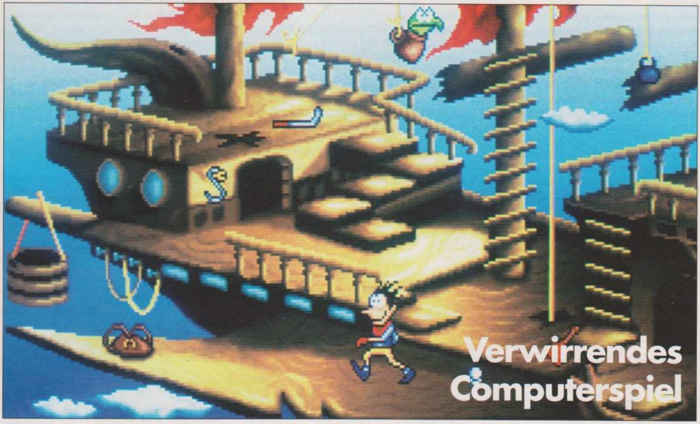
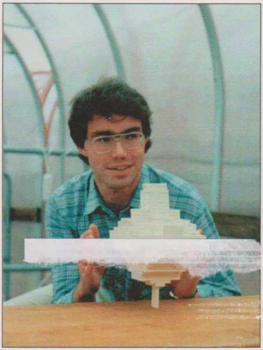
H 11328 F
Heft 6
Dezember 1993
27. Jahrgang
Pädagogische Zeitschriften bei Friedrich in Velber in Zusammenarbeit mit Klett
Best.- Nr. 34017

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift





Weltrekord im Dominostapeln

Die deutsche IMO-Mannschaft

Liebe Freunde und liebe Bezieher von *alpha*,
vom 01. 01. 1994 an erscheint *alpha* im
Reinhardt Becker Verlag; Luisenstraße 45; 16727 Velten

Die Abonnements werden automatisch vom Reinhardt Becker Verlag weitergeführt; das nächste Heft wird aus Velten in Brandenburg zu seinen Lesern kommen. Der Erhard Friedrich Verlag hofft, daß Ihr und Sie *alpha* treu bleiben und dankt seinen bisherigen Abonnenten.

Korrektur

Im Heft 6 des Jahres 1992 erschien ein Artikel „Spinnennetze“. Als Autorin war Claudia Erdmann angegeben. Dieser Artikel ist jedoch vollständig dem Buch von Rüdiger Thiele „Das große Spielvergnügen“, Hugendubel-Verlag, München, entnommen.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Hans Joachim Lemke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53/85
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: Scherrerdruck, Hannover
ISBN 3-617- 34018-0

Inhaltsverzeichnis

Zeitungsschnipsel 4

Wie gewohnt, eine bunte Mischung von Informationen und Aufgaben zur mexikanischen „1-Onza-Sammlermünze“, zu einem Weltrekord im Dominosteinstapeln, zum Durchmesser von Hagelkörnern.

Was war damals für ein Wochentag?..................5

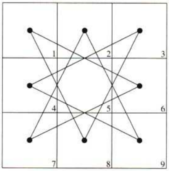
Martin Walter zeigt, wie durch Kopfrechnen oder mit Hilfe von Tabellen der Wochentag zu einem gegebenen Datum ermittelt werden kann.

Chronologie von November 1993 bis Februar 1994 9

Fortführung der beliebten Serie von *H.-J. Ilgauds*, der diesmal besonderes Augenmerk auf den 200. Jahrestag der Eröffnung der Leipziger Universitätssternwarte und auf Felix Hausdorff legt.

Die Knopf-und Schnur-Methode von Sam Loyd............10

Wie weiße und schwarze Springer mit möglichst wenigen Zügen ihre Plätze tauschen können, zeigen *Konrad Haase* und *Rüdiger Thiele*.



Komisches, Kniffliges und Knackiges...........11

Mit dem Redeteil „eine...keine“ führt *L. Kreiser* in eins von „Alphons logischen Abenteuern“. Mit einem Tischtennisball und einer außergewöhnlichen Reihe ganzer Zahlen beschäftigt sich die Sprachecke.

Wenn die Tage wieder länger werden...........12

Arnold Zenkert zeigt „Unstimmigkeiten“ im Kalender, die auf den „Störenfried“ Zeitgleichung zurückzuführen sind.

Was hat die Zahl π mit der Stochastik zu tun?........................13

Eine ungewöhnliche Betrachtungsweise von *Bernd Dethloff*.

Ein Gerät für die Winkeldreiteilung......14

Nur mit Zirkel und Lineal kann ein beliebiger Winkel nicht in drei gleichgroße Teilwinkel zerlegt werden. Da hilft den von *Branislaw Čabrić* entwickelte „Trisektor“.

Für 6 Schüler rechnet sich die Mathematik ..15

Eine Rückblick auf die FÜMO, eine Aufgabe über Dreiecke und die Problemecke – zusammerngestellt von *Paul Jainta*.

Im Blickpunkt: Das Jahr 1994....................16

Interessante Knobelaufgaben – erdacht von *Roland Mildner*.

1+9=9+4

34. Internationale mathematik-Olympiade (IMO).........................18

Neben einem Rückblick vom Delegationsleiter *Hans-Dietrich Gronau* auf das erfolgreiche Abschneiden der deutschen Mannschaft werden die Wettbewerbsaufgaben vorgestellt.

Die Olympiade-Ecke..19

Unter dem Motto „Leser forschen für Leser“ ruft *Paul Jainta* auf, eigene Forschungsergebnisse vorzustellen.

Alpha-Wettbewerb (Teil I) 20

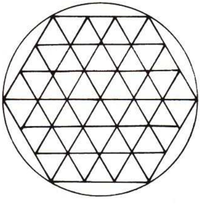
Die Aufgaben 5/1 bis 7/5 stammen von *Theodor Scholl*; die Aufgaben 8/1 bis 8/5, 9/1 bis 9/5, 10/1 bis 10/5 und E/1 bis E/5 erdachte *Christine Riehl*, alle anderen sind von *W. Riehl*. Wir hoffen, daß die Leserbeteiligung wieder so groß ist, wie beim letzten alpha-Wettbewerb.

Die zusammenhängenden Graphen und Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1 23

Eine interessante Betrachtung mit Bezügen zur Chemie von *Walter Träger*.

Geometrie – im täglichen Leben entdeckt 26

25 geometrische Vignetten – ausgesucht und zusammengestellt von *Johannes Lehmann*.



Marktecke 28

Leserbrief...................30

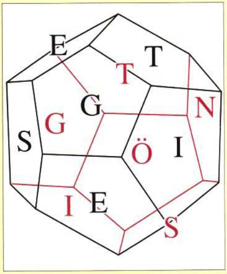
Lösungen....................31

Zeitungs-schnipsel

Eine mexikanische „1-Onza-Sammlermünze" in purem Silber

Auf dieser Münze ist eine Figur dargestellt. Ihr Name ist ein Wort, dessen Buchstaben den Flächen eines Dodekaeders zugeordnet. Die Reihenfolge der Buchstaben dieses Wortes ergibt sich durch Ablaufen eines geeigneten, zwei Flächen verbindenden Weges, der durch keine Ecke des Dodekaeders führt und der jede der übrigen 10 Flächen genau einmal überquert.

Dr. W. Träger, Döbeln



Neuer Weltrekord

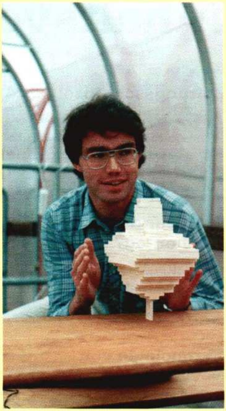
Neuer Weltrekord durch Ralf Laue, bekannt durch das größte magische Quadrat (91er Heft). Kommt ins Guinness-Buch der Rekorde, aufgestellt am 11. Juli 1993 in Leipzig.

396 Dominosteine sind hier übereinander gestapelt – nur gestützt von einem einzigen hochkant stehenden Stein und selbstverständlich nicht geklebt! Dieser „Turm" wird als neue Bestleistung ins Guinness Buch der Rekorde eingehen (Bisheriger Rekordhalter war David Coburn mit 391 gestapelten Dominos.) Passend dazu zwei kleine Aufgaben zum Thema „Dominospiel": Zur Erinnerung: Ein Dominostein trägt auf jedem seiner beiden Teile eine Punktzahl von 0 bis 6 und zwar so, daß im Spiel jede Kombination zweier Punktzahlen auf einem Stein genau einmal vorkommt. Das ganze Spiel besteht somit aus 28 Steinen (Nachrechnen!). Beim Spiel dürfen zwei Steine, deren Punktzahl auf einer der beiden Hälften übereinstimmt, an dieser Hälfte zusammengelegt werden.

a) Der deutsche Mathematiker Reiss berechnete, daß es auf 142 129 105 920 Arten möglich ist, alle 28 Steine so aneinanderzulegen, daß eine geschlossene Kette entsteht.
Ist es auch möglich, eine geschlossene Kette zu bilden, wenn ein Stein aus dem Spiel entfernt wird?
b) Zwei Mathematiker A und B spielen ein Spiel: Ein Schiedsrichter wählt zufällig einen Dominostein aus einem vollständigen Spiel aus, den er den beiden Spielern nicht zeigt. Er verrät aber Spieler A das Produkt der beiden Punktzahlen auf dem Stein, während Spieler B die Gesamtzahl der Punkte auf dem Stein erfährt. Die beiden sollen herausfinden, welcher Stein gezogen wurde. Es ergibt sich der folgende interessante Dialog:
A: „Ich weiß nicht, welcher Stein gezogen wurde."
B: „Ich weiß auch nicht, welcher Stein gezogen wurde."
A: „Ich weiß immer noch nicht, welcher Stein gezogen wurde."
B: „Dann weiß ich's auch noch nicht."
A: „Aha – jetzt ist alles klar: ich kenne den Stein."

Welcher Stein wurde gezogen?

R. Laue



Der Weltrekord ist geschafft – 396 Dominosteine bilden einen Turm! (Foto: R. Laue)

Hagelkörner 600 Gramm schwer

Der Döbelner Anzeiger meldete am 30. 6. 1993 unter obiger Überschrift:
Lannemezan. Bei einem Unwetter in den Pyrenäen sind am Montagabend Hagelkörner von einem Gewicht von bis zu 600 Gramm niedergegangen, wie die Feuerwehr am Dienstag berichtete. Die Eisklumpen hätten in dem Städtchen Saint-Laurent de Neste die 3 500 Quadratmeter Ausstellungsfläche eines Elektro-Marktes verwüstet. In anderen Ortschaften wurden Dächer von mehr als 50 Häusern beschädigt.
Aufgabe:
Welchen Durchmesser hat ein kugelförmiges Hagelkorn mit 600 g Masse? Hinweis: Beim Erstarren einer Wassermenge zu Eis vergrößert sich das Volumen um 9 %.

Dr. W. Träger, Döbeln

Was war damals für ein Wochentag?

Ermittlung des Wochentages zu einem gegebenen Datum

Es gibt mehrere Tage im Leben eines Menschen, deren Datum er auswendig weiß. So z. B. Geburtsdatum, Tag der Schuleinführung, Hochzeitstag usw.
Aber auch die Geburtsdaten von Freunden und Verwandten sind manchen geläufig. Fragt man aber „Was war damals für ein Wochentag?", so bleibt die Antwort meistens aus. Genauso ist es mit dem Datum besonderer Ereignisse in der Geschichte und im Zeitgeschehen. Wer kann schon auf Anhieb sagen, welcher Wochentag der 21.7.1969 gewesen ist? An diesem Tag betrat der erste Mensch den Mond.
Es gibt verschiedene Verfahren, die eine schnelle Berechnung eines Wochentages zu einem Datum ermöglichen. Auch mit Hilfe von Tabellen lassen sich gefragte Wochentage ermitteln. In beiden Fällen muß aber den Eigenarten unseres Kalenders Rechnung getragen werden. Dazu gehören Schaltjahre und verschieden lange Monate.

Gemeine Jahre – Schaltjahre
Die Grundlage des Kalenderjahres ist das sogenannte tropische Jahr – eine Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt – mit 365,2422 Tagen. Die Überlänge von 0,2422 Tagen hat bereits Julius Cäsar 46 v. u. Z. durch Einführung eines neuen Kalenders (Julianischer Kalender) unter Zugrundelegung eines Jahres mit 365,25 Tagen mittels Schalttagen weitestgehend ausgeglichen. Auf drei gemeine Jahre folgt ein Schaltjahr. Cäsar setzte auch den Jahresbeginn auf den 1. Januar fest. Die Abweichung von 0,0078 Tagen vom tropischen Jahr hat bis zum 16. Jahrhundert zum Vorrücken des Frühlingsanfangs um mehr als 10 Tage geführt.
Papst Gregor XIII. führte 1582 eine Kalenderreform durch. Der Fehler wurde durch Weglassen der Tage zwischen dem 4.10. und 15.10.1582 ausgeglichen. Auf den 4.10.1582 folgte unmittelbar der 15.10.1582. Der Frühlingsanfang wurde damit wieder der 21. März. Die Folge der Schaltjahre wurde anders definiert. Jahre, deren Ordnungszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist, sind keine Schaltjahre mehr (1700, 1800, 1900, 2100 usw.), wogegen 1600, 2000, 2400 usw. Schaltjahre sind. Die Länge des Gregorianischen Jahres beträgt 365,2425 Tage. Der Fehler ist jetzt so gering, daß die Abweichung vom tropischen Jahr (365,2425 – 365,2422 = 0,0003) erst nach über 3000 Jahren 1 Tag ausmacht.

Monate mit 28 (29), 30 oder 31 Tagen
Monate mit 30 Tagen sind: April, Juni, September, November.
Monate mit 31 Tagen sind: Januar, März, Mai, Juli, August, Oktober, Dezember.
Der Monat Februar hat in gemeinen Jahren 28 und in Schaltjahren 29 Tage.

Wochen
Eine Woche hat sieben Tage. Diese Festlegung hat ihren Ursprung im Alten Testament (Genesis, 1. Buch Mose).

Lösung der Aufgabe durch Kopfrechnen
Die Grundlage der Berechnung ist die Tatsache, daß die Anzahl der Tage eines Jahres – 165 bzw. 366 – nicht durch 7 teilbar ist. Bei gemeinen Jahren erhalten wir einen Rest von 1 und bei Schaltjahren einen Rest von 2. Das bedeutet, daß ein bestimmtes Datum in aufeinanderfolgenden Jahren mit jedem Jahr auf den folgenden Wochentag fällt. So z. B. war der 1. Januar 1900 ein Montag, im Jahre 1901 ein Dienstag, in 1902 ein Mittwoch, 1903 ein Donnerstag und im Jahre 1904 ein Freitag. Da das Jahr 1904 ein Schaltjahr war, so verschoben sich die Wochentage durch den Schalttag um 2 Tage. Deshalb war der 1. Januar 1905 ein Sonntag. Die Verschiebung läßt sich in der Januarspalte der Monatstafel leicht verfolgen. (Diese Tabelle wird zur Berechnung nicht herangezogen!)
Da der 1.1.1900 ein Montag gewesen ist, können wir den Wochentag zu dem 1.1. jedes Kalenderjahres im 20. Jahrhundert aus der Anzahl der Jahre nach 1900 und der bis dahin vergangenen Schaltjahre berechnen. So z. B. erhalten wir für den 1.1.1989
89 Jahre über 1900 also 89 Tage Verschiebung
22 Schaltjahre (89 : 4 = 22 + Rest) also 22 Tage Verschiebung
1 Tag laut Angabe (1. Januar)
112 Tage Verschiebung
Dividiert man diese Summe durch 7, so erhält man durch den Rest die Kennzahl des Wochentages (Mo 1, Di 2, Mi 3, Do 4, Fr. 5, Sa 6 und So 0). Es ist also 112 : 7 = 16 Rest 0. Der 1.1.1989 war ein Sonntag.
Will man den Wochentag zu einem anderen Datum ermitteln, so muß man noch die Verschiebung der Tage durch die verschiedenen Längen einzelner Monate berücksichtigen. Ist nämlich beispielsweise der 1. Januar eines gemeinen Jahres ein Montag, so fällt der 1. Februar desselben Jahres auf einen Donnerstag, da der Januar 31 Tage hat. Der 1. März ist ebenfalls ein Donnerstag, weil durch die 31 Märztage eine weitere Verschiebung von 3 Tagen zu der bisherigen hinzukommt. Der April hat 30 Tage. Es kommen also 2 weitere Tage zur Verschiebung hinzu. Somit ist der 1. Mai ein Dienstag ... usw. Den Überhang erhält man als Rest bei der Division der Anzahl von Tagen der einzelnen Monate durch 7. Diese Reste sind in der folgenden Tabelle in der 1. Zeile unter den Monatszeichen in Klammern

Monate	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Übergänge	(3)	(0)	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)
Summen		3	3	6	8	11	13	16	19	21	24	26
Restklassen der 7	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Die Kennzahlen der Monate sind:

Januar	0	April	6	Juli	6	Oktober	0
Februar	3	Mai	1	August	2	November	3
März	3	Juni	4	September	5	Dezember	5

Tabelle 1

angegeben. In der 2. Zeile befinden sich die Summen wirksamer Reste für jeden Monat. In der 3. Zeile stehen schließlich die kleinsten Repräsentanten der Restklassen der 7. Man erhält sie, wenn man die Zahlen der 2. Zeile durch 7 dividiert und den Rest aufschreibt. Beispiele: In 3 ist die 7 nicht enthalten, Rest 3. In 6 ist die 7 nicht enthalten, Rest 6. In 8 ist die 7 einmal enthalten, Rest 1. In 13 ist die 7 einmal enthalten, Rest 6. ... usw.

Mit Hilfe dieser Kennzahlen können die Wochentage zu einem Datum gemeiner Jahre im 20. Jahrhundert leicht zugeordnet werden. Beispiel: 28.4.1950

50 Jahre über 1900
12 Schaltjahre bis 1950
6 Kennzahl von April
28 Der 28. Tag des Monats
96

Die Summe 96 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 5. Der 28.4.1950 war ein Freitag.

In Schaltjahren beginnt die Wirksamkeit des Schalttages erst am 1. März. Deshalb wird die Rechnung bei einem Datum vom 1. Januar bis 29. Februar mit dem Schaltjahresanteil des vergangenen Jahres durchgeführt. Beispiel: 21.1.1960

60 Jahre über 1900
14 Schaltjahre (nicht 15) 0 Kennzahl von Januar
21 Der 21. Tag in Januar
95

Die Summe 95 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 4.
Der 21.1.1960 war ein Donnerstag.

