

H 11328 F

Heft 4

August 1993
27. Jahrgang

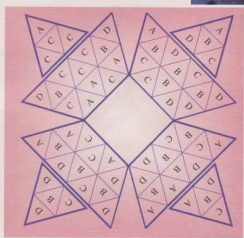
Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

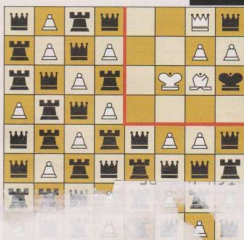
Mathematische
Schülerzeitschrift



**Geo-
metrisches am
Polizei-Stern**



Mathe-Puzzle



**Die Stellung
zwei Aufgaben**



**Tutatis
on Tour**

Problemecke

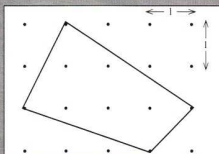
Die erste im letzten Heft eingeführte Problem-Ecke darf natürlich nicht fehlen. Wieder habe ich sechs Aufgaben aus aller Welt zusammengetragen.

J 3. Die Folge „22“ ist selbstbeschreibend, da sie genau zwei Ziffern 2 aufweist. Ebenso ist „31 12 33 15“ selbstbeschreibend, denn in der Ziffernfolge stehen drei Einsen, eine 2, dreimal die 3 und einmal die Ziffer 5. Welche der nachfolgenden Zahlenreihen sind nicht selbstbeschreibend?

- a) 21 32 23 16
- b) 31 12 33 18
- c) 31 22 33 17 19
- d) 21 32 33 24 15 und
- e) 41 32 23 24 15 16 18.

J 4. In einem Brett befinden sich waagrecht nebeneinander und senkrecht untereinander Nägel, jeweils im gleichen Abstand 1.

In der nebenstehenden Figur ist ein Gummiband um vier Nägel gezeichnet, das ein Viereck bildet.



Bestimme seinen Flächeninhalt.

M 3. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Sehnenviereck $ABCD$, von dem bekannt ist: $AB = BC = 10$, $CD = 11$ und $DA = 12$

Beschreibe die Konstruktion und weise nach, daß sie tatsächlich der Aufgabenstellung genügt.

M 4. Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y+z) &= 66 \quad (1) \\ (y+z)(x+y+z) &= 99 \quad (2) \\ (x+z)(x+y+z) &= 77 \quad (3)\end{aligned}$$

O 3. Zwei Zahlen a und b haben den größten gemeinsamen Teiler 84 und das kleinste gemeinsame Vielfache 21 168. Bestimme die Werte $a+b$ und $la-bl$.

O 4. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Winkel 60° an der Spitze. Man zeige: Die Winkelhalbierende eines der beiden Winkel, welche die Höhen h_a und h_b miteinander einschließen, geht durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Ich bin schon neugierig auf eure Lösungen zur ProblemEcke. Wenn ihr Aufgaben von anderen Wettbewerben habt, schickt sie mir zur Veröffentlichung!

Paul Jainta, Schwabach

Zahlenkuriositäten

9·9 = 81
99·99 = 9801
999·999 = 998001
9999·9999 = 99980001
99999·99999 = 9999800001
etc.

4·4 = 16
34·34 = 1156
334·334 = 111556
3334·3334 = 11115556
etc.

7·9 = 63
77·99 = 7623
777·999 = 776223
7777·9999 = 77762223
77777·99999 = 7777622223
etc.

Wir würden
uns freuen,
wenn Ihr uns weitere
Beispiele für
"Zahlenkuriositäten"
senden könntet. Vielleicht
entsteht so eine
kleine Serie.

$$121 = \frac{22 \cdot 22}{1 + 2 + 1}$$

$$12,321 = \frac{333 \cdot 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$1\ 234\ 321 = \frac{4\ 444 \cdot 4\ 444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$123\ 454\ 321 = \frac{55\ 555 \cdot 55\ 555}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$12\ 343\ 654\ 321 = \frac{666\ 666 \cdot 666\ 666}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$1\ 234\ 567\ 654\ 321 = \frac{7\ 777\ 777 \cdot 7\ 777\ 777}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$123\ 456\ 787\ 654\ 321 = \frac{88\ 888\ 888 \cdot 88\ 888\ 888}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$12\ 345\ 678\ 897\ 654\ 321 = \frac{999\ 999\ 999 \cdot 999\ 999\ 999}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$\begin{aligned}111222333444555666777889 \cdot 3 &= 333667000333667000333667 \\ 111222333444555666777889 \cdot 333 &= 37037037037037037037037037\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+8+1 &= 9 \\ 12+8+2 &= 98 \\ 123+8+3 &= 987 \\ 1234+8+4 &= 9876 \\ 12345+8+5 &= 98765 \\ 123456+8+6 &= 987654 \\ 1234567+8+7 &= 9876543 \\ 12345678+8+8 &= 98765432 \\ 123456789+8+9 &= 987654321\end{aligned}$$

Auszüge aus: The Australian Mathematics Teacher 43 (1987) 1.

7·7 = 49
67·67 = 4489
667·667 = 444889
6667·6667 = 44448889
66667·66667 = 4444488889
666667·666667 = 444444888889
etc.

1+1 = 2
11+11 = 121
111+111 = 12321
1111+1111 = 1234321
11111+11111 = 123454321
111111+111111 = 12345654321
1111111+1111111 = 1234567654321
11111111+11111111 = 123456787654321
111111111+111111111 = 1234567897654321

Inhaltsverzeichnis

Problemecke 2

Aufgaben aus aller Welt von *Paul Jainta*

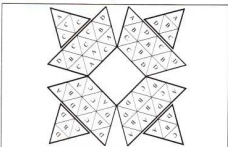
Zahlenkuriositäten 2

Zeitungsschnipsel 4

Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol“, ein „Zerbrechlicher Rekord“, Überlegungen zum „Vorsorgespargen“ und zu einer „Zeitungssente“.

Mathematisches Puzzle 6

erdacht von *H. Neugebauer*.



Das Phänomen der Katzenaugen und die Drehspiegelungen 7

Überlegungen zu diesen speziellen Reflexionseigenschaften von *Erhard Quaisser*.

Alphons logische Abenteuer Sprachecke..... 9

Was geschah vor ... Jahren? 10

Die Entdeckung der Quaternionen durch Hamilton und Erinnerungen an August Ferdinand Möbius von *H.-J. Ilgauds*.

Lösungen Alphawettbewerb 2/93 Teil II ... 12

Spielstärkevergleich22

Holgers Borchers beschreibt, wie die Berechnung der Wertzahlen im Schach erfolgt.

Mode und Mathematik 24

Berechnungen zur Erstellung eines Wickelrocks von *Johanna Heller*.

Knobeleyen 25

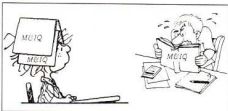
Primzahlen, Tennis und Bartschtsch sind u. a. Inhalte von *Werner Keyms* Knobeleyen.

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu bedenken? Teil II 26

Fortsetzung aus dem letzten Heft von *W. Träger*.

International Mathematical Talent Search 28

Die weltweite Suche von mathematischen Talenten vorgestellt durch *Paul Jainta*.



32. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe .. 30

Marktecke 32

Zahlenrätsel für Kenner 33

Der Sonnenring 34

Neben dem Pendelquadranten und dem Sextanten ist der Sonnenring eine weniger bekannte Möglichkeit zur Bestimmung der Sonnenhöhe zeigt *Arnold Zenkert*.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag im Verber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholz und Herbert Kästner.

Redaktion:

Jürgen Rieke, Tel.: (0511) 4 00 04-42

Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Redaktionskollegium:

Sir F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), Ol. Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pleizhausen), Sir H.-J. Kerber (Neustrelitz), OSIR J. Lehmann (Leipzig), Ol. Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), Sir H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OSIR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader

Anzeigenabwicklung:

Telefon: (0511) 4 00 04-23

Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990

Vertrieb und Abonnement:

Telefon: (0511) 4 00 04-52/53/85

Verlag:

Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,

Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Telefon: (0511) 4 00 04-0

Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage. © Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH

Gestaltung: Véronique Spanacello

Druck: Scherndruck, Hannover

ISBN 3-617-34016-4

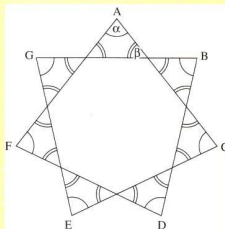
Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol“

Das Polizei-Abzeichen Kaliforniens, des zweitgrößten Staates der USA, zeigt die römische Göttin Minerva (Göttin der Künste und des Handwerkes) mit einem Grizzly-Bären.



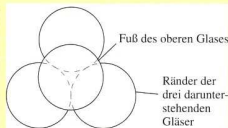
Aufgabe:
Wie groß sind die Winkel α und β der

abgebildeten Figur, wenn A, B, C, D, E, F, und G die Eckpunkte sind?
Dr. W. Träger, Döbeln



Zerbrechlicher Rekord

In der am Ostermontag ausgestrahlten MDR-Fernschendung „Außenreiter – Spitzenreiter“ wurde ein origineller Rekord aufgestellt. In einem Dresdener Hotel gab es die größte Sektglaspyramide Deutschlands zu bestaunen. Wie auf dem Foto zu erkennen ist, wurden die Gläser derart zu einer „Dreiecks-Pyramide“ gestapelt, daß jedes Glas der höheren Schichten auf genau drei Gläsern der jeweils niedrigeren „Etage“ stand:



Wieviele Gläser wurden zum Bau der 18stöckigen „Pyramide“ gebraucht?
Ralf Laue



Vorsorgesparen

Sparkassen bieten ihren Kunden auch das Vorsorgesparen an. Bei der Kreissparkasse Döbeln ist dies unter folgenden Bedingungen möglich:

Monatliche Raten ab: 50,- DM

Laufzeit: 3 – 25 Jahre

Zinssatz: 5 %

zusätzlich einmalige S-Prämie auf die Summe der eingezahlten Sparbeträge beim Vertragsende abhängig von der Laufzeit:

1 – 3 Jahre	keine
4 – 6 Jahre	5 % Prämie
7 – 9 Jahre	10 % Prämie
10 – 14 Jahre	20 % Prämie
15 – 19 Jahre	30 % Prämie

20 – 24 Jahre	40 % Prämie
25 Jahre	50 % Prämie

1. Aufgabe: Bürger X läßt sich als Teilnehmer am Vorsorgesparen am 1. jeden Monats per Dauerauftrag durch die Kreissparkasse Döbeln von seinem Girokonto automatisch die Rate $R = 50$ DM auf sein Vorsorgespargbuch umbuchen, erstmals am 1. 1. 93.

a) Welcher Sparbetrag K_1 , die Zinsen eingeschlossen, doch ohne die am 1. 1. 94 eingebuchte 50 DM Rate, befindet sich auf seinem Vorsorgespargbuch am 1. 1. 94?

b) Nach einer Laufzeit von 20 Jahren beendet Bürger X mit dem Stichtag 1. 1. 2013 sein Vorsorgespargbuch. Welcher Geldbetrag befindet sich nach dem Ein-

buchen der Prämie P_{20} am 1. 1. 2013 auf seinem Vorsorgespargbuch?

2. Aufgabe: Bürger X hat sich vor dem Abschluß seines Vorsorgesparvertrages (Siehe 1. Aufgabe!) die folgende Frage beantwortet: Mit welchem Zinssatz $p\%$ müßten die 20 Jahre lang jeweils am Monatsanfang auf ein Sondersparbuch eingezahlten Monatsraten $R = 50$ DM verzinst werden, damit sich danach auf dem Sondersparbuch, auf das keine Prämie eingezahlt wird, das gleiche Guthaben befindet wie auf dem Vorsorgespargbuch (des Bürgers X) nach 20 Jahren?

p^* ist, gerundet auf eine Dezimalstelle nach dem Komma, zu ermitteln!

Dr. W. Träger, Döbeln

Eine Zeitungsgente

Eine Zeitung schrieb im Dezember 1992 über den Planetoiden Toutatis:

.....-Toutatis fliegt in 100 000 km Entfernung an der Erde vorbei: Er saugt mit seiner Anziehungskraft das Wasser aus dem Meer. Menschen ertrinken in gigantischen Flutwellen. - Toutatis zieht in 1000 km Entfernung vorbei: Er hebt die Erde aus der Achse, sie taumelt, die Sonne steht in einer anderen Bahn, Klima-Kollaps. ...“ Um diese Zeilen mit einer Aufgabe als Schauermärchen zu entlarven, nehmen wir eine zur gleichen Zeit veröffentlichte dpa-Meldung aus Genf zur Kenntnis:

Mond ärgert Atomphysiker

Genf (dpa). Der Mond ärgert die Wissenschaft: Seine Gezeitenkräfte stören die Experimente der Kernphysiker im Europäischen Laboratorium für Teilchenphysik (CERN) in Genf. Lange hatten die Wissenschaftler über die Ursachen minimaler Schwankungen in den Umlaufbahnen von Elektronen und Positronen in dem CERN-Beschleuniger LEP gerätselt. Wie CERN mitteilt, konnten die Abweichungen auf winzige Deformationen der Erdkruste zurückgeführt werden, die im selben Rhythmus wie Ebbe und Flut schwanken.

· Gravitationsgesetz: Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 , die voneinander den Abstand r haben, ziehen sich gegenseitig mit der Kraft

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

an, wobei

$$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

die Gravitationskonstante ist.

· Für die kugelförmige Erde gilt:

Radius ... $r_E = 6370 \text{ km}$

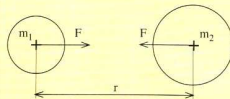
· Für den (Erd-)Mond (Kugelgestalt) gelten:

Mittlere Entfernung von der Erde

$e = 3,844 \cdot 10^5 \text{ km}$

Radius $r_M = 1,738 \cdot 10^3 \text{ km}$

$$\text{Dichte } \delta_M = 3,341 \cdot \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$



Aufgabe: Wie groß muß der Radius R eines kugelförmigen Himmelskörpers sein, der beim Vorbeifliegen in 200 km Entfernung von der Erdoberfläche auf eine Masse m_0 am ihm nächstgelegenen Erdpunkt die gleiche Anziehungskraft ausübt wie der Erdmond auf eine gleiche Masse

Klarer Blick auf „Toutatis“

Pasadena (dpa). Die bisher genauesten Aufnahmen eines Asteroiden haben US-Wissenschaftler mit einer Radarantenne gemacht. Es handelt sich dabei um den Himmelskörper „4179 Toutatis“, der sich der Erde Anfang Dezember bis auf etwa 3,5 Millionen Kilometer genähert hatte. „Das ist unser erster klarer Blick auf einen der vielen tausend Asteroiden, die die Bahn der Erde kreuzen können“, sagte Projektleiter Steven Ostro vom „Jet Propulsion Laboratory“ in Pasadena (Kalifornien). Die Aufnahmen hätten ergeben, daß „Toutatis“ aus zwei miteinander verbundenen, unregelmäßig geformten Kernen bestehe. Die Oberflächen der im Durchmesser etwa vier und 2,6 Kilometer großen Hälften seien von Kratern und Zerklüftungen gekennzeichnet, hieß es. Das deute auf Zusammenstöße mit anderen Objekten hin.

DAZ Döbeline Allgemeine Zeitung Montag, 8. Februar 1993

m_0 am ihm nächstgelegenen Punkt der Erde? Dieser Himmelskörper habe die gleiche Dichte wie der Erdmond.

Dr. W. Träger, Döbeline

Die Erde entging fast unbemerkt der Katastrophe

Washington (AP). Gestern um 6.35 Uhr MEZ ist die Erde nach galaktischen Maßstäben nur knapp einer Katastrophe entgangen. Zu diesem Zeitpunkt raste in einer Entfernung von 3,5 Millionen Kilometern der Asteroid „Toutatis“ mit einer Geschwindigkeit von rund 140 000 Stundenkilometern an uns vorbei. Nach Angaben von Astronomen ist das im All nur eine Haaresbreite.

Ein direkter Einschlag des Asteroiden würde nach Angaben der Fachleute eine globale Katastrophe auslösen. „Er würde genügend Material aufwerfen, um die Sonne zu verdunkeln und die Pflanzen absterben zu lassen“, sagte der Washingtoner Astronom Don Yeomans.

„Er hätte alles ausradiert, Millionen von Menschen wären umgekommen“, fügte er

hinzu. Aber die Gefahr ist noch nicht vorüber: In zwölf Jahren wird der kleine Planet erneut und dann noch näher an der Erde vorbeikommen.

Der kleine Planet ist auf einer Umlaufbahn, die die der Erde alle vier Jahre in unterschiedlichen Entfernungen kreuzt, sagte Yeomans. 1996 und 2000 werde dies in großer Entfernung sein. Aber 2004 kommt „Toutatis“ auf 1,6 Millionen Kilometer an die Erde heran, die geringste Entfernung für die nächsten 200 Jahre, sagte Yeomans.

Die Energieexplosion, die bei einem Einschlag auf der Erde eintreten würde, sei schwer vorstellbar, sagen Fachleute. Nach Angaben des Astronomen Eugene Shoemaker würde „Toutatis“ einen Krater von fast 50 Kilometern Durchmesser reißen. Einiges Material würde verdampfen während der in die Atmosphäre geschleuderte Staub dort sehr lange blei-

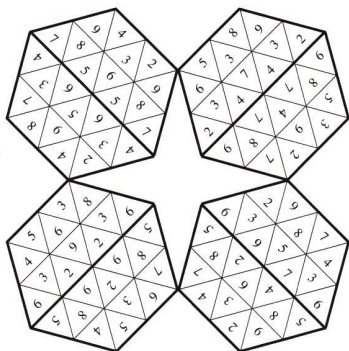
ben würde. Falls der Asteroid einen Ozean trafe, würde gigantische Flutwellen praktisch alle Kontinente treffen und weit in das Landesinnere schweben.

„Toutatis“ ist nicht der einzige Asteroid, der die Erde bedroht. „Es gibt etwa 3000 Objekte von einem Kilometer Durchmesser oder mehr, die die Umlaufbahn der Erde kreuzen“, sagte Brian Marsden von Astrophysischen Observatorium in Cambridge, Massachusetts. „Und es gibt viele in dieser Größe, die wir nicht einmal kennen. Früher oder später wird einer davon auf der Erde einschlagen. Dann wird es gefährlich für die Zivilisation“, sagte Marsden. Nach einer Theorie gab es vor 65 Millionen Jahren schon einmal einen verheerenden Asteroideneinschlag auf der Erde, der das Aussterben der Dinosaurier verursacht haben soll.

„Döbeline Allgemeine Zeitung“ 9.12.92

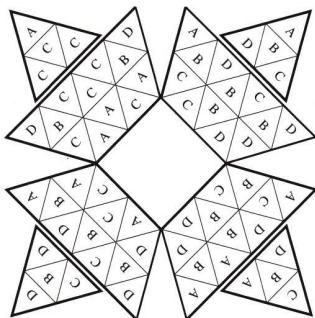
Mathematisches Puzzle (I)

Die abgebildeten 8 Trapeze sind in den 4 Sechsecken so zusammengefügt, daß die Summe der an den stark ausgezogenen Seitenlinien sich gegenüberliegenden Zahlen jeweils 11 ergibt. Die Trapeze sind auszuscheiden und in dieses Sechseck so zusammenzusetzen, daß die Summe der an den Seitenlinien sich gegenüberliegenden Zahlen wiederum 11 ergibt.



Mathematisches Puzzle (II)

Die 4 Trapeze und 4 Dreiecke sind so zusammengesetzt, daß sich an den stark ausgezogenen Linien immer gleiche Buchstaben gegenüberliegen. Die Trapeze und Dreiecke sind auszuscheiden und zu einem großen Dreieck zusammenzusetzen, so daß sich an den gegenüberliegenden Seiten jeweils wieder gleiche Buchstaben gegenüberliegen.



H. Neugebauer

Das Phänomen der Katzenaugen und die Drehspiegelungen

„Katzenaugen“ sind eine bekannte Erscheinung. Sie haben die Eigenschaft, einen Lichtstrahl stets zum Aussender hin zu reflektieren. Wir finden sie insbesondere an Fahrzeugen und Verkehrsschildern. Aber auch Personen, die bei Dunkelheit im Straßenverkehr rechtzeitig bemerkt werden sollen oder möchten, tragen an ihrer Kleidung oder Ausrüstung reflektierende Streifen mit „Katzenaugen“.

Wie ist diese spezielle Reflexionseigenschaft möglich, die offenbar unabhängig von der Lage zwischen Lichtquelle und den „Katzenaugen“ ist? Der geometrische Sachverhalt lässt sich im Rahmen spezielle Abbildungen im Raum, den *Drehspiegelungen*, einordnen.

Begriffsklärung

Die beiden Bestandteile „Dreh-“ und „-spiegelung“ des Wortes führen uns direkt zu einer genauen Beschreibung des Begriffs.

Eine *Drehung* im Raum ist immer eine Drehung um eine Achse. Wir begegnen derartigen Abbildungen bei vielen Drehvorgängen im täglichen Leben. Bei einer Drehung um eine Achse a liegen ein Punkt P außerhalb von a und sein Bildpunkt P' auf einem gemeinsamen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse a liegt und dessen Kreisebene senkrecht zu der Achse a ist. Die Drehung lässt sich beschreiben durch die Achse a und den

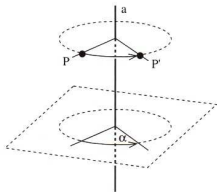


Abb. 1

Drehwinkel α , den man in einer zu a senkrechten Ebene durch eine übliche Winkelmessung bestimmen kann (Abb. 1). Die Punkte auf der Achse a werden auf sich abgebildet.

