Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 1

Die Aufgabensammlung erscheint periodisch auf Vorschlag des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und enthält Aufgaben mit Lösungen, die im Rahmen der Vorbereitung auf die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR die Arbeit von mathematischen Arbeitsgemeinschaften und die individuelle Beschäftigung interessierter Schüler mit der Mathematik unterstützen sollen. Die veröffentlichten Aufgaben sind in der Regel aus Vorschlägen zu Internationalen Mathematik-Olympiaden (IMO), aus den Klausuren in mathematischen Vorbereitungslagern und Aufgaben des mathematischen Korrespondenzzirkels ausgewählt. Sie sind für fortgeschrittene Schüler der Klassenstufe 11/12 der Erweiterten Oberschule vorgesehen.

Die Aufgabe 2 des vorliegenden Heftes wird als Preisaufgabe gestellt. Die Leser der Aufgabensammlung werden aufgefordert, Lösungen zu dieser Aufgabe bis zum 31.10. 76 an

Dr. W. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
25 Rostock, Universitätsplatz 1, Sektion Mathematik,

einzusenden. Dabei geben die Schüler bitte ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse ihrer Schule an. Die Lösung der Preisaufgabe wird im nächsten Heft veröffentlicht. Für die besten Lösungen erhalten deren Einsender Anerkennungsschreiben.

Die Aufgabensammlung wird über die Bezirkskabinette für außerunterrichtliche Tätigkeit in beschränkter Anzahl kostenlos vertrieben.

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu hier veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar. Sie sind zu richten an: Dr. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock.

Die hier veröffentlichten Aufgaben und Lösungen wurden von einem Autorenkollektiv zusammengestellt.

Autoren: H.-D. Gronau
Dr. W. Harnau
Dr. M. Krüppel
W. Moldenhauer
Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Burosch.
Bestell-Nr. 30 06 44-1 . Lizenz Nr. 203/1000/76 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Gesamtherstellung: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin

Aufgabe 1

Man ermittle $\left[\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}} \right]$.

(Dabei bezeichne für eine reelle Zahl x das Symbol $[x]$ die ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.)

(IMO-Vorschlag USA, 1975)

Aufgabe 2

Sei Z die Menge der ganzen Zahlen und Q die Menge der rationalen Zahlen. Sei $x \in Q\setminus Z$. Dann bezeichne $x|$ jenes Element aus Q mit $x| = \frac{m}{n-1}$, falls $x = \frac{m}{n}$, g.g.T(m,n) = 1, $m,n \in Z$ und $n > 0$ gilt.

Man beweise, daß man ausgehend von einer beliebigen Zahl $X \in Q\setminus Z$ nur unter Verwendung der Addition, Subtraktion und Multiplikation, sowie der soeben definierten |-Operation zu jeder beliebigen Zahl $y \in Q$ nach endlich vielen Schritten gelangen kann.

Aufgabe 3

Sei $0 < a < 1$ und $f(a) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{2^i}$.

Man beweise, daß $\frac{1}{n} < f(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n-1}$ und $f(\frac{1}{n})$ irrational für alle $n > 1$ gilt!

Aufgabe 4

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl.

Man löse folgendes Gleichungssystem in Abhängigkeit von a und n im Bereich der reellen Zahlen.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \\
&(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2 \\
&\qquad \vdots \\
&(n) \quad x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = a^n .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Gesucht sind alle stetigen reellwertigen Funktionen f mit dem Definitionsbereich $D_f = \{ x \mid x\text{-reell und } x > 0 \}$, die in D_f der Funktionalgleichung

$$f(xy) = x\, f(y) + y\, f(x) \qquad (1)$$

genügen.

(Verallgemeinerung einer Aufgabe der Mathematikolympiade Österreichs, 1975)

Aufgabe 6

Man ermittle alle reellen stetigen Funktionen f(x), die der folgenden Funktionalgleichung genügen:

$$f(x + y) = f(x)\, f(y) \qquad (1)$$

Aufgabe 7

Sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ definiert für jede reelle unendliche Zahlenfolge. Es wird vorausgesetzt, daß f bezüglich jeder seiner Variablen monoton wachsend ist. Es soll entschieden werden, ob aus diesen Annahmen auch

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \leqq f(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$
$$\text{für } x_i \leqq y_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \text{ folgt.} \qquad (1)$$

Aufgabe 8

$$\text{Sei } M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(n,n)}$$

eine quadratische Matrix vom Format $n \times n$, deren Elemente $a_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sind für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
M_n heißt lateinisches Quadrat der Ordnung n, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte von M_n jedes der Elemente 0, 1, ..., n-1 genau einmal auftritt. Zwei lateinische Quadrate $M_n = (a_{ij})_{(n,n)}$ und $M_n' = (b_{ij})_{(n,n)}$ heißen orthogonal zueinander, wenn gilt:

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{rs}, b_{rs}) \Rightarrow i = r \text{ und } j = s.$$

(Dabei bedeutet $(a,b) = (c,d)$, daß $a = c$ und $b = d$ gilt.)
Man gebe für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$ und $n \equiv 1 \bmod 2$ eine Methode zur Konstruktion orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung n an.

Aufgabe 9

Sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen mit $0 \leqq a_n \leqq 1$ und $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqq 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Man beweise, daß $0 \leqq (n+1)(a_n - a_{n+1}) \leqq 2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. (IMO-Vorschlag, Schweden, 1975)

Aufgabe 10

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n beliebige Punkte der Ebene und k die Peripherie irgendeines Kreises der Ebene vom Radius 1. Man zeige, daß auf k ein Punkt mit $\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} \geqq n$ existiert. Wie müssen die n Punkte und k liegen, damit kein M auf k mit $\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} > n$ existiert?

Aufgabe 11

Seien a und b nichtnegative reelle Zahlen und $b \neq 0$.
Weiterhin sei $x_1 = a$, $y_1 = b$ und für alle natürlichen Zahlen $i \geqq 1$ sei $x_{i+1} = x_i + 2y_i$ und $y_{i+1} = x_i + y_i$. Man beweise, daß die Folge der

$$z_i = \frac{x_i}{y_i}$$

unabhängig von der Wahl von a und b konvergent ist und **ermittle** den Grenzwert der Folge in Abhängigkeit von a und b!

(Nach: Math. Spectrum, 3, 2, 197o/71 (engl.), verallgemeinert)

Aufgabe 12

Seien a und b zwei positive ganze Zahlen, die relativ prim zueinander sind (d.h.: g.g.T$(a,b) = 1$).
Man beweise, daß es eine natürliche Zahl N mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq N$ existieren natürliche Zahlen x_n und y_n mit $n = ax_n + by_n$. Man **ermittle** in Ab-

hängigkeit von a und b das kleinste N mit dieser Eigenschaft.

(Nach sowj. Schülerzeitschrift Kwant Nr.3,1973)

Aufgabe 13

Sei $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ ein Vektor der Länge 10, für dessen Elemente $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ gilt. Dann kann man A folgenden Vektor B(A) zuordnen:

$$B(A) = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9),$$

wobei das Element b_i die Anzahl der Elemente von A angibt, deren Wert i ist.

Man ermittle alle A mit B(A) = A!

(Es soll also $a_i = b_i$ für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ gelten!)

(Nach Gardner, Math. Novellen (russ.), Moskau 1974)

Aufgabe 14

Sei $a > 0$ eine natürliche Zahl. Man berechne für beliebige natürliche Zahlen n die folgende Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{a} \right],$$

wobei $[x]$ die ganze Zahl mit $[x] \leqq x < [x] + 1$ für beliebiges reelles x bezeichne. Weiter zeige man, daß man für jedes a nur endlich viele n finden kann, für die die Summe eine Primzahl ist.

Aufgabe 15

In einer Ebene E seien 2n paarweise voneinander verschiedene Punkte fixiert. Man zeige, daß es eine Gerade gibt, die keinen dieser Punkte enthält und die die Ebene E derart in zwei Halbebenen E', E" zerlegt, daß sowohl E' als auch E" n der gegebenen Punkte enthalten.

Aufgabe 16

Man beweise: Wenn man in eine Ellipse zwei Quadrate derart einzeichnen kann, daß

1. beide einen von Null verschiedenen Flächeninhalt haben,
2. sie nicht deckungsgleich sind und
3. ihre Eckpunkte auf der Ellipse liegen,

so ist diese Ellipse ein Kreis.

Lösungen

Aufgabe 1

Aus $(n + \frac{1}{3})^3 = n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{27}$ und

$$(n - \tfrac{1}{3})^3 = n^3 - n^2 + \tfrac{1}{3}n - \tfrac{1}{27}$$

erhalten wir

$$(n + \tfrac{1}{3})^3 > n^3 + n^2 \qquad \text{und} \qquad (n - \tfrac{1}{3})^3 > n^3 - n^2$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$. Hieraus folgt

$$(n + \tfrac{1}{3}) > n(1 + \tfrac{1}{n})^{\frac{1}{3}} \qquad \text{und} \qquad (n - \tfrac{1}{3}) > n(1 - \tfrac{1}{n})^{\frac{1}{3}} \quad ,$$

woraus wir

$$(1 + \tfrac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1 < \tfrac{1}{3n} < 1 - (1 - \tfrac{1}{n})^{\frac{1}{3}}$$

erhalten. Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $3n^{\frac{1}{3}}$ ergibt sich:

$$3((n + 1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}) < n^{-\frac{2}{3}} < 3\,(n^{\frac{1}{3}} - (n - 1)^{\frac{1}{3}}) \ . \tag{1}$$

Sei $X_N = 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} 3((n + 1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}) = 3((N + 1)^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) + 1$

und $Y_N = 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} 3((n^{\frac{1}{3}} - (n - 1)^{\frac{1}{3}})) = 3(N^{\frac{1}{3}} - 1) + 1.$

Wegen (1) gilt nun für $N \geqq 2$

$$X_N < \sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{2}{3}} < Y_N \ .$$

Nun gilt: $0 < Y_N - X_N = 3(N^{\frac{1}{3}} - 1) - 3((N + 1)^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) =$

$$= 3(N^{\frac{1}{3}} - (N + 1)^{\frac{1}{3}}) + 3(2^{\frac{1}{3}} - 1) <$$

$$< 3(2^{\frac{1}{3}} - 1) < 1 \ .$$

Setzen wir nun für $N = 10^9$, so erhalten wir

$$X_{10^9} = 1 + 3((10^9 + 1)^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) < \sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}} < 1 + 3((10^9)^{\frac{1}{3}} - 1\ ) =$$

$$= 2998 = Y_{10^9} \ .$$

Da auch $0 < Y_{10^9} - X_{10^9} < 1$ gilt, ist also $X_{10^9} = 2997 + \alpha$

mit $0 < \alpha < 1$, woraus

$$\left[\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}} \right] = 2997$$

folgt.

Aufgabe 3

Beweis:

1. $\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^8} + \ldots = f(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots =$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \; .$$

2. $f(\frac{1}{n})$ besitzt im Zahlensystem zur Basis n folgende Darstellung:

$$\left[f(\tfrac{1}{n}) \right]_n = 0,\, 1\; 1\; 0\; 1\; \underbrace{0\; 0\; 0}_{2^2-1}\; 1\; \underbrace{0 \ldots 0}_{2^3-1}\; 1\; \underbrace{0 \ldots 0}_{2^4-1}\; 1 \ldots \; ,$$

wobei zwischen der r-ten und (r+1)-ten 1 genau $2^{r-1} - 1$ stehen. $\left[f(\frac{1}{n}) \right]_n$ ist ein nicht periodischer n-adischer Bruch und somit irrational.

Aufgabe 4

Fall 1:

Sei zunächst $n \geqq 4$. Wir erhalten aus (2):

$$a^4 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4$$
$$+ 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i^2 x_j^2$$

Wegen (4) folgt hieraus

$$(n+1) \qquad \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i^2 x_j^2 = 0 \; .$$

Da x_i reell für $i = 1, 2, \ldots, n$ sein soll, ist x_i^2 und somit auch $x_i^2 x_j^2$ stets nichtnegativ. Mit (n+1) folgt somit:

(n+2) $\quad x_i^2 x_j^2 = 0 \quad$ für alle i,j mit $1 \leqq i < j \leqq n$.

Diese $\binom{n}{2}$ Bedingungen von (n+2) sind nur dann erfüllt, wenn mindestens n-1 der Unbestimmten gleich Null sind. Auf Grund der Symmetrie können wir O.B.d.A. $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ setzen. Dann folgt aus (1), daß $x_1 = a$ sein muß.
Damit erhalten wir offenbar für diesen Fall nur folgende Lösungsmenge:

$$x_i = a,\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$
$$\text{für } i = 1,2,\ldots,n \quad .$$

Fall 2:
n = 3. Unser Gleichungssystem reduziert sich zu

(2.1) $\quad x_1 + x_2 + x_3 = a$

(2.2) $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$

(2.3) $\quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a^3 \quad .$

Aus (2.1) und (2.2) folgt:

$$0 = a^2 - a^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 =$$
$$= 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

und somit

(2.4) $\quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \quad .$

Aus (2.1), (2.2) und (2.3) folgt

$$0 = a^3 - a^3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 =$$
$$= x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2)$$

und somit

$$x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 3x_1x_2x_3 - 3x_1x_2x_3 = 0 \ .$$

Hieraus folgt nun

$$x_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_3(x_1x_2 + x_1x_3 +$$
$$+ x_2x_3) - 3x_1x_2x_3 = 0 \ .$$

Wegen (2.4) erhalten wir damit

(2.5) $x_1x_2x_3 = 0$.

Wegen der Symmetrie des zu lösenden Gleichungssystems, setzen wir o.B.d.A. $x_3 = 0$.
Damit reduziert sich (2.4) zu $x_1x_2 = 0$.

Wegen der Symmetrie setzen wir hierin o.B.d.A. $x_2 = 0$
Dann erhalten wir $x_1 = a$ aus (2.1).
Die Menge der Lösungstripel (x_1,x_2,x_3) ist also hier

$$\{(0,0,a),\ (0,a,0),\ (a,0,0)\} .$$

Fall 3:
n = 2. Unser Gleichungssystem reduziert sich hier zu

(3.1) $x_1 + x_2 = a$

(3.2) $x_1^2 + x_2^2 = a^2$.

Aus (3.1) und (3.2) folgt:

$$0 = a^2 - a^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = 2x_1x_2,$$

woraus zusammen mit (3.1) sofort die Lösung folgt.
Die Menge der Lösungspaare (x_1,x_2) ist also

$$\{(0,a),\ (a,0)\} .$$

Fall 4:
n = 1. Die Lösung ist $x_1 = a$.
Somit erhalten wir also für beliebiges n folgende Lösungsmenge: $(x_1,\ldots,x_n)$ befriedigt genau dann (1) bis (4), wenn

$$(x_1,\ldots,x_n) \in \{(0,\ldots,0,a),\ (0,\ldots 0,a,0),\ldots,(a,0,\ldots,0)\} .$$

Aus dem Beweis geht weiter hervor, daß man die gleiche Lösungsmenge erhält, wenn man sich auf die ersten 4 Gleichungen beschränkt.

Aufgabe 5
Wir beweisen zunächst induktiv, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt: Für beliebige positive reelle Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ gilt

$$(2)\qquad f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j \quad .$$

Der Induktionsanfang ist für $n = 2$ durch (1) gegeben.
Somit verbleibt noch zu zeigen: Wenn $k \geqq 2$ und

$$f\Big(\prod_{i=1}^{k} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j$$

gilt, so ist

$$f\Big(\prod_{i=1}^{k+1} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{k+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} x_j \quad .$$

Wir setzen $y_i = x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und $y_k = x_k x_{k+1}$.
Aus(1) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f\Big(\prod_{i=1}^{k+1} x_i\Big) &= f\Big(\prod_{i=1}^{k} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} f(y_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} y_j = \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \cdot \\
&\qquad \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} x_j + f(x_k x_{k+1}) \prod_{j=1}^{k-1} x_j = \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} x_j + (f(x_k)x_{k+1} + f(x_{k+1})x_k) \prod_{j=1}^{k-1} x_j = \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} x_j \quad ,
\end{aligned}$$

womit wir (2) bewiesen haben.
Nun setzen wir in (1) $y = 1$. Dann erhalten wir $f(x) = xf(1) + f(x)$ und somit

$$(3)\qquad f(1) = 0$$

Wir setzen jetzt $f(2) = a$. Dann erhalten wir

$$a = f(2) = f\Big(\prod_{i=1}^{n} 2^{\frac{1}{n}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(2^{\frac{1}{n}}) 2^{\frac{n-1}{n}} = n \cdot 2^{\frac{n-1}{n}} f(2^{\frac{1}{n}}),$$

woraus $f(2^{\frac{1}{n}}) = a \cdot \frac{1}{n} \cdot 2^{\frac{1}{n}-1}$ folgt.

Hieraus folgt nun, wiederum mit (2)

$$\begin{aligned}
f(2^{\frac{m}{n}}) &= f\Big(\prod_{i=1}^{m} 2^{\frac{1}{n}}\Big) = \sum_{i=1}^{m} f(2^{\frac{1}{n}})\, 2^{\frac{n-1}{n}} = m \cdot 2^{\frac{m-1}{n}} f(2^{\frac{1}{n}}) \\
&= a\, \frac{m}{n}\, 2^{\frac{m}{n}-1} \quad .
\end{aligned}$$

Sei nun r eine rationale Zahl mit $r > 0$. Dann gilt wegen (3):

$$0 = f(1) = f(2^r \cdot 2^{-r}) = 2^r f(2^{-r}) + 2^{-r} f(2^r) = 2^r \cdot f(2^{-r}) + 2^{-r}\, a\, r\, 2^{r-1} .$$

Somit erhalten wir:

$$f(2^{-r}) = a(-r)2^{-r-1} .$$

Zusammen mit (3) ist somit nachgewiesen:
Wenn b eine rationale Zahl ist, so gilt $f(2^b) = a\, b\, 2^{b-1}$, wobei a ein reeller Parameter ist.
Sei nun $\alpha \in D_f$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl β mit $\alpha = 2^\beta$. Sei nun $\{ b_i \}$ eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = \beta$. D. h. $\lim\limits_{i \to \infty} 2^{b_i} = \alpha$.
Da f(x) stetig sein soll, muß gelten

$$\lim_{i \to \infty} f(2^{b_i}) = \lim_{i \to \infty} ab_i\, 2^{b_i - 1} = a\,\beta \cdot 2^{\beta - 1} = f(\alpha) .$$

Hieraus folgt nun wegen $\beta = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}$

$$f(x) = a\, \frac{x \ln x}{2 \ln 2} ,$$

wobei a eine reelle Zahl ist.

Aufgabe 6

Wir setzen zunächst $x = y = 0$ und erhalten $f(0) = f^2(0)$, woraus $f(0) \in \{ 0,1 \}$ folgt.

Fall 1: $f(0) = 0$. Wenn wir $y = 0$ setzen, so ergibt sich $f(x) = f(x) \cdot f(0) = 0$ und somit $f(x) \equiv 0$.

Fall 2: $f(0) = 1$. Vermittels vollständiger Induktion erhält man aus (1) sofort

$$(2) \qquad f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Wir setzen $f(1) = a$, wobei wir nur voraussetzen, daß a eine reelle Zahl sei. Aus (2) erhalten wir nun für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:

$$a = f(1) = f(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{1}{n}}_{n\text{-mal}}) = f(\tfrac{1}{n})^n .$$

Da $f(\frac{1}{n})$ eine reelle Zahl sein soll, muß $a \geqq 0$ sein und wegen der Stetigkeit von $f(x)$ auch $a \neq 0$. Wir erhalten also

$f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$. Aus (2) folgt ferner:

(3) $$f(\tfrac{m}{n}) = f(\tfrac{1}{n})^m = a^{\frac{m}{n}} .$$

Weiterhin folgt aus (1): $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$ und somit

(4) $f(-x) = f^{-1}(x)$. Aus (3) und (4) folgt nun, daß für alle rationalen Zahlen x gilt: $f(x) = a^x$.

$f(x)$ heißt stetig an der Stelle α, wenn für alle Folgen $\{a_i\}$ mit $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = \alpha$ auch $\lim\limits_{i \to \infty} f(a_i) = f(\alpha)$ folgt. Sei α nun irgendeine reelle Zahl. Dann gibt es eine Folge $\{a_i\}$, wobei sämtliche a_i rationale Zahlen sind (z.B. a_i ist Dezimalbruchentwicklung von α bis zur i-ten Stelle) mit $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = \alpha$.

Es ist
$$\lim_{i \to \infty} f(a_i) = a^{\lim\limits_{i \to \infty} a_i} = a^{\alpha} .$$

Da $f(x)$ stetig sein soll, muß also für alle reellen x gelten:
$$f(x) = a^x .$$

Wir erhalten also folgende Lösungsmenge: 1. $f(x) \equiv 0$
2. $f(x) = a^x$ mit $a > 0$.

Aufgabe 7

Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$\text{Sei } f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Folge } (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ & \text{konvergent ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar erfüllt dieses f alle Voraussetzungen der Aufgabe.

Sei nun $x_i = \frac{1}{i}$, $y_{2i} = \frac{1}{2}$ und $y_{2i+1} = 1$. Dann gilt für alle $i = 1, 2, \dots$ $x_i \leq y_i$, aber $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ist offenbar eine konvergente Zahlenfolge (Grenzwert Null), während $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ divergent ist (zwei Häufungswerte).

Somit erhalten wir
$$1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) > f(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = 0$$
und haben gezeigt, daß die Aussage (1) nicht gilt.

Aufgabe 8

Sei $1 \leq m < n$ und g.g.T$(m,n) = 1$. Dann ist $M_n = (a_{ij})_{(n,n)}$ mit $a_{ij} = m(i-1) + j-1 \mod n$ ein lateinisches Quadrat.

Beweis: 1. Annahme: $a_{ij} = a_{ik} \Rightarrow$

$$m(i-1) + j-1 \equiv m(i-1) + k-1 \mod n \Rightarrow$$

$$j \equiv k \mod n \Rightarrow$$

$$j = k .$$

2. Annahme: $a_{ij} = a_{kj} \Rightarrow$

$$m(i-1) + j-1 \equiv m(k-1) + j-1 \mod n \Rightarrow$$

$m\, i \equiv mk \mod n$ und wegen g.g.T$(m,n) = 1$ folgt

$$i \equiv k \mod n \Longrightarrow$$

$$i = k .$$

Daher ist M_n ein lateinisches Quadrat.

Seien nun m und r natürliche Zahlen mit

$$1 \leq m < r < n, \ \text{ggT}(m,n) = \text{g.g.T}(r,n) = \text{ggT}(r-m,n) = 1.$$

Wir setzen

$$M_n = (a_{ij})_{(n,n)} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = m(i-1) + (j-1) \mod n$$

$$M'_n = (b_{ij})_{(n,n)} \quad \text{mit} \quad b_{ij} = r(i-1) + (j-1) \mod n .$$

Wegen ggT(m,n) = ggT$(r,n) = 1$ sind M_n und M'_n lateinische Quadrate. Es verbleibt nur noch zu zeigen, daß sie orthogonal zueinander sind. Es ist zu zeigen:

aus $(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{t,s}, b_{t,s})$ folgt

$$a_{ij} = a_{ts} \quad \text{und} \quad b_{ij} = b_{ts}.$$

Aus

$$m(i-1) + j-1 \equiv m(t-1) + s-1 \mod n \qquad \text{und}$$

$$r(i-1) + j-1 \equiv r(t-1) + s-1 \mod n \qquad \text{folgt}$$

$$mi + j \equiv mt + s \mod n \qquad \text{und} \qquad ri + j \equiv rt + s \mod n$$

und daher

$$j \equiv m(t-i) + s \mod n,$$

$$m(t-i) \equiv r(t-i) \mod n.$$

Folglich ist

$$(r-m)(t-i) \equiv 0 \mod n$$

und da g.g.T$(r-m,n) = 1$ ist, folgt

$$t-i \equiv 0 \mod n \qquad \text{und } t = i.$$

Aus (1) folgt dann auch $j = s$ sofort.
Also sind M_n und M'_n orthogonale lateinische Quadrate. Da $n > 1$ und ungerade sein sollte, findet man solche Zahlen m und r stets. (z. B. $m = 1$, $r = 2$).

Aufgabe 9

Beweis: Sei $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$. Aus der Bedingung

$$0 \leq a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = (a_n - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_{n+2}) = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$$

folgt $\Delta a_n \geq \Delta a_{n+1}$.
Wir nehmen einmal an, daß ein n mit $\Delta a_n < 0$ existiert. Dann ist $\Delta a_k \leq \Delta a_n < 0$ für $k \geq n$ und

$$(k-n)(-\Delta a_n) \leq -\sum_{j=n}^{k-1} \Delta a_j = \sum_{j=n}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) = a_k - a_n \leq a_k \leq 1,$$

woraus $0 < -\Delta a_n \leq \frac{1}{k-n}$ für alle $k > n$ folgt. Das ist aber offenbar unmöglich und demzufolge gilt $\Delta a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, womit bereits $0 \leq (n+1)(a_n - a_{n+1})$ nachgewiesen wäre.
Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} n \geq \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n} (k-1)a_k = \\ &= na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_{k+1} \\ &= na_n + \sum_{k=1}^{n} k \Delta a_k = na_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k \Delta a_k \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} k \Delta a_k \geq \Delta a_n \sum_{k=1}^{n} k = (a_n - a_{n+1}) \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

woraus nun unmittelbar

$(n+1)(a_n - a_{n+1}) \leqq 2$ für alle $n \geqq 1$ folgt.

Aufgabe 10

Seien R und R' irgendzwei entgegengesetzt liegende Punkte des Kreises k; d.h. die Gerade durch R und R' verläuft durch den Mittelpunkt s von k und somit ist $\overline{RR'} = 2$. Wir betrachten nun die Dreiecke RA_iR' für $i = 1, 2, \ldots, n$ und erhalten aus der Dreiecksungleichung

$$(1) \qquad \overline{RA_i} + \overline{A_iR'} \geqq \overline{RR'} = 2,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn A_i auf der Strecke RR' liegt.

Aus dieser Ungleichung (1) erhalten wir somit

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{RA_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{R'A_i} \geqq 2n ,$$

weshalb für mindestens einen der Punkte R und R', den wir mit M bezeichnen werden, $\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} \geqq n$ gelten muß. Dabei tritt in (2) wegen (1) das Gleichheitszeichen genau dann auf, wenn alle A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf $\overline{RR'}$ liegen. Wenn nun nicht alle diese A_i und S übereinstimmen, so gilt für jeden Punkt T auf k mit $R \neq T \neq R'$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{RA_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{R'A} = 2n$$

wegen (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{TA_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{T'A_i} > 2n,$$

wobei T' der zu T entgegengesetzte Punkt auf k sei. Wir erhalten somit für mindestens einen der Punkte T und T', er sei mit M bezeichnet,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} > n.$$

Die Antwort auf die zweite Frage lautet damit: Genau dann, wenn $A_i = S$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt, existiert kein M auf k mit $\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} > n$.

Aufgabe 11

Offenbar gilt unabhängig von a und b für alle $i \geqq 2$

$$(1)\quad \begin{cases} x_i > y_i > 0, \quad 1 < z_i \leqq 2 \quad \text{und} \\ z_i = \dfrac{z_{i-1} + 2}{z_{i-1} + 1} = 1 + \dfrac{1}{1 + z_{i-1}} \quad . \end{cases}$$

Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.

Fall 1: Es gibt ein $i \geqq 2$ mit $z_i \leqq z_{i+1}$.

Wegen (1) ist also $z_i \leqq \dfrac{z_i + 2}{z_i + 1}$ zu analysieren. Dies gilt wegen (1) offenbar genau dann, wenn $z_i^2 + z_i \leqq z_i + 2$ ist und dies wiederum genau dann, wenn $1 < z_i \leqq \sqrt{2}$ ist. Dann gilt abermals wegen (1)

$$2 \geqq z_{i+1} = 1 + \frac{1}{1 + z_i} \geqq 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$

Hieraus folgt nun wegen (1) und nach einer einfachen vollständigen Induktion sofort

$$1 < z_{i+2k} \leqq \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{2} \leqq z_{i+1+2k} \leqq 2$$

für alle natürlichen Zahlen k.

Sei nun $1 < z_{i+2j} \leqq \sqrt{2}$. Dann ist

$$z_{i+2j}^2 \leqq 2 \qquad \text{und}$$

$$3z_{i+2j} + 4 \geqq 2z_{i+2j}^2 + 3z_{i+2j} = z_{i+2j}(2z_{i+2j} + 3) .$$

Hieraus folgt nun

$$z_{i+2j} \leqq \frac{3z_{i+2j} + 4}{2z_{i+2} + 3} = \frac{\dfrac{z_{i+2j} + 2}{z_{i+2j} + 1} + 2}{\dfrac{z_{i+2j} + 2}{z_{i+2j} + 1} + 1} = z_{i+2j+2} .$$

Damit ist also gezeigt, daß die Folge der z_{i+2k} mit dem laufenden Index k monoton wachsend ist und durch $\sqrt{2}$ nach oben beschränkt. Somit ist diese Folge konvergent. Ihr Grenzwert z errechnet sich als

$$z = \frac{3z + 4}{2z + 2} .$$

Diese Gleichung ist äquivalent mit $z^2 = 2$ und da $1 \leq z \leq \sqrt{2}$ gelten muß, ergibt sich $z = \sqrt{2}$.

Analog zeigt man, daß die Folge z_{i+2k+1} mit dem laufenden Index k monoton fallend ist und durch $\sqrt{2}$ von unten beschränkt. Sie ist also ebenfalls konvergent. Ihr Grenzwert z' ergibt sich ebenfalls als $\sqrt{2}$.

Fall 2: Für alle $i \geq 2$ ist $z_i > z_{i+1}$. Insbesondere ist dann $z_2 > z_3$. Wie im Fall 1 zeigt man, daß $z_2 > \sqrt{2}$ gelten muß. Dann ist $z_3 < \sqrt{2}$ und $z_4 < z_3$, womit wir einen Widerspruch zur Voraussetzung erhalten haben. Der Fall 2 kann also nicht eintreten. Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Der Grenzwert der Folge ist unabhängig von a und b stets $\sqrt{2}$.

<u>Aufgabe 12</u>

O.B.d.A. sei $a \leq b$. Falls $a = 1$ ist, so ist $N = 0$, denn für alle $n \geq 0$ gilt: $n = n.1+0.b$. Sei also $a > 1$. Dann muß $a < b$ gelten. Wir beweisen folgende Aussage:

(1) Sei x eine natürliche Zahl. Wenn für alle natürlichen Zahlen $i < a$ natürliche Zahlen m_i und n_i derart existieren, daß $x + i = m_i a + n_i b$ gilt, so gibt es die gesuchte Zahl N und es gilt $x \geq N$.

Beweis: Sei $j \geq a$. Dann ist $j = ra + s$, mit $0 \leq s < a$ und r ist eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$x + j = (x + s) + ra = m_s a + n_s b + ra = (m_s + r)a + n_s b.$$

Wir wollen nun sämtliche Paare natürlicher Zahlen (m,n) finden, für die $ma + nb = ab$ gilt.

Offenbar muß $m \leq b$ und $n \leq a$ gelten. Wir erhalten nun folgende Kongruenzen:

$$nb \equiv 0 \mod a$$
$$ma \equiv 0 \mod b$$

Da a und b relativ prim zueinander sind, erhalten wir

$$n = sa \qquad \text{und} \qquad m = tb .$$

Somit erfüllen genau die Paare (0,a) und (b,0) diese Bedingung. Jetzt können wir zeigen, daß für (ab - a - b) keine natürlichen Zahlen c und d mit ab - a - b = ca + db existieren. Wir werden dies indirekt zeigen: Wir nehmen also an, daß natürliche Zahlen c und d derart existieren, daß

$$ab - a - b = ca + db$$

gilt. Dann ist jedoch

$$ab = (c+1)a + (d+1)b.$$

Wir haben jedoch gezeigt, daß $(c+1, d+1) \in \{(0,a), (b,0)\}$ sein muß, womit wir den Widerspruch erhalten haben.

Sei nun $1 \leq i \leq a$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl g_i mit $1 \leq g_i < b$ und

$$g_i a \equiv i \bmod b\ .$$

Es ist $g_i a = r_i b + i$, wobei $0 \leq r_i < a$ gilt und r_i eine natürliche Zahl ist. Damit erhalten wir:

$$ab - a - b + i = r_i b + i\ r(a-r_i)b - a - b = g_i a + (a-r_i)b - a - b$$
(2)
$$ab - a - b + i = (g_i-1)a + (a-r_i-1)b\ .$$

Wegen $g_i \geq 1$ ist $g_i - 1$ eine natürliche Zahl und wegen $r_i < a$ ist $a - r_i - 1$ ebenfalls eine natürliche Zahl.
Wegen (1) und (2) haben wir gezeigt, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ natürliche Zahlen x_n und y_n mit $n = ax_n + by_n$ existieren. Da wir auch gezeigt haben, daß sich $ab - a - b$ nicht auf diese Weise darstellen läßt, ist $N = (a-1)(b-1)$.

<u>Aufgabe 13</u>
Wenn A der Bedingung B(A) = A genügen soll, müssen offenbar die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(1) $$\sum_{i=1}^{9} a_i = 10$$

(2) $$\sum_{i=1}^{9} ia_i = 10$$

1. Behauptung: Falls $B(A) = A$ gilt, muß $a_0 = 6$ sein.

Beweis: 1. Annahme: $a_0 = n > 6$. Wegen (2) muß dann $a_n = 1$ sein. Damit ist dann $a_1 = s > 1$. Wegen (1) ist $s < n$ und $a_s \geqq 1$. Dann ist einerseits

$$1 \cdot s + s \cdot 1 + n \cdot 1 \leqq \sum_{i=1}^{9} i \cdot a_i$$

und andererseits

$$2s + n \geqq 2 \cdot 2 + 7 = 11,$$

was einen Widerspruch zu (2) bedeutet. Es kommt somit nur $a_0 \leqq 6$ in Frage.

2. Annahme: $a_0 = n < 5$. Dann sind mindestens 5 von a_0 verschiedene Elemente von A von Null verschieden. Wir erhalten

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \leqq \sum_{i=1}^{9} ia_i$$

und $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$,

woraus ebenfalls ein Widerspruch zu (2) folgt. Es verbleibt also nur noch $a_0 \in \{5,6\}$.

3. Annahme: $a_0 = 5$. Dann gilt wegen (1): $a_5 = 1$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$ und genau drei der Elemente a_1, a_2, a_3, a_4 sind von Null verschieden. Weiterhin muß $a_1 = s > 1$ sein.
Wir erhalten dann:

$$1 \cdot s + s \cdot 1 + j \cdot 1 + 5 \cdot 1 \leqq \sum_{i=1}^{9} ia_i \qquad \text{mit } j \in \{2, 3, 4\}$$

und $2s + j + 5 \geqq 4 + 2 + 5 = 11$, womit wir wiederum einen Widerspruch zu (2) erhalten.
Damit ist die erste Behauptung bewiesen.
Somit erhalten wir aus (1) und (2): $a_0 = 6$, $a_6 = 1$, $a_1 = s > 1$ und $0 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9$, falls überhaupt ein A mit $B(A) = A$ existiert. Da genau eines der Elemente a_2, a_3 noch Null werden muß, kann nur $s = 2$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 0$ sein. Falls $A = B(A)$ gilt, muß also $A = (6, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ sein. Man überzeugt sich nun leicht, daß dieser Vektor den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 14

Es ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{a} \right] = \sum\limits_{k=0}^{n} \left[\frac{k}{a} \right]$ und

(1) $\sum\limits_{k=ia}^{(i+1)a-1} \left[\frac{k}{a} \right] = ia$ für alle natürlichen Zahlen i .

Sei nun r die natürliche Zahl, für die

(2) $ra \leqq n < (r+1)a$ und somit $r = \left[\frac{n}{a} \right]$

gilt. Dann erhalten wir aus (1) und (2)

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{k}{a} \right] = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{k=ia}^{(i+1)a-1} \left[\frac{k}{a} \right] + \sum_{k=ra}^{n} \left[\frac{k}{a} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} ia + \sum_{k=ra}^{n} \left[\frac{k}{a} \right] = a\binom{r}{2} + (n-ra+1)r$$

$$= a\binom{\left[\frac{n}{a}\right]}{2} + \left(n - \left[\frac{n}{a} \right] a + 1\right) \left[\frac{n}{a} \right]$$

$$= \left[\frac{n}{a} \right] \left\{ n + 1 - \frac{a}{2}\left(\left[\frac{n}{a} \right] + 1\right) \right\} .$$

Wir kommen nun zum zweiten Teil des Beweises.
Sei $n = ra + s$ mit $0 \leqq s < a$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{a} \right] = \frac{r(r-1)}{2} a + (s+1)r = \frac{r}{2} \left\{ (r - 1)a + 2s + 2 \right\} .$$

Es soll also untersucht werden, wann

(3) $\frac{r}{2} \left\{ (r-1)a + 2(s+1) \right\}$ prim wird.

Wenn $r > 2$, so ist $(r-1)a + 2(s+1) \geqq 2 \cdot 1 + 2 = 4$ und ist deshalb weder im Falle, daß r eine gerade Zahl, dann ist $\frac{r}{2}$ ganz und $\frac{r}{2} > 1$, noch im Falle, daß r eine ungerade Zahl ist, dann ist $1 < \frac{1}{2} \left\{ (r-1)a + 2(s+1) \right\}$ und ganzzahlig, eine Primzahl. Damit ist bereits gesagt, daß für jedes a nur endlich viele n existieren, für die der Term (3) eine Primzahl wird.

Aufgabe 15

Beweis: Möge der Kreis K die gegebenen 2n Punkte enthalten. Wir verbinden je zwei der 2n Punkte durch eine Gerade. Dadurch erhalten wir höchstens $\binom{2n}{2}$ Geraden, also auf jeden Fall eine endliche Anzahl. Nun wählen wir irgendeinen Punkt außerhalb des Kreises K, der auf keiner dieser höchstens $\binom{2n}{2}$ Geraden liegt, aus und bezeichnen ihn mit A. Nun legen wir durch A irgendeine Gerade, die den Kreis K weder schneidet noch berührt. Wir bezeichnen sie mit g_0. g_α sei die Gerade, die wir erhalten, indem wir g_0 um den Winkel α in Uhrzeigerrichtung um A drehen. Auf Grund der Wahl von A gibt es nun Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2n} < \pi$.

2. Für $i = 1, 2, \ldots, 2n$ liegt auf g_{α_i} genau einer der 2n ausgezeichneten Punkte und E wird durch g_{α_i} so zerlegt, daß in dem einen Teil genau i-1 der ausgezeichneten Punkte liegen.

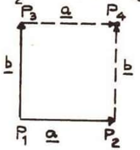
Damit erhalten wir:
Wenn $\alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1}$ ist, so ist g_α eine Gerade mit den verlangten Eigenschaften. Es gibt also "unendlich" viele (genauer: Kontinuum-viele) Geraden mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 16

Beweis: Zunächst wählen wir o.B.d.A. ein kartesisches Koordinatensystem derart, daß in ihm die Ellipse folgende Gleichung besitzt:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{wobei } a > 0 \text{ und } b > 0 \text{ gilt.}$$

Nun seien P_1, P_2, P_3, P_4 irgendvier Punkte der Ellipse mit $P_1 \neq P_2$ und das Polygon $P_1P_2P_3P_4$ bilde ein Quadrat.



