douglastanne. Sie wurde 1950 in einem Einkaufszentrum in Seattle aufgestellt.

☆ Die **meisten Kerzen** erstrahlten 1988 an einem Weihnachtsbaum in Friendship (USA) – genau 45465 Stück.

☆ Der **teuerste Weihnachtsbaum** war 120 Millionen Französische Franc wert. Die Dekoration bestand aus 25 Kostbarkeiten von Pariser Juwelieren.

☆ Aus 4200 Lebkuchen wurde 1985 in Emmen (Schweiz) das **größte Pfefferkuchen-Haus** hergestellt. Es erreichte eine Höhe von 7,5 m.

☆ 216,80 m lang war ein Weihnachtsstollen, von 10 Konditoren 1986 in Ostrhauderfehn gebacken.

☆ Die **meisten Weihnachtskarten** verschickte Werner Erhard aus San Francisco im Jahre 1975. Er schrieb 62824 Stück.

☆ In Nordwalde bei Münster bauten Heimkinder den **größten funktionsfähigen Nußknacker**. Er ist 3,46 m hoch und 300 kg schwer.

☆ Die **größten Weihnachtskrippen** wurden in Valence und Marseille aufgestellt. Sie nehmen je eine Fläche von 300 m^2 ein.

Spinnennetze

Der 21. Februar 1967 ist ein bemerkenswertes Datum in der Geschichte der Spiele. In einem Cambridger College erfanden nachmittags beim Tee zwei Mathematiker, M. S. Paterson und J. H. Conway, ein neues Spiel: Sprouts (Sprößlinge). Wir wollen es Spinnennetze nennen.

Conway äußerte sich zu dem Spiel: "Am Tage, nach dem Sprouts geboren war, schien es, als ob alle Welt spielte. Bei Kaffee oder Tee saßen kleine Gruppen zusammen und starrten auf das Spielgeschehen. Einige begannen, die Spielzüge an Mauern und anderen Gegenständen aufzuzeichen, während andere bereits über eine mehrdimensionale Form des Spiels nachdachten. Selbst das Verwaltungspersonal war nicht immun gegen das Spiel, von dem man die Überreste an den unmöglichsten Plätzen antraf. Immer, wenn ich in diesen Tagen jemanden für das neue Spiel zu gewinnen suchte, schien es mir, als ob er schon davon gehört hatte."

Conway übte dabei angelsächsisches Understatement, denn die Sprouts sprossen bald im gesamten Vereinigten Königreich, und es wird behauptet, daß sie Englands Wirtschaft mehr als die Streiks zusetzten, was ja zuvor nur Loyds Fünfzehner-Puzzle vermocht hatte.

In Europa ist den Sprößlingen das Klima nicht so gut bekommen, dabei haben sie wahrlich nichts typisch Britisches an sich. Als Spielmaterial benötigt man ein Blatt Papier und einen Stift. Zu Beginn eines Spieles wird eine bestimmte Anzahl von Punkten auf das Blatt gezeichnet, bereits ab drei Punkten ist ein interessantes Spiel möglich. Anfänger sollten sich nicht mehr als vier Punkte vorgeben. Die Regeln sind ganz einfach:

1. **Abwechselnd verbinden beide Spieler zwei Punkte durch eine beliebige Linie oder zeichnen eine Linie, die zum Ausgangspunkt zurückkehrt.**
2. **Keine Linie darf eine andere Linie oder sich selbst kreuzen sowie durch einen der gezeichneten Punkte gehen.**
3. **Kein Punkt darf mehr als drei Enden von Linien vereinigen.**
4. **Wenn ein Spieler eine Linie gezogen hat, dann markiert er auf ihr einen weiteren Punkt.**
5. **Sieger ist, wer die letzte Linie zeichnet.**

Ein Spiel mit 1 Punkt ist einfach, da die Züge eindeutig durch die Regeln festgelegt sind. Wie **Abb. 1** zeigt, ist das Spiel nach zwei Zügen beendet. Die beiden letzten Züge sind von ihren spielerischen Möglichkeiten her gleichwertig, obwohl vom optischen Eindruck einmal die Verbindung innerhalb und einmal außerhalb der geschlossenen Kurve verläuft.
Bei der Analyse ist es wirksam, auf diesen Sachverhalt zurückzugreifen, um die Übersichtlichkeit zu wahren.

Abb. 2 zeigt die möglichen Eröffnungszüge für zwei Punkte A und B.

Die Varianten I und V sind im gerade erläuterten Sinne repräsentativ für die Möglichkeiten eines 2-Punkte-Spiels. In dieser abgekürzten Beschreibung zeigt **Abb. 3** das vollständige 2-Punkte-Spiel (nach Conway), das schon bemerkenswert kompliziert ist.

Das Spielergebnis hängt lediglich von der möglichen Anzahl von Zügen ab, die sich für die vorgegebenen Punkte ermöglichen lassen. Aber diese Anzahl hat sich bis heute einer allgemeinen Analyse entzogen. Jeder Punkt hat die Möglichkeit, bis zu drei Anfänge bzw. Enden einer Linie aufzunehmen. Bei n Punkten gibt es somit insgesamt bis zu 3n Anfänge bzw. Enden von Linien. Jede Linie verbraucht von diesem Vorrat 3n je einen Anfang und ein Ende, verringert also 3n um 2. Andererseits

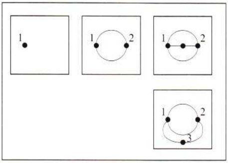


Abb. 1

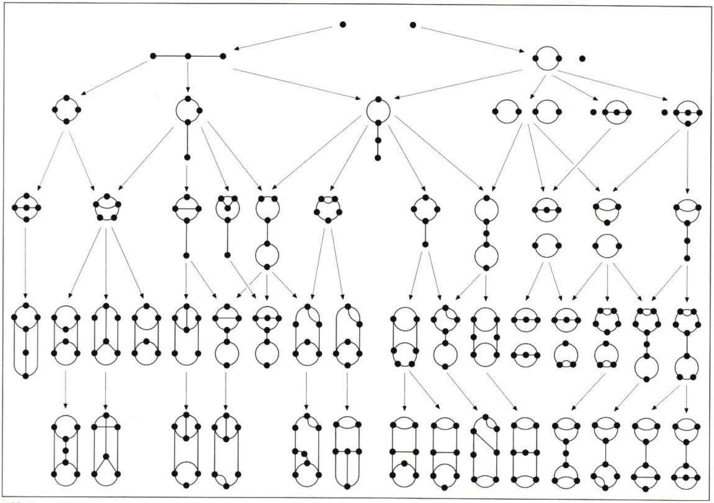


Abb. 3

enthält jede gezogene Linie einen neuen Punkt. Folglich reduziert jede gezogene Linie die Gesamtkapazität 3n nur um 1. Spätestens, wenn nur noch 1 Punkt übrigbleibt, an dem zwei Linienenden vorhanden sind, kann das Spiel nicht mehr fortgesetzt werden. Das heißt, daß nach höchstens 3n-1 Zügen das Spiel beendet sein wird. Andererseits lassen sich von jedem Punkt mindestens zwei Linien ziehen, also dauert ein Spiel wenigstens 2n Züge.

Wieviel Züge sind bei einem 3-Punkt-Spiel bzw. 4-Punkt-Spiel minimal bzw. maximal möglich? Versucht einmal, beim 3-Punkt-Spiel, die erreichbaren 8 Züge tatsächlich zu machen! Ihr werdet sehen, daß dies schon recht schwierig ist.

Ein mögliches 3-Punkt-Spiel seht Ihr in **Abb. 4**. Untersuchungen für 3, 4 und 5 Punkte haben ergeben, daß der erste Spieler stets gewinnen kann. Wie, das solltet Ihr selber ausprobieren. Bei 6 Punkten gewinnt der zweite Spieler bei optimalem Spiel. Größere Punktvorgaben konnten theoretisch noch nicht bewältigt werden.

Wenn Ihr einige Übung in diesem Spiel habt, solltet Ihr einmal versuchen, die Misère-Form zu spielen. Dabei siegt derjenige, der zuerst keine Linie mehr zeichnen kann.

Hier kann der zweite Spieler einen Sieg erzwingen, wenn 2, 3 oder 4 Punkte vorgegeben werden.

Ich wünsche Euch viel Spaß beim Spielen

Claudia Erdmann

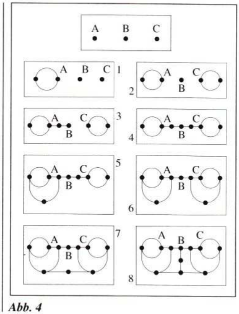


Abb. 4

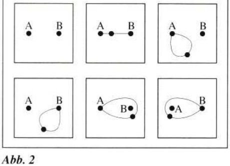
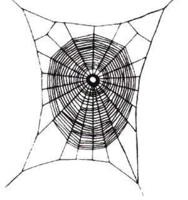
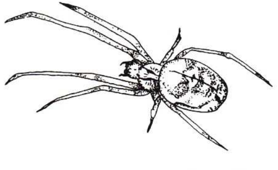


Abb. 2





1742

1917

837

Was geschah vor...Jahren?

1992 Chronologie Teil V

718 der Kalif Umar II befahl die Umsiedlung der Gelehrten des Museions in Alexandria nach Antiochia in Kleinasien

1193 das Wort "ciffre" tritt erstmals in einer Handschrift auf

1543 Druck des Hauptwerkes des N. Copernicus: "De revolutionibus ..."

1618 W. Harvey entdeckt den Blutkreislauf

1642 am 25. Dezember Isaac Newton geboren. Newton lieferte fundamentale Arbeiten zur Physik, zur Astronomie, zur Infinitesimalrechnung, zur Algebra und Geometrie. Sein Geburtsdatum wird oft auch als 4. 1. 1643 angegeben. Diese beiden Geburtsdaten erklären sich aus verschiedenen verwendeten Kalendern (julianisch und gregorianisch).

1718 Edmond Halley bemerkt beim Vergleich von Positionsangaben von Sternen nach Ptolemäus mit zeitgenössischen Positionsangaben, daß die Sterne am Himmelszelt eine Eigenbewegung zeigen

1718 "The Doctrine of Chances" von A. de Moivre erschienen. Das Buch enthielt Lösungen von Aufgaben, die mit Glücksspielen zusammenhängen

1842 am 17. Dezember Sophus Lie geboren. Lies Arbeiten waren vorwiegend der Algebra gewidmet.

1918 am 6. Januar Georg Cantor gestorben. Cantor war der Begründer der neueren Mengenlehre.

1943 am 14. Februar David Hilbert gestorben. Hilbert lieferte grundlegende Arbeiten zur Zahlentheorie, zur mathematischen Logik, zur Geometrie und zur mathematischen Physik.

1968 Entdeckung eines Pulsars im Zentrum des Krebsnebels.

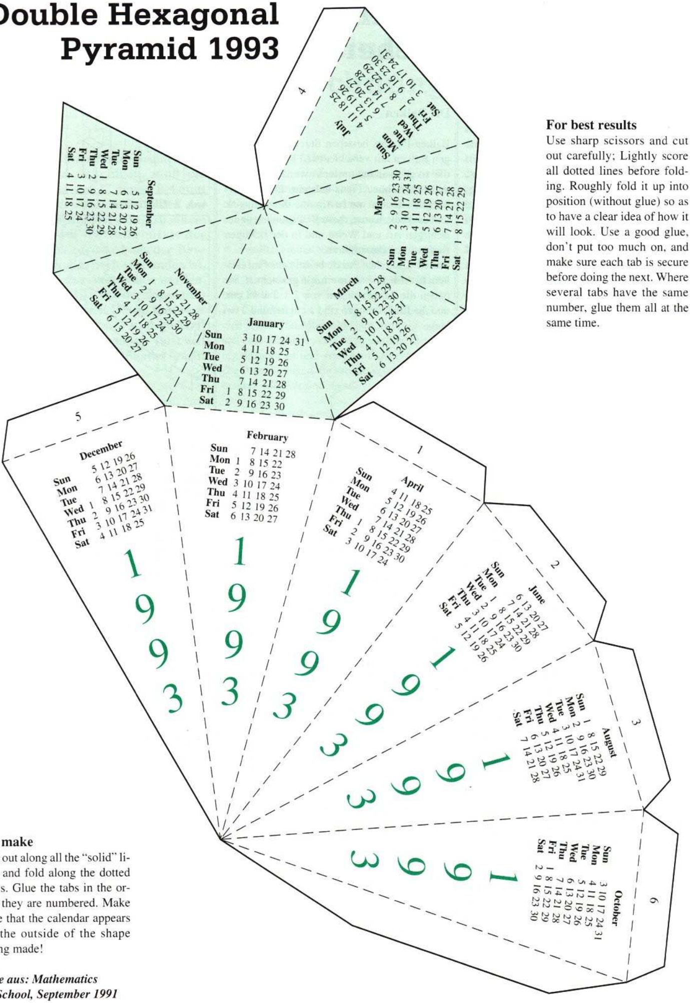
Eine Aufgabe für Vieta

Auch die Geschichte der Mathematik ist nicht frei von nationalen Überheblichkeiten. Beim Streit um die Erstentdeckung mathematischer Resultate wurde oft der sachliche Standpunkt verlassen und an seine Stelle traten Verdächtigungen. Es wurde behauptet, ein Gelehrter habe bei einem anderen abgeschrieben oder durch Hörensagen von den Resultaten anderer Kenntnis erhalten und diese fremden mathematischen Ergebnisse dann als seine eigenen ausgegeben. Besonders übel wurden solche Auseinandersetzungen, wenn sie mit nationalen oder religiösen Vorurteilen belastet wurden. Das bekannteste Beispiel eines solchen Streites war der Streit um die Entdeckung der Differential- und Integralrechnung zischen I. Newton (1643 – 1727) und G. W. Leibniz (1646 – 1716) und ihren Anhängern.

