H 11328 F

Heft 2
April 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Logische Abenteuer im „Castle of Dr. Brain"

Taschenrechner zu gewinnen im alpha-Preisausschreiben 2

Buchempfehlung „Kraft & Bewegung"

Leserbriefe

Sehr geehrte Damen und Herren,
als kleinen Nachtrag zu dem Thema: „Mathematische Spielereien mit der Jahreszahl 1993" übersende ich Ihnen – völlig unabhängig von Ihren Ergebnissen – folgende Lösungen eines Mathematik Leistungsfach Kurses der 12.Jahrgangsstufen und ihres Lehrers:

1. $1 + 99 + 3 = 1 + 9 + 93$
2. $1^{993} = 1 + (9 - 9) \cdot 3$
3. $\sqrt{199 - 3} = -1 + 9 + 9 - 3$
4. $\int_{1+9}^{9+3} x\,dx = 1 + 9 + 9 + 3$
5. $\int_{1}^{9} x\,dx + \int_{9}^{3} x\,dx = 1 - 9 + 9 + 3$
6. $\int_{0}^{1+9+9+3} x\,dx = -1 + 9 \cdot 9 \cdot 3$
7. Die quadrat. Gleichung
$x^2 - (1 + 9 + 9 + 3)\,x + (1 + 9) \cdot (9 + 3) = 0$
hat die Lösung $x_1 = 1 + 9$ und $x_2 = 9 + 3$.

Th. Schüßler, M. Orth, D. Schroft, Th. Hach, OStR M. Seeger

Betrifft: „Ein seltsamer Beweis" in alpha 4/92, S. 21

Leider ist mir erst vor kurzem dieser Beitrag aufgefallen: vorsichtig geworden durch ähnliche „Beweise" war mir ziemlich schnell klar, daß der Fehler in der Zeichengenauigkeit liegen mußte. Dies hat sich dann auch bestätigt: es zeigt sich, daß ∢ (ADM) in diesem Dreieck kein Innenwinkel ist, sondern ein Außenwinkel. Interessant in diesem Zusammenhang erschien mir aber, daß eine Rechnung zeigte, daß ∢ (CDM) genau (?) 85° zu sein schien. Es läßt sich zeigen, daß stets

$\sphericalangle(CDM) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ist, wenn ∢ (CDA)

$= 90° + \alpha$ ist. Ist dies eine Zusatzaufgabe wert oder bereits bekannt?

Aufgaben dieser Art beleben häufig den ansonsten manchmal recht trockenen Unterrichtsalltag, daher kann es gar nicht genügend davon geben. Vielleicht ist der alpha-Redaktion folgendes Problem schon längst bekannt: Für welche Einsetzungen von $n \in \mathbb{N}$ stellt $n^4 + 4$ eine Primzahl dar?

$n^4 + 4 = n^4 + 4 \cdot n^2 + 4 - 4 \cdot n^2$
$= (n^2 + 2)^2 - 4 \cdot n^2$
$= (n^2 + 2 - 2n) \cdot (n^2 + 2 + 2 \cdot n)$

Der Term ist genau dann prim, wenn genau einer der beiden Faktoren den Wert 1 hat. Dies ist nur für $n = 1$ (oder $n = 1 \notin \mathbb{N}$) der Fall. Ich muß natürlich zugeben, daß ich diese Aufgabe auch „nur" gefunden habe beim Besuch einer Vorlesung mit meinem Mathematik-Kurs.

P. Garrecht

Ihrer freundlichen Anforderung von Leserpost im Heft 3/92 auf S. 2 komme ich gern nach, zumal es dazu einen ernsten mathematischen Anlaß gibt. Im Bericht über den Essener Mathematikwettbewerb wird in Heft 3/92 auf S. 31 mehrfach ein „Beweisverfahren" durchgeführt, was gar keinen Beweis darstellt und welches ich leider sogar schon in Lehrbüchern aus den Altbundesländern gefunden habe. Ausgegangen wird von der „Behauptung" und mit dem „Äquivalenzzeichen" auf weitere Aussagen aus dieser geschlossen bis eine offensichtlich wahre Aussage entstanden ist. So kommt es S. 31 in Spalte 1 am Ende der Lösung der 1. Aufgabe und auch am Ende der Lösung der 2. Aufgabe zur Angabe von „q. e. d." (quod erat demonstrandum = was zu beweisen war) unsinniger Weise hinter einer Identität, die ja bestimmt nicht zu beweisen war. Von dieser zweiten mathematischen Todsünde (nächst der Division durch Null) habe ich „junge Mathematiker" früher immer schnell befreit durch folgendes Beispiel: Beh.: 2 = 3
Bew.:
Wir gehen aus von der Behauptung 2 = 3. Auf Grund der Symmetrie der Gleichheitsrelation (Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden) ist die folgende Aussage äquivalent 3=2
Wegen der Monotonie der Addition (Gleiches zu Gleichem gibt Gleiches) entsteht die zu diesen beiden äquivalente Aussage 5 = 5.
Da dies offensichtlich eine „wahre" Aussage ist, wurde der Beweis erbracht von 2 = 3 q. e. d. Im Übrigen wird in jenem Beitrag mit der „Äquivalenz" recht sorglos umgegangen. So werden in der dritten Spalte im „Beweis" die Aussagen

$k + 0,5 > \sqrt{k(k+1)}$

und $k^2 + k + 0,25 > k^2 + k$ als äquivalent bezeichnet, obwohl für $k = -3$ die erste eine falsche die zweite aber eine wahre Aussage ist. Und es werden in der 3. Spalte von S. 31 unter „bzw." als äquivalent bezeichnet die Aussagen

$\sqrt{k(k+1)} > k - 0,5$

und $k^2 + k > k^2 - k + 0,25$ obwohl die erste etwa für $k = -3$ eine wahre und die zweite eine falsche Aussage ist. Erst die Beschränkung auf positive natürliche Zahlen garantiert Äquivalenz, was an einer solchen Stelle aber erwähnt werden muß. Sogar die Aufgabenstellung ist deshalb nicht korrekt, denn für $n = 0$ ergibt sich Null, was aber eine Quadratzahl ist.
Um den jungen Mathematikern in Essen und anderen schnell zu helfen, schlage ich die Veröffentlichung folgender Anleitung vor.
Zum Führen eines (direkten) Beweises.
Ausgegangen wird von einer gesicherten Aussage. Diese kann sein eine Identität wie 5 = 5, ein Grundgesetz wie a + b = b + a, eine ausdrücklich genannte oder sich von selbst verstehende Voraussetzung oder eine bereits früher bewiesene Aussage. Nun wird durch logische Schlüsse, Implikationen (Folgerungen), Umformungen die Aussage der Behauptung angestrebt. Ist dies gelungen, kann dahinter „q. e. d." gesetzt werden. Freilich wird der Beweisungeübte fragen, woher soll ich wissen, von welcher „gesicherten Aussage" habe ich im Einzelfalle auszugehen? Hier hilft eine Vorüberlegung, eine „Analysis", die mit diesem Wort angekündigt wird.
Hierbei wird von der Behauptung ausgegangen und diese solange umgeformt, bis eine als wahr zu erkennende Aussage entsteht.
Diese ist dann die gesuchte „gesicherte Aussage". Schreibfaule glauben nun zuweilen, auf die Notation des eigentlichen Beweises verzichten zu können. Die Analysis kann aber nur dann als Beweis anerkannt werden, wenn sie mit folgenden „überprüften" Text schließt: „Jede einzelne Schlußfolgerung kann auch in umgekehrter Richtung durchgeführt werden, so daß von der gesicherten Aussage .... auf die Behauptung .... geschlossen werden kann. q. e. d." Ob dadurch Schreibarbeit eingespart wurde, mag jeder für sich entscheiden.
Kein Lernender darf nun aber bedrückt sein, wenn ihm trotz Beherzigung vorstehender allgemeiner Anleitung das Beweisen nicht leicht fällt, denn gerade beim Beweisen gilt: „Übung macht den Meister".

H.-D. Schwabe

Inhaltsverzeichnis

Leserbriefe 2

Die Resonanz auf alpha ist erfreulich. Wir freuen uns auch weiterhin auf Eure Post.

Zeitungsschnipsel 4

Wie immer eine bunte Mischung mit Informationen und Aufgaben u. a. zum Völkerschlachtdenkmal, Ötzi, Napoleon, dem Schiefen Turm und dem kalten Geysir.

Rechenoperationen gesucht 6

Die Lösung ist bekannt – aber welche Rechenoperation führt zum Ziel, fragt *Theodor Scholl*.

Das wird Folgen haben 7

Jochen Kreusch stellt Aufgaben, wie mathematische Folgen „folge-richtig" fortzusetzen sind.

alpha-Preisausschreiben 2 8

Nach dem großen Erfolg mit sehr vielen Einsendungen folgt hier eine weitere Aufgabe. Zu gewinnen gibt es wieder zwei Taschenrechner von Texas Instruments.

Impressum 8

Alphons logische Abenteuer 9

Gedanken von *Prof. Kreiser* über die Rückkehr der Untoten...

Stimmt hier etwas nicht? 10

An gleich langen Tagen müßte die Sonne zur gleichen Zeit auf- und untergehen. *Arnold Zenkert* berichtet über den „Störenfried" Zeitgleichung.

Der Völlersche Satz 11

Dieter Bauke beweist diesen Satz für den Spezialfall des Kreises.

alpha-Wettbewerb 2/93 12

Der zweite Teil bringt wieder zahlreiche Aufgaben für alle Altersstufen. Für die Zusammenstellung bedanken wir uns bei *Dr. W. Fregin, Dr. W. Riehl* und *OStR Th. Scholl*.

Preise im alpha-Wettbewerb 16

Auch diesmal haben uns Firmen zahlreiche lukrative Preise gestiftet – herzlichen Dank.

Eine Fallunterscheidung bei der Erzeugung bemerkenswerter Körper aus den Platonischen Körpern 22

Auf die 5 Platonischen Körper werden Pyramiden gleicher Höhe aufgesetzt. Welche neuen Körper entstehen beschreibt *Frank Heinrich*.

Was geschah vor ... Jahren 26

Ein weiterer Teil der mathematischen Chronologie mit besonderem Augenmerk auf Julius Plücker und „De revolutionibus" von *H.-J. Ilgauds*.

100 Jahre Mitteleuropäische Zeit 27

Hintergründe für die Einrichtung der MEZ, aufgespürt von *Arnold Zenkert*.

Labyrinthe 27

Wir stellen drei Labyrinthe vor, die uns von Schülern geschickt wurden.

Die Olympiade-Ecke: Der bulgarische DRUSCHBA-Wettbewerb 28

Marktecke 32

Neben dem Buch „Kraft & Bewegung" wird der Computerspiel-oldie Ishido vorgestellt.

alpha und BOMICO verlosen Computerspiele 33

Lösungen der Aufgaben aus Heft 1/93 („Ausgerechnet Mathematik") Die Olympiade-Ecke 34

Lösungen 35

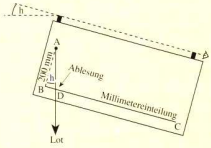
10. alpha-Schachwettbewerb 36

Wir bitten das verspätete Erscheinen dieser Ausgabe zu entschuldigen und verlängern die Einsendefrist für die Wettbewerbe dieses Heftes auf den 1. Juli 1993.

Zeitungsschnipsel

Gestirnshöhenmessung mittels der Tangensfunktion

Für die Messung der Gestirnshöhen hat sich der Pendelquadrant gut bewährt. Dabei erfolgt – wie es die Bezeichnung ausdrückt – an einem Viertelkreis mit der Einteilung von 0° bis 90° die Ablesung der Höhe. Auf dem Gebiete der Höhenmessung führen ebenfalls viele Wege nach Rom. So möchten wir eine Möglichkeit vorstellen, die als Grundlage die Tangensfunktion hat, eine Winkeleinteilung ist daher nicht erforderlich. Auf einem rechteckigen Brett von 250 x 500 Größe wird bei A ein Lot angebracht. Von A bis B wird eine Strecke von 200 mm aufgetragen. Rechtwinkelig dazu die Strecke BC, auf der sich eine Millimetereinteilung (Millimeterpapier) befindet. Zum Anvisieren des Gestirns dient eine einfache Visiereinrichtung mit Kimme und Korn oder mit einem kleinen Fadenkreuz. Bei der Bestimmung der Sonnenhöhe verwende man zum Schutze der Augen ein Blendglas bzw. dunkles Filmmaterial.



Für den Winkel bei A, der bei dem Neigungswinkel der Visiervorrichtung identisch ist, ergibt sich folgende Winkelfunktion:

$$\tan x = \frac{BD}{AB}$$

z. B.: Fällt das Lot auf 350 mm, beträgt der Tangens 1,75 = 60,25°. Dies entspricht schon beinahe der Maximalhöhe der Sonne zu Mittag am 21.6. (61°) für Berlin. In den südlichen Gebieten muß man berücksichtigen, daß dort die Sonne noch um 5,5° höher steht. Die Meßstrecke muß daher bis 460 mm reichen. Auch dieses, kaum bekannte Verfahren zeichnet sich durch eine große Genauigkeit aus. Man sollte es einmal probieren!

Arnold Zenkert

Völkerschlachtdenkmal mit Getränkekisten

Mit einem fast 10 m hohen Bauwerk aus Getränkekisten wollen Mitarbeiter einer Getränkefirma ins Guinness Buch der Rekorde. In Leipzig errichteten sie im September 1992 einen „Nachbau" des im Original 91 m hohen Völkerschlachtdenkmals.

Mit Gabelstaplern, Hebebühnen und viel Muskelkraft wurden auf einer Grundfläche von 120 m² nicht weniger als 12000 Getränkekisten verbaut. Damit wurden klar die alten Weltrekordhalter übertroffen, die „nur" 6628 Bierkisten zu einer Pyramide gestapelt hatten.

Sollten sich nun neue Rekordbrecher finden, so müßten sie mehr als 12000 Kisten stapeln. Nehmen wir einmal an, ein Weltrekord-Team würde nun 18000 Kisten verbauen, um eine neue Bestleistung zu erzielen. Und setzen wir weiterhin voraus, der neue Rekordbau erhielte ebenfalls die Form des Völkerschlachtdenkmals. Um wieviel Prozent wäre dann dieses Bauwerk etwa höher als das der Leipziger Rekordhalter? (Einzelheiten wie Bauweise oder Kistenhöhe sollen unberücksichtigt bleiben.)

R. Laue, Leipzig

Ötzi – Der tote Steinzeitmensch vom Hauslabjoch

Diesem Toten, der am 19.9.1991 vom Nürnberger Ehepaar Simon im hintersten Winkel des Ötztales in 3210 m Höhe über dem Meeresspiegel entdeckt wurde, gaben die Österreicher den Spitznamen Ötzi. Wissenschaftler vermuten,

Der Schiefe Turm von Pisa

Der „Döbelner Anzeiger" berichtete am 25.4.92 und am 20.5.92 über den Schiefen Turm von Pisa: „... Inzwischen fürchten die Wissenschaftler aber weniger, daß der Turm fällt, aber vielmehr das weitere Zerbröseln des alten Gemäuers vor allem im unteren Teil des Bauwerkes – und das dann der Turm in sich zusammenfällt. ... Seit über zwei Jahren ist der 58,36 Meter hohe Turm auf der „piazza dei miracoli" (Platz der Wunder) für die Öffentlichkeit geschlossen. Früher bestiegen jährlich rund 600000 Touristen den Turm ..." „Das ... Bauwerk ... soll in der Höhe des ersten Stockwerkes mit insgesamt 18 Ringen zunächst stabilisiert werden. ... Die Spezialringe aus rostfreiem Stahl haben eine Stärke von zwei Zentimeter und eine Länge von 40 Metern. ..."
Der von 1173 bis 1350 mit Unterbrechung erbaute Turm begann sich bereits während der Bauzeit durch Bodensenkung nach Südosten zu neigen und neigt sich seitdem ständig geringfügig weiter. Mit an diesem Turm ausgeführten Versuchen entdeckte Galileo Galilei 1610 die Fallgesetze.

1. Aufgabe: Durch Messung an einem Foto ermittelte ein Schüler den Neigungswinkel des Schiefen Turms gegen die Senkrechte zu 4,5°. Nach dieser Messung sägte er von einer Holzleiste, deren quadratischer Querschnitt die Seitenlänge a hat, eine Säule der Länge h mit folgender Eigenschaft ab: Wird diese auf ihre quadratische Grundfläche gestellte Säule um eine Kante ihrer Grundfläche um einen Winkel α gekippt und dann losgelassen, so gilt: Ist α kleiner als 4,5°, so kehrt die Säule in ihre Ausgangslage zurück, ist α größer als 4,5°, so kippt sie um und kommt auf einer rechteckigen Seitenfläche zu liegen.
Das Verhältnis h:a ist zu ermitteln!

2. Aufgabe: Wie groß ist das Verhältnis h:d der Gesamthöhe h und des Durchmessers d des ersten Stockwerkes beim Schiefen Turm?

Dr. W. Träger, Döbeln

daß Ötzi vor etwa 5000 Jahren tödlich verunglückte oder verhungerte und daß seine Leiche in der Höhenluft in kürzester Zeit mumifiziert wurde. (Döbelner Anzeiger vom 31.10./ 1.11.1992). Auf dem Foto links sind Ötzis Beil mit Kupferklinge, sein Dolch mit Steinklinge, sein Feuerschläger und sein an Lederbändern hängender Anhänger abgebildet.

Aufgabe: Welcher Luftdruck herrscht in 3200 m Höhe über dem Meeresspiegel, wenn der Luftdruck in der Höhe 0 m ü. M. 760 Torr beträgt und für die Abnahme des Luftdruckes mit wachsender Höhe genähert gilt: In der Höhe h m ü. M. ist der Luftdruck um 1,0% kleiner als 80 m tiefer, in der Höhe (h – 80) m ü. M.