Beispiel: 16.6.1964

64 Jahre über 1900
16 Schaltjahre
4 Kennzahl für Juni .
16 Der 16. Tag von Juni
100

Die Summe 100 wird durch 7 dividiert. Der Rest beträgt 2. Der 16.6.1964 war ein Dienstag

Die Rechnung wird noch einfacher, wenn man die vier Angaben (Jahre über 1900, Schaltjahre, Monatskennzahl, Tage) gleich durch 7 dividiert und die Summe der Reste bildet, die durch 7 dividiert die Nummer des gesuchten Tages (Rest der Division) liefert. Man rechnet also mit Restklassen der 7. Beispiele:

In den anderen Jahrhunderten verläuft die Rechnung genauso auf der Basis von 1600, 1700, 1800, 2000, ... usw. Um den gesuchten Wochentag zu ermitteln, muß man noch zu dem charakteristischen Rest im 17. Jahrhundert 6, im 18. Jahrhundert 4, im 19. Jahrhundert 2 im 21. Jahrhundert 6 addieren. Beispiel: 31.3.1891

91	0	Rest 0, 19. Jahrhundert. Es wird zum Rest 2 addiert:
22	1	
3	3	0 + 2 = 2
31	3	Der 31.3.1891 war ein Dienstag
	7	
Rest	0	

Nach entsprechender Übung lassen sich die vier Eingangswerte aus dem gegebenen Datum leicht aufstellen und die Operationen in wenigen Sekunden ausführen. Viel Spaß!

11.12.1946		28.4.1950		21.1.1960		16.6.1964	
46	4	50	1	60	4	64	1
11	4	12	5	14	0	16	2
5	5	6	6	0	0	4	4
11	4	28	0	21	0	16	2
73	17	96	12	95	4	100	9
Rest: 3 Mittwoch		Rest: 5 Freitag		Rest: 4 Donnerstag		Rest: 2 Dienstag	

Tabelle 2

Lösung der Aufgabe mit Hilfe von Tabellen
Zum Aufbau der Tabellen

a) Jahrestabelle von 1600 bis 2100
Die Jahreszahlen sind in der Tabelle fortlaufend in Spalten angeordnet, wobei Zeilen nur mit Jahreszahlen von Schaltjahren und Zeilen ausschließlich mit Jahreszahlen von gemeinen Jahren entstehen. 1700, 1800, 1900 und 2100 haben eine besondere Position, weil diese Jahre keine Schaltjahre sind.

b) Monatstabelle
Diese Tabelle enthält nur kleinste positive Repräsentanten der Restklassen von 7. In der 1. Zeile finden wir

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2

In dieser Zeile gibt es nur Jahreszahlen von gemeinen Jahren, deren 1. Januartag auf einen Donnerstag fiel. Diese Tatsache wird durch die Zahl 4 in der 1. Spalte ausgedrückt. Addiert man zu 4 die Anzahl der Januartage über 28, so erhält man 4 + 3 = 7. 7 : 7 = 1 Rest 0. Den Rest 0 trägt man in die Spalte F ein. Addiert man jetzt zu 0 die Anzahl der Februartage über 28, so erhält man 0 + 0 = 0. Bei der Division 0 : 7 erhält man den Rest 0, der in die Spalte M eingetragen wird. In der Aprilspalte steht 3, da 0 + 3 = 3 ist und 3 : 7 ergibt den Rest 3. In der Maispalte steht 5, da 3 + 2 = 5 und 5 : 7 ergibt den Rest 5. Für die anderen Monate verfährt man ähnlich.

In der 5. Zeile von unten, die ebenfalls mit 4 beginnt, finden wir andere Werte:

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3

In dieser Zeile sind nur Jahreszahlen von Schaltjahren. Februar hat dann 29. Tage. Deshalb erscheint in der Märzspalte eine 1. Dieser Schalttag und die 3 Märztage über 28 ergeben die Summe 4, die in der Aprilspalte auftritt usw.

c) Wochentagstafel
In der Eingangsspalte befinden sich die Kurzzeichen der 7 Tage einer Woche. Die spaltenweise Durchnummerierung von 1 bis 37 wird zum Auffinden des gesuchten Wochentages verwendet. (S. dazu Handhabung der Tabellen.).

Die Tabellen befinden sich auf der folgenden Seite.

JAHRESTAFEL

1583 – 1699					1700 – 1799					1800 – 1899					1900 – 1999					2000 – 2099				
	09	37	65	93		05	33	61	89		01	29	57	85			25	53	81		09	37	65	93
	10	38	66	94		06	34	62	90		02	30	58	86			26	54	82		10	38	66	94
1583	11	39	67	95		07	35	63	91		03	31	59	87			27	55	83		11	39	67	95
84	12	40	68	96		08	36	64	92		04	32	60	88			28	56	84		12	40	68	96
85	13	41	69	97		09	37	65	93		05	33	61	89		01	29	57	85		13	41	69	97
86	14	42	70	98		10	38	66	94		06	34	62	90		02	30	58	86		14	42	70	98
87	15	43	71	99		11	39	67	95		07	35	63	91		03	31	59	87		15	43	71	99
88	16	44	72			12	40	68	96		08	36	64	92		04	32	60	88		16	44	72	
89	17	45	73			13	41	69	97		09	37	65	93		05	33	61	89		17	45	73	
90	18	46	74			14	42	70	98		10	38	66	94		06	34	62	90		18	46	74	
91	19	47	75			15	43	71	99		11	39	67	95		07	35	63	91		19	47	75	
92	20	48	76			16	44	72			12	40	68	96		08	36	64	92		20	48	76	
93	21	49	77			17	45	73			13	41	69	97		09	37	65	93		21	49	77	
94	22	50	78			18	46	74			14	42	70	98		10	38	66	94		22	50	78	
95	23	51	79			19	47	5			15	43	71	99		11	39	67	95		23	51	79	
96	24	52	80			20	48	76			16	44	72			12	40	68	96		24	52	80	
97	25	53	81			21	49	77			17	45	73			13	41	69	97		25	53	81	
98	26	54	82			22	50	78			18	46	74			14	42	70	98		26	54	82	
99	27	55	83		**1700**	23	51	79			19	47	75			15	43	71	99		27	55	83	
1600	28	56	84			24	52	80			20	48	76			16	44	72		**2000**	28	56	84	
01	29	57	85			25	53	81			21	49	77		**1900**	17	45	73		01	29	57	85	
02	30	58	86			26	54	82			22	50	78			18	46	74		02	30	58	86	
03	31	59	87			27	55	83		**1800**	23	51	79			19	47	75		03	31	59	87	
04	32	60	88			28	56	84			24	52	80			20	48	76		04	32	60	88	
05	33	61	89		01	29	57	85			25	53	81			21	49	77		05	33	61	89	
06	34	62	90		02	30	58	86			26	54	82			22	50	78		06	34	62	90	
07	35	63	91		03	31	59	87			27	55	83			23	51	79		07	35	63	91	
08	36	64	92		04	32	60	88			28	56	84			24	52	80		08	36	64	92	

MONATSTAFEL

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

WOCHENTAGSTAFEL

So	1	8	15	22	29	36
Mo	2	9	16	23	30	37
Di	3	10	17	24	31	
Mi	4	11	18	25	32	
Do	5	12	19	26	33	
Fr	6	13	20	27	34	
Sa	7	14	21	28	35	

HANDHABUNG DER TABELLEN – Erläuterung an einem Beispiel:

An welchem Wochentag wurde Uschi geboren? Ihr Geburtsdatum ist der 11.12.1946.

Ausgehend von der Jahreszahl 1946 in der Jahrestafel findet man in derselben Zeile in der Monatstafel unter Dezember die Zahl 0. Addiert man dazu 11, so erhält man 0 + 11 = 11. In der Wochentagstafel steht die Zahl 11 in der Zeile Mi. Uschi wurde also an einem Mittwoch geboren.

Martin Walter, Meiningen

Chronologie November 1993 bis Februar 1994

1143: Hermann von Kärnten (genauere Daten unbekannt) übersetzte die berühmte Algebra des al-Hwarizmi (780-um 850) aus dem Arabischen ins Lateinische

1693: Prinz Ruppert von der Pfalz (1619 – 1682) stellte und löste die Aufgabe: Man stecke durch einen Würfel einen zu ihm kongruenten Würfel hindurch.

1693: Der als Astronom weltbekannte Gelehrte Edmond Halley (1656? – 1743) berechnete auf der Basis von Geburts- und Sterbelisten aus Breslau von 1687/91 eine Sterblichkeitsstafel für den Fall einer konstanten Bevölkerung

1694: Geburtsjahr des englischen Mediziners und Physikers Henry Pemberton. Pemberton (gest. 1771) gehörte zu den eifrigsten Anhängern Isaac Newtons und gab 1728 eine erste Darstellung der Newtonschen Philosophie

1743: Der französische Mathematiker und Astronom Alexis Claude Clairault (1713 – 1765) veröffentlichte seine „Theorie de la figure de la terre“. Darin wird die Theorie der Erdgestalt nach französischen Meridianmessungen von 1735 – 1737 entwickelt. Hauptresultat war: Die Erde ist an den Polen abgeplattet.

1793: Am 15. November wurde Michel Chasles (gest. 1880) in Épernon bei Paris geboren. Chasles war Professor in Paris und lieferte bedeutende Arbeiten zur Geometrie, Geodäsie und Geschichte der Mathematik

1794: Am 3. Februar wurde die Leipziger Universitätssternwarte eröffnet (siehe Text)

1794: Adien-Marie Legendres (1752 – 1833) berühmtes Geometrielehrbuch „Éléments de géométrie“ erschien. Darin unternahm Legendre den vergeblichen Versuch, das Parallelenpostulat von Euklid zu beweisen.

1868: Am 8. November wurde Felix Hausdorff (gest. 1942) in Breslau geboren (siehe Text)

1868: Am 24. Dezember wurde Emmanuel Lasker in Berlinchen geboren. Lasker arbeitete an algebraischen Themen. Er war von 1894 bis 1921 Schachweltmeister. Lasker starb 1941 in New York.

Vor 200 Jahren: Eröffnung der Leipziger Universitätssternwarte

Am 3. Februar 1794 wurde nach jahrelangem Zögern die Leipziger Universitätssternwarte endlich an die Leipziger Universität übergeben. Diese Sternwarte befand sich im oberen Teil des Turmes der Pleissenburg. Auf dem Gelände der Pleissenburg befindet sich jetzt das Leipziger Neue Rathaus. Der Pleissenburgturm steht noch heute, aber durch bauliche Veränderungen ist von der Sternwarte nichts mehr erhalten. Auf diesem Turm der Pleissenburg residierten als Direktoren des sehr bescheidenen Observatoriums Christian Friedrich Rüdiger (1760 – 1809), Carl Brandan Mollweide (1774 – 1825) („Mollweidesche Formeln“) und August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) („Möbiussches Band“). Die Namen der Direktoren verraten schon die Tatsache, daß die Tätigkeit der Mitarbeiter der Leipziger Sternwarte sehr oft stark mathematisch ausgerichtet war. Bedeutendster Astronom auf der Pleissenburg ist Heinrich Louis d'Arrest (1822 – 1875) gewesen. D'Arrest war 1846 noch als Student in Berlin an der Entdeckung des Planeten Neptun beteiligt gewesen. Seit 1856 war der Neubau einer großzügigeren Leipziger Universitätssternwarte ernsthaft im Gespräch. Mit dem Bau einer neuen Sternwarte wurde 1860 begonnen – bereits im November 1861 konnte der Neubau im Leipziger Johannistal eröffnet werden. Unter den Direktoren Carl Christian Bruhns (1830 – 1881) und Heinrich Bruns (1848 – 1919) entwickelte sich die neue Leipziger Sternwarte schnell zu einem sehr bedeutenden Ausbildungszentrum für angehende Gelehrte. Die Forschungsarbeiten erstreckten sich von der Meteorologie über Geodäsie und Astronomie bis hin zur Mathematik. Die damalige internationale Vereinigung der Astronomen, die „Astronomische Gesellschaft“, führte ihre Geschäfte von der Leipziger Sternwarte aus. In die Zeit des Direktorats von Bruhns fiel auch die Begründung der

Die Leipziger Sternwarte von Süden, Aufnahme um 1909; Quelle: Festschrift zur Feier des 500jährigen Bestehens der Universität Leipzig, Bd. 4/2, Leipzig 1909, Tafel IV 2

Astrophysik als wissenschaftlicher Disziplin durch Friedrich Zöllner (1834 – 1882) in Leipzig. Nach dem Ende des 1. Weltkrieges nahm die wissenschaftliche und pädagogische Bedeutung der Leipziger Sternwarte ab. Die Nachfolger von H. Bruns, J. Bauschinger (1860 – 1934) und J. Hopmann (1890 – 1975) konnten nur noch bescheidene Forschungsaufgaben durchführen. Im Dezember 1943 wurde durch Bombenangriffe der größte Teil der Leipziger Universitätssternwarte zerstört. Das „Turmhaus" der Sternwarte steht als Relikt einer großen Vergangenheit noch an der Stephanstraße zu Leipzig.

Felix Hausdorff

Am 8. November 1868 wurde in Breslau (heute: Wroclaw, Polen) als Sohn eines jüdischen wohlhabenden Textilkaufmanns Felix Hausdorff geboren. Bald siedelte die Familie Hausdorff nach Leipzig um. In Leipzig, Berlin und Freiburg/Breslau studierte Hausdorff Mathematik und Astronomie. Nach einer Tätigkeit als Rechner an der Leipziger Sternwarte wirkte Hausdorff als Privatdozent an der

F. Hausdorff, Frau Schur, Ibbai Schur, Frau Hausdorff, Frau Szegö (von links); Aufnahme 1922 in Leipzig; Quelle Pólya, G.: The Pólya Picture Album, ed. by G. L. Alexanderson, Boston – Basel 1987, S. 61.

Leipziger Universität. Von 1901 – 1910 war er außerordentlicher Professor in Leipzig. 1910 wurde Hausdorff nach Bonn berufen, 1913 nach Greifswald und 1921 wieder nach Bonn. Am 26. 1. 1942 schieden Felix Hausdorff, seine Gattin und seine Schwägerin durch Selbstmord aus dem Leben, um der bevorstehenden Deportation in ein Konzentrationslager zu entgehen.

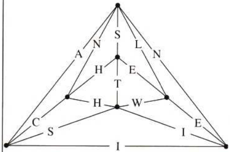
Unter den direkten Einfluß der Bekanntschaft mit Georg Cantor (1845 – 1918) beschäftigte sich Felix Hausdorff seit 1901 intensiv mit der Mengenlehre, hielt 1901 vor drei Zuhörern in Leipzig die erste Vorlesung über Mengenlehre. Neben grundsätzlichen Einzelbeiträgen zur Entwicklung der Mengenlehre verfaßte Hausdorff mit dem 1914 erschienenen Werk „Grundzüge der Mengenlehre" eine klassische Schrift, die auch heute noch zu den berühmtesten Werken der mathematischen Weltliteratur zählt. Die zweite Auflage dieses Buches (1928) stellte eine neue Zusammenfassung der Mengenlehre dar. Weitere Arbeiten von grundsätzlicher Bedeutung hat Hausdorff vor allem zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geliefert.

Hausdorff hatte sich anfangs nicht eindeutig für ein Studium der mathematischen Wissenschaften entscheiden können. Er wollte ursprünglich Musiker werden, verkehrte viel in Künstlerkreisen Leipzigs und schrieb schöngeistige Werke. Unter dem Pseudonym Paul Mongré veröffentlichte er Gedichte, Aphorismen, Essays und zeitkritische Schriften. Sein 1904 gedrucktes Theaterstück „Der Arzt seiner Ehre", eine Satire auf das Duellunwesen, wurde ein großer Erfolg, besonders in Berlin. Außerdem gab Hausdorff seit 1896 eine Zeitschrift für die Textilindustrie heraus.

H.-J. Ilgauds

Zwei Inseln mit gleichem Namen

Die eine dieser beiden gleichnamigen Inseln liegt im Indischen, die andere im Stillen Ozean. Ihr Name ist im abgebildeten Graph versteckt: Das Wortbild dieses Namens entsteht, indem man einen geeigneten, orientierten und jede Kante genau einmal enthaltenden Kantenzug (Weg) abläuft und dabei die den nacheinander durchlaufenden Kanten zugeordneten Buchstaben nebeneinander aufschreibt.



Dr. W. Träger, Döbeln

Lösung: Weihnachtsinsel

Bemerkung: Die 400 km südlich der Insel Java gelegene und 135 km^2 große Weihnachtsinsel, eine Vulkaninsel, entdeckte am 24. 12. 1643 der Niederländer W. Mynors. Die zu den Linieninseln gehörende und 575 km^2 große Weihnachtsinsel, ein Korallenatoll, entdeckte am 24. 12. 1777 der Engländer J. Cook. Beide Inseln sind bewohnt, und auf beiden werden Kokospalmen angebaut.

Geisterstunde

Es ist rabenschwarze Neumondnacht. Auf der Flucht vor unheilbringenden geisterhaften Gestalten müssen vier Freunde den Grenzfluß auf einer verfallenen Brücke überqueren, von der das Orakel sagt, daß diese um Mitternacht zusammenfällt. Den Gesellen bleibt genau eine Stunde, genau eine dringend nötige Taschenlampe und die Sicherheit, daß zwei von ihnen so gut zu Fuß sind, daß sie die Brücke in fünf bzw. zehn Minuten überwinden können. Die beiden anderen dagegen benötigen mindestens 20 bzw. 25 Minuten. Klar ist auch, daß sich über die baufällige Brücke jeweils nur zwei Personen gleichzeitig auf den Weg machen können, wobei einer von ihnen die Taschenlampe zurückbringen muß. Wie kann sich die verschworene Vier vor den teuflischen Mächten in Sicherheit bringen?

nach einer mündlichen Überlieferung eingesandt von Dr. Christian Werge, Leipzig

Lösung:

Die entscheidenden fünf Minuten werden gespart, wenn die beiden langsamen Leute gemeinsam über die Brücke gehen. Zum Zurückbringen der Taschenlampe jedoch kann dies nicht beim ersten Paar und nicht beim letzten Paar geschehen. Also gehen die Schnellsten zuerst, von ihnen kehrt <10> (oder <5>) zurück. Danach überqueren die langsamen beiden die Brücke und <5> (oder <10>) kehrt zurück. Die beiden Schnellsten überwinden schließlich die Brücke gemeinsam zum zweiten Mal.

Die Knopf-und-Schnur-Methode von Sam Loyd

Zunächst ist in unserer Aufgabe nicht von Knöpfen und Schnüren die Rede, sondern von Minischachbrettern. Auf einem Brett vom Format 3 x 3 stehen einander in den Ecken je zwei weiße und schwarze Springer gegenüber, die ihre Plätze tauschen sollen (Abb. 1).

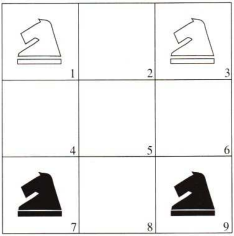


Abb. 1: Ein Problem, auf dem 3 x 3-Brett die Positionen der weißen und schwarzen Springer zu vertauschen.