Der zweite Bestandteil des Wortes bezieht sich auf eine *Spiegelung an einer Ebene* ϵ . Auch diese Abbildung ist gut bekannt. Die Punkte der Ebene ϵ , an der gespiegelt wird, bleiben fest. Und das Bild P' jedes anderen Punktes P lässt sich in bekannter Weise konstruktiv beschreiben: Man fällt das Lot von P auf die Ebene ϵ , bestimmt den Schnittpunkt F dieses Lotes mit der Ebene und erhält das Bild P' als denjenigen Punkt, für den F der Mittelpunkt der Strecke PP' ist (Abb. 2).

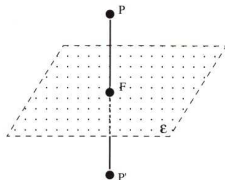


Abb. 2

Eine *Drehspiegelung* ist nun einfach die Nacheinanderausführung einer Drehung ρ um eine Gerade a und der Spiegelung an einer Ebene ϵ , die zu a senkrecht ist. (Man beachte, daß als Nebenbedingung $a \perp \epsilon$ gefordert wird! Man überlege ferner, daß es unter diesen Voraussetzungen gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge Drehung und Spiegelung nacheinander ausgeführt werden.)

Überlegungen zu Drehspiegelungen

1. Hat diese zusammengesetzte Abbildung neben der Drehung und der Ebenenspiegelung überhaupt eine eigenständige Bedeutung? Das wollen wir an einem einfachen praxisorientierten Sachverhalt zeigen:

Die Abb. 3 veranschaulicht das Kern-

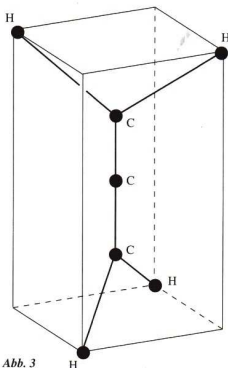


Abb. 3

gerüst eines Allen-Moleküls, bestehend aus 3 C und 4 H-Atomen. Um die räumliche Lage der Atome zueinander deutlicher auszuweisen, ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche zur Hilfe genommen worden.

Von Interesse ist in der Physik und Chemie, durch welche Bewegungen des Raumes dieses Kerngerüst auf sich abgebildet werden kann. Dabei müssen natürlich C-Atome wieder auf C-Atome und entsprechend H-Atome auf sich zu liegen kommen.

Man erkennt leicht, daß die Nacheinanderausführung einer Drehung ρ von 90° um die Gerade a , die die C-Atome enthält und die anschließende Spiegelung σ an derjenigen Ebene ϵ , die senkrecht zu a ist und durch das mittlere der C-Atome geht, das Kerngerüst des Allen-Moleküls auf

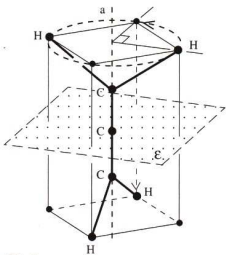


Abb. 4

sich abbildet (Abb. 4). Die Drehspiegelung $\rho = \sigma \circ \rho$ ist hier also eine sogenannte *Deckabbildung*. (Mit „o“ beschreiben wir die Nacheinanderausführung.) Aber weder die Drehung ρ noch die Spiegelung σ selbst besitzen diese Eigenschaft!

2. Wenn man zwei Deckabbildungen einer Figur F nacheinander ausführt, dann erhält man wieder eine Deckabbildung von F . Wir wollen hier konkret die Nacheinanderausführungen der obigen Drehspiegelung ϕ mit sich betrachten und sehen, zu welchen Deckabbildungen des Allen-Moleküls wir dabei kommen. Da es bei der Drehspiegelung ϕ nicht auf die Reihenfolge der Ausführung der Drehung und Spiegelung ankommt, ergibt die Nacheinanderausführung $\phi \circ \phi$ von ϕ mit sich selbst

$$(\sigma \circ \rho) \circ (\sigma \circ \rho) = \sigma \circ \sigma \circ \rho \circ \rho.$$

Bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung σ mit sich selbst wird aber jeder Punkt auf sich abgebildet, und damit ist $\sigma \circ \sigma$ die identische Abbildung. Folglich ist $\phi \circ \phi = \rho \circ \rho$, also die Drehung um a mit dem Drehwinkel $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Führen wir nochmals die Drehspiegelung ϕ aus, dann erhalten wir $\phi \circ \phi \circ \phi = \rho \circ \phi$.

also eine Drehspiegelung, die aus der Drehung um a mit 270° und der Spiegelung besteht. Dieser Drehung um 270° erzeugt offensichtlich von jedem Punkt das gleiche Bild wie die Drehung um a , die entgegengesetzt zum Drehsinn von ρ um 90° ausgeführt wird. (Aus diesem Grunde sind diese beiden Drehungen als Abbildungen gleich.)

Wird nochmals die Drehspiegelung ϕ ausgeführt, dann wird schließlich jeder Punkt auf sich abgebildet. Die Nacheinanderausführungen $\phi \circ \phi \circ \phi \circ \phi$ ist die identische Abbildung.

3. Gibt es weitere Deckabbildungen dieses Moleküls, etwa Ebenenspiegelungen? 4. Im Raum gibt es zwei verschiedene Orientierungssinne, die sich durch eine Rechts- bzw. Linksschraube charakterisieren lassen.

Bei der Drehspiegelung geht die Orientierung in die entgegengesetzte über. Der Drehteil lässt zwar die Orientierung unverändert, doch bei der Spiegelung an einer Ebene wird sie vertauscht: Das Bild einer Rechtsschraube ist eine Linksschraube (Abb. 5).

5. Wie viele Drehspiegelungen gibt es, die ein regelmäßiges Tetraeder auf sich abbilden?

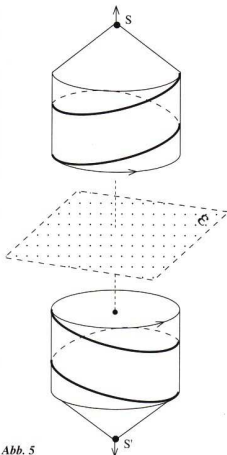


Abb. 5

6. Die Spiegelung an einem Punkt Z im Raum lässt sich konstruktiv wie in der Ebene erklären: Der Punkt Z bleibt fest und jeder andere Punkt P wird auf denjenigen Punkt P' abgebildet, für den Z der Mittelpunkt von PP' ist.

Es ist recht einfach zu erkennen, daß jede Punktspiegelung (im Raum) eine Drehspiegelung ist. Wir wählen dazu eine Ebene ϵ durch Z und eine Gerade a durch Z , die zu ϵ senkrecht ist. Nun drehe man um a mit 180° und spiegele anschließend an der Ebene ϵ . Jeder Punkt P , der weder auf a noch auf ϵ liegt, wird auf denjenigen Punkt P' abgebildet, für den Z Mittelpunkt von PP' ist. (Abb. 6). Im Gegensatz zur ebenen Geometrie ist also eine Punktspiegelung im Raum eine Bewegung, die die Orientierung vertauscht.

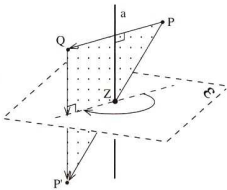


Abb. 6

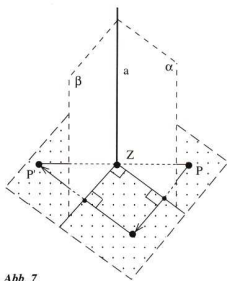


Abb. 7

7. Ein *Dreikantspiegel* ist ein System von drei spiegelnden Ebenen, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Sie werden auf Grund ihrer speziellen Reflexionseigenschaften z. B. als „Katzenaugen“ bei Fahrzeugen oder bei der Funktortung (mit reflektierenden Metallflächen) verwendet. Es seien α , β und γ drei derartige Ebenen. Dann ist zunächst die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an den Ebenen α und β die Drehung um ihre Schnittgerade a mit 180° (Abb. 7). Die anschließende Spiegelung an der Ebene γ

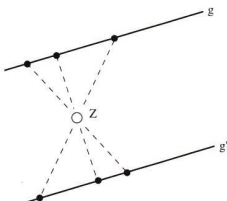


Abb. 8

ergibt nun die Spiegelung an dem Schnittpunkt Z von a und γ , da die Gerade a senkrecht auf der Ebene γ steht. Folglich ist das Bild g' einer Geraden g bei einer solchen Nacheinanderausführung von Ebenenspiegelungen eine Gerade, die mit Z und g zusammen in einer gemeinsamen Ebene liegt und zu g parallel ist (Abb. 8).

Und damit ist geometrisch die wesentliche Eigenschaft des Dreikantspiegels begründet: Ein einfallender Lichtstrahl wird durch die Spiegel so reflektiert, daß er parallel zu diesem verläuft und damit zur Lichtquelle (Sender) zurückkommt.

Dr. Erhard Quaisser

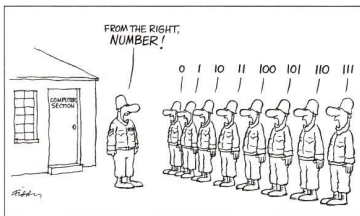
Alphons logische Abenteuer

Alphons' Eltern hatten sich zum Kauf einer neuen Schrankwand entschlossen. Zum Wegwerfen schienen ihnen die alten Schränke jedoch zu schade zu sein. Der Vater schlug vor, eine Anzeige aufzugeben, es könnten sich vielleicht doch Interessenten finden. „Ich kenne gleich in der Nähe ein Geschäft, das Anzeigen für alle Zeitungen annimmt“, sagte Alphons. Seine Schwester widersprach: „Eine Anzeige gleich an alle Zeitungen? Das wird doch viel zu teuer! Ich weiß schon, warum Du das vorschlägst. Der Bruder Deiner heimlichen Flamme arbeitet in diesem Geschäft.“ Alphons wunderte sich zwar, wie seine Schwester das wieder herausbekommen hatte, entschloß sich aber, seine Erklärung auf eine rein sachliche Grundlage zu stellen. „Das, „für alle Zeitungen“ verstehe ich so, daß Anzeigen aufgenommen werden, die man in einer, einigen oder gar in allen Zeitungen mit einem Anzeigenteil veröffentlichen lassen kann.“ Seine Schwester hatte nicht vergessen, wie Alphons einst ihren Traum von einer Hochzeit, bei der alle Menschen staunen sollten, demontiert hatte. „In allen solchen Zeitungen, also die auch in Australien erscheinenden?“ fragte sie spöttisch. Alphons wußte gleich, worauf seine Schwester anspielte. Da er sachlich bleiben wollte, antwortete er ruhig. „Dem Versprechen nach

müßte das möglich sein, aber eben auch, die Anzeige hier einer Zeitung zu geben, etwa einer Regionalzeitung.“ Nun, da man sich ja einig sei, sollte man einen Text entwerfen, schlug die Mutter vor. Das erwies sich als gar nicht so einfach. Immer wieder wurde eine Formulierung verworfen, sei es, weil sie zu lang, sei es, weil sie zu kurz oder überhaupt nicht informativ war. „Viele Köche verderben den Brei“, seufzte die Mutter. „Dann müssen in dem Ausflugslokal, in dem wir letzten Sonntag zu Mittag gegessen haben, die Köche Jahresversammlung gehabt haben, denn das Essen war furchtbar.“ ließ sich Alphons' Schwester hören. Das war wieder etwas für Alphons: „So ein Unsinn!“, murmelte er. „Daß viele Köche den Brei verderben heißt nichts anderes, als daß es Köche gibt, und zwar nicht wenige, die keinen Brei zu kochen verstehen.“ Seine Schwester schaute ihn erstaunt an, auch

seine Mutter schüttelte mit dem Kopf. Alphons versuchte sich zu verteidigen: „Wenn in der heutigen Zeitung steht, viele Deutsche trinken Bier, ist doch auch nicht gemeint, daß sie sich zum Bier trinken an einem Ort versammeln.“ In die nun einsetzende gutmütige Kabbelei der Kinder griff der Vater nach einer Weile beschwichtigend ein. „Was Du aus der Zeitung zitiert hast, ist eine Aussage, was Mutti gesagt hat, ist keine Aussage, sondern ein Sprichwort, also eine Lebensweisheit in bildlicher Form: Erfahrungsgemäß erleichtert es nicht, sondern erschwert Entscheidungsfindung, je mehr gleichgestellte Personen an ihr beteiligt sind. Ihr könnt euch einmal überlegen, was das Sprichwort „Viele Hunde sind des Hasen Tod“ bedeutet. Die Anzeige aber schreibe ich nun und ihr könnt mich am Erfolg loben oder kritisieren.“ Man wurde sich rasch einig, genau das auch zu tun.

Prof. Dr. L. Kreiser



Sprachecke

Pair, impair

P peut être 2 ou 4 ou 8. I peut être 3 ou 5 ou 7 ou 9. Pourriez-vous reconstituer ces deux multiplications? (Remarque: Dans le même nombre P ou I on peut remplacer des chiffres différents.)

a) IPI x PI	... x ...
IIP	...
IIPI	...
PI2I	... 2 ...
b) IPI x PP	... x ...
IIPP	...
I9IP	... 9 ...
PIPIP	...

(Aufgabe aus „Logigramm“ 26/87)

1. В равенстве $101 - 102 = 1$ пере-
пишите одну цифру так, чтобы оно
стало верным.

aus: Quant, Moskau

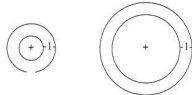
Circles with a common centre

The drawing shows two pairs of concentric circles (circles with a common centre). As you can see, the radii of one pair are much larger than the radii of the other pair. However, the difference between the two radii is the same in both pairs, 1 unit of length.

Question:

Which of the two pairs has the greater difference between the two circumferences.

aus: Fun with mathematics, Toronto



992 1742
1917
837

Was geschah vor...Jahren?

- 1643** Unter den französischen Mathematikern entwickelt sich ein heftiger Streit darum, mit welchen mathematischen Mitteln die Perspektive richtig beschrieben werden kann. Hauptkontrahenten waren P. Alleaume und der berühmte Geometer G. Desargues (1591 – 1661). Im Ergebnis dieses Streites mußte 1665 A. Bosse (1602 – 1676), ein Anhänger des Desargues, sein Lehramt an der Pariser Kunstakademie aufgeben.
- 1718** Es erscheinen letztmalig speziell russische Zahlzeichen auf Kupfermünzen.
- 1843** W. R. Hamilton entdeckt die Quaternionen (siehe Text).
- 1868** Am 26. September starb in Leipzig der berühmte Mathematiker und Astronom August Ferdinand Möbius (siehe Text).
- 1893** Italien und Deutschland nehmen den Vorschlag des kanadischen Ingenieurs Sanford Fleming (1827 – 1915) von 1874 an: die Erde wird in 24 Zeitzonen eingeteilt und der Meridian von Greenwich soll der „Ausgangspunkt“ der Zeitzonen sein. 1893 nahm Italien als erstes Land auch den Flemingschen Vorschlag an, die Stunden des Tages mit 0(24) bis 23 Uhr zu bezeichnen.
- 1893** Am 26. (oder 25.) 9. wurde Alexander Markowitsch Ostrowski (gest. 1986) geboren. Ostrowski war Professor in Basel. Er arbeitete zur Algebra und Analysis.
- 1918** In einer Arbeit begründet der berühmte deutsche Mathematiker Hermann Weyl (1885 – 1955) die Möglichkeit, die verschiedenen Geometrien aus den physikalischen Eigenschaften des Raumes (Gravitationsfeld, „Äther“, Materie, Elektrizität) herzuleiten.

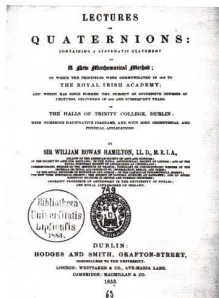
Die Entdeckung der Quaternionen durch Hamilton

1858 erinnerte sich der irische Mathematiker, Physiker und Astronom Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865): „Morgen wird der fünfzehnte Geburtstag der Quaternionen sein. Sie traten ins Leben oder ans Licht, voll erwachsen, am 16. Oktober 1843, als ich mit Lady Hamilton nach Dublin wanderte und herauf-

kam zur Broughambrücke... bereits in diesem Moment fühlte ich, daß es der Mühe wert sein könnte, die Arbeit (zur Forschung der Quaternionen) für wenigstens 10 (oder auch 15) kommende Jahre aufzubringen.“

Erklärung zu den neuendeckten Quaternionen

Was sind die Quaternionen, die Hamilton für so wichtig hielt? Es sind viergliedrige „Zahlen“ der Form $a+bi+cj+dk$, wobei a, b, c, d „gewöhnliche“ reelle Zahlen bedeuten sollen und für die „Einheiten“ i, j ,



k gilt: $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$. Betrachtet man die letzte Gleichung $ij=k$. Dann gilt auch: $iji=k$. Betrachtet man die letzte Gleichung $ij=k$. Dann gilt auch: $iji=k$ und unter Berücksichtigung der ersten Gleichung: $-j=ik$. Nimmt man wiederum die zweite Gleichung und multipliziert von rechts mit j : $ij=kj$, also $-i=kj$. Multi-

pliziert man die beiden Ergebnisse:

$$(-j)(-i) = (ik)(kj) = ikkj = i(-1)j = -ij.$$

Es gilt also $ji = -ij$. Die Multiplikation der Quaternionen wird im Allgemeinen also nicht mehr kommutativ sein, d. h. die Faktoren dürfen bei der Multiplikation nicht mehr vertauscht werden, ohne damit gleichzeitig das Rechenergebnis zu verändern. Eine Folgerung von Hamilton daraus ist: für Quaternionen gelten im Allgemeinen die „binomischen Formeln“ nicht.

Hamiltons Theorie der Quaternionen

In zwei dickleibigen Abhandlungen von 1853 und 1866 entwickelte Hamilton die Theorie der Quaternionen das Gleiche wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen in der Ebene. Die Hamiltonschen Arbeiten führten in den englischsprachigen Ländern zu einem „Quaternionenkult“: die gesamte Mathematik sollte mit Hilfe der Quaternionen behandelt werden.

Integration dieser neuen Theorie

Durch die Untersuchungen von Georg Frobenius (1849 – 1917), Henri Poincaré (1854 – 1912) und Elie Cartan (1869 – 1951) wurden die Quaternionen, ebenso wie die ähnlichen Überlegungen des deutschen Mathematikers Hermann Graßmann (1809 – 1877) in die moderne Algebra integriert.

1983 Am 26.10. starb in Berkeley/Kalifornien Alfred Tarski (geb. 1902). Der aus Polen stammende Gelehrte gehörte zu den bedeutendsten Vertretern der mathematischen Logik.

1993 V. Heuring und H. Jordan von der Universität Colorado stellen den ersten Computer vor, der seine Daten optisch speichert und mit Licht rechnet.

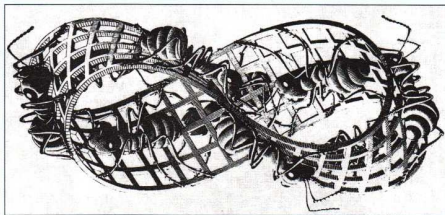
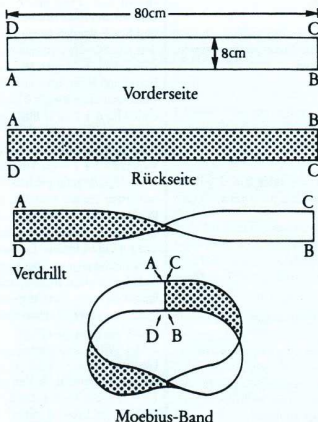
August Ferdinand Möbius



A. F. Möbius.

Am 26. September 1868, also vor 125 Jahren, starb in Leipzig der Astronom und Mathematiker August Ferdinand Möbius. Der Sohn eines Tanzlehrers an der Fürstenschule Schulpforte wurde am 17. November 1790 in Schulpforte geboren. Möbius studierte in Leipzig erst Jura, dann Mathematik. Aus den Geldern einer Leipziger Stiftung unterstützt, konnte er in Halle und Göttingen seine Studien fortsetzen. In Göttingen studierte er auch bei Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Gauß empfahl Möbius als hoffnungsvollen Gelehrten der Leipziger Universität. Nach einer astronomischen Studienreise, die ihn nach Gotha, Tübingen, München und Wien führte, trat Möbius 1816 sein Amt als außerordentlicher Professor und Observator an der Leipziger Universitätssternwarte an. In dieser bescheidenen Stellung blieb Möbius 1844. Erst dann wurde er ordentlicher Professor der Mathematik und höheren Mechanik an der Leipziger Universität. Sogar erst 1848 wurde er offiziell Direktor der Sternwarte, die er seit 1825, nach dem Tode des bedeutenden Mathematikers und Astronomen Carl Brandan Mollweide (1774 – 1825) schon tatsächlich geleitet hatte. Möbius war ein sehr fleißiger und gewissenhafter Gelehrter. Seine „Gesammelten Werke“ (Leipzig 1885 – 87) umfassen

Bastelanleitung für das Möbiussche Band



mehr als 2500 Druckseiten, wobei viele seiner populären Schriften darin nicht aufgenommen wurden. Möbius hat in Leipzig zwei Generationen von Gymnasiallehrern in den naturwissenschaftlichen und mathematischen Fächern ausgebildet. Das wissenschaftliche Hauptarbeitsgebiet von Möbius war die analytische Geometrie. Er entwickelte eine Theorie der geometrischen Verwandtschaften (ab 1827). Solche (einfachen) Verwandtschaften sind z. B. Kongruenz

und Ähnlichkeit geometrischer Figuren. Erst seit etwa 1880 wurde bemerkt, welche grundlegende Bedeutung die Möbiuschen geometrischen Arbeiten für einen systematischen Aufbau der modernen Geometrie haben. Eine hübsche geometrische Entdeckung von Möbius war 1858 das „Möbiussche Band“ – eine einseitige Fläche. Neben seinen geometrischen Arbeiten verfaßte Möbius auch astronomische und statische Abhandlungen.