Dr. W. Träger, Döbeln

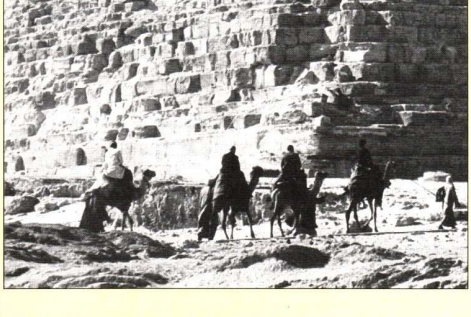
Der kalte Geysir von Herlany

Laut einer Bechreibung im Reiseführer „Tschechoslowakei" von Ctibor Rybár [1] gilt: In Herlany (CSFR), 22 km nordöstlich von Kosice, schleudert ein Geysir alle 32 Stunden für die Dauer von 30 Minuten einen Wasserstrahl mit einer Temperatur von 12 bis 14° C aus einer Tiefe von 405 m 30 bis 35 Meter hoch.

[1] 1982 im Olympia Verlag Prag erschienen.

Aufgabe: Mit welcher Geschwindigkeit müßte das Wasser dieses Geysirs aus der Erdoberfläche hervorquellen, damit es unter der Annahme, der Luftwiderstand sei nicht vorhanden, 35 m hoch steigen würde?

Dr. W. Träger, Döbeln



Napoleon und die Cheopspyramide

Im Buch „Die Cheopspyramide" von Georges Goyon 1) wird berichtet: Napoleon Bonaparte überlegte sich im Jahre 1798 bei einem Besuch der Pyramiden von Giseh, einem der sieben Weltwunder der Antike, daß sich aus den Steinen der Cheopspyramide oder denen aller Pyramiden von Giseh eine ganz Frankreich umschließende Mauer von 3 m Höhe errichten ließe.

1. Aufgabe: Die ursprünglichen Maße der um 2700 v. Chr. errichteten Cheopspyramide, die die Gestalt einer quadratischen Pyramide hat, sind:
Länge der Grundkante a = 230 m
Länge der Höhe h = 147 m
Welche Dicke d hat eine h = 3 m hohe Mauer, die eine Kreisfläche mit dem gleichen Flächeninhalt A = 549430 km^2 wie das heutige Territorium von Frankreich umschließt und die das gleiche Volumen wie die Cheopspyramide hat?

2. Aufgabe: Eine Kugelkappe auf der Erdkugel mit dem Radius R = 6370 km hat den gleichen Flächeninhalt wie das Territorium des heutigen Frankreich. Wie lang ist der Rand dieser Kugelkappe?

Dr. W. Träger, Döbeln

Rechenoperationen gesucht

Wir stellen unseren Lesern vier Rechenaufgaben vor, deren Lösung bereits bekannt ist, von denen wir aber nicht wissen, welche Rechenoperationen zur Lösung geführt haben.

(1) $\frac{7}{3} ? \frac{7}{4} = \frac{49}{12}$ (2) $\frac{3}{4} ? \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$

(3) $\frac{16}{45} ? \frac{4}{9} = \frac{4}{5}$ (4) $\frac{64}{15} ? \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$

Bei der ersten Aufgabe führt die Addition, aber auch die Multiplikation zum Ergebnis; denn

$$\frac{7}{3} + \frac{7}{4} = \frac{28+21}{12} = \frac{49}{12}$$

und

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{12}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der zweiten Aufgabe führt die Subtraktion, aber auch die Multiplikation zum Ergebnis; denn

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{7} = \frac{21-12}{28} = \frac{9}{28}$$

und

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der dritten Aufgabe führt die Addition, aber auch die Division zum Ergebnis; denn

$$\frac{16}{45} + \frac{4}{9} = \frac{16+20}{45} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

und

$$\frac{16}{45} : \frac{4}{9} = \frac{16 \cdot 9}{45 \cdot 4} = \frac{4}{5}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Bei der vierten Aufgabe führt die Subtraktion, aber auch die Division zum Ergebnis; denn

$$\frac{64}{15} - \frac{8}{5} = \frac{64-24}{15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

und

$$\frac{64}{15} : \frac{8}{5} = \frac{64 \cdot 5}{15 \cdot 8} = \frac{8}{3}$$

ergeben die gleiche Lösung.
Dem Leser drängen sich nun vielleicht zwei Fragen auf: Wie viele positive reelle Zahlenpaare mit diesen Eigenschaften mag es geben? Wie lassen sich solche Aufgaben, die mit Hilfe zweier verschiedener Rechenoperationen gelöst werden können, ermitteln?
Diese Fragen wollen wir nun klären.

Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen; den vier vorangestellten Aufgaben entsprechen dann folgende Darstellungen:

Aufgabe (1):
$a + b = a \cdot b$, $b = a \cdot b - a$, $b = a \cdot (b-1)$,

$$a = \frac{b}{1-b} \quad \text{für } b > 1.$$

Aufgabe (2):
$a - b = a \cdot b$, $a - a \cdot b = b$, $a \cdot (1-b) = b$,

$$a = \frac{b}{1-b} \quad \text{für } b < 1.$$

Aufgabe (3):

$$a + b = \frac{a}{b}, \quad ab + b^2 = a, \quad b^2 = a - ab,$$

$b^2 = a \cdot (1-b)$,

$$a = \frac{b^2}{1-b} \quad \text{für } b < 1.$$

Aufgabe (4):

$$a - b = \frac{a}{b}, \quad ab - b^2 = a, \quad ab - a = b^2,$$

$a \cdot (b-1) = b^2$,

$$a = \frac{b^2}{b-1} \quad \text{für } b > 1.$$

Damit ist die erste Frage bereits beantwortet; es gibt beliebig viele solcher geordneten Zahlenpaare (a; b), deren Komponenten a und b positive reelle Zahlen sind, die den geforderten Bedingungen genügen. Wie sich weitere solcher Aufgaben ermitteln lassen, geht aus der allgemeingültigen Darstellung mit Hilfe von Variablen hervor. Abschließend wollen wir für jede der vorangestellten Aufgaben (1) bis (4) weitere Zahlenbeispiele ermitteln.

Zu (1): Es sei $b = \frac{7}{5}$, also

$$a = \frac{7}{5} : \left(\frac{7}{5} - 1\right) = \frac{7}{5} : \frac{2}{5} = \frac{7}{2}$$ dann gilt

$$\frac{7}{2} + \frac{7}{5} = \frac{35+14}{10} = \frac{49}{10} \quad \text{und} \quad \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{10}$$

Zu (2): Es sei $b = \frac{3}{8}$, also

$$a = \frac{3}{8} : \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8} : \frac{5}{8} = \frac{3}{5}$$ dann gilt

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{24-15}{40} = \frac{9}{40} \quad \text{und} \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$$

Zu (3): Es sei $b = \frac{2}{9}$, also

$$a = \frac{4}{81} : \left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81} : \frac{7}{9} = \frac{4}{63}$$ dann gilt

$$\frac{4}{63} + \frac{2}{9} = \frac{4+14}{63} = \frac{18}{63} = \frac{2}{7}$$

und

$$\frac{4}{63} : \frac{2}{9} = \frac{2}{7}$$

Zu (4): Es sei $b = \frac{5}{3}$, also

$$a = \frac{25}{9} : \left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{25}{9} : \frac{2}{3} = \frac{25}{6};$$

dann gilt

$$\frac{25}{6} - \frac{5}{3} = \frac{25-10}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \quad \text{und}$$

$$\frac{25}{6} : \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$$

Nun möge der interessierte Leser selbst weitere Beispiele zusammenstellen.

Theodor Scholl, Berlin

Zahlenspielereien I

$133 = (1+3+3)(1^2+3^2+3^2)$
$315 = (3+1+5)(3^2+1^2+5^2)$
$803 = (8+0+3)(8^2+0^2+3^2)$

$1148 = (1+1+4+8)(1^2+1^2+4^2+8^2)$
$1215 = (1+2+1+5)(1^3+2^3+1^3+5^3)$
$1547 = (1+5+4+7)(1^2+5^2+4^2+7^2)$
$2196 = (2+1+9+6)(2^2+1^2+9^2+6^2)$
$3700 = (3+7+0+0)(3^2+7^3+0^3+0^3)$

$153 = 1^3+5^3+3^3$
$370 = 3^3+7^3+0^3$
$371 = 3^3+7^3+1^3$
$407 = 4^3+0^3+7^3$

$1634 = 1^4+6^4+3^4+4^4$
$4150 = 45+15+55+05$
$4151 = 45+15+55+15$
$8208 = 8^4+2^4+0^4+8^4$

Dieter Bauke, Gera

Das wird Folgen haben

Jeder kennt diese Redeweise. Ein vorhergegangenes Ereignis führt nahezu logisch zwingend zu einem weiteren Ereignis. In der Mathematik wird die Folge als eine (meist unendliche) Menge von Zahlen definiert, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Das Einmaleins besteht aus Folgen, zum Beispiel 0, 7, 14, 21, 28, 35, ... Diese Malfolgen sind sogenannte arithmetische Folgen. Arithmetische Folgen zeichnen sich durch eine konstante Differenz zweier benachbarter Folgeglieder aus. Sie begegnen uns täglich. Zum Beispiel beim Einkaufen: Nehmen wir immer 100 g unserer Lieblingswurst mehr, müssen wir auch entsprechend mehr zahlen. Menge und Preis ergeben dann je eine arithmetische Folge. Ausnahmen sind natürlich die meist billigeren Großabpackungen.

Ein anderes Beispiel: 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; ...

Derartige Folgen nennt man **geometrische Folgen**. Jedes Folgeglied geht aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einem bestimmten Faktor hervor.

Wie man sieht, gibt es **wachsende** und **fallende Folgen** u. v. a. m. Wir erinnern uns an die Folge der Wochentage. Sie stellen ebenso wie die Monate eine **zyklische Folge** (regelmäßig wiederkehrende Folgeglieder) dar.

Schließlich scheint beim letzten Beispiel kein „Bauprinzip" erkennbar:

0; 1; 3; 6; 10; 15; ... Oder doch?

Die Pünktchen sollen andeuten, daß sich die Folge beliebig fortsetzt – also eine **unendliche Folge**.

Daraus folgt, daß es auch **endliche** Folgen, z. B. die der Quadratzahlen von 1 bis 20, gibt. Wir wollen uns nun lieber mehr spielerisch mit Folgen beschäftigen. Mal sehen, was das für Folgen hat.

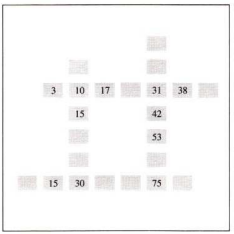
Ergänze „folge"-richtig:

1 a) 1; 5; 9; 13; ; ; ; 29 ;

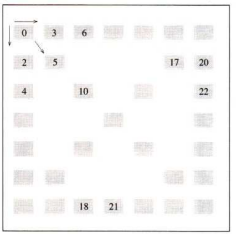
b) 0; 13; 26; 39; ; ; ; 91

c) 2; 5; 8; 11; ; ; 20 ; ;

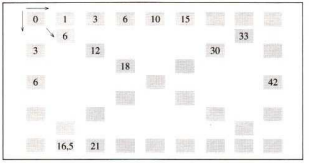
d) 0; 0,5; 1,5; 3,0; 5,0; 7,5; 10,5; ; ; 22,5 ;



3

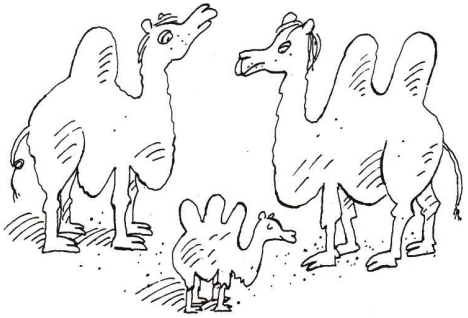


4



OStR Jochen Kreusch
Staatliches Seminar
für das Lehramt an
Mittelschulen Löbau

2

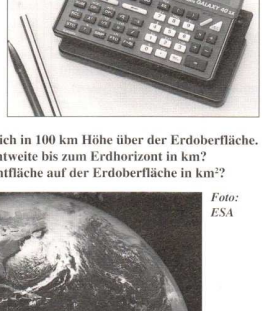


Lothar Otto, Leipzig

alpha-Preisausschreiben 2

Das alpha-Preisausschreiben 1 hatte eine hervorragende Resonanz – sogar Schulklassen beteiligten sich. Hierüber haben wir uns sehr gefreut. Richtige Lösungen erhielten wir von über 300 Einsendern, aus Platzgründen können wir leider die Namen nicht aufführen – aber alle erhalten diese Ausgabe von alpha als Dank.

Von Texas Instruments wurden dankenswerterweise zwei Taschenrechner zur Verfügung gestellt. Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen. Den TI-81 erhielt Christoph Späth, 8900 Augsburg, den Galaxy 40X Solar erhielt Marion Wollschläger, O-5001 Erfurt! Auch diesmal werden je ein TI-81 und Galaxy 40X Solar verschickt.



Die neue Aufgabe:

Ein Astronaut befindet sich in 100 km Höhe über der Erdoberfläche.

a) Wie groß ist seine Sichtweite bis zum Erdhorizont in km?

b) Wie groß ist seine Sichtfläche auf der Erdoberfläche in km²?

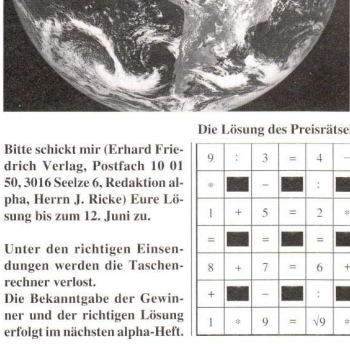


Foto: ESA

Die Lösung des Preisrätsel 1:

Bitte schickt mir (Erhard Friedrich Verlag, Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6, Redaktion alpha, Herrn J. Ricke) Eure Lösung bis zum 12. Juni zu.

Unter den richtigen Einsendungen werden die Taschenrechner verlost.

Die Bekanntgabe der Gewinner und der richtigen Lösung erfolgt im nächsten alpha-Heft.

9	:	3	=	4	−	1
*	■	−	■	:	■	*
1	+	5	=	2	*	√9
=	■	=	■	=	■	=
8	+	7	=	6	+	9
+	■	−	■	:	■	:
1	*	9	=	√9	*	3

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6

Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)
Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34014-8

Alphons logische Abenteuer

Auf dem Weg zur Schule kamen Alphons und Berti an einem Filmtheater vorbei, dessen Reklame sie immer interessierte. Heute warb ein Plakat in düsteren Farben zum Besuch eines Filmes mit dem Titel: Die Rückkehr der Untoten. „Klingt ja schauerlich-spannend", sagte Alphons zu Berti. Während sie sich die ausgehängten Szenenfotos anschauten, trat mit gleicher Absicht ein Ehepaar hinzu.

Die Frau fragte ihren Mann etwas, er aber reagierte nicht. Sie stieß ihn leicht an: „Du hörst ja gar nicht zu. Ich habe dich gefragt, was für Wesen denn die Untoten sind. Eine ungerade Zahl ist eine Zahl, die nicht gerade ist. Demnach müßte ein Untoter ein Wesen sein, das nicht tot, also lebendig ist. Freilich: Die Rückkehr der Lebendigen, das klingt nicht mehr spannend." Er fand das auch, hatte aber Zweifel wegen der unspezifizierten Wesen. „Man meint doch einen Menschen, wenn man einfach von einem Toten spricht. Sind aber Tote Menschen könnten wir ja auch statt ‚Untote' sagen ‚Unmenschen', somit kämen die Unmenschen zurück." Mit dieser Erklärung war sie nicht einverstanden: „Ungerade ist nicht gerade, dementsprechend ist ein Unmensch kein Mensch und du kannst nicht von ‚Untoten' zu ‚Unmenschen' übergehen, weil du dann von Toten, die Menschen sind, zu denselben Toten kommst, die keine Menschen sind, und das widerspricht sich!" – „Moment mal", wehrte er sich. „Ein Unmensch ist nicht kein Mensch, sondern eben gerade ein Mensch, allerdings von besonders übler Sorte." In einem freundlich einlenkenden Tonfall unterbrach sie ihn. „Einverstanden, ein Unmensch ist kein Nichtmensch. Trotzdem ist es falsch zu sagen, Tote sind Menschen, eher wohl, daß Tote tote Menschen sind. Hättest du recht, ergäbe sich aus den Aussagen: Tote sind Menschen, und: Menschen leben zeitlich begrenzt, die Aussage: Tote leben zeitlich begrenzt, was doch in sich so widersprüchlich ist, wie die Aussage: Über die menschenleere Straße eilen Scharen von Jugendlichen."

Der Mann sagte nach kurzer Überlegung: „Da muß ich dir zustimmen. Gehen wir nun von dem aus, was mit ‚Unmensch' gemeint ist und begreifen wir Tote im Sinne von tote Menschen, so ist ‚Un' in ‚Untote' so zu verstehen, daß tote Menschen gemeint sind, die auf besondere Weise tot, also etwas Drittes zwischen Tod und Leben sind. Tod und Leben bilden – dem Filmtitel zufolge – keinen Gegensatz in der Weise, daß bei einem Menschen notwendig genau eines von beiden zutrifft, sie bilden keinen kontradiktorischen Gegensatz. Beide Zustände stehen in einem konträren Gegensatz, wie er z. B. auch zwischen dem Süßen und dem Bitteren besteht. Etwas kann seinem Geschmack nach weder süß noch bitter sein, sondern für Menschen einen Geschmack haben, der dazwischen liegt. ‚Untote' ist der Name für etwas, was weder tot noch lebendig ist, und so etwas kehrt zurück – schöne Aussichten!"