Die Koordinaten von P_1 seien

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\underline{a} := \overrightarrow{P_1P_2} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} := \overrightarrow{P_1P_4} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Nun können wir P_1, P_2, P_3, P_4 durch P_1, $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ausdrücken

$$(2) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} P_1 + a_1 \\ P_2 + a_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} P_1 + a_1 + b_1 \\ P_2 + a_2 + b_2 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_1 + b_1 \\ P_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Quadratbedingung muß weiter gelten:

$$(3) \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \qquad (\underline{b} \text{ steht senkrecht auf } \underline{a})$$

$$(4) \qquad 0 \neq a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 \qquad (\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_4}) .$$

Da P_1, P_2, P_3, P_4 Punkte der Ellipse sind, erhalten wir aus (1) und (2)

$$(5) \qquad \frac{P_1^2}{a^2} + \frac{P_2^2}{b^2} = 1$$

$$(6) \qquad \frac{(P_1 + a_1)^2}{a^2} + \frac{(P_2 + a_2)^2}{b^2} = 1$$

$$(7) \qquad \frac{(P_1 + a_1 + b_1)^2}{a^2} + \frac{(P_2 + a_2 + b_2)^2}{b^2} = 1$$

$$(8) \qquad \frac{(P_1 + b_1)^2}{a^2} \quad \frac{(P_2 + b_2)^2}{b^2} = 1 .$$

Indem wir (5) in (6) und (8) einsetzen, erhalten wir:

$$(9) \qquad \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} + 2 \left(\frac{P_1 a_1}{a^2} + \frac{P_2 a_2}{b^2} \right) = 0$$

$$(10) \qquad \frac{b_1^2}{a^2} + \frac{b_2^2}{b^2} + 2 \left(\frac{P_1 b_1}{a^2} + \frac{P_2 b_2}{b^2} \right) = 0 .$$

Nun setzen wir (5), (9) und (10) in (7) ein und erhalten:

$$(11) \qquad \frac{a_1 b_1}{a^2} + \frac{a_2 b_2}{b^2} = 0 .$$

Wegen (3) folgt nun aus (11)

$$(12) \qquad a_1 b_1 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0 .$$

Wir untersuchen nun (12) und erhalten dabei folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $a_1 = 0$. Aus (3) und (4) folgt, daß dann $b_2 = 0$ und $|a_2| = |b_1| \neq 0$ gelten muß. Hiermit erhalten wir aus (9) und (1o)

(13) $\quad a_2 + 2p_2 = 0 \quad$ also $\quad p_2 = -\frac{1}{2} a_2$

(14) $\quad b_1 + 2p_1 = 0 \quad$ also $\quad p_1 = -\frac{1}{2} b_1$.

Aus (2) folgt dann:

(15) $$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} b_1 \\ -\frac{1}{2} a_2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{2} a_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{2} a_2 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_1 \\ -\frac{1}{2} a_2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß wir aus Symmetriegründen o.B.d.A. $b_1 = a_2 > 0$ setzen können.
Indem wir für P_1 in (1) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\frac{1}{4} b_1^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{4} b_1^2}{b^2} = 1, \text{ woraus } b_1^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \quad \text{folgt und somit}$$

(16) $$b_1 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

gilt. Im Fall 1 gibt es also höchstens ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Durch Einsetzen in (1) überzeugt man sich leicht, daß dieses Quadrat der Aufgabe genügt.

Fall 2: $b_1 = 0$. Durch analoge Betrachtungen wie im Falle 1 erhält man wieder genau ein Quadrat, das mit dem im Falle 1 ermittelten übereinstimmt.

Fall 3: $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0$. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Ellipse zum Kreis entartet.
Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 2

Aufgabe 1

Man stelle

$$A_n = \sin^4 \frac{2\pi}{n} + \sin^4 \frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin^4 \frac{2\pi n}{n}$$

als Polynom in n dar.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge a_n durch

$$a_0 = 5 \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n = 0,1,2,\ldots) .$$

Man zeige:

$$45 < a_{1000} < 45{,}1.$$

Aufgabe 3

Die Seitenlänge eines regulären n-Ecks sei a, der Umkreisradius R und der Inkreisradius r. K sei ein Kreis mit dem Radius ϱ, dessen Mittelpunkt mit dem des n-Ecks zusammenfällt. Es gelte

(1) $\quad R - \frac{a}{2} \leq \varrho \leq r.$

Um die Eckpunkte des n-Ecks werden n Kreise $K_1,\ldots,K_n$ gezeichnet, die den Kreis K von außen berühren. F sei derjenige Teil der Fläche des n-Ecks, der von mindestens einem der Kreise $K, K_1,\ldots,K_n$ überdeckt wird.
Man bestimme K derart, daß die Fläche F

a) maximal b) minimal wird.

Aufgabe 4

Aus n paarweise verschiedenen reellen Zahlen bilde man alle möglichen Summen aus genau k verschiedenen Summanden ($1 \leq k \leq n$).
Wieviele verschiedene Werte nehmen diese Summen mindestens an?

Aufgabe 5

Sei Z^+ die Menge der positiven ganzen Zahlen und M eine nichtleere Teilmenge von Z^+. M möge mit jedem Element x auch die Elemente 4x und $E(\sqrt{x})$ enthalten, wobei $E(\sqrt{x})$ die ganze Zahl n bedeutet, für die $n \leq \sqrt{x} < n + 1$ ist. Man zeige, daß $M = Z^+$ ist.

Aufgabe 6

Es sei a eine reelle Zahl ungleich Null. Es sind alle Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq a$ erklärt sind, zu bestimmen, die der Funktionalgleichung

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x \qquad (1)$$

genügen!

Aufgabe 7

Es seien a_1 und b_1 reelle Zahlen mit $b_1 > a_1 > 1$. Es werden die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch

$$a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \; ; \; b_n = \frac{b_{n-1}^{-1}}{a_{n-1}^{-1}} \qquad (n \geq 2)$$

definiert. Für welche a_1 und b_1 konvergieren diese Folgen?

Aufgabe 8

Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die es natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ gibt, welche die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = 1$$

erfüllen. (Vorschlag Schweden 16. IMO)

Aufgabe 9

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $P(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad n, deren sämtliche Nullstellen paarweise verschieden und reell sind.

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$$P(x) \cdot P''(x) - [P'(x)]^2 < 0 \quad .$$

Aufgabe 1o

Man bestimme alle ganzrationalen Funktionen $P(x)$, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$(x + 2) \cdot P(x - 2) = (x - 4) \cdot P(x) \qquad (*)$$

erfüllen!

Aufgabe 11

Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichung:

$$2^x = 3^y + 5 \qquad (1)$$

für ganzzahlige positive x und y.

Aufgabe 12

In einem Sechseck seien je 2 gegenüberliegende Seiten parallel. Dann gehen die drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten durch einen Punkt.

Aufgabe 13

Eine Gerade schneidet 3 Höhen eines beliebigen Tetraeders. Man zeige, daß sie zur 4. Höhe nicht windschief ist.

Aufgabe 14

Gegeben sei ein konvexes Vieleck, das kein Dreieck der Fläche 1 vollständig überdeckt. Man zeige, daß dieses Vieleck sich von einem Dreieck der Fläche 4 überdecken läßt.

Aufgabe 15

Es sind alle, für alle reellen $x \neq 0$ definierten, stetigen Funktionen $f(x)$ zu bestimmen, die für alle reellen $a \neq 0$ der Gleichung

$$f\left(\frac{a}{a^2+1}\right) = \frac{a^4+1}{a^2}$$

genügen!

Zusatzaufgabe (Lösung im nächsten Heft der IMO-Aufgaben)

Welchen Höchstwert kann das Volumen eines Polyeders annehmen, das genau fünf Ecken hat, die sämtlich auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius von der Länge 1 liegen?

L ö s u n g e n

Aufgabe 1

1. Lösung (Idee von U. Risch):

Es ist $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und somit

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}).$$

Wir erhalten

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \sin^4 \frac{2j\pi}{n} = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{n} \left(e^{j\frac{8\pi}{n}i} - 4e^{j\frac{4\pi}{n}i} + 6 - 4e^{-j\frac{4\pi}{n}i} + e^{-j\frac{8\pi}{n}i}\right).$$

Man verwende die Summenformel der geometrischen Reihe

$$\sum_{j=1}^{n} a^j = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \qquad \text{für } a \neq 1$$

und erhält unter Beachtung von $e^{z \cdot i} = \cos z + i \cdot \sin z$ (z komplexe Zahl) für $n \neq 1,2,4$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{j\frac{8\pi}{n}i} = e^{\frac{8\pi}{n}i} \frac{e^{8\pi i} - 1}{e^{\frac{8\pi i}{n}} - 1} = 0,$$

da $e^{8\pi i} = 1$ und $e^{\frac{8\pi}{n}i} \neq 1$ ist.

Analog erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-j\frac{8\pi}{n}i} = \sum_{j=1}^{n} e^{j\frac{4\pi}{n}i} = \sum_{j=1}^{n} e^{-j\frac{4\pi}{n}i} = 0.$$

Also

$$A_n = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{n} 6 = \frac{3}{8} n \qquad \text{für alle } n \neq 1,\ n \neq 2,\ n \neq 4.$$

Man errechnet leicht

$$A_1 = A_2 = 0 \quad \text{und} \quad A_4 = 2.$$

2. Lösung

Es sei $B_n = \cos^4 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^4 \frac{2\pi n}{n}$. Dann ist infolge

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$(1) \qquad n = \left(\sin^2 \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n}\right)^2 + \dots + \left(\sin^2 \frac{2\pi n}{n} + \cos^2 \frac{2\pi n}{n}\right)^2$$

$$= A_n + B_n + 2 \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi i}{n} \cos^2 \frac{2\pi i}{n} .$$

Weiter ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sin^4 \frac{2\pi i}{n} - \cos^4 \frac{2\pi i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{2\pi i}{n} + \cos^2 \frac{2\pi i}{n}\right) \cdot \left(\sin^2 \frac{2\pi i}{n} - \cos^2 \frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$(2) \qquad = A_n - B_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{2\pi i}{n} - \cos^2 \frac{2\pi i}{n}\right)$$

und damit aus (1) und (2)

$$A_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{2\pi i}{n} - \cos^2 \frac{2\pi i}{n}\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi I}{n} \cos^2 \frac{2\pi i}{n}$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \cos \frac{4\pi i}{n} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{4\pi i}{n} .$$

Es ist $A_1 = A_2 = 0$. Für $n \geq 3$ ist $\sin \frac{2\pi}{n} \neq 0$. Wir erhalten

$$2 \sin \frac{2\pi}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{4\pi i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{2\pi - 4\pi i}{n} + \sin \frac{2\pi + 4\pi i}{n}\right)$$

$$= \sin \frac{2\pi}{n} - \sin \frac{2\pi}{n} = 0$$

und daher

$$A_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{4\pi i}{n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{8\pi i}{n}\right)$$

$$= \frac{3}{8} n + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n} \cos \frac{8\pi i}{n} .$$

Für $n \geq 5$ ist $\sin \frac{4\pi}{n} \neq 0$ und

$$2 \sin \frac{4\pi}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{8\pi i}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{4\pi - 8\pi i}{n} + \sin \frac{4\pi + 8\pi i}{n}\right)$$

$$= \sin \frac{4\pi}{n} - \sin \frac{4\pi}{n} = 0.$$

Mithin ist $A_n = \frac{3}{8} n$ für alle $n \geq 5$. Man rechnet leicht $A_3 = \frac{9}{8}$, $A_4 = 2$ nach.

Aufgabe 2

Durch Quadrieren und anschließendes Aufsummieren von $k = 0$ bis $n - 1$ der Rekursionsformel ergibt sich

$$(1) \qquad a_n^2 = a_o^2 + 2k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k^2} .$$

Wir erhalten $a_{1000}^2 > 25 + 2000 = 45^2$, womit der linke Teil der Ungleichung nachgewiesen wäre.

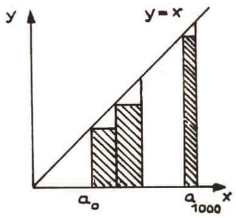
Wir geben hierfür eine weitere Lösungsmöglichkeit an.
Offenbar ist die Folge a_n streng monoton wachsend. Ferner ist

$$(a_{n+1} - a_n)\, a_n = 1,$$

also

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{999} (a_{i+1} - a_i)\, a_i = 1000.$$

Wir betrachten im Intervall $[a_o, a_{1000}]$ die Funktion $f(x) = x$. Die Summe (2) stellt in diesem Intervall eine Untersumme (Riemann-Summe) für den Flächeninhalt dar (siehe Skizze)



(nicht maßstabsgetreu)

Mithin ist $1000 = \sum_{i=0}^{999} (a_{i+1} - a_i)a_i < \int_{a_0}^{a_{1000}} x\,dx = \frac{1}{2}(a_{1000}^2 - a_0^2)$,

woraus sich unmittelbar die behauptete Ungleichung ergibt. Es verbleibt der Nachweis für die Gültigkeit der rechten Abschätzung. Aus (1) erhalten wir $a_{100}^2 > 225$. Also ist

$$\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{a_k^2} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{a_k^2} + \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{a_k^2} < \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2}$$

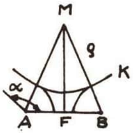
$$< \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 8 \quad .$$

Also ist nach (1) $a_{1000}^2 < 2025 + 8 = 2033$. Da $45{,}1^2 = 2034{,}01$ ist, ist der Nachweis geführt.

Anmerkung: Durch genauere Abschätzungen läßt sich insbesondere die obere Schranke verbessern. Es gilt $a_{1000} = 45{,}0245\ldots$.

Aufgabe 3

Wir verwenden die Bezeichnungen der Skizze. Es ist $\overline{MA} - \overline{AF} < \overline{MF}$, also $R - \frac{a}{2} < r$, womit die Existenz von K gesichert ist. Wegen (1) liegt K im Innern des n-Ecks und die K_i überschneiden sich nicht.



Für den Innenwinkel α eines n-Ecks gilt $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n}$. Also ist

$$F = \pi\varrho^2 + n\,\frac{(R-\varrho)^2}{2}\,\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{\pi n}{2}\left(\varrho - R + \frac{2R}{n}\right)^2 + \pi R^2\,\frac{n-2}{n} \quad .$$

F wird damit für $\varrho_0 = R - \frac{2R}{n}$ minimal, wenn ϱ_0 die Bedingung (1) erfüllt.

Ist n gerade, so verbinden wir zwei Ecken des n-Ecks derart, daß ihre Verbindungsgerade durch M verläuft, also die Länge 2R hat. Der halbe Umfang des n-Ecks $n\frac{a}{2}$ ist dann sicher größer als 2R infolge der Dreiecksungleichung. Für ungerades n ist (siehe Skizze)

$n\frac{a}{2} = A \dots E + \overline{ED} > \overline{AM} + \overline{MD} + \overline{ED} > R + \overline{ME} = 2R$. Also ist $n\frac{a}{2} > 2R$ und damit $R - \frac{a}{2} < \varrho_0$. Weiter ist $\cos\frac{\pi}{n} > 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} > 1 - \frac{2}{n}$ wegen $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ in $(0, \infty)$ und $n \geq 3$. Multiplizieren wir die Ungleichung mit R, so folgt $\varrho_0 = R - \frac{2R}{n} < R\cos\frac{\pi}{n} = r$.

Mithin wird F für $\varrho_0 = R - \frac{2R}{n}$ minimal.

Sei $R - \frac{a}{2} = \varrho_1$ und $r = \varrho_2$. F, eine quadratische Funktion, nimmt in $\varrho_0 \in (\varrho_1, \varrho_2)$ ihr globales Minimum an. Der Maximalwert kann also nur $F(\varrho_1)$ oder $F(\varrho_2)$ sein.

Es ist $F(\varrho_2) - F(\varrho_1) = \frac{\pi n}{2}\left[(\varrho_2 - \varrho_0)^2 - (\varrho_1 - \varrho_0)^2\right]$.
Wegen $|\varrho_2 - \varrho_0| = \varrho_2 - \varrho_0$ und $|\varrho_1 - \varrho_0| = \varrho_0 - \varrho_1$ genügt es, den Ausdruck

$$d(n) = \varrho_2 + \varrho_1 - 2\varrho_0 = R\left(\cos\frac{\pi}{n} + 1 - \sin\frac{\pi}{n} - 2 + \frac{4}{n}\right)$$

$$= R\left(\frac{4-n}{n} + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\frac{(n-4)}{n}\right)$$

auf sein Vorzeichen zu untersuchen. Es ist $d(3) < 0$, $d(4) = 0$, wie man leicht verifiziert. Ich zeige $d(n) > 0$ für $n \geq 5$.

Die Funktion $f(x) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x - x$ hat im Innern des Intervalls $[0,1]$ genau einen Extremwert, der wegen $f''(x) < 0$ ein Maximum ist. Da $f(0) = f(1) = 0$ ist, folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$.
Wähle ich $x = \frac{n-4}{n}$, so ist wegen $n \geq 5$ $\frac{1}{5} \leq x < 1$ und die Behauptung bewiesen.

Für $n = 3$ ist $F(\varrho_1)$,

für $n = 4$ $F(\varrho_1) = F(\varrho_2)$ und

für $n \geq 5$ $F(\varrho_2)$ die maximal überdeckte Fläche.

Aufgabe 4

Seien $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ die gegebenen reellen Zahlen, so ist die kleinste Summe aus k verschiedenen Summanden $s = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ und die größte $S = a_{n-k+1} + \dots + a_n$. Der Übergang von s zu S kann wie folgt vollzogen werden: Wir ersetzen a_k sukzessive durch $a_{k+1}, \dots, a_n$, anschließend wird a_{k-1} sukzessive durch

$a_k, \ldots, a_{n-1}$ ersetzt, usw. Da es $k(n-k)$ solche Einzelschritte gibt und die Summe jedesmal zunimmt, treten mindestens $k(n-k)+1$ Summenwerte auf. Bilden die a_i eine arithmetische Folge, so erschöpfen jene $k(n-k)+1$ Summenwerte alle Möglichkeiten. Also ist $k(n-k)+1$ die gesuchte Minimalzahl.

Aufgabe 5

Da M nicht leer ist, gibt es ein Element $a \in M$. Sei f die Abbildung, die jedem Wert x den Wert $E(\sqrt{x})$ zuordnet. Für genügend großes natürliches p ist $f^{(p)}(a) = 1$, wobei $f^{(i)}$ die i-malige Anwendung der Abbildung f bedeute. Also ist $1 \in M$ und damit auch $4^k \in M$ (k natürlich). Es existieren zu jeder natürlichen b natürliche Zahlen m und n derart, daß

$$b \leq 4^{m \cdot 2^{-n}} = \sqrt[2^n]{4^m} = (\sqrt[2^n]{4})^m < b + 1 \quad .$$

Also ist $f^{(n)}(4^m) = b$, womit $b \in M$ und der Beweis geführt ist.

Aufgabe 6

Wir nehmen an, f(x) genügt der gegebenen Funktionalgleichung für alle x aus dem Definitionsbereich. Für alle diese x ist $\frac{a^2}{a-x}$ wieder aus dem Definitionsbereich, also

$$f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}}\right) = \frac{a^2}{a-x} \tag{2}$$

und analog

$$f\left(\frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}}\right) + f\left(\frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}}}\right) = \frac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}} \; . \tag{3}$$

Wegen $\dfrac{a^2}{a - \dfrac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}}} = x$ und $\dfrac{a^2}{a - \frac{a^2}{a-x}} = \dfrac{a(x-a)}{x}$

erhalten wir aus (1), (2) und (3) für f(x)

$$2f(x) = x + \frac{a(x-a)}{x} - \frac{a^2}{a-x}$$

und

$$f(x) = \frac{-x^3 + a^2x - a^3}{2x(a-x)} \quad .$$

Und tatsächlich ist diese Funktion f(x) die Lösung von (1), denn es ist

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = \frac{-x^3 + a^2x - a^3}{2x(a-x)} + \frac{-\left(\frac{a^2}{a-x}\right)^3 + a^2\left(\frac{a^2}{a-x}\right) - a^3}{2\left(\frac{a^2}{a-x}\right)\left(a - \frac{a^2}{a-x}\right)}$$

$$= \frac{-x^3 + a^2x - a^3}{2x(a-x)} + \frac{-x^3 + 2ax^2 - a^2x + a^3}{2x(a-x)}$$

$$= \frac{-2x^3 + 2ax^2}{2x(a-x)} = x.$$

Aufgabe 7

Wir berechnen die ersten Folgeglieder und erhalten

$$a_2 = \frac{b_1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1}; \quad a_3 = \frac{a_1}{a_1 - 1} \cdot \frac{b_1 - 1}{b_1}, \quad b_3 = \frac{a_1}{(a_1 - 1}$$

$$a_4 = \frac{b_1}{b_1 - 1}, \quad b_4 = \frac{b_1}{b_1 - a_1}; \quad a_5 = \frac{b_1 - 1}{b_1 - a_1},$$

$$b_5 = \frac{a_1(b_1 - 1)}{b_1 - a_1}$$

$$a_6 = a_1, \; b_6 = b_1 \quad .$$

Die Folgen sind periodisch, d.h. sie konvergieren genau dann, wenn die Folgen konstant sind. Mithin bekommen wir die Gleichungsketten

$$a_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_1 - 1}{b_1} \cdot \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{b_1}{b_1 - 1} = \frac{b_1 - 1}{b_1 - a_1} \quad ;$$

$$b_1 = \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1} = \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{b_1}{b_1 - a_1} = \frac{a_1(b_1 - 1)}{b_1 - a_1} \quad .$$

Diese führen auf die quadratische Gleichung $a_1^2 - a_1 - 1 = 0$, die wegen $a_1 > 1$ die Lösung $a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und damit $b_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ liefert.

Wegen $a_2 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + 5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = a_1$ und $b_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = b_1$ konvergieren die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ tatsächlich für $a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und $b_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 8

Falls es für ein gewisses n_o natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n_o} \geq 1$ gibt, so daß

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n_o}^2} = 1$$

ist, so gibt es auch $n_o + 3$ Zahlen, die der Gleichung (1) genügen, und zwar $a_1, a_2, \ldots, a_{n_o - 1}, 2 \cdot a_{n_o}, 2 \cdot a_{n_o}, 2 \cdot a_{n_o}$, da $\frac{1}{a_{n_o}^2} = 4 \cdot \frac{1}{(2 \cdot a_{n_o})^2}$ ist. Mithin führt die Annahme der Existenz einer Lösung von (1) für n_o zur Existenz von Lösungen für alle $n = n_o + 3 \cdot k$, k eine beliebige natürliche Zahl. Für $n = 1$ existiert die triviale Lösung $a_1 = 1$. Für $n = 6$ beziehungsweise $n = 8$ findet man z. B. die Lösungen

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = 1 \qquad \text{bzw.}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} = 1 \quad .$$

Nun gibt es für $n = 1, 4$ und $n \geq 6$ natürliche Zahlen, die der Gleichung (1) genügen.

Wir untersuchen die Fälle $n = 2,3,5$. Falls es für eine dieser Zahlen eine Lösung $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, gilt $a_i \neq 1$, also $a_i \geq 2$, $\frac{1}{a_i^2} \leq \frac{1}{4}$. Daher gibt es für $n = 2,3$ keine Lösung. Sei $n = 5$ und o.B.d.A. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 > 1$. Man erkennt leicht, daß $a_4 \ngeq 3$, also $a_4 = a_5 = 2$ sein müßte. Dann wäre $a_3 \ngeq 3$, also $a_3 = 2$. Dann wäre $a_2 \ngeq 3$, also $a_2 = 2$ und man erhielte einen Widerspruch. Mithin existieren genau für die natürlichen Zahlen $n = 1$, $n = 4$, $n \geq 6$ Lösungstupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ aus natürlichen Zahlen, die der Gleichung (1) genügen.

Aufgabe 9

$P(x)$ habe die reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ und mithin die Darstellung

$$P(x) = c \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) \qquad (c - \text{reell};\ c \neq 0) \,.$$

Somit ist

$$P'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} (x - x_\nu) \tag{1}$$

und

$$P''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} c \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \nu \\ \lambda \neq \mu}}^{n} (x - x_\lambda) \,. \tag{2}$$

1° Für $x = x_1; \ldots; x_n$ ist $P(x) = 0$, aber $P'(x) \neq 0$ (jede Nullstelle ist einfache Nullstelle).

2° Für $x \neq x_1; \ldots; x_n$ existieren die Funktionen $f_\nu(x) = \frac{1}{x - x_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Mithin folgt aus (1) und (2)

$$P'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} P(x) \cdot f_\nu(x) = P(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)$$

$$P''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} P(x)\, f_\nu(x)\, f_\mu(x) = P(x) \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} f_\nu(x)\, f_\mu(x).$$

Also ist $P(x) \cdot P''(x) - [P'(x)]^2 = P^2(x) \Big\{ \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} f_\nu(x)\, f_\mu(x)$

$$- [\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)]^2 \Big\}$$

$$= P^2(x) \cdot \Big\{ \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} f_\nu(x)\, f_\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x) - \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu = \mu}}^{n} f_\nu(x)\, f_\mu(x) \Big\}$$

$$= - P^2(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x) < 0.$$

Aufgabe 1o

Für $x = -2$ erhalten wir in $(*)$ $0 \cdot P(-4) = (-6)P(-2)$, d.h. $P(-2) = 0$.
Ferner folgt für $x = 0$: $2 \cdot P(-2) = (-4) \cdot P(0)$, d.h. $P(0) = 0$ und für $x = 2$: $4 \cdot P(0) = (-2) \cdot P(2)$, mithin $P(2) = 0$. Für $x = 4$ erhalten wir aus $(*)$ wegen $6 \cdot P(2) = 0 \cdot P(4)$ keine Aussage über $P(4)$.
Falls es überhaupt ein Polynom $P(x)$ gibt, das der Gleichung $(*)$ genügt, so hat es die Form

$$P(x) = (x + 2)x(x - 2)Q(x),$$

wobei $Q(x)$ eine gewisse ganzrationale Funktion ist, die der Gleichung

$$(x + 2) \cdot x(x - 2)(x - 4)Q(x - 2) = (x - 4)(x + 2)x(x - 2)Q(x) \qquad (**)$$

genügt. Aus $(**)$ folgt $Q(x - 2) = Q(x)$.
$Q(x)$ ist periodisch, d.h. sie nimmt für beliebig viele Argumente den gleichen Funktionswert an. Da $Q(x)$ aber eine ganzrationale Funktion ist, muß $Q(x)$ konstant sein, d.h. $Q(x) = C$, wobei C eine reelle Zahl ist.
$P(x) = C(x + 2)x(x - 2)$ ist tatsächlich ein Polynom, das die Gleichung $(*)$ erfüllt.

Aufgabe 11

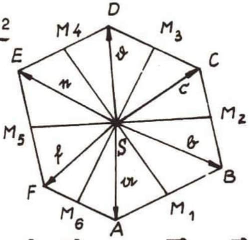
Leicht findet man die Lösungspaare (3,1) und (5,3).
Für $x = 1;2;4$ existieren keine Lösungen.
Es sei $x \geq 6$ und wir werden zeigen, daß es keine weiteren Lösungen gibt.
Es ist $64 \mid 2^x$. Für eine Lösung y muß gelten $3^y \equiv 59(64)$.
3^y durchläuft bzgl. modulo 64 das Restklassensystem
3,9,27,17,51,25,11,33,35,41,<u>59</u>,49,19,57,43,1. Eine Lösung hat also die Form $y = 16k + 11$ mit k positiv ganzzahlig. Wegen $3^{16} \equiv 1(17)$ ist $3^y \equiv 3^{11}(17)$, d.h. $3^y \equiv 7(17)$ und

$$3^y + 5 \equiv 12(17). \tag{2}$$

Die Restklassen von 2^x bzgl. 17 sind 2,4,8,16,15,13,9,1,
d.h. $2^x \not\equiv 12(17)$ für $x \geq 6$. (3)

Aus (2) und (3) erhalten wir, daß es keine weiteren Lösungspaare von (1) gibt.

Aufgabe 12



S sei der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ bzw. $\overline{AF}$ und $\overline{CD}$. Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei M_1, der von $\overline{ED}$ M_2, der von $\overline{CD}$ M_3, der von $\overline{AF}$ M_4, der von $\overline{BC}$ M_5 und der von $\overline{EF}$ M_6.

1. Es ist $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DE} = \mathfrak{o}$ und $\overrightarrow{SM_1} \times \overrightarrow{SM_2} = \mathfrak{o}$,

d.h.: $(-\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (-\mathfrak{d} + \mathfrak{e}) = \mathfrak{o}$ und

$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{d} + \mathfrak{e}) = \mathfrak{o}$.

Durch Addition folgt: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{e} = \mathfrak{o}$

oder $\mathfrak{d} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{e} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. (1)

2. Es ist $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{CD} = \mathfrak{o}$ und $\overrightarrow{SM_3} \times \overrightarrow{SM_4} = \mathfrak{o}$,

d.h.: $(\mathfrak{a} - \mathfrak{f}) \times (\mathfrak{c} - \mathfrak{d}) = 0$ und

$(\mathfrak{a} + \mathfrak{f}) \times (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = 0$.

Durch Subtraktion folgt: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{f} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$. (2)

3. Durch Addition von (1) und (2) erhält man

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{f} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

$$2\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + 2\mathfrak{f} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{o} \qquad (3)$$

4. Es ist $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{EF} = \mathfrak{o}$, d.h.:

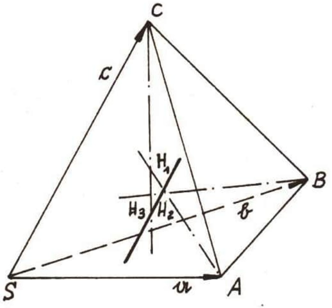
$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{f}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}. \qquad (4)$$

Indem man (3) von (4) subtrahiert, erhält man

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{f}) \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{o},$$

d.h. M_5, S und M_6 liegen auf einer Geraden, also geht die Verbindungsgerade von M_5 und M_6 durch S.

Aufgabe 13



O.B.d.A. schneide die Gerade die Höhen durch A, B und C in den Punkten H_1, H_2 bzw. H_3 mit $\overrightarrow{SH_1} = \mathfrak{h}_1$, $\overrightarrow{SH_2} = \mathfrak{h}_2$, $\overrightarrow{SH_3} = \mathfrak{h}_3$.

Dann ist:

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{h}_1) \cdot \mathfrak{b} = 0 \qquad (1)$$

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{h}_1) \cdot \mathfrak{c} = 0 \qquad (2)$$

$$(\mathfrak{b} - \mathfrak{h}_2) \cdot \mathfrak{a} = 0 \qquad (3)$$

$$(\mathfrak{b} - \mathfrak{h}_2) \cdot \mathfrak{c} = 0 \qquad (4)$$

$$(\mathfrak{c} - \mathfrak{h}_3) \cdot \mathfrak{a} = 0 \qquad (5)$$

$$(\mathfrak{c} - \mathfrak{h}_3) \cdot \mathfrak{b} = 0. \qquad (6)$$

Da H_1, H_2 und H_3 auf einer Geraden liegen, kann man schreiben:

$$\mathfrak{h}_3 = r\,\mathfrak{h}_2 + (1 - r)\,\mathfrak{h}_1 .$$

Dann folgt aus (5) und (6)

$$(\mathfrak{c} - r\,\mathfrak{h}_2 - (1 - r)\,\mathfrak{h}_1) \cdot \mathfrak{a} = 0 \qquad (5')$$

$$(\mathfrak{c} - r\,\mathfrak{h}_2 - (1 - r)\,\mathfrak{h}_1) \cdot \mathfrak{b} = 0 \qquad (6')$$

Aus (1), (2), (3), (4) folgt:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{h}_2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Dann erhält man (5') bzw. (6'):

$$\mathfrak{h}_1(\mathfrak{c} - r\mathfrak{b} - (1 - r)\mathfrak{a}) = 0 \qquad (5'')$$

$$\mathfrak{h}_2(\mathfrak{c} - r\mathfrak{b} - (1 - r)\mathfrak{a}) = 0\ . \qquad (6'')$$

Die 4. Höhe habe den Höhenfußpunkt H und es sei $\overrightarrow{SH} = \mathfrak{h}$.
Dann ist

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{h}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = 0.$$

Aufgabe 14

Sicher gibt es in dem konvexen Vieleck V ein flächengrößtes Dreieck D. (Ein größtes Dreieck hat seine Eckpunkte in gewissen Eckpunkten von V. Es gibt nur endlich viele Eckpunkte von V, etwa v, mithin $\binom{v}{3}$ Dreiecke, die aus Eckpunkten von V gebildet sind.) Zu D konstruieren wir ein Dreieck D' in dem wir zu jeder Dreieckseite von D die Parallele durch den Dreieckspunkt legen, den diese Dreieckseite nicht beinhaltet. Offensichtlich schneiden diese Parallelen V nicht, sonst wäre D nicht das maximale Dreieck. V liegt somit vollständig in D'. D' ist ähnlich zu D und die entsprechenden Seiten verhalten sich wie 2 : 1, mithin ist $|D'| = 4|D|$, wobei $|D|$ das Flächenmaß von D ist. Wegen $|D| < 1$ ist $|D'| < 4$, also läßt sich V von einem Dreieck der Fläche 4 überdecken.

Aufgabe 15

Für $x = \frac{a}{a^2+1}$ ist wegen $a \neq 0$, $x \neq 0$: $\frac{1}{x^2} = \frac{a^4+2a^2+1}{a^2} = \frac{a^4+1}{a^2} + 2$,

also $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2} - 2\ . \qquad (\ )$

Wegen $(|a| - 1)^2 \geq 0$ ist $a^2 + 1 \geq 2|a|$ und $\left| \frac{a}{a^2+1} \right| \leq \frac{1}{2}$,

d.h. (1) folgt aus der gegebenen Gleichung nur für $|x| \leq \frac{1}{2}$.
Wegen der Stetigkeit von $x = x(a) = \frac{a}{a^2+1}$ und $x(1) = \frac{1}{2}$ und $x(-1) = -\frac{1}{2}$ sowie $\lim_{a \to +\infty} x(a) = +0$; $\lim_{a \to -\infty} x(a) = -0$ lassen sich aber auch alle x mit $0 < |x| \leq \frac{1}{2}$ in der Form $x = \frac{a}{a^2+1}$ für gewisse a darstellen.
Es seien $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei beliebige stetige Funktionen mit den Definitionsbereichen $D_{\varphi_1} = \left\{ x | x > \frac{1}{2} \right\}$; $D_{\varphi_2} = \left\{ x | x < -\frac{1}{2} \right\}$ und den Bedingungen

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}+0} \varphi_1(x) = 2 \quad ; \lim_{x \to -\frac{1}{2}-0} \varphi_2(x) = +2. \qquad (2)$$

Somit erhalten wir sämtliche für $x \neq 0$ definierten, stetigen Funktionen $f(x)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} - 2 & \text{für } 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_2(x) & \text{für } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Offenbar ist $f(x)$ für alle $x = 0$ wegen der Definition von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$, besonders auch wegen der Bedingung (2) stetig.

Lösung der Preisaufgabe:

Aufgabe 2 **(Heft 1-1976)**

Beweis:

1. Sei $a \in Q$. Dann ist $a - a = 0$ und $0 - a = -a$. Also kann man von a zu 0 und zu $-a$ gelangen. Wir können also O. B. d. A. voraussetzen, daß unser $x \in Q\setminus Z$ eine positive Zahl ist und brauchen nur noch nachzuweisen, daß man jede rationale Zahl $y > 0$ hiervon ableiten kann.

2. In diesem Punkt wollen wir zeigen, daß wir ausgehend von $x = \frac{1}{2}$ durch unsere Operationen zu jedem rationalen $y > 0$ gelangen können. Wir können $y = \frac{r}{s}$ setzen mit $r > 0$, $s \geqq 3$ und $r, s \in Z$. Dabei brauchen r und s nicht teilerfremd zu sein. Zunächst bilden wir $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Sollte $4 < s$ sein, so bilden wir $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Nach einer endlichen Anzahl von Multiplikationen gelangen wir zu $\frac{1}{2^i}$ mit $2^{i-1} < s \leqq 2^i$. Nach einer (2^i-s)-maligen Anwendung der $|$-Operationen gelangen wir zu $\frac{1}{s}$. Nun brauchen wir nur noch r-mal die Additionsoperation anzuwenden und erhalten $y = \frac{r}{s}$.

3. Sei nun $0 < x < \frac{1}{2}$. Wir brauchen in diesem Falle nur noch nachzuweisen, daß wir aus x nach endlich vielen Schritten durch unsere Operationen die Zahl $\frac{1}{2}$ erhalten. Wir setzen dazu $x = \frac{m}{n}$ mit $ggT(m,n) = 1$, $m,n > 0$, $m,n \in Z$. Dann können wir $x|$ bilden und es gilt $x| = \frac{m}{n-1}$, wobei offenbar $x < x| \leqq \frac{1}{2}$, da $2m < n$ und somit $2m \leqq n-1$ gilt. Ist $x| = \frac{1}{2}$, so sind wir fertig. Anderenfalls wiederholen wir diesen Prozeß mit dem Element $x| = \frac{m}{n-1}$, das wir aber gegebenenfalls noch kürzen müssen. Der Nenner vergrößert sich dadurch jedoch nicht, so daß wir nach spätestens $n-2$ dieser $|$-Operationen bei $\frac{1}{2}$ angelangt sind.

4. Nun müssen wir nur noch zeigen, daß wir ausgehend von $x > \frac{1}{2}$ mit $x \in Q\setminus Z$ zu einer rationalen Zahl $y \leqq \frac{1}{2}$ nach endlicher Anzahl von Schritten gelangen können. Wir setzen $x = \frac{m}{n}$, wobei wieder $ggT(m,n) = 1$, $m,n > 0$, $m,n \in Z$ gelten soll. Wir bilden zunächst $x \cdot x = \frac{m^2}{n^2}$. Offenbar ist $ggT(m^2,n^2) = 1$ und $n^2 \geqq 4$. Ist $x^2 \leqq \frac{1}{2}$, so sind wir fertig. Anderenfalls setzen wir $x' = x^2 = \frac{r}{s}$ mit $r = m^2$ und $s = n^2$. Dann können wir $x'| - x' = \frac{r}{s-1} - \frac{r}{s} = \frac{r}{s(s-1)}$ bilden. Da $s \geqq 4$ gilt, erhalten wir

$0 < \frac{r}{s(s-1)} \leqq \frac{r}{s \cdot 3} = x' \cdot \frac{1}{3}$. Da r und s teilerfremd sind, ist

$x_1 = \frac{r}{s(s-1)}$ keine ganze Zahl, aber offenbar rational. Ist $x_1 \leqq \frac{1}{2}$, so sind wir fertig. Anderenfalls gilt für $x_1 = \frac{r_1}{s_1}$ mit $r_1 s_1 \in Z$, $r_1, s_1 > 0$ und $ggT(r_1, s_1) = 1$, daß $s_1 \geqq 4$ ist. Wir bilden nun $x_2 = x_1 | - x_1$ und kommen, indem wir diesen Prozeß wiederholt anwenden, nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem x_i mit $0 < x_i \leqq \frac{1}{2}$.

1. Auflage
Ausgabe 1976
Lizenz Nr. 203/1000/76 (E)
LSV 0600
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
Verlagstitelnummer 30 06 45-1

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 3

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei die Folge $a_n = 2(a_{n-1} - 1)^2$ $(n = 1,2,\dots)$ mit $a_0 = 3$. Man gebe a_n als Funktion von n an!