Im Jahre 1593, also vor 400 Jahren, gab es ein besonders dummes Beispiel für mathematisch gefärbten nationalen Übermut. In diesem Jahr erschien das Buch "Ideae mathematicae ..." des niederländischen Mathematikers Adriaan van Roomen (1561 – 1615). Darin gab van Roomen eine Übersicht über alle, nach seiner Meinung, wichtigen zeitgenössischen Mathematiker. In der Übersicht fand sich kein einziger französischer Mathematiker. Das Erscheinungsjahr des Buches fiel interessanterweise mit dem Jahr des Übertritts des französischen Königs Heinrich IV (1553 – 1610) zum katholischen Glauben zusammen. Van Roomen stellte in seinem Werk eine Aufgabe an alle Mathematiker: es sollte eine spezielle Gleichung 45. Grades gelöst werden. Der niederländische Gesandte in Frankreich hatte van Roomens Buch gelesen.
Am Hofe Heinrichs äußerte er sich äußerst abfällig über die Leistungsfähigkeit der französischen Mathematiker und behauptete, kein Franzose könne van Roomens Aufgabe lösen. Francois Viète (Vieta, 1540 – 1610), der dem König als Berater diente, wurde herbeigerufen, gab sofort eine Lösung und am nächsten Tag alle weiteren positiven Lösungen der Aufgabe. Vietas Überlegungen sollen an einer Gleichung 5. Grades erläutert werden. Man solle die Gleichung $A = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ lösen. Setzt man $x = \sin y$, so ergibt sich $A = 16\sin^5 y - 20\sin^3 y + 5\sin y$. Vieta hätte sofort erkannt, daß die rechte Seite der Gleichung zusammengefaßt werden kann zu $16\sin^5 y - 20\sin^3 y + 5\sin y = \sin 5y$.
Diese Zusammenfassung kann man durch Rechnung aus den bekannten Formeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ gewinnen. Man setzt an $\sin 5x = \sin(x + 4x)$ und dann $\sin 4x = \sin(x + 3x)$ und $\cos 4x = \cos(x + 3x)$ usw. Die ursprüngliche Gleichung kann dann umformt werden zu $\sin 5y = A$.
Gilt für A: $-1 \leq A \leq +1$, so ist y bestimmbar und daraus wiederum $x = \sin y$. In dem einfachen Falle $A = 1/2$ haben wir zuerst die Gleichung $1/2 = \sin 5y$ zu lösen. Das ergibt für y die Winkel 6°, 30°, 78°, 102°, 150°, 174°, 222°, 246°, 294°, 318°.
Man erhält also insgesamt 10 Lösungen für y im Bereich $(0, 2\pi)$. Bildet man mit diesen Werten die Werte $x = \sin y$, so stellt man fest, daß nur fünf unterschiedliche Werte von x auftreten: $\sin 6° = \sin 174°$, $\sin 30° = \sin 150°$, $\sin 78° = \sin 102°$, $\sin 222° = \sin 318° = -\sin 42°$, $\sin 246° = \sin 294° = -\sin 66°$. Diese fünf Werte sind die Lösungen der Gleichung $1/2 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$. Nach diesen angedeuteten Prinzipien war auch van Roomens Aufgabe 45. Grades lösbar. Vietas Scharfsinn zeigte sich im Erkennen der Tatsache, daß die Gleichung van Roomens "nur" eine Beziehung zwischen trigonometrischen Funktionen beschrieb. Das Leben Heinrichs IV und das Leben an seinem Hofe hat Heinrich Mann (1871 – 1950) in zwei berühmten Romanen beschrieben: Die Jugend des Königs Henri Quatre (1935), Die Vollendung des Königs Henri Quatre (1938).

H. Ilgands

Double Hexagonal Pyramid 1993



For best results

Use sharp scissors and cut out carefully; Lightly score all dotted lines before folding. Roughly fold it up into position (without glue) so as to have a clear idea of how it will look. Use a good glue, don't put too much on, and make sure each tab is secure before doing the next. Where several tabs have the same number, glue them all at the same time.

To make

Cut out along all the "solid" lines and fold along the dotted lines. Glue the tabs in the order they are numbered. Make sure that the calendar appears on the outside of the shape being made!

Idee aus: Mathematics in School, September 1991

Das unmögliche Escher-Puzzle

Unmögliche Figuren lassen etwas erkennen, was nicht existieren kann. Ein räumliches Ding, das nicht stimmt. Man muß seine Phanatasie ein bißchen laufen lassen. Oskar van Deventer, weltbekannter Puzzler aus Voorburg, muß wohl über einige ganz fremde Hirnwendungen verfügen. Bei dem unmöglichen M. C. Escher-Puzzle (s. Abb. 1), das er sich ausgedacht und gezeichnet hat, ließ er sich von dem Puzzle mit den kleinen Balken inspirieren, das man vielleicht schon kennt. Und selbstverständlich von den "unmöglichen" Figuren des M. C. Escher.

Die Balken

Balken-Puzzles bestehen durchweg aus einigen Balken mit verschiedenen Einkerbungen, die so ineinander gesteckt werden müssen, daß eine schöne Figur entsteht. Die Einkerbungen erlauben nur bestimmte Bewegungen, und es ist die Kunst, diese Bewegungen in der richtigen Art und Weise und in der richtigen Reihenfolge auszuführen.
Das M. C. Escher-Puzzle besteht aus fünf Balken. In **Abb. 2** sind sie einzeln gezeichnet. Sie haben die Abmessungen von 2 x 2 x 18 cm, und die Einkerbungen sind 1 cm tief und 2 cm lang.

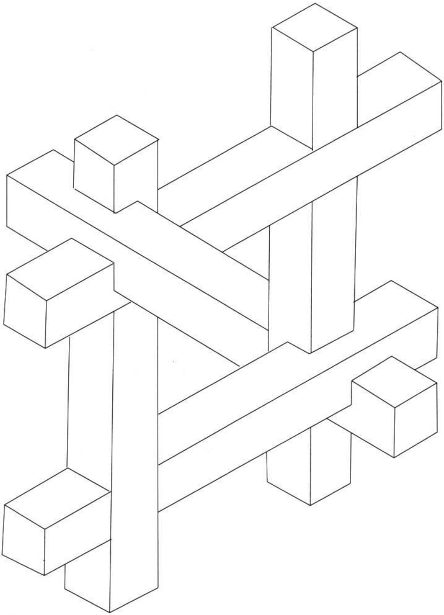


Abb. 1

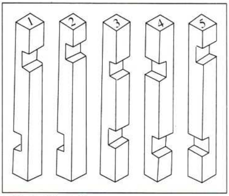


Abb. 2: Die Balken

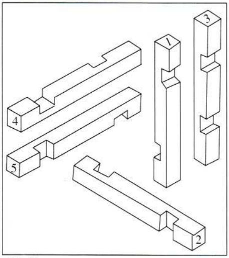


Abb. 3

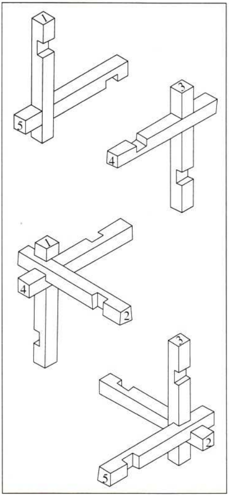


Abb. 4

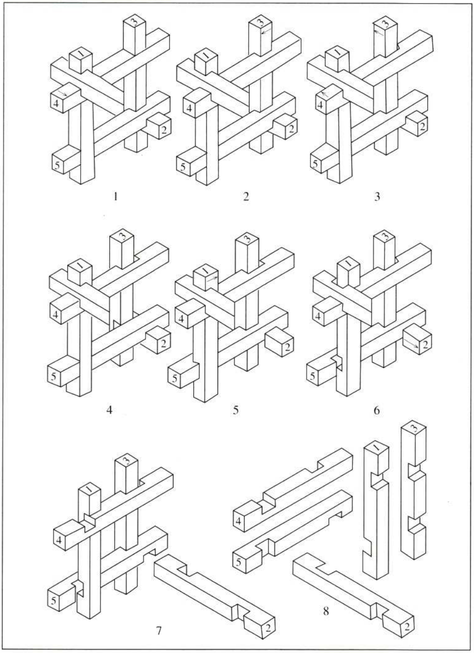


Abb. 5

In **Abb. 3** sieht man sie in der Stellung, in der sie in dem ineinandergesetzten Puzzle sitzen. Die vier Eckverbindungen sind in **Abb. 4** gesondert gezeichnet. Bis dahin liegt nichts Besonderes vor. Alles stimmt, man kann es mittels richtiger Balken, einer Säge, einem Hammer und einem Stemmeisen leicht nachbauen.

Wie auseinander und ineinander?

Jetzt gehen wir aber mit Oskar als Führer in die unwirkliche Welt des M. C. Escher.
Der fünfte Balken von **Abb. 1** kann nicht existieren, wir wissen es, aber in unserer Phantasie existiert er doch. Wir haben ihn in einem unwirklichen Puzzle-Geschäft gekauft, und er sitzt noch genauso ordentlich wie in **Abb. 1**.
Wie bekommen wir das Puzzle auseinander? Welche Balken sitzen fest, welche Balken können verschoben werden?

Ohne Oskars Hilfe kommen wir nicht klar. Glücklicherweise hat er die Lösung Schritt für Schritt aufgezeichnet (**Abb. 5**). Und bei dem letzten Schritt ...., oh Wunder, ... sind wir plötzlich wieder in die normale Welt zurückgekehrt. Alle Balken sind gelöst, und man kann sie einfach vor sich auf den Tisch legen. Will man das Puzzle wieder ineinander setzen, dann führt man die einzelnen Schritte einfach (nun ja, einfach ...) in der umgekehrten Reihenfolge aus.
Oskar nannte solch ein unmögliches Puzzle zwar lösbar, aber nicht durchführbar. Man kann es nur in Gedanken lösen, zumindest wenn man auch solche fremden Hirnwendungen besitzt wie er.

nach: "De onmogelijke Escher-puzzle", von Jan van de Craats in Pythagoras, Amsterdam 1988

Alphons logische Abenteuer

Berti hatte in dem alten Buch ein weiteres, aus der Antike überliefertes Problem gefunden. Wie er es auch anstellte, die Aufgabe war nicht durch irgendeine Einschränkung lösbar. Er las nochmals den Text: "Eine Ägypterin sah, wie ihr am Nil spielendes Kind von einem Krokodil angegriffen wurde. Die Mutter eilte an das Ufer und bat das Krokodil, das Kind frei zu geben. Das Tier antwortete, daß es das Kind zurückgebe, wenn die Mutter errate, was es tun werde. Die Mutter sagte: Du wirst mir mein Kind nicht zurückgeben. Das Krokodil erwiderte darauf: Du magst wahr oder falsch gesprochen haben, ich brauche dir auf keinen Fall das Kind zurückgeben; dann ist deine Rede wahr, so erhältst du es nicht wieder nach deiner eigenen Aussage, ist sie aber falsch, so gebe ich es nicht zurück kraft unserer Übereinkunft. Die Mutter widersprach: Ich mag wahr oder falsch gesprochen haben, du mußt mir mein Kind zurückgeben. Denn ist meine Aussage wahr, so mußt du es mir geben laut unserer Übereinkunft; ist sie aber falsch, so ist das Gegenteil wahr: Du wirst mir mein Kind zurückgeben."
Berti murmelte: "Muß dieses gefräßige Tier die armen Menschen obendrein noch mit einem solchen Dilemma schachmatt setzen!"
Alphons, den Berti aufsuchte, meinte zu Bertis mitfühlender Äußerung, daß durch das Dilemma auch das Krokodil in seinem Tun betroffen sei. Nach einigem Für und Wider kam Berti auf die Idee, einen analogen Fall zu konstruieren. Er nahm die Schultasche von Alphons und sagte: "Alphons, Du bekommt die Tasche zurück, wenn Du errätst, was ich als nächstes tun werde." Dieser überlegte und fand, daß damit nicht genau die Problemlage getroffen ist. "Trotzdem kommen wir einen wichtigen Schritt weiter. Du hast Dir – hoffentlich – etwas vorgenommen. Ich soll das in Form einer Aussage erraten. Der Springpunkt ist, ob das, was ich behaupte, gerade das ist, was Du tun willst. Meine Aussage ist wahr, wenn sie mit dem übereinstimmt, was zu tun Du beabsichtigst. Die Wette lautet also: Ist wahr, daß Du das gedacht hast, was ich durch meine Aussage vermute, nicht aber, ob das, was Du gedacht hast, wenn ich es errate, wahr ist." Berti bat Alphons, ihm das letztere nochmals zu erklären. "Die Mutter hat zwischen zwei Aussagen zu entscheiden, (a) Ich gebe das Kind zurück, (b) Ich gebe das Kind nicht zurück. Beide Aussagen betreffen ein mögliches Tun des Krokodils, von dem dieses eins sich nach Voraussetzung ausgewählt hat. Das beabsichtigte Tun hat die Mutter zu erraten, indem sie entweder (a) oder (b) wählt. Die gewählte Aussage ist wahr, wenn sie mit jener übereinstimmt, gemäß der das Krokodil zu handeln beabsichtigt. Der Gegenstand der Wette ist also das Übereinstimmen einer Aussage mit einer Aussage. Ich denke mir eine von zwei bekannten Aussagen und Du hast recht, wenn Du die von mir gedachte Aussage errätst, dabei ist völlig gleichgültig, ob die von mir gedachte Aussage wahr oder falsch ist. Die von mir gedachte Aussage ist wahr, wenn sie mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt. Um ihren geht es bei der Wette aber gar nicht. Ein logischer Fehler wird begangen, wenn man den Bezug einer Aussage auf eine Aussage mit deren Bezug auf ihren Sachverhalt vertauscht. Der Gegenstand der Wette ist, ob eine Aussage mit einer Aussage übereinstimmt, nicht aber, ob letztere mit ihrem Sachverhalt übereinstimmt." Berti stellte dann zutreffend fest: "Das Dilemma entsteht somit dadurch, daß sowohl das Krokodil als auch die Mutter denselben logischen Fehler begehen."

Prof. Dr. L. Kreiser

Die Sternmosaike zweiter Art

In dem vorangegangenem Aufsatz (alpha 2/1991, S. 28/29) wurde gezeigt, daß es 11 Sternmosaike gibt. Unter einem Sternmosaik wurde dabei eine die unendliche Ebene lückenlos ausfüllende Anordnung von regelmäßigen Vielecken verstanden, die Ecke an Ecke liegen derart, daß die an den Ecken sich bildenden Strahlenbüschel sämtlich kongruent sind. Die Abbildung unten zeigt nochmals eine Zusammenstellung dieser Sternmosaike erster Art: 3 regelmäßige und 8 unregelmäßige. Es gibt nun noch eine zweite Art von Sternmosaiken; hierunter wird verstanden eine die unendliche Ebene lückenlos ausfüllenden Anordnung kongruenter Vielecke, bei denen die an den Ecken sich bildenden Strahlenbüschel regelmäßige Sterne sind.

Unter einem regelmäßigen Stern wird dabei ein Strahlenbüschel mit lauter gleichlangen

Die drei regelmäßigen Sternmosaike.