H.-J. Ilgands

Lösungen

Alphawettbewerb 2/93

Teil II

5/8

Lösung:

Wir schreiben die Summanden untereinander und erhalten

$$\begin{array}{r} b \\ + aab \\ + aab \\ + baa \\ + b \\ \hline b00b \end{array}$$

Nun könnte $b = 1$ oder $b = 2$ gelten.

Für $b = 1$ gilt $a = 4$, für $b = 2$ gilt $a = 8$, also

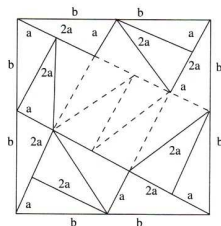
$$\begin{array}{r} 1 \\ + 441 \\ + 414 \\ + 144 \\ + 1 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 882 \\ + 828 \\ + 288 \\ + 2 \\ \hline 2002 \end{array}$$

5/9

Lösung:

Die Abbildung zeigt, wie die 20 rechtwinkligen Dreiecke zusammenzufügen sind, um aus ihnen ein Quadrat zu legen.



5/10

Lösung:

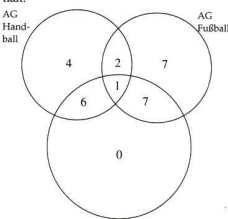
Für den einzigen Zander gab es 5 Punkte, für die drei Flußbarsche $3 \cdot 2 = 6$ Punkte; es verbleiben $18 - 5 - 6 = 7$ Punkte für

Brassen und Kaulbarsche. Wegen $2 \cdot 4 = 8$ und $8 > 7$ wurden genau ein Brassen und drei Kaulbarsche, insgesamt also acht Fische gefangen. Wegen $18 : 2 = 9$ erreichten Bernd und Peter, aber auch Siegfried und Lutz zusammen jeweils 9 Punkte. Siegfried erhielt für den Zander fünf Punkte; deshalb entfallen auf Lutz höchstens vier Punkte. Peter hatte die meisten Fische gefangen; wegen $2 + 1 + 1 + 1 = 5$ und $5 < 8$ muß Peter drei Fische gefangen haben. Da Peter die wenigsten Punkte erreichte, hat Peter drei Punkte für drei Kaulbarsche erhalten. Dann entfallen auf Bernd sechs, auf Siegfried 5 und auf Lutz 4 Punkte. Da Bernd höchstens zwei Fische angete, aber sechs Punkte erhielt, hat er einen Brassen und einen Flußbarsch gefangen. Der Fang von Lutz besteht deshalb aus zwei Flußbarschen.

5/11

Lösung:

An Arbeitsgemeinschaften nehmen $14 + 13 + 17 - 3 - 7 - 8 + 1 = 27$ Schüler teil; deshalb gehören zu dieser Schulklasse $27 + 4 = 31$ Schüler. Das abgebildete Venn-Diagramm veranschaulicht den Sachverhalt.



5/12

Lösung:

Entnimmt man der Kiste 22 Kugeln, so sind es im ungünstigsten Fall eine gelbe, zwei rote, drei blaue, vier grüne, vier weiße, vier schwarze und vier braune Kugeln. Entnimmt man der Kiste eine weitere Kugel, insgesamt also 23 Kugeln, so hat man mit Sicherheit entweder fünf weiße oder fünf schwarze oder fünf braune Kugeln, also fünf Kugeln der gleichen Farbe.

5/13

Lösung:

Angenommen, Ursula hatte x Pilze, Hans also $(x + 5)$ Pilze gesammelt; zusammen sind es $(2x + 5)$ Pilze. Dann hat Peter $(2x - 5)$ Pilze gesammelt. Die drei Schüler haben zusammen $4x$ Pilze gesammelt, und es gilt $4x = 84$, also $x = 21$. Ursula hat 21, Hans 26, Peter 37 Pilze gesammelt.

5/14

Lösung:

Jede der Ziffern 2, 4 bzw. 6 kann jeweils zweimal an der Hunderter-, Zehner- und Einerstelle stehen; deshalb gilt $2 \cdot 100 \cdot (2 + 4 + 6) + 2 \cdot 10 \cdot (2 + 4 + 6) + 2 \cdot 1 \cdot (2 + 4 + 6) = 222 \cdot 12 = 2664$.

6/8

Lösung:

Es sei $abcabc$ eine solche sechsstellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise. Setzen wir $abc = x$, dann gilt $1000 \cdot x + x = 1001 \cdot x = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot x$. Deshalb haben solche sechsstelligen Zahlen die Teiler 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.

6/9

Lösung:

Wir rechnen $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$; nun gilt $\frac{4}{10} \cdot x = 36$, $x = 90$. Die Bahnfahrt beträgt 90 km.

6/10

Lösung:

Wenn Anita dem Nähkästchen 27 Knöpfe entnommen hat, könnte sie im ungünstigsten Fall 9 schwarze, 9 gelbe und 9 weiße Knöpfe haben. Deshalb muß Anita 28mal ins Nähkästchen greifen, um mit Sicherheit 10 Knöpfe der gleichen Farbe zu erhalten.

6/11

Lösung:

$$3 \text{ min} = \frac{3}{60} \text{ h} = \frac{1}{20} \text{ h}; \text{ nun gilt } v = \frac{s}{t} \\ = \left(2 : \frac{1}{20} \right) \frac{\text{km}}{\text{h}} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Herr Meyer hat sich nicht an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten; denn die Geschwindigkeit seines Skoda betrug $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

6/12

Lösung:

Aus (2) und (3) folgt: Keines der Mädchen Britta, Christin, Elke und Astrid

wohnt in Suhl. Folglich wohnt Sandra in Suhl.

Aus (4) folgt: Keines der Mädchen Astrid, Britta und Christin wohnt in Wismar. Folglich wohnt Elke in Wismar. Aus (5) folgt: Britta wohnt weder in Berlin noch in Dresden. Folglich wohnt Britta in Potsdam.

Aus (1) folgt: Da Christin nicht in Berlin wohnt, muß sie in Dresden, also Astrid in Berlin wohnen.

6/13

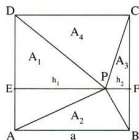
Lösung:

Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch P schneide $\overline{AD}$ in E und $\overline{BC}$ in F. $\overline{AB}$ habe die Länge a, $\overline{EP}$ die Länge h_1 und $\overline{FP}$ die Länge h_2 , dann gilt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ und

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2,$$

also $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2)$ und wegen $h_1 + h_2 =$ somit $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a^2$.

Dann muß auch $A_2 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot a^2$ gelten. Daraus folgt $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$.



6/14

Lösung:

Der Erdbahndurchmesser ist angenähert doppelt so groß wie die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, also rund 300.000.000 km. Da Geschwindigkeit = Weg/Zeit ist, ergibt sich als Lichtgeschwindigkeit 300000 km/s.

7/8

Lösung:

a) Die größtmögliche sechsstellige Zahl wäre 198799.

Wegen $198799 = 86 \cdot 2311 + 53$ lautet die gesuchte Zahl $198799 - 53 = 198746$.

b) Die letzte Ziffer des Quotienten muß 8 lauten, denn nur $8 \cdot 7 = 56$ endet auf die Ziffer 6. Die vorletzte Ziffer des Quotienten muß 7 lauten, denn nur $87 \cdot 7$ endet auf 9. Die drittletzte Ziffer des Quotienten muß 6 lauten, denn nur $87 \cdot 6$ endet auf 2.

Die viertletzte, also erste Ziffer des Quotienten muß 9 lauten, denn nur $87 \cdot 9$ endet auf 3. Wegen $9678 \cdot 87 = 841986$ ist 849186 die gesuchte Zahl.

7/9

Lösung:

Da das Querprodukt verschieden von Null ist, muß jeder Faktor ungleich Null sein. Wegen $5 \cdot 2 = 10$ enthält das Querprodukt die Faktoren 5 und 2 und weitere Faktoren 1. Für die Quersumme gilt deshalb $10 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1$. Nur die Zahl 11125 ist durch 25 teilbar.

7/10

Lösung:

Nach Ausführung der Konstruktion setzt sich das Rechteck ABCD aus vier Rechtecken AESH, EBFS, HSGD und SFCG zusammen. Die vier Seiten $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$ des Vierecks EFGH halbieren jeweils eines dieser vier Rechtecke. Deshalb gilt $A_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$, d. h. A_{EFGH} ist konstant und unabhängig von der Lage der Strecken $\overline{HF}$ und $\overline{EG}$.

7/11

Lösung:

Angenommen, anfangs waren es L_1 Längs- und Q_1 Querreihen, nach der Umstellung also $(L_1 - 4)$ Längs- und Q_2 Querreihen; gilt $L_1 \cdot Q_1 = (L_1 - 4) \cdot Q_2 = 225 = 9 \cdot 25 = 5 \cdot 45 = 5 \cdot (25 + 20)$. Der Marschblock verlängert sich daher um 20 Querreihen.

7/12

Lösung:

Wegen $(17 - 7) : 2 = 5$ haben Erika und Irene jede für 5 Mark Briefmarken gekauft. Es gilt $10 \cdot A + 60 \cdot B + 30 \cdot C = 10$ und $10 \cdot A + 30 \cdot C = 7$, also $60 \cdot B = 10 - 7 = 3$, $B = \frac{1}{20}$. Aus $10 \cdot A + \frac{20}{20} = 5$

folgt $A = \frac{2}{5}$. Aus $\frac{40}{20} + 30 \cdot C = 5$ folgt

$C = \frac{1}{10}$. Briefmarken der Sorte A hatten

$\frac{2}{5} M = 40$ Pf, der Sorte B $\frac{1}{20} M = 5$ Pf

der Sorte C $\frac{1}{10} M = 10$ Pf Wert.

7/13

Lösung:

Wegen Kraft = Gegenkraft, hätten 8 Pferde auf einer Seite ausgereicht, wenn man die andere Seite der Kugel im Erdboden verankert hätte.

7/14

Lösung:

Einseitiger Hebel, nicht entgleiste Achse als Drehpunkt. Lastarm 4 m, Last 270 kN, Kraftarm 10 m. Daraus erf. Kraft am Zugseil 108 kN.

8/8

Lösung:

Es sei a eine natürliche Zahl und $30 < a < 100$.

Dann gilt:

(1) $3la$, (2) $4la - 1$, (3) $5la + 1$.

Aus (2) folgt (4) $2la + 1$.

Aus (3) und (4) folgt (5) $10la + 1$.

Aus (2) folgt (6) $4la + 1$.

Aus (5) und (6) folgt (7) $20la + 1$.

Katrin hat recht.

b) Wegen (5) und (7) kommen 49, 69, 89 in Frage. Wegen (1) gilt 69.

Karls Großmutter ist 69 Jahre alt.

8/9

Lösung:

Für die erste und dritte Ziffer kann nur gelten: 1 und 2; 2 und 4; 3 und 6; oder 4 und 8.

Da das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 2 und auch durch 3 teilbar ist, sind nur 1020, 2040, 3060 und 4080 möglich.

Wären die zweite sowie vierte Ziffer 1, 2 oder 3, so wäre das Produkt entweder nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar. Das Produkt endet also auf 0: Daraus folgt, daß einer der Faktoren durch 5 teilbar sein muß.

Es könnten demnach nur 13, 14, 15 oder 14, 15, 16 oder 15, 16, 17 die gesuchten Zahlen sein.

Tatsächlich erfüllen nur die Zahlen 15, 16, 17 mit 4080 als Produkt alle in der Aufgabe gestellten Bedingungen.

8/10

Lösung:

Es seien m und n zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen. Entsprechend der Aufgabenstellung gilt dann

$$(a + b) + \frac{a}{b} = 35,$$

$$\frac{a}{b} = 35 - a - b,$$

$$a = b \cdot (35 - a - b)$$

$$a = 35b - ab - b^2$$

$$a + ab = 35b - b^2,$$

$$a \cdot (1 + b) = b \cdot (35 - b),$$

$$a = \frac{b \cdot (35 - b)}{b + 1}.$$

Diese Aufgabe hat 7 Lösungen. Sie lauten (als geordnete Paare (a;b) geschrieben):

(17;1), (22;2), (24;3), (25;5), (24;8), (22;11), (17;17).

8/11

Lösung:

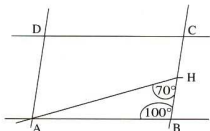
(1) Winkel von 100° mit Scheitelpunkt B zeichnen.

(2) Von B aus 1,5 cm abtragen (auf dem Strahl, auf dem der Punkt C liegt; man erhält H).

(3) In H Winkel von 70° antragen, so daß freier Schenkel den anderen Strahl in A schneidet.

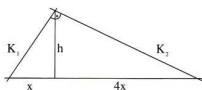
(4) Parallele zu $\overline{BH}$ durch A zeichnen und auf ihr von A aus 3 cm abtragen; man erhält D.

(5) Parallele zu $\overline{AB}$ durch D schneiden die Verlängerung von $\overline{BH}$ in C. Skizze (nicht maßgerecht!):



8/12

Lösung:



Die Längen der Hypotenusenabschnitte seien mit x und $4x$ bezeichnet. Dann gilt nach dem Höhensatz

$$h^2 = x \cdot 4x,$$

$$h^2 = 4x^2,$$

$$36 \text{ cm}^2 = 4x^2$$

$$9 \text{ cm}^2 = x^2$$

$$3 \text{ cm} = x.$$

Die Hypotenusenabschnitte sind 3 cm bzw. 12 cm lang. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$$A = \frac{15 \cdot 6}{2}, A = 45 \text{ cm}^2$$

Die Kathetenlängen berechnet man nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$k_1 = \sqrt{3^2 + 6^2} \quad k_2 = \sqrt{6^2 + 15^2}$$

$$k_1 = \sqrt{45}$$

$$k_2 = \sqrt{180}$$

$k_1 = 6,7 \text{ cm}$ $k_2 = 13,4 \text{ cm}$. (Näherungswerte)

Der Umfang des Dreiecks ist $u = 15 \text{ cm} +$

$13,4 \text{ cm} + 6,7 \text{ cm}$; $u = 35,1 \text{ cm}$. (Näherungswert)

8/13

Lösung:

$(48 \cdot 15 + 100 \cdot 10) \text{ Watt Leistungsaufnahme}$. In $10 \cdot 30$ Stunden insgesamt 516 kWh .

8/14

Lösung:

Nimmt man die Dichte des Stahls $\delta = 7,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, so ergibt sich: $m = \pi \cdot l \cdot (r_a^2 - r_i^2) \cdot \delta$. Mit $r_a = 2,75 \text{ cm}$, $r_i = 2,55 \text{ cm}$, $l = 600 \text{ cm}$ ergibt sich $m = 15,6 \text{ kg}$, daraus $F_G = 156 \text{ N}$.

9/8

Lösung:

Die kleinste der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei mit a bezeichnet; dann sind die anderen Zahlen $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt weiter:

$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 18$, d. h. $4a + 6 = 18$ bzw. $a = 3$.

Die Zahl x^2 besteht also aus den Grundziffern 3, 4, 5, 6. Es gibt nun 24 mögliche vierstellige Zahlen mit diesen Grundziffern (Permutationen von 4 Elementen ohne Wiederholung!). Die einzige vierstellige Zahl von diesen 24 Zahlen, deren Wurzel eine natürliche Zahl ist, ist die Zahl $4356 = x^2$, und es ist $x = 66$.

9/9

Lösung:

Die Zahl z mit den geforderten Eigenschaften ist in dekadischer Darstellung $z = abab$.

Sie läßt sich in der Form $z = 1000a + 100b + 10a + b$ ($a \neq 0$) schreiben. Das läßt sich zu $1010a + 101b = 101 \cdot (10a + b)$ zusammenfassen.

Da 101 eine Primzahl ist und $10a + b < 100$ gilt, kann es keine Quadratzahl von der geforderten Art geben.

9/10

Lösung:

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck, das durch die Raumdiagonale, eine Flächendiagonale und eine Kante des Würfels gebildet wird. Bezeichnen wir die Flächendiagonale mit d und die Würfelkante mit a , so gilt nach dem Satz des Pythagoras $d^2 = 2a^2$ bzw. $d = a \cdot \sqrt{2}$. Für die Länge der Raumdiagonalen e gilt dann $e^2 = a^2 + (a \cdot \sqrt{2})^2$ bzw. $e^2 = a^2 + 2a^2$ bzw. $e^2 = 3a^2$, d. h. $3^2 = 3a^2$, $a^2 = 3$,

$$a = \sqrt{3}.$$

Nun gilt für das Volumen dieses Würfels $V = a^3$, $V = (\sqrt{3})^3$, $V \approx 5,2$

Das Volumen dieses Würfels beträgt etwa $5,2 \text{ cm}^3$.

9/11

Lösung:

Wir bezeichnen die Länge einer Quadratseite mit a . Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann

$$a^2 + a^2 = 3^2; 2a^2 = 9; a^2 = 4,5;$$

$$a = \sqrt{4,5}$$

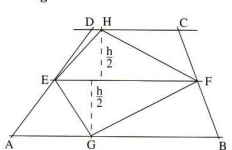
$$V = (\sqrt{4,5})^3;$$

Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist $V = a^3$.

Also gilt in unserer Aufgabe $V = 9,546$. Der Rauminhalt dieses Würfels beträgt etwa $9,5 \text{ cm}^3$.

9/12

Lösung:



Die Mittellinie $\overline{EF}$ des Trapezes geht auch durch die Mitte der Höhe h . Das Viereck EGFH wird durch die Mittellinie in zwei Dreiecke zerlegt. Für den Flächeninhalt eines jeden dieser Dreiecke gilt:

$$A = \frac{m \cdot h}{2}; \text{ also für beide Dreiecke zusammen } A = m \cdot \frac{h}{2}.$$

Da der Flächeninhalt des Trapezes $A = m \cdot h$ ist, nimmt das Viereck EGFH genau 50% der Fläche des Trapezes ein. Es spielt keine Rolle, wo die Punkte G auf $\overline{AB}$ und H auf $\overline{DC}$ festgelegt werden, da Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe flächengleich sind.

9/13

Lösung:

Aus Verzögerungskraft = Reibungskraft folgt $a = \mu \cdot g$ (g = Fallbeschl., a = maximale Verzögerung). Aus $v/t = a$ folgt $t = v/\mu \cdot g \cdot t = 7,6 \text{ s}$. Mit $s = a \cdot t^2/2$ ergibt sich $s = 84,4 \text{ m}$.

9/14

Lösung:

Die abgegebene Wärmeleistung ist gleich der zugeführten Leistung. $P_{\text{el}} = U \cdot I = U^2/R$. Die abgegebene Wärme steigt um das 16fache (in der gl. Zeit).

10/6

Lösung:

Das Motorrad erreicht den PKW nach 300 m. Beschleunigung des Motorrades $0,816 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Geschwindigkeit $88,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

10/7

Lösung:

Auf die Last wirken die Fallbeschleunigung und die Beschleunigung, die durch das Anheben hervorgerufen wird $a = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Maximale Geschwindigkeit nach 3 s beträgt $9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

10/8

Lösung:

Das Volumen eines Zylinders ist

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot 5d}{4}; 3,927 = \frac{5 \cdot \pi \cdot d^3}{4}$$

$$d^3 = \frac{3,927 \cdot 4}{5 \cdot \pi}; d = \sqrt[3]{\frac{3,927 \cdot 4}{5 \cdot \pi}}; d = 1 \text{ cm}.$$

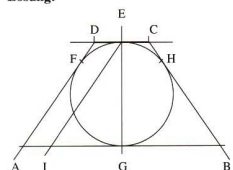
Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Durchmesser der Zylindergrundfläche gleich dem Kugeldurchmesser einer solchen Kugel und die Höhe des Zylinders gleich dem fünffachen Kugeldurchmesser. Somit ergibt sich $V = \frac{4 \cdot \pi r^3}{3}$;

Das Volumen einer solchen Kugel ist $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0,5^3}{3}$; $V = 0,5236 \text{ cm}^3$.

Für die Herstellung der 5 Kugeln benötigt man $0,5236 \cdot 5 \cdot 7,85 = 20,55 \text{ g}$ Stahl.

10/9

Lösung:



Es seien E, F, G, H die Berührungspunkte der Trapezseiten $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ mit dem

Kreis. Eine Parallele zu $\overline{BC}$ durch E schneide $\overline{AD}$ in I. Es sei die Länge von $\overline{AD} = s$. Wegen des Satzes über gleichlange Tangentenabschnitte gilt $\overline{DE} = \overline{DF}$, $\overline{AF} = \overline{AG}$ wegen gleichlanger Gegenseiten im Parallelogramm EDAI ist $\overline{AI} = \overline{DE}$. Im rechtwinkligen Dreieck EIG gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = (2r)^2 + (s-r)^2$; $s^2 = 4r^2 + s^2 - 2rs + r^2$; $5r^2 = 2rs$ $| : 2r$

$$\frac{5}{2} r = s.$$

$$\overline{AG} = s - \frac{r}{s} = \frac{5}{2} r - \frac{r}{2} = 2r.$$

Es folgt $\overline{AB} = 4r$.

Der Umfang des Trapezes ist somit

$$u = r + 4r + \frac{5}{2} r + \frac{5}{2} r; u = 10r.$$

10/10

Lösung:

Wir erhalten die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade, wenn wir $x^2 - 6x + 8 = x - 4$ setzen und nach x auflösen: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12}}{2} = \frac{7 \pm \frac{1}{2}}{2}$$

$x_1 = 4$, es folgt $y_1 = 0$

$x_2 = 3$, es folgt $y_2 = -1$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $(4;0)$ und $(3;-1)$.