Aufgabe 2

Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ für alle reellen x definiert, wobei a_k und b_k $(k = 1,2,\dots,n)$ gegebene reelle Zahlen sind. Man beweise: Die Gleichung $f_n(x) = 0$ hat immer eine Lösung.

Aufgabe 3

Wir bezeichnen mit A einen Eckpunkt des Parallelepipeds. Die benachbarten Eckpunkte seien B, C und D. Der A diagonal gegenüberliegende Eckpunkt sei E. Wir zeichnen durch E eine Ebene, die die Halbstrahlen AB, AC und AD schneidet. Die Schnittpunkte seien P, Q und R. Wie müssen wir die Ebene legen, damit das Volumen des Tetraeders APQR minimal wird?

Aufgabe 4

$f(x)$ sei eine periodische Funktion mit der Periode $a \neq 0$, d.h. es gilt $f(x+a) = f(x)$ für alle reellen Zahlen x. Beweisen Sie: Wenn f und g periodische Funktionen mit den Perioden a und b sind, wobei a eine rationale und b eine irrationale Zahl ist, dann ist f + g nur dann eine periodische Funktion, wenn f oder g konstant ist.

Aufgabe 5

Die Funktion $f(x) = x + \varepsilon \sin x$ mit $0 < |\varepsilon| \leq 1$ sei für jedes reelle x definiert. Wir bezeichnen für jedes reelle x

$$x_n = \underbrace{f \dots f \{ f [f(x)] \}}_{n\text{-mal}}$$

Zeigen Sie, daß für jedes reelle x eine ganze Zahl k existiert, daß $\lim_{n \to \infty} x_n = k\pi$ ist.

(Vorschlag Polen, XVI. IMO)

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei regelmäßige n-Ecke. Zeigen Sie, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen, wenn auf jeder Seite des einen n-Ecks genau ein Eckpunkt des anderen liegt.

Aufgabe 7

Wir betrachten das unendliche Diagramm

$$D = \begin{array}{|llll} \vdots & \vdots & \vdots & \\ n_{20} & n_{21} & n_{22} & \cdots \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} & \cdots \\ n_{00} & n_{01} & n_{02} & \cdots \\ \hline \end{array}$$

, in dem alle Elemente bis auf eine endliche Anzahl der ganzen Zahlen n_{ij}, $i = 0,1,2,\ldots$, $j = 0,1,2,\ldots$ gleich Null sind. Drei Elemente des Diagramms heißen zusammenhängend, wenn es ganze Zahlen i und j mit $i \geqq 0$ und $j \geqq 0$ gibt, so daß die drei Elemente die ganzen Zahlen

a) n_{ij} $\quad n_{i,j+1}$ $\quad n_{i,j+2}$

oder b) n_{ij} $\quad n_{i+1,j}$ $\quad n_{i+2,j}$

oder c) $n_{i+2,j}$ $\quad n_{i+1,j+1}$ $\quad n_{i,j+2}$ sind.

Eine Elementaroperation sei eine Operation, bei der drei zusammendhängende Elemente n_{ij} durch n'_{ij} ersetzt werden, wobei $|n_{ij} - n'_{ij}| = 1$ ist. Zwei Diagramme heißen äquivalent, wenn das eine durch eine endliche Folge von Elementaroperationen in das andere überführt werden kann. Wieviele Mengen nichtäquivalenter Diagramme gibt es?

(Vorschlag Schweden, XVI. IMO)

Aufgabe 8

In einen Kreis mit dem Radius 1 wird ein Quadrat eingeschrieben, in dieses ein Kreis, in den Kreis ein regelmäßiges Achteck, darein ein Kreis, in diesen Kreis ein regelmäßiges Sechzehneck, darein ein Kreis usw. In den n-ten Kreis wird ein regelmäßiges 2^{n+1}eck eingeschrieben. Es ist zu beweisen, daß die Radien aller Kreise größer als $\frac{2}{\pi}$ sind.

Aufgabe 9

Es sei $n \geqq 3$ eine natürliche Zahl.
Man beweise die Ungleichung:

$$(n!)! > n!\,[(n-1)!]^{n!}$$

(IMO-Vorbereitungslehrgang 1968)

Aufgabe 1o

Es sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Man beweise, daß die Gleichung

$$x^n + px + q = 0 \qquad \text{(p und q seien bel. reelle Zahlen)}$$

für gerades n höchstens 2 und für ungerades n höchstens 3 reelle Wurzeln besitzt!

Aufgabe 11

Man beweise: Wenn die reellen Zahlen a_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ paarweise voneinander verschieden und ungleich Null sind, so hat die Gleichung

$$\frac{a_1}{a_1-x} + \frac{a_2}{a_2-x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n-x} = n \qquad (1)$$

mindestens n-1 paarweise verschiedene reelle Lösungen.

(IMO-Vorbereitungslehrgang 1969)

Aufgabe 12

Man bestimme alle Polynome P in den drei Variablen x,y,z, die den folgenden Bedingungen genügen:

a) P ist homogen vom Grade n, d.h. für alle reellen Zahlen t,x,y,z gilt:

$$P(t\cdot x, t\cdot y, t\cdot z) = t^n \cdot P(x,y,z)$$

($n \geqq 1$ ist eine positive ganze Zahl),

b) für alle reellen Zahlen x,y,z,w gilt:

$$2P(x,y,z) = P(x,y,w) + P(x,w,z) + P(w,y,z)$$

c) $P(1,0,0) = P(0, 1/2, 1) = 1$.

Aufgabe 13

Die Summe der positiven reellen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geqq 2)$ ist gleich 1. Gesucht wird der größte Wert des Ausdrucks
$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + \ldots + b_{n-1}b_n$!

Aufgabe 14

Von einer geometrischen Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$ sei bekannt, daß alle Glieder natürliche Zahlen sind, wobei 3 Glieder 4-stellig, 2 Glieder 5-stellig, 3 Glieder 6-stellig und 3 Glieder 7-stellig sind.
Man bestimme die Folge!

Aufgabe 15

Auf einer Ringstraße seien 2o gleichartige Kraftwagen. Die Gesamtmenge Benzin all dieser Autos reicht genau dazu, daß eines davon den gesamten Ring abfahren kann. Man beweise, daß unter Voraussetzung einer beliebigen Verteilung der Wagen und des Benzins mindestens einer der Wagen den gesamten Ring abfahren kann, wenn er unterwegs das Benzin von denjenigen der übrigen 19 Wagen übernimmt, die er erreicht hat.

Aufgabe 16

Es sei h_n die Länge des Inkreisradius des einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ($n \geqq 3$, ganzzahlig).
Man beweise die Ungleichung

$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > r!$$

Man beweise weiterhin, daß, wenn die Zahl r auf der rechten Seite der Ungleichung durch eine Zahl größer als r ersetzt wird, die Ungleichung nicht für alle $n \geqq 3$ gilt!

Aufgabe 17

Seien n,a,b,c,d natürliche Zahlen und möge die Zahl n ein Teiler der Zahlen ac, bd und ad + bc sein.
Man zeige, daß n dann auch die Zahlen ad und bc teilt.
(IMO-Vorbereitungslehrgang 1968)

Problemaufgabe

Man beweise: Jedes nicht lineare Polynom mit reellen Koeffizienten

$$P(x) = x^{2m+1} + a_{2m-1} x^{2m-1} + a_{2m-3} x^{2m-3} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hat mindestens eine reelle Nullstelle, deren Betrag kleiner als

$2 \cdot \sqrt[2m+1]{\frac{a_0}{2}}$ ist.

Auswertung der Einsendungen zur Preisaufgabe aus Heft 1/76

Insgesamt gingen neun Lösungen ein. Drei davon von Schülern der Klassenstufe 1o, zwei von Schülern der Klassenstufe 11 und die restlichen von Schülern der Klassenstufe 12.

Richtige Lösungen stammen von

Peter Dittrich	(Klasse 11, Spezialschule Mathematik/ Physik der Humboldt-Universität Berlin)
Lutz Gärtner	(Klasse 12, gleiche Schule)
Andreas Kleinwächter	(Klasse 12, Spezialschule Jena)
Reinhard Meinel	(Klasse 12, gleiche Schule).

Die vier Schüler erhielten für ihre Lösung ein Anerkennungsschreiben. Dabei besticht die Lösung von Peter Dittrich durch ihre Kürze und Klarheit. Seine Lösung kommt der Musterlösung sehr nahe. Weitere im wesentlichen richtige Lösungen stammen von

Ferdinand Börner	(Klasse 11, EOS "Heinrich Hertz", Berlin)
Reinhard Hummelthey	(Klasse 12, EOS Kleinmachnow)

Dr. W. Harnau

Lösungen

Aufgabe 1

Mit $b_n = 2(a_n - 1)$, $b_o = 4$ ergibt sich $b_n = b^2_{n-1} - 2(1)$.
Wir machen den Ansatz $b_n = c_n + d_n = c^2_{n-1} + d^2_{n-1} + 2(c_{n-1}d_{n-1} - 1)$.
Wählen wir c_n und d_n so, daß $c_{n-1}d_{n-1} = 1$ für alle n ist, so können wir sie ermitteln, indem wir $c_n = c^2_{n-1}$ und $d_n = d^2_{n-1}$ setzen. Wir erhalten $c_n = c_o^{2^n}$ und $d_n = d_o^{2^n}$. Es ist $c_o d_o = 1$ und $c_o + d_o = 4$, also o.B.d.A. $c_o = 2 + \sqrt{3}$ und $d_o = 2 - \sqrt{3}$ und damit $a_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}\right] + 1$. Den Nachweis, daß die ermittelte Folge der Rekursion genügt, führen wir mittels vollständiger Induktion. Für n = 0 ergibt sich $a_o = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^0} + (2-\sqrt{3})^{2^0}\right] + 1 = 3$. Die Formel gelte für n. Dann ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2(a_n - 1)^2 \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}\right] + 1 - 1\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{(2+\sqrt{3})^{2^{n+1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n+1}} + 2\left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]^{2^n}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^{n+1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n+1}}\right] + 1,
\end{aligned}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Einen anderen originellen Weg beschreitet P. Bartenstein. Mit $f_o = 2$, $f_n = a_n - 1$ erhält er $f_n = 2f^2_{n-1} - 1$. Weiterhin gilt für alle reellen x: $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$. Insbesondere ist $\cosh[g \cdot 2^n] = 2\cosh^2[g \cdot 2^{n-1}] - 1$ und die Funktion $G(n) = \cosh[g \cdot 2^n]$ erfüllt die Funktionalgleichung $G(n) = 2G^2(n-1) - 1$. Setzen wir $f_o = G(0)$, so gilt $f_n = G(n)$, da beide Funktionen die gleiche rekursive Bildungsvorschrift besitzen. Aus $f_o = G(0) = \cosh g = 2$, folgt $g = \text{Arcosh } 2$ und damit
$a_n = \cosh(\text{Arcosh } 2 \cdot 2^n) + 1 = \frac{1}{2}(e^{\text{Arcosh } 2 \cdot 2^n} + e^{-\text{Arcosh } 2^n}) + 1$
$= \frac{1}{2}(e^{\text{Arcosh } 2^{2^n}} + e^{-\text{Arcosh } 2^{2^n}}) + 1 = \frac{1}{2}(e^{\ln(2+\sqrt{3})^{2^n}}$

$$+ e^{-\ln(2+\sqrt{3})^{2^n}}) + 1 = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^n} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2^n}}\right] + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}\right] + 1.$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses wird wie oben gezeigt.

Der Vollständigkeit halber sei bemerkt:

In (1) kommt man auch mit $b_o = h + h^{-1}$, $b_1 = h^2 + h^{-2}$, also $b_n = h^{2^n} + h^{-2^n}$ zur Lösung.

Aufgabe 2

Ist $a_k = b_k = 0$ für alle k, so ist die Behauptung trivial. Wir nehmen daher an, daß mindestens eine der Zahlen a_k und b_k ungleich Null ist. Es ist

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 0.$$

Wenn es eine Stelle $x_o \in [0,2\pi]$ gibt mit o.B.d.A. $f_n(x_o) > 0$, so existiert infolge der Stetigkeit von $f_n(x)$ und der Integralbedingung (1) auch ein $x_1 \in [0,2\pi]$ mit $f_n(x_1) < 0$. Da $f_n(x)$ stetig ist, gibt es ein x_2 mit $f_n(x_2) = 0$.

Aufgabe 3

Es sei $\vec{AP} = \lambda_1 \cdot \vec{AB}$, $\vec{AQ} = \lambda_2 \vec{AC}$ und $\vec{AR} = \lambda_3 \vec{AD}$. Infolge der Aufgabenstellung ist sicher $\lambda_i > 0$. Bekanntlich ergibt sich $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\times\vec{AD})$ und $V_{APQR} = \frac{1}{6}\vec{AP}\cdot(\vec{AQ}\times\vec{AR})$ und damit $V_{APQR} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 V_{ABCD}$.

Wir betrachten das aus $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ gebildete Koordinatensystem mit dem Ursprung A. Die Ebenengleichung für die Ebene durch P,Q,R lautet:

$\frac{x}{\overline{AP}} + \frac{y}{\overline{AQ}} + \frac{z}{\overline{AR}} = 1$. Da der Punkt $E(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$ auf dieser Ebene liegt, ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AR}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 1$.

Wegen $\lambda_i > 0$ können wir die Ungleichung vom geometrischen und harmonischen Mittel anwenden und erhalten

$\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}} = 3$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist. Hieraus folgt $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \geqq 27$, also $V_{APQR} \geqq 27\, V_{ABCD}$ und V_{APQR} wird minimal für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, daß die gesuchte Ebene parallel zur Ebene durch B,C,D zu legen ist.

Aufgabe 4

Sei zunächst o.B.d.A. $f = \text{const}$. Mit $F = f + g$ ist $F(x+b) = f(x+b) + g(x+b) = c + g(x) = F(x)$ und damit F periodisch. Ist $g = \text{const}$, so folgt analog $F(x+a) = F(x)$. Sei nun F periodisch mit der Periode c. Es ist $F(x+c) = F(x)$ $= f(x+c) + g(x+c) = f(x) + g(x)$, also $f(x+c) - f(x) + g(x+c)$ $- g(x) = f_1(x) + g_1(x) = 0$ (1), wobei $f_1(x) = f(x+c) - f(x)$ und $g_1(x) = g(x+c) - g(x)$ gesetzt wurde. Da $f_1(x+a) =$ $f(x+a+c) - f(x+a) = f(x+c) - f(x) = f_1(x)$ und $g_1(x+b) =$ $g(x+c+b) - g(x+b) = g(x+c) - g(x) = g_1(x)$, erhalten wir $0 = f_1(x+a) + g_1(x+a) = f_1(x) + g_1(x+a) = f_1(x) + g_1(x)$ infolge (1). Also ist $g_1(x+a) = g_1(x)$, d.h. g_1 ist periodisch mit den Perioden a und b. Ist g_1 nicht konstant, so gibt es ganze Zahlen n_1 und n_2 $(n_1, n_2 \neq 0)$ mit $n_1 a = n_2 b$, also $b = \frac{n_1}{n_2} \cdot a$, was einen Widerspruch darstellt, da b nicht gleichzeitig rational und irrational sein kann. Also ist $g_1 = g(x+c) - g(x) = p = \text{const}$. Ist $p > 0$, so ist $g \uparrow$ und ist $p < 0$, so ist $g \downarrow$, was im Widerspruch zur Voraussetzung "g periodisch" steht. Bleibt nur $p = 0$, also $g(x+c) = g(x)$. Ist g konstant, ist der Beweis geführt. Im anderen Fall hat g die Perioden b und c, d.h. c ist ein rationales Vielfaches von b, ist also selbst irrational. Weiter ist aber $f(x+c) = f(x)$, d.h. f hat die Perioden a und c, woraus analog dem oben gezeigten $f = \text{const}$ folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Aufgabe 5

Sei $\varepsilon > 0$, $x \in [\,2k\pi, (2k+1)\pi\,]$ mit $k \in Z$. Dann ist $\sin x \geqq 0$, also $x_1 = f(x) \geqq x$ und $x_1 \leqq x + \sin x = x + \sin[\,(2k+1)\pi - x\,]$ $\leqq x + [\,(2k+1)\pi - x\,] = (2k+1)\pi$ und daraus folgt durch vollständige Induktion sofort

$$x_n \in [\,2k\pi, (2k+1)\pi\,].$$

Weiter ist offenbar $x \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots \leqq (2k+1)\pi$.
Da die Folge x_n monoton steigt und beschränkt ist, existiert ein Grenzwert. Wir gehen in $x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin x_n$ zur Grenze über und erhalten $g = g + \varepsilon \sin g$, also $g = (2k+1)\pi$.

Ist $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, so fällt x_n monoton und ist in Analogie durch $(2k+1)\pi$ nach unten beschränkt. Der Grenzwert wird analog zu $g = (2k+1)\pi$ ermittelt.
Für $\varepsilon < 0$ führen wir die analogen Betrachtungen aus und erhalten $g = 2k\pi$, womit der Beweis geführt ist.

Der Schüler R. Anders beschreitet einen originellen Weg. Es ist $x_{i+1} = x_i + \varepsilon \sin x_i$ und durch Summation ergibt sich
$x_{n+1} = x_0 + \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \sin x_i$. Für $x_0 = x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist wie bereits erwähnt $x_n \in [k\pi, (k+1)\pi]$, d.h. alle Werte $\sin x_i$ haben das gleiche Vorzeichen. Weiter ist sicher für alle n $|x_{n+1} - x_0| \leqq \pi$. Also ist

$$0 \leqq \left|\sum_{i=0}^{n} \sin x_i\right| = \sum_{i=0}^{n} |\sin x_i| = \frac{|x_{n+1}-x_0|}{|\varepsilon|} \leqq \frac{\pi}{|\varepsilon|}, \text{ also}$$

$0 \leqq \sum_{i=0}^{\infty} |\sin x_i| \leqq \frac{\pi}{|\varepsilon|}$. Andererseits ist für die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} |\sin x_i|$ notwendig, daß ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Daraus folgt leicht die Behauptung.

T. Kaatz verweist darauf, daß die Aufgabenstellung ein Spezialfall des Banachschen Fixpunktsatzes ist.

Aufgabe 6

Es sei $B_i \in A_iA_{i+1}$, wobei $A_{n+1} \equiv A_1$ und $i = 1,2,\ldots,n$.
M sei der Mittelpunkt von $A_1A_2\ldots A_n$ und d der Innenwinkel beider n-Ecke. Wir zeigen $\Delta B_{i-1}A_iB_i \cong \Delta B_iA_{i+1}B_{i+1}$. $(B_0 \equiv B_n, B_{n+1} \equiv B_1)$
Es ist $B_{i-1}B_i = B_iB_{i+1}$, $\sphericalangle B_{i-1}A_iB_i = \sphericalangle B_iA_{i+1}B_{i+1}$ und

$$\begin{aligned}\sphericalangle B_iB_{i-1}A_i &= \pi - \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i - \sphericalangle B_{i-1}B_iA_i \\ &= \pi - \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i - (\pi - \sphericalangle B_{i+1}B_iA_{i+1} - \sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i-1}) \\ &= (\sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i-1} - \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i) + \sphericalangle B_{i+1}B_iA_{i+1} \\ &= \sphericalangle B_{i+1}B_iA_{i+1}.\end{aligned}$$

Der Abstand der B_i vom Mittelpunkt M beträgt

$|\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iB_{i-1}}| = \text{const}$, da $\overline{MA_i} = \text{const}$ und

$\sphericalangle MA_iB_{i-1} = \text{const}$, also ist M auch Mittelpunkt von $B_1B_2\ldots B_n$.

Aufgabe 7

Durch eine endliche Folge von Elementaroperationen, wobei die benachbarten Elemente vom Typ a) oder b) sind, ist jedes Diagramm äquivalent überführbar in ein Diagramm, in dem n_{oo}, n_{o1}, n_{1o}, n_{11} nur Nullen oder Einsen sind. Dies ist dadurch begründet, daß wir zuerst ε, 1, 1 mit $\varepsilon = \pm 1$ und dann ε, -1, -1 zu den gleichen benachbarten Elementen addieren, d.h. jedes Element kann um 2ε verändert werden. Also können wir jedes Element in 0 oder 1 verwandeln. Wenn $n_{o1} = 1$, dann zeigt die Folge

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
1 & n_{11}\dots \\
n_{oo} & n_{o1}\dots
\end{array}
\sim
\begin{array}{ll}
\vdots & \\
1 & \\
1 & \vdots \\
0 & n_{11}\dots \\
n_{oo} & n_{o1}\dots
\end{array}
\sim
\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 0\dots \\
0 & n_{11} & 1\dots \\
n_{oo} & n_{o1} & 0\dots
\end{array}
\sim
\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \\
1 & 1 & \dots \\
1 & n_{11}+1 & \dots \\
n_{oo} & n_{o1} & \dots
\end{array}
\sim
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
0 & n_{11}\dots \\
n_{oo+1} & n_{o1}+1\dots
\end{array}
$$

daß wir $n_{1o} = 0$ und analog $n_{11} = 0$ voraussetzen können. Daher ist jedes Diagramm äquivalent zu einem der 4 folgenden

$$
D_1 = \begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
0 & 0\dots \\
0 & 0\dots
\end{array}
\quad
D_2 = \begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
0 & 0\dots \\
1 & 0\dots
\end{array}
\quad
D_3 = \begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
0 & 0\dots \\
0 & 1\dots
\end{array}
\quad
D_4 = \begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
0 & 0\dots \\
1 & 1\dots
\end{array}
$$

Um zu zeigen, daß diese vier Diagramme nichtäquivalent sind, betrachten wir die Summen

$$A(D) = \sum_{3 \nmid (i-j-1)} n_{ij} \qquad B(D) = \sum_{3 \nmid (i-j-2)} n_{ij}.$$

Wenn D durch eine Elementaroperation verändert wird, dann ändern sich A(D) und B(D) um eine gerade Zahl. Weil

	D_1	D_2	D_3	D_4
A	0	1	1	2
B	0	1	0	1

ist, sind die vier Diagramme D_1, D_2, D_3, D_4 nichtäquivalent.

Aufgabe 8

Ist r_n der Radius des n-ten Kreises ($n = 1,2,\dots$), so gilt sicher die Rekursionsformel $r_{n+1} = r_n \cdot \cos \frac{2\pi}{2 \cdot 2n}$. Mithin beträgt der Radius des 2. Kreises $\cos \frac{\pi}{4}$, der des 3. Kreises $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$ und entsprechend der des n-ten Kreises

$$r_n = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^n} \quad .$$

Wegen $\sin 2 \cdot \alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ erhält man:

$$r_n = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^n} =$$

$$= \frac{(\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4})(\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}) \cdot \ldots \cdot (\sin\frac{\pi}{2^n} \cdot \cos\frac{\pi}{2^n})}{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{2^n \sin\frac{\pi}{2^n}}$$

Nun ist aber für jedes reelle x : $f(x) = x - \sin x > 0$, denn $f(x)$ ist wegen $f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ monoton wachsend, und es ist $f(0) = 0$.

Somit ist $\frac{\pi}{2^n} - \sin\frac{\pi}{2^n} > 0$, $\frac{\pi}{2^n} > \sin\frac{\pi}{2^n}$,

$$\pi > 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad \frac{2}{2^n \sin\frac{\pi}{2^n}} < \frac{2}{\pi}$$

und schließlich $r_n < \frac{2}{\pi}$ w.z.b.w.

Aufgabe 9

Es ist $$(n!)! = n! \left[\prod_{\nu=0}^{n-2} \left\{\prod_{\mu=1}^{(n-1)!} (n!-\nu(n-1)!-\mu)\right\}\right] \cdot [(n-1)!-1]! \quad (1)$$

Für $n \geqq 3$ ist ferner
$$\prod_{\mu=1}^{(n-1)!} (n!-\nu(n-1)!-\mu) > \prod_{\mu=1}^{(n-1)!} (n!-\nu(n-1)!-(n-1)!)$$
$$> \prod_{\mu=1}^{(n-1)!} [(n-1)!(n-\nu-1)]$$
$$> (n-\nu-1)^{(n-1)!}[(n-1)!]^{(n-1)!}$$

Somit folgt aus (1)

$$(n!)! > n![(n-1)!-1]! \cdot \prod_{\nu=0}^{n-2} \left[(n-\nu-1)^{(n-1)!} [(n-1)!]^{(n-1)!}\right]$$
$$> n![(n-1)!-1]! \quad [(n-1)!]^{(n-1)(n-1)!} \left[\prod_{\nu=0}^{n-2} (n-\nu-1)\right]^{(n-1)!} \quad (2)$$

Da offenbar $\prod_{\nu=0}^{n-2}(n-\nu-1) = (n-1)!$ ist, erhalten wir aus (2):

$$(n!)! > n!\,[(n-1)!]^{n!}\,[(n-1)! - 1]!\ . \qquad (3)$$

Wegen $n \geqq 3$ ist $[(n-1)! - 1]! \geqq 1$ und damit folgt die zu beweisende Ungleichung sofort aus (3).

Aufgabe 1o

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^n + px + q$ auf Nullstellen.
Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma: Ist $g(x)$ in $[a,b]$ stetig und in (a,b) existiert die 1. Ableitung und es ist für alle $x \in (a,b)$ $g'(x) > 0$ (streng monoton wachsend) (bzw. $g'(x) < 0$), so hat $g(x)$ in $[a,b]$ höchstens eine Nullstelle.

Beweis: (indirekt) $g(x)$ habe in $[a,b]$ die Nullstellen x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$, d.h. $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Nach dem Mittelwertsatz ($g(x)$ hat die Voraussetzung zur Anwendung) gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2) \subset [a,b]$ mit $0 = f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot f'(\xi) \neq 0$, da für alle $x \in (a,b)$ $g(x) > 0$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.
Wir beweisen jetzt die Behauptung der Aufgabe.
Es ist $f'(x) = nx^{n-1} + p$

1. $n = 2m$ ($m \geqq 1$, natürlich)

Für $x > -\operatorname{sign} p \sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}$ ist $f'(x) > 0$.

Für $x < -\operatorname{sign} p \sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}$ ist $f'(x) < 0$.

Wegen $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ gibt es eine reelle Zahl k, so daß für alle $x \geqq k$ $f(x) > 0$ ist.
Analog existiert eine reelle Zahl k' mit: für alle $x \leqq k'$: $f(x) > 0$.
Da es nach obigem Lemma in den Intervallen $\left[-\operatorname{sign} p \sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}; k\right]$ und $\left[k'; -\operatorname{sign} p \sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}\right]$ jeweils höchstens eine Nullstelle liegt, besitzt $f(x)$ höchstens 2 Nullstellen. ($p < 0$ 2NS; $p = 0$ 1NS; $p > 0$ ONS).

2. $n = 2m + 1$ ($m \geqq 1$, natürlich)

Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ gibt es zwei reelle Zahlen k und k' mit: $\forall x \geqq k$: $f(x) > 0$
$\forall x \leqq k'$: $f(x) < 0$.

1° $p \geq 0$ $\forall x \in [k', k]$ ist $f'(x) > 0$, d.h. nach dem Lemma besitzt $f(x)$ maximal eine Nullstelle.

2° $p \leq 0$ $\forall x \in \left[k', -\sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}\right]$ ist $f'(x) > 0$

$\forall x \in \left[-\sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}, \sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}\right]$ ist $f'(x) < 0$

$\forall x \in \left[\sqrt[n-1]{\frac{|p|}{n}}, k\right]$ ist $f'(x) > 0$.

Nach dem Lemma gibt es in jedem Intervall höchstens eine Nullstelle, d.h. insgesamt höchstens 3 Nullstellen.

q.e.d.

Aufgabe 11

O.B.d.A. sei $a_1 < a_2 < \ldots < a_i < 0 < a_{i+1} < \ldots < a_n$.

Die Funktion $f(x) = \frac{a_1}{a_1 - x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n - x} - n$ hat für $x = a_1, \ldots, a_n$ Polstellen und ist sonst überall stetig.

Da die Lösungen von (1) genau die Nullstellen von $f(x)$ sind, untersuchen wir $f(x)$ auf Nullstellen. Wir betrachten das Intervall $[a_\nu, a_{\nu+1}]$ für $\nu = 1, \ldots, i-1$. Wegen $\lim_{x \to a_\nu + 0} \frac{a_\nu}{a_\nu - x} = +\infty$ und $\lim_{x \to a_\nu + 0} \left|\frac{a_\mu}{a_\mu - x}\right| < \infty$ für $\mu = 1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$ sowie $\lim_{x \to a_{\nu+1} - 0} \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu+1} - x} = -\infty$ und $\lim_{x \to a_{\nu+1} - 0} \left|\frac{a_\mu}{a_\mu - x}\right| < \infty$ für $\mu = 1, \ldots, \nu, \nu+2, \ldots, n$ ist $\lim_{x \to a_\nu + 0} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to a_{\nu+1} - 0} f(x) = -\infty$.

Mithin existieren $x_1, x_2 \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ und nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a_\nu, a_{\nu+1})$ mit $f(x_0) = 0$.

Analog zeigen wir die Existenz einer Nullstelle für jedes Intervall $(a_\nu, a_{\nu+1})$ mit $\nu = i+1, \ldots, n$.

Im Intervall (a_i, a_{i+1}) liegt sicher die Nullstelle $x_0 = 0$. Damit haben wir bewiesen, daß in jedem Intervall $(a_\nu, a_{\nu+1})$ $\nu = 1, \ldots, n-1$ mindestens eine reelle Nullstelle liegt, d.h. (1) besitzt mindestens n-1 paarweise verschiedene reelle Zahlen.

Aufgabe 12

Wir nehmen an, es existiert ein Polynom $P(x,y,z)$, das die 3 Bedingungen a), b) und c) erfüllt. Dann ist wegen a) für $x = 1$, $y = z = 0$ und c)

$$P(t,0,0) = t^n \cdot P(1,0,0) = t^n \tag{1}$$

Aus b) erhalten wir für $w = 0$

$$2P(x,y,z) = P(x,y,0) + P(x,0,z) + P(0,y,z) \tag{2}$$

und aus (2) für $x = 0$, $y = 0$ bzw. $z = 0$

$$\left.\begin{aligned} P(x,y,0) &= P(x,0,0) + P(0,y,0) \\ P(x,0,z) &= P(x,0,0) + P(0,0,z) \\ P(0,y,z) &= P(0,y,0) + P(0,0,z). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) unter Beachtung von (1) folgt:

$$P(x,y,z) = x^n + P(0,y,0) + P(0,0,z) \tag{4}$$

Wegen a) ist für $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$, $t = 2t'$ bzw. $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $t = t''$:

$$P(0,t',0) = 2^n(t')^n \cdot P(0,\tfrac{1}{2},0) \tag{5}$$

$$P(0,0,t'') = (t'')^n \cdot P(0,0,1).$$

Aus (4) für $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1$ und (5) für $t' = \frac{1}{2}$, $t'' = 1$, sowie c) erhalten wir:

$$1 = P(0,\tfrac{1}{2},1) = P(0,\tfrac{1}{2},0) + P(0,0,1). \tag{6}$$

(4), (5) und (6) zusammengefaßt, ergibt:

$$P(x,y,z) = x^n + 2^n y^n P(0,\tfrac{1}{2},0) + z^n(1 - P(0,\tfrac{1}{2},0)).$$

Aus letzter Gleichung und b) ergibt sich für beliebige reelle w:

$$0 = w^n + 2^n w^n\, P(0,\tfrac{1}{2},0) + w^n(1 - P(0,\tfrac{1}{2},0)),$$

d.h.

$$0 = 1 + 2^n P(0,\tfrac{1}{2},0) + (1 - P(0,\tfrac{1}{2},0))$$

$$P(0,\tfrac{1}{2},0) = -\frac{2}{2^n-1}$$

also

$$P(x,y,z) = x^n - \frac{2^{n+1}}{2^n-1}\, y^n + \frac{2^n+1}{2^n-1}\, z^n$$

Tatsächlich erfüllt dieses Polynom alle 3 Bedingungen, wie man leicht nachprüft.

Aufgabe 13

Unter den Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gibt es sicher eine größte. Diese sei b_k. Dann ist

$$b_\nu \cdot b_{\nu+1} \leqq b_\nu \cdot b_k \qquad \text{für } \nu = 1,2,\ldots,k-1 \tag{1}$$

und

$$b_\nu \cdot b_{\nu+1} \leqq b_k \cdot b_{\nu+1} \qquad \text{für } \nu = k,k+1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

d.h.

$$z = b_1 b_2 + b_2 b_3 + \ldots + b_{n-1} \cdot b_n \leqq \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu b_k + \sum_{\nu=k+1}^{n} b_k b_\nu$$
$$= b_k \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu - b_k^2.$$

Wegen $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = 1$ ist

$$z \leqq b_k - b_k^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - b_k\right)^2 \leqq \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Durch (3) haben wir für z eine obere Schranke. Wir untersuchen, ob diese Schranke angenommen wird.

Für $z = \frac{1}{4}$ ist notwendig:

1° wegen (3): $\quad b_k = \frac{1}{2}$

2° wegen (1): $\quad b_{\nu+1} = b_k \ (\nu = 1,\ldots,k-1)$, da $b_\nu > 0$

3° wegen (2): $\quad b_\nu = b_k \quad (\nu = k,\ldots,n-1)$, da $b_\nu > 0$.

Aus 1° und $b_\mu > 0$ $(\mu = 1,\ldots,n)$ sowie $\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu = 1$ folgt

$$b_\mu < \frac{1}{2} \text{ für } \mu = 1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n.$$

Also können 2° und 3° nur für $k \leqq 2$ bzw. $k \geqq n-1$, d.h. $n \leqq 3$ erfüllt sein.

Tatsächlich gibt es für $n = 2$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $n = 3$ $\left(t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - t\right)$ $\left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$ n-Tupel $(b_1,\ldots,b_n)$ mit $z = \frac{1}{4}$.

Für $n \geqq 4$ gibt es kein n-Tupel $(b_1,\ldots,b_n)$ mit $z = \frac{1}{4}$, jedoch ist für jede (hinreichend kleine) reelle Zahl $\varepsilon > 0$ $\quad z = \frac{1}{4} - \varepsilon$ für das n-Tupel $\left(\frac{1}{2} - (n-2)\alpha, \frac{1}{2}, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha\right)$ mit $\alpha = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{\varepsilon}{n-3}}$, d.h. für $n \geqq 4$ nimmt z keinen maximalen Wert an. Es existiert nur eine kleinste obere Schranke Supremum.

Aufgabe 14

Die geometrische Folge $\{a_i\}$ $(i = 0,\dots,10)$ ist durch das Anfangsglied a_0 und den Quotienten q eindeutig bestimmt. Da $\{a_i\}$ nicht stationär ist und sämtliche Glieder positiv sind, ist $q > 0$, $q \neq 1$, $a_0 > 0$. Zu jeder Folge $\{a_i\}$ mit $q < 1$ gibt es die Folge $\{a_i'\}$ mit $a_i' = a_{10-i}$ $(i > 0,\dots,10)$ und $q' > 1$, die die Bedingungen erfüllen. Wir beschränken uns nun auf $q > 1$. Dann ist $a_0 < a_1 < \dots < a_{10}$. Wegen $a_i \in Na$ und $q = \frac{a_1}{a_0}$ muß q rational sein, d.h. es gibt Zahlen $m,n \in Na$ mit $(m,n) = 1$ und $q = \frac{m}{n}$. Aus $a_{10} = a_0 \cdot q^{10} < 10^7$ und $a_0 \geqq 10^3$ folgt
$10^7 > a_0 \cdot q^{10} \geqq 10^3 \cdot q^{10}$, d.h. $q^{10} < 10^4$ und $q < 3$.
Andererseits ist wegen $a_5 = a_0 \cdot q^5 \geqq 10^5$ und $a_2 = a_0 q^2 < 10^4$:

$$10^4 q^3 > a_0 q^5 \geqq 10^5, \text{ d.h. } q^3 > 10 \text{ und } q > 2.$$

Also ist $2 < \frac{m}{n} < 3$ und $2n < m < 3n$. (1)

Da $a_i \in Na$ $(i = 0,\dots,10)$ gilt, muß $a_0 = n^{10} k$ $(k \in Na)$ sein.
Sicher ist $n^{10} \leqq a_0 = k \cdot n^{10} < 10^4 < 3^{10}$, also $n < 3$. Wegen $2 < \frac{m}{n} < 3$ entfällt $n = 1$; nur $n = 2$ und wegen (1) $m = 5$ kommen in Frage. Also ist $a_0 = 2^{10} \cdot k$, $q = \frac{5}{2}$ und $a_2 = k \cdot 2^{10} (\frac{5}{2})^2 = 6400\,k < 10^4$, d.h. $k < 2$, mithin $k = 1$.

Wenn es eine Folge mit den geg. Eigenschaften gibt, kann es mit $q > 1$ nur die Folge $\{5^i 2^{10-i}\}$ $(i = 0,1,\dots,10)$ und mit $q < 1$ die Folge $\{2^i 5^{10-i}\}$ sein.
Existenznachweis:
Beide Folgen bestehen genau aus den Zahlen: 1024, 2560, 6400, 16000, 40000, 100000, 250000, 625000, 1562500, 3906250, 9765625.
Mithin erfüllen beide Folgen die Bedingungen.

Aufgabe 15

Wir beweisen die Aussage für allgemein n Autos, mit entsprechenden Bedingungen zu dieser Aufgabe gibt es verschiedene Beweismöglichkeiten. Einen Beweis mittels vollständiger Induktion und einen indirekten Beweis kann der Leser selbst leicht führen. Wir geben einen eleganten direkten Beweis, wie ihn die Schüler R. Labahn und M. Marczinek angaben: Die Autos seien in (z.B.) math. positiven Richtungssinn der Ringstraße mit $A_1,\dots,A_n$ bezeichnet. Die Entfernung $\overline{A_i A_{i+1}}$ $(i = 1,\dots,n;\ A_{i+1} = A_1)$ werde mit a_i, die Länge der Strecke, die A_i mit seinem Benzin fahren kann mit b_i bezeichnet. Sicher ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = a \tag{1}$$

wobei a die Länge der Ringstraße ist.

Wir betrachten die Folge $\{c_i\}$ $(i = 1,\ldots,n)$ mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_j - \sum_{j=1}^{i-1} a_j . \tag{2}$$

Diese Folge hat mindestens ein kleinstes Element c_m. Das Auto A_m kann den Ring, nach Übernahme des Benzins, der erreichten, vollständig abfahren. Zum Nachweis ist nun zu zeigen, daß für $h = m, m+1,\ldots, m+n-1$

$$\sum_{j=m}^{h} (b_j - a_j) \geqq 0 \quad (b_{n+j} = b_j,\ a_{n+j} = a_j \text{ für } j = 0,1,\ldots,n-1)$$

ist.

Nun ist nach (2):

$$\sum_{j=m}^{h} (b_j - a_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{h} (b_j-a_j) - \sum_{j=1}^{m-1}(b_j-a_j) = c_{h+1} - c_m \\ \qquad \text{für } h \leqq n-1 \\ \displaystyle\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)}_{=0 \text{ (nach (1))}} + \sum_{j=1}^{h-n}(b_j-a_j) - \sum_{j=1}^{m-1}(b_j-a_j) \\ \qquad = c_{h-n+1} - c_m \quad \text{für } h \geqq n . \end{cases}$$

Da c_m ein minimaler Wert von $\{c_i\}$ ist, gilt für

$j = 1,\ldots,n$: $\quad c_j - c_m \geqq 0,$

also für $h = m, m+1,\ldots, m+n-1$

$$\sum_{j=1}^{h} (b_j - a_j) \geqq 0.$$

Für n = 2o ist speziell unsere Aufgabe bewiesen. q.e.d.