Die Springer ziehen dabei wie im bekannten Schachspiel, und wie üblich darf ein Feld nur von einer Figur besetzt werden. Wem diese Aufgabe keine Schwierigkeiten mehr bereitet, der kann sich die in (Abb. 2) gezeigte Aufgabe vornehmen: auf einem Brett vom Format 3 x 4 stehen einander je zwei weiße und schwarze Springer in den Ecken gegenüber (Felder 1 und 3 bzw. 10 und 12), b) je drei weiße und schwarze Springer (Felder 1, 2 und 3 bzw. 10, 11 und 12). Wie viele Züge sind mindestens zu einem Tausch nötig? Für das letzte Problem, das 1974 gestellt wurde, ist die minimale Zugzahl einige Jahre mit 26 angegeben worden. Dann bemerkte ein Problemlöser, daß die bereits um die Jahrhundertwende von dem amerikanischen Puzzleerfinder Sam Loyd für die einfache Aufgabe (Abb. 1) benutzte Lösung sich auch hier erfolgreich verwenden läßt, und er reduzierte die Zugzahl damit mühelos auf 16. Wie funktioniert Loyds Lösung?

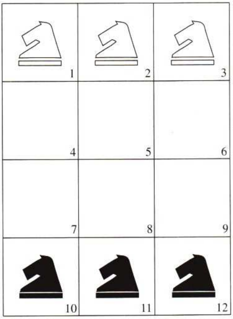


Abb. 2: Ein schwierigeres Problem auf dem 3 x 4-Brett. Es sind wiederum die Positionen von je zwei weißen und schwarzen Springern (Felder 1 und 3 sowie 10 und 12) oder je drei schwarze und weiße Springer (Felder 1, 2 und 3 sowie 10, 11 und 12) zu vertauschen.

Lösung:

Loyd denkt sich das Brett in einzelne Felder zersägt und dabei alle von den Springern erreichbaren Felder untereinander durch Fäden verbunden (Abb. 3).

Dann entwirrt Loyd das Feldernetz und erhält eine übersichtliche Struktur für die Aufgabe (Abb. 4). Die Springer ziehen in Loyds Aufgabe einfach am Rand des Vierecks aus Abb. 4 herum. Eine der vielen Zugmöglichkeiten wäre: Weiß 1 – 6, Weiß 3 – 8 – 1, Schwarz 9 – 4 – 3 – 8, Schwarz 6 – 7 – 2 – 9, Weiß 1 – 6 – 7, Schwarz 8 – 1 (16 Züge). Entsprechend geht man auf der Struktur von Abb. 5 vor, wobei sich sowohl für die 4- als auch die 6 Springer ebenfalls nur 16 Züge ergeben.

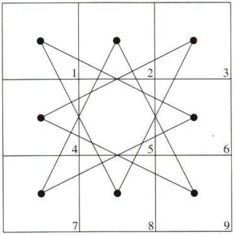


Abb. 3: Die Felder, die von den Springern auf dem 3 x 3-Brett erreicht werden können, sind durch Fäden verbunden. Die Felder selbst hängen nicht mehr zusammen, so daß sich die Anordnung der Felder in die einfachere Struktur der Abbildung 4 entwirren läßt. Dieses Vorgehen erklärt den Namen Knopf-und-Schnur-Methode, den Loyd für die Lösungsmethode gewählt hat.

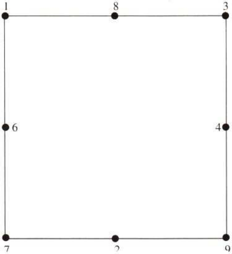


Abb. 4: Die Anordnung der Felder erhält mit der Knopf-und-Schnur-Methode diese einfachere Struktur (anstelle der einzelnen Felder ist nur noch deren Mittelpunkt aus der Abb. 3 übernommen worden).

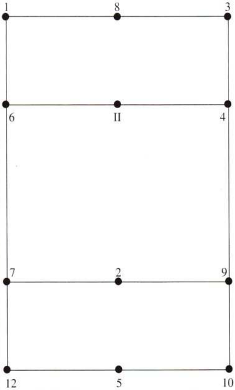


Abb. 5: Die übersichtliche Struktur für die schwierigeren Aufgaben.

Dr. Rüdiger Thiele und Konrad Haase

Komisches, Kniffiges und Knackiges

Alphons' logische Abenteuer

Besuch war gekommen, die ältere Schwester von Alphons' Mutter. Man saß gemütlich im Wohnzimmer und unterhielt sich über die ganze Verwandtschaft hinweg. Auch wenn man nicht zu sehr in das Detail ging, es war ein abendfüllendes Thema. Wer gefragt hatte, ob Onkel Ernst verreist war, war Alphons entgangen, die Antwort seiner Tante aber fiel sonderbar aus: „Eine Reise? ..., nein, eine Reise hat er keine gemacht." Was soll das denn heißen? Die Auslegung: Eine keine Reise hat er gemacht, fällt aus grammatischen Gründen weg. Wenn er keine eine Reise gemacht haben sollte, hat er dann mehr als eine Reise gemacht? Ist ferner das „nein" als Verneinung einer Aussage zu verstehen, also: Es ist nicht wahr, er hat mehr als eine Reise gemacht? Dann hätte der Onkel keine oder höchstens eine Reise unternommen. Vielleicht könnte aber mit dem Redeteil „eine ... keine" auch gemeint sein, daß er nicht eine Reise, somit keine einzige Reise gemacht hat! Die mit „es ist nicht wahr" unterstellte Bedeutung von „nicht" ergäbe dann die Verneinung dieser Aussage und somit die Behauptung: Er hat mindestens eine Reise gemacht. Nimmt man beide Auslegungen zusammen, so hat der Onkel genau eine Reise unternommen. Wenn das die Tante gemeint haben sollte, warum drückt sie sich dann so sonderbar aus?

Bei den anderen Familienmitgliedern löste Tantes Antwort keinen Wunsch auf Erklärung aus. Um nicht als Sprachnörgler zu erscheinen, unterdrückte er eine Rückfrage an seine Tante. Berti ahnte nicht, was er mit seiner nur so dahin gesprochenen Antwort auf eine Frage von Alphons auf sich nehmen mußte. Alphons fragte nämlich, ob der Mathematiklehrer während seiner Abwesenheit am Ende der Stunde noch eine Aufgabe besprochen hätte. „Eine Aufgabe? ..., nein, eine Aufgabe hat er keine besprochen." Alphons fragte schroff zurück: „Was denn nun, Berti, behandelte er eine oder keine Aufgabe?" Berti, nach einigem Zögern: „Was willst Du ? „Eine ... keine" ist dasselbe wie „eine ... nicht". „Das mache ich klüger", erwiderte Alphons und fuhr fort: „Eine Aufgabe hat er nicht gestellt. Das verneinst Du. Daß die Sonne scheint, das ist äquivalent mit: Es ist nicht wahr, daß die Sonne scheint. Eine nochmalige Verneinung führt dann zu der Aussage, daß die Sonne scheint. Analog dazu behauptest Du, daß er eine Aufgabe behandelt hat." Berti war nicht in der Stimmung, Alphons' Problem zu diskutieren. „Reden wir vom Wetter," schlug er vor. Er schaute zum Himmel und sagte: „Eine Schwalbe macht noch keinen Sommer." Alphons schwieg dazu.
In der Deutschstunde trug Alphons sein Problem vor. „Das ist in der Tat eine in sich gedrehte Konstruktion, die man vermeiden sollte," sagte der Lehrer. „Das „nicht" bezieht sich auf die einleitend wiederholte Frage – hat der Onkel eine Reise gemacht? – und steht für eine verneinende Antwort: Der Onkel hat keine Reise gemacht. Der folgende Satz wiederholt diese Antwort auf unglückliche Weise. Was er ausdrücken will ist: Der Onkel ist nicht verreist."

Prof. Dr. L. Kreiser, Leipzig

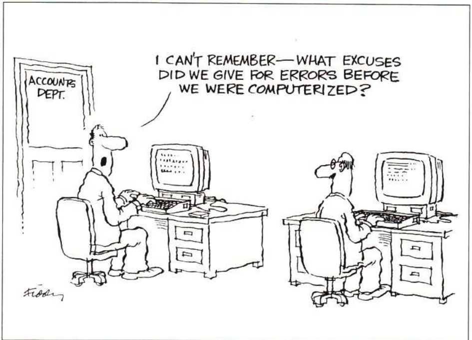
Sprachecke

Les périmètres

Une balle de ping-pong est entourée selon un grand cercle par une ficelle A. On a entouré la terre aussi selon son équateur par une ficelle B.
On décide de surélever chaque ficelle uniformément d'un mètre. Tout autour de la terre comme tout autour de la balle de ping-pong. Quelle ficelle aura besoin de plus de rallonge?
aus: Maximath, France

An unusual set of integers

Find three integers such that when you add any one of them to the product of the other two you always get 2.
(Think also of negative numbers!)
aus: Fun with mathematics, Toronto



Wenn die Tage wieder länger werden

Eine unumstrittene Tatsache ist, daß der kürzeste Tag, die Wintersonnenwende, am 21. Dezember oder auch – je nach dem Schaltjahreszyklus – am 22. Dezember ist. An diesem Tag beträgt die Länge des sogenannten lichten Tages 7 h 35 min auf der Breite von 52°. So lange bleibt also unser Tagesgestirn über dem Horizont. An diesem Tag wird mit 16 h 25 min die längste Nacht des Jahres erreicht. Ein halbes Jahr entfernt, am Tage der Sommersonnenwende, dem 21.6., liegen die Verhältnisse genau umgekehrt, – der lichte Tag währt 16 h 25 min.

Betrachten wir die Zeit um den 21. Dezember etwas genauer! Logisch ist, daß an diesem Tag die Sonne am spätesten aufgeht und am frühesten wieder untergeht. Wie sollte es wohl auch anders sein? Ein Blick auf den Kalender oder in das astronomische Jahrbuch zeigt uns jedoch etwas anderes:

	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang
1.12.	7.46 Uhr	15.52 Uhr
5.12.	7.51	15.50
9.12.	7.56	15.49
13.12.	8.00	15.49 Frühester Sonnenuntergang
17.12.	8.04	15.49
21.12.	8.06	15.51 Kürzester Tag
25.12.	8.08	15.53
29.12.	8.08	15.56
1.1.	8.09	15.59 Spätester Sonnenaufgang
4.1.	8.08	16.02
8.1	8.07	16.07
12.1.	8.04	16.13

Angaben in Mitteleuropäischer Zeit (MEZ)
Für 52° nördl. Breite u. 15° östl. Länge.

Anscheinend stimmt in unserem Kalender etwas nicht – oder?? Unsere Astronomen und „Kalendermacher“ haben sich selbstverständlich nicht geirrt, es hat seine Richtigkeit, auch wenn wir hier eine „Verschiebung“ feststellen können. Wie sagte einmal ein berühmter Mann? Wenn er die Welt erschaffen hätte, liefen die Himmelskörper schön auf Kreisbahnen und nicht auf derartig verflixten und komplizierten Ellipsen, die den Astronomen das Leben erschweren. An diesem Ausspruch ist etwas dran! Unsere Erde bewegt sich ebenfalls auf einer elliptischen Bahn, in deren Brennpunkt unsere Sonne steht. Dies hat zur Folge, daß sich die Erde in Sonnennähe Anfang Januar ein wenig schneller um die Sonne bewegt als in Sonnenferne Anfang Juli. Der Unterschied beträgt zwar nur 2 km in der Sekunde, hat jedoch seine Auswirkungen. Am deutlichsten ist dies bei den Sonnenuhren zu bemerken, wenn diese Anfang Februar um 14 Minuten nachgehen und Anfang November um 16 Minuten vorgehen. Im Sommer gibt es dann nochmals zwei solcher Abweichungen, die aber nur wenige Minuten ausmachen. Die Ursache für dieses Vor- und Nachgehen der Sonnenuhren ist in der elliptischen Erdbahn zu suchen. Eine Sonnenuhr zeigt stets die wahre Sonnenzeit an. Nur an vier Tagen im Jahr geht die Sonnenuhr genau. Dieses Hin und Her wäre für das praktische Leben umständlich und so hat man sich eine mittlere Sonnenzeit ausgedacht, eine Sonne, die das ganze Jahr hindurch gleichförmig läuft. Anders ausgedrückt: Die Erde bewegt sich auf einer kreisförmigen Bahn!

Bis auf die vier erwähnten Tage im Jahr (15. 4., 13. 6., 31. 8. u. 25. 12.) besteht zwischen der wahren Sonnenzeit und der mittleren Sonnenzeit eine Differenz, die man als Zeitgleichung (oder auch als Zeitausgleich) bezeichnet. Wohlbemerkt, es handelt sich hier nicht um eine mathematische Gleichung, sondern um eine einfache Differenz!

Was hat das alles mit unserem Kalenderproblem um die Wintersonnenwende zu tun?

Der „Störenfried“ Zeitgleichung ist dafür verantwortlich zu machen, daß der früheste Sonnenuntergang und der späteste Sonnenaufgang eben nicht auf den kürzesten Tag fallen. Wir können es alljährlich beobachten: Kurze Zeit vor und nach der Sonnenwende im Winter und Sommer ändert sich die Länge des Tages nur ganz wenig, und man hat den Eindruck, daß die Tageslängen gleich bleiben. Die Übersicht zeigt, daß sich zwischen dem 1. 12. und dem 21. 12. der Sonnenuntergang nur um eine Minute verändert, nachher aber bis zum 12. 1. um 22 Minuten. Müßte nicht der 21. 12. zeitlich symmetrisch in der Mitte liegen? Anders ist es beim Sonnenaufgang: Vom 1. 12. bis 21. 12. sind es immerhin 20 Minuten, nachher jedoch nur 2 Minuten. Man hat hier den Eindruck, als würde jemand bremsen oder beschleunigen. Dieser „Jemand“ ist die Zeitgleichung, die sich in dieser Zeit stark ändert und so den Zeiten für den Sonnenaufgang und Sonnenuntergang entgegenwirkt.

Der wahre Mittag – Kennzeichen für die Zeitgleichung

„Mittag ist um 12 Uhr!“ – Dieser Satz ist oft zu hören, für uns Alltagsmenschen mag er genügen, nicht aber den Astronomen. Der wahre Mittag tritt dann ein, wenn die Mitte der Sonnenscheibe den Südmeridian passiert, wenn sie kulminiert (lat. culmen: Gipfel), also am höchsten steht. Ein Blick in das astronomische Jahrbuch zeigt, daß dieser Zeitpunkt zwischen 11h 45min und 12h 16min eintritt und nur an den schon erwähnten vier Tagen um 12 Uhr MEZ. Wir sehen auch hier wieder die Auswirkungen der Zeitgleichung!

Datum	Wahrer Mittag
1.12.	+11.49^h Sonnenuhr geht vor
5.12.	11.51
9.12.	11.53
13.12.	11.54
17.12.	11.56
21.12.	11.58
25.12.	12.00 Zeitgleichung 0
29.12.	-12.02 Sonnenuhr geht nach
1.1.	12.03
4.1.	12.05
8.1.	12.06
12.1.	12.08

Angaben in MEZ

Durch diese Verlagerung des wahren Mittags kommt es zu einer Verkürzung oder Verlängerung des Vor- bzw. Nachmittags gegenüber unserer MEZ als Normalzeit. Wer die Zunahme der Tage im Januar und Februar aufmerksam beobachtet, wird bemerken, daß „die Abende rasch länger werden", jedoch auch, daß es „am Morgen nicht hell werden will – Aussprüche, die man oft hören kann. Es trifft zu, daß sich die Untergänge der Sonne schnell verspäten, während die Sonnenaufgänge sich nur wenig verändern. Auch diese Erscheinung ist eine Auswirkung der Zeitgleichung.

An einem Beispiel soll dies verdeutlicht werden:

Am 1. 11. und 11. 2. ist die Tageslänge gleich, die Zeiten für die Auf- und Untergänge der Sonne unterscheiden sich aber um 30 Minuten.

	1. 11.	12. 2.
Sonnenaufgang	6.54h	7.24h
Sonnenuntergang	16.33h	17.03h

Hier zeigt sich die Auswirkung der Zeitgleichung wohl am deutlichsten. Der Kalender ist für uns unentbehrlich und selbstverständlich geworden. Wer aber darin aufmerksam blättert, wird manche „Unstimmigkeiten" entdecken können, die sich mit Hilfe astronomischer Gesetzmäßigkeiten leicht aufklären. Es ist auch kaum zu glauben, daß sich unsere Kalendermacher irren!

Arnold Zenkert

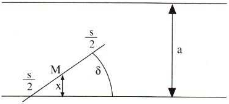
Was hat die Zahl π mit der Stochastik zu tun?

Die Mathematiker waren seit jeher bestrebt, die bei Berechnungen am Kreis auftretende Zahl π immer exakter zu bestimmen. In der „Mathematik in neun Büchern" – dem zentralen Werk der chinesischen mathematiker des ersten Jahrtausends v. Chr. – wurde für π der Näherungswert 3 angegeben. Der Astronom und Philosoph Zhang Heng (78 – 139) hat auf Grund unbekannter Überlegungen geschlossen, daß das Quadrat des Kreisumfanges sich zum Umfangsquadrat des dem Kreis unbeschriebenen Quadrates verhält wie 5 : 8 was dem Wert $\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}162...$ entspricht (Fehler unter 1%!). Mit großer Genauigkeit wurde π durch den hervorragenden Astronomen, Mathematiker und Ingenieur ZU Chongzhi (439 – 501) berechnet, der die Ungleichung $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ bewies. Die in China erzielte Genauigkeit von π wurde erst tausend Jahre später durch den islamischen Mathematiker Ghyath ad-Din Gamsid al-Kasi übertroffen, der π auf 16 Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnete.

Der Holländer Valentin Otho hat am Ende des 16. Jahrhunderts den Näherungswert $\frac{355}{113}$ für π erhalten, der auf 6 Dezimalen nach dem Komma genau ist, indem er vom Zähler bzw. Nenner des Nährungswertes des Ptolemäus $\frac{377}{120}$ den Zähler bzw. den Nenner des Näherungswertes des Archimedes $\frac{22}{7}$ abzog:

$$\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$$

Eine zunächst überraschende Methode, die Zahl π näherungsweise zu ermitteln, basiert auf dem sogenannten „Buffonschen Nadelproblem" aus dem Jahre 1777: *In der Ebene sind parallele Geraden im Abstand a gezogen. Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge s ($s \le a$) geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine der Geraden schneidet? (Abb. 1)*



Es sei x der Abstand des Nadelmittelpunktes von der nächstgelegenen Geraden und δ der Winkel zwischen der Nadel und dieser Geraden. Beim zufälligen Werfen der Nadel möge gelten:

a) x ist gleichverteilt in $\left[0, \frac{a}{2}\right]$

b) δ ist gleichverteilt in $[0, \pi]$

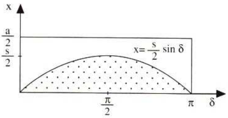
c) x und δ sind unabhängige Zufallsvariablen.

Man überlege sich leicht, daß die Nadel eine der beiden Geraden genau dann schneidet, wenn $x \le \frac{s}{2}\sin\delta$ ist. Dann kann man die Menge der Elementarereignisse Ω und das interessierende Ereignis E wie folgt beschreiben:

$$\Omega = \left\{(x,\delta); 0 < x < \frac{a}{2} \text{ und } 0 < \delta < 180°\right\}$$

$$E = \left\{(x,\delta); (x,\delta) \in \Omega \text{ und } x \le \frac{s}{2}\sin\delta\right\}$$

In Abb. 2 stellt das Rechteck die Menge Ω und die markierte Fläche das Ereignis E dar. Die Nadel schneidet eine der beiden Parallelen genau dann, wenn $x \le \frac{s}{2}\sin\delta$ ist, d. h. wenn der Ausgang des Versuchs in dem markierten Teil des Rechtecks liegt.