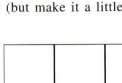
Alphons, mehr von dem ungewollt mit hörbaren Gesprächen, als den Szenenfotos angezogen, meinte zu Berti, ihn dabei auf den Schulweg drängend: „Ein Unmensch ist ein besonderer Mensch, ein Unglück dürfte aber kaum ein besonderes Glück sein." Berti nickte. „Bei diesem Thema, Alphons, war es mir nicht geheuer. Kann ich aber nunmehr sagen, bei diesem Thema war es mir ungeheuer?" Nicht der Film, sondern diese Frage beschäftigte sie bis zum Erreichen des Schulgebäudes.

Prof. Dr. L. Kreiser

Sprachecke

Discover your own theorem

Draw a 3x1 rectangle, as in the drawing below (but make it a little larger than ours).



Divide the rectangle into three unit (1x1) squares. Now from the upper left hand corner, draw the following three diagonals:

(i) the diagonal of the first square;
(ii) the diagonal of the 2x1 rectangle; and
(iii) the diagonal of the 3x1 rectangle.

Measure the angles made by these diagonals with the bottom line. How are these three angles related? Repeat the drawing and the measurements with 3x1 rectangles of different sizes. Do you always get the same relationships? Formulate a conjecture!

aus: Fun with mathematics, Toronto

Из наЪора гирек с массами в 1г, 2г, ... 101г сряаъ гирька массой 19г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на дв кучки по 50 гитук в каждой так, чтоЪы массы кучек Ъыли одинаковы?

aus: Quant, Moskau

L'échelle au mur

Lorsqu'une échelle est posée verticalement, tout contre le mur, le sommet de l'échelle dépasse de 10 cm de sommet du mur. Il faut alors écarter de 70 cm de pied de l'échelle pour que leurs sommets coincident. Quelle est la hauteur du mur?

aus: Tangente, Paris
Übersetzung: Dr. G. Liebau, Leipzig

Stimmt hier etwas nicht?

Eine unterhaltsame Kalenderbetrachtung

Jährlich erleben wir die Zu- und Abnahme der Tageslänge, d. h. die Dauer von Tag und Nacht. An zwei Tagen werden wir besonders darauf aufmerksam gemacht: Am 21.6., dem Tag der Sommersonnenwende, wenn die Tage wieder kürzer werden und am 21.12., dem Tag der Wintersonnenwende, wenn wir freudig die Zunahme der Tageslänge zur Kenntnis nehmen. Die Länge der Tage nimmt somit vom 22.12. bis 20.6. zu und vom 22.6. bis 20.12. wieder ab. Hier liegt doch der Gedanke nahe, daß in dieser Zeit jeweils zwei Tage gleich sein müssen, daß es immer einen „Gegentag", einen „Doppelgänger", geben muß. So entspricht z. B. der 21.5. dem 21.7. oder der 21.10. dem 21.2. In beiden Fällen ist der zeitliche Abstand von der Sommer- bzw. Wintersonnenwende gleich groß. Zwei solcher „Gegentage" sind uns vertraut, nämlich der 20.3. (Frühlingsbeginn) und der 22.9. (Herbstbeginn), Tage und Nächte sind mit je 12 Stunden gleich lang. Bei diesen Tagespaaren stimmen überein:

- Länge von Tag und Nacht
- Größe des Tagbogens der Sonne
- Mittagshöhe der Sonne
- Punkte am Horizont, wo die Sonne auf- oder untergeht.

Also müßte an diesen Tagen die Sonne auch zur gleichen Zeit auf- und untergehen! – Entnimmt man aber einmal einem Kalender oder einem astronomischen Jahrbuch die Auf- und Untergangszeiten der Sonne, so bemerkt man, daß hier etwas nicht stimmt. Betrachten wir einmal die Verhältnisse am 9.2. und 2.11.! Es handelt sich um „Gegentage", astronomisch ausgedrückt um Tage mit der gleichen Sonnendeklination (Deklination: Winkelabstand vom Himmelsäquator, **Abb. 1**).
Bei westlich von Görlitz gelegenen Orten muß die Ortszeitdifferenz (Längendifferenz) addiert werden, so für die Länge von Erfurt, Nürnberg, Augsburg 16 Minuten, für Essen, Köln, Saarbrücken 32 Minuten.

Der Unterschied zwischen den beiden Tagen beträgt jeweils 31 Minuten. Das bedeutet, daß im Februar die Abende um rund eine halbe Stunde länger als im November sind, was natürlich auf Kosten der Sonnenscheindauer am Morgen geht. Wie oft hört man im Februar bei Unterhaltungen: „Ja, an den Abenden merkt man es schon deutlich, doch am Morgen will es nicht heller werden!" Und im Herbst: „Jetzt wird es aber am Abend schnell dunkel!" Die Beispiele derartiger „Gegentage" lassen sich beliebig fortsetzen, wobei die Unterschiede meist geringer sind (**Abb. 2**).
Wie kommt es zu dieser Unstimmigkeit bei gleich langen Tagen?

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang (für Görlitz, 15° Ost)
9.2.	7.25 Uhr	17.04 Uhr
2.11.	6.54 Uhr	16.33 Uhr

Abb. 1

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang	
14.5.	4.11 Uhr	19.43 Uhr	Unterschied: 12 bzw.
30.7.	4.23 Uhr	19.49 Uhr	6 Minuten.

Abb. 2

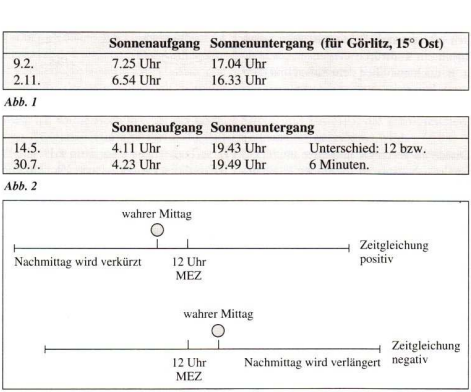


Abb. 4: Die Auswirkungen der Zeitgleichung auf die Länge des Vor- und Nachmittags

„Störenfried" Zeitgleichung

Wir haben es heute mit dem Kalender und der seit 100 Jahren gültigen Zonenzeit (MEZ), die sich nach dem 15. Meridian ö. v. Gr. (Görlitz) richtet, einfach und wer denkt schon einmal darüber nach, daß unser zeitgebendes Gestirn, die Sonne, gar nicht so gleichförmig und exakt läuft, wie wir das gerne möchten. Wer sich mit Sonnenuhren beschäftigt, wird bemerken, daß diese im Februar eine Viertelstunde nachgehen, Ende Oktober/Anfang November um diesen Betrag vorgehen. Dies ist keineswegs ein Fehler an der Sonnenuhr oder beim Lauf der Sonne. Dieses Vor- und Nachgehen einer Sonnenuhr ist naturbedingt und ist auf die elliptische Erdbahn um die Sonne zurückzuführen. Unsere Erde bewegt sich in Sonnennähe Anfang Januar rascher als in Sonnenferne Anfang Juli, und zwar um 2 km pro Sekunde. Hinzu kommt noch ein Effekt, der letztlich auf die Schrägstellung der Erdachse zurückzuführen ist: Die scheinbare Sonnenbahn (Ekliptik) schneidet den Himmelsäquator unter einem Winkel von 23,44°. Beides ergeben die sogen. Zeitgleichung, ein Begriff der nichts mit einer mathematischen Gleichung zu tun hat, sondern zutreffender mit Zeitausgleich bezeichnet werden müßte.
Die Abbildung 3 zeigt das je zweimalige Vorgehen und Nachgehen der Sonnenuhr im Laufe des Jahres. Richteten wir uns nach der Sonnenzeit, wie sie uns die Sonnenuhren anzeigen, gäbe es diese Unstimmigkeiten bei den Gegentagen nicht. Erst durch die Zonenzeit, die weder auf die Zeitgleichung noch auf die Längenunterschiede (zwischen Görlitz und Aachen: 36 Minuten!) Rücksicht nimmt, kommt es zu diesen Verschiebungen der Auf- und Untergänge der Sonne. Betrachten wir in diesem Zusammenhang auch den Zeitpunkt, des sogen. wahren Mittags, wenn die Sonne im Süden am

Zeitpunkt des wahren Mittags (für Görlitz)		
1.1.	12.03 Uhr	jeweils MEZ
1.2.	12.14 Uhr	
1.3.	12.12 Uhr	
1.4.	12.04 Uhr	
1.5.	11.57 Uhr	
1.6.	11.58 Uhr	
1.7.	12.04 Uhr	
1.8.	12.04 Uhr	
1.9.	12.00 Uhr	
1.10.	11.50 Uhr	
1.11.	11.44 Uhr	
1.12.	11.49 Uhr	

höchsten steht und die Sonnenuhr 12 Uhr Sonnenzeit (wahre Ortszeit) anzeigt. Dieser Zeitpunkt fällt nur in seltenen Fällen mit 12 Uhr MEZ zusammen.
Dieses Hin und Her des Zeitpunktes für den wahren Mittag verursacht eine Verlängerung oder Verkürzung des Vor- oder Nachmittags und damit die Unterschiede für die Auf- und Untergänge der Sonne, die bis zu 31 Minuten betragen können

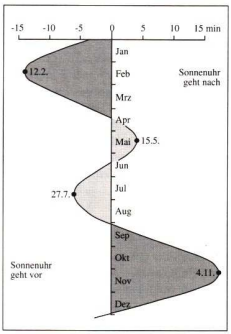


Abb. 3: Die Zeitgleichung

(siehe **Abb. 4**). Geht die Sonnenuhr vor (Zeitgleichung +, z. B. 4.11.), tritt der wahre Mittag vor 12 Uhr MEZ ein, der Nachmittag wird verkürzt. Geht sie nach (Zeitgleichung –, z. B. 12.2.), tritt der wahre Mittag nach 12 Uhr MEZ ein, der Nachmittag wird verlängert.
Arnold Zenkert, Potsdam

Der Völlersche Satz

„Zieht man in einer beliebigen Kurve eine Sehne, so ist, wenn die letztere unendlich klein wird, das Verhältniß des Flächensegments zu dem Dreiecke, welches von der Sehne und den dazugehörigen Tangenten gebildet wird, wie 2:3."

Andreas Völler (geboren am 11.9.1833 in Helba bei Meiningen, gestorben am 27. 7. 1859 in Saalfeld) wirkte seit 1857 an der Realschule und am Gymnasium zu Saalfeld als Mathematiklehrer. Daneben beschäftigte er sich mit der Untersuchung der Kegelschnitte und mit geometrischen Grenzwertsätzen. Ein solcher Satz ist der jetzt nach ihm benannte Völlersche Satz. Zum Beweis bemerkt er: „Es ist nicht schwer, für bestimmte Kurven das Verhältniß eines Flächensegments zu dem dazugehörigen Tangentendreiecke anzugeben. Wird aber die Aufgabe allgemein gefaßt, dann läßt sich das weittragende Gerüst der höheren Analysis nicht mehr gut entbehren." (Grunerts Archiv XXXI, 1858, S. 449)
Wir wollen versuchen, diesen Satz für den Spezialfall des Kreises zu beweisen: Nach dem Völlerschen Satz sollen sich die Inhalte der Kreisabschnittsfläche $\sphericalangle ADB = F_K$ zur Dreiecksfläche $\Delta ACB = F_D$ wie 2:3 verhalten, je kleiner die Sehne $s = \overline{AB}$ ist. (Für diese Konstruktion am Kreis gilt:

$\overline{AB} \perp \overline{CM}$, $\overline{AC} \perp \overline{AM}$, $\overline{CB} \perp \overline{BM}$.)

Daß die Sehne s immer kleiner wird, ist für diese Konstruktion gleichbedeutend damit, daß der Zentriwinkel α ebenso kleiner wird. Beide Größen hängen (über die Sinus-Definition im Dreieck Δ AEM) zusammen:

$$s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Wir werden versuchen, die Flächenmaße im Abhängigkeit vom Radius r und vom Zentriwinkel α (im Bogenmaß) darzustellen.
Dem Tafelwerk entnehmen wir für die Kreisabschnittsfläche:

$$F_K = (\alpha - \sin\alpha) \cdot r^2/2 \qquad (2)$$

Für die Dreiecksfläche stellen wir mit $x = \overline{EC}$ fest: $F_D = s \cdot x/2$, wobei s mit (1) schon bestimmt ist. Zur Bestimmung von x erhalten wir $\left(\text{mit } \overline{AC} = u\right)$ aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Δ AEM und Δ CEA

(Beweis!) $x = \frac{us}{2r}$ und aus dem Dreieck Δ AEC noch $u^2 = x^2 + (s/2)^2$. Durch Elimination von u ergibt sich

$$x = s^2 / 2\sqrt{4r^2 - s^2}$$

Damit ist F_D bestimmt. Nutzen wir (1) und berücksichtigen (mit $\beta = \alpha/2$, daß

$\sqrt{1 - \sin^2\beta} = \cos\beta$, $\sin\beta / \cos\beta = \tan\beta$,

$\sin^2\beta = (1 - \cos\alpha)/2$

und

$\tan\beta = (1 - \cos\alpha) / \sin\alpha$

so erhalten wir

$$F_D = r^2(1 - \cos\alpha)^2 / 2\sin\alpha \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich für das Verhältnis V der Flächen:

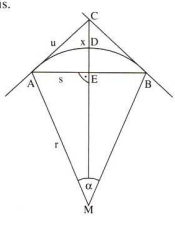
$$V = \frac{F_K}{F_D} = \frac{\sin\alpha(\alpha - \sin\alpha)}{(1 - \cos\alpha)^2}$$

Um diesen Ausdruck ohne „höhere Mathematik" weiter umformen zu können, nutzen wir Näherungsformel für die sin- und cos-Funktion. (Diese beiden Formeln sind um so genauer, je kleiner der Winkel α ist; und hier soll ja α immer kleiner werden!):

$\sin\alpha = \alpha - \alpha^3 / 6$

$\cos\alpha = 1 - \alpha^2 / 2$

Werden diese Ausdrücke eingesetzt, erhalten wir umgeformt:
$V = 2/3 - \alpha^2/9$, und damit, wenn s und damit α immer kleiner wird, die Bestätigung des Völlerschen Satzes für den Kreis.



Alphawettbewerb 2/93

Fortsetzung aus Heft 1/93

5/8

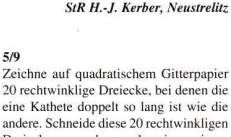
Welche Zahlen (in dezimaler Schreibweise) erfüllen die Gleichung

$\overline{b} + \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} + \overline{b} = \overline{b00b}$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/9

Zeichne auf quadratischem Gitterpapier 20 rechtwinklige Dreiecke, bei denen die eine Kathete doppelt so lang ist wie die andere. Schneide diese 20 rechtwinkligen Dreiecke aus und versuche, sie zu einem Quadrat lückenlos zusammenzufügen.



OStR Th. Scholl, Berlin

5/10

Siegfried, Peter, Bernd und Lutz führten einen Wettbewerb im Angeln durch. Sie vereinbarten, gefangene Fische mit Punkten zu bewerten, und zwar einen Zander mit fünf, einen Brassen mit vier, einen Flußbarsch mit zwei Punkten und einen Kaulbarsch mit nur einem Punkt. Den einzigen Zander fing Siegfried. Insgesamt wurden drei Flußbarsche geangelt. Zusammen kamen die vier Angler für ihre Fänge auf 18 Punkte. Peter erreichte die wenigsten Punkte, obwohl er die meisten Fische gefangen hatte. Bernd und Peter erzielten zusammen die gleiche Punktezahl wie Siegfried und Lutz zusammen. Alle vier Angler erreichten unterschiedliche Punktezahlen. Welchen Fang hatte jeder dieser vier Angler gemacht?

Schülerin Steffi Mögenburg, Gützkow

5/11

Genau 14 Schüler einer Schulklasse besuchen die Arbeitsgemeinschaft (AG) Mathematik, genau 13 Schüler die AG Handball und genau 17 Schüler die AG Fußball. Genau 3 Schüler nehmen sowohl an der AG Handball als auch an der AG Fußball teil; genau 7 Schüler besuchen keine dieser drei Arbeitsgemeinschaften. Wie viele Schüler gehören zu dieser Schulklasse?

Schüler Torsten Zimmermann, Breitungen

5/12

In einer Kiste befinden sich sieben weiße, drei blaue, fünf schwarze, eine gelbe, zwei rote, vier grüne und sechs braune Kugeln. Wie viele Kugeln muß man bei völliger Dunkelheit dieser Kiste entnehmen, um mit Sicherheit fünf Kugeln der gleichen Farbe zu erhalten?

Schüler Timm Wenzel, Staßfurt

5/13

Hans, Peter und Ursula gingen in den Wald, um Pilze zu sammeln. Hans sammelte fünf Pilze mehr als Ursula, Peter sammelte zehn Pilze weniger als Hans und Ursula zusammen. Insgesamt haben diese drei Schüler 84 Pilze gesammelt. Wie viele Pilze hat jeder von ihnen gesammelt?

Schülerin Ina Haas, Gerstungen

5/14

Angenommen, aus den drei Ziffern 2, 4 und 6 wurden alle möglichen dreistelligen Zahlen gebildet, in denen jede dieser drei Ziffern genau einmal vorkommt. Es ist die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen zu ermittelt, ohne die Zahlen zu notieren und anschließend zu addieren.

Schüler Jens Treßelt, Großbreitenbach

6/8

Notiere eine beliebige dreistellige natürliche Zahl; schreibe die gleiche Zahl noch einmal rechts neben die bereits notierte Zahl, so daß du eine sechsstellige Zahl erhältst, bei der die drei ersten mit den drei letzten Ziffern übereinstimmen. Ermittle, welche Teiler eine solche sechsstellige Zahl hat!

Schüler Timm Wenzel, Staßfurt

6/9

Sebastian fährt mit der Eisenbahn zu seiner Tante. Als er den zehnten Teil der Gesamtstrecke zurückgelegt hat, schläft er ein. Nachdem er die Hälfte der Gesamtstrecke gefahren ist, wacht er wieder auf. Wieviel Kilometer beträgt die gesamte Bahnfahrt, wenn Sebastian 36 km davon geschlafen hat?