Aufgabe 16

Betrachten wir ein Dreieck, das gebildet wird durch den Kreismittelpunkt und zwei benachbarte Eckpunkte des n-Ecks, so erhalten wir

$$h_n = r \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} .$$

$(n+1)h_{n+1} - nh_n = r(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - rn\cos\frac{\pi}{n}$ und wegen

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$= r(n+1)\left(1-2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\right) - rn\left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= r + r\left(2n \sin^2 \frac{\pi}{2n} - 2(n+1)\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\right) \qquad (1)$$

Aus $n \geqq 3$ folgt $0 < \frac{1}{2n} \leqq \frac{1}{6}$. Wir untersuchen die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin^2 \pi x \qquad \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{6}\right].$$

Es ist $$f'(x) = \frac{2\pi x \sin \pi x \cos \pi x - \sin^2 \pi x}{x^2}$$

$$= \frac{\sin \pi x}{x}\left(2\pi \cos \pi x - \frac{\sin \pi x}{x}\right). \qquad (2)$$

Sei $f(x) = \sin \pi x - \pi x$ für $x \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$. Dann ist $f(x)$ wegen $f'(x) = \pi \cos \pi x - \pi \leqq 0$ monoton fallend, also $f(x) = \sin \pi x - \pi x \leqq f(0) = 0$, d.h. für $x \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$ ist

$$0 < \frac{\sin \pi x}{x} \leqq \pi. \qquad (3)$$

Wegen $\sqrt{3}\pi \leqq 2\pi \cos \pi x \leqq 2\pi \qquad (x \in \left[0, \frac{1}{6}\right])$ und (3) ist

$$0 < (\sqrt{3} - 1)\pi \leqq 2\pi \cos \pi x - \frac{\sin \pi x}{x} < 2\pi. \qquad (4)$$

Wegen (3) und (4) erhalten wir aus (2)

$$0 < f'(x) \leqq 2\pi^2. \qquad (5)$$

Sei nun $x_1 = \frac{1}{2n}$ und $x_2 = \frac{1}{2(n+1)}$, so ist $x_1 > x_2$ und $x_1; x_2 \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi).$$

Wegen (5) ist nun

$$0 < 2n \sin^2 \frac{\pi}{2n} - 2(n-1) \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} < \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right) 2\pi^2$$

und wegen (1)

$$r < (n+1)h_{n+1} - nh_n < r + r\pi^2 \frac{1}{n(n+1)}. \qquad (6)$$

Durch die linke Ungleichung von (6) ist die zu beweisende Ungleichung bewiesen. Den zweiten Teil der Aufgabe zeigen wir indirekt, d.h. es sei $\alpha > 0$ eine reelle Zahl und für alle $n \geqq 3$ gilt $r + r\cdot\alpha < (n+1)h_{n+1} - nh_n$.

Wegen (6) ist dann $r\alpha < r\pi^2 \frac{1}{n(n+1)}$, $n(n+1) < \frac{\pi^2}{\alpha}$. $\qquad (7)$

Für $n > \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ ist aber $n(n+1) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + 1\right) = \frac{\pi^2}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} > \frac{\pi^2}{\alpha}$, d.h. (7) gilt nicht für alle $n \geqq 3$, mithin ist unsere Annahme widerlegt, die Behauptung der Aufgabe also bewiesen.

Aufgabe 17

Wir geben 3 verschiedene Lösungen an, die von Schülern vorgeschlagen wurden.

1. <u>Indirekter Beweis</u> (nach P. Bartenstein)
Wir nehmen an, n teilt nicht ad. Dann gibt es eine natürliche Zahl r mit $0 < r < n$ und $ad \equiv r(n)$. (1)
Es sei $(r,n) = n_o$. Dann gibt es natürliche Zahlen n' und r' mit $0 < r' < n'$ und $n = u_o \cdot n'$ und $r = n_o \cdot r'$.
Aus (1) folgt $\quad ad \equiv r'(n')$ (2)
und wegen $ad + bc \equiv 0(n)$:

$$bc \equiv -r'(n'). \qquad (3)$$

Wegen $ac \equiv 0(n)$ und $bd \equiv 0(n)$ ist einerseits $abcd \equiv 0(n)$ und erst recht $abcd \equiv 0(n')$ und andererseits wegen (2) und (3) $abcd \equiv -(r')^2(n')$, d.h.

$$(r)^2 \equiv 0(n').$$

Diese Kongruenz steht jedoch im Widerspruch zu $0 < r' < n$ und $(r',n') = 1$, also ist unsere Annahme falsch und es gilt $ad \equiv 0(n)$.
Wegen $ad + bc \equiv 0(n)$ erhalten wir auch $bc \equiv 0(n)$.

2. (nach R. Labahn)
Die Primfaktordarstellung von n sei $u = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ mit $p_i \neq p_j$ $(i,j = 1,\ldots,3;\ i \neq j)$ und $\alpha_i \geqq 1$ $(i = 1,\ldots,r;\ \alpha_i \in \mathbb{N})$.
Ferner bezeichne h(p) die höchste Potenz von p, die in der natürlichen Zahl h auftritt.

Sei $i \in \{1,\ldots,r\}$.
Wegen $n|ac$ und $n|bd$ ist

$$a(p_i) + c(p_i) \geqq \alpha_i$$
$$b(p_i) + d(p_i) \geqq \alpha_i$$

und $a(p_i) + b(p_i) + c(p_i) + d(p_i) \geqq 2\alpha_i$, d.h. es gilt $a(p_i) + d(p_i) \geqq \alpha_i$ oder $b(p_i) + c(p_i) \geqq \alpha_i$.
Sei o.B.d.A. $a(p_i) + d(p_i) \geqq \alpha_i$ und $b(p_i) + c(p_i) < \alpha_i$. Dann ist $\min((a(p_i) + d(p_i), b(p_i) + c(p_i)) < \alpha_i$, d.h. $p_i^{\alpha_i} \nmid ad + bc$, also $n \nmid ad + bc$. Mithin ist sowohl $a(p_i) + d(p_i) \geqq \alpha_i$ und $b(p_i) + c(p_i) \geqq \alpha_i$. Da diese beiden Ungleichungen für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ gelten, haben wir $n|ad$ und $n|bc$ bewiesen.

Bem. Im allgemeinen (falls n keine Primzahlpotenz ist) folgt aus $n^2|abcd$ nicht $n|ad \vee n|bc$!

3. Seien $(n,a) = n_a$ und $(n,c) = n_c$. Also ist wegen $n|ac$:

$$n = \frac{n_a \cdot n_c}{(n_a,n_c)}\text{, d.h. } \frac{n_a}{(n_a,n_c)} \mid n_a \mid n.$$

Wenn $n|ad + bc$, ist erst recht $\frac{n_a}{(n_a,n_c)} \mid ad + bc.$ (1)

Sicher ist $\frac{n_a}{(n_a,n_c)} \mid n_a \mid a$. Wegen (1) muß also $\frac{n_a}{(n_a,n_c)} \mid bc$.

Hier ist wegen $\left(\frac{n_a}{(n_a,n_c)}, n_c\right) = \left(\frac{n_a}{(n_a,n_c)}, c\right) = 1$ nun

$\frac{n_a}{(n_a,n_c)} \mid b.$ (2)

Aus (2) folgt weiterhin:

$$n = \frac{n_a \cdot n_c}{(n_a,n_c)} \mid b \cdot n_c \mid b_c \quad \text{und da } n|ad + bc\text{: } n|ad\,.$$

q.e.d.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 4

Aufgaben

Aufgabe 1

Man bestimme sämtliche Paare natürlicher Zahlen (m,n), für die $2^m \cdot 3^n + 1$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

(Vorbereitungsklausur, Februar 1977)
(Vorschlag Bulgarien XVIII. IMO)

Aufgabe 2

Man beweise, daß in der euklidischen Ebene unendlich viele konzentrische Kreise C existieren, für die jedes einem C einbeschriebene Dreieck mindestens eine Seite enthält, deren Maßzahl eine irrationale Zahl ist.

(Vorbereitungsklausur, Februar 1977)

Aufgabe 3

Man zeige: Falls für das Polynom $P(x,y)$ die Identität

$$P(x-1,\ y-2x+1) = P(x,y) \qquad (1)$$

gilt, so existiert ein Polynom $\phi(x)$, daß $P(x,y) = \phi(y-x^2)$.
Man löse die gleiche Aufgabenstellung mit der Forderung

$$P(x-1,\ y-2x-1) = P(x,y) \qquad (2).$$

(Vorbereitungsklausur, Februar 1977)
(Vorschlag Sowjetunion XVIII. IMO)

Aufgabe 4

Wenn p und q verschiedene Primzahlen sind, gibt es ganze Zahlen x_0 und y_0 mit $1 = px_0 + qy_0$. Bestimmen Sie den maximalen Wert von $b - a$, wenn b und a positive ganze Zahlen mit der folgenden Eigenschaft sind: Wenn $a \leq t \leq b$ (t ganz), dann gibt es ganze Zahlen x und y mit $0 \leq x \leq q-1$ und $0 \leq y \leq p-1$ derart, daß $t = px + qy$ ist.

(Vorschlag Schweden, XVI. IMO)

Aufgabe 5

Es seien A, B, C und D vier Punkte im Raum. Man zeige: Wenn für alle Punkte M auf der Strecke AB die Summe

$$F(AMC) + F(CMD) + F(DMB)$$

konstant ist, dann liegen die Punkte A, B, C und D in derselben Ebene. ($F(XYZ)$ bezeichne die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks XYZ).

(Vorschlag Rumänien, XVI. IMO)

Aufgabe 6

Wieviel Tripel ganzer Zahlen (x,y,z) erfüllen die Gleichung $|x| + |y| + |z| = n$, wobei n eine fest vorgegebene natürliche Zahl ist?

Aufgabe 7

Der Schwerpunkt eines Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ sei mit O bezeichnet. Man zeige

$$2 \leqq \frac{\sum_{i=1}^{4} (\overline{P_iP_{i+1}})^2}{\sum_{i=1}^{4} (\overline{OP_i})^2} \leqq 4$$

Dabei sei $P_5 = P_1$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 8

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die $\binom{n}{k}$ für alle $k = 1,2,\ldots,n-1$ gerade Zahlen sind.

(Vorschlag USA, XVI. IMO)

Aufgabe 9

Es seien A,B,C die Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Inhalt F und P ein beliebiger Punkt. Setzen wir

x = Länge der Strecke $\overline{AP}$,
y = Länge der Strecke $\overline{BP}$,
z = Länge der Strecke $\overline{CP}$,

so beweise man

$$x + y + z \geqq 2 \sqrt[4]{3} \sqrt{F}.$$

Aufgabe 1o

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Durch die Ecken werden Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen. Das dabei entstehende Dreieck sei A'B'C'. Man zeige: Die Höhenschnittpunkte H und H' der Dreiecke ABC und A'B'C' liegen symmetrisch bzgl. des Umkreismittelpunktes V des Dreiecks ABC (d.h., H, H' und V liegen auf einer Geraden, und V ist der Mittelpunkt der Strecke HH').

Aufgabe 11

Unter allen einem Kreis einbeschriebenen konvexen n-Ecken ($n \geq 3$) besitzt das regelmäßige n-Eck den größten Flächeninhalt.

Aufgabe 12

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Wir betrachten die Menge aller gleichseitigen Dreiecke, deren Eckpunkte auf den Kanten des Quadrates liegen. Man bestimme den geometrischen Ort der Schwerpunkte der Dreiecke.

Aufgabe 13

Man zeige, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = 1$$

ist.

Aufgabe 14

Gegeben ist eine symmetrische Matrix mit der ungeraden Zeilenanzahl $2r + 1$. In jeder Zeile steht eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, 2r + 1$. Man zeige: Auch in der Hauptdiagonalen steht eine Permutation der Zahlen $1,2,\ldots, 2r +1$.

Aufgabe 15

Gegeben sind n ganze Zahlen. Man zeige, daß man eine Teilsumme bilden kann, die durch n teilbar ist.

Aufgabe 16

Nach dem kleinen Fermatschen Satz ist $2^p - 2$ für alle Primzahlen p durch p teilbar. Man zeige: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n (n Primzahl) für die $2^n - 2$ durch n teilbar ist.

Lösungen

Aufgabe 1

Angenommen, das Paar (n,m) erfülle die Forderungen, dann ist $2^m \cdot 3^n + 1 = p^2$ (p ganz), also

$$2^m \cdot 3^n = (p-1)\,(p+1) \qquad (1)$$

1. Sei $m = 0$. Es ist $3^n = (p-1)(p+1)$, d.h. sowohl $p-1$ als auch $p+1$ sind Dreierpotenzen. Da die Differenz beider Zahlen gleich 2 ist, ist nur $p-1 = 3^0 = 1$ möglich, denn die Differenz zweier Dreierpotenzen mit Exponenten ungleich Null ist durch 3 teilbar. Also ist $p = 2$ und damit $n = 1$.

2. Sei $n = 0$. Wir erhalten $2^m = (p-1)(p+1)$. $p-1$ und $p+1$ sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen, d.h. eine ist nur durch 2 und die andere mindestens durch 4 teilbar. Wäre die nur durch 2 teilbare Zahl durch eine größere Zweierpotenz teilbar, so ist die Differenz beider Zahlen mindestens durch 4 teilbar, im Widerspruch zu $(p+1) - (p-1) = 2$. Also ist $p-1 = 2$, $p = 3$, $m = 3$, $n = 0$. Bleibt noch $p-1 = 1$, wie im Fall 1. Es folgt $p = 2$ und damit $2^m = 3$, was unmöglich ist.

3. Wir betrachten nun den Fall $n,m > 0$. Dann ist wegen (1) das Produkt der Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade, d.h. p ist ungerade. Da $p-1$ und $p+1$ aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind, ist genau eine Zahl nur durch 2 teilbar, während die andere durch 2^{m-1} teilbar ist. Betrachten wir die Gleichung (1), so folgt, daß genau einer der Faktoren $p-1$ oder $p+1$ durch 3^n teilbar ist, während der andere nicht durch drei teilbar ist. Wäre dies nicht so, so wäre die Differenz $(p+1) - (p-1) = 2$ durch 3 teilbar, was jedoch nicht möglich ist. Damit verbleiben 4 Fälle:

a) $p-1 = 2$, $p+1 = 2^{m-1} \cdot 3^n$
   Es folgt $p = 3$, $m = 3$, $n = 0$, und dies war ausgeschlossen.

b) $p-1 = 2^{m-1} \cdot 3^n$, $p+1 = 2$, also $p = 1$ und damit $2^{m-1} \cdot 3^n = 0$, was unmöglich ist.

c) $p-1 = 2 \cdot 3^n$, $p+1 = 2^{m-1}$, also

$$(p+1) - (p-1) = 2 = 2^{m-1} - 2 \cdot 3^n \qquad \text{und damit}$$

$$1 = 2^{m-2} - 3^n. \qquad (2)$$

d) $p-1 = 2^{m-1}$, $p+1 = 2 \cdot 3^n$, also

$$(p+1) - (p-1) = 2 = 2 \cdot 3^n - 2^{m-1} \quad \text{und damit}$$

$$1 = 3^n - 2^{m-2}. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) hat für $m < 3$ keine Lösungen. Für $m = 3$ folgt $n = 0$, und dies war ausgeschlossen, für $m = 4$ ergibt sich $n = 1$. Angenommen, die Gleichung hätte für $m \geqq 5$ noch Lösungen, so wäre $3^n + 1 \equiv 0(8)$. Dies ist aber nicht möglich, da für alle natürlichen Zahlen n $\quad 3^{2n} \equiv 1(8)$ und $3^{2n+1} \equiv 3(8)$ ist.

Die Gleichung (3) hat für $m < 3$ und $m = 4$ keine Lösung. Für $m = 3$ ergibt sich $n = 1$ und für $m = 5$ $n = 2$. Angenommen, die Gleichung (3) hätte für $m \geqq 6$ noch weitere Lösungen, so wäre $3^n \equiv 1(16)$. Für alle natürlichen Zahlen k ist $3^{4k} \equiv 1(16)$, $3^{4k+1} \equiv 3(16)$, $3^{4k+2} \equiv 9(16)$, $3^{4k+3} \equiv 11(16)$, und es würde $n \equiv 0(4)$ folgen. Wegen $3^n \equiv 1(5)$ würde sich dann ein Widerspruch ergeben: $2^{m-2} \equiv 0(5)$.

Als Lösungspaare kommen also die Paare (0,1), (3,0), (3,1), (4,1), (5,2) in Betracht. Tatsächlich ist

$2^0 . 3^1 + 1 = 2^2$, $2^3 . 3^0 + 1 = 3^2$, $2^3 . 3^1 + 1 = 5^2$, $2^4 . 3^1 + 1 = 7^2$ und $2^5 . 3^2 + 1 = 17^2$.

Aufgabe 2

Für den Umkreisradius R eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und der Fläche F ist $R = \frac{abc}{4F}$ und nach der Heronischen Dreiecksformel $F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$, also

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Sind a, b, c rational, so ist R^2 auch rational. Wählen wir $R = n\sqrt[4]{2}$, $n \in N$, so ist $R^2 = n^2\sqrt{2}$ irrational. Das dem entsprechenden Kreis C_n einbeschriebene Dreieck hat dann keine drei rationalen Maßzahlen der Seiten. Betrachten wir die Menge C_n für alle natürlichen Zahlen n um den festen Punkt C_o, so ist der Beweis geführt.

Aufgabe 3 (nach der Idee des Schülers Marczinek):
Wir definieren das Polynom $Q(x,y)$ durch

$$Q(x,y) = P(x,y) - P(-1,1).$$

Es ist $Q(-1,1) = 0$ und $Q(-n,n^2) = 0$ für alle natürlichen Zahlen n. Es ist nämlich $Q(-n-1, (n+1)^2) = P(-n-1, n^2+2n+1) - P(-1,1)$ $= P(-n, n^2) - P(-1,1) = 0$.

Sei $Q(x,y) = \sum\limits_{i,k\in N} c_{ik}x^iy^k$, wobei die c_{ik} reell sind und die Summe endlich ist. Es ist somit $Q(t,t^2) = \sum\limits_{i,k\in N} c_{ik}t^{i+2k}$

$= \sum\limits_{p\in N} t^p(\sum\limits_{i+2k=p} c_{ik})$ ein Polynom in einer Veränderlichen, das nach dem oben Festgestellten unendlich viele verschiedene Nullstellen besitzt. Für ein Polynom endlichen Grades ist das nur möglich, wenn $Q \equiv 0$ ist, also $\sum\limits_{i+2k=p} c_{ik} = 0$ für alle (endlich vielen) p. Also ist $y \equiv x^2 \bmod (y - x^2)$, $c_{ik}x^iy^k \equiv c_{ik}x^{i+2k} \bmod (y-x^2)$,

$$\sum_{i+2k=p} c_{ik}x^iy^k \equiv \sum_{i+2k=p} c_{ik}x^{i+2k} \equiv \sum_{i+2k=p} c_{ik}x^p \equiv x^p(\sum_{i+2k=p} c_{ik})$$

$\equiv 0 \bmod (y - x^2)$ für alle p.

Also existiert ein Polynom $P_1(x,y)$ mit $Q(x,y) = (y-x^2)P_1(x,y)$, und wir erhalten $P(x,y) = P(-1,1) + (y-x^2)P_1(x,y)$. Infolge (1) ergibt sich $P(x-1, y-2x+1) = P(-1,1) + (y-x^2)P_1(x-1,y-2x+1)$ und für $x^2 \neq y$ $\quad P_1(x,y) = P_1(x-1, y-2x+1)$. (1')

Da ein Polynom eine stetige Funktion ist, gilt die eben hergeleitete Beziehung auch für $x^2 = y$. Wir haben also

$$P(x,y) = P(-1,1) + (y-x^2)P_1(x,y) = c_0 + (y-x^2)P_1(x,y)$$

und setzen wegen (1') die Konstruktion fort und erhalten

$$P_1(x,y) = c_1 + (y-x^2)\, P_2(x,y).$$

Der Grad von P_1 ist kleiner als der von P, falls $P_1(x,y) \not\equiv 0$.
Der Grad von P_2 ist kleiner als der von P_1, falls $P_2(x,y) \not\equiv 0$.
Da der Grad von P endlich ist, erhalten wir, wenn wir analog fortfahren, schließlich ein $P_{n+1}(x,y) \equiv 0$, d.h. $P_n(x,y) = c_n$. Damit ist $P(x,y) = c_0 + c_1(y-x^2) + \ldots + c_n(y - x^2)^n$. Setzen wir $\phi(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t$, so ist

$$P(x,y) = \phi(y-x^2),$$

womit der Beweis geführt ist.

Für die zweite, abgeänderte, Aufgabenstellung geben wir ein Gegenbeispiel (L. Gärtner). Wir betrachten das Polynom $P(x,y) = x^2+2x-y$. Es ist $P(x-1,y-2x-1) = (x-1)^2+2(x-1)-(y-2x-1)$

$= x^2+2x-y = P(x,y)$. $P(x,y)$ läßt sich aber nicht als Polynom $\phi(y-x^2)$ darstellen. Es müßte nämlich $\phi(0) = P(1,1)$ $= P(2,4)$ sein. Es ist aber $P(1,1) = 2 \neq P(2,4) = 4$.

<u>Aufgabe 4</u> (nach P. Dittrich)
Wir betrachten die Menge der p.q Werte $t = px + qy$ mit $0 \leqq x \leqq q-1$ und $0 \leqq y \leqq p-1$. Jeder dieser Werte läßt bei der Division durch p.q einen anderen Rest. Wir beweisen dies indirekt und nehmen an, daß es zwei Paare (x_1,y_1) und (x_2,y_2) mit o.B.d.A. $x_1 \neq x_2$ gibt, für die unter den geforderten Bedingungen $px_1 + qy_1 \equiv px_2 + qy_2 \mod(pq)$ ist. Hieraus folgt $p(x_1-x_2) \equiv q(y_1-y_2) \mod(pq)$ und wegen $(p,q) = 1$ $\quad q \mid (x_1-x_2)$. Dies ist aber wegen $0 \leqq x_1 \neq x_2 \leqq q-1$ unmöglich, womit die Annahme zum Widerspruch geführt ist. Wegen $0 \leqq t = px + qy \leqq 2pq$ erhalten wir: Zu jeder ganzen Zahl k ($0 \leqq k < pq$) gibt es genau ein Paar (x_k,y_k) mit $px_k + qy_k = k$ oder $px_k + qy_k = pq + k$. Weiter ist $px + qy \leqq p(q-1) + q(p-1) = pq + (pq - p - q)$. Also folgt: Für alle k mit $pq - p - q < k < pq$ gibt es genau ein Paar (x_k,y_k) mit $px_k + qy_k = k$. Die Zahlen $a = pq - p - q - 1 = (p-1)(q-1)$ und $b = pq - 1$ sind positive ganze Zahlen mit den geforderten Eigenschaften, und es ist $b - a = p + q - 2$. Wir zeigen nun, daß dieser konstruierte und auch angenommene Wert nicht überschritten wird, oder mit anderen Worten:

$p + q - 2$ ist das gesuchte Maximum.

Nehmen wir an, daß es positive ganze Zahlen c und d mit den geforderten Eigenschaften und $d - c > p + q - 2$ gibt und sei

a) $d < pq$

Unter den Zahlen zwischen c und d gibt es dann sicher eine der Form $nq - p$ mit $0 \leqq n \leqq p-1$ und n ganz. Für $d \geqq a$ ist dies $a - 1 = (p-1)q - p$ und für $d < a$ gibt es dann sicher noch ein derartiges n, da der Abstand $d - c > p + q - 2$ und somit erst recht größer als q ist. Da das Paar $x = q - 1$, $y = n$ nun aber die zu $nq - p$ kongruente Zahl $pq - p + nq \mod pq$ liefert, kann nach obigen Untersuchungen $nq - p$ nicht auftreten, womit wir einen Widerspruch erhalten haben.

b) $c \leqq pq \leqq d$

Hier ergibt sich ein Widerspruch, da pq nicht auftreten kann, denn die Zahl 0 ($x = y = 0$) tritt wegen $0 \equiv pq \mod pq$ bereits auf.

c) $pq < c$

Wegen $px + qy \leqq 2pq + 1 - (p+q)$ muß dann $d < 2pq - p = pq+(q-1)p$ sein. Dann gibt es zwischen c und d eine Zahl der Form $pq + np$ mit $0 \leqq n \leqq q-1$. Da aber bei $x = n$, $y = 0$ die Zahl np bereits auftritt, kann $pq + np$ wegen $pq + np \equiv np \mod pq$ nicht auftreten. Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

<u>Aufgabe 5</u>

1. Lösung

Seien d_1 und d_2 die Abstände der Punkte C bzw. D zur Geraden AB. Dann ist $F(AMC) = \frac{1}{2} d_1 \overline{AM}$, $F(DMB) = \frac{1}{2} d_2 \overline{MB}$ und $F(CMD) = \frac{1}{2} \overline{CD}\, y$, wobei y der Abstand des Punktes M zur Geraden $\overline{CD}$ ist. Betrachten wir einen festen Punkt M_o auf AB. Mit $x = \overline{M_oM}$ haben wir $\overline{AM} = \overline{M_oM} - \overline{M_oA} = x - \overline{M_oA}$ und $\overline{MB} = \overline{M_oB} - \overline{M_oM} = \overline{M_oB} - x$ (gerichtete Strecken). Da d_1, d_2 und $\overline{CD}$ konstant sind, folgt aus der Aufgabenstellung, daß y eine lineare Funktion von x ist. Wir betrachten nun zwei Ebenen Λ_1, Λ_2 die senkrecht aufeinanderstehen. C, D und M_o mögen Λ_1 aufspannen und die Gerade CD liege in beiden Ebenen, womit Λ_2 eindeutig beschrieben ist. Wenn AB nicht in derselben Ebene mit CD liegt, dann sei $M_1 \in \Lambda_2$ der Durchstoßpunkt und N_1 das Lot auf CD. M liegt dann auf M_oM_1 und die Projektion von M auf Λ_1 durchstoße in N. P sei der Fußpunkt des Lotes von P und N_o der des Lotes von M_o auf CD. M_o und M_1 liegen nicht auf CD. Dann ist nach Strahlensatz

$$\overline{MN} = \frac{x}{\overline{M_oM_1}}\ \overline{M_1N_1} \quad \text{und}$$

$$\overline{NP} = \frac{\overline{N_1N}}{\overline{N_1M_o}} \cdot \overline{M_oN_o} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_1M_o}} \cdot \overline{M_oN_o} = \frac{\overline{M_oM_1}-x}{\overline{M_oM_1}} \cdot \overline{M_oN_o}\ .$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein : $u = \frac{x}{\overline{M_oM_1}}$, $a = \overline{M_oN_o}$, $b = \overline{M_1N_1}$. Dann ist $y = \sqrt{a^2(1-u)^2 + b^2u^2}$. Da y eine lineare Funktion von x war und folglich sich als $cu + d$ darstellen läßt, muß $b^2u^2+a^2(1-u)^2$ ein vollständiges Quadrat sein. Die Diskriminante von $(b^2+a^2)u^2 - 2a^2u + a^2$ ist aber $a^4-a^2(a^2+b^2) = -a^2b^2 \neq 0$, weil $\overline{M_oN_o}$ und $\overline{M_1N_1}$ nicht verschwinden. (M_o, M_1 liegen ja nicht auf CD). Damit ist der lineare Zusammenhang unmöglich, d.h. A, B, C und D liegen in einer Ebene.

2. Lösung (Idee P. Dittrich):
Zunächst wird analog der ersten Lösung die Linearität zwischen $\overline{AM}$ und k_m gezeigt, wobei k_m die Maßzahl der Länge des Lotes von M auf CD ist. Betrachten wir einen festen Punkt M. Die Gerade CD ist dann Tangente an die Kugel um M mit Radius k_m. Dies gilt für alle Punkte M. Variieren wir sie, genauer: betrachten wir alle M auf AB, so erhalten wir einen Kegelstumpf, da $\overline{AM}$ und k_m linear abhängen. Es ist dann klar, daß die Gerade CD nur Mantellinie sein kann, womit alles bewiesen ist.

3. Lösung (nach R. Anders):
Es sei $\overline{AM} = \lambda\,\overline{AB}$ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Es ist für M = A bzw. M = B
F(DAB) + F(ACD) = F(ABC) + F(CBD) und wegen
F(ABC) = F(AMC) + F(BMC), woraus mit der Ausgangsforderung
F(BMC) + F(BCD) = F(CMD) + F(DMB) folgt. Man findet nun leicht

$$\begin{aligned} F(CMD) &= [F(ABD) - F(ABC)]\lambda + [F(BCD) + F(ABC) - F(ABD)] \\ &= L(\lambda) = a_1\lambda + a_2, \end{aligned}$$

wobei a_1 und a_2 konstant sind.
Nun werde $\overline{AM}$ in n Teile zerlegt. Das Tetraeder AMCD zerfällt in n Tetraeder. Es ist mit

$$x_i = \frac{\overline{AM_i}}{\overline{AB}},\ i = 1,2,\dots,n$$

$$F(M_iCD) = L(x_i),\ F(M_{i+1}CD) = L(x_{i+1}),\ |L(x_i) - L(x_{i+1})| \to 0$$

$$x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1} \text{ und } |x_{i+1} - x_i| \to 0$$

$$V(CDM_iM_{i+1}) \to \frac{1}{3}\Delta x_i\, L(\xi_i).$$

Damit gilt

$$V(CDAM) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} L(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{3}\int_0^\lambda L(x)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{2}\lambda^2 + a_2\lambda\right).$$

Hieraus ergibt sich $V(ABCD) = \frac{1}{3}(\frac{a_1}{2}\lambda + a_2)$, d.h. daß das Volumen des Tetraeders ABCD von der Lage des Punktes M abhängt. Dies ist ein Widerspruch. Mithin liegen die vier Punkte in der Ebene.

Aufgabe 6

Die Gleichung $x + y = k$ erfüllen genau $(k+1)$ Paare nicht negativer ganzer Zahlen x, y. Mithin hat die Gleichung $x + y = n - z$

$\sum_{i=0}^{n} (i+1) = \binom{n+2}{2}$ Lösungstripel (x, y, z), wobei x, y, z nicht negative ganze Zahlen sind. Unter diesen Tripeln gibt es genau $3(n-1)$ Tripel, die genau eine Null enthalten und genau drei Tripel, welche genau zwei Nullen enthalten. Also ist die Anzahl der Tripel, die keine Null enthalten, gleich $\binom{n+2}{2} - 3(n-1) - 3$. Diese Anzahl muß wegen $|w| = |-w|$ mit $2^3 = 8$ multipliziert werden, während die Anzahl der Tripel mit genau einer Null nur mit vier und die Anzahl der Tripel mit genau zwei Nullen mit 2 multipliziert werden muß. Die Gesamtzahl aller Lösungstripel ist mithin

$$A(n) = 8\left[\binom{n+2}{2} - 3(n-1) - 3\right] + 4\cdot 3(n-1) + 2\cdot 3 = 4n^2 + 2.$$

Man überprüft sofort $A(0) = 1$.

Aufgabe 7

Wir wählen 0 als Ursprung. Die Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_i}$ $(i = 1,2,3,4)$ werden mit $\mathfrak{r}_i$ bezeichnet. Dann folgt aus der Voraussetzung:

$\sum_{i=1}^{4} \mathfrak{r}_i = \mathfrak{o}$. Ferner ist $\sum_{i=1}^{4} (\overline{P_iP_{i+1}})^2 = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)^2 +$

$(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3)^2 + (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_4)^2 + (\mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_1)^2$

$= 2\sum \mathfrak{r}_i^2 - 2(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4 + \mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_1)$

$= 2\sum \mathfrak{r}_i^2 - 2(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)(\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4) = 2\sum \mathfrak{r}_i^2 + 2(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)^2 \geqq 2\sum \mathfrak{r}_i^2.$

Damit ist die linke Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{o}$, d.h. $\mathfrak{r}_1 = -\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{r}_4$, d.h. dann und nur dann, wenn $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist. Um die rechte Ungleichung nachzuweisen, genügt zu zeigen, daß $2(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)^2 \leqq 2\sum \mathfrak{r}_i^2$ ist. Wegen

$(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)^2 = (\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4)^2$ läßt sich die Ungleichung auch so

schreiben: $(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)^2 + (\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4)^2 \leqq 2\sum \mathfrak{r}_i^2$ oder

$2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_3 + 2\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4 \leqq \sum \mathfrak{r}_i^2$. Daraus ergibt sich

$-(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1)^2 - (\mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_2)^2 \leqq 0$. Diese Ungleichung ist aber sicherlich richtig und durch Rückschluß folgt die Behauptung. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_3$ und

$\kappa_2 = \kappa_4$ ist, also $P_1 = P_3$ und $P_2 = P_4$ ist, d.h. das Viereck entartet zur Strecke P_1P_2.

Aufgabe 8

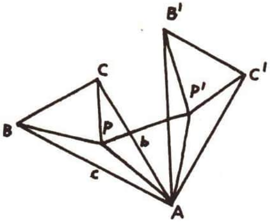
Die gegebene Bedingung ist äquivalent mit

$$(1+x)^n \equiv (1+x^n) \bmod 2. \qquad (1)$$

Sei $(1+x)^2 \equiv (1+x^2) \bmod 2$, dann ist $(1+x)^4 \equiv (1+x^2)^2 \equiv (1+x^4) \bmod 2$. Unter Benutzung der vollständigen Induktion folgt:
$(1+x)^{2^k} \equiv (1+x^{2^k}) \bmod 2$, d.h. (1) gilt, wenn n eine Zweierpotenz ist. Ist n keine Potenz von 2, dann ist $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots$, wobei wenigstens zwei der k_i voneinander verschieden sind. Dies seien k_1 und k_2. Dann ist
$(1+x)^n = (1+x)^{2^{k_1}}(1+x)^{2^{k_2}} \ldots \equiv (1+x^{2^{k_1}})(1+x^{2^{k_2}}) \ldots \bmod 2$, und die Bedingung (1) ist nicht erfüllt. Mithin sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ $(k = 1,\ldots,n-1)$ gerade, wenn n eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 9 (M. Marczinek)

Wir drehen das Dreieck ABC um den Punkt A um 60° und erhalten so das Dreieck AB'C'. P gehe dabei in P' über.



$\sphericalangle BAC = \alpha$

Wegen $\sphericalangle PAP' = 60^\circ$ und $\overline{PA} = \overline{P'A}$ ist $\Delta PAP'$ gleichseitig. Daher ist $\overline{PA} = \overline{PP'}$ und

$$x + y + z = \overline{BP} + \overline{PP'} + \overline{P'C'} \geqq \overline{BC'}. \qquad (1)$$

Wegen

$$(b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos(\alpha - 60^\circ)) \geqq 0$$

ist

$$b^2 + c^2 - 2bc\,(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) \geqq 0$$

und daher

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ) \geqq 2\sqrt{3}\, bc \sin\alpha = 4\sqrt{3}\, F \qquad (2)$$

Aus

$$\overline{BC'}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ)$$

folgt unter Beachtung von (1) und (2)

$$(x + y + z)^2 \geqq 4\sqrt{3}\, F,$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

Aufgabe 1o (J. Prestin)

Nach Voraussetzung sind die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks A'B'C'. Daher sind die Höhen des Dreiecks ABC gleichseitig die Mittelsenkrechten des Dreiecks A'B'C'. Folglich ist der Mittelpunkt M der Strecke HH' der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises des Dreiecks A'B'C'. Nun geht aber der Feuerbachsche Kreis durch die Seitenmitten, also durch A, B und C. Es ist also M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 11

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ seien die Eckpunkte eines einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen n-Ecks, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien die Zentriwinkel.

Bezeichnet F_n den Inhalt des regelmäßigen n-Ecks, so gilt bekanntlich für $n \geqq 3$

$$F_n \geqq F_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2 > \frac{\pi}{2} r^2,$$

d.h. F_n ist größer als der Inhalt des Halbkreises. Daher genügt es, nur solche n-Ecke zu betrachten, deren Zentriwinkel alle $\leqq \pi$ sind. Für den Inhalt F des n-Ecks gilt

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2 \sin\alpha_i \leqq \frac{r^2}{2} \cdot n \sin\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} = F_n,$$

da sin x für $0 \leqq x \leqq \pi$ konkav und somit die Jensensche Ungleichung gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$ ist, d.h., wenn das n-Eck regelmäßig ist.

Aufgabe 16

1.° Wir zeigen zunächst: Für die Zahl 341 = 31 . 11 gilt

$$2^{341} - 2 \equiv 0 \mod 341.$$

Es ist $2^{10} = 1024$ und $341 \cdot 3 = 1023$.

Daher gilt

$$2^{10} \equiv 1 \mod 341$$

$$2^{340} \equiv 1 \mod 341$$

$$2^{341} \equiv 2 \mod 341.$$

2.° Als nächstes zeigen wir: Aus $n \mid 2^n - 2$ folgt

$$2^n - 1 \mid 2^{2^n-1} - 2 .$$

Wegen $a-b \mid a^k - b^k$ (a,b,k ganzzahlig) gilt nämlich

$$2^n - 1 \mid 2^{2^n-2} - 1 \quad (a = 2^n,\ b = 1,\ k = \frac{2^n-2}{n}).$$

Damit teilt $2^n - 1$ erst recht das Doppelte.

3.° Jetzt zeigen wir noch: Ist n keine Primzahl, so auch nicht die Zahl $2^n - 1$.

Ist nämlich $n = p.q$ $(p > 1,\ q > 1)$, so ist sowohl 2^p-1 als auch 2^q-1 Teiler von $2^{pq} - 1$ (beachte: $a - b \mid a^k - b^k$).

Aus 1°, 2° und 3° ergibt sich: Für die Zahlen $n = 341$, $2^{341} - 1$, $2^{2^{341}-1}-1$, ... die nach 3° alle keine Primzahlen sind, gilt

$$n \mid 2^n - 2.$$

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 5

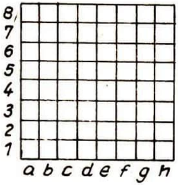
Aufgaben

Nr. 1

Man beweise: Sind a und b natürliche Zahlen, die teilerfremd sind und ist p eine ungerade Primzahl, die ein Teiler von $(a+b)$ und von $\left(\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{b}{p}\right] + 1\right)$ ist, so ist $a^p + b^p$ ohne Rest durch p^3 teilbar.

Nr. 2

Zwei Personen spielen folgendes Spiel: Auf einem Schachbrett (vgl. Skizze), auf dem nur ein König steht, ziehen die Spieler abwechselnd den König auf ein Feld, das zum jeweiligen Aufenthaltsfeld des Königs benachbart ist. Der König steht am Anfang im Feld a1. In jedem Zug darf der König nur nach oben, nach rechts oder diagonal nach rechts oben (vgl. Skizze) ziehen. Verloren hat derjenige Spieler, dessen Partner den König auf das Feld h8 rückte. Welcher Spieler hat die Möglichkeit, bei richtiger Zugwahl das Spiel zu gewinnen, und mit welcher Taktik muß dieser Spieler vorgehen?



Nr. 3

In einem Dreieck betrachten wir von jedem der Eckpunkte eine Ecktransversale. Jede dieser Ecktransversalen möge das gegebene Dreieck in jeweils zwei umfangsgleiche Teildreiecke zerlegen. Man zeige, daß sich die drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden.