Wenn eine Gerade mit dem Anstieg $-\frac{1}{2}$ durch $P_1 = (4;0)$ geht, dann schneidet sie die y-Achse bei 2; die Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 2$; wenn sie durch

$P_2 = (3;-1)$ geht, schneidet sie die y-Achse bei $\frac{1}{2}$ und hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, indem man in die allgemeine Gleichung $y = mx + n$ für

$$m = -\frac{1}{2} \text{ für } x = 4 \text{ und } y = 0 \text{ setzt:}$$

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n; n = \text{wenn die Gerade}$$

$$\text{durch } (3;-1) \text{ geht: } -1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n; n = \frac{1}{2}$$

10/11

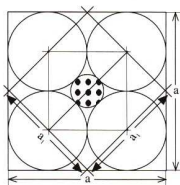
Lösung:

(1) Der Durchmesser des schraffierten Kreises sei x, dann ist der Flächeninhalt $A = \frac{\pi \cdot x^2}{4}$

(2) Berechnung von x:

$$x = a_1 - r - r; x = a_1 - 2r$$

(r sei der Radius eines der vier Kreise)



$$\text{Wegen } r = \frac{a}{4} \text{ gilt nun } x = a_1 - \frac{a}{2}$$

(3) Berechnung von a_1 :

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$a_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$a_1^2 = \frac{a^2}{2};$$

$$a_1 = a \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(4) \text{ Nach Einsetzen folgt } x = a \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{a}{2}}$$

(5) Nun setzen wir den Term für x in die Flächenformel ein und erhalten

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot x^2; A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(a \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{a}{2}}\right)^2;$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4}}\right);$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3a^2}{4} - a^2 \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

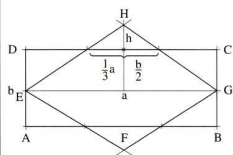
$$A = 0,7854a^2 - 0,043$$

$$A = 0,034a^2$$

10/12

Lösung:

Es seien $\overline{EG} = a$ und $\overline{AD} = b$. Die Höhe



des Dreiecks, das außerhalb des Rechtecks liegt, sei mit h bezeichnet. Dann gilt nach dem Strahlensatz:

$$h : \left(h + \frac{b}{2} \right) = \frac{1}{3} a : a = 1 : 3.$$

$$3h = h + \frac{b}{2}; \quad h = \frac{b}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Rhombus ist dann

$$A' = a \cdot \frac{3}{4} b \quad \text{Wegen } a \cdot b = 40 \text{ cm}^2 \text{ ist}$$

$$A' = 30 \text{ cm}^2.$$

10/13

Lösung:

Die Auftriebskraft beträgt $V \cdot \delta \cdot g = 697 \text{ N}$. Da die Gewichtskraft nur 677 N beträgt, taucht er nicht ganz unter.

10/14

Lösung:

Aus $R_{\text{ges}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ mit $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$ und $X_C = 1/2\pi \cdot f \cdot C$ erhält man für die Kapazität des Kondensators $C_1 = 3,8 \mu\text{F}$ und $C_2 = 7,8 \mu\text{F}$, wenn man $R_{\text{ges}} = 220 \text{ V}/1 \text{ A} = 220 \Omega$ setzt.

E/1

Lösung:

Es sei a die Basis unseres gesuchten Zahlensystems.

Dann gilt die folgende Darstellung der Gleichung:

$$\begin{aligned} 5 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 5 + 3 \cdot a + 4 &= (2 \cdot a + 5)^2, \\ 5a^2 + 2a + 5 + 3a + 4 &= 4a^2 + 20a + 25, \\ a^2 - 15a - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir nach a auf und erhalten

$$a_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225 + 64}{4}}$$

$$a_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \frac{17}{2}$$

$$a_1 = 16$$

$a_2 = -1$ (entfällt, da als Basis eines Zahlensystems nicht definiert)

Die gegebene Gleichung stellt im Sechzehnersystem eine wahre Aussage dar. Probe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 5 + 3 \cdot 16 + 4 &= (2 \cdot 16 + 5)^2 \\ 1280 + 32 + 5 + 48 + 4 &= 37^2 \\ 1369 &= 1369 \end{aligned}$$

E/2

Lösung:

Für einen Würfel gibt es 6 mögliche Ausgänge des Ergebnisses, für zwei Würfel $6^2 = 36$, ..., für vier Würfel $6^4 = 1296$ verschiedene Ausgänge. Man hat nun die

Anzahl der günstigen Ausgänge des Ergebnisses durch die Anzahl aller möglichen Ausgänge zu dividieren und erhält

$$\frac{4}{1296} = \frac{1}{324}, \text{ d. i. } 0,003086 \dots \text{ bzw. etwa } 0,31 \%. \quad \text{d. i. } 0,003086 \dots \text{ bzw. etwa } 0,31 \%.$$

Beim Werfen von 10 Geldstücken gibt es für jede Münze zwei Ausgänge des Ergebnisses, wovon einer günstig ist, für zwei Münzen gibt es 2^2 , für 3 Münzen 2^3 , ..., für zehn Münzen 2^{10} verschiedene Ausgänge, wovon 10 günstig sind. Wir erhalten nun $\frac{10}{1024} = 0,00976 \dots$ bzw. etwa $0,98 \%$.

Beim Münzwurf dieser Art liegt also eine höhere Wahrscheinlichkeit vor, 10 Zahlen oben liegen zu haben, als mit 4 Würfeln viermal die 6 zu erreichen.

E/3

Lösung:

a) Ein Stein kann 49 verschiedene Positionen einnehmen. Kommt ein zweiter Stein hinzu, bleiben für diesen noch 48 mögliche Positionen. Insgesamt gibt es also $49 \cdot 48 = 2352$ verschiedene Positionen. Wenn die Spielsteine gleich sind, kann man die beiden bei jeder Position vertauschen, ohne daß diese verschieden sind. Es sind demnach $2352 : 2 = 1176$ verschiedene Positionen.

b) Sind die Spielsteine verschieden, so ergeben sich 2352 verschiedene Positionen.

E/4

Lösung:

$$13 : 8 = 1 \text{ Rest } 5,$$

13 läßt bei Division durch 8 den Rest 5, 13^2 läßt bei Division durch 8 den Rest 1; $13^{2n} (n \in \mathbb{N})$ läßt bei Division durch 8 den Rest 1,

$13^{2 \cdot 84} = 13^{168}$ läßt bei Division durch 8 den Rest 1,

$13^{168} \cdot 13^1 = 13^{169}$ läßt bei Division durch 8 den Rest $1 \cdot 5 = 5$.

E/5

Lösung:

Das Problem besteht darin, aus 6 verschiedenen Punkten jeweils 3 bzw. 4 bzw. 5 auszuwählen. Kein Punkt darf bei einer derartigen Auswahl mehrfach genommen werden. Auf die Anordnung der Punkte kommt es nicht an, denn ABC ist z. B. dasselbe Dreieck wie ACB usw.

Es handelt sich also jedesmal um Kombinationen ohne Wiederholung.

a) Kombinationen von 6 Elementen zur 3. Klasse:

$$\binom{6}{3} \text{ (gelesen : 6 über 3) } = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ Dreiecke.}$$

b) Kombinationen von 6 Elementen zur 4. Klasse:

$$\binom{6}{4} \text{ (gelesen : 6 über 4) } = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \text{ Vierecke.}$$

c) Kombinationen von 6 Elementen zur 5. Klasse:

$$\binom{6}{5} \text{ (gelesen : 6 über 5) } = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \text{ Fünfecke.}$$

n. b.: Es gibt folgende Vereinfachungen:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \quad \text{und}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

E/6

Lösung:

Da der Drehimpuls bei diesem Vorgang erhalten bleibt, gilt:

$$m \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = m \cdot r_2^2 \cdot \omega_2, \quad \text{Da } \omega = 2\pi n \text{ folgt}$$

$$n_2 = r_1^2 \cdot n_1 / r_2^2 = 0,04 \text{ s}^{-1}.$$

E/7

Lösung:

Der Impuls bleibt erhalten.

$$v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 800 \text{ kg} / (600 \text{ kg} + 800 \text{ kg}) = 0,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

E/8

Lösung:

Für jede arithmetische Folge gilt: $a_n = a_1 + (n-1)d$, in unserem Falle also

$$(1) a_3 = a_1 + (3-1)d \text{ und}$$

$$(2) a_{12} = a_1 + (12-1)d. \text{ Wir setzen ein und vereinfachen:}$$

$$(1) 3 \frac{1}{4} = a_1 + 2d$$

$$(2) 16 \frac{3}{4} = a_1 + 11d. \text{ Wir subtrahieren}$$

$$(1) \text{ von } (2):$$

$$(3) 13 \frac{1}{2} = 9d, \quad d = 1 \frac{1}{2}. \text{ Wir setzen in } (1)$$

ein:

$$(4) 3 \frac{1}{4} = a_1 + 3, \quad a_1 = \frac{1}{4}.$$

Die ersten 5 Glieder der Folge sind:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{7}{2}, \frac{11}{4}, \frac{9}{2}, \frac{13}{4}, \frac{11}{2}, \frac{15}{4}, \frac{13}{2}, \frac{17}{4}, \frac{15}{2}, \frac{19}{4}, \frac{17}{2}, \frac{21}{4}, \frac{19}{2}, \frac{23}{4}, \frac{21}{2}, \frac{25}{4}, \frac{23}{2}, \frac{27}{4}, \frac{25}{2}, \frac{29}{4}, \frac{27}{2}, \frac{31}{4}, \frac{29}{2}, \frac{33}{4}, \frac{31}{2}, \frac{35}{4}, \frac{33}{2}, \frac{37}{4}, \frac{35}{2}, \frac{39}{4}, \frac{37}{2}, \frac{41}{4}, \frac{39}{2}, \frac{43}{4}, \frac{41}{2}, \frac{45}{4}, \frac{43}{2}, \frac{47}{4}, \frac{45}{2}, \frac{49}{4}, \frac{47}{2}, \frac{51}{4}, \frac{49}{2}, \frac{53}{4}, \frac{51}{2}, \frac{55}{4}, \frac{53}{2}, \frac{57}{4}, \frac{55}{2}, \frac{59}{4}, \frac{57}{2}, \frac{61}{4}, \frac{59}{2}, \frac{63}{4}, \frac{61}{2}, \frac{65}{4}, \frac{63}{2}, \frac{67}{4}, \frac{65}{2}, \frac{69}{4}, \frac{67}{2}, \frac{71}{4}, \frac{69}{2}, \frac{73}{4}, \frac{71}{2}, \frac{75}{4}, \frac{73}{2}, \frac{77}{4}, \frac{75}{2}, \frac{79}{4}, \frac{77}{2}, \frac{81}{4}, \frac{79}{2}, \frac{83}{4}, \frac{81}{2}, \frac{85}{4}, \frac{83}{2}, \frac{87}{4}, \frac{85}{2}, \frac{89}{4}, \frac{87}{2}, \frac{91}{4}, \frac{89}{2}, \frac{93}{4}, \frac{91}{2}, \frac{95}{4}, \frac{93}{2}, \frac{97}{4}, \frac{95}{2}, \frac{99}{4}, \frac{97}{2}, \frac{101}{4}, \frac{99}{2}, \frac{103}{4}, \frac{101}{2}, \frac{105}{4}, \frac{103}{2}, \frac{107}{4}, \frac{105}{2}, \frac{109}{4}, \frac{107}{2}, \frac{111}{4}, \frac{109}{2}, \frac{113}{4}, \frac{111}{2}, \frac{115}{4}, \frac{113}{2}, \frac{117}{4}, \frac{115}{2}, \frac{119}{4}, \frac{117}{2}, \frac{121}{4}, \frac{119}{2}, \frac{123}{4}, \frac{121}{2}, \frac{125}{4}, \frac{123}{2}, \frac{127}{4}, \frac{125}{2}, \frac{129}{4}, \frac{127}{2}, \frac{131}{4}, \frac{129}{2}, \frac{133}{4}, \frac{131}{2}, \frac{135}{4}, \frac{133}{2}, \frac{137}{4}, \frac{135}{2}, \frac{139}{4}, \frac{137}{2}, \frac{141}{4}, \frac{139}{2}, \frac{143}{4}, \frac{141}{2}, \frac{145}{4}, \frac{143}{2}, \frac{147}{4}, \frac{145}{2}, \frac{149}{4}, \frac{147}{2}, \frac{151}{4}, \frac{149}{2}, \frac{153}{4}, \frac{151}{2}, \frac{155}{4}, \frac{153}{2}, \frac{157}{4}, \frac{155}{2}, \frac{159}{4}, \frac{157}{2}, \frac{161}{4}, \frac{159}{2}, \frac{163}{4}, \frac{161}{2}, \frac{165}{4}, \frac{163}{2}, \frac{167}{4}, \frac{165}{2}, \frac{169}{4}, \frac{167}{2}, \frac{171}{4}, \frac{169}{2}, \frac{173}{4}, \frac{171}{2}, \frac{175}{4}, \frac{173}{2}, \frac{177}{4}, \frac{175}{2}, \frac{179}{4}, \frac{177}{2}, \frac{181}{4}, \frac{179}{2}, \frac{183}{4}, \frac{181}{2}, \frac{185}{4}, \frac{183}{2}, \frac{187}{4}, \frac{185}{2}, \frac{189}{4}, \frac{187}{2}, \frac{191}{4}, \frac{189}{2}, \frac{193}{4}, \frac{191}{2}, \frac{195}{4}, \frac{193}{2}, \frac{197}{4}, \frac{195}{2}, \frac{199}{4}, \frac{197}{2}, \frac{201}{4}, \frac{199}{2}, \frac{203}{4}, \frac{201}{2}, \frac{205}{4}, \frac{203}{2}, \frac{207}{4}, \frac{205}{2}, \frac{209}{4}, \frac{207}{2}, \frac{211}{4}, \frac{209}{2}, \frac{213}{4}, \frac{211}{2}, \frac{215}{4}, \frac{213}{2}, \frac{217}{4}, \frac{215}{2}, \frac{219}{4}, \frac{217}{2}, \frac{221}{4}, \frac{219}{2}, \frac{223}{4}, \frac{221}{2}, \frac{225}{4}, \frac{223}{2}, \frac{227}{4}, \frac{225}{2}, \frac{229}{4}, \frac{227}{2}, \frac{231}{4}, \frac{229}{2}, \frac{233}{4}, \frac{231}{2}, \frac{235}{4}, \frac{233}{2}, \frac{237}{4}, \frac{235}{2}, \frac{239}{4}, \frac{237}{2}, \frac{241}{4}, \frac{239}{2}, \frac{243}{4}, \frac{241}{2}, \frac{245}{4}, \frac{243}{2}, \frac{247}{4}, \frac{245}{2}, \frac{249}{4}, \frac{247}{2}, \frac{251}{4}, \frac{249}{2}, \frac{253}{4}, \frac{251}{2}, \frac{255}{4}, \frac{253}{2}, \frac{257}{4}, \frac{255}{2}, \frac{259}{4}, \frac{257}{2}, \frac{261}{4}, \frac{259}{2}, \frac{263}{4}, \frac{261}{2}, \frac{265}{4}, \frac{263}{2}, \frac{267}{4}, \frac{265}{2}, \frac{269}{4}, \frac{267}{2}, \frac{271}{4}, \frac{269}{2}, \frac{273}{4}, \frac{271}{2}, \frac{275}{4}, \frac{273}{2}, \frac{277}{4}, \frac{275}{2}, \frac{279}{4}, \frac{277}{2}, \frac{281}{4}, \frac{279}{2}, \frac{283}{4}, \frac{281}{2}, \frac{285}{4}, \frac{283}{2}, \frac{287}{4}, \frac{285}{2}, \frac{289}{4}, \frac{287}{2}, \frac{291}{4}, \frac{289}{2}, \frac{293}{4}, \frac{291}{2}, \frac{295}{4}, \frac{293}{2}, \frac{297}{4}, \frac{295}{2}, \frac{299}{4}, \frac{297}{2}, \frac{301}{4}, \frac{299}{2}, \frac{303}{4}, \frac{301}{2}, \frac{305}{4}, \frac{303}{2}, \frac{307}{4}, \frac{305}{2}, \frac{309}{4}, \frac{307}{2}, \frac{311}{4}, \frac{309}{2}, \frac{313}{4}, \frac{311}{2}, \frac{315}{4}, \frac{313}{2}, \frac{317}{4}, \frac{315}{2}, \frac{319}{4}, \frac{317}{2}, \frac{321}{4}, \frac{319}{2}, \frac{323}{4}, \frac{321}{2}, \frac{325}{4}, \frac{323}{2}, \frac{327}{4}, \frac{325}{2}, \frac{329}{4}, \frac{327}{2}, \frac{331}{4}, \frac{329}{2}, \frac{333}{4}, \frac{331}{2}, \frac{335}{4}, \frac{333}{2}, \frac{337}{4}, \frac{335}{2}, \frac{339}{4}, \frac{337}{2}, \frac{341}{4}, \frac{339}{2}, \frac{343}{4}, \frac{341}{2}, \frac{345}{4}, \frac{343}{2}, \frac{347}{4}, \frac{345}{2}, \frac{349}{4}, \frac{347}{2}, \frac{351}{4}, \frac{349}{2}, \frac{353}{4}, \frac{351}{2}, \frac{355}{4}, \frac{353}{2}, \frac{357}{4}, \frac{355}{2}, \frac{359}{4}, \frac{357}{2}, \frac{361}{4}, \frac{359}{2}, \frac{363}{4}, \frac{361}{2}, \frac{365}{4}, \frac{363}{2}, \frac{367}{4}, \frac{365}{2}, \frac{369}{4}, \frac{367}{2}, \frac{371}{4}, \frac{369}{2}, \frac{373}{4}, \frac{371}{2}, \frac{375}{4}, \frac{373}{2}, \frac{377}{4}, \frac{375}{2}, \frac{379}{4}, \frac{377}{2}, \frac{381}{4}, \frac{379}{2}, \frac{383}{4}, \frac{381}{2}, \frac{385}{4}, \frac{383}{2}, \frac{387}{4}, \frac{385}{2}, \frac{389}{4}, \frac{387}{2}, \frac{391}{4}, \frac{389}{2}, \frac{393}{4}, \frac{391}{2}, \frac{395}{4}, \frac{393}{2}, \frac{397}{4}, \frac{395}{2}, \frac{399}{4}, \frac{397}{2}, \frac{401}{4}, \frac{399}{2}, \frac{403}{4}, \frac{401}{2}, \frac{405}{4}, \frac{403}{2}, \frac{407}{4}, \frac{405}{2}, \frac{409}{4}, \frac{407}{2}, \frac{411}{4}, \frac{409}{2}, \frac{413}{4}, \frac{411}{2}, \frac{415}{4}, \frac{413}{2}, \frac{417}{4}, \frac{415}{2}, \frac{419}{4}, \frac{417}{2}, \frac{421}{4}, \frac{419}{2}, \frac{423}{4}, \frac{421}{2}, \frac{425}{4}, \frac{423}{2}, \frac{427}{4}, \frac{425}{2}, \frac{429}{4}, \frac{427}{2}, \frac{431}{4}, \frac{429}{2}, \frac{433}{4}, \frac{431}{2}, \frac{435}{4}, \frac{433}{2}, \frac{437}{4}, \frac{435}{2}, \frac{439}{4}, \frac{437}{2}, \frac{441}{4}, \frac{439}{2}, \frac{443}{4}, \frac{441}{2}, \frac{445}{4}, \frac{443}{2}, \frac{447}{4}, \frac{445}{2}, \frac{449}{4}, \frac{447}{2}, \frac{451}{4}, \frac{449}{2}, \frac{453}{4}, \frac{451}{2}, \frac{455}{4}, \frac{453}{2}, \frac{457}{4}, \frac{455}{2}, \frac{459}{4}, \frac{457}{2}, \frac{461}{4}, \frac{459}{2}, \frac{463}{4}, \frac{461}{2}, \frac{465}{4}, \frac{463}{2}, \frac{467}{4}, \frac{465}{2}, \frac{469}{4}, \frac{467}{2}, \frac{471}{4}, \frac{469}{2}, \frac{473}{4}, \frac{471}{2}, \frac{475}{4}, \frac{473}{2}, \frac{477}{4}, \frac{475}{2}, \frac{479}{4}, \frac{477}{2}, \frac{481}{4}, \frac{479}{2}, \frac{483}{4}, \frac{481}{2}, \frac{485}{4}, \frac{483}{2}, \frac{487}{4}, \frac{485}{2}, \frac{489}{4}, \frac{487}{2}, \frac{491}{4}, \frac{489}{2}, \frac{493}{4}, \frac{491}{2}, \frac{495}{4}, \frac{493}{2}, \frac{497}{4}, \frac{495}{2}, \frac{499}{4}, \frac{497}{2}, \frac{501}{4}, \frac{499}{2}, \frac{503}{4}, \frac{501}{2}, \frac{505}{4}, \frac{503}{2}, \frac{507}{4}, \frac{505}{2}, \frac{509}{4}, \frac{507}{2}, \frac{511}{4}, \frac{509}{2}, \frac{513}{4}, \frac{511}{2}, \frac{515}{4}, \frac{513}{2}, \frac{517}{4}, \frac{515}{2}, \frac{519}{4}, \frac{517}{2}, \frac{521}{4}, \frac{519}{2}, \frac{523}{4}, \frac{521}{2}, \frac{525}{4}, \frac{523}{2}, \frac{527}{4}, \frac{525}{2}, \frac{529}{4}, \frac{527}{2}, \frac{531}{4}, \frac{529}{2}, \frac{533}{4}, \frac{531}{2}, \frac{535}{4}, \frac{533}{2}, \frac{537}{4}, \frac{535}{2}, \frac{539}{4}, \frac{537}{2}, \frac{541}{4}, \frac{539}{2}, \frac{543}{4}, \frac{541}{2}, \frac{545}{4}, \frac{543}{2}, \frac{547}{4}, \frac{545}{2}, \frac{549}{4}, \frac{547}{2}, \frac{551}{4}, \frac{549}{2}, \frac{553}{4}, \frac{551}{2}, \frac{555}{4}, \frac{553}{2}, \frac{557}{4}, \frac{555}{2}, \frac{559}{4}, \frac{557}{2}, \frac{561}{4}, \frac{559}{2}, \frac{563}{4}, \frac{561}{2}, \frac{565}{4}, \frac{563}{2}, \frac{567}{4}, \frac{565}{2}, \frac{569}{4}, \frac{567}{2}, \frac{571}{4}, \frac{569}{2}, \frac{573}{4}, \frac{571}{2}, \frac{575}{4}, \frac{573}{2}, \frac{577}{4}, \frac{575}{2}, \frac{579}{4}, \frac{577}{2}, \frac{581}{4}, \frac{579}{2}, \frac{583}{4}, \frac{581}{2}, \frac{585}{4}, \frac{583}{2}, \frac{587}{4}, \frac{585}{2}, \frac{589}{4}, \frac{587}{2}, \frac{591}{4}, \frac{589}{2}, \frac{593}{4}, \frac{591}{2}, \frac{595}{4}, \frac{593}{2}, \frac{597}{4}, \frac{595}{2}, \frac{599}{4}, \frac{597}{2}, \frac{601}{4}, \frac{599}{2}, \frac{603}{4}, \frac{601}{2}, \frac{605}{4}, \frac{603}{2}, \frac{607}{4}, \frac{605}{2}, \frac{609}{4}, \frac{607}{2}, \frac{611}{4}, \frac{609}{2}, \frac{613}{4}, \frac{611}{2}, \frac{615}{4}, \frac{613}{2}, \frac{617}{4}, \frac{615}{2}, \frac{619}{4}, \frac{617}{2}, \frac{621}{4}, \frac{619}{2}, \frac{623}{4}, \frac{621}{2}, \frac{625}{4}, \frac{623}{2}, \frac{627}{4}, \frac{625}{2}, \frac{629}{4}, \frac{627}{2}, \frac{631}{4}, \frac{629}{2}, \frac{633}{4}, \frac{631}{2}, \frac{635}{4}, \frac{633}{2}, \frac{637}{4}, \frac{635}{2}, \frac{639}{4}, \frac{637}{2}, \frac{641}{4}, \frac{639}{2}, \frac{643}{4}, \frac{641}{2}, \frac{645}{4}, \frac{643}{2}, \frac{647}{4}, \frac{645}{2}, \frac{649}{4}, \frac{647}{2}, \frac{651}{4}, \frac{649}{2}, \frac{653}{4}, \frac{651}{2}, \frac{655}{4}, \frac{653}{2}, \frac{657}{4}, \frac{655}{2}, \frac{659}{4}, \frac{657}{2}, \frac{661}{4}, \frac{659}{2}, \frac{663}{4}, \frac{661}{2}, \frac{665}{4}, \frac{663}{2}, \frac{667}{4}, \frac{665}{2}, \frac{669}{4}, \frac{667}{2}, \frac{671}{4}, \frac{669}{2}, \frac{673}{4}, \frac{671}{2}, \frac{675}{4}, \frac{673}{2}, \frac{677}{4}, \frac{675}{2}, \frac{679}{4}, \frac{677}{2}, \frac{681}{4}, \frac{679}{2}, \frac{683}{4}, \frac{681}{2}, \frac{685}{4}, \frac{683}{2}, \frac{687}{4}, \frac{685}{2}, \frac{689}{4}, \frac{687}{2}, \frac{691}{4}, \frac{689}{2}, \frac{693}{4}, \frac{691}{2}, \frac{695}{4}, \frac{693}{2}, \frac{697}{4}, \frac{695}{2}, \frac{699}{4}, \frac{697}{2}, \frac{701}{4}, \frac{699}{2}, \frac{703}{4}, \frac{701}{2}, \frac{705}{4}, \frac{703}{2}, \frac{707}{4}, \frac{705}{2}, \frac{709}{4}, \frac{707}{2}, \frac{711}{4}, \frac{709}{2}, \frac{713}{4}, \frac{711}{2}, \frac{715}{4}, \frac{713}{2}, \frac{717}{4}, \frac{715}{2}, \frac{719}{4}, \frac{717}{2}, \frac{721}{4}, \frac{719}{2}, \frac{723}{4}, \frac{721}{2}, \frac{725}{4}, \frac{723}{2}, \frac{727}{4}, \frac{725}{2}, \frac{729}{4}, \frac{727}{2}, \frac{731}{4}, \frac{729}{2}, \frac{733}{4}, \frac{731}{2}, \frac{735}{4}, \frac{733}{2}, \frac{737}{4}, \frac{735}{2}, \frac{739}{4}, \frac{737}{2}, \frac{741}{4}, \frac{739}{2}, \frac{743}{4}, \frac{741}{2}, \frac{745}{4}, \frac{743}{2}, \frac{747}{4}, \frac{745}{2}, \frac{749}{4}, \frac{747}{2}, \frac{751}{4}, \frac{749}{2}, \frac{753}{4}, \frac{751}{2}, \frac{755}{4}, \frac{753}{2}, \frac{757}{4}, \frac{755}{2}, \frac{759}{4}, \frac{757}{2}, \frac{761}{4}, \frac{759}{2}, \frac{763}{4}, \frac{761}{2}, \frac{765}{4}, \frac{763}{2}, \frac{767}{4}, \frac{765}{2}, \frac{769}{4}, \frac{767}{2}, \frac{771}{4}, \frac{769}{2}, \frac{773}{4}, \frac{771}{2}, \frac{775}{4}, \frac{773}{2}, \frac{777}{4}, \frac{775}{2}, \frac{779}{4}, \frac{777}{2}, \frac{781}{4}, \frac{779}{2}, \frac{783}{4}, \frac{781}{2}, \frac{785}{4}, \frac{783}{2}, \frac{787}{4}, \frac{785}{2}, \frac{789}{4}, \frac{787}{2}, \frac{791}{4}, \frac{789}{2}, \frac{793}{4}, \frac{791}{2}, \frac{795}{4}, \frac{793}{2}, \frac{797}{4}, \frac{795}{2}, \frac{799}{4}, \frac{797}{2}, \frac{801}{4}, \frac{799}{2}, \frac{803}{4}, \frac{801}{2}, \frac{805}{4}, \frac{803}{2}, \frac{807}{4}, \frac{805}{2}, \frac{809}{4}, \frac{807}{2}, \$$