Schülerin Christine Lange, Perleberg

6/10

In einem Nähkästchen befinden sich 15 weiße, 15 gelbe und 15 schwarze Knöpfe von gleicher Form und Größe. Wie oft muß Anita im Dunkeln in das Nähkästchen greifen, wenn sie jeweils nur einen Knopf entnimmt, um zehn Knöpfe der gleichen Farbe mit Sicherheit zu erhalten?

Schüler Tobias Gerlach, Friedeburgerhütte

6/11

Auf der Fernverkehrsstrecke F 6 wurde wegen Bauarbeiten auf einer Strecke von 2 km Länge die Höchstgeschwindigkeit auf 30 km/h begrenzt. Herr Meyer durchfuhr diese Strecke mit seinem Skoda in 3 Minuten. Hat sich Herr Meyer an diese Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten?

Schüler Andreas Kellner, Halberstadt

6/12

Die fünf Schülerinnen Astrid, Britta, Christin, Elke und Sandra wohnen (in anderer Reihenfolge) in den Städten Berlin, Potsdam, Suhl, Dresden und Wismar.

Von ihnen ist folgendes bekannt:

(1) Christin wohnt nicht in Berlin.

(2) Britta, Christin und Elke fahren im Sommer mit dem Mädchen aus Suhl ins Ferienlager.

(3) Astrid und das Mädchen aus Suhl gehen gern zum Schwimmen.

(4) Astrid, Britta, Christin und das Mädchen aus Wismar waren zusammen im Ferienlager.

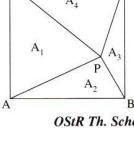
(5) Das Mädchen aus Berlin ist so alt wie Britta, die nicht in Dresden wohnt.

In welcher Stadt wohnt jede dieser fünf Schülerinnen?

Schülerin Nicole Schüler, Zickeritz

6/13

Die Abbildung zeigt ein Quadrat ABCD. Ein innerer Punkt P dieses Quadrates wurde mit den Eckpunkten A, B, C und D verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der dabei entstandenen Dreiecke. Es ist nachzuweisen, daß $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ gilt.



OStR Th. Scholl, Berlin

6/14

Olaf Römer schloß aus der Beobachtung der Zeiten der Verfinsterung des inneren Jupitermondes bei verschiedenen Stellungen der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, daß das Licht 1000 s benötigt, um den Durchmesser der Erdumlaufbahn zu durchqueren. Welche Geschwindigkeit hat das Licht? (Nehmt vereinfacht an, daß sich die Erde auf einer Kreisbahn bewegt. Entnehmt den Erdbahndurchmesser aus einem Tafelwerk. Rechne mit einem auf eine Ziffer gerundeten Wert!)

Dr. W. Riehl, Leipzig

7/8

Bestimme bei folgenden Divisionsaufgaben die fehlenden Ziffern der jeweils sechsstelligen Zahl so, daß der Quotient eine natürliche Zahl ist!

a) 1987❑❑ : 86 b) ❑❑1986 : 87

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/9

Welche durch 25 teilbaren natürlichen Zahlen haben sowohl als Quersumme als auch als Querprodukt die Zahl 10?

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/10

Zeichne ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm. Zeichne zu $\overline{AB}$ eine parallele Gerade, die $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt H bzw. F schneidet. Zeichne zu $\overline{AB}$ eine parallele Gerade, die $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt H bzw. F schneidet. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden HF und EG. Weise nach, daß der Flächeninhalt des Vierecks EFGH unabhängig von der Lage der beiden Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{HF}$ ist!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/11

Anläßlich des Karnevalumzuges sind 225 Schüler einer Schule zum Abmarsch in gleichlangen Querreihen angetreten. Wegen einer Straßenverengung sollen nun vier äußere Längsreihen stehen bleiben und sich dann dem Marschblock, der noch aus mehreren Längsreihen besteht, anschließen. Dabei stellt sich heraus, daß auch nach dieser Umstellung der ganze Marschblock aus gleichlangen Querreihen besteht. Um wieviel Querreihen verlängerte sich der Marschblock?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/12

Erika, Irene und Karin kaufen für insgesamt 17 Mark Briefmarken. Erika kauft 10 Marken der Sorte A und 20 Marken der Sorte B. Irene kauft 40 Marken der Sorte B und 30 Marken der Sorte C. Jedes dieser beiden Mädchen bezahlt dafür gleichviel. Karin kauft 10 Marken der Sorte A und 30 Marken der Sorte C. Sie bezahlt dafür 7 Mark. Welche Werte haben die drei Briefmarkensorten A, B bzw. C?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/13

Der Magdeburger Bürgermeister Otto von Guericke ließ zu beiden Seiten seiner ausgepumpten Kugel je 8 Pferde anspannen, um zu zeigen, wie stark die beiden Kugelhälften durch den Luftdruck zusammengepreßt werden. Mit wievielen Pferden hätte dieselbe Wirkung demonstriert werden können?

Dr. W. Riehl, Leipzig

7/14

Ein 12 m langer und 27 t schwerer Güterwagen mit einem Achsstand von 8 m ist mit einem Räderpaar entgleist. Mit welcher Kraft kann der Wagen durch einen Kran wieder eingegleist werden, wenn der Kranhaken am vorderen Wagenende angreift?

Dr. W. Riehl, Leipzig

8/8

Auf Katrins Frage, wie alt seine Großmutter sei, antwortet Karl: „Das Alter meiner Großmutter ist in ganzen Zahlen eine durch 3 teilbare Zahl. Der Vorgänger ist eine durch 4 und der Nachfolger eine durch 5 teilbare Zahl. Du kannst voraussetzen, daß meine Großmutter älter als 30 und noch nicht 100 Jahre alt ist."

Darauf sagt Kartin: „Also ist der Nachfolger des Alters deiner Großmutter durch 10, aber nicht durch 20 teilbar."

a) Hat Karin recht?

b) Ermittle das Alter von Karls Großmutter!

Claudia, Schwartz, Ilmenau/Thür.

8/9

Gesucht werden drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Für deren Produkt soll gelten:

(1) Es ist eine vierstellige Zahl, die genau zwei gleiche Ziffern hat und

(2) ihre erste Ziffer ist halb so groß wie die dritte, aber größer als die zweite und auch größer als die vierte Ziffer.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/10

Addiert man zur Summe zweiter natürlicher Zahlen ihren Quotienten, so erhält man 35. Es sind alle Lösungen dieser Aufgabe zu ermitteln!

OStR Th. Scholl, Berlin

8/11

Es ist ein Parallelogramm ABCD aus $\overline{AD} = 3$ cm , $\sphericalangle DAH = 70°$ und $\sphericalangle HAB = 10°$ zu konstruieren, wobei H der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ ist.

Die Konstruktion ist stichwortartig zu beschreiben!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/12

Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörende Höhe mit der Länge h = 6 cm teilt die Hypotenuse im Verhältnis 1 : 4.

Es sind der Flächeninhalt und der Umfang dieses Dreiecks zu berechnen.

OSt. J. Kreusch, Löbau

8/13
In einem Geschäft sind täglich 10 Stunden lang 15 Leuchtstoffröhren (mit je 40 Watt + 8 Watt für Vorschaltgerät) und 10 Lampen mit je 100 Watt eingeschaltet. Wie groß ist die Energieaufnahme in 30 Tagen?

Dr. W. Riehl, Leipzig

8/14
Welche Gewichtskraft hat ein 6 m langes Stahlrohr von 55 mm Außendurchmesser und einer Wandstärke von 2 mm?

Dr. W. Riehl, Leipzig

9/8
Die vier Grundziffern der vierstelligen Zahl x^2 stellen vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen dar, die nicht notwendig geordnet sind.
Es ist die Zahl x zu bestimmen, wenn die Quersumme von x^2 18 beträgt. Die Zahl x muß eine natürliche Zahl sein.

Claudia Schwartz, Ilmenau/Thür.

9/9
Anke sucht alle vierstelligen Quadratzahlen z, deren erste und dritte sowie deren zweite und vierte Ziffer einander gleich sind.
Zeigen Sie (ohne Verwendung von Zahlentafeln oder Taschenrechner), daß Anke keine solche Zahl finden kann!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/10
Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Raumdiagonale 3 cm lang ist?

Claudia Möller, Rudolstadt/Thür.

9/11
Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, wenn jede Flächendiagonale seiner Quadratflächen 3 cm lang ist?

Claudia Möller, Rudolstadt/Thür.

9/12
Gegeben sei ein Trapez ABCD mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$. Die Mittellinie schneide die Trapezseiten in E und F. Auf den zueinander parallelen Seiten lege man je einen Punkt (G; H) beliebig fest. Wieviel Prozent der Trapezfläche wird von der Fläche des Vierecks EGFH eingenommen?

André Meckel, Friesen/Vogtl.

9/13
Ein PKW soll von der Anfangsgeschwindigkeit v = 80 km/h auf horizontaler Strecke gleichmäßig durch eine Vierradbremse zum Stillstand gebracht werden, ohne daß die Räder dabei ins Rutschen kommen. Die Haftreibungszahl der Räder beträgt μ= 0,3. Welche kürzeste Bremszeit und welcher kürzester Bremsweg sind möglich?

Dr. W. Riehl, Leipzig

9/14
Ein elektrisches Heizgerät wird erst mit 55 V, dann mit 220 Volt betrieben. Um wieviel steigt die abgegebene Wärme (unter sonst gleichen Bedingungen)?

10/8
In einem Zylinder mit einem Volumen von 3,927 cm^3 sind 5 Kugeln so angeordnet, daß sie sich gegenseitig berühren und auch die Grund- und Deckfläche sowie den Mantel des Hohlzylinders berühren. Wieviel Gramm Stahl braucht man für die Herstellung der Kugeln?

$\left(\rho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}\right)$.

Bert Jüttler, Dresden

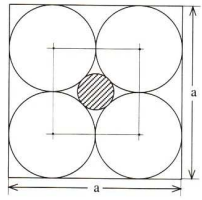
10/9
Einem Kreis ist ein gleichschenkliges Trapez umbeschrieben. Die kürzere der parallelen Seiten hat die Länge des Radius des Kreises.
Es ist der Umfang dieses Trapezes zu berechnen.

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/10
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem schneidet das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ die Gerade mit der Gleichung $y = g(x) = x - 4$.
a) Es sind die Koordinaten der Schnittpunkte zu berechnen.
b) Welche Gleichungen haben die Geraden mit dem Anstieg $-\frac{1}{2}$, die durch diese Schnittpunkte gehen?

Elfriede Krawietz, Wolkenburg/Sa.

10/11
Gegeben sei die folgende Abbildung.
Es ist der Flächeninhalt des schraffierten Kreises durch die Länge a der Quadratseite auszudrücken.



Bert Jüttler, Dresden

10/12
Gegeben sei ein Rechteck ABCD, das einen Flächeninhalt von 40 cm^2 hat. Teilen Sie die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ jeweils in drei gleiche Teile und die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ jeweils in zwei gleiche Teile!
Zeichnen Sie einen Rhombus EFGH, der die Mittelpunkte von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ als Eckpunkte hat und dessen Seiten durch die anderen Teilungspunkte verlaufen!
Es ist der Flächeninhalt des Rhombus EFGH zu ermitteln.

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/13
Welche Auftriebskraft erfährt ein Mensch mit m = 69 kg Gewicht, dessen Volumen V = 69,0 dm^2 beträgt, wenn er im Meer (e_w = 1,03 g / cm^3) untertaucht?

Dr. W. Riehl, Leipzig

10/14
Ein ohmscher Widerstand R = 10 Ω, eine Spule (L = 2H) und ein Kondensator sind in Reihe geschaltet. Wie groß muß seine Kapazität sein, damit im Stromkreis ein Strom von 1 A fließt, wenn an diese Reihenschaltung eine Wechselspannung von 220 V gelegt wird?

Dr. W. Riehl, Leipzig

E/8
Das 3.Glied einer arithmetischen Folge ist $3\frac{1}{4}$, das 12. Glied ist $16\frac{3}{4}$.
a) Es sind die ersten 5 Glieder der Folge aufzuschreiben.
b) Es ist für alle Glieder a_n ein Term f(n) anzugeben.
c) Es ist das 100. Glied der Folge zu berechnen.
d) Es ist die Summe aller Folgenglieder

vom 1. bis zum 100. Glied zu berechnen (100. Partialsumme).

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/9

Jemand verlangt, die Länge des Erdäquators, die wir mit rund 40 000 km angeben, auf ± 5,50 m genau zu messen (größtmögliche Abweichung, die noch als genau gilt).

a) Um welche Strecke dürfte man sich höchstens vermessen, wenn man bei gleicher Genauigkeitsforderung eine Strecke von 1,50 m messen sollte?

b) Um welche Strecke dürfte man sich höchstens vermessen, wenn bei gleicher Genauigkeitsanforderung die Entfernung Erde-Sonne, die wir mit 150 000 000 km angeben wollen, zu bestimmen wäre?

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/10

Eine vierzeilige 117 mm lange Zeitungsanzeige kostet inclusive 14% Mehrwertsteuer 181,40 DM.

Wieviel kostet eine siebenzeilige 83 mm lange Anzeige exclusive Mehrwertsteuer?

Dr. W. Fregin, Naundorf

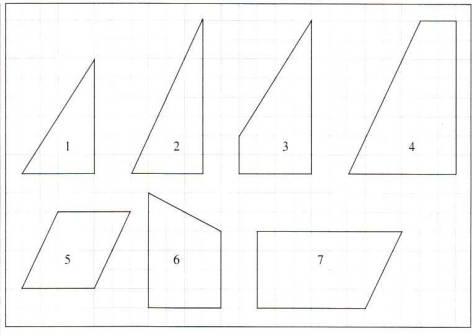
E/11

Zwölf voneinander verschiedene Punkte seien so in einem quadratischen Raster angeordnet, wie die Abbildung zeigt. Wieviele voneinander verschiedene Dreiecke kann man durch Verbinden von jeweils drei dieser Punkte zeichnen? (Wir wollen Figuren nur als gleich ansehen, wenn sie identisch sind, also zusammenfallen).

Dr. W. Fregin, Naundorf

E/12

Welche Entfernung von der Erde muß ein Nachrichtensatellit haben, der über einem bestimmten Punkt des Äquators stillzustehen scheint? (Erdradius 6378 km)



E/12

Setzen Sie aus allen oben abgebildeten Figuren ein Quadrat zusammen!

E/13

Eine Anordnung, bei der die Feldlinien eines magnetischen Feldes (Stärke $B = B_z$) und die Feldlinien eines elektrischen Feldes Stärke $E = E_x$) senkrecht aufeinander stehen, wirkt als Geschwindigkeitsmonochromator für geladene Teilchen, z. B. Elektronen, die sich senkrecht zu den elektrischen und magnetischen Feldlinien mit der Geschwindigkeit v_z bewegen. Bei einer bestimmten Stärke und Orientierung beider Felder ist die resultierende Kraft durch beide Felder auf das bewegte Elektron gleich Null. Stellen Sie für diesen Fall eine Beziehung zwischen den Feldstärken und der Bahngeschwindigkeit auf!

E/14

In ein Silberkalorimeter mit der Masse $m_{Ag} = 0{,}75$ kg und der spezifischen Wärmekapazität $c_{Ag} = 0{,}234$ kJ/kg·K, gefüllt mit $m_w = 1$ kg Wasser ($c_w = 4{,}19$ kJ/kg·K) von $t_1 = 15°$ C, werden $m_{Al} = 0{,}3$ kg Aluminium ($c_{Al} = 0{,}869$ kJ/kg·K) der Temperatur $t_2 = 100°$ C gebracht. Bestimmen Sie die Mischungstemperatur t_m des Wassers!

Dr. W. Riehl, Leipzig

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1993 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 1/93 und 2/93.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
   Mathematische
   Schülerzeitschrift alpha
   Postfach 129
   O-7010 Leipzig
   Die neue Postleitzahl ab 1. 7. lautet 04001 Leipzig.

   Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte Antwortkarte beizulegen, welche Ihr im Mittelteil unserer Zeitschrift findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen!). Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.

(Fortsetzung folgende Seite)

4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Heften später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.

5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und

a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.

b) bei diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.

Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.

6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)).

Diesen Glücklichen winken attraktive Preise.

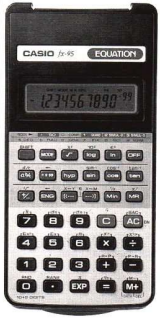
Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß:
22. Juni 1993

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

Preise und Sponsoren des alpha-Schülerwettbewerbes 1993/94

Auch in diesem Jahr haben zahlreiche Sponsoren dazu beigetragen, den alpha-Schülerwettbewerb mit wertvollen Preisen noch attraktiver zu gestalten. Die Gewinner können sich freuen auf:



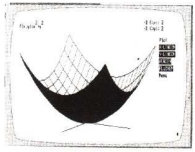
1 Graphik-Rechner FX 7700 GB
4 Technisch-wissenschaftliche Rechner
Die Rechner kommen von Casio Deutschland GmbH, Hamburg

2 Kassetten Sehen – Staunen – Wissen mit 10 großformatigen Sachbüchern vom Gerstenberg Verlag, Hildesheim

5 weitere Bücher aus der Reihe Sehen – Staunen – Wissen

5 Pons Schülerwörterbücher, Englisch
5 Pons Schülerwörterbücher, Französisch,
beide aus dem Klett Verlag für Wissen und Bildung, Stuttgart

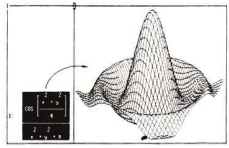
3 Software Programme aus dem Comet Verlag, Duisburg



10 Rechner für Schule und Freizeit (mit unterschiedlicher Ausstattung) von Texas Instruments, 8050 Freising

10 Bücher „Bausteine des Chaos – Fraktale" aus dem Verlag Klett-Cotta, Stuttgart

1 Software-Programm „Derive" (Regeln und Verfahren der Mathematik)
3 Softwareprogramme Ali (Experten- und Tutorensystem für Algebra und Analysis)
Die Programme sind gestiftet von Klett Schulbuchverlag, Stuttgart



Eine Fallunterscheidung bei der Erzeugung bemerkenswerter Körper aus den Platonischen Körpern

Name des Körpers	Räumliche Darstellung	E	F	K	n	α	Legende
Tetraeder		4	4	6	3	≈ 70,5°	E: Eckenanzahl F: Kantenanzahl K: Flächenanzahl α: Flächenwinkel des Körpers n: Anzahl der Seiten einer jeden Seitenfläche des Körpers
Hexaeder		8	6	12	4	90°	
Oktaeder		6	8	12	3	≈ 109,5°	
Dodekaeder		20	12	30	5	≈ 116,6°	
Ikosaeder		12	20	30	3	≈ 138,2°	

Abb. 1

In vielen interessanten Beiträgen wird über das Zusammensetzen geometrischer Figuren berichtet. So findet man auch häufig Betrachtungen zu Körpern, die durch Aufsetzen von Pyramiden auf andere Körper entstehen. Doch Vorsicht! Aufsetzen ist nicht gleich Aufsetzen!