Nr. 4

Es seien $n_1, n_2, \ldots, n_k$ natürliche Zahlen. Wir definieren

$$d_1 = 1 \text{ und } d_i = \frac{\text{g.g.T. } (n_1, n_2, \ldots, n_{i-1})}{\text{g.g.T. } (n_1, n_2, \ldots, n_i)} \quad \text{für } i \geqq 2.$$

Man zeige, daß die $d_1.d_2. \dots . d_k$ möglichen Summen $\sum_{i=1}^{k} a_i n_i$

$a_i \in \{1,2,\dots,d_i\}$ paarweise verschiedene modulo n_1 sind.

Nr. 5

Es sei P ein innerer Punkt eines Dreiecks ABC, und es bezeichnen $x;y;z$ bzw. $p;q;r$ die Abstände des Punkts P von den Eckpunkten A,B,C bzw. von den Seiten BC, CA, AB (jeweils dieser Reihenfolge).

Man beweise:

$$x + y + z \geqq 2(p + q + r) \; !$$

Wann tritt Gleichheit ein?

Nr. 6

Für eine im Intervall (a,b) zweimal differenzierbare Funktion $f(x)$ möge ein $c \in (a,b)$ existieren, so daß für alle $x \in (a,b)$

$$(f'(c))^2 - 2f(c)f''(x) < 0$$

ist. Man beweise, daß $f(x)$ für kein $x \in (a,b)$ verschwindet!

Nr. 7

Man bestimme die größte natürliche Zahl n, falls sie existiert, mit der Eigenschaft: Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, so daß je drei dieser Punkte ein rechtwinkliges Dreieck bilden!

Nr. 8

Es sei $\{a_n\}$, $n = 0,1,\dots,$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_o = 0$ und

$$a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} a_n^2 - 1 \quad , \quad n = 0,1,\dots, \tag{6}$$

gilt.

Man zeige, daß es dann eine positive Zahl q, $q < 1$, gibt, so daß für alle $n = 1,2,\dots$

$$| a_{n+1} - a_n | \leqq q \, | a_n - a_{n-1} | \tag{7}$$

gilt und gebe ein solches q explizit an.

Nr. 9

Es sei B eine Menge von k Folgen der Länge n über der Menge $\{-1,1\}$. Das Produkt zweier Folgen $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ und $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ sei als $(a_1b_1,a_2b_2,\dots,a_nb_n)$ erklärt. Man beweise, daß es eine Folge $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ über $\{-1,1\}$ derart gibt, daß die Menge B und die Menge der Folgen, die man erhält, wenn man jede Folge aus B mit $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ multipliziert, höchstens $k^2 \cdot 2^{-n}$ Folgen gemeinsam enthalten.

(IMO-Vorschlag VR Polen, 1977)

Nr. 1o

Es sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl und $x_1 = n$, $y_1 = 1$

$$x_{i+1} = \left[\frac{x_i + y_i}{2}\right], \quad y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_{i+1}}\right] \text{ für } i = 1,2,\dots$$

(wenn z eine reelle Zahl ist, so bezeichne $[z]$ die ganze Zahl mit $[z] \leqq z < [z] + 1$). Man beweise:

$$\min(x_1,x_2,\dots,x_n) = [\sqrt{n}]$$

(IMO-Vorschlag Niederlande, 1977)

Nr. 11

Es sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl und $p(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Man beweise, daß man Polynome f und g mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ derart finden kann, daß

$$p(x_1,x_2,\dots,x_n)f(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(x_1^2,x_2^2,\dots,x_n^2)$$

gilt.

(IMO-Vorschlag VR Ungarn, 1977, verallgemeinert)

Nr. 12

Es sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Wieviele ganzzahlige Lösungen (i,j,k,l) mit $1 \leqq i,j,k,l \leqq n$ hat das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}
1 &\leqq - j + k + l \leqq n \\
1 &\leqq i - k + l \leqq n \\
1 &\leqq i - j + l \leqq n \\
1 &\leqq i + j - k \leqq n \text{ ?}
\end{aligned}$$

(IMO-Vorschlag DDR, 1977)

Nr. 13

Man beweise, daß man eine eineindeutige Abbildung $f(x)$ von der Menge der reellen Zahlen auf sich derart finden kann, daß für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$3(f(x))^2 - 2(f(x))^3 = 2x^3 - 3x^2 + 1 \qquad (10)$$

erfüllt ist.

Nr. 14

Man beweise: Wenn m und n positive ganze Zahlen sind, so ist

$$\min\left(\sqrt[n]{m},\ \sqrt[m]{n}\right) \leqq \sqrt[3]{3}.$$

Nr. 15

Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $N > 0$, für die es natürliche Zahlen r, s und t mit

$$\frac{N}{2} = r^2, \quad \frac{N}{3} = s^3 \quad \text{und} \quad \frac{N}{5} = t^5$$

gibt.

Nr. 16

Man finde alle Paare natürlicher Zahlen (n,r) mit

$$1 + 2 + \dots + r = (r + 1) + (r + 2) + \dots + n \qquad (11).$$

Sonderaufgabe

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ gibt es eine n-ziffrige Zahl q, deren Ziffern sämtlich Null oder Eins sind, so daß q durch n teilbar ist.

Lösungen

Nr. 1

1. Sicher ist $(a,p) = 1$ und $(b,p) = 1$. Sonst würde aus $(a,p) > 1$ und $(a+b,p) = p$ folgen, daß $(b,p) > 1$ gilt, was aber $(a,b) = 1$ widerspräche.

2. Es sei $m = \left[\frac{a}{p}\right]$ und $n = \left[\frac{b}{p}\right]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bezeichne. Dann ist $a = mp + s$ und $b = np + t$ mit $0 < s,t < p$ und $s + t = p$.

Für $a^p + b^p$ gilt wegen

$$a^p = \sum_{i=o}^{p} \binom{p}{i} (mp)^{p-i} s^i$$

und

$$b^p = (np + p - s)^p = \sum_{i=o}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} ((n+1)p)^{p-i} s^i$$

$$a^p+b^p = p^3 \left(\sum_{i=o}^{p-3} \left(\binom{p}{i}(mp)^{p-i-3}m^3 s^i + (-1)^i\binom{p}{i}(n+1)p)^{p-i-3}(n+1)^3 s^i\right)\right)$$

$$+ \binom{p}{p-2}(mp)^2 s^{p-2} - \binom{p}{p-2}(n+1)p)^2 s^{p-2} + \binom{p}{p-1}(mp)s^{p-1} + \binom{p}{p-1}((n+1)p)s^{p-1}$$

$$+ \binom{p}{p}(mp)^o s^p - \binom{p}{p}((n+1)p)^o s^p.$$

Da der Faktor von p^3 eine ganze Zahl ist:

$$a^p+b^p \equiv p^3 \frac{p-1}{2} s^{p-2}(m^2-(n+1)^2)+p^2 s^{p-1}(m+n+1) \bmod p^3.$$

Da $p-1 \equiv 0 \bmod 2$ gilt, folgt

$$a^p+b^p \equiv p^2 s^{p-1}(m+n+1) \bmod p^3.$$

Aus $m+n+1 \equiv 0 \bmod p$ erhalten wir $a^p+b^p \equiv 0 \bmod p^3$.

Nr. 2

Der Spieler, der beginnt, kann stets gewinnen. Er beginnt auf einem Feld G und kann, wenn er wieder auf einem Feld G steht, stets auf ein Feld V ziehen. Steht der König auf einem Feld V, so muß ihn der Spieler auf ein Feld G setzen, wovon man sich

G	V	G	V	G	V	G	V
G	G	G	G	G	G	G	G
G	V	G	V	G	V	G	V
G	G	G	G	G	G	G	G
G	V	G	V	G	V	G	V
G	G	G	G	G	G	G	G
G	V	G	V	G	V	G	V
G	G	G	G	G	G	G	G

leicht überzeugen kann. Spielt der Spieler, dessen König auf einem Feld G steht, nicht optimal, d.h. zieht nicht auf ein Feld V, kann der Partner diese Strategie benutzen und gewinnen.

Nr. 3

Die Eckpunkte des Dreiecks seien A,B und C. Es bezeichnen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Längen der Seiten. Die 3 Ecktransversalen t_A, t_B bzw. t_C, die durch die Punkte A,B bzw. C verlaufen, mögen die Gegenseiten in A',B' bzw. C' schneiden.

Dann ist
$$\overline{AB} + \overline{BA'} = \overline{AC} + \overline{CA'} = s = \frac{a+b+c}{2}$$
und
$$\overline{BA'} = s - c,\ \overline{CA'} = s - b$$
und analog
$$\overline{AB'} = s - c,\ \overline{CB'} = s - a,$$
$$\overline{AC'} = s - b,\ \overline{BC'} = s - a.$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist $s - a,\ s - b,\ s - c > 0$ und A', B' und C' sind innere Punkte von BC, AC, AB.

Die Ecktransversalen t_A, t_B und t_C schneiden sich sicher paarweise. Es sei s_{AB} der Schnittpunkt von t_A und t_B. Zum Beweis reicht es nun aus, $\overline{AC''} = \frac{s-b}{c}\overline{AB}$ und damit $C' = C''$ nachzuweisen, wobei C" der Schnittpunkt der Geraden CS_{AB} mit der Seite AB ist. Wir bemerken noch, daß $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ linear unabhängige Vektoren sind.

Für S_{AB} gilt:
$$\overrightarrow{AS}_{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}_{AB}$$
$$\lambda\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BB'}$$
$$\lambda(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \mu(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'})$$
$$\left(\lambda - 1 + \frac{s-a}{b}\mu\right)\overrightarrow{AC} + \left(-\frac{s-b}{a}\lambda + 1 - \mu\right)\overrightarrow{BC} = 0,$$
$$\lambda - 1 + \frac{s-a}{b}\mu = 0,\quad -\frac{s-b}{a}\lambda + 1 - \mu = 0 \qquad \text{und damit}$$
$$\lambda = \frac{a}{s}.$$

Für $\overrightarrow{AC''}$ gilt: $\overrightarrow{AC''} = \nu \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \varepsilon(\overrightarrow{AS_{AB}} - \overrightarrow{AC})$,

$$(-1 + \varepsilon\frac{a}{s} + \varepsilon + \nu)\overrightarrow{AC} + (\varepsilon \frac{a}{s}\frac{s-b}{a} - \nu)\overrightarrow{BC} = 0,$$

$$-1 + \frac{s-a}{s} + \varepsilon = 0 \quad , \quad \varepsilon = \frac{s}{s-b}\nu$$

und

$$\nu = \frac{s-b}{c},$$

d.h. $\overrightarrow{AC''} = \frac{s-b}{c}\overrightarrow{AB}$ und damit $\overline{AC''} = \frac{s-b}{c}\overline{AB}$.

Nr. 4

Wir beweisen den Satz indirekt.
Wir nehmen an, daß für zwei Summen

$$\sum_{i=1}^{k} a_i n_i - \sum_{i=1}^{k} b_i n_i = n_1 u \quad (u \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

gilt. Es sei s die größte Zahl mit $a_s \neq b_s$ und es sei $n_s = c \cdot \text{g.g.T.}(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Dividieren wir (1) durch g.g.T. $(n_1, n_2, \ldots, n_{s-1})$ so erhalten wir, daß d_s die Zahl $(a_s - b_s)c$ teilt. Wegen g.g.T.$(d_s, c) = 1$ folgt $d_s | (a_s - b_s)$, was unserer Annahme widerspricht, da $1 \leq |a_s - b_s| < d_s$ gilt.

Nr. 5

Es seien M bzw. M die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten CA bzw. AB.
Dann liegen A, M, P, N auf einem Kreis und es gilt:

$$\overline{MN} = x \sin\alpha \quad . \tag{2}$$

Ferner haben wir im Dreieck MNP:

$$\overline{MN} = \sqrt{q^2 + r^2 + 2qr\cos\alpha} \tag{3}$$

Wegen $\cos\alpha = \cos(180^\circ - \beta - \gamma) = -\cos(\beta + \gamma) =$
$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$ folgt aus (3)

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= q^2\sin^2\gamma + q^2\cos^2\gamma + r^2\sin^2\beta + r^2\cos^2\beta \\ &\quad - 2qr\cos\beta\cos\gamma + 2qr\sin\beta\sin\gamma \\ &= (q\sin\gamma + r\sin\beta)^2 + (q\cos\gamma - r\cos\beta)^2 \\ &\geq (q\sin\gamma + r\sin\beta)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus (2)und (4) ergibt sich:

$$x \geqq q\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,. \qquad (5)$$

Analoge Abschätzungen erhalten wir für y und z und zusammen

$$x + y + z \geqq p\,\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) + q\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) +$$

$$+ r\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) \geqq 2(p + q + r).$$

Nr. 6

Wir beweisen die Behauptung indirekt.

Ist $y \in (a,b)$ eine Nullstelle von $f(x)$, und $c \in (a,b)$ erfüllt die gegebenen Bedingungen, so ist nach der Taylor-Formel für ein gewisses $\bar{x} \in (a,b)$:

$$0 = f(y) = f(c) + \frac{y-c}{1!}\,f'(c) + \frac{(y-c)^2}{2!}\,f''(\bar{x}).$$

Diese quadratische Gleichung in $\alpha = y - c$ ist für diese c und $\bar{x}$ lösbar.

Wegen $(f'(c))^2 - 2f(c)f''(\bar{x}) < 0$ ist $f''(x) \neq 0$, und es folgt

$$\alpha_{1;2} = -\frac{f'(c)}{f''(\bar{x})} \pm \sqrt{\frac{(f'(c))^2 - 2f(c)f(\bar{x})}{f''(\bar{x})^2}}\;,$$

also $(f'(c))^2 - 2f(c)f(\bar{x}) \geqq 0$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Nr. 7

Für n = 4 bilden die Eckpunkte eines Rechtecks eine geforderte Anordnung. Wir weisen nach, daß n = 4 bereits die größte Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Das größte n sei größer als 4, bzw. es existiert kein größtes n. In beiden Fällen wählen wir 5 beliebige dieser Punkte aus. Die konvexe Hülle dieser Punkte sei K. Für K gibt es 3 mögliche Formen.

1. K bildet ein 5-Eck.
   Die Innenwinkelsumme beträgt 540°, d.h. mindestens ein Innenwinkel ist stumpf, also gibt es ein nicht rechtwinkliges Dreieck.

2. K bildet ein Dreieck.

Es sei P einer der beiden Punkte innerhalb von K. P liegt sicher auf keiner Dreiecksseite (sonst läßt sich aus diesen fünf Punkten ein nicht rechtwinkliges Dreieck bilden).
Je zwei Eckpunkte von K bilden mit P Dreiecke mit den Innenwinkeln α_1, α_2, α_3 bei P. Wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ$, ist mindestens ein Winkel stumpf, d.h. es entsteht ein nicht rechtwinkliges Dreieck.

3. K bildet ein Viereck

P liege also im Innern von K. Eine Diagonale von K zerlege K in zwei Dreiecke, d.h. P liegt in einem, von 3 Punkten von K gebildeten, Dreieck. Wegen 2. ist das aber unmöglich.

Nr. 8

Zunächst geben wir eine obere und untere Abschätzung für a_k an. Es ist

$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = -\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{4} > -0.89,$$

$$-0.89 < a_3 < -0.84.$$

Aus $\quad -0.89 < a_k < -0.84$ folgt

$$a_{k+1}^3 = \tfrac{1}{2}a_k^2 - 1 < -0.60395 < -0.592704 = (-0.84)^3 \quad \text{und}$$

$$a_{k+1}^3 = \tfrac{1}{2}a_k^2 - 1 > -0.6472 > -0.704969 = (-0.89)^3, \quad \text{also auch}$$

$$-0.89 < a_{k+1} < -0.84.$$

Damit folgt per Induktion

$$a_k > -0{,}89 \quad \text{für } k \geqq 2 \tag{8}$$

und $\quad a_k < -0.84 \quad$ für $k \geqq 3$.

Aus $a_{n+1}^3 - a_n^3 = \frac{1}{2}(a_n^2 - a_{n-1}^2)$ folgt $\dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{|a_n-a_{n-1}|} = \dfrac{|a_n+a_{n-1}|}{|2a_{n+1}^2+2a_{n+1}a_n+2a_n^2|}$

und für $f(n) = \dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{|a_n-a_{n-1}|}$ erhalten wir

$$f(1) = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{4} < 0.4$$

$$f(2) = \frac{\sqrt[3]{8 - 2\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4}}{2 - \sqrt[3]{4}} \geqq 0.422.$$

Für $k \geqq 3$ gilt wegen (8) $f(k) < \frac{2 \cdot 0{,}89}{6.(0{,}84)^2} < 0.421$.

Die Folge $f(i)$ $(i \geqq 1)$ nimmt für $i = 2$ den größten Wert an, d.h. alle reellen Zahlen q mit $1 > q \geqq f(2)$ und nur diese erfüllen (7).

Nr. 9

Es sei A die Menge aller 2^n Folgen der Länge n über der Menge $\{-1,1\}$. Für $B \subseteqq A$ bezeichne $|B|$ die Anzahl der Elemente (Folgen) von B. Mit $\underline{a}B$ bezeichnen wir die Menge, die alle mit $\underline{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ multiplizierten Folgen von B enthält.

Wir führen den Beweis nun indirekt und nehmen dazu an, daß für alle $\underline{a} \in A$ gilt:

$$|B \cap \underline{a}B| > k^2 2^{-n} = |B|^2 2^{-n}.$$

Dann ist

$$\sum_{\underline{a} \in A} |B \cap \underline{a}B| > |B|^2 .$$

Bezeichne $n(\underline{b})$ die Anzahl der $\underline{a} \in A$, für die $\underline{b} \in B$ zu $\underline{a}B$ gehört, d.h., daß $\underline{b} = \underline{a}\,\underline{b}'$ für ein gewisses $\underline{b}' \in B$ ist, was mit $\underline{a} = \underline{b}\,\underline{b}'$ äquivalent ist. Es ist offenbar, daß $n(\underline{b}) \leqq |B|$ und somit

$$\sum_{\underline{b} \in B} n(\underline{b}) \leqq |B|^2$$

ist. Da jedoch offenbar

$$\sum_{\underline{a} \in A} |B \cap \underline{a}B| = \sum_{\underline{b} \in B} n(\underline{b}) \leq |B|^2$$

gilt, haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme erhalten und damit die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Nr. 10

Da $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n}$ ist, gilt $x_2 \geqq [\sqrt{n}]$. Wenn es für ein gewisses $i \geqq 2$ eine positive ganze Zahl m mit $x_i = [\sqrt{n}] + m$ gibt, so behaupten wir, daß

$$[\sqrt{n}] \leqq x_{i+1} < x_i$$

gilt.

Beweis dieser Behauptung: Wegen $\frac{n}{x_i} = \frac{n}{[\sqrt{n}]+m} < \sqrt{n}$ gilt: $y_i = \left[\frac{n}{x_i}\right] \leq [\sqrt{n}]$ und folglich $x_{i+1} < x_i$. Weiterhin gilt:

$$\sqrt{n} - \frac{n}{x_i} = \frac{\sqrt{n}\,([\sqrt{n}]+m) - n}{[\sqrt{n}]+m} \leqq \frac{m\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]+m} < m,$$

woraus $[\sqrt{n}] - \left[\frac{n}{x_i}\right] < \sqrt{n} - \frac{n}{x_i} + 1 < m + 1$ folgt. Damit ist $[\sqrt{n}] - y_i \leqq m$. Da $x_{i+1} = \left[\frac{x_i + y_i}{2}\right]$ ist, erhalten wir $[\sqrt{n}] \leqq x_{i+1}$, womit diese Teilbehauptung bewiesen ist. - Damit haben wir erhalten, daß die Folge $x_1, x_2, \ldots$ so lange streng monoton fallend ist, bis zum erstenmal ein x_i den Wert $[\sqrt{n}]$ annimmt. Da alle Elemente der Folge ganze Zahlen sind, wird der Wert $[\sqrt{n}]$ nach höchstens $n - [\sqrt{n}] < n$ Schritten angenommen. Folglich gibt es ein k mit $2 \leqq k \leqq n$, $x_k = [\sqrt{n}]$ und für $1 \leqq i < k$ gilt $x_i > [\sqrt{n}]$. Dann ist $y_k \geqq [\sqrt{n}]$ und somit ist auch $x_{k+1} \geqq [\sqrt{n}]$. Damit ist für alle $j = 1,2,\ldots$ $x_j \geqq [\sqrt{n}]$; womit der Beweis der Behauptung der Aufgabe vollständig erbracht ist.

Nr. 11

Wir konstruieren eine Folge $f_0, f_1, \ldots, f_n$ von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ derart, daß für alle $i = 0,1,\ldots,n$ im Polynom pf_i höchstens noch $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ in ungeraden Potenzen auftreten. Daß $p\,f_i$ stets nur ganzzahlige Koeffizienten enthält, ist ebenso klar wie die Tatsache, daß $p\,f_n = g(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ ist, wobei $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Polynom ist, das nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt. Wenn wir also eine solche Folge konstruieren können und $f_n = f$ setzen, ist die Aufgabe gelöst.

Wir geben nun eine rekursive Konstruktionsvorschrift der Folge der f_i an.

1. Wir setzen $f_0 \equiv 1$.
   $p\,f_0$ ist sicher ein Polynom, in dem höchstens noch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in ungeraden Potenzen auftreten.
2. Es sei $0 \leqq i < n$ und f_i sei bereits mit den oben beschriebenen Eigenschaften konstruiert. Dann können wir $p\,f_i$ wie folgt darstellen:

   $$p\,f_i = a_i + x_{i+1}\,b_i.$$

Dabei sind a_i und b_i Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die $x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}$ nur in geraden Potenzen enthalten. Diese Darstellung ist eindeutig. Es sind nun 2 Fälle möglich.

Fall 1. $b_i \equiv 0$. D.h., daß $p\,f_i$ die Variable x_{i+1} nur in geraden Potenzen enthält. Wir können offenbar $f_{i+1} = f_i$ setzen.

Fall 2. $b_i \not\equiv 0$. Wir setzen $f_{i+1} = f_i(a_i - x_{i+1}b_i)$.
Jetzt gilt:

$$p\,f_{i+1} = p\,f_i(a_i - x_{i+1}b_i) = (a_i + x_{i+1}b_i)(a_i - x_{i+1}b_i) =$$
$$= a_i^2 - x_{i+1}^2\, b_i^2 .$$

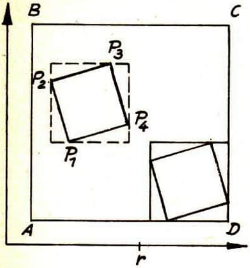
Offenbar ist f_{i+1} ein Polynom in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $p\,f_{i+1}$ enthält höchstens noch $x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_n$ in Potenzen ungerader Ordnung.
Das so ermittelte Polynom f_n erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe, womit nach den obigen Bemerkungen der Beweis geführt ist.

Bemerkung: Bei der Konstruktion von f_n kann es vorkommen, daß f_n gar nicht von allen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wesentlich abhängt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn bereits p nicht von allen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wesentlich abhängt oder wenn p ein Polynom ist, das alle Vorzeichen nur in gerader Potenz enthält. Im letzteren Falle ist nach Konstruktion $f_n \equiv 1$. Um das zu vermeiden, kann man z.B. noch $f = f_n\, x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2$ setzen. Dieses f erfüllt offenbar ebenfalls alle Bedingungen der Aufgabe.

Nr. 12
Es gilt

$$\sum_{r=1}^{n-1} r(n-r) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1), \qquad (9)$$

was für $n \geqq 2$ durch vollständige Induktion leicht zu bestätigen ist.
Für $i = k$ und $j = l$ vereinfacht sich das System zu $1 \leqq l$, $k \leqq n$ und hat n^2 Lösungen (k,l,k,l). Hier ist auch der Fall $n = 1$ enthalten.
Für $n \geqq 2$ und $i \neq k$ oder $j \neq l$ erweisen sich in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $P_1(i,j)$, $P_2(k,l)$,



$P_3(k + (l-j), l + (i-k))$, $P_4(i + (l-j), j + (i-k))$ als Eckpunkte eines Quadrates, das sich innerhalb eines Quadrates mit den Eckpunkten A(1,1), B(1,n), C(nn,), D(n,1) befinden muß. Die Anzahl der Quadrate mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten, deren Seiten parallel zu denen des Quadrates ABCD liegen, ist $\sum_{r=1}^{n-1} r^2$, während die Anzahl der einem solchen Quadrat einbeschriebenen Quadrate mit ganzzahligen Eckpunktkkoordinaten (n-r) ist. Wegen (9) ist somit die Anzahl aller Quadrate mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten innerhalb ABCD:

$$q = \sum_{r=1}^{n-1} r^2(n-r) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} (r^2(n-r) + r(n-r)^2) =$$

$$= \frac{1}{2} n \sum_{r=1}^{n-1} r(n-r) = \frac{1}{12} (n-1)n^2(n+1).$$

Da die Koordinaten der P_m (m = 1,2,3,4) bei der zyklischen Vertauschung $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_1$ invariant bleiben, ist die Anzahl der Lösungen

$$4q + n^2 = \frac{1}{3} n^2(n^2-1) + n^2 = \frac{1}{3} n^2(n^2 + 2).$$

Nr. 13

Wir setzen y = f(x). Dann ist (10) mit

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

und diese Gleichung mit

$$(x + y - 1)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y - 1) = 0$$

äquivalent.

Da f(x) = - x + 1 eine eineindeutige Abbildung von der Menge der reellen Zahlen auf sich ist und dieses f(x) der Beziehung (10) genügt, ist der Beweis erbracht.

Nr. 14

Wir betrachten zuerst den Fall $m = n$. Hier haben wir für alle positiven ganzen Zahlen n nachzuweisen, daß stets $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ ist, was mit $3^n \geqq n^3$ äquivalent ist. Diese Ungleichung soll induktiv bewiesen werden.

Für $n = 1,2,3$ stimmt sie offenbar. Sei also $n \geqq 3$ und $3^n \geqq n^3$. Dann ist $3^{n+1} \geqq 3n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2 - 3)n > (n+1)^3$, womit die Behauptung der Aufgabe für $m = n$ bewiesen ist. -

Nun sei $n \neq m$. O.B.d.A. können wir $1 \leqq n < m$ voraussetzen. Dann ist $\sqrt[m]{n} \leqq \sqrt[n]{n} \leqq \sqrt[3]{3}$, womit die Allgemeingültigkeit der Behauptung nachgewiesen ist.

Nr. 15

Offenbar muß die Primzahlzerlegung von N die Zahlen 2, 3 und 5 als Primfaktoren enthalten, und das kleinste N mit den oben genannten Eigenschaften enthält sicher nur 2, 3 und 5 als Primteiler. Es ist also $N = 2^p 3^q 5^v$, wobei N genau dann allen Bedingungen genügt, wenn p,q und v die kleinsten natürlichen Zahlen sind, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{lll} p \equiv 1 \mod 2, & p \equiv 0 \mod 3, & p \equiv 0 \mod 5 \\ q \equiv 0 \mod 2, & q \equiv 1 \mod 3, & q \equiv 0 \mod 5 \\ v \equiv 0 \mod 2, & v \equiv 0 \mod 3, & v \equiv 1 \mod 5 . \end{array}$$

Dann gilt, wie man sich leicht überzeugt:

$$p = 15, \quad q = 10, \quad v = 6.$$

Das kleinste N mit den genannten Eigenschaften ist also

$$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 = 30\,233\,088\,000\,000.$$

Anmerkung: Wenn man die Minimalitätseigenschaft für N fallen läßt, der Beweis dieser Verallgemeinerung sei dem Leser überlassen, so muß für $N > 0$ gelten:

$$N = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot n^{30} ,$$

wobei n eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Nr. 16

(nach: Steffen Thiel, 1603 Schulzendorf):

(11) ist mit $\binom{n+1}{2} = 2 \binom{r+1}{2}$ und dies mit

$$(2n+1)^2 - 2(2r+1)^2 = -1 \qquad (12)$$

äquivalent. Wir substituieren in (12) $x = 2n+1$ und $y = 2r+1$ und erhalten somit

$$x^2 - 2y^2 = -1 \,. \qquad (13)$$

Da (13) in natürlichen Zahlen x,y nur für ungerade x und y Lösungen hat, entspricht nach unserer Substitution jeder Lösung von (12) genau eine Lösung von (13) und umgekehrt.
Nun seien x_s und y_s die eindeutig bestimmten natürlichen Zahlen mit

$$x_s + y_s\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2s+1} \quad (s = 0,1,\ldots).$$

Dann ist $x_s - y_s\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^{2s+1}$ und

$$\begin{aligned} x_s^2 - 2y_s^2 &= (x_s + y_s\sqrt{2})(x_s - y_s\sqrt{2}) = \\ &= (1+\sqrt{2})^{2s+1}(1-\sqrt{2})^{2s+1} = \\ &= \left[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right]^{2s+1} = (-1)^{2s+1} = -1. \end{aligned}$$

Diese (x_s,y_s) sind also Lösungen von (13). Wir zeigen nun, daß diese (x_s,y_s) alle Lösungen von (13) sind.

Wenn (x,y) und (x',y') zwei verschiedene Lösungen von (13) in natürlichen Zahlen sind, so gilt offenbar $x+\sqrt{2}y \neq x'+\sqrt{2}\,y'$. Wir können folglich die Lösungen von (13) ordnen und sagen, daß die Lösung (x,y) kleiner als die Lösung (x', y') ist, wenn $x+\sqrt{2}y < x'+\sqrt{2}\,y'$ gilt. Offenbar gilt für die bereits gefundenen Lösungen von (13), daß (x_i,y_i) genau dann kleiner als (x_j,y_j) ist, wenn $i < j$ ist. Weiterhin überzeugt man sich leicht davon, daß $(x_o,y_o) = (1,1)$ die kleinste Lösung von (13) in natürlichen Zahlen ist. Wir nehmen nun also an, daß die oben bestimmten (x_s,y_s) $(s = 0,1,\ldots)$ noch nicht alle Lösungen von (13) sind. Dann gibt es eine weitere Lösung (x',y') von (13) und eine natürliche Zahl t mit

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^{2t+1} &= x_t + \sqrt{2}\,y_t < x' + \sqrt{2}\,y' < x_{t+1} + \sqrt{2}\,y_{t+1} = \\ &= (1+\sqrt{2})^{2t+3} = (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2t+1}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist mit

$$1 < (x'+\sqrt{2}\,y')(\sqrt{2}-1)^{2t+1} < 3+2\sqrt{2} \qquad (14)$$

äquivalent. Wir setzen

$$(x' + \sqrt{2}\,y')(\sqrt{2} - 1)^{2t+1} = u' + \sqrt{2}\,v', \tag{15}$$

wobei u' und v' als ganze Zahlen eindeutig bestimmt sind. Weiterhin gilt

$$(x' - \sqrt{2}\,y')(-\sqrt{2} - 1)^{2t+1} = u' - \sqrt{2}\,v'. \tag{16}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} u'^2 - 2v'^2 &= (u' + \sqrt{2}\,v')(u' - \sqrt{2}\,v') = \\ &= (x' + \sqrt{2}\,y')(x' - \sqrt{2}\,y')\left[(\sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2} - 1)\right]^{2t+1} = \\ &= (x'^2 - 2y'^2)(-1)^{2t+1} = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist (u',v') ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = 1. \tag{17}$$

Wir zeigen nun, daß $u'\,v' \geqq 0$ ist. Dies wird indirekt geschehen. Wir nehmen also an, daß $u'\,v' < 0$ gilt. Dann folgt aus (14) und (15), daß

$$|u' - \sqrt{2}\,v'| > |u' + \sqrt{2}\,v'| > 1$$

gilt, woraus

$$|(u' - \sqrt{2}\,v')(u' + \sqrt{2}\,v')| = |u'^2 - 2v'^2| > 1$$

folgt, was aber ein Widerspruch dazu ist, daß (u',v') Lösung von (17) ist.
Aus (14) und (15) folgt nun sogar, daß u' und v' natürliche Zahlen sind. Wir bestimmen nun alle Lösungen (u,v) von (17) in natürlichen Zahlen mit

$$u + \sqrt{2}\,v < 3 + 2\sqrt{2} .$$

Offenbar muß u ungerade und v gerade sein.
Wenn $u = 1$ ist, so ist (1,0) die einzige Lösung.
Wenn $u = 3$ ist, so ist (3,2) die einzige Lösung.
Wenn $u > 3$ ist, muß $v > 2$ sein.
Hieraus folgt, daß es keine Lösung (u',v') von (17) in natürlichen Zahlen mit

$$1 < u' + \sqrt{2}\,v' < 3 + 2\sqrt{2}$$

gibt. Somit ist auch die Existenz der Lösung (x',y') widerlegt. Folglich sind die oben angegebenen (x_s, y_s) für $s = 0,1,\ldots$ die einzigen Lösungen von (13) in natürlichen Zahlen. Damit gilt:
(n,r) ist genau dann Lösung von (11), wenn

$$(n,r) \in \left\{ \left(\frac{x_s - 1}{2}, \frac{y_s - 1}{2}\right) \;\middle|\; s = 0,1,\ldots \right\}$$

ist.

Wegen

$$x_s + \sqrt{2}\, y_s = (1 + \sqrt{2})^{2s+1} = \sum_{t=0}^{2s+1} \binom{2s+1}{t} (\sqrt{2}\,)^t$$

ist

$$x_s = \sum_{t=0}^{s} \binom{2s+1}{2t} 2^t \quad \text{und} \quad y_s = \sum_{t=0}^{s} \binom{2s+1}{2t+1} 2^t ,$$

woraus

$$\frac{x_s - 1}{2} = \sum_{t=1}^{s} \binom{2s+1}{t} 2^{t-1}$$

und

$$\frac{y_s - 1}{2} = s + \sum_{t=1}^{s} \binom{2s+1}{2t+1} 2^{t-1}$$

folgt. Dabei wird wie üblich die leere Summe, die für $s = 0$ auftritt, mit 0 erklärt. Somit gilt:

Genau dann ist (n,r) Lösung von (11), wenn es eine natürliche Zahl s mit

$$(n,r) = \left(\sum_{t=1}^{s} \binom{2s+1}{t} 2^{t-1}, \; s + \sum_{t=1}^{s} \binom{2s+1}{t} 2^{t-1} \right).$$

gibt.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 6

Autorenkollektiv: Dr. W. Harnau
H.-D. Gronau
Dr. sc. M. Krüppel
Dr. W. Moldenhauer

Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. hab. G. Burosch

Adresse der Autoren: Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 25 Rostock, DDR

Die Lösungen zur Sonderaufgabe bitten wir an die obige Adresse zu senden. Wir korrigieren die Aufgaben, die uns im Verlauf von zwei Monaten nach dem Erscheinungstermin zugehen. Eine Lösung der Sonderaufgabe wird in einem späteren Heft veröffentlicht.

1. Auflage
Ausgabe 1978
Lizenz Nr. 203/1000/78 (E)
LSV 0600
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
Verlagstitelnummer 30 07 40-1

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien 2n verschiedene Punkte $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$, $n > 1$, des Raumes. V sei die Menge aller Verbindungsstrecken $A_iA_j (i \neq j)$. Man zeige: Ist M eine Teilmenge von V mit mindestens $n^2 + 1$ Elementen, dann gibt es mindestens drei Punkte A_r, A_s, A_t $(r \neq s \neq t \neq r)$, so daß A_rA_s, A_rA_t, A_sA_t Elemente von M sind. Kann man $n^2 + 1$ durch eine kleinere Zahl ersetzen? Wenn ja, durch welche?

(4. Österreichische Mathematikolympiade 1973)

Aufgabe 2

Gibt es eine unendliche Folge $\{ a_1, a_2, \ldots \}$ positiver reeller Zahlen, für die

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{k}{n} a_n - 1$$

mit einem $k < 1$ gilt?

(4. Österreichische Mathematikolympiade 1973)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Paare nichtnegativer ganzer Zahlen, die der Gleichung

$$3^{2x-1} + 3^x + 1 = 7^y$$

genügen.

(Elemente der Mathematik, Bd. 32, 6(1977), Aufgabe 797)

Aufgabe 4

Es sei $P = \log_3 4 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{999} 1000$. Man zeige

$$\sqrt{6} < P < \sqrt{10} \quad .$$

(L. Gärtner)

Aufgabe 5

Man zeichne die gleichseitigen Dreiecke A_1B_1A', B_1C_1B' und A_1C_1C' nach außen zu dem Dreieck $A_1B_1C_1$. Die Halbierungspunkte der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ bilden ein Dreieck $A_2B_2C_2$. Durch Wiederholung dieses Prozesses erhalten wir eine Folge von Dreiecken $A_nB_nC_n$. Konvergiert diese Folge und wenn ja, wogegen?

(ungelöstes Problem aus Közepiskolai Matematikai Lapok, Bd. 50, Heft 3(1975))

Aufgabe 6

Es sei eine Kugel K mit dem Mittelpunkt S und dem Halbmesser r gegeben. Man bestimme die Menge der Eckpunkte A aller Parallelogramme ABCD, für deren Diagonalen $AC \leqq BD$ gilt, wobei die Diagonale BD in K enthalten ist.

(Vorschlag ČSSR, XIV. IMO)

Aufgabe 7

Es sei f(x) eine im Intervall $[0,1]$ definierte stetige, konkave und reelle Funktion. Weiter gelte $f(x) \geqq 0$ und $\int_0^1 f(x) = 1$. Welche Werte kann $\int_0^1 f^2(x)dx$ annehmen?

Aufgabe 8

Man zeige, daß es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, derart, daß 5^n in der Dezimalschreibweise 1976 aufeinanderfolgende Nullen enthält.

Aufgabe 9

a) Es ist jeweils die größte positive reelle Zahl p (falls eine solche existiert) zu ermitteln, so daß die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \qquad (4)$$

für alle reellen Zahlen x_i $(i = 1,2,\dots,n)$ erfüllt ist, und zwar in den Fällen

α) $n = 2$

β) $n = 5$.

b) Es ist die größte positive reelle Zahl p (falls eine solche existiert) zu ermitteln, so daß die Ungleichung (4) für alle reellen Zahlen x_1 und alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 2$ erfüllt ist.

(Vorschlag DDR, XVIII. IMO)

Aufgabe 1o

Sei $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4})$. Man beweise, daß es zu vorgegebenen natürlichen Zahlen $i \geqq 2$ und $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl j gibt, so daß

$$f(i)^n = f(j)$$

ist.

Aufgabe 11

Man finde alle (reellen) Lösungen des Systems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl}
3x_1 & - x_2 & - x_3 & & - x_5 & & & & = 0 & (4) \\
-x_1 & + 3x_2 & & - x_4 & & - x_6 & & & = 0 & (5) \\
-x_1 & & + 3x_3 & - x_4 & & & - x_7 & & = 0 & (6) \\
& - x_2 & - x_3 & + 3x_4 & & & & - x_8 & = 0 & (7) \\
-x_1 & & & & + 3x_5 & - x_6 & - x_7 & & = 0 & (8) \\
& - x_2 & & & - x_5 & + 3x_6 & & - x_8 & = 0 & (9) \\
& & - x_3 & & - x_5 & & + 3x_7 & - x_8 & = 0 & (10) \\
& & & - x_4 & & - x_6 & - x_7 & + 3x_8 & = 0 & (11)
\end{array}$$

(Vorschlag ČSSR, XVIII. IMO)

Aufgabe 12

Es sei M eine endliche Menge. A_i, B_i, C_i $(1 \leqq i \leqq n)$ seien Zerlegungen von M, d.h. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} C_i = M$ und

$A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = C_i \cap C_j = \emptyset$ für $1 \leqq i < j \leqq n$.