Auf Grund der Anwendbarkeit der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition (Laplace-Wahrscheinlichkeit) ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

$$P(E) = \frac{\text{Inhalt der markierten Fläche}}{\text{Inhalt der Rechteckfläche}}$$

$$P(E) = \frac{\frac{s}{2}\int_0^\pi \sin\delta \, d\delta}{\pi \frac{a}{2}} \qquad P(E) = \frac{\frac{s}{2}\left[-\cos\delta\right]_0^\pi}{\pi \frac{a}{2}}$$

$$P(E) = \frac{\frac{s}{2}\left[-(-1)-(-1)\right]}{\pi \frac{a}{2}} \qquad P(E) = \frac{2s}{\pi a}$$

Um mit Hilfe des beschriebenen Experiments die Zahl π näherungsweise zu bestimmen, erweist es sich als günstig, $a = 2s$ zu wählen. Daraus ergibt sich $P(E) = \frac{1}{\pi}$.

Man wirft nun die Nadel der Länge $s = \frac{a}{2}$ n mal und ermittelt die relative Trefferzahl:

$$\text{relative Trefferzahl} = \frac{\text{absolute Trefferzahl}}{n}$$

Die absolute Trefferzahl ist binomial verteilt mit der Wahrscheinlichkeit p und der Anzahl der Versuche n. Das „starke Gesetz der großen Zahlen" besagt, daß mit der Wahrscheinlichkeit 1 die relative Trefferzahl bei wachsendem n gegen die Wahrscheinlichkeit p konvergiert.

Schlußfolgerung: Bei genügend großen n erzielt man einen brauchbaren Näherungswert für n. Es gilt:

$$\pi^* = \frac{\text{Anzahl der Würfe}}{\text{Anzahl der Treffer}}$$

Bernd Dethloff

Ein Gerät für die Winkeldreiteilung

Die alten Griechen haben sich eingehend mit geometrischen Konstruktionen beschäftigt. Viele Probleme, die wir heute mit Mitteln der Algebra lösen, behandelten sie rein geometrisch. Dabei erlaubten sie nur den Gebrauch eines Lineals (ohne Längenskala) und eines Zirkels, d. h. nur das Zeichnen von Geraden und Kreisen. Diese Beschränkung geht auf Platon und seine Schüler zurück, für die nur Geraden und Kreise „perfekte" Linien waren.

Bereits damals bemerkte man, daß einige Konstruktionsaufgaben mit den genannten Mitteln allein nicht gelöst werden können. Im Laufe der Zeit wurden einige dieser Probleme berühmt. Eines von ihnen ist das Problem der Winkeldreiteilung. Es besteht darin, nur mit Zirkel und Lineal einen beliebigen Winkel in drei gleichgroße Teilwinkel zu zerlegen. Es gibt keine Lösung dieses Problems, d. h. es ist unmöglich, eine Konstruktionsvorschrift für die Dreiteilung eines beliebigen Winkels allein mit Zirkel und Lineal anzugeben. Diese Unmöglichkeit wurde erst im vorigen Jahrhundert bewiesen (P. Wentzell, 1837). Bis zu dieser Zeit haben viele berühmte Mathematiker und ebensoviele Hobbymathematiker versucht, dieses Problem zu lösen. Die letzteren taten es oft deshalb, weil für die Lösung dieses Problems hohe Belohnungen ausgesetzt waren. Heute beschäftigt sich kein Mathematiker mehr mit diesem Problem; es befassen sich nur diejenigen damit, die den Beweis Wentzells nicht kennen und sich für fähig halten, eine Lösung für etwas Unmögliches zu finden. Die Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe anderer Geräte, die komplexere algebraische Kurven als nur Geraden und Kreise zeichnen können, ist jedoch möglich.

In der Elementargeometrie gibt es kein Verfahren, mit dem man feststellen kann, welches Konstruktionsproblem mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann, und welches nicht. Eine Antwort auf diese Frage gibt die analytische Geometrie unter Verwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Analysiert man die Grundkonstruktion, so sieht man leicht, daß jedes Konstruktionsverfahren darauf reduziert werden kann, ausgehend von in einer Figur vorliegenden Punkten, Punkte mit geforderten Eigenschaften zu erzeugen. Jeder neue Punkt entsteht als Schnittpunkt zweier Geraden, einer Geraden und eines Kreises oder zweier Kreise. In der analytischen Geometrie werden Geraden durch lineare Gleichungen der Form

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

beschrieben, und Kreise sind durch quadratische Gleichungen der Form

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (2)$$

gegeben.

Demzufolge können die Koordinaten von „neuen" Punkten durch Lösen eines Systems aus 2 Gleichungen ermittelt werden, von denen jede entweder vom Typ (1) oder vom Typ (2) ist.

Die analytische Lösung des Problems der Winkeldreiteilung führt auf die goniometrische Gleichung $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$ (3) die durch die Substitution $\cos\alpha = a$, $\cos\frac{\alpha}{3} = x$ übergeht in die algebraische Gleichung $4x^3 - 3x - a = 0$ (4)

Es kann gezeigt werden, daß diese kubische Gleichung nicht für einen beliebigen Wert a (bzw. Winkel α) in ein System von Gleichungen des Typs (1) bzw. (2) überführt werden kann. Das bedeutet, daß nicht jeder Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal in drei gleichgroße Teile zerlegt werden kann. Wenn aber der Winkel α die Größe $\frac{90°}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ hat, kann die Gleichung (4) in ein System von Gleichungen des Typs (1) bzw. (2) überführt werden, d. h. die Winkeldreiteilung kann mit Zirkel und Lineal erfolgen.

Es entsteht nun die Frage, ob irgendein anderes Instrument für den Zweck der Dreiteilung beliebiger Winkel gedacht werden kann. Bei der Suche nach einer Antwort auf diese Frage wurden spezielle Geräte – sogenannte Trisektoren (dt. Dreiteiler) – konstruiert. Abb. 1 zeigt einen vom Autor entworfenen Trisektor. Er besteht aus Stäben a und b der Länge r, die in derselben Ebene liegen und um einen gemeinsamen Punkt O gedreht werden können, und mit ihnen verbundene Stäbe c und d der Länge 3r, die Schlitze der Länge r haben, in denen die Stifte A bzw. B gleiten. Für die Abstände der Stifte A, B, C und O gilt: $|CB| = |OC| = |OA| = r$.

Wenn die Stäbe a *und* c *an einen Winkel* α *angelegt werden, so bilden die Stäbe* c *und* d *einen Winkel der Größe* $\frac{a}{3}$.

Beweis: Wegen $|CB| = |OC| = |OA|$ sind die Dreiecke AOC und OCB gleichschenklig (Abb. 2). Nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke, angewendet auf Δ OAC, gilt $2\beta + 2\beta = \alpha + \beta$, d. h. $\alpha = 3\beta$, also $\beta = \frac{a}{3}$.

Dr. Branislav Čabrić, Kragujevac
(übersetzt und bearbeitet v. Dr. C. P. Helmholz)

Abb. 1

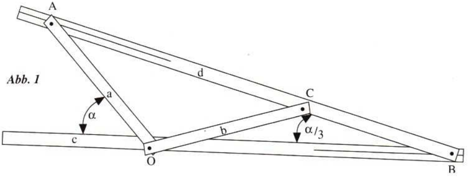
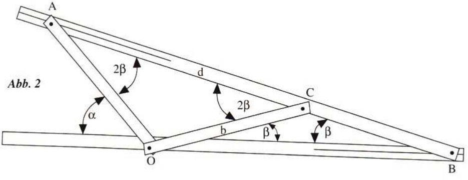
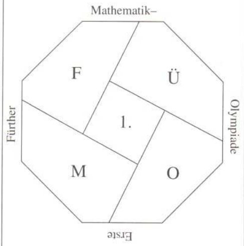


Abb. 2



Für sechs Schüler rechnet sich die Mathematik

Im Kalender der Mathewettbewerbe gibt es seit dem Schuljahr 1992/93 einen neuen Eintrag: FÜMO. Was ein wenig nach einer feuerfesten Knetmasse aus dem Basteladen klingt, ist das Kürzel für die Fürther Mathematik Olympiade. Diese für Bayern und das übrige Süddeutschland wohl einmalige Wettbewerbsform gehört zur seltenen Klasse der Stadtolympiaden. Ausgebrütet wurde FÜMO von zwei Mathelehrern am Gymnasium Stein (bei Nürnberg). Der Fürther Mathewettstreit ist ein Parallelwettbewerb für Schüler der 7./8. bzw. 9./10. Jahrgangsstufen und wird in zwei Runden ausgetragen. Zugelassen sind alle Schülerinnen und Schüler, die eines der insgesamt 6 Gymnasien der Stadt und des Landkreises Fürth besuchen. In der 1. Runde (Anfang Oktober bis Anfang Dezember) müssen 3 (nahezu) gleichwertige Aufgaben zu Hause selbständig bearbeitet werden. Die Punktbesten werden zur 2. Runde eingeladen und müssen erneut 3 Probleme mit einem leicht erhöhten Schwierigkeitsgrad lösen (ab Mitte Februar bis Ende April). Die besten Ergebnisse aus beiden Runden werden am Schuljahresende prämiert. Einer der Gründe, die zu dieser Initiative geführt haben, ist die Tatsache, daß spezielle Neigungen mathe-



matisch begabter Schüler in der Bundesrepublik zu wenig und wenn doch, dann zu spät eine Förderung erfahren. Insbesondere hatten sich auch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer an der 1. FÜMO deutlich dafür ausgesprochen, viel früher Anregungen für eine vergnügliche außerunterrichtliche Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen zu bekommen. Denn: „Im Sport machen sich Athleten lange vor dem eigentlichen Wettbewerb warm, Musiker stimmen ihre Instrumente – nur in der Mathematik sollte alles auf Anhieb klappen!"

Der damalige bayerische Kultusstaatssekretär, MdL Hermann Leeb, hat in seinem Grußwort während des Festaktes der Preisverleihung zum Bundeswettbewerb Mathematik 1992 Ende April in Nürnberg, das Fürther Modell ausdrücklich als vorbildhaft gewürdigt.

Künftig soll eine Besonderheit hinzukommen. Die schlimmen Ereignisse von Mölln und Solingen nehmen die Initiatoren zum Anlaß, ab diesem Schuljahr FÜMO stärker als bisher für ausländische Schüler und Aussiedlerkinder zu öffnen. FÜMO soll nun verstärkt Jugendliche unterschiedlicher Herkunft zusammenbringen, sitzen doch in fast allen Klassen Schüler aus verschiedenen Kulturkreisen nebeneinander. Die Mathematik ist keine trennende Wissenschaft; sie überspringt Grenzen und kennt keine auserwählten Völker. Schließlich haben wir vor allem von „Ausländern" das Rechnen gelernt. Was wäre die Alltags-Mathematik ohne arabische Ziffern und die Geometrie ohne die Erkenntnisse der alten Griechen? Ab Herbst 1993 werden zusätzlich in beiden Runden je drei Aufgaben für die Jahrgangsstufen 5./6. angeboten, um mit der Talentsuche möglichst frühzeitig anzufangen. Darüber hinaus soll FÜMO durch wertvollere Preise noch verlockender auf Schüler wirken. Für eine besonders gelungene Lösung einer Aufgabe wird künftig ein Sonderpreis gestellt. Auch dies ist ein besonderes Markenzeichen für FÜMO. In vielen Situationen des Lebens, wo man mit Zahlen zu tun hat, kann man sich leicht verrechnen. Nicht so bei FÜMO: Hier rechnet sich die Mathematik.

Paul Jainta, Schwabach

Preisträger und Organisatoren von FÜMO

Die Problemecke

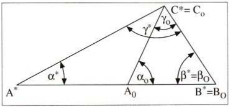
Eine Aufgabe über Dreiecke

Ein sehr ergiebiges Feld für unabhängige Untersuchungen ist zweifelsohne das Thema Dreiecke. Ich habe hieraus eine Folge von Kurzbeiträgen zusammengestellt, die von Dreiecken handeln, zwischen deren Winkeln bestimmte Beziehungen gelten. Das jeweils betrachtete Dreieck läßt sich stets durch eine Transversale in zwei Teildreiecke zerlegen, von denen eines zum Ausgangsdreieck ähnlich ist.

- Zu den im nachfolgenden Kurzbeitrag gestellten Aufgaben sollen in einem weiteren Beitrag von Lesern eingereichte, eventuell redaktionell überarbeitete Lösungen, abgedruckt werden, wobei die Einsender namentlich erscheinen.
- Von Lesern eingesandte, zum selben Problemkreis gehörende, passende Aufgaben werden mit dem Namen des Einsenders veröffentlicht.

Teil I der Forschungsreise beginnt heute mit einer für die Beitragsserie grundlegenden Aufgabe I

Aufgabe I. Es gelte: A_o ist ein innerer Punkt der Seite $A^* B^*$ des Dreiecks $A^*B^*C^*$, und das Teildreieck $A^*A_oC^*$ ist ähnlich zu Dreieck $A^*B^*C^*$.



Wir führen für die Maßzahlen der Seitenlängen folgende Abkürzungen ein:

$\overline{B_oC_o} = a_o$, $\overline{A_oC_o} = b_o$, $\overline{A_oB_o} = c_o$

$\overline{B^*C^*} = a^*$, $\overline{A^*C^*} = b^*$, $\overline{A^*B^*} = c^*$

Es sind nun diejenigen Formeln herzuleiten, mit deren Hilfe

a) aus gegebenem a^*, b^*, c^* die Maßzahlen a_o, b_o und c_o oder

b) aus gegebenem a_o, b_o, und c_o die Maßzahlen a^*, b^* und c^* berechnet werden können.

Weiterhin ist nachzuweisen: c) Sind a^*, b^* und c^* positive rationale Zahle, so sind a_o, b_o und c_o ebenfalls positive rationale Zahlen und umgekehrt.

Eine erfolgreiche Mitarbeit wünscht

Dr. Walter Träger, Döbeln

Ebenfalls ein wenig Forschermut erfordern die neuen Knobelaufgaben. Also forsch ran an Problemecke.

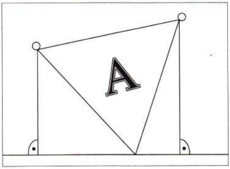
Die ProblemEcke

J 5. Auf wie viele verschiedene Arten kann man aus dem nebenstehenden Muster das Wort ALGEBRA lesen? Begründe das erhaltene Ergebnis!

```
      E
    G   B
  L   E   R
A   G   B   A
  L   E   R
    G   B
      E
```

J 6. In einem Raum befinden sich 12 Personen. Einige sagen immer die Wahrheit, die restlichen lügen stets. Einer sagt: „Keiner von uns ist ehrlich!" Ein anderer meint: „Unter uns befinden sich nicht mehr als eine ehrliche Person!" ein dritter sagt: „Es sind nicht mehr als zwei ehrliche Personen in diesem Zimmer!" Dies geht reihum so weiter, bis schließlich der zwölfte sagt: „Es sind nicht mehr als elf ehrliche Personen anwesend!" Begründe, wie viele ehrliche Leute sich in dem Raum aufhalten!

M 5. Eine große Flagge hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Sie hängt mit zwei Ecken an zwei 4 Meter bzw. 3 Meter hohen Mastspitzen. Die dritte Ecke berührt gerade den Boden (siehe Zeichnung). Bestimme die genauen Abmessungen der Flagge.



M 6. Es seien p, q und r beliebige (positive) rationale Zahlen, welche der Bedingung genügen: $pq + qr + pr = 1$.
Weise nach, daß die Zahl
$(1 + p^2) \cdot (1 + q^2) \cdot (1 + r^2)$ das Quadrat einer rationalen Zahl s ist.

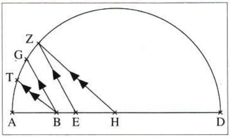
O 5. Piraten, die einen vergrabenen Schatz ausgehoben haben, verteilen nach getaner Arbeit anteilsmäßig ihre Beute. Der Schatz wird vollständig aufgeteilt, wobei der Käpt'n den größten Anteil behält, der Erste Offizier sich den zweitgrößten Batzen sichert usw. Der Schiffsjunge muß sich mit dem kleinsten Anteil begnügen. Da nun Piraten durchweg keine tollen Bruchrechner sind, teilen sie ihren Schatz nur in Brüche mit dem Zähler 1 auf (Seeräuber, die andere Anteile fordern, etwa 2/3 oder 4/7, müssen zur Strafe an Deck auf und ab gehen).

a) Zeige, daß es bei 3 Piraten nur eine Möglichkeit gibt, die Beute auf diese Weise aufzuteilen.

b) Finde die sechs verschiedenen Aufteilungen für vier Seeräuber.

c) Weise allgemein nach, daß es für n Piraten ($n > 2$) mindestens eine Möglichkeit gibt, den Schatz in der beschriebenen Weise unter die Schatzgräber zu verteilen.

O 6. Gegeben ist eine Stecke AB. Verlängere die Strecke über B hinaus bis zu Punkt D. (Die Länge BD sei dabei beliebig). Zeichne über AD den Halbkreis mit Mittelpunkt H. Wähle auf der (Halb)Kreislinie einen Punkt G so, daß $\sphericalangle ABG$ spitz ist. Zeichne nun eine Strecke EZ parallel zu BG, wobei E folgender Bedingung genügt: $\overline{EH} \cdot \overline{ED} = \overline{EZ}^2$.
Verbinde nun Z mit H und wähle erneut einen Punkt T auf der Kreislinie mit TB ‖ ZH. (Vergleiche die nebenstehende Zeichnung).



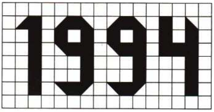
Beweise die folgende Winkelgleichheit:
$\sphericalangle ABG = 3 \cdot \sphericalangle TBG$.

Ich bin gespannt auf Eure Lösungen! Schickt sie an folgende Adresse: Paul Jainta, Werkvolkstr. 10, 91126 Schwabach.

StR Paul Jainta, Schwabach

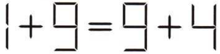
Im Blickpunkt: Das Jahr 1994

1. Jahreszahl in Prozenten



Wieviel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 1994?

2. Hölzchenspiel



Legt mit Hilfe von gleich langen Hölzchen die abgebildete, offenbar falsche Gleichung auf! Es ist dann genau ein Hölzchen derart umzulegen, daß eine wahre Gleichung entsteht.

3. Zwei natürliche Zahlen

Gesucht sind zwei natürliche Zahlen. Subtrahiert man das 19-fache der zweiten Zahl vom 95-fachen der ersten Zahl, so erhält man 19. Subtrahiert man aber das 94-fache der ersten Zahl vom 20-fachen der zweiten Zahl, so erhält man 94. Wie lauten diese beiden Zahlen?