b) Wir setzen in die Gleichung $a_n = a_1 + (n-1)d$ die gefundenen Werte ein und erhalten

$$a_n = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

c) $a_{100} = a_1 + 99d, \quad a_{100} = \frac{1}{4} + 99 \cdot \frac{1}{2},$
 $a_{100} = 148 \frac{3}{4}.$

d) Für die n. Partialsumme einer arithmetischen Folge gilt

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \text{ also } s_{100} =$$

$$50 \left(\frac{1}{4} + 148 \frac{3}{4} \right) s_{100} = 50 \cdot 149 = 7450.$$

E/9

Lösung:

a) $40\,000\,000 \text{ m} : 5,50 \text{ m} = 1,50 \text{ m} : x,$

$$x = \frac{5,50 \text{ m} \cdot 1,50 \text{ m}}{40\,000\,000 \text{ m}}; \quad x = 0,000.000.206$$

$$= 0,000.000.2 \text{ m};$$

$$x = 0,0002 \text{ mm}; \quad x = \frac{1}{5000} \text{ mm}.$$

Man dürfe sich höchstens um $\pm \frac{1}{5000}$ mm vermessen.

b) $40\,000 \text{ km} : 0,0055 \text{ km}$

$$= 150\,000\,000 \text{ km} : x;$$

$$x = \frac{0,0055 \text{ km} \cdot 150\,000\,000 \text{ km}}{40\,000 \text{ km}};$$

$$x = 20,625 \text{ km}.$$

Man dürfe sich höchstens um 20,625 km vermessen.

E/10

Lösung:

Es handelt sich um einen erweiterten Dreisatz. Man kann zunächst auf die zwei Einheiten schließen: Ein einzeilige 1 mm

lange Anzeige kostet $\frac{181,40 \text{ DM}}{4 \cdot 117}$.

Eine siebenzeilige 83 mm lange Anzeige kostet $\frac{181,40 \text{ DM} \cdot 7 \cdot 83}{4 \cdot 117} = 225,20 \text{ DM}$

incl. MWSt.

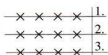
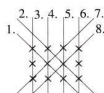
Nun gilt $225,20 : x = 114 : 100,$

$$x = \frac{225,20 \cdot 100}{114},$$

$$x = 197,54 \text{ DM}$$

E/11

Lösung:



Wir erkennen an der Skizze, daß achtmal je drei Punkte auf einer Geraden liegen, deren Verbindungsgeraden bestimmen kein Dreieck. Es liegen weiterhin dreimal vier Punkte auf einer Geraden. Jede beliebige Auswahl von drei aus diesen vier Punkten führt ebenfalls zu keinem Dreieck. Es fallen also außer den 8 noch weitere

$$3 \cdot \binom{4}{3} = 3 \cdot \binom{4}{4-3} = 3 \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 4 = 12$$

Fälle weg.

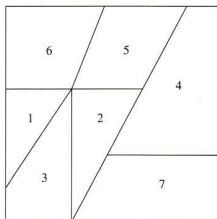
Nun berechnet man alle Möglichkeiten, aus 12 Punkten 3 Punkte auszuwählen,

$$\text{d.h. } \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220 \text{ und subtra-}$$

hiert davon die 20 Auswahlen, die zu keinen Dreiecken führen. Somit kann man auf die angegebene Weise 200 verschiedene Dreiecke zeichnen.

E/12

Lösung:



Es muß gelten: $F_R = F_G$ (F_R - Radialkraft, F_G - Gravitationskraft)

Daraus folgt: $v^2 = \chi \cdot \frac{M_E}{r}$.

Ersetzung der Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \quad (v = \omega \cdot r) \text{ führt zu: } r = \sqrt{\chi \cdot \frac{M_E}{\omega^2}}.$$

Unter Nutzung von $\omega = \frac{1}{24 \text{ h}} \cdot 2\pi$ und $r = r_E + h$

$$\text{erhält man: } h = \sqrt{\chi \cdot \frac{M_E}{4\pi^2} \cdot 24 \text{ h} - r_E}$$

$$h = 35\,870 \text{ km}$$

E/13

Lösung:

Damit keine ablenkenden Kräfte auf das bewegte Elektron wirken, muß die Lorentzkraft entgegengesetzt gleich der

Kraft durch das elektrische Feld sein. $e \cdot v_x \cdot B_y = e \cdot E_x$. Daraus: $v_x = E_x/B_y$.

E/14

Lösung:

Aufgenommene Wärme = abgegebene Wärme.

$$m_{Al} c_{Al} (t_2 - t_m) = m_{Ag} c_{Ag} (t_m - t_1) + m_{K} c_{K} (t_m - t_1), \quad t_m = 20^\circ \text{ C}.$$

Buchrezension

Die neue Reihe über die jungen Supertalente

In der neuen Reihe *Challengers – So spielt ...* soll die erfolgreiche Karriere junger Großmeister der absoluten Weltspitze unverwechselbar dokumentiert werden. Der erste Band ist Nigel Short gewidmet, dem derzeit besten Schachspieler des Westens.

Auf Wunderkindern lastet stets der Fluch hoher Erwartungen. Nigel Short hat sie erfüllt: Mit 14 teilte er den Sieg bei der Britischen Meisterschaft; mit 15 wird er Jugendvizeweltmeister hinter Garri Kasparow; mit 19 ist er Großmeister; mit 22 wird er WM-Kandidat und die Nummer drei der Schachwelt hinter K & K. Aus der großen Hoffnung des Westens wurde der Beste des Westens. Plötzlich aber der Karriereknick! Doch Nigel Short hat diese unerwartete Stagnation glänzend überwunden. Im April 1992 wirft er keinen Geringeren als Exweltmeister Anatoli Karpow aus dem Rennen um das Recht, mit Titelverteidiger Garri Kasparow um die Schachkrone zu spielen. Und seine Großmeisterkollegen attestieren ihm, daß er sich noch gehörig steigern kann.

Übrigens: Weltmeister Kasparows Tip für das WM-Finale 1993 lautet: „My Challenger will be Short!“ Deshalb unser Tip an alle Schachfans: Nehmt diese Herausforderung an und studiert das Spiel von Nigel Short. Gewinnbringende Ideen für die eigene Praxis sind mit diesen ungewöhnlichen Schachbuch garantiert!

Stefan Löffler (Hrsg.): Challengers – So spielt Nigel Short

Ca. 128 Seiten, ca. 10 Fotos, ca. 70 Diagramme, 13,8 x 22,5 cm, Broschur

DM 24,80

ISBN 3-328-00586-2

Sportverlag 1993

Spielstärkevergleich

Die Berechnung der Wertzahlen im Schach

Was für die Tennisprofis die ATP-Rangliste, ist für die deutschen Schachamateure (und die wenigen Profis) die Rangliste nach DWZ. Jeder Spieler, der sich an Wettkämpfen, die gewissen Normen unterliegen, beteiligt, erhält eine Wertzahl – seine relative Spielstärke zu einem bestimmten Zeitpunkt ausdrückend. Wie erfolgt nun die Berechnung?

In fast allen Ländern der Welt werden modifizierte Wertungssysteme, die eine Klassifizierung der Schachspieler ermöglichen, nach dem vom amerikanischen Prof. Arpad E. Elo entwickelten Verfahren – deshalb auch ELO-System genannt – angewendet.

Das ELO-System ist nach wissenschaftlichen Methoden der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie aufgebaut. In Deutschland wurden auf der Basis des ELO-Systems die Deutschen Wertzahlen (DWZ) eingeführt.

In den weiteren Ausführungen werden folgende Abkürzungen verwendet:

- Ro: eigene DWZ vor Auswertung des Turniers
Rh: Turniererfolgswahl
Rc: Durchschnitt der DWZ der Gegner
D: Differenz zwischen eigener DWZ und Rc

P(D): Gewinnerwartung pro Partie in Punkten bezogen Ro des jeweiligen Gegners

D(P): Differenz der Wertungszahl abhängig vom Punktergebnis P ($P=W/n$) aus Wahrscheinlichkeitstabellen (Umkehrung von P(D))

W: Summe der erzielten Punkte

We: Summe der Punktwerte der Gewinnerwartung

n: Anzahl der wertbaren Partien

Rn: neue Wertzahl nach Auswertung des Turniers

E: Entwicklungskoeffizient (abhängig von Alter und Spielstärke)

K: Entwicklungskoeffizient (in Formel (4) und (8))

J: Alterskonstante

Für Spieler ohne DWZ

Es wird eine Turniererfolgswahl Rh berechnet:

$$(1) Rh = Ro + ((W - We) \cdot 800 / n).$$

Die Gewinnerwartung P(D) kann einer Wahrscheinlichkeitstabelle entnommen werden, wobei bei gleicher angenommener Spielstärke P(D)=0.50 ist und z. B. bei einer Differenz von +100 DWZ-

Punkten P(D)=0.64 bzw. 0.36 ist. Bei einer Differenz über 735 wäre P(D)=1.00 bzw. 0.00, woraus sich erklärt, daß diese Extremergebnisse zu keiner Auswertung (neue Zahl) führen. Die positiven Ergebnisse werden aber gespeichert und später berücksichtigt. P(D) kann auch mit folgender, hinreichend genauen Näherungsformel berechnet werden:

$$(2) P(D) = 1 / (1 + 10^{-d/400}).$$

Die Berechnung von Rh erfolgt durch ein Iterationsverfahren, in dem mit einem Schätzwert für Ro begonnen wird. Mit diesem Schätzwert, in die Gleichung (1) eingesetzt, erhält man einen ersten Näherungswert für Rh. Dieser wird dann als Ro in die Gleichung eingesetzt, und man erhält eine verbesserte Näherung für Rh. Selbstverständlich muß man bei jedem neuen Berechnungsvorgang auch den neuen Wert für We, bezogen auf den letzten Näherungswert von Rh, verwenden. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis sich die auf eine ganze Zahl gerundete Turniererfolgswahl nicht mehr ändert. Diese Zahl ist dann die gesuchte Turniererfolgswahl. Sie erfüllt dann mit $Rh=Ro$ die Gleichung (1).

Beispiel: Für den Spieler X soll gelten

Punkte	Gegner	DWZ
0	A	2250
0	B	2000
0.5	C	1800
0	D	1700
1	E	1400

$$1.5 \quad 9150$$

Einen für den Beginn der Iterationsrechnung brauchbaren Näherungswert erhält man durch folgende Formel:

$$(3) Rh = Rc + D(P)$$

$$W = 1.5$$

$$n = 5$$

$$P = W/n = 1.5/5 = 0.3$$

$$D = -149$$

$$Rc = 9150/5 = 1830$$

$$Rh = 1830 - 149 = 1681; \text{ Näherungswert für den Beginn der Iterationsrechnung}$$

Dieser Wert wird als Ro in Formel (1) eingesetzt (siehe Tabelle links).

Berechnung einer neuen Wertungszahl

Die neue Wertungszahl Rn kann aus dem Turnierergebnis und der alten Wertungszahl Ro mit folgender, von der FIDE

Tabelle der Iterationsrechnung

	1. Durchg.		2. Durchg.		3. Durchg.		4. Durchg.		5. Durchg.	
	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)
Pkt/Gegn	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)	D	P(D)
0 A 2250	-569	0.02	-613	0.02	-633	0.01	-638	0.01	-641	0.01
0 B 2000	-319	0.13	-367	0.10	-383	0.09	-388	0.09	-391	0.09
0.5 C 1800	-119	0.34	-167	0.28	-183	0.26	-188	0.26	-191	0.25
0 D 1700	-19	0.47	-67	0.41	-83	0.39	-88	0.38	-91	0.38
1 E 1400	281	0.84	233	0.79	217	0.78	212	0.78	209	0.77
Summe P(D)=We=	1.80		1.60		1.53		1.52		1.50	
W-We=	-0.3		-0.1		-0.03		-0.02		0	
Rh=										
Ro+(W-We)*160=	1633		1617		1612		1609		1609	

Somit ist $Rh=Ro=1609$ die erste Wertungszahl für den Spieler X.

(Weltschachbund) verwendeten Formel berechnet werden:

$$(4) Rn = Ro + (W - We) \cdot K$$

wobei K durch

$$(5) K = 800 / (E + n)$$

bzw. $E = 800 / k - n$ definiert ist und E mit der Formel (10) berechnet wird. Aus Formel (4) und (5) ergibt sich dann

$$(6) Rn = Ro + (w - We) \cdot 800 / (E + n)$$

Soll die neue Wertzahl Rn aus der Turniererfolgszahl Rh und der alten DWZ Ro berechnet werden, so können mit folgenden 2 Formeln mathematisch identische Ergebnisse wie mit Formel (4) erzielt werden:

$$(7) Rn = E \cdot Ro + n \cdot Rh / (E + n)$$

oder

$$(8) Rn = Ro + Rh - Ro \cdot k \cdot n / 800$$

wobei wiederum Formel (5) für die Beziehung zwischen K und E gelten muß. Formel (8) kann somit auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(9) Rn = Ro + (Rh - Ro) \cdot n / (E + n)$$

Der Entwicklungskoeffizient E (Neuerung gegenüber dem ELO-System) wird abhängig vom Alter und der Spielstärke berechnet:

$$(10) E = (Ro / 1000)^{1/4}$$

wobei gilt:

J=5 für Jugendliche bis 20 Jahre

J=10 für Junioren von 21 bis 25 Jahre

J=15 für alle Spieler ab 26 Jahren

Dieses bevorzugt jüngere Spieler bei ihrer Leistungsentwicklung.

Berechnungsbeispiel für Spieler NN gilt:

18 Jahre alt $Ro = 1800$

Pkt	Gegner	DWZ	D
P(D)			
1 A	2300	-500	0.04
0 B	2100	-300	0.15
1 C	2000	-200	0.24
0,5 D	1900	-100	0.36
1 E	1800	0	0.5

W=3,5

$$We = \text{Summe } (P(D)) = 1,29$$

n=5

Mit diesen Werten erhält man nach Gleichung (1) die Turniererfolgszahl Rh:

$$Rh = 1800 + (3,5 - 1,29) \cdot 800 / 5$$

$$Rh = 2153,6$$

$$Rh = 2154$$

Die neue DWZ erhält man mit $E = 15$ (aus Tabellen zu entnehmen oder mit Formel (10) zu berechnen) z. B. nach Gleichung (4):

$$Rn = Ro + (W - We) \cdot K \quad (K = 800 / (E + n))$$

$$Rn = 1800 + (3,5 - 1,29) \cdot (800 / (15 + 5))$$

$$Rn = 1888,4$$

Der gerundete Wert ergibt $Rn = 1888$, also einen Zuwachs um 88, was auch logisch

ist, denn gegen einen DWZ-Durchschnitt $Re = 2020$ wurden 70% der Punkte erzielt. Spielstärkebewertung nach DWZ

0..700	– Anfänger/Lernender
700..1000	– fortgeschr. Anfänger
1000..1500	– Vereinsspieler
1500..1800	– guter Vereinsspieler
1800..2150	– starker Vereinsspieler

2150..2300	– Nationaler Meister
2300..2400	– Internationaler Meister
2400..2500	– Großmeister
über 2500	– Weltklassespieler

Holger Borchers,
Vizepräsident des Berliner
Schachverbandes

Buchrezension

Wie schlägt man Bobby Fischer?