Für alle $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ gelte ($|X|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von X.)

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geqq n.$$

Man beweise, daß M mindestens $\frac{n^3}{3}$ Elemente enthält. Außerdem zeige man, daß diese Abschätzung für die Elementezahl von M für durch 3 teilbare Zahlen n nicht verbessert werden kann.

(Amer. Math. Monthly 84, 1977)

Aufgabe 13

In einer Kugel vom Radius 1 liegen 65 Punkte. Man zeige, daß es mindestens zwei Punkte unter diesen gibt, die einen Abstand kleiner als 2/3 haben.

Aufgabe 14

Man zeige, daß die einzige Lösung in positiven ganzen Zahlen der Gleichung

$$x^y - y^x = x + y$$

$x = 2$, $y = 5$ ist.

Aufgabe 15

Es sei $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so daß $P(x) > 0$ für $x > 0$. Man zeige, daß es Polynome Q und R mit nichtnegativen Koeffizienten gibt, so daß $P(x) = \frac{Q(x)}{R(x)}$ für $x > 0$.

(Vorschlag Schweden, XVIII. IMO)

Aufgabe 16

Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge S. Um jeden Punkt A_i sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{S}{2}$ gelegt. Man gehe (ohne Beweis) davon aus, daß es zwei Kugeln K_1' und K_2' mit dem Radius $\frac{S}{2}$ gibt, die alle fünf Kugeln K_i berühren. Man untersuche, ob K_1' und K_2' einander schneiden, berühren oder keinen Punkt gemeinsam haben.

(Vorschlag DDR, XVIII. IMO)

Lösungen

Aufgabe 1

F. Bergner gibt folgende Verschärfung. Die maximale Anzahl von Verbindungen, ohne daß ein geschlossenes Dreieck entsteht (wobei wir Entartungen zulassen wollen), tritt dann auf, wenn von jedem der 2n Punkte genau n Verbindungsstrecken ausgehen. Dann existieren genau n^2 Verbindungsstrecken. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gibt einen Punkt A_u, von dem mehr als n Verbindungsstrecken ausgehen, z. B. n+k ($k \in N$, $k > 0$). Zwischen diesen n+k mit A_u verbundenen Punkten existiert dann keine Verbindungsstrecke, da sonst ein Dreieck entsteht. A_u ist außerdem laut Annahme mit keinem der restlichen n-k-1 Punkte verbunden. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: 1. Keine zwei der n-k-1 Punkte sind miteinander verbunden. Dann kann man jeden der n-k-1 Punkte mit jedem der n+k Punkte verbinden, ohne daß dabei ein Dreieck entsteht. Dies sind (n-k-1) (n+k) Verbindungsstrecken. 2. Unter den n-k-1 Punkten gibt es bereits m Verbindungsstrecken, ohne daß ein Dreieck entsteht. Dann entfallen aber von den Verbindungsstrecken zwischen den n-k-1 Punkten und den n+k Punkten mindestens $\frac{1}{2}m(n+k)$. Wegen $n+k > 2$ sind dies nicht weniger als m. Damit entstehen im 1. Fall mehr Verbindungsstrecken und wir erhalten unter unserer Annahme maximal $n+k + (n+k)(n-k-1) = n^2-k^2 < n^2$ Verbindungsstrecken.

Es ist noch zu zeigen, daß es einen Fall mit n^2 Verbindungsstrekken gibt. Wir teilen die 2n Punkte in zwei Mengen von je n Punkten ein und verbinden jeden Punkt der ersten Menge mit jedem Punkt der zweiten Menge. Es ist offensichtlich, daß hierbei kein Dreieck auftritt. Andererseits gibt es genau $n.n=n^2$ Verbindungsstrecken. Ist nun M eine Teilmenge von V mit mindestens $n^2 + 1$ Elementen, so gibt es mindestens ein Dreieck. Weiter ist gezeigt, daß man n^2+1 durch keine kleinere Zahl ersetzen kann.

Die Beweisführung ist ferner mittels vollständiger Induktion nach n möglich. Wir überlassen diesen Weg dem interessierten Leser und geben statt dessen den Lösungsgedanken von A. Kasparek wieder.

Zwischen den 2n Punkten sind $\binom{2n}{n}$ Verbindungsstrecken möglich. Dabei treten maximal $\binom{2n}{3}$ Dreiecke auf. Wir gehen davon aus, daß jede Verbindungsstrecke eingezeichnet ist. Jede Strecke A_iA_j ist in genau 2n-2 Dreiecken vertreten. Wir führen nun folgenden Prozeß durch: 1. Aus den Dreiecken $A_1A_2A_3$ und $A_1A_2A_4$ werden die Strecken A_1A_3 und A_2A_4 entfernt. Aus den Dreiecken $A_1A_2A_{2k-1}$ und $A_1A_2A_{2k}$ werden die Strecken A_1A_{2k-1} und A_2A_{2k} entfernt. Die Anzahl der Dreiecke nimmt dann für ein festes k um 2(2n-k) ab, da sich die Anzahl der Dreiecke, an denen A_1A_{2k-1} und A_2A_{2k} beteiligt sind, nach der Entnahme der Strecken A_1A_{2n-1} und A_2A_{2n} mit $m < k$ um jeweils 1 verringert. Schließlich hat nach der Entfernung der Strecken A_1A_{2n-1} und A_2A_{2n}, also der Entnahme von 2n-2 Verbindungsstrecken, die Anzahl der Dreiecke um $\sum_{k=2}^{n} 2(2n-k)$ abgenommen.

2. Aus den Dreiecken $A_2A_4A_5$ und $A_3A_4A_6$ werden die Strecken A_3A_5 und A_4A_6 entfernt. Die Anzahl der Dreiecke nimmt dann um 2(2n-3) ab, da A_1A_3 und A_1A_5 bzw. A_2A_4 und A_2A_6 entfernt wurden. Wir ver fahren nun weiter wie im Punkt 1. Schließlich hat nach der Entfernung der Strecken A_3A_{2n-1} und A_4A_{2n} die Anzahl der Strecken um weitere 2n-4 und die Anzahl der Dreiecke um $\sum_{k=3}^{n} 2(2n-k)$ abgenommen.

3. Das in 1. und 2. begonnene Verfahren wird fortgesetzt, bis aus den Dreiecken $A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1}$ und $A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n}$ die Strecken $A_{2n-3}A_{2n-1}$ und $A_{2n-2}A_{2n}$ entnommen sind. Bei diesem letzten Schritt nimmt die Anzahl der Strecken um weitere 2 und die Anzahl der Dreiecke um $\sum_{k=n}^{n} 2(2n-k)$ ab. Insgesamt hat damit nach Beendigung desVerfahrens die Anzahl der Strecken um $\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k) = (n-1)n$ abgenommen. Die Anzahl der Dreiecke hat dabei um $\sum_{l=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} 2(2n-k) = \binom{2n}{3}$ abgenommen. Es bestehen also keine Dreiecke mehr und wegen $n(2n-1) - (n-1)n = n^2$ sind maximal n^2 Verbindungen möglich, ohne daß ein Dreieck entsteht. Unter $n^2 + 1$ Verbindungsstrecken gibt es damit stets ein Dreieck.

Aufgabe 2

Wir beweisen zunächst die Gültigkeit der Abschätzung $c_n \leqq n(a_1 - (\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}))$ durch vollständige Induktion nach n. Für n = 1 ist wegen der Definitionsungleichung der Folge und $k < 1$ $\;a_2 \leqq a_1 + ka_1 - 1 < a_1 + a_1 - 1 = 2(a_1 - \frac{1}{2})$ und für n = 2 ergibt sich $a_3 \leqq a_2 + \frac{k}{2}\, a_2 - 1 < a_2 + \frac{1}{2}\, a_2 - 1 < (1 + \frac{1}{2})2 \cdot$ $\cdot (a_1 - \frac{1}{2}) - 1 = 3(a_1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))$. Wir setzen die Gültigkeit der Abschätzung für eine natürliche Zahl n voraus. Dann ist:

$$a_{n+1} \leqq a_n + \frac{k}{n}\, a_n - 1 < a_n + \frac{1}{n} - 1 = \frac{n+1}{n}\, a_n - 1 \leqq \frac{n+1}{n} \cdot$$

$$\cdot n(a_1 - (\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})) - \frac{n+1}{n+1} = (n+1)(a_1 - (\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})),$$

womit der Beweis geführt ist.

Die harmonische Reihe ist nun bekanntlich divergent, d.h. von einer gewissen natürlichen Zahl n_0 an wird $a_1 - (\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n_0}) < 0$ sein. Dies verstößt gegen die in der Aufgabenstellung geforderte Positivität der Folgenglieder. Damit ist gezeigt, daß eine Folge der gesuchten Art nicht existiert.

Aufgabe 3

Als Lösung ergibt sich nur das Paar (1,1). Für $x, y \geqq 2$ betrachten wir die Gleichung mod 7 und erhalten $x \equiv 0(6)$ oder $x \equiv 1(6)$. Für $x = 6k$ $(k \geqq 1)$ ist

$$7^y \equiv (-1)^y \equiv 3^{12k-1} + 3^{6k} + 1 \equiv 3(3^2)^{2k-1} + (3^2)^{3k} + 1 \equiv 5(8),$$

was unmöglich ist.

Für $x = 6k + 1$ $(k \geqq 1)$ erhalten wir bei Betrachtung mod 9 die notwendige Bedingung (1) $\;y \equiv 0(3)$. Weiter ist für ungerades k $7^y \equiv 1(5)$, also $y \equiv 0(4)$. Dies steht im Widerspruch zu $7^y \equiv -1(4)$, also $y \equiv 1(2)$. Für gerades k ergibt sich $7^y \equiv 7(5)$, d.h. (2) $y \equiv 1(4)$. Aus (1) und (2) folgt $y \equiv 9(12)$, also $y = 9 + 12t$ mit $t \geqq 0$. Betrachten wir die Ausgangsgleichung mod 19, so ist

$$7^{9+12t} \equiv 1 \equiv 3 \cdot 11^k + 3 \cdot 7^k + 1 = f(k).$$

Da f(k) mod 19 den Zyklus 17, 17, 7 durchläuft, folgt $f(k) \not\equiv 1(19)$, d.h. es existieren keine weiteren Lösungen.

Aufgabe 4

Sei $x > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln(x+1)\ \ln^{-1}x.$$

Es ist

$$f'(x) = \left[\ \frac{1}{x+1}\ \ln x - \frac{1}{x}\ \ln(x+1)\right]\ \ln^{-2}x < 0,$$

da $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ ist und die Funktion ln x monoton wächst. Also ist $f(x)$ für $x > 0$ monoton fallend. Hieraus ergibt sich für $n \geqq 2$ $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$.

Nun ist $Q_1 = \log_2 3\ \log_4 5\ \ldots\ \log_{998} 999 > P >$

$$> \log_4 5\ \log_5 6\ \ldots\ \log_{1000} 1001 = Q_2$$

und damit

$$Q_1 = \log_2 1000 < \log_2 1024 = 10.$$

Folglich ist $P^2 < PQ_1 < 10$ und $PQ_2 = \log_3 1001 > \log_3 729 = 6$, also $P^2 > PQ_2 > 6$, woraus die Behauptung folgt.

Aus dem Beweis ist gleichzeitig eine Verschärfung entnehmbar.

Aufgabe 5

Wir interpretieren die Punkte A_1, B_1 und C_1 als komplexe Zahlen a_1, b_1 und c_1 der Gaußschen Zahlenebene. Es ergibt sich

$$a' = b_n + (a_n - b_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

$$b' = c_n + (b_n - c_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

$$c' = a_n + (c_n - a_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

und damit

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) + \tfrac{1}{2}(c_n - b_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

$$b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(b_n + c_n) + \tfrac{1}{2}(a_n - c_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

und

$$c_{n+1} = \tfrac{1}{2}(c_n + a_n) + \tfrac{1}{2}(b_n - a_n)\ e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}.$$

Mit der Bezeichnung

$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} & e^{i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} & 1 & 1-e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \\ 1-e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} & e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} & 1 \end{pmatrix} x_n$$

$$:= \mathrm{zykl}\ \tfrac{1}{2}(1,\ 1-e^{i\cdot\frac{\pi}{3}},\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}})\ x_n$$

$$= \frac{1}{2}\ \mathrm{zykl}\ (1,\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}},\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}})\ x_n := Ax_n.$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$x_{n+1} = A^n x_1$$

und

$$A^n = \frac{1}{2^n}\ \mathrm{zykl}\ \left(\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3},\ \frac{2^n-(-1)^n}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}},\ \frac{2^n-(-1)^n}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right).$$

Weiter ist

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} A^n x_1 = \mathrm{zykl}\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}},\ \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right)x_1, \text{ d.h.}$$

die Eckpunkte des Grenzdreiecks A, B und C werden durch die komplexen Zahlen a, b und c mit

$$a = \frac{2}{3}\ a_1 + \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}\ b_1 + \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\ c_1$$

$$b = \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\ a_1 + \frac{2}{3}\ b_1 + \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}\ c_1 \qquad \text{und}$$

$$c = \frac{1}{3}e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}\ a_1 + \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\ b_1 + \frac{2}{3}\ c_1$$

dargestellt.

Es verbleibt zu zeigen, daß dieses Grenzdreieck von der Wahl des Ursprungs der Gaußschen Zahlenebene unabhängig ist. Wir betrachten einen Ursprung 0 und einen Ursprung $0_1 \neq 0$. Dann ist in der Gaußschen Ebene mit dem Ursprung 0_1

$$a = \frac{2}{3}\ a_1 + \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}\ b_1 + \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\ c_1$$

$$+\ o_1\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2}{3}\ a_1 + \frac{1}{3}\ e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}\ b_1 + \frac{1}{3}\ e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\ c_1 + o_1,$$

womit alles bewiesen wäre.

Aufgabe 6

Es sei ABCD ein Parallelogramm, das den Bedingungen genüge. Da $AC \leqq BD$ ist, gilt $\sphericalangle BAD \geqq 90^\circ$. Ist A nicht in K enthalten, so ist der Winkel φ, unter dem K vom Punkte A aus gesehen wird ein rechter oder stumpfer, d.h. $\varphi \geqq 90^\circ$. Hieraus ergibt sich leicht, daß $AS \leqq r\sqrt{2}$ ist. Dies gilt erst recht, wenn A in K liegt.

Wir beweisen nun, daß umgekehrt jeder Punkt A, für den $AS \leqq r\sqrt{2}$ gilt, Eckpunkt eines solchen Parallelogramms ist. Liegt A in K, so ist dies trivial. Liegt A außerhalb von K, betrachten wir die Gerade AS und nehmen als Punkte B und D des Parallelogramms die Berührungspunkte der Tangenten von A an K, wobei AS, B und D in einer Ebene liegen sollen. Da $\sphericalangle BAD \geqq 90^\circ$ gilt (dies folgt aus $AS \leqq r\sqrt{2}$), ist wieder $AC \leqq BD$.

Die gesuchte Menge ist also die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt S und dem Halbmesser $r\sqrt{2}$.

Aufgabe 7

Zur Herleitung der unteren Grenze benutzen wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Wir vereinbaren die Bezeichnung $I(f,a,b) = I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Damit lautet die Ungleichung

$$I^2(f_1f_2) \leqq I(f_1^2)I(f_2^2). \qquad (1)$$

Zum Beweis betrachten wir die nicht negative Funktion $K(r) = I[(f_1 + rf_2)^2] = I(f_1^2) + 2r\,I(f_1f_2) + r^2I(f_2^2) \geqq 0$. Da die Diskriminante dieser in r quadratischen Funktion nicht positiv sein darf, haben wir (1) bewiesen.

Für $f_2(x) = 1$ und $f_1(x) = f(x)$ erhalten wir

$$I(f^2) \geqq I^2(f) = 1, \qquad (2)$$

wobei für $f(x) = 1$ das Gleichheitszeichen angenommen wird.

Eine elementare Herleitung von (2) zeigte I. Schmelzer. Es ist $I[(f-1)^2] = I(f^2) - 2\,I(f) + 1 = I(f^2) - 1 \geqq 0$.

Wir wollen nun die obere Grenze herleiten. Die Gerade $y = m$ mit $\min[f(0), f(1)] \leqq m \leqq M = \max f(x)$ schneidet $f(x)$ im Punkt $P(x_p,y_p)$. Infolge der Konkavität existiert höchstens noch ein weiterer Schnittpunkt $Q(x_q,y_q)$, wobei $x_p < x_q$ sei. $A(m)$ sei die Summe der Inhalte der Flächen, die von $x = 0$, $y = m$, $y = f(x)$

bzw. von $x = 1$, $y = m$, $y = f(x)$ eingeschlossen werden. Die letztgenannte Fläche existiert genau dann, wenn Q existiert. Die Geraden durch (0,0), P bzw. (1,0), Q (falls Q nicht existiert, nehmen wir $x = 1$) bilden mit der Abszisse infolge der Konkavität ein Dreieck D mit dem Inhalt D(m). B(m) sei die im Inneren von D oberhalb von f(x) gelegene Fläche. Für $m_1 < m_2$ folgt $A(m_1) < A(m_2)$ und $B(m_1) > B(m_2)$. Da $B(M) = 0$ und $A(0) = 0$ ist, existiert ein m mit $A(m) = B(m)$. Dieses m sei nun fest. Es folgt $D(m) = 1$. Der Rand von D wird durch die Funktion

$$f_o(x) = \begin{cases} cx & , x \in [0, \frac{2}{c}] \\ \frac{2c}{2-c}(x-1) & , x \in (\frac{2}{c}, 1] \end{cases} \qquad c > 0, \text{ falls Q existiert}$$

bzw. $f_o(x) = 2x$ im anderen Fall, beschrieben. Es ist $I(f_o) = \frac{4}{3}$.

Nun gilt: $I(F_o^2) - I(f^2) = I[(f_o-f)(f_o+f)] \geqq$

$$\geqq 2mI(f_o-f) = 0, \quad \text{da}$$

$I[(f_o-f)(f_o+f-2m)] \geqq 0$ ist, weil beide Faktoren des Integranden stets das gleiche Vorzeichen haben. Somit ist $I(f^2) \leqq \frac{4}{3}$, wobei das Gleichheitszeichen bei $f_o(x)$ steht.

Ergebnis: Es ist $1 \leqq I(f^2) \leqq \frac{4}{3}$.

Bemerkung: Durch analoge Überlegungen läßt sich

$1 \leqq I(f^n, a, b) \leqq (b-a)2^n(1+n)^{-1}$ zeigen.

Aufgabe 8

Es ist

$$5 = 1 + 2^2,\ 5^2 = 1 + t_1 \cdot 2^3,\ 5^4 = 1 + t_2 \cdot 2^4$$

und mittels Induktion schließt man auf

$$5^{2^{m-2}} = 1 + t \cdot 2^m \quad (t_1, t_2, t \in Na).$$

Hieraus folgt

$$5^{2^{m-2}+m} = 5 + t \cdot 10^m \quad . \qquad (3)$$

Speziell ist für $m = 4k$

$$5^{2^{4k-2}+4k} = 5^{4k} + t \cdot 10^{4k}.$$

$t \cdot 10^{4k}$ endet auf mindestens 4k Nullen, während

$5^{4k} = 625^k < 10^{3k}$ höchstens 3k Ziffern enthält.

Folglich hat $5^{2^{4k-2}+4k}$ für k = 1976, 1977, ... mindestens 1976 aufeinanderfolgende Nullen.

Aufgabe 9

a) α) Für alle reellen Zahlen x_1, x_2 ist $(|x_1|-|x_2|)^2 \geqq 0$, d.h. $x_1^2 + x_2^2 \geqq 2|x_1x_2| \geqq 2x_1x_2$ und da für $x_1 = x_2$ offenbar Gleichheit eintritt, ist p = 2 die gesuchte Zahl.

a) β) Wir nehmen an, es existiert eine derartige reelle Zahl p. Wir betrachten die Funktion

$$f(x_1,\ldots,x_5) = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2-p(x_1x_2+\ldots+x_4x_5)$$

und bestimmen das Minimum. Da alle 5 Variablen unabhängig sind, ist (falls die Minima existieren)

$$\min_{x_1,\ldots,x_5} f = \min_{x_3}(\min_{x_4}(\min_{x_2}(\min_{x_5}(\min_{x_1} f)))).$$

Wir fixieren $x_2,\ldots,x_5$ und betrachten $\varphi(x_1) = f(x_1,\ldots,x_5)$. Es ist $\varphi'(x_1) = 2x_1 - px_2$ und $\varphi''(x_1) = 2 > 0$, d.h. $\min\limits_{x_1} \varphi(x_1) = \varphi(\frac{p}{2}x_2)$. Analoges gilt für x_5. Also ist

$$\min_{x_1,\ldots,x_5} f = \min_{x_3}(\min_{x_4}(\min_{x_2} g(x_2,x_3,x_4))), \text{ wobei}$$

$$g(x_2,x_3,x_4) = (1-\frac{p^2}{4})x_2^2 + x_3^2 + (1-\frac{p^2}{4})x_4^2$$

$$- p(x_2x_3 + x_3x_4)$$

ist. Wir fixieren x_3 und x_4 und betrachten $\psi(x_2) = g(x_2,x_3,x_4)$.

Es ist $\psi'(x_2) = 2(1-\frac{p^2}{4})x_2 - px_3$ und $\psi''(x_2) = 2(1-\frac{p^2}{4}) > 0$, denn sicher ist $p < 2$ (Für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ erhalten wir $p \leqq \frac{5}{4}$). Also ist

$$\min_{x_2} \psi(x_2) = \psi\left(\frac{px_2}{2(1-\frac{p^2}{4})}\right).$$

Analoges gilt für x_4.

Mithin ist

$$\min_{x_1,\ldots,x_5} f(x_1,\ldots,x_5) = \min_{x_3} \left(1 - \frac{2p^2}{4-p^2}\right) x_3^2.$$

Da für alle reellen $x_1,\ldots,x_5$ $f(x_1,\ldots,x_5) \geq 0$, ist auch

$$\min_{x_3} \left(1 - \frac{2p^2}{4-p^2}\right) x_3^2 \geq 0,$$

d.h.

$$1 - \frac{2p^2}{4-p^2} \geq 0,$$

$$4 - p^2 - 2p^2 \geq 0$$

$$p^2 \leq \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{p \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}.}}$$

Da nun schließlich z.B. $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ ist für $p = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, existiert für $n = 5$ diese größte Zahl p und sie hat den Wert $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

b) Sicher ist für alle reellen Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ und alle natürlichen Zahlen n

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} (|x_i| - |x_{i+1}|)^2 + (|x_n| - |x_1|)^2\right\} \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} |x_i x_{i+1}| + |x_1 x_n| \geq \sum_{i=1} x_i x_{i+1} .$$

$p = 1$ wäre offenbar eine Zahl, so daß (4) stets erfüllt ist. Wir zeigen nun, daß $p = 1$ die größte derartige Zahl ist. Angenommen, es gibt eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $p + \varepsilon$ ebenfalls eine derartige Zahl ist, daß (4) für alle reellen Zahlen x_i und natürlichen Zahlen n gilt. Insbesondere wäre dann für $x_i = 1$ $(i = 1,\ldots,n)$: $1 + \varepsilon = p + \varepsilon \leq \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$, was jedoch nur für $n \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1$ erfüllt ist, also nicht für alle natürlichen Zahlen n. Mithin ist $p = 1$ die größte derartige Zahl.

Aufgabe 10

Zunächst ist für $z \geqq 1$ die Ungleichung $z + \frac{1}{z} \geqq 2$ erfüllt und es gilt

$$f(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z} + |z - \frac{1}{z}|) = z. \qquad (3)$$

Für $i \geqq 2$ setzen wir $i = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ mit $\alpha \geqq 1$. Dann ist $f(i) = \alpha$. Wir betrachten nun eine Folge j_n mit der Eigenschaft $f(j_n) = \alpha^n$, $j_n \geqq 2$. Aus der strengen Monotonie der Funktion $y = f(x)$ im betrachteten Bereich folgt aus (3), daß $j_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ ist. Wir prüfen nun, daß die Zahlen j_n, $n = 0,1,2,\ldots$ ganzzahlig sind. Gewiß ist $j_0 = 2$ und $j_1 = i$. Ferner ist

$$j_{n+1} = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = (\alpha + \frac{1}{\alpha})(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}) - (\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}),$$

$$j_{n+1} = i \cdot j_n - j_{n-1}.$$

Aus dieser rekursiven Formel ergibt sich die Ganzzahligkeit der Elemente j_n auch für $n \geqq 2$.

Aufgabe 11

Angenommen, $(x_1,\ldots,x_8)$ sei eine Lösung dieses Gleichungssystems, dann erhalten wir aus den Gleichungen (8) - (11) durch geeignete Linearkombinationen der Gleichungen (4) - (7) vier Gleichungen in den Unbekannten $x_1,\ldots,x_4$:

$$5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \qquad (12)$$
$$-3x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \qquad (13)$$
$$-3x_1 + x_1 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \qquad (14)$$
$$x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 . \qquad (15)$$

Aus (12) und (15) folgt $x_1 = x_4$ und aus (13) und (14): $x_2 = x_3$, d.h. alle Gleichungen formen sich um zu $x_1 = x_2$.
Also hat letzteres Gleichungssystem höchstens die Lösung
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist.
Aus den ersten vier Gleichungen folgt dann sofort
$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = t$. Tatsächlich ist $x_i = t$ $(i = 1,\ldots,8)$ für beliebige reelle Zahlen t Lösung des gegebenen Systems.

Aufgabe 12

a) Es gilt

$$\sum_{i,j} |A_i \cap B_j| = \sum_{i,k} |A_i \cap C_k| = \sum_{j,k} |B_j \cap C_k| = |M|.$$

Damit ist einerseits

$$\sum_{i,j,k} (|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k|) = 3n|M|$$

und andererseits nach Voraussetzung

$$\sum_{i,j,k} (|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k|) \geq \sum_{i,j,k} n = n^4,$$

woraus bereits die Abschätzung folgt.

b) Zum Nachweis des zweiten Teils geben wir eine Menge M an, die aus genau $\frac{n^3}{3}$ Elementen besteht, sowie geeignete Zerlegungen A_i, B_i und C_i:

$$M = \{ (i,j,k)\colon 1 \leqq i,j,k \leqq n,\ i + j + k \equiv 0(3)\};$$

A_i bestehe aus der Menge der Tripel mit der ersten Komponente i,
B_j bestehe aus der Menge der Tripel mit der zweiten Komponente j und
C_k bestehe aus der Menge der Tripel mit der dritten Komponente k.

Dann ist $|A_i \cap B_j| = |A_i \cap C_k| = |B_j \cap C_k| = \frac{n}{3}$.

Aufgabe 13

Wir beweisen diese Aussage indirekt und nehmen an, es gibt eine Anordnung von 65 Punkten in der Einheitskugel, so daß je zwei dieser Punkte einen Abstand größer oder gleich 2/3 haben. Wir betrachten zu jedem Punkt eine Kugel mit dem Radius 1/3, deren Mittelpunkt gerade dieser Punkt ist. Dann sind offenbar die 65 Kugeln disjunkt, liegen aber vollständig in einer Kugel vom Radius $1 + \frac{1}{3}$. Damit gilt für die Volumina bestimmt:

$$65 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{3}\right)^3 \leqq \frac{4}{3}\pi \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3,$$

also $\qquad 65 \leq 4^3 = 64,$

was unmöglich ist.
Mithin ist unsere Annahme falsch, die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 14

Es sei $f(x,y) = x^y - y^x - x - y$. Wir haben $f(x,y) = 0$ in positiven ganzen Zahlen zu lösen. Die 3 Fälle $x = 1$, $y = 1$, $x = y$ kann man leicht ausschließen:

$$f(1,y) = -2y,$$
$$f(x,1) = -2,$$
$$f(x,x) = -2x.$$

Es sei $x \geq 2$, $y \geq 2$ und $x = y$. Sicher ist für eine Lösung $x^y - y^x > 0$, so daß

$$\frac{1}{x} \log x > \frac{1}{y} \log y$$

folgt. Hieraus ergibt sich

1) wenn $x = 2$: $y \geq 5$ oder
2) wenn $x \geq 3$: $y > x$.

Fall 1) Es ist $f(2,5) = 0$ und für $y \geq 5$ ist

$$f(2,y+1) - f(2,y) = 2^y - 2y - 2 > 0,$$

d.h. $f(2,y) > 0$ für $y \geq 6$.

Fall 2) Für $y > x \geq 3$ ist

$$f(x,y+1) - f(x,y) = x^y(x-1) - y^x\left\{(1 + \tfrac{1}{y})^x - 1\right\} - 1$$
$$> 2x^y - (e-1)y^x - 1 = 2(x^y-y^x)$$
$$+ (3 - e)y^x - 1 > (3 - e)y^x > 0.$$

Weiter ist

$$f(x,x+1) = x^x\left\{x - (1 + \tfrac{1}{x})^x\right\} - 2x - 1 > x^x(x-e) - 2e - 1 > 0.$$

Deshalb haben wir

$$f(x,y) > 0 \quad \text{für} \quad x \geq 3,\ y \geq x + 1.$$

Aufgabe 15

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra läßt sich $P(x)$ als Produkt von Linearfaktoren (reelle Nullstellen) und quadratischen Faktoren (konjugiert komplexe Nullstellen) darstellen. Wegen $P(x) > 0$ für

$x > 0$ hat $P(x)$ höchstens reelle Nullstellen x_0 mit $x_0 \leq 0$. Der Linearfaktor $(x - x_0)$ hat dann nur nichtnegative Koeffizienten.

Da das Produkt von Polynomen mit nichtnegativen Koeffizienten wieder ein Polynom mit nichtneg. Koeffizienten ist, reicht es offenbar aus, den Fall $P(x) = x^2 - 2ax + b^2$ mit $a > 0$ (sonst sind wir bereits fertig) und $b^2 > a^2$ (d.h. die Nullstellen von $P(x)$ sind komplex) zu betrachten.

Wegen
$$(x^2+b^2)^{2n} - (2ax)^{2n} = (x^2 - 2ax+b^2) \sum_{k=0}^{2n-1} (x^2+b^2)^k (2ax)^{2n-k-1}$$

sind wir bereits fertig, wenn wir n so wählen, daß $b^{2n}\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}\, a^{2n}$ wird, denn dann sind sicher auch alle Koeffizienten von Polynomen auf der linken Seite nichtnegativ.

Nach der Bernoullischen Ungleichung ist
$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n = \left(1 + \frac{b^2-a^2}{a^2}\right)^n \geq 1 + \frac{b^2-a^2}{a^2} \cdot n > \frac{b^2-a^2}{a^2}\, n$$

und es reicht, n so zu wählen, daß
$$c_n = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n} > \frac{a^2}{b^2-a^2} .$$

Es ist
$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 + \frac{1}{2(n-1)} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} \quad (n \geq 2) \qquad \text{und damit}$$

$$c_n \geq c_1 \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{n}}{2}, \text{ also}$$

reicht es, $n > \dfrac{4a^4}{(b^2-a^2)^2}$ zu wählen.

Aufgabe 16

Da das Fünfeck regelmäßig ist, existiert ein Umkreis. Der Mittelpunkt dieses Umkreises sei M. Sicher ist $M \in K_1'K_2'$, $K_1'M = K_2'M = h$ und $K_1'K_2'$ steht senkrecht auf der Ebene, in der das Fünfeck liegt. Ist der Umkreis des Fünfecks r, so ist

$$\frac{s}{2r} = \sin 36^\circ \qquad (16)$$
$$h = \sqrt{s^2 - r^2}. \qquad (17)$$

Offenbar schneiden sich K_1', K_2' genau dann, wenn $h < \frac{s}{2}$ (a), berühren sich genau dann, wenn $h = \frac{s}{2}$(b) und haben keinen Punkt miteinander gemeinsam, genau dann, wenn $h > \frac{s}{2}$(c).

Aus (16) und (17) folgt $h = \frac{s}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 36}}$.

Es tritt genau der Fall (a), (b), (c) ein, wenn $\sin^2 36^\circ \substack{<\\=\\>} \frac{1}{3}$ ist (18).

Es ist

$$\begin{aligned} 0 = \sin 180^\circ &= \sin 36^\circ \cos 144^\circ + \sin 144^\circ \cos 36^\circ \\ &= \sin 36^\circ - 2 \sin 36^\circ \sin^2 72^\circ + 2 \sin 72^\circ \cdot \\ &\qquad \cdot \cos 72^\circ \cos 36^\circ \\ &= \sin 36^\circ - 8 \sin^3 36^\circ \cos^2 36^\circ \\ &\quad + 4 \sin 36^\circ \cos^2 36^\circ (1 - 2 \sin^2 36^\circ) \\ &= \sin 36^\circ - 8 \sin^3 36^\circ (1 - \sin^2 36^\circ) \\ &\quad + 4 \sin 36^\circ (1 - \sin^2 36^\circ)(1 - 2 \sin^2 36^\circ) \\ &= 5 \sin 36^\circ - 20 \sin^3 36^\circ + 16, \sin^5 36^\circ. \end{aligned}$$

Sicher ist $\sin 36^\circ \neq 0$, d.h. $\sin 36^\circ$ ist Lösung der Gleichung

$$x^4 - \frac{5}{4} x^2 + \frac{15}{16} = 0$$

und Lösung mindestens einer der Gleichungen $(x^2)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.

Wegen $\sin 36^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist $\sin^2 36^\circ < \frac{1}{2} < \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

Also ist $\sin^2 36^\circ = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. $\sin^2 36^\circ \substack{<\\=\\>} \frac{1}{3}$ ist nun äquivalent mit $3(5 - \sqrt{5}) \substack{<\\=\\>} 8$ und $7 \substack{<\\=\\>} 3\sqrt{5}$ und $49 \substack{<\\=\\>} 45$. Da aber genau das 3. Relationszeichen gilt, tritt Fall (c) ein, d.h. die Kugeln K_1' und K_2' haben keinen Punkt gemeinsam.

Sonderaufgabe

R sei eine Menge aus genau 6 Elementen. Eine Menge F von Teilmengen von R wird S-Familie über R genau dann genannt, wenn sie die drei Bedingungen

(1) Für keine zwei verschiedenen Mengen X,Y aus F gilt: $X \subseteq Y$,

(2) Für je drei Mengen X,Y,Z aus F gilt: $X \cup Y \cup Z \neq R$,

(3) Es gilt:

$$\bigcup_{X \in F} X = R$$

erfüllt. Man bestimme das Maximum der Anzahl der Elemente in einer S-Familie F über R.

Lösungen zu der Sonderaufgabe sind an
Dr. H.-D. Gronau, 25 Rostock, Wilhelm-Pieck-Universität, Universitätsplatz 1, Sektion Mathematik, zu senden.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Berichtigung:
In Aufgabe 4, Heft 3 müssen die Funktionen als stetig vorausgesetzt werden. Ansonsten ist der behauptete Satz falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt (M. Marczinek):
Sei $Z(\sqrt{2})$ die Menge der Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei a und b als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Sei

$$f = g = \begin{cases} 1, \text{ falls } x = a + b\sqrt{2}, \text{ also } x \in Z(\sqrt{2}) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

f hat die Periode 1 und g die Periode $\sqrt{2}$. f + g ist ebenfalls periodisch (Perioden 1 und $\sqrt{2}$), f und g sind aber keinesfalls konstant.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 7

Sonderaufgabe

Die Funktion $f(x)$ heißt ableitungszyklisch vom Grade n, wenn

$$f(x) = f^{(n)}(x) \qquad (1) \quad \text{und}$$

$$f(x) \neq f^{(k)}(x) \quad \text{für } 0 < k < n \qquad (2)$$

ist. Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n eine ableitungszyklische Funktion vom Grade n existiert.

Aufgaben

Aufgabe 1
Es sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$.

Man beweise $\displaystyle\sum \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$,

wobei die Summation über alle ganzen Zahlen p und q genommen wird, die paarweise relativ prim sind und

$$0 < p < q \leq n \quad \text{und} \quad p + q > n$$

erfüllen.

Aufgabe 2
Es seien a und b reelle Zahlen mit $a > b > 1$. Man beweise

$$a^{b^{a}} > b^{a^{b}}. \qquad (3)$$

Aufgabe 3
Man bestimme alle Ziffern a, b, c, die für beliebige natürliche Zahlen n die Gleichung

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n}} + 1 = (\overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n}} + 1)^2 \quad \text{erfüllen.}$$

($\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ bezeichne die Ziffernfolge einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl.)

Aufgabe 4

Es seien n und r natürliche Zahlen mit $r + 3 \leqq n$.
Man zeige, daß die Folge

$$\binom{n}{r}, \quad \binom{n}{r+1}, \quad \binom{n}{r+2} \quad \text{und} \quad \binom{n}{r+3}$$

niemals eine arithmetische Folge ist.

Aufgabe 5

Man bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen m, $n \geqq 1$, für die das Polynom $1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{n \cdot m}$ durch das Polynom $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ teilbar ist. (Mathematik-Olympiade USA)

Aufgabe 6

Man gebe eine natürliche Zahl k an, für die

$$1976 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 1977$$

gilt. (Mathematik-Olympiaden, VR Ungarn)

Aufgabe 7

Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1} = x \sqrt[3]{2}$$

(Mathematik-Olympiade 1976, CSSR)

Aufgabe 8

Man bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (x, y), die der Gleichung $2^x - 5^y = 7$ genügen.

Aufgabe 9

Die Folge $\{T_n\}$ n = 1, 2, ... ist rekursiv gegeben durch $T_1 = 2$ und $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$. Man beweise:

a) die Folgenglieder sind paarweise teilerfremd.

b) es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} T_k^{-1} = 1$.

Aufgabe 10

In einer Ebene seien die sechs Punkte P_1, P_2, ..., P_6 gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man beweise, daß ein Tripel (i, j, k) mit $i \neq j \neq k$, $i \neq k$ und $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ existiert, so daß $\sphericalangle P_iP_jP_k \leq 30^\circ$ ist.

Aufgabe 11

Es sei $s(n)$ die Quersumme der im Dezimalsystem dargestellten natürlichen Zahl n. Man beweise die Ungleichung

$$s(n) \leq 8 \cdot s\,(8n).$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Anzahl der Permutationen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so daß für jedes k, $1 \leq k \leq n$, $|i_k - k| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 13

Gegeben seien die reellen Zahlen x_i $(1 \leq i \leq n)$, wobei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl ist. Das Produkt dieser Zahlen sei mit p, ihre Summe mit s und die Summe der Quadrate mit S bezeichnet. Wir betrachten die Ungleichung

$$ps \leq S^r \tag{4}$$

mit einer positiven Konstanten r. Zeigen Sie, daß die Ungleichung (4) für jedes n-Tupel (x_i) genau dann gilt, wenn $r = \frac{1}{2}(n+1)$ ist. (Vorschlag Niederlande, XIV. IMO)

Aufgabe 14

In einer Ebene seien die Punkte A und B und eine Gerade g gegeben. Man bestimme alle Punkte P auf g, so daß $\overline{PA} \cdot \overline{PB}^{-1}$ maximal bzw. minimal wird.

Aufgabe 15

Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien in einer Ebene gegeben. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte M der Ebene, so daß $F(AMB) + F(CMD) = a^2$ ist, wobei a^2 eine gegebene Konstante ist und $F(XYZ)$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle$ XYZ bezeichnet.