4. Summe und Produkt

Gesucht sind abermals zwei natürliche Zahlen. Ihre Summe beträgt 999, ihr Produkt beträgt 1994. Wie lauten diese beiden Zahlen?

5. Rechenspaß mit Jahreszahlen

1 9 9 3 = 1 9 9 4

Setzt zwischen die Grundziffern der beiden Jahreszahlen Zeichen für rationale Rechenoperationen so ein, daß eine wahre Gleichung entsteht! Klammern dürfen nicht benutzt werden, also geht Punkt- vor Strichrechnung. Wer findet mindestens 8 verschiedene derartige Gleichungen?

6. Größenvergleich

Gegeben seien die gebrochenen Zahlen $x = 1992/1993$ und $y = 1993/1994$. Welche von beiden Zahlen ist die größere Zahl?

7. Umordnung

1	9	9	4
1	9	9	4
1	9	9	4
1	9	9	4

→

Ordnet die sich im linken Quadrat befindlichen Ziffern so in das rechte Quadrat ein, daß sich in jeder Zeile und jeder Spalte alle vier Grundziffern der Jahreszahl 1994 befinden!

8. Eine harte Nuß

Ermittelt alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, die dem folgenden (nichtlinearen) Gleichungssystem genügen:

$x^3 - 78x - 57y = 19$

$376x^2 - 4x^2y + y = 94$

Hinweis: Um diese Aufgabe elegant und schnell zu lösen, solltet Ihr versuchen, die zweite Gleichung in Produktform $u(x)v(y) = 0$ darzustellen.

9. Kryptographie

Ersetzt in dem abgebildeten Kryptogramm die Sternchen so durch dezimale Grundziffern, daß eine richtig ausgeführte Multiplikationsaufgabe entsteht!

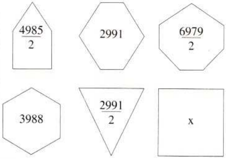
```
1993 · ****
       7***
     *7***
    ***3*
    ***3
    *******
```

10. Gerechte Teilung

9							1
4						4	
		1	9	9	4		
9		1	9	9	4		9
9							1

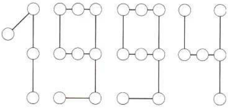
Zerlegt die abgebildete Quadratfläche derart in vier kongruente Flächenstücke, daß jedes dieser Flächenstücke alle Grundziffern der Jahreszahl 1994 enthält!

11. Geheimnisvolles x



Wie muß logischerweise die Zahl x lauten?

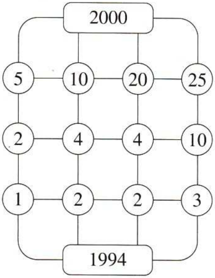
12. Magische Jahreszahl



Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis n (n = Anzahl der Kreisfelder) in jede einzelne Zahlen-Figur so ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Figurenabschnitt S (S = charakteristische Summe der Figur) beträgt! Es soll sein:

a) bei Figur 1 : n = 4, S = 6 oder 7;
b) bei Figur9l : n = 8, S = 12;
c) bei Figur 9r : n = 9, S = 15;
d) bei Figur 4 : n = 6, S = 8, 9 oder 10.

13. Jahr 2000 in Sicht



Findet in der Abbildung mindestens zwei Wege von 1994 nach 2000, bei denen das Produkt der längs dieser Wege überschrittenen Zahlen 2000 beträgt!

Viel Spaß beim Knobeln wünscht Euch

Dr. R. Mildner

34. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO)

Istanbul, Türkei, 1993

Auswahl und Vorbereitung
Die Auswahl und Vorbereitung der deutschen Mannschaft verlief nach den eingespielten Verfahren des Vorjahres. Etwa 130 Schüler qualifizierten sich durch eine erfolgreiche Teilnahme an der 2. Runde des Bundeswettbewerbes Mathematik oder an Mathematik-Olympiaden für 2 Auswahlklausuren.
Die 16 erfolgreichsten Klausurteilnehmer bildeten den Kandidatenkreis für die deutsche Mannschaft. Für sie gab es Seminare an einem Wochenende in Rostock, an drei Wochenenden in Frankfurt/Main und die traditionelle Abschlußwoche in Oberwolfach. Die sechs Besten bildeten die IMO-Mannschaft (s. Tabelle 1). In diesem Jahr waren sechs ehemalige IMO-Preisträger unter den Kandidaten, wovon sich fünf wiederum qualifizieren konnten. Delegationsleiter war Herr Professor Hans-Dietrich Gronau, Greifswald, Stellvertreter Herr Thorsten Kleinjung, Bonn.

Ablauf
Die 34. IMO fand vom 13. bis 24. 7. 1993 in Istanbul statt. Die Olympiade fand bei Politikern große Beachtung. So nahm der Stellvertretende Ministerpräsident Prof. Inönü an der Eröffnungsveranstaltung persönlich teil.
Auch das Echo in den türkischen Medien war beachtlich (was man vom deutschen Nachrichtenwesen leider nicht behaupten kann).

Wettbewerb
Es gab eine Reihe von interessanten Aufgabenvorschlägen; die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades durch die Kommission und Jury stimmte teilweise nicht mit den Ergebnissen der Schüler überein.
Diese Olympiade stellte sich als eine der schwierigsten in ihrer Geschichte heraus. So wurden durchschnittlich 12.6 Punkte (von 42), d. h. 30 % erreicht. Laut Reglement sollten nicht mehr as 50 % der Teilnehmer einen Preis erhalten und die Anzahl der ersten drei Preise das Verhältnis 1 : 2 : 3 haben. Die Jury hielt sich an diese Regel, wollte aber möglichst viele Schüler mit einem Preis ehren. Die Punktgrenzen werden in Tabelle 2 angegeben.
Die Koordination verlief hart, fair und sehr gründlich. Geplant war pro Aufgabe und Team eine halbe Stunde. Die deutsche Mannschaft benötigte insgesamt 10 Stunden!

35 Goldmedaillen (von 42)	für ≥ 30 Punkte
66 Silbermedaillen	für ≥ 20 Punkte
97 Bronzemedaillen	für ≥ 11 Punkte
198 Medaillen	bei 412 Teilnehmern

Tabelle 2: Die Punktgrenzen für die Preise

Jakob Stix	39 Punkte	Gold
Martin Wiechert	37 Punkte	Gold
Stefan Schwarz	32 Punkte	Gold
Eike Lau	30 Punkte	Gold
Manuel Moos	27 Punkte	Silber
Jan-Christoph Puchta	24 Punkte	Silber

Tabelle 3: Die Ergebnisse der deutschen Mannschaft

Gesamtüberblick
An der 34. IMO nahmen 73 Länder aktiv mit 412 Schülern teil. Im Vergleich zu 1992 waren erstmals dabei: Albanien, Armenien, Aserbaidschan, Bosnien, Estland, Georgien, Kasachstan, Kirgisien, Kroatien, Lettland, Litauen, Makedonien, Moldawien, Nordzypern, Slowenien, Turkmenistan, Ukraine, Weißrußland. Ferner nahmen Algerien, Bahrain, Kuwait und Luxemburg nach einer Pause wieder teil. Die beiden Nachfolgestaaten der früheren Tschechoslowakei, Slowakei und Tschechei, schickten je ein Team nach Istanbul. Im Vergleich zu 1992 fehlten: Griechenland, Jugoslawien (bzw. Serbien und Montenegro), Nordkorea, Tunesien, Zypern. Eine übergreifende Mannschaft der GUS wie zuletzt noch, gab es nicht mehr. Als zusätzlicher Beobachter nahm Chile teil.

Die deutsche IMO-Mannschaft
Das Ergebnis der deutschen Mannschaft war sehr gut (Tabelle 3). Am zweiten Tag gelang der Mannschaft ein phantastisches Resultat. Der Vergleich der erreichten Ergebnisse (in Prozent) aller IMO-Teilnehmer, der Schüler der Top 10-Mannschaften sowie der deutschen Mannschaft gibt Aufschluß darüber, wie unsere Schüler die Aufgaben im Vergleich bewältigen (Tabelle 4). Auffällig viele deutsche Teilnehmer haben Schwächen in der reinen Geometrie (2. Aufgabe), obwohl in der

Eike Lau	Hamburg Gymnasium Ohsmoor	Kl.-Stufe 13
Manuel Moos	Heidelberg Bunsen Gymnasium	Kl.-Stufe 13
Jan-Christoph Puchta	Waldkirch Geschwister-Scholl-Gymnasium	Kl.-Stufe 13
Stefan Schwarz	Erfurt Gymnasium 7	Kl.-Stufe 12
Jakob Stix	Stegen Kolleg St. Sebastian	Kl.-Stufe 13
Martin Wiechert	Erlangen Gymnasium Fridericianum	Kl.-Stufe 13

Tabelle 1: Die deutsche Mannschaft

Aufgabe	Gebiete	alle	Top 10	deutsches Team
1	Zahlentheorie/Polynome	29.0%	73.6%	69.0%
2	Geometrie	27.7%	60.2%	31.0%
3	Diskrete Mathematik	16.2%	43.8%	57.1%
4	Geometrie	33.0%	67.9%	97.6%
5	Funktionalgleichung	48.5%	85.2%	95.2%
6	Diskrete Mathematik	26.0%	59.3%	100.0%

Tabelle 4: Die Ergebnisse bzgl. der einzelnen Aufgaben

1994	Hong Kong	Austragung ist klar
1995	Canada	Austragung ist klar
1996	Indien	Austragung ist klar
1997	Argentinien	Austragung ist höchstwahrscheinlich
1998	Taiwan	Austragung ist höchstwahrscheinlich
1999	Rumänien	Interesse bekundet
2000	Südkorea	Interesse bekundet
2001	USA	Interesse bekundet
2002	?	
2003	Japan	Interesse bekundet

Tabelle 5: Die Gastgeber der nächsten IMOs

Vorbereitung gerade hierauf ein besonderer Schwerpunkt gelegt wurde.

Ausblick

Die gegenwärtige Situation über die Ausrichtung der nächsten IMOs ist in Tabelle 5 angegeben.

Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau, Greifswald
Delegationsleiter
der deutschen Mannschaft

Aufgaben der 34. IMO

1. Tag

1. Es seien $n > 1$ eine ganze Zahl und
$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$
Man beweise, daß $f(x)$ nicht als Produkt zweier Polynome dargestellt werden kann, wobei beide Polynome jeweils ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten haben und vom Grad mindestens 1 sind! *(Irland)*

2. Gegeben seien ein spitzwinkeliges Dreieck ABC und ein Punkt D innerhalb des Dreiecks, so daß $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACB + 90°$ und $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ gilt.

a) Man berechne $\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$!

b) Man beweise, daß die Tangenten an die Umkreise der Dreiecke ACD und BCD im Punkt C aufeinander senkrecht stehen! (Großbritannien)

3. Auf einem unendlichen Schachbrett wird folgendes Spiel gespielt: Zu Beginn sind n^2 Spielsteine auf dem Schachbrett in einem $(n \times n)$-Quadrat von benachbarten Feldern so angeordnet, daß auf jedem dieser Felder ein Spielstein liegt. Ein Zug in dem Spiel ist ein Sprung eines Spielsteines in horizontaler oder vertikaler Richtung über ein belegtes Nachbarfeld auf ein unmittelbar dahinter liegendes unbelegtes Feld. Der übersprungene Stein wird anschließend entfernt.
Man bestimme diejenigen Werte von n, für welche das Spiel mit nur einem verbleibenden Spielstein beendet werden kann! (Finnland)

2. Tag

4. Sind P, Q und R drei Punkte einer Ebene, so bezeichnet man mit m (PQR) das Minimum der Längen der drei Höhen des Dreiecks PQR (wobei m (PQR) = 0, falls P, Q und R kollinear sind). Gegeben seien die Punkte A, B und C in der Ebene. Man zeige, daß für jeden Punkt X in der Ebene gilt:
$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.
(Makedonien)

5. Es sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Man untersuche, ob es eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, mit
$f(1) = 2$,
$f(f(n)) = f(n) + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
$f(n) < f(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(Deutschland)

6. Es sei $n>1$ eine ganze Zahl. Weiter seien n Lampen $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$ gegeben, die in einem Kreis angeordnet sind. Jede Lampe ist entweder AN oder AUS: Eine Folge von Operationen $S_0, S_1, ..., S_i, ...$ wird ausgeführt. Dabei beeinflußt die Operation S_j nur die Lampe L_j, alle anderen Lampen bleiben unverändert. Die Operation S_j wird wie folgt definiert:
Falls L_{j-1} AN ist, so wird der Status von L_j verändert, d. h. aus AN wird AUS bzw. aus AUS wird AN. Falls L_{j-1} AUS ist, so bleibt L_j unverändert.
Die Lampen sind modulo N angeordnet, d. h. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, usw. Zu Beginn sind alle Lampen AN. Man beweise:
a) Es existiert eine positive ganze Zahl M (n), so daß nach M (n) Operationen alle Lampen wieder AN sind.
b) Falls n von der Form 2^k ist, so sind nach $n^2 - 1$ Operationen alle Lampen AN.
c) Falls n von der Form $2^k + 1$ ist, so sind nach $n^2 - n + 1$ Operationen alle Lampen AN.
(Niederlande)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden an jedem Tag.

Bei jeder Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Die Olympiade Ecke

Leser forschen für Leser

Zahlreiche Zeitgenossen halten die Mathematik für eine knochentrockene Wissenschaft. Viele geben der Schule die Schuld, in der die Vermittlung mathematischer Kenntnisse vorwiegend äußerste Perfektion anstreben soll. Da bleiben dann die fesselndsten Sachverhalten auf der Strecke. In der Mathematik schlummert ein reicher Schatz an Kostbarkeiten, der auch für euch Schüler verständlich ist und nur darauf wartet, gehoben zu werden. Es geschieht häufig, daß ein vom Lehrer dargebotenes Thema, das nicht unbedingt zum üblichen Lehrplan gehört, dennoch oder gerade deswegen ein besonderes Echo in der Klasse erfährt. Mitunter verdichtet sich bei dem einen oder anderen die erwachende Neugier zu spontan beginnender, selbständiger Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen.
In Heft 3/93 habe ich Euch aufgerufen, neben der Beteiligung an der ProblemEcke, mir auch von eigenen Entdeckungen bei Eurer Beschäftigung mit Mathematik zu schreiben. Es gibt in der Literatur eine ungeahnte Fülle von Problemen, die sich verallgemeinern lassen oder zu weiteren Forschungen (auch mit Taschenrechner oder Computer) geradezu einladen. Ich werde euch vereinzelt Themen vorschlagen, die zur eigenen Forschertätigkeit überreden sollen, so etwa Das Falten von pythagoräischen Dreiecken oder Eigenschaften von Palindromzahlen (Zahlen der Art 1991, 12 3 21, etc.). Diese Forschungsprojekte lassen genug Spielraum für eigenes Experimentieren, erfordern nur Schulmathematik und eignen sich auch als augenfälliges Plakat bzw. Blickfang für euer Klassenzimmer oder das Schwarze Brett in der Schule.
Wer ein wenig Aufhellung in ein undurchsichtiges Problem bringen kann, ist herzlich aufgerufen, seine Forschungsergebnisse den Lesern vorzustellen. Die Redaktion alpha möchte mit dieser Ecke eine gute alte Tradition wiederbeleben, und Euch Gelegenheit geben, selbst auf mathematische Entdeckungsreise zu gehen.

Paul Jainta

Alpha-Wettbewerb Teil I

5/1
Axel und Bernd sind begeisterte Schachspieler. Im vergangenen Monat trugen sie 21 Schachpartien miteinander aus. Dabei gewann Axel dreimal so viele Partien wie er verlor. Fünf Partien fielen „remis" aus. Wie viele Partien gewann Bernd?

5/2
Onkel Erich und sein Neffe Gerd sind zusammen 80 Jahre alt. Vor vier Jahren war der Onkel achtmal so alt wie sein Neffe. Wie alt ist jeder von ihnen gegenwärtig?

5/3
In einem Stall sind Kaninchen und Gänse. Alle zusammen haben 72 Füße und 20 Köpfe. Wieviel Kaninchen und wieviel Gänse sind in diesem Stall?

5/4
Von fünf Schülern einer Klasse ist folgendes bekannt:
(1) Karl ist kleiner als Rolf.
(2) Lutz ist größer als Rolf.
(3) Peter ist der kleinste, Hans der größte dieser fünf Schüler.
Ordne sie nach ihrer Größe, beginne mit dem Kleinsten!

5/5
Ein Mathematiklehrer wurde von seinen Schülern gefragt, an welchem Tag und in welchem Monat er Geburtstag habe. Seine Antwort lautete: „Wenn man die Zahl meines Geburtstages mit der Zahl meines Geburtsmonats multipliziert, so erhält man als Ergebnis 209. Nun findet ihr die Antwort auf eure Frage sicher selbst."

5/6
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 836. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man den anderen Summanden. Es sind diese beiden Summanden zu ermitteln.

5/7
Eine Schulklasse will eine Wanderung nach einem 12 km entfernten Aussichtsturm machen. Ein Teil der Schüler will zu Fuß um 8 Uhr aufbrechen und in jeder Stunde 4 km Wegstrecke zurücklegen. Die übrigen Schüler wollen mit dem Fahrrad in jeder Stunde 16 km schaffen. Um wieviel Uhr müssen die Radwanderer aufbrechen, wenn beide Schülergruppen gleichzeitig am Zielort eintreffen wollen?

6/1
Es sind alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 3000 sind, zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen: Bei Division durch 2 lassen diese Zahlen den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 6, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8 und durch 10 den Rest 9.

6/2
In dem abgebildeten Schema sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Mulitplikationsaufgabe entsteht.

```
     *** · ***
     ---------
       ***
   3535
    ***
  ------
  ******
```

6/3
Die Quersumme einer dreistelligen natürlichen Zahl beträgt 15. Die Anzahl der Einer ist um 4 größer als die Anzahl der Zehner und um 5 größer als die Anzahl der Hunderter. Um welche Zahl handelt es sich?

6/4
Ein Winzer schenkt zwei Freunden eine 12-Liter-Flacshe Wein, den sie sich teilen sollen. Die Freunde haben aber nur ein 5-Liter-und ein 7-Liter-Maß zur Verfügung. Wie können sie unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße den Wein gerecht teilen?

6/5
Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Quersumme halb so groß ist wie deren Querprodukt. (Unter dem Querprodukt einer natürlichen Zahl verstehen wir das Produkt aus denjenigen Zahlen, die den Grundziffern entsprechen.)

6/6
Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitel S und den Schenkeln s_1 und s_2 sowie ein innerer Punkt P dieses Winkels. Durch den Punkt P ist eine Gerade zu konstruieren, die s_1 in M und s_2 in N derart schneidet, daß $\overline{PM} = \overline{PN}$ gilt. Die Konstruktion ist zu begründen.

6/7
Ein Eisenbahnzug fährt an einer Baustelle langsam mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h. Im Zug geht eine Person vom ersten zum letzten Wagen mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s. Mit welcher Geschwindigkeit in km/h bewegt sie sich auf den Bahndamm bezogen?