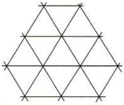


Abb. 1

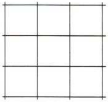


Abb. 2

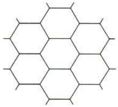


Abb. 3

Die acht halbregelmäßigen Sternmosaike.

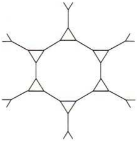


Abb. 4

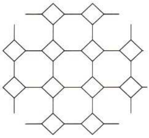


Abb. 5

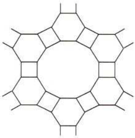


Abb. 6

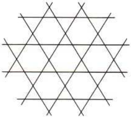


Abb. 7

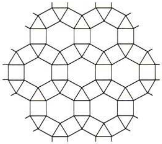


Abb. 8

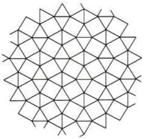


Abb. 9

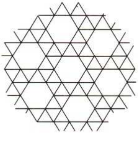


Abb. 10

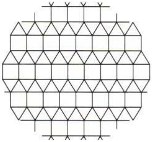


Abb. 11

Abb. 1

Strahlen und gleichen Winkeln verstanden. Für die Sternmosaiken zweiter Art gelten ganz ähnliche Überlegungen für jene erster Art.

a) Die gesuchten Vielecke können nur Vielecke mit 3, 4, 5 oder 6 Seiten sein, da einerseits schon ein Siebeneck ein Winkel in der Größe von mehr als 128° (900° : 7) hat und andererseits der kleinste regelmäßige Stern (3 Strahlen) nur die Winkel von 120° besitzt.

b) Es gelten für die Zahl der zum regelmäßigen Stern gehörenden Strahlen die gleichen Gleichungen wie wir sie bei der Untersuchung der Mosaike erster Art für die Seitenzahlen der regelmäßigen Vielecke gefunden haben. So z. B. erhalten wir, wenn wir die Form der Dreiecke suchen und jetzt mit n_1, n_2 und n_3 die Zahl der Strahlen an den drei Ecken bezeichnen, die Gleichung

$$180° = 360°/n_1 + 360°/n_2 + 360°/n_3$$

und wiederum

$$1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 = 1/2.$$

Durch ähnliche Überlegungen wie damals erhalten wir dann ebenso wie damals 11 Lösungen, das sind die in **Abb. 2** durch gestrichelte Linien gekennzeichneten Mosaike. Diese **Abb. 2** zeigt auch, daß man die Sternmosaike zweiter Art aus den entsprechenden Sternmosaiken erster Art dadurch erhält, daß man in den regelmäßigen Vielecken die Inkreisradien vom Mittelpunkt des Vielecks zu den Berührpunkten mit den Seiten zieht.

Hermann Oehl

Die drei regelmäßigen Sternmosaike.

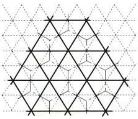


Abb. 1

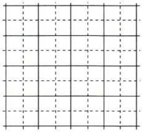


Abb. 2

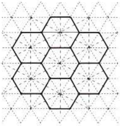


Abb. 3

Die acht halbregelmäßigen Sternmosaike.

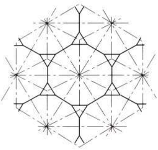


Abb. 4

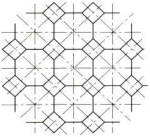


Abb. 5

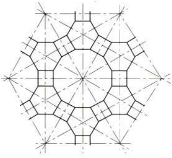


Abb. 6

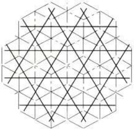


Abb. 7

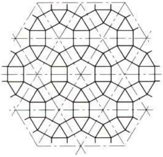


Abb. 8

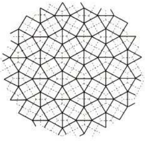


Abb. 9

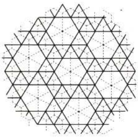


Abb. 10

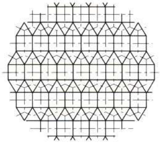


Abb. 11

Abb. 2

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Aufgabe: Die Lottowürfel

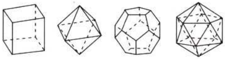


Abb. 1–4

Da man beim Würfeln das Ergebnis des Wurfes an der nach oben liegenden Fläche abliest, sind nur vier der fünf regelmäßigen Körper hierfür geeignet. Nach der Zahl ihrer Außenflächen heißen sie: Sechswürfel (gewöhnlicher Würfel), Achtwürfel, Zwölfwürfel und Zwanzigwürfel. Sie sind, mit den fortlaufenden Zahlen von 1 bis n versehen, in den meisten Spielwarengeschäften erhältlich (Abb. 1 bis 4).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Abb. 5

Beim Spiel mit nur einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit des Treffens für jede der Würfelzahlen gleich groß. Anders ist die beim Spiel mit zwei oder mehr Würfeln. So können zwei Sechswürfel z. B. auf 36 ($= 6^2$) Arten fallen, aber nur 11 verschiedene Ergebnisse liefern (2 bis 12) und zwar jede mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit (siehe Abb. 5).

Hans, der ein leidenschaftlicher Mitspieler beim Deutschen Lotto ist (dort muß auf das Erscheinen von mehreren Zahlen von 1 bis 49 gewettet werden), besitzt zwei gleiche Würfel; er hat sie selbst gefertigt und ihre Außenflächen auf unterschiedliche Weise mit Zahlen beschriftet. Er kann mit diesen zwei Würfeln alle Zahlen von 0 bis 49 erwürfeln und zwar jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit (bei Erscheinen der Null muß er den Wurf wiederholen).

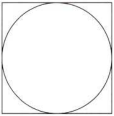
a) Welcher der genannten vier Arten sind seine beiden Würfel?

b) Mit welchen Zahlen hat er die beiden Würfel versehen (2 Lösungen!)?

Hermann Oehl, München

Sprachecke

How many are completely covered?



Consider a unit square. We inscribe in it a circular disc whose diameter is equal to the side of the square. We see immediately that the disc does not completely cover the square.

(i) How many unit squares of a 3 by 3 square will be completely covered by a disc whose diameter is equal to the side of the larger square?

(ii) Try the same problem with a chessboard (an 8 by 8 square) and a disc with a diameter equal to the side of the chessboard.

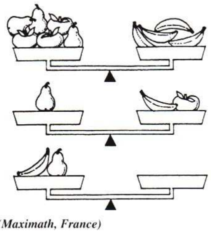
(Fun with Mathematics, Toronto, November 1987, No. 98)

Zeichnung: M. Tekla

Какие значения может принимать параметр c, если известно, что $|x^2 - x + c| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$?

Question d'équilibre

L'équilibre des plateaux de la 3^e balance ne sera obtenu que si l'on pose un certain nombre de pommes sur le plateau de droite. Quel est ce nombre?



(Maximath, France)

Extremaleigenschaften von Quadrat und Würfel

Mittels der im Beitrag "Die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel" hergeleiteten Ungleichungen

$$u_1u_2 = G_2^2 \le A_2^2 = \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$u_1u_2u_3 = G_3^3 \le A_3^3 = \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3}\right)^3$$

mit positiven Zahlen u_1, u_2 und u_3, in denen die Gleichheitszeichen nur für $u_1 = u_2$ bzw. $u_1 = u_2 = u_3$ gelten, werden Extremaleigenschaften von Quadrat und Kubus (Würfel) ermittelt. Für die Maßzahlen x_1 und x_2 der in der Längeneinheit LE gemessenen Seitenlängen $a = x_1$ LE und $b = x_2$ LE eines Rechtecks gilt gemäß $G_2^2 \le A_2^2$ mit $u_1 = x_1$ und $u_2 = x_2$ die Ungleichung

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2,$$

in der das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = x_2$ zutreffend ist, wenn also das Rechteck ein Quadrat ist. x_1x_2 und $x_1 + x_2$ sind die Maßzahlen des Flächeninhaltes und des halben Umfanges des Rechteckes mit den Seiten a und b: $A = ab = x_1x_2 LE^2$; $u = 2(a + b) = 2(x_1 + x_2)LE$
Die Ungleichung

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \quad \text{ist also äquivalent mit}$$

$$A \le \frac{1}{16}u^2.$$

Damit ist bewiesen:
Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist nie größer als der 16-te Teil des Quadrates seines Umfanges. Nur bei einem Quadrat ist der Flächeninhalt gleich dem 16-ten Teil des Quadrates des Umfanges.
Hiernach gelten speziell:
Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.
Von allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang.
Diese beiden Extremaleigenschaften sind äquivalent, denn jede von beiden folgt aus der anderen.
Informativ sei noch mitgeteilt: Die Extremaleigenschaft des Kreises, die als ioperimetrisches Problem der Ebene bezeichnet wird, wurde erstmals 1879 von K. Weierstraß bewiesen:
Von allen geschlossenen ebenen Kurven derselben Länge umschließt der Kreis die Fläche mit größtem Flächeninhalt.
Weitere Extremaleigenschaften des Quadrates sollen hergeleitet werden:

Laut einer binomischen Formel gilt $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Mit

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$

folgt

$$(x_1+x_2)^2 \le x_1^2 + x_2^2 + 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 \le x_1^2 + x_2^2$$

Damit genügen Umfang und Länge der Diagonale

$$d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,LE$$

eines Rechtecks der Ungleichung

$$\frac{1}{8}u^2 \le d^2 \quad \text{bzw.} \quad u \le 2\sqrt{2}d.$$

Somit gelten:
In jedem Rechteck ist der Umfang höchstens gleich dem $2\sqrt{2}$*-Fachen der Länge der Diagonale.*
Von allen Rechtecken mit gleich langer Diagonale (diese lassen sich einem Kreis einbeschreiben) *hat das Quadrat den größten Umfang.*
Aus den Ungleichungen

$$A \le \frac{1}{16}u^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{8}u^2 \le d^2 \quad \text{folgt} \quad A \le \frac{1}{2}d^2.$$

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist höchstens gleich dem halben Quadrat der Länge seiner Diagonale.
Von allen Rechtecken mit gleich langer Diagonale hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.
x_1, x_2 und x_3 seien die Maßzahlen der Kantenlängen $a = x_1$ LE, $b = x_2$ LE und $c = x_3$ LE eines Quaders. Die Formel für Volumen V, Oberflächeninhalt A_0, Gesamtkantenlänge k und Länge d der Diagonale des Quaders sind $V = abc = x_1x_2x_3 LE^3$, $A_0 = 2(bc + ac + ab) = 2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)LE^2$, $k = 4(a + b + c) = 4(x_1 + x_2 + x_3)LE$ und

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,LE.$$

Da x_2x_3, x_1x_3 und x_1x_2 positive Zahlen sind, gilt gemäß der Ungleichung $G_3^3 \le A_3^3$ mit $u_1 = x_2x_3$, $u_2 = x_1x_3$ und $u_3 = x_1x_2$

$$x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_2x_3)(x_1x_3)(x_1x_2)$$

$$\le \left(\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{3}\right)^3$$

und damit $6^3V^2 \le A_0^3$.

In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für $x_2x_3 = x_1x_3 = x_1x_2$, also nur für $x_1 = x_2 = x_3$, also nur wenn der Quader ein Würfel ist.
Laut Ungleichung $G_2^2 \le A_2^2$ gelten

$$x_2x_3 \le \left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2, \; x_1x_3 \le \left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2$$

$$\text{und} \quad x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Durch Addition der linken und rechten Seiten dieser Ungleichungen ergibt sich

$$x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2$$

$$\le \frac{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + 2(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{4},$$

$2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) \le 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ und $A_0 \le 2d^2$. In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ und $x_1 = x_2$, also für $x_1 = x_2 = x_3$, also nur wenn der Quader ein Würfel ist.
Wegen $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)$ gilt für jeden Quader

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0. \text{ Aus}$$

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0 \quad \text{und } A_0 \le 2d^2 \text{ folgt einerseits}$$

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0 \ge \frac{A_0}{2} + A_0 = \frac{3A_0}{2}, \frac{3A_0}{2}$$

$$\le \frac{k^2}{16} \quad \text{und} \quad A_0 \le \frac{k^2}{24}$$

und andererseits

$$\frac{k^2}{16} = d^2 + A_0 \le d^2 + 2d^2 = 3d^2$$

$$\text{und} \quad \frac{k^2}{24} \le 2d^2.$$

Die Ungleichungen

$$6^3V^2 \le A_0^3, \; A_0 \le \frac{k^2}{24} \quad \text{und} \quad \frac{k^2}{24} \le 2d^2$$

lassen sich zu der "fortlaufenden" Ungleichung

$$6^3V^2 \le A_0^3 \le \frac{k^6}{24^3} \le 2^3d^6$$

zusammenfassen, die ihrerseits 6 Ungleichungen enthält. Von den hiernach gültigen Extremaleigenschaften des Würfels sei nur eine explizit angegeben:
Von allen Quadern mit gleichem Volumen hat der Würfel den kleinsten Oberflächeninhalt.
Die übrigen gemäß der aufgestellten Ungleichungen geltenden Extremaleigenschaften des Würfels möge der Leser selbst formulieren. Hier sei vermerkt, daß die als isoperimetrisches Problem des Raumes bezeichnete Extremaleigenschaft der Kugel 1884 von H. A. Schwarz bewiesen wurde:
Von allen geschlossenen Flächen, welche ein gegebenes Volumen einschließen, hat die Kugel die kleinste Oberfläche.

W. Träger, Döbeln

Kreise in der „rationalen Ebene"

Vereinbarung

Zugrunde liegt eine auf ein (kartesisches) Koordinatensystem bezogene Ebene. Wir betrachten nur solche Punkte P(x; y), bei denen x und y rationale Zahlen sind. Eine Gerade wird als Menge ihrer Punkte aufgefaßt. Ein Punkt gehört genau dann zu einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Wir betrachten nun nur solche Geraden g: $y = mx + b$ beziehungsweise h: $x = c$, bei denen m, b und c rationale Zahlen sind.

Insgesamt sagen wir:

Wir betrachten die rationale Ebene.

In Heft 5, 1992 (Geometrie ohne Irrationalzahlen) haben wir einige Eigenschaften der rationalen Ebene kennengelernt. Vor allem gilt: *In der rationalen Ebene muß eine Durchmessergerade eines Kreises diesen nicht schneiden.*

Wir wissen schon, daß auf jeder Geraden der rationalen Ebene unendlich viele Punkte liegen. Nun interessiert uns, ob sich eine analoge Aussage für Kreise der rationalen Ebene machen läßt.