Edmar Mednis hat alle Verlustpartien des elften Schachweltmeisters (1972-1975), der am 2. September 1992 sein unerwartetes Comeback feierte, untersucht und gibt damit Antwort auf die Frage: Wie schlägt man Bobby Fischer?

Edmar Mednis, selbst Großmeister, hat im Jahr 1974 das kühne Wagnis unternommen, alle 61 Verlustpartien des Exzentrikers aus Pasadena/USA im Zeitraum vom 17.12.1957 bis zum Gewinn der Schachkrone am 2.9.1972 akribisch zu untersuchen. Das Ergebnis ist die verblüffende Antwort auf die alle Schachfans bewegende Frage: Wie schlägt man Bobby Fischer? Mednis, der selbst zu den insgesamt 33 „Auserwählten“ gehört, denen dieses schachliche Wunder bisher gelungen ist, hat

seine geniale Idee in diesem aufsehen-erregenden, unterhaltsamen Buch veröffentlicht. Er bestätigt nachhaltig, was der Engländer Raymond Keene einmal treffend über das heute 49jährige „Superhirn“ Bobby sagte: „Fischer macht Schach einfach zu einer aufregenden Sache, wann immer er sich ans Brett setzt.“

Edmar Mednis: Wie schlägt man Bobby Fischer?

Originaltitel: How To Beat Bobby Fischer, Bantam Books Inc., New York.

Deutsche Erstausgabe

Ca. 256 Seiten, ca. 200 Diagramme, ca. 14 Fotos, 13,8 x 22,5 cm, gebunden

ca. DM 29,80

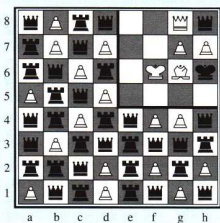
ISBN 3-328-00488-9

Sportverlag 1993

2 in 1

Unsere schachliche Knobelaufgabe beinhaltet diesmal zwei Aufgaben unterschiedlicher Art auf einem Schachbrett. Bei der ersten Aufgabe ist in dem abgegrenzten Teilquadrat des Schachfeldes ein Zweizüger von T. Schönberger zu lösen. **Wie beginnt Weiß und setzt den schwarzen König im 2. Zug matt?**

Für die zweite Aufgabe sind im übrigen Teil des Schachfeldes weiße Bauern, schwarze Türme und schwarze Damen scheinbar planlos angeordnet. **Hier ist zu versuchen, den dargestellten Teil des Schachfeldes in mehrere Teile zu zerlegen. Die zerlegten Teile sollen geometrisch identisch sein und die**



gleichen Schachsteine enthalten. Ist dies möglich?

Harald Rüdiger

Mode und Mathematik

Eine Aufgabe für künftige Couturiers

Hella hat in einem Modegeschäft einen Rock gesehen, der ihr ausnehmend gut gefällt. Aber er ist zwei Nummern zu groß für sie. Also beschließt sie, ihn nachzuarbeiten. Die Herstellung des extravaganten Wickelrocks, der hinten doppelt so lang ist wie vorn, erfordert aber mathematische Kenntnisse.

Wenn man den Rock flach ausbreitet, bilden Saum- und Taillenlinie zwei exzentrische Kreise. Wo die Entfernung der beiden Peripherien am kürzesten ist, wurde die Fläche auseinander geschnitten. Die sechs Nähte, die die Rockbahnen verbinden, stellen Verlängerungen von Taillenkreisradien dar und sind am Bund gleich weit voneinander entfernt. Nur die beiden Vorderteile sind oben etwa 1,5 cm breiter. Daraus schließt Hella: Der Zentriwinkel, den die Verlängerungen von Naht und Kante je eines Vorderteils bilden, ist schätzungsweise um 5° größer als die fünf restlichen Zentriwinkel.

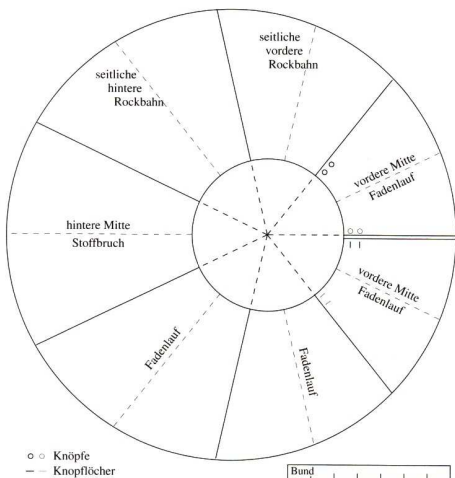
Vorüberlegungen

Zieht man den Rock nun an und knöpft die beiden Vorderteile übereinander, dann überdecken sie sich so weit, daß die kurze Kante des Über- bzw. des Eintritts jeweils die nächste Teilungsnäht berührt. Bundstreifen und Kreisumfang müssen also entsprechend größer sein als Hellas Taillenweite.

Sie geht von folgenden Maßen aus:

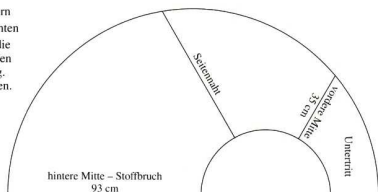
- Taillenweite (locker gemessen, weil nur der Bund straff sitzen muß): 65 cm
- straff gemessene Taillenweite 63 cm
- Rocklänge in der vorderen Mitte 40 cm
- Rocklänge in der hinteren Mitte 80 cm

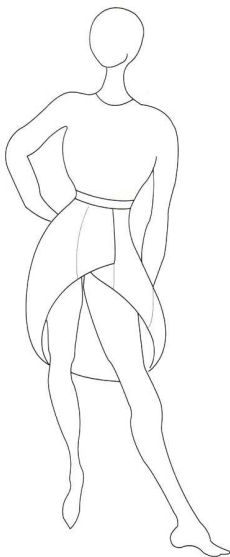
Das Ergebnis der Bund- und Radiusberechnung rundet Hella auf ganze Zentimeter auf und konstruiert den Schnitt nur als Hälfte, weil sie ihn, wie üblich, auf den längs gefalteten Stoff auflegen will. Als Probe fertigt sie den Rock erst einmal im Maßstab 1:5 für die schlanke Puppe ihrer kleinen Schwester.



Schnitt für einen Wickelrock (Hälfte) gegeben sind:

Taillenweite
Rocklänge vorn
Rocklänge hinten
Winkel, den die Verlängerungen der beiden o.g. Strecken bilden.





Aufgabenstellungen

Die Aufgaben, die Hella im einzelnen lösen muß, könnt Ihr Euch nun eigentlich selbst stellen. Entscheidet also, ob Ihr gleich ans Knobeln geht oder – als Arbeitsanleitung – erst noch die folgenden Fragen lest.

1. Wie lang muß der Bund werden?
2. Wie groß ist der Radius des Tailenkreises?
3. Wie groß ist der Winkel, in dem sich die Verlängerungen von vorderer und hinterer Mitte treffen?
4. Wo liegt der Mittelpunkt des Saumkreises? (Bestimmungslinien!)
5. Konstruiere den Schnitt (Hälfte) und gib bei jeder Rockbahn den Fadenlauf (Mittellinie, Winkelhalbierende) an!
6. Schneide die vier Schnitt-Teile aus und lege sie so auf den 1,50 m breiten, längs gefalteten Stoff, daß Du
 - a) den Fadenlauf beachtest (Fadenlauf = Parallele zur Webekante – Augenmaß genügt)

- b) für Nähte und Säume rundum ca. 1 cm zugibst (auch hier genügt das Augenmaß!);
- c) an der Webekante einen 8 cm breiten Bundstreifen übrigbehältst, der aus zwei oder drei Teilen so zusammengesetzt sein darf, daß Bund-

- nähte auf Rockbahnnähte treffen;
 - d) und daß wenig Verschnitt entsteht.
7. Wieviel Meter Stoff muß Hella kaufen? Meßt auf Eurer Skizze nach und rundet auf volle Dezimeter auf!

Johanna Heller

Knobeleyen

Größte Primzahl!!

Welches ist die größte Primzahl, aus der durch alle möglichen Streichungen ihrer Ziffern stets wieder Primzahlen entstehen?

Lösung

Da 1 und 9 keine Primzahlen sind und eine oder mehr mehr als 1 Ziffer gestrichen werden darf, kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage, wobei 2 oder 5 jeweils nur an erster Stelle stehen dürfen. Keine der dreistelligen Primzahlen 233, 277, 337, 373, 533, 577, 733 und 773 bleibt nach der Streichung einer bestimmten Ziffer prim. Also ist die gesuchte Zahl zweistellig, nämlich 73!

Wörter-Maximum

Gesucht wird ein einzelnes Wort mit möglichst vielen Buchstaben. Nimmt man an irgendeiner Stelle dieses Wortes einen Buchstaben weg, so ergibt sich ein neues Wort. Mit dem gekürzten Wort verfährt man wieder so usw. Schließlich bleibt ein Wort mit nur noch zwei Buchstaben übrig. Alle Wörter (ggf. Abkürzungen) sollen im Rechtschreibe-Duden vorkommen. Wieviel Buchstaben hat das längste Wort, wenn gebeugte Wortformen (z. B. Eier, ist, lachend) und Abkürzungen (z. B. DIN a) nicht zugelassen b) zugelassen sind?

Lösung

Das bisherige Maximum zu a) hat 9 Buchstaben: ablassen, ablassen, blasen, blasen, Base, Base, Ase, As, zu b) 14: verstehenderen, verstehendere ... verstehe, versteh, ersteh, erste, Este, Ste., St. (z. B.: Sie sah es mit verstehenderen Blicken als er.). Wer übertrifft diese „Rekorde“?

Gewinn trotz geringerer Punktezahl!

Tennis ist doch ein sonderbares Spiel! In einem ungewöhnlich spannenden Match gewann Steffi Fürst nach schwachem Start gegen Jana Bukova in drei Sätzen (ohne Tie-Break). Ungewöhnlich war das Match auch deswegen, weil die Verliererin zwei Drittel mehr Einzelpunkte (z. B.: „40:30“ bedeutet 3 zu 2 Einzelpunkte) erzielt hatte als die Siegerin. Wie verlief das Match?

Lösung

Steffi Fürst gewann das Match mit 0:6, 6:4, 6:4. Sie gewann ihre Spiele jeweils „zu 30“, also mit 4 zu 2 Einzelpunkten, Jana Bukova aber jeweils mit „zu 0“, also mit 4 zu 0 Einzelpunkten. Für Steffi ergab das $12 \cdot 4 = 48$, für Jana $12 \cdot 2 + 14 \cdot 4 = 80$. Also erzielte Jana 32 Einzelpunkte (das sind zwei Drittel) mehr als Steffi und verlor doch!

Die verflixte 13!

Welches ist die kleinste Zahl, die genau 13 Teiler hat?

Lösung

Es ist $6^4 = 4096$.

Vokal- und Konsonanten-Rekorde

Welches nichtzusammengesetzte deutsche Wort hat eine Höchstzahl von aufeinanderfolgenden Konsonanten bzw. Vokalen? Beide Wörter dürfen in konjugierter oder deklinierter Form stehen.

Lösung

Das Wort „(du) herrschst“ hat 7 aufeinander folgende Konsonanten, das aus dem Russischen stammende Fremdwort „Borschtsch“, laut Duden eine Kohlsuppe, sogar 8. Das Wort „miauen“ hat vier aufeinander folgende Vokale. Wer überbietet diese „Rekorde“?

Werner Keym, Meisenheim

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu beachten? Teil II

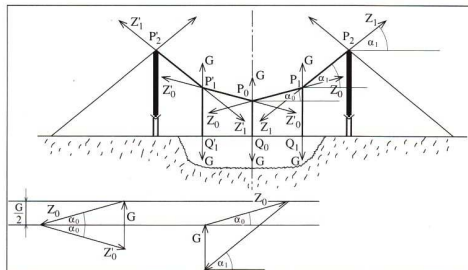


Abb. 7

Dieser Beitrag ist eine Fortsetzung aus dem letzten Heft.

Aus den gemäß der in Teil I gestellten Aufgabe angefertigten Zeichnungen (Abb. 7) wird der Winkel α₁ zu 39°, die Länge L eines Trageiles (von Pylon zu Pylon) zu 18,6 cm und der Durchhang H eines Trageiles zu 4,3 cm bestimmt.

Genauere Ergebnisse und weitere Erkenntnisse als die konstruktive Lösung ergibt die rechnerische Lösung. Diese wird für einen beliebigen Abstand a zweier benachbarter Hängeseile und allgemein für eine ungerade Zahl 2n+1 (n ∈ N) von Hängeseilen auf jeder Brückenseite sowie einen beliebigen Neigungswinkel α₀ (0° < α₀ < 90°) erarbeitet.

Die den Seilknoten P₁, P₂, ..., P_n zugeordneten geschlossenen Kraftecke, die die von ihnen umrandeten Flächen mit negativem Umlaufsinn umgeben, werden so aneinander gelegt, daß jeweils bei den beiden gleich langen und entgegengesetzt gerichteten Kraftpfeilen mit dem Beitrag Z_i die Spitzen mit den Schäften zusammenfallen. (Abb. 8) Der Übersichtlichkeit wegen ist in Abb. 8 von beiden Kraftpfeilen mit dem Betrag Z_i nur einer eingezeichnet. Aus dieser Zeichnung sind mit der Definition des Sinus eines spitzen Winkels (der Sinus eines spitzen Winkels

im rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse) und dem Pythagoreischen Lehrsatz die folgenden Formeln abzulesen:

$$\sin \alpha_0 = \frac{G}{2} : Z_0 \quad Z_0 = \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha_0}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{3G}{2} : Z_1 \quad Z_1 = \frac{3G}{2 \cdot \sin \alpha_1} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{3G}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{5G}{2} : Z_2 \quad Z_2 = \frac{5G}{2 \cdot \sin \alpha_2} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{5G}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha_n = \frac{(2n+1)G}{2} : Z_n \quad Z_n = \frac{(2n+1)G}{2 \cdot \sin \alpha_n} = \sqrt{w^2 + \left(\frac{(2n+1)G}{2}\right)^2}$$

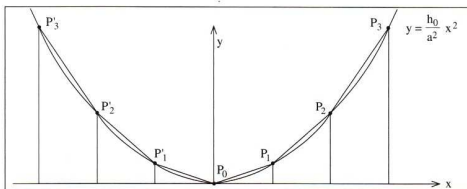


Abb. 10

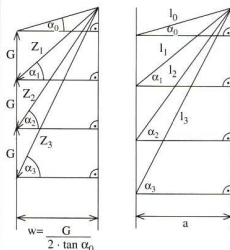


Abb. 8 und Abb. 9

Die gemeinsame Kathete w der rechtwinkligen Dreiecke in Abb. 8 läßt sich mittels der Definition des Tangens eines spitzen Winkels (der Tangens eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient aus Gegenkathete und

Ankathete) darstellen durch $w = \frac{G}{2 \cdot \tan \alpha_0}$

Weiterhin sind die geradlinigen Tragleistücke $l_i = P_i + P_{i+1}$ (i=0,1,2,...,n) mit ihren Stützdreiecken (Abb. 5) unter Beibehaltung ihres Neigungswinkels so aufzuzeichnen, daß ihre Endpunkte P_{i+1} zusammenfallen (Abb. 9). Da die rechtwinkligen Dreiecke der Abb. 8 und 9 mit glei-

chen Winkeln α_i jeweils einander ähnlich sind, gilt für die Höhen h_1 der Stütztri-
ecke $h_1 = 3h_0$, $h_2 = 5h_0$, ... $h_n = (2n+1)h_0$.
Mit der Definition des Tangens und des
Kosinus eines spitzen Winkels (der Kosi-
nus eines spitzen Winkels im rechtwink-
ligen Dreieck ist der Quotient aus Anka-
thete und Hypotenuse) und dem Pytha-
goreischen Lehrsatz ergeben sich die fol-
genden Formeln:

$$\tan \alpha_0 = \frac{h_0}{a} \quad l_0 = \frac{a}{\cos \alpha_0}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{h_1}{a} = \frac{3h_0}{a} \quad l_1 = \frac{a}{\cos \alpha_1} = \sqrt{a^2 + (3h_0)^2}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{h_2}{a} = \frac{5h_0}{a} \quad l_2 = \frac{a}{\cos \alpha_2} = \sqrt{a^2 + (5h_0)^2}$$

$$\tan \alpha_n = \frac{h_n}{a} = \frac{(2n+1)h_0}{a} \quad l_n = \frac{a}{\cos \alpha_n} = \sqrt{a^2 + [(2n+1)h_0]^2}$$

Die rechnerische Lösung der in Teil I ge-
stellten Aufgabe ($a = 4\text{ cm}$, $n = 1$, $\alpha_0 =$
 15°) lautet damit:

Formel: Ergebnis
(mit Taschenrechner)

$$\tan \alpha_1 = 3 \cdot \tan \alpha_0 \quad \alpha_1 = 38,79^\circ$$

$$l_0 = \frac{a}{\cos \alpha_0} \quad l_0 = 4,14\text{ cm}$$

$$l_1 = a \sqrt{1 + (3 \cdot \tan \alpha_0)^2} \quad l_1 = 5,13\text{ cm}$$

$$L = 2(l_0 + l_1) \quad L = 18,55\text{ cm}$$

$$h_0 = a \cdot \tan \alpha_0 \quad h_0 = 1,07\text{ cm}$$

$$h_1 = 3a \cdot \tan \alpha_0 \quad h_1 = 3,22\text{ cm}$$

$$H = h_0 + h_1 = 4a \cdot \tan \alpha_0 \quad H = 4,29\text{ cm}$$

Nun soll noch nachgewiesen werden, daß
die Seilknoten und die Spitzen der Pylo-
ne Punkte einer Parabel sind. (Abb. 10)
Dazu werden in der Eben eines Trage-
seiles zwei aufeinander senkrecht stehen-
de orientierte Geraden, x- und y-Achse
genannt, eingeführt. Die y-Achse fällt mit
der Symmetrieachse des Trageseiles zu-

sammen. Die x-Achse verläuft durch den
tiefsten Punkt P_0 des Trageseiles. Jeder
Punkt der Ebene des Trageseiles ist durch
Angabe seines mit x bezeichneten vor-
zeichenbehafteten Abstandes von der y-
Achse und seines mit y bezeichneten Ab-
standes von der x-Achse bestimmt.
Zunächst seien die Abstandspaare (x; y)
der Seilknoten P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) und der

Für den Bau einer Modellhängebrücke
mit gleich hohen Pylonen und $2n+1$ Hän-
geseilen auf jeder Brückenseite wird man
vermutlich den Abstand A der Pylone und
den Durchhang H der Tragspile vorgeben.
Mit den Formeln $A = 2(n+1) \cdot a$ und

$$H = (n+1)^2 h_0 = (n+1)^2 a \cdot \tan \alpha_0$$

$$= \frac{A(n+1)}{2} \cdot \tan \alpha_0$$

werden dann nach Wahl von n zunächst a
und α_0 ermittelt.

Auch eine in gleicher Weise idealisierte
Modellhängebrücke mit einer geraden
Zahl von Hängeseilen auf jeder Brücken-
seite läßt sich konstruktiv und rechner-
isch betrachten.

Abschließend sei noch mitgeteilt, daß
sich mittlerweile ein weiterer Typ von
Stahlkabelbrücken durchgesetzt hat, die
Schrägseilbrücken. Die erste in einer sol-
chen Konstruktion ausgeführten Brücke
war eine in England 1817 errichtete

Pylonspitze P_{n+1} in einer Tabelle fixiert.

Punkt	Abstand x von y-Achse	Abstand y von x-Achse
P_0	0	0
P_1	a	h_0
P_2	2a	$h_0 + h_1 = 1h_0 + 3h_0 = 4h_0$
P_3	3a	$h_0 + h_1 + h_2 = 1h_0 + 3h_0 + 5h_0 = 9h_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_i	ia	$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_i = 1h_0 + 3h_0 + 5h_0 + \dots + (2i-1)h_0 = i^2 h_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_{n+1}	$(n+1)a$	$(n+1)^2 h_0$

Daß die Summe $1+3+5+\dots+(2i-1) = i^2$ ist,
läßt sich durch die in Abb 11 dargestellte
Folge von aus Einheitsquadraten zusam-
mengesetzten Quadraten belegen. (Die
Abstandspaare (ia; $i^2 h_0$) der Punkte P_i ($i =$
 $0, 1, 2, \dots, n+1$) erfüllen die Gleichung
 $y = \frac{h_0}{a^2} \cdot x$. Die Punkte P_i sind also Punk-
te der Parabel genannten Kurve mit der
Gleichung $y = \frac{h_0}{a^2} \cdot x^2$.

Fußgängerbrücke mit 34m Spannweite.
Die älteste bis heute erhalten gebliebene
Brücke ist die um 850 v. u. Z. aus Stein-
platten erbaute Einzelbogenbrücke über
den Fluß Meles in Izmir (Türkei).
Für Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr.
G. Clemens (Leipzig) danken.