Lösungen

Aufgabe 1

Es bezeichne S_n die oben beschriebene Summe für ein fixiertes n. Sicher ist $S_2 = \frac{1}{2}$.

Ferner gilt

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{\substack{(p,n+1)=1 \\ 1\leq p\leq n}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{p<q \\ p+q=n+1 \\ (p,q)=1}} \frac{1}{p\cdot q} =$$

$$= \sum_{\substack{(p,n+1)=1 \\ 1\leq p\leq n}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{1\leq p<(n+1)/2 \\ (p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} \quad ,$$

$$\sum_{\substack{1\leq p<(n+1)/2 \\ (p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{1\leq p<(n+1)/2 \\ (p,n+1)=1}} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1-p}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{1\leq p\leq n \\ (p,n+1)=1}} \frac{1}{p} \; ,$$

und zusammen $S_{n+1} = S_n$, also $S_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 2

Für $n, x \geq 1$ sind für fixiertes n, x^n und n^x monoton wachsende Funktionen. Mithin erhalten wir durch zweimaliges Logarithmieren die zu (3) äquivalente Ungleichung

$$\ln \ln a + a \ln b > \ln \ln b + b \ln a. \tag{5}$$

Sei $x = \frac{\ln a}{\ln b} > 1$, $y = \ln b > 0$. Die Aussage (5) hat somit die Form

$$\ln x > y\,(x\,e^{y} - e^{xy}).$$

Sei $\varphi(x,y) = xe^y - e^{xy}$. Dann ist $\varphi_y(x,y) = xe^y - xe^{xy} < 0$, so daß $\varphi(x,y) < \varphi(x,0) = x - 1$ ist. Für $\varphi(x,y) \leq 0$ ist

$\ln x > y\,\varphi(x,y)$. Sei jetzt $\varphi(x,y) > 0$.

Dann ist $\quad \varphi(x,y) = e^y\,(x - e^{(x-1)y}) > 0$

und $\quad (x-1)y < \ln x$,

d. h. $\quad \ln x > (x-1)y > y\,\varphi(x,y)$,

was zu zeigen war.

Aufgabe 3

Ist $p_n = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n}$, so folgt $p_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 10^2 = \dfrac{10^n-1}{p}$ und

$10^n = 9p_n+1$.

Folglich $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\,\underbrace{bb\ldots b}_{n}} = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n} \cdot 10^i + \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{n}$

$$= ap_n 10^n + bp_n = ap_n(9\,p_n+1) + bp_n,$$

$$(\underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n} + 1)^2 = (cp_n+1)^2 = c^2p_n{}^2 + 2cp_n + 1.$$

Die gegebene Gleichung geht nun über in

$$9ap_n{}^2 + (a+b)p_n + 1 = c^2p_n{}^2 + 9\,cp_n + 1$$

und $\quad 9ap_n + (a+b) = c^2p_n + 2c. \qquad (6)$

Da die ursprüngliche Gleichung für fixierte a, b und c, aber beliebige n erfüllt sein soll, muß (6) für alle p_n (zumindestens für unendliche viele p_n) erfüllt sein. Wenn aber zwei lineare Funktionen (die beiden Seiten von (6)) in zwei Punkten übereinstimmen, sind sie identisch, d. h. $\quad 9\,a = c^2 \qquad (7)$

und $\quad (a+b) = 2c. \qquad (8)$

Wegen (7) ist $c \equiv 0 \pmod 3$ und wir haben genau vier Werte für c zu diskutieren.

1. $c = 0$, also $a = 0$, $b = 0$.
2. $c = 3$, also $a = 1$, $b = 5$.
3. $c = 6$, also $a = 4$, $b = 8$.
4. $c = 9$, also $a = 9$, $b = 9$.

Die vier Lösungstripel sind auch hinreichend, denn (6) ist erfüllt und damit die ursprüngliche Gleichung.

Aufgabe 4

Wir beweisen zunächst zwei Lemmata.

Lemma 1: Ist n eine gegebene natürliche Zahl n, so existieren nicht mehr als zwei natürliche Zahlen k, $k \leq n-3$, so daß die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ und $\binom{n}{k+2}$ eine arithmetische Folge bilden.

Beweis: Wenn die drei Binomialkoeffizienten eine arithmetische Folge bilden, so ist

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+2} = 2\binom{n}{k+1}$$

und weiter folgt

$$(k+2)(k+1) + (n-k)(n-k-1) = 2(k+2)(n-k).$$

Die letzte Gleichung ist eine quadratische Gleichung in k und hat mithin höchstens zwei ganzzahlige Lösungen.

Lemma 2: Ist n eine gegebene natürliche Zahl n, so existiert höchstens eine natürliche Zahl k, $k \leq n - 1$, so daß

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

gilt.

Beweis: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ impliziert $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$ und

$k+1 = n - k$ und $k = \frac{n-1}{2}$, d. h., es existiert höchstens eine natürliche Zahl k mit der geforderten Eigenschaft.

Nun kehren wir zur ursprünglichen Aufgabe zurück.

Es sei $a_j = \binom{n}{j}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$; n eine fixierte natürliche Zahl.

Wir nehmen an, es existiert eine Zahl r, so daß

$$a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3} \tag{9}$$

eine arithmetische Folge ist. Wegen $a_k = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = a_{n-k}$ ist dann auch

$$a_{n-r-3}, a_{n-r-2}, a_{n-r-1}, a_{n-r} \tag{10}$$

eine arithmetische Folge. (9) und (10) enthalten die vier 3-gliedrigen arithmetischen Teilfolgen:

$$a_r, a_{r+1}, a_{r+2} \tag{11}$$

$$a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3} \tag{12}$$

$$a_{n-r-3}, a_{n-r-2}, a_{n-r-1} \tag{13}$$

$$a_{n-r-2}, a_{n-r-1}, a_{n-r} . \tag{14}$$

Nach Lemma 1 gibt es für fixiertes n höchstens zwei 3-gliedrige arithmetische Folgen der beschriebenen Art. Also sind die Folgen (11) und (13) sowie (12) und (14) untereinander gleich. Das heißt, es ist $r = n-r-3$ und damit

$$a_{r+1} = a_{n-r-2} = a_{r+2}\ , \text{ wegen } a_{n-r-2} = \binom{n}{n-r-2} = \binom{n}{r+2} = a_{r+2}.$$

Folglich ist die Folge (9) konstant. $a_k = a_{k+1}$ hat aber nach Lemma 2 höchstens eine Lösung, d. h. unsere Annahme ist falsch, die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 5

Das Polynom $P_1(x) = 1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{n\cdot m}$ ist durch das Polynom $P_2(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ genau dann teilbar, wenn es ein Polynom $Q(x)$ mit reellen Koeffizienten gibt, das $P_1(x) = P_2(x)\ .\ Q(x)$ für alle reellen Zahlen x erfüllt.

Wir betrachten die Polynome zunächst im Komplexen.

Es ist $\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)} = \dfrac{x^{m(n+1)}-1}{x^m - 1} \cdot \dfrac{x-1}{x^{n+1}-1}$ und nach dem Moivre'schen Satz ist

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{(x-1)\prod\limits_{k=0}^{m(n+1)-1}\left(x - e^{i\frac{2k\pi}{m(n+1)}}\right)}{\left[\prod\limits_{k=0}^{m-1}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)\right]\cdot\left[\prod\limits_{k=0}^{n}\left(x - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right)\right]} \tag{15}$$

$P_1(x)$ ist im Komplexen durch $P_2(x)$ genau dann teilbar, wenn sämtliche Linearfaktoren des Nenners im Zähler auftreten. Jeder Faktor vom Nenner tritt im Zähler auf, allerdings, abgesehen von $(x-1)$, nur genau einmal. Folglich ist notwendig und hinreichend für die Teilbarkeit, daß je zwei, von 1 verschiedene Nullstellen der Nennerpolynome verschieden sind, h. h.

für alle $k_1 \in \{1, \ldots, m-1\}$, $k_2 \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$\frac{2k_1\pi}{m} \neq \frac{2k_2\pi}{n+1} \tag{16}$$

Es sei $(m, n+1) = d$. Für $d \geqq 2$ ist $k_1' = \frac{m}{d} \in \{1, \ldots, m-1\}$ $k_2' = \frac{n+1}{d} \in \{1, \ldots, n\}$ und $\dfrac{2k_1'\pi}{m} = \dfrac{2\pi}{d} = \dfrac{2k_2'\pi}{n+1}$, was im Widerspruch zu (16) steht.

Für $d = 1$ hat die Gleichung $k_1(n+1) = k_2 m$ keine Lösung, denn aus ihr folgt $n+1/k_2$ und m/k_1. Mithin gilt (16). Damit ist gezeigt, daß $P_1(x)$ durch $P_2(x)$ (im Komplexen) genau dann teilbar ist, wenn $(m, n+1) = 1$ ist.

Wir zeigen nun, daß $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ sogar ein reelles Polynom ist, falls $(m, n+1) = 1$ gilt. Jedes Polynom von (15) enthält mit einer komplexen Nullstelle $e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ auch die konjungiert komplexen Nullstelle $e^{i(2\pi - \varphi)}$. Also enthält $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ genau dann einen Linearfaktor $(x - e^{i\varphi})$ mit $0 < \varphi < \pi$, wenn $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ auch den Linearfaktor $(x - e^{i(2\pi - \varphi)})$ enthält, und folglich ist $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ ein reelles Polynom.

Aufgabe 6

Zunächst leiten wir hinreichend gute Schranken für

$$s(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$ her. Man kann diese mittels Integralabschätzungen gewinnen, aber es reichen auch schon folgende elementare Überlegungen.

Für jede natürliche Zahl $i \geqq 2$ gilt

$$2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = \frac{2}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} < \frac{1}{\sqrt{i}} < \frac{2}{\sqrt{i} + \sqrt{i-1}} = 2(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}),$$

$$1 + 2\sum_{i=2}^{n}(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) < s(n) < 1 + 2\sum_{i=2}^{n}(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) \quad \text{und}$$

$$1 + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < s(n) < 1 + 2\sqrt{n} - 2 = 2\sqrt{n} - 1 .$$

Alle n mit

$$1976 \leqq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \qquad (17)$$

und $$2\sqrt{n} - 1 \leqq 1977 \qquad (18)$$

erfüllen sicher $1976 < s(n) < 1977$.

(18) gilt genau dann, wenn $n \leqq 989^2$ ist.

$n = 989^2$ erfüllt (17) wegen

$2\sqrt{989^2+1} - 2\sqrt{2} + 1 \geqq 1978 - 2\sqrt{2} + 1 > 1976.$

Somit ist $n = 989^2 = 878\ 121$ eine gesuchte Zahl.

Bemerkung: Bei optimaler Ausnutzung von (17) und (18) erhält man ein Intervall von Lösungen.

Aufgabe 7

Damit sämtliche Terme definiert sind, ist notwendig und hinreichend, daß $x \geqq 1$ ist. Dann sind auch alle Terme sogar nichtnegativ.

Für $a, b \geqq 0$ ist $a = b$ mit $a^3 = b^3$ äquivalent, denn $a = b$ impliziert $a^3 = b^3$ und aus $a^3 = b^3$ folgt

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)\left[(a+\tfrac{b}{2})^2 + \tfrac{3}{4}b^2\right] = 0$$

und hieraus $a = b$.

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2} \qquad (19)$$

ist demnach äquivalent mit folgenden Gleichungen

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right) = 2x^3,$$

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}\; x\sqrt[3]{2} = 2x^3$$

$$2 + 3\sqrt[3]{2(x^2-1)} = 2x^2 \quad \text{(wegen } x \geqq 1\text{)},$$

$$3\sqrt[3]{2(x^2-1)} = 2(x^2-1)$$

$$27 \cdot 2 \cdot (x^2-1) = 8(x^2-1)^3 \quad \text{(wegen obiger Bemerkung und } x \geqq 1\text{)}.$$

Die letzte Gleichung hat folgende Lösungen:

1. $x^2 = 1$, d. h. $x = 1$, wegen $x \geqq 1$.
2. $x^2 \neq 1$. Dann formen wir weiter äquivalent um, zu

$$(x^2-1)^2 = \frac{27}{4}$$

$$x^2-1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad \text{(wegen } x \geqq 1\text{, d. h. } x^2-1 \geqq 0\text{)}$$

$$x^2 = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}} \qquad \text{(wegen } x \geqq 1\text{)}.$$

Die gegebene Gleichung hat genau die Lösungen

$x_1 = 1$ und $x_2 = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}$.

Aufgabe 8

Angenommen, es gibt Lösungen der Gleichung, für die $x > 5$ ist, dann muß $5^y + 7 \equiv 0(64)$ gelten. Diese Beziehung gilt genau dann, wenn $y = 16k + 10$ $(k \in Z)$ ist, wie leicht durch Nachrechnen zu bestätigen ist. Nun gilt $5^{16k+10} + 7 \equiv 16(17)$ und $5^{16k+10} + 7 \equiv 2(3)$ und weiter

$2^x \equiv 16(17)$ genau dann, wenn $x = 8r + 4$ $(r \in Z)$, sowie
$2^x \equiv 2(3)$ genau dann, wenn $x = 2s + 1$ $(s \in Z)$.

Da notwendig $2^x \equiv 16(17)$ und $2^x \equiv 2(3)$ sein muß, ist x gleichzeitig gerade und ungerade. Dies stellt einen Widerspruch zur Existenzannahme dar. Somit kann es höchstens für $x \leq 5$ Lösungen der Gleichung geben. Durch Einsetzen der Zahlen 0, 1, ..., 5 für x erhält man als einzige Lösungspaare: (3,0) und (5,2).

Aufgabe 9

Es sei $a > 1$ eine natürliche Zahl und es gelte $T_i \equiv 0(a)$, wobei i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft sei. Es folgt $T_{i+1} \equiv T_i^2 - T_i + 1 \equiv 1(a)$ und analog weiter $T_j \equiv 1(a)$ für alle natürlichen Zahlen $j > i$. Nehmen wir an, daß $ggT(T_i, T_j) = a$ ist, so führen unsere zuvor durchgeführten Überlegungen zum Widerspruch, d. h., die Folgenglieder sind paarweise teilerfremd.

Zum Beweis der Behauptung b) geben wir die Beziehung
$\sum_{i=1}^{k} T_i^{-1} = 1 \; (T_{k+1} - 1)^{-1}$ an, die der interessierte Leser leicht durch vollständige Induktion nachweisen kann. Weiter findet man durch vollständige Induktion $T_{n+1} > T_n$. Da die Zahlen $T_n \in N$ sind, folgt unmittelbar die Behauptung.

B. Heise[1] zeigte sogar $T_{n+1} > 2^n$ durch vollständige Induktion. Wir geben nun weitere Beziehungen zwischen den Folgegliedern an, über die ebenfalls der Beweis geführt werden kann. Es gilt:
$T_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} T_i + 1$. Herr Hänler[1] gibt die Beziehung
$$T_1^{-1} + (T_1+1)^{-1} + (T_1T_2+1)^{-1} + \ldots + (T_1T_2\ldots T_k+1)^{-1} = 1 - \left(\prod_{i=1}^{k+1} T_i^{-1}\right)$$
an und Herr Thiel[1] nutzt diese Beziehung analog.

Aufgabe 10

Wir geben zunächst die Lösung von B. Kreußler[1] wieder.
Bei der konvexen Hülle dieser sechs Punkte handelt es sich um ein n-Eck mit $3 \leq n \leq 6$. Die Innenwinkelsumme des n-Ecks beträgt $(n-2) \cdot 180^\circ$. Somit existiert ein Innenwinkel, dessen Größe kleiner oder gleich $(n-2)n^{-1} \cdot 180^\circ$ ist. O.B.d.A. sei dies der Winkel

[1] Die Aufgabe wurde im Zentralen Korrespondenzzirkel der DDR gestellt. Die angeführten Schüler sind Mitglieder dieses Zirkels.

$\sphericalangle P_6P_1P_2$. In seinem Winkelraum liegen die Punkte P_3, P_4, P_5, wobei der Rand ausgeschlossen ist, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen sollen. Somit gibt es unter den Winkeln $\sphericalangle P_6P_1P_5$, $\sphericalangle P_5P_1P_4$, $\sphericalangle P_4P_1P_3$, $\sphericalangle P_3P_1P_2$ mindestens einen, dessen Größe kleiner oder gleich $(n-2)n^{-1} \cdot 180^\circ \cdot 0{,}25$ ist. (Die Numerierung der Punkte P_3, P_4, P_5 wird dabei o.B.d.A. so vorgenommen, daß sich die eben angegebenen Winkel nicht überschneiden.) Da $n \leq 6$, ist $6\,n - 12 \leq 4n$, d. h. $(n-2)n^{-1} \cdot 0{,}25 \leq 6^{-1}$. Nach Konstruktion existiert somit ein Winkel $\sphericalangle P_iP_1P_{i-1}$ mit $\sphericalangle P_iP_1P_{i-1} \leq (n-2)n^{-1} \cdot 180^\circ \cdot 0{,}25 \leq 30^\circ$ und $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, womit die Behauptung bewiesen ist.
Wir wollen nun einige andere Lösungsgedanken angeben, die allerdings gewisse Bezüge zur vorangestellten Lösung haben. Wir betrachten einen Kreis, der alle sechs Punkte enthält und verkleinern diesen so lange, bis ein Punkt auf der Peripherie liegt. Dieser Punkt sei o.B.d.A. P_1. Durch P_1 konstruieren wir an den Kreis die Tangente und legen auf ihr einen weiteren Punkt P fest. Die Punkte P_2, ..., P_6 befinden sich dann in der durch die Tangente gebildeten Halbebene, die den Mittelpunkt des Kreises enthält. Wir numerieren diese fünf Punkte o.B.d.A. so, daß $\sphericalangle PP_1P_i < \sphericalangle PP_1P_{i+1}$ $(i=2, 3, 4, 5)$. Dies ist möglich, da sich nach Voraussetzung keine drei Punkte auf einer Geraden befinden. Ist einer der Winkel $\sphericalangle P_iP_1P_{i+1}$ $(i=2, 3, 4, 5)$ kleiner gleich 30°, so gibt es nichts zu beweisen. Wir können deshalb davon ausgehen, daß jeder dieser Winkel größer als 30° ist, d. h., der Winkel $\sphericalangle P_2P_1P_6$ ist größer als 120°. Damit ist im Dreieck $P_2P_1P_6$ infolge der Innenwinkelsumme von 180° dann einer der anderen Winkel kleiner gleich 30°.
Ein anderer möglicher Weg ist folgender. Die sechs Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 6-Ecks mit der Innenwinkelsumme von 720°. Somit existiert mindestens ein Innenwinkel mit einer Größe von mindestens 120°. In dem Dreieck, das diesen Winkel enthält, ist dann infolge der Innenwinkelsumme einer der anderen Winkel kleiner oder gleich 30°. Bilden dagegen die sechs Punkte nicht die Eckpunkte eines konvexen 6-Ecks, so gibt es ein Dreieck, dessen Eckpunkte aus drei der gegebenen sechs Punkte gebildet werden und in dessen Inneren ein vierter der gegebenen Punkte echt enthalten ist, da keine drei der gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen sollen. O.B.d.A. sei dies das Dreieck mit $P_1P_2P_3$ und der

innere Punkt mit P_4 bezeichnet. Einer der Winkel $\sphericalangle P_1P_4P_2$, $\sphericalangle P_2P_4P_3$, $\sphericalangle P_3P_4P_1$ ist mindestens 120° groß, da die Summe der drei Winkel einen Vollwinkel bildet. Dies sei o.B.d.A. der Winkel $\sphericalangle P_1P_4P_2$. Durch den bereits mehrfach benutzten Schluß folgt, daß einer der Winkel $\sphericalangle P_4P_1P_2$ oder $\sphericalangle P_4P_2P_1$ kleiner oder gleich 30° ist.
Die Lösungsidee von A. Goede[1] besteht in folgendem: Wir betrachten zwei Punkte A, B der Ebene und schließen alle Punkte der Ebene aus, in denen sich Punkte C befinden, so daß das entstehende Dreieck ABC einen Winkel hat, der nicht größer als 30° ist. Diesen Gedanken führen wir dann mit den entstehenden Gebieten weiter und wir erhalten schließlich eine vollständige Überdeckung der Ebene. Zeichnerische Genauigkeit reicht hier allerdings nicht aus, sondern es muß eine exakte (analytische) Beschreibung vorgenommen werden.

Aufgabe 11
Wir setzen zunächst die in jedem Positionssystem geltende (und leicht zu beweisende) Ungleichung $s(a+b) \leq s(a)+s(b)$ mit $a, b \in N$ voraus. Weiter gilt sicher $s(1000\, n) = s(n)$ für $n \in N$. Damit ist
$s(n) = s(1000\, n) \leq s(800\, n) + s(200\, n)$
$\leq s(8n) + 2s(80n) + s(40n) \leq s(8n) + 2s(8n) + 5s(8n) = 8s(8n)$.
(Idee von B. Kreußler[1])
A. Fröhlich[1] benutzt den Spezialfall der eingangs erwähnten Ungleichung in folgender Weise: Es ist $s(2k) \leq 2s(k)$, $k \in N$ und hieraus folgt für $k=n$: $2s(2n) \leq 4s(n)$, für $k=2n$: $s(4n) \leq 2s(2n)$, für $k=4n$: $s(8n) \leq 2s(4n)$. Durch Kombination der drei Ungleichungen folgt: $s(8n) \leq 8s(n)$, also eine Abschätzung nach unten und damit eine Verallgemeinerung der Aufgabenstellung.
Die Schüler Schade[1] und Hänler[1] zeigten nachfolgenden Lösungsweg: Sei $\bar{n} = a_n a_{n-1} \ldots a_1$ die Darstellung der natürlichen Zahl $\bar{n}$ im Dezimalsystem. Dann ist $s(\bar{n}) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ und $s(8\bar{n}) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i$, wobei die Beziehungen $b_1 = 8a_1 - k \cdot 10$, $b_2 = 8a_2 - k_2 \cdot 10 + k_1$,
$b_3 = 8a_3 - k_3 \cdot 10 + k_2, \ldots, b_n = 8a_n - k_n \cdot 10 + k_{n-1}$, $b_{n+1} = k_n$ gelten und die Werte k_i als natürliche Zahlen so gewählt sind, daß $0 \leq b_i \leq 9$ gilt. Es ist also $0 \leq k_i \leq 7$. Durch Summation der Beziehungen ergibt sich: $\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 8 \sum_{i=1}^{n} a_i - 9 \sum_{i=1}^{n} k_i$. Da $7 \geq k_i$,

folgt $7 \sum_{i=1}^{n} k_i + 7n \geq 8 \sum_{i=1}^{n} k_i$. Weiter gilt $a_i \geq k_i + 1$, wie man leicht durch Nachrechnen der 10 Fälle bestätigt. Hieraus folgt $7 \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 7 \sum_{i=1}^{n} k_i + 7n$ und damit $7 \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 8 \sum_{i=1}^{n} k_i$. Schreiben wir diese Ungleichung in der Form $64 \sum_{i=1}^{n} a_i - 72 \sum_{i=1}^{n} k_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$ und benutzen wir die eingangs ausgedrückten Größen, ergibt sich sofort die Behauptung.

Auch die Methode der vollständigen Induktion führt bei der Aufgabenstellung zum Ziel, wie die Lösung von T. Apel[1] zeigt. Wir führen zunächst den Beweis für $8n < 1000$. Hieraus folgt $n < 125$ und $s(n) \leq 18$. Nehmen wir an, es gilt $s(n) > 8s(8n)$, dann folgt $s(8n) \leq 2$, da $s(8n)$ ganzzahlig ist. Dies impliziert $8n \leq 200$, also $n \leq 25$ und damit $s(n) \leq 10$. Hieraus folgt mit der Ungleichung $s(8n) \leq 1$, d. h., es verbleiben die Möglichkeiten $8n \in \{100, 10, 1, 0\}$. Infolge der Ganzzahligkeit folgt $n=0$, d. h. $s(n) = 8s(8n)$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist der Induktionsanfang realisiert. Es sei $8n$ k-stellig und es gelte $8s(8n) \geq s(n)$. Wir werden zeigen, daß für die (k+1)-stellige Zahl $8m$ die Ungleichung $8s(8m) \geq s(m)$ gilt. Es gilt $8m = a_k 10^k + 8n$ mit $a_k = 0,1,\ldots,9$. Durch Nachrechnen der 10 Fälle bestätigt man die Ungleichung $8a_k \geq s(125\, a_k)$. Hieraus folgt $a_k \geq \frac{1}{8} s(a_k \cdot 125 \cdot 10^{k-3})$ für $k \geq 3$, da Endnullen auf die Quersumme keinen Einfluß haben. Nun ist $s(8m) = a_k + s(8n) \geq \frac{1}{8} \left[s(n) + s(a_k\, 125\, 10^{k-3}) \right]$ nach Induktionsvoraussetzung. Benutzt man erneut die Ungleichung $s(a)+s(b) \geq s(a+b)$, so folgt $s(8m) \geq \frac{1}{8} s(n + a_k\, 125\, 10^{k-3}) = \frac{1}{8} s(m)$. Damit ist der Nachweis geführt.

Aufgabe 12

Für jedes n sei a_n die gesuchte Anzahl. Es gilt $a_0=1$, $a_1=1$, wobei als Permutation von 0 Elementen nur die leere Abbildung in Betracht kommt. Es sei nun $n \geq 2$. Wegen $|i_1 - 1| \leq 1$, $i_1 \in \{1,2,\ldots,n\}$ gilt $i_1 = 1$ oder $i\ = 2$.

a) Sei $i_1=1$. Die Anzahl dieser Permutationen beträgt a_{n-1}, da wir folgende eineindeutige Zuordnung herstellen können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ i_2-1 & i_3-1 & \ldots & i_n-1 \end{pmatrix}$$

b) Sei $i_2=1$. Es folgt $i_1=2$. Die Anzahl dieser Permutationen beträgt a_{n-2}, da wir folgende eineindeutige Zuordnung angeben können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 \\ i_3-2 & i_4-2 & \dots & i_n-2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Rekursionsformel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 2$) mit den oben angegebenen Anfangsgliedern. Es handelt sich um die Fibonaccische Zahlenfolge und es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

F. Bauernöppel[1] beschreitet folgenden Weg: Zunächst gibt er folgenden Hilfssatz an: Steht eine der Zahlen $1,2,\dots,n$, etwa k, in der Permutation auf dem Platz i_{k-1}, so steht $k-1$ auf dem Platz i_k und steht k auf i_{k+1}, so steht $k+1$ auf dem Platz i_k. Damit entsteht eine mögliche Anordnung der Zahlen durch eine paarweise Vertauschung der natürlichen Anordnung. Die Menge der Permutationen wird nun in Klassen zerlegt: In der Klasse K_i befinden sich alle Permutationen, bei denen das kleinste vertauschte Paar das Paar $(i-1,i)$ ist. ($i=2,3,\dots,n$, für $i=1$ wählen wir die identische Permutation.) Jede Permutation wird in genau einer Klasse erfaßt und folglich gilt: $a_n = \mathrm{card}K_1 + \mathrm{card}K_2 + \dots + \mathrm{card}K_n$.[2] Es gilt sicher $\mathrm{card}K_1 = \mathrm{card}K_n = 1$. In K_i können wir die Zahlen $i+1,\dots n$ ($n-1$ Stück) unter Beachtung der geforderten Bedingungen anordnen. Diese Anzahl ist äquivalent zur Anzahl der Anordnungen der ersten $n-i$ Zahlen $1,2,\dots,n-i$ und dies liefert die Anzahl a_{n-i}. Damit gilt $\mathrm{card}K_i = a_{n-i}$. Somit ergibt sich die Rekursionsformel: $a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + 2$ für alle n. Ersetzen wir in ihr n durch $n-1$ und subtrahieren die beiden Rekursionsformeln, so erhalten wir $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, d. h. unsere bereits bekannte Formel.

Aufgabe 13

Es sei $r = \frac{1}{2}(n+1)$. Ist ein x_i gleich Null, so gilt (4). Deshalb können wir voraussetzen, daß alle Zahlen x_i von Null verschieden sind. Wir betrachten die Zahlen $x_i(+) = S^{-1}x_i$ und bezeichnen mit $p(+)$ ihr Produkt und mit $s(+)$ ihre Summe. Es gilt

$p(+)x_i(+) \leq x_i^2(+)$, da $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(+) = 1$ ist. Durch Summation folgt

---

[2] Für eine endliche Menge M bezeichne cardM die Anzahl der Elemente in M.

$p(+)s(+) \leq 1$ und daraus durch Rücksubstitution $ps \leq S^r$.
Die Umkehrung zeigen wir indirekt. Es sei $r \neq \frac{1}{2}(n+1)$. Wir setzen $x_i = k > 0$ für jedes i und wählen k so, daß $ps > S^r$, d. h. $k^{n-2r+1} > n^{r-1}$ ist. Ist $n-2r+1 > 0$, so leistet $k > n^{(r-1)/(n-2r+1)}$ das Gewünschte. Ist jedoch $n-2r+1 < 0$, so wählen wir k aus $0 < k < n^{(r-1)/(n-2r+1)}$.

Aufgabe 14

Einleitend diskutieren wir zunächst die Entartungen.
Im weiteren wird dann die Lösung, die auf dem Satz von Apollonius beruht (Herr Giesecke[1]), vorgestellt. Daran anschließend zeigen wir die analytische Lösung von F. Bauernöppel[1]

1. Ist $A = B \notin g$, so ist für jedes $P \in g$ $\max \overline{AP}\,\overline{BP}^{-1} = \min \overline{AP}\,\overline{BP}^{-1} = 1$.
2. Ist $A = B \in g$, so ist für jedes $A \neq P \in g$ $\max \overline{AP}\,\overline{BP}^{-1} = \min \overline{AP}\,\overline{BP}^{-1} = 1$.
3. Sei $A \neq B$.

3.1. Ist $A, B \in g$, so ist $\min \overline{AP}\,\overline{BP}^{-1} = 0$ genau dann, wenn $A = P$ gilt. Ein Maximum existiert in diesem Fall nicht.

3.2. Ist $A \in g$ und $B \notin g$, so ist $\min \overline{PA}\,\overline{PB}^{-1} = 0$ genau dann, wenn $A = P$ gilt. Das Maximum wird genau dann angenommen, wenn $\sphericalangle ABP = 90^\circ$ ist (Sinussatz).

3.3. Ist $B \in g$ und $A \notin g$, so ist $\min \overline{PA}\,\overline{PB}^{-1} = 0$ genau dann, wenn $B = P$ gilt. Das Maximum wird genau dann angenommen, wenn $\sphericalangle BAP = 90^\circ$ ist (Sinussatz).

3.4. Sei $A, B \in g$.

3.4.1. g ist Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. In diesem Falle gilt für alle $P \in g$ $\overline{PA} = \overline{PB}$, d. h., das Minimum und das Maximum sind gleich 1.

3.4.2. Die Gerade durch A und B stehe senkrecht auf g. Der Schnittpunkt der Geraden sei S. O.B.d.A. sei $\overline{AS} > \overline{BS}$. Nach dem Satz von Pythagoras tritt das maximale Verhältnis genau dann auf, wenn $P = S$ ist. Ein Minimum gibt es in diesem Fall nicht.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Zunächst bemerken wir, daß es genügt, den Fall zu betrachten, daß A und B in derselben durch g gebildeten Halbebene liegen. Liegen A und B in verschiedenen Halbebenen, so können wir dies durch Spiegelung von B an g auf den eben erwähnten Fall zurückführen. Weiter werden wir uns nur für die Konstruktion des Minimums interessieren, denn es gilt $\max \overline{PA}\ \overline{PB}^{-1} = \min \overline{PB}\ \overline{PA}^{-1}$ und das letzte Minimum läßt sich analog behandeln.

Es seien Q_1 und Q_2 Punkte auf der Geraden durch A und B, die $\overline{AB}$ harmonisch teilen. Über $\overline{Q_1Q_2}$ sei der Kreis des Apollonius gezeichnet. Für jedes Verhältnis $\overline{Q_1A}\ \overline{Q_1B}^{-1}$ existiert ein solcher Kreis mit dem Ähnlichkeitszentrum A (bzw. B). Je größer der Abstand des Mittelpunktes des Kreises M von A ist, desto größer wird das Verhältnis. Da der oder die gesuchten Punkte P auf g liegen müssen, wird das minimale Verhältnis genau dann angenommen, wenn g Tangente an den Kreis ist.

Hieraus ergibt sich die (nicht explizit geforderte) Konstruktion.

a) Wir legen einen beliebigen Punkt Q_1 auf der Geraden durch A und B auf der Verlängerung über A hinaus fest.

b) In B wird ein beliebiger Strahl gezeichnet, der Q_1 nicht enthält. Die Strecke $\overline{BQ_1}$ wird auf diesem Strahl abgetragen. Es entsteht der Punkt C. Die Strecke $\overline{AQ_1}$ wird auf dem Strahl an C auf der Verlängerung über C hinaus angetragen. Es entsteht der Punkt D. Eine Parallele zu $\overline{DA}$ durch C schneidet die Gerade durch A und B im Punkt Q_2. Wir errichten über $\overline{Q_1Q_2}$ den Thaleskreis. Die Senkrechte zu g durch M schneidet den Kreis im Punkt E. Wir zeichnen die Strecke $\overline{AE}$. Der Schnittpunkt der Strecke oder deren Verlängerung mit der Geraden g ist der gesuchte Punkt P.

Sei A' bzw. B' der Fußpunkt des Lotes von A bzw. B auf g. O.B.d.A. sei $\overline{A'B'} = 1$. Weiter wählen wir folgende Bezeichnungen: $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$, $\overline{A'P} = q$, $\overline{B'P} = p$. Es ist $q+p=1$. Nun gilt: $\overline{PA}^2\ \overline{PB}^{-2} = (a^2 + (1-p)^2)(b^2 + p^2)^{-1}$. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion nimmt $\overline{PA}^2\ \overline{PB}^{-2}$ genau dort Extremwerte an, wo auch $\overline{PA}\ \overline{PB}^{-1}$ extrem ist. Die lokalen Extreme werden nun durch Differentiation durch p durch Nullsetzen der ersten Ableitung ermittelt. Da sich $\overline{PA}\ \overline{PB}^{-1}$ im Unendlichen dem Grenzwert 1 nähert, ist auf Grund der Stetigkeit gesichert, daß die ermittelten Werte $p_{1,2} = \frac{1}{2}(a^2-b^2-1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a^2-b^2-1)^2 + b^2}$ der Funktion tatsächlich Extremwerte erteilen. Auf die Konstruktion der p-Werte wird verzichtet.

Aufgabe 15

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Die Strecken $\overline{AB} = b$ und $\overline{CD} = c$ liegen auf einer Geraden g. Sei M ein beliebiger Punkt der Ebene, dessen Abstand von g mit h bezeichnet sei. Notwendig und hinreichend dafür, daß M zum geometrischen Ort gehört, ist $h(b+c) = 2a^2$, da $F(AMB) = 0{,}5\ bh$ und $F(CMD) = 0{,}5\ ch$ gilt. Somit wird in diesem Fall der geometrische Ort aller Punkte M der Ebene durch zwei zu g parallele Geraden im Abstand $2a^2(b+c)^{-1}$ gebildet.
2. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegen auf den parallelen Geraden g_1 und g_2. Der Abstand dieser Geraden sei d. Ein beliebiger Punkt M der Ebene habe von g_i den Abstand h_i $(i=1, 2)$.
   a) Wir betrachten einen Punkt M in der von g_1 gebildeten Halbebene, die g_2 nicht enthält. Es ist dann $h_2 = h_1 + d$. Notwendig und hinreichend dafür, daß M zum gesuchten geometrischen Ort gehört, ist infolge der Dreiecksflächenformel: $(b+c)h_1 = 2a^2 - cd$. Damit ergibt sich: Genau dann gehört eine Gerade, die zu g_1 parallel ist und in der betrachteten Halbebene liegt, zum gesuchten geometrischen Ort, wenn $2a^2 \geq cd$ gilt. Im Falle des Gleichheitszeichens fällt die Gerade mit g_1 zusammen.
   b) Wir betrachten einen Punkt M in der von g_2 gebildeten Halbebene, die g_1 nicht enthält. Es gilt in Analogie zum Fall a): Genau dann gehört eine Gerade, die zu g_2 parallel ist und in der betrachteten Halbebene liegt, zum gesuchten geometrischen Ort, wenn $2a^2 \geq cd$ gilt. Diese Gerade hat von g_2 den Abstand h_2 mit $(b+c)h_2 = 2a^2 - cd$.
   c) Wir betrachten einen Punkt M, der zwischen g_1 und g_2 liegt. Es ist $h_1+h_2 = d$. Infolge der Dreiecksflächenformel ergibt sich: Notwendig und hinreichend dafür, daß M zum gesuchten geometrischen Ort gehört ist:
   $(b-c)h_1 = 2a^2-cd$ mit $0 \leq h_1 \leq d$.
   Hieraus ergeben sich folgende Fälle:
      I) Ist $b=c$ und $2a^2=cd$, so gehört jeder Punkt, der zwischen g_1 und g_2 liegt, zum geometrischen Ort.
      II) Ist $b=c$ und $2a^2 \neq cd$, so gehört kein Punkt, der zwischen g_1 und g_2 liegt, zum geometrischen Ort.
      III) Ist $b > c$ und $2a^2 \geq cd$ und $h_1 \leq d$, ist also $bd \geq 2a^2 \geq cd$, so gehört die Gerade, die parallel zu g_1 ist und

zwischen g_1 und g_2 liegt, mit dem Abstand h_1, wobei $(b-c)h_1 = 2a^2-cd$ gilt, zum geometrischen Ort.

IV) Ist $b > c$ und $2a^2 < cd$, so gehört kein Punkt zwischen g_1 und g_2 zum geometrischen Ort.

V) Ist $b < c$ und $2a^2 \leq cd$ und $h_1 \leq d$, ist also $bd \leq 2a^2 \leq cd$, so gehört die zu g_1 parallele Gerade, die zwischen g_1 und g_2 liegt, im Abstand h_1 zum geometrischen Ort.

VI) Ist $b < c$ und $2a^2 > cd$, so gehört kein Punkt zwischen g_1 und g_2 zum geometrischen Ort.

3. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegen auf den Geraden g_1 und g_2, die sich in genau einem Punkt S schneiden. Notwendig und hinreichend dafür, daß M zum geometrischen Ort gehört, ist: $bh_1 + ch_2 = 2a^2$. Wir legen die Punkte E, F, G, H auf g_1 bzw. g_2 fest, für die entweder h_1 oder h_2 verschwindet. Diese Punkte gehören offenbar zum gesuchten geometrischen Ort. Wir betrachten nun den Winkelraum FSG, wobei $F \in g_2$ und $G \in g_1$ gelte und wählen einen Punkt M auf $\overline{FG}$. Der Abstand von F zu g_1 sei mit $d(F,g_1)$ und der von G zu g_2 mit $d(G,g_2)$ bezeichnet. Dann ist nach Strahlensatz:

$h_1 d^{-1}(F,g_1) = \overline{GM}\ \overline{FG}^{-1}$ und $h_2 d^{-1}(G,g_2) = \overline{FM}\ \overline{FG}^{-1}$, also

$h_1 d^{-1}(F,g_1) + h\ d^{-1}(G,g_2) = 1$. Weiter ist $bd(F,g_1) = cd(G,g_2)$ $= 2a^2$ nach Konstruktion. Somit ist

$$\begin{aligned} bh_1 + ch_2 &= bd(F,g_1)\left[1 - h_2 d^{-1}(G,g_2)\right] + ch_2 \\ &= 2a^2 + h_2 d^{-1}(G,g_2)\left[cd(G,g_2) - bd(F,g_1)\right] = 2a^2, \text{ d. h.,} \end{aligned}$$

alle Punkte M der Strecke $\overline{FG}$ gehören in diesem Winkelraum zum gesuchten geometrischen Ort. Wir zeigen nun, daß es in diesem Winkelraum keine weiteren Punkte gibt, die zum geometrischen Ort gehören. Wir ordnen jedem $M' \notin \overline{FG}$ eineindeutig einen Punkt M auf $\overline{FG}$ zu, indem wir durch M' eine Parallele zu g_1 zeichnen und ihren Schnittpunkt mit der Strecke $\overline{FG}$ mit M bezeichnen. Dann gilt offenbar: $h_2 \neq h_2'$. Analog der obigen Betrachtungsweise ist dann:

$h_1 d^{-1}(F,g_1) + h_2' d^{-1}(G,g_2) \neq 1$ und hieraus folgt analog:

$bh_1 + ch_2' = 2a^2$, womit der Nachweis gelungen ist.