Zum Kreis mit dem Mittelpunkt M(0/0) und dem Radius 1

Wir betrachten den Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1. Ein Punkt $P(x_0; y_0)$ ist genau dann ein Punkt dieses Kreises, wenn er vom Mittelpunkt M die Entfernung 1 hat. Genau dann ist das Entfernungsquadrat $1^2 = 1$. Demnach liegt ein Punkt $P(x_0; y_0)$ genau dann auf dem Kreis k, wenn die Aussage $x_0^2 + y_0^2 = 1$ wahr ist. So kommt man zu einer Darstellung des Kreises k durch eine Gleichung:

k: $x^2 + y^2 = 1$.

Die Gerade w: $y = x$ geht durch den Mittelpunkt M(0; 0) des Kreises k. Schneidet sie den Kreis k?

Ein Schnittpunkt $S(x_S; y_S)$ muß auf der Geraden w liegen. Dann ist $y_S = x_S$ (wahr).

Ein solcher Schnittpunkt $S(x_S; y_S)$ muß auch auf dem Kreis k liegen. Daher ist auch $x_S^2 + y_S^2 = 1$ (wahr).

Aus beiden Aussagen folgt: $x_S^2 = \frac{2}{4}$.

Eine solche rationale Zahl x_S gibt es nicht, denn $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist irrational.

Dann gibt es aber in der rationalen Ebene keinen Schnittpunkt S.

Das bedeutet: Obwohl die Gerade w durch den Mittelpunkt des Kreises k geht, hat sie mit dem Kreis keinen gemeinsamen Punkt. Allerdings trägt der Kreis k durchaus Punkte. A(1; 0), B(0; 1), C(-1; 0) und D(0; -1) sind seine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

und daher

$$F\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

ein Punkt von k. Überdies liegt

$$G\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

auf k.

Wegen $12^2 + 5^2 = 13^2$ ist

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

und daher

$$K\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$$

ein Punkt des Kreises k. Überdies liegt auch

$$L\left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

auf k.

Pythagoräische Zahlentripel

Sind a, b und c drei natürliche Zahlen, für die $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, so nennt man (a, b, c) ein pythagoräisches Zahlentripel. Zwei Zahlentripel (a, b, c) und (u, v, w), zu denen es eine natürliche Zahl n mit $u = na$ und $v = nb$ und $w = nc$ gibt, nennt man proportionale Zahlentripel.

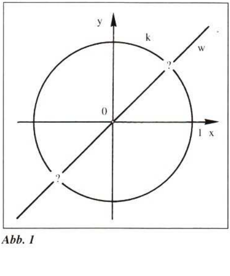


Abb. 1

Zu jedem pythagoräischen Zahlentripel (a, b, c) erhält man eine Menge von Punkten auf k:

$$P\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right), P'\left(-\frac{b}{c}; \frac{a}{c}\right), P''\left(-\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right),$$

$$P'''\left(-\frac{a}{c}; -\frac{b}{c}\right), \ldots \text{ auf k.}$$

Nichtproportionale Zahlentripel liefern verschiedene Punktmengen auf k.

Benützt man die arithmetische Aussage, daß es unendlich viele (nichtproportionale) pythagoräische Zahlentripel gibt, so ist einfach einzusehen, daß der Kreis k unendlich viele Punkte besitzt. Allerdings ist diese arithmetische Aussage nicht ganz einfach zu beweisen. Daher wollen wir nun den geometrischen Sachverhalt mit Hilfe eines geometrischen Satzes beweisen. Überdies werden wir danach die arithemtische Aussage über die pythagoräischen Zahlentripel angenehm gewinnen können.

Vorbemerkung

Vielleicht ist nicht jedem Leser die folgende Aussage bekannt:

Hilfssatz:

Sind die Geraden

g: $y = m_1x + b$ und h: $y = m_2x + c$

zueinander senkrecht, so ist $m_1m_2 = -1$.

Beweis:

Da parallele Geraden die gleiche Steigung haben, genügt es, Geraden durch O(0; 0) zu betrachten. Die Gerade g*: $y=m_1x$ ist zu g parallel und sie geht durch O(0; 0). Auf g* liegt der Punkt $P(1; m_1)$.

Dreht man g* um O(0; 0) um 90°, so erhält man die zu h parallele Gerade h*: $y=m_2x$. Bei dieser Drehung wird der Punkt $P(1; m_1)$ auf den Punkt $P'(-m_1; 1)$ abgebildet. Da h* durch O(0; 0) und $P'(-m_1; 1)$ geht, hat h* die Steigung

$$m_2 = \frac{1 \quad -0}{-m_1 - 0} = -\frac{1}{m_1}.$$

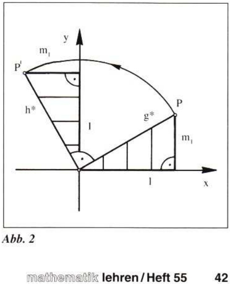


Abb. 2

Auf h*: $y = -\frac{1}{m_1}x$ liegen O(0; 0) und P'($-m_1$; 1). Dann ist aber $m_1 m_2 = -1$.
Nach dieser Vorbereitung kehren wir zum Problem zurück und beweisen:

Satz:
In der rationalen Ebene trägt der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 unendlich viele Punkte.

Beweis:

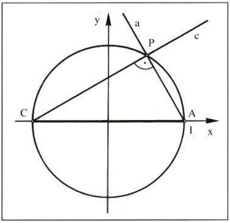


Abb. 3

Die Umkehrung des Satzes von Thales wird zum entscheidenden Hilfsmittel. Wir betrachten den Kreis k: $x^2 + y^2 = 1$. Dieser hat den Durchmesser [AC] mit den Endpunkten A(1; 0) und C(-1; 0). Wählt man eine feste rationale Zahl m, so gibt es dazu eine Gerade c: $y = mx + m$, welche durch den Punkt C(-1; 0) geht. Die zu c senkrechte Gerade a durch den Punkt A(1; 0) hat die Steigung $-\frac{1}{m}$.
Man erhält:

$$a\colon y = -\frac{1}{m_1}x + \frac{1}{m}.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Schnittpunkt der Geraden a und c auf dem Kreis k. Nach kurzer Rechnung erhält man den Schnittpunkt

$$P\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right).$$

Zu jeder rationalen Zahl m ergibt sich jeweils ein solcher Schnittpunkt P mit rationalen Koordinaten. Zu zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es zwei verschiedene Geraden durch den Punkt C(-1; 0) und damit auch zwei verschiedene Punkte auf dem Kreis k. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt P des Kreises k in der rationalen Ebene die Verbindungsgerade der Punkte P und C und diese hat eine einzige rationale Steigung m. Dann liegen aber auf dem Kreis k so viele von C verschiedene Punkte, wie es rationale Zahlen gibt.

Anmerkung: Wählt man eine rationale Zahl m mit $0 < m < 1$, so ergibt sich ein Punkt P des Kreises k, der im 1. Quadranten liegt. Auf dem Kreis k liegen auch im 1. Quadranten unendlich viele Punkte.

Über pythagoräische Zahlentripel

Wir betrachten Punkte P(x; y) des 1. Quadraten, also Punkte P (x; y) mit $x > 0$, $y > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$. Ist P(x; y) ein solcher Punkt, so können wir seine Koordinaten mit gleichem Nenner darstellen:

$$x = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{c}.$$

Dabei sind a, b und c natürliche Zahlen.
Liegt P(x; y) auf dem Kreis k um M(0; 0) mit dem Radius 1, so ist

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Gleichwertig ist $a^2 + b^2 = c^2$. Dann ist aber (a, b, c) ein pythagoräisches Zahlentripel. Zu verschiedenen im 1. Quadranten liegenden Punkten des Kreises k gehören nichtproportionale pythagoräische Zahlentripel. Da es unendlich viele solcher Kreispunkte gibt, gilt: Es gibt unendlich viele (nichtproportionale) pythagoräische Zahlentripel.
Man kann noch mehr feststellen: Wählt man eine rationale Zahl m mit $0 < m < 1$, so kann man $m = \frac{u}{v}$ mit Hilfe von zwei natürlichen Zahlen u und v darstellen. Dabei ist $u < v$. Zu m gibt es einen Kreispunkt P(x; y) mit den Koordinaten

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}$$

und

$$y = \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

Wir schließen:
Wählt man zwei natürliche Zahlen u und v mit $u < v$, so sind
$a = v^2 - u^2$
$b = 2uv$
$c = u^2 + v^2$
die Komponenten eines pythagoräischen Zahlentripels (a, b, c). Wählt man zwei Darstellungen der gleichen rationalen Zahl m, also $m = \frac{u}{v} = \frac{u^*}{v^*}$, so erhält man zwei proportionale pythagoräische Zahlentripel.
Beispielsweise ergibt sich zu

$$m = \frac{1}{5}$$

das Tripel (24; 10; 26); zu

$$m = \frac{2}{10}$$

erhält man das Tripel (96; 40; 104).
Wählt man zwei verschiedene rationale Zahlen m und $\overline{m}$, so erhält man zwei nichtproportionale pythagoräische Zahlentripel.

Kreise mit rationalem Radius

Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 trägt – wie wir gesehen haben – unendlich viele Punkte. Die zentrische Streckung mit dem Zentrum M(0; 0) und dem Streckungsfaktor r hat die Abbildungsgleichungen
$x' = rx$
$y' = ry$. (r rational und $r > 0$.)

Zu jeder festen rationalen Zahl r ergibt sich eine Abbildung der rationalen Ebene auf sich. Jedem Originalpunkt mit rationalen Koordinaten wird ein Bildpunkt mit rationalen Koordinaten zugeordnet. Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Radius 1 wird auf den Kreis k' mit dem Mittelpunkt M'(0; 0) und dem Radius r abgebildet. Da verschiedene Originalpunkte von k verschiedene Bildpunkte von k' haben, stellen wir fest:
Jeder Kreis k' mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und einem rationalen Radius r hat in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.
Die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x^* = x + s$
$y^* = y + t$ (s rational, t rational)
beschreibt eine Abbildung der rationalen Ebene auf sich. Sie bildet den Kreis um M(0; 0) mit dem Radius r auf den Kreis k* um M*(s; t) mit dem Radius r ab. Dabei wird jeder Punkt mit rationalen Koordinaten auf einen Punkt mit rationalen Koordinaten abgebildet. Verschiedene Originalpunkte haben verschiedene Bildpunkte. Dann besitzt aber auch k* unendlich viele Punkte.

Hat ein Kreis einen Mittelpunkt mit rationalen Koordinaten und einen rationalen Radius, so besitzt er in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.

Kreise mit rationalem Radiusquadrat

Der Kreis mit dem Mittelpunkt M(a; b) und dem Radius c wird durch die Gleichung
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$
beschrieben. In dieser Gleichung kommen die Koordinaten des Mittelpunktes, aber nur das Quadrat des Radiuses vor. Daher interessieren uns auch Kreise, bei denen nur gefordert wird, daß das Radiusquadrat rational ist.
Dann ist beispielsweise
k: $x^2 + y^2 = 2$ ein zugelassener Kreis. Dieser schneidet zwar die Koordinatenachsen nicht, er trägt aber beispielsweise den Punkt P(1; 1) der rationalen Ebene.
Wir interessieren uns für Kreise deren Mittelpunkt M(s; t) rationale Koordinaten hat und deren Radiusquadrat r^2 rational ist. r kann irrational sein.
Überführt die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x^* = x + s$

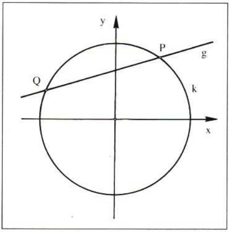


Abb. 4

$y^* = y + t$
den Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0; 0) und dem Raidusquadrat r^2 in den Kreis k* mit dem Mittelpunkt M*(s; t) und dem Radiusquadrat r^2, so macht die Parallelverschiebung mit den Abbildungsgleichungen
$x = x^* - s$
$y = y^* - t$
dies rückgängig: k* geht über in k. Deshalb genügt es, im folgenden Kreise mit dem Mittelpunkt M(0; 0) zu betrachten.
Ist r^2 eine feste rationale Zahl, so ist
k: $x^2 + y^2 = r^2$
ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(0; 0). Ist $P(x_0; y_0)$ ein Punkt dieses Kreises, so ist
$x_0^2 + y_0^2 = r^2$ wahr.
Wählen wir eine feste rationale Zahl m, so gibt es dazu eine Gerade
g: $y = mx + y_0 - mx_0$, die, wie man sofort nachrechnet, durch den Punkt P geht. Handelt es sich bei der Geraden g nicht um die Kreistangente mit dem Berührpunkt P, so schneidet g den Kreis k in einem weiteren Punkt Q. Uns interessiert, ob Q rationale Koordinaten hat. Die Abszissen (x-Koordinaten) der Schnittpunkte des Kreises k und der Geraden g sind die Lösungselemente der Gleichung
$x^2 + (mx + (y_0 - mx_0))^2 = r^2$ mit $r^2 = x_0^2 + y_0^2$.
Diese Gleichung wird umgeformt:
$(m^2 + 1)x^2 + 2m(y_0 - mx_0)x$
$+ x_0((m^2 - 1)x_0 - 2my_0)=0$.
Da $x_1 = x_0$ ein Lösungselement ist, kann man den Faktor $(x - x_0)$ abspalten. Mit Hilfe einer Polynomdivision oder durch "Probieren" erhält man
$(x - x_0)((m^2 + 1)x - (m^2 - 1)x_0 + 2my_0) = 0$.

1. Möglichkeit:
$x - x_0 = 0$, also $x_1=x_0$.
Dazu gehört $y_1=mx_0 + y_0 - mx_0 = y_0$.
So erhält man den Punkt $P(x_0; y_0)$.

2. Möglichkeit:
$(m^2 + 1)x - (m^2 - 1)x_0 + 2my_0 = 0$,
also

$$x_2 = \frac{\left(m^2-1\right)x_0 - 2my_0}{m^2+1}.$$

Dazu gehört

$$y_2 = mx_2 + y_0 - mx_0 = \frac{\left(1-m^2\right)y_0 - 2mx_0}{m^2+1}.$$

So kommt man zum Punkt $Q(x_2; y_2)$ des Kreises k.
Ist

$$m = -\frac{x_0}{y_0},$$

so ist die Gerade g die Kreistangente mit dem Berührpunkt P. Dann ist P=Q.
Ist

$$m \neq -\frac{x_0}{y_0},$$

so ist Q ein von P verschiedener Punkt des Kreises k. x_0, y_0 und m sind rational. Auch Q hat rationale Koordinaten. Zu verschiedenen rationalen Zahlen m gibt es verschiedene Punkte. Daher stellen wir fest:
Besitzt ein Kreis mit rationalem Radiusquadrat mindestens einen Punkt, so hat er in der rationalen Ebene unendlich viele Punkte.