7/1
Es sei $p = \overline{aba}$ eine in dikadischer Schreibweise dargestellte Primzahl, deren Quersumme 22 beträgt. Wie viele derartige Primzahlen gibt es, und wie lauten sie?

7/2
Hans möchte seiner Mutter zu ihrem Geburtstag ein Geschenk kaufen. Deshalb öffnet er seine Sparbüchse. Sie enthält nur 10-DM-Scheine, 5-DM-Stücke und 1-DM-Stücke, sonst keine anderen Geldscheine oder Münzen. Zu seinem Erstaunen stellt Hans fest, daß die Sparbüchse zusammen genau 50 Geldscheine oder Münzen enthält, die insgesamt einen Wert von 100 DM haben. Wie viele Geldstücke zu 1 DM enthält die Sparbüchse von Hans?

7/3
Heinz fordert Gerd auf: „Denke dir eine natürliche Zahl zwischen 0 und 500, multipliziere sie mit 54, danach noch mit 37 und nenne mir das Ergebnis!" Aus dem Ergebnis konnte Hans angeben, welche Zahl Gerd sich gedacht hatte. Gib dafür eine Begründung.

7/4
Auf einer Versammlung waren dreimal soviel Männer wie Frauen anwesend. Nachdem vier Ehepaare die Versammlung vorzeitig verlassen mußten, waren viermal soviel Männer wie Frauen noch anwesend. Wie viele Personen besuchten diese Versammlung?

7/5
Die Seitenlängen eines Dreiecks verhalten sich wie 9 : 10 : 15. Die längste Seite ist um 12 cm länger als die kürzeste Seite. Es sind die Seitenlängen dieses Dreiecks zu bestimmen.

7/6
Es ist gefährlich, im Sommer den Benzintank eines Autos randvoll zu füllen, da sich Flüssigkeiten beim Erwärmen ausdehnen. Wieviel Kraftstoff würde aus einem Tank mit einem Inhalt von 40 l austreten, wenn er bei 10 °C randvoll gefüllt und durch Sonneneinstrahlung auf 50 °C erwärmt wird? Der Volumenausdehnungskoeffizient γ von Benzin beträgt $0{,}001\ K^{-1}$.

7/7
Bei einer optischen Linse besteht zwischen der Gegenstandsweite g, der Bildweite b und der Brennweite f eine Beziehung (Linsengleichung). Wie lautet diese Beziehung:
a) $g \cdot b = f$
b) $(g \cdot b)^2 = f$
c) $g + b = f$
d) $1/f = 1/g + 1/b$

8/1
Skizziere alle nichtkongruenten Netze zu einem dreiseitigen Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und dessen Höhe gleich der Seitenlänge dieses Dreiecks ist.

8/2
Ein Glaser soll 3 mm dicke Glasscheiben für einen oben offenen gläsernen Würfel mit einem Fassungsvermögen von 8 dm^3 zuschneiden. Gib alle möglichen Maß der 5 Scheiben an, wenn die Grundscheibe die größten Abmessungen hat.

8/3
Lydia darf sich eine Eistüte mit 2 Kugeln ihrer Wahl kaufen. Die Verkäuferin hat 3 Sorten Eis. Wieviele Möglichkeiten der Zusammenstellung hat das Mädchen?

8/4
Die Eltern haben für ihre Tochter Susi 5000 DM zu folgenden Konditionen angelegt (Zuwachssparen): Im ersten Jahr werden 5,75 % im zweiten 6,0 %, im dritten 6,25 % und im vierten 6,5 % Zinsen gezahlt. Die Zinsen werden jährlich gutgeschrieben und mit verzinst. Wie hoch ist Susis Sparguthaben nach 4 Jahren?

8/5
Kommt in der Zahlenfolge 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66 ... die Zahl 4755 vor?

8/6
Ein Gewichtheber (Schwergewicht) bringt beim „Reißen" (Anheben der auf dem Fußboden liegenden Hantel in einem Zug) 130 kg in 1 s zur Hochstrecke (2,2 m über dem Fußboden).
Beim „Drücken" stemmt er eine Hantel von 185 kg aus der Schulterhöhe (1,6 m) in 8 s in die Hochstrecke. Berechne in beiden Fällen die physikalische Leistung in PS! (nach Dorn, Arbeitsheft Physik f. Mittelstufe)

8/7
Ein Körper mit einer Gewichtskraft 6 N schwimmt in Petroleum ($e = 0{,}8\ kg \cdot dm^3$). Wie groß ist das untergetauchte Volumen V in dm^3? ($g = 10\ m \cdot s^{-2}$)

9/1
Einem Würfel mit einer Kantenlänge von a = 20,0 cm soll ein Tetraeder einbeschrieben werden. Wo liegen die Eckpunkte des Tetraeders und wie lang ist eine Kante s?

9/2
Das Zahlenschloß von Sebastian hat vier Ringe mit den Ziffern 0 bis 6. Er weiß nur noch, daß die zweite Ziffer die einzige 5 in seiner Geheimzahl war. Wieviele verschiedene Einstellungen des Schlosses erfüllen diese Bedingung?

9/3
Gegeben seien n verschiedene Geraden, die alle durch einen Punkt gehen. Die n Geraden zerlegen die Ebene in T_n Teilen. Bestimmen Sie T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 und versuchen Sie, eine „Formel" für T_n zu finden.

9/4
Marco hat nur 2-Pfennig- und 5-Pfennig-Stücke (in nahezu unbegrenzter Anzahl). Kann er damit jeden Betrag bis zu 3 DM bezahlen, ohne daß der Händler herauszugeben braucht?

9/5
Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $a(x + 1) = bx$ in Abhängigkeit von a und b an!

9/6
In der Stadt fährt ein Auto mit 36 km/h. Außerhalb des Ortes beschleunigt der Fahrer mit $a = 2\ m \cdot s^{-2}$ auf 90 km/h. Wie lange dauert die Beschleunigung?

9/7
Bei der Reparatur einer Kochplatte wird der Heizdraht um 5 % gekürzt. Das Leistungsschild hat die Aufschrift 220V/500W. Welche Leistung P_2 hat die Kochplatte nun? (Aufgabe von D. Kluge, 14552 Michendorf)

10/1
Einem Würfel mit der Kantenlänge a = 20 cm soll ein Oktaeder so einbeschrieben werden, daß die Eckpunkte des Oktaeders auf den Schnittpunkten der Flächendiagonalen des Würfels liegen. Wie lang ist eine Kante des Oktaeders?

10/2
Wieviel dreistellige Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es?

10/3
Beim Fußballtoto wird für elf Spiele eine Vermutung über den Ausgang des jeweiligen Spieles (unentschieden, Mannschaft I gewinnt, Mannschaft II gewinnt) durch Ankreuzen der Ziffern 0; 1 oder 2 für jedes der 11 Spiele ausgesprochen. Wieviele verschiedene Tips sind möglich?

10/4
Einem Kreis mit dem Radius r = 5 cm soll ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen eine Seite dieselbe Länge hat wie der Radius des Kreises. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

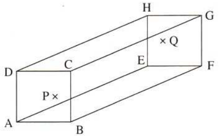
10/5
Eine Erbschaft fällt an fünf Nichten des Erblassers: Lisa erhält 1/5 des Vermögens, Maria 1/8, Anna 1/10, Katja 2/5 und Nora den Rest von 38 780 DM. Wieviel erhielten die einzelnen Erbinnen?

10/6
In einem Wechselstromkreis sind ein Kondensator (C = 10 µF), eine Spule (L = 1,2 H) und ein ohmscher Widerstand (R = 5 Ω) hintereinandergeschaltet. Wie groß ist die Phasenverschiebung φ bei f = 50 Hz und U = 220 V ? Wie lange dauert es, bis ein in den Stromkreis geschalteter Elektrizitätszähler 1,0 kWh anzeigt?

10/7
Ein Auto fährt mit der Beschleunigung von $a = 3\ m \cdot s^{-2}$ an. Welchen Weg s_{32} legt es in der 3. Sekunde, also zwischen $t_1 = 2s$ und $t_2 = 3$ s zurück?

E/1
Gegeben sind eine quadratische Pyramide und ein Tetraeder, dessen Begrenzungsflächen kongruent zu den Seitenlängen der Pyramide sind. Die beiden Körper werden so zusammengefügt, daß zwei dreieckige Begrenzungsflächen zur Deckung kommen. Wieviel Begrenzungsflächen hat der neu entstandene Körper?

E/2
Ein Quader ABCDEFGH hat folgende Maße: $a = \overline{AB} = 6\text{cm}$, $b = \overline{BC} = 6\text{cm}$, $c = \overline{AE} = 15\text{cm}$. Auf seiner Oberfläche soll ein Faden von einem Punkt P zu einem Punkt Q gespannt werden. P und Q liegen auf je einer der quadratischen Flächen ABCD und EFGH, in der Mitte zwischen denselben Seitenflächen ABFE und DCGH des Quaders: P liegt 0,5 cm von BC entfernt, Q liegt 0,5 cm von EH entfernt.



Genügt ein 20 cm langer Faden zum Verbinden der Punkte?

E/3
An einem Pferderennen nehmen 9 Pferde teil. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten drei Plätze?

E/4
Die finanziellen Mittel für den Bau eines Hauses werden aus verschiedene Quellen erbracht. Der Bauher beteiligt sich zu 2/7, Familie A zu 3/10, Familie B mit 75 000 DM an den Gesamtkosten und 1/5 werden über einen Kredit finanziert. Wieviel DM steuert der Bauherr bei?

E/5
n Scheiben mit unterschiedlichen Radien stecken ihrer Größe nach geordnet auf einer Stange. Die oberste Scheibe hat den kleinsten Radius. Der Scheibenstoß soll nach folgenden Regeln auf eine von zwei freien Stangen umgesetzt werden:

1) Die Scheiben dürfen nur einzeln von einer Stange auf eine andere umgesetzt werden.
2) Während des Umsetzens dürfen alle drei Stangen benutzt werden.
3) Es darf nie eine Scheiben auf eine kleinere gesetzt werden.

Wieviele Züge sind bei 2; 3; 4; 5; n Scheiben mindestens nötig, bis der Scheibenstoß unter Beachtung der Regeln umgesetzt ist?

E/6
Korpuskulare Eigenschaften des Photons
Teilchen, die alle mit derselben Geschwindigkeit v senkrecht gegen eine unbewegliche Wand stoßen, bewirken auf diese Wand den Druck $p = n \cdot v \cdot \Delta I$, wobei n die Teilchendichte und ΔI die Impulsänderung eines Teilchens beim Stoß ist. Leiten Sie diese Gleichung für den Druck her!

E/7
Berechnen Sie die Impulsänderung, die
a) ein Stickstoffmolekül bei $T = 3 \cdot 10^2$ K, Masse eines Moleküls $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ kg
b) ein Photon (Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m)
bei Reflexion an einer Wand erfährt.
(Leistungskurs Abitur 1974, zit. nach Müller/Leitner/Dilg: Physik. Leistungskurs 3. Sem. Ehrenwirth 1985)

Die zusammenhängenden Graphen und Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1

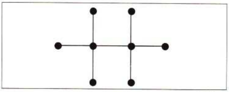


Abb. 1

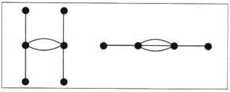


Abb. 2

Zunächst sollen 5 Begriffe erläutert werden: Während bei einem Graphen zwei Knoten höchstens durch eine Kante verbunden sind, sind bei einem **Multigraphen** mindestens zwei Knoten durch mindestens zwei Knoten verbunden. Die Zahl der in einen Knoten einmündenden Kanten eines Graphen oder Multigraphen heißt **Grad** des Knotens. **Zusammenhängend** heißt ein Graph oder Multigraph, wenn jeweils zwei seiner Knoten durch einen aus Kanten und Knoten bestehenden Weg verbunden sind. (Abb. 1 u. 2).

Zwei Graphen oder Multigraphen sind **isomorph**, wenn sich ihre Knoten und Kanten so einander eineindeutig zuordnen lassen, daß gilt: Einander zugeordnete Kanten münden in einander zugeordnete Knoten ein (Abb. 3).

Isomorphe Graphen bzw. Multigraphen, bei denen die einander entsprechenden Knoten und Kanten nicht oder in gleicher Weise bezeichnet (kodiert) sind, werden nicht unterschieden. In diesem Fall genügt es, aus jeder Klasse isomorpher Graphen oder Multigraphen ein Element, einen Repräsentanten, anzugeben. Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jedes Paar seiner Knoten durch genau eine Kante verbunden ist (Abb. 4).

Werden beim Graphen der Abb. 1 und beim Multigraphen der Abb. 2 die Knoten vom Grad 4 mit dem Buchstaben C (Symbol für ein Kohlenwasserstoffatom) und die vom Grad 1 mit dem Buchstaben H (Symbol für ein Wasserstoffatom) kodiert, so können der Graph der Abb. 1 als die Konstitutionsformel[1)] (klassische Strukturformel) des Kohlenwasserstoffs Ethan und die beiden zusammenhängenden Teilmultigraphen, in die der Multigraph der Abb. 2 zerfällt, als die Konstitutionsformel der Kohlenwasserstoffe Ethen und Ethin aufgefaßt werden. In der Chemie werden üblicherweise diese und alle anderen Konstitutionsformeln wie in Abb. 5 aufgezeichnet.

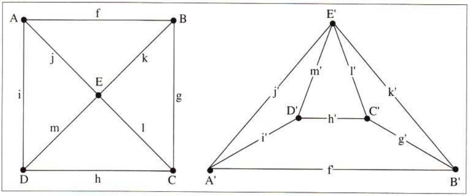


Abb. 3

In diesem Beitrag sollen alle zusammenhängenden Graphen oder Multigraphen mit 4 Knoten vom Grad 4 und 8 oder 6 Knoten vom Grad 1 ermittelt werden.

Das heißt, es ist aus jeder Isomorphieklasse dieser Graphen und Multigraphen ein Repräsentant anzugeben.

Nun wird festgesetzt: Bei allen gesuchten Graphen und Multigraphen G sollen die Knoten vom Grad 4 mit dem Symbol C

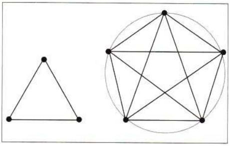


Abb. 4

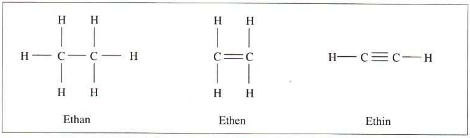


Abb. 5

(Kohlenstoff ist in organischen Verbindungen stets 4-wertig) und die vom Grad 1 mit dem Symbol H (Wasserstoff ist stets einwertig) zusätzlich kodiert sein.

Durch diese Zusatzannahme sind die gesuchten Graphen und Multigraphen auffaßbar als Konstitutionsformeln aller denkbaren Kohlenwasserstoffe mit den Summenformeln C_4H_8 und C_4H_6.

Jedem gesuchten G ist durch die folgende Vorschrift ein eindeutig bestimmter Teilgraph T zugeordnet: In G sind alle Knoten vom Grad 1 (mit ihrer Kodierung H) und die in diese einmündenden Kanten zu

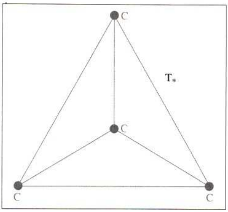


Abb. 6

löschen. Sind in G zwei Knoten (mit der Kodierung C) durch mehrere Kanten verbunden, so werden von diesen jeweils alle bis auf eine gelöscht. Jeder so erhaltene Teilgraph T eines gesuchten G ist kein Multigraph, enthält genau 4 Knoten (mit der Kodierung C) und ist zusammenhängend, da G zusammenhängend ist. Jeder dieser Teilgraphen T muß also auch ein Teilgraph des vollständigen Graphen T_* mit 4 (mit C kodierten) Knoten sein, in dem jeder Knoten durch genau eine Kante mit den drei anderen Knoten verbunden ist (Abb. 6).

Ist T ein echter Teilgraph von T_*, so entsteht T durch Löschen von Kanten aus T_*. Dieses zulässige Löschen der Kanten von T_* kann auch durch schrittweises Löschen jeweils einer Kante vollzogen werden. (Tabelle I) Jeder gesuchte Graph und Multigraph G mit 8 Knoten vom Grad 1 besitzt 8 Kanten, einen Knoten vom Grad 1 mit einem Knoten vom Grad 4 verbindet. Alle übrigen Kanten müssen jeweils zwei Knoten vom Grad 4 verbinden. Die Zahl dieser Kanten ist $(4 \cdot 4 - 8) : 2 = 4$. Jeder gesuchte Graph und Multigraph G mit 6 Knoten vom Grad 1 enthält $(4 \cdot 4 - 6) : 2 = 5$ Kanten, die zwei Knoten vom Grad 4 verbinden. Hiernach können zunächst die in Tabelle I aufgeführten Graphen mit mehr als 4 (5) Kanten nicht Teilgraphen eines gesuchten G mit 8 (6) Knoten vom Grad 1 sein. Weiterhin lassen sich nun alle gesuchten Graphen und Multigraphen G mit 6 Knoten vom Grad 1 als Obergraphen oder Obermultigraphen der in Tabelle I angegebenen Graphen T mit höchstens 5 Kanten ermitteln: Im ersten Schritt wird jeder Graph T der Tabelle I mit weniger als 5 Kanten auf jede zulässige Weise durch Aufnehmen weiterer Kanten zu Obermultigraphen mit 5 Kanten so erweitert, daß in jeden der 4 Knoten jedes Obermultigraphen höchstens 4 Kanten einmünden und daß in jedem Obermultigraphen nur die Knoten durch Kanten verbunden sind, die bereits in T durch eine Kante verbunden sind. In einem zweiten Schritt wird jeder durch dieses Erweitern gebildete Obermultigraph und auch der in Tabelle I enthaltene Graph T mit 5 Kanten wieder erweitert. Es werden 6 Knoten mit der Kodierung H aufgenommen, und jeder von diesen neuen Knoten wird mit einem bereits vorhandenen Knoten mit der Kodierung C durch eine neue Kante so verbunden, daß nunmehr in jeden Knoten mit der Kodierung C genau 4 Kanten einmünden. Analog sind sämtliche Graphen und Multigraphen G mit 4 Knoten vom Grad 4

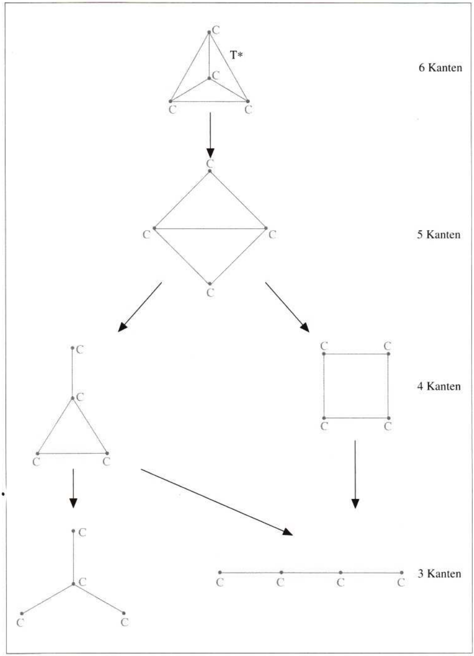


Tabelle I

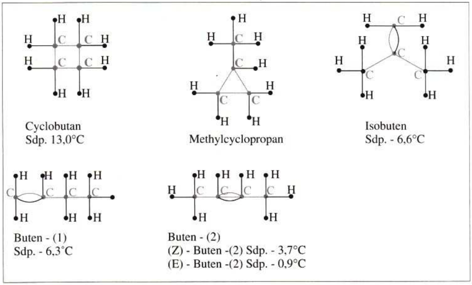


Tabelle II

und 8 Knoten vom Grad 1 zu gewinnen. Die so ermittelten Graphen und Multigraphen G sind in den Tabellen II und III in den fixierten Teilgraphen T grau markiert. Die angegebenen Repräsentanten sind paarweise nicht isomorph. Zusätzlich ist der Name der chemischen Verbindung angegeben, wenn G als chemische Konstitutionsformel aufgefaßt wird. Sofern dem Verfasser dieses Beitrags bekannt ist, daß eine oder mehrere chemischen Verbindungen mit einer dieser Konstitutionsformeln hergestellt und untersucht ist bzw. sind, sind deren Siedepunkte (Sdp) bei 760 Torr Luftdruck vermerkt.