Hiermit wollen wir uns im folgenden befassen. Dazu betrachten wir aber zunächst die Platonischen Körper und einige ihrer Eigenschaften (vgl. Tabelle, **Abb. 1**)

Platonische Körper sind konvexe Körper mit lauter zueinander kongruenten und regelmäßigen n-Ecken als Seitenflächen. Ein Körper wird konvex genannt, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Körpers stets zum Körper gehört (vgl. **Abb. 2**). Regelmäßige n-Ecke zeichnen sich durch kongruente Seiten und Innenwinkel aus. Jeder Platonische Körper besitzt zudem gleich große Flächenwinkel. Als Flächenwinkel werden die Neigungswinkel zweier benachbarter Flächen eines Körpers bezeichnet.

Die Platonischen Körper sind, wie überhaupt alle konvexen Körper, durch den Euler'schen Polyedersatz charakterisiert. Dieser fundamentale Satz beschreibt die Beziehung zwischen E, F und K durch E+F -K=2.

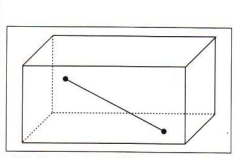


Abb. 2a: konvexer Körper

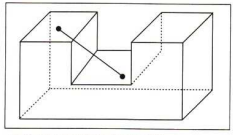


Abb. 2b: nicht konvexer Körper

Aufsetzen gerader Pyramiden

Nachdem wir nun für das bessere Verständnis der weiteren Ausführungen wichtige Begriffe erläutert haben, werden wir auf die 5 Platonischen Körper gerade Pyramiden gleicher Höhe so aufsetzen, daß die Seitenflächen der Platonischen Körper gleichzeitig die Grundflächen der Pyramiden sind. Sodann wollen wir untersuchen, was für neue Körper durch die Konstruktion entstehen. Dies ist nicht so leicht zu beantworten, wie es zunächst den Anschein haben könnte. Beginnen wir zur Beantwortung dieser Frage deshalb mit einer Vorbetrachtung. Dazu greifen wir uns von den Platonischen Körpern das Hexaeder heraus. Auf jede seiner 6 Seitenflächen wird eine Pyramide im beschriebenen Sinn aufgesetzt. Aus Übersichtsgründen beschränken wir uns in der Darstellung (**Abb. 3**) auf 2 dieser Pyramiden, die eine Kante k_1 gemeinsam haben. Anschließend denken wir uns den neu entstandenen Körper durch eine Ebene E so zerschnitten, daß der Schnitt durch die beiden Pyramidenspitzen S_1 und S_2 sowie durch den Mittelpunkt M_1^1 der Kante k_1 verläuft. Die Kantenmittelpunkte M_2, M_3 und M_4 der zu k_1 parallelen Kanten k_2, k_3 und k_4 sind ebenfalls Punkte dieser Schnittebene. Der Winkel α repräsentiert den Flächenwinkel des Hexaeders, β den Neigungswinkel der Seitenflächen der aufgesetzten Pyramiden.

Das so Dargestellte kann auf jeden der weiteren Platonischen Körper übertragen werden. Gehen wir nun von einem verall-

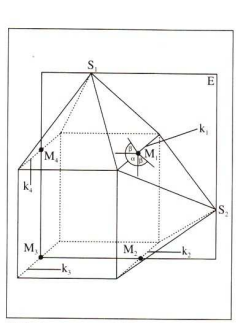


Abb. 3

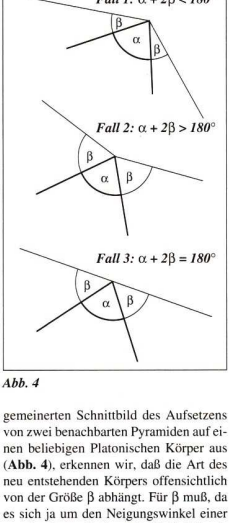


Abb. 4

gemeinerten Schnittbild des Aufsetzens von zwei benachbarten Pyramiden auf einen beliebigen Platonischen Körper aus (**Abb. 4**), erkennen wir, daß die Art des neu entstehenden Körpers offensichtlich von der Größe β abhängt. Für β muß, da es sich ja um den Neigungswinkel einer geraden Pyramide handelt, $0°<\beta<90°$ gelten. Der Flächenwinkel α eines jeden Platonischen Körpers genügt der Beziehung $0°<\alpha<180°$ (vgl. auch Tabelle, **Abb. 1**). Fassen wir diese beiden Beziehungen zusammen, dann gilt auch stets $\alpha+2\beta<360°$. Für die Größen von α und β lassen sich daraus die folgenden 3 interessanten Fälle unterscheiden, siehe **Abb. 4**.

Wir werden feststellen, daß diese Fallunterscheidung zur Beantwortung unserer Fragestellung notwendig, sinnvoll und zweckmäßig ist.

Neu entstehende Körper im Fall 1

Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der neu entstehenden Körper, also E', K' und F' lassen sich recht einfach aus E, K und F mittels unseres verwendeten Konstruktionsprinzips ermitteln. Offensichtlich gilt für E', da durch das Aufsetzen der Pyramiden auf jeder Seitenfläche des Ausgangskörpers eine neue Ecke entsteht und andererseits die Ecken des Ausgangskörpers selbst Ecken bleiben, die Gleichung E'=F+E. Die Anzahl der Flächen F' berechnet sich nach der Beziehung F'=F·n, da über jeder Seitenfläche, also über jedem regelmäßigen n-Eck eines Platonischen Körpers, genau n Seitenflächen des neuen Körpers entstehen. Für die Anzahl der Kanten K' gilt schließlich K'=K+F·n. Dies ergibt sich, da einerseits die Kanten des Ausgangskörpers als Kanten des neuen Körpers erhalten bleiben und andererseits aber noch so viele Kanten wie neu entstehende Flächen hinzukommen. Für E', F', K' gilt somit:

Ausgangskörper	neu erzeugter Körper		
	E'	F'	K'
Tetraeder	8	12	18
Hexaeder	14	24	36
Oktaeder	14	24	36
Ikosaeder	32	60	90
Dodekaeder	32	60	90

Die neu erzeugten Körper sind alle konvex. Ihre Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel kürzer als ihre Basis sind. Der Neigungswinkel der aufgesetzten Pyramiden ist im hiesigen Fall durch $0°<\beta<90°-\frac{\alpha}{2}$ aus $\alpha+2\beta<180°$ bestimmt. Dies läßt für die Größe von ß mehrere Möglichkeiten zu. **Abb. 5** zeigt so den aus dem Hexaeder entstehenden neuen Körper, wenn ß=30° beträgt.

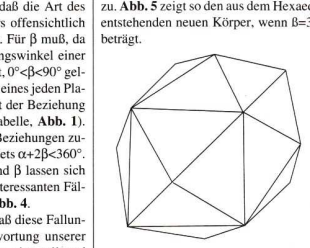


Abb. 5

Neu entstehende Körper im Fall 2

Es läßt sich unschwer das unter Fall 1 aufgezeigte Konstruktionsprinzip hier übertragen. Damit stimmen E', F', K' dieser neuen Körper mit E', F', K' der entsprechenden Körper von Fall 1 überein. Die Seitenflächen der neuen Körper sind erneut gleichschenklige Dreiecke, allerdings sind deren Schenkel nicht kürzer als deren Basis. Die erzeugten Körper von Fall 2 sind nicht konvex und werden in der Literatur infolge ihres sternförmigen Aussehens häufig als Sternkörper bezeichnet. Der Neigungswinkel der Pyramiden ß läßt im zweiten Fall Größen zu, die der Bedingungen $90°-\frac{\alpha}{2}<\beta<90°$ genügen.

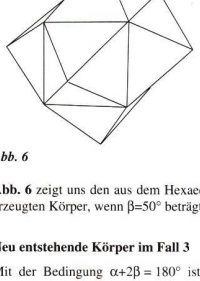


Abb. 6

Abb. 6 zeigt uns den aus dem Hexaeder erzeugten Körper, wenn β=50° beträgt.

Neu entstehende Körper im Fall 3

Mit der Bedingung $\alpha+2\beta=180°$ ist ß durch $\beta=90°-\frac{\alpha}{2}$ eindeutig bestimmt.

Unsere Konstruktion im Fall 3 liefert nun ein ganz bemerkenswertes Resultat. Es verschwinden nämlich die Kanten der Ausgangskörper, da bezüglich ein und derselben Kante eines solchen die Seitenflächen der Pyramiden in einer gemeinsamen Ebene liegen. Wir wollen zuerst wieder Aussagen über die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten der entstehenden Körper gewinnen. Durch das Aufsetzen der Pyramiden entsteht über jeder Seitenfläche eines Ausgangskörpers eine Ecke. Andererseits bleiben aber auch die Ecken des Ausgangskörpers erhalten. Damit ist die Anzahl der Ecken des neuen Körpers durch E'=F+E bestimmt. Die Anzahl der Kanten der neuen Körper läßt sich nach K'=F·n ermitteln, da von jeder aufgesetzten Pyramidenspitze bis zu den Ecken einer Seitenfläche des Ausgangskörpers genau n Kanten verlaufen. Weil der Ausgangskörper zudem F Flächen besitzt, muß K' das Produkt aus F und n sein. Weiter ist F'=K. Somit gilt:

Ausgangskörper	neu erzeugter Körper		
	E'	F'	K'
Tetraeder	8	6	12
Hexaeder	14	12	24
Oktaeder	14	12	24
Ikosaeder	32	30	60
Dodekaeder	32	30	60

Alle so entstandenen Körper sind konvex.

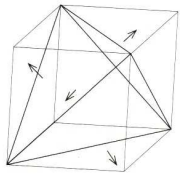


Abb. 7

Aus dem Tetraeder entstand durch diese Konstruktion das (regelmäßige) Hexaeder. Dieser Sachverhalt wird deutlich, wenn man einem Hexaeder ein Tetraeder einbeschreibt (**Abb. 7**) und sich von dieser Darstellung ausgehend, das Aufsetzen gerader Pyramiden auf das Tetraeder vorstellt, was zum Erhalt des Hexaeders führt. Aus den restlichen 4 Platonischen Körpern entstehen jeweils Körper mit kongruenten Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind Rhomben und sind nicht regelmäßig. Auch im Fall 3 wollen wir denjenigen Körper darstellen, der aus dem Hexaeder entstand. (**Abb. 8**)

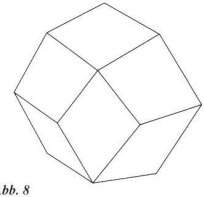


Abb. 8

Weitere Bemerkungen und Hinweise auf Sonderfälle

Wir hoffen gezeigt zu haben, daß Aufsetzen nicht gleich Aufsetzen ist. Um nicht den Rahmen dieses Beitrages zu sprengen, haben wir die neu entstandenen Körper hinsichtlich weniger Eigenschaften beschrieben. Es gäbe noch viel Interessantes darüber zu berichten, wie z. B. über Sonderfälle des Aufsetzens von Pyramiden auf die Platonischen Körper. Auf einen dieser Sachverhalte möchten wir aber noch hinweisen und damit dem interessierten Leser „Futter" für eine weitergehende Beschäftigung mit diesem Thema geben.

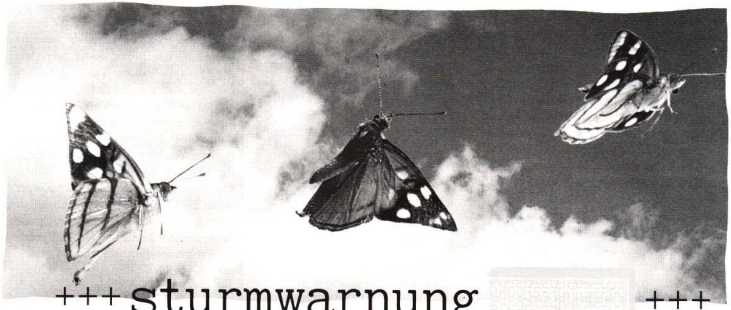
Wird nämlich im zweiten Fall ß so gewählt, daß $\alpha+\beta=180°$ ist, was ja der Bedingung $\alpha+2\beta>180°$ genügt, stellen wir fest, daß dies nur am Oktaeder, am Ikosaeder oder am Dodekaeder als Ausgangskörper der Konstruktion ausführbar ist. Da $\beta<90°$ sein muß, ist α durch $\alpha>90°$ bestimmt. Dies ist nur bei den 3 genannten Körpern der Fall. Der interessierte Leser soll angesprochen sein, einmal die so neu entstehenden Körper näher zu untersuchen. Auf die angegebene weiterführende Literatur sei besonders hingewiesen.

Literatur

Böhm, J.; Quaisser, E.: Schönheit und Harmonie geoemtrischer Formen. Sphäroformen und symmetrische Körper; Akademieverlag Berlin, 1991.

Roman, T.: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1968.

Dr. Frank Heinrich
Friedrich-Schiller-Universität Jena



Chaos weit und breit: eine neue Wissenschaft revolutioniert unser Weltbild. Was dabei ein Schmetterling auslösen kann, ist nicht die einzige Erkenntnis, die Sie überraschen wird. 532 Seiten. 68,– DM.

992 1742
1917
837

Was geschah vor...Jahren?

718 Zwischen 718 und 729 verfaßt der Inder Gautama Siddhata, der im Astronomischen Büro Chinas tätig war, eine Abhandlung über Astronomie und Astrologie. In dieser Abhandlung wird zum ersten Mal ein Symbol für die Null erwähnt, ein Punkt.

1143 Der Engländer Adelard von Bath (11./12. Jh.), der als Übersetzer in Toledo in Spanien tätig gewesen ist, übersetzt die Arithmetik des al-Hwarizmi (um 780 – um 850) ins Lateinische. Diese Übersetzung ist die älteste Übersetzung einer Schrift des berühmten mittelasiatischen Mathematikers in einer europäischen Sprache. Von „al-Hwarizmi" leitet sich das Wort „Algorithmus" her.

1543 In den ersten Monaten des Jahres wird „De revolutionibus" von Copernicus in Nürnberg gedruckt (siehe Text).

1543 Am 24. Mai stirbt Copernicus in Frombork (Frauenburg, Polen).

1543 Der italienische Astronom und Mathematiker Francesco Meurolico (1494 – 1575) stellt in seiner Weltbeschreibung die Erddrehung als unsinnig hin.

1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1946 – 1716) behandelt in einem Brief an den Marquis l'Hospital lineare Gleichungssysteme mit allgemeinen Koeffizienten, verwendet eine Indexschreibweise und führt die Determinanten ein.

1868 Am 22. Mai stirbt Julis Plücker in Bonn (siehe Text).

Julius Plücker

Es ist nicht ungewöhnlich, daß sich Mathematiker auch intensiv mit physikalischen Problemen befassen. Weniger oft kommt es jedoch vor, daß sich ein berühmter Mathematiker in „höherem Alter" noch der Experimentalphysik zuwendet. Das war bei Julius Plücker der Fall. Plücker, 1801 in Elberfeld geboren, wirkte in Berlin, Halle und Bonn. In Bonn wurde er 1835 Professor der Mathematik und 1836 übernahm er dort auch noch zusätzlich die Professur für Physik. In seinen wissenschaftlichen Arbeiten behandelte er auch nach 1836 fast ausschließlich mathematische Fragen. Seine Domäne war die analytische Geometrie. Mit dem Stettiner Gymnasialprofessor Hermann Graßmann (1809 – 1877) und dem Leipziger Sternwartendirektor August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) bildete Plücker das führende Dreigestirn in der Weiterentwicklung der analytischen Geometrie, also der rechnerischen Bearbeitung z. T. auch sehr schwieriger geometrischer Probleme. Seit 1847 wandte sich Plücker auch der Experimentalphysik zu. Er arbeitete über Gasentladungen und entwarf zur Untersuchung dieser Gasentladungen die berühmte Geißlersche Röhre. Die Röhre baute ihm der Bonner Gasbläser und Instrumentebauer Johann Heinrich Wilhelm Geißler (1814 – 1879). Im Jahre 1858 bemerkte Plücker, daß jedes Gas ein charakteristisches Spektrum besitzt und stellte 1859 die Übereinstimmung einzelner Linien des Wasserstoffspektrums mit einzelnen Linien im Sonnenspektrum fest. Plücker gehörte mit diesen Entdeckungen zu den Vorarbeitern der hauptsächlich von Robert Bunsen (1811 – 1899) und Gustav Kirchhoff (1824 – 1887) entwickelten Spektralanalyse, die zu den wichtigsten physikalischen Fortschritten des 19. Jahrhunderts gehörte. Plücker starb am 22. Mai 1868, also vor 125 Jahren, in Bonn.