Beispiel:
Es ist $1^2 + 1^2 = 2$. Daher ist P(1; 1) ein Punkt des Kreises k: $x^2 + y^2 = 2$. Damit ist schon gesichert, daß auf diesem Kreis unendlich viele Punkte mit rationalen Koodinaten liegen.

Überraschen mag, daß es auch Kreise mit rationalem Radiusquadrat gibt, welche überhaupt keine Punkte besitzen. Beispielsweise trägt der Kreis
k: $x^2 + y^2 = 3$
keinen einzigen Punkt mit rationalen Koordinaten.

Wäre $P\left(\frac{a}{c};\frac{b}{c}\right)$ ein Punkt von k, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind, so müßte auch $a^2 + b^2 = 3c^2$ erfüllt sein.
Wir benützen nun, daß keine Quadratzahl bei der Division durch 3 den Rest 2 zuläßt. Dies kann man der folgenden Übersicht entnehmen:
Zu $z = 3n$ ist $z^2 = 9n^2$,
zu $z = 3n + 1$ ist $z^2 = 3(3n^2 + 2n)+ 1$,
zu $z = 3n + 2 = z^2 = 3(3n^2 + 4n + 1)+ 1$.

Mit dieser Kenntnis betrachten wir die Gleichung
$a^2 + b^2 = 3c^2$.

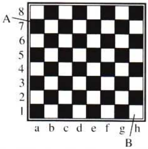
$a^2 + b^2$ enthält in der Primfaktorzerlegung die 3 nur dann, wenn sowohl a, als auch b Dreierzahlen sind. Dann enthält aber $a^2 + b^2$ die 3 sogar geradzahlig oft. So ergibt sich:
$a^2 + b^2$ enthält in der Primfaktorzerlegung entweder keine 3 oder die 3 geradzahlig oft.
$3c^2$ aber enthält in seiner Primfaktorzerlegung die 3 ungeradzahlig oft.
Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, kann es keine natürlichen Zahlen a, b und c mit $a^2 + b^2 = 3c^2$ geben.

Wir fassen zusammen:
Wir betrachten nur solche Kreise, bei denen der Mittelpunkt rationale Koordinaten hat, denn nur ein solcher Kreis hat in der rationalen Ebene einen Mittelpunkt.
Fordert man von einem Kreis der rationalen Ebene, daß er einen Mittelpunkt und einen rationalen Radius hat, so liegen auf jedem Kreis unendlich viele Punkte.
Verlangt man von einem Kreis hingegen nur, daß er einen Mittelpunkt und ein rationales Radiusquadrat hat, so hat ein Kreis in der rationalen Ebene entweder uendlich viele Punkte oder keinen Punkt.

Dr. Klaus Ulshöfer
Stiftsgymnasium Sindelfingen

Das Schachbrett als Schalttafel

Die Phantasie von Hobbymathematikern wird durch schachbrettartige Muster (z. B. Fußboden) immer wieder in vielfältiger Form angeregt. Man kann wohl mit Sicherheit behaupten, daß kein anderes geometrisches Muster ähnlich oft für logische Denkspiele erforscht worden ist.
In der folgenden Aufgabe (nach Sam Loyd) hat ein Elektriker eine Schalttafel in der Form eines Schachbrettes zu verdrahten. Der Kupferdraht soll über alle 64 Kontaktpunkte (Felder des Schachbrettes) von Punkt A zum Punkt B führen, ohne daß ein Punkt zweimal für den Verlauf des Drahtes genutzt werden darf. Immer, wenn der Drahtverlauf seine Richtung ändert, muß er zusätzlich um eine Ecke des betreffenden Kontaktpunktes gewunden werden. Diese Richtungsänderung kostet doppelt so viel Draht, als wie für einen gerade verlaufenden Kontaktpunkt verbraucht wird. Der Elektriker ist angehalten, eine Lösung zu finden, die ohne diagonale Verbindungen möglichst wenige Richtungsänderungen hat (Turmwanderung über das Schachbrett!).



Mit wieviel Einheiten an Kupferdraht gelingt es ihm, wenn für einen Kontaktpunkt eine Einheit benötigt wird?

H. Rüdiger

Die Bestimmung der Wandabweichung – ganz einfach und ohne Berechnung

Will man eine Sonnenuhr an einer vertikalen Wand anbringen, muß die Wandrichtung auf 1° genau bekannt sein. Die leider zahlreichen falsch angelegten Sonnenuhren gehen zu einem großen Teil auf die Unkenntnis der Wandrichtung zurück. Falls der Bauplan des Gebäudes noch vorhanden ist, kann diese daraus entnommen werden. Man hüte sich aber vor der sogenannten Kompaßmethode! Die im Bauwerk befindlichen Eisenteile und elektrischen Leitungen führen zu falschen Ergebnissen, die Kompaßnadel macht da nicht mit.

Will man die Wandrichtung festlegen, muß man sich zuvor einig sein, wie die Winkel in Bezug auf die Himmelsrichtungen festzulegen sind. Am einfachsten ist es, die Richtung auf die Ost-West-Richtung festzulegen, also: um wieviel Grad weicht die Wand davon ab? Fällt z. B. die Wandrichtung mit der Ost-West-Richtung zusammen, so haben wir es mit einer Südwand zu tun und damit mit einer vertikalen Süduhr. Die Berechnung bzw. Konstruktion dieser Art von Sonnenuhren ist am einfachsten (**Abb. 1**).

Wer aber hat schon eine genau in der Ost-West-Richtung verlaufende Wand? Selbst die oft erwähnten alten Kirchen weisen Abweichungen bis zu 10° auf, man prüfe dies einmal nach.

Wir wollen einmal von den Schlaumeiern absehen, die die Ziffernblattfläche der Sonnenuhr "abwinkeln", d. h. in die Ost-West-Richtung stellen.

Für die Bestimmung der Wandrichtung gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Im folgenden soll eine Methode vorgestellt werden, die wenig bekannt ist und vor allem keine zusätzliche Berechnungen, für die die Winkelfunktionen erforderlich sind, benötigt.

Vorrichtung

Auch diese ist verhältnismäßig einfach und läßt sich mühelos herstellen. Wir benötigen dafür lediglich eine horizontale Fläche mit einem senkrechten Stab (Gnomon), für den wir eine Stricknadel verwenden können (**Abb. 2**). Die Fläche wird mit einer Gradeinteilung von zweimal 0° bis 90° versehen und wird im rechten Winkel an die vertikale Wand gelegt. Es ist hierbei darauf zu achten, daß die Vorrichtung nicht verkantet wird. Wer es also ganz genau haben möchte, sollte eine kleine Libelle* verwenden.

Handhabung

Voraussetzung ist die Kenntnis des sogenannten wahren Mittags, wenn also die Sonne in der Südrichtung und damit am höchsten steht (Kulmination). Der wahre Mittag unterscheidet sich von unserem "normalen" Mittag, wenn es 12 Uhr mitteleuropäischer Zeit MEZ (13 Uhr MESZ) ist. Nur in ganz seltenen Fällen kann es vorkommen, daß beide zusammenfallen.

Maßgeblich für die MEZ ist der Längengrad von Görlitz (15° ö. L.). Für das gesamte Gebiet Deutschlands gilt: Der wahre Mittag ist stets später als der MEZ-Mittag. Diese Verspätung beträgt pro Längengrad 4 Minuten und ist bei der Kenntnis der geogr. Länge leicht zu bestimmen. Für Erfurt gilt: 11° Länge, Differenz zu Görlitz = 4°, Zeitunterschied: 15 Min.

Doch da gibt es einen "Störenfried", der uns die Bestimmung des wahren Mittags erschwert – die Zeitgleichung. Das bedeutet, daß die (wahre) Sonne mitunter um 16 min vorgeht (Anf. November) bzw. um 14 min (Mitte Februar) nachgeht. Es ist nicht so einfach, die Beträge für die Zeitgleichung im Kopf zu haben. Die astron. Jahrbücher sind dafür eine Hilfe, wie z. B. bei uns "Ahnerts Kalender für Sternfreunde", der jährlich erscheint und für jeden Tag die Zeitgleichung angibt. Wir finden diese im Kalenderteil für die Sonne, Spalte D). So für den 28.9.1991 den wahren Mittag (D) für Görlitz um 11 Uhr 51 min. Von diesem Betrag ist für einen bestimmten Ort die Zeitdifferenz zu bestimmen. Für Erfurt also 16 Minuten später, um 12 Uhr 07 min MEZ. Bestimmen wir den wahren Mittag für Osnabrück (8° ö. L.) am 5.2.1991: D für Görlitz: 12 Uhr 14 min, für Osnabrück (7 mal 4 min) 28 min später um 12 Uhr 42 min MEZ.

Wir brauchen also nur zu dem für Görlitz gültigen Zeitpunkt die Längendifferenz in die Zeitdifferenz umzurechnen.

Haben wir den wahren Mittag ermittelt, halten wir die Vorrichtung an die Wand und lesen ab, auf wieviel Grad der Schatten des Gnomon fällt. Die Gradzahl gibt sofort die Wandabweichung von der Ost-West-Richtung an. Fällt der Schatten auf die Seite links von 0° (Westen), handelt es sich um eine Westabweichung, rechts davon um eine Ostabweichung der Wand. Fällt z. B. der Schatten auf die 0°, haben wir es mit einer Ost-West-Wand zu tun.

StR Arnold Zenkert

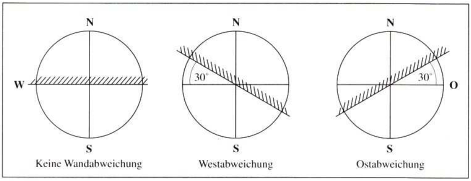


Abb. 1

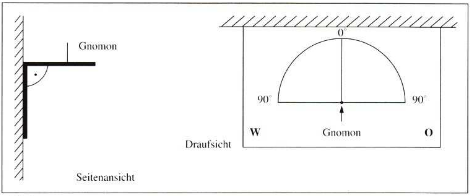


Abb. 2

* Libelle (lat. "kleine Waage": kleiner, mit Spiritus, Äther o. ä. gefüllter Glasbehälter mit eingeschlossener Luftblase. Viele Haushalte haben eine solche Libelle, allerdings unter der irreführenden Bezeichnung "Wasserwaage".

Geometrische Konstruktionen zum Satz des Pythagoras

Der berühmte Satz des PYTHAGORAS $a^2+b^2=c^2$ (a, b Längen der Katheten, c Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks) wird in der Regel mit Hilfe des Kathetensatzes rechnerisch bewiesen. Geometrische Schlußweisen mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man einfach finden in einigen Spezialfällen, so z. B. in jenem im **Abb. 1** bzw. **2**, in denen das Seitenverhältnis a : b : c=3 : 4 : 5 bzw. $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$ (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck) beträgt. Um auch im allgemeinen Fall einen solchen "geometrischen Beweis" zu finden, sind zwei zueinander inkongruente Quadrate (a^2 und b^2) in eine minimale Anzahl von Teilfiguren zu zerlegen, die auf entsprechende Teilfiguren eines dritten Quadrates (c^2) kongruent abgebildet werden können.

Lösungsansatz

siehe **Abb. 3**

Behauptung:

Eine aus zwei zueinander inkongruenten Quadraten (a^2 und b^2) bestehende Figur (**Abb. 3**) kann auf ein drittes Quadrat (c^2) flächengleich abgebildet werden, wenn sie in vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a, b und c und eine quadratische Restfigur (d^2), deren Seite d der Differenz der Katheten b und a entspricht, zerlegt wird.

Beweis:

(1) Von A aus wird a auf $\overline{AB}$ abgetragen (H) und in H eine Senkrechte auf $\overline{AB}$ bis zum Schnitt mit $\overline{FG}$ errichtet (J).
(2) $\overline{DE}$ wird über E hinaus bis zum Schnitt mit $\overline{HJ}$ verlängert (K).
(3) H wird mit D und G durch Geraden verbunden.
(4) Auf dem Strahl $\overline{EF}$ wird von E aus b abgetragen (L).
(5) L wird mit G und D durch Geraden verbunden.
Es gilt:

(1) $\overline{AH} = \overline{GJ} = \overline{HK} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{FL} = a$

(2) $\overline{AG} = \overline{HJ} = \overline{HC} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FG} = b$

(3) $\overline{GH} = \overline{HD} = \overline{DL} = \overline{LG} = c$
(Kongruenzsatz SWS)

(4) $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FJ} = \overline{JK} = (b - a) = d$
(4) $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FJ} = \overline{JK} = (b - a) = d$

(5) $\angle GAH = \angle HJG = \angle HCD = \angle DKH = \angle JKE = 90°$

Hieraus folgt:
(1) $DGAH \cong DHGJ \cong DHDC \cong DDKH \cong DLED \cong DGLF$
(2) HDLG und KEFJ sind Quadrate (mit den Seitenlängen c bzw. d).
Bezeichnet man die Flächeninhalte der Teilfiguren $T_1, ..., T_5$ bzw. $T'_1, ..., T'_5$ (vgl. **Abb. 3**) mit $A_1, ..., A_5$ bzw. $A'_1, ..., A'_5$, so gilt wegen der festgestellten Kongruenz:
$a^2 + b^2 = A_1 + A_2 + ... + A_5$
$= A'_1 + A'_2 + ... + A'_5 = c^2$ w. z. b. w.
Man kann auch rein geometrisch die Teilfiguren T_i des "abgestuften Rechtecks" auf die Teilfiguren T'_i des c-Quadrates kongruent abbilden: T_1 auf T'_1, T_4 auf T'_4 und T_5 auf T'_5 durch die identische Abbildung, T_2 auf T'_2 und T_3 auf T'_3 durch Parallelverschiebung und sieht ebenfalls $a^2 + b^2 = c^2$.

Wendet man die Konstruktion an auf den Spezialfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (a = b), so erhält man die in **Abb. 4** gezeichnete Figur – die "quadratische Restfigur" verschwindet hier wegen d = a - b = 0. Offensichtlich ist diese Restfigur um so größer, je größer die Differenz a - b der Kathetenlängen ist, was **Abb. 5** veranschaulicht. Genauer: Der Flächeninhalt d^2 des Restquadrates ist (bei festen Kathetenlängensummen a + b) umgekehrt proportional zum Flächeninhalt der (untereinander kongruenten) rechtwinkligen "Randdreiecke" (Beweis?)