Dr. W. Träger

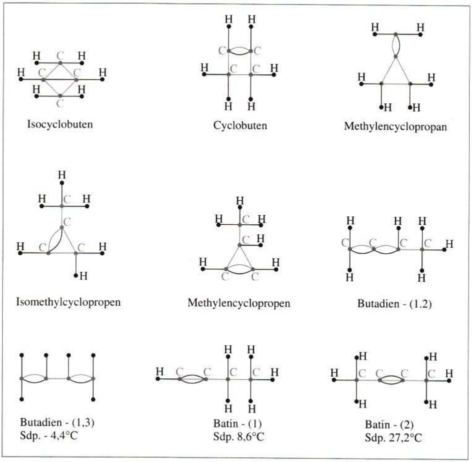


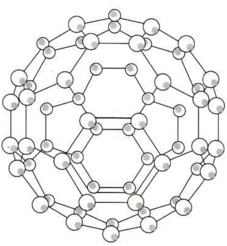
Tabelle III

Anmerkung

1) Die Moleküle chemischer Verbindungen sind dreidimensionale Gebilde. Die Summenformel einer chemischen Verbindung gibt Art und Zahl der in einem Molekül gebundenen Atome an. Die Konstitutionsformel einer chemischen Verbindung gibt zusätzlich durch ihre Valenzstriche die zwischen den in einem Molekül enthaltenen Atomen bestehenden Bindungen an. Chemische Verbindungen mit der gleichen Summenformel und verschiedenen Konstitutionsformeln heißten Konstitutionsisomere. Die beste Vorstellung der räumlichen Struktur der Moleküle einer chemischen Verbindung vermittelt ein maßstabgerechtes dreidimensionales Molekülmodell, das z. B. mit einem Molekülbaukasten herstellbar ist. Chemische Verbindungen mit gleicher Konstitutionsformel und unterschiedlicher räumlicher Anordnung der Atome im Molekül heißen Stereoisomere. So sind z. B. zwei Stereoisomere des Kohlenwasserstoffes Buten-(2) mit unterschiedlichen Siedepunkten bekannt (siehe Tabelle II).

Kugeln, hart wie Diamanten

– Fullerene faszinieren die Chemiker



Unter dieser Überschrift berichtete die „Döbelner Allgemeine Zeitung“ in der 48. Woche/November 1992 in einem Beitrag von Bernd Schuh über das Fulleren genannte Kohlenstoffmolekül mit der Summenformel C_{60}:

Im Labor des Chemikers Smalley in Houston (USA) wurde 1985 mittels eines Massenspektrometers nachgewiesen, daß ein aus 60 Kohlenstoffatomen bestehendes Molekül existiert. Das Entschlüsseln der Struktur des C_{60} führte Smalley und seine Mitarbeiter zu der Annahme: Ordnet man jeder der 60 Ecken eines konvexen Polyeders, dessen Flächen regelmäßige Sechs- und Fünfecke sind und bei dem in jeder Ecke dieselbe Zahl von Sechs- und Fünfecken anstoßen, ein Kohlenstoffatom zu, so geben die Kanten dieses Polyeders die zwischen je zwei Kohlenstoffatomen das C_{60} bestehenden Einfach- und Doppelbindungen an.

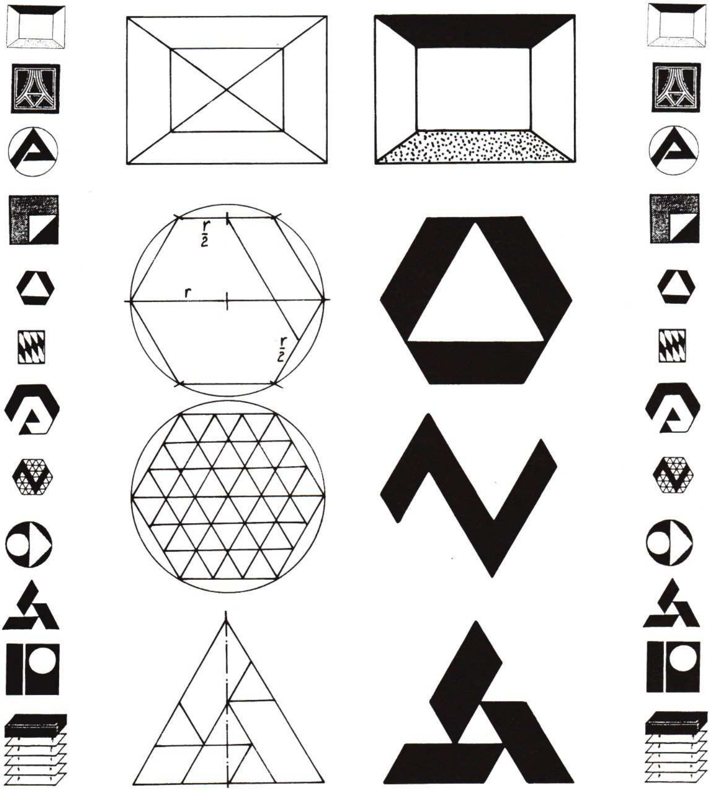
Diese Vermutung wurde zwei Jahre später von Donald Huffman (University of Arizona in Tucson) und Wolfgang Krätschmer (Max-Planck-Institut in Heidelberg) bestätigt.

Aufgabe: Wieviele Sechsecke und wieviele Fünfecke begrenzen dieses dem C_{60} zugeordneten Polyeder? Wieviele Kanten hat es?

W. Träger, Döbeln

Geometrie

– im täglichen Leben entdeckt

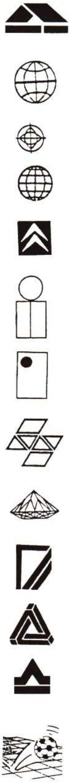


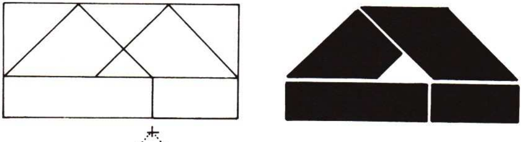
Aus einer Sonderausgabe der „Leipziger Volkszeitung“ wurden 25 geometrischen Vignetten ausgeschnitten (siehe die beiden Randleisten). Der Autor dieses Arbeitsblattes wählte fünf davon aus, vergrößerte sie und zeichnete sie neu. Links wurde jeweils eine Konstruktionsmöglichkeit zur rechts zugehörigen vollständigen Vignette gezeigt.

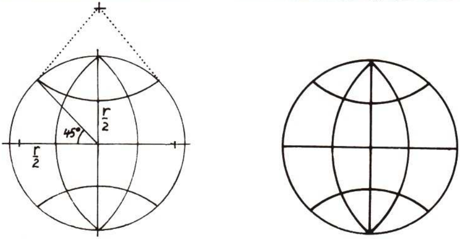
Zeichne diese Figurengruppen auf Zeichenkarton oder Transparentpapier nach! Wer Lust hat, kann sich weitere Beispiele auswählen oder in der Tagespresse aufspüren.

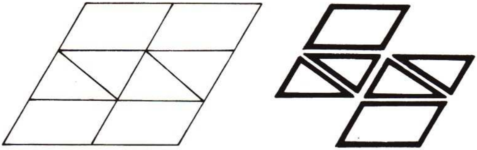
Viel Freude und Erfolg wünscht

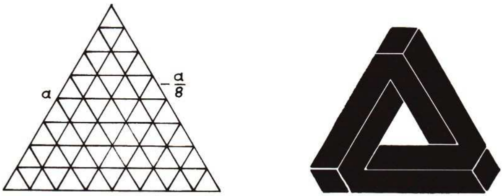
OStR Johannes Lehmann, Leipzig

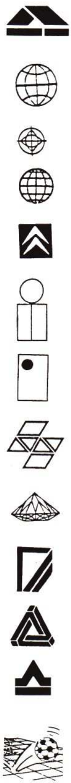












Goblins 3

Wie bei allen interessanten Spielen gehen die Meinungen wieder einmal weit auseinander. Der 3. Teil der GOBLINS-TRILOGIE hat es in sich. Entweder man mag diese Spektakel, oder man macht einen großen Bogen um diese Knobelei.
Das Konzept dieses dritten Teiles unterscheidet sich von seinen Vorgängern nicht. Mitnehmen und ausprobieren lautet die Devise, wobei man seit Teil 1 sicher sein kann, daß nicht die Logik an erster Stelle steht, sondern eher der überdrehte Witz – und der ist nun einmal nicht jedermanns Sache.
In diesem Teilepos müssen Blount, Reporter der Goblin News, die entzückende Wynonna befreien. Daß das Stoff für eine Menge Abenteuer ist, dürfte klar sein. Insgesamt steht der Gute vor 19 Rätseln, die teilweise über mehrere Bildschirme reichen. Doch unser Blunt steht allein. Dennoch fehlen die typischen Team-word-Puzzles nicht, denn Blount trifft auf allerlei freundliche Wesen, die ihm helfend zur Seite stehen.
Fünf Joker stehen allen wackeren Ratern zur Seite, man wird alle fünf nutzen. Doch hier hätte man jemand an die Teste setzen sollen, der wirklich kurze verständliche Texte schreiben kann. Manchmal kommen einem die Texte wie eigene kleine zum Spiele gehörige Puzzles vor. Da hat man vieles unnötig verkompliziert. Wie gesagt, die Puzzles haben mit Logik nur wenig zu tun. Da es mir nichts ausmacht, schnell einmal fünf Joker zu verbrauchen (schließlich kann man das Spiel in einem zweitem Pfad als „echtes Spiel" installieren), war immer wieder genügend Grund vorhanden, sich an den aberwitzigen Reaktionen, die sich auf manchen Mausklick auf dem Bildschirm abspielten, zu amüsieren.
Wer auf Spiele-Logik steht, sollte um diesen 3. Goblin einen großen Bogen machen. Wer sich an Teil 1 begeistern konnte und schon stöhnte, daß Teil 2 kaum innovativ war, der sollte selbst auf ein Goblin-Demo verzichten, denn neues wird hier in Sachen Goblin-Logik nicht geboten. Profi-Logik-Puzzler dürfen um diese Goblins deswegen einen großen Bogen machen.
Wer jetzt noch nicht abgeschreckt ist, den erwarten viele kauzige Gestalten, die bekannte Goblin-Cartoon-Grafik und zwischen den einzelnen Rätseln flotte Zwischensequenzen. Wer Goblins 3, wie oben beschrieben, im Doppelpack auf der Festplatte hat, kann sich durch Ausnutzen aller Jokermöglichkeiten immerhin auf eine Menge Gags freuen – und die sind genauso verrückt, wie sie bei den beiden ersten Teilen waren. Und deswegen sind diese Goblins für mich die besten Goblins – auch wenn mich jetzt einige am liebsten in die weite der Goblin-Landschaft verschwinden lassen möchten.

Hartmuth Seitz

The 7th Guest

Das erste nur für CD-ROM entwickelte Computerspiel beeindruckt. Multimedia vom Feinsten. Computergrafik und reale Filmaufnahmen machen mit einer Mischung aus gruseliger Musik und hervorragender Sprachausgabe auf den weiteren Spielverlauf neugierig.
Nach dem Vorspann lernt man als 7TH GUEST des Haus die Anwesenden kennen. Der Mauszeiger weist als knöchige Hand den Weg zum ersten Rätsel unseres Gastgebers Stauf. Selbst unbedarfte Denksportler haben das Problem, das mehrere Lösungen zuläßt nach kurzer Zeit gelöst und werden mit einer Abschlußsequenz belohnt.
Vor dem Puzzle auf der Eingangstür zeigen uns die Programmierer noch, was sie unter CD-ROM-Spiel verstehen. Den weiteren Weg können wir kaum verfehlen. Viele Zimmertüren geben ihre Rätsel erst preis, wenn man vorher erfolgreich war. Macht das Haus des Spielzeugs, des Grusels und der Rätsel seinem Namen Ehre? 22 Logeleien sind zu entschlüsseln, doch nicht alles, was als Denksportaufgabe verkauft wird, ist eine. Das Wechselspiel der Gewürzdosen ist selbst für Menschen mit sehr guten Englischkenntnissen nur mit Lösungshilfe durchzuführen. Die ist, wie alle anderen Lösungen auch, in einem Rätselbuch in einem der Zimmer versteckt, dreimal nachlesen – und jedes Puzzle ist gelöst.
Buchstaben und Schachbretter sind für mehrere Logeleien gut, Verschiebebilder, Münzen- und Kartenpuzzle, Gedächtnistests. THE 7TH GUEST, ist pure DENKARBEIT – das ADVENTURE beschränkt sich auf die Einleitung und Zwischensequenzen.
Verpackt ist das Ganze in einer Buchkasette, gepackt ist es auf zwei CD-ROMS. Gepackt wird man von Grafik, Animation, Sound und Knobelzwang; bei letzterem mit Abstrichen. Die Diskrepanz zwischen leicht lösbar und gruselig schwierig ist groß, die Zahl der Rätsel klein. Inhaltlich wäre eine Streichholzschachtel angemessener, als zwei CD-ROMS.
Extreme Hardwarebedingungen, hoher Preis. Wer wird die gut 170 DM investieren? Wer es sich leisten kann! Wer CD's sammelt, für den wird dieses erste reine CD-Rom-Spiel eines Tages Sammelwert haben. Wer sich wirklich für Logeleien begeistert, der legt auf die buchartige Verpackung des Spieles keinen Wert, schließlich kann man für den Preis des Spieles mehrere gute Bücher dieses Genres anschaffen.
THE 7TH GUEST hinterläßt ein zwiespältiges Gefühl. Trotz aller optisch-akustischen Begeisterung gibt es als Gesamtnote eine „3". Das inhaltliche Preis-Leistungs-Verhältnis stimmt nicht. Bunte Bilder mit Sprachausgabe, da ist das Kino billiger.

H. Seitz

Kasparov's Gambit

Noch ein Schachspiel für den PC. Na, warum nicht, vor allem dann, wenn einer wie Weltmeister Kasparov seine Tips gibt. Schauen wir uns das Ganze einmal an.

KASPAROV'S GAMBIT ist von der Ausstattung her nicht mit Programmen wie CHINESE CHESS zu vergleichen. Derartige Figuren-Animationen fehlen hier völlig – hier werden nur plastische Figuren in drei wählbaren Grafikstilen in 2D- oder 3D-Sicht über das Brett geschoben. Zudem kann man den Bildschirm mit einigen nützlichen Fenstern füllen. Kasparov kommentiert den Spielverlauf – mit oder ohne Ton (mit russischem Einschlag) kann man hier erfahren, was der gute von dem gemachten Zug hält. Die einzelnen Züge werden in einem Notations-Fenster mitgeschrieben. Die Zugüberlegungen des Computers können bei Bedarf ebenfalls zugeschaltet werden. Das gilt auch für ein Analyse-Brett, auf dem der Computer versucht, den weiteren Spielverlauf vorauszuberechnen. Daß die Partien gespeichert und geladen werden können ist ebenso selbstverständlich, wie die Möglichkeiten der Zug-Rücknahme oder des Ausdrucks der Notation. Auf Wunsch gibt Kasparow sogar einen Tip, wie er das Spiel gestalten würde.

Antreten kann man gegen verschiedene Computergegner, die neben Namen wie Einstein, Mozart oder Picasso eine ebensolche Vielfalt von Spielstärken aufweisen. Forsche Angreifer sind darunter, vorsichtige Defensivkünstler – und Kasparov selber.

Spätestens wenn man sich die beiden zum Spiel gehörigen Handbücher anschaut, merkt man, wer mit diesem Produkt angesprochen wird. Recht knapp gehalten ist die 22seitige Verweiskarte, die in gebotener Kürze die technische Seite des Spiels erklärt. Den doppelten Umfang weist dagegen die Spielanleitung auf. Die Grundbegriffe des Schachspiels werden erklärt, in einem gesondertem Abschnitt wird man mit den grundlegenden Spielkonzepten vertraut gemacht – und in einem weiterem Kapitel erfährt man, wer Garri Kasparow ist und wie er spielt(e).

Man kann KASPAROVS GAMBIT deswegen in die Kategorie Computer-Lernprogramme einordnen. In 125 Tutorien beschäftigt man sich mit den Grundzügen der Strategie und Taktik des Schachspiels. An Schwierigkeiten kann man vom Anfänger bis zum Experten wählen. Der Anfänger wird dezent in das Spiel eingewiesen, Schachclubspieler könnten Partien nachspielen oder Turniere durchführen, der Experte kann sie trainieren, denn immerhin steckt in KASPAROV'S GAMBIT SOCRATES TT; der Gewinner der internationalen Schachcomputerweltmeisterschaften 1993.

Ist der legendäre CHESSMASTER ein Alleskönner der Spitzenklasse, gibt sich KASPAROV als solides Programm für Einsteiger und Fortgeschrittene, als Programm, das durch die Kasparov-Video-Clips stark aufgewertet wird und sich von solchen Flops wie TERMINATOR CHESS wohlwollend abhebt.

KASPAROV'S GAMBIT macht wirklich Spaß, wenn die nötige Hardware vorhanden ist. Super-VGA-Grafik mit 2MByte EMS-Speicher sollte man dem Programm schon anbieten.

Hartmuth Seitz

Die neue Reihe über die jungen Talente

In der neuen Reihe *Challengers – So spielt* ... soll die erfolgreiche Karriere junger Großmeister der absoluten Weltspitze unverwechselbar dokumentiert werden. Der erste Band ist Nigel Short gewidmet, dem derzeit besten Schachspieler des Westens.