Vor 450 Jahren erschien „De revolutionibus ..."

Am 24. Mai 1543 starb Nicolaus Copernicus in Frauenburg (Frombork, Polen). An seinem Todestag gelangte ein Exemplar seines in Nürnberg 1543 gedruckten Hauptwerkes „De revolutionibus ..." in Frauenburg an. Copernicus, der seit längerer Zeit schwer erkrankt war, hat das Exemplar nicht mehr gesehen. „De revolutionibus ..." ist einer der wichtigsten Meilensteine auf dem Wege zu einer modernen Naturforschung gewesen, obwohl der lutherische Prediger Andreas Osiander (1498 – 1552) dem Druck ein Vorwort beifügte, in dem er behauptete, Copernicus stelle das heliozentrische Weltbild nur als Hypothese dar. Das von Copernicus verfaßte Vorwort ließ Osiander weg und verfälschte so den Sinn des gesamten Werkes. In „De revolutionibus ..." versuchte Copernicus das Weltsystem mit der Sonne im Mittelpunkt astronomisch und mathematisch zu begründen. Copernicus schrieb: „In der Weltmitte ruht die Sonne. Wer nämlich würde in diesem prächtigsten Tempel (die Welt als Schöpfung Gottes) die Lampe an einen anderen oder besseren Ort stellen, von wo aus sie alles zugleich erleuchten könnte ... So beherrschte die Sonne wie von einem Königsthron aus die umkreisende Familie der Gestirne." Das Werk des Copernicus, schon viele Jahre vor seinem Erscheinen niedergeschrieben, wurde von den Theologen nicht unfreundlich aufgenommen. Erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts wurde die Lehre des Copernicus von beiden Kirchen heftigst angegriffen. Die Behauptungen des Copernicus widersprächen den Aussagen der Bibel und auch der Anschauung. Am 5.3.1616 wurden die Schriften des Copernicus auf den Index der von der katholischen Kirche verbotenen Bücher gesetzt. Das Verbot galt bis 1820. Erst 1992 wurde das Urteil der katholischen Kirche gegen Galileo Galiei (1564 – 1642) vom 22.6.1633 zurückgenommen: er habe die widernatürliche Lehre des Copernicus verteidigt. Über Leben und Werk des Copernicus kann man sich schnell informieren, z. B. in: Dobrzycki, J.; Biskup, M.: Nicolaus Copernicus, Leipzig 1983.

100 Jahre Mitteleuropäische Zeit

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts richtete man sich in jedem Ort nach seiner Sonnenuhr. Doch auch die Sonnenzeit hat ihre Tücken: Der Abstand zwischen zwei Längengraden beträgt im nördlichen Deutschland rund 70 km. Also müßte die Uhr bei einer Fahrt von Ost nach West alle 70 Kilometer um vier Minuten zurückgestellt werden. Nach der Sonnenuhr betrachtet, geht die Uhr eines Fußgängers nach jedem von Ost nach West bzw. umgekehrt zurückgelegten Kilometer um 3,5 Sekunden falsch!

Ferner kommt hinzu, daß das Zeitmaß der Sonne nicht ganz gleichmäßig ist. Die sogenannte Zeitgleichung bewirkt ein Vor- und Nachgehen der Sonnenuhr, das im Laufe des Jahres eine Differenz von rund 31 Minuten zur Folge hat.

Aus diesem Grunde schuf man eine gleichmäßige und exakte „mittlere" Sonnenzeit, zuerst 1780 in Genf, wo der Augenblick des „wahren" Mittags durch die Glocke der Kathedrale verkündet wurde.

In Berlin wurde diese mittlere Ortszeit 1810 eingeführt. Damit hatte man zwar den „Störenfried" Zeitgleichung ausgeschaltet, doch hatten Orte verschiedener geographischer Länge immer noch unterschiedliche Zeiten, was sich im Eisenbahnzeitalter sehr nachteilig auswirken sollte. Reiste man z. B. von Berlin nach Köln, mußte man die Uhr, die nach Berliner Ortszeit ging, in Köln um 32 Minuten zurückstellen. Wer von Erfurt nach Berlin reiste, hatte seine Uhr dort zum 16 Minuaten vorzustellen.

Landeszeit und Zonenzeit

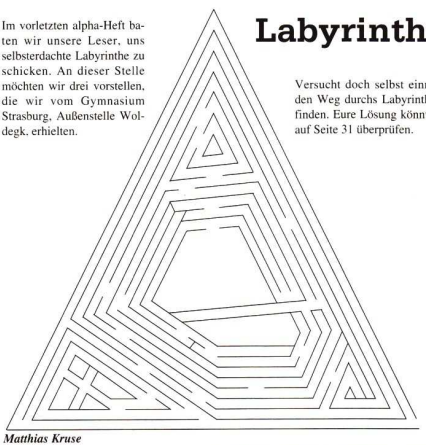
So ist es verständlich, daß einige Länder zur „Landeszeit" übergingen, um größere Gebiete zu einer einheitlichen Zeit zusammenzufassen. Alle Orte richteten ihre Uhren nach der mittleren Ortszeit der Landeshauptstadt, was bereits ein großer Fortschritt war. So wurde bereits am 1. Juli 1891 von der norddeutschen Eisenbahn-Verwaltung die „Zonenzeit" eingeführt. Der gesamte Bahnverkehr richtete sich einheitlich nach der astronomischen Zeit des 15. Längengrades von Stargard in Pommern (jetzt Polen) und Görlitz. 1892 schlossen sich Bayern, Württemberg, Baden, Elsaß-Lothringen und die Norddeutsche Postdirektion an. Am 1. April 1893 war der Tag gekommen, an dem die Mitteleuropäische Zeit (MEZ) in Deutschland dem Wirrwarr ein Ende machte. Später wurde die MEZ auch in Österreich, Ungarn, Italien, Schweiz und in den skandinavischen Ländern eingeführt. Die so geschaffenen Zeitzonen richteten sich jeweils nach der mittleren Ortszeit jedes 15. Längengrades, wie 0° (London), 15° Görlitz, 30° St. Petersburg usw. Hier muß jedoch bemerkt werden, daß aus politischen und wirtschaftlichen Gründen die meridional verlaufenden, streifenartigen Zeitzonen Veränderungen erfahren haben. Hinzu kommen noch die Zeitverschiebungen durch die Einführung der Sommerzeit oder die sogen. Dekretstunde in den GUS-Staaten.

Arnold Zenkert, Potsdam

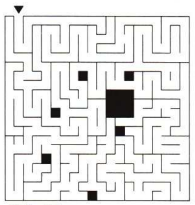
Labyrinthe

Im vorletzten alpha-Heft baten wir unsere Leser, uns selbsterdachte Labyrinthe zu schicken. An dieser Stelle möchten wir drei vorstellen, die wir vom Gymnasium Strasburg, Außenstelle Woldegk, erhielten.

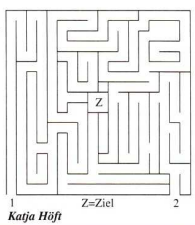
Versucht doch selbst einmal, den Weg durchs Labyrinth zu finden. Eure Lösung könnt Ihr auf Seite 31 überprüfen.



Matthias Kruse



Ulrike Heimer



Katja Höft

Die Olympiade-Ecke
Der bulgarische DRUSCHBA-Wettbewerb

Im Revolutionsjahr 1989 entledigten sich die Völker Bulgariens, Rumäniens, der CSSR ihrer ungeliebten Staatsführungen. Vor vier Jahren auch begann der langsame Zerfall der kommunistischen Partei der UdSSR und die Mauer zwischen der Bundesrepublik und der DDR fiel. Was haben aber all diese geschichtlichen Ereignisse mit Mathematik zu tun?, werdet ihr wohl berechtigterweise fragen.

Nun, genau in diesen Zeitraum fiel auch die Geburt eines Wettbewerbstyps, der in der langen Zeit der Ost-West-Spannungen davor nur in den osteuropäischen Ländern bekannt und dort besonders beliebt war: Der **mathematische Fernwettbewerb**. Angefangen hat es vermutlich in Moskau 1979 mit der ersten Stadt-Olympiade. Im Lauf der Jahre kamen (fast) alle großen Städte der UdSSR hinzu; der Wettbewerb nannte sich nun **Turnir Gorodov** (= Städte-Turnier). Ab den Jahren 1984/85 weitete sich der Kreis der teilnehmenden Großstädte über die Grenzen der ehemaligen sowjetischen Republik hinaus. Aber erst der Einstieg der australischen Hauptstadt Canberra, verlieh dem Turnier im Jahr 1988 eine besondere, in diesem Fall, westliche Note. Zwei weitere Turnierjahre später, 1990, konkurrierte sogar eine deutsche Großstadt, nämlich Hamburg, mit anderen Metropolen der Welt. Ich werde Euch in einer der nächsten Ausgaben von alpha von diesem Wettbewerb noch mehr erzählen.

Ein ähnlicher, noch ganz junger Wettbewerb, ist der 1991 ins Leben gerufene **International Mathematical Talent Search**. Er wird getragen von der Zeitschrift *mathematics and informatics*, die es ebenfalls erst seit dem Frühjahr 1991 gibt. Auch dieser Wettbewerb – über den ich in der Olympiade-Ecke demnächst ebenso ausführlich berichten will – hat es sich zum Ziel gesetzt, ein Heer von Problemlösern, über alle Grenzen hinweg, zusammenzubringen, um sie, vom heimischen Sofa aus, ein wenig den Duft internationaler Wettbewerbsatmosphäre schnuppern zu lassen. Hinter solch weltweiten Bemühungen steckt die handfeste Absicht, die Menschheit auf technischem Gebiet weiterzubringen. Dazu bedarf es aber talentierter junger Menschen auf der ganzen Welt – und eben diese sollen in diesen Wettbewerben gefunden und gefördert werden.

Die Mathematik als Friedensbotschafter

Ein Wort steht immer häufiger solchen Talentfindungen voran. Sein Name lautet **Freundschaft**. Dies ist auch die deutsche Übersetzung für den bulgarischen Wettbewerb *Druschba*. Das Mittelschulzentrum für Mathematik und Informatik in Stara Zagora, veranstaltet seit dem Jahr 1986 alljährlich diesen dreistufigen, internationalen Mathe-Wettstreit. Druschba bietet von allen Fernwettbewerben das am breitesten aufgefächerte Angebot: er sucht sich seine Teilnehmer unter den 10-18jährigen Schülern aus (4.-11. Klasse). Neben den einheimischen, bulgarischen Jugendlichen, sind Schüler aus dem Ausland besonders zur Teilnahme eingeladen. Die weltumspannende Friedensidee züngelt auch als Flammenzeichen auf dem Emblem zum Wettbewerb, das Ihr oben abgebildet sehen könnt. Es ist einer Plastik des Sofioter Bildhauers Christo Haralampiev nachempfunden und ziert ebenso eine Seite der Medaille (in Gold, Silber und Bronze), die erfolgreichen Teilnehmern umgehängt wird.

Der Mann, der den Einfall zu diesem mathematischen Wettstreit hatte, heißt *Ljubomir Ljubenov*. Er ist der Leiter des Schulzentrums in der Bezirkshauptstadt Stara Zagora. Begonnen hat er nach seinem Mathematikstudium an der Universität Plovdiv, als Mathelehrer in Veliko Turnovo und in Stara Zagora. Seit geraumer Zeit gibt Herr Ljubenov auch eine, bisher leider nur in bulgarisch erscheinende, Zeitung heraus, die Mathematik Post. Ältere Leser von alpha werden ihn vielleicht noch in Erinnerung haben. Der sportbegeisterte Mathematiker, der noch aktiv Leichtathletik betreibt hat nämlich für alpha schon verschiedene Artikel geschrieben. Ein Probedurchlauf von Druschba in Stara Zagora 1986 geriet so vielsprechend, daß im heißen Sommer des Folgejahres die Drei-Stufen-Form des Wettbewerbs ausgebrütet wurde. Als erste gastgebende Stadt für die Finalrunde haben die Veranstalter Kazanlak im lieblichen Rosental ausgeguckt, genau dort, wo schon 1967 der erste bulgarische Wettbewerb überhaupt stattgefunden hatte. Hinzu kam, daß die örtliche Nikola Obreschkov-Schule für Mathematik schon eine Menge Erfahrung mit der Durchführung ähnlicher Veranstaltungen hat sammeln können. Erstaunlich viele (ca. 250) Schüler aus der früheren UdSSR, aus Polen, Rumänien, Kuba und natürlich aus Bulgarien, fanden Gefallen an dem mathematischen Dreikampf.

Mit Unterstützung der beiden bulgarischen Lokalzeitungen Septemvri und Schipka vergrößerte sich auch der Teilnehmerkreis an dem Fernwettbewerb. Exakt doppelt soviele Schüler (= 160) wie noch im Vorjahr überstanden die Qualifikationsrunden für das Finale 1988, diesmal in Stara Zagora. Ein gewitzter Einfall der Veranstalter während der 1988er Wettbewerbsrunde, ließ Druschba zu etwas Besonderem unter den Fernturnieren werden. Unter der Überschrift „Probleme von unseren Gewinnern" stellten die Vorjahressieger erstmalig dem Folgejahrgang eigene Aufgaben zur Bearbeitung. Diese Probleme wurden vor Beginn des 3. Druschba-Wettbewerbs im Dezember 1988, von zwei weiteren Tageszeitungen abgedruckt u. a. von der kasachischen Uchitel Kazahstana).

Der Einstieg der Zeitung aus dem Süden der (noch bestehenden) UdSSR geschah

Abb. 1

übrigens nicht zufällig. Auf Initiative des Mathematiklehrerverbands Kasachstans sollte nämlich die Endrunde des 3. Druschba-Turniers in deren Hauptstadt Alma-Ata stattfinden. Auch wenn es im fernen Süden der GUS – noch unter Präsident Michail Gorbatschow – schon reichlich gärte, erfüllte sich auch diesmal die ureigene Bedeutung des Wortes „Druschba". Unterhalb des Alatau, des Hausberges der Millionenstadt Alma-Ata, und 4400 Kilometer von Stara Zagora entfernt, wo Druschba ausgedacht worden ist, fand die kontinentüberspannende Idee ihre friedliche Fortsetzung.

Wie schwer es trotzdem sogar für die friedfertige Mathematik ist, in unruhigen Zeiten völkerverbindend zu wirken, das mußten L. Ljubenov und seine Helfer im vorletzten Jahr miterleben. Ihr könnt den täglichen Nachrichten selbst entnehmen, daß nach dem Zusammenbruch der großen UdSSR, in den südlichen Teilstaaten Mittelasiens, zahlreiche Bürgerkriege toben. Eine dieser unsicheren Gegenden ist Armenien – und eben dort, in deren Hauptstadt Eriwan, sollte die Endrunde des 1992er Wettbewerbs ausgetragen werden. Leider waren die politischen Verhältnisse nicht dazu geeignet, dieses Risiko einzugehen. Somit war nach der 2. Runde im Frühjahr, Schluß. Aber, trotz dieses unerfreulichen Ausganges von Druschba 1992: Heuer wird es mit Sicherheit wieder ein Finale des aktuellen Wettbewerbs geben. Nur der Finalort steht noch nicht fest. Fast hätte ich die Gastgeberstädte der Endrunden 1990 und 1991 vergessen. Hier sind sie: Stara Zagora (1990) und Legniza (Polen, 1991).

Teilnehmer aus der Bundesrepublik gesucht

Wettbewerbsmacher Ljubomir Ljubenov bedauert ein wenig die unausgewogene Verteilung der Teilnehmer auf die verschiedenen Herkunftsländer. Unter den 287 Einsendungen zur 1. Runde des letztjährigen Wettbewerbs kamen – wohl kaum überraschend – 185 aus Bulgarien, aber immerhin auch 62 aus der Volksrepublik China. Nur ganze vier Lösungen trudelten aus der westlichen Welt ein – und die wurden ausgerechnet in Deutschland abgestempelt. Herr Ljubenov wünscht sich deshalb ganz besonders, Druschba hierzulande noch bekannter zu machen. Was hiermit geschehen soll.

An dem bulgarischen Fernwettbewerb können Schüler der 4. bis 11. Klasse aller Nationalität teilnehmen. Pro Runde gibt es drei Aufgaben, die in deutscher bzw. englischer Sprache oder auf Bulgarisch gestellt sind. Die Probleme zur 1. Runde werden jeweils im Sommer verschickt. Wer sie haben möchte, der kann (auf deutsch) an folgende Adresse schreiben: **Mathematikwettbewerb Druschba, 6000 Stara Zagora, Bulgaria, P. O. box 288.**

Die erste Runde beginnt jeweils im Herbst, die zweite Runde folgt in den Monaten Februar/März. Die Punktbesten aus beiden Teilrunden werden zum eigentlichen Endturnier im Sommer eingeladen. Die Endsieger werden ausgezeichnet und alle Wettbewerber erhalten Urkunden. Druschba ist, ähnlich wie unser Bundeswettbewerb Mathematik, ein Hausaufgabenwettbewerb. Wer Lösungen einschickt, erhält rechtzeitig die Aufgaben zur zweiten Runde. Die Ergebnisse und Gewinner werden nach Abschluß der Finalrunde mitgeteilt. Da der Beginn des aktuellen Wettbewerbs 1993 vor dem Erscheinen dieses Heftes liegt, werde ich Euch rechtzeitig an den Startschuß für den 1994er Durchgang erinnern.