Anmerkung:

Es empfiehlt sich, diese und die folgenden Konstruktionen auf Gitternetzpapier auszuführen und von ganzzahligen Einheiten des Quadratnetzes auszugehen.
Da in diesem Fall die Eckpunkte der zu konstruierenden Figuren mit den Rasterpunkten des Gitternetzes übereinstimmen, können zeichnerische Unstimmigkeiten unmittelbar überprüft und gegebenenfalls nachgebessert werden.

Ausführungsvarianten des Konstruktionsansatzes

Der vorgestellte Lösungsansatz läßt vielfältige Modifikationen zu, die sich insbesondere auf das Ordnungsschema der Flächenzerlegung, auf Anzahl und Form der Teilfiguren, den jeweiligen Teilungsmodus sowie auf die zur Abbildung erforderlichen geometrischen Operationen beziehen (vgl. dazu die **Abb. 6** und **7**).
Abb. 8 stellt eine 7teilige Variante dar, bei der die einzelnen Quadrate in herkömmlicher Weise über den Seiten des zugehörigen rechtwinkligen Dreiecks errichtet sind und die Parallelverschiebung teilweise ungleichsinnig, nach einer Drehung im positiven Richtungssinn über einem Winkel von 90° auszuführen ist.

Hinweis:

Die Anschaulichkeit der Beweisführung kann durch selbstgefertigte Legetafeln (Applikationen) unterstützt werden. Der Konstruktionsansatz gibt darüber hinaus Anregungen zur Entwicklung von Legespielen, die als mathematische Knobelaufgaben genutzt werden können (**Abb. 9**).

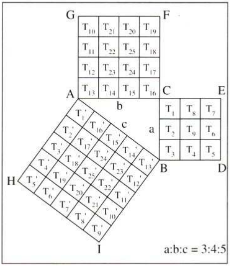


Abb. 1

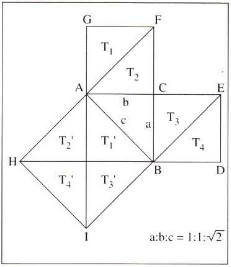


Abb. 2

Dr. Heinz Jura, Berlin

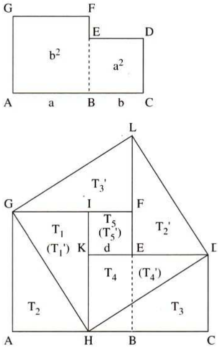


Abb. 3

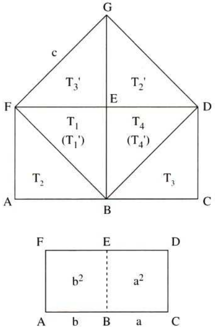
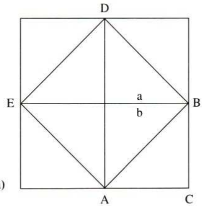
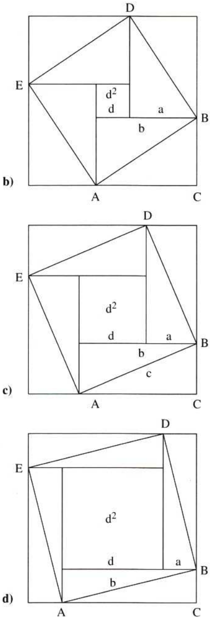


Abb. 4

Abb. 5





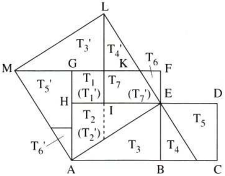


Abb. 6

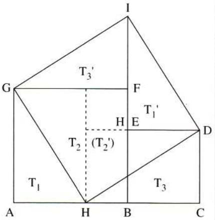


Abb. 7

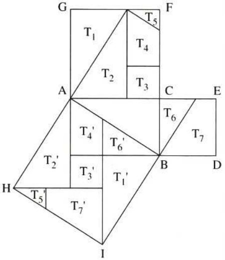


Abb. 8

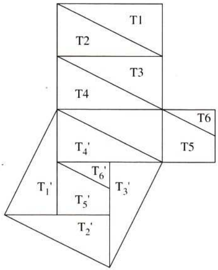


Abb. 9

Die Olympiade-Ecke

Die XXXIII. Internationale Mathematik-Olympiade

Im Jahr von Olympia trafen sich zur 33. Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) in Moskau 322 Teilnehmer aus 56 Nationen – gerade noch rechtzeitig vor der Eröffnung der Sommerspiele in Spanien. Zwischen dem 10. und 21. Juli ging es auch in der ehemaligen Hauptstadt der früheren UdSSR um Gold, Silber und Bronze – die dort allerdings für mathematische Bestleistungen vergeben worden sind. Und wie im katalonischen Barcelona, verzeichneten auch die russischen Gastgeber eine Rekordbeteiligung von Teilnehmerländern.

Das bundesdeutsche Team – in diesem Jahr hervorragend betreut durch die beiden Delegationsleiter Professor Dr. Hans-Dietrich Gronau (Greifswald) und Thorsten Kleinjung (Bonn) – erreichte mit vier zweiten und drei dritten Preisen einen beachtlichen 7. Platz in der Rangfolge der inoffiziellen Mannschaftspunktzahlen.

Die ersten 10 Ränge sind in der Regel von Profis besetzt. Unseren Amateuren aus Deutschland gelingt es aber ebenso regelmäßig in die (nahezu) geschlossene Reihe der generalstabsmäßig vorbereiteten Profiteams einzubrechen.

Jeder der sechs deutschen Teilnehmer hat eine Medaille mit nach Hause bringen können, was insgesamt nur sechs weiteren Mannschaften gelang.

Im einzelnen erzielten

Christoph Bergemann (Hamburg)
31 Punkte, Silber
Jakob Stix (Stegen)
30 Punkte, Silber
Norbert Hoffmann (Ellingstedt)
25 Punkte, Silber
Stefan Schwarz (Erfurt)
25 Punkte, Silber
Andreas Klein (Wettenberg)
19 Punkte, Bronze
Eike Lau (Hamburg)
19 Punkte, Bronze

Christoph Bergemann ist dabei mit 31 erzielten Punkten nur hauchdünn an einer Goldmedaille vorbeigeschliddert.

Zum zweiten Mal nun hat ein gesamtdeutsches Team an der IMO teilgenommen. Die Auswahl und Vorbereitung der Mannschaft gestaltete sich diesmal einheitlich. Rund 130 Schüler qualifizierten sich durch eine erfolgreiche Teilnahme an der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik oder an Mathematik-Olympiaden (auch eine Vorauswahl über Jugend forscht war möglich, wurde aber von keinem Schüler genutzt). In zwei Auswahlklausuren blieben noch 16 Schüler als Kandidaten für Moskau übrig – interessanterweise teilten sich die 16 Besten in zwei gleich große Teilgruppen aus 8 Wessis und 8 Ossis. In den abschließenden, vorbereitenden Seminaren, wechselten sich Kollegen aus Ost und West gleichmäßig ab. Die gesamte Auswahl und Vorbereitung entwickelte sich – in einem Augenblick, wo West und Ost in Deutschland wieder hart aufeinander stoßen – geradezu beispielgebend. Ein bißchen Wehmut schwingt auch im Rückblick mit. Früher

Aufgaben der 33. IMO

1. Tag

1. Man bestimme alle ganze Zahlen a, b, c mit $1<a<b<c$, so daß $(a-1)(b-1)(c-1)$ ein Teiler von $abc-1$ ist. (Neuseeland)

2. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reelen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x^2+f(y)) = y+(f(x))^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Indien)

3. Man betrachte neun Punkte in Raum, wobei keine vier in einer Ebene liegen. Je zwei Punkte sind durch eine Kante (=Verbindungsstrecke) verbunden, und jede Kante wird entweder blau gefärbt oder rot gefärbt oder sie bleibt ungefärbt.

Man bestimme den kleinsten Wert von n, so daß gilt: Wie immer man auch genau n Kanten färbt, so erhält man notwendigerweise ein Dreieck mit gleichgefärbten Kanten. (China)

2. Tag.

4. In der Ebene seien ein Kreis k, eine Tangente t an den Kreis k und ein Punkt M auf t gegeben. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte P mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt zwei Punkte Q und R auf t, so daß M der Mittelpunkt der Strecke QR und k der Inkreis des Dreiecks PQR ist. (Frankreich)

5. Sei S eine endliche Menge von Punkten im dreidimensionalen Raum. Die orthogonale Projektion der Punkte von S auf die yz-, zx- bzw. xy-Ebene liefert die Menge S_x, S_y bzw. S_z.

Man beweise
$|S|^2 \le |S_x||S_y||S_z|$,
wobei |S| die Anzahl der Elemente der endliche Menge S ist. (Italien)

6. Für jede positive ganze Zahl n bezeichne s(n) die größte ganze Zahl für die gilt:
Für jede ganze Zahl k, $1 \geq k \geq s(n)$, läßt sich die Zahl n^2 als Summe von genau k Quadraten positiver ganzer Zahlen schreiben.

a) Man beweise $s(n) \le n2 -14$ für jedes $n \ge 4$.
b) Man gebe eine ganze Zahl n mit $s(n) = n^2 - 14$ an.
c) Man beweise, daß es unendlich viele ganze Zahlen n mit $s(n) = n^2 - 14$ gibt. (Großbritannien)

Arbeitszeit: 4.5 Stunden an jedem Tag
Bei jeder Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Die deutsche Delegation. Vordere Reihe, von links nach rechts: Jakob Stix, Norbert Hoffmann, Christoph Bergemann; hintere Reihe, von links nach rechts: Prof. Dr. H.-D. Gronau, Stefan Schwarz, Andreas Klein, Eike Lau und Thorsten Kleinjung

konnten aus Deutschland zwei Teams an den beiden Wettkampftagen über den Aufgaben brüten. Die Vereinigung beider Mannschaften zu einem Team wird leider erkauft mit einer Halbierung der Plätze für besonders qualifizierte deutsche Schüler.

Die sechs deutschen Mathe-Olympioniken haben mir ein (namentlich unterzeichnetes) Stimmungsbild von ihrem Moskauer Aufenthalt geschickt. In ihren «Statements zur IMO '92» zeigen sie sich beeindruckt von der mächtigen Kulisse der sehr geschichtsträchtigen russischen Hauptstadt, die nach den politischen Umwälzungen des letzten Jahres noch aufregender geworden ist. Trotz der daraus sich ergebenden Schwierigkeiten, haben es die moskowiter Veranstalter irgendwie doch geschafft, die IMO durchzuführen. Unterkunft und Verpflegung waren prima. Die gesamte Mannschaft wohnte im Hotel «Izmailova», das zu den Olympischen Spielen in Moskau 1980 ganz neu errichtet worden ist. Ein dickes Lob zollen die deutschen Teilnehmer insbesondere den stadtkundigen Mannschaftsbetreuern (den sog. guides), die ihre Aufgaben sehr ernst genommen haben. Allerdings mußten dennoch beträchtliche organisatorische Hindernisse überwunden werden, was u. a. zu einigen merkwürdigen Klausurbedingungen geführt hatte.

Das Rahmenprogramm erinnerte die Teilnehmer während der Eröffnungs- und Abschlußfeierlichkeiten durch ein Übermaß an Folkloredarbietungen doch sehr stark an die zaristische Vergangenheit Rußlands. Dazwischen boten nur Discoabende und eine Bootstour willkommene Gelegenheiten zum Kennenlernen und Knüpfen neuer Kontakte.

Leider zeigte sich wieder einmal, daß der Mädchenanteil weniger als 10 Prozent aller Teilnehmer ausmachte. Zum Leidwesen auch vieler wurde – anders als in den Vorjahren – von den Organisatoren ein Sportprogramm und das obligatorische Fußballturnier vergessen. Da war Eigeninitiative Trumpf. Wer den nötigen Einfallsreichtum hatte, der konnte auf den nahegelegenen Sportplätzen dem morgendlichen Kopftraining trotzdem ein abwechslungsreiches Fitness-Programm entgegensetzen.

Die auf der linken Seite abgedruckten Aufgaben der 33. IMO waren zu je dreien an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in je viereinhalbstündiger Klausur zu bearbeiten. Dabei waren nur Zirkel und Linial als Hilfsmittel zugelassen. Das jeweilige Herkunftsland ist in Klammern gesetzt. Die Lösungen erscheinen in einem der nächsten Hefte von alpha. Ansonsten bleibt noch nachzutragen, daß die Zukunft der IMO bis ins nächste Jahrtausend gesichert ist. Feste Einladungen bzw. Austragungswünsche bis über das Jahr 2000 hinaus, liegen bereits vor: 1993 Türkei, 1994 Hongkong, 1995 Kanada, 1996 Brasilien, 1997 Indien, 1998 Mongolei, 1999 Rumänien, 2000 Südkorea und 2001 USA.

StR Paul Jainta

33. IMO-Länderübersicht

No.	Land	Punkte	G	S	B
1.	China	240	6	–	–
2.	USA	181	3	3	–
3.	Rumänien	177	2	2	2
4.	GUS	176	2	3	–
5.	Großbritannien	168	2	2	2
6.	Rußland	158	2	2	2
7.	Deutschland	149	–	4	2
8.	Japan	142	1	3	1
	Ungarn	142	1	3	1
10.	Frankreich	139	1	3	1
	Vietnam	139	1	2	3
12.	Jugoslawien	136	–	2	4
13.	Tschechoslovakei	134	–	2	3
14.	Iran	133	–	3	2
15.	Bulgarien	127	1	1	3
16.	Nordkorea	126	–	3	2
17.	Taiwan	124	–	3	2
18.	Südkorea	122	1	–	4
19.	Australien	118	1	1	2
20.	Israel	108	–	2	2
21.	Indien	107	–	1	4
22.	Canada	105	1	–	3
23.	Belgien	100	–	1	2
24.	Polen	90	–	1	3
	Schweden	90	–	2	–
26.	Hong Kong	89	–	1	2
	Singapur	89	–	1	3
28.	Italien	83	–	–	3
29.	Norwegen	77	–	1	2
30.	Niederlande	71	–	1	–
31.	Österreich	70	–	–	3
32.	Argentinien	67	–	1	1
33.	Tunesien (4)	64	1	–	1
34.	Türkei	63	–	–	2
35.	Kolumbien	55	–	–	1
36.	Mongolei	51	–	–	–
37.	Spanien	50	–	–	1
	Thailand	50	–	1	–
39.	Brasilien	48	–	–	1
40.	Marokko	45	–	–	–
41.	Dänemark (5)	42	–	–	–
	Irland	42	–	–	–
43.	Neuseeland	41	–	–	1
44.	Philippinen (4)	40	–	–	1
45.	Griechenland	37	–	–	–
46.	Macau	35	–	–	–
	Portugal	35	–	–	1
48.	Zypern	34	–	–	1
49.	Finnland	33	–	–	–
50.	Mexiko	32	–	–	–
51.	Schweiz (3)	30	–	–	–
52.	Trinidad	26	–	–	–
53.	Indonesien	22	–	–	–
54.	Südafrika	21	–	–	–
55.	Kuba (3)	17	–	–	–
56.	Island (3)	16	–	–	–

Jede Mannschaft bestand aus 6 bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.