Dr. W. Träger

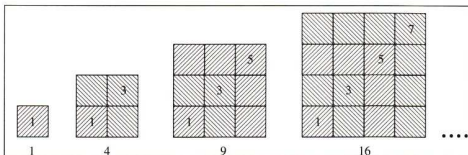


Abb. 11

International Mathematical Talent Search

Die Olympiade-Ecke

Die Welt ist ein Dorf. Nicht aus dem Grund, weil man im Urlaub den Schulfreund getroffen hat, oder die Nachbarin nebenan am Strand liegt. Nein, die Welt ist kleiner geworden: Mit dem Flieger ist es nur ein Katzensprung bis in die hinterste Ecke des Globus. Selbst Computernutzer mit weniger Erfahrung klicken sich mühelos durch internationale Datenetze. Via Satellit könnt ihr euch den halben Erdball ins vertraute Wohnzimmer hereinholen. Seit zwei Jahren macht sich nun ein völlig anderer Zeitvertreib aus den USA auf den Weg zur Erdumrun-

sem Weg ein weltumspannendes Geflecht von Problemlösern zusammenknüpfen zu können. Jeder Teilnehmer darf sozusagen vom behaglichen Sofa aus den Reiz des Neuen und den Prickel internationaler Wettbewerbsatmosphäre erleben.

Sucht ihr also ein fremdes Abenteuer, dann tretet ein in das unbekannte Land IMTS und seid nicht bange, wenn dort in einer anderen Zunge geredet wird. Die Aufgabentexte sind in englischer Sprache abgefaßt; doch sollten Schüler ab der 8. Jahrgangsstufe damit gut zurechtkom-

Das Original aus den USA gab auch den Entwurf ab für die internationale Variante, die ich euch nun näherbringen möchte.

Der IMTS ist ein sogenannter Endloswettbewerb für Liebhaber des Problemlösens. In jeder Runde werden fünf Aufgaben vorgestellt, bei der je gelöster Fragestellung bis zu fünf Punkte eingeheimst werden können. Die einzelnen Runden sind durchnummeriert. Die erfolgreichsten unter allen Teilnehmern **an vier aufeinanderfolgenden Runden** gewinnen Preise (Bücher, Abos mathematischer Zeitschriften, Urkunden). Nach Abschluß jeder Runde erhalten alle Teilnehmer eine Kopie mit der Bewertung ihrer erreichten Lösungen. Dazu gibt es noch in loser Folge das Newsletter zur USAMTS, mit Tabellen zum Vergleich und allgemeinen Informationen für Schüler der Sekundarstufe II.

Getragen wird der IMTS von der wirklich internationalen Schülerzeitschrift *Mathematics & Informatics Quarterly*. Sie erscheint viermal im Jahr und richtet sich besonders an Schüler und Lehrer, die sich in Zirkeln mit Mathematik oder Informatik beschäftigen, die Mathematikwettbewerbe leiten oder an ihnen teilnehmen. Der Neuling unter den Schülermagazinen (erstmal erschienen im Februar 1992) kommt in englischer Sprach heraus und kostet im Abonnement für Schüler im Jahr nur 12 US-Dollar (Sonstige 18 Dollar). M & IQ ist das wohl erste Magazin, das nicht eine spezielle nationale Leserschaft bedient, sondern sich seine Leser rund um den Globus zusammensucht.

Jede weitere Ausgabe von M & IQ bringt fünf ebenfalls neue Probleme mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad für Schüler ab Jahrgangsstufe 8. Interessenten können ihre Lösungen zu den unten abgedruckten Aufgaben (in deutsch) an folgende Adresse zur Bewertung einschicken: **Herrn Dieter Bennewitz, Plankenweg 16, 56070 Koblenz.**

Herr Bennewitz ist Mathelehrer am Koblenzer Max-von-Laue-Gymnasium und der deutsche Statthalter im internationalen Gutachtergremium des IMTS. Er verschickt auf Anfrage die Probleme der jeweils letzten Runde. **Die Lösungen sind bis spätestens 6 Wochen nach Erhalt der Aufgaben an obige Adresse einzusenden.** Legt jeder Einsendung ein Deckblatt bei, auf dem ihr Name, Anschrift,



Vignetten aus der Zeitschrift M & IQ

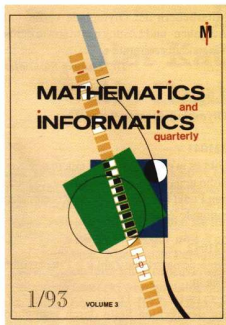
dung: Der **International Mathematical Talent Search (IMTS)**.

Dahinter verbirgt sich der eigenwillige Versuch, weltweit mathematische Begabungen einmal auf ganz andere Weise zu finden, nämlich ohne den üblichen Drill und den andauernden Prüfungsstreß. Verkürzt läßt sich dies auf die Forderung bringen: **Macht Problemlösen zum Nationalsport für Mathe-Begeisterte!** In beinahe allen Mathematik-Wettbewerben müssen zu viele Probleme in viel zu kurzer Zeit an einem unbehaglichen Ort gelöst werden. Solche Wettkampfbedingungen sind beim IMTS Nebensache: Mitmachen allein genügt schon! Aus diesem Grund gibt es auch keine offizielle oder inoffizielle Rangliste. Jeder Teilnehmer darf sich als (heimlicher) Sieger fühlen. Die Organisatoren hoffen aber dennoch, auf die-

sen können. Englisch ist nun einmal die führende Sprache in Wirtschaft, Wissenschaft und Forschung. Es kann nur von Vorteil sein, möglichst früh die internationale Umgangssprache einzuüben.

Willkommen beim internationalen Mathe-Messen

Ich möchte euch nun willkommen heißen, zusammen mit Schülern aus den USA, Bulgarien, Ungarn, Lettland, Litauen oder Singapur, zur mittlerweile schon 8. Runde des IMTS. Die Idee dazu hatten mehrere Hochschulprofessoren und Mathelehrer aus den USA. Der amerikanische Mathematical Talent Search (USAMTS) hat allein im Jahr 1992 über 1100 Neugierige aus Übersee angezogen.



Klassenstufe, Schule und den Namen eures Mathelehrers vermerkt. Alle Lösungen müssen vollständig ausgearbeitet und leserlich geschrieben sein.

Mathe macht mobil

Teilnehmer an diesem Wettbewerb können sich rühmen, zu einer besonderen Gattung von Problemlösern zu gehören. Sie messen sich mit Gleichgesinnten aus aller Welt jeweils an denselben Problemen. Spätere Musterlösungen zu den Aufgaben erlauben eine persönliche Einschätzung eigener Fortschritte durch selbständige Vergleiche – und so lernt man voneinander. Auch bei dem vergeblichen Versuch eine Fragestellung zu lösen, gelangt man oftmals zu bemerkenswerten Einsichten. Die Organisatoren des IMTS bemühen sich übrigens auch um eine Unterstützung durch die UNESCO, einer Unterorganisation der Vereinten Nationen. Die UNESCO fördert die Zusammenarbeit ihrer Mitgliedsstaaten auf den Gebieten der Erziehung, Wissenschaft und Kultur. Zur Verbesserung der Lebensbedingungen auf der Erde genügt es nämlich nicht, ausschließlich Nahrung und Medikamente bereitzustellen. Beides gehört zu einer gesunden körperlichen Entwicklung dazu. Die Fortentwicklung des gesamten Menschen erfordert aber auch eine Stärkung seiner geistigen Anlagen durch Geistesnahrung – neben Büchern satt zur passiven Auseinandersetzung mit angehäuftem Wissen auch

Angebote wie IMTS, die Neugierige zur Betätigung in unbekanntes, zerklüftetes Gelände locken sollen.

So, nun habe ich euch lange auf die Folter gespannt. Hier sind die fünf Aufgaben aus der jüngsten Runde 8. Problem Nummer 1 könnt ihr im Original lesen, die übrigen Aufgabentexte habe ich durch Übersetzung (hoffentlich) etwas entschärft.

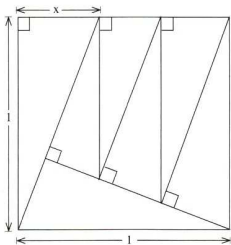
IMTS Probleme – Runde 8

Problem 1/8

Prove that there is no triangle whose altitudes are of length 4, 7, and 10 units.

Problem 2/8

Es sei x eine reelle Zahl, $0 < x < 1$. Die nebenstehende Figur zeigt eine Zerlegung des Einheitsquadrates in sieben ähnliche rechtwinklige Dreiecke in Abhängigkeit von x .



Es ergibt sich, daß dieses x Lösung eines normierten Polynoms vom Grad 5 ist. Bestimme dieses Polynom. (Hinweis: Eine Polynomfunktion $p(x)$ heißt normiert, wenn der Koeffizient des höchsten Potenzterms 1 ist. $p(x)$ besitzt also die Darstellung: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.)

Problem 3/8

i) Ist es möglich, die Zahlen 1, 2, 3, ..., 9 in $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, ..., $a(9)$ so umzubenennen, daß alle Beträge $|a(1)-1|$, $|a(2)-2|$, $|a(3)-3|$, ..., $|a(9)-9|$ verschiedene Werte annehmen?

Beweise die Vermutung!

ii) Wiederhole i) für die Zahlen 1, 2, 3, ..., 9, 10.

Problem 4/8

Anita, Bob und Carol laufen gegeneinander.

Erhält Bob in einem 50-Meter-Rennen von Anita einen Vorsprung von maximal 4 Metern zugestanden, holt sie ihn trotzdem noch auf der Ziellinie ein. Gewährt dagegen Bob seiner Gegnerin Carol über 200 Meter einen Vorsprung von höchstens 15 Metern, hat Bob sie dennoch am Ende des Rennens eingeholt.

Die drei Läufer sollen sich mit untereinander verschiedener aber sonst gleichbleibender Geschwindigkeit fortbewegen.

Wie viele Meter Vorsprung kann Anita ihrer Mitläuferin Carol in einem 1000-Meter-Rennen höchstens zugestehen, damit beide dennoch gleichzeitig ins Ziel kommen?

Problem 5/8

Gegeben sind die reellen Zahlen a , b , x und y sowie das Gleichungssystem

$$a + b = 23 \quad (1)$$

$$ax + by = 79 \quad (2)$$

$$ax^2 + by^2 = 217 \quad (3)$$

$$ax^3 + by^3 = 691 \quad (4)$$

Berechne den Wert des Terms $ax^4 + by^4$.

StR Paul Jainta, Schwabach

32. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe

Deutschland-Olympiade
2. - 5. 1993 in Magdeburg

Information über die Mathematik-Olympiaden in Deutschland

Die Mathematik-Olympiaden sind ein mehrstufiger Wettbewerb, der zur Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler von Klasse 5 an genutzt werden kann. Das Angebot dieses Wettbewerbs wird getragen von einer Interessengemeinschaft in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) und im Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU). Die Olympiaden bieten eine Möglichkeit, anderen Förderungsformen (Arbeitsgemeinschaften, Schülerseminaren, Korrespondenzkreisen, dem Bundeswettbewerb Mathematik usw.) in gegenseitiger Stützung zur Seite zu treten. Die Aufgabenserien sind in folgender Weise aufgebaut:

1. Stufe zu Beginn eines Schuljahres

Die Aufgaben dieser Stufe werden an die Schulen versandt. Sie können z. B. von allen Schülern zu Hause gelöst werden (einzeln oder in Gruppen, auch in Betreuung eines Lehrers oder in zwanglos angesetzten örtlichen Wettbewerben); sie sind auf leichte Zugänglichkeit hin konzipiert, enthalten auch Anregungen zu weiterer mathematischer Beschäftigung und bieten einen ersten Einblick in die Gestaltung von Wettbewerbsaufgaben. Zugleich mit den Aufgaben erhalten die Schulen auch ausgearbeitete Lösungstexte.

2. Stufe (10. November 1993)

Diese Aufgaben können zu einem regionalen Klausurwettbewerb genutzt werden, den benachbarte Schulen z. B. eines Kreises austragen können. Die Lösungstexte sind daher zu Vergleichszwecken auch mit Vorschlägen für die Vergabe von Punktzahlen (für ganz oder teilweise richtig gelöste Aufgaben) versehen.

3. Stufe (5./6. Februar 1994)

Mit diesen Aufgaben kann in jedem Bundesland, das daran interessiert ist, ein

Wettbewerb ausgerichtet werden, zu dem Schüler aus diesem Bundesland eingeladen werden.

4. Stufe (Deutschland-Olympiade)

Mai 1994; aus dem Land Sachsen-Anhalt wurde das Interesse angekündigt, (ebenso wie im Jahr 1993) nach Magdeburg einzuladen.

Zu diesem Wettbewerb werden von einem Bundesland Schüler ab Klasse 8 aus allen Bundesländern eingeladen. Dabei ist (in der vom Einladenden ermöglichten Anzahl) an die Entsendung von Schülern nach Maßgabe ihres Interesses und ihrer persönlichen mathematischen Fähigkeiten gedacht, also nicht an Voraussetzungen formaler Art (z. B. nicht an ein obligatorisches Durchlaufen der ersten drei Stufen). Die konkrete Gestaltung einer Beteiligung an den Mathematik-Olympiaden kann sich somit den unterschiedlichen Schulformen und einem jeweils insgesamt oder regional angestrebten Vorgehen zur Förderung interessierter Schüler anpassen. Inhaltlich sind die Aufgaben mit den mathematischen Anforderungen der jeweiligen Klassenstufe abgestimmt. Sie regen zugleich an, diesen Schulfach mit geistiger Beweglichkeit und Ausdauer zu nutzen und sich um eine korrekte und sorgfältige Ausdrucksweise zu bemühen.

Es werden Adressen in den einzelnen Bundesländern zusammengestellt, bei denen dann Informationen über die Gestaltung des Wettbewerbs in dem betreffenden Bundesland erfragt werden können. Insbesondere werden dort auch Aufgabenserien – speziell nur 3. und 4. Stufe, die zunächst an diese Adressen gehen –, anzufordern sein. Vorläufig kann beim Autor dieser Beschreibung nach Informationen gefragt werden, z. B. auch über mögliche Mitwirkung bei der Erarbeitung von Aufgaben. (Über Redaktion alpha, PSF 129, 04001 Leipzig).

Für das Schuljahr 1993/94 (die 33. Mathematik-Olympiade) wurde vereinbart, daß der Schroedel Schulbuchverlag die drucktechnische Herstellung der (von

Mitarbeitern der Olympiade verfaßten) Aufgaben- und Lösungstexte sowie deren Versand übernimmt.

Dr. Ludwig Stammer

Aufgaben

Olympiadeklassen 9 und 10

321041

Gibt es in einer Ebene mit einem x , y -Koordinatensystem eine Kreislösung, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

321042

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$p_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$ auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so daß in dem (so geschriebenen) Polynom jede Potenz von x genau einen Koeffizienten erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).

a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind mindestens drei Koeffizienten ungerade.

b) Beweisen Sie, daß es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind genau drei Koeffizienten ungerade.

Von den nachstehenden Aufgaben 321043A und 321043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321043A

Zeigen Sie, daß es ein ebenes Vieleck $P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, d. h.: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n, P_n P_1$ gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.

(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} ($2 < k < n-1$), für die Folgendes gilt:

(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_k geht der Streckenzug $P_k P_{k+1} \dots P_n$ in den Streckenzug $P_k \dots P_{k-1} P_{k-2} \dots P_1$ über.

(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_k \dots P_n$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Strecken-

zug $P_1, P_2, \dots, P_n$ abgebildet.

Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind. Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. (Freilich können Sie genauere Zeichen auch durch – dann lückenlos zu gebende – Konstruktionsbeschreibung ersetzen.)

321043B

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b , für die sich bei Division des Polynoms $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$ durch das Polynom $g(x) = x^2 + ax + b$ erweist, daß ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x , für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

321044

Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahlen 2^n für alle natürlichen Zahlen $n = 10, 11, 12, \dots, 108, 109$ fest:

(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n = 11, 12, \dots, 108, 109$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^{10} = 1024$ auftritt.

Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren.

Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt. Nun wird folgende Frage gestellt:

(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n ($n = 11, 12, \dots, 108, 109$) zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?

Beweisen Sie, daß die Frage (**) mit „Nein“ zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne daß man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n ($n = 11, 12, \dots, 108, 109$) wieder berechnen müßte!

321045

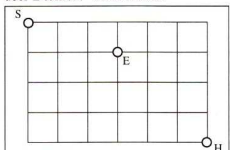
In Abb. A 321045 wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege. Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, d. h. so, daß jede

dieser zwei Richtungen, unabhängig von vorher getroffenen Entscheidungen, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, daß derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

a) Er erklärt dazu: „Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E.“ Trifft das zu?

b) Seine Mutter meint: „Dennoch müßte – bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn – durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen.“ Trifft das zu?



321046

Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert $2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$.

Olympiakklassen 11 – 13

321241

Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.

Beweisen Sie, daß es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

321242

Man beweise, daß ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

321243

Von 1993 Punkten $P_1, \dots, P_{1993}$ werde vorausgesetzt, daß keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j, i \neq k, j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.

Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 1993$ jeweils die Strecke $P_i P_j$ konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, daß jeder der 1993 Punkte P_i mit minde-

stens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecke verbunden ist.

321244

Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem $a + b + c = 2$, $ab + ac + bc = 1$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}, 0 \leq b \leq \frac{4}{3}, 0 \leq c \leq \frac{4}{3}.$$

321245

Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Von den nachstehenden Aufgaben 321246A und 321246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321246A

Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt. Von n Städten $S_1, \dots, S_n$ werde vorausgesetzt, daß zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen nutzbare) Verbindung besteht und daß diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.

Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, daß es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muß, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

321246B

Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen: f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.

Man beweise: Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.

Die Lösungen senden wir Euch auf Wunsch zu.

Strategische Brettspiele

Battle Chess II – Chinese Chess

Allen, die von der Aufmachung eines Produktes auf den Inhalt rückschließen, macht ein Blick auf den Spielkarton deutlich, daß sich hinter dem martialischem Titel BATTLE CHESS II ein Schachprogramm verbirgt. Der Untertitel verrät dem geneigten Betrachter ferner, daß es sich um chinesisches Schach handelt. Schachexperten wissen, daß herkömmliches Schach mit der chinesischen Variante bereits in den Spielfiguren Unterschiede aufweist. Auf dem Brett von BATTLE CHESS stehen nicht König, Dame oder Turm, hier stehen Ritter, Minister und Streitwagen – alles in feinsten 3-D-Gravur, wenn man es möchte.

Wenn man eine VGA-Karte besitzt, macht man sich auf jeden Fall mit dem 3-D-Spiel vertraut. Hat man über Maus oder Tastatur einen Zug getätigt, marschiert die Figur mit Sound-Unterstützung los. Je nach Figur unterscheiden sich die Zweikämpfe, deren Ausgang durch den Zug vorgegeben ist. Da im chinesischen Schach Figuren doppelgesichtige Bedeutungen haben (Minister/Elefant, Streitwagen/Drache), verwandeln

sich die Figuren für die Kämpfe. Es kämpft die „Zweitbesetzung“ – und das ist originell und gelungen. Da donnern Kanonen, klirren Säbel, schleudern Drachen geräuschvoll Feuerkugeln. Doch warum hat man sich mit der musischen Untermalung nicht deutlicher an originale Musik gehalten? Es kommt wohl daher, daß diese fernöstliche Melodien für unser Ohr zu ungewohnt sind.

Kampfszenen bringen es mit sich, daß man ihrer überdrüssig wird – entweder aus Prinzip, oder weil es mit der Zeit zeitraubend wird, diese Sequenzen beim Schlagabtausch immer wieder ansehen zu müssen. Deswegen können per Menü (F1) die allgemeinen Einstellungen verändert werden. Im 2-D-Spiel hantiert man mit „richtigen“ Spielsteinen, verzichtet auf die Animation. Neun Schwierigkeitsgrade stehen zur Wahl. Spielgegner können ausgesucht werden: Ein menschlicher Partner oder der Computer. Fernschachduelle sind über Modemwahl möglich. Daß man Partien speichern und laden kann, ist selbstverständlich.

In der Reduktion auf das Wesentliche

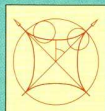
bleibt ein Schachprogramm. Ob es da bessere oder schlechtere gibt, muß jedem überlassen bleiben, der mit Hilfe eines Computers Schachfiguren bewegen möchte. Man muß sich nur vor Augen halten, daß hier chinesisches Schach gespielt wird, ein Spiel, daß vor allem im heutigen Vietnam zu einem Volkssport geworden ist. Dort spielt man es bisweilen mit lebenden Figuren im Freien. So gesehen darf ein Computer-Schach Animationen einsetzen, wenn diese der Spieliologie nicht entgegenwirken, wenn diese das Spiel nicht stören. Bei BATTLE CHESS II hat man den Vorteil, genau diese eventuellen Störfaktoren (nebst) Musik ausschalten zu können. Im Gesamturteil bleibt unter dem Strich: Nicht schlecht, diese Umsetzung.

Das Zeitalter der UPDATES geht auch an Battle Chess nicht vorüber. Inzwischen gibt es die Version BATTLE CHESS 4000 SVGA – mit noch mehr Farbenpracht und noch mehr Animation.

BATTLE CHESS II – CHINESE CHESS, Interplay 1990, VGA, diverse Soundkarten, 640 K Ram, Mausunterstützung, Preis: etwa 100 DM, Genre: animiertes Strategiespiel, Ansichtsexemplar von Rushware, BATTLE CHESS 4000 SVGA Preis: DM 99,95

H. Seitz

Buchhinweise



Taschenbuch mathematischer Formeln

Von Dr. Hans-Jochen Bartsch
15., neubearbeitete Auflage

1993, ca. 700 Seiten, 430 Abbildungen, 19 cm x 12 cm, ISBN 3-343-00844-3, Broschur, ca. DM 28,-

Dieses Buch ist völlig neu bearbeitet und erweitert worden. Es richtet sich besonders an Studenten naturwissenschaftlich-technischer Fachrichtungen

an Fachhochschulen und Hochschulen, Ingenieure, Lehrer.

Alle Themen wurden umfassend überarbeitet und aktualisiert. Es beinhaltet Integraltabellen mit fast 600 unbestimmten und bestimmten Integralen. Das Kapitel Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik enthält moderne stochastische Methoden. Es wird auch eine ausführliche Darstellung der Matrizenrechnung gegeben sowie ausgewählte Verfahren der numerischen Mathematik. Dieses handliche Taschenbuch ist an vielen Bildungstätigkeiten zur Prüfung zugelassen.