Auf Wunderkindern lastet stets der Fluch hoher Erwartungen. Nigel Short hat sie erfüllt: Mit 14 teilte er den Sieg bei der Britischen Meisterschaft; mit 15 wird er Jugendvizeweltmeister hinter Garri Kasparow; mit 19 ist er Großmeister; mit 22 wird er WM-Kandidat und die Nummer drei der Schachwelt hinter K & K. Aus der großen Hoffnung des Westens wurde der Beste des Westens. Plötzlich aber der Karriereknick! Doch Nigel Short hat diese unerwartete Stagnation glänzend überwunden. Im April 1992 wirft er keinen Geringeren als Exweltmeister Anatoli Karpow aus dem Rennen um das Recht, mit Titelverteidiger Garri Kasparow um die Schachkrone zu spielen. Und seine Großmeisterkollegen attestieren ihm, daß er sich noch gehörig steigern kann.

Porträtiert hat den heute 27jährigen der Berliner Publizistikstudent Stefan Löffler, ein ausgewiesener Kenner der internationalen Schachszene. Ihm zur Seite steht der Leipziger Großmeister Rainer Knaak, der Shorts Partien kritisch unter die Lupe genommen hat, um so das Spiel des selbstbewußten Engländers auf seine Schwächen und Stärken abzuklopfen.

Übrigens: Weltmeister Kasparows Tip für das WM-Finale 1993 lautet: „My Challenger will be Short!" Deshalb unser Tip an alle Schachfans: Nehmt diese Herausforderung an und studiert das Spiel von Nigel Short. Gewinnbringende Ideen für die eigene Praxis sind mit diesen ungewöhnlichen Schachbuch garantiert!

Stefan Löffler (Hrsg.): Challengers – So spielt Nigel Short
Ca. 128 Seiten, ca. 10 Fotos, ca. 70 Diagramme, 13,8 x 22,5 cm, Broschur DM 24,80, ISBN 3-328-00586-2
Sportverlag 1993

Leserbief

Mit meinen Freunden Karl Palma, Zürich und Hans Klauser, Rudolfstetten, beschäftigen wir uns mit den in alpha publizierten Themen und Aufgaben.

Im Heft vom Februar 1993 erwähnen Sie, daß Leserbriefe willkommen sind. Nun, ich möchte von dieser Gelegenheit einmal Gebrauch machen, und zwar bezugnehmend auf die Einsendung von Herrn Prof. Dr. Michael Benjamin betreffend „Pythagoräische Zwillinge". In den folgenden Ausführungen versuche ich nachzuweisen:

1.) daß die Pythagoräischen Zwillinge (Differenz der Katheten |a-b|=<u>1</u> eine unendliche Reihe von <u>Pell-Zahlen</u> darstellen,
2.) daß es noch unendlich viele weitere Pythag. Zwillinge gibt, aber mit der Differenz |a-b| höher als 1 (7, 17, 23, 31, 41, ...). Auch diese lassen sich in unendlichen Reihen mit je identischer Differenz darstellen, wobei immer Pell-Zahlen involviert sind,
3.) daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen den Tripeln mit der <u>Summe a+b</u>, und den Tripeln mit der <u>Differenz |a-b| gleichen Wertes</u>,
4.) daß zahllose Zusammenhänge bestehen zwischen den einzelnen Tripeln, wobei auch hier Pell-Zahlen involviert sind.

Diese Berechnungen habe ich unter Mitwirkung mit meinen oben genannten Freunden ausgearbeitet. In der Folge habe ich die einschlägige Literatur in den Bibliotheken der Zürcher Hochschulen konsultiert, aber keine Hinweise im Sinne meines Manuskripts gefunden.

Pythagoräische Zwillinge

Pythagor. Zwillinge, d. h. Pythagor. Tripel, bei denen die Differenz |a-b|=<u>1</u> beträgt, und deren Katheten und Hypothenuse Pell-Zahlen entsprechen.

Pell-Zahlen: $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$; $P_0=0$, $P_1=1$
$Q_{n+2}=2Q_{n+1}+Q_n$; $Q_0=1$, $Q_1=1$

P_0	= 0	Q_0 =	1
P_1	= 1	Q_1 =	1
P_2	= 2	Q_2 =	3
P_3	= 5	Q_3 =	7
P_4	=12	Q_4 =	17
P_5	=29	Q_5 =	41
..	..	..	..

<u>Unendliche Reihe von Pythagor. Tripeln,</u> bei denen die Katheten <u>|a-b|=1</u> Pythagor. Zwillinge bilden und deren Werte Pell-Zahlen entsprechen.

n	a	b	c
	$\frac{Q_{3+2n}+(-1)^n}{2}$	$\frac{Q_{3+2n}+(-1)^{n+1}}{''}$	P_{3+2n}
0	4	3	5
1	20	21	29
2	120	119	169
3	696	697	985
4	4'060	4'059	5'741
..	...	...	...

Pythagor. Tripel, bei denen die <u>Differenz der Katheten |a-b|</u> den Wert von $|(1+2n)^2 -2^{1+2m}|$* aufweist, und jeder dieser Werte in einer unendlichen Reihe von Tripeln vorkommt. * oder: $|(1+2n)^2 -2\cdot m^2|$ n, m = 1, 2, 3, ..., (1+2n) m = coprime. Die Tripel mit solchen Differenzen lassen sich von <u>Basis-Tripeln</u> ableiten, deren <u>Summe a+b identisch</u> ist mit dem Wert der Differenzen |a-b|.

Beispiel I.
Basis-Tripel: <u>a</u>=120, <u>b</u>=119, <u>c</u>=169 (= Pell-Zahlen)
Summe der Katheten a+b=<u>239</u>.
Die nachfolgende unendliche Reihe mit dem Wert |a-b|=<u>239</u> errechnet sich wie folgt. Zuerst die Tripel T_1 und T_2:
siehe Tabelle 1

Alle folgenden Tripel, bzw. Tripel-Paare, errechnen sich nach folgender Rekursions-Regel (dazu existieren noch weitere Berechnungs-Methoden):
1.) Vorerst <u>S</u> und <u>D</u> jedes Tripels berechnen, und zwar:
$S_{3+n}=2S_{1+n}+D_{1+n}$ $D_{3+n}=S_{1+n}$

2.) $$\underline{a,b_{3+n}}=\frac{S_{3+n}-S_{1+n}}{2}$$

$$\underline{c_{3+n}}=\frac{S_{3+n}-S_{1+n}}{2}$$

siehe Tabelle 2

Anmerkung: Bei Additionen und Multiplikationen verschiedener a, b, c, S, D, Werte ergeben sich überraschende Resultate, insbesondere in Bezug auf Pell-Reihen. Es bleibt dem Leser überlassen, entsprechende Berechnungen vorzunehmen.

1.) 2·119 -120=<u>118</u> Differenz $|a_1-a_2|=\underline{P_2\cdot 118}$
2.) 2·120 -119=<u>121</u> Differenz $|b_1-b_2|=\underline{P_2\cdot 121}$
3.) 2·169=<u>338</u> Summen a_1+a_2 und b_1+b_2 $=\underline{P_2\cdot 338}$
Summe c_1+c_2 $=\underline{Q_2\cdot 338}$

T					+		+	
					$\underline{c-b}$		$\underline{c-b}$	
T	a	b	c	S	D	S		D
							2·	
1	220($P_2\cdot$	459($P_2\cdot$	509($Q_2\cdot$	27^2	17^2	22^2		5^2
2	456(338	217(338	505(338	31^2	7^2	19^2		12^2

$\underline{S}$ = Summe $\begin{matrix} c+a \\ c+b \end{matrix}$ $\underline{D}$ = Differenz $\begin{matrix} c-a \\ c-b \end{matrix}$

Tabelle 1

					+		+
					$\underline{c-b}$		$\underline{c-b}$
T	a	b	c	S	D	S	D
						2.	
3	2'156($p_4\cdot$	1'917($P_4\cdot$	2'885($Q_4\cdot$	71^2	27^2	49^2	22^2
4	1'900(338	2'139(338	2'861(338	69^2	31^2	50^2	19^2
5	11'760($P_6\cdot$	11'999($P_6\cdot$	16'801($Q_6\cdot$	169^2	71^2	120^2	49^2
6	11'900(338	11'661(338	16'661(338	169^2	69^2	119^2	50^2
7	69'360($P_8\cdot$	69'121($P_8\cdot$	97'921($P_8\cdot$	409^2	169^2	289^2	120^2
8	69'544(338	68'783(338	97'105(338	407^2	169^2	288^2	119^2
..	...	...	...	..	..	..	..

Tabelle 2

1.) $2 \cdot 475 - 132 = \underline{818}$ Differenz $|a_1 - a_2| = P_2 \cdot \underline{818}$

2.) $|2 \cdot 132 - 475| = \underline{211}$ Differenz $|b_1 - b_2| = P_2 \cdot \underline{211}$

3.) $2 \cdot 493 = \underline{986}$ Summen $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2 = P_2 \cdot \underline{986}$

Summe $c_1 + c_2 = Q_2 \cdot 986$

$\underline{S} = \text{Summe} \begin{matrix} c+a \\ c+b \end{matrix}$ $\underline{D} = \text{Differenz} \begin{matrix} c-a \\ c-b \end{matrix}$

				+		+	
				$\underline{c-b}$		$\underline{c-b}$	
						$\underline{2.}$	
T	a	b	c	S	D	S	D
1	168($P_2 \cdot$	775($P_2 \cdot$	793($Q_2 \cdot$	31^2	25^2	28^2	3^2
2	1'804(986	1'197(986	2'165(986	63^2	19^2	41^2	22^2
3	3'304($P_4 \cdot$	2'697($P_4 \cdot$	4'265($Q_4 \cdot$	87^2	31^2	59^2	28^2
4	8'528(986	9'135(986	12'497(986	145^2	63^2	104^2	41^2
5	17'228($P_6 \cdot$	17'835($P_6 \cdot$	24'797($Q_6 \cdot$	205^2	87^2	146^2	59^2
6	51'792(986	51'185(986	72'817(986	353^2	145^2	249^2	104^2
..	...	...	...	..	..	..	..

Tabelle 3

Wenn die Differenz |a-b| eine Primzahl ist, so ergibt sich eine einzige Reihe. Wenn hingegen |a-b| eine zusammengesetzte Zahl ergibt, dann resultieren daraus zwei oder mehrere Reihen.

Beispiel II.

Basis-Tripel: a=132, b=475, c=493

Summe der Katheten a+b=607

Die unendliche Reihe mit dem Wert |a-b|=607 errechnet sich wie folgt: Zuerst die maßgebenden Werte für die Tripel T_1 und T_2 (*Tabelle 3*)

Anmerkung: Jedes Tripel ist nicht nur ein Term einer Reihe mit identischer Differenz |a-b| (Beispiel I und II), sondern auch ein Term mehrerer unendlicher Reihen mit steigenden Summen und Differenzen.

a	b	c	Summe a+b
24	7	25	31
60	91	109	151
96	247	265	343
132	475	**493**	**607**

M. Wachtel, Zürich

Lösungen

Lösungen S. 8: Zeitungsschnipsel

Lösung Sammlermünze:
S I E G E S G Ö T T I N

Lösung Hagelkörner: Da das Volumen von 660g Wasser 600cm³ beträgt, hat dieses Hagelkorn das Volumen $V = 600\text{cm}^3 \cdot 1{,}09 = 654\text{cm}^3$. Ist der Durchmesser dieses Hagelkornes, so folgt aus $V = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$ (Volumenformel der Kugel) $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \approx$ 10,8 cm.

Lösungen S. 11: Sprachecke

Die Umfänge. Entlang des Umfangs eines Tischtennisballs bzw. des Äquators der Erde seien jeweils Fäden A und B gespannt. Um welche Länge nehmen diese zu, wenn man beschließt, den Abstand der Fäden von der Oberfläche des Tischtennisballs bzw. der Erde um gleichermaßen 1m zu vergrößern?

Lösung: Les périmètres. Die ursprünglichen Längen der Fäden sind:

Tischtennisball: $l_1 = \pi d_1$

Erde: $l_2 = \pi d_2$

Nach der Abstandsvergrößerung um 1m sind die Fäden:

Tischtennisball:

$L_1 = \pi (d_1+2) = \pi d_1 + 2\pi = l_1 + 2\pi$

Erde: $L_2 = \pi (d_2+2) = \pi d_2 + 2\pi = l_2 + 2\pi$

Aus der Rechnung ist zu erkennen, daß die Längenzunahme der Fäden in beiden Fällen gleich ist und 2π m beträgt. Wer hätte das gedacht?

Eine außergewöhnliche Reihe ganzer Zahlen

Finde drei ganze Zahlen so, daß sich bei Addition irgendeiner dieser Zahlen zum Produkt der beiden anderen immer 2 ergibt. (Denke auch an die negativen Zahlen!)

Lösung: An unusual set of integers. Lösungen sind: (1, 1, 1) und (-2, -2, -2)

Lösung zu
Im Blickpunkt Das Jahr 1994 (von Dr. R. Mildner)

1. Jahreszahl in Prozenten

Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 128 FE (Flächeneinheit). Die Jahreszahl (schwarze Fläche) beansprucht 37 FE, das sind rund 28 Prozent der Rechteckfläche.

2. Hölzchenspiel

$1 + 8 = 5 + 4$

3. Zwei natürliche Zahlen

Seien a und b die beiden gesuchten Zahlen. Dann muß gelten:

$95a - 19b = 19$

$-94 + 20b = 94.$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung: a = 19, b = 94.

4. Summe und Produkt

Seien x und y die beiden gesuchten Zahlen. Dann muß gelten:

$x + y = 999 (1)$

$x \cdot y = 1994. (2)$

y = 999 - x aus (1) in (2) eingesetzt ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - 999x + 1994 = 0,$$

welche die beiden Lösungen x = 2 und x = 997 besitzt. Die zugehörigen y-Werte lauten dann y = 997 und y = 2. Die gesuchten Zahlen sind also 2 und 997. Bemerkung: Es ist $1994 = 2 \cdot 997$ die Primafaktorzerlegung der Zahl 1994.

5. Rechenspaß mit Jahreszahlen

$1 + 9 - 9 + 3 = 1 \cdot 9 - 9 + 4$ (= 4)

$1 + 9 : 9 + 3 = 1 \cdot 9 : 9 + 4$ (= 5)

$1 \cdot 9 - 9 : 3 = 1 + 9 : 9 + 4$ (= 6)

$1 \cdot 9 + 9 - 3 = 1 + 9 + 9 - 4$ (= 15)

$1 + 9 + 9 + 3 = 1 \cdot 9 + 9 + 4$ (= 22)

$1 + 9 \cdot 9 : 3 = 1 - 9 + 9 \cdot 4$ $(=28)$
$1 \cdot 9 \cdot 9 - 3 = 1 + 9 \cdot 9 - 4$ $(=78)$
$1 + 9 \cdot 9 + 3 = 1 \cdot 9 \cdot 9 + 4$ $(=85)$

6. Größenvergleich
Wegen $1993 \cdot 1993 > 1992 \cdot 1994$, d. h. $3972049 > 3972048$, ist $y = 1993/1994$ größer als $x = 1992/1993$.

7. Umordnung

1	9	9	4
9	1	4	9
9	4	1	9
4	9	9	1

8. Eine harte Nuß
Das vorgelegte (nichtlineare) Gleichungssystem sieht nach äquivalenter Umformung wie folgt aus:
$x^3 - 78x - 57y = 19$ (1)
$(y - 94)(1 - 4x^2) = 0$ (2)

Gleichung (2) ist nur für $y = 94$, $x = 1/2$ oder $x = -1/2$ erfüllbar, wobei lediglich $y = 94$ eine natürliche Zahl, wie gefordert, ist. Für $y = 94$ geht Gleichung (1) über in $x^3 - 78x - 5377 = (x - 19)(x^2 + 19x + 283) = 0$. Diese Gleichung dritten Grades hat nur die reelle (natürliche) Lösung $x = 19$ (die beiden anderen Lösungen sind komplexe Zahlen). Also gibt es nur das eine Paar $(x, y) = (19,94)$ natürlicher Zahlen, das (1) und (2) und damit das ursprüngliche Gleichungssystem erfüllt, wie man durch die Probe leicht bestätigt.
Bemerkung: Das zu lösende Gleichungssystem dieser Aufgabe besitzt insgesamt, d. h. über dem Bereich der komplexen Zahlen, die folgenden 5 Lösungspaare (x, y): $(19{,}94)$ $(-1/2;-53/152)$, $(1/2;-463/456)$, $(-19/2+\sqrt{771}\,i/2;94)$
$(-19/2+\sqrt{771}\,i/2;94)$
Aber nur das Paar (19,94) entspricht den Forderungen der Aufgabenstellung.

9. Kryptographie

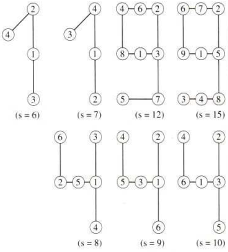
```
1993*1994
-----------
     7972
   17937
  17937
 1993
-----------
  3974042
```

10. Gerechte Teilung

9							1
4						4	
		1	9	9	4		
9		1	9	9	4		9
9							1

11. Geheimnisvolles x
Es ist $x = 4 \cdot 997/2 = 1994$, denn jede Zahl ist gleich dem Produkt der Eckzahl des umgebenden Vielecks mit 997/2.

12. Magische Jahreszahl



13. Jahr 2000 in Sicht
Es ist $2000 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20$ (1. Weg) und $2000 = 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 25$ (2. Weg).

Lösungen zu „Fullerene faszinieren die Chemiker“

Da das Polyeder konvex ist, ist die Summe der Innenwinkel der begrenzenden Flächen, deren Scheitelpunkte mit einer Polyederecke koinzidieren, kleiner als 360°. Mithin können an jede Polyederecke entweder a) 2 Fünfecke und ein Sechseck oder b) ein Fünfeck und 8 Sechsecke anstoßen.
Der Fall a kann nicht vorliegen: Denn für ein derartiges Polyeder mit m Fünfecken und n Sechsecken müßte für die Zahl der Ecken $e = \frac{5m}{2} = 6n = 60$ gelten. Damit müßte $m = 24$ und $n = 10$ und die Zahl der Flächen $f = m + n = 34$ sein. Die Zahl der Kanten wäre $k = \frac{5m + 6n}{2} = 90$. Und es würde im Widerspruch zum Eulerschen Polyedersatz $e-k+f = 4$ 2 gelten, was nicht möglich ist.
Also muß der Fall b vorliegen: Ist m die Zahl der begrenzenden Fünfecke und n die der Sechsecke, so ist die Zahl der Ecken $e = 5m = \frac{6n}{2} = 60$. Hieraus folgt $m = 12$ und $n = 20$ sowie $f = m+n = 32$.
Die Zahl der Kanten ist $k = \frac{5m + 6n}{2} = 90$.
Da $e-k+f = 60-90+32 = R$ gilt, kann nach dem Eulerschen Polyedersatz ein derartiges Polyeder existieren. Es existiert und ist uns bekannt: Die Ecken eines derartigen Polyeders sind z. B. die Ecken der oft auf einem kugelförmigen Fußball farbig markierten Kugelflächen. Ein solches Polyeder entsteht durch geeignetes Abstumpfen (Abtrennen von 12 regelmäßigen fünfseitigen Pyramiden) aus einem regulären Ikoseader (von 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenztes Polyeder).