Leserpost

Zu alpha Heft 3, Juni 1992, Seite 4: Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

Das ist ja sagenhaft, welch wunderschönes Beispiel das Redaktionskollegium aus der Flut sportlicher Spitzenresultate herausgepickt hat.
Schade nur, daß Sie den Nullpunkt der Zeitachse nur gerade bis 1900 nach rechts verschoben haben. Ein Blick auf die Tabelle auf Seite 4 in der ersten Spalte zeigt, daß die Zeitintervalle konstant 5 Jahre betragen. Somit ist der Durchschnitt aus allen 5 Zeitwerten gleich 1978. Die Verschiebung des Nullpunktes der Zeitordinate bis 1978 bietet sich förmlich an, denn dadurch wird die Summe aller t_i gleich 0. (siehe Kasten 1!)
Daß wir negative Zeitwerte erhalten, mag unsern Schülern etwas fremd erscheinen. Doch wenn wir Ereignisse datieren, die vor unserer Zeitrechnung eingetreten sind, verwenden wir, mathematisch gesehen, auch negative Zahlen. [Daß die Kalendermacher das Jahr 0 "vergaßen", sei am Rande vermerkt. Ein Jahr 0 kam ihnen wahrscheinlich nicht geheuer vor. In unserer Transformation hat die Null ihren korrekten Platz bei 1978. (1978 minus 1978 gleich Null)].
Betrachten wir die Zahlenreihe t_i, so bietet sich eine Änderung des Zeitmaßtabes an. Das Jahr als Maßeinheit der Zeit ist eine physikalische natürliche Einheit. Es hindert uns jedoch nichts daran, als Zeiteinheit einer "provisorischen Zeitrechnung" (mit Nullpunkt bei 1978) ein halbes Dezenium, das heißt 5 Jahre festzusetzen. Die Tabelle auf Seite 5 in der 1. Spalte unten verändert sich dann wie in Kasten 1 ersichtlich.
Auf der untersten Zeile der Tabelle in Kasten 1 stehen die Großbuchstaben, welche bei der Umformung auf Seite 4 in der 3. Spalte verwendet werden. Die auf Seite 5 in der 1. Spalte aufgeführten Formeln für a und b vereinfachen sich stark dank der durchgeführten Koordinatentransformation (siehe Kasten 1!)
Diese Vereinfachung ist derart enorm, daß sich die Verschiebung des Nullpunktes auf der Koordinate der Sprunghöhe bis zur 5-Meter-Marke nicht lohnt. Setze ich für die in der 1. Spalte auf Seite 5 tabellierten y_i die Sprungwerte U_i ein, so erhalte ich als Summe statt 363 (in cm) 28,3 (in m). Daraus errechnet sich dann die Formel

$$\bar{z} = a + b\,T_i = 5{,}73 + 0{,}15\,T_i .$$

Extrapoliert auf das Jahr 1993 ($T_i = 3$) erhalten wir

$$\bar{z}_i = 5{,}73 + 0{,}15 \cdot 3 = 6{,}18$$

das heißt unmittelbar die Sprunghöhe.
Der Vorteil der beschriebenen Koordinatentransformation liegt darin, daß in der Funktion F(a,b) die Variablen a und b getrennt werden, wodurch die quadratische Ergänzung durchsichtiger wird.
Strapazieren wir das Abstraktionsvermögen unserer Schüler!

Wie wird der Stabhochsprungweltrekord im Jahre 1995 lauten?

i	T_i	Y_i	T_i^2	T_iY_i	Z_i
1	– 2	41	4	– 82	42.6
2	– 1	63	1	– 63	57.6
3	0	70	0	0	72.6
4	1	83	1	83	87.6
5	2	106	4	212	102.6
$\sum_{i=1}^{i=5}$	0	363	10	150	
	C	D	A	E	

$$b = \frac{NE - CD}{NA - C^2} = \frac{E}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} T_iY_i}{\sum_{i=1}^{i=5} T_i^2} = \frac{150}{10} = 15$$

$$a = \frac{D - Cb}{N} = \frac{D}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} Y_i}{N} = \frac{363}{5} = 72.6$$

$$Z_i = a + bT_i = 72.6 + 15 \cdot T_i$$

Kasten 1

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{i=N} (Y_i - a - T_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} Y^2 + Na^2 + b^2 \sum_{i=1}^{i=N} T^2$$

$$-2a \sum_{i=1}^{i=N} Y_i - 2b \sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i + 2ab \sum_{i=1}^{i=N} T_i$$

$$H_1(a,b_k) = \frac{F(a,b_k)}{N} = a^2 - 2a\frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N} + G_m$$

$$= \left(a - \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N} \right)^2 + G_{m+1}$$

$H_1(a,b_k) \longrightarrow \min$, wenn

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i}{N}$$

Kasten 2

$$H_2(a_k,b) = \frac{F(a_k,b)}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2}$$

$$= b^2 - 2b\frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2} + G_{m+2}$$

$$= \left(b - \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2} \right)^2 + G_{m+3}$$

$H_2(a_k,b) \longrightarrow \min$, wenn

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} Y_iT_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i^2}$$

Kasten 3

Die Funktion F(a,b) ist eine Funktion mit zwei voneinander unabhängigen Variablen a und b. Im dreidimensionalen Raum stellt sie eine gekrümmte Fläche dar. Auf dem Schreibblatt ist die Waagerechte die Ordinate a, die Senkrechte darauf die Koordinate F(a, b). Stelle ich auf den Kreuzungspunkt der beiden Geraden, auf den Nullpunkt einen Bleistift mit der Spitze nach oben, so zeigt der Bleistift der Koordinate b an.
Die gekrümmte Fläche gleicht einem Geißhirtenhut ohne Rand, der auf dem Gupf steht. Schneide ich diese Fläche mit einer Ebene, so entsteht auf der Ebene, dort wo sie die gekrümmte Fläche durchdringt, eine Parabel.
Mit der Funktion F(a,b) beschreibe ich eine solche Parabel, indem ich beispielsweise die Variable b konstant halte und a verändere. Für die Lösung unserer Aufgabe lautet die Frage: Bei welchem a hat die Parabel ihren tiefsten Wert?
Analoge Überlegungen gelten für die Variable b, indem a konstant gehalten wird.
Die minimalen Werte a und b finden wir, wie in Ihrem Artikel beschrieben, durch quadratische Ergänzung.
Ich meine, daß es mir gelungen ist, im Kasten 2 eine vereinfachte Darstellung dieser Ergänzung darzustellen.
Bemerkenswert, daß in der Funktion F(a,b) das einzige Glied, das sowohl a wie b enthält herausfällt, weil dank geeigneter Koordinatentransformation Summe aller T_i gleich 0 ist.
Ich definiere als Hilfsfunktion $H_i(a,b_k) = F(a,b_k)/N$ worin b als konstant angenommen wird. Diese teilt mit der Grundfunktion die Eigenschaft, daß sich bei beiden das Minimum der Funktion beim gleichen a befindet.
Da mich nicht der Wert der Funktion interessiert, sondern nur die Stelle, wo sie ihren tiefsten Wert hat, darf ich alle ihre konstanten Glieder, das heißt, alle Glieder, die nicht a enthalten, in einer Sammelkonstanten G_m zusammenfassen. In die Sammelkonstante packe ich auch das Ausgleichsglied.
Für die Bestimmung von b gehe ich analog vor.
Wie Sie sehen, hat mich Ihr Artikel zu Gedanken angeregt, die diskussionswürdig sind. Beim abschließenden Durchlesen meines Briefes, komme ich allerdings zum Schluß, daß meine Darstellung nicht unbedingt besser ist als die Ihre.

Karl Palma

alpha-Fehlliste

1967: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1968: 1
1969: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1970: 1, 2, 3, 4, 5, 6
1971: 1, 2, 3
1972: 1, 6
1973: 1, 2, 3, 4, 5
1974: 1, 2, 4, 6
1986: 1

Matthias Vogel, Ernst-Fink-Straße 23, W-7590 Achern, 07841-29292

Verlag und Redaktion wünschen allen alpha-Lesern ein Frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches und gesundes Jahr 1993.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

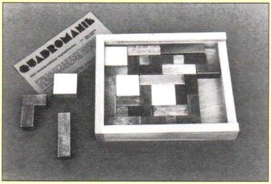
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34012-1

Marktecke

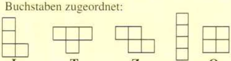
Quadromanie



1001 unwiderstehliche Kopfzerbrecher

Quadromanie ist ein Solo-Spiel, das eine ganze Reihe köstlicher Kopfzerbrecher für einsame Stunden bietet – ob man sich nun durch die vorgegebenen Aufgaben puzzelt oder mit Phantasie und Ausdauer neue flächige Formen und räumliche Figuren findet - die 20 Quadromanie-Teile lassen einen so leicht nicht wieder los! Der Schwierigkeitsgrad der beigefügten 74 Aufgaben reicht von "spielend" bis "haarsträubend".

Spielmaterial:
Mit vier Würfeln lassen sich fünf verschiedene flächige Figuren darstellen. Wir haben jeder Figur entsprechend ihrer Form einen Buchstaben zugeordnet:



L T Z I O

L und Z dürfen auch spiegelbildlich verwendet werden. Jede der fünf verschiedenen Figuren hat eine andere Farbe und ist viermal vorhanden.

Spielregel:
Ihre Aufgabe ist es, jeweils mit einer bestimmten Anzahl in Form und Farbe verschiedener Figuren eine Fläche vorgegebener Form und Größe auszulegen. Gleiche Figuren (=gleiche Farben) dürfen sich dabei nicht nebeneinander berühren. Diagnoalberührung ist jedoch erlaubt.

Aufgaben-Beispiel:
Bilden Sie ein 6 x 6 Felder (= Würfel) großes Quadrat mit: 2L/2T/2Z/2I/1O

Die Spiele **"Irrgendwie"** und **"Quadromanie"** stammen von PYRAMO. Prospekte können dort kostenlos angefordert werden:
PYRAMO-Spiele-Puzzles, Silvia Heinz, Sendbühl 1, W-8351 Bernried.

Geometrie und Kunst in früherer Zeit

Die Wechselwirkungen zwischen Geometrie und Kunst sind uralt.
Dieses Buch veranschaulicht anhand ausgewählter Beispiele aus dem Bauwesen und der Malerei die Anwendungen geometrischer Kenntnisse, beginnend im alten Ägypten bis hin zur Neuzeit.
So werden beispielsweise geometrische Konstruktionen am Grundriß des Tempels von Luxor, an der Fassade der Cancellaria in Rom, am Turm des Stephansdoms in Wien und an zahlreichen Details des Prager Veitsdoms sowie auch an der Entwicklung der Steinmetzzeichen erläutert.

Von Frantisek Kaderávek
Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Z. Nádenik, Prag, und P. Schreiber, Greifswald
1992. 104 Seiten mit 77 Bildern. 13,7 x 20,5 cm. Kart. DM 16,80 ISBN 3-8154-2024-5
(Einblicke in die Wissenschaft – Mathematik)
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft; Stuttgart – Leipzig

Irrgendwie

Verzwickt verzweigte Solo-Spurensuche

Spielmaterial:
Spielfeld mit "Startlöchern", 18 Spurensteine, 3 Mäuse und 3 Käsestücke
Die 18 Spurensteine sollen – je nach Aufgabenstellung oder auch gemäß eigenen Vorgaben – so angeordnet werden, daß jede Maus auf einer eigenen durchgehenden Spur zu ihrem Käse kommt. Bei den vorliegenden 76 Aufgaben ist das eine oftmals äußerst knifflige Angelegenheit, obwohl es für die meisten Aufgaben mehrere Lösungsmöglichkeiten gibt!
Ein kleiner Schrebergarten ist das bevorzugte Futterrevier zweier Mäuse-Spezies. Ein Stück Käse ist für beide ein willkommener Leckerbissen, den sie sich auf keinen Fall entgehen lassen – jede Maus findet immer einen eigenen Weg zu "ihrem" Käse.

Die beiden Arten sind an ihren Spuren zu unterscheiden:
Während die Wühlmaus stets an irgendeiner Stelle im Garten aus einem Loch auftacht, ihre Runde dreht und wieder im selben Loch verschwindet, betritt die Feldmaus den Garten immer am Rand ("Startloch"), rennt kreuz und quer darin herum und verschwindet wieder an anderer Stelle (bei ihrem Käse).
Die Spur der Feldmaus hat also immer einen Ein- und einen Ausgang – die Spur der Wühlmaus ist eine in sich geschlossene Linie.
Bei einem Teil der Aufgaben ist eine Spur schon vorgegeben (z. B. eine Wühlmaus-Spur) – wie aber die Spurensteine angeordnet sind und wo die anderen Spren verlaufen – das herauszufinden ist Ihr "Problem".

Lösungen

Sonderprägung United States of Amerika

Hätten beide Medaillen durchweg gleiche Abmessungen, so wären sie der Form nach kongruent und hätten das gleiche Volumen V. Für ihre Massen müßten dann $m_{Ag} = V \cdot \varphi_{Ag}$, $m_{Au} = V \cdot \varphi_{Au}$ und $m_{Au} : m_{Ag} = \varphi_{Au} : \varphi_{Ag} = 19{,}2 : 10{,}5 = 1{,}83$ gelten. Da jedoch $m_{Au} : m_{Ag} = 22 : 15 = 1{,}47$ gilt, haben beide Münzen nicht durchweg gleiche Abmessungen.

Globus

1. Aufgabe:
Der Ähnlichkeitsfaktor ist

$$k = \frac{0{,}635\ \text{m}}{6370\ \text{km}} = 9{,}97 \cdot 10^{-8}.$$

Die Höhe des Mount Everest auf dem Globus wäre
$h' = 8872\ \text{m} \cdot k = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \approx 0{,}9\ \text{mm}.$

Bemerkung:
Auf Reliefgloben werden Erhebungen stark überhöht dargestellt.