Zahlenrätsel für Kenner

Die Beschäftigung mit Zahlenrätseln ist oftmals recht interessant und bereitet Rätsellern viel Freude. Wir wollen deshalb unseren alpha-Lesern mit diesem Beitrag eine Zahlenrätselart vorstellen, die weniger bekannt ist, und für deren Lösung folgende Regeln zu beachten sind:

- (1) In jedes Leerfeld ist genau eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 einzutragen.
- (2) Die Null kommt weder als Einzelziffer noch als Einzelergebnis vor, sondern nur in der Darstellung zwei- und mehrstelliger natürlicher Zahlen.
- (3) Die Ausführung der vorgeschriebenen Rechenoperationen in der ersten (zweiten, dritten, usw.) waagerechten Zeile ergibt dasselbe Ergebnis wie die Summe aus den Zahlen der ersten (zweiten, dritten, usw.) senkrechten Spalte.
- (4) In den waagerechten Zeilen ist unabhängig von der jeweiligen Rechenart fortlaufend, also der Reihe nach von links nach rechts, zu rechnen.

Wer die Lösung eines solchen Zahlenrätsels durch Probieren finden will, wird sehr viel Zeit benötigen. Die fehlenden, in die Leerfelder einzutragenden Ziffern sind vielmehr durch das Erkennen mathematischer Zusammenhänge und durch logisches Schließen zu ermitteln.

Die Lösung eines solchen Zahlenrätsels soll nun an einem Beispiel ausführlich dargestellt werden. Die in den Leerfeldern vorhandenen kleinen Buchstaben (a, b, c, d, ..., z) sind keine Variablen im mathematischen Sinne. Die alphabetische Reihenfolge dieser Buchstaben zeigt beim Nachvollzug des Lösungsweges nur die Reihenfolge der nacheinander einzusetzenden Ziffern an. Die kleinen Buch-

staben dienen also zum Ansprechen eines Leerfeldes.

Entsprechend der Regel (3) muß die zweite waagerechte Zeile dasselbe Ergebnis haben wie die Summe der Zahlen der zweiten senkrechten Spalte, deshalb muß in das Leerfeld a die Ziffer 9, in das Leerfeld b die Ziffer 2 eingetragen werden. Aus dem gleichen Grunde gehört in das Leerfeld c die Ziffer 2. Wenn aber das Leerfeld d die Ziffer 2 enthält, dann kann in den darüberstehenden Leerfeldern e und f jeweils nur die Ziffer 1 stehen. Aus $8 \cdot f$ in der zweiten waagerechten Zeile folgt, daß für den Buchstaben f eine der Ziffern 1, 2, 4 oder 8 eingesetzt werden könnte. Von diesen vier Möglichkeiten scheiden aber die ersten drei aus; denn für diese würde die Summe 29 in der zweiten senkrechten Spalte nicht erreicht werden. Es gilt also $f = 8$.

Nun wird ersichtlich, daß für g die Ziffer 1 einzusetzen ist. Dann ersetzt man in der zweiten waagerechten Zeile den Buchstaben h durch die niedrigste Ziffer Null, erhält man $8 \cdot 8 \cdot 10 + 14 = 24$; für $g = 2$ würde wegen $8 \cdot 8 \cdot 10 + 24 = 34$ das Ergebnis 29 bereits überschritten werden. Daraus folgt weiter $h = 5$. In das Leerfeld i muß eine gerade Zahl kommen; denn in der ersten waagerechten Zeile ist $7 \cdot i \cdot 2$ nur für gerade Zahlen i ausführbar. Für i kommt nur die Zahl 8 in Betracht; denn schon die nächstniedrigere gerade Zahl 6 wäre zu klein, um in der zweiten senkrechten Spalte die Summe 29 zu erreichen. Aus $i = 8$ folgt aber auch $k = 8$. Nun folgt aus der ersten waagerechten Zeile die Summe 30; es gilt $7 \cdot 8 \cdot 2 + 2 = 30$. Die Summe der ersten senkrechten Spalte lautet nach Regel (3) ebenfalls 30. Daraus folgt weiter $n = 6$. Die bisher gefundenen Zahlen der dritten senkrechten Spalte ergeben bereits 29; also muß in das

Feld o die Ziffer 0 kommen. Die Summe aus den Zahlen der dritten senkrechten Spalte beträgt somit 29. Nach Regel (3) lautet das Ergebnis in der dritten waagerechten Zeile ebenfalls 29. Darauf folgt $r = 2$. Die noch fehlenden Zahlen lassen sich nun leicht bestimmen. Es gilt in dieser Reihenfolge $t = 9$, $u = 1$, $v = 4$, $w = 4$, $s = 9$, $x = 3$, $y = 1$. Die vollständige Lösung sei unten rechts angegeben.

Zum Üben für den interessierten Leser wollen wir vier leichte Aufgaben dieser Art anfügen.

Dabei werden die kleinen Buchstaben in den Leerfeldern weggelassen. Das macht

1)

1	:		:		=	
8	+		+		=	
	:	2	:		=	

$\square + 2 \square + \square = \square 3 6$

2)

1	:	3	:		=	4
4 9	:		:		=	1
	:		:		=	

$\square + \square + \square = \square \square$

3)

	:	7	:	9	=	4
4	:		+	1	=	4
	:		:	8	=	

$\square + \square 2 + \square = \square \square 3$

4)

6	:	8	:		=	9
3	:		+		=	5
	:		:		=	

$\square + \square + \square = \square \square 5$

die Lösung reizvoller, da die günstigste Reihenfolge der zu findenden Zahlen nicht mehr vorgegeben wird.

Weitere solcher Zahlenrätsel veröffentlichten wir in einem späteren Heft.

Theodor Scholl

7	:	i	:	2	+	2	=	1	1
8	:	f	:	d	h	+	g	4	=
9	+	k	-	e	o	+	2	r	=
n	:	5	:	2	-	1	u	=	w

$m \cdot m + b \cdot 9 + c \cdot p + v \cdot t = y \cdot x \cdot 7$

7	:	8	:	2	+	2	=	3	0
8	:	8	:	1	5	+	1	4	=
9	+	8	-	1	0	+	2	2	=
6	:	5	:	2	-	1	1	=	4

$3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 7$

Der Sonnenring

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Sonnenhöhe

Für die Höhenmessung der Gestirne gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Am bekanntesten sind der einfache Pendelquadrant sowie der Sextant in der Schifffahrt. In beiden Fällen muß das betreffende Gestirn angepeilt werden, um dessen Höhe über dem Horizont abzulesen.

Es gibt aber noch eine weitere, wenig bekannte Methode, mittels eines Ringes die Höhe der Sonne zu bestimmen. Dieser sogen. Haggese Sonnenring hat den Vorteil, ohne direkte Anpeilung der Sonne durch Projektion eines kleinen Lichtfleckes deren Höhe abzulesen. Die Ablesung erfolgt somit an der Sonne abgewandten Seite, so daß die Augen in keiner Weise gefährdet sind.

Zur Herstellung wird ein 20 bis 30 mm breiter Ring aus Metall oder anderem stabilen Material (Plastik, starke Pappe) benötigt. Eine Aufhängeöse ermöglicht eine frei drehbare Bewegung. Der Durchmesser des Ringes ist nicht bindend, wir gehen aus später zu erläuternden Gründen von einem 115 mm großen Durchmesser aus.

Auf der einen Hälfte des Ringes wird in einem Abstand von etwa 60 mm von der Aufhängeöse in der Mitte der Ringbreite ein Loch von 1 bis 1,5 mm Durchmesser gebohrt. Es wird empfohlen, das Loch in Richtung Sonne zu versenken, um den

Lichteinfall bei wechselnder Sonnenhöhe nicht zu behindern.

Wird der Ring an der Öse also frei aufgehängt und so gedreht, daß die durchbohrte Hälfte zur Sonne weist, dann liegt die Innenseite der anderen Hälfte im Schatten. Je nach der Sonnenhöhe sehen wir auf der beschatteten Innenseite deutlich den kleinen Lichtfleck.

Anfertigung der Winkelteilung

Wählt man für den lichten Durchmesser des Sonnenrings 115 mm, so beträgt nämlich den Abstand von 1° genau 2 mm, das bedeutet, daß man sich bei der Verwendung von Millimeterpapier das mühsame Auftragen der Gradeinteilung ersparen kann.

Aus der Abb. 2 geht hervor, daß einer Sonnenhöhe von h° über dem Horizont ein Mittelpunktswinkel von $2h^\circ$ entspricht. Ändert sich demnach die Höhe der Sonne um $\Delta h = 1^\circ$, so ergibt sich der folgende Skalenabstand a:

$$a = \frac{2\pi \cdot r \cdot 2^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{90} \cdot r = 0,03491 \cdot r$$

$a = 2,007 \text{ mm}$ (r: Radius der Innenseite des Ringes)

Wählt man einen größeren Ringdurchmesser, wird naturgemäß eine größere Genauigkeit erreicht. Ausgehend vom Durchmesser mit 115 mm kann dieser

verdoppelt bzw. verdreifacht werden:

230 mm a: 4 mm ($0,03491^\circ$)

345 mm a: 6 mm

Etwas problematisch ist die Bestimmung des Punktes für 0° , um die Winkelteilung genau auf der Höhe der Bohrung anzubringen. Es wird empfohlen, den Sonnenring an einem Stativ frei aufzuhängen und mit Reißnadel und Richtplatte eines Feinmechanikers den Nullpunkt auf der gegenüberliegenden Seite der Bohrung anzubringen.

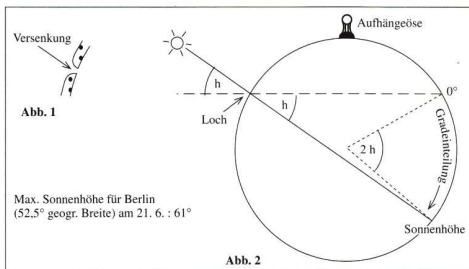
Wer sich in der Berechnung der Mittagshöhe (Kulminationshöhe) der Sonne auskennt, kann auf diese Weise die Gradzahl festlegen und von diesem Punkt ausgehen.

Mit Hilfe des Haggese Sonnenrings läßt sich die Sonnenhöhe verhältnismäßig genau festlegen. Bei Verwendung eines Ringes von 230 mm Durchmesser beträgt die Ablesegenauigkeit $0,25^\circ$ und ist damit größer als bei einem Pendelquadranten. Neben der Ablesegenauigkeit kommt es aber auch darauf an, auch Schülern ein einfaches und leicht herstellbares Hilfsmittel in die Hand zu geben, um Grundbegriffe der Astronomie durch eigene Beobachtungen nahe zu bringen.

Arnold Zenkert

Buchhinweis

Ideen und Anregungen für eigene Experimente liefert das Buch „Astronomische Musterversuche“.





Lösungen

Das Polizei-Abzeichen „California Highway Patrol“, Seite 4

Lösung:

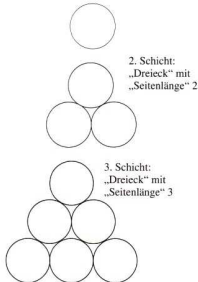
$$\alpha = 77 \frac{1}{7}^\circ, \beta = 51 \frac{3}{7}^\circ$$

Zerbrechlicher Rekord, Seite 4

Lösung:

An der Spitze steht ein einzelnes Glas, darunter 3 Gläser, in der dritten Schicht von oben ein „Gläserdreieck“ mit „Seitenlänge“ 3 u. s. w.:

oben: ein Glas



Wir fragen uns zunächst, aus wieviel Gläsern ein „Gläserdreieck“ der Seitenlänge n besteht. Nach der bekannten Summenformel sind dies genau $1 + 2 + 3 + \dots$

$$\dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ Gläser.}$$

Nun haben wir aber 18 „Gläserdreiecke“ übereinander, so daß sich für die Gesamtzahl die folgende Formel ergibt:

$$\sum_{n=1}^{18} \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{18} (n^2 + n)$$

Nutzt man die Summenformel

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

erhält man:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{18} n^2 + \sum_{n=1}^{18} n \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 18^3 + 3 \cdot 18^2 + 18}{6} + \frac{18 \cdot (18+1)}{2} \right)$$

$$= 1140$$

Ralf Laue

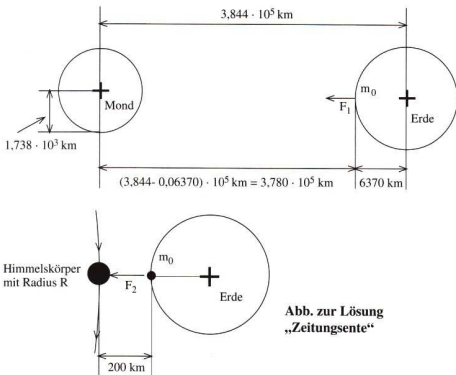


Abb. zur Lösung „Zeitungsente“

Vorsorgespargen
Lösungen:

1. Aufgabe:

a)

$$K_1 = 12R + R \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \dots + \frac{1}{12} \right)$$

$$= 12R + R \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{13 \cdot 6}{12} = 12R + R \cdot \frac{13p}{200}$$

Wegen $p = 5$ und $R = 50$ DM gilt

$$K_1 = 600 \text{ DM} + \frac{13 \cdot 5}{4} \text{ DM} = 616,25 \text{ DM}$$

b) Mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ gilt

$$K_{20} = K_1 \cdot q^{19} + K_1 \cdot q^{18} + \dots + K_1 \cdot q^1 + K_1 + P_{20}$$

$$= K_1 (q^{19} + q^{18} + \dots + q^1 + 1) + P_{20}$$

$$= K_1 \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} + P_{20}$$

Mit $K_1 = 616,25$ DM und

$$P_{20} = \frac{40}{100} \cdot 12R \cdot 20 = 96R = 96 \cdot 50 \text{ DM}$$

$$\text{und } q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05 \text{ ergibt sich}$$

$$K_{20} = 616,25 \text{ DM} \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05}$$

$$+ 4800 \text{ DM} = 616,25 \text{ DM} \cdot 33,065954$$

$$+ 4800 \text{ DM}$$

$$= 20376,89 \text{ DM} + 4800 \text{ DM} =$$

$$25176,89 \text{ DM} \approx 25177 \text{ DM}$$

2. Aufgabe: Mit $q_s = 1 + \frac{p_s}{100}$ und $K_{s1} =$

$$12R + R \cdot \frac{13p_s}{200} = \left(6000 + \frac{13p_s}{4} \right) \text{ DM}$$

gilt für das Guthaben K_{s20} auf dem Sondersparbuch nach der Laufzeit von 20 Jahren:

$$K_{s20} = K_{s1} \cdot (q_s^{19} + q_s^{18} + \dots + q_s^1 + 1)$$

$$= \left(600 + \frac{13p_s}{4} \right) \cdot (q_s^{19} + q_s^{18} + \dots + q_s^1 + 1) = \left(600 + \frac{13p_s}{4} \right) \cdot \frac{q_s^{20} - 1}{q_s - 1} \text{ DM}$$

K_{s20} wächst, da $600 + \frac{13p}{4}$ und $q_s^{19} + q_s^{18} + \dots + q_s^1 + 1$ beide streng monoton mit p_s wachsen, ebenfalls streng monoton mit p_s .

Mit der für K_{s20} angegebenen Formel ergibt sich

$$P_s \quad K_{s20}$$

$$6,85 \quad 25096,00 \text{ DM}$$

$$6,90 \quad 25239,71 \text{ DM}$$

Laut Tabelle und gemäß der Lösung der 1. Aufgabe gilt also $p_s = 6,9$.

Lösung zu „Zeitungsente“:

$$F_1 = G \cdot \frac{m_0 \cdot \frac{4\pi}{3} (1,738 \cdot 10^3 \text{ km})^3 \cdot \delta_M}{(3,780 \cdot 10^5 \text{ km})^2};$$

$$F_2 = G \cdot \frac{m_0 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \delta_M}{(200 \text{ km})^2}$$

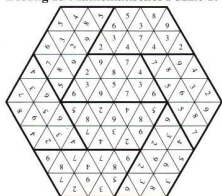
Auf $F_1 = F_2$ folgt

$$\frac{1,738^3 \cdot 10^9 \cdot \text{km}^3}{3,780^2 \cdot 10^{10} \cdot \text{km}^2} = \frac{R^3}{4 \cdot 10^4 \cdot \text{km}^2}$$

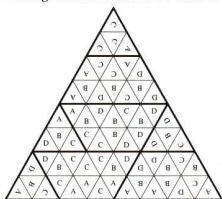
und weiter

$$R = \sqrt[3]{\frac{1,738^3 \cdot 4}{3,780^2}} \cdot 10 \text{ km} \approx 11,4 \text{ km}.$$

Lösung zu Mathematisches Puzzle 1:

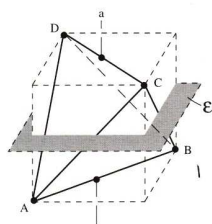


Lösung zu Mathematisches Puzzle 2:



Lösungen zu „Drehspiegelung“

zu 3. Jede der beiden Ebenen, die drei C-Atome und ein (und damit genau zwei) H-Atome enthält, ist eine Symmetrieebene des Allen-Moleküls. Damit gibt es zwei Ebenenspiegelungen als Deckabbildungen. Hinzu kommen die Drehung mit 180° um die Schnittgeraden der Ebene mit diesen beiden Ebenen. Das Allen-Molekül hat also insgesamt 8 Deckabbildungen. zu 5. Jede Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten des regelmäßigen Tetraeders ist Achse von genau zwei Drehspiegelungen, die



Deckabbildung sind. Die mögliche Einbettung des regulären Tetraeders in einen Würfel erleichtert diese Einsicht ganz erheblich (siehe Abb.). Es gibt demnach 6 derartige Drehspiegelungen.

Lösung zu Zahlenrätsel

- 1) $81+8+10=99$; $9+9+2=20$;
 $11+3+3=17$; $99+20+17=136$
- 2) $21+49+14=84$; $3+7+4=14$;
 $12+2+21=35$; $84+14+35=133$
- 3) $42+4+8=54$; $7+8+27=42$;
 $9+10+8=27$; $54+42+27=123$
- 4) $56+35+7=98$; $8+7+10=25$;
 $14+20+18=52$; $98+25+52=175$

Lösung zu Circles with a common centre

Die Differenz ist in beiden Fällen gleich. Hat der Innenkreis den Radius R, so beträgt sein Umfang $2\pi R$. Der größere konzentrische Kreis hat den Umfang $2\pi(R+1)$. Die Differenz ist dann $2\pi(R+1) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi - 2\pi R = 2\pi$. Damit ist, die Differenz unabhängig von der Kreisgröße stets 2π .

Lösung von Pair, impair

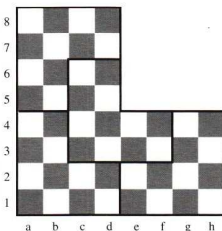
a: 129-49	b: 987-42
516	3948
1161	1974
6321	41454

Lösung zu Quant

Eine wahre Aussage läßt sich durch Umstellung von genau einer Eins nicht erreichen. Ebenso ist diese durch anderes Anordnen von genau einer Null nicht zu schaffen. Es bleibt somit nur eine andere Stellung der Zwei: $101 - 10^2 = 1$

Lösung zu 2 in 1

- 1) l: f8 D: f8/Dg8/D: g7+D: h7
- 2) g: f8D(L)/h: g8S/D: g7/g8S matt.



Lösung zu “Mode und Mathematik”

1. Für die Bundlänge b gilt die Proportion: $b : 63 \text{ cm} = 360^\circ : (6\alpha + 5^\circ)$
 Wenn $7\alpha + 5^\circ = 360^\circ$ sind, ist $\alpha = 50^\circ$ und
 $b = \frac{360^\circ \cdot 63 \text{ cm}}{305^\circ} = 74,361 \text{ cm}$

Der Bund muß 75 cm lang werden.

$$2. 2\pi r \cdot \frac{305}{360} = 65 \text{ cm}$$

$$r = 12,211 \text{ cm}$$

Der Taillenkreis wird mit dem aufgerufenen Radius 13 cm gezeichnet.

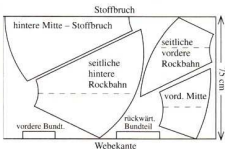
3. Der gesuchte Winkel beträgt $3\alpha + 2,5^\circ$, also $152,5^\circ$.

4. Nennen wir den Saumpunkt in der hinteren Mitte H, den in der vorderen Mitte V, und den Taillenkreismittelpunkt M, dann sind im Dreieck HMV zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, HM ist Symmetrieachse des Rockes, also liegt auch der Saumkreismittelpunkt auf dieser Geraden. HV ist Sehne im Saumkreis. Die Mittelsenkrechte auf der Sehne schneidet HM im Mittelpunkt dieses Kreises.

5.



6. Die Abbildung zeigt eine Möglichkeit, den Schnitt auf den Stoff zu legen. Weil der Bund nicht in einem Stück übrigbleibt, hat Hella sich ausgerechnet, wie lang die drei Teile des Bundes sein müssen, wenn die Bundnähte auf die Seitennähte treffen sollen. Das mittlere Bundteil, das an die drei hinteren Rockbahnen genäht wird, schneidet Hella nur aus einer Stofflage zu, die beidseitig anzusetzenden Bundteile aber, die an je zwei Vorderbahnen genäht werden, schneidet sie aus doppeltem Stoff.



7. Bei einer Stoffbreite von 1,50 m kommt Hella mit 1,70 m aus, kauft aber Sicherheitshalber 1,80 m.