Betrachten wir nun die gesamte Ebene, so ergeben sich (in Analogie) als geometrischer Ort die Strecken $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$, oder anders gesagt: Der gesuchte geometrische Ort ist der Rand des Parallelogramms EFGH.

Auswertung der Einsendungen zur Sonderaufgabe aus dem Sonderheft 1977

Es ging nur eine Lösung vom Schüler Uwe S z y s z k a (Klasse 11, EOS "Friedrich Engels", Neubrandenburg) ein. Für dieses schwierige Problem gab er einen sehr eleganten Beweis, den wir im folgenden wiedergeben:

$$a^b + b^a > 1 \tag{20}$$

gilt sicher für $a \geqq 1$ oder $b \geqq 1$.

Es sei nun $0 < a, b < 1$. Wir benutzen die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n < 1 + nx \tag{21}$$

für reelle x und n mit $-1 < x \neq 0$, $0 < n < 1$.

((21 kann sehr einfach mittels der Taylorformel bewiesen werden:

$(1 + x)^n - 1 - nx = \frac{n(n-1)x^2}{2}(1 + \vartheta x)^{n-2} < 0$ $(0<\vartheta<1)$.)

Wegen $0 < 1-a, 1-b < 1$ ist

$a^{1-b} = (1 + (a-1))^{1-b} < 1 + (1-b)(a-1) = a + b - ab,$

$b^{1-a} = (1 + (b-1))^{1-a} < 1 + (1-a)(b-1) = a + b - ab$ und somit

$a^b+b^a = \frac{a}{a^{1-b}} + \frac{b}{b^{1-a}} > \frac{a + b}{a+b-ab} > 1.$

Der Schüler Szyszka wies auch darauf hin, daß (20) auch unter Kenntnis der einfachsten Form der Bernoullischen Ungleichung

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx \tag{22}$$

mit natürlichem n und reellem $x \geqq -1$, bewiesen werden kann.

Für alle reellen Zahlen a, b mit $0 < a, b < 1$ existieren natürliche Zahlen m und n mit

$$\frac{1}{n} > a \geqq \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} > b \geqq \frac{1}{m+1}.$$

Also ist $a^b > \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/m}$ und $b^a > \left(\frac{1}{m+1}\right)^{1/n}$.

Es reicht damit schon zu zeigen, daß

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqq 1 \tag{23}$$

gilt. Wegen (22) ist

$\left(1 + \frac{n}{m}\right)^m \geqq 1 + n$, d. h. $\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geqq \frac{1}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{m}{m+n}$ und analog

$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqq \frac{1}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}$, woraus sofort (23) folgt.

Der Schüler erhielt ein Anerkennungsschreiben.

Ergänzungen zu früheren Heften dieser Reihe

Heft 6, Seite 3, Aufgabe 3:
Der Schüler U. Szyszka[1] gibt folgende Lösung. Angenommen, die Gleichung hat Lösungen mit $x \geq 3$. Dann ist wegen $3^x(3^{x-1}+1)=7^y-1$ $7^y-1 \equiv 0(27)$. Die Untersuchung der Restklassen $7^y(27)$ liefert dann $y=9k$ $(k \in N)$. $7^{9k}-1$ läßt bei Division durch 13 die Reste 0, 4, 7 oder 11. $3^x(13)$ liefert die Reste 1, 3 oder 9 und damit läßt $3^x(3^{x-1}+1)$ (13) die Reste 6 oder 10, d. h., für $x \geq 3$ gibt es keine Lösungen. Durch Probieren der restlichen Werte ergibt sich nur das Paar (1,1) als Lösung.

Eine andere Lösung gibt S. Thiel[1]. Für $x=0$ ergibt sich keine Lösung. Sei nun (x,y) ein Lösungspaar mit $x,y \geq 1$, dann ist $3^x \mid 7^y-1$. 3^a sei die größte Dreierpotenz $(a \in N)$, die y teilt, d. h., es ist $y=3^a z$ mit $ggT(3,z)=1$. Damit ist $3^x \mid 7^{3^a z}-1$. Nun ist aber $7^{3^a z}-1 = (7^{3^a(z-1)}+7^{3^a(z-2)}+\ldots+7^{3^a}+1)(7^{3^a}-1)$, wobei der erste Faktor genau z Summanden enthält, die alle kongruent 1(3) sind. Da $3 \nmid z$ war, ist dieser Faktor nicht durch 3 teilbar.
Somit ist (1) $3^x \mid 7^{3^a}-1$. Für $a \geq 1$ ist
$7^{3^a}-1 = (7^{3^{a-1}}-1)(7^{3^{a-1}\,2}+7^{3^{a-1}}+1)$. Der zweite Faktor ist durch 3, nicht aber durch 9 teilbar, denn es ist $7^3 \equiv 1(9)$, d. h., für $a \geq 2$ ist der zweite Faktor kongruent 3(9). Für $a=1$ ist er gleich 57. Damit folgt aus (1) für $a,x \geq 1$ sofort $3^{x-1} \mid 7^{3^{a-1}}-1$.
Hieraus folgt (2) $3^{x-b} \mid 7^{3^{a-b}}-1$ mit $0 \leq b \leq \min(a,x)$. Nun ist $3^x \geq 3^{x-1}+1$, $3^a=(1+2)^a \geq 1+2a > 2a$ und $7^y-1=7^{3^a z}-1 \geq 7^{3^a}-1$. Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung folgt $3^{2x} \geq 7^{3^a}-1 > 7^{2a}-1$, d.h. $3^{2x} \geq 7^{2a}$ und daraus $x > a$. Mit (2) ergibt dies $3^{x-a} \mid 6$ und damit $a = x-1$. Also ist $3^x(3^{x-1}+1) = 7^{3^{x-1}z}-1$, $3^x(3^{x-1}+1) \geq 7^{3^{x-1}}-1$ und weiter $3^{2x} = 9^x \geq 7^{3^{x-1}}$. Wegen $3^{x-1} = (1+2)^{x-1} \geq 1+2(x-1) =$ $= 2x-1$ folgt $9^x \geq 7^{2x-1}$, d. h. $7 \geq (\frac{49}{9})^x > (\frac{27}{9})^x = 3^x$. Damit ist nur $x=1$ als Lösung möglich. (1,1) ist aber tatsächlich Lösung.

Heft 6, Seite 4, Aufgabe 5:
Nachfolgende Lösung stammt von der Schülerin K. Helbig.[1]

[1] Die Aufgabe wurde im Zentralen Korrespondenzzirkel der DDR gestellt. Die angeführten Schüler sind Mitglieder dieses Zirkels.

S_1, der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks $A_1B_1C_1$, falle mit dem Koordinatenursprung zusammen.
Weiter sei $a_k = \overrightarrow{S_1A_k}$, $b_k = \overrightarrow{S_1B_k}$ und $c_k = \overrightarrow{S_1C_k}$. Es ist

$a_1+b_1+c_1 = 3s_1 = 0.$ (1)

Es sei D(a) der im mathematisch negativen Sinn um 60° gedrehte Vektor a. Offenbar gilt dann:

(I) $D(a+b) = D(a)+D(B)$

(II) $D(\lambda a) = \lambda D(a)$ mit $\lambda \in R^1$ und

(III) $D(a) = a + D(D(a)) = a + D^2(a)$.

Nun ist $\overrightarrow{S_1C'} = a_1 + D(b_1-a_1)$, $\overrightarrow{S_1A'} = b_1 + D(c_1-b_1)$, $\overrightarrow{S_1B'} = c_1 + D(a_1-c_1)$ und daraus folgt

$a_2 = 0{,}5(a_1+c_1) + 0{,}5D(b_1-c_1)$, $b_2 = 0{,}5(a_1+b_1) + 0{,}5\,D(c_1-a_1)$, $c_2 = 0{,}5(b_1+c_1) + 0{,}5D(a_1-b_1)$. Analog ergibt sich für $k \geq 2$, $k \in N$:

$$a_k = 0{,}5((a_{k-1}+c_{k-1})+D(b_{k-1}-c_{k-1}))$$
$$b_k = 0{,}5((a_{k-1}+b_{k-1})+D(c_{k-1}-a_{k-1}))$$
$$c_k = 0{,}5((b_{k-1}+c_{k-1})+D(a_{k-1}-b_{k-1}))$$

und durch Addition (2) $a_k+b_k+c_k = a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1} = 0$ (wegen (1)), d. h., alle Dreiecke der Folge haben den gleichen Schwerpunkt.

Nun ist $b_{k+1} = 0{,}5(b_k+a_k+D(c_k-a_k)) = 0{,}25(a_{k-1}+b_{k-1}+D(c_{k-1}-a_{k-1})$
$a_{k-1}+c_{k-1}+D(b_{k-1}-c_{k-1})+D(b_{k-1}+c_{k-1}+D(a_{k-1}-b_{k-1})-a_{k-1}-c_{k-1}$
$-D(b_{k-1}-c_{k-1}))) = 0{,}25(2a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}+D(b_{k-1}-a_{k-1})$
$+D(b_{k-1}-a_{k-1}+D(a_{k-1}-2b_{k-1}+c_{k-1})))$
$= 0{,}25(a_{k-1}+D(b_{k-1}-a_{k-1})+D(b_{k-1}-a_{k-1}+D(-3b_{k-1})))$ (wegen (2))
$= 0{,}25(a_{k-1}+3D(b_{k-1})+D(-b_{k-1}-2a_{k-1})-3D^2(b_{k-1}))$
$= 0{,}25(a_{k-1}+3b_{k-1}+D(c_{k-1}-a_{k-1}))$ (wegen (2), (III)) und folglich
$b_{k+1} = 0{,}5(b_{k-1}+0{,}5(a_{k-1}+b_{k-1})+0{,}5D(c_{k-1}-a_{k-1})) = 0{,}5(b_{k-1}+b_k)$.

Hieraus folgt

$2b_{k+1}+b_k=2b_k+b_{k-1}=2b_2+b_1$ und $b_{k+1}-b_k=-0{,}5(b_k-b_{k-1})$, also $b_{k+1}-b_k=(-0{,}5)^{k-1}(b_2-b_1)$. Aus diesen Beziehungen erhält man $b_{k+1}=\frac{1}{3}(2b_2+b_1+(-0{,}5)^{k-1}(b_2-b_1))$ und daraus

$$\lim_{k\to\infty} b_{k+1} = b_o = \frac{1}{3}(2b_2 + b_1) \quad \text{und analog}$$
$$a_o = \frac{1}{3}(2a_2 + a_1) \qquad c_o = \frac{1}{3}(2c_2 + c_1).$$

Dreieck $A_oB_oC_o$ stellt also das gesuchte Grenzdreieck dar (A_o, B_o, C_o liegen nicht auf einer Geraden!).
Weiter ist $b_o = \frac{1}{3}(a_1+2b_1+D(c_1-a_1))$, $a_o = \frac{1}{3}(2a_1+c_1+D(b_1-c_1))$, $c_o = \frac{1}{3}(b_1+2c_1+D(a_1-b_1))$ und damit $a_o-c_o= D(b_o-c_o)$, wie man leicht verifiziert. Somit ist das Grenzdreieck sogar gleichseitig.

<u>Berichtigung:</u>

In Heft 6, Seite 13, muß es richtig heißen:
Bemerkung: Durch analoge Überlegungen läßt sich $I(f^n, a, b) \leq (b-a)^{1-n}2^n(1+n)^{-1}$ zeigen.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 8

Sonderaufgabe

Man zeige, daß es für jede reelle Zahl x und jede reelle Zahl $\varepsilon >$ 0 ganze Zahlen p und q gibt, so daß

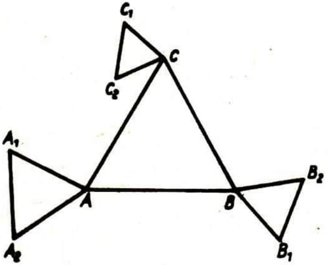
$$\left| p - q \cdot x \right| < \varepsilon$$

gilt.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind vier gleichseitige Dreiecke ABC, AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2. Man zeige, daß die Mittelpunkte der Strecken A_1C_2, B_1A_2 und C_1B_2 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.



Aufgabe 2

Es seien m und n natürliche Zahlen mit $n > m \geq 1$. Die Dezimaldarstellungen von 1978^m und 1978^n mögen beide auf denselben Dreierblock von Ziffern enden. Bestimmen Sie m und n so, daß $m + n$ minimal wird.

(XX. IMO in Bukarest, Aufgabensteller: Kuba)

Aufgabe 3

Die Menge aller positiven ganzen Zahlen sei die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen

$$\{f(1),\ f(2),\ \ldots,f(n),\ \ldots\}$$

und

$$\{g(1),\ g(2),\ \ldots,g(n),\ \ldots\}\ ,$$

wobei

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots \text{ und } g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

und

$$g(n) = f(f(n)) + 1\ , \qquad n \geq 1, \tag{2}$$

sein möge. Man bestimme f(240).

(XX. IMO in Bukarest, Aufgabensteller: Großbritannien)

Aufgabe 4

Sei durch $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = 18\, a_{n+1} - a_n$ eine Folge gegeben. Zeigen Sie, daß für alle i die Zahl $5\, a_i^2 - 1$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 5

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder T_1. Man errichte nach außen auf den vier Seiten vier neue kongruente Tetraeder. Die vier neu entstehenden Eckpunkte bilden ein neues regelmäßiges Tetraeder T'. Aus den Schwerpunkten der Seitenflächen dieses Tetraeders ergibt sich ein neues Tetraeder T_2, das ebenfalls regelmäßig ist. Analog wird nun aus dem regelmäßigen Tetraeder T_n das regelmäßige Tetraeder T_{n+1} ($n = 2, 3, \ldots$) konstruiert. Konvergiert die Folge T_n und falls die Frage zu bejahen ist, beschreiben Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6

Gegeben seien die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.

Für welche Permutation a, b, c, d der Indizes 1, 2, 3, 4 nimmt der Ausdruck

$$(x_a - x_b)^2 + (x_b - x_c)^2 + (x_c - x_d)^2 + (x_d - x_a)^2$$

sein Minimum an?

Aufgabe 7

Sei f(x) ein Polynom mit ausschließlich reellen Koeffizienten, das (für alle reellen Zahlen x) nur nichtnegative Werte annimmt. Man zeige, daß es Polynome g(x) und h(x) mit ausschließlich reellen Koeffizienten gibt, so daß

$$f(x) = g(x)^2 + h(x)^2$$

ist.

Aufgabe 8

Man konstruiere ein Trapez ABCD, für das die Seiten AB und CD parallel sind und für das die Maßzahlen e bzw. f der Diagonalen AC bzw. BD sowie die Maßzahlen b bzw. d der Seiten BC und DA gegeben sind. Dabei sei $e \neq f$ vorausgesetzt.

Aufgabe 9

Man zeige, daß es zu jeder reellen Zahl x solche ganzen Zahlen a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, mit $a_0 \neq 0$ gibt, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{n!} = 0$$

ist.

Aufgabe 10

Man zeige: falls für die ganzen Zahlen a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, die Ungleichungen $0 < |a_n| \leq k$ erfüllt sind, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$$

gegen eine irrationale Zahl.

Aufgabe 11

Sind α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4}. \qquad (10)$$

Aufgabe 12

Es sei ABC ein Dreieck mit gleichlangen Seiten AB und AC. Ein Kreis K berühre sowohl den Umkreis des Dreiecks von innen als auch die Seiten AB und AC. Die Berührungspunkte von K mit den Seiten AB bzw. AC seien P bzw. Q. Man beweise, daß der Mittelpunkt R der Strecke PQ der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC ist.

(XX. IMO in Bukarest, Aufgabensteller USA)

Aufgabe 13

Man bestimme alle Quadratzahlen der Menge

1, 11, 111, 1111, ...
2, 22, 222, 2222, ...
...
9, 99, 999, 9999, ...

Aufgabe 14

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle$ ABC. Jeder der drei Eckpunkte wird an der gegenüberliegenden Seite gespiegelt. Dabei entstehe das Dreieck $\triangle$ A'B'C' aus den Bildpunkten. Man zeige:

$$F_{A'B'C'} \leq 4 \cdot F_{ABC}$$

Lösungen

Aufgabe 1

Die Punkte seien in der Gaußschen Ebene mit A als Nullpunkt gedeutet. Wir setzen:

$$a = A_1 - A,$$
$$b = B_1 - B,$$
$$c = C_1 - C,$$
$$d = B - A.$$

Dann gilt für die Mittelpunkte m_1, m_2, m_3 der Strecken A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1:

$$m_1 = \frac{1}{2}(a \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + d + b),$$
$$m_2 = \frac{1}{2}(d + b \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + d \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + c),$$
$$m_3 = \frac{1}{2}(a + d \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + c \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}).$$

Offenbar ist die Aufgabe gelöst, wenn die Beziehung

$$(m_2 - m_1) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = m_3 - m_1 \tag{1}$$

gezeigt ist.

Nun ist einerseits:

$$\begin{aligned} m_3 - m_1 &= \frac{1}{2}\left[(d + c - a)e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + a - d - b\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(a - d)(1 - e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}) - b + c \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\right] \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (m_2-m_1) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} &= \frac{1}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\left[(b + d - a)e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} + d + c - d - b\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(b + d - a)e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + (c - b)e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[b(e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} - e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}) + (d - a)e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + c \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[- b - (a - d)e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + c \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[- b + (a - d)(1 - e^{i.\frac{\pi}{3}}) + c \cdot e^{i.\frac{\pi}{3}}\right] .$$

Daher ist (1) erfüllt.

Aufgabe 2

Es ist $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$. Da $n > m$, $(4,1978) = 2$ und $1978^{n-m} - 1$ ungerade ist, ist $m \geq 3$ für die Teilbarkeit durch 8 notwendig und hinreichend. Ferner ist zu zeigen, daß $1978^{n-m} - 1 \equiv 0(125)$ für geeignetes m und n ist. $1978^k \bmod 10$ durchläuft die Restklassen 8, 4, 2, 6, d.h. es gilt $1978^k - 1 \equiv 0(5)$ genau dann, wenn $k = 4l$ $(l \in N)$ ist. $1978^{4l} = \ldots 256^l \bmod 100$ ergibt die Restklassen 56, 36, 16, 96, 76, d.h. $1978^{4l} - 1$ ist genau dann durch 25 teilbar, wenn $l = 5p$ $(p \in N)$ ist. Weiter ist $1978^{20p} = \ldots 256^{5p} = \ldots 776^p$ und da $776^p \bmod 1000$ die Restklassen 776, 176, 576, 976, 376 durchläuft, folgt $p = 5q$ $(q \in N)$. Somit gilt $1978^k - 1 \equiv 0(125)$ genau dann, wenn $k = 100\,q$ ist. Unter den geforderten Minimalbedingungen folgt dann $m = 3$ und $n = 103$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die g(n) natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, g(n).$$

Unter ihnen befinden sich nach Konstruktion die n Zahlen

$$g(1), g(2), \ldots, g(n) \tag{3}$$

und die f(n) Zahlen

$$f(1), f(2), \ldots, f(f(n)). \tag{4}$$

Daher ist $g(n) \geq f(n) + n$. Angenommen, es ist $g(n) > f(n) + n$. Dann gibt es eine Zahl z, $1 \leq z < g(n)$, die weder in (3) noch in (4) aufgezählt ist. Folglich ist $z = f(t)$, $t \geq f(n) + 1$. Dann ist $f(t) \geq f(f(n) + 1) > f(f(n))$, also $z = f(t) \geq g(n)$. Daher ist die Annahme falsch und es ist

$$g(n) = f(n) + n \tag{5}$$

und

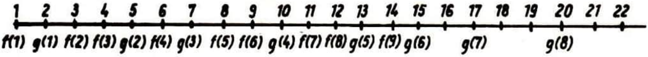
$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergeben sich die folgenden Aussagen.

$g(1) = f(1) + 1 > 1$, also $1 = f(1)$. Wegen $g(2) = f(2) + 2 > f(1) + 2 = 3$ und $g(1) = f(1) + 1 = 2$ ist $f(2) = 3$. Nun ist

$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 2 - 1 = 4$, $f(4) = 4 + 3 - 1 = 6$, $f(6) = 9$, $f(9) = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$ und $g(35) = 56 + 35 = 91$. Da $g(36) \neq 92$ ist, folgt $f(57) = 92$ und weiter $f(92) = 92 + 56 = 148$, $f(148) = 239$, $f(239) = 386$. Es ist $g(148) = 239 + 148 = 387$ und somit $f(240) = 388$.

Ohne den eben beschriebenen Kunstgriff zur Berechnung von $f(240)$ kommt man ausgehend von $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $g(1) = 2$ auch zum Wert $f(240)$, indem man z.B. die Beziehung (5) zur Berechnung der Funktionswerte $g(n)$, $n = 2, 3, \ldots$ verwendet und die dabei nicht erfaßten natürlichen Zahlen der Reihe nach als Funktionswerte $f(n)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ ansieht. Der Anfang dieser Durchmusterung ist in der folgenden Tabelle erfaßt.



Aufgabe 4

Wir betrachten die charakteristische Gleichung $q^2 - 18q + 1 = 0$ mit den Lösungen $q_{1/2} = 9 \pm 4\sqrt{5}$. (Zum Studium der Theorie empfehlen wir: A.I. Markuschewitsch, Rekursive Folgen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 3. Aufl., Berlin 1973).

Somit gilt $a_n = A\,(9 + 4\sqrt{5})^n + B\,(9 - 4\sqrt{5})^n$, wobei die Größen A und B sich aus den Anfangswerten zu $A = (85 - 38\sqrt{5})/10$ und $B = (85 + 38\sqrt{5})/10$ ergeben. Hieraus ergibt sich

$$5\,a_n^2 - 1 = (\sqrt{5}((85-38\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n/10 - (85+38\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})^n/10))^2.$$

Es verbleibt der Nachweis, daß die in Klammern stehende Zahl für alle n eine natürliche Zahl darstellt. Dieser Nachweis gelingt über die Binomische Formel:

$$\sqrt{5}\,((85-38\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^n/10 - (85+38\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})^n/10)$$
$$= \sqrt{5}\,\frac{85}{10}\sum_{\substack{i=0\\ i\ \text{ungerade}}}^{n} 2\binom{n}{i} 9^{n-i}(4\sqrt{5})^i - 19\sum_{\substack{i=0\\ i\ \text{gerade}}}^{n} 2\binom{n}{i} 9^{n-i}(4\sqrt{5})^i$$

und die beiden letzten Terme sind ganze Zahlen, da sich der Nenner 10 herauskürzt und der Faktor $\sqrt{5}$ stets in gerader Potenz auftritt.

Aufgabe 5

T_1 habe die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 mit $P_1(a,0,-\sqrt{\frac{2}{3}}a)$, $P_2(a\cos 120^\circ, a\sin 120^\circ, -\sqrt{\frac{2}{3}}a)$, $P_3(a\cos 240^\circ, a\sin 240^\circ, -\sqrt{\frac{2}{3}}a)$ und $P_4\ (0,0,\frac{2\sqrt{2}}{3}a)$. Für den Schwerpunkt gilt: $S(0,0,-\frac{\sqrt{2}}{12}a)$. Man verifiziert leicht, daß T_1 regelmäßig ist. Sei S_{ijk} der Schwerpunkt des Dreiecks, das aus den Punkten P_i, P_j und P_k gebildet wird, Dann gilt:

$S_{123} = (0,0,-\sqrt{\frac{2}{3}}a)$, $S_{124}(\frac{1}{6}a, \frac{1}{6}a\sqrt{3},0)$, $S_{134}(\frac{1}{6}a, -\frac{1}{6}a\sqrt{3},0)$ und

$S_{234}(-\frac{1}{3}a,0,0)$.

Die Ecken von T' ergeben sich durch Vektoraddition zu $2S_{ijk} - P_l$ mit $l \neq i,j,k$, wobei wir berücksichtigen, daß der Vektor P_lS_{ijk} auf der durch die Punkte P_i, P_j, P_k bestimmten Ebene senkrecht steht. Also ist

$P_1'(-\frac{5}{3}a,0,\sqrt{\frac{2}{3}}a)$, $P_2'(\frac{5}{6}a,-\frac{5}{6}a\sqrt{3},\sqrt{\frac{2}{3}}a)$, $P_3'(\frac{5}{6}a, \frac{5}{6}a\sqrt{3},\sqrt{\frac{2}{3}}a)$

und

$P_4'(0,0,-\frac{4\sqrt{2}}{3}a)$

Hieraus ergeben sich für T_2 die neuen Eckpunkte, die wir wieder mit P_1, P_2, P_3 und P_4 bezeichnen.

Es ist

$P_1 = (\frac{5}{9}a,0,-\frac{2\sqrt{2}}{9}a)$, $P_2 = (-\frac{5}{18}a, \frac{5}{18}a\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}a)$,

$P_3 = (-\frac{5}{18}a, -\frac{5}{18}a\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}a)$ und $P_4 = (0,0,\sqrt{\frac{2}{3}}a)$.

Der Schwerpunkt von T_2 fällt mit dem von T_1 zusammen. Für die Kantenlänge von T_1 ist $k_1 = a\sqrt{3}$ und für T_2 ist $k_2 = \frac{5}{9}a\sqrt{3} < k_1$. Vollkommen analog erhalten wir nun durch vollständige Induktion und Betrachtung der Tetraeder T_n und T_{n+1} die Beziehungen:

a) Alle Tetraeder haben den gleichen Schwerpunkt S.

b) Es ist $k_n = (\frac{5}{9})^{n-1}a\sqrt{3}$.

Damit gilt: $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, d.h. die Folge ist konvergent und der Grenzwert stellt den Schwerpunkt S des Ausgangstetraeders dar, da das Koordinatensystem o.B.d.A. gewählt wurde.

Aufgabe 6

Der Ausdruck sei mit z bezeichnet. Dann ist

$$z = 2 \cdot (x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_d^2) - 2 \cdot (x_a x_b + x_b x_c + x_c x_d + x_d \cdot x_a) \to \text{Min}$$

gleichbedeutend mit

$$x_a x_b + x_b x_c + x_c x_d + x_d \cdot x_a \to \text{Max}$$

Nun ist

$$x_a \cdot x_b + x_b \cdot x_c + x_c \cdot x_d + x_d \cdot x_a = (x_a + x_c)(x_b + x_d)$$

und ferner ist

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \leqq (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

gleichwertig mit

$$0 \leqq (x_4 - x_3)(x_2 - x_1) \qquad (7)$$

und

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \leqq (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$$

gleichwertig mit

$$0 \leqq (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \qquad (8)$$

Die Ungleichungen (7) und (8) sind nach Voraussetzung erfüllt. Daher ist

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) \leqq (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \leqq (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \qquad (9)$$

Daher gehört (1, 2, 4, 3) zu den gesuchten Permutationen. Indem man in dem Produkt $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ die Faktoren untereinander oder die Summanden innerhalb von Klammern vertauscht, ändert man nicht den Wert und erhält damit die weiteren Permutationen (1,3,4,2), (4,2,1,3), (4,3,1,2), (2,1,3,4), (2,4,3,1), (3,1,2,4) und (3,4,2,1).

Weitere Permutationen kommen nicht in Frage, da etwa x_1 mit einem gewissen Partner in einer Klammer stehen muß und auf diese Weise nur die drei Produkte aus (9) zu bilden sind.

Aufgabe 7

Für ein konstantes Polynom f(x) ist die Behauptung gewiß richtig. Jede reelle Nullstelle von f(x) muß eine geradzahlige Vielfachheit haben. Sei etwa

$$R(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - x_i)^{2 \cdot r_i}$$

der Anteil der reellen Nullstellen in der Zerlegung von $f(x)$ in Linearfaktoren. Hat $f(x)$ keine reelle Nullstelle, so sei $R(x)$ identisch gleich Eins gesetzt. Hat $f(x)$ keine nicht reelle Nullstelle, so ist die Behauptung gewiß richtig. Mit jeder komplexen Zahl y_i ist auch die konjugierte Zahl $\overline{y}_i$ eine Nullstelle von $f(x)$.
Seien

$$y_1, y_2, \ldots, y_s, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_s}$$

die nicht reellen Nullstellen von $f(x)$, jede entsprechend ihrer Vielfachheit hingeschrieben. Wir setzen

$$G_1(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - y_i), \quad G_2(x) \prod_{i=1}^{s} (x - \overline{y}_i).$$

Offenbar ist $G_2(x) = \overline{G_1(x)}$. Indem wir jedes y_i in Real-, bzw. Imaginärteil zerlegen, erhalten wir

$$G_1(x) = H_1(x) + i \cdot H_2(x),$$

wo $H_1(x)$ und $H_2(x)$ Polynome mit lauter reellen Koeffizienten sind. Daher ist

$$G_2(x) = H_1(x) - i \cdot H_2(x)$$

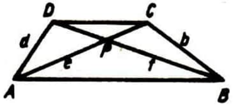
und

$$f(x) = R(x) \cdot \left[H_1(x)^2 + H_2(x)^2 \right].$$

Man setze

$$g(x)^2 = R(x) \cdot H_1(x)^2, \quad h(x)^2 = R(x) \cdot H_2(x)^2.$$

Aufgabe 8



Sei P der Schnittpunkt der Diagonalen.
Es ist

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} .$$

Dieses Verhältnis bezeichnen wir mit λ. Nach dem Kosinussatz, angewendet auf das Dreieck Δ APD gilt

$$d^2 = (\lambda . f)^2 + ((1-\lambda)e)^2 - 2 . \lambda f . (1-\lambda)\, e \cos\alpha ,$$

wobei α den Winkel $\sphericalangle$ APD $= \sphericalangle$ CPB bezeichnet. Analog ergibt sich

$$b^2 = (\lambda . e)^2 + ((1-\lambda)f)^2 - 2 . \lambda e . (1-\lambda) f \quad \cos\alpha .$$

Daher ist

$$b^2 - d^2 = (2\lambda - 1)(e^2 - f^2).$$

Folglich ist

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - d^2}{e^2 - f^2} - 1\right)$$

und mithin ist λ aus den gegebenen Größen b. d, e, f konstruktiv bestimmbar. Damit gewinnt man ausgehend von AC den Punkt P und die Streckenlänge $\overline{PD}$, also - da d bekannt ist - den Punkt D u.s.w.

Aufgabe 9

Wir zeigen zunächst, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

ist. Dazu beachte man, daß für $n > n_o \geq 2 . |x|$ gilt:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^{n_o}}{n_o!} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_o} .$$

Nun sei s_n die n-te Partialsumme der zu bildenden Reihe. Sei a_o beliebig ungleich Null gewählt.

In $s_1 = s_o + \frac{a_1 . x}{1!}$ sei a_1 so gewählt, daß $|s_1 - 0| < \frac{|x|}{1!}$ ist,

in $s_2 = s_1 + \frac{a_2 . x^2}{2!}$ sei a_2 so gewählt, daß $|s_2 - 0| < \frac{|x^2|}{2!}$ ist,

...

in $s_n = s_{n-1} + \frac{a_n . x^n}{n!}$ sei a_n so gewählt, daß $|s_n - 0| < \frac{|x^n|}{n!}$ ist,

u.s.w. Wir erhalten so

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n . x^n}{n!}\right| = \lim_{n \to \infty} |s_n| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0.$$

Aufgabe 10

Zunächst konvergiert die Reihe sogar absolut, denn es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = k \cdot e.$$

Wir führen nun eine Restgliedabschätzung durch.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} + R_{m+1} \text{ mit } R_{m+1} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

$$\left|R_{m+1}\right| \leq \frac{k}{(m+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \dots\right]$$

$$< \frac{k}{(m+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots\right]$$

$$= \frac{k}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+2}} = \frac{k \cdot (m+2)}{(m+1)!(m+1)}$$

Wegen $m \cdot (m+2) < (m+1)^2$ ergibt sich

$$\left|R_{m+1}\right| < \frac{k}{m! . m} < \frac{1}{m!} \leq \left|\frac{a_m}{m!}\right| \quad \text{für } m > k.$$

Hieraus folgt

$$\left|R_{m+1}\right| = \left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)!} + R_{m+2}\right| \geq \left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)!}\right| - \left|R_{m+2}\right| > 0$$

für $m > k$. Folglich ist

$$0 < \left|R_{m+1}\right| < \frac{1}{m!} \qquad \text{für } m > k.$$

Angenommen, für ganze Zahlen p und q mit $q \neq 0$ sei $\frac{p}{q}$ der Wert der Reihe. Für $m > k$ und $m > q$ gilt dann

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{m!} \cdot w \qquad \text{mit } 0 < |w| < 1.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit m! läßt erkennen, daß dann w eine ganze Zahl ist. Das ist ein Widerspruch. Folglich stellt die Reihe eine irrationale Zahl das.

Aufgabe 11

Sei $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ ein kleinster unter den drei Winkeln. Wir halten γ fest und fragen, für welche α, β die Summe

$$s = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$$

möglichst groß wird. Unter Benutzung von Additionstheoremen ergibt sich:

$$s = 4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - 2 \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= 4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{1 + \cos(\alpha-\beta)}{2} + \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$= 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos(\alpha+\beta) + \left[2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right] \cdot \cos(\alpha-\beta)$$

$$= 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta).$$

Wegen $\gamma \leq \frac{\pi}{3}$ ist $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ und $\alpha + \beta$ fest, so daß s für $\alpha = \beta$ den maximalen Wert annimmt. Wenn wir also die obere Grenze (oder - falls es existiert - das Maximum) von der Summe

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

bestimmen wollen, so können wir mit $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = \beta$ setzen.

Nun untersuchen wir für das Intervall $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ die Funktion

$$F(x) = \sin^2 x + \sin^2 x + \sin^2(\pi - 2x) = 2 \cdot \sin^2 x + \sin^2 2x.$$

Es ist

$$F'(x) = 4 \sin x \cos x + 4 \sin 2x \cdot \cos 2x$$
$$= 2 \sin 2x + 4 \sin 2x \cdot \cos 2x$$
$$= 2 \sin 2x \cdot (1 + 2 \cos 2x).$$

Aus $F'(x) = 0$ erhalten wir für $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ die Bedingung $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, d.h. $x = \frac{\pi}{3}$. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe 12

Sei F der Mittelpunkt der Seite BC, T der von A verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch A und R mit dem Umkreis und O der Mittelpunkt von K. Offenbar liegen A, R, O, F und T auf einer Geraden. Wegen $\sphericalangle APO = \sphericalangle ABT = 90^\circ$ sind die Dreiecke $\triangle APO$ und

$\triangle$ ABT ähnlich. Auch die Dreiecke $\triangle$ APO und $\triangle$ ARP sind ähnlich. Daher gilt:

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AO} : \overline{OT} = \overline{AO} : \overline{OP} = \overline{AP} : \overline{PR}.$$

Folglich ist PB gleichlang wie PR. Damit gilt:

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle PBR = \sphericalangle BRP = \sphericalangle RBC.$$

Also ist R der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle$ PBC mit der durch A und T verlaufenden Geraden und daher ist R Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle$ ABC.

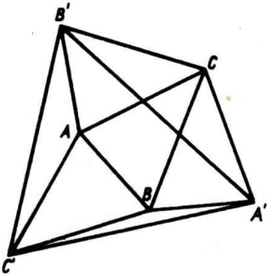
Aufgabe 13

Es sei $z = a \cdot \overline{111 \ldots 11}$, wobei genau n Einsen verwendet seien und $n \geq 3$ sei. Es ist $\overline{111 \ldots 11} \equiv 7$ (8) und da Quadratzahlen mod 8 nur die Reste 0, 1, 4 annehmen, kommt nur a = 4, a = 7 oder a = 8 in Betracht. Der Fall a = 4 ist nicht möglich, da dann $\overline{111 \ldots 11}$ wiederum Quadratzahl sein müßte. Der Fall a = 8 ist unmöglich, da dann z genau dreimal den Faktor 2 enthält. Für a = 7 ist

$$z = \frac{7 \cdot (10^n - 1)}{9}$$

und damit $z \equiv 2$ (25). Quadratzahlen mod 25 ergeben aber nur die Reste 0, 1, 4, 9, 16, 11, 24, 6, 21. Damit gibt es ein Fall $n \geq 3$ keine Quadratzahlen in der betrachteten Menge. Die restlichen Fälle überprüft man leicht und stellt fest, daß genau die Zahlen 1, 4, 9 der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 14



Wir setzen $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$. Aufgrund der Spiegelung ergibt sich:

$$F_{A'B'C'} = 4 \cdot F_{ABC} - \frac{bc}{2} \cdot \sin 3 \cdot \alpha - \frac{ac}{2} \sin 3 \cdot \beta - \frac{ab}{2} \cdot \sin 3 \gamma$$

Wegen

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x \,(3 - 4 \sin^2 x)$$

und den Beziehungen

$$\frac{bc}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin \beta = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma = F_{ABC}$$

erhalten wir:

$$F_{A'B'C'} = 4 \cdot F_{ABC} - F_{ABC} \left[9 - 4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) \right]$$

Unter Benutzung von

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4} \qquad (10)$$

erhalten wir

$$F_{A'B'C'} \leq 4 \cdot F_{ABC}.$$

Sonderaufgabe aus Heft 7

Die Funktion $f(x)$ heißt ableitungszyklisch vom Grad n, wenn

$$f(x) = f^{(n)}(x) \qquad (11)$$

und

$$f(x) \neq f^{(k)}(x) \quad \text{für } 0 < k < n \qquad (12)$$

ist. Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n eine ableitungszyklische Funktion vom Grade n existiert.

Lösung. Für $n = 1$ ist $f(x) = e^x$, für $n = 4$ sind $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ Funktionen der geforderten Art. Wir betrachten nun die Funktion:

$$f(x) = \cos\left(\left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x\right) \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x}$$

Wir beweisen

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x\right) \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} x}$$

für $k = 0, 1, \ldots$

Für $k = 0$ ist $f^{(k)}(x) = f(x)$.

Für $k \geq 1$ ist

$$f^{(k)}(x) = \left[f^{(k-1)}(x)\right]' = \left[\cos\left(\frac{2\pi \cdot (k-1)}{n} + \left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x\right) \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} x}\right]'$$

$$= -\sin\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} x\right) \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x}$$

$$+ \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x\right) \cdot \cos\frac{2\pi}{n} \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x}$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \left\{\sin\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x\right) \cdot e^{\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\right\} \cdot x}$$

Nun ist leich zu sehen, daß (11) und (12) erfüllt sind.