Übrigens: Ein deutscher Teilnehmer am 6. Druschba-Wettbewerb war Jörg Ramser, aus dem pfälzischen Alzey, der zur Zeit noch eine siebte Klasse am dortigen Elisabeth-Langgässer-Gymnasium besucht. Dem Computerfan aus der Nähe von Worms, hat der Wettbewerb ganz gut gefallen. Die Aufgaben fand er ziemlich originell, nur deren deutsche Übersetzung liest sich noch etwas holprig. Einmal erschienen die Aufgabentexte sogar in englischer Sprache. Ljubomir Ljubenov hat mich inzwischen gebeten, die deutsche Übersetzung künftiger Aufgaben auf sprachliche Richtigkeit hin zu überwachen. Interessenten für Druschba können sich somit auch an mich direkt wenden.

Die Beispiele, die ich Euch nun vorstellen werde, sind dem vorläufig letzten Wettbewerbsjahr sowie früheren Durchgängen entnommen. Ich habe sie nach Altersjahrgängen geordnet. Die Probleme 1 und 2 stammen von Jörg Ramser. Die Lösungen zu allen Aufgaben sollen Euch erst später verraten werden.

1 Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 werden alle vierstelligen Zahlen gebildet, in denen sich keine Ziffer wiederholt. Ermittle die kleinste und die größte unter diesen Zahlen, sowie die Summe aller so gebildeten Zahlen. (Druschba für 10-jährige)

2 Kann die Zahl 123456789101112..... 100101102 als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden? Die Antwort soll begründet werden! (Druschba für 11-jährige)

3 Ein magisches Quadrat ist ein quadratisch angeordnetes Zahlenschema, in dem die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen gleich ist. Zeige, daß diese Summe in einem 3x3 – Quadrat stets durch 3 teilbar ist. (Druschba für 12-jährige)

4 Setze in den mathematischen TGerm 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 Klammern derart, daß sich
a) der kleinste
b) der größte Wert ergibt.

5 Die drei natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen die Bedingung $abc \cdot (a^3 + b^3 + c^3) = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$. Zeige, daß mindestens eine der Zahlen, ab, bc oder ca eine Quadratzahl ist. (Druschba für 14-jährige)

6 Gegeben sind zwei Kreise. Jeder der beiden geht durch den jeweiligen Mittelpunkt des anderen. Eine Gerade durch einen der Kreisschnittpunkte schneidet beide Kreise entsprechend in einem weiteren Punkt M bzw. N.
In den Punkten M und N werden die Tangenten an die Kreise gelegt. Bestimme den Winkel, den die Tangenten miteinander bilden. (Druschba für 15-jährige)

7 Löse das Gleichungssystem
(1) $yz = 3y + 2z - 8$
(2) $zx = 4z + 3x - 8$
(3) $xy = 2x + y - 1$
(Druschba für 16-jährige)

8 Es seien a, b, c positive, reelle Zahlen. Weise die Gültigkeit der Ungleichung nach:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

(Druschba für 17-18-jährige)

Wenn Ihr von anderen Wettbewerben Aufgaben habt, schickt sie mir zur Veröffentlichung!

Paul Jainta, Schwabach

Lösungen zur Olympiade Ecke „DRUSCHBA“

1. Aufgabe
Lösung:
Die kleinste vierziffrige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5, in der sich keine Ziffer wiederholt, ist 1234; die größte derartige Zahl ist 5432. Die Anzahl der vierziffrigen Zahlen, bei denen genau eine Stelle unverändert bleibt, ist 4·3·2·1=24. Somit ist die Quersumme aller dieser 24 Zahlen 24·(1+2+3+4+5)=360. Die Summe aller Zahlen, die der Bedingung in der Aufgabenstellung genügen, beträgt also 360·(1000+100+10+1)=399960.

2. Aufgabe
Lösung (nach Jörg Ramser, Alzey; Teilnehmer am 6. DRUSCHBA-Wettbewerb):
Da Quadratzahlen nur auf den Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 enden können, gibt es nur zwei Möglichkeiten, damit die Differenz zweier Quadratzahlen auf 2 enden kann: Entweder besitzen die beiden Quadratzahlen die Endziffern 6 und 4, oder sie enden entsprechend auf 1 und 9. Darüber hinaus muß eine Quadratzahl, die auf 6 endet, die vorletzte Ziffer 1, 3, 5, 7 oder 9 haben. Eine auf 4 endende Quadratzahl hat dagegen die vorletzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8. Die Differenz aus zwei Quadratzahlen (mit Endziffer 6 bzw. mit Endziffer 4) kann aber nie auf ... 02 enden. Besitzt andererseits eine Quadratzahl die Endziffer 1, dann kann sie als vorletzte Ziffer nur 0, 2, 4, 6 oder 8 annehmen. Desgleichen gilt für die vorletzte Ziffer einer auf 9 endenden Quadratzahl. Auch hier ist es unmöglich, daß die Differenz zweier Quadratzahlen mit unterschiedlicher Endziffer auf ... 02 endet. Somit läßt sich die Zahl 1234567891011 12 ... 100101102 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

3. Aufgabe
Lösung:

a	b	S-(a+b)
c		
S-(a+c)		

Abb. 1

Sei S die (gleiche) Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen. Es bezeichnen a, b, c drei Einträge in obenstehendem Zahlenschema. Damit lassen sich die 1. Zeile und 1. Spalte durch S -(a+b) bzw. S -(a+c) ergänzen. Die fehlenden Felder lassen sich folgendermaßen auffüllen:
Mittelfeld: S -[S -(a+c)+S - (a+b]= -S+(2a+b+c);
Mittelfeld der 3. Spalte:
S - [c+[-S+(2a+b+c)]]=2S -2a -b -2c= =2S -(2a+b+2c);
Mittelfeld der 3. Zeile:
S - [b+[-S+(2a+b+c)]]=2S -(2a+2b+c).
Für das verbleibende Feld in der rechten unteren Ecke gibt es drei Berechnungsmöglichkeiten:
Zeilensumme:
S -[S -(a+c)+2S -(2a+2b+c)]= -2S+(3a+2b+2c);
Spaltensumme:
S -[S -(a+b)+2S – (2a+b+2c)]= -2S+(3a+2b+2c);
Diagonalensumme:
S -[a -S+(2a+b+c)]=2S -(3a+b+c);
Gleichsetzen liefert: -2S+(3a+2b+2c) =2S -(3a+b+c);
6a+3b+3c=4S
4S=3·(2a+b+c)
Da 3 kein Teiler von 4 ist, muß die Summe S ein Vielfaches von 3 sein.

4. Aufgabe
Lösung:
Den kleinsten Wert erhält man für folgende Beklammerung:

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(1:2\right):3\right):4\right):5\right):6\right):7\right):8\right):9\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$$

$$= \frac{1}{362880}$$

Der größte Wert des Terms ergibt sich bei folgender Klammersetzung:

$$1:\left(\left(\left(\left(\left(2:3\right):4\right):5\right):6\right):7\right):8\right):9\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2} = 90720.$$

5. Aufgabe
Lösung:
Umstellung der Gleichung liefert:
$a^5b^5+b^5c^5+c^5a^5 - abc(a^3+b^3+c^3)=0$
Äquivalente Termumformungen ergeben nacheinander
$a^5b^5+b^5c^5+c^5a^5 -a^4bc -ab^4c -abc^4=$
$a^5b^5 -ab^5c+b^5c^5 -a^4bc+c^5a^5 -abc^5=$
$b^5a(a^2-bc)+bc(b^2c^2-a^4)+c^5a(a^2-bc) =$
$b^5a(a^2-bc)+bc(a^2-bc)(-a^2+bc)+c^5a(a^2-bc)=$
$(a^2-bc)[ab^5 -bc(bc+a^2)+c^5a]=$
$(a^2-bc)[ab^5 -b^2c^2 -a^2bc+c^5a]=$
$(a^2-bc)[b^2(ab-c^2) -ac(ab-c^2)]=$
$(a^2-bc)(b^2-ac)(ab-c^2)=0.$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor verschwindet E
$ab=c^2$ oder $ac=b^2$ oder $bc=a^2$.
Daraus folgt die Behauptung.

6. Aufgabe
Lösung:

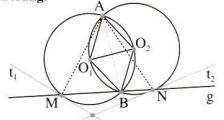


Abb. 2
Wir benutzen die nebenstehenden Bezeichnungen. Beide Kreise haben denselben Radius, da sie durch den Mittelpunkt des jeweils anderen gehen. Das Dreieck $0_1 0_2 A$ ist somit gleichseitig.
$\Rightarrow \sphericalangle A0_1 0_2 = 60°$, $\sphericalangle A0_2 B = 120°$ und wegen Symmetrie $\sphericalangle A0_1 B = 120°$. Zeichnet man die gemeinsame Sehne [AB], ergibt dies nach dem Umfangswinkelsatz

$$\sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AO_1B = 60°$$

$$\sphericalangle ANB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AO_2B = 60°$$

Das Dreieck AMN ist somit ebenfalls gleichseitig. Als Folgerung aus dem Umfangswinkelsatz gilt nun:
$\sphericalangle BMC = \sphericalangle MAB$ (Der Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle BMC$ ist kongruent zum entsprechenden Umfangswinkel $\sphericalangle MAB$ über der Sehne [MB]) und entsprechend gilt auch $\sphericalangle BNC = \sphericalangle NAB$.
$\Rightarrow \sphericalangle MCN = 180° - \sphericalangle BMC - \sphericalangle BNC$ (Winkelsumme im Dreieck MNC)
$= 180° - \sphericalangle MAB - \sphericalangle NAB$
$= 180° - \sphericalangle MAN = 120°$
Die Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich unter dem Winkel $120°$.

7. Aufgabe
Lösung:
Da die linken Seiten der Gleichungen jeweils einen Produktterm haben, liegt es

nahe, links in den drei Teilgleichungen ein Produkt von Linearfaktoren herzustellen.
(1) Umgestellt => yz -2z=3y -8 <=>
z(y-2)=3y -6 -2 <=>
z(y-2) -3(y-2)= -2 <=> (y-2)(z-3)= -2 (1)
Ähnlich findet man (z -3)(x -4)=4 (2)
(x -1) (y -2)=1 (3)
Die linken Seiten von (2) bzw. (3) besitzen je einen Faktor der linken Seite von (1). Multiplikation beider Seiten von (2) mit (3) ergibt:

$$\underbrace{(x-1)(y-2)(z-3)}_{-2}(x-4)=4 \Leftrightarrow -2(x-1)(x-4)=4$$

oder $(x-1)(x-4)=-2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$
Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_1=2$ und $x_2=3$.
Für $x_1=2$ ergibt sich aus (3) $y_1=3$ und aus (2) $z_1=1$.
Für $x_2=3$ ergibt sich aus (3) $y_2=2{,}5$ und aus (2) $z_2=-1$.

8. Aufgabe
Lösung:
Wir führen die Abkürzungen ein: $b+c=2\alpha$, $c+a=2\beta$ und $a+b=2\gamma$.
Damit gilt: $a+b+c=\alpha+\beta+\gamma$; $a=\beta+\gamma-\alpha$; $b=\gamma+\alpha-\beta$ und $c=\alpha+\beta-\gamma$.
Die gegebene Ungleichung lautet dann in Abhängigkeit von α, β und γ folgendermaßen:

$$\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^2}{2\alpha}+\frac{(\gamma+\alpha-\beta)^2}{2\beta}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^2}{2\gamma}\geq$$

$$\geq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Äquivalente Termumformungen ergeben der Reihe nach:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)^2}{\alpha}+\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\beta)^2}{\beta}+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\gamma)^2}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\alpha+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\beta}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\beta+$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\gamma}-4(\alpha+\beta+\gamma)+4\gamma\geq$$

$$\geq\alpha+\beta+\gamma.$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-9(\alpha+\beta+\gamma)\geq 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-9\right]\geq 0$$

Da nach Voraussetzung

$$\alpha+\beta+\gamma>0\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$$

Ausmulitplizieren und Umstellen liefert:

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1\geq 9$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\geq 6\ ^*$$

Nun gilt für beliebige positive reelle Zahlen r, s die Ungleichung

$$\frac{r}{s}+\frac{r}{s}\geq 2$$

denn

$$\frac{r^2+s^2}{sr}\geq 2\Leftrightarrow r^2+s^2\geq 2rs$$

$$\Leftrightarrow r^2-2rs+s^2\geq 0\Leftrightarrow(r-s)^2\geq 0.$$

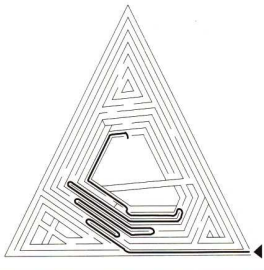
Somit läßt sich Ungleichung (*) nach unten abschätzen:

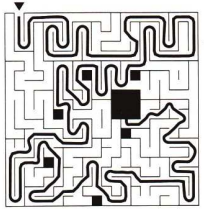
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\geq$$

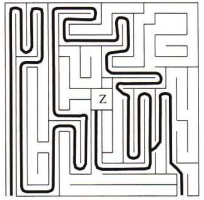
$$\geq 2+2+2=6$$

Dies beweist die Gültigkeit der gegebenen Ungleichung.

Labyrinthe







Marktecke

Kraft & Bewegung

Kraft & Bewegung, Buchreihe Faszinierende Forschung Sehen • Staunen • Wissen; übersetzt von Eva und Hans-Jürgen Schweikorb. Gerstenberg Verlag, Hildesheim 1993. ISBN 3-8067-4801-2; DM 36.–

Der schlichte Titel „Kraft & Bewegung" bekommt erst durch den Untertitel „Von den Kräften um Universum und den Maschinen zu ihrer Nutzung und Verstärkung" den „richtigen Dreh". In diesem zwar nicht besonders seitenstarken Buch (64 Seiten) wird mit Hunderten von eindruckvollen Farbabbildungen anschaulich und spannend über Gesetze informiert, nach denen physikalische Vorgänge ablaufen – mit Versuchsanordnungen und Modellen, praktischen Beispielen und kurzen Abrissen der Wissenschaftsgeschichte. Darauf aufbauend wird an zahlreichen – auch ungewöhnlichen – Beispielen gezeigt, wie sich der Mensch diese Kräfte nutzbar gemacht hat. Fazit: Ein sehr empfehlenswertes Buch, besonders für Jugendliche zwischen 12 und 16 Jahren, die Freude am Stöbern und „Nach-Entdecken" haben.

In der Buchreihe „Faszinierende Forschung" sind bisher die Bände „Materie", „Kraft & Bewegung", „Licht" und „Elektrizität" erschienen. Im Herbst folgen „Chemie", „Energie" und „Evolution".

Ishido-Oldie

Ganz einfach, sieht Domino verdammt ähnlich. Korrekt. Wer sich bei den vielen Dominovarianten auskennt, wird ahnen, daß zunächst etwas anderes als das Spiel in den Vordergrund rückt: die RUHE.

Nachdem ISHIDO auf der Festplatte (knapp 1 MB) installiert ist, atmen wir tief durch. In aller Ruhe lösen wir mit der dreigeteilten Codescheibe das Sicherungssystem, bevor wir uns vor dem Spielbrett befinden. Das Spielbrett besteht aus 8 x 12 Feldern, von denen der äußerste Ring, das Jenseits, farblich hervorgehoben ist. Das Diesseits ist der Innenraum des Spielbretts. Sechs Steine werden auf den gekennzeichneten Feldern aufgedeckt, die restlichen noch aufzunehmenden 66 Steine sind noch im Topf, dem POUCH. Ausgelegt wird nach zwei Regeln: Entweder „Farbe an Farbe" oder „Symbol an Symbol". Am Anfang ist das einfach – ganz klar.

Da das Spielbrett mit jedem Zug mehr bevölkert wird, verringert sich der zur Verfügung stehende Raum für die Planung zunehmend. Steine werden in Kombinationen der beiden Regeln nebeneinander plaziert und endlich, nach vielen Überlegungen hat man ein Ziel vor Augen, eine Viererkombination erscheint möglich. Bonuspunkte winken.

ISHIDO ist im Prinzip sofort spielbar. Doch wer meint, ein einfaches Spiel vor sich zu haben, der wird rasch seine Meinung revidieren. Alleine die Fassung, möglichst alle 72 Steine auf dem Brett zu plazieren zeigt, welche geistigen Resourcen in dieser Spielidee steckten. Dank einer hervorragend gestalteten Spielanleitung erfährt man, wie man ISHIDO „richtig" spielen kann. Nicht die alleine Ablage aller Steine, sondern das Legen von 4ern ist das Bestreben der ISHIDO-Freunde. 4er (Four-Ways) sind Kombinationen, bei denen ein fünfter Stein passend als Mittelpunkt zwischen bereits vier liegende Steine plaziert wird. Rasch ist man von der Idee gepackt und beginnt, die Steine auf dem Brett zu verteilen.

In der Bearbeitung für den PC haben die Programmierer weiter gedacht, als in manch anderer Produktion. Sie haben einen Spielstein-Editor für jene eingebaut, denen weder Farbe noch Symbole der unterschiedlich wählbaren Spielsteine behagt. Das persönliche Spielstein-Set ist rasch gebastelt. Und wer die Spielanleitung wieder einmal verlegt hat, der kann sich per Menü in die Geheimnisse von ISHIDO einweisen lassen. Die Möglichkeit, auf unterschiedlichen Spielbrettern seine Steine zu plazieren, ist ebenfalls erwähnenswert. Holz-, Marmor- oder Elfenbein-Bretter stehen zur Wahl.

Und weil es bei ISHIDO japanisch zugeht, ist das Orakel nicht weit. Hat jemand eine persönliche Frage, kann diese vom Computer-Orakel beantwortet werden. Doch von der Frage bis zur Beantwortung ist es ein weiter Weg. Die Quittung für die eigene Neugier ist die Fortsetzung des Spieles mit einem höheren Schwierigkeitsgrad. Fünf Steine müssen in einer bestimmten Anordnung plaziert werden, erst dann antwortet das Orakel. Orakel hin, Orakel her, diese Beigabe ist ganz lustig – und ein Gag am Rande. Das Spiel ist so voll gepackt, daß es eigentlich keines Orakels mehr bedarf, um in der Hitliste ganz oben zu stehen.