2. Aufgabe:

$$c' = \frac{12756\ \text{km} - 12712\ \text{km}}{2} \cdot \frac{1{,}27\ \text{m}}{12756\ \text{km}}$$
$$= 2{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 2{,}2\ \text{mm}$$

Mehrwegflasche statt Dose

200 DM: [(0,17 DM - 0,03 DM)·5·12]=23,8
Es müssen im Mittel pro Monat und pro Person Getränke in 24 Mehrwegflaschen statt in Dosen eingekauft werden.
Bemerkung: Die Verpackungskosten bei einer Kunststofflasche betragen im Schnitt 0,22 DM.

	a	b	c	d	e	f	g
1	6	2	5	■	1	0	7
2	0	■	5	2	5	■	5
3	2	5	5	■	8	9	5
4	4	7	5	■	4	6	5
5	■	2	■	8	■	1	■
6	1	■	9	4	5	■	7
7	8	9	6	■	2	1	6

Abb. zu: Knobelecke

Knobelecke

waagrecht

1a:	Quadratzahl	$25 \cdot 25 = 625$
1e:	um 7 größer als die kleinste dreistellige Quadratzahl	$100 + 7 = 107$
2c:	Vielfaches von 175	$175 \cdot 3 = 525$
3a:	Vielfaches von 15	$15 \cdot 17 = 255$
3e:	$42 \cdot 362 - (16926 - 2617)$	$15204 - 14309 = 895$
4a:	$25 \cdot 19$	$= 475$
4e:	Vielfaches von 31	$31 \cdot 15 = 465$
6a:	kleinste natürliche Zahl	$= 1$
6c:	$(2835 : 27) \cdot (648 : 72)$	$105 \cdot 9 = 945$
7a:	Vielfaches von 64	$64 \cdot 14 = 896$
7e:	Lösungszahl der Gleichung $x : 8 = 27$	$x = 27 \cdot 8 \quad x = 216$

senkrecht

1a:	$251 \cdot (416 - 392)$	$251 \cdot 24 = 6024$
1c:	Vielfaches von 55	$55 \cdot 101 = 5555$
1e:	subtrahiert man von dieser Zahl 745, so erhält man 839	$x - 745 = 839$ $x = 839 + 745 \quad x = 1584$
1g:	$(12316 - 5501) + 8880 : 12$	$6815 + 740 = 7555$
3b:	$(389 - 246) \cdot (544 : 136)$	$143 \cdot 4 = 572$
3f:	größte dreistellige Quadratzahl	$31 \cdot 31 = 961$
5d:	Lösungszahl der Gleichung $x \cdot 4 = 336$	$x = 336 : 4 = 84$
6a:	um 7 kleiner als eine Quadratzahl	$25 - 7 = 18$
6c:	$(18240 - 3648) : (19 \cdot 8)$	$14592 : 152 = 96$
6e:	Vielfaches von 13	$13 \cdot 4 = 52$
6g:	$5806 - [(7256 - 5342) \cdot 3 - 12]$	$5806 - [1914 \cdot 3 - 12]$ $5806 - [5742 - 12]$ $5806 - 5730 = 76$

Lotto

a) Hans hat den Zwanzigwürfel: Zwei gleichgestaltete Würfel können nur auf 36, 64, 144 oder 400 (= n^2) verschiedene Weisen fallen. Nur die Zahl 400 ist durch 50 teilbar.

b) Da die Würfel auf 400 Arten fallen können, aber nur 50 verschiedene Zahlen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugen, muß jede mit 8 verschiedenen Würfen entstehen können.
Das bedeutet, da $8 = 4 \cdot 2$ ist, daß der eine Würfel 5 verschiedene Zahlen (je 4 mal) und der andere Würfel 10 verschiedene Zahlen (jede 2 mal) enthalten muß. Dies ist auf 2 verschiedene Weisen möglich:

b_1) Der erste Würfel enthält die Zahlen 0, 10, 20, 30 und 40, der zweite die Zahlen 0, 1, 2, ..., 9, je 4 bzw. 2 mal.

b_2) Der erste Würfel enthält die Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4, der zweite die Zahlen 5, 10, 15, 20, 25, ..., 45 je 4 bzw. 2 mal.

Sprachecke

Wie wiele Quadrate sind komplett bedeckt?

Betrachte ein Einheitsquadrat. Wir zeichnen in dieses einen Kreis mit einem Durchmesser gleich der Seitenlänge des Quadrates ein. Dann sehen wir sofort, daß die Kreisscheibe das Quadrat nicht vollständig bedeckt.

1. Wieviele Einheitsquadrate eines 3 x 3-Quadrates werden von einer Kreisscheibe bedeckt, deren Durchmesser gleich der Seitenlänge des großen Quadrates ist.
2. Überlege dieses Problem für ein Schachbrett (8 x 8 Quadrat).

Gleichgewichtsfrage

Das Gleichgewicht der 3. Waage erhält man, wenn man eine bestimmte Anzahl Äpfel auf die rechte Waagschale auflegt.
Wieviele sind es?
Lösung:
13 Äpfel müssen aufgelegt werden.
Drücken wir die ersten zwei Gleichgewichtslagen durch Gleichungen aus, indem wir die Birnen mit x, die Bananen mit y und die Äpfel mit z bezeichnen:
1. Gleichgewichtslage: $3x + 3z = 4y$
2. Gleichgewichtslage: $1x = 1y + 1z$

Wenn man die zweite Gleichung mit 3 multipliziert und sie dann von der ersten Gleichung subtrahiert, erhält man die Beziehung $1y = 6z$. Setzt man diese Beziehung für y in die zweite Gleichung ein, erhält man $1x = 7z$. Wenn wir nun beide Beziehungen für x und y für die 3.

Gleichgewichtslage verwenden, erhalten wir die Lösung $1x + 1y = 7z + 6z = 13z$.

Aufgabe

Welche Werte kann der Parameter c annehmen, wenn bekannt ist, daß
$|x^2 - x + c| \le 1$ für $0 \le x \le 1$ ist?

Lösung

Aus $|x^2 - x + c|$
folgt $x^2 - x + c$ oder $-x^2 + x - c$.
Die Funktionen

$$y = f_1(x) = x^2 - x + c = (x - \frac{1}{2})^2 + c - \frac{1}{4}),$$

$$y = f_2(x) = -x^2 + x - c = -(x - \frac{1}{2})^2 - c + \frac{1}{4})$$

haben bei einem Definitionsbereich
$0 \le x \le 1$
den Wertebereich

$$c - \frac{1}{4} \le y \le c \quad \text{bzw.} \quad -c \le y \le -c + \frac{1}{4};$$

denn

$$S_1\left(\frac{1}{2}; c - \frac{1}{4}\right) \quad \text{und} \quad S_2\left(\frac{1}{2}; -c + \frac{1}{4}\right)$$

sind Scheitelpunkt von f_1 bzw. f_2.
Da $f_1(x) \le 1$ oder $f_2(x) \le 1$ ist, folgt

$$c - \frac{1}{4} \le y \le 1 \quad \text{oder} \quad y \le -c + \frac{1}{4} \le 1$$

$$c \le \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad -c \le \frac{3}{4}.$$

Somit gilt $\frac{3}{4} \le c \le \frac{5}{4}$.

Nasa gibt Asteroiden-Alarm

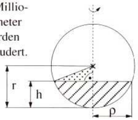
Die Formel für das Volumen eines Kegelsegmentes ist

$$V = \frac{h^2}{3}(3r - h)$$

Mit $r^2=(r-h)^2+\rho^2$, $h=180$ m und $\rho = 650$ m ergibt sich

$$V = \frac{h}{6}\left(h^2 + 3\rho^2\right) \approx 1{,}3 \cdot 10^8\,m^3 = 130000000\,m^3$$

Rund 130 Millionen Kubikmeter Gestein wurden weggeschleudert.



Das Schachbrett als Schalttafel

Der Kupferdraht wird über 64 Kontaktpunkte bei 20 Richtungsänderungen geführt, was einem Verbrauch von 84 Einheiten entspricht. Die Turmwanderung (Drahtverlauf) erfolgt über die Felder:
a7 – a8 – f8 – f2 – b2 – b5 – c5 – c6 – d6 – d4 – c4 – c3 – e3 – e7 – b7 – b6 – a6 – a1 – g1 – g8 – h8 – h1.

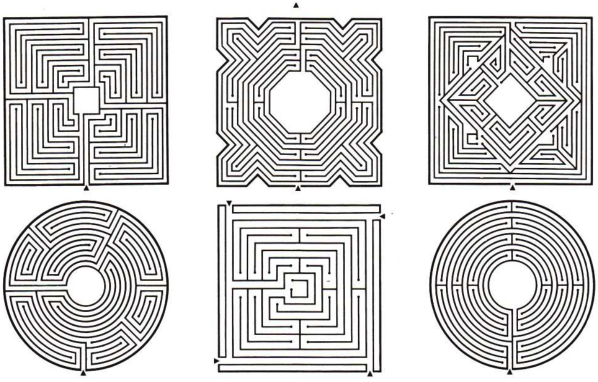
Ein Weihnachtsstern

Der Zentralkörper wird begrenzt von m gleichseitigen Dreieck- und n Quadratflächen mit der Seitenlänge b. Jede Kante des Zentralkörpers ist gleichzeitig Seite einer Dreieck- und einer Quadratfläche des Zentralkörpers. In einer Ecke des Zentralkörpers stoßen also gleichviele Dreieck- und Quadratflächen an. Da der Zentralkörper konvex ist, kann die Summe der Flächenwinkel einer Ecke nicht größer als 360° sein. Da andererseits mindestens drei Flächen in eine Ecke eines Polyeders einmünden müssen, stoßen in jeder Ecke des Zentralkörpers genau zwei Dreieck- und zwei Quadratflächen an. Sind E, K und F die Zahlen der Ecken, Kanten und Flächen des Zentralkörpers, so gilt $F = m + n$, $K = 3m = 4n$ und

$$E = \frac{3m \cdot 2}{4} = \frac{4n \cdot 2}{4}.$$

Laut Eulerschem Polyedersatz muß $2 = E - K + F = 2n - 4n + m + n$ und damit $m - n = 2$ gelten. Aus $3m = 4n$ und $m - n = 2$ ergibt sich $m = 8$, $n = 6$, $E = 12$, $K = 24$ und $F = 14$. Für das Sternpolyeder muß damit $e = E + m + n = 26$, $k = K + 3m + 4n = 72$ und $f = 3m + 4n = 48$ gelten.

Sucht den Weg durchs Labyrinth!

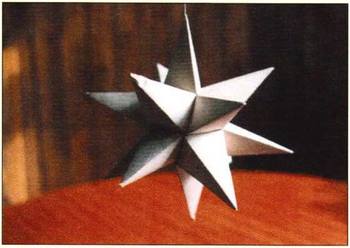


Falls Ihr Lust habt, eigene Labyrinthe zu entwickeln, schickt sie uns (mit Lösung). Wir werden in den nächsten Heften einige veröffentlichen.

Ein Weihnachtsstern

Die Oberfläche des abgebildeten Weihnachtssternes besteht aus den Flächen kongruenter gleichschenkliger Dreiecke, deren Schenkellänge s doppelt so groß wie ihre Basislänge b ist: $s = 2b$. Die "Zacken" dieses Sternpolyeders sind die Mantelflächen regelmäßiger dreiseitiger und quadratischer Pyramiden. Von den beiden längs einer Kante der Länge b des Sternpolyeders anstoßenden Dreiecksflächen gehört die eine zur Mantelfläche einer dreiseitigen und die andere zur Mantelfläche einer quadratischen Pyramide (Zacke). Die gedachten Grundflächen dieser Pyramiden (Zacken) begrenzen für sich einen konvexen Teilkörper der Sternpolyeders, Zentralkörper genannt. Wie groß ist die Zahl e der Ecken, die Zahl k der Kanten und die Zahl f der Flächen dieses Sternployeders?

W. Träger, Döbeln



Mathematische Spielereien mit der Jahreszahl 1993

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=(1\cdot 9-9+3)^{-(1+9/9+3)}$$

$$\frac{1}{1}:\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}:\frac{1}{3}=1^{9-9}\cdot 3$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1^{99}+3}{1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot\sqrt{9\cdot 9}-3}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1+9(9+3)}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}:\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1+\sqrt{9\cdot 9}-3}{1\cdot 9-9+3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{199-3}{1\cdot\sqrt{9}\cdot 9\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{19-9:3}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1\cdot 9+9\cdot 3}{1\cdot 9\cdot 9:3}}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{1}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{\sqrt{(19-\sqrt{9})^3}}{1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 3}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1+9+9-3}{1\cdot(9+\sqrt{9})\cdot 3}}$$

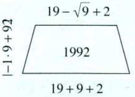
$$1\cdot 9\cdot 9\cdot 3=(1+9/9\cdot 3)^{1+9/9+3}$$

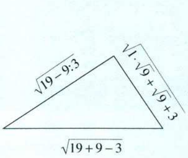
$$19+93=199-3-1\cdot 9\cdot 9-3$$

$$19\cdot 93=(19+9+3)(19\cdot 9:3)$$

$$\sqrt{199-3}=\frac{1^9+9\cdot 3}{-1+9-9+3}$$

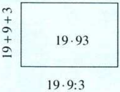
$$\frac{1+9+9+3}{19-9-3}\approx\pi$$





$$A=1\cdot(9+9):3$$

$$U=1\cdot 9+9:3$$



$$1993=12^{2+1}+12^2+121$$

$$1993=12^3+123+1213+12+3+12:3$$

$$\sqrt[-1-9+9+3]{19+9-3}=$$

$$-1+\sqrt{9\cdot 9}-3=-1^9+9-3$$

19__9__93:1993 = ______

$$19\cdot 94=(1-9-9-\sqrt{4})(1-99+4)\cdot 1995$$

$$19:95=1:9\cdot 9:5\cdot 1996$$

$$19\cdot 96=(1+9\cdot 9-6)(1\cdot 9+9+6)$$

$$1997\ 19\cdot 97=1997-\left(19+\sqrt{9}\right)\cdot 7\cdot 1998$$

$$19\cdot 98=1998+(1-9)(9+8)\cdot 1999$$

$$19\cdot 99=1999-19-99$$

$$2000\ 2000=(2\cdot 22)^2+(2\cdot 2\cdot 2)^2$$

Ing. Heinz Decker, Köln und
OStR. Johannes Lehmann, Leipzig

ISBN 3-617-34012-1 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,– DM