ISHIDO ist ein tolles Spiel. Selbst Computermuffel werden bei dieser geistigen Akrobatik vor den Bildschirm gezwungen. Seit zwei Jahren auf der Festplatte – das ist ein Rekord, den bisher kein anderes Spiel erreichen konnte.

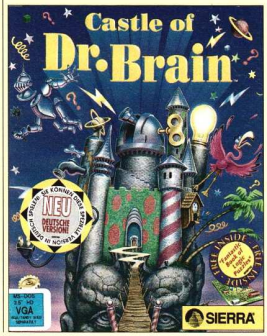
Wie alle Spielideen mit fernöstlichem Kolorit, besticht auch diese durch ihre Schlichtheit, durch die Komplexität, die sich in einer Idee schon nach wenigen Spielzügen zeigt. ISHIDO ist ein Computerspiel, bei dem man in aller Ruhe seinen Wein genießen kann, stilechter wäre es ja mit einem Saki. Den kann man auch mit einem Partner teilen, wenn man ISHIDO nicht alleine spielen möchte.

H. Seitz / -se

ISHIDO, Accolade 1990, Genre: Denkspiel Distributor: United Software, Hardware: PC AT, 640 KByte RAM, VGA, Festplatte, Soundkarte

alpha und BOMICO verlosen Computerspiele

4 „Castle of Dr. Brain" zu gewinnen



Eines der erfolgreichsten Spiele von BOMICO ist „Castle of Dr. Brain" geworden. Das liegt sicherlich auch daran, daß recht hohe Anforderungen gestellt werden und logisch gedacht werden muß. So gilt es in Dr. Brains Schloß Rätsel aus den Bereichen „Bauen und Programmieren von Robotern", „Experimente mit der Zeit", „Entschlüsseln von Geheimcodes", „Tresorknacken", „Reagieren auf schlechte Wortspiele", „Kartographieren der Galaxis" zu lösen.
„Castle of Dr. Brain" ist ein Spiel von **BOMICO – Unterhaltungssoft- und hardware Vertriebs GmbH, Am Südpark 12, 6092 Kelsterbach.**

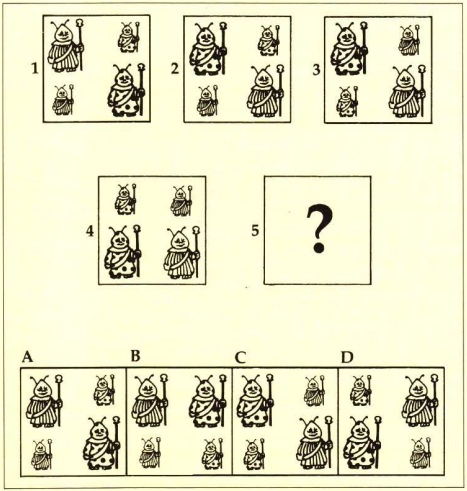
Ganz im Sinne von „Castle of Dr. Brain" möchten wir unseren Lesern Aufgaben stellen, die etwas Nachdenken erfordern – es wäre wohl zu einfach, nach der Anzahl der Buchstaben im Wort BOMICO zu fragen. Sendet Eure Lösungen bis zum 12. Juni bitte an:

Erhard Friedrich Verlag,
Postfach 10 01 50,
3016 Seelze 6,
Redaktion alpha, Herrn J. Ricke.

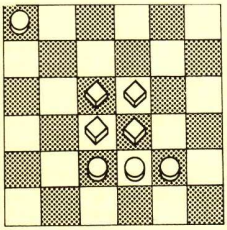
Unter den richtigen Einsendungen werden die Spiele verlost.

Die Aufgaben:

1. Die Marsianer wechseln ihre Plätze beim Tanz (s. rechts). Die ersten vier Tanzfiguren sind aufgeführt. Welche ist logischerweise Figur 5, A, B, C, oder D?



2. Auf dem untenstehenden Brett mit 36 Quadraten liegen 4 runde Steine und 4 Würfel. Wie ist das Brett in 4 Bereiche aufzuteilen, die alle dieselbe Größe und Form haben und alle einen runden Spielstein und einen Würfel haben?



Lösungen der Aufgaben aus Heft 1/93 alpha („Ausgerechnet Mathematik") Die Olympiade-Ecke

1) Dortmund hat mehr als 540 000 Einwohner. Man weiß, daß der Mensch weniger als 540 000 Haare auf dem Kopf hat. Gibt es in Dortmund mit Sicherheit mindestens zwei Bürger mit gleich viel Haaren auf dem Kopf?

Lösung:

Die Aufgabe ist eine einfache Anwendung des sog. „Schubfachprinzips". Stelle dir vor, die Einwohner Dortmunds werden nach der Zahl ihrer Haare sortiert. In Schubfach 1 kommt jemand, der nur 1 Haar auf dem Kopf hat, in Schubfach 2 befindet sich ein Einwohner mit 2 Haaren usw. In der letzten Schublade sitzt jemand mit 540 000 Haaren auf dem Kopf. Da Dortmund mehr Einwohner hat, als es Schubfächer gibt, muß es mindestens eine Nummer geben, in der mindestens zwei Dortmunder hineingehören. Also gibt es mindestens zwei Bürger in Dortmund mit gleich viel Haaren auf dem Kopf.

2) Eine Flasche Wein kostet 10 DM. Der Wein selbst kostet 9 DM mehr als die (leere) Flasche. Wie teuer ist die Flasche?

Lösung:

Die Flasche kostet x DM.
Dann ist für den Wein zu zahlen: x+9 DM
Zusammen gilt: x+x+9=10
2x=1
x=0,5
Die (leere) Flasche kostet 50 Pfennige.

3) Bei Einberufung zu Reserve-Übungen der Bundeswehr hat man im allgemeinen mit 40 % Ausfällen zu rechnen. Dies führt den Inspektor des Heeres zu der naheliegenden (?) Anweisung, dann müsse man „eben 140 % anfordern". Hättet ihr das auch getan?

Lösung:

Da das Verhältnis Ausfälle zu tauglichen Reservisten gleichbleiben soll

$$\left(\frac{40\%}{60\%} = \frac{2}{3}\right)$$

hätte der Heeresinspektor nicht 40 % mehr Reservisten anfordern sollen, sondern $\frac{2}{3}$ mehr $\left(\doteq 66\frac{2}{3}\%\right)$.

4) Das Produkt der Alter von 3 Kindern beträgt 1664. Das jüngste Kind ist mindestens halb so alt wie das älteste. Der Vater ist 50 Jahre alt. Wie alt sind die Kinder? (5 – 6)

Lösung:

Es gilt: $1664=2^5\cdot2^4\cdot13$
$=8\cdot16\cdot13$
Die Alter der Kinder sind 8, 16 und 13. Dies ist die einzige, mit den gegebenen Bedingungen verträgliche Lösung.

5) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es, bei deren Primfaktorzerlegung die Zahl 7 der kleinste Primfaktor ist? (5 – 6)

Lösung:

Es gibt vier Zahlen: 7, 49, 77 und 91. Es gilt nämlich: $7=7\cdot1$, $49=7\cdot7$, $77=7\cdot11$, $91=7\cdot13$.

6) Der Mittelwert einer Menge von 50 Zahlen ist 38. Wenn zwei Zahlen, nämlich 45 und 55, weggelassen werden, berechne für diesen Fall den Mittelwert der übrigen Zahlen (7 – 10).

Lösung:

Für das arithmetische Mittel der 50 Zahlen gilt:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} = 38\,.$$

Läßt man die Zahlen 45 und 55 weg, verbleibt für die restlichen 48 Zahlen: $x_1+x_2+\ldots+x_{48}=38\cdot50-100$;

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{48}}{48} = \frac{50(38-2)}{48} = 37{,}5$$

7) Die Summe aus einer zweiziffrigen Zahl und der Zahl, die man bei Vertauschung der Ziffern erhält, ist eine Quadratzahl. Wie viele solcher Zahlen gibt es? (7 – 10)

Lösung:

Die zweiziffrige Zahl sei $\overline{ab} = 10a + b$
$\Rightarrow$ 10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)
Damit diese Summe eine Quadratzahl wird, muß gelten:
a+b=11.
Für a=2, 3, ..., 9 gibt es 8 Zahlen mit dieser Bedingung.

8) In einer Schublade liegen 28 Taschentücher, 6 sind rot, 5 sind blau und der Rest ist weiß. Wenn Thomas blind ein Taschentuch aus der Schublade zieht, wie viele Taschentücher muß er dann mindestens aus dem Fach ziehen, damit er mit Sicherheit 3 Taschentücher der gleichen Farbe hat? (9 – 10)

Lösung:

Im ungünstigsten Fall sind 7 Griffe in die Schublade erforderlich. Angenommen, Thomas zieht bei den ersten drei Versuchen rot, blau und weiß. Dann sind nach 6 Zügen im ungünstigsten Fall 2 rote, 2 blaue und 2 weiße Taschentücher darunter. Erst der siebte Griff in die Schublade ergibt 3 Taschentücher einer Farbe.

9) Berechne die Summe

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Es ergibt sich eine ganze Zahl! (9 – 10)

Lösung:

Jeder der Summanden ist von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

Durch Erweitern des jeweiligen Bruchterms findet man:

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} = \sqrt{a+1}-\sqrt{a}$$

das heißt, daß alle Summanden den Nenner 1 haben.
Somit vereinfacht sich die Summe zu

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots$$
$$+\sqrt{100}-\sqrt{99} = \sqrt{100} = 10$$

Lösungen

Kisten stapeln

Da genau 1 1/2-mal soviele Kisten verbaut werden, würde das Volumen des neuen Bauwerks eineinhalbmal so groß sein wie das Volumen des derzeitigen Rekordbaus. Nehmen wir als Vereinfachung an, die geometrischen Gestalten beider Bauwerke seinen einander ähnlich. Dann müßten alle Abmessungen – da es sich um ein dreidimensionales Objekt handelt – etwa $\sqrt[3]{11/2} \approx 1,14$ mal so groß werden. Der neue Rekordbau wäre somit um 14 % höher.

Ötzi

Lösung: Wegen 3200m : 80m = 40 beträgt der Luftdruck in der Höhe von 3200 m ü. M. genähert 760 Torr · $0,990^{40}$ ≈ 510 Torr.

Bei einem Luftdruck von 510 Torr siedet Wasser bereits knapp unter 90°C.

Napoleon

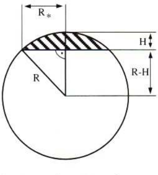
Lösung der 1. Aufgabe: Für den Umfang $u = 2\pi r$ und den Flächeninhalt $A = \pi r^2$ einer Kreisfläche mit dem Radius R gilt

$$u = 2\sqrt{\pi A}$$

Mit A = 549430 km^2 ergibt sich die innere Mauerlänge zu u = 2628 km. Das Volumen der Cheopspyramide ist $a^2h:3$ und das der Mauer (in guter Näherung, falls d sehr klein gegenüber u ist) duh. Aus $a^2h:3 \approx duh$ folgt

$$d \approx \frac{a^2h}{3uh} \approx 0,33\text{m}$$

Lösung der 2. Aufgabe:



Ist H die Höhe dieser Kugelkappe, so gilt $2\pi RH = 549430\ km^2$ und damit H = 13,73 km. Ist R der Radius des Randkreises der Kugelkappe und und U seine Länge, so gilt laut Satz des Pythagoras

$$U = 2\pi R\ = 2\pi\sqrt{R^2-(R-H)^2} =$$

$$= 2\pi\sqrt{H(2R-H)} \approx 2626\,\text{km}$$

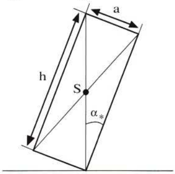
Bemerkungen: Wegen

$$\frac{u-U}{U} \cong 0,076\%$$

führt das Nichtbeachten der Erdkrümmung zu einer vernachlässigbaren Verlängerung der Mauer. Die in Aufgabe 1 errechnete Mauerdicke ist jedoch nur ein grober Näherungswert, weil die Grenzen Frankreichs kein Kreis ist, weil nur rund 85% des Volumens der Cheopspyramide Steine sind (15% sind Mörtel und Hohlräume), weil 1798 die Fläche des durch Eroberungen vergrößerten Frankreich 611100 km^2 maß und weil bereits zu Napoleons Zeiten die etwa 2 m dicke Kalksteinverkleidung der Cheopspyramide bis auf Reste nicht mehr vorhanden war.

Pisa

Lösung der 1. Aufgabe:



Bei dieser Säule muß sich beim Kippen um α = 4,5° um eine Kante der Grundfläche der Schwerpunkt S dieses Körpers, der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen, senkrecht über einem Punkt dieser Grundkante befinden. Demnach muß laut einer maßstäblichen Zeichnung oder laut der Formel h:a = cot 4,5° h:a ≈ 12,7 gelten.

Lösung der 2. Aufgabe:

$$h:d = 58,36\text{m}:\frac{40\text{m}}{\pi} \approx 4,6\,.$$

Geysir

Lösung: Bei fehlendem Luftwiderstand bleibt für jeden Wassertropfen, der nicht mit anderen zusammenstößt, vom Zeitpunkt des Ausströmens bis zum Aufprall auf die Erde die Summe aus Bewegungsenergie und Energie der Lage konstant. An der Erdoberfläche hätte er nur Bewegungsenergie $\frac{m}{2}v^2$, wobei v die Ausströmgeschwindigkeit ist, und beim Erreichen der Steighöhe h = 35 m nur Energie der Lage mgh. Aus

$$\frac{m}{2}v^2 = mgh \quad \text{folgt mit}$$

$$g = 9,81\frac{m}{s^2} \quad v = \sqrt{2gh} \approx 26,2\frac{m}{s}.$$

Da jedoch der Luftwiderstand vorhanden ist, muß die Ausströmgeschwindigkeit des 35 m hoch steigenden Wassers größer als $26,2\frac{m}{s}$ sein.

Das wird Folgen haben!

1 a) 1; 5; 9; 13; **17**; **21**; **25**; 29; **33**
b) 0; 13; 26; 39; **52**; **65**; **78**; 91
c) 2; 5; 8; 11; **14**; **17**; 20; **23**; **26**
d) 0; 0,5; 1,5; 3,0; 5,0; 7,5; 10,5; **14,0**; **18,0**; 22,5; **27,5**

2

						9		
		5				**20**		
	3	10	17	**24**		31	38	**45**
		15				42		
		20				53		
		25				**64**		
0	15		30	**45**	**60**	75	**90**	

3 a)

0	3	6	**9**	**12**	**15**	**18**
2	5				17	20
4		10		**16**		22
6			**15**			**24**
8		**14**		**20**		**26**
10	**13**				**25**	**28**
12	**15**	18	21	**24**	**27**	**30**

b)

0	1	3	6	10	15	**21**	**28**	**36**
	6						33	
3		12				30		**39**
			18		**27**			
6				**24**				42
			21		**30**			
9		**18**				**36**		**45**
	15						**42**	
12	16,5	21	**25,5**	**30**	**34,5**	**39**	**43,5**	**48**

10. alpha-Schachwettbewerb

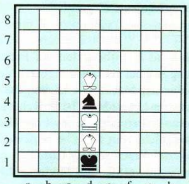
Beim Eindringen in den vielfältigen Beziehungen zwischen Mathematik und Schach, deren sich alpha schon seit einigen Jahren widmet, kommt es zu einem kleinen Jubiläum. Zum 10. Mal ermöglicht alpha allen schachinteressierten Lesern und jenen, die es werden wollen, sich in dieser reizvollen Form des Denksports zu messen und an dem Wettbewerb teilzunehmen.

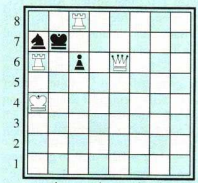
Es gilt wiederum eine oder bis zu acht Schachaufgaben mit wachsendem Schwierigkeitsgrad zu lösen. Aus Anlaß des Jubiläums dokumentieren die ausgewählten Aufgaben, angefangen von den zwanziger bis zu den neunziger Jahren dieses Jahrhunderts, einen Querschnitt durch 80 Jahre Problemschach.
In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.
Um auch weniger geübten Lösern eine Gewinnchance zu geben, wird noch folgendem Verlosungsmodus verfahren: Jeder Leser erhält pro korrekt gelöster Aufgabe ein Los. Dadurch nimmt man bereits mit nur einer gelösten Aufgabe an der Verlosung teil, kann aber mit jeder weiteren Lösung seine Chancen bis zum 8fachen steigern. Teilnehmer bis zu 16 Jahren erhalten pro gelöster Aufgabe 1 bis 4 einen Extrabonus von einem 1/2 Los. Wer alle Aufgaben vollständig gelöst hat, erhält zudem eine Urkunde.

Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 15. Juli 1993 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

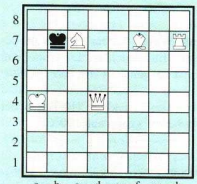
Harald Rüdiger
postlagernd
O-1252 Grünheide

Die Lösungen und die Gewinner werden in alpha 6/1993 veröffentlicht.

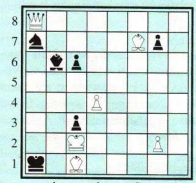

Nr. 1 Matt in zwei Zügen

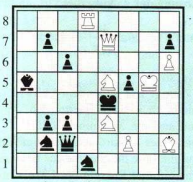

Nr. 2 Matt in zwei Zügen

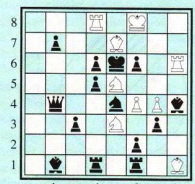
Nr. 3 Matt in zwei Zügen


Nr. 4 Matt in zwei Zügen

Nr. 5 Matt in zwei Zügen


Nr. 6 Matt in zwei Zügen


Nr. 7 Matt in zwei Zügen


Nr. 8 Matt in zwei Zügen

ISBN 3-617-34014-8 Einzelpreis: 3,– DM Einzelpreis im Abo: 2,